

---

# Mathematik I: Analysis A

---

## Übungsstunde 4

*Folgen*

Visva Loganathan | [vloganathan@student.ethz.ch](mailto:vloganathan@student.ethz.ch) | 13.10.2025

*Material: [visva-loganathan.ch](http://visva-loganathan.ch)*

## Überblick dieser Übungsstunde

1. Folgen
2. Beschränktheit
3. Monotonieverhalten
4. Grenzwert & Konvergenz
5. Analytische Ermittlung von Grenzwerten
6. Sandwich-Theorem

# 1 Folgen

## Definition & Notation

Eine Folge ist eine Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto a_n$ . Wir schreiben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder kurz  $(a_n)$ .  
Typische Folgen:

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}, \quad a_n = c^n, \quad a_n = \sqrt[n]{x}, \quad a_n = (-1)^n \cdot b_n$$

## Typische Beispiele

- Rationale Folge:  $a_n = \frac{3n^2 + 1}{n^3 + 2}$
- Potenz-/Wurzelfolge:  $b_n = n^{1/n}$ ,  $c_n = \sqrt[n]{5}$
- Alternierend:  $d_n = (-1)^n$ ,  $e_n = \frac{(-1)^n}{n}$

## Beispielaufgabe

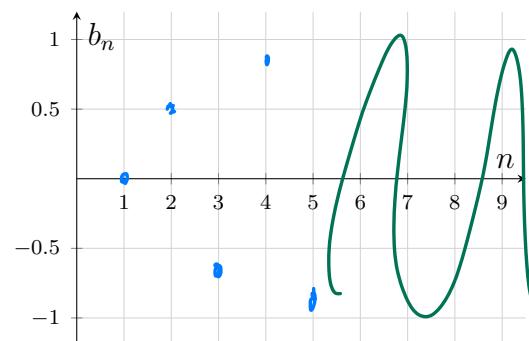
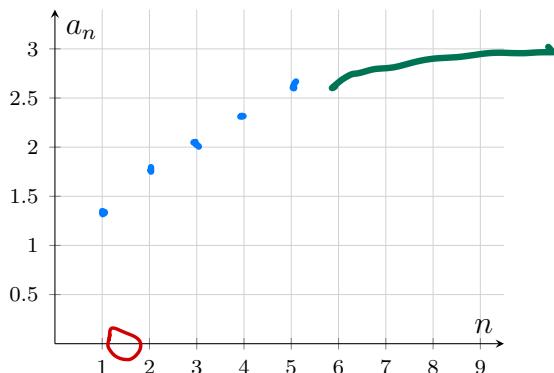
Gegeben ist  $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$  und  $b_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

1. Bestimme die ersten sechs Terme von  $a_n$  und  $b_n$ .

$$a_1 = \frac{4}{3} \approx 1.33, \quad a_2 = \frac{7}{4} \approx 1.75, \quad a_3 = \frac{10}{5} = 2,$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad b_3 \approx -0.67$$

2. Beschreibe jeweils in einem Satz das qualitative Verhalten für grosse  $n$  (z. B. „wächst/-fällt“, „pendelt“, „stabilisiert sich“).



## 2 Beschränktheit von Folgen

### Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heisst *nach oben beschränkt*, falls es  $C \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_n \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (obere Schranke). *Nach unten beschränkt*, falls  $a_n \geq c$  für alle  $n$  (untere Schranke). *Beschränkt* bedeutet: es existieren  $c \leq C$  mit  $c \leq a_n \leq C$  für alle  $n$  (obere & untere Schranke).

