第7章 级 数

§7.1 级数的敛散性及基本性质

一、 级数收敛的定义

中国古代哲学家庄周所著的《庄子•天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭". 其含义就是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，这样的过程可以无限地进行下去. 每天截下的木棒长度分别为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

将它们相加

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

便得到无穷多个数的"和". 从直观上可知，上面的"和"等于1.

但是无穷多个数的"和"不一定有确定的含义，例如

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+1+(-1)+\cdots$$

在上面的和式中，若写作

$$[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots+[(-1)+1]+\cdots$$

其"和"为0. 若写作

$$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots+[(-1)+1]+\cdots$$

其"和"便等于1. 这样就得到两个不同的结果，自然就提出了下面的问题：如何定义无穷多个数相加后的"和".

将无穷多个数$\{a_n\}$: a_1，$a_2,\cdots$，$a_n,\cdots$写作和式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{7.1.1}$$

称之为**无穷级数**，记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. 这仅仅是形式的记号，并不一定有明确的含义，即不一定有确定的"和". 为此我们引进下面概念.

定义 7.1.1　给定数列$\{a_n\}$，将其每一项依次用“+”号连接起来的表达式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

称**无穷级数**. 由于其通项a_n都是常数，也称之为**常数项级数**，记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

在级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$中，前$n$项的和：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，称为该级数的**部分和**. 所得到的数列$\{S_n\}$称为**部分和数列**.

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的通项$a_n$与其部分和数列$\{S_n\}$之间有如下关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}. \tag{7.1.2}$$

定义 7.1.2　若级数(7.1.1)的部分和数列$\{S_n\}$收敛于S (即$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$)，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$**收敛**，此时称部分和数列$\{S_n\}$的极限$S$为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的**和**. 记作

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=S=\lim_{n\to+\infty}S_n.$$

若级数 (7.1.1) 的部分和数列$\{S_n\}$发散,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$**发散**.

定理 7.1.3（级数收敛的必要条件）　级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，则：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明：因为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，记其部分和为$S_n$，和为$S$. 则

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S.$$

从而有

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

例7.1.4 讨论**等比级数（也称几何级数）** $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$ 的敛散性. (其中：$a\neq 0$，$q\neq 0$).

解： 设该几何级数的部分和为S_n.

(1) 当$q=1$时，$S_n=na$，级数发散.

(2) 当$q=-1$时，$S_{2n}=0$，$S_{2n-1}=a\ (n=1,2,\cdots)$，级数发散.

(3) 当$|q|\neq 1$时，$S_n=a+aq+aq^2+\cdots aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

(i). 当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$，级数收敛，且其和为$\dfrac{a}{1-q}$.

(ii). 当$|q|>1$时，级数发散.

总之，对于几何级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}aq^n(a\neq 0，q\neq 0)$ 有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}aq^n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q} & (|q|<1)\\ \text{发散} & (|q|\geq 1)\end{cases}.$$

例7.1.5 讨论级数 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$ 的敛散性.

解： 当$k\in N^+$时，有

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛，且该级数的和为 $\frac{1}{4}$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛或发散(简称为**敛散性**)是通过级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性来判断的，根据数列极限的柯西收敛准则，不难得到级数收敛的柯西收敛准则.

定理 7.1.6（级数收敛的 Cauchy 准则） 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充要条件是对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in N^+$ 均有

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon. \qquad (7.1.3)$$

例7.1.7 利用 Cauchy收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明： 当 $k \ge 2$，且 $k \in N^+$ 时，有

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

对任意正整数 p，有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

所以，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in N^+$ 均有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例7.1.8 利用 Cauchy 收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证明： 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对 $\forall N\in N^{+}$，$\exists\, n_0\in N^{+}$，使得 $n_0>N$，取 $p_0=n_0$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{k}&=\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{n_0+n_0}\\&>\frac{1}{n_0+n_0}+\cdots+\frac{1}{n_0+n_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0.\end{aligned}$$

根据 Cauchy 收敛准则，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 称为**调和级数**，由例 (7.1.8) 可知，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

二、 收敛级数的基本性质

定理 7.1.9 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 均收敛，则：对任意 k_1，$k_2\in R$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(k_1a_n+k_2b_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(k_1a_n+k_2b_n)=k_1\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+k_2\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\ .$$

由 Cauchy 收敛准则可知，级数收敛与否取决于：对任意给定的正数 ε，是否存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对任意正整数 p，使得式 (7.1.3) 恒成立. 由此可知，级数是否收敛与级数的前面有限项无关.

定理 7.1.10 去掉、添加或改变级数的有限项，不改变级数的敛散性.

由此定理可得，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则级数

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}+\cdots \tag{7.1.4}$$

也收敛，且其和 $r_n=S-S_n$. 其中 S 为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的和.

式 (7.1.4) 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的**余项**(误差).

定理 7.1.11 收敛级数任意添加括号后所得级数仍然收敛，且其和不变.

事实上，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 添加括号所得到的新级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ，其部分和数列 $\{T_n\}$ 为原级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则其部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛. 又收敛数列的任何子数列都收敛，$\{T_n\}$ 为收敛数列 $\{S_n\}$ 的子数列，$\{T_n\}$ 当然收敛.

注意：发散级数添括号后所得到的级数可能收敛. 例如

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

很显然，该级数为发散的；但添加括号后

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

所得的级数是收敛的.

§7.2 正项级数

一、 正项级数的收敛性判别法

每一项均为正数的级数称为**正项级数**. 对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$，其部分和数列$\{S_n\}$（$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$）显然是单调递增的，根据数列的单调有界收敛准则有以下定理.

定理 7.2.1 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛的充分必要条件为部分和数列$\{S_n\}$有界. 即，存在正数$M>0$，对$\forall n \in \mathbb{N}^+$都有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le M.$$

级数收敛是根据其部分和数列是否存在极限来判断的，但要精确计算出级数的部分和S_n并非易事，而判断S_n是否有界要简单很多.

由定理 7.2.1 容易得到如下关于正项级数的敛散性判别法.

二、 正项级数的比较判别法

定理 7.2.2（比较判别法） 对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$，如果存在自然数$N$，当$n>N$时，有$a_n \le b_n$. 则

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$也收敛；

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$必发散.

证明： 由于改变级数的有限项，不改变级数的敛散性，不妨假设对任意自然数n都有$a_n \le b_n$. 记级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的部分和分别为$S_n$、$T_n$，则：$S_n \le T_n$.

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，记其和为 T，则：$T_n \le T$. 从而有，$S_n \le T_n \le T$.

由定理(7.2.1) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散时，若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，根据 (1) 的结论，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 这与条件 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散矛盾.

为了便于实际应用，比较判别法常常以极限形式表示.

定理 7.2.3（极限判别法） 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$，若 $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$，则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l = 0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛.

下面给出 (1) 的证明，其它情况由读者完成.

证明： 若 $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$，且 $0 < l < +\infty$，对 $\varepsilon = \frac{l}{2}$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon = \frac{l}{2}.$$

即

$$\frac{1}{2} l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l.$$

从而

$$\frac{1}{2} l b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n.$$

如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l}{2} b_n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.

如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则：$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} l b_n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛.

例7.2.4 判断 p -级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解：根据例(7.1.8)，当 $p \le 1$时，$\frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}$；而调和级数发散，因此，当 $p \le 1$时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p > 1$时，对函数 $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ $(x \ge 1)$在区间$[n，n+1]$上应用拉格朗日中值定理，$\exists \theta_n \in (0, 1)$ 使得

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = -\frac{p-1}{(n+\theta_n)^p}.$$

则

$$\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) = \frac{1}{(n+\theta_n)^p} > \frac{1}{(n+1)^p}.$$

又正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)$收敛，根据比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

总之，当 $p \le 1$时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散；当 $p > 1$时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

例7.2.5 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin\frac{2n+1}{5^n}$ 的敛散性.

解：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $0 < \sin x < x$. 因此，$0 < 3^n \sin\frac{\pi}{5^n} < \pi\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \pi\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 收敛，根据比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin\frac{2n+1}{5^n}$ 也收敛.

例7.2.6 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\right)$ 的敛散性.

解：因为当 $x \to 0$ 时，$x-\ln(1+x)=x-[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

从而
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)=\frac{1}{2}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据正项级数的极限判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ 也收敛.

例7.2.7 设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}dx\ (n=1,2,\cdots)$，试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的敛散性.

解：本题要计算出 a_n 的具体数值有难度，而题目要求仅仅是判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的敛散性，通过适当的“缩放”，估计通项 a_n 的取值范围即可.

由于
$$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，因此，原级数也收敛.

例7.2.8 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都是正项级数，且 $\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

成立. 则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 也发散.

证明：不失一般性可以认为对任意正整数上述不等式均成立，则

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2},\ \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}, \cdots.$$

各式两边相乘可得 $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$. 从而有 $0 < a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$.

由比较判别法可知，结论 (1)、(2) 均成立.

三、 正项级数的比值与根值判别法

定理 7.2.9【比值判别法、D′Alembert[30]（达朗贝尔）判别法】

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\ (0 \le l \le +\infty)$. 则

(1) 当 $0 \le l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $l > 1$ 或 $l = +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明：(1) 当 $l < 1$ 时，取 $\varepsilon_0 > 0$，且 $\varepsilon_0 < 1 - l$，则 $\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有

$$l - \varepsilon_0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon_0.$$

记 $l + \varepsilon_0 = r$，则: $0 < r < 1$. 由上式可得，当 $n > N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r^{n-N}.$$

即

$$a_{n+1} < a_{N+1} \cdot r^{n-N}.$$

而级数 $\sum_{n=N+1}^{+\infty} r^{n-N}$ 收敛，根据比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $l > 1$ (或 $+\infty$) 时，取 $\varepsilon_0 = \frac{l-1}{2}$，则 $\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有

---

[30] **D’Alembert**（达朗贝尔，1717-1783），法国数学家、物理学家.达朗贝尔认为求解物理（力学，包括天体力学）问题是数学的目标.在动力学基础的建立、流体力学研究和天体力学的研究中（月球运动理论，关于地球形状和自转理论）都作出了很大贡献，也是数学分析（极限、级数和微分方程等）的开拓者.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon_0 = \frac{l+1}{2} > 1.$$

因此，当$n > N$时，$a_{n+1} > a_n$；即级数$\{a_n\}(n > N)$单调递增．从而，

级数的通项$\{a_n\}$的极限不等于0．所以，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

例7.2.10 讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)q^n$的敛散性.$(q>0)$

解：因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)q^{n+1}}{(n+1)q^n} = q.$$

所以

(1) 当$0<q<1$时，级数收敛；(2) 当$q>1$时，级数发散；

(3) 当$q=1$时，$a_n = n+1$，级数显然发散.

