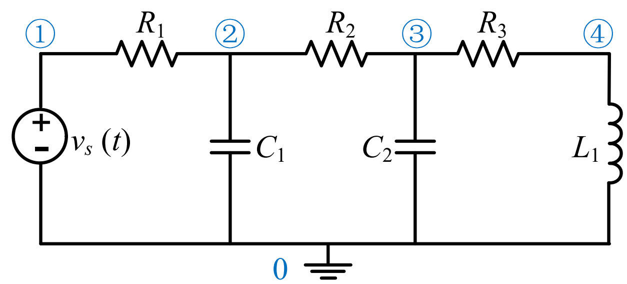
第二章 动态电路瞬态特性分析

2.3 动态电路时域近似求解

动态电路时域近似求解

电路



$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ i_s \\ i_L \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & L_3
\end{bmatrix}
\frac{d}{dt}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ i_s \\ i_L \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_s \\ 0 \end{bmatrix}
$$

微分形式电路方程

怎么用数值方法求解？

动态电路微分方程时域求解

- 一步积分近似
- 二阶RC电路
  - 后向欧拉近似下的电路方程
  - 电路方程数值求解

一步积分近似

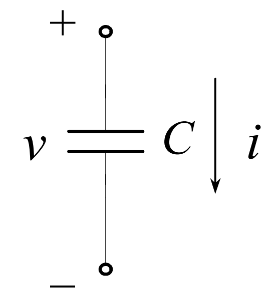
由前一时刻电压、电流
确定后一时刻电压、电流的电路方程

借助Matlab工具求解

一步积分近似：电容

电容两端电压与电流关系为 $i = C\dfrac{dv}{dt}$

将电容两端电压表示成电流的积分 $dv = \dfrac{1}{C} i dt$



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)d\tau$$

或 $$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i(\tau)d\tau$$

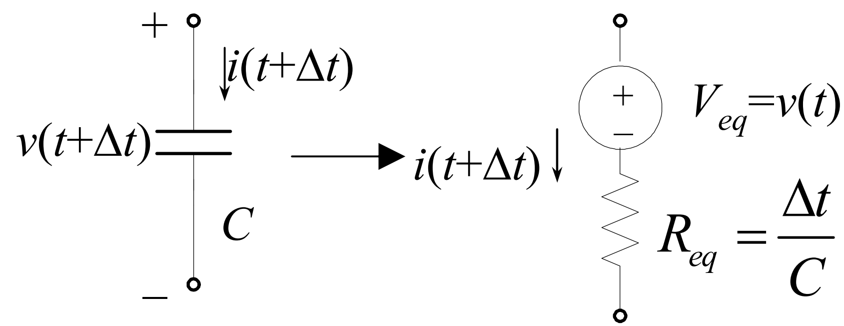
$$\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(\tau)d\tau = \begin{cases} \Delta t \cdot i(t) & \text{前向欧拉近似} \\ \boxed{\Delta t \cdot i(t+\Delta t)} & \text{后向欧拉近似} \\ (\Delta t/2)[i(t) + i(t+\Delta t)] & \text{梯形近似} \end{cases}$$

后向欧拉近似下电容的电路模型

后向欧拉近似

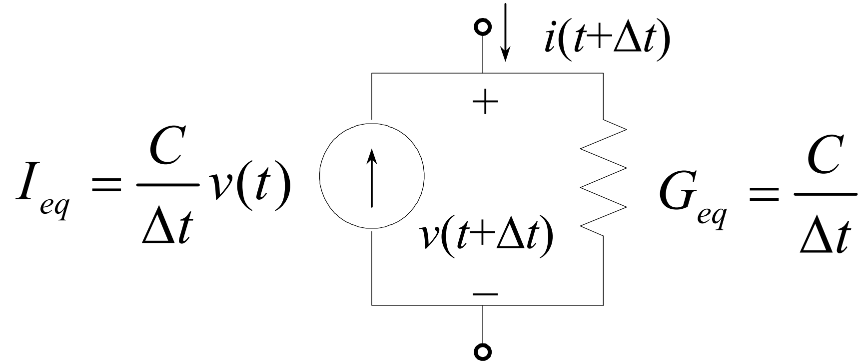
$$v(t+\Delta t) \approx v(t) + \frac{\Delta t}{C} i(t+\Delta t)$$

