Mathematatik I: Analysis A

Übungsstunde 7

Ableitungen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 03.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Ganzrationale Funktionen
2. Gebrochenrationale Funktionen
3. Exponentialfunktionen
4. Trigonometrische Funktionen
5. Wurzelfunktionen
6. Logarithmusfunktionen
7. Zusätzliche nützliche Ableitungen

Organisatorisches In dieser Übungsstunde werden wir anhand der verschiedenen Typen von Funktionen die unterschiedlichen Ableitungsregeln lernen und Strategien zum Ableiten kennenlernen.

Ableitungsnotation

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \quad (\text{z. B. } \tfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}).$$

Heute verwenden wir $f'(x)$. Die Operator-Schreibweise $\frac{d}{dx}$ wird später (z. B. bei Differentialgleichungen) wichtig.

Schön- vs. Potenzschreibweise

$$x^{-\frac{a}{b}} = \frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}$$

Merke (Schönschreibweise): Schreibe mit $\sqrt[b]{\cdot}$, nur *positive* ganzzahlige Potenzen im Radikanden und Brüche als echte Brüche.

1 Ganzrationale Funktionen

Potenzregel

$$f(x) = x^n, \qquad f'(x) = n\,x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Spezialfall: Für $n = 0$ gilt:

$$f(x) = Cx^0 = C \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$$

Konstantenregel: Die Ableitung einer Konstante ist 0

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel

$$f(x) = u\big(v(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $f(x) = (3x^2 - a)^4$

Kettenregel

$u = x^4 \;|\; v = 3x^2 - a$

$u' = 4x^3 \;|\; v' = 6x$

$f'(x) = 4 \cdot (3x^2 - a)^3 \cdot 6x$

$f'(x) = 24x\,(3x^2 - a)^3$

2. $f(x) = (x+1)\cdot(x-k)^3$

Produktregel

$u = x+1 \;|\; v = (x-k)^3$

$u' = 1 \;|\; v' = 3(x-k)^2 \cdot 1$

$f'(x) = 1 \cdot (x-k)^3 + 3(x-k)^2 (x+1)$

$f'(x) = (x-k)^2 \cdot (x - k + 3(x+1))$

$f'(x) = (x-k)^2 \cdot (4x - k + 3)$

Produktregel

3. $f(x) = 3ax\,(c-x)^4$

$u = 3ax \;|\; v = (c-x)^4$

$u' = 3a \;|\; v' = -4(c-x)^3$

$f'(x) = 3a \cdot \left((x-c)^4 - 4(x-c)^3 x \right)$

$f'(x) = 3a(x-c)^3 \cdot (c - x - 4x(x-c)) = 3a(x-c)^3 (c - x - 4x^2 + 4cx)$

$f'(x) = 3a(x-c)^3 \cdot (-4x^2 + (4c-1)x + c)$

4. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 2x + 10}{x^2}$

Wenn im Nenner nur 1 Summand: Bruch aufteilen in einzelne Summenterme des Nenners

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2} + \dfrac{5x^2}{x^2} - \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{10}{x^2}$

$f(x) = x^1 + 5 - 2x^{-1} + 10x^{-2}$ } Alles ganzrationale Potenzen: $f(x) = x^n$, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f'(x) = 1 + 0 + 2x^{-2} - 20x^{-3}$

$f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{20}{x^3}$

2 Gebrochenrationale Funktionen

Hinweis Bei gebrochenrationalen Funktionen gibt es drei sinnvolle Ableitungsstrategien. Dabei betrachtet man den Zählergrad $\deg P$ und den Nennergrad $\deg Q$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. Zähler C konstant $\Rightarrow$ als $C\,Q(x)^{-1}$ schreiben und Kettenregel anwenden
2. $\deg P < \deg Q$ und Zähler nicht konstant $\Rightarrow$ direkt Quotientenregel
3. $\deg P \geq \deg Q \Rightarrow$ zuerst Polynomdivision, dann Restterm mit Kettenregel oder Quotientenregel ableiten

