Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 5

Reihen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 20.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Geometrische Reihen
2. Konvergenzkriterien (Quotient, Wurzel, Vergleich)
3. Teleskopsummen
4. Potenzreihen & Konvergenzradius

1 Geometrische Reihe (Intuition & Übung)

Was ist eine geometrische Reihe?

Eine *geometrische Reihe* hat die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n \quad \text{mit Startwert } a \in \mathbb{R} \text{ und Faktor } q \in \mathbb{R}.$$

Man addiert also immer wieder den gleichen Anteil der vorherigen Grösse dazu (jeder neue Summand ist mit dem festen Faktor q gegenüber dem vorherigen skaliert).

Intuition Stell dir vor, du füllst einen Eimer: Beim ersten Schritt kommt die Menge a hinein. Beim zweiten Schritt nur noch der Anteil q davon, dann q^2 vom ersten usw. Wenn $|q| < 1$, werden die Nachlieferungen schnell sehr klein ($q^n \to 0$) – deshalb nähert sich die Gesamtmenge einem festen Wert an.

Merksatz (Wertformel)

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, & q \neq 1, \\ N + 1, & q = 1. \end{cases}$$

Für $\boldsymbol{|q| < 1}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Für $|q| \geq 1$ *konvergiert* die Summe nicht (sie hat also keinen endlichen Grenzwert).

Kurzableitung (ohne Formalismus) Betrachte die Partialsumme $S_N = \sum_{k=0}^{N} q^n$ Dann

$$(1 - q)S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = 1 - q^{N+1}$$

Also $S_N = \dfrac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$. Für $|q| < 1$ ist $q^{N+1} \to 0$, daher $S_N \to \dfrac{1}{1 - q}$

Checkliste zum Erkennen

- Sind die Summanden von der Form (Konstante) $\cdot\, q^n$ (ggf. nach Ausklammern/Indexverschiebung)?
- Gilt $|q| < 1$? $\Rightarrow$ Summe konvergiert und hat Wert $\frac{1}{1-q}$
- Gilt $|q| \geq 1$? $\Rightarrow$ keine Konvergenz

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Hinweis: Ziel ist es, *schnell* zu erkennen, ob eine geometrische Reihe vorliegt und, falls ja, den Wert zu bestimmen. Begründungen bitte kurz in Worten notieren.

1. **Warm-up: Identifikation und Wert**

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $q=\frac{2}{3},\ |q|<1 \rightarrow S_N = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3}}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot (-0.2)^n$ $q=-\frac{1}{5},\ |q|<1 \rightarrow S_N = 5\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{5})} = 5\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{5}} = 5\cdot\frac{1}{\frac{6}{5}} = 5\cdot\frac{5}{6} = \underline{\underline{\frac{25}{6}}}$

   (c) $\sum_{n=0}^{20} 7 \cdot 1^n$ $7\cdot(20+1) = 7\cdot 21 = \underline{\underline{147}}$

2. **In Form bringen**

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ $= 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow q=\frac{1}{2} \rightarrow S_N = 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 3\cdot 2 = \underline{\underline{6}}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\cdot 3^n}{6^{n+2}}$ $\Big\}\ 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{6^2\cdot 6^n} = \frac{4}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$

3. **Konvergenz ja/nein?**

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n$ $|q| = \frac{5}{4} \geq 1 \rightarrow$ Divergiert

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ $|q| = 1 \geq 1 \rightarrow$ Divergiert

4. **Konvergenz** Für welche reellen x konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$? Bestimme (falls konvergent) ihren Wert in Abhängigkeit von x.

$|q|<1 \rightarrow \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \xrightarrow{\cdot 4} |x| < 4\ \Big\}$ Konvergenz bei $-4<x<4$

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{1}{\frac{4}{4}-\frac{x}{4}} = \frac{1}{\frac{4-x}{4}} = \frac{4}{4-x}$

Typische Fehlerquellen

- q falsch identifiziert (z. B. Konstante nicht ausgeklammert oder Index nicht passend verschoben).
- Randfall $|q|=1$ übersehen: Die Wertformel $\frac{a}{1-q}$ gilt nur für $|q|<1$.
- Verwechslung von „geometrisch“ (fester Faktor) und „arithmetisch“ (feste Differenz).

2 Konvergenzkriterien (Quotient, Wurzel, Vergleich)

Vorweg: notwendige Bedingung & Divergenztest

Notwendig, aber nicht hinreichend. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge der Summanden einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\textbf{Notwendig:}\quad a_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, dann kann sich die Partialsumme $\sum_{k=1}^{N} a_k$ nicht stabilisieren $\Rightarrow$ die Reihe *divergiert sicher.*

$f(x) = \frac{1}{x^1}$ Konvergied | $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$F(x) = \ln|x|$ divergiert | $F(x) = -\frac{1}{x} + C$

Divergenztest (n-ter Glied-Test).

