



# 第八讲 里程估计

王越

浙江大学控制科学与工程学院

## 里程估计(ODOMETRY)

- 根据传感器感知信息推导机器人位姿（位置和角度）变化
- 用途：
  - 航位推算 (Dead-reckoning)：基于已知位置，利用里程估计，推算现在位置



# 里程估计方法

- 基于机器人运动感知信息，结合运动学模型
  - 电机码盘
  - IMU（惯性单元，加速度计+陀螺仪）
- 基于环境感知传感器信息，通过最佳匹配估计
  - 激光里程计
  - 视觉里程计（VO）

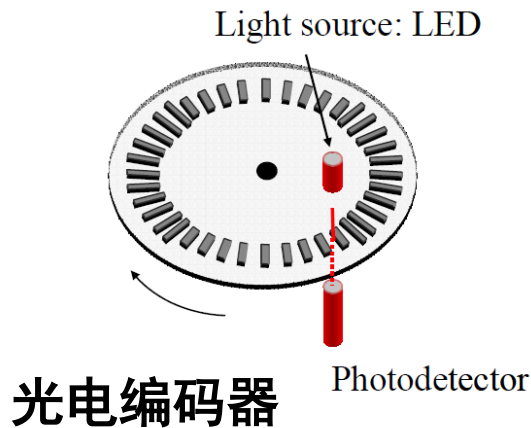




## 8.1 基于运动感知的里程估计

# 基于电机码盘的轮式移动机器人里程估计

## （1）根据电机码盘获得轮子转速



$$\dot{\phi} = \frac{2\pi n}{\eta}$$

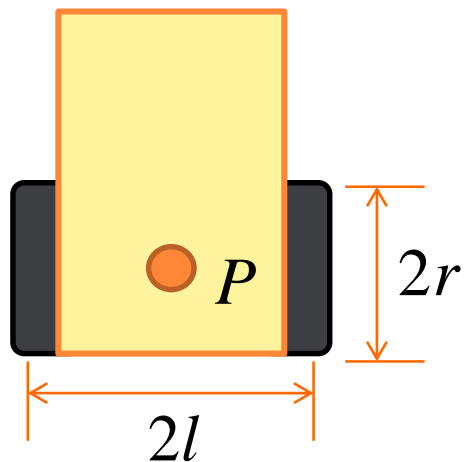
$n$  码盘测量得到的电机转速  
(转/分)

$\eta$  齿轮减速比



## 基于电机码盘的轮式移动机器人里程估计

- (2) 结合运动学模型计算参考点速度
- (3) 假设短时间片内为匀速运动，计算位姿变化



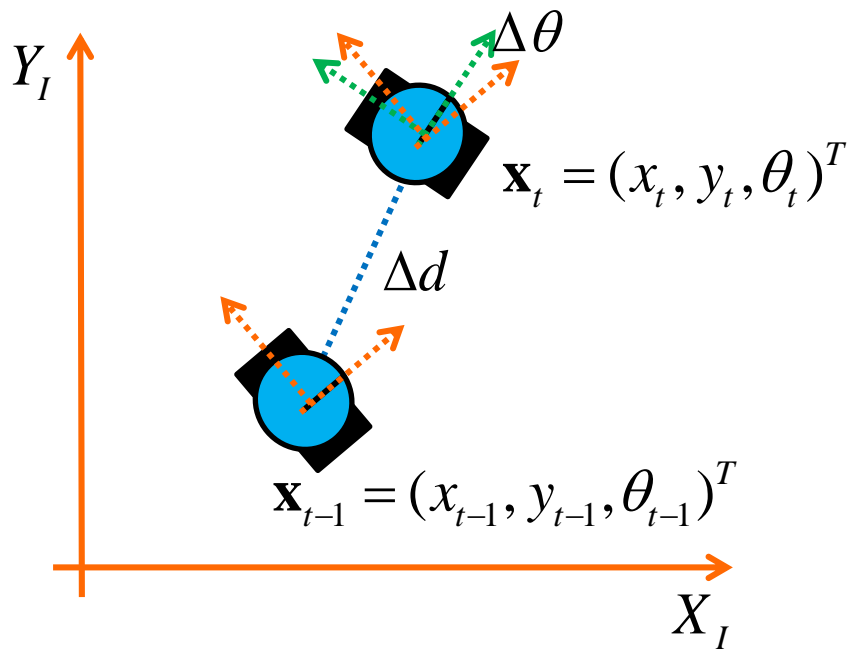
$$v = \frac{r\dot{\phi}_l}{2} + \frac{r\dot{\phi}_r}{2}$$

$$w = \frac{r\dot{\phi}_l}{2l} - \frac{r\dot{\phi}_r}{2l}$$

$$\Delta d = v\Delta t, \Delta\theta = w\Delta t$$



## 基于位姿变化的航位推算



$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + \Delta d \cos(\theta_{t-1} + \Delta \theta) \\ y_t = y_{t-1} + \Delta d \sin(\theta_{t-1} + \Delta \theta) \\ \theta_t = \theta_{t-1} + \Delta \theta \end{cases}$$