Vollständige Kurvendiskussion

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

Beispielaufgaben

1. $f(x) = \dfrac{6}{(1-3x)^2} = 6\cdot(1-3x)^{-2}$ [Zähler konstant $\Rightarrow C\,Q(x)^{-1}$]

$u = 6x^{-2}$, $u' = -12x^{-3}$ | $v = 1-3x$, $v' = -3$

$$f'(x) = -12(1-3x)^{-3}\cdot(-3)$$

$$f'(x) = \frac{36}{(1-3x)^3}$$

2. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$ [$\deg P < \deg Q \Rightarrow$ Quotientenregel]

$u = x^2+1$, $u' = 2x$ | $v = (x+1)^3$, $v' = 3(x+1)^2$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x^2+1)}{\left((x+1)^3\right)^2} = \frac{(x+1)^2\cdot\left(2x(x+1) - 3(x^2+1)\right)}{(x+1)^6}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x+1)^2}\cdot(2x^2+x-3x^2-3)}{(x+1)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{-x^2+2x-3}{(x+1)^4}$$

3. $f(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 + 6x + 5}{x^2+2}$ [$\deg P \geq \deg Q \Rightarrow$ zuerst Polynomdivision]

$$\begin{array}{l} 3x^3 - x^2 + 6x + 5 \; : \; x^2+2 = 3x \\ -(3x^3 + 0x^2 + 6x) \\ \hline 0x^3 - x^2 + 0x + 5 \\ \\ -x^2 + 5 \; : \; x^2 + 2 = -1 \\ -(-x^2 - 2) \\ \hline 0 + 7 \end{array}$$

$\rightarrow$ Restfkt. $R(x) = \dfrac{7}{x^2+2}$

Asymptotenfkt. $A(x) = 3x - 1$

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{7}{x^2+2}$$

$u = 7x^{-1}$, $u' = -7x^{-2}$, $v = x^2+2$, $v' = 2x$

$$f'(x) = 3 - 7(x^2+2)^{-2}\cdot 2x$$

$$f'(x) = 3 - \frac{14x}{(x^2+2)^2}$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $f(x) = \dfrac{x^3+2x+7}{x^2+2}$

$x^3+2x+7 : x^2+2 = x \rightarrow A(x) = x$

$-x^3+2x$

$7 \rightarrow R(x) = \dfrac{7}{x^2+2}$

$f(x) = x + \dfrac{7}{x^2+2}$

Kettenregel

$u = 7x^{-1}$ | $v = x^2+2$

$u' = -7x^{-2}$ | $v' = 2x$

$f'(x) = 1 - 7(x^2+2)^{-2} \cdot 2x$

$f'(x) = 1 - \dfrac{14x}{(x^2+2)^2}$

2. $f(x) = \dfrac{12}{(x^3-6x+2)^3} = 12\,(x^3-6x+2)^{-3}$

$u = 12x^{-3}$ | $v = x^3-6x+2$

$u' = -36x^{-4}$ | $v' = 3x^2-6$

$f'(x) = -36\,(x^3-6x+2)^{-4} \cdot (3x^2-6)$

$f'(x) = \dfrac{-108\,(x^2-2)}{(x^3-6x+2)^4}$

3. $f(x) = \dfrac{2x^3+x+1}{x^2+1}$

$2x^3+x+1 : x^2+1 = 2x$

$-2x^3+2x$

$0x^3 \quad -x+1$

$\rightarrow R(x) = \dfrac{-x+1}{x^2+1} = -\dfrac{x-1}{x^2+1}$

$f(x) = 2x - \dfrac{x-1}{x^2+1}$

Quotientenregel

$u = x-1$ | $v = x^2+1$

$u' = 1$ | $v' = 2x$

$f'(x) = 2 - \dfrac{1\cdot(x^2+1) - 2x(x-1)}{x^2+1}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{x^2+1-2x^2+2x}{x^2+1}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$

$f'(x) = 2 + \dfrac{x^2-2x-1}{x^2+1}$

3 Exponentialfunktionen

Grundregeln Für die natürliche Exponentialfunktion gilt

$$f(x) = e^x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

Für eine allgemeine Basis $a > 0$ (mit $a \neq 1$) gilt:

$$f(x) = a^x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

(Begründung: $a^x = e^{x \ln a}$)