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Achtung: Umgekehrt gilt das nicht! Aus $a_n \to 0$ folgt *nicht* automatisch Konvergenz.

Was bedeutet „genügend schnell“? Die Summanden müssen so rasch gegen 0 gehen, dass die Summe der „Restmengen“ endlich bleibt. Ein hilfreicher Vergleich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergiert}, & p > 1, \\ \text{divergiert}, & p \leq 1, \end{cases} \qquad \text{(sog. } p\text{-Reihen).}$$

- $\sum \frac{1}{n}$ $(p = 1)$: *harmonische Reihe* — **divergiert**, obwohl $1/n \to 0$.
- $\sum \frac{1}{n^2}$ $(p = 2)$: **konvergiert** — hier ist das „Gegen-0-Gehen“ schnell genug.

Take-away.

- Prüfe zuerst: $\lim a_n = 0$? Falls $\neq 0 \Rightarrow$ sofort Divergenz.
- Wenn $a_n \to 0$, entscheide mit *Kriterien*, ob es „schnell genug“ ist.

Warum Kriterien?

Nicht jede Reihe ist geometrisch. Kriterien helfen, schnell über *Konvergenz* zu entscheiden, ohne die Summe explizit zu kennen. Im 1. Semester arbeiten wir überwiegend mit *nichtnegativen* Summanden; bei Vorzeichenwechseln wenden wir die Kriterien auf $|a_n|$ an (Frage: *absolute* Konvergenz).

Merke: Wenn ein Kriterium den Grenzwert $= 1$ liefert, sagt es *nichts* (inconclusive).

Quotientenkriterium ("Fakultäten/Exponentialterme")

Intuition. Vergleicht das *relative Wachstum* aufeinanderfolgender Summanden:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert.
- $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert.
- $L = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.

$$(n+1)! = (n+1)\cdot(n)\cdot(n-1)\ldots$$
$$(n+1)! = (n+1)\,n!$$

Gut bei: $n!$, c^n, Produkten daraus.

Beispielaufgabe $a_n = \dfrac{2^n\,n!}{n^n}$. Bestimme L und entscheide.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n n!}{n^n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)\,\cancel{n!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n\,\cancel{n!}} = \frac{2\cdot\cancel{2^n}\cdot(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{2^n}}$$

$$= \frac{2(n+1)\;n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2\,\cancel{(n+1)}\;n^n}{\cancel{(n+1)^1}\cdot(n+1)^n} = 2\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = 2\cdot e^{-1} = \underbrace{\frac{2}{e} < 1}_{\text{Konvergiert}}$$

Wurzelkriterium ("globaler Blick")

Intuition. Misst die *durchschnittliche* Wachstumsrate eines Summanden:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- $R < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert absolut.
- $R > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert.
- $R = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.

Gut bei: Ausdrücken vom Typ $(\cdot)^n$, Potenzreihen.

Beispielaufgabe $a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$. Untersuche mit dem Wurzelkriterium.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1n}{2n+1}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} < 1}_{\text{Konvergiert}}$$

Vergleichskriterium ("gegen bekannte Reihen schätzen")

Intuition Schätze a_n durch eine *bekannte* Folge b_n, z. B. eine p-Reihe $\sum \frac{1}{n^p}$ oder eine geometrische Reihe.

- **Direkter Vergleich:** $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle grossen n.
  - $\sum b_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum a_n$ konvergiert.
  - $\sum a_n$ divergiert $\Rightarrow \sum b_n$ divergiert.
- **Grenzwertvergleich:** Falls $a_n, b_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \underbrace{(0, \infty)}_{\text{0 und } \infty \text{ sind nicht enthalten!}}$, dann konvergieren/divergieren beide gleichzeitig.

Beispielaufgabe Vergleiche $a_n = \dfrac{3n+1}{n^2+5}$ mit einer geeigneten p-Reihe.

$$a_n = \frac{3n+1}{n^2+5} \;/\; \underbrace{b_n = \frac{1}{n}}_{\text{divergiert}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n^2+5}\cdot n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{1n^2+5}\right) = 3$$

$3 \in (0, \infty)$

Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert auch!

Welche Strategie wann?

- **Fakultäten** / c^n**:** zuerst *Quotient*.
- **Potenzartige Terme** $(\cdot)^n$ / **Potenzreihen:** *Wurzel*.
- **Rationale Funktionen in** n**:** *Vergleich* mit p-Reihen.
- **Grenzfälle** / **unklar:** *Grenzwertvergleich* versuchen.

