
Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 4

Folgen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 13.10.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Folgen
2. Beschränktheit
3. Monotonieverhalten
4. Grenzwert & Konvergenz
5. Analytische Ermittlung von Grenzwerten
6. Sandwich-Theorem

1 Folgen

Definition & Notation

Eine Folge ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Wir schreiben $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz (a_n) .
Typische Folgen:

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}, \quad a_n = c^n, \quad a_n = \sqrt[n]{x}, \quad a_n = (-1)^n \cdot b_n$$

Typische Beispiele

- Rationale Folge: $a_n = \frac{3n^2 + 1}{n^3 + 2}$
- Potenz-/Wurzelfolge: $b_n = n^{1/n}$, $c_n = \sqrt[n]{5}$
- Alternierend: $d_n = (-1)^n$, $e_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Beispielaufgabe

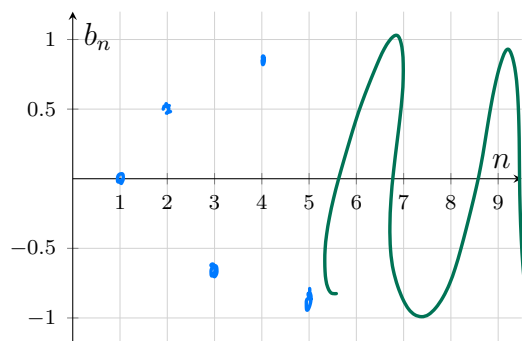
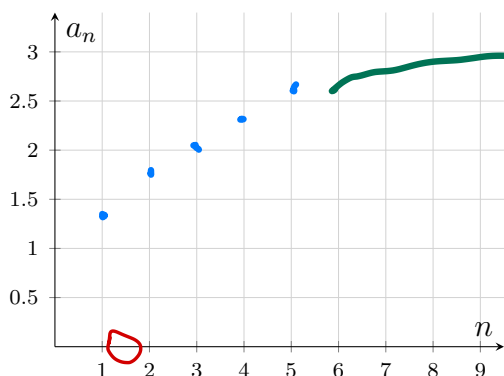
Gegeben ist $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ und $b_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

1. Bestimme die ersten sechs Terme von a_n und b_n .

$$a_1 = \frac{4}{3} \approx 1.33, \quad a_2 = \frac{7}{4} \approx 1.75, \quad a_3 = \frac{10}{5} = 2,$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad b_3 \approx -0.67$$

2. Beschreibe jeweils in einem Satz das qualitative Verhalten für grosse n (z. B. „wächst/-fällt“, „pendelt“, „stabilisiert sich“).



2 Beschränktheit von Folgen

Definition

Eine Folge (a_n) heisst *nach oben beschränkt*, falls es $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (obere Schranke). *Nach unten beschränkt*, falls $a_n \geq c$ für alle n (untere Schranke). *Beschränkt* bedeutet: es existieren $c \leq C$ mit $c \leq a_n \leq C$ für alle n (obere & untere Schranke).

