ალგორითმები და მონაცემთა სტრუქტურები

მაქსიმუმის მოძებნა. ანალიზი.

ზ. კუჭავა, LaTeX

ამოცანა : რიცხვით მასივში $A[n] = A[a_0, .., a_{n-1}]$ მოვძებნოთ მაქსიმალური ელემენტი და გამოვიტანოთ შესაბამისი (უდიდესი) ინდექსი. [1]96-104გვ, [2]114-122გვ

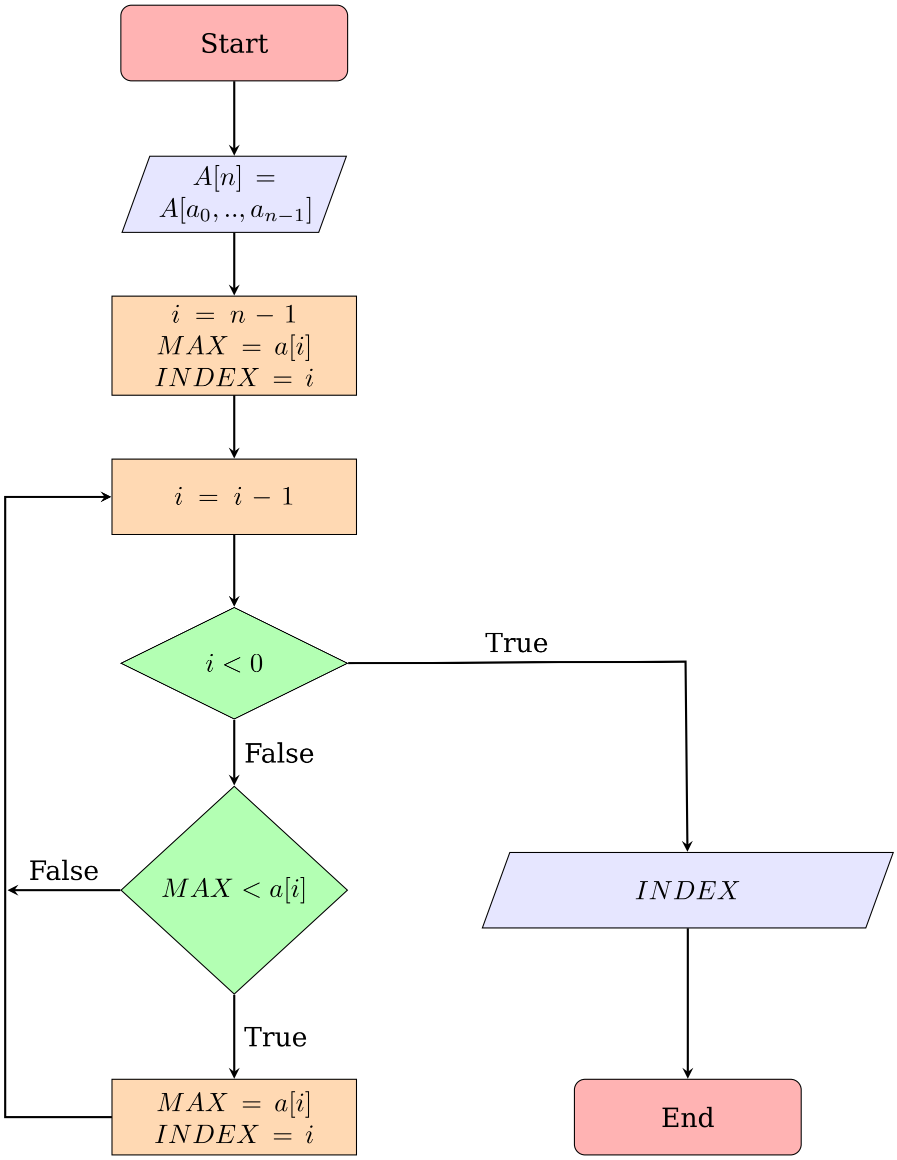
1 მარტივი მოძებნა

1.1 ალგორითმი

განვიხილოთ ინდექსი $i = n - 1$. შემოვიტანოთ დამხმარე ცვლადი Max და მივანიჭოთ a_{n-1} მნიშვნელობა, $Max = a_{n-1}$. ცვლადს $Index$ მივანიჭოთ $n-1$ მნიშვნელობა, $Index = n - 1$. შევამციროთ ინდექსი $i = i - 1$ და შევამოწმოთ ხომ არ გახდა i უარყოფითი. თუ კი ამოცანა დასრულებულია. თუ არა, შევადაროთ Max მასივის ელემენტს a_i-ს. თუ $a_i > Max$, მაშინ შევცვალოთ ცვლადები ახალი მნიშვნელობებით $Max = a_i$ და $Index = i$ და გადავიდეთ ინდექსის შემცირების საფეხურზე.