例7.2.11 判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

解：因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$$

$$= 3\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 3\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{\mathrm{e}} > 1.$$

所以，级数发散.

定理 7.2.12（柯西根值判别法） 设$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$是正项级数，且

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho.\ (0\le\rho\le+\infty)$$

则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

本定理的证明，可参考定理 7.2.9 的证明，由读者自行完成.

例7.2.13 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^n}$ 的敛散性.

解：因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)^2}}{3}=\dfrac{1}{3}<1$，因此，级数收敛.

当然，本题也可以用比值判别法求解.

例7.2.14 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3+(-1)^n\cdot 2}{2^n}$ 的敛散性.

解：由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}\cdot 2}{3+(-1)^n\cdot 2}=\begin{cases}\dfrac{5}{2} & (n\text{ 为奇数})\\[2mm] \dfrac{1}{10} & (n\text{为偶数})\end{cases}.$$

因此，用比值判别法无法判断其敛散性；可用根值或其它判别法判断.

【方法一】：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n\cdot 2}=\dfrac{1}{2}<1$，因此，级数收敛.

【方法二】：由于 $0<a_n<\dfrac{5}{2^n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5}{2^n}$ 收敛，所以原级数也收敛.

【注意】: 在比值判别法与根值判别法中，都没有给出当 $l=1$ 或 $\rho=1$ 时，级数的敛散性；对于 $\boldsymbol{p}$ **-级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=1.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p}=1.$$

而当$p>1$时，级数收敛；当$p\le 1$时，级数发散.因此，对于$l=1$或$\rho=1$的情况，比值判别法或根值判别法都无法判断级数的敛散性；即级数可能收敛也可能发散. 需要由其它判别方法来判断级数的敛散性.

四、 正项级数的积分判别法

对于 $\boldsymbol{p}$−级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$及形如$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p>0)$ 等的级数应用上面介绍的比值判别法等来判断其敛散性比较困难，为此引进积分判别法.

定理 7.2.15（柯西积分判别法） 设函数 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上连续、恒正且单调递减，则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$与广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$有相同的敛散性.

证明： 由于 $f(x)$ 单调递减，则当$x\in[k,\ k+1]$ $(k\in\mathbb{N}^+)$时，有

$$f(k+1)\le f(x)\le f(k).$$

从而

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^n f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

记级数$\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$的部分和为S_n，则

$$S_n-f(1)\le\int_1^n f(x)dx\le S_{n-1}.$$

(1) 当广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛时，有

$$S_n\le f(1)+\int_1^n f(x)dx\le f(1)+\int_1^{+\infty}f(x)dx.$$

正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$的部分和有界，所以，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$收敛.

(2) 当级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$收敛时，记其和为$S$，则

$$\int_1^n f(x)dx \le S_{n-1} \le S.$$

根据广义积分的敛散性判别，广义积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$也收敛.

例7.2.16 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性.

解：由于广义积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^p} \overset{\ln x=u}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty}\dfrac{du}{u^p}$，当 $p>1$时收敛；当 $p\le 1$时发散. 由正项级数的积分判别法，当 $p>1$时，级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$收敛；当 $p\le 1$时，级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$发散.

根据积分判别法，很容易得到：p-级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$的敛散性.

由于广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & (p>1) \\ +\infty & (p\le 1) \end{cases}.$$

因此，当 $p\le 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散；当 $p>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛.

§7.3　一般项级数的敛散性判别

前面讨论了正项级数的敛散性判别，下面讨论一般项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ $(a_n \in R)$ 的敛散性问题，我们先讨论一种特殊的一般项级数——“交错级数”的敛散性判别.

一、 交错级数

若 $a_n \geq 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 为**交错级数**(或**交叉级数**). 具体为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots.$$

定理 7.3.1（莱泊尼兹判别法）　若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足

(1) 对任意 $n \in N^+$ 均有 $a_n \geq 0$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调递减，即 $a_{n+1} \leq a_n\ (n=1,2,\cdots)$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其和 $S \leq a_1$.

证明：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，则对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有

$$0 \leq a_n < \varepsilon.$$

又数列 $\{a_n\}$ 单调递减，则

(1) 当 p 为偶数时，

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) - a_{n+p} \leq a$$

(2) 当 p 为奇数时，

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + a_{n+p}$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \leq a_{n+1}.$$

因此，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^{+}$，当$n>N$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}a_{n+k}\right|<a_{n+1}<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

根据上面的证明过程，同样可得$S_n\le a_1$，因此，

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n\le a_1.$$

例7.3.2 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$的敛散性.

解： 记$a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$，则：$\lim\limits_{n\to}a_n=0.$且

$$a_n-a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)+1}=\frac{(n+2)\sqrt{n}-(n+1)^{\frac{3}{2}}}{n(n+2)}$$

$$=\frac{n^2+n-1}{n(n+2)[(n+2)\sqrt{n}+(n+1)^{\frac{3}{2}}]}>0.$$

因此，数列$\{a_n\}$单调递减. 由莱布尼茨判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$收敛.

数列$\{a_n\}$的单调性，也可通过函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$单调性判别. 由于

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\le 0\ (x\ge 1).$$

因此，函数$f(x)$单调递减，从而数列$\{a_n\}$也单调递减.

例7.3.3 判断级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性.

解： 由于$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}$，根据莱布尼茨判别法，级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$收敛，而调和级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n-1}$发散.

所以，级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散.

例7.3.4　判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的敛散性.

解： 由于 $\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha$，则

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^{n-1}\sin(n\pi-\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n).$$

记 $a_n=\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$，则 $0<a_n\le\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

又数列 $a_n=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 单调递减, 根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 收敛.

二、 级数的条件收敛与绝对收敛

下面讨论一般项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的收敛情况，其中 a_n 为任意实数.

定义 7.3.5　若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **绝对收敛**；若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **条件收敛**.

根据上面定义容易得到，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 是绝对收敛的；级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛的. 级数的绝对收敛与级数收敛之间有如下关系.

定理 7.3.6　如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 必收敛.

证明： 如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，由柯西收敛准则，对 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，对 $\forall p\in\mathbb{N}^+$，有

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon.$$

因此

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

例7.3.7 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n(n+2)}$ 的敛散性.

解：由于 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|(x-1)^{n+1}\right|}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{n(n+2)}{\left|(x-1)^n\right|}=|x-1|$，因此

(1) 当 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $|x-1|>1$，即 $x<0$ 或 $x>2$ 时，级数发散；

(3) 当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，$|a_n|=\frac{1}{n(n+2)}$，级数绝对收敛.

所以，当 $0\le x\le 2$ 时，级数绝对收敛；当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，级数发散.

例7.3.8 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的敛散性.

解：由于 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{\mathrm{e}}{3}<1$，所以级数绝对收敛；从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛.

三、 Abel[31](阿贝尔)判别法与狄利克雷判别法*

下面介绍两个判别一般项级数收敛的方法，先引进一个公式.

引理 7.3.9（阿贝尔变换） 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$、$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的部分和分别为 A_n, B_n，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k.$$

[31] **Abel**（阿贝尔，1802-1829），挪威数学家.阿贝尔很早便显示了数学方面的才华.16 岁遇到了霍姆伯（Holmboe）介绍他阅读牛顿、欧拉、拉格朗日、高斯的著作，他很快被推进到当时数学研究的前沿阵地.他在笔记中写道: “要想在数学上取得进展，就应该阅读大师的而不是他们的门徒的著作”.阿贝尔积分、阿贝尔函数、阿贝尔积分方程、阿贝尔群、阿贝尔级数、阿贝尔部分和公式、阿贝尔基本定理、阿贝尔极限定理、阿贝尔可积性……很少有数学家能使自己的名字同近代数学中这么多的概念和定理联系在一起.然而这位卓越的数学家却是一个命途多舛的早夭者，只活了短短的 27 年.尤其可悲的是，在他生前，社会并没有给他的才能和成果以公正的承认.

证明： 记 $B_0=0$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}a_kB_k-\sum_{k=2}^{n}a_kB_{k-1}$$

$$=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_kB_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k$$

$$=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k.$$

推论 7.3.10（阿贝尔引理） 若数列$\{a_n\}$与级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的部分和数列$\{B_n\}$满足：

(1) 数列$\{a_n\}$单调且存在$M>0$，对$\forall n\in N$ 均有$|a_n|\le M$ ；

(2) 存在 $\varepsilon>0$，对$\forall n\in N$ 均有$|B_n|\le\varepsilon$.

则：对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 有，$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\le 3A\varepsilon.$

证明：根据 Abel 变换

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|=\left|a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right|$$

$$\le|a_nB_n|+\sum_{k=1}^{n-1}|a_k-a_{k+1}|\cdot|B_k|$$

$$\le A\varepsilon+\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}|a_k-a_{k+1}|$$

$$=A\varepsilon+\varepsilon\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\right|$$

$$=A\varepsilon+\varepsilon|a_1-a_n|\le 3A\varepsilon.$$

下面讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

的敛散性判别.

定理 7.3.11（阿贝尔判别法） 设数列$\{a_n\}$单调有界，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明：由于数列$\{a_n\}$单调有界，则：$\exists M>0$，对$\forall n\in\mathbb{N}^+$ 均有$|a_n|\le M$.