Typische Stolpersteine

- Ergebnis $= 1$ beim Quotient-/Wurzelkriterium $\Rightarrow$ *keine* Aussage.
- Vergleich nur für *grosse* n nötig: Startterme ändern die Konvergenz nicht.
- Bei Vorzeichenwechseln Kriterien auf $|a_n|$ anwenden (absolute Konvergenz).

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Hinweis: Entscheide jeweils *mit Begründung, welches Kriterium* du wählst.

Quotientenkriterium

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n n^2}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overbrace{(n+2)!}^{(n+2)\cdot\cancel{(n+1)!}}}{3^{n+1}(n+1)^2} \cdot \frac{3^n n^2}{\cancel{(n+1)!}} = \frac{n+2}{3\cdot \cancel{3^n}(n+1)^2} \cdot \frac{\cancel{3^n} n^2}{1} = \frac{(n+2)n^2}{3(n+1)^2}$

$= \frac{n^3+2n}{3(n^2+2n+1)}$: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2n}{3n^2+6n+3}\right) = \infty > 1$ } Reihe divergiert

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \frac{5\cdot\cancel{5^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}} = \frac{5}{n+1}$ $\left\{ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n+1}\right) = 0 \right.$ → Reihe konvergiert

Wurzelkriterium

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n} = \frac{2n}{2n+1}$ $\underbrace{\left\{ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = 1 \right.}$

Wurzel-Kriterium sagt nichts über Konvergenz der Reihe aus

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \frac{3}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right) = 0$ → Reihe konvergiert

Vergleich / Grenzwertvergleich

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n+7}{n^2+n}$ $b_n = \frac{1}{n}$ (harmonischen)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+7}{n^2+n}\cdot n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+7n}{1n^2+n}\right) = 4$ Reihe divergiert

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{divergiert}}$] Harmonische Reihe

Mix & Match

Quotientenkriterium

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{\cancel{2^n}}{2\cdot\cancel{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot(1+0) = \frac{1}{2} < 1$ } Reihe konvergiert

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n/2}}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{n^{n/2}}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1)^{n/2}\cdot(n+1)^{1/2}} \cdot \frac{n^{n/2}}{\cancel{n!}} = (n+1)^{1/2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}$

$(n+1)^{1/2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n/2} \to \lim_{n\to\infty} \underbrace{(n+1)^{1/2}}_{\text{geht gegen } \infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n/2}}_{\text{geht gegen } e^{-1/2}} = \underbrace{\infty}_{\text{Reihe divergiert!}}$

3 Teleskopsummen

Was ist die Idee?

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst *teleskopierend*, wenn sich die Partialsummen stark vereinfachen, weil sich viele Terme gegenseitig aufheben. Typischer Fall: a_n lässt sich als $\boxed{b_n - b_{n+1}}$ schreiben.

Kurzableitung. Für die Partialsumme $S_N = \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n+1})$ gilt

$+(b_3 - b_4)$

$$S_N = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cdots + (\cancel{b_N} - b_{N+1}) = \boxed{b_1 - b_{N+1}}.$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ existiert, dann konvergiert die Reihe mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - L.$

Warum praktisch? Man muss dann *nicht* kompliziert summieren, sondern nur b_1 und den Grenzwert von b_{N+1} bestimmen.

Teleskopieren erkennen (Checkliste)

- $a_n = b_n - b_{n+1}$ direkt erkennbar? (z. B. durch Umformen)
- Brüche partiell zerlegen: $\dfrac{1}{n(n+k)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+k}$.
- Logarithmen/Produkte: $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$, $\prod \frac{n+1}{n}$ klappt oft auch.
- Grenzverhalten von b_n prüfen (existiert L?).

Beispielaufgabe

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \quad \to \text{fast alles hebt sich weg.}$$

$$S_N = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{4}} - \cancel{\tfrac{1}{6}}\right) \; \ldots \; \left(\cancel{\tfrac{1}{N-2}} - \cancel{\tfrac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{N-1}} - \tfrac{1}{N+1}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{N}} - \tfrac{1}{N+2}\right)$$

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{S_N = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)}}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

Stolpersteine

- b_n falsch gewählt $\Rightarrow$ kein Aufheben sichtbar.
- Grenzterm b_{N+1} vergessen: erst $S_N = b_1 - b_{N+1}$, dann $N \to \infty$.
- Partielle Bruchzerlegung nicht sauber (Vorzeichen/Parameter verwechseln).

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Hinweis: Bringe die Summanden in die Form $b_n - b_{n+1}$ (oder benutze Log-Regeln). Ziel: Wegteleskopieren erkennen, Randterme sauber bestimmen.

