Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 10

Taylorreihen II & Integration I

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 24.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Taylorreihen: Konvergenzradius und Konvergenzbereich
2. Grundbegriffe Integration & Hauptsatz der Integralrechnung
3. Standard-Stammfunktionen
4. u-Substitution
5. Partielle Integration

1 Taylorreihen und Konvergenzradius

Rückblick: Potenzreihen

Eine **Potenzreihe um den Entwicklungspunkt** $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

wobei c_n die **Koeffizienten** heissen. Für jedes feste x ist das eine gewöhnliche unendliche Reihe.

Taylorreihe als spezielle Potenzreihe

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ (in einer Umgebung von x_0) beliebig oft differenzierbar, so heisst

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die **Taylorreihe von f um** x_0.

Sie ist also eine Potenzreihe mit Koeffizienten

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Alles, was wir über Potenzreihen (Konvergenzradius, Konvergenzintervall, ...) gelernt haben, gilt daher *direkt* auch für Taylorreihen.

Konvergenzradius und -intervall

Es gibt einen **Konvergenzradius** $R \in [0, \infty]$ mit:

$$|x - x_0| < R \;\Rightarrow\; \text{Reihe konvergiert absolut,} \qquad |x - x_0| > R \;\Rightarrow\; \text{Reihe divergiert.}$$

Das zugehörige **Konvergenzintervall** ist $[x_0 - R,\, x_0 + R]$, die **Randpunkte** $|x - x_0| = R$ müssen *separat* geprüft werden.

Wie findet man R?

Quotiententest Wenn der Grenzwert existiert,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

dann gilt

$$\boxed{R = \frac{1}{L}} \qquad (\text{mit } 1/0 = \infty,\ 1/\infty = 0)$$

Intuition: Für $|x - x_0| < 1/L$ verhalten sich die Terme wie in einer geometrischen Reihe.

Wurzeltest Mit

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{M}}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$$

Beispielaufgabe

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^x$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

1. Bestimme die **Taylorreihe** von f um $x_0 = 0$, das heisst schreiben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad x^0 = 1$$

   und gib eine explizite Formel für c_n an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

2. Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius** R dieser Reihe.

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1 : \quad T_0(x) = \frac{1}{0!} = 1 = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1 : \quad T_1(x) = T_0(x) + \frac{1}{1!}x = 1x = x$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1 : \quad T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}x^2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = 1 : \quad T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{3!}x^3 = \frac{1}{6}x^3$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

$$R = \frac{1}{L} = \text{''}\frac{1}{0}\text{''} = \infty$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \ln(1+x)$$

und der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

1. Bestimme die **Taylorreihe** von g um $x_0 = 0$, das heisst schreiben

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

und gib eine explizite Formel für c_n an. (Tipp: Rechne die ersten paar Taylorpolynome mal aus. Dann wirst du ein Muster erkennen).

2. Bestimme mit dem Quotiententest den **Konvergenzradius** R dieser Reihe.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln(1+x) &&\longrightarrow g(0) = \ln(1) = 0\\
g'(x) &= \frac{1}{1+x} &&\longrightarrow g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1\\
g''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} &&\longrightarrow g''(0) = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1\\
g'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} &&\longrightarrow g'''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2\\
g^{IV}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} &&\longrightarrow g^{IV}(0) = -\frac{6}{(0+1)^4} = -6
\end{aligned}$$

$$\cancel{\left\{ c_0 = \frac{0}{0!} \right\}}$$

$$c_1 = +\frac{1}{1!} \qquad 1 = 0!$$

$$c_2 = -\frac{1}{2!} \qquad 1 = 1!$$

$$c_3 = +\frac{2}{3!} \qquad 2 = 2!$$

$$c_4 = -\frac{6}{4!} \qquad 6 = 3!$$

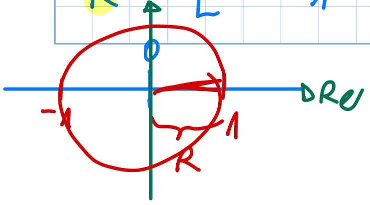
$$c_n = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left(\overbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}^{c_{n+1}} : \frac{(n-1)!}{n!} \right) = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{n+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}\cdot(1)}{\cancel{n}\cdot(1+\frac{1}{n})}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$L = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$