又级数$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，根据柯西收敛准则，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall p\in N^+$,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

若记$B_{n+k}=b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+k}=\sum_{i=1}^{k} b_{n+i}\ (k\in N^+)$，则当$n>N$，对$\forall k\in\mathbb{N}^+$均有

$$|B_{n+k}|\le\frac{\varepsilon}{3M}.$$

根据阿贝尔变换与阿贝尔引理，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \\ &= \left|a_{n+p}B_{n+p}+\sum_{k=1}^{p-1}(B_{n+k}-B_{n+k+1})a_{n+k}\right| \\ &\le M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\sum_{k=1}^{p-1}\left|(B_{n+k}-B_{n+k+1})a_{n+k}\right| \\ &\le 3M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西收敛准则，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$收敛.

根据阿贝尔判别法，若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，则容易判断级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\ (p>0)$，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n+1}}$ 都收敛.

定理 7.3.12（狄利克雷判别法） 设数列$\{a_n\}$单调且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$的部分和有界，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛.

证明： 由于$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，则对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，有$|a_n|<\varepsilon$.

又级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$的部分和$B_n$有界，即存在$M>0$，对$\forall n\in\mathbb{N}^+$均有$|B_n|\le M$.

由阿贝尔变换，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall p\in N$，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|&=\left|a_{n+p}B_{n+p}-a_{n+1}B_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right|\\&\le 2M\varepsilon+M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})\right|\\&=2M\varepsilon+M\left|a_{n+p-1}-a_{n+p}\right|\le 4M\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛.

例7.3.13 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$对$\forall x\in(0,2\pi)$均条件收敛.

证明： 记$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\sin nx$，则：$\{a_n\}$单调递减，且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

又级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin nx$的部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}b_k&=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin nx\\&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})\right)\\&=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

因此，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. 从而，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$的部分和有界.

根据狄利克雷判别法，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$收敛.

同样，有 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

即级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\cos nx$的部分和有界，从而级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$收敛.

因为$\frac{|\sin nx|}{n}\geq\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}$，而调和级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛. 所以，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin nx|}{n}$发散，故级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$条件收敛. 同样，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$也条件收敛.

四、 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数的许多性质是条件收敛级数所没有的，下面给出绝对收敛级数的重排性质.

定理 7.3.14 绝对收敛级数任意改变项的位置后构成的级数也绝对收敛，且与原级数有相同的和.

先说明级数重排的概念.

设 $\sigma: N^+\to N^+$ 是一一映射，即 对 $\forall k\in\mathbb{N}^+$，$\sigma: k\to n_k$ 是一一映射. 级数

$$S:\ a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots \tag{7.3.1}$$

重排后，得到级数

$$T:\ a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}+\cdots \tag{7.3.2}$$

级数的重排是相互的，即级数 (7.3.2) 是级数 (7.3.1) 的重排；同样，级数(7.3.1) 也是级数 (7.3.2) 的重排. 这两个级数的部分和分别记作S_n与T_n.

证明：(1) 我们首先证明定理对收敛的正项级数成立.

假设级数 (7.3.1) 为收敛的正项级数，且其和为S，即$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. 对重排后的级数 (7.3.2) 有

$$T_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}.$$

记$m_k = \max\{n_1,\ n_2,\cdots,\ n_k\}$,则

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} a_{n_i} \le \sum_{i=1}^{m_k} a_i = S_{m_k} \le S.$$

所以，重排后级数的部分和有界，从而重排级数收敛；设其和为T.则

$$T = \lim_{k\to+\infty} T_k \le S.$$

级数 (7.3.1) 也是级数 (7.3.2) 的重排，故，$S \le T$. 从而有

$$T = S.$$

(2) 下面再证明定理对任意绝对收敛级数成立.

设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$收敛,记

$$a_n^+ = \frac{1}{2}\left(|a_n| + a_n\right),\quad a_n^- = \frac{1}{2}\left(|a_n| - a_n\right),\ (n = 1,2,\cdots).$$

显然，$a_n^+ \ge 0$，$a_n^- \ge 0$；且$a_n^+ \le |a_n|$，$a_n^- \le |a_n|$，故正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$都收敛;且$a_n = a_n^+ - a_n^-$，从而有$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$.

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$重排后得到新的级数，记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'$.其对应的级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'^+$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n'^-$分别是级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^-$的重排，由(1)可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^{+} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^{-} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{+} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{-} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

即绝对收敛级数重排后所得级数依然收敛，且其和不变.

但条件收敛级数重排后所得到的级数不一定收敛，即使收敛其和也不一定是原级数的和.

在本章第 5 节中，有如下结论

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{7.3.3}$$

两边同乘 $\frac{1}{2}$ 后，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln 2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \end{aligned}$$

两式相加，有

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{7.3.4}$$

式 (7.3.4) 是式 (7.3.3) 的重排，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛，其重排后所得到的级数尽管收敛，但其和发生了变化.

§ 7.4　幂级数及其和函数

本章讨论由幂函数列 $\{a_n(x-x_0)^n\}$ (a_n，x_0 为实常数，$n=0,1,2,\cdots$) 构成的函数项级数

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots. \tag{7.4.1}$$

称上述级数为**幂级数**. 它是一类最简单的函数项级数，可看成多项式函数的延伸. 幂级数在理论和实际中，都有着广泛的应用.

下面着重讨论 $x_0=0$ 的幂级数，即

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots. \tag{7.4.2}$$

的形式. 在式 (7.4.1) 中，令 $x-x_0=u$，就得到关于 u 的形如式 (7.4.2) 的幂级数.

一、 幂级数及其收敛半径

对于幂级数 (7.4.2)，当 $x=0$ 时一定收敛；但 x 取其它值时，级数未必收敛. 由所有收敛点组成的集合称为幂级数的**收敛区间**或**收敛域**. 我们首先讨论幂级数在哪些点是收敛的，在哪些点是发散的？为此，我们引进下面定理.

定理 7.4.1（阿贝尔定理）　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0\neq 0$ 处收敛，则对满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的所有 x 都收敛且绝对收敛；若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0\neq 0$ 处发散，则对满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的所有 x 都发散.

证明： 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nx_0^n=0$. 从而存在 $M>0$，对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$\left|a_nx_0^n\right|\leq M.$$

当$|x|<|x_0|$时，记$r=\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1\ (x_0\neq 0)$,有

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leq M\ r^n.$$

而级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}M\ r^n$收敛，因此，级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_nx^n|$也收敛.

故，当$|x|<|x_0|$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$绝对收敛.

定理的第二部分可用反证法证明.

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处发散，若存在$|\overline{x}|>|x_0|$，且$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\overline{x}^n$收敛.

根据上面的结论，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n$ 在$x=x_0$处绝对收敛,这与其发散矛盾.

根据定理 7.4.1，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，若在$x=x_0\neq 0$处收敛，则在区间$(-|x_0|,|x_0|)$内该幂级数绝对收敛；若在$x=x_0\neq 0$处发散，则在区间$[-|x_0|,|x_0|]$外该幂级数均发散.

推论 7.4.2 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$不在整个实数轴上收敛，也不是仅在$x=0$处收敛，则存在正数$r$使得幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$有

(1) 当$|x|<r$时，幂级数绝对收敛；

(2) 当$|x|>r$时，幂级数发散.

当$x=-r$或$x=r$时，幂级数可能收敛也可能发散.

上面推论中的正数 r 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**；再由幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x=\pm r$ 处的收敛情况可确定其收敛域：$(-r，r),(-r，r]$, $[-r，r),[-r，r]$. 我们称上述区间为幂级数的**收敛区间或收敛域**.

如果幂级数仅在 $x=0$ 处收敛，其收敛半径 $r=0$;如果幂级数在整个实数轴上都收敛，则其收敛半径 $r=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

定理 7.4.3 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l.$$

则该幂级数的收敛半径 r 满足

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$r=\frac{1}{l}$; (2) 当 $l=0$ 时，$r=+\infty$; (3) 当 $l=+\infty$ 时，$r=0$.

证明：记 $u_n(x)=a^n x^n$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=l|x|.$$

由达朗贝尔比值判别法

(1) 若 $0<l<+\infty$，则当 $l|x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{l}$ 时，幂级数收敛；当 $|x|>\frac{1}{l}$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$ 发散，其通项 $\left|a_n x^n\right|$ 不趋向于 0; 从而幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 也发散. 故幂级数的收敛半径 $r=\frac{1}{l}$.

(2) 如果 $l=0$，则：对 $\forall x\in R$ 均有 $l|x|=0<1$，故，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$ 收敛. 从而，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 也收敛，因此，幂级数的收敛半径 $r=+\infty$.

(3) 如果 $l=+\infty$，除 $x=0$ 外，其他点处幂级数都发散，故 $r=0$.

类似地，可利用柯西根值判别法得到幂级数收敛半径的计算.

定理 7.4.4 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，如果

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则该幂级数的收敛半径 r 满足

(1) 当 $0<\rho<+\infty$ 时，$r=\frac{1}{\rho}$；

(2) 当 $\rho=0$ 时，$r=+\infty$

(3) 当 $\rho=+\infty$ 时，$r=0$.

例7.4.5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间.

解： 因为 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以幂级数的收敛半径 $r=1$.

当 $x=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

当 $x=-1$ 时，交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

综上可得，幂级数的收敛区间是：$[-1,1)$.

例7.4.6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛区间.

解：【方法一】：令 $x^2=t$，考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}t^n$. 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4.$$

所以，幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}t^n$ 的收敛半径 $r=\frac{1}{4}$.

因此，当 $t=x^2<\frac{1}{4}$，即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 收敛；

当 $t=x^2>\frac{1}{4}$，即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 发散.

所以，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径$r=\dfrac{1}{2}$.

当$x=\pm\dfrac{1}{2}$时，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$的敛散性.

记$a_n=\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$,有

$$a_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=\frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2n}.$$

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$发散，所以，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛区间是$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

【方法二】：记$u_n(x)=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4x^2.$$

因此，当$4x^2<1$，即$|x|<\dfrac{1}{2}$时，幂级数收敛；当$4x^2>1$，即$|x|>\dfrac{1}{2}$时，幂级数发散. 所以，幂级数的收敛半径$r=\dfrac{1}{2}$.