### Supremum/Infimum als Werkzeug

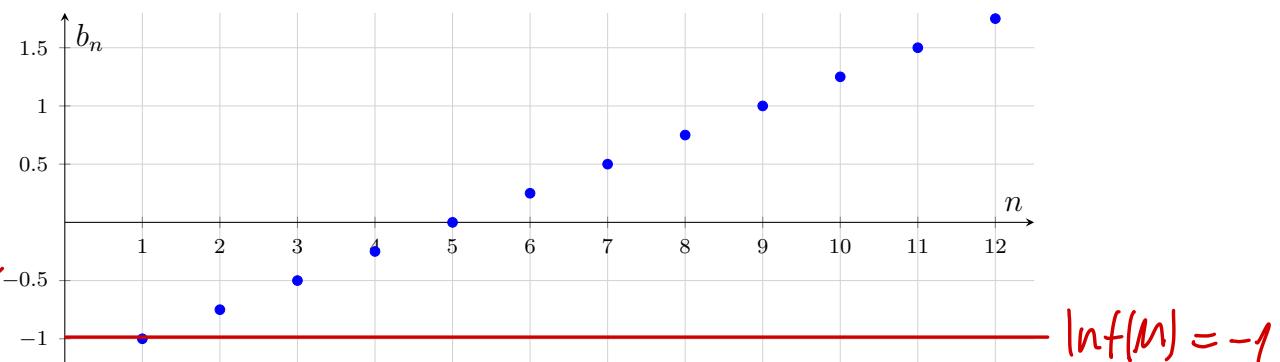
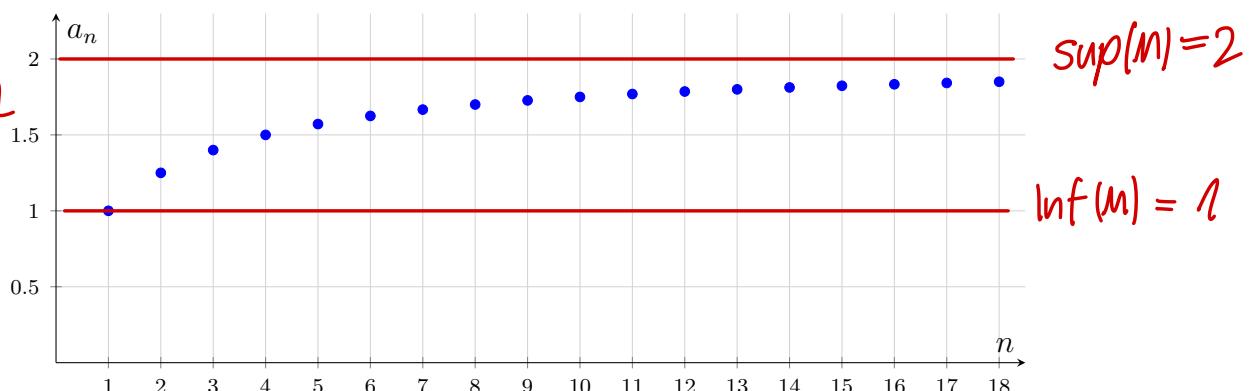
Für die Menge der Folgenterme  $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ :

- Ist  $(a_n)$  nach oben beschränkt, so existiert  $\sup M$ .
- Ist  $(a_n)$  nach unten beschränkt, so existiert  $\inf M$ .

(Zur Erinnerung: Supremum und Infimum wurden bereits in ÜS 1 eingeführt; hier verwenden wir sie nur. Außerdem genügen zur Betrachtung der Schranken Supremum und Infimum; ob zusätzlich ein Maximum bzw. Minimum vorliegt, muss nicht ermittelt werden.)

### Beispielaufgaben

Schranken für  $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$  und  $b_n = \frac{n-5}{4}$



### 3 Monotonieverhalten von Folgen

#### Idee

Eine Folge  $(a_n)$  heisst *monoton*, wenn ihre Werte ohne Richtungswechsel entweder nur steigen oder nur fallen. Wir formulieren das hier bewusst einfach/intuitiv (ohne Beweise).

