Mathematik I: Analysis A

Übungsstunde 9

Optimierungsaufgaben & Taylorreihen I

Visva Loganathan | vloganathan@student.ethz.ch | 17.11.2025

Material: visva-loganathan.ch

Überblick dieser Übungsstunde

1. Optimierungsaufgaben
2. Taylorreihen: Einführung

1 Optimierungsprobleme

Worum geht es? Bei Optimierungsproblemen möchte man den *grössten* oder *kleinsten* Wert einer bestimmten Grösse finden. Diese Grösse wird durch einen Term *(Hauptbedingung)* beschrieben, den man *Zielfunktion* nennt. Häufig hängen mehrere Grössen voneinander ab (z. B. Umfang, Länge, Höhe). Diese Abhängigkeiten nennt man *Nebenbedingungen*. Durch Einsetzen oder Umformen reduziert man die Zielfunktion in der Regel auf *eine* Variable. Danach untersucht man diese Funktion wie gewohnt auf Extremwerte.

Strategie für das Lösen von Extremwertproblemen:

1. **Hauptbedingung aufstellen:** Formel für die Grösse angeben, die maximiert oder minimiert werden soll. (Dies ist die spätere Zielfunktion und kann mehrere Variablen enthalten.)

2. **Nebenbedingungen finden:** Beziehungen zwischen den Variablen formulieren (z. B. Umfang, Volumen, geometrische Zusammenhänge).

3. **Zielfunktion bestimmen:** Nebenbedingungen verwenden, um die Zielfunktion auf *eine* Variable zu reduzieren.

4. **Untersuchen der Zielfunktion:** Ableiten, kritische Punkte bestimmen und Randwerte prüfen. Das Ergebnis verständlich formulieren (inkl. Einheiten).

Hinweise:

- Immer alle Kandidaten prüfen: kritische Punkte *und* die Randpunkte des Definitionsbereichs.

- Auf die Domäne achten: z. B. Längen > 0, Wurzel- oder Logarithmusbereiche.

- Resultat in Worten formulieren (mit Einheiten und Kontext).

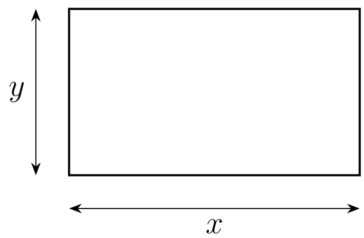
- Wenn möglich eine kleine Skizze zeichnen, um die Situation besser zu verstehen.

Aufgabe: Maximale Fläche bei festem Umfang

Ein Rechteck hat den festen Umfang $U > 0$. Die Seitenlängen seien x und y mit $x, y > 0$. Die Nebenbedingung lautet

$$2x + 2y = U$$

1. **Hauptbedingung aufstellen:** Stelle die Fläche des Rechtecks als Zielfunktion auf: $A = x \cdot y$
2. **Nebenbedingung verwenden:** Verwende die Umfangsbedingung, um y durch x auszudrücken.
3. **Zielfunktion bestimmen:** Setze den Ausdruck für y in den Flächenterm ein und erhalte eine Funktion $A(x)$ in *einer* Variablen. Bestimme den zulässigen Bereich für x.
4. **Untersuchung und Ergebnis:** Untersuche $A(x)$ auf Extremwerte (Ableiten, kritische Punkte, Rand prüfen). Gib die Werte von x und y an, für welche die Fläche maximal wird, und formuliere das Ergebnis in Worten (inkl. Einheiten, falls U in Metern gegeben ist).



1) HB

$A(x,y) = x \cdot y$

2) NB

$2x + 2y = U \quad / -2x$

$2y = U - 2x \quad / :2$

$y = \frac{U}{2} - x$

3) Zielfkt.

