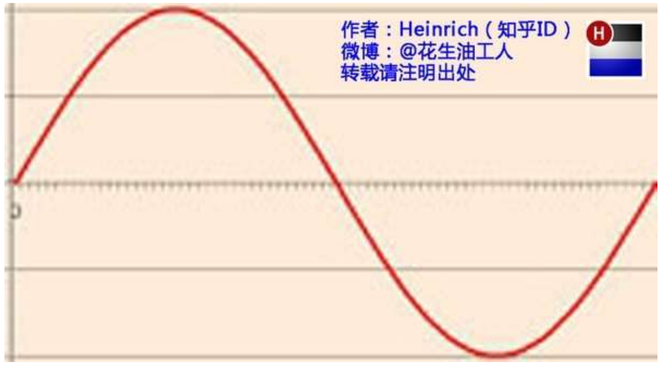
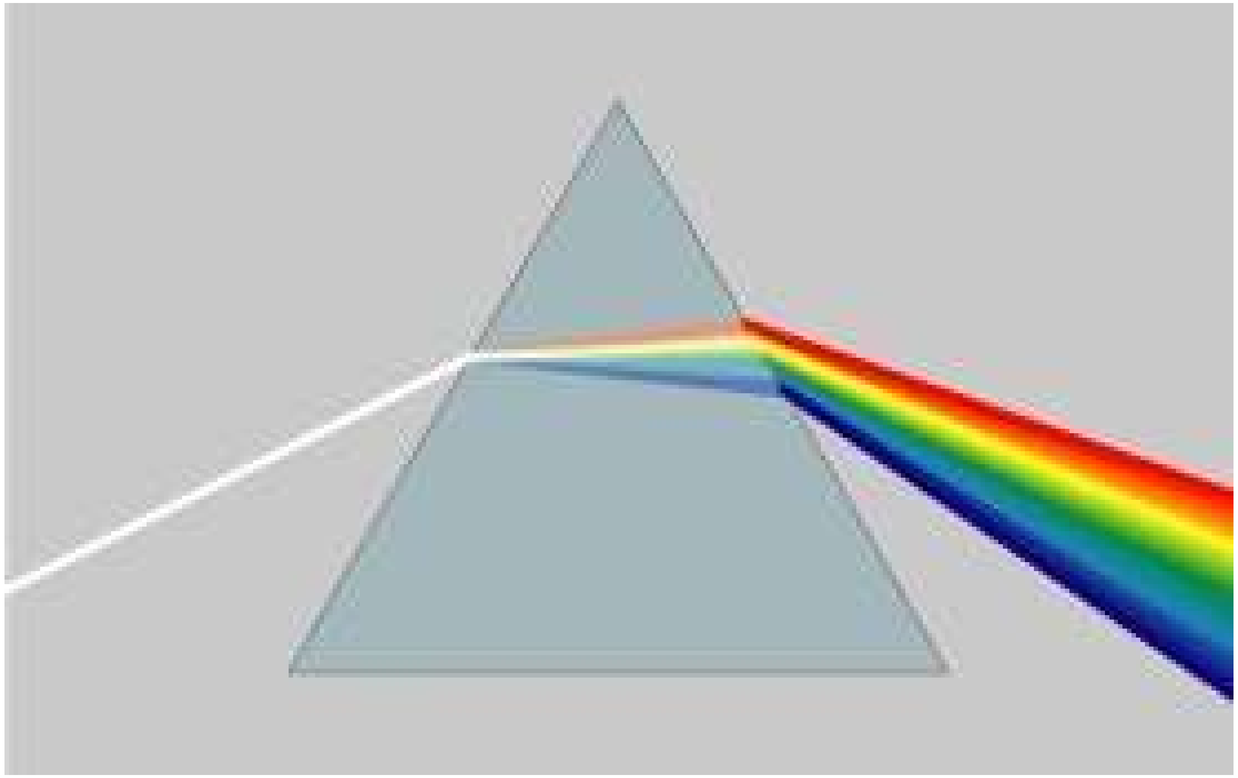
第三章

连续时间信号与系统的频域分析


作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处



§ 3.0 引言

§ 3.1 连续时间LTI系统的特征函数

§ 3.2 连续时间傅里叶级数

§ 3.3 连续时间傅里叶变换

§ 3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

§ 3.5 连续时间傅里叶变换的性质

§ 3.6 连续时间LTI系统的频域分析

3.0 引言

- 复指数信号作为一类基本信号来表示一般任意信号，建立变换域分析法 。

- 提供了一种非常方便的信号和LTI系统的分析方法：傅里叶分析或频域分析法 。

§ 3.0 引言

§ 3.1 连续时间LTI系统的特征函数

§ 3.2 连续时间傅里叶级数

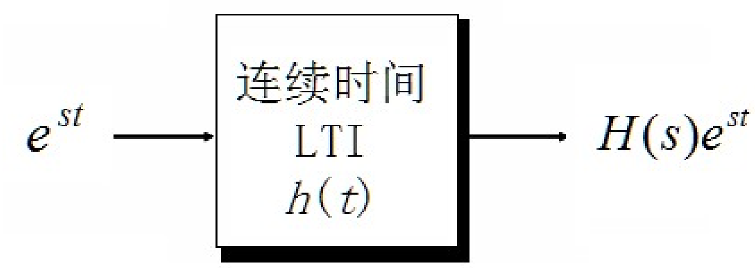
§ 3.3 连续时间傅里叶变换

§ 3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

§ 3.5 连续时间傅里叶变换的性质

§ 3.6 连续时间LTI系统的频域分析

3.1 连续时间LTI系统的特征函数



$$s = \sigma + j\omega$$

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} \cdot d\tau = \mathrm{e}^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} \cdot d\tau$$