#### Vier Fälle in Kürze

Typ	In Worten	Rechenkriterium
$\underline{1, 2, 2, 3, 4, 5}$ Monoton steigend	Jedes Folgeglied ist <b>grösser oder mindestens gleich gross</b> wie die vorherigen.	$a_{n+1} \geq a_n$
$\underline{1, 2, 3, 4, \dots}$ <b>Streng</b> monoton steigend	Jedes Folgeglied ist <b>strikt grösser</b> als die vorherigen.	$a_{n+1} > a_n$
Monoton fallend	Jedes Folgeglied ist kleiner oder höchstens <b>gleich gross</b> wie die vorherigen.	$a_{n+1} \leq a_n$
<b>Streng</b> monoton fallend	Jedes Folgeglied ist <b>strikt kleiner</b> als die vorherigen.	$a_{n+1} < a_n$

#### Praktische Checks

- Differenzen-Test:  $\Delta_n := a_{n+1} - a_n$ . Gilt  $\Delta_n \geq 0$  (bzw.  $\leq 0$ ) für alle  $n$ , dann ist die Folge monoton steigend (bzw. fallend).
- Für positive Folgen kann man auch Quotienten anschauen:  $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .  $q_n \geq 1$  (bzw.  $\leq 1$ ) für alle  $n \Rightarrow$  monoton steigend (bzw. fallend).
- Häufig reicht „monoton ab einem  $N_0$ “ (d. h. für alle  $n \geq N_0$ ) – das ist in Anwendungen genauso nützlich.

#### Spezialfall: alternierende Folgen

Eine Folge heisst *alternierend*, wenn die Vorzeichen der Terme abwechseln:

$$a_n = (-1)^n u_n \quad (u_n \geq 0).$$

Anschaulich „springt“ die Folge zwischen positiven und negativen Werten hin und her.

**Alternierende Folgen sind in der Regel *nicht monoton*.**

## 4 Konvergenz über den Grenzwertbegriff

### Definition

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge. Wir sagen, die Folge konvergiert gegen  $L \in \mathbb{R}$ , wenn der Grenzwert existiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Kurz: Existiert ein (endlicher) Grenzwert, dann ist die Folge konvergent – und zwar genau gegen diesen Wert  $L$ . (Keine  $\varepsilon$ - $N$ -Formalismen hier nötig.)

### Terminologie

$$a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, -1, 1$$

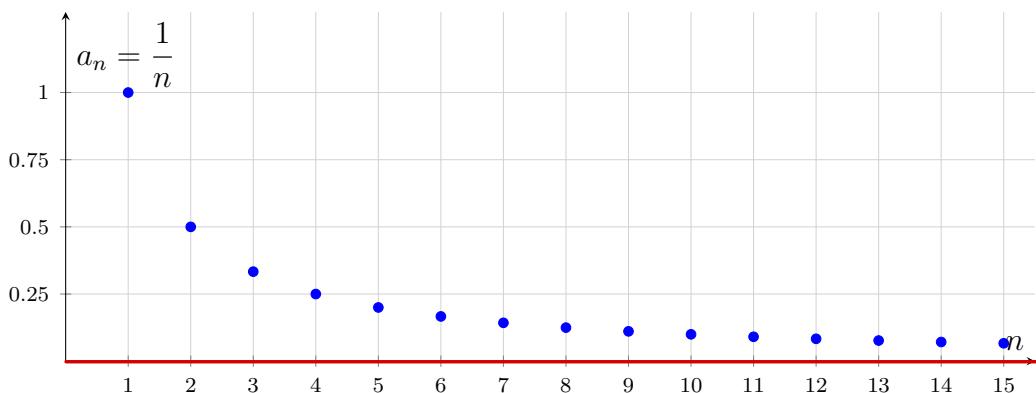
- **Konvergent:**  $\exists L \in \mathbb{R}$  mit  $\lim a_n = L$ .
- **Divergent:** Kein endlicher Grenzwert. Typische Fälle:
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (wächst „nach oben hinaus“),
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  (fällt „nach unten hinaus“),
  - oszillierend (z. B. wechselnde Vorzeichen oder Hin-und-her-Springen ohne Annäherung, alternierende Funktionen).

