IF1210 Dasar Pemrograman

Analisis Rekurens

Tim Pengajar IF1210

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

The Handshake Problem

Ada *n* orang di dalam sebuah ruangan. Jika masing-masing orang harus bersalaman dengan setiap orang lainnya, ada berapa *handshakes* **h(n)** yang terjadi?

Bagaimana cara memecahkan persoalan ini?

Latihan: The Handshake Problem

Ide penyelesaian:

- Setiap orang dapat berpartisipasi untuk menyelesaikan persoalan ini.
  - Bagaimana “versi kecil” dari persoalan yang dapat dibantu penyelesaiannya?

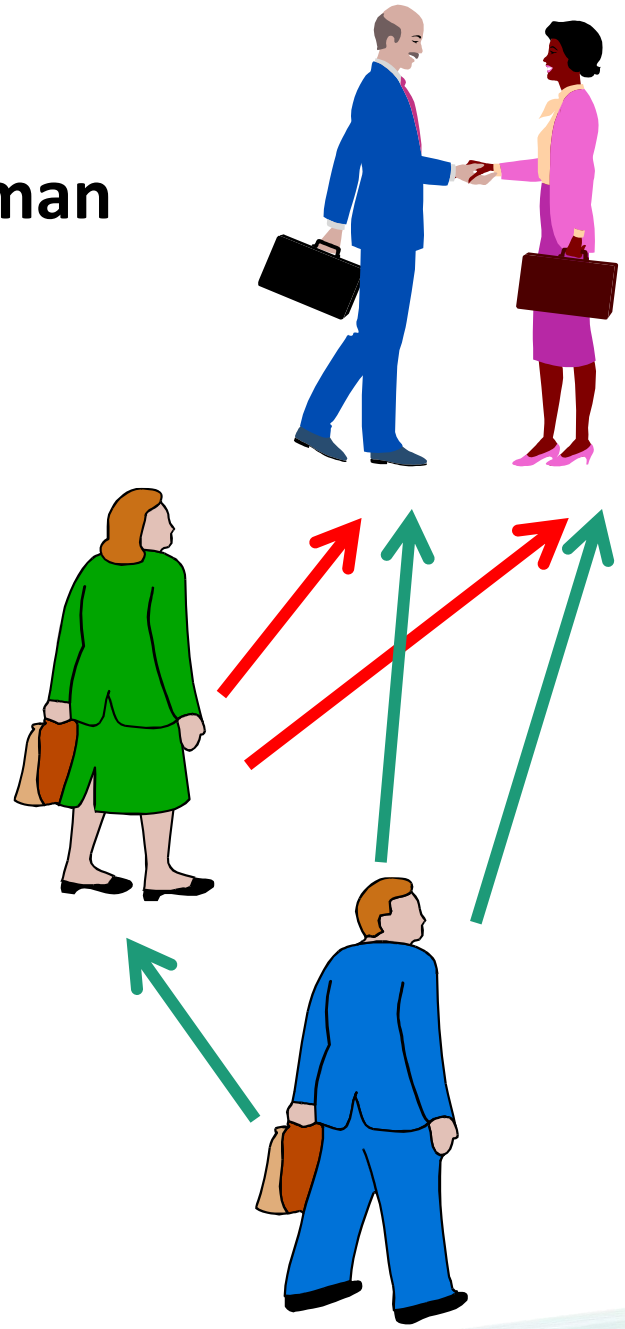
1 kali salaman

+

2 kali salaman

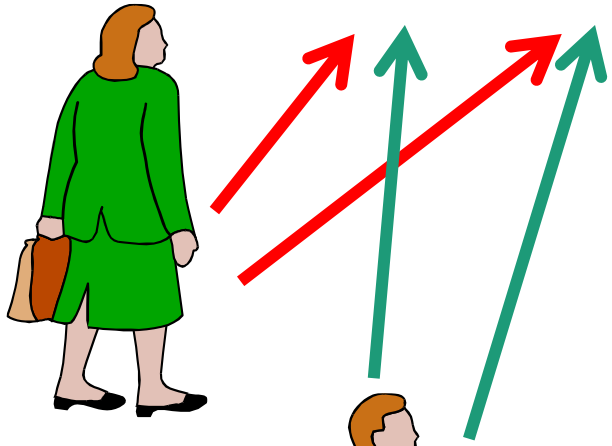
+

3 kali salaman

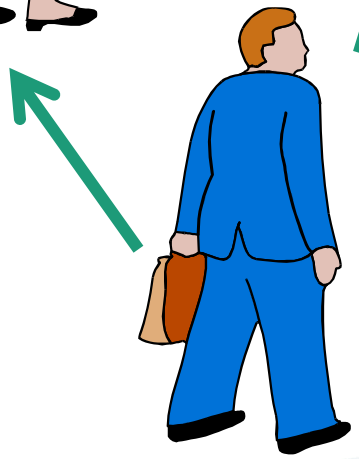


H(2) = 1

H(3) = H(2) + 2



H(n) = ?