$f(x) = e^{v(x)}$

$f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$

Allgemeine Ableitung Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{v(x)}\, v'(x)$$

$$f(x) = a^{v(x)} \quad (a > 0,\ a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^{v(x)}\, v'(x) \cdot \ln(a)$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $f(x) = (x^2 + 2) \cdot (e^{2x})^3$ $= (x^2+2) \cdot e^{6x}$

$u = x^2+2 \;|\; v = e^{6x}$

$u' = 2x \;|\; v' = 6 \cdot e^{6x}$

$f'(x) = 2x e^{6x} + 6e^{6x}(x^2+2) = 2e^{6x} \cdot (x + 3(x^2+2)) \rightarrow f'(x) = 2e^{6x}(3x^2+x+6)$

2. $f(x) = \left(3^{x^2} + x\right)^4$

$u = x^4 \;|\; v = 3^{x^2} + x$

$u' = 4x^3 \;|\; v' = 2x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln(3) + 1$

$\rightarrow f'(x) = 4(3^{x^2}+x)^3 \cdot (2x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln(3) + 1)$

3. $f(x) = e^{x e^x}$

$f'(x) = e^{x \cdot e^x} \cdot \frac{d}{dx}\, x \cdot e^x$

$u = x \;|\; v = e^x$

$u' = 1 \;|\; v' = e^x$

Produktregel

$1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x(x+1)$

$f'(x) = e^{x \cdot e^x} \cdot e^x(x+1) = e^{xe^x + x}(x+1)$

$f'(x) = (x+1)\, e^{x(e^x+1)}$

4. $f(x) = e^{\left(\frac{x^4 + x}{\sin(x)}\right)}$

Quotientenregel: $u = x^4 + x \;|\; v = \sin(x)$

$u' = 4x^3 + 1 \;|\; v' = \cos(x)$

$\frac{(4x^3+1)\sin(x) - (x^4+x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{(4x^3+1)\sin(x) - (x^4+x)\cos(x)}{\sin^2(x)} \cdot e^{\frac{x^4+x}{\sin(x)}}$

5. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$

$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ 3. Binom

$(e^x+1)(e^x-1) = e^{2x} \cancel{+ e^x - e^x} - 1$

$f(x) = \dfrac{\cancel{(e^x+1)}(e^x-1)}{\cancel{e^x+1}} = e^x - 1$

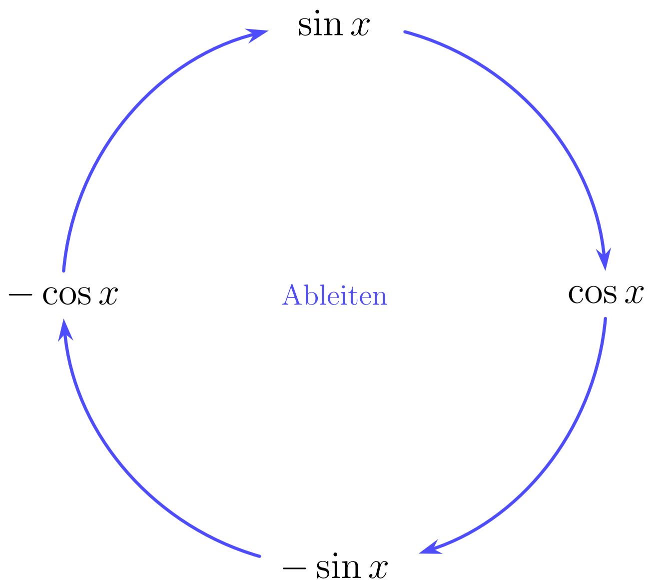
$f'(x) = e^x$

4 Trigonometrische Funktionen

Die Grundfunktionen sin und cos verhalten sich bei Ableitung zyklisch:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \\
f'(x) &= \cos x \\
f''(x) &= -\sin x \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= \sin x
\end{aligned}
$$

Am besten merkt man sich diesen Ableitungskreis:



Die wichtigsten nützlichen trigonometrischen Relationen

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)\,\cos(x) = \tfrac{1}{2}\,\sin(2x) \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Kettenregel bei trigonometrischen Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin\big(v(x)\big) & \qquad f(x) &= \cos\big(v(x)\big) \\
f'(x) &= \cos\big(v(x)\big)\cdot v'(x) & \qquad f'(x) &= -\sin\big(v(x)\big)\cdot v'(x)
\end{aligned}
$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $f(x) = x\,\cos(5x^2+2)$ $\rightarrow f'(x) = 1\cdot\cos(5x^2+2) - 10x\sin(5x^2+2)\cdot x$

Produktregel: $u = x \mid v = \cos(5x^2+2)$

$u' = 1 \mid v' = -\sin(5x^2+2)\cdot 10x$

$f'(x) = \cos(5x^2+2) - 10x^2\sin(5x^2+2)$

2. $f(x) = x^2\,\sin(3x-1)$

$u = x^2 \mid v = \sin(3x-1)$

$u' = 2x \mid v' = 3\cos(3x-1)$

$f'(x) = 2x\sin(3x-1) + 3x^2\cos(3x-1)$

3. $f(x) = \big(\sin(x) - \cos(x)\big)^2$

$f(x) = (\sin(x)-\cos(x))^2 = \underbrace{\sin^2(x)+\cos^2(x)}_{1} - \underbrace{2\sin(x)\cos(x)}_{\frac{1}{2}\sin(2x)}$

Direkt mit trigonometrischer Relation

$f(x) = 1 - \sin(2x)$

$f'(x) = -2\cos(2x)$

Kettenregel: $u = x^2 \mid v = \sin(x) - \cos(x)$

$u' = 2x \mid v' = \sin(x) + \cos(x)$

$f'(x) = 2(\sin(x)-\cos(x))\cdot(\sin(x)+\cos(x))$

$f'(x) = 2\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)$

Mit Trigonometrischer Relation

$\sin^2(x) - \cos^2(x) = -\cos(2x)$

4. $f(x) = \big(x^2 + \sin(x)\big)^3$

Kettenregel: $u = x^3 \mid v = x^2 + \sin(x)$

$u' = 3x^2 \mid v' = 2x + \cos(x)$

$f'(x) = 3(x^2+\sin(x))^2(2x+\cos(x))$

5. $f(x) = \big(ax + \cos(ax)\big)^2$ $(a \in \mathbb{R})$

$u = x^2 \mid v = ax + \cos(ax)$

$u' = 2x \mid v' = a - a\sin(ax) = a(1-\sin(ax))$

$f'(x) = 2x(ax+\cos(ax)) + ax^2(1-\sin(ax))$

6. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x)\sin(x))}{\cos^2(x)}$

Quotientenregel: $u = \sin(x) \mid v = \cos(x)$

$u' = \cos(x) \mid v' = -\sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

7. $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}$

$u = \sin(2x) \mid v = 1 + \cos(x)$

$u' = 2\cos(2x) \mid v' = -\sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{2\cos(2x)(1+\cos(x)) + \sin(2x)\sin(x)}{1+\cos(2x)}$

8. $f(x) = \sin^3(e^{3x})$ Von aussen nach innen!

$u = x^3 \mid v = \sin(e^{3x})$

$u' = 3x^2 \mid v' = ?$

$u = \sin(x) \mid v = e^{3x}$

$u' = \cos(x) \mid v' = 3e^{3x}$

$v' = 3e^{3x}\cos(e^{3x})$

$f'(x) = 3(\sin(e^{3x}))^2 \cdot 3e^{3x}\cos(e^{3x})$

$f'(x) = 9e^{3x}\sin^2(e^{3x})\cdot\cos(e^{3x})$

5 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen – Strategie

1. **Potenzschreibweise**: $\sqrt[b]{g(x)} = g(x)^{1/b}$. Dann direkt Kettenregel anwenden
2. **Radikalpotenzen bündeln**: $(\sqrt{g(x)})^m = g(x)^{m/2}$
3. **Aufpassen beim Vereinfachen *vor* dem Ableiten**: $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ Beachte: Ableitung dann *stückweise* (Knick bei $x = -2$)