### Wichtige Hinweise

- Der Grenzwert (falls vorhanden) ist eindeutig.
- $\lim a_n = L$  impliziert automatisch: die Folge ist beschränkt (ab einem gewissen  $n$ ) und „stabilisiert“ sich in der Nähe von  $L$ .

### Nützliches Existenz-Kriterium

Ist eine Folge monoton und beschränkt, dann existiert ein (endlicher) Grenzwert. Damit kann man Konvergenz oft ohne konkretes Ausrechnen eines Grenzwerts begründen.

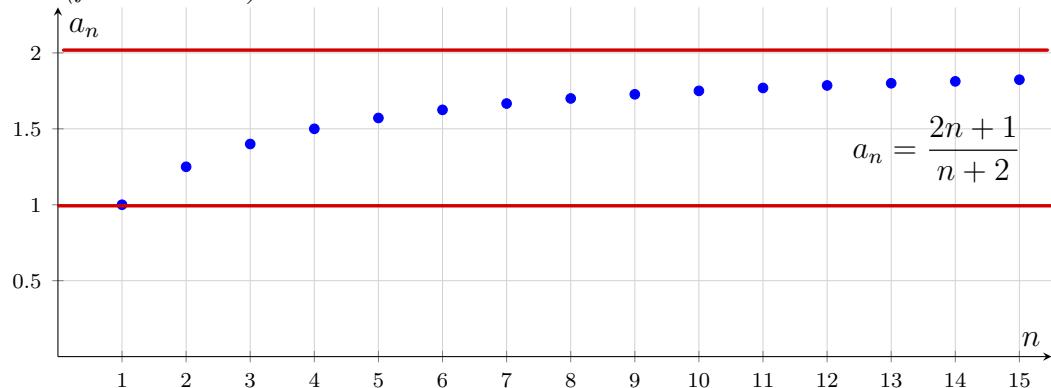


Strengh monoton fallende und nach unten beschränkte Folge; die untere Schranke (Infimum) ist der Grenzwert, hier 0.

$$\frac{-3n^2 + 5}{-7n + 1} = \frac{\cancel{n^2}(-3 + \frac{5}{n})}{\cancel{n^2}(-7 + \frac{1}{n})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{-3}{0}$$

## Übungsaufgaben (für die Studierenden)

Ermittle grafisch für jede Folge die Beschränktheit, Monotonie, das Konvergenzverhalten und (falls existent) den Grenzwert.



Eigenschaften ( $a_n$ )

Beschränktheit: **Beschränkt**

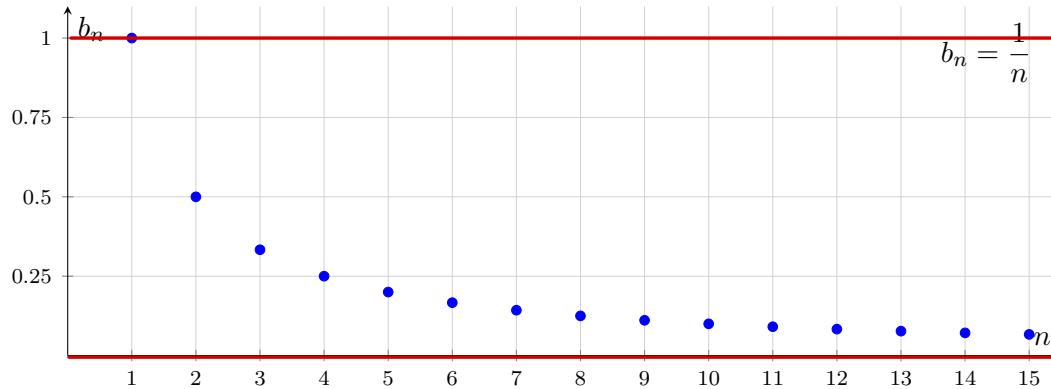
Obere Schranke: **Sup(M) = 2**

Untere Schranke: **Inf(M) = 1**

Monotonie: **SMS**

Konvergenz: **Konvergiert**

Grenzwert: **2**



Eigenschaften ( $b_n$ )