$A(x) = x \cdot \left(\frac{U}{2} - x\right)$

$A(x) = -x^2 + \frac{U}{2}x$

$x \in \mathbb{R}_0^+$

4) Ergebnis

$A'(x) = -2x + \frac{U}{2} \longrightarrow 0 = -2x + \frac{U}{2}$

$2x = \frac{U}{2} \quad /:2$

$x = \frac{U}{4}$ Maximum

$y = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \frac{U}{4}$

$\longrightarrow A(x,y) = \frac{U}{4} \cdot \frac{U}{4} = \frac{U}{16}$

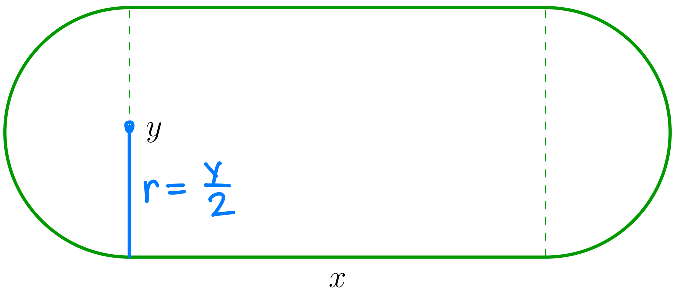
Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Im Bild ist eine Figur, die aus einem Rechteck und zwei Halbkreisen besteht.

1. Finde eine Formel für die Fläche.
2. Finde eine Formel für den Umfang.
3. Für welche Werte x und y ist die Fläche maximal, wenn der Gesamtumfang 100 m beträgt?

$A_{Kreis} = \pi r^2$

$U_{Kreis} = 2\pi r$



1) A(x,y)

$$A_{ges}(x,y) = 2\,A_{Halbkreis} + A_{rechteck}$$

$$A_{ges} = \cancel{2\cdot\frac{1}{2}}\left(\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) + x\cdot y$$

$$A_{ges} = \frac{\pi}{4}y^2 + xy$$

2) Umfang

$$U = 2\,U_{Halbkreisbogen} + U_{Strecke}$$

$$U = 2\left(\pi\cdot\frac{y}{2}\right) + 2x$$

$$U = 2x + \pi y$$

3) A maximal

$$U = 2x + \pi y \quad /-\pi y$$

$$2x = U - \pi y \quad /:2$$

$$\left\{x = \frac{U-\pi y}{2}\right\}$$

$$A_{ges}(y) = \frac{\pi}{4}y^2 + \frac{U-\pi y}{2}\cdot y$$

$$A_{ges}(y) = \frac{\pi}{4}y^2 + \frac{U}{2}y - \frac{\pi}{2}y^2$$

$$A_{ges}(y) = -\frac{\pi}{4}y^2 + \frac{U}{2}y \qquad y \in \mathbb{R}_0^+$$

$$A'_{ges}(y) = -\frac{\pi}{2}y + \frac{U}{2} = 0$$

$$\frac{\pi}{2}y = \frac{U}{2} \quad /\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$\left.y = \frac{U}{\pi}\right\}\text{Max.}$$

$$x = \frac{U-\pi y}{2}, \quad x = \frac{U-\pi\cdot\frac{U}{\pi}}{2}$$

$$x = \frac{U-U}{2} = 0\,m$$

Maximale Fläche wenn Rechteckiges Stück verschwindet: Nur Kreisfläche

$$A_{ges}\left(0, \frac{U}{\pi}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{U}{\pi}\right)^2 + 0\cdot\frac{U}{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{U^2}{\pi^2} = \frac{U^2}{4\pi}$$