Konvergenzbereich der Taylorreihe } $x \in (-1, 1)$

2 Integration: Grundbegriffe & Hauptsatz der Integralrechnung

Unbestimmtes Integral (Stammfunktionen)

Eine Funktion F heisst **Stammfunktion** von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x$$

Das **unbestimmte Integral** von f schreiben wir als

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Lineare Regeln:

- $\displaystyle\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$
- Konstanten können „nach vorne“ gezogen werden: $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$

Bestimmtes Integral

Die (bestimmte) Integration beschreibt in vielen Situationen die *Fläche unter einem Graphen.* Für eine Funktion $f(x)$ und ein Intervall $[a, b]$ schreiben wir

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

für den (orientierten) Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$. Für eine stetige Funktion f auf $[a, b]$ definieren wir das **bestimmte Integral**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als die orientierte Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und b. Negatives Vorzeichen bedeutet dabei: „Fläche unterhalb der x-Achse“.

Fundamentalsatz der Analysis

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b] \in \mathbb{D}$.

(Teil I) Wir definieren

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

Das heisst: $\displaystyle\int f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f.

(Teil II) Ist F eine beliebige Stammfunktion von f auf $[a, b]$, d. h. $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Zusammengefasst: Ableiten und Integrieren sind (unter den passenden Voraussetzungen) inverse Operationen.

3 Standard-Stammfunktionen

In vielen Integrationsaufgaben braucht man nur einige wenige *Standardstammfunktionen*. Diese sollte man (ungefähr) auswendig kennen (oder in der Formelsammlung finden können).

$$x^2 \xrightarrow{()'} 2x^1$$

$$2x^1 \longrightarrow \frac{2}{1+1}x^{1+1} = \frac{2}{2}x^2 = x^2$$

Polynome und Potenzen

Für $n \neq -1$ gilt

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(Das ist die Umkehrung der Potenzregel bei Ableitungen)
Beispiele:

$$\int 3x^2 \, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3 + C, \qquad \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Konstanten:

$$\int a \, dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$$

Bemerkung: „inverse Kettenregel“ bei linearem Argument

Bei vielen Standardfunktionen (Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen) kann man Integrale mit *linearem* Argument sehr einfach lösen.
Ist das Argument von der Form $ax + b$ (also nur x^1 und Konstanten), dann gilt:

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Man „teilt“ also einfach durch die Ableitung des Arguments ($(ax + b)' = a$). Das ist genau die **inverse Kettenregel**.

Wenn das Argument *nicht* linear ist (z. B. x^2, $\sqrt{x}$ oder allgemein eine kompliziertere Funktion), reicht dieses einfache „Durch-a-Teilen“ nicht mehr aus. Dann braucht man im Allgemeinen die **u-Substitution** (also die Kettenregel „rückwärts“) oder andere Methoden.

$$e^{7x+2} \xrightarrow{\int dx} \frac{1}{7}e^{7x+2}$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin(3x+5) \xrightarrow{\int dx} \frac{1}{3}(-\cos(3x+5) + C$$

$$-\frac{1}{3}\cos(3x+5) + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\ln|x| \longrightarrow \frac{1}{x}$$

Logarithmus

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

Allgemeiner, für $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Diese Formeln in Kombination mit den linearen Rechenregeln $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ reichen bereits für viele Standardaufgaben zur Integration aus.

$$\frac{1}{5x+2} \xrightarrow{\int dx} \frac{1}{5}\ln|5x+2|$$

4 u-Substitution

Die **u-Substitution** ist die Kettenregel „rückwärts". Sie ist nützlich für Integrale der Form

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Idee: Wir führen eine neue Variable

$$u = g(x)$$

ein. Dann ist

$$du = g'(x)\, dx$$

und das Integral wird zu einem einfacheren Integral in der Variable u.

Allgemeines Rezept:

1. Wähle eine Substitution $u = g(x)$ (typischerweise der innere Ausdruck).
2. Berechne $du = g'(x)\, dx$ und löse nach dx bzw. nach $g'(x)\, dx$ auf.
3. Setze alles in das Integral ein und schreibe es nur noch in u.
4. Integriere in u: $\int f(u)\, du = F(u) + C$.
5. Substituiere zurück: $u = g(x)$.

