
Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 13

Gewöhnliche DGL's höherer Ordnung

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 15.12.2025

Material: <https://polybox.ethz.ch/index.php/s/5DtZxQsTGpLABQT>



Überblick dieser Übungsstunde

1. ODE's 1. Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution
2. Homogene ODE's höherer Ordnung: Eulerscher Ansatz
3. Inhomogene ODE's höherer Ordnung (mit Störfunktion): Partikuläransatz

ODE's 1. Ordnung mit Quotiententermen: z-Substitution

Treten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung Ausdrücke wie $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ oder Potenzen davon (z. B. $\frac{y^2}{x^2}$) auf, so kann die Gleichung oft durch eine geeignete z-Substitution vereinfacht werden.

Typischerweise setzt man

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{y},$$

wodurch sich die Differentialgleichung in eine separierbare Gleichung für $z(x)$ umformen lässt. Anschliessend löst man diese Differentialgleichung nach z und erhält am Ende durch Rücksubstitution die gesuchte Funktion $y(x)$.

Beispielaufgabe: 16a (Analysis A & B Altprüfung 2021S)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(x) = \frac{1}{\sin(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}, \quad x > 0 \text{ und in einem geeigneten Intervall.}$$

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{y}{x} \quad / \cdot x \\ x \cdot z(x) &= y \quad / \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx}(x \cdot z(x)) &= \frac{dy}{dx} \\ \text{Produktregel: } &\left\{ \begin{array}{l|l} u=x & v=z \\ u'=1 & v'=z' \end{array} \right. \\ 1 \cdot z + z' \cdot x &= \frac{dy}{dx} \\ z + z'x &= \frac{1}{\sin(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x} \\ z + z'x &= \frac{1}{\sin(z)} + z \quad / -z \\ z'x &= \frac{1}{\sin(z)} \\ \frac{dz}{dx}x &= \frac{1}{\sin(z)} \quad / \cdot \sin(z) / \cdot dx / \cdot \frac{1}{x} \\ \sin(z)dz &= \frac{1}{x}dx \quad / \int \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin(z)dz &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\cos(z) &= C + \ln|x| \quad / \cdot (-1) \\ \cos(z) &= C - \ln|x| \quad / \arccos \\ \arccos(\cos(z)) &= \arccos(C - \ln|x|) \\ z(x) &= \arccos(C - \ln|x|) \\ \text{Rücksubstituieren: } &z = \frac{y}{x} \\ \frac{y(x)}{x} &= \arccos(C - \ln|x|) \quad / \cdot x \\ y(x) &= x \cdot \arccos(C - \ln|x|) \end{aligned}$$

Homogene ODE's höherer Ordnung: Eulerscher Ansatz

Wir betrachten lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad a_n \neq 0$$

Schritt 1: Eulerscher Ansatz Wir setzen

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Dann gilt $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$, und nach Einsetzen erhält man

$$e^{\lambda x} (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

Da $e^{\lambda x} \neq 0$, folgt die *charakteristische Gleichung*

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Schritt 2: Nullstellen bestimmen Bestimme die (ggf. komplexen) Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des charakteristischen Polynoms inklusive ihrer Vielfachheiten.

Schritt 3: Allgemeine Lösung aufbauen

- **Reelle, einfache Nullstelle** λ : $y(x) = C e^{\lambda x}$

- **Reelle Nullstelle** λ mit Vielfachheit r :

$$y(x) = (C_0 + C_1 x + \cdots + C_{r-1} x^{r-1}) e^{\lambda x}$$

- **Komplexes (konjugiertes) Paar** $\lambda = \alpha \pm i\beta$, ($\beta \neq 0$):

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

- **Rein Imaginäre Nullstellen** $\lambda = \pm i\beta$, ($\beta \neq 0$): *Hinweis: Rein imaginäre Nullstellen sind ein Spezialfall der komplexen Eigenwerte wo der Realteil $\alpha = 0$ ist.*

$$y(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$$

Hinweis Bei einer Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält die allgemeine Lösung typischerweise n unbekannte Konstanten. Um daraus eine eindeutige spezielle Lösung zu erhalten, benötigt man daher n unabhängige Nebenbedingungen (z. B. Anfangswerte), mit denen diese Konstanten bestimmt werden.