1. $$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

   Tipp: Direkte Differenz $b_n = \frac{1}{n}$.

$$S_N = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) \ldots + \left(\cancel{\tfrac{1}{N-1}} - \cancel{\tfrac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1$$

2. $$\sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$

   Tipp: Es teleskopiert bereits so (optional: rationalisieren ist nicht nötig).

$$S_N = (\cancel{\sqrt{2}} - 1) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + \ldots + (\cancel{\sqrt{N}} - \cancel{\sqrt{N-1}}) + (\sqrt{N+1} - \cancel{\sqrt{N}}) = -1 + \sqrt{N+1}$$

3. $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} =$$

   Tipp: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) \ldots + \left(\cancel{\tfrac{1}{N-1}} + \cancel{\tfrac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

4. $$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

   Tipp: $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n$.

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$S_N = (\cancel{\ln(2)} - \ln(1)) + (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + \ldots (\cancel{\ln(N)} - \cancel{\ln(N-1)}) + (\ln(N+1) - \cancel{\ln(N)}) = \ln(N+1) - \underbrace{\ln(1)}_{0}$$

$$\Downarrow$$

$$S_N = \ln(N+1)$$

4 Potenzreihen und Konvergenzradius

Definition

Eine **Potenzreihe um den Entwicklungspunkt** $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

wobei c_n die **Koeffizienten** heissen. Für jedes feste x ist das eine gewöhnliche Reihe.

Konvergenzradius und -intervall

Es gibt einen **Konvergenzradius** $R \in [0, \infty]$ mit:

$$|x-a| < R \;\Rightarrow\; \text{konvergiert absolut}, \qquad |x-a| > R \;\Rightarrow\; \text{divergiert}.$$

Das zugehörige **Konvergenzintervall** ist $[a-R, a+R]$, die **Randpunkte** $|x-a| = R$ müssen *separat* geprüft werden.

Wie findet man R?

Quotiententest (für Potenzreihen). Wenn der Grenzwert existiert,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|,$$

dann gilt

$$\boxed{R = \frac{1}{L}} \qquad (\text{mit } 1/0 = \infty,\ 1/\infty = 0).$$

Intuition: Für $|x-a| < 1/L$ verhalten sich die Terme wie in einer geometrischen Reihe.

Wurzeltest (gleichwertig). Mit

$$M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{M}}.$$

Beispielaufgabe

Finde den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$ heraus.

1) In Potenzreihenform bringen & c_n ablesen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{3^{-n}}_{c_n} (x-\underbrace{2}_{a=2})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

2) Quotiententest

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{-(n+1)}}{3^{-n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n}{3^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{3^n}}{3\cdot \cancel{3^n}} \right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \longrightarrow R = \frac{1}{L} = 3$$

3) Konvergenzintervall (ohne Randpunkte)

$$|x-2| < 3 \longrightarrow x \in (-1,5)$$

4) Randpunkte separat

$x = -1 \rightarrow 3^{-n}(-1-2)^n = 3^{-n} \cdot (-3)^n$

$\frac{(-3)^n}{3} = (-1)^n$ } Reihe divergiert

$x = 5 \rightarrow \frac{(5-2)^n}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} = 1$ } Reihe divergiert

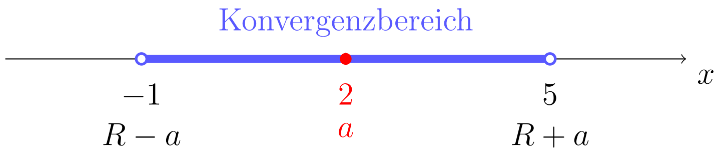
Randpunkte nicht Teil des Konvergenzradius

Konvergenzradius (Visualisierung an einem Beispiel)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}.$$

Hier sind die Koeffizienten $c_n = 3^{-n}$. Mit dem Quotiententest $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{3}$ erhalten wir den **Konvergenzradius** $R = 3$. Die Reihe *konvergiert* also für $|x-2| < 3$, d. h. $x \in (-1, 5)$. Die Randpunkte $x = -1$ und $x = 5$ müssen separat geprüft werden.



Lesen der Grafik: Der blaue Balken zeigt alle x mit $|x-a| < R$, wo die Reihe konvergiert. Die offenen Kreise markieren die Randpunkte $|x-a| = R$, die separat geprüft werden müssen.

Aufgaben: Bestimmen Sie den Konvergenzradius R

Hinweis: In allen Fällen existiert der obige Grenzwert direkt.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$ $R = 2$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n (x-1)^n$ $R = 4$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n (x+2)^n$ $R = \frac{5}{3}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x-3)^n$ $R = \frac{1}{5}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^n$ $R = 1$