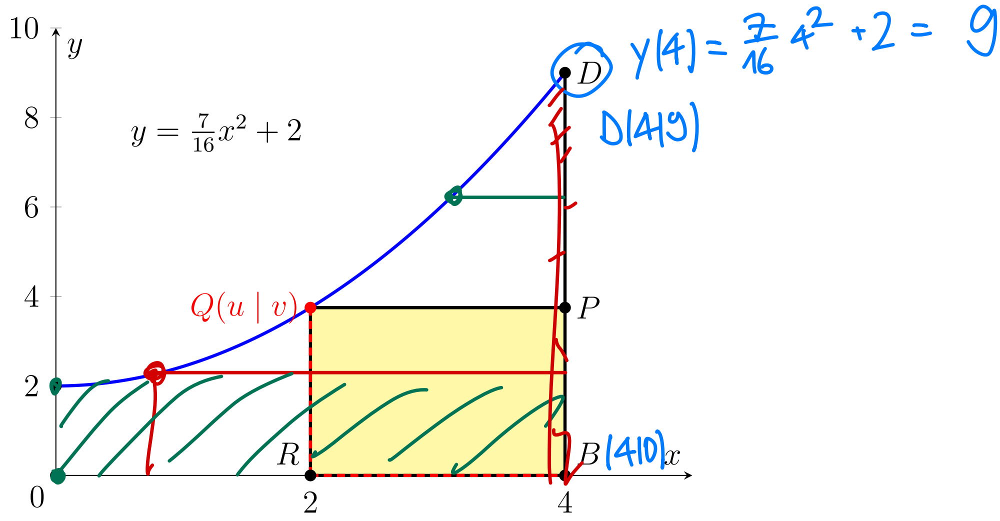
$$U = \frac{(100m)^2}{4\pi} \approx 795.8\,m^2$$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Der Punkt $Q(u \mid v)$ liegt auf dem Graphen von f mit

$$f(x) = \frac{7}{16}x^2 + 2, \qquad x \in [0, 4]$$

Für welche Lage von Q wird die Fläche des gelben Rechtecks $RBPQ$ maximal?



Fläche Rechteck

Breite $= 4 - u$

Höhe $= v = f(u) = \frac{7}{16}u^2 + 2$

$A =$ Breite · Höhe

$A(u) = (4-u)\left(\frac{7}{16}u^2 + 2\right)$

$A(u) = -\frac{7}{16}u^3 + \frac{7}{4}u^2 - 2u + 8$

$A'(u) = -\frac{21}{16}u^2 + \frac{7}{2}u - 2$

$A''(u) = -\frac{21}{8}u + \frac{7}{2}$

$0 = A'(u)$

$0 = \underbrace{-\frac{21}{16}}_{a=-\frac{21}{16}}u^2 + \underbrace{\frac{7}{2}}_{b=\frac{7}{2}}u \underbrace{-2}_{c=-2}$

Mitternachtsformel / Poly-Solv

$u_{1,2} = \frac{28 \pm 4\sqrt{7}}{21}$ $\begin{cases} u_1 \approx 0.83 \\ u_2 \approx 1.84 \end{cases}$

$A''(u_1 \approx 0.83) > 0 \rightarrow u_1$ lokales Min

$A''(u_2 \approx 1.84) < 0 \rightarrow u_2$ lokales Max

$A(u_2) \approx 7.52$ } lokales Max.

Randpunkte

$A(0) = 8$ } globales Maximum

$A(4) = 0$

Maximale Fläche von 8 FE

bei $u = 0$ (Randpunkt)

$\sin(\theta) \approx \theta$ (gilt für kleine Winkel θ)

2 Taylorreihen: Einführung

Idee Glatte Funktionen lassen sich lokal um einen Punkt x_0 durch Polynome approximieren. Das *Taylorpolynom n-ter Ordnung* von f um x_0 ist

$$\lim_{n\to\infty} \qquad T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

Kurz: $f(x) = T_n f(x) + \mathcal{O}(x^{n+1})$ für x nahe bei x_0.

Taylorreihe Die *Taylorreihe* von f um x_0 ist die formale Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

falls sie konvergiert (und im besten Fall zu f). Anschaulich kann man die Taylorreihe als das „Taylorpolynom ohne Abbruch“ betrachten, also als die Version mit unendlich vielen Gliedern – gewissermassen das „Taylorpolynom der Ordnung unendlich“.

