Mathematatik I: Analysis A

Übungsstunde 13

Gewöhnliche DGL's höherer Ordnung

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 15.12.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. ODE's 1. Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution
2. Homogene ODE's höherer Ordnung: Eulerscher Ansatz
3. Inhomogene ODE's höherer Ordnung (mit Störfunktion): Partikuläransatz

ODE's 1. Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution

Treten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung Ausdrücke wie $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ oder Potenzen davon (z. B. $\frac{y^2}{x^2}$) auf, so kann die Gleichung oft durch eine geeignete z-Substitution vereinfacht werden.
Typischerweise setzt man

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{y},$$

wodurch sich die Differentialgleichung in eine separierbare Gleichung für $z(x)$ umformen lässt. Anschliessend löst man diese Differentialgleichung nach z und erhält am Ende durch Rücksubstitution die gesuchte Funktion $y(x)$.

Beispielaufgabe: 16a (Analysis A & B Altprüfung 2021S)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\underbrace{y'(x)}_{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}, \qquad x > 0 \text{ und in einem geeigneten Intervall.}$$

$$z(x) = \frac{y}{x} \quad / \cdot x$$

$$x \cdot z(x) = y \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(x \cdot z(x))} = \frac{dy}{dx}$$

Produktregel: $\begin{cases} u = x & v = z \\ u' = 1 & v' = z' \end{cases}$

$$1 \cdot z + z' \cdot x = \frac{dy}{dx}$$

$$z + z'x = \frac{1}{\sin(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

$$z + z'x = \frac{1}{\sin(z)} + z \quad / -z$$

$$z'x = \frac{1}{\sin(z)}$$

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{1}{\sin(z)} \quad / \cdot \sin(z) / \cdot dx / \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin(z)\, dz = \frac{1}{x} dx \quad / \int$$

$$\int \sin(z)\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$-\cos(z) = C + \ln|x| \quad / \cdot (-1)$$

$$\cos(z) = C - \ln|x| \quad / \arccos$$

$$\arccos(\cos(z)) = \arccos(C - \ln|x|)$$

$$\underline{\underline{z(x) = \arccos(C - \ln|x|)}}$$

Rücksubstituieren: $z = \frac{y}{x}$

$$\frac{y(x)}{x} = \arccos(C - \ln|x|) \quad / \cdot x$$

$$\underline{\underline{y(x) = x \cdot \arccos(C - \ln|x|)}}$$

Homogene ODE's höherer Ordnung: Eulerscher Ansatz

Wir betrachten lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$a_n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0, \qquad a_n \neq 0$$

Schritt 1: Eulerscher Ansatz Wir setzen

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Dann gilt $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$, und nach Einsetzen erhält man

$$e^{\lambda x}\big(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big) = 0$$

Da $e^{\lambda x} \neq 0$, folgt die *charakteristische Gleichung*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Schritt 2: Nullstellen bestimmen Bestimme die (ggf. komplexen) Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des charakteristischen Polynoms inklusive ihrer Vielfachheiten.

Schritt 3: Allgemeine Lösung aufbauen

- **Reelle, einfache Nullstelle λ:** $y(x) = C\, e^{\lambda x}$
- **Reelle Nullstelle λ mit Vielfachheit r:**

$$y(x) = \big(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{r-1}x^{r-1}\big)e^{\lambda x}$$

- **Komplexes (konjugiertes) Paar $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $(\beta \neq 0)$:**

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\big)$$

- **Rein Imaginäre Nullstellen $\lambda = \pm i\beta$, $(\beta \neq 0)$:** *Hinweis: Rein imaginäre Nullstellen sind ein Spezialfall der komplexen Eigenwerte wo der Realteil $\alpha = 0$ ist.*

$$y(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$$

Hinweis Bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält die allgemeine Lösung typischerweise n unbekannte Konstanten. Um daraus eine eindeutige spezielle Lösung zu erhalten, benötigt man daher n unabhängige Nebenbedingungen (z. B. Anfangswerte), mit denen diese Konstanten bestimmt werden.