# 轮式里程估计误差

## ○ 系统误差

- 轮半径误差
- 轮子安装精度误差（不平行，两边距离不相等）
- 编码器精度误差
- 采样精度误差
- 齿轮减速比精度

## ○ 偶然误差

- 地面不平
- 轮子打滑
- .....

$$v = \frac{r\dot{\phi}_l}{2} + \frac{r\dot{\phi}_r}{2}$$

$$w = \frac{r\dot{\phi}_l}{2l} - \frac{r\dot{\phi}_r}{2l}$$

$$\Delta d = v\Delta t, \Delta\theta = w\Delta t$$

$$\dot{\phi} = \frac{2\pi n}{\eta}$$

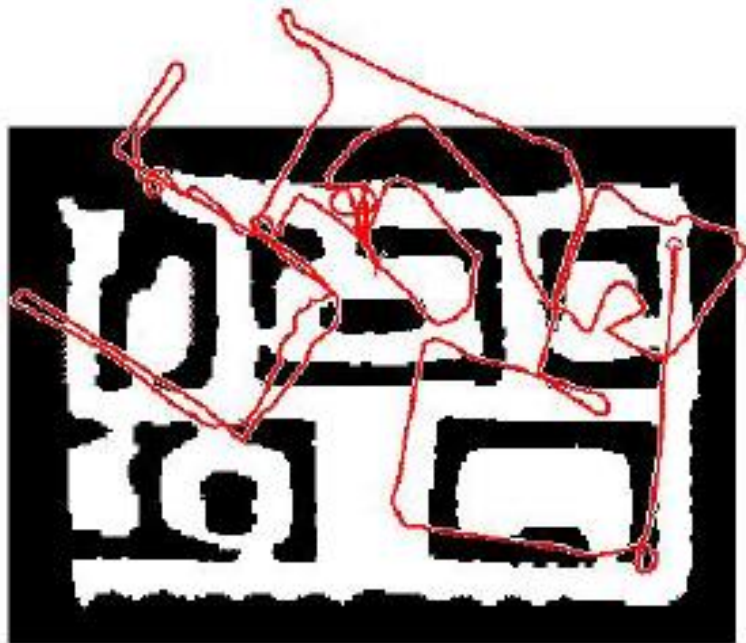




## 里程计估计误差导致问题

- 在航位推算时，里程计误差被累加，推算随着时间而增长

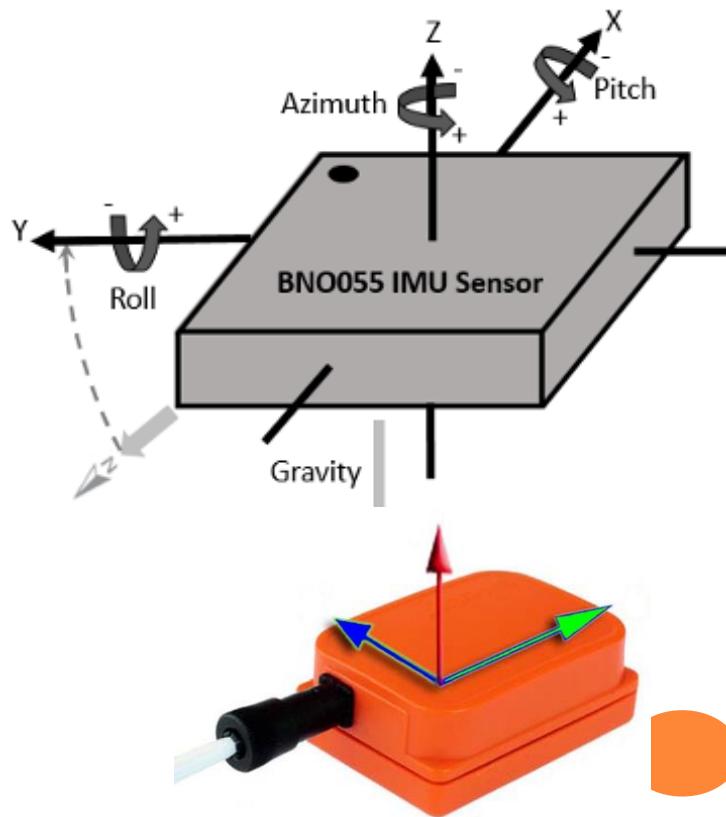
$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + \Delta d \cos(\theta_{t-1} + \Delta\theta) \\ y_t = y_{t-1} + \Delta d \sin(\theta_{t-1} + \Delta\theta) \\ \theta_t = \theta_{t-1} + \Delta\theta \end{cases}$$