当$x=\pm\dfrac{1}{2}$时，级数发散.(理由如**方法一**)

所以，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛区间是$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

例7.4.7　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$的收敛区间.

解：记$x-1=t$，考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{3^n\cdot n}$. 有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\cdot n}{3^{n+1}\cdot(n+1)}=\frac{1}{3}.$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{3^n\cdot n}$的收敛半径$r=3$.

当$t=-3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；当$t=3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

因此，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{3^n\cdot n}$ 的收敛区间为$[-3, 3)$.

故，当$-3\le x-1<3$，即$-2\le x<4$时，幂级数收敛.

所以，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$的收敛区间是$[-2, 4)$.

二、 幂级数和函数的分析性质

假设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为I，定义区间I 上的函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\ (\forall x\in I).$$

称$S(x)$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$的**和函数**. 幂级数和函数$S(x)$的定义域即为幂级数的收敛域 (收敛区间).

幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{7.4.3}$$

经过逐项求导，逐项求积后，分别得到幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_{n-1}x^n+\cdots \tag{7.4.4}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \tag{7.4.5}$$

可以证明，这三个幂级数中，有一个幂级数的收敛半径为r，则另外两个幂级数的收敛半径也是r. 即，幂级数经过逐项求导或求积后，其收敛半径不变. 但收敛域有可能发生变化. 请读者自己举例说明.

幂级数的和函数有很多重要的性质，下面不加证明给出这些性质，具体证明读者可参考一般“数学分析”教材.

定理 7.4.8（和函数的连续性） 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛区间为$I$，则它的和函数$S(x)$在区间$I$上连续.

定理 7.4.9（和函数的逐项可积性） 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛区间为$I$，则它的和函数$S(x)$在$I$的任何有限子区间$[a，b]$上都可积,且有

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

特别地，对$\forall x \in I\ (x \neq 0)$有，

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

即，幂级数的和函数在收敛区间内可积，且可逐项求积.

定理 7.4.10（和函数的逐项可导性） 设幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛半径为$r>0$，和函数为$S(x)$，则在$(-r，r)$内$S(x)$可导，且有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

即幂级数在收敛开区间$(-r，r)$内可导，且可逐项求导.

下面我们利用上面幂级数的三个分析性质，来计算某些幂级数的和函数.

三、 幂级数的和函数

下面可以看到，我们常常利用几何级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.\ (-1 < x < 1)$$

来求其它幂级数的和函数.

例7.4.11 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解：由例 (7.4.5) 可知，幂级数的收敛区间是$[-1,1)$. 记$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$，则

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

两边同时求积，有

$$S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x).\ (-1\le x<1)$$

例7.4.12 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$的和函数.

解：由例 (7.4.7) 可知，幂级数的收敛区间是$[-2,4)$.

记$\frac{x-1}{3}=t$,由上题可得

$$S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}=-\ln(1-t).\ (-1\le t<1)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}=S(\frac{x-1}{3})=-\ln(1-\frac{x-1}{3})=\ln 3-\ln(4-x).\ (-2\le x<4).$$

例7.4.13 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$的收敛区间与和函数.

解：(1) 幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$的收敛半径$r=1$; 当$x=\pm1$时，级数均发散;因此，幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

(2) 记$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$，则

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1.$$

两边同时求导

$$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=xS(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.\ (-1<x<1)$$

例7.4.14 计算：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+2)}{3^n}.$

解：设 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^n$，容易得到，该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 又

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)x^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n.$$

记 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)x^n$, $S_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$，其收敛域均为 $(-1,1)$.

由于

$$S_1(x)=x^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)''\right)=x^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)''=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

$$S_2(x)=x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

则

$$S(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{3x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}.\ (|x|<1)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+2)}{3^n}=S(\frac{1}{3})=3.$$

§7.5 函数的幂级数展开

一、泰勒级数

上一节讨论了幂级数的和函数，且所求的和函数在收敛开区间 $(-r，r)$ $(r>0)$内存在任意阶导数；反过来，给定函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某领域内有任意阶导数，是否存在幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{7.5.1}$$

成立？

在式 (7.5.1) 成立时，又如何确定a_n $(n=0,1,2,\cdots)$？

在本教材上册泰勒定理一节中，曾介绍过：若 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内存在$n+1$阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x). \tag{7.5.2}$$

其中：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ 为拉格朗日余项.

在式 (7.5.2) 中，若令$n\to+\infty$，右边的幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

是否收敛？若收敛，是否收敛于 $f(x)$？

定理 7.5.1 如果式 (7.5.1) 在$|x-x_0|<r(0<r\le+\infty)$时成立，则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.(n=0,1,2,\cdots) \tag{7.5.3}$$

特别地，记 $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

证明：假设式 (7.5.1) 在$|x-x_0|<r\ (0<r\le+\infty)$时成立，有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

在区间$(x_0-r，x_0+r)$内两边求导，有

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots2\cdot a_{n+1}(x-x_0)+\cdots.$$

再令$x=x_0$，有

$$a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),\cdots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\cdots.$$

因此

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

定理 7.5.2（泰勒定理） 设$f(x)$在x_0的某领域内存在任意阶导数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$

其中：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1)$ 为拉格朗日余项.

定义 7.5.3 以式(7.5.3) 为系数的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$称为$f(x)$在$x=x_0$处的**泰勒级数**；特别地，在$x_0=0$处的泰勒级数称为**麦克劳林级数.**

定理 7.5.2 的证明作为练习由读者自行完成.

由上面定理可知，若函数$f(x)$在某区间$|x-x_0|<r(x>0)$内可以展开成关于$(x-x_0)$的幂级数，即式 (7.5.1) 成立，则所得的幂级数必为$f(x)$

在 $x=x_0$ 处的泰勒级数. 即函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数展开式是唯一的，这便是函数幂级数展开的唯一性.

二、 常见函数的幂级数展开

例7.5.4　求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的麦克劳林级数.

解：由于 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$，则：$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$；且其余项

$$R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(x+1)!}x^{n+1}.(\text{其中}:0<\theta<1,\ n=1,2,\cdots)$$

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，取$M>0$ 使得$|x|\le M$,则

$$|R_n(x)|\le\frac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n.$$

考虑级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n$，记 $u_n=\dfrac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+2}=0.$$

因此，级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^M}{(n+1)!}M^n$ 收敛，从而，$\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$.

根据泰勒定理，有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

特别地，当 $x=1$时，有

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

进一步，有

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}.(0<\theta_n<1)$$

此结论的证明由读者自行完成，根据此结论容易证明e为无理数.

例7.5.5 求 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数.

解：由于 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$, 则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} & (n=2m-1)\\ 0 & (n=2m)\end{cases}(m=1,2,\cdots).$$

且其余项

$$R_n(x)=\frac{\sin[\theta x+\frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}.\ (0<\theta<1)$$

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$， 取$M>0$ 使得 $|x|\le M$，有

$$|R_n(x)|\le\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\to 0.\ \ (n\to+\infty)$$

所以

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

同样，有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ (-\infty<x<+\infty).$$

下面不加证明给出函数 $\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数.

例7.5.6 求函数 $\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数.

解：根据泰勒定理可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (-1<x\le 1).$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ \ (-1<x<1).\end{aligned}$$

特别地，当 $x=1$时，有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

上面我们根据泰勒定理给出了一些常见函数的麦克劳林级数，下面我们根据一些已知函数的麦克劳林级数，利用幂级数的分析性质计算某些函数的麦克劳林级数或泰勒级数.

例7.5.7　求函数 $f(x)=\arctan x$ 的麦克劳林级数.

解：根据例 (7.5.6)，取 $\alpha=-1$ 有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\ (-1<x<1).$$

则
$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\ (-1<x<1)$$

两边求定积分

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

而级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为 $-1\le x\le 1$，所以

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (-1\le x\le 1).$$

例7.5.8　求函数 $f(x)=\arcsin x$ 的麦克劳林级数.

解：在例 (7.5.6) 中，令 $\alpha=\frac{1}{2}$，用 $(-x^2)$ 代替 x,可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

两边求定积分 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$

$$=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+\cdots.\ (-1<x<1)$$

例7.5.9　将函数 $f(x)=\sin^2 x$ 展开为 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的泰勒级数.

解：令 $x-\frac{\pi}{4}=u$，则

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2u)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}.\ (-\infty<x<+\infty)$$

例7.5.10 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$ 展开成关于 $(x-1)$ 的幂级数，并计算 $f^{(n)}(1)$ 的值．$(n=1,2,\cdots)$.

解：由于

$$f(x)=\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\frac{x-1}{4}-1}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\frac{x-1}{2}+1}.$$

而

$$\frac{1}{\frac{x-1}{4}-1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}\ (-3<x<5)\text{；}$$
$$\frac{1}{\frac{x-1}{2}+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\ (-1<x<3).$$

因此

$$f(x)=-\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}-1}{3\times 2^{2n+3}}(x-1)^n.\ (\text{其中：}\ -1<x<3)$$

由此可得，$a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n+1}-1}{3\times 2^{2n+3}}$.

根据幂级数泰勒展开式的唯一性，有

$$f^{(n)}(1)=n!a_n=\frac{[(-1)^{n+1}2^{n+1}-1]n!}{3\times 2^{2n+3}}.\ (n=1,2,\cdots)$$

例7.5.11 计算：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2(\arcsin x-\arctan x)-x^3}{\ln(1+x^2)(e^{-x^3}-1)}$.

解：由于

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5),$$
$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\arcsin x-\arctan x)-x^3}{\ln(1+x^2)(\mathrm{e}^{-x^3}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\arcsin x-\arctan x)-x^3}{x^2\cdot(-x^3)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)\right]-x^3}{x^5}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{4}.$$

例7.5.12 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$ 的收敛区间与和函数.