假定积分 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau$ 收敛，

于是LTI系统对 e^{st} 的响应就为 $y(t) = H(s) \cdot e^{st}$

故复指数信号是LTI系统的特征函数。

3.1 连续时间LTI系统的特征函数

- 复指数信号 $e^{j\omega t}$ 可作为基本信号用来表示一般的输入信号。
  - 能够表示相当广泛的一类有用信号，特别是实际应用中常碰到的一些信号。
  - 对这些基本信号的响应十分简单，以便使系统的响应有一个简单的数学表示形式。

例3.1

【例3.1】令某一个LTI系统$h(t)$的输入信号 $x(t)$是三个复指数信号的线性组合

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

求其输出 $y(t)$。

解：根据LTI系统特征函数的性质，有

$$a_1 e^{s_1 t} \to a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$a_2 e^{s_2 t} \to a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \to a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

由叠加性原理，有

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

例3.1

若某一类输入信号可以表示成复指数信号的线性组合，即

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

根据叠加性，其输出一定是

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

- 如果某一连续时间信号$x(t)$是周期的，则存在着一个非零的正实数，对任何t都满足$x(t)=x(t\pm T)$。式中T的最小值T_0称为该信号的基波周期，$\omega_0=2\pi/T_0$称为该信号的基波频率。

- 成谐波关系的复指数信号的集合为

$$\Phi_k(t)=\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

T_0是$\Phi_k(t)$中每个信号的周期，它们的基波频率都是的ω_0整数倍。

- 对应的三角函数形式的谐波信号集：

$$\Phi_k(t)=\{\cos k\omega_0 t,\sin k\omega_0 t\},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

一个基波频率为 ω_0的周期信号 $x(t)$，可以表示成与其成谐波关系的复指数信号的线性组合，即

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_k(t)$$

其中 a_k 称为傅里叶级数系数。

傅里叶级数的复指数形式为 $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

三角函数形式为 $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(B_k \cos k\omega_0 t + C_k \sin k\omega_0 t)$

$$= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(B_k \cos k\omega_0 t + C_k \sin k\omega_0 t)$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

两种表达式中系数的相互推算

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(\cos k\omega_0 t - j\sin k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k} + a_k)\cos k\omega_0 t + j(a_k - a_{-k})\sin k\omega_0 t$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

$$\begin{cases} B_0 = a_0 \\ B_k = a_{-k} + a_k, & \mathrm{k} \neq 0 \\ C_k = j(a_k - a_{-k}), & \mathrm{k} \neq 0 \end{cases}$$

显然，从上式中，我们也可以反推到 a_k 用 B_k 和 C_k 来表示的关系

$$\begin{cases} a_0 = B_0 \\ a_k = \dfrac{1}{2}(B_k - jC_k) & k \geq 1 \\ a_{-k} = \dfrac{1}{2}(B_k + jC_k) & k \geq 1 \end{cases}$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

系数 a_k 的确定：

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

将上式两边从0到 $T_0 = 2\pi / \omega_0$ 对 t 积分，有

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \int_0^{T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right) \cdot dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_0^{T_0} e^{(k-n)\omega_0 t} \cdot dt \right)$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

- 当$k \neq n$时，有

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{j(k-n)\omega_0} e^{j(k-n)\omega_0 T_0} \Big|_0^{T_0}$$

$$= \frac{1}{j(k-n)\omega_0}\left[e^{j(k-n)\omega_0 T_0} - 1\right] = \frac{e^{j(k-n)2\pi} - 1}{j(k-n)\omega_0}$$

$$= 0$$

- 当$n = k$时，有

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt = \int_0^{T_0} e^{j(k-k)\omega_0 t} \cdot dt = T_0$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

于是有 $\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases}$

因此，有 $\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = a_n T_0$

或者 $a_n = \dfrac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$

a_k 的计算公式可表示为 $a_k = \dfrac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$

其中$\int_{T_0}$ 表示在任何一个T_0间隔内的积分。

3.2.1 连续时间傅里叶级数

连续时间信号的傅里叶级数：

$$\begin{cases} x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0} \\ a_k=\dfrac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\cdot dt \end{cases}$$

其中系数$\{a_k\}$往往又称为$x(t)$ 的频谱系数，它对信号$x(t)$中的每一个谐波分量的大小和初始相位作出度量。系数a_0 就是$x(t)$中的直流或常数分量，也称为平均分量：