# 基于惯性单元的里程估计

## ○ 惯性单元IMU

- Inertial Measurement Unit
  - 一般含有三轴的加速度计和三轴的陀螺仪
  - 通常集成一个三轴磁力计用于校正 IMU 的姿态估计
- 通过积分运算可得载体在导航坐标系中的姿态、速度和位置等信息



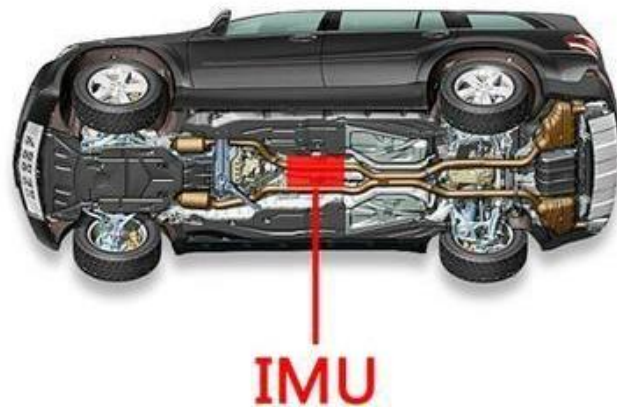
# 基于惯性单元的里程估计

## ○ 优点：

- 全天候
- 采样频率高
- 短时精度较好

## ○ 缺点：

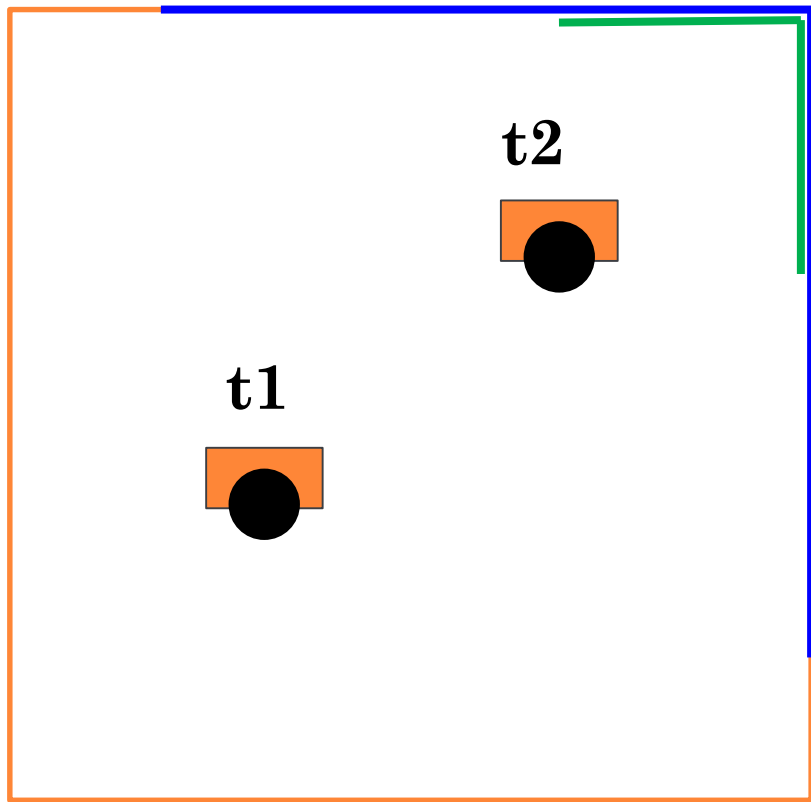
- 随着时间的增长累积误差较大，无法满足移动机器人长距离精确定位的要求，需要融合其它传感器进行组合导航