1.2 ბლოკსქემა

სურათი 1



სურ. 1: მარტივი მოძებნა

1.3 ფსევდოკოდი

კოდი, რომელიც ზუსტად შეესაბამება ბლოკსქემას და ამდენად იყენებს ე.წ. goto კონსტრუქციას შემდეგია:

```
        i = n - 1;
        MAX = a[i];
        INDEX = i;
LOOP:   i = i - 1;
        if(i < 0 )
        {
            return INDEX;
        }
        else
        {
            if(MAX < a[i])
            {
                 MAX = a[i];
                 INDEX = i;
            }
            goto LOOP;
        }
```

ციკლის კონსტრუქციის გამოყენებით

```
    i = n - 1;
    MAX = a[i];
    INDEX = i;
    for(i = n-2; i < 0; i--)
    {
        if(MAX < a[i])
        {
            MAX = a[i];
            INDEX = i;
        }
    }
    return INDEX;
```

1.4 ანალიზი 4 ელემენტის შემთხვევისთვის.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც მაქსიმუმს ვეძებთ ოთხ განსხვავებულ (a, b, c, d) რიცხვებს შორის. ასევე, დავუშვათ, რომ რიცხვების რაოდენობა შემოსაზღვრულია, მაგალითად, მათთვის გამოყოფილი ველის სიგრძის მიხედვით. ანუ, თუ საუბარია, მაგალითად, 32 ბიტიან რიცხვებზე, მაშინ სულ გვაქვს განსხვავებული $2^{32} = 4\,294\,967\,296$ რიცხვი.

ალგორითმის ფსევდოკოდია

```
largest = a;
if(largest < b)
    largest = b;
if(largest < c)
    largest = c;
if(largest < d)
    largest = d;
return largest;
```

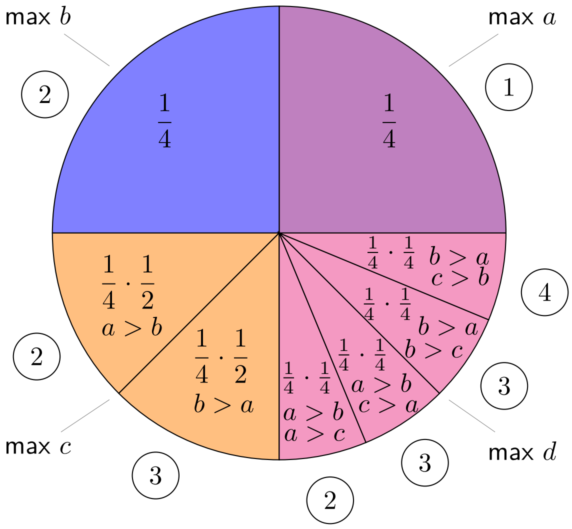
აღვნიშნოთ მინიჭებათა რაოდენობის სირთულის ფუნქცია T ასოთი. ალგორითმის შესრულების დროს მინიჭებების რაოდენობა შეიძლება იყოს 1-დან 4-ის ჩათვლით ნებისმიერი მთელი რიცხვი. ცხადია, რომ ერთი მინიჭება ხდება ყოველთვის, ხოლო მინიჭებათა მაქსიმალური რაოდენობაა $T = 4$.

მაქსიმუმის მინიჭებათა საშუალო რაოდენობის გამოთვლისთვის ჯერ განვიხილოთ სიმრავლე A ისეთი ოთხეულების, რომლებისთვისაც მაქსიმუმი პირველ ადგილზეა. ანუ $A = \{(max, *, *, *)\}$ სადაც პირველ პოზიციაში არის ოთხ რიცხვს შორის მაქსიმუმი და დანარჩენ ადგილებზე მდგომი რიცხვები აღნიშნულია $*$-ით. ასევე განვიხილოთ სიმრავლე B ისეთი ოთხეულების, რომლებისთვისაც მაქსიმუმი მეორე ადგილზეა. ანუ $B = \{(*, max, *, *)\}$ სადაც მეორე პოზიციაში არის ოთხ რიცხვს შორის მაქსიმუმი და დანარჩენ ადგილებზე მდგომი რიცხვები აღნიშნულია $*$-ით. დაშვების თანახმად A და B სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტი, ანუ $A \cap B = \emptyset$.