H(4) = H(3) + 3

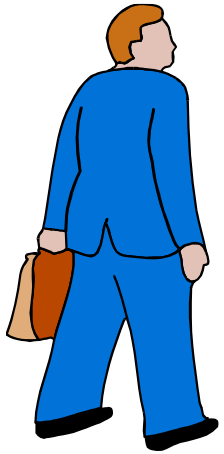
H(n) = H(n-1)+n-1

h(n) = h(n-1) + n-1

h(4) = h(3) + 3

h(3) = h(2) + 2

Kasus basis:
h(2) = 1

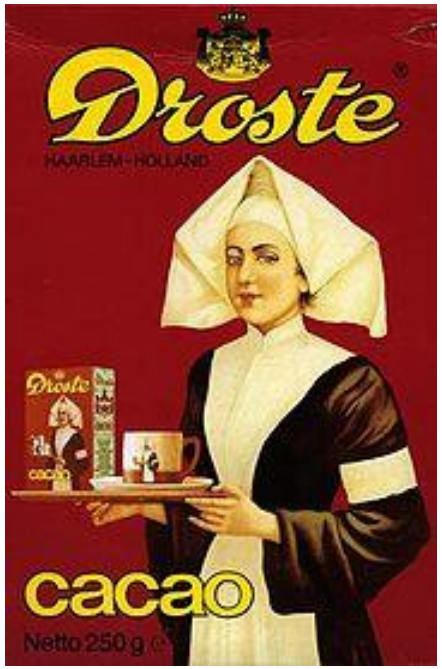


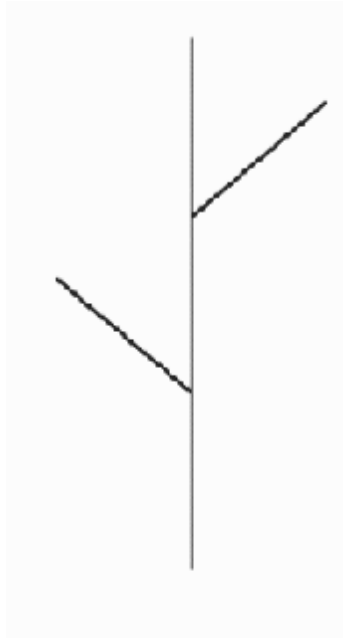
h(n) => Sum dari integer mulai 1 hingga n-1
= n(n-1) / 2

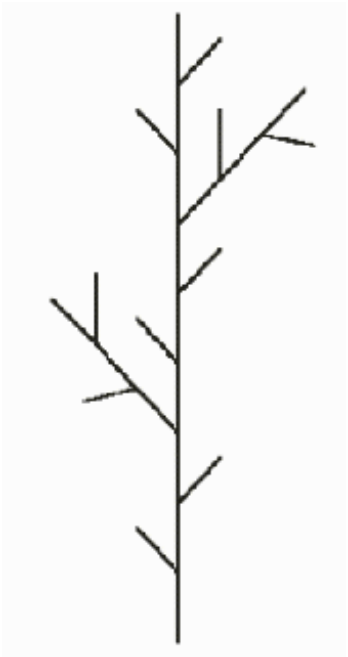
Recursion is all about breaking a big problem into smaller occurrences of that same problem.