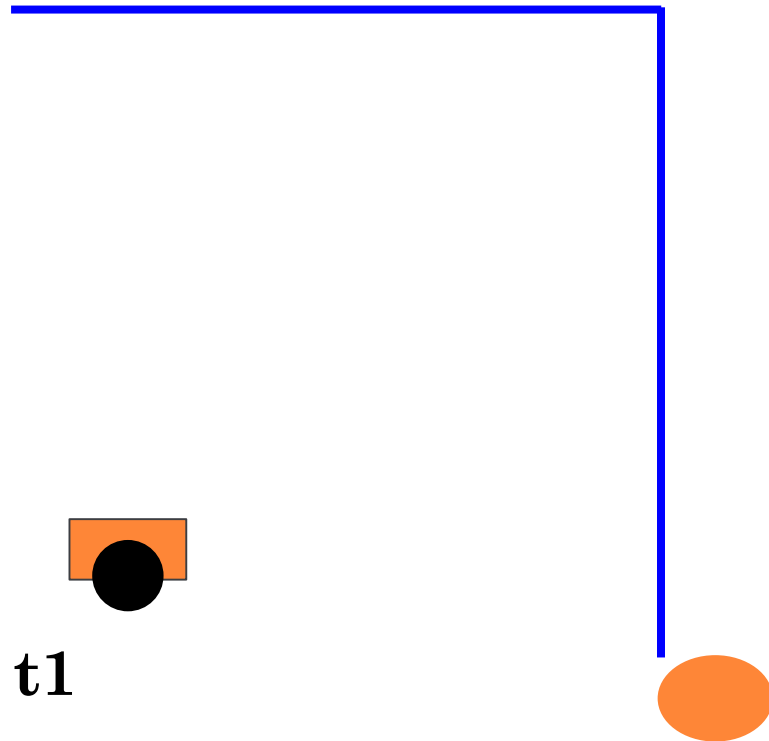
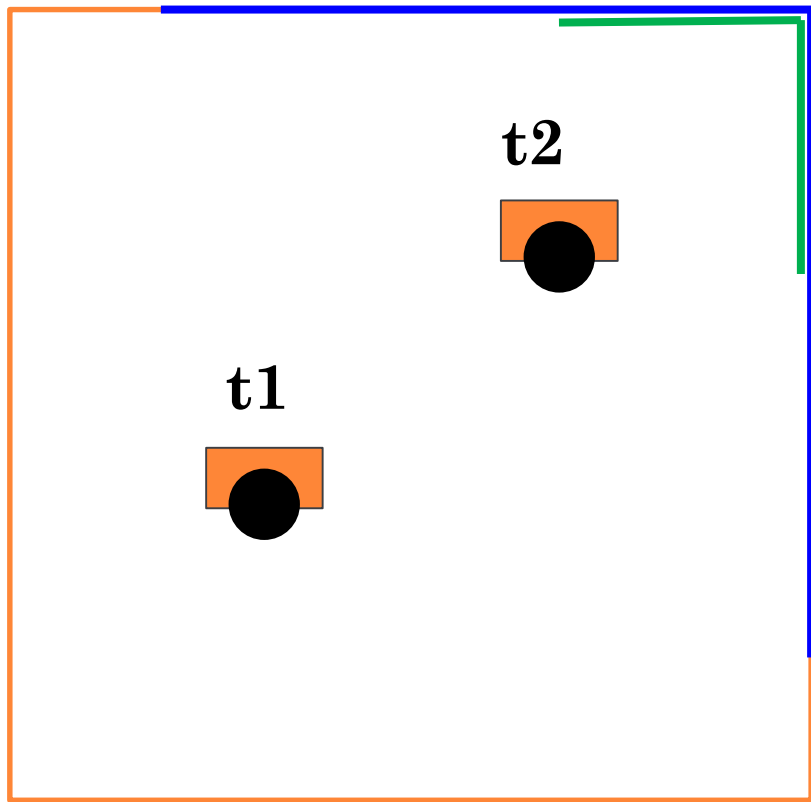


## 8.2 激光里程计

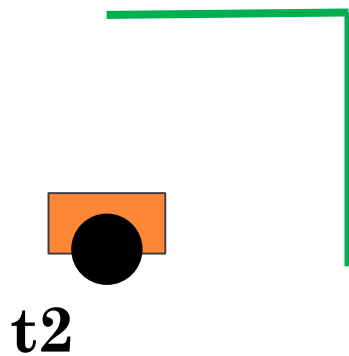
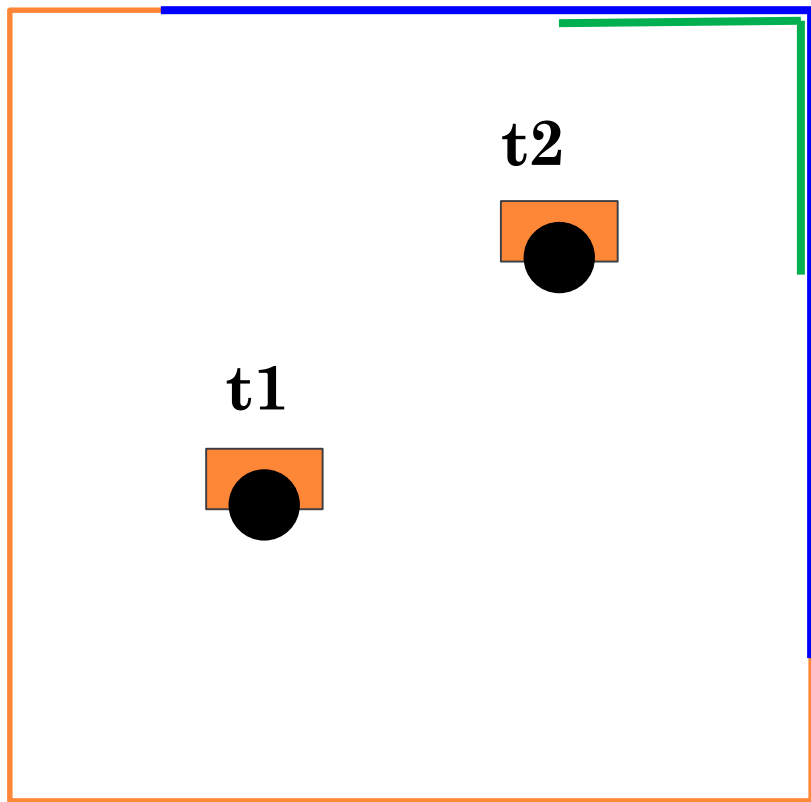
# 激光里程计