解： (1) 记 $u_n(x)=(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)}$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{2n}\cdot x^2=0.$$

所以，级数的收敛半径为 $+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)!}$， 当 $x=0$ 时，$S(0)=0$;

当 $x\neq 0$ 时，有

$$\int_0^x\frac{2S(x)}{x}dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-x\right)=\frac{\sin x-x}{x}.$$

因此

$$\frac{2S(x)}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

【注】：本题还可以用下面方法求解.

由于 $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，则

当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$，因此

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n-1}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{(2n+1)}=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

三、 幂级数在近似计算中的应用

运用幂级数的展开可以近似计算许多初等函数在某些点处的函数值，如三角函数、根式函数、指数函数与对数函数等，也可根据函数的展开式近似计算某些函数的定积分值，并且可根据幂级数展开式的余项 $R_n(x)$ 估计所得近似值的误差.

例7.5.13 计算 $\ln 2$ 的近似值，并使误差不超过 10^{-4}.

解： 由于当 $-1<x\leq 1$ 时，有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

其误差(余项)

$$|R_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta)^{n+1}}\right|\leq\frac{1}{n+1}.$$

如果误差要求不超过 10^{-4}，则要运算到 $n=10^4$. 计算量很大，下面对上面的计算方法做进一步的修正.

将展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\quad(-1<x\leq 1).$$

用 $(-x)$ 代替 x,有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots\quad(-1\leq x<1).$$

两式相减，有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)\quad(-1<x<1).$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$，则： $x=\frac{1}{3}$. 将其代入上式，有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

若取前 4 项作为 $\ln 2$ 的近似值，则其误差

$$R_4=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\cdots\right)<\frac{2}{9}(\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{3^{13}}+\cdots)$$

$$=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\times 3^9}<\frac{1}{70000}<10^{-4}.$$

于是，有

$$\ln 2\approx 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7})\approx 0.6931.$$

例7.5.14 计算定积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值，要求误差不超过 10^{-4}.

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，可补充定义 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处的函数值为1，则：函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0,1]$ 上连续，积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 为常义积分.

由 $\sin x$ 的麦克劳林展开，可得

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots.$$

所得到的级数为交错级数，取前 3 的和，其误差 $R_4\le\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<10^{-4}$.

所以

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.9461.$$

§ 7.6　函数项级数的一致收敛性*

一、 函数项级数

设$u_n(x)$是定义在数集D上的函数列，和式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{7.6.1}$$

称为定义在数集D上的**函数项级数**. 称

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x).$$

为函数项级数 (7.6.1) 的前n项的部分和，所构成的函数列$\{S_n(x)\}$称为**部分和函数列**.

当$x_0\in D$时，数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$$

收敛，则称x_0为函数项级数 (7.6.1) 的**收敛点**，函数项级数所有收敛点组成的集合称为函数项级数 (7.6.1) 的**收敛域**. 在收敛域上的任意一点x都有确定的和$S(x)$与之对应，称$S(x)$为函数项级数的**和函数**.

例7.6.1　几何级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

当$x\neq 1$时，其前n项的和

$$S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

因此，当$|x|<1$时，有

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

即几何级数的部分和函数列为$\left\{\frac{1-x^n}{1-x}\right\}(x\neq 1)$，当$|x|\geq 1$时，几何级数发散; 当$|x|<1$时，几何级数收敛，且其和函数$S(x)=\frac{1}{1-x}$. 所以，几何级数的收敛域为$(-1,1)$.

在前面微分学与积分学部分中，曾介绍过函数连续、可导与可积的线性性质，即有限多个函数和的极限等于每个函数极限的和等，这些性质在无限和(函数项级数)中是否依然成立呢？

例7.6.2 设 $u_0(x)=1-x$，$u_n(x)=x^n-x^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的函数列，则函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的部分和函数 $S_n(x)=1-x^n\ (n\geq 1)$，因此

$$S(x)=\begin{cases}1 & (0\leq x<1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}S_n(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^n)=0$，从而有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1^-}S_n(x)=0.$ 因此

$$\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to+\infty}S_n(x)\neq\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1^-}S_n(x).$$

或者

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\neq\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to 1^-}u_n(x).$$

上面说明，在函数项级数中，和函数的极限与极限函数的和不一定相等；或者说极限符号“lim”与“$\sum$”符号不一定可交换.

二、 函数项级数的一致收敛

设函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在区间 D 上收敛于和函数 $S(x)$，即对 $\forall x_0\in D$，数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛于 $S(x_0)$．即数列 $\{S_n(x_0)\}$ 收敛于 $S(x_0)$. 由数列极限的定义，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|S_n(x_0)-S(x_0)\right|<\varepsilon.$$

上面的 N 一般依赖于讨论点 x_0，即与讨论点 x_0 有关；下面我们引进条件更强的函数列 (函数项级数) 的收敛——“一致收敛”.

定义 7.6.3 给定区间 D 上的函数列 $\{S_n(x)\}$ 及函数 $S(x)$，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，对 $\forall x\in D$ 均有

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon.$$

则称函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 D 上**一致收敛**于 $S(x)$.

注意，上面定义中的 N 是对所有 $x\in D$ 都适用的，因此，若函数列在区间 D 上一致收敛，则在区间 D 上必收敛；但反之不然.

定义 7.6.4　给定区间 D 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$，其部分和函数列为 $\{S_n(x)\}$，若 $\{S_n(x)\}$ 在区间 D 上一致收敛于 $S(x)$,则称函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在区间 D 上**一致收敛**于 $S(x)$.

例7.6.5　证明几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 内非一致收敛.

证明：设几何级数的部分和函数、和函数分别为 $S_n(x)$、$S(x)$,则

$$S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}，\quad S(x)=\frac{1}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

从而有

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{x^n}{1-x}.$$

对任意 $n\in\mathbb{N}(n\geq 2)$，有 $1-\frac{1}{n}\in(-1,1)$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\frac{1}{n})^n=+\infty$，因此，对 $\varepsilon_0=1$，及 $\forall N\in\mathbb{N}^+$，$\exists\, n>N$，使得

$$n(1-\frac{1}{n})^n>\varepsilon_0=1.$$

从而

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|_{x=1-\frac{1}{n}}=n(1-\frac{1}{n})^n>\varepsilon_0=1.$$

所以，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 内非一致收敛.

可以证明，几何级数在任何 $(-1,1)$ 内的闭区间 $[\alpha，\beta]$ $(-1<\alpha<\beta<1)$ 上都一致收敛. 这种一致收敛称为**内闭一致收敛**.

定理 7.6.6（函数项级数一致收敛的柯西收敛准则）

函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在区间 D 上一致收敛的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，对 $\forall p\in\mathbb{N}^+$ 及 $\forall x\in D$，都有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon.$$

证明:（**必要性**） 设函数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$的部分和函数为$S_n(x)$，且在$D$上一致收敛于$S(x)$,则 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall x\in D$，都有

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对$\forall p\in\mathbb{N}^+$，有

$$\begin{aligned}&\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|=\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|\\ \le&\left|S_{n+p}(x)-S(x)\right|+\left|S_{n+1}(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

（**充分性**）若 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall p\in\mathbb{N}^+$及$\forall x\in D$，都有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

即

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据数列收敛的柯西收敛准则，对$\forall x\in D$，部分和函数列 $\{S_n(x)\}$都收敛，设其和函数为$S(x)$. 上式中令$p\to+\infty$，则对$\forall x\in D$ 都有

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

因此，$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛于$S(x)$，即,$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$.

定理 7.6.7（魏尔斯特拉斯判别法） 设$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$是定义在区间$D$上的函数项级数，若存在正项级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$，使得

(1) 存在$n_0\in\mathbb{N}^+$，当$n>n_0$时，对$\forall x\in D$有$\left|u_n(x)\right|\le a_n$；

(2) 级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$收敛.

则函数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在区间$D$上一致收敛.

证明： 由于$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$收敛，根据柯西收敛准则，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > n_0 > 0$，当$n > N$时，对$\forall p \in \mathbb{N}^+$有

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

由条件 (1) 对$\forall x \in D$，都有

$$\begin{aligned}
&\left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) \right| \\
&\le \left| u_{n+1}(x) \right| + \left| u_{n+2}(x) \right| + \cdots + \left| u_{n+p}(x) \right| \\
&\le a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \\
&= \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

所以，函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$在区间$D$上一致收敛.

若函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$与正项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n$满足：$|u_n(x)| \le M_n$.

$(\forall x \in D,\ n > n_0)$，且$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n$为函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$的**优级数**，魏尔斯特拉斯判别法也称为**优级数判别法**或M判别法.

例7.6.8 证明：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.

证明： 对任意$x \in (-\infty, +\infty)$都有，

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}.$$

而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$收敛，根据优级数判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.

下面讨论如下形式的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) v_n(x) = u_0(x) v_0(x) + u_1(x) v_1(x) + \cdots + u_n(x) v_n(x) + \cdots$$

为此介绍两个关于此类函数项级数一致收敛的判别法：阿贝尔判别法与狄利克雷判别法.

定理 7.6.9（阿贝尔判别法） 若函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$满足下列条件

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在区间$D$上一致收敛；

(2) 对$\forall x\in D$，数列$\{v_n(x)\}$是单调的；

(3) 函数列$\{v_n(x)\}$在D上一致有界，即$\exists M>0$，对$\forall n\in N$及$\forall x\in D$，有

$$|v_n(x)|\le M.$$

则函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$在区间$D$上一致收敛.

定理 7.6.10（狄利克雷判别法） 若函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$满足下列条件

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$的部分和函数列$\{S_n(x)\}$在区间$D$上一致有界；即

$\exists M>0$，对$\forall x\in D$及$n\in\mathbb{N}^+$都有，$|S_n(x)|\le M$.

(2) 对$\forall x\in D$，数列$\{v_n(x)\}$是单调的；

(3) 函数列$\{v_n(x)\}$在D上一致趋向于零.

则函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$在区间$D$上一致收敛.

上面两个定理的证明可以参考本章第三节阿贝尔判别法与狄利克雷判别法的证明.

例7.6.11 证明：对$\forall\alpha\in(0,\pi)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$在$[\alpha,2\pi-\alpha]$上一致收敛.