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot dt$$

3.2.1 连续时间傅里叶级数

通常周期信号与其频谱系数间关系用以下符号形式表示：

$$x(t) \xrightarrow{\text{F}s} a_k$$

三角函数形式的傅里叶级数可定义为：

$$\begin{cases} x(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(B_k \cos k\omega_0 t + C_k \sin k\omega_0 t) & (3.28\text{ - a}) \\ B_0 = \dfrac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot dt & (3.28\text{ - b}) \\ B_k = \dfrac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos k\omega_0 t\cdot dt & (3.28\text{ - c}) \\ C_k = \dfrac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin k\omega_0 t\cdot dt, \quad \omega_0 = 2\pi / T_0 & (3.28\text{ - d}) \end{cases}$$

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

1. 正弦信号

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

可得频谱系数

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j} \qquad a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0, \ |k| \neq 1$$

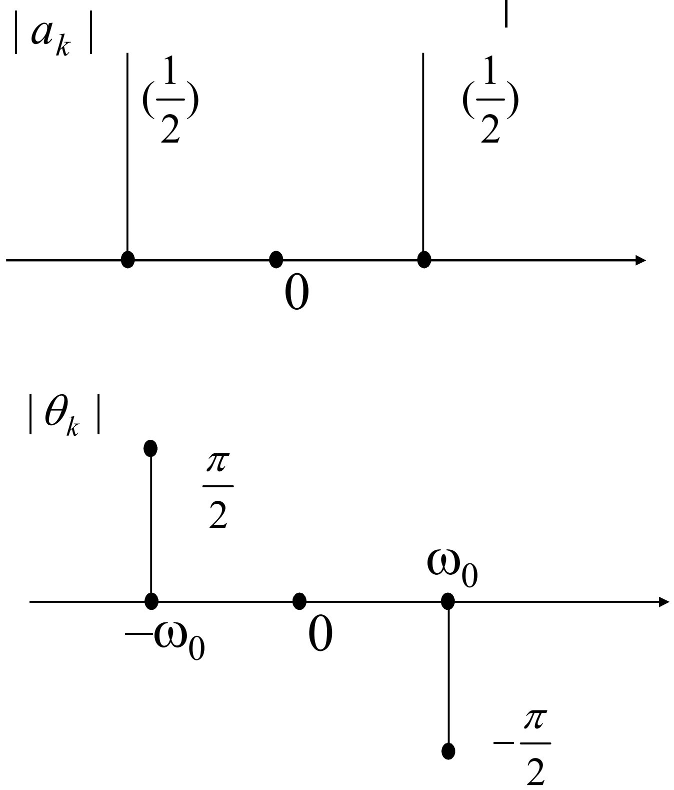


图 3-1 $sin\omega_0 t$ 信号傅里叶级数系数的幅度和相位

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

2. 周期方波信号

在一个周期内该信号定义为：$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1 \\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$

基波频率为 $\omega_0=2\pi/T$。

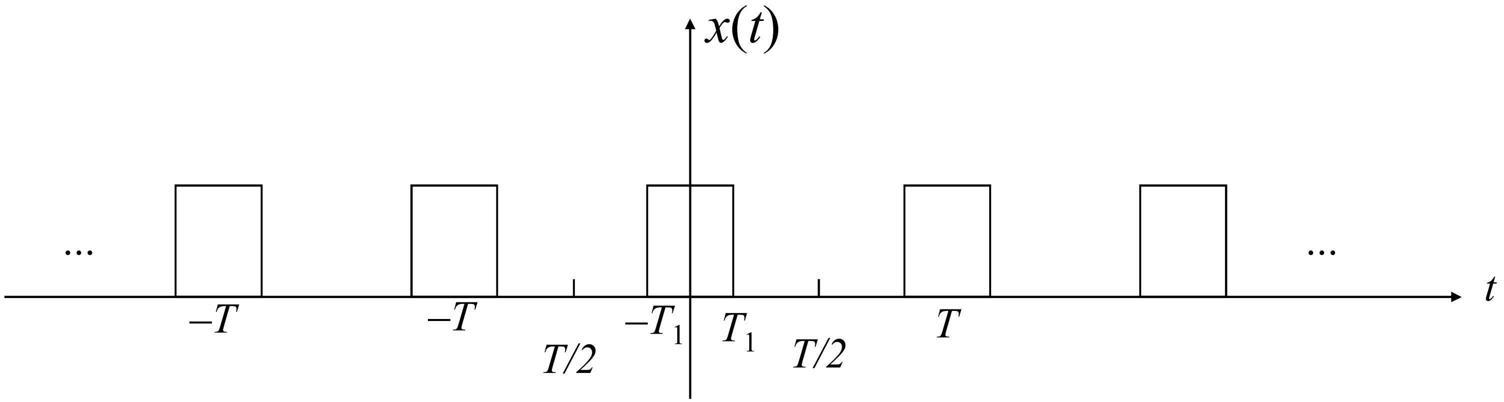