Beschränktheit: **Beschränkt**

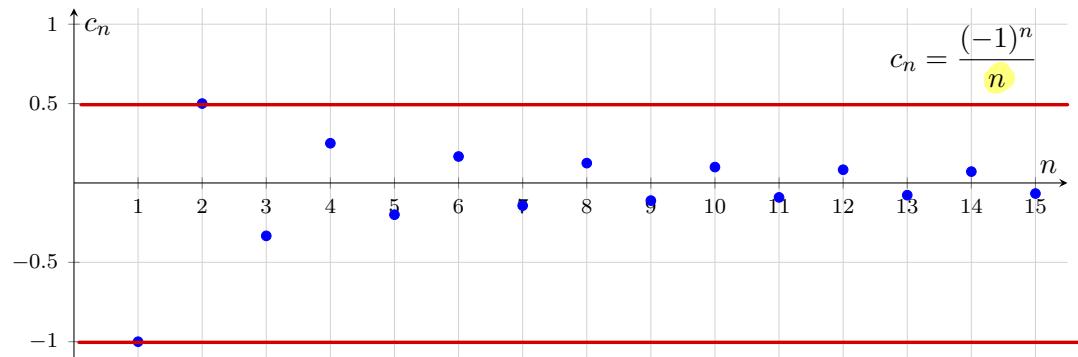
Obere Schranke: **1**

Untere Schranke: **0**

Monotonie: **Smf**

Konvergenz: **Konvergiert**

Grenzwert: **0**



Eigenschaften ( $c_n$ )

Beschränktheit: **Beschränkt**

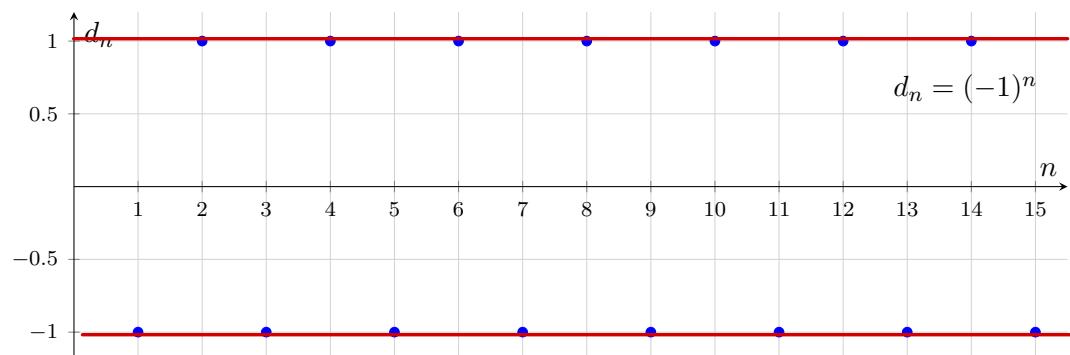
Obere Schranke:  **$\frac{1}{2}$**

Untere Schranke: **-1**

Monotonie: **alternierend**

Konvergenz: **Konvergiert**

Grenzwert: **0**



Eigenschaften ( $d_n$ )

Beschränktheit: **Beschränkt**

Obere Schranke: **1**

Untere Schranke: **-1**

Monotonie: **alternierend**

Konvergenz: **Divergiert**

Grenzwert: **X**

## 5 Analytische Ermittlung von Grenzwerten

### Worum geht's?

Viele Folgenlimits sind *offensichtlich* (z. B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n, n^2 \rightarrow +\infty$ ). Für den Rest reichen ein paar einfache Werkzeuge. Details zu Grenzwerten von *Funktionen* kommen später im Kurs; hier geht es nur um schnelle, übungsorientierte Regeln für *Folgen*.