Supremum/Infimum als Werkzeug

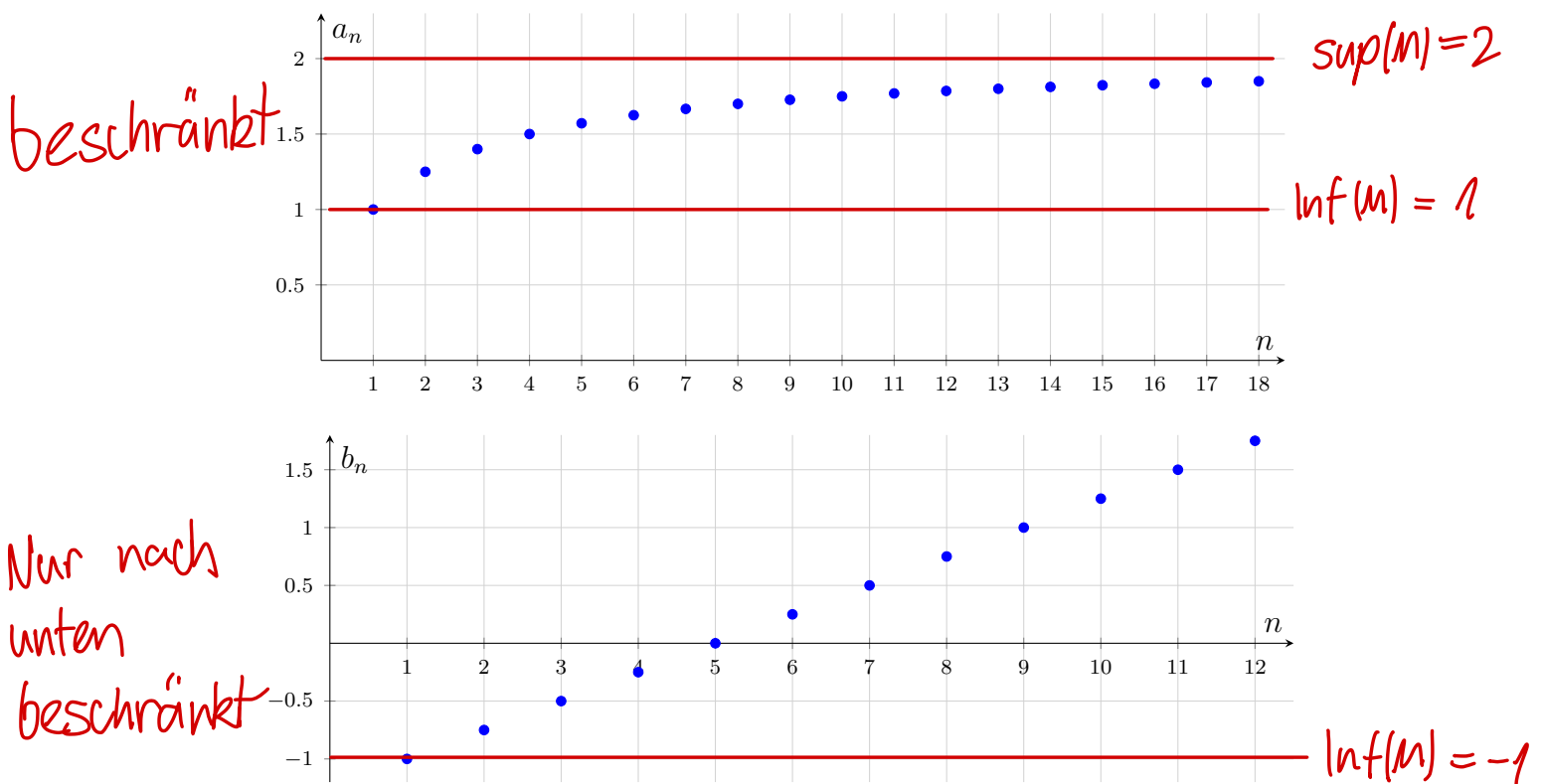
Für die Menge der Folgenterme $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$:

- Ist (a_n) nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$.
- Ist (a_n) nach unten beschränkt, so existiert $\inf M$.

(Zur Erinnerung: Supremum und Infimum wurden bereits in ÜS 1 eingeführt; hier verwenden wir sie nur. Ausserdem genügen zur Betrachtung der Schranken Supremum und Infimum; ob zusätzlich ein Maximum bzw. Minimum vorliegt, muss nicht ermittelt werden.)

Beispielaufgaben

Schranken für $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ und $b_n = \frac{n-5}{4}$



3 Monotonieverhalten von Folgen

Idee

Eine Folge (a_n) heisst *monoton*, wenn ihre Werte ohne Richtungswechsel entweder nur steigen oder nur fallen. Wir formulieren das hier bewusst einfach/intuitiv (ohne Beweise).

Vier Fälle in Kürze

Typ	In Worten	Rechenkriterium
$1, \underline{2}, \underline{2}, 3, 4, 5$ Monoton steigend	Jedes Folgeglied ist grösser oder mindestens gleich gross wie die vorherigen.	$a_{n+1} \geq a_n$
$1, 2, 3, 4, \dots$ Streng monoton steigend	Jedes Folgeglied ist strikt grösser als die vorherigen.	$a_{n+1} > a_n$
Monoton fallend	Jedes Folgeglied ist kleiner oder höchstens gleich gross wie die vorherigen.	$a_{n+1} \leq a_n$
Streng monoton fallend	Jedes Folgeglied ist strikt kleiner als die vorherigen.	$a_{n+1} < a_n$

Praktische Checks

- Differenzen-Test: $\Delta_n := a_{n+1} - a_n$. Gilt $\Delta_n \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle n , dann ist die Folge monoton steigend (bzw. fallend).
- Für positive Folgen kann man auch Quotienten anschauen: $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$. $q_n \geq 1$ (bzw. ≤ 1) für alle $n \Rightarrow$ monoton steigend (bzw. fallend).
- Häufig reicht „monoton ab einem N_0 “ (d. h. für alle $n \geq N_0$) – das ist in Anwendungen genauso nützlich.

