ალგორითმები და მონაცემთა სტრუქტურები

O-ნოტაცია.

ზ. კუჭავა, LaTeX

1 საწყისი უტოლობები

ალგორითმებისა და მონაცემთა სტრუქტურების თეორიის ერთერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა ალგორითმების სირთულის ფუნქციათა შედარება.

დავუშვათ, რომ ერთი ალგორითმის სირთულე მოიცემა მიმდევრობით $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ და მეორე ალგორითმის კი მიმდევრობით $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. თუ $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) \leqslant g(n)$ მაშინ, ბუნებრივია, ვამბობთ, რომ პირველი ალგორითმის სირთულე ნაკლებია მეორეზე.
თუ ზედა განმარტებაში დავაფიქსირებთ g ფუნქციას და განვიხილავთ ყველა შესაძლებელი f-ების სიმრავლეს, მაშინ g-ს ვუწოდებთ **ზედა საზღვარს** $\mathbb{N}$-ზე სიმრავლისთვის $\{f : f(n) \leqslant g(n)\}$.

განვიხილოთ რამოდენიმე მნიშვნელოვანი მაგალითი.

1.1 უტოლობები $\mathbb{N}$ სიმრავლეზე.

A.1 $n < 2^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

დავიწყოთ ორი ელემენტარული დამტკიცებით:

(a) $2^n = 2^n - 1 + 1 = 1 + 2 + ... + 2^{n-1} + 1 > n$ სადაც მეორე ტოლობაში გამოყენებულია $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + ... + b^{n-1})$, იგივეა, რაც გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყენება.

(b) როდესაც $n > k$, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:
$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} > 2^{n-2} + 2^{n-2} + 1 > 2^{n-3} + 2^{n-3} + 2 > ... > 2^{n-k+1} + (k-1)$ და როდესაც $n = k$, მაშინ დამტკიცება მიღებულია.

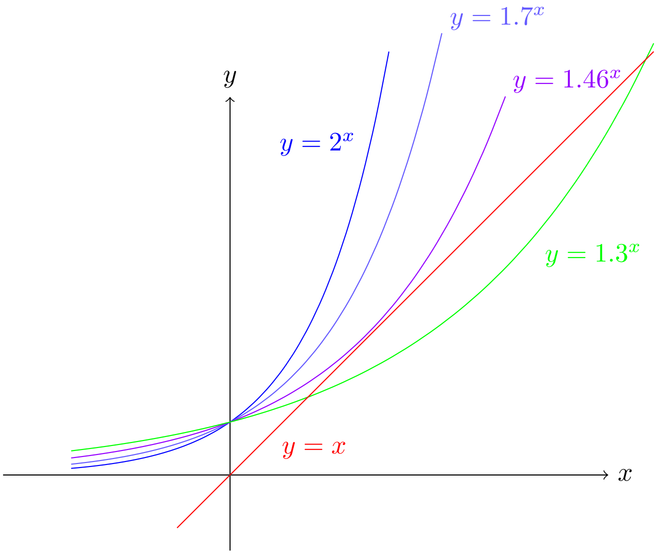
არალემენტარული დამტკიცება:

(c) განვიხილოთ $n > 1$ ელემენტიანი სიმრავლე. მისი ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n და ერთელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა n. ამდენად, დამტკიცებისთვის საკმარისია ერთი მაინც ორელემენტიანი ქვესიმრავლის არსებობა.

(d) ლიტერატურაში, ჩვეულებრივ, მიღებულია დამტკიცებები ინდუქციით ([1]12გვ., [2]11გვ.) ან ნიუტონის ბინომის გამოყენებით ([2]57გვ., [3]7გვ.).

A.2 $n < a^n, \; \forall n \in \mathbb{N}$ და $a \geqslant e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e}$ -ის. $\sqrt[e]{e} \approx 1.444667$

რადგან $n < a^n \Leftrightarrow lna > \dfrac{lnn}{n} \Leftrightarrow a > e^{\frac{1}{n} \cdot lnn}$ ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{lnx}{x}$ ფუნქციის მაქსიმუმი მიიღწევა e წერტილში.



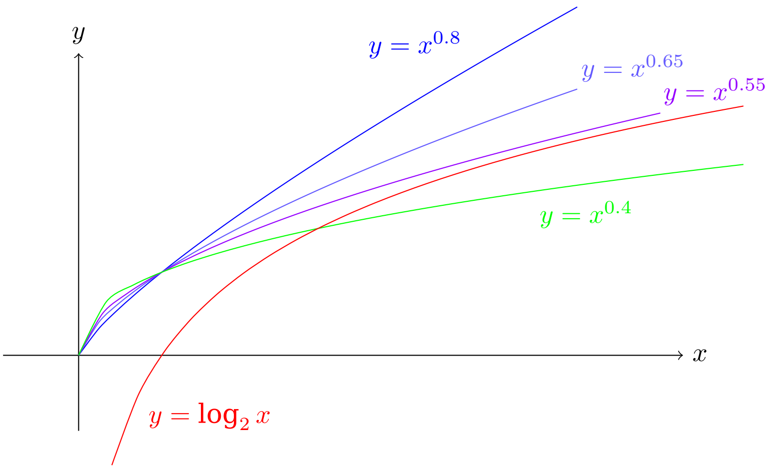
A.3 $n^k < a^n, \; \forall n \in \mathbb{N}$, სადაც $k \in \mathbb{N}$ და $a \geqslant \sqrt[e]{e^k}$.
დამტკიცებისთვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ მოცემული უტოლობა ექვივალენტურია უტოლობის $n < (a^{\frac{1}{k}})^n$.