Beispielaufgabe

$$\int x\, e^{x^2}\, dx$$

$F(x) = \int x \cdot e^{x^2} dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \quad / : 2x \quad / \cdot dx$

$dx = \frac{1}{2x} du$

$F(u) = \int x \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x} du$

$F(u) = \int \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} e^u du$

$F(u) = \frac{1}{2} \int e^u du$

$F(u) = \frac{1}{2} \cdot e^u + C$

$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C}}$

Merke: Wenn das Argument *linear* ist (z. B. $ax + b$), reicht es, durch a zu teilen („inverse Kettenregel"). Wenn das Argument komplizierter ist (z. B. x^2, x^3, $\sqrt{x}$), braucht man im Allgemeinen die u-Substitution.

$\int_0^2 e^{x^2} dx = F(2) - F(0)$

$= \frac{1}{2} e^{2^2} - \frac{1}{2} e^{0^2} = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^4 - 1)}}$

Bestimmte Integrale mit u-Substitution

Bei **bestimmten** Integralen funktioniert die u-Substitution genau gleich wie bei unbestimmten. Nur ein zusätzlicher Schritt muss noch gemacht werden: die **Integrationsgrenzen müssen angepasst** werden.

Vorgehen:

1. Wähle eine Substitution $u = g(x)$.
2. Berechne $du = g'(x)\,dx$ und ersetze $g'(x)\,dx$ durch du.
3. Rechne die neuen Grenzen aus:

$$x = a \Rightarrow u = g(a), \qquad x = b \Rightarrow u = g(b)$$

4. Schreibe das Integral komplett in u mit den neuen Grenzen und integriere:

$$\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{\text{u-Substitution}} \int_{u(a)}^{u(b)} \tilde{f}(u)\,du = \Big[\tilde{F}(u)\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \tilde{F}\big(u(b)\big) - \tilde{F}\big(u(a)\big)$$

Beispielaufgabe

$$I = \int_0^2 x\,e^{x^2}\,dx$$

$$I = \int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$$

$$u = x^2$$

$$dx = \frac{1}{2x}\,du$$

$$I = \int_{u(0)}^{u(2)} x \cdot e^u \,\frac{1}{2x}\,du$$

$$u(2) = 2^2 = 4$$

$$I = \frac{1}{2}\int e^u\,du$$

$$u(0) = 0^2 = 0$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du$$

$$I = \frac{1}{2}\big[e^u\big]_0^4 \longrightarrow I = \frac{1}{2}\big[e^{x^2}\big]_0^2$$

$$I = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^0\right)$$

$$I = \frac{e^4 - 1}{2}$$

Bemerkung: Man *kann* alternativ auch ohne Grenz-Anpassung rechnen, d. h. erst wie beim unbestimmten Integral substituieren, wieder zu x zurücksubstituieren und am Schluss $F(1) - F(0)$ ausrechnen. Oft geht es aber schneller, die Grenzen direkt mit zu transformieren.

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $F(x) = \int (6x-5)(6x^2-10x)^4 \, dx$

$u = 6x^2 - 10x$

$\frac{du}{dx} = 12x - 10 \quad / \cdot dx \quad / \cdot \frac{1}{12x-10}$

$dx = \frac{1}{12x-10} du$

$F(u) = \int (6x-5) u^4 \cdot \frac{1}{12x-10} du$

$F(u) = \int \frac{\cancel{6x-5}}{2\cancel{(6x-5)}} u^4 du$

$F(u) = \frac{1}{2} \int u^4 du$

$F(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} u^5$

$F(u) = \frac{1}{10} u^5 + C$

$F(x) = \frac{(6x^2-10x)^5}{10} + C$

2. $\int x^3 \sin(x^2) \, dx$ (Hinweis: Verwende eine u-Substitution und schreibe das Integral vollständig in der neuen Variablen u in der Form $\int \tilde{f}(u)\, du$. Das entstehende Integral muss nicht ausgewertet werden.)