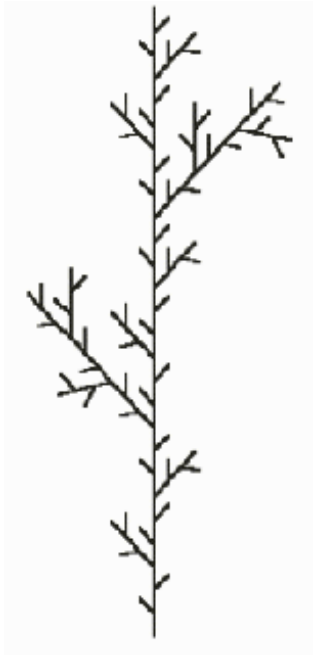
Rekursifitas

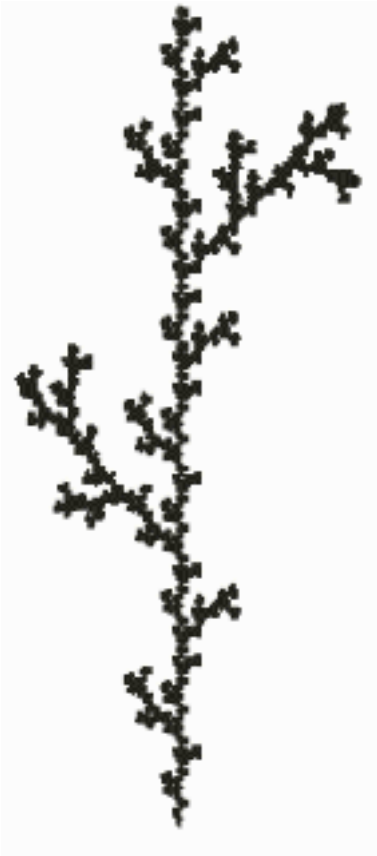
- Definisi:
  - Suatu entitas disebut **rekursif** jika pada definisinya terkandung terminologi dirinya sendiri