A.4 $\log_2 n < n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
A.1

A.5 $\log_2 n < n^\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$ და $\alpha \in \left[\frac{1}{e \cdot ln2}, 1\right)$

რადგან $n > 1$-ის $\log_2 n < n^\alpha \Leftrightarrow \dfrac{ln(log_2 n)}{ln(n)} < \alpha$, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{ln(log_2 x)}{ln(x)}$ ფუნქციის მაქსიმუმი მიიღწევა წერტილში $x = 2^e$ და არის $\frac{1}{e \cdot ln2} \approx 0.530737$:

$$\frac{d}{dx}\frac{\ln(\log_2 x)}{\ln(x)} = \frac{1 - \ln(\log_2 x)}{x \ln^2 x} = 0$$



A.6 $ln(n) < \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
საკმარისია გამოვითვალოთ, რომ $\sqrt{x} - ln(x)$ ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა წერტილში 4 და ტოლია $2 - 2ln2 > 0$.

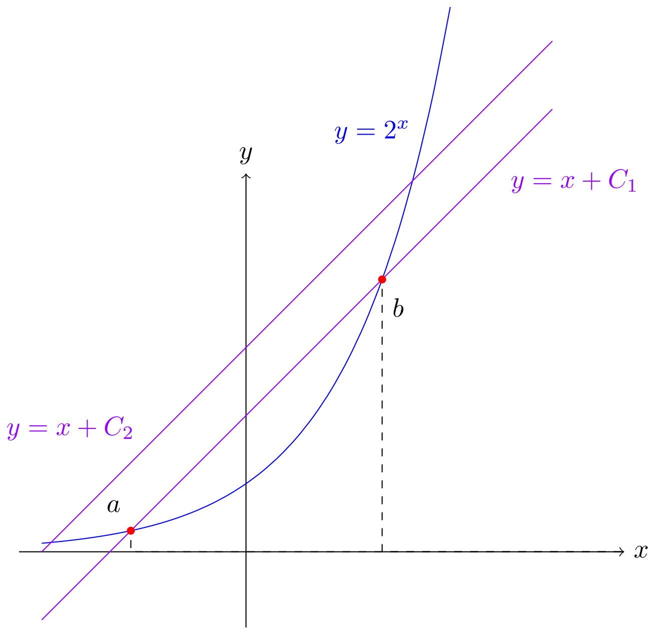
A.7 $2^n < n!$, $n > 3$.

1.2 უტოლობები $\mathbb{N}$-ის ქვესიმრავლეზე.

ჩვეულებრივ, პრაქტიკაში, იშვიათად გვხვდება ისეთი ალგორითმები, რომელთა სირთულის ფუნქციები ზუსტად ემთხვევა ელემენტარულ ფუნქციებს. უფრო ხშირად საქმე გვაქვს ელემენტარული ფუნქციების სხვადსხვანაირი კომბინირებით შედგენილ სირთულის ფუნქციებთან. ასევე იშვიათად მოითხოვება სირთულის ფუნქციებს შორის უტოლობის შენარჩუნება მთელ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე. ამასთან დაკავშირებით საჭირო ხდება შესაბამისი უტოლობების ამოხსნა.

A.8 $C + n < 2^n$, $C > 2$
ცხადია, რომ $C > 2$ მუდმივზე დამოკიდებულებით მოცემული უტოლობა უკვე აღარ სრულდება $\forall n \in \mathbb{N}$-ის. ამდენად ჩნდება შეკითხვა: $\mathbb{N}$-ის რომელი ქვესიმრავლისთვისაა ის სამართლიანი. მოხერხებულია შევაფასოთ უტოლობის მხარეები, ანუ, შევამციროთ მარჯვენა მხარე უტოლობის, ან, გავზარდოთ მარცხენა მხარე და თუ მიღებული უტოლობები ამოვხსენით, ან, ისევ, მათი ამონახსნთა ქვესიმრავლე მოვძებნეთ, მაშინ საწყისი უტოლობის ამონახსნთა ქვესიმრავლეც ნაპოვნი იქნება.

ჩვენი შემთხვევისთვის ადვილი მისაღებია უტოლობა $2^n > 2n$, როცა $n > 2$. ამ უტოლობის გამოყენებით $2^n - n > n$ და ამგვარად სიმრავლეზე $n > \lceil C \rceil$ საწყისი უტოლობა ჭეშმარიტი იქნება.