证明： 记$u_n(x)=\cos nx$，$v_n(x)=\frac{1}{n}$，则

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin(k-\frac{1}{2})x-\sin(k+\frac{1}{2})x\right)=\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

从而，对 $\forall x\in[\alpha,\ 2\pi-\alpha]$ 及任何自然数 n，有

$$\left|S_n(x)\right|\le\frac{2}{\left|2\sin\dfrac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

即，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\cos nx$ 的部分和函数在 $[\alpha,\ 2\pi-\alpha]$ 上一致有界.

又函数列 $v_n(x)=\dfrac{1}{n}$ 在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ 上一致收敛于零，根据狄利克雷判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ 在 $[\alpha,\ 2\pi-\alpha]$ 上一致收敛.

三、 一致收敛级数的性质

本节讨论由函数列或函数项级数所确定的极限函数(和函数)的分析性质：连续性、可导性与可积性.

定理 7.6.12（连续性） 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上均连续，且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续.

证明： 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 的部分和为 $S_n(x)$，对 $\forall x_0\in[a,\ b]$，及 $\forall n\in\mathbb{N}$，$S_n(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续. 则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\ \delta)$ 时，有

$$\left|S_n(x)-S_n(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛，故，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，对 $\forall x\in[a,\ b]$ 有

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

当然有

$$\left|S_n(x_0)-S(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\ \delta)$ 时，取 $n>N$，有

$$\begin{aligned}\left|S(x)-S(x_0)\right|&=\left|[S(x)-S_n(x)]+[S_n(x)-S_n(x_0)]+[S_n(x_0)-S(x_0)]\right|\\&\le\left|S(x)-S_n(x)\right|+\left|S_n(x)-S_n(x_0)\right|+\left|S_n(x_0)-S(x_0)\right|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以，和函数 $S(x)$ 在点 x_0 处连续，从而，$S(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续.

定理 7.6.13（可积性） 如果函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$的各项$u_n(x)$在$[a，b]$上均连续，且$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在$[a，b]$上一致收敛于$S(x)$，则：级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在$[a，b]$上可逐项求积. 即

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

且函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_a^x u_n(t)dt$在$[a，b]$上也一致收敛.

证明：设级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$的部分和函数为$S_n(x)$，和函数为$S(x)$. 由于$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在$[a，b]$上一致收敛，$u_n(x)$在$[a，b]$上连续，则：$S(x)$在$[a，b]$上连续，从而$S_n(x)$与$S(x)$在$[a，b]$上均可积.

由于$S_n(x)$在$[a，b]$上一致收敛于$S(x)$，则：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，当$n>N$时，对$\forall x\in[a，b]$均有

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon.$$

根据定积分的性质，当 $n>N$ 时，

$$\left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right|\le\int_a^b\left|S_n(x)-S(x)\right|dx<(b-a)\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}S_n(x)dx.$$

所以

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

且函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_a^x u_n(t)dt$在$[a，b]$上一致收敛于$\int_a^x S(t)dt$.

定理 7.6.14（可导性） 设$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$是定义在$[a，b]$上的函数项级数，且在$x_0\in[a，b]$处收敛，级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n'(x)$在$[a，b]$上一致收敛. 则级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$在$[a，b]$上可逐项求导. 即

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n'(x).$$

证明： 记$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x_0)=A$，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$的部分和函数为$S_n(x)$. 则

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_0)=A.$$

又$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$在$[a，b]$上一致收敛，设其和函数为$f(x)$.下面证明：

对$\forall x\in[a，b]$，函数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$均收敛，其和函数$S(x)$可导，且

$$S'(x)=f(x)$$

由定理条件，对$\forall x\in[a，b]$，有

$$S_n(x)=S_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} S_n'(t)dt.$$

根据定理 7.6.13，有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} S_n'(t)dt=\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to+\infty} S_n'(t)dt=\int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x_0)+\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} S_n'(t)dt=A+\int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

即

$$S(x)=A+\int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

所以

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)'=f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

由上面证明可知，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$在$[a，b]$也一致收敛.

例7.6.15 证明：函数列$f_n(x)=2n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，但

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

证明： 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$；即$f_n(x)$的极限函数$f(x)=0$.

因此

$$\int_0^1\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=0.$$

又$\int_0^1 f_n(x)dx=-\int_0^1\mathrm{e}^{-n^2x^2}d(-n^2x^2)=1-\mathrm{e}^{-n^2}$，故，$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1.$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

例7.6.16 对于函数列 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\arctan(x^n),(0<x<+\infty)$，有

$$0 \le f_n(x) \le \frac{\pi}{2n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2n}=0$，因此，函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)=0.$

又 $f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛，且其极限函数

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\in(0,1)\bigcup(1,+\infty) \\ \dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}.$$

则

$$f_n'(1)=\frac{1}{2}，但\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'\bigg|_{x=1}=0.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(1)\neq\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'.$$

由于 $f_n'(x)$ 在 $(0,+\infty)$内连续，但其极限函数 $g(x)$并不连续，因此，函数列 $f_n'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内并不一致收敛.

本例说明，即使函数列$\{f_n(x)\}$一致收敛，但其导函数列$\{f_n'(x)\}$不一致收敛，其导数符号与极限符号也不一定能交换；这在函数项级数中的相对应的就是级数不一定能逐项求导.

§ 7.7　函数的傅里叶级数

本节讨论在数学理论与工程技术中都有广泛应用的一类函数项级数——“三角级数”，即由三角函数列所构成的级数. 我们着重讨论 Fourier[32] (傅里叶) 级数.

一、 三角级数与三角函数系的正交性

在科学实验、工程技术及日常生活中，经常会碰到周期运动，最简单的周期运动就是简谐振动（或简谐运动），其运动方程可用正弦函数

$$y = A\sin(\omega x+\varphi) \tag{7.7.1}$$

来描述. 式 (7.7.1) 所反映的周期运动称为**简谐振动**，其中：A 为**振幅**，ω 为**角频率**，φ 为**初相角**，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为该周期运动的**最小正周期**.

在实际应用中，除了正弦函数外，会遇到一些更复杂的非正弦的周期函数，它们反映了复杂的周期现象，如电子技术中的矩形波，就是一个非正弦函数的例子. 对于复杂的周期运动，常常由几个简谐运动

$$y_k = A_k\sin(k\omega x+\varphi_k)\ \ (k=1,2,\cdots,\ n)$$

的叠加

$$y=\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\sin(k\omega x+\varphi_k)$$

它仍然是周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数. 由无穷多个简谐运动叠加便得到函数项级数——“三角级数”

$$y = A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\sin(n\omega x+\varphi_n) \tag{7.7.2}$$

其中：A_0，A_n，$\varphi_n (n=1,2,\cdots)$ 都是实常数.

---

[32] **Fourier**（傅里叶，1768 –1830），法国著名数学家、物理学家.1817 年当选为巴黎科学院院士，1822 年任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席，主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论.傅立叶应用三角级数求解热传导方程，为了处理无穷区域的热传导问题又导出了当前所称的“傅立叶积分”，这一切都极大地推动了偏微分方程边值问题的研究.

将周期函数按上述方式展开，其物理意义是很明显的．就是将一个比较复杂的周期运动看成许多个不同频率的周期运动的叠加．在电工学中，这种展开称为“频谱分析”．其中：A_0 称为直流分量，$A_1\sin(\omega x+\varphi_1)$ 称为一次谐波(基波)，而 $A_n\sin(n\omega x+\varphi_n)(n=2,3,\cdots)$ 称为 n 次谐波.

如果级数 (7.7.2) 收敛，则其表示一种更复杂的周期运动，其周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$．下面我们主要讨论 $\omega=1$ 的情况，对于更一般的情况，可用 ωx 替代 x.

为讨论方便起见，我们将正弦函数 $A_n\sin(nx+\varphi_n)$ $(\omega=1)$ 展开

$$A_n\sin(nx+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos nx+A_n\cos\varphi_n\sin nx$$

并令：$\dfrac{a_0}{2}=A_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

这样，式 (7.7.2) 可表示为

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{7.7.3}$$

我们称形如 (7.7.3) 的级数为**三角级数**．其中：a_0、a_n、$b_n(n=1,2,\cdots)$ 均为实常数.

三角级数是有三角函数列(也称三角函数系)

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

所生成的．三角函数系在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上具有正交的性质，即任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\ \pi]$ 上的定积分为零，我们称此性质为**三角函数系的正交性**．即

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nxdx=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mxdx=0\quad(n\neq m).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mxdx=0\quad(n\neq m).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mxdx=0.$$

我们验证其中的一个，当$n \neq m$时，有

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos nx \cos mx dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \left(\cos(m+n)x + \cos(n-m)x\right) dx \\
&= \left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_{0}^{\pi} + \left.\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right|_{0}^{\pi} = 0.
\end{aligned}
$$

其它情况由读者自行验证.

当然，任何一个函数与其自身的乘积，在$[-\pi，\pi]$上的积分均非零. 以下积分计算将在接下来的函数的傅里叶展开中用到：

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi，\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

二、 周期为 2π 函数的傅里叶展开

设 $f(x)$ 是周期$T = 2\pi$的函数，且能展开成三角级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{7.7.4}$$

上式中的“～”表示等式右边为周期函数 $f(x)$ 的三角级数展开式.

以下问题是我们必须考虑的：

(1) 级数 (7.7.4) 中的系数a_0、a_n、$b_n (n = 1,2,\cdots)$与函数 $f(x)$ 之间有什么关系？是否如函数的泰勒展开一样，可用 $f(x)$ 表示？

(2) 级数 (7.7.4) 是否收敛？若收敛，是否收敛于 $f(x)$？

为此，我们假设级数 (7.7.4) 可逐项求积. 如果级数 (7.7.4) 收敛，且其和函数为 $f(x)$, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{7.7.5}$$

那么，等式 (7.7.5) 两边同时在$[-\pi，\pi]$上求定积分，有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

等式 (7.7.5) 两边同乘$\cos nx$，再同时在$[-\pi，\pi]$求定积分，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx.$$

同样可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

若 $f(x)$ 是周期$T=2\pi$的函数，且在一个周期内可积，则上述三个积分都存在，根据上述积分所得到的系数a_0、a_n、$b_n(n=1,2,\cdots)$称为**傅里叶系数**，将其代入级数 (7.7.4) 后，所得到的三角级数称为**傅里叶级数**.