ვაჩვენოთ, რომ A ელემენტების რაოდენობა, რომელსაც აღვნიშნავთ $|A|$-თი, ტოლია B სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის, ანუ $|A| = |B|$. ამისთვის შევნიშნოთ, რომ $|B|$ არაა ნაკლები $|A|$-ზე, რადგან ყოველი A-ს ელემენტიდან $(max, *, *, *)$ შეიძლება მივიღოთ B-ს ოთხეული $(*, max, *, *)$ პირველ პოზიციაში მდგომ max რიცხვისთვის და მეორე პოზიცაში მდგომი რიცხვისთვის ადგილების გაცვლით. ე.ი. $|A| \leqslant |B|$. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ $|B| \leqslant |A|$, ანუ $|A| = |B|$.

ამდენად, შეიძლება ვთქვათ, რომ ყველა შესაძლო ოთხეულთა შორის იმ ოთხეულების რაოდენობა, რომელთათვის მაქსიმუმია a არის მთელი რაოდენობის $\frac{1}{4}$. იგივე იქნება b, c და d-ის.

დავთვალოთ ყველა შესაძლებელი ოთხეულების რომელი წილები შეესაბამება T-ს განსხვავებულ მნიშვნელობებს.

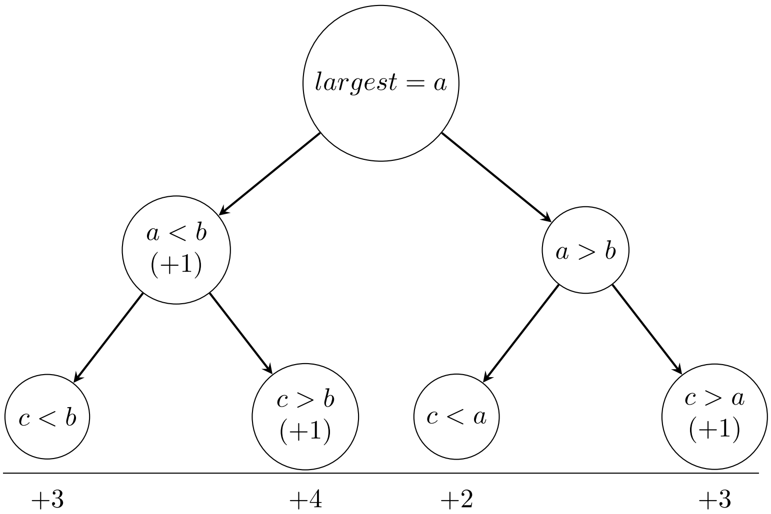


განვიხილოთ ჯერ ოთხეულები სადაც a არის მაქსიმუმი. ყველა ასეთი ოთხეულებისთვის და მხოლოდ მათთვის გვექნება ერთი მინიჭება და ამგვარად წილიც იქნება $\frac{1}{4}$.

ოთხეულები სადაც b არის მაქსიმუმი მოხვდებიან მხოლოდ 2 მინიჭების შემთხვევაში და შექმნიან ამ ჯგუფში პირველ შესაკრებს $\frac{1}{4}$ -ს.

ოთხეულებისთვის სადაც c არის მაქსიმუმი შეიძლება გვქონდეს 2 მინიჭება იმ შემთხვევაში როდესაც $a > b$ და სამი მინიჭება როდესაც $b > a$. ზევით განხილული A და B სიმრავლეების ელემენტთა რაოდენობის ტოლობის დამტკიცების ანალოგიურად მივიღებთ, რომ მაშინაც როდესაც c არის მაქსიმუმი ისეთი ოთხეულების, რომლებისთვისაც სრულდება $a < b$, იმდენივეა რამდენიც ოთხეულების, რომლებისთვისაც სრულდება $b > a$, ანუ ორივე არის $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ ნაწილი.

ბოლოს განვიხილოთ ოთხეულები სადაც d არის მაქსიმუმი. ასეთი ოთხეულებისთვის მინიჭებათა რაოდენობა შეიძლება იყოს 2, როდესაც $a > b$ და $a > c$, შეიძლება იყოს 3, როდესაც $a > b$ და $a < c$ ან $a < b$ და $b > c$, და შეიძლება იყოს 4, როდესაც $a < b$ და $b < c$. რადგან ყოველი უტოლობა რაოდენობას თანაბრად ყოფს, ყოველ შემთხვევას შეხვდება $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ წილი.