后向欧拉近似下电容的等效电路模型



戴维南模型

$$V_{eq} = v(t) \qquad R_{eq} = \frac{\Delta t}{C}$$

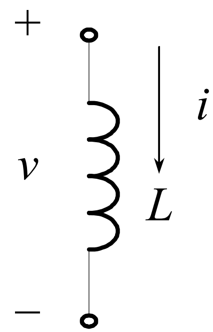


诺顿模型

$$I_{eq} = \frac{C}{\Delta t} v(t) \qquad G_{eq} = \frac{C}{\Delta t}$$

一步积分近似：电感

$$v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow di = \frac{1}{L}vdt$$



$$v = L\frac{di}{dt}$$

将电流表示成电感两端电压的积分

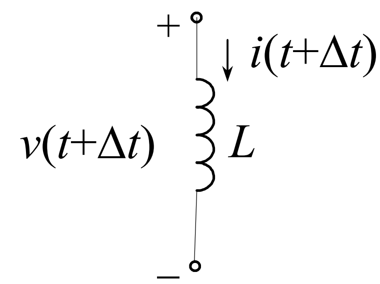
$$i(t+\Delta t) - i(t) = \frac{1}{L}\int_{t}^{t+\Delta t} v(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t+\Delta t} v(\tau)d\tau = \begin{cases} \Delta t \cdot v(t) & \text{前向欧拉近似} \\ \boxed{\Delta t \cdot v(t+\Delta t)} & \text{后向欧拉近似} \\ (\Delta t/2)[v(t)+v(t+\Delta t)] & \text{梯形近似} \end{cases}$$

后向欧拉近似下电感的电路模型

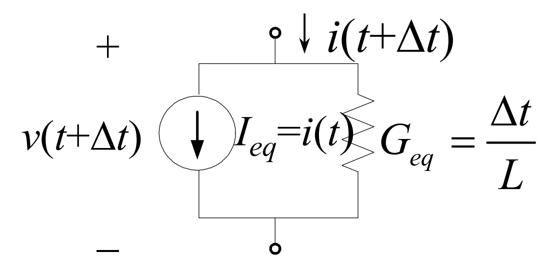
对于后向欧拉近似

$$i(t+\Delta t)=i(t)+\frac{\Delta t}{L}v(t+\Delta t)$$

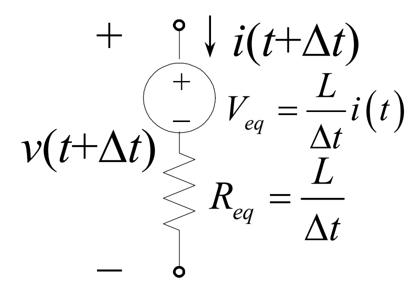


可以用诺顿或戴维南电源模型表示

$$\left.\begin{aligned} I_{eq} &= i(t) \\ G_{eq} &= \frac{\Delta t}{L} \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} V_{eq} &= \frac{L}{\Delta t}i(t) \\ R_{eq} &= \frac{L}{\Delta t} \end{aligned}\right\}$$

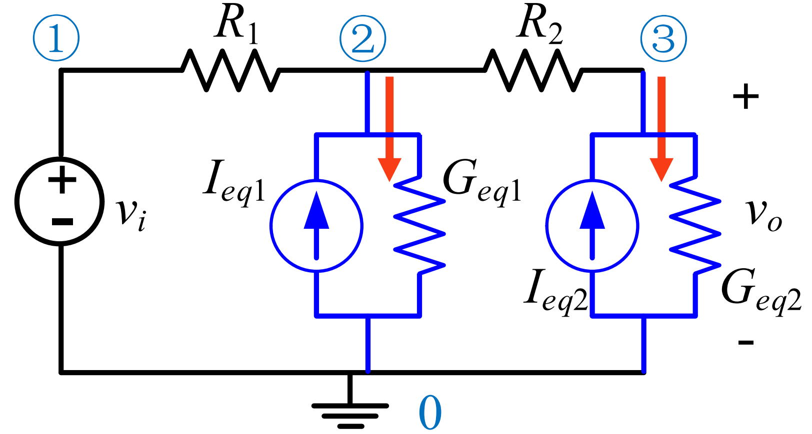


后向欧拉近似下的电路方程

$$I_{eq1} = \frac{C_1}{\Delta t} v_2(t), G_{eq1} = \frac{C_1}{\Delta t}$$

$$I_{eq2} = \frac{C_2}{\Delta t} v_3(t), G_{eq2} = \frac{C_2}{\Delta t}$$

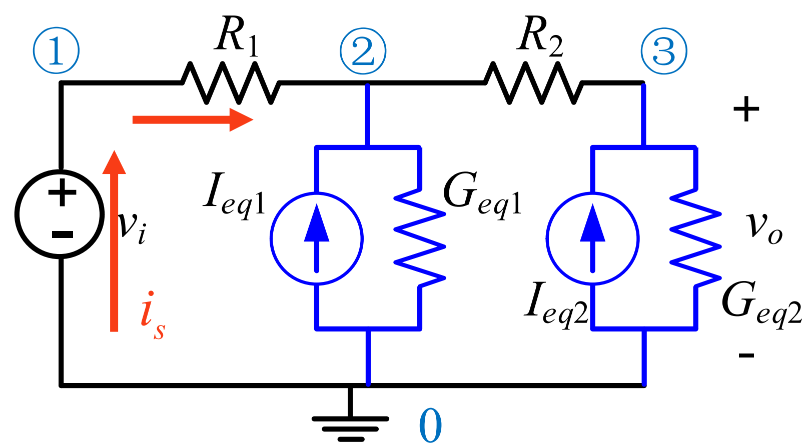
$t+\Delta t$：



$v_i(t)=u(t)$

后向欧拉近似下的电路方程

$t+\Delta t$:



$$I_{eq1} = \frac{C_1}{\Delta t} v_2(t), G_{eq1} = \frac{C_1}{\Delta t}$$

$$I_{eq2} = \frac{C_2}{\Delta t} v_3(t), G_{eq2} = \frac{C_2}{\Delta t}$$

节点①（自变量为 $t+\Delta t$）

增加了变量i_s

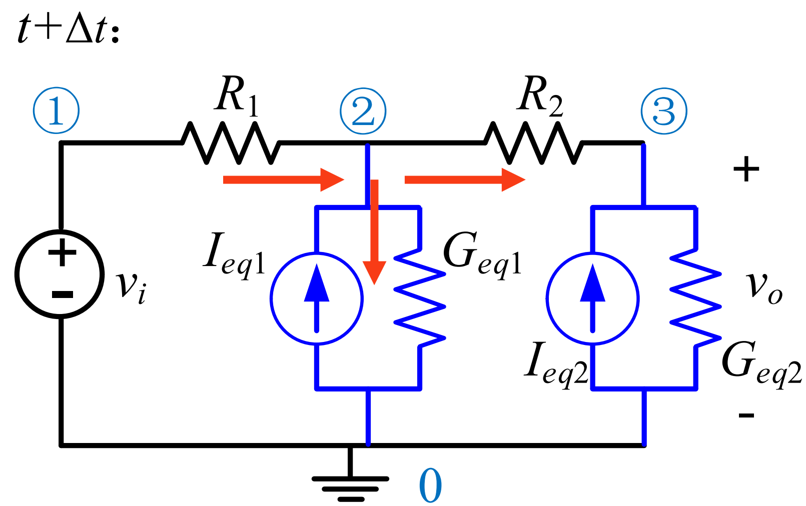
$$\frac{v_1 - v_2}{R_1} - i_s = 0, \quad v_1 = v_i$$

形式一致

后向欧拉近似下的电路方程

$$I_{eq1}=\frac{C_1}{\Delta t}v_2(t),G_{eq1}=\frac{C_1}{\Delta t}$$

$$I_{eq2}=\frac{C_2}{\Delta t}v_3(t),G_{eq2}=\frac{C_2}{\Delta t}$$



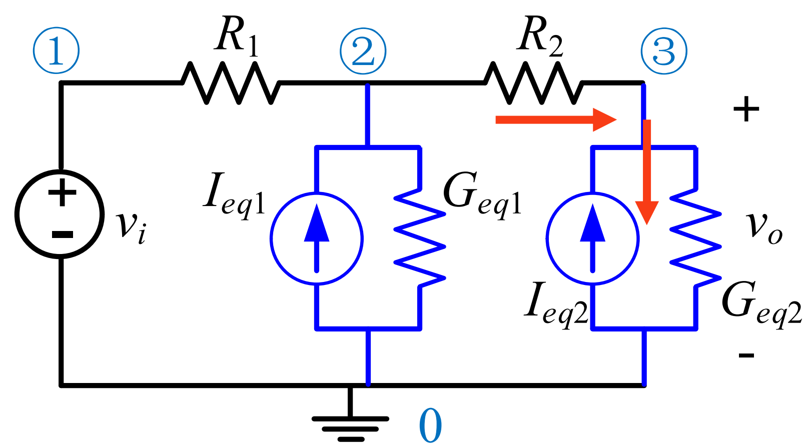
节点②
$$-\frac{v_1-v_2}{R_1}+\frac{v_2-v_3}{R_2}+C_1\frac{dv_2}{dt}=0$$
（原微分方程）

（未注明自变量 $t+\Delta t$ ）

$$-\frac{v_1-v_2}{R_1}+\frac{v_2-v_3}{R_2}+\boxed{\frac{C_1}{\Delta t}v_2-\frac{C_1}{\Delta t}v_2(t)}=0$$

