
Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 7

Ableitungen

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 03.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Ganzrationale Funktionen
2. Gebrochenrationale Funktionen
3. Exponentialfunktionen
4. Trigonometrische Funktionen
5. Wurzelfunktionen
6. Logarithmusfunktionen
7. Zusätzliche nützliche Ableitungen

Organisatorisches In dieser Übungsstunde werden wir anhand der verschiedenen Typen von Funktionen die unterschiedlichen Ableitungsregeln lernen und Strategien zum Ableiten kennenlernen.

Ableitungsnotation

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad (\text{z. B. } \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}).$$

Heute verwenden wir $f'(x)$. Die Operator-Schreibweise $\frac{d}{dx}$ wird später (z. B. bei Differentialgleichungen) wichtig.

Schön- vs. Potenzschreibweise

$$x^{-\frac{a}{b}} = \frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}$$

Merke (Schönschreibweise): Schreibe mit $\sqrt[b]{\cdot}$, nur positive ganzzahlige Potenzen im Radikanden und Brüche als echte Brüche.

1 Ganzrationale Funktionen

Potenzregel

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = n x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Spezialfall: Für $n = 0$ gilt:

$$f(x) = C x^0 = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

Konstantenregel: Die Ableitung einer Konstante ist 0

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. \ f(x) = (3x^2 - a)^4$$

$$2. \ f(x) = (x + 1)(x - k)^3$$

$$3. \ f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 10}{x^2}$$

2 Gebrochenrationale Funktionen

Hinweis Bei gebrochenrationalen Funktionen gibt es drei sinnvolle Ableitungsstrategien. Dabei betrachtet man den Zählergrad $\deg P$ und den Nennergrad $\deg Q$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. Zähler C konstant \Rightarrow als $C Q(x)^{-1}$ schreiben und Kettenregel anwenden
2. $\deg P < \deg Q$ und Zähler nicht konstant \Rightarrow direkt Quotientenregel
3. $\deg P \geq \deg Q \Rightarrow$ zuerst Polynomdivision, dann Restterm mit Kettenregel oder Quotientenregel ableiten

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

Beispielaufgaben

$$1. \quad f(x) = \frac{6}{(1-3x)^2} \quad [\text{Zähler konstant} \Rightarrow C Q(x)^{-1}]$$

$$2. \quad f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^3} \quad [\deg P < \deg Q \Rightarrow \text{Quotientenregel}]$$

$$3. \quad f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 6x + 5}{x^2 + 2} \quad [\deg P \geq \deg Q \Rightarrow \text{zuerst Polynomdivision}]$$

Übungsaufgaben für die Studierenden (Bonus)

$$1. \ f(x) = \frac{x^3 + 2x + 7}{x^2 + 2}$$

$$2. \ f(x) = \frac{12}{(x^3 - 6x + 2)^3}$$

$$3. \ f(x) = \frac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$$

3 Exponentialfunktionen

Grundregeln Für die natürliche Exponentialfunktion gilt

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

Für eine allgemeine Basis $a > 0$ (mit $a \neq 1$) gilt:

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

(Begründung: $a^x = e^{x \ln a}$)

Allgemeine Ableitung Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{v(x)} v'(x)$$

$$f(x) = a^{v(x)} \quad (a > 0, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^{v(x)} v'(x) \cdot \ln(a)$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. \ f(x) = (x^2 + 2) \cdot (e^{2x})^3$$

$$2. \ f(x) = (3^{x^2} + x)^4$$

$$3. \ f(x) = e^{x e^x}$$

$$4. \ f(x) = e^{\left(\frac{x^4 + x}{\sin(x)}\right)}$$

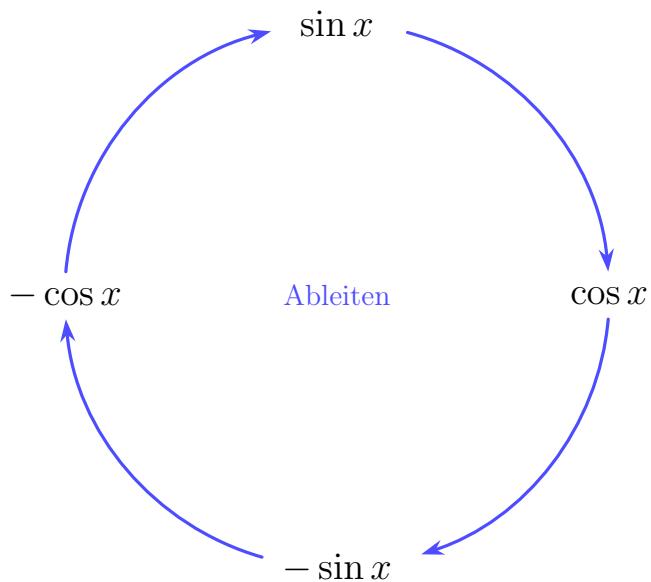
$$5. \ f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$$

4 Trigonometrische Funktionen

Die Grundfunktionen sin und cos verhalten sich bei Ableitung zyklisch:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Am besten merkt man sich diesen Ableitungskreis:



Die wichtigsten nützlichen trigonometrischen Relationen

$$\begin{array}{ll} \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 & \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) & \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \end{array}$$

Kettenregel bei trigonometrischen Funktionen

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(v(x)) & f(x) = \cos(v(x)) \\ f'(x) = \cos(v(x)) \cdot v'(x) & f'(x) = -\sin(v(x)) \cdot v'(x) \end{array}$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. \ f(x) = x \cos(5x^2 + 2)$$

$$2. \ f(x) = x^2 \sin(3x - 1)$$

$$3. \ f(x) = (\sin(x) - \cos(x))^2$$

$$4. \ f(x) = (x^2 + \sin(x))^3$$

$$5. \ f(x) = \tan(x)$$

$$6. \ f(x) = \sin^3(e^{3x})$$

5 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen – Strategie

1. **Potenzschreibweise:** $\sqrt[b]{g(x)} = g(x)^{1/b}$. Dann direkt Kettenregel anwenden
2. **Radikalpotenzen bündeln:** $(\sqrt{g(x)})^m = g(x)^{m/2}$
3. **Aufpassen beim Vereinfachen vor dem Ableiten:** $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ Beachte: Ableitung dann *stückweise* (Knick bei $x = -2$)

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$

$$2. f(x) = (x-2) \sqrt{3x + e^x}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$4. f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

$$5. f(x) = \sqrt[3]{\tan(x)}$$

$$6. f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 5x}$$

6 Logarithmusfunktionen

Grundregeln Für den natürlichen Logarithmus (Domain: $x > 0$) gilt

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Für einen Logarithmus zur Basis $a > 0$ (mit $a \neq 1$) gilt

$$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

(Begründung: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$)

Kettenregel bei Logarithmusfunktionen

$$f(x) = \ln(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} \quad (\text{mit } v(x) > 0)$$

$$f(x) = \log_a(v(x)) \quad (a > 0, \ a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

Wichtige Rechenregeln

$$\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b) & \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(a^b) &= b \ln(a) & \ln(\sqrt[b]{a}) &= \ln(a^{1/b}) = \frac{1}{b} \ln(a) \end{aligned}$$

Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. \ f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$$

$$2. \ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$$

$$3. \ f(x) = \ln((2x+1)^x)$$

$$4. \ f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\tan(x)}\right)$$

$$5. \ f(x) = \ln(e^x - x)$$

$$6. \ f(x) = \log_7 (\sin(x) + 1)$$

7 Zusätzliche nützliche Ableitungen

Achtet auf Domäne und Einschränkungen: Ableitungen gelten nur auf dem *Definitionsbereich von f* (Polstellen/Randpunkte ausnehmen). *Alle Winkel im Bogenmaß.*

Zusätzliche trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$f(x) = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$$

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \sec(x) \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = -\csc(x) \cot(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Arkusfunktionen

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \text{arccot}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Hyperbolische Funktionen

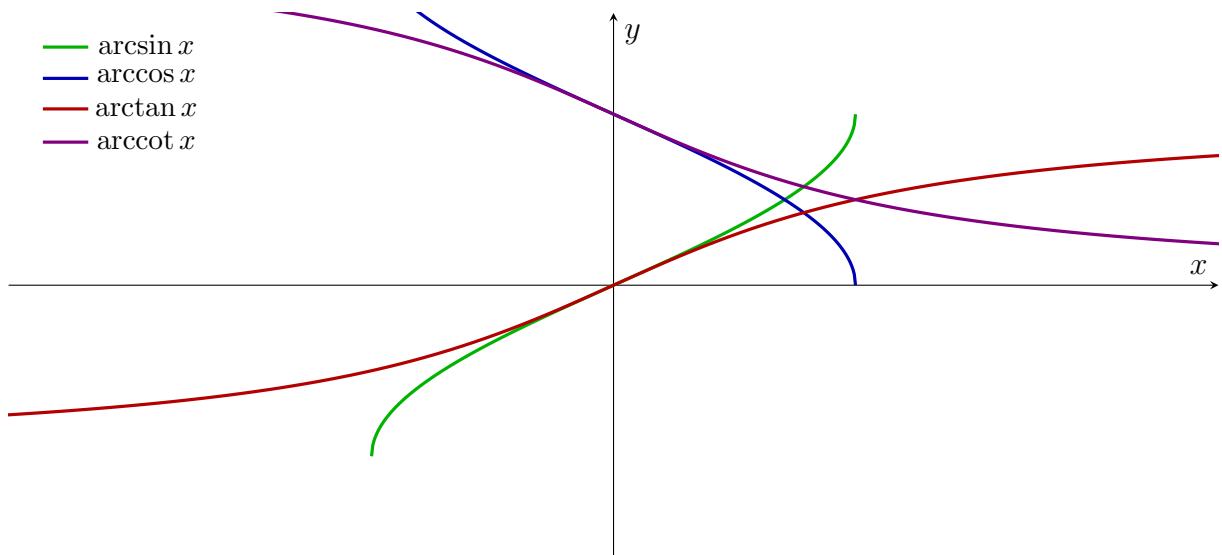
$$f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x)$$

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow f'(x) = \sinh(x)$$

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$f(x) = \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch}^2(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

Arcusfunktionen



Hyperbolische Funktionen