由上面讨论可知，一个周期为2π的函数$f(x)$，若在一个周期内可积，则一定有与之对应的傅里叶级数(7.7.4)，但该级数是否收敛?若收敛，是否收敛于 $f(x)$？这些问题的回答并不是肯定的. 那么，周期函数 $f(x)$ 在满足什么条件子下，可展开为傅里叶级数，且该级数收敛于 $f(x)$ 呢？为此，我们不加证明引进狄利克雷收敛定理.

定理 7.7.1（狄利克雷收敛定理） 设 $f(x)$ 是周期为2π的函数，且满足

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 在一个周期内只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且收敛于左右极限的平均值，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

由狄利克雷收敛定理可得，只要函数 $f(x)$ 在一个周期内至多有有限个第一类间断，且不作无限次振荡，则在连续点收敛于该点的函数值；在间断点处收敛于左右极限的平均值. 周期函数展开成傅里叶级数的条件要比函数展开成泰勒级数的条件弱很多.

例7.7.2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且

$$f(x)=\begin{cases}1\ ,\ -\pi\le x<0\\ x\ ,\ \ 0\le x<\pi\end{cases}.$$

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

解：所给函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，且在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续，在其它点处都连续. 曲线 $y=f(x)$ 的图形如下图所示.

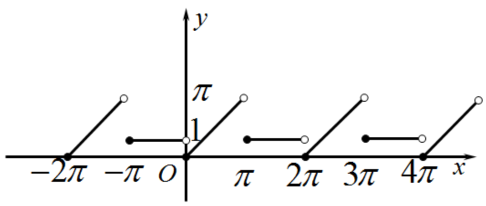

图 7.1

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=1+\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx\right)=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx\right)$$

$$=\left(-\frac{\cos nx}{n\pi}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\left(-\frac{x\cos nx}{n\pi}+\frac{\sin nx}{n^2\pi}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}.\quad (n\in N^+)$$

根据狄利克雷收敛定理，有

$$f(x)=\frac{\pi+2}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\frac{\pi-2}{\pi}\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{\pi-2}{3\pi}\sin 3x-\cdots$$

$$=\frac{\pi+2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}\sin nx.$$

$(x\ne k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

下面我们对所得到的结果做进一步的讨论.

上式中，若令 $x=0$, 有

$$\frac{\pi+2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

记 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sigma$，则：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\sigma^2}{4}$. 从而，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\sigma=\frac{\pi^2}{8}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

例7.7.3 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x\ , & -\pi\le x<0\\ x\ , & 0\le x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

所给函数 $f(x)$ 并不是周期为 2π 的函数，但在 $[-\pi，\pi)$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，我们可以补充定义函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi，\pi)$ 或 $(-\pi，\pi]$ 外的函数值. 即将其延拓为周期为 2π 的函数 $F(x)$. 延拓后所得的函数在区间 $(-\pi，\pi)$ 内满足 $F(x)\equiv f(x)$, 再将周期为 2π 的函数 $F(x)$ 展开为傅里叶级数，最后将其限制在区间 $(-\pi，\pi)$ 内，便得到函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解： 将函数 $f(x)$ 延拓成周期为 2π 的函数 $F(x)$，显然 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足狄利克雷收敛定理的条件. (如下图所示)

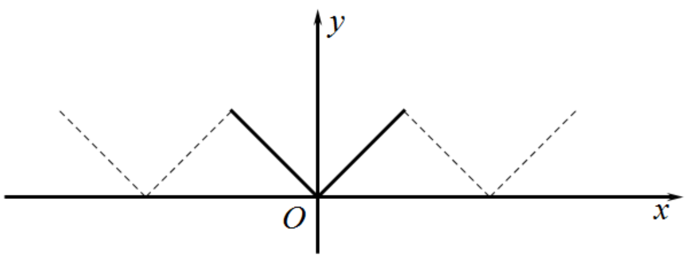

图 7.2

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx\\&=\frac{2}{n\pi}(x\sin nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}.\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx=0.$$

根据狄利克雷收敛定理，有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.\quad(-\pi\le x<\pi)$$

如果函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的偶函数,则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0.\ (n=1,2,\cdots)$$

如果函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数,则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.\ (n=1,2,\cdots)$$

由此可得，周期为 2π 的偶函数，其傅里叶级数展开式中只含余弦项，我们称只含余弦项的级数为**余弦级数**；同样，周期为 2π 的奇函数，其傅里叶级数展开式中只含正弦项，所得级数为**正弦级数**.

例7.7.4 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上展开为余弦级数.

解： 函数 $f(x)$ 仅在区间 $[0,\ \pi]$ 上有定义,因此，需将其延拓为整个实数

轴上均有定义的周期函数，且为偶函数. 先将 $f(x)$ 延拓成区间$[-\pi，\pi]$ 上的偶函数,再将其延拓成周期为2π 的函数. 延拓后的函数如图所示.

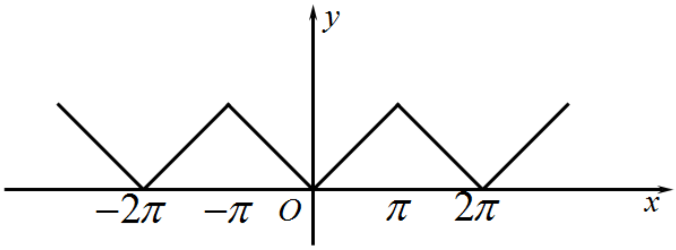

图 7.3

$$b_n = 0\ (n=1,2,\cdots),\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right).$$

由狄利克雷收敛定理，有

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \quad (0 \le x \le \pi)$$

例7.7.5 将函数 $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 展开成 傅里叶级数.

解：由于 $f(x)$ 是周期为2π 的奇函数，则：$a_n = 0. (n = 0,1,2,\cdots)$ 且

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & (\frac{\pi}{2} < x \le \pi) \end{cases}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx\right)$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n\text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{4}{n^2\pi} & (n\text{ 为奇数}) \end{cases}.$$

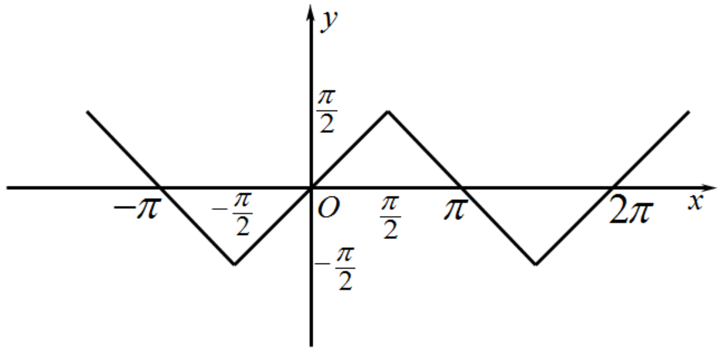

图 7.4

根据狄利克雷收敛定理，有

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x.\ (-\infty<x<+\infty)$$

三、 一般周期函数的傅里叶展开

对于周期为 $2l(l>0)$ 的周期函数 $f(x)$，可以通过变量代换

$$x=\frac{l}{\pi}u \text{ 或 } u=\frac{\pi}{l}x$$

将周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 变为周期为 2π 的函数 $F(u)=f(\frac{l}{\pi}u)$. 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可积，则 $F(u)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上也可积，此时 $F(u)$ 的傅里叶级数展开式为

$$F(u)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nu+b_n\sin nu\right).$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\cos nu du=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi}{l}nx dx.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\sin nu du=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi}{l}nx dx.\quad (n=1,2,\cdots)$$

如果函数 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理的条件，则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi}{l}nx+b_n\sin\frac{\pi}{l}nx\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

例7.7.6 设 $f(x)=\begin{cases} x+2 \ , \ 0\le x<1 \\ x^2 \quad \ , \ 1\le x\le 2 \end{cases}$，且$b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\ (n=1,2,\cdots)$ ，

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$. 求： $S(7)$ 与 $S(-\frac{5}{2})$ 的值.

解： 将 $f(x)$ 延拓成区间 $(-2,\ 2]$ 上的奇函数 $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} -x^2 & (-2<x\le -1) \\ x-2 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 2) \end{cases}.$$

再将 $F(x)$ 延拓为 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为4的函数.

则函数 $F(x)$ 的傅里叶展开的系数

$$A_n=0.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$B_n=\int_0^2 F(x)\sin\frac{\pi}{2}nx dx=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=b_n.\ (n=1,2,\cdots)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}.$$

所以

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}.$$

则

$$S(7)=S(-1)=-S(1)=-\frac{F(1-0)+F(1+0)}{2}$$

$$=-\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=-2.$$

$$S(-\frac{5}{2})=S(\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}.$$

例7.7.7 将函数 $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x \ , & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0 \ , & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$ 展开为正弦级数.

解： 首先将函数 $f(x)$ 延拓成区间 $[-1,\ 1]$ 上的奇函数，再延拓成周期 $T=2$

的周期函数，则

$$a_n = 0.\ \ (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_1 = 2\int_0^1 f(x)\sin\pi x dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2}.$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x \sin n\pi x dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos(n+1)\pi x - \cos(n-1)\pi x\right) dx$$

$$= \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)\pi} - \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2}}{(n+1)\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & (n>1\text{，且 } n \text{ 为奇数}) \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}} \dfrac{2n}{(n^2-1)\pi} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}.$$

所以， $f(x) = \frac{1}{2}\sin\pi x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin 2n\pi x.$ 其中：$x \in [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1].$

习题 7.1

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

   (1) 写出该级数的前 5 项，并求该级数前 n 项的部分和 S_n；

   (2) 根据级数收敛的定义判断级数是否收敛？若收敛，求级数的和.