后向欧拉近似下的电路方程

$t+\Delta t$:



$$I_{eq1}=\frac{C_1}{\Delta t}v_2(t),G_{eq1}=\frac{C_1}{\Delta t}$$

$$I_{eq2}=\frac{C_2}{\Delta t}v_3(t),G_{eq2}=\frac{C_2}{\Delta t}$$

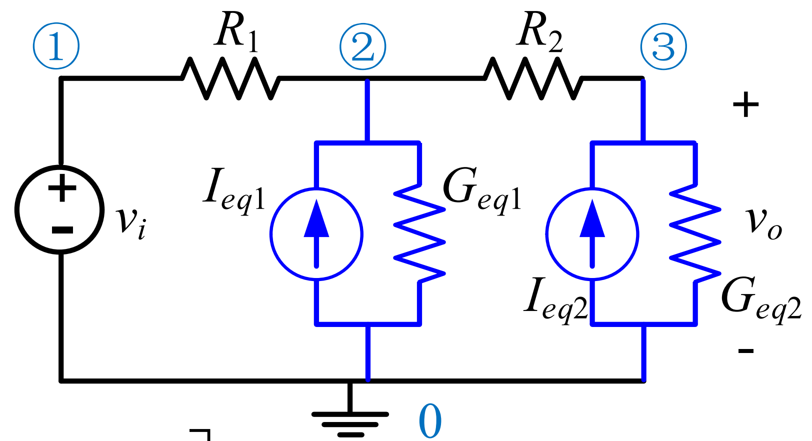
节点③ $$-\frac{v_2-v_3}{R_2}+C_2\frac{dv_3}{dt}=0$$ （原微分方程）

（未注明自变量 $t+\Delta t$ ）

$$-\frac{v_2-v_3}{R_2}+\boxed{\frac{C_2}{\Delta t}v_3-\frac{C_1}{\Delta t}v_3(t)}=0$$

后向欧拉近似下的电路方程

$t+\Delta t$：



$$I_{eq1}=\frac{C_1}{\Delta t}v_2(t),G_{eq1}=\frac{C_1}{\Delta t}$$

$$I_{eq2}=\frac{C_2}{\Delta t}v_3(t),G_{eq2}=\frac{C_2}{\Delta t}$$

（未注明自变量 $t+\Delta t$ ）

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{C_1}{\Delta t} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{C_2}{\Delta t} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_1}{\Delta t}v_2(t) \\ \frac{C_2}{\Delta t}v_3(t) \\ v_i \end{bmatrix}$$

电路方程数值求解

R_1=100 Ω　R_2=100 Ω　$v_i(t)=u(t)$

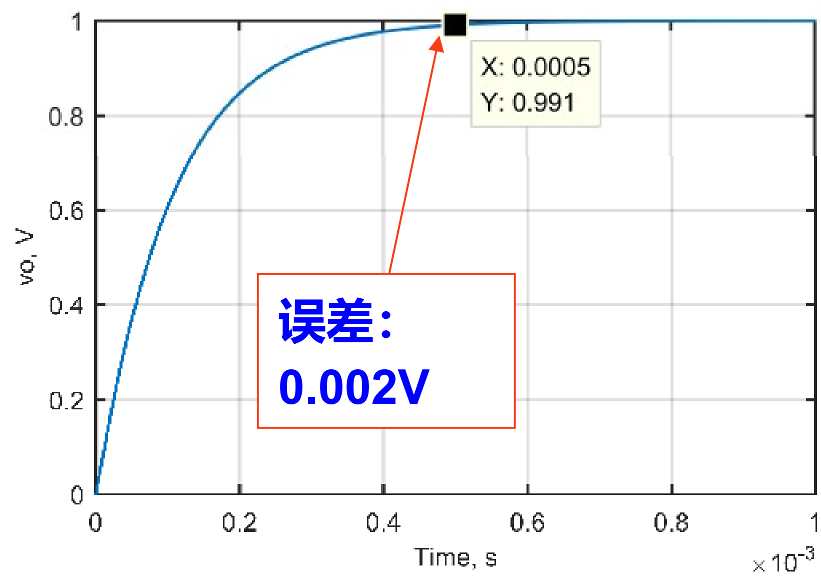
C_1=1 μF　C_2=0.01 μF

```
R1=100; R2=100; C1=1e-6; C2=0.01e-6;
vi=1;   % vi = u(t)

% simulation time: 1ms;  time step: 0.01ms
t_total=1e-3; dt=0.01e-3;
A = ...
   [1/R1, -1/R1, 0, -1; ...
    -1/R1, 1/R1+1/R2+C1/dt, -1/R2, 0; ...
    0, -1/R2, 1/R2+C2/dt, 0; ...
    1, 0, 0, 0];
% zero state
t(1)=0; X(:,1) = [0, 0, 0, 0];

t_steps=t_total/dt; for n=1:1:t_steps
   B = [0; C1/dt*X(2,n); C2/dt*X(3,n); vi];
   t(n+1) = dt*n; X(:,n+1) = A \ B;
end

vo = X(3,:); plot(t, vo); grid on;
xlabel('Time, s'); ylabel('vo, V');
```



小结

- 一步积分近似
- 二阶RC电路
  - 后向欧拉近似下的电路方程
  - 电路方程数值求解