ამგვარად მინიჭების სირთულის ფუნქციისთვის მნიშვნელობები და სიხშირეები იქნება:

$$T(a,b,c,d) = \begin{cases} 1\colon & \frac{1}{4} & = \frac{4}{16} \\[2ex] 2\colon & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = \frac{7}{16} \\[2ex] 3\colon & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = \frac{4}{16} \\[2ex] 4\colon & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & = \frac{1}{16} \end{cases}$$

მინიჭების სირთულის ფუნქციის საშუალო იქნება:

$$ET = 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{7}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2\frac{1}{8} = 2.125$$

1.5 ანალიზი n ელემენტის შემთხვევაში.

ნებისმიერი შემავალი მონაცემებისთვის შედარებათა რაოდენობა უცვლელია და იცვლება მხოლოდ მაქსიმუმის მინიჭებათა რაოდენობა. ამდენად ანალიზის შესწავლის საგანია მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა. სიმარტივისთვის ანალიზი ჩავატაროთ ჯერ შემთხვევისთვის როდესაც მასივის ელემენტები ურთიერთგანსხვავებულია.

1.5.1 საუკეთესო შემთხვევა

როდესაც მასივის მაქსიმალური ელემენტი განლაგებულია $n-1$ პოზიციაში, მაშინ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა 0-ია.

1.5.2 უარესი შემთხვევა

როდესაც მასივი დალაგებულია კლებადობით, ანუ მაქსიმალური პირველი ელემენტია, მაშინ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა $n-1$-ია.

1.5.3 საშუალო შემთხვევა

გამოვიყვანოთ ფორმულა მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობისთვის ნაბიჯ-ნაბიჯ და დავიწყოთ $n = 2$-დან. მასივისთვის $A[2] = A[a_0, a_1]$ გვაქვს სულ ორი შესაძლო შემთხვევა:

$$\begin{aligned} &a_0 < a_1 \\ &a_1 < a_0 \end{aligned} \tag{1}$$

პირველ შემთხვევაში მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა არის 0 და მეორეში 1. თუ $S(2)$-ით აღვნიშნავთ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობას $n = 2$-ის, გვექნება $S(2) = 1$.

$n = 3$ შემთხვევისთვის $A[3] = A[a_0, a_1, a_2]$ გვაქვს $6 = 3!$ განსხვავებული ვარიანტი და განვიხილოთ ისინი შემდეგ 3 ჯგუფად:

$$\begin{aligned} &{\color{blue}a_0} < a_1 < a_2 \\ &{\color{blue}a_0} < a_2 < a_1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &{\color{blue}a_1} < a_0 < a_2 \\ &{\color{blue}a_1} < a_2 < a_0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &{\color{red}a_2} < a_0 < a_1 \\ &{\color{red}a_2} < a_1 < a_0 \end{aligned} \tag{4}$$

თუ შევხედავთ მხოლოდ მარჯვენა უტოლობებს დავინახავთ, რომ ჯგუფებში (2) და (3) გვაქვს ზუსტი ანალოგია (1) შემთხვევის - განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ (2)-ში აღებულია ინდექსი 1 ინდექსი 0-ის ადგილას და ინდექსი 2 ინდექსი 1-ის ადგილას, ხოლო (3)-ში აღებულია ინდექსი 2 ინდექსი 1-ის ადგილას.

ამგვარად ჯგუფებში (2) და (3)-ის გვექნება თითოეულში თითო ინდექსის შეცვლა.

ჯგუფ (4)-ში, რადგან a_2 მინიმალურია, ამიტომ ყოველი სტრიქონი აუცილებლად გამოიწვევს მინიმუმ ერთ მაქსიმუმის შეცვლას, ანუ იმდენ შეცვლას რამდენი

სტრიქონიცაა $= 2!$ ამ შემთხვევაში. მაგრამ ასეთი შეცვლის შემდეგ ისევ ავღმოჩნდებით (1)-ის ანალოგიურ სიტაციაში.

ამგვარად ჯგუფში (4) გვექნება მაქსიმუმის 3 შეცვლა.