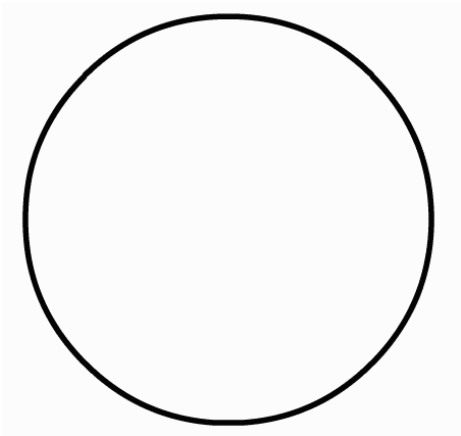


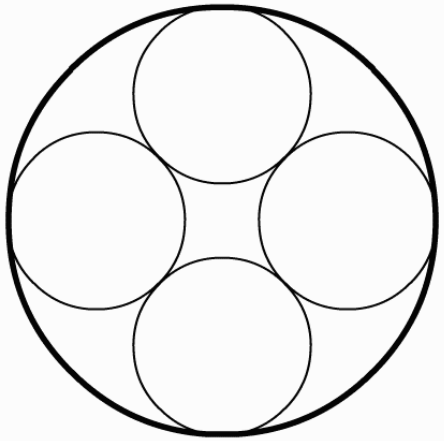


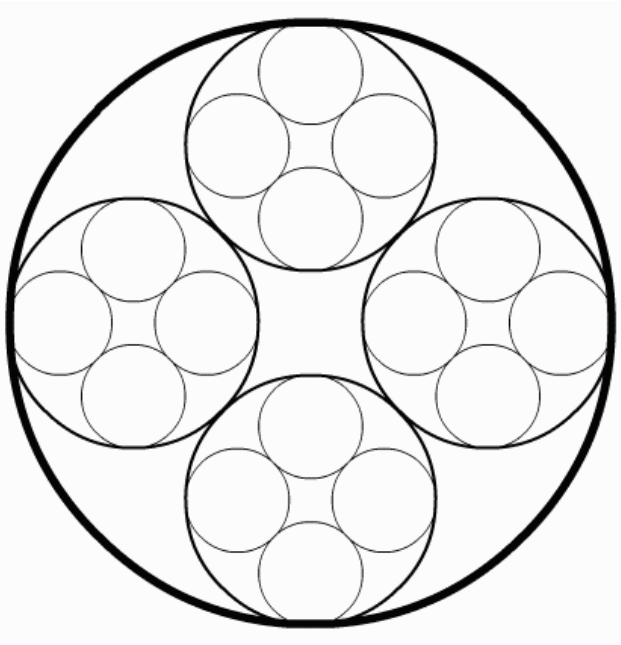


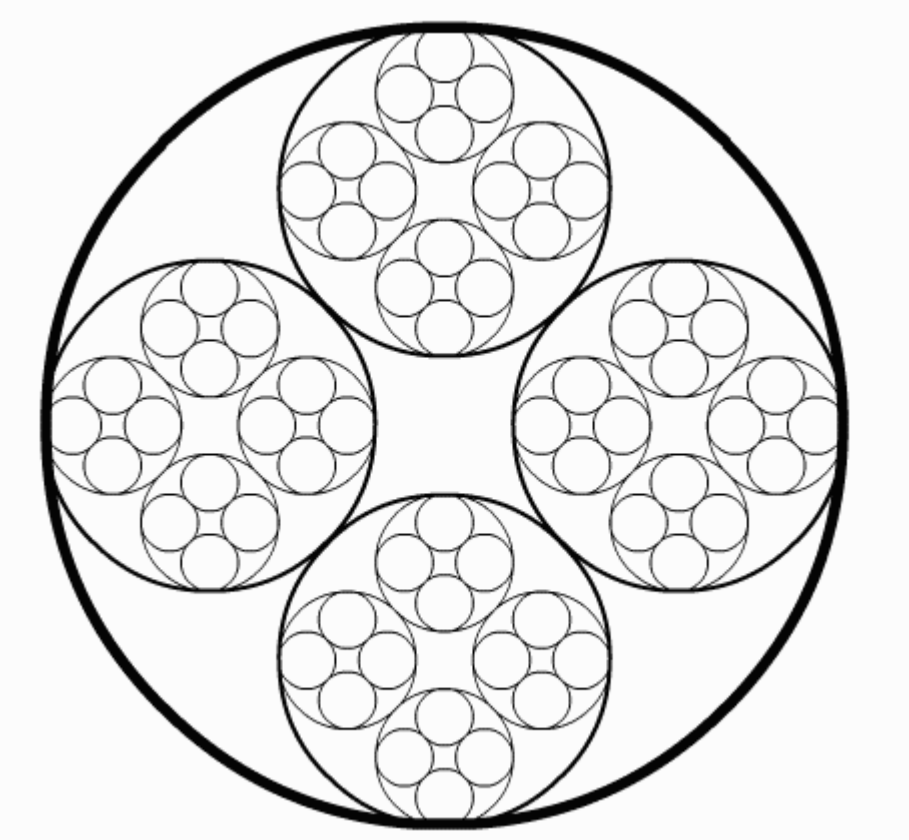






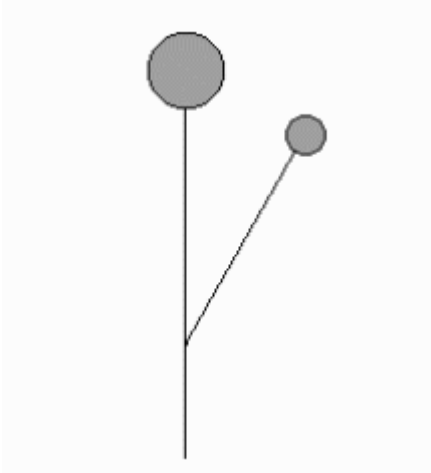




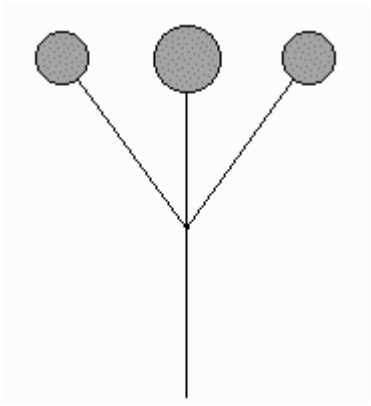


Plant Forms

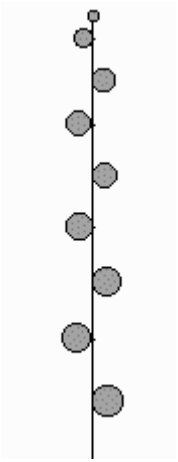
some common inflorescences



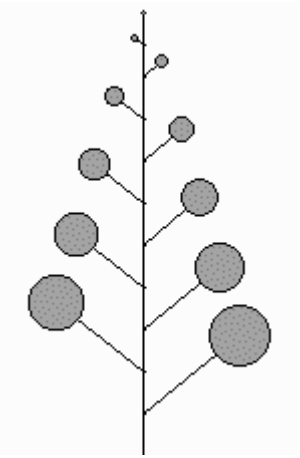
monochasium



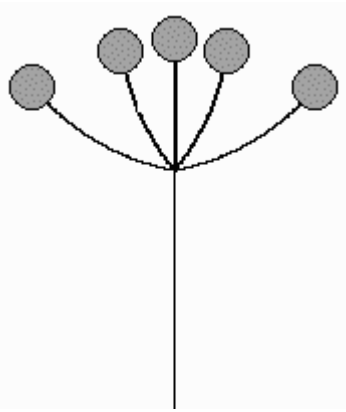
dichasium



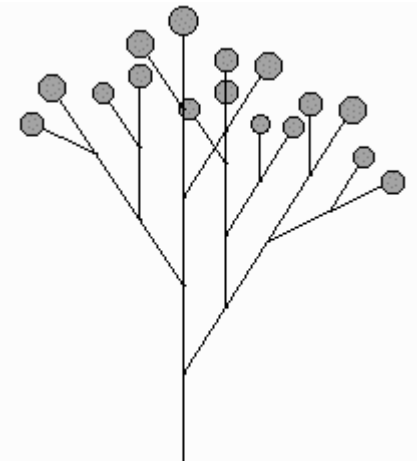
spike



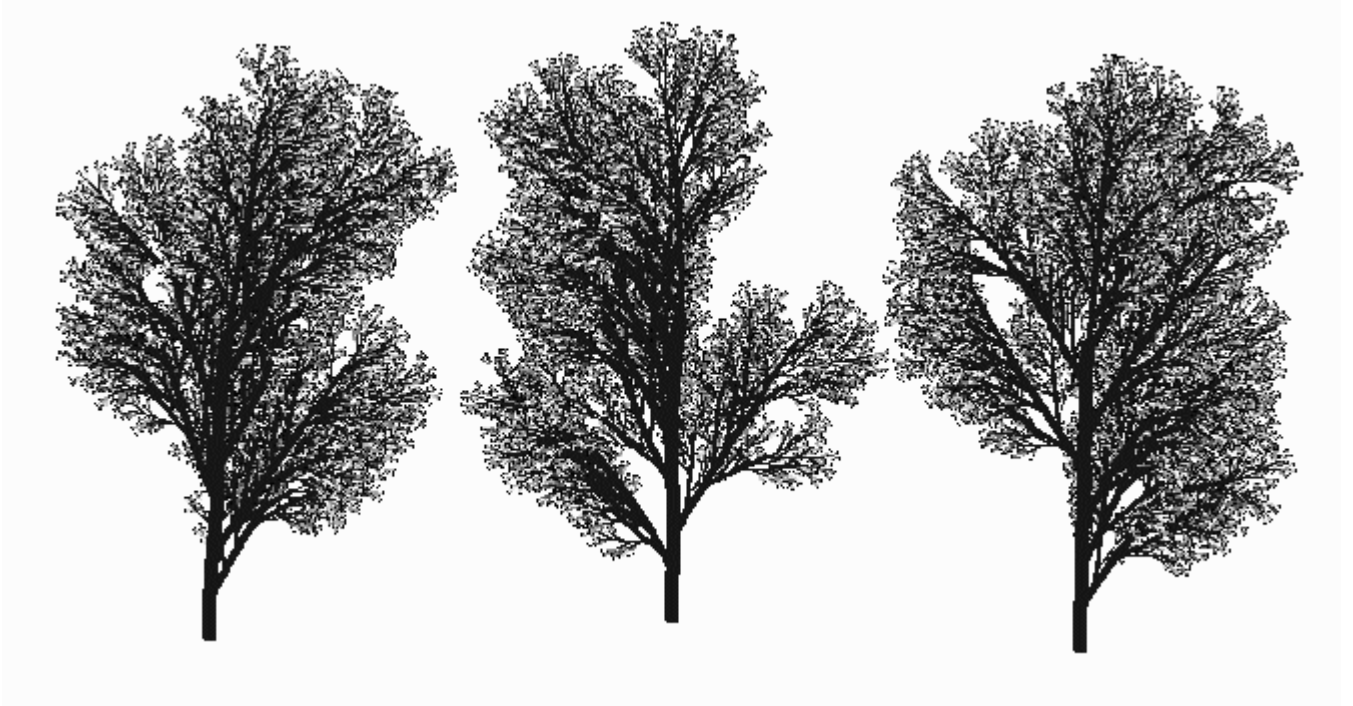
raceme



umbel

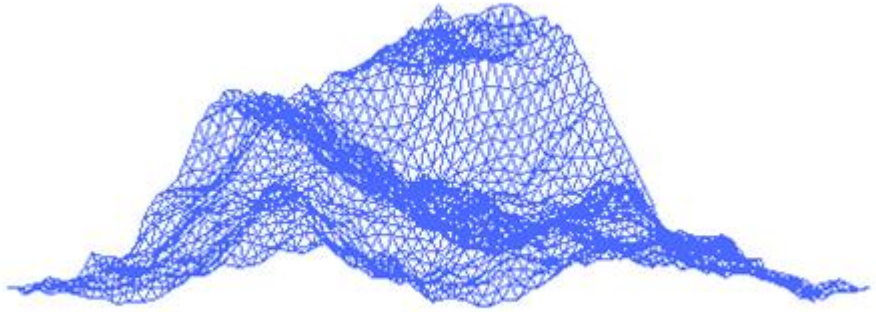


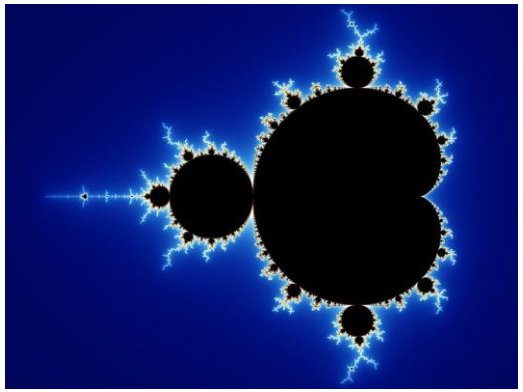
panicle



Trees modeled using deReffye's method

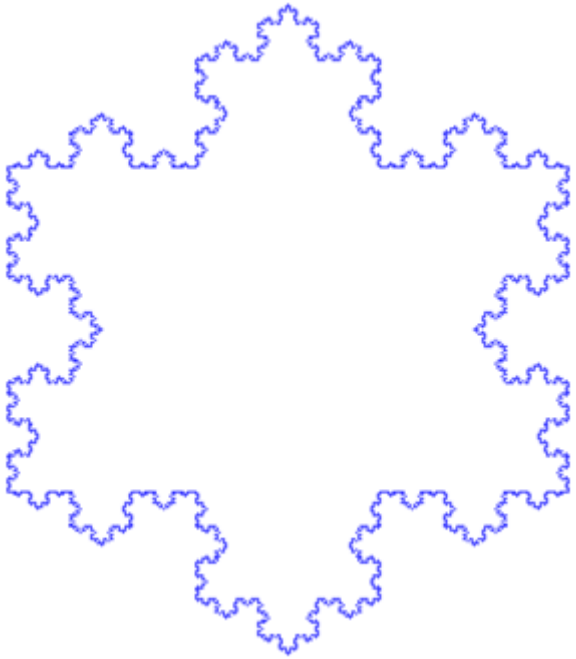
Contoh-contoh gambar fraktal