Maclaurin (Spezialfall $x_0 = 0$)

$$T_n f(x)\big|_{x_0=0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \text{ ist die Maclaurin-Reihe.}$$

Klassische Beispiele (Entwicklung um $x_0 = 0$, mit Konvergenzbereich)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad x \in \mathbb{R}$$

x^0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad |x| < 1,\ \text{bei } x = 1 \text{ bedingt}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Anwendung (Daumenregeln)

- *Approximieren:* Wähle $\cancel{x_0}$ x_0 nahe beim interessierenden x und ersetze f durch $T_n f$.

- Mit Taylorpolynomen darf man ganz normal rechnen. Man addiert, subtrahiert oder multipliziert sie wie gewöhnliche Polynome. Man darf auch ein Taylorpolynom in ein anderes einsetzen (Komposition). Wichtig: Nach jedem Rechenschritt werden alle Terme weggelassen, die eine höhere Ordnung als die gewünschte besitzen. Zum Beispiel bleibt bei einer Entwicklung bis zur 3. Ordnung alles mit $(x - x_0)^4$ oder höher weg.

- *Konvergenz:* Es gibt einen *Konvergenzradius* R; für $|x - x_0| < R$ konvergiert die Taylorreihe. Konvergenz der Reihe bedeutet nicht automatisch, dass sie f darstellt (Stichwort: Analytizität).

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2$

Übungsaufgabe (für die Studierenden)

Betrachte die Funktion $f(x) = e^x$ und entwickle um den Punkt $x_0 = 0$ (Maclaurin-Entwicklung). Bestimme die Taylorpolynome $T_1(x)$, $T_2(x)$ und $T_3(x)$ von f um $x_0 = 0$, d. h.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (n = 1, 2, 3).$$

- Welches der Polynome approximiert f in einer Umgebung von 0 am besten?

- Was kann man beobachten, wenn man sich weiter von $x = 0$ entfernen?

$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \longrightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \longrightarrow f'''(0) = 1$

$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 1 + 1(x-0) = 1+x$

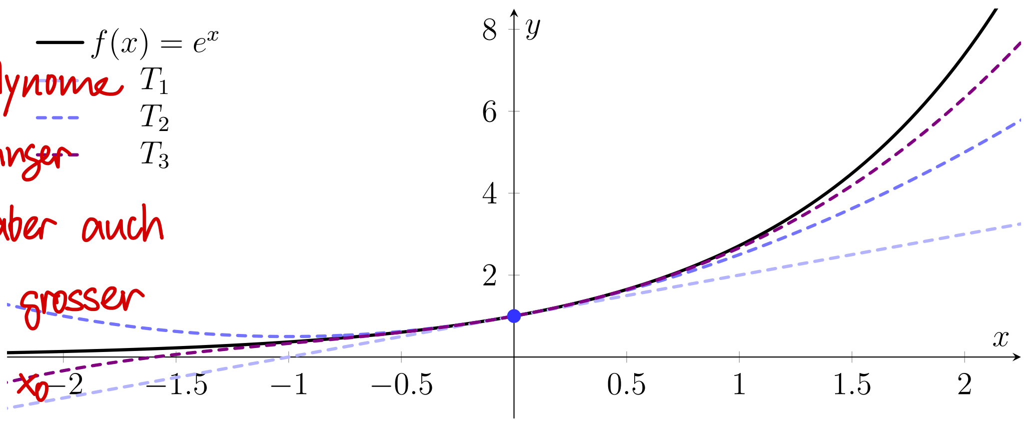
$T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 = 1+x + \frac{1}{2} \cdot 1(x-0)^2 = 1+x+\frac{1}{2}x^2$

$T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 = 1+x+\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}(x-0)^3 = 1+x+\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Die Abweichung von $f(x) = e^x$ zu den Taylorpolynomen wächst je weiter wir uns von $x_0 = 0$ entfernen!

Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Taylorpolynomen:

Höhere Taylorpolynome bleiben zwar länger nah an e^x, aber auch sie werden bei grosser Entfernung zu x_0 ungenau!