2. 求 8 进制无限循环小数$(24.076076076\cdots)_8$的值.

3. 求下列级数的前 n 项的部分和，并根据级数敛散性的定义，判断级数是否收敛？若收敛，求该级数的和.

   (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$； (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$；

   (3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$； (4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$；

   (5) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$； (6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

4. 证明：若级数$\sum a_n$ 收敛，则 $\sum ka_n$(k 为实常数) 也收敛；反之是否成立？

5. 对于级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$，下列陈述是否正确？为什么？

   (1) 若$\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都发散，则：$\sum(a_n+b_n)$ 也发散；

   (2) 若$\sum a_n$ 收敛，$\sum b_n$ 发散，则：$\sum(a_n+b_n)$ 必发散.

6. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$也收敛；反之成立吗？

若不成立请举例说明，并给出在级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛的条件下，

级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛的充要条件.

7. 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+3}$.

8. 试举例说明：若级数$\sum a_n$对某固定的正整数p满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right)=0.$$

此级数仍可能发散.

习题 7.2

9. 用比较判别法或极限判别法判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{n})-1\right]$；

(5) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$；

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^n\right]$；

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(9) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2\right]$；

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$.

10. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\tan\frac{\pi}{3^n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\ (a>0)$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$；

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$；

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot n^3}$；

11. 用适当的方法判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}$；

(3) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{\ln n})$；　　(4) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln n)^p}$；

(5) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$；

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$；　　(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}dx}$；

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n(n!)^2}{n^n(2n)!!}$；　　(10)* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}.(a>0)$

12. 利用级数收敛的必要条件证明下列等式

(1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$；　　(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=$

13. 对收敛的正项级数 $\sum a_n$.

(1) 证明：当 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum n^{-(\alpha+\frac{1}{2})}\sqrt{a_n}$ 也收敛；

(2) 当 $\alpha=0$ 时，上面级数是否收敛？若不收敛请举出反例.

14. 若$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}=q$，试证：

(1) 当$q>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛；(2) 当$0\le q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.

15. 设$x_n(n=1,2,\cdots)$为方程$\tan x=x$的正根，且从小到大排列，试证：

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$收敛.

16. 已知正项数列$\{a_n\}$严格单调递增，求证：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\text{收敛}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\text{收敛}.$$

习题 7.3

17. 判别下列级数是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\ (a>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{2n+3}$； (6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$； (8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\mathrm{e}^n\cdot n!}{n^n}$；

18. 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足：$a_n\le b_n\le c_n\ (n\in N^+)$，若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$均收敛，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛.

19. 讨论级数$1-\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6^\alpha}+\cdots$的敛散性. $(\alpha\in R)$

20. 若级数$\sum a_n$收敛，数列$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=1$，试问：级数$\sum a_nb_n$是否收敛？若收敛，请证明你的结论；若发散，请举反例说明.

21. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$条件收敛，试问：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$是否收敛？为什么？(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$收敛吗？为什么？

22. 设$f(x)$在$x=0$的某领域内有2阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a(a\geq 0)$，

讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$的敛散性.

23. 设$f(x)$为偶函数，且在$x=0$的某领域内有二阶连续导数，$f(0)=1$，

$f''(0)=2$. 试证：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(f(\frac{1}{n})-1\right)$绝对收敛.

24. 设$a_n>0$，且$\{a_n\}$单调递减，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$发散，试判断级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$

的敛散性.

25. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$f(x)=e^x-1+\int_0^x tf(x-t)dt$.

试证：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$条件收敛.

26. 设$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$，证明：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$收敛.

27. 用阿贝尔或狄利克雷判别法判别下列级数的敛散性*

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\ (x>0)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\ (0<x<2\pi，\alpha>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos^2 n}{n}$.

28. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 收敛，证明：当 $q>p$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^q}$ 收敛.

29. 设 $a_n>0$，且 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$ 的敛散性.

习题 7.4

30. 求下列幂级数的收敛区间

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3^n}{n^2}+\dfrac{n}{2^n}\right)x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$ $(\alpha<1)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n!)^3(2x-1)^{2n}}{(3n)!}$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 3^n x^{2n}$.

31. 求下列幂级数的收敛区间与和函数

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n-1}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$

32. 证明下列级数收敛，并计算级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 4^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$

33. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数.

习题 7.5

34. 证明 Taylor 定理.

35. 将 $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 Maclaurin 级数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

36. 将下列函数展开成关于 x 的幂级数，并求其收敛区间

(1) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(2) $(x+1)e^{2x}$；

(3) $\sin^2 x$；

(4) $\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$；

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}$；

(6) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(7) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(8) $\dfrac{1}{x^2-5x-14}$；

(9) $\ln(2-x-x^2)$；

(10) $\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

37. 设 $f(x)=\sin 3x\cos x$，计算： $f^{(n)}(0).\ (n=1,2,\cdots)$

38. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并计算 $f^{(n)}(0).\ (n=1,2,\cdots)$

39. 计算：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2+3n-4}{n!}$ 的值.

40. 利用函数的幂级数展开，计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2[\ln(1+x)-\sin x]+x^2}{x(\sqrt{1-2x}-1)\cdot\arcsin x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\arcsin x}{\ln(1+x^2)(\sqrt{1-x}-1)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\cos x)-2\sin^2 x}{x^4}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{\ln(1+2x^3)\cdot\arcsin x}$

41. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\int_b^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=c$ (c 为实常数)，求：常数 a、b、c 的值.

42. 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x \mathrm{e}^t\cos t dt-x-\dfrac{x^2}{2}$ 与 Ax^n 为等价无穷小，求：常数 A 与 n 的值.

43. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛区间与和函数，并计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}2^n$ 的值.

44. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x^2-6x-4)^n}{n\cdot 12^n}$ 的收敛域与和函数.

45. 将下列函数在指定点 x_0 处展开成 Taylor 级数

(1) $\ln(x+1)$，$x_0=2$;　　(2) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$，$x_0=-2$.

46. 利用函数幂级数的展开式，计算下列定积分的近似值

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}dx$ (精确到10^{-4})；　　(2) $\int_0^1\dfrac{dx}{x^3+1}$ (精确到 10^{-4})

习题 7.6

47. 求下列函数项级数的收敛域

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\ln x)^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{x^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\sin x)^n$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^n$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n-1}}$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^n$.

48. 讨论下列函数列在所示区间 D 上是否一致收敛？并说明理由.

(1) $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$，$n=1,2,\cdots$，$D=[0,+\infty)$.

(2) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$，$n=1,2,\cdots$，$D=(-1,1)$.

(3) $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$，$n=1,2,\cdots$；$(i)D=[0,1]$；$(ii)\ D=(1,+\infty)$.

(4) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$，$n=1,2,\cdots$；$(i)\ D=[-a,\ a]$；$(ii)\ D=(-\infty,+\infty)$.

49. 判断下列级数在给定区间上的一致收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^2}$，$D=(-\infty,+\infty)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$，$D=(-\infty,+\infty)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$，$D=(0,+\infty)$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$，$D=[-1,1]$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$， $D=(-\infty,+\infty)$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$， $D=(-\infty,+\infty)$; (7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$， $D=(-\infty,+\infty)$;

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$， $D=[0,+\infty)$.

50. 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，函数 $g(x)$ 在 D 上有界. 证明级数 $\sum g(x)u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)S(x)$.

51. 证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且有连续的导函数.

52. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内不一致收敛，在 $[1+\alpha,+\infty)$ $(\alpha>0)$ 上一致收敛.

习题 7.7

53. 设 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$，其中

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx.\ (n=1,2,\cdots)$$

求：$S\left(-\frac{1}{2}\right)$的值.

54. 将下列周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数

(1) $f(x)=\begin{cases}1-x & (-\pi\le x<0)\\ 1+x & (0\le x<\pi)\end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x & (-\pi\le x<0)\\ 2x & (0\le x<\pi)\end{cases}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2 & (0<x<\pi)\\ 0 & (x=\pi)\\ -x^2 & (\pi<x\le 2\pi)\end{cases}$;

(4) $f(x)=\begin{cases}-x-1 & (-\pi\le x<-\frac{\pi}{2})\\ x & (-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2})\\ x-1 & (\frac{\pi}{2}\le x<\pi)\end{cases}$;

(5) $f(x)=\pi^2-x^2\quad(-\pi\le x<\pi)$;

55. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在指定区间内将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数

(1) $f(x)=x$，$(i)\ -\pi\le x<\pi$；$(ii)\ 0\le x<2\pi$.

(2) $f(x)=x^2$，$(i)\ -\pi\le x<\pi$；$(ii)\ 0\le x<2\pi$.

(3) $f(x)=ax^2+bx+c$，$(i)\ -\pi\le x<\pi$；$(ii)\ 0\le x<2\pi$.

56. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4} & (-\pi\le x<0)\\ \dfrac{\pi}{4} & (0\le x<\pi)\end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并由此推出

(1) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{23}+\cdots$.

57. 将 $f(x)=\sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

58. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数

(1) $f(x)=x-1\ (0\le x<\pi)$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\ \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x & \left(0\le x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \pi-x & \left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$；

(4) $f(x)=f(x)=\begin{cases}x-2 & \left(0\le x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$.

59. 将 $f(x)=2\pi^2-x^2\ (-\pi\le x<\pi)$ 展开成傅里叶级数，并计算级数

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的值.

60. 求函数 $f(x)=\arccos(\cos x)$ 的傅里叶级数展开式.

61. 将函数 $f(x)=(x-1)^2\ (0<x<1)$ 展开成傅里叶级数，并推出

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

62. 试求三角多项式

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\cos kx+B_k\sin kx\right).$$

的傅里叶级数展开式. 其中：A_0，A_k，$B_k(k=1,2,\cdots，n)$ 均为常数.

63. 设 f 是 $[-\pi，\pi]$ 上的连续函数，a_0，a_k、$b_k(k=1,2,\cdots，n)$ 为 f 的傅里叶系数；记 $T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A_k\cos kx+B_k\sin kx\right)$，证明积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ 的最小值为 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]$.