Aplikasi Rekursifitas dalam bidang informatika

- **Fraktal**:
  - bentuk-bentuk geometris yang terdiri atas bagian-bagian kecil, tiap bagian adalah kopi (dalam ukuran yang lebih kecil) dari bentuk keseluruhan
  - Biasanya diimplementasikan dari fungsi matematis yang bersifat rekursif



Ekspresi Rekursif

- Definisi entitas (type, fungsi) disebut rekursif jika definisi tersebut mengandung terminologi dirinya sendiri
- Ekspresi rekursif direalisasikan dengan membuat fungsi rekursif dan didasari analisis rekurens

Akan dibahas pada materi berikutnya

Analisis Rekurens

- Solusi rekursif terdiri dari dua bagian:
  - **Basis**, kasus yang menyebabkan fungsi berhenti, karena jawaban sudah bisa diperoleh
  - Bagian **rekurens** : mengandung call terhadap fungsi tersebut (aplikasi dari fungsi), dengan parameter bernilai mengecil (menuju basis).
- Solusi rekursif memiliki sekurang-kurangnya satu kasus basis dan satu kasus rekursif.
  - Dimungkinkan ada lebih dari satu kasus basis maupun rekursif.
- Bagian terpenting dari analisis rekurens adalah mengidentifikasi kasus-kasus ini.

Contoh Lain…

- Bagaimana caranya kita memisahkan menjadi 2 bagian yang sama permen M&M dari mangkok besar ini, tanpa harus **terlebih dahulu** menumpahkan seluruh isinya atau menghitung jumlahnya?
  - Bagaimana jika beberapa orang membantu memecahkan persoalan ini? Bisakah tiap orang melakukan sebagian kecil dari pekerjaan?
    - Berapa jumlah M&M yang mudah dibagi menjadi dua (bahkan kalau untuk anak kecil yang tidak bisa menghitung?)