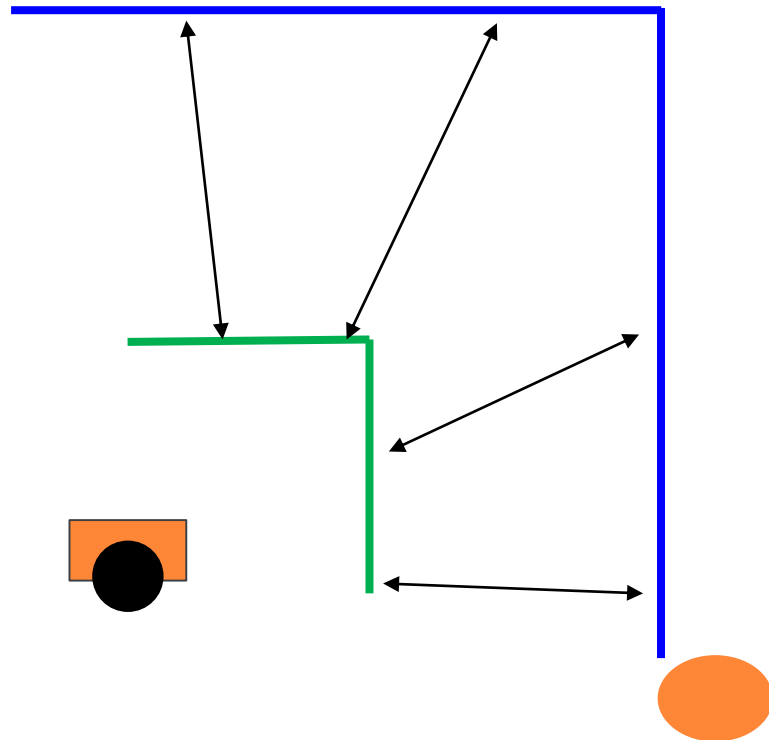
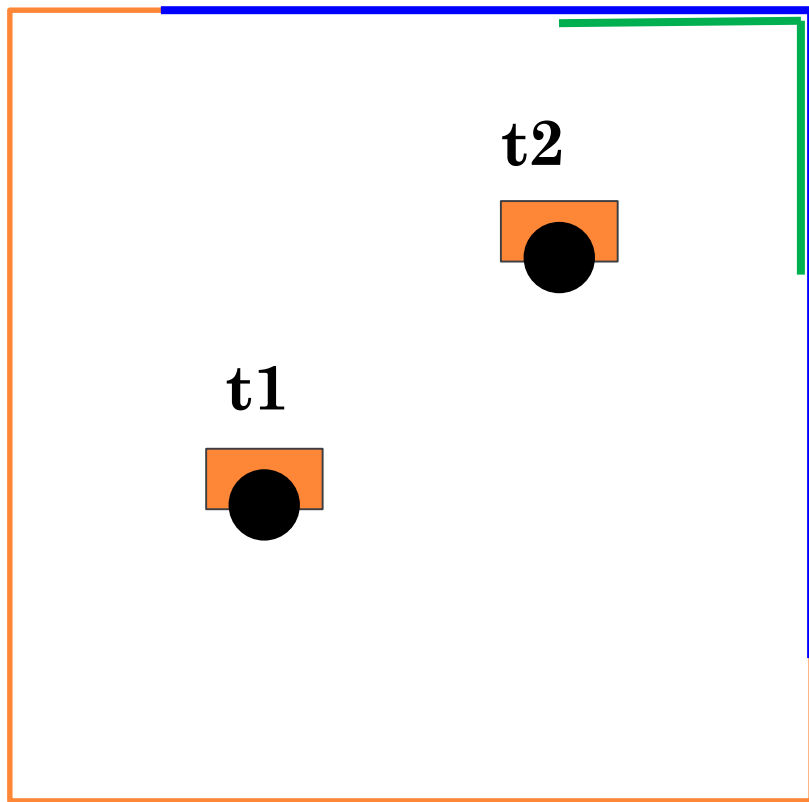
# 激光里程计