Spezialfall: alternierende Folgen

Eine Folge heisst *alternierend*, wenn die Vorzeichen der Terme abwechseln:

$$a_n = (-1)^n u_n \quad (u_n \geq 0).$$

Anschaulich „springt“ die Folge zwischen positiven und negativen Werten hin und her. Alternierende Folgen sind in der Regel *nicht monoton*.

4 Konvergenz über den Grenzwertbegriff

Definition

Sei (a_n) eine reelle Folge. Wir sagen, *die Folge konvergiert gegen* $L \in \mathbb{R}$, wenn der Grenzwert existiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Kurz: *Existiert ein (endlicher) Grenzwert, dann ist die Folge konvergent* – und zwar genau gegen diesen Wert L . (Keine ε - N -Formalismen hier nötig.)

Terminologie

$$a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, -1, 1$$

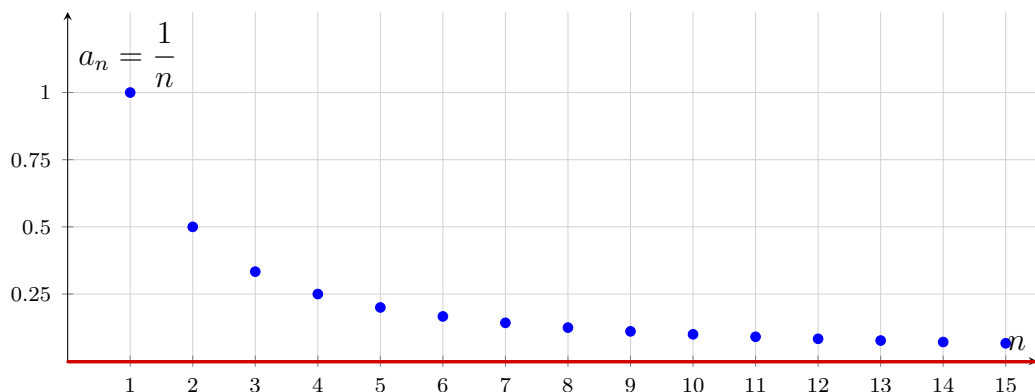
- **Konvergent:** $\exists L \in \mathbb{R}$ mit $\lim a_n = L$.
- **Divergent:** Kein endlicher Grenzwert. Typische Fälle:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (wächst „nach oben hinaus“),
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (fällt „nach unten hinaus“),
 - *oszillierend* (z. B. wechselnde Vorzeichen oder Hin-und-her-Springen ohne Annäherung, alternierende Funktionen).

Wichtige Hinweise

- Der Grenzwert (falls vorhanden) ist **eindeutig**.
- $\lim a_n = L$ impliziert automatisch: die Folge ist **beschränkt** (ab einem gewissen n) und „stabilisiert“ sich in der Nähe von L .

Nützliches Existenz-Kriterium

Ist eine Folge **monoton** und **beschränkt**, dann *existiert* ein (endlicher) Grenzwert. Damit kann man Konvergenz oft *ohne* konkretes Ausrechnen eines Grenzwerts begründen.

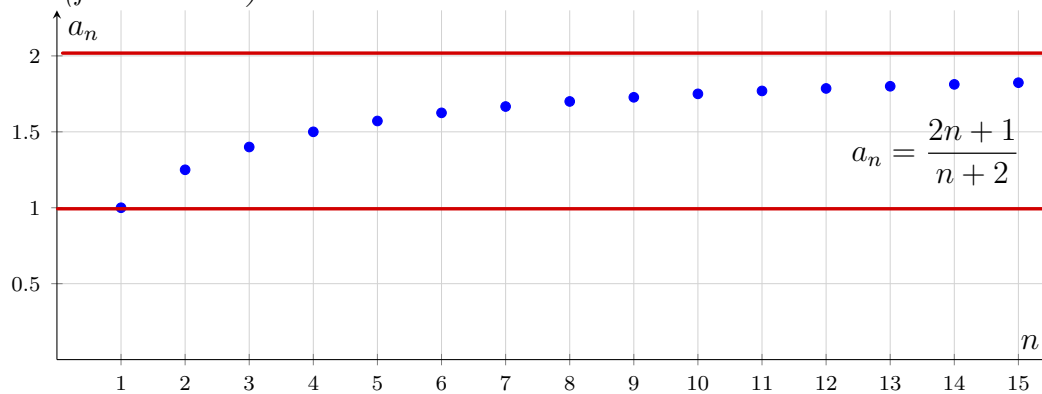


Streng monoton fallende und nach unten beschränkte Folge; die untere Schranke (Infimum) ist der Grenzwert, hier 0.

$$\frac{-3n^2 + 5}{-7n + 1} = \frac{\cancel{n^2} \left(3 + \frac{5}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(-\frac{7}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} \quad \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \cancel{(3)}}{0} \quad \neq$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Ermittle grafisch für jede Folge die Beschränktheit, Monotonie, das Konvergenzverhalten und (falls existent) den Grenzwert.