Beispielaufgaben (Eulerscher Ansatz)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Euler-Ansatz

$y(x) = e^{\lambda x}$

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} - 3\lambda \cancel{e^{\lambda x}} + 2\cancel{e^{\lambda x}} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\underbrace{(\lambda - 1)}_{\lambda_1 = 1}\underbrace{(\lambda - 2)}_{\lambda_2 = 2} = 0$

$y(x) = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{2\cdot x}$

$2 = y(0)$

$2 = C_1 \cdot e^0 + C_2 e^0 \rightarrow C_1 + C_2 = 2$

$C_1 = 2 - C_2$

$y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$

$5 = y'(0)$

$5 = C_1 + 2C_2$

$5 = 2 - C_2 + 2C_2 \rightarrow 5 = 2 + C_2$

$C_2 = 3$

$C_1 = 2 - 3 = -1$

$y(x) = -e^x + 3e^{2x}$

Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(3)}(x) = 0$$

$y^{IV} + y^{III} = 0$

Eueler Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$y^{III}(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}$

$y^{IV}(x) = \lambda^4 e^{\lambda x}$

$\lambda^4 e^{\lambda x} + \lambda^3 e^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$

$\lambda^4 + \lambda^3 = 0$

$\underbrace{\lambda^3}_{\lambda_1 = 0}\underbrace{(\lambda + 1)}_{\lambda_2 = -1} = 0$

3-fache (reelle) Nullstelle

Für $\lambda_1 = 0$ (3-fach)

$y_{\lambda_1 = 0}(x) = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2) \cdot e^{0\cdot x}$

$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2$

Für $\lambda_2 = -1$

$y_{\lambda_2 = -1}(x) = C_3 \cdot e^{-x}$

Beide Teillösungen zusammenführen:

$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^{-x}$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Bestimme zuerst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$m\,x''(t) + k\,x(t) = 0 \qquad k, m > 0$$

Löse dann das Anfangswertproblem

$$x(0) = s_0, \qquad x'(0) = v_0$$

Hinweis: Diese Differentialgleichung beschreibt den harmonischen Oszillator, z. B. ein ungedämpftes Feder–Masse-System. Dabei sind k und m positive reelle Konstanten. In diesem Kontext bezeichnen wir t als Zeitvariable und $x(t)$ als die zugehörige Auslenkung.

$mx'' + kx = 0$

Euler Ansatz

$x(t) = e^{\lambda t}, \; x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$m\lambda^2 e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \quad /: e^{\lambda t}$

$m\lambda^2 + k = 0 \quad /-k$

$m\lambda^2 = -k \quad /:m$

$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad /\pm\sqrt{\;}$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

Rein imaginäre NST.

$\downarrow$

$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

Zum Schreibarbeit sparen definieren wir $\sqrt{\frac{k}{m}} = w$

$\downarrow$

$x(t) = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)$

$x'(t) = -wC_1 \sin(wt) + wC_2 \cos(wt)$

$s_0 = x(0)$

$s_0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \underbrace{\sin(0)}_{0}$

$s_0 = C_1$

$v_0 = x'(0)$

$v_0 = -w s_0 \underbrace{\sin(0)}_{0} + w C_2 \underbrace{\cos(0)}_{1}$

$v_0 = w C_2 \quad /:w$

$\frac{v_0}{w} = C_2$

$\downarrow$

$x(t) = s_0 \cos(wt) + \frac{v_0}{w} \sin(wt)$

Inhomogene ODEs höherer Ordnung (Störfunktion)

Wir betrachten lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$a_n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = s(x), \qquad a_n \neq 0,$$

wobei $s(x)$ die **Störfunktion** (Inhomogenität) ist.

Vorgehen

1) Homogene Gleichung lösen Zuerst löst man die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

(z. B. mit dem Eulerschen Ansatz) und erhält die homogene Lösung

$$y_{\text{hom}}(x)$$

2) Ansatz für eine partikuläre Lösung Anschliessend stellt man passend zur Störfunktion $s(x)$ einen Ansatz für eine partikuläre Lösung auf:

$$y_{\text{part}}(x) \text{ (Ansatz)}$$

3) Einsetzen und Koeffizienten von $y_{part}(x)$ bestimmen Man setzt $y_{\text{part}}(x)$ (und seine Ableitungen) in die inhomogene Differentialgleichung ein und bestimmt die unbekannten Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich.