### Brüche aus Polynomen (Zähler/Nenner in $n$ )

**Rezept:** Durch die höchste Potenz von  $n$  im Nenner teilen.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^n} = \frac{\infty}{\infty} \neq 1 ?$$

Beispiele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-7}{2n^3+9n} = \frac{5}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \deg p < \deg q, \\ \frac{\text{Leitkoeff}(p)}{\text{Leitkoeff}(q)}, & \deg p = \deg q, \\ \pm\infty, & \deg p > \deg q. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3-7}{2n^3+9n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(5 - \frac{7}{n^3}\right)}{n^3 \left(2 + \frac{9}{n^2}\right)} \\ &\stackrel{n^3 \rightarrow \infty}{=} \frac{5 - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{9}{n^2}} \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{n^3}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{n^2}\right)} \\ &= \frac{5 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

### Wachstumshierarchie (wer „gewinnt“?)

Wenn sowohl Zähler als auch Nenner gegen unendlich wachsen, entscheide nach Wachstums geschwindigkeit. Für  $n \rightarrow \infty$  gilt (Faustregel, von schnell nach langsam):

$$\frac{5 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$$

$$n^n \gg n! \gg a^n (a > 1) \gg n^k (k > 0) \gg \log n$$

Konsequenzen für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(10n)}{n^3} = 0$$

- **Nenner** wächst *strikt schneller*  $\Rightarrow$  Grenzwert 0.

- **Zähler** wächst *strikt schneller*  $\Rightarrow +\infty$  (bzw.  $-\infty$  je nach Vorzeichen).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-3^n}{n^2} \right)$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n}{n^2} \right) = -\infty$$

Beispiele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (\text{Nenner } n^n \text{ gewinnt}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n!} \right) = 0$$

### Nützliche „Sonderlimits“ für die Formelsammlung

Diese tauchen oft auf und sind nicht sofort offensichtlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 (x > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

(Die letzten beiden helfen häufig beim Umformen.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/3}{n}\right)^n = e^{1/3} \\ &= \sqrt[3]{e} \end{aligned}$$

## Übungsaufgaben (für die Studierenden)

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 + n} = 2$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3^n} = \infty$$

## 6 Sandwich-Theorem

### Intuition

Manchmal ist ein direkter Grenzwert schwer zu berechnen. Dann klemmen wir die Folge  $(b_n)$  von oben und unten zwischen einfacheren Folgen ein — wie ein Sandwichbelag zwischen zwei Scheiben Brot.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle (hinreichend grossen) } n$$

Haben die äusseren Folgen denselben Grenzwert, so konvergiert  $b_n$  auch gegen diesen Wert.

### Aussage

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq N_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

Dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

**Nützliche Folgerung** Wenn  $|b_n| \leq a_n$  und  $a_n \rightarrow 0$ , dann folgt sofort  $b_n \rightarrow 0$ . (Der Trick für „oszillierende, aber immer kleinere“ Terme.)

**Wann Sandwich-Theorem anwenden?** Wenn sich ein Ausdruck elegant zwischen zwei bekannte Folgen klemmen lässt (z. B. über Betrag, Dreiecksungleichung, oder algebraische Umformung).

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

## Beispielaufgabe Sandwich-Theorem

Bestimme den Grenzwert  $L$  dieser Folge:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (n \geq 1)$$

## ① Umformen (hilfreich <sup>n</sup>fürs klemmen)

$$b_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow b_n = \frac{\cancel{\sqrt{n+1}} - \cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2x} < \frac{1}{x}$$

② Obere & untere Schrankenfolge wählen:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n+1}}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n}}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n}}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

### ③ Grenzwerte, "äußere" Fkt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (6n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{27^n} \right) = 0$$

## ④ Sandwich - Schluss

Da  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle  $n \geq 1$  gilt und beide Randfolgen gegen 0 konvergieren  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n}) = 0$