სულ $n = 2$ შემთხვევისთვის გამოდის 5 შეცვლა და თუ $S(3)$-ით აღვნიშნავთ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობას, მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმულა

$$S(3) = 3S(2) + 2! \tag{5}$$

განვხილოთ $n = 4$ შემთხვევაც, ანუ $A[4] = A[a_0, a_1, a_2, a_3]$. ცხადია ამ შემთხვევაში გვაქვს $24 = 4!$ განსხვავებული ვარიანტი და $n = 3$ შემთხვევის ანალოგიურად განვიხილოთ 4 ჯგუფი, სადაც თითოეულში ფიქსირებული ელემენტია პირველ ადგილას:

$$\begin{array}{llll}
a_0 < a_1 < a_2 < a_3 & a_1 < a_0 < a_2 < a_3 & a_2 < a_0 < a_1 < a_3 & a_3 < a_0 < a_1 < a_2 \\
a_0 < a_1 < a_3 < a_2 & a_1 < a_0 < a_3 < a_2 & a_2 < a_0 < a_3 < a_1 & a_3 < a_0 < a_2 < a_1 \\
a_0 < a_2 < a_3 < a_1 & a_1 < a_2 < a_3 < a_2 & a_2 < a_1 < a_2 < a_3 & a_3 < a_1 < a_0 < a_2 \\
a_0 < a_2 < a_1 < a_3 & a_1 < a_2 < a_2 < a_3 & a_2 < a_1 < a_3 < a_2 & a_3 < a_1 < a_2 < a_0 \\
a_0 < a_3 < a_2 < a_1 & a_1 < a_3 < a_1 < a_2 & a_2 < a_3 < a_0 < a_2 & a_3 < a_2 < a_0 < a_1 \\
a_0 < a_3 < a_1 < a_2 & a_1 < a_3 < a_2 < a_1 & a_2 < a_3 < a_2 < a_0 & a_3 < a_2 < a_1 < a_0
\end{array} \tag{6}$$

პირველი 3 ჯგუფის ყოველი მარჯვენა სამი სვეტი ზუსტად იმეორებს $n = 3$ შემთხვევას ანუ თითოეულში არის $S(3)$ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა. ხოლო მეოთხე ჯგუფში a_3 მინიმალურია და ამიტომ მაქსიმუმის 1 შეცვლა მოხდება ყოველ სტრიქონში ე.ი. აუცილებლად გვექნება $6 = 3!$ მაქსიმუმის შეცვლა. მაგრამ ამის შემდეგ მივიღებთ ზუსტად $(2) - (3) - (4)$ სიტუაციას, რომლისთვისაც მაქსიმუმის შევლათა რაოდენობა არის $S(3)$.

ამგვარად $n = 4$-ის მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$S(4) = 4S(3) + 3! \tag{7}$$

ანალოგიური მსჯელობა სამართლიანია ზოგადად $n - 1$-დან n-ზე გადასვლის შემთხვევაშიც.

ზოგადი ფორმულა იქნება:

$$S(n) = n \cdot S(n-1) + (n-1)! \tag{8}$$

აქედან ადვილია ზოგადი n-ის (არა რეკურენტული) ფორმულის მიღებაც:

$$\begin{aligned}
S(n) &= n \cdot S(n-1) + (n-1)! = \\
&= n \cdot \Big[(n-1)S(n-2) + (n-2)!\Big] + (n-1)! = \\
&= n(n-1)S(n-2) + n \cdot (n-2)! + (n-1)! = \\
&= n(n-1)S(n-2) + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n} = \\
&= \ldots = \\
&= n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot S(2) + \frac{n!}{3} + \frac{n!}{4} + \ldots + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n} = \\
&= \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \frac{n!}{4} + \ldots + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n} = n! \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

მასივისთვის $A[n] = A[a_0, .., a_{n-1}]$ გვაქვს $n!$ დალაგება ურთიერთგანსხვავებული რიცხვების. თუ ჩავთლით, რომ ყოველი დალაგების ვარიანტი ერთნაირად მოსალოდნელია, გამოდის, რომ მოსალოდნელობის ზომა თითოეულისთვის იქნება $\frac{1}{n!}$. მაშინ მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობის საშუალო დაითვლება ფორმულით

$$\frac{S(n)}{n!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1 \tag{10}$$

მიღებული ჯამი ცნობილია **ჰარმონიული ჯამი**ს ([1]75გვ.) სახელით და ალგორითმების ანალიზში მისთვის გვაქვს სპეციალური აღნიშვნა

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{11}$$

ჰარმონიული ჯამის ერთერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა მისი კავშირი ლოგარითმულ ფუნქციასთან

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n = \ln n + O(1), n \to \infty \tag{12}$$

სადაც γ არის ცნობილი ეილერის ([3]) კონსტანტა და $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n}, n \to \infty$.