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2} = (x^2+3x+2)^{1/2}$

Kettenregel: $u = x^{1/2}$, $u' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ | $v = x^2+3x+2$, $v' = 2x+3$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+3x+2)^{-1/2} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$

2. $f(x) = (x-2)\sqrt{3x+e^x}$

$u = x-2$, $u' = 1$ | $v = (3x+e^x)^{1/2}$, $v' = \frac{1}{2}(3x+e^x)^{-1/2} \cdot (3+e^x)$

$f'(x) = 1 \cdot (3x+e^x)^{1/2} + \frac{1}{2}(3x+e^x)^{-\frac{1}{2}}(3+e^x)(x-2)$

$f'(x) = \sqrt{3x+e^x} + \frac{(x-2)(3+e^x)}{2\sqrt{3x+e^x}}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} = x^2 \cdot (x^2+4)^{-1/2}$

Produktregel

$u = x^2$, $u' = 2x$ | $v = (x^2+4)^{-1/2}$, $v' = -\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}$

$f'(x) = 2x \cdot (x^2+4)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}x^2$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \left(2 - \frac{x}{2(x^2+4)}\right)$

4. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$

$f(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ $\begin{cases} f(x) = -x+2 & x < -2 \\ f(x) = x+2 & x > 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & x < -2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{\tan(x)} = (\tan(x))^{\frac{1}{3}}$

Kettenregel

$u = x^{1/3}$, $u' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ | $v = \tan(x)$, $v' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(\tan(x))^{-2/3} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2(x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f'(x) = \frac{1}{3\cos^2(x) \cdot \sqrt[3]{\tan^2(x)}}$

6. $f(x) = \sqrt[4]{x^2+5x}$

$u = x^{\frac{1}{4}}$, $u' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ | $v = x^2+5x$, $v' = 2x+5$

$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2+5x)^{-3/4} \cdot (2x+5)$

$f'(x) = \frac{2x+5}{4\sqrt[4]{(x^2+5)^3}}$

6 Logarithmusfunktionen

Grundregeln Für den natürlichen Logarithmus (Domain: $x > 0$) gilt

$$f(x) = \ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Für einen Logarithmus zur Basis $a > 0$ (mit $a \neq 1$) gilt

$$f(x) = \log_a(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

(Begründung: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$)

Kettenregel bei Logarithmusfunktionen

$$f(x) = \ln\big(v(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} \qquad (\text{mit } v(x) > 0)$$

$$f(x) = \log_a\big(v(x)\big) \quad (a > 0,\ a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

Wichtige Rechenregeln

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad\qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\big(a^b\big) = b\ln(a) \qquad\qquad \ln\big(\sqrt[b]{a}\big) = \ln\big(a^{1/b}\big) = \frac{1}{b}\ln(a)$$

$$f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ $\longrightarrow$ $v(x) = x^2+2x+1$, $v'(x) = 2x+2$ $\Big\}$ $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{(x+1)}$

$\ln((x+1)^2) = 2\ln(x+1)$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1}$

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

Mann könnte hier Kettenregel + Quotientenregel anwenden oder Logarithmus Regeln anwenden!

$f(x) = \ln(x+2) - \ln(1-x)$

$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{-1}{1-x}$ $\longrightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x + x+2}{(x+2)(1-x)} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$

3. $f(x) = \ln((2x + 1)^x) = x \cdot \ln(2x+1)$

Produktregel: $u = x$, $u' = 1$ $\big|$ $v = \ln(2x+1)$, $v' = \frac{2}{2x+1}$ $\Big\}$ $f'(x) = 1 \cdot \ln(2x+1) + \frac{2}{2x+1} \cdot x \longrightarrow f'(x) = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}$

4. $f(x) = (x^2 - 1)\ln(2x + 3)$

Produktregel

$u = x^2-1$, $u' = 2x$ $\big|$ $v = \ln(2x+3)$, $v' = \frac{2}{2x+3}$ $\Big\}$ $f'(x) = 2x \cdot \ln(2x+3) + \frac{2(x^2-1)}{2x+3}$