# 激光里程计

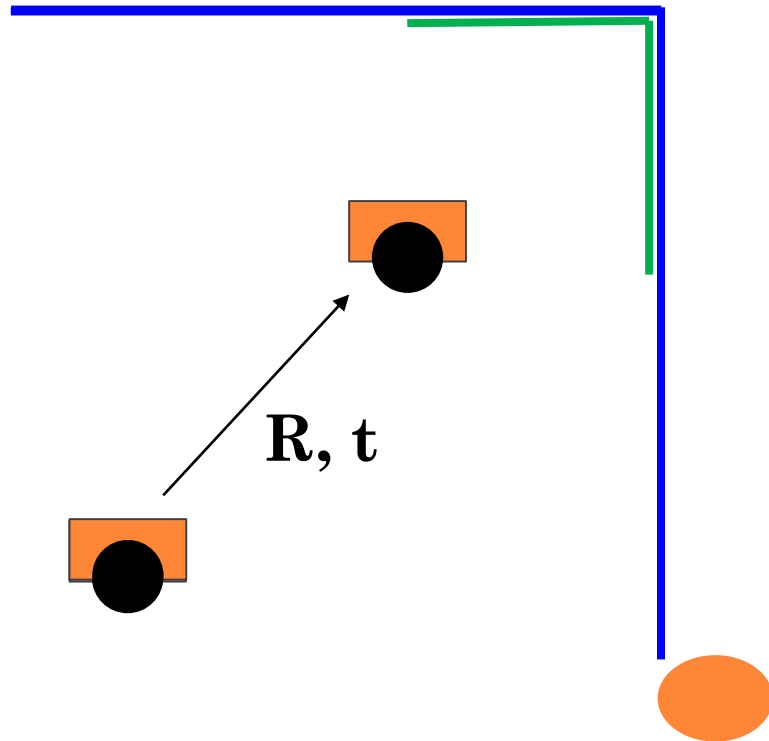
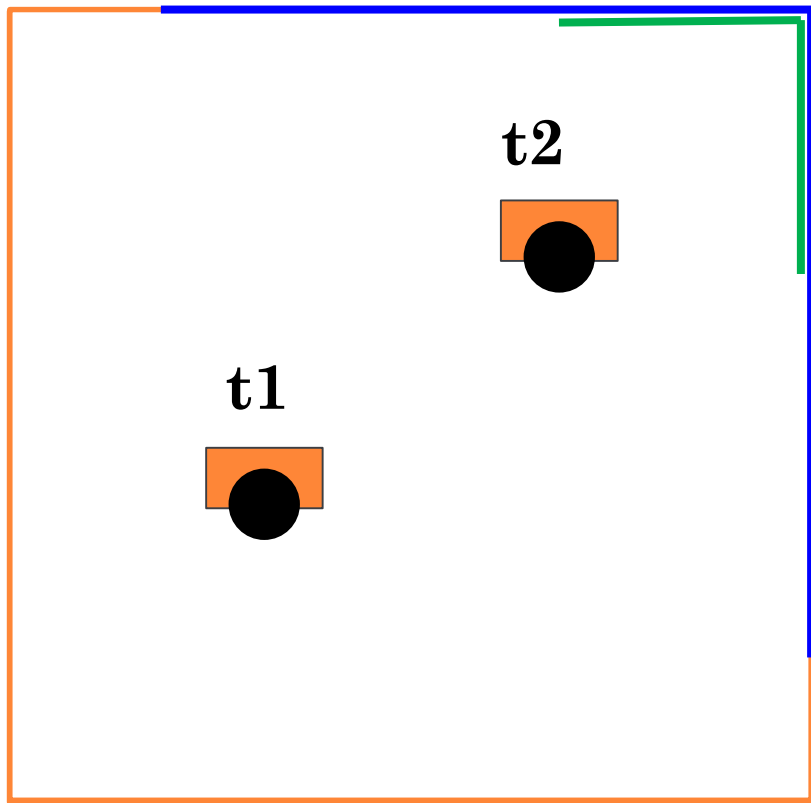