4) Allgemeine Lösung Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) \;+\; y_{\text{part}}(x)$$

Ansatzwahl für die partikuläre Lösung (Mini-Tabelle)

Störfunktion $s(x)$	**Ansatz für** $y_{\mathbf{part}}(x)$
Polynom $s(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *Spezialfall: 0 ist m-fache Nullstelle des char. Polynoms*	 $y_{\text{part}}(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n$ $y_{\text{part}}(x) = x^m \big(C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n\big)$
Exponentialfunktion $s(x) = Ae^{kx}$ *Spezialfall: k ist m-fache Nullstelle des char. Polynoms*	 $y_{\text{part}}(x) = Ce^{kx}$ $y_{\text{part}}(x) = C\, x^m e^{kx}$
Schwingung $s(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ *Spezialfall: $\pm i\omega$ ist m-fache Nullstelle des char. Polynoms*	 $y_{\text{part}}(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ $y_{\text{part}}(x) = x^m \big(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\big)$

Beispielaufgabe (inhomogene ODE 2. Ordnung)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

homogene Lösung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

1) homogen

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Euler Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \quad /:e^{\lambda x}$$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\underbrace{(\lambda - 1)}_{\lambda_1 = 1}\underbrace{(\lambda - 2)}_{\lambda_2 = 2} = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

2) Partikulär

$$s(x) = e^{3x}$$

(Störfkt. ist Exponentialfkt.)

$$y_{part}(x) = Ae^{3x}$$
$$y'_{part}(x) = 3Ae^{3x}$$
$$y''_{part}(x) = 9Ae^{3x}$$

3) Koeffizienten von y_{part} bestimmen

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$
$$9Ae^{3x} - 3\cdot 3Ae^{3x} + 2\cdot Ae^{3x} = e^{3x} \quad \Big| :e^{3x}$$
$$9A - 3\cdot 3A + 2A = 1$$
$$9A - 9A + 2A = 1$$
$$2A = 1$$
$$\underline{A = \tfrac{1}{2}}$$

$$y_{part}(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$$

4) Allgemeine Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$
$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$
$$y'(x) = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}e^{3x}$$

$$0 = y(0)$$
$$0 = C_1 \cdot e^{0} + C_2 \cdot e^{0} + \frac{1}{2}e^{0} \rightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$C_1 = -C_2 - \frac{1}{2}$$

$$1 = y'(0)$$
$$1 = C_1 + 2C_2 + \frac{3}{2}$$
$$1 = -C_2 - \frac{1}{2} + 2C_2 + \frac{3}{2}$$
$$1 = C_2 + 1 \quad /-1$$
$$\underline{\underline{C_2 = 0}} \longrightarrow C_1 = -0 - \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\underline{C_1 = -\tfrac{1}{2}}}$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$
$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + 0\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$
$$\underline{\underline{y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{3x}}}$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3x + x^2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

1) Homogen

Euler Ansatz direkt

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\underbrace{(\lambda - 1)^2} = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \Big\} \text{ 2-fache reelle NST.}$$

$$y_{hom}(x) = (C_0 + C_1 x)e^{1\cdot x}$$

2) Partikulär

$$s(x) = 3x + x^2 \quad \Big\} \text{ Polynom 2. Grad}$$

$$y_{part}(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_{part}'(x) = 2ax + b$$

$$y_{part}''(x) = 2a$$

3) Koeff. von y_{part} finden

$$y'' - 2y' + y = 3x + x^2$$

$$2a - 2\cdot(2ax + b) + ax^2 + bx + c = 3x + x^2$$

$$ax^2 + bx - 4ax + 2a - 2b + c = 1x^2 + 3x + 0$$

x^2: $a = 1$

x^1: $b - 4a = 3$

$$b - 4\cdot 1 = 3 \quad / +4$$

$$b = 7$$

x^0: $2a - 2b + c = 0$

$$2\cdot 1 - 2\cdot 7 + c = 0$$

$$2 - 14 + c = 0$$

$$-12 + c = 0$$

$$c = 12$$

$$y_{part}(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_{part}(x) = x^2 + 7x + 12$$

4) Allgemeine Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

$$y(x) = (C_0 + C_1 x)e^x + x^2 + 7x + 12$$

$$0 = y(0)$$

$$0 = (C_0 + C_1 \cdot 0)e^0 + 0^2 + 7\cdot 0 + 12$$

$$0 = C_0 + 12 \longrightarrow C_0 = -12$$

$$y(x) = (-12 + C_1 x)e^x + x^2 + 7x + 12$$

$\frac{d}{dx}$ $\Big|$ $u = -12 + C_1 x$, $u' = C_1$ $\Big|$ $v = e^x$, $v' = e^x$

$$y'(x) = (C_1 - 12 + C_1 x)e^x + 2x + 7$$

$$1 = y'(0)$$

$$1 = (C_1 - 12 + C_1 \cdot 0)e^0 + 2\cdot 0 + 7$$

$$1 = C_1 - 12 + 7$$

$$1 = C_1 - 5$$

$$C_1 = 6$$

$$y(x) = (-12 + 6x)e^x + x^2 + 7x + 12$$