Kerangka Fungsi Rekursif (Notasi Haskell dengan Guard)

```
<fungsi> <list-parameter>
  | <kondisi-basis>    = <ekspresi-1 >
  | <kondisi-rekurens>= <fungsi>(<ekspresi-2>)
```

Catatan:
<kondisi-rekurens> bisa menggunakan "otherwise"

Nilai parameter mengecil menuju basis

Tulislah secara eksplisit dalam teks program anda: mana bagian basis, mana rekurens berupa komentar dalam program

Kerangka Fungsi Rekursif (Notasi Haskell dengan if-then-else)

```
<fungsi> <list-parameter> =
  if <kondisi-basis> then <ekspresi-1 >
  else <fungsi>(<ekspresi-2>)  -- kondisi rekurens
```

Nilai parameter mengecil menuju basis

Tulislah secara eksplisit dalam teks program anda: mana bagian basis, mana rekurens berupa komentar dalam program

Studi Kasus 1: Definisi Faktorial

- Definisi 1:

  0! : 1

  N! : N * (N-1) !

- Definisi 2:

  1! : 1

  N! : N * (N-1) !

- Definisi 3:

  1! : 1

  N! : (N+1)! / (N+1)

Nilai N mengecil menuju basis

Nilai N tidak pernah mencapai basis
→ TIDAK bisa diimplementasi menjadi fungsi rekursif

Jika domain nilai terkecil 0,
Menggunakan basis n=0

```
-- Faktorial (definisi-1)                    fac(n)
```

```
-- DEFINISI DAN SPESIFIKASI
fac :: Int -> Int
  {- fac(n) = n! sesuai dengan definisi rekursif factorial,
     dengan basis n = 0 -}
```

```
-- REALISASI { menggunakan Guard }
fac n
    | n == 0    = 1                -- Basis
    | otherwise = fac (n-1) * n    -- Rekurens
```

Terdapat aplikasi fungsi fac di dalam realisasi → rekurens

```
-- Faktorial2 (definisi-2)                    fac2(n)
```

```
-- DEFINISI DAN SPESIFIKASI
fac2 :: Int -> Int
  {- fac2(n) = n! sesuai dengan definisi rekursif factorial,
     dengan basis 1 -}
```

```
-- REALISASI menggunakan if-then-else
fac2 n = if n==1 then      -- Basis
             1
         else              -- Rekurens
             fac2 (n-1) * n
```

Karena nilai terkecil dari domain adalah 1, maka harus menggunakan basis n = 1

Studi Kasus 2: FPB(m,n)
Faktor Persekutuan Terbesar

- **m,n: integer>0**
- Alternatif solusi 1: hasil kali faktor prima yang sama dari m dan n → pendekatan prosedural
- Alternatif solusi 2: fpb ≤ min(m,n)
  - Cari minimum m,n → kurangi satu sampai ketemu bilangan yang merupakan pembagi m dan n
- Alternatif solusi 3:
  fpb(m,n) = fpb(n,m mod n)

```
-- FPB (solusi-3)                    fpb(m,n)
```

```
-- DEFINISI DAN SPESIFIKASI
fpb :: Int -> Int -> Int
  {- fpb(m,n) menghasilkan bilangan integer terbesar yang
     dapat membagi m dan n tanpa sisa -}
```

```
-- REALISASI

  fpb m n =
     if ((mod m n)==0) then    -- Basis
        n
     else                      -- Rekurens
        fpb n (mod m n)
```

Ide: fpb(m,n) = fpb(n,m mod n).
Kasus basis?

Jika n habis membagi m, maka (m mod n) = 0 dan fpb = n

Latihan Soal

Buatlah definisi, spesifikasi, dan realisasi dari fungsi-fungsi berikut (menggunakan pendekatan rekursif):

1. **DeretSegitiga**, merupakan fungsi untuk mencari nilai bilangan ke-n pada deret segitiga.
   Deret segitiga: 1, 3, 6, 10, 15, …
2. **IsGanjil**, merupakan predikat untuk memeriksa apakah sebuah bilangan integer (≥0) merupakan bilangan ganjil.
3. **LuasBS**, merupakan fungsi untuk menghitung luas bujur sangkar dengan panjang sisi tertentu.

Latihan Soal

4. **SumOfDigits**, menghitung hasil penjumlahan dari setiap bilangan tunggal yang terdapat di dalam sebuah bilangan integer positif.