უკანასკნელი ფორმულის გათვალისწინებით მაქსიმუმის შეცვლათა საშუალო რაოდენობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{S(n)}{n!} = H_n - 1 = \ln n + O(1), n \to \infty \tag{13}$$

ამგვარად, n ელემენტიან $A[n]$ მასივში მაქსიმუმის შეცვლა საშუალოდ მოგვიწევს დაახლოებით $\ln n$-ჯერ. ეს ნიშნავს, რომ საუკეთესოს 100 კანდიდატიდან ამოვარჩევთ საშუალოდ 4 პრეტენდენტის გამოცვლის შემდეგ. 10 000 კანდიდატისთვის დაგვჭირდება საშუალოდ 9 პრეტენდენტის გამოცვლა. 2021 წლის ნოემბრის მონაცემებით ([4]) დედამიწაზე დაახლოებით ცხოვრობს 7 900 000 000 ადამიანი - ნებისმიერი ნიშნით მათ შორის საუკეთესოს ვიპოვით საშუალოდ 22 პრეტენდენტის გამოცვლის შემდეგ.

1.5.4 ჰარმონიული ჯამის ფორმულის (12) დამტკიცება

დამტკიცებას დავაფუძნებთ ცნობილ ზღვარზე $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, რომელიც ხშირად მიიღება როგორც e-ს, ე.წ. ნეპერის რიცხვის, განმარტება. განვიხილოთ მიმდევრობა $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. ერთი მხრივ ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$. მეორე მხრივ, უტოლებებიდან

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} \cdot \frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}} \cdot \frac{n+1}{n} < 1$$

ჩანს, რომ y_n კლებადია, ამდენად მეტია თავის ზღვარზე ე.ი. სრულდება $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n$. უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია უტოლობის $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \quad (a)$.

ახლა განვიხილოთ მიმდევრობა $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n$. რადგან $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$ მიღებული (a) უტოლობის მიხედვით, ამიტომ x_n კლებადია. მეორე მხრივ მიმდევრობა x_n შემოსაზღვრულია ქვემოდან:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$$

ამიტომ მიმდევრობას x_n გააჩნია ზღვარი, რომელიც აღვნიშნოთ γ-თი .
მაშინ გვექნება $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \gamma + \ln n + \varepsilon_n$ სადაც $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$.

2 საშუალო არათანაბარი მოსალოდნელობის პირობებში

დავუშვათ, რომ მაქსიმალური ელემენტის პირველივე ნაბიჯზე პოვნის მოსალოდნელობა არ არის თანაბარი ყველა სხვა შესაძლო ვარიანტთან და არის, მაგალითად, $\frac{1}{2}$.

როგორც ვიცით n ელემენტიან $A[n]$ მასივში, ურთიერთგანსხვავებული ელემენტების შემთხვევაში, ელემენტების დალაგების ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობაა $n!$. აქედან ვარიანტების რაოდენობა, სადაც a_{n-1} არის მაქსიმალური არის $(n-1)!$. განხსახილველად არჩეულ შემთხვევაში ყოველი მათგანის მოსალოდნელობის ზომა გამოდის $\frac{1}{2\cdot(n-1)!}$. რჩება $n! - (n-1)! = (n-1)\cdot(n-1)!$ ვარიანტი და თითოეულისთვის მოსალოდნელობის ზომა იქნება $\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(n-1)!}$.

თუ შევნიშნავთ, რომ (9) ფორმულაში მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა ყველა იმ შემთხვევისთვის, როდესაც a_{n-1} არის მაქსიმალური წარმოადგენს 0-ს, მაშინ გამოვა, რომ (9) ფორმულა ფაქტიურად გვაძლევს მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობას იმ შემთხვევებისთვის, სადაც a_{n-1} არ არის მაქსიმალური.

ამგვარად საშუალო დაითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(n-1)!} \cdot S(n) = \frac{n!}{2\cdot(n-1)\cdot(n-1)!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1\right) = \\ &= \frac{n}{2(n-1)}\left(\ln n + O(1)\right) = \frac{\ln n}{2} + O(1), n \to \infty \end{aligned} \tag{14}$$

როგორც მოსალოდნელი იყო მაქსიმუმის შეცვლათა რაოდენობა საშუალოდ განახევრდა.

ლიტერატურა

[1] Donald Ervin Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 1, Third Edition

[2] Thomas H. Cormen Charles E. Leiserson Ronald L. Rivest Clifford Stein , *Introduction to Algorithms*, Third Edition

[3] Euler–Mascheroni

[4] world-population