$F(x) = \int x^3 \cdot \sin(x^2) dx$

$u = x^2 \quad /()'$

$\frac{du}{dx} = 2x \quad / \cdot dx / \cdot \frac{1}{2x}$

$dx = \frac{1}{2x} du$

$F(u) = \int x^3 \cdot \sin(u) \cdot \frac{1}{2x} du$

$F(u) = \int \frac{x^3}{2x} \cdot \sin(u) du$

$F(u) = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \sin(u) du$

$F(u) = \frac{1}{2} \int u \cdot \sin(u) du$

3. $A = \int_0^2 x^2 e^{x^3} \, dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$dx = \frac{1}{3x^2} du$

$A = \int_{u(0)}^{u(2)} x^2 \cdot e^u \cdot \frac{1}{3x^2} du$

$A = \frac{1}{3} \int_{u(0)=0^3=0}^{u(2)=2^3=8} e^u du$

$A = \frac{1}{3} \int_0^8 e^u du$

$A = \frac{1}{3} [e^u]_0^8$

$A = \frac{1}{3} (e^8 - e^0)$

$A = \frac{e^8 - 1}{3}$

5 Partielle Integration

Die **partielle Integration** ist die Produktregel „rückwärts“. Für zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gilt:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

$\downarrow ()'$ $\downarrow \int dx$

u' v

In Kurzschreibweise:

$$\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx$$

Wann benutzt man partielle Integration?

Typische Situationen:

- Produkt aus einem *Polynom* und einer „netten“ Funktion: $x^n e^x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$. Da sollte man das Polynom immer ableiten und die andere Funktion integrieren.
- Produkte mit $\ln(x)$ oder $\arctan(x)$ lassen sich nicht gut direkt integrieren, aber sehr gut ableiten. Diese haben sogar eine „höhere Priorität“, abgeleitet zu werden, als Polynome!

$$\overbrace{\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{x^2+1} \quad | \quad x^n}^{\text{Ableiten}}$$

Integrieren

e^x

$\cos(x)$

$\sin(x)$

Rezept (klassisch):

1. Wähle u so, dass u' *einfacher* ist als u (z. B. Polynom wird kleiner).
2. Wähle v' so, dass du v leicht integrieren kannst.
3. Setze in die Formel $\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx$ ein.

$\int \frac{1}{2} x^2 e^x dx$

Beispielaufgabe

Berechne $F(x) = \int x e^x\,dx$ $\longrightarrow$ $F(x) = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$

$u = x \quad | \quad v' = e^x$

$u' = 1 \quad | \quad v = e^x$

$F(x) = x \cdot e^x - e^x + C$

$$\underline{\underline{F(x) = e^x (x-1) + C}}$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

1. $F(x) = \int (x^2 + 1) \cdot \cos(x)\, dx$ $\longrightarrow$ $F(x) = (x^2+1)\sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\, dx$

$u = x^2+1 \quad | \quad v' = \cos(x)$
$u' = 2x \quad | \quad v = \sin(x)$

$u = 2x \quad | \quad v' = \sin(x)$
$u' = 2 \quad | \quad v = -\cos(x)$

$F(x) = (x^2+1)\sin(x) - \left(2x \cdot (-\cos(x)) - \int 2 \cdot (-\cos(x))\, dx\right)$

$F(x) = (x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)\, dx$

$F(x) = (x^2+1)\sin(x) - 2\sin(x) + 2x\cos(x) + C$

$F(x) = (x^2-1) \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + C$

2. $F(x) = \int \ln(x)\, dx$ (Hinweis: Schreibe $\ln(x)$ als $\ln(x) \cdot 1$).

Was wäre noch $I = \int_1^2 \ln(x)\, dx$?

$F(x) = \int \ln(x) \cdot 1\, dx$

$u = \ln(x) \quad | \quad v' = 1$
$u' = \frac{1}{x} \quad | \quad v = x$

$F(x) = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx$
$F(x) = x \cdot \ln(x) - \int 1\, dx$
$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C$
$F(x) = x \cdot (\ln(x) - 1) + C$

$I = \int_1^2 \ln(x)\, dx = F(2) - F(1) = 2 \cdot (\ln(2) - 1) - (1 \cdot (\ln(1) - 1))$
$= 2\ln(2) - 2 - (0 - 1)$
$= 2\ln(2) - 2 + 1$
$I = 2\ln(2) - 1 \approx 0.39$

Fundamentalsatz der Analysis $\Big\}$ $I = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$