Beispielaufgaben (Eulerscher Ansatz)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Euler-Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

~~$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$~~

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

$y(x) = C_1 e^{1 \cdot x} + C_2 e^{2 \cdot x}$

$$2 = y(0)$$

$$2 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 \rightarrow C_1 + C_2 = 2$$

$$C_1 = 2 - C_2$$

$$y(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$$

$$5 = y'(0)$$

$$5 = C_1 + 2C_2$$

$$5 = 2 - C_2 + 2C_2 \rightarrow 5 = 2 + C_2$$

$$C_2 = 3$$

$$C_1 = 2 - 3 = -1$$

$y(x) = -e^x + 3e^{2x}$

Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(3)}(x) = 0$$

$y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

Euler Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$y^{(3)}(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}$$

$$y^{(4)}(x) = \lambda^4 e^{\lambda x}$$

~~$\lambda^4 e^{\lambda x} + \lambda^3 e^{\lambda x} = 0 \quad /: e^{\lambda x}$~~

$$\lambda^4 + \lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3 (\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$

3-fache (reelle) Nullstelle

Für $\lambda_1 = 0$ (3-fach)

$$y_{\lambda_1=0}(x) = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2$$

Für $\lambda_2 = -1$

$$y_{\lambda_2=-1}(x) = C_3 \cdot e^{-x}$$

Beide Teillösungen zusammenführen:

$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^{-x}$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Bestimme zuerst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$m x''(t) + k x(t) = 0 \quad k, m > 0$$

Löse dann das Anfangswertproblem

$$x(0) = s_0, \quad x'(0) = v_0$$

Hinweis: Diese Differentialgleichung beschreibt den harmonischen Oszillatoren, z. B. ein ungedämpftes Feder-Masse-System. Dabei sind k und m positive reelle Konstanten. In diesem Kontext bezeichnen wir t als Zeitvariable und $x(t)$ als die zugehörige Auslenkung.

$$\begin{aligned} mx'' + kx &= 0 \\ \text{Euler Ansatz} \\ x(t) &= e^{\lambda t}, \quad x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \\ m\lambda^2 e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} &= 0 \quad /: e^{\lambda t} \\ m\lambda^2 + k &= 0 \quad /-k \\ m\lambda^2 &= -k \quad /:m \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \quad / \sqrt{} \\ \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \\ \underline{\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}} \\ \text{Rein imaginäre NST.} \\ \downarrow \\ x(t) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 &= x(0) \\ s_0 &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) \\ \underline{s_0 = C_1} \\ v_0 &= x'(0) \\ v_0 &= -\omega s_0 \sin(0) + \omega C_2 \cos(0) \\ v_0 &= \omega C_2 \quad /: \omega \\ \underline{\frac{v_0}{\omega} = C_2} \\ \downarrow \\ x(t) &= s_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zum Schreibarbeit sparen definieren} \\ \text{wir } \sqrt{\frac{k}{m}} &= \omega \\ \downarrow \\ x(t) &= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \\ \underline{x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)} \\ x'(t) &= -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Inhomogene ODEs höherer Ordnung (Störfunktion)

Wir betrachten lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = s(x), \quad a_n \neq 0,$$

wobei $s(x)$ die **Störfunktion** (Inhomogenität) ist.

Vorgehen

1) Homogene Gleichung lösen Zuerst löst man die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(z. B. mit dem Eulerschen Ansatz) und erhält die homogene Lösung

$$y_{\text{hom}}(x)$$

2) Ansatz für eine partikuläre Lösung Anschliessend stellt man passend zur Störfunktion $s(x)$ einen Ansatz für eine partikuläre Lösung auf:

$$y_{\text{part}}(x) \text{ (Ansatz)}$$

3) Einsetzen und Koeffizienten von $y_{\text{part}}(x)$ bestimmen Man setzt $y_{\text{part}}(x)$ (und seine Ableitungen) in die inhomogene Differentialgleichung ein und bestimmt die unbekannten Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich.