$y = 2^x$
y
$y = x + C_1$
b
$y = x + C_2$
a
x

A.9 $C \cdot n < 2^n,\ C > 2$

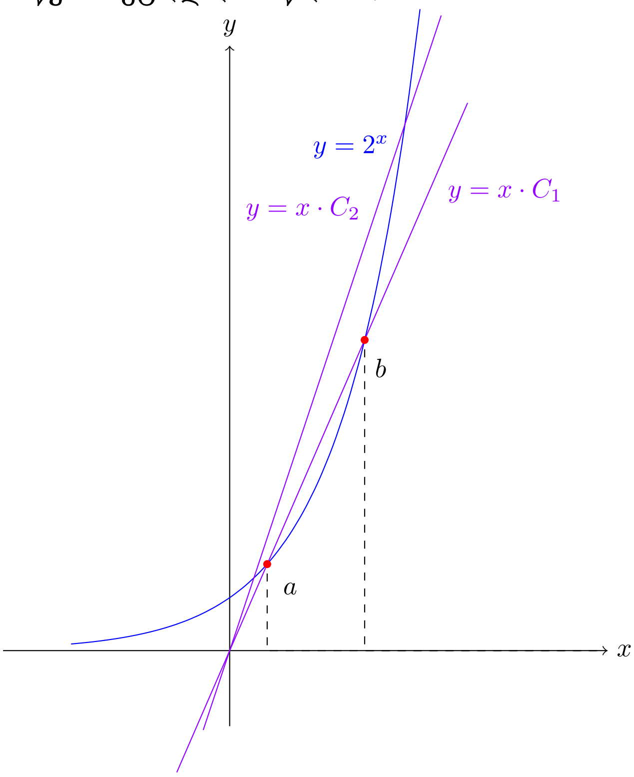
ამ შემთხვევაშიც $C > 2$ მუდმივზე დამოკიდებულებით მოცემული უტოლობა არ სრულდება $\forall n \in \mathbb{N}$-ის. ამიტომ, ისევე, როგორც წინა მაგალითში დავიწყოთ $\mathbb{N}$-ის ქვესიმრავლის მოძებნა, რომლისთვისაც ის სამართლიანია. ჯერ გავამარტივოთ უტოლობა.

$$C \cdot n < 2^n \Leftrightarrow ln(C \cdot n) < n \cdot ln2 \Leftrightarrow n \cdot ln2 - ln(n) > lnC$$

რადგან ჩვენ მხოლოდ ამონახსნთა ქვესიმრავლეს ვეძებთ, ამიტომ მოხერხებულია მიღებულ უტოლობაში შევამციროთ მისი მარცხენა ნაწილი თუ ეს გაამარტივებს მუშაობას. შეიძლება, მაგალითად, გამოვიყენოთ ზემოთ დამტკიცებული უტოლობა $ln(n) < \sqrt{n}$ და დავწეროთ:

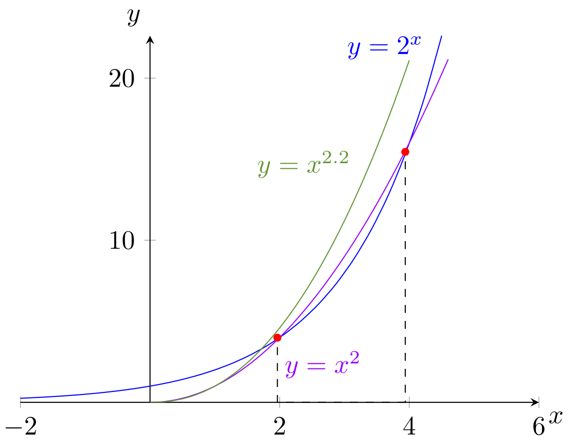
$$n \cdot ln2 - ln(n) > n \cdot ln2 - \sqrt{n} > lnC$$

მარჯვენა უტოლობა უფრო მარტივია საწყისზე, რადგან საკმარისია ვიპოვოთ კვადრატული უტოლობის $x^2 \cdot ln2 - x - lnC > 0$ ამონახსნთა ქვესიმრავლე, რომელიც, მაგალითად, არის $x > ln^2(C^2e)$. ამგვარად, თუ $n > \lceil ln^2(C^2e) \rceil$, მაშინ საწყისი უტოლობა სწორია.



A.10 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N,\ n^k < 2^n,\ \ k > 1, k \in \mathbb{N}.$

ნიუტონის ბინომიდან ვიცით, რომ $2^n > C_n^{k+1} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!}$. ამიტომ როცა $n - k > \dfrac{n}{2}$, მაშინ $C_n^{k+1} > n \cdot \left(\dfrac{n}{2}\right)^k \cdot \dfrac{1}{(k+1)!}$ და ამგვარად საკმარისია განვიხილოთ $n > N = 2^k \cdot (k+1)!$. შევნიშნოთ, რომ მიღებული შეფასება საკმაოდ უხეშია და მისი საგრძნობლად შემცირება შეიძლება.



მიღებული უტოლობა სამართლიანია თუ 2-ს შევცვლით $\forall a > 1$-ით.

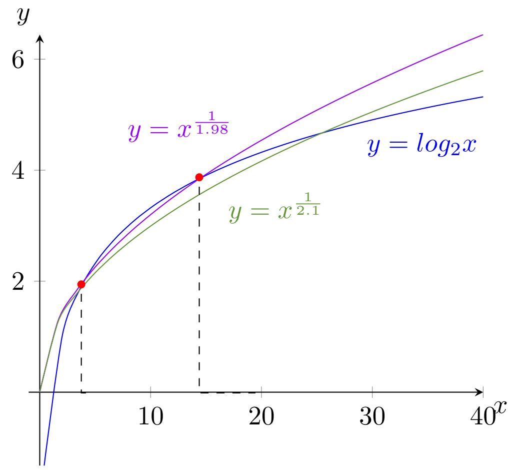
A.11 უტოლობა $\log_2 n < n^\alpha$ (**A.5**) შეიძლება განვაზოგადოთ $\alpha \in (0,1)$ სიმრავლეზე, მაგრამ ამისთვის ისევ უნდა შევარჩიოთ $\mathbb{N}$-ის ქვესიმრავლე. განვიხილოთ შეფასება:

$$\frac{log_2 n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{log_2 n^\alpha}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{log_2(\lfloor n^\alpha\rfloor+1)}{\lfloor n^\alpha\rfloor} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{log_2\lfloor n^\alpha\rfloor}{\lfloor n^\alpha\rfloor} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{log_2(1+\frac{1}{\lfloor n^\alpha\rfloor})}{\lfloor n^\alpha\rfloor}$$