Eigenschaften (a_n)

Beschränktheit: **Beschränkt**

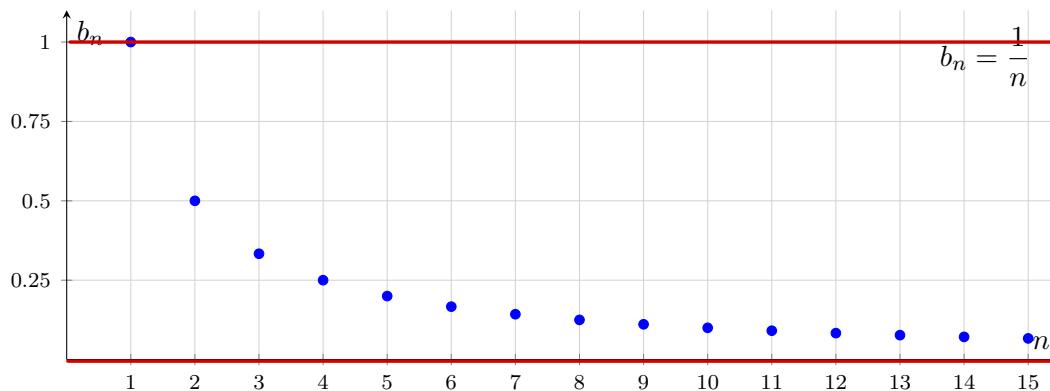
Obere Schranke: **Sup(M) = 2**

Untere Schranke: **Inf(M) = 1**

Monotonie: **smS**

Konvergenz: **konvergiert**

Grenzwert: **2**



Eigenschaften (b_n)

Beschränktheit: **Beschränkt**

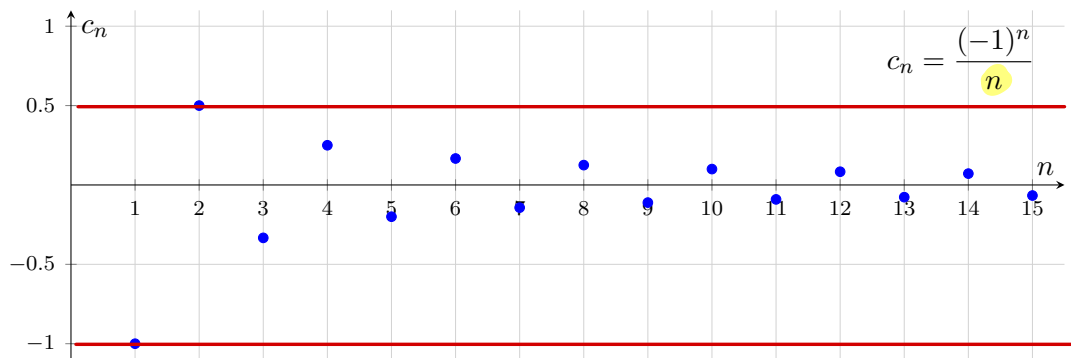
Obere Schranke: **1**

Untere Schranke: **0**

Monotonie: **smf**

Konvergenz: **konvergiert**

Grenzwert: **0**



Eigenschaften (c_n)

Beschränktheit: *Beschränkt*

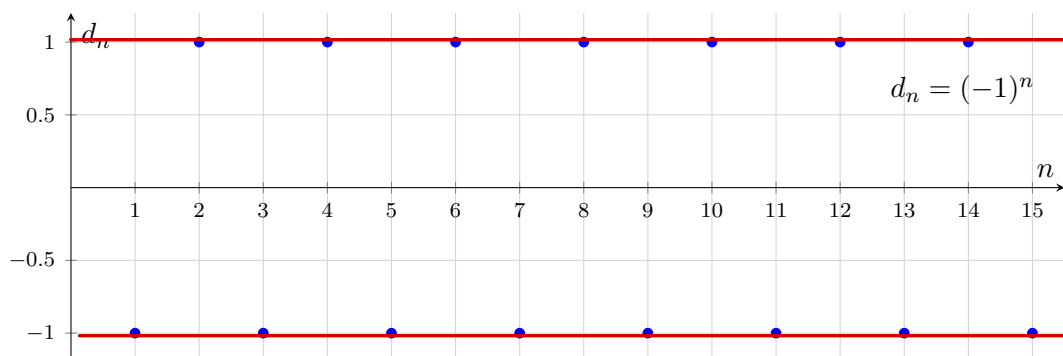
Obere Schranke: $\frac{1}{2}$

Untere Schranke: -1

Monotonie: *alternierend*

Konvergenz: *Konvergiert*

Grenzwert: 0



Eigenschaften (d_n)