5. $f(x) = \ln(\sqrt[3]{\tan(x)}) = \frac{1}{3}\ln(\tan(x)) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{3}\left[\ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))\right]$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right]$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\cot(x) + \tan(x)\right]$

6. $f(x) = \ln(e^x - x)$

Kettenregel: $v(x) = e^x - x$, $v'(x) = e^x - 1$ $\Big\}$ $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

7. $f(x) = \log_7(\sin(x) + 1)$

Kettenregel $v(x) = \sin(x) + 1$, $v'(x) = \cos(x)$ $\Big\}$ $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1} \cdot \frac{1}{\ln(7)}$

8. $f(x) = \frac{\ln(\pi x)}{x^2 + 1}$

Quotientenregel: $u = \ln(\pi x)$, $u' = \underbrace{\frac{1}{\pi x} \cdot \pi}_{\frac{1}{x}}$ $\big|$ $v = x^2+1$, $v' = 2x$ $\Big\}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x^2+1) - 2x\ln(\pi x)}{(x^2+1)^2}$

$\downarrow$

$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot \ln(\pi x)}{x(x^2+1)}$

7 Zusätzliche nützliche Ableitungen

Achtet auf Domäne und Einschränkungen: Ableitungen gelten nur auf dem *Definitionsbereich von f* (Polstellen/Randpunkte ausnehmen). *Alle Winkel im Bogenmass.*

Zusätzliche trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$f(x) = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\big(1 + \cot^2(x)\big)$$

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec(x)\,\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc(x)\,\cot(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Arkusfunktionen

$$f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$f(x) = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Hyperbolische Funktionen

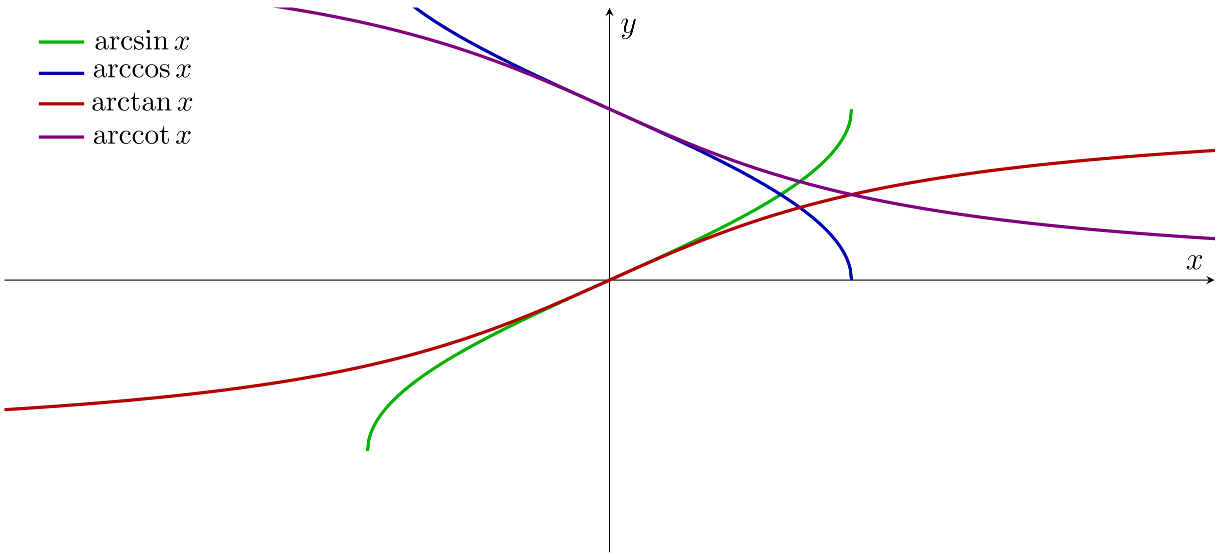
$$f(x) = \sinh(x) = \tfrac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cosh(x)$$

$$f(x) = \cosh(x) = \tfrac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sinh(x)$$

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$f(x) = \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{csch}^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

Arcusfunktionen



Hyperbolische Funktionen