პირველი შესაკრები არის ქვემიმდევრობა მიმდევრობის $\dfrac{log_2 n}{n}$. რადგან $\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{log_2 n}{n} < \dfrac{1}{2} \iff n^{\frac{2}{\alpha}} < 2^n$ ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ უტოლობების ჯაჭვი $n^{\frac{2}{\alpha}} < n^{\lfloor\frac{2}{\alpha}\rfloor+1} < 2^n$ და შევნიშნოთ, რომ მეორე უტოლობა ამოხსნილია წინა მაგალითში (**A.10**). ანუ მოიძებნება ისეთი $N_1 \in \mathbb{N}$, რომ უტოლობა შესრულდება $n > N_1$-ის.

მეორე შესაკრებისთვის:
$$\frac{log_2(1+\frac{1}{\lfloor n^\alpha\rfloor})}{\lfloor n^\alpha\rfloor} \leqslant \frac{log_2(1+1)}{\lfloor n^\alpha\rfloor} = \frac{1}{\lfloor n^\alpha\rfloor}$$
მიღებული მიმდევრობა $\dfrac{1}{\lfloor n^\alpha\rfloor}$ არის $\dfrac{1}{n}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, რომლისთვისაც $\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{2} \iff n > \dfrac{2}{\alpha}$ და ისევ შეიძლება ისეთი $N_2 \in \mathbb{N}$ -ის შერჩევა, რომ უტოლობა შესრულდება $n > N_2$-ის.

პირველი და მეორე შესაკრებებისთვის მიღებული შედეგების გათვალისწინებით გამოდის:
$\dfrac{log_2 n}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 1$ როცა $n > N = max(N_1, N_2)$.



A.12 ყოველი $p > 0$-ის $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^r n}{n^p} = 0$

საკმარისია განვიხილოთ $r > 0$. აღვნიშნოთ $\frac{p}{r} = \alpha > 0$. მაშინ $\frac{\ln(n)^r}{n^p} = \left(\frac{\ln(n)}{\sqrt[r]{n^p}}\right)^r$. გამოვიყენოთ, რომ r ხარისხი უწყვეტი ფუნქციაა. გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha n^\alpha} = 0$$

2 O.

2.1 განმარტება

განვიხილოთ ორი ნამდვილი, არაუარყოფითი მიმდევრობა $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ და $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. თუ არსებობს ისეთი $C > 0$ რიცხვი და არსებობს ისეთი $N \in \mathbb{N}$, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ და $n > N$-ის სრულდება უტოლობა $f(n) \leqslant C \cdot g(n)$, მაშინ ვამბობთ, რომ ***f* არის ო-დიდი *g***.

ფორმალურად:

$$\begin{cases} \exists C > 0 \\ \exists N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}\big(n > N \Rightarrow f(n) \leqslant C \cdot g(n)\big)$$

მიღებულია ეს ფაქტი აღვნიშნოთ ჩანაწერით $f(n) = O(g(n)), n \to \infty$. როდესაც კონტექსტი გამორიცხავს ორაზროვნებას შეიძლება გამოვიყენოთ აღნიშვნა $f = O(g)$.

მოყვანილი აღნიშვნა გაიგება როგორც ერთიანი სიმბოლო და არა როგორც მათემატიკური ტოლობა. ასეთი უხერხულობის შენარჩუნება აიხსნება ისტორიული მიზეზებით ერთი მხრივ და გარკვეული ჩანაწერების გამარტივების შესაძლებლობით, მეორე მხრივ. მათემატიკურად სწორი იქნებოდა $\in$ სიმბოლოს გამოყენება, როგორც ეს ქვედა აბზაცშია ახსნილი.

თუ ზემოთმოყვანილ განმარტებაში განვიხილავთ ფიქსირებულ g ფუნქციას, მაშინ ფაქტიურად განმარტებული ხდება f ფუნქციათა სიმრავლე. ანუ, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$O(g) = O(g(n)) = \{f : f(n) = O(g(n)), n \to \infty\} =$$
$$= \{f : \exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n(n > N \& n \in \mathbb{N})(f(n) \leqslant C \cdot g(n))\}$$

ამ ჩანაწერში უკვე ჩვეულებრივ მათემატიკურ ტოლობასთან გვაქვს საქმე. გასაგები ხდება ჩანაწერიც $f \in O(g)$ ანუ $f(n) \in O(g(n)), n \to \infty$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f = O(g)$ მაშინ $O(f) \subset O(g)$, საიდანაც ცხადი ხდება O-ის **ტრანზიტულობის** თვისება: თუ $f = O(g)$ და $g = O(h)$, მაშინ $f = O(h)$.

დიდი O სიმბოლო პირველად შემოყვანილი იყო გერმანელი მათემატიკოსის პ.ბახმანის[9] მიერ და შემდგომ განიხილებოდა გერმანელი მათემატიკოსის ე.ლანდაუს[10] და ამერიკელი მათემატიკოსის ლ.ე.დიკსონის[11] შრომებში. დიდი O წარმოადგენდა ფუნქციის ზრდის რიგის საზომს და მოდის სიტყვიდან "**O**rder".[12] 31გვ.