# 激光里程计



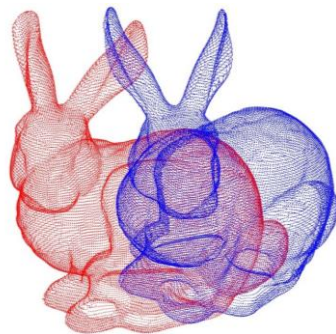


# 激光里程计

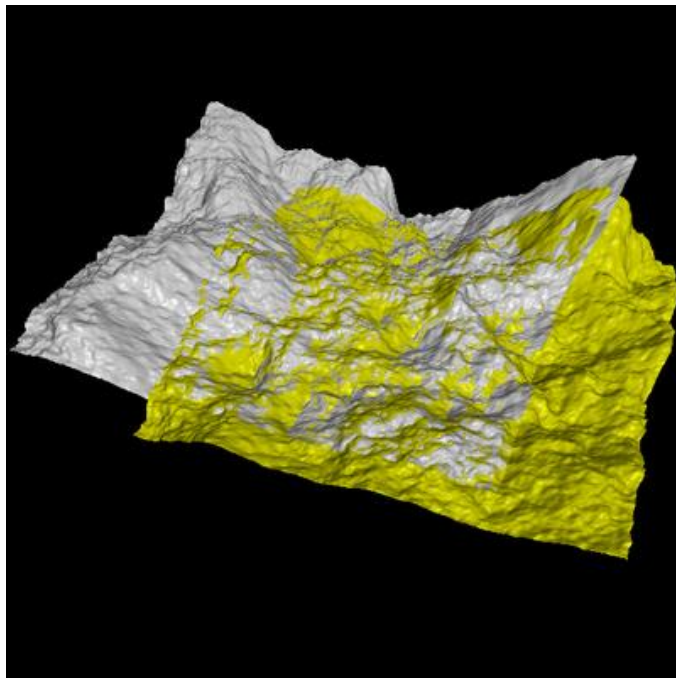


# 激光里程计

- 采用ICP(Iterative Closest Point)算法
  - 估计P'集合点与P集合点的初始位姿关系
  - 根据最近邻域规则建立P'集合点与P集合点的关联
  - 利用线性代数/非线性优化的方式估计旋转平移量
  - 对点集合P'的点进行旋转平移
  - 如果旋转平移后重新关联的均方差小于阈值，则结束
  - 否则迭代重复上述步骤



# ICP实例



# ICP

- Point to Point
- Line to Line
- Plane to Plane
- Point to Line
- Point to Plane
- Line to Plane



# POINT-POINT ICP

- 输入：点集合  $P, P = \{p_1, \dots, p_n\}$

点集合  $P', P' = \{p'_1, \dots, p'_n\}$

- 目标：计算两组数据之间的旋转平移量  $R, t$ ，使得两组数据形成最佳匹配，即两组数据的距离误差最小



# POINT-POINT ICP

- 第*i*个匹配对点的误差为

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - (\mathbf{R}\mathbf{p}'_i + \mathbf{t})$$

- 构建成最小二乘问题，求使得误差平方和达到最小的 $\mathbf{R}, \mathbf{t}$

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i - (\mathbf{R}\mathbf{p}'_i + \mathbf{t})\|^2$$



# 线性代数求解方法

1. 定义两组点集合的质心位置  $p, p'$

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \quad p' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p'_i$$

2. 计算每个点的去质心坐标

$$q_i = p_i - p \quad q'_i = p'_i - p'$$

3. 根据以下优化问题计算旋转矩阵  $R^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|q_i - Rq'_i\|^2$

4. 根据  $R$  计算  $t \quad t^* = p - R^*p'$



## R, t 分解计算说明

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \| \mathbf{p}_i - (\mathbf{R} \mathbf{p}'_i + \mathbf{t}) \|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \| \mathbf{p}_i - \mathbf{R} \mathbf{p}'_i - \mathbf{t} - \mathbf{p} + \mathbf{R} \mathbf{p}' + \mathbf{p} - \mathbf{R} \mathbf{p}' \|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \| (\mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}')) + (\mathbf{p} - \mathbf{R} \mathbf{p}' - \mathbf{t}) \|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \| (\mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}')) \|^2 + \| \mathbf{p} - \mathbf{R} \mathbf{p}' - \mathbf{t} \|^2
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad \mathbf{p}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}'_i$$

$$\underbrace{+ 2(\mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'))^T (\mathbf{p} - \mathbf{R} \mathbf{p}' - \mathbf{t})}_{\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{a}} = 0}$$





## R, t 分解计算说明

优化目标函数简化为

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|(\mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'))\|^2 + \|\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p}' - \mathbf{t}\|^2$$

左边只跟旋转矩阵 $\mathbf{R}$  相关

右边既有 $\mathbf{R}$  也有 $\mathbf{t}$ ，但是只跟质心相关

因此问题可以分解为两步法解决



## 求解R

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|(\mathbf{p}_i - \mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'))\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|(\mathbf{q}_i - \mathbf{R}\mathbf{q}'_i)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i + \mathbf{q}'_i^T \underbrace{\mathbf{R}^T \mathbf{R}}_{=\mathbf{I}} \mathbf{q}'_i - 2\mathbf{q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{q}'_i}_{\text{与R 无关}}\end{aligned}$$

优化目标函数变为

$$\max \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{q}'_i$$



## 求解R

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{q}'_i = \sum_{i=1}^n \text{tr}(\mathbf{q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{q}'_i) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{q}'_i \mathbf{q}_i^T) = \text{tr}\left(\mathbf{R} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i \mathbf{q}_i^T\right)$$

定义矩阵W

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i \mathbf{q}_i^T$$

对W进行SVD分解, 可得  $\mathbf{W} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$

S 为奇异值组成的对角矩阵, 对角线元素从大到小排列, 其余为0

U 和 V 满足  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$   $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$