Beschränktheit: *Beschränkt*

Obere Schranke: 1

Untere Schranke: -1

Monotonie: *alternierend*

Konvergenz: *Divergiert*

Grenzwert: \times

5 Analytische Ermittlung von Grenzwerten

Worum geht's?

Viele Folgenlimits sind *offensichtlich* (z. B. $\lim_{n \rightarrow \infty}$ von $2n$, $n^2 \rightarrow +\infty$). Für den Rest reichen ein paar einfache Werkzeuge. Details zu Grenzwerten von *Funktionen* kommen später im Kurs; hier geht es nur um schnelle, übungsorientierte Regeln für *Folgen*.

Brüche aus Polynomen (Zähler/Nenner in n)

Rezept: Durch die höchste Potenz von n im Nenner teilen.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^n} = \frac{\infty}{\infty} \neq 1 \quad ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \deg p < \deg q, \\ \frac{\text{Leitkoeff}(p)}{\text{Leitkoeff}(q)}, & \deg p = \deg q, \\ \pm\infty, & \deg p > \deg q. \end{cases}$$

Beispiele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n - 1} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 7}{2n^3 + 9n} = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 7}{2n^3 + 9n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot (5 - \frac{7}{n^3})}{n^3 \cdot (2 + \frac{9}{n^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{9}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{7}{n^3})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{9}{n^2})} \end{aligned}$$

Wachstumshierarchie (wer „gewinnt“?)

Wenn sowohl Zähler als auch Nenner gegen unendlich wachsen, entscheide nach Wachstumsgeschwindigkeit. Für $n \rightarrow \infty$ gilt (Faustregel, von schnell nach langsam):

$$n^n \gg n! \gg a^n \ (a > 1) \gg n^k \ (k > 0) \gg \log n$$

Konsequenzen für $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$:

- **Nenner** wächst *strikt schneller* \Rightarrow Grenzwert 0.
- **Zähler** wächst *strikt schneller* $\Rightarrow +\infty$ (bzw. $-\infty$ je nach Vorzeichen).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(10n)}{n^3} = 0$$

$$\frac{5 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3^n}{n^2} \right)$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{n^2} \right) = -\infty$$

Beispiele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (\text{Nenner } n^n \text{ gewinnt}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} \right) = 0$$

Nützliche „Sonderlimits“ für die Formelsammlung

Diese tauchen oft auf und sind nicht sofort offensichtlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \ (x > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

(Die letzten beiden helfen häufig beim Umformen.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/3}{n} \right)^n = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 + n} = 2$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3^n} = \infty$$

6 Sandwich-Theorem

Intuition

Manchmal ist ein direkter Grenzwert schwer zu berechnen. Dann klemmen wir die Folge (b_n) von oben und unten zwischen einfacheren Folgen ein — **wie ein Sandwichbelag zwischen zwei Scheiben Brot**.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle (hinreichend grossen) } n$$

Haben die äusseren Folgen denselben Grenzwert, so konvergiert b_n auch gegen diesen Wert.

Aussage

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq N_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

Dann gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

Nützliche Folgerung Wenn $|b_n| \leq a_n$ und $a_n \rightarrow 0$, dann folgt sofort $b_n \rightarrow 0$. (Der Trick für „oszillierende, aber immer kleinere“ Terme.)

Wann Sandwich-Theorem anwenden? Wenn sich ein Ausdruck elegant zwischen zwei bekannte Folgen klemmen lässt (z. B. über Betrag, Dreiecksungleichung, oder algebraische Umformung).

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Beispielaufgabe Sandwich-Theorem

Bestimme den Grenzwert L dieser Folge:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (n \geq 1)$$

① Umformen (hilfreich fürs Klemmen)

$$b_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow b_n = \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2x} < \frac{1}{x}$$

② Obere & untere Schrankenfolge wählen:

$$\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n+1}}}_{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{c_n}$$

③ Grenzwerte, äussere Fkt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = 0$$

④ Sandwich - Schluss

Da $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq 1$ gilt und beide

Randfolgen gegen 0 konvergieren $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$