უტოლობები **A.1 - A.11** წინა პარაგრაფიდან საშუალებას გვაძლევენ ჩავწეროთ შემდეგი წინადადებები:

B.1 $n = O(2^n), n \to \infty$.
სირთულე $O(n)$ გვხვდება წრფივი ძებნის ალგორითმში დაუსორტირებელი მასივისთვის, სირთულე $O(2^n)$ გვხვდება ფიბონაჩის რიცხვების რეკურსიულად გამოთვლის ალგორითმში

B.2 $n = O(a^n), n \to \infty$, $a \geqslant e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e}$-ის
სირთულე $O(a^n)$ გვხვდება travelling salesman problem (ე.წ. კომივოიაჟორის) ამოცანაში.

B.3 $n^k = O(a^n)$, $n \to \infty$, სადაც $k \in \mathbb{N}$ და $a \geqslant \sqrt[e]{e^k}$.
სირთულე $O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$ გვხვდება k ჩალაგებულ ციკლებში, დეტერმინანტის დათვლის ამოცანაში.

B.4 $\log_2 n = O(n)$, $n \to \infty$
სირთულე $O(log_2 n)$ გვხვდება სორტირებულ მასივში ბინარული ძებნის ამოცანაში.

B.5 $\log_2 n = O(n^\alpha)$, $n \to \infty$ და $\alpha \in \left[\frac{1}{e \cdot ln2}, 1\right)$
სირთულე $O(n^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ გვხვდება $k-d$ ხეებში ძებნის ამოცანაში.

B.6 $ln(n) = O(\sqrt{n})$, $n \to \infty$

B.7 $2^n = O(n!)$, $n \to \infty$
სირთულე $O(n!)$ გვხვდება კომბინატორიკაში ყველა შესაძლო გადანაცვლების გენერირების ამოცანებში.

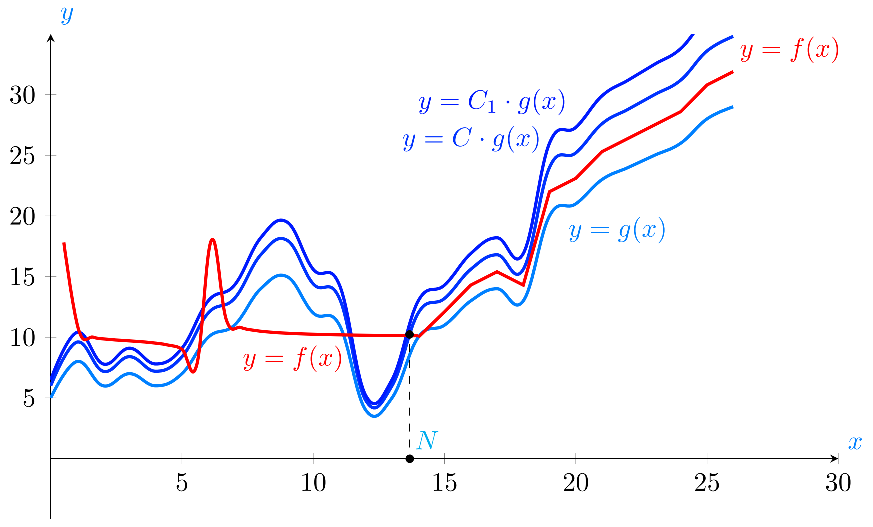
B.8 $C + n = O(2^n)$,$n \to \infty$, $C > 2$

B.9 $C \cdot n = O(2^n)$,$n \to \infty$, $C > 2$

B.10 $n^k = O(2^n)$,$n \to \infty$, $k > 1, k \in \mathbb{N}$.

B.11 $\log_2 n = O(n^\alpha)$,$n \to \infty$, $\alpha \in (0,1)$

ინტუიციურად $O(g)$ ფუნქციათა სიმრავლის წევრებისთვის g ფუნქცია წარმოადგენს ზედა საზღვრის ცნების განზოგადოებას: საუბარია უკვე არა უტოლობაზე $f(n) \leqslant g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$-ის, არამედ, ჯერ ერთი, იზღუდება არგუმენტების სიმრავლე $\mathbb{N}$-ის ქვესიმრავლეზე $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$ და, მეორე, შეიძლება თავად g-ს მაგივრად განვიხილოთ $C \cdot g$ ფუნქცია რომელიღაც $C > 0$-ის.



O-დიდის ცნება ფართოდ გამოიყენება ასიმპტოტურ მეთოდებში ([4]3გვ., [8]4გვ.)

და ალგორითმების ანალიზში ([5]47გვ., 1150გვ., [2]107გვ., [6]443გვ.).

2.2 თვისებები.

ამ პარაგრაფში,ქვემოთ, ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $n \in \mathbb{N}$.

C.1 $\forall C > 0,\ C \cdot O(1) = O(1) = O(C \cdot 1) = C + O(1)$

პირველი ტოლობის დამტკიცება გავყოთ ორ ნაწილად:
ა) განვიხილოთ $\varphi \in C \cdot O(1)$. ეს ნიშნავს, რომ $\exists f \in O(1)$ ისეთი, რომ $\varphi = C \cdot f$. თავის მხრივ f-ის $\exists N \in \mathbb{N}$ და $\exists C_1 > 0$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N$, მაშინ სრულდება $f \leqslant C_1 \cdot 1 = C_1$. მივიღებთ $\varphi \leqslant C \cdot C_1$ რაც ნიშნავს, რომ $C \cdot O(1) \subset O(1)$

ბ) ახლა განვიხილოთ $\varphi \in O(1)$. მაშინ $\exists C_1 > 0$ და $\exists N \in \mathbb{N}$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N$, მაშინ სრულდება $\varphi \leqslant C_1 \cdot 1$. განვიხილოთ $\varphi = C \cdot \dfrac{\varphi}{C}$. რადგან $\dfrac{\varphi}{C} \leqslant \dfrac{C_1}{C} \cdot 1$ ამიტომ $\varphi \in C \cdot O(1)$. ამგვარად $O(1) \subset C \cdot O(1)$.