# 求解R

- 目标函数上界

$$tr(RUSV^T) = tr(SV^T RU) \sim tr(SH)$$

$$H = \begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ h_3^T \end{pmatrix}$$

h是模为1的向量，  
因此每个元素的模必小于1

$$\begin{aligned} tr(RUSV^T) &= tr \begin{pmatrix} s_1 h_1^T \\ s_2 h_2^T \\ s_3 h_3^T \end{pmatrix} = s_1 h_{11} + s_2 h_{22} + s_3 h_{33} \\ &\leq s_1 + s_2 + s_3 \end{aligned}$$



## 求解R

- 等号成立时

$$H = V^T R U = I$$

- 可得R

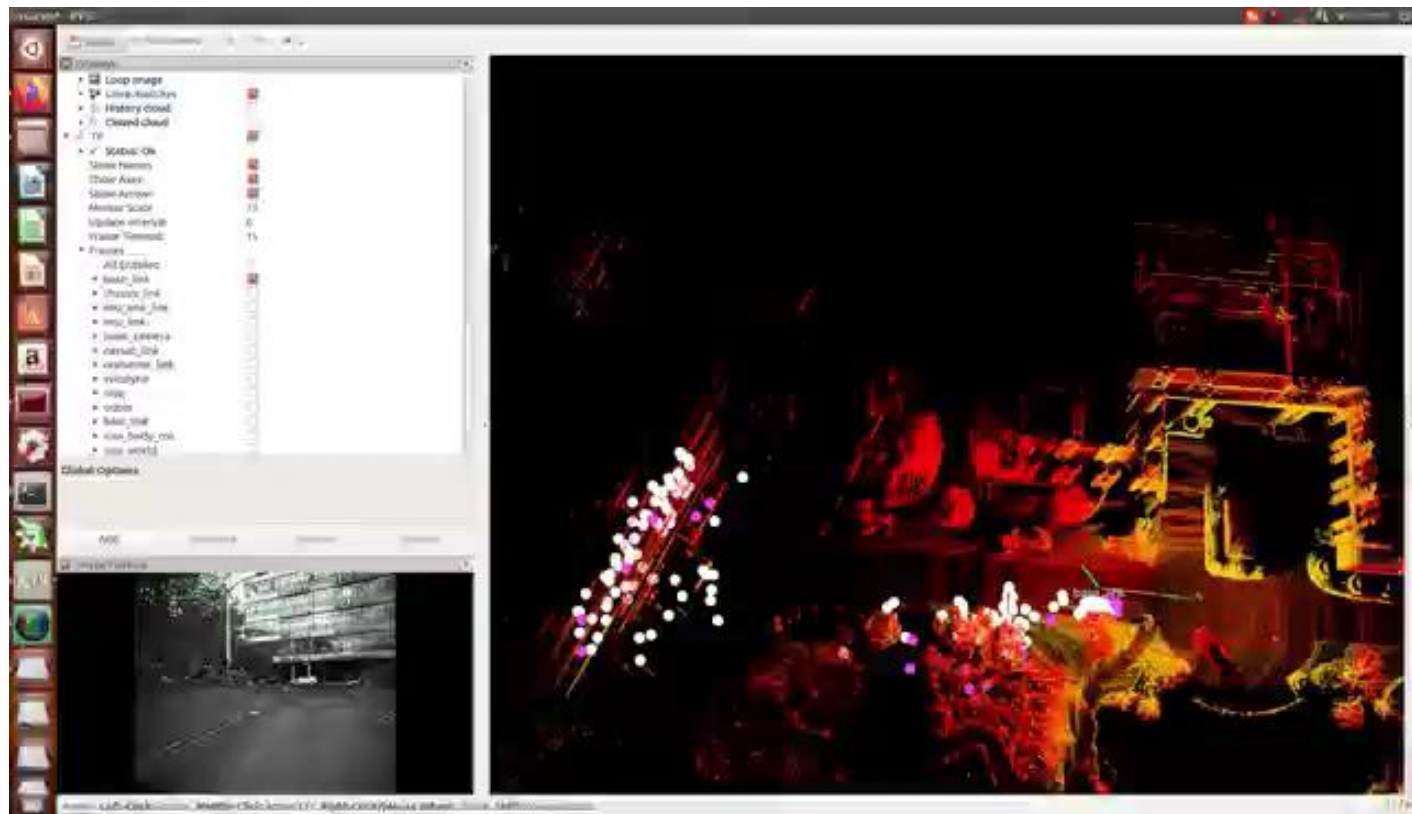
$$R = V U^T$$

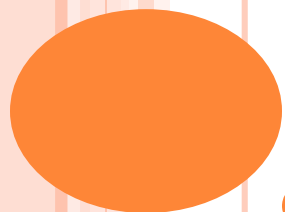
- 进一步得到t

$$t = p - R p'$$



# 激光/视觉/IMU融合的里程估计





**END**