   Misalnya:

   - SumOfDigits(234) = 2 + 3 + 4 = 9
   - SumOfDigits(38) = 3 + 8 = 11
   - SumOfDigits(5) = 5

   Apabila didefinisikan bahwa SumOfDigits dari bilangan negatif dilakukan dengan mengabaikan tanda '-', buatlah fungsi **SumOfDigitsPosNeg** yang menangani hal ini.

   Misalnya: SumOfDigitsPosNeg(-45) = 4 + 5 = 9

Latihan Soal

5. Buatlah fungsi **sumRange** yaitu fungsi yang menerima masukan 2 bilangan integer, misalnya a dan b yang menyatakan rentang bilangan dengan syarat: a $\leq$ b; a dan b bilangan positif; dan menghasilkan penjumlahan semua bilangan dari a s.d. b.

   Harus dikerjakan secara rekursif.

   Contoh aplikasi:

   - SumRange(2,2) = 2
   - SumRange(2,4) = 2+3+4 = 9

Kenapa Membuat Program Rekursif?

- Persoalan memang mengandung definisi “rekursif”.
  Contoh: **faktorial**.
- Mengolah data bertype rekursif.
  Contoh: **pemrosesan list** → **materi berikutnya**
- Programmernya ingin menulis solusi rekursif. Persoalan yang tidak rekursif tidak perlu diselesaikan secara rekursif, tapi bisa diselesaikan secara rekursif. Ada banyak jalan ke Roma……
  Contoh: **fpb (Faktor Persekutuan Terbesar)**

Mencari Solusi Rekursif

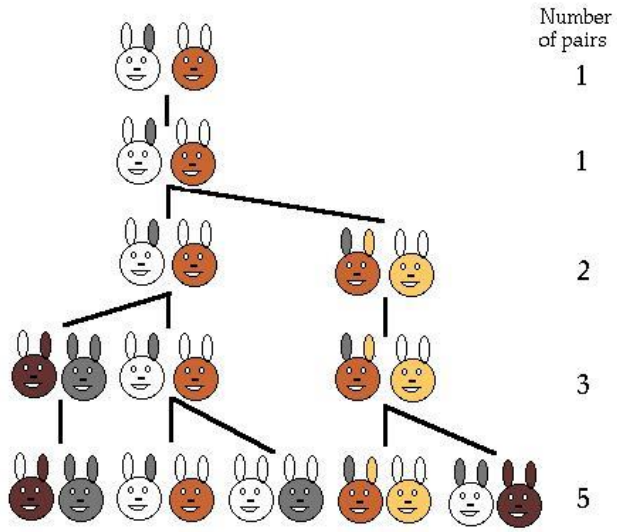
- Solusi rekursif karena definisi persoalan rekursif
  - Baca baik-baik persoalan, dan buat definisi rekursif sesuai definisi persoalan
- Solusi rekursif karena persoalan diwakili oleh struktur data rekursif → **materi berikutnya**
- Solusi rekursif untuk persoalan non rekursif
  - Buat fungsi rekursif dengan parameter

Intermezzo: How many pairs of rabbits can be produced from a single pair in a year's time?

- Asumsi:
  - Setiap pasang kelinci akan memberikan sepasang anak setiap bulan;
  - setiap pasang kelinci baru akan mulai melahirkan setelah berusia dua bulan;
  - tidak ada kelinci yang mati pada tahun itu.

- Contoh:
  - Setelah 1 bulan akan ada 2 pasang kelinci;
  - setelah 2 bulan akan ada 3 pasang kelinci;
  - setelah 3 bulan akan ada 5 pasang kelinci (karena pasangan yang lahir pada bulan pertama sudah akan mulai melahirkan anak).

Population Growth in Nature



- Leonardo Pisano (Leonardo Fibonacci = Leonardo, son of Bonaccio) proposed the sequence in 1202 in *The Book of the Abacus*.
- Fibonacci numbers are believed to model nature to a certain extent, such as Kepler's observation of leaves and flowers in 1611.

Fibonacci Numbers

- Fibonacci numbers:

  `0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...`

  where each number is the sum of the preceding two.

- Recursive definition:
  - `F(0) = 0;`
  - `F(1) = 1;`
  - `F(number) = F(number-1)+ F(number-2);`

Apa yang sudah dipelajari?

- Rekursifitas dan analisis rekurens
- Memanfaatkan analisis rekurens untuk konstruksi program rekursif

Sumber

- Diktat “Dasar Pemrograman, Bag. Pemrograman Fungsional” oleh Inggriani Liem, revisi Februari 2014