C.2 $O(n) + n = O(n)$

დავუშვათ $\varphi \in O(n) + n$. ეს ნიშნავს, რომ $\varphi(n) = f_1(n) + n$, სადაც $f_1 \in O(n)$, ანუ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ და $\exists C_1 > 0$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N_1$, მაშინ სრულდება $f \leqslant C_1 \cdot n$. ვღებულობთ $\varphi(n) \leqslant C_1 \cdot n + n = (C_1 + 1) \cdot n$, რაც ნიშნავს $\varphi \in O(n)$ ანუ მივიღეთ $O(n) + n \subset O(n)$.

ახლა დავუშვათ $\varphi \in O(n)$. ე.ი. $\exists N \in \mathbb{N}$ და $\exists C > 0$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N$, მაშინ სრულდება $\varphi(n) \leqslant C \cdot n$. რადგან $\varphi(n) = \varphi(n) - n + n$, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ $\varphi(n) - n \in O(n)$, რაც, თავის მხრივ გამოვა უტოლობიდან $\varphi(n) - n \leqslant \varphi(n)$, ანუ აქაც მივიღეთ $O(n) \subset O(n) + n$.

C.3 $\forall C > 0,\ O(n + C) = O(n)$

დავუშვათ $\varphi \in O(n + C)$. ეს ნიშნავს, რომ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ და $\exists C_1 > 0$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N_1$, მაშინ სრულდება
$$\varphi(n) \leqslant C_1 \cdot (n + C) \leqslant C_1 \cdot \left(1 + \frac{C}{n}\right) \cdot n \leqslant C_1 \cdot (1 + C) \cdot n.$$
რაც ნიშნავს, რომ $\varphi \in O(n)$, ანუ $O(n + C) \subset O(n)$.

პირიქით, ავიღოთ $\varphi \in O(n)$. ე.ი. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ და $\exists C_1 > 0$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N_1$, მაშინ სრულდება $\varphi(n) \leqslant C_1 \cdot n \leqslant C_1 \cdot (n + C)$. ამგვარად $\varphi \in O(n + C)$, ანუ $O(n) \subset O(n + C)$.

C.4 $O(f) + O(f) = O(f)$

სიმრავლეთა ტოლობის განმარტების მიხედვით დამტკიცება გავყოთ ორ ნაწილად:
ა) $O(f) + O(f) \subset O(f)$

განვიხილოთ $\varphi \in O(f)+O(f)$ რაც ნიშნავს, რომ $\exists f_1 \in O(f)$ და $\exists f_2 \in O(f)$ ისეთი, რომ $\varphi = f_1 + f_2$
წინადადებები $\exists f_1 \in O(f)$ და $\exists f_2 \in O(f)$ გადავწეროთ შემდეგნაირად:
$\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1,\ f_1(n) \leqslant C_1 \cdot f(n)$.
$\exists C_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2,\ f_2(n) \leqslant C_2 \cdot f(n)$.
ამგვარად, $\varphi = f_1 + f_2 \leqslant C_1 \cdot f + C_2 \cdot f = (C_1 + C_2)f = C \cdot f$, სადაც აღვნიშნეთ $C_1 + C_2 = C$ და ეს უტოლობა შესრულდება $n > N = max(N_1, N_2)$-ის.

ბ) $O(f) \subset O(f) + O(f)$

ავიღოთ $\varphi \in O(f)$. დამტკიცებისთვის საკმარისია განვიხილოთ ტოლობა $\varphi = \dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\varphi}{2}$

C.5 $O(f) + O(g) = O(f + g)$

განვიხილოთ $\varphi \in O(f)+O(g)$ რაც ნიშნავს, რომ $\exists f_1 \in O(f)$ და $\exists g_1 \in O(g)$ ისეთი, რომ $\varphi = f_1 + g_1$
გვაქვს:
$\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1,\ f_1(n) \leqslant C_1 \cdot f(n)$.
$\exists C_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2,\ g_1(n) \leqslant C_2 \cdot g(n)$.
ამგვარად, $\varphi = f_1+g_1 \leqslant C_1 \cdot f+C_2 \cdot g \leqslant C \cdot (f+g)$, სადაც აღვნიშნეთ $max(C_1, C_2) = C$ და ეს უტოლობა შესრულდება $n > N = max(N_1, N_2)$-ის.
ამგვარად $O(f) + O(g) \subset O(f + g)$

ახლა განვიხილოთ $\varphi \in O(f + g)$. მაშინ $\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$-ის
$\varphi \leqslant C \cdot (f + g) = C \cdot f + C \cdot g$. ანუ $\varphi - C \cdot f \leqslant C \cdot g$
ამიტომ წარმოდგენისთვის $\varphi = C \cdot f + (\varphi - C \cdot f)$ გვაქვს, რომ პირველი შესაკრები არის $O(f)$-ის ელემენტი , ხოლო მეორე $O(g)$-ს ელემენტი. ამგვარად $O(f + g) \subset O(f) + O(g)$.