Übungsaufgaben (für die Studierenden)

1. **Sinusfunktion:** Bestimme die Taylorpolynome $T_1(x)$, $T_2(x)$ und $T_3(x)$ von $f(x) = \sin(x)$ um $x_0 = \pi$. Notiere die resultierenden Polynome explizit.

$f(x) = \sin(x) \rightarrow f(\pi) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(\pi) = -1$

$f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f''(\pi) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f'''(\pi) = 1$

$T_1(x) = f(\pi) + f'(\pi)\cdot(x-\pi) = 0 + (-1)\cdot(x-\pi) = -(x-\pi)$

$T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}f''(\pi)\cdot(x-\pi)^2 = -(x-\pi) + \frac{1}{2}\cdot 0\,(x-\pi)^2 = -(x-\pi)$

$T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{3!}f'''(\pi)\cdot(x-\pi)^3 = -(x-\pi) + \frac{1}{6}\cdot 1\,(x-\pi)^3 = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3$

2. **Logarithmus (Entwicklung um $x_0 = 1$):** Sei $f(x) = \ln(x)$ mit Definitionsbereich $(0, \infty)$. Bestimme die Taylorpolynome $T_1(x)$ und $T_2(x)$ von f um $x_0 = 1$. Verwende anschliessend $T_2(1.1)$ als Näherung für $\ln(1.1)$.

$f(x) = \ln(x) \rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(1) = -1$

$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1\cdot(x-1) = (x-1)$

$T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 = (x-1) + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(x-1)^2 \rightarrow \underline{\underline{T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2}}$

$T_2(1.1) = 1.1 - 1 - \frac{1}{2}(1.1-1)^2 = 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.1 - \frac{1}{2}\cdot 0.01 = 0.1 - 0.005$

$\rightarrow \underline{\underline{T_2(1.1) = 0.0950}}$

Sehr gute Approximation, ln(1.1) ist tatsächlich $\ln(1.1) \approx 0.0953$

3. **Wurzelfunktion:** Sei $f(x) = \sqrt{x}$. Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ von f um $x_0 = 4$. Verwende dieses Polynom, um $\sqrt{4.1}$ zu approximieren.

$$f(x) = x^{1/2} \qquad f(4) = 2$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \qquad f'(4) = \tfrac{1}{4}$$
$$f''(x) = -\tfrac{1}{4}x^{-3/2} \qquad f''(4) = -\tfrac{1}{32}$$

$$T_1(x) = f(4) + f'(4)(x-4) = 2 + \tfrac{1}{4}(x-4)$$
$$T_2(x) = T_1(x) + \tfrac{1}{2!}f''(4)(x-4)^2 = 2 + \tfrac{1}{4}(x-4) + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{32}\right)(x-4)^2$$
$$T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{4}(x-4) - \tfrac{1}{64}(x-4)^2$$

$$T_2(4.1) \approx 2.02484$$

sehr genau, $\sqrt{4.1} \approx 2.02485$

4. **Flächenapproximation mit Taylor:** Sei $f(x) = e^{-x^2}$. Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von f um $x_0 = 0$ (Maclaurin-Entwicklung). Verwende anschliessend $T_2(x)$, um die Fläche unter dem Graphen von f auf dem Intervall $[0, 1]$ näherungsweise zu berechnen, das heisst berechne:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 T_2(x)\,dx$$

$$f(x) = e^{-x^2} \longrightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \longrightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2} \longrightarrow f''(0) = -2$$

$$T_1(x) = 1 + 0\cdot(x-0) = 1$$
$$T_2(x) = 1 + \tfrac{1}{2!}\cdot(-2)\cdot(x-0)^2 = 1 - x^2$$

$$A = \int_0^1 T_2(x)\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left[x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \tfrac{1}{3}(1)^3 - 0$$

$$A = \tfrac{2}{3} \approx 0.6667$$

Gar nicht mal so weit daneben!

Exakter Wert des Integrals: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(1) \approx 0.7468$

Im Fach Informatik werdet ihr lernen wie man numerische Integration von komplizierten Fkt. mithilfe Taylorpolynomen durchführt!