4) Allgemeine Lösung Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

Ansatzwahl für die partikuläre Lösung (Mini-Tabelle)

Störfunktion $s(x)$	Ansatz für $y_{\text{part}}(x)$
Polynom $s(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ <i>Spezialfall: 0 ist m-fache Nullstelle des char. Polynoms</i>	$y_{\text{part}}(x) = C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n$ $y_{\text{part}}(x) = x^m(C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n)$
Exponentialfunktion $s(x) = Ae^{kx}$ <i>Spezialfall: k ist m-fache Nullstelle des char. Polynoms</i>	$y_{\text{part}}(x) = Ce^{kx}$ $y_{\text{part}}(x) = C x^m e^{kx}$
Schwingung $s(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$ <i>Spezialfall: $\pm i\omega$ ist m-fache Nullstelle des char. Polynoms</i>	$y_{\text{part}}(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ $y_{\text{part}}(x) = x^m(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$

Beispielaufgabe (inhomogene ODE 2. Ordnung)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

homogene
Lösung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

1) homogen

Euler Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \quad /:e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{hom}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2) Partikular

$$s(x) = e^{3x}$$

(Störfkt. ist Exponentialfkt.)

$$y_{\text{part}}(x) = Ae^{3x}$$

$$y'_{\text{part}}(x) = 3Ae^{3x}$$

$$y''_{\text{part}}(x) = 9Ae^{3x}$$

3) Koeffizienten

$$\text{von } y_{\text{part}} \quad y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

$$9Ae^{3x} - 3 \cdot 3Ae^{3x} + 2 \cdot Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$9A - 9A + 2A = 1$$

$$9A - 9A + 2A = 1$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\underline{y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2}e^{3x}}$$

4) Allgemeine Lösung

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

$$\underline{y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}}$$

$$\underline{y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}e^{3x}}$$

$$0 = y(0)$$

$$0 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \frac{1}{2} e^0 \rightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$1 = y'(0)$$

$$1 = C_1 + 2C_2 + \frac{3}{2}$$

$$1 = -C_2 - \frac{1}{2} + 2C_2 + \frac{3}{2}$$

$$1 = C_2 + 1 \quad | -1$$

$$\underline{C_2 = 0} \rightarrow C_1 = -1 - \frac{1}{2} \rightarrow \underline{C_1 = -\frac{1}{2}}$$

↓

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^x + 0 \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

$$\underline{y(x) = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{3x}}$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3x + x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

1) Homogen

Euler Ansatz direkt

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \lambda = 1 &\quad \left. \begin{array}{l} \text{2-fache} \\ \text{reelle NST.} \end{array} \right. \\ y_{\text{hom}}(x) &= (C_0 + C_1 x) e^{1 \cdot x} \end{aligned}$$

2) Partikulär

$$\begin{aligned} s(x) &= 3x + x^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Polynom} \\ \text{2. Grad} \end{array} \right. \\ y_{\text{part}}(x) &= ax^2 + bx + c \\ y_{\text{part}}'(x) &= 2ax + b \\ y_{\text{part}}''(x) &= 2a \end{aligned}$$

3) Koeff. von y_{part} finden

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 3x + x^2 \\ 2a - 2 \cdot (2ax + b) + ax^2 + bx + c &= 3x + x^2 \\ ax^2 + bx - 4ax + 2a - 2b + c &= x^2 + 3x + 0 \\ x^2: a &= 1 \\ x^1: b - 4a &= 3 \\ b - 4 \cdot 1 &= 3 \quad /+4 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

$$y_{\text{part}}(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_{\text{part}}(x) = x^2 + 7x + 12$$

4) Allgemeine Lösung

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

$$y(x) = (C_0 + C_1 x) e^x + x^2 + 7x + 12$$

$$0 = y(0)$$

$$0 = (C_0 + C_1 \cdot 0) e^0 + 0^2 + 7 \cdot 0 + 12$$

$$0 = C_0 + 12 \quad \rightarrow \quad C_0 = -12$$

$$y(x) = [-12 + C_1 x] e^x + x^2 + 7x + 12$$

$$\frac{d}{dx} \left| \begin{array}{l} u = -12 + C_1 x \\ u' = C_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} v = e^x \\ v' = e^x \end{array}$$

$$y'(x) = (C_1 - 12 + C_1 x) e^x + 2x + 7$$

$$1 = y'(0)$$

$$1 = (C_1 - 12 + C_1 \cdot 0) e^0 + 2 \cdot 0 + 7$$

$$1 = C_1 - 12 + 7$$

$$1 = C_1 - 5$$

$$C_1 = 6$$

$$y(x) = (-12 + 6x) e^x + x^2 + 7x + 12$$

$$C = 12$$