C.6 $O(f) + O(g) = O(max(f, g))$
დავუშვათ $\varphi \in O(f) + O(g)$, ანუ $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, სადაც $\varphi_1 \in O(f)$ და $\varphi_2 \in O(g)$. ანუ სრულდება
$\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_1,\ \varphi_1(n) \leqslant C_1 \cdot f(n)$.
$\exists C_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_2,\ \varphi_2(n) \leqslant C_2 \cdot g(n)$.
ამგვარად
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant C_1 \cdot f + C_2 \cdot g \leqslant (C_1 + C_2) \cdot max(f, g)$.

მეორე მხრივ, დავუშვათ $\varphi \in O(max(f, g))$. ეს ნიშნავს, რომ $\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ \varphi(n) \leqslant C \cdot max(f, g)(n)$.
განვიხილოთ წარმოდგენა
$\varphi = C \cdot f + \varphi - C \cdot f$

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\varphi - C \cdot f \in O(g)$. სრულდება
$\varphi - C \cdot f \leqslant C \cdot max(f,g) - C \cdot f = C \cdot (max(f,g) - f) \leqslant C \cdot g$
რადგან $max(f,g) \leqslant f + g$ არაუარყოფითი ფუნქციებისთვის.

C.7 $O(f) \cap O(g) = O(min(f,g))$

C.8 თუ $min(f) > 0$, მაშინ $\forall C > 0$-ის $O(f) + C = O(f) = O(f + C)$

ჯერ განვიხილოთ მარცხენა ტოლობა.
დავუშვათ $\varphi \in O(f) + C$, მაშინ $\exists f_1 \in O(f)$ ისეთი, რომ $\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1,\ f_1(n) \leqslant C_1 \cdot f(n)$ და $\varphi = f_1 + C$. შეგვიძლია დავწეროთ:
$\varphi(n) = f_1(n) + C \leqslant C_1 \cdot f(n) + C = \left(C_1 + \dfrac{C}{f(n)}\right) \cdot f(n) \leqslant \left(C_1 + \dfrac{C}{min(f)}\right) \cdot f(n) = C_2 \cdot f(n)$
სადაც $C_2 = C_1 + \dfrac{C}{min(f)}$ და $n > N_1$. ამდენად $O(f) + C \subset O(f)$.

ახლა განვიხილოთ $\varphi \in O(f)$ რაც ნიშნავს, რომ $\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1,\ \varphi(n) \leqslant C_1 \cdot f(n)$.
რადგან $\varphi = \varphi - C + C$, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\varphi - C \in O(f)$, რაც ცხადია $\varphi - C \leqslant \varphi$ -დან. ამიტომ $O(f) \subset O(f) + C$.

ახლა განვიხილოთ მარჯვენა ტოლობა.
დავუშვათ $\varphi \in O(f + C)$. მაშინ $\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1$-ის სრულდება
$\varphi(n) \leqslant C_1 \cdot (f(n) + C) = C_1 \cdot \left(1 + \dfrac{C}{f(n)}\right) \cdot f(n) \leqslant C_1 \cdot \left(1 + \dfrac{C}{min(f)}\right) \cdot f(n) = C_2 \cdot f(n)$
სადაც $C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \dfrac{C}{min(f)}\right)$ და $n > N_1$. ამდენად $O(f + C) \subset O(f)$.

მეორე მხრივ თუ $\varphi \in O(f)$, მაშინ სრულდება $\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1,\ \varphi(n) \leqslant C_1 \cdot f(n)$ ამიტომ შესრულდება
$\varphi(n) \leqslant C_1 \cdot f(n) \leqslant C_1 \cdot (f(n) + C)$. მივიღეთ $O(f) \subset O(f + C)$.

C.9 $\forall C > 0,\ C \cdot O(f) = O(f)$
მარცხენა ტოლობის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ, რომ $O(C \cdot f) \subset O(f)$:
განვიხილოთ $\varphi \in O(C \cdot f) \Rightarrow \exists C_1 > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$-ის $\varphi \leqslant C_1 \cdot C \cdot f$ და საკმარისია ნამრავლი $C_1 \cdot C$ აღვნიშნოთ ერთი სიმბოლოთი.
პირიქით: განვიხილოთ $\varphi \in O(f)$ რაც ნიშნავს, რომ $\exists N \in \mathbb{N}$ და $\exists C_1 > 0$ ისეთები, რომ როდესაც $n > N$ მაშინ $\varphi \leqslant C_1 \cdot f$. რადგან $\varphi = C \cdot \dfrac{\varphi}{C}$, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\dfrac{\varphi}{C} \in O(f)$, რაც ცხადია უტოლობიდან $\dfrac{\varphi}{C} \leqslant \dfrac{C_1}{C} \cdot f$.

C.10 $\forall C > 0,\ O(C \cdot f) = O(f)$

C.11 $f \cdot O(g) = O(fg)$.

C.12 $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$.
დავუშვათ $f \neq 0$.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა როცა $\varphi \in O(f) \cdot O(g)$. ეს ნიშნავს, რომ $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$, სადაც $\varphi_1 \in O(f)$ და $\varphi_2 \in O(g)$. ეს ნიშნავს შემდეგი ორი წინადადების სამართლიანობას:
$\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1,\ \varphi_1 \leqslant C_1 \cdot f$
$\exists C_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_2,\ \varphi_2 \leqslant C_2 \cdot g$
ამდენად გამოდის
$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \leqslant C_1 \cdot f \cdot C_2 \cdot g = C_1 \cdot C_2 \cdot f \cdot g$ როდესაც $n > N = max(N_1, N_2)$. ამგვარად $O(f) \cdot O(g) \subset O(fg)$.
ახლა განვიხილოთ $\varphi \in O(fg)$. ეს ნიშნავს, რომ
$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N,\ \varphi \leqslant C \cdot f \cdot g$ ანუ $\dfrac{\varphi}{f} \leqslant C \cdot g$.
განვიხილოთ
$\varphi = \dfrac{\varphi}{f} \cdot f$. საკმარისია ვაჩვენოთ $\dfrac{\varphi}{f} \in O(g)$, რაც ზევით უკვე მიღებულია. ამგვარად $O(fg) \subset O(f) \cdot O(g)$.

განზოგადება შემთხვევისთვის, როდესაც არსებობს ქვემიმდევრობა $\mathbb{N}_1$ რომელზედაც $f = 0$ შესაძლებელია $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2,\ \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 = \varnothing$ და $0 \notin f(\mathbb{N}_2)$ წარმოდგენის განხილვით.

C.13 $O\Big(O(f)\Big) = O(f)$

C.14 $g \neq 0 \Rightarrow \dfrac{O(f)}{g} = O\left(\dfrac{f}{g}\right)$

C.15 $O(n^k) + O(n^m) = O(n^m)$, როცა $m > k > 0$

დავუშვათ $\varphi \in O(n^k) + O(n^m)$. ეს ნიშნავს, რომ $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, სადაც $\varphi_1 \in O(n^k)$ და $\varphi_2 \in O(n^m)$, ანუ სამართლიანია ორი წინადადება:
$\exists C_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1,\ \varphi_1 \leqslant C_1 \cdot n^k$
$\exists C_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2,\ \varphi_2 \leqslant C_2 \cdot n^m$
ამდენად შეიძლება დავწეროთ:
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant C_1 \cdot n^k + C_2 \cdot n^m = n^m \left(C_1 \cdot n^{k-m} + C_2\right)$
რადგან $n^{k-m} < 1$, ამიტომ $\varphi \leqslant C \cdot n^m$, სადაც $C = C_1 + C_2$. მივიღეთ $O(n^k) + O(n^m) \subset O(n^m)$

დავუშვათ პირიქით $\varphi \in O(n^m)$. რადგან გვაქვს $\varphi = n^k + \varphi - n^k$, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\varphi - n^k \in O(n^m)$. ეს კი, ფაქტიურად, დამტკიცების პირველ ნახევარში უკვე შესრულებულია.

C.16 $O(n^k) \cdot O(n^m) = O(n^{m+k})$, როცა $m, k > 0$

2.3 ალგებრული თვისებები.

განვიხილოთ $K \subset \mathbb{N}$ და მიმდევრობა $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. ვიტყვით, რომ K არის f მიმდევრობის ბირთვი, თუ სრულდება $f^{-1}(0) = K$. გამოიყენება აღნიშვნა $kerf$ ანუ $kerf = \{n : f(n) = 0\} = f^{-1}(0)$.

დავაფიქსიროთ სიმრავლე $K \subset \mathbb{N}$ და განვიხილოთ ყველა არაუარყოფითი მიმდევრობა, რომლისთვისაც $kerf = K$. სამართლიანია

თეორემა: სიმრავლეები $O(f)$,რომლებისთვისაც $kerf = K$ ქმნიან **აბელის ჯგუფს** ([7]12გვ.) გამრავლების ოპერაციის მიმართ, რომელსაც აღვნიშნავთ სიმბოლოთი OK და ამ ჯგუფის ელემენტებს კი $OK(f)$.
$OK = \{OK(f) : OK(f) = O(f) \cap \{f : kerf = K\}\}$.
დამტკიცება.
გამრავლების ოპერაციის ასოციაციურობა და კომუტაციურობა ცხადია თვისებიდან **A.11**.
$OK(1)$-ის ქვეშ ამ დამტკიცებაში ვიგულისხმოთ $O(1)$-ის თანაკვეთა $\{f : kerf = K\}$ სიმრავლესთან, ანუ $OK(1) = O(1) \cap \{f : kerf = K\}$. მაშინ ის იქნება ჯგუფის ერთეული ისევ გამომდიანრე **A.11** თვისებიდან.
შებრუნებული ელემენტის არსებობის დამტკიცებისთვის განვიხილოთ $\forall f,\ kerf = K$ და განვმარტოთ მიმდევრობა

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(n)} & \text{თუ } f(n) \neq 0 \\ 0 & \text{თუ } n \in K \end{cases}$$

გასაგებია, რომ $ker(g) = ker(f \cdot g) = K$ და $OK(f) \cdot OK(g) = OK(1)$.

ლიტერატურა

[1] Udi Manber , *Introduction to Algorithms*, 1989

[2] Donald Ervin Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Third Edition

[3] Ian Anderson, *A First Course in Discrete Mathematics*, 2002

[4] N. G. DE Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, 1961, Second Edition

[5] Thomas H. Cormen Charles E. Leiserson Ronald L. Rivest Clifford Stein , *Introduction to Algorithms*, Third Edition

[6] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik *Concrete Mathematics*, Second Edition

[7] Joseph J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*,Springer-Verlag, New York (1995)

[8] Olver, Frank W. J, *Asymptotics and Special Functions*,1997.

[9] Paul Gustav Heinrich Bachmann

[10] Edmund Landau

[11] Leonard Eugene Dickson

[12] Florian Cajori, *A history of mathematical notations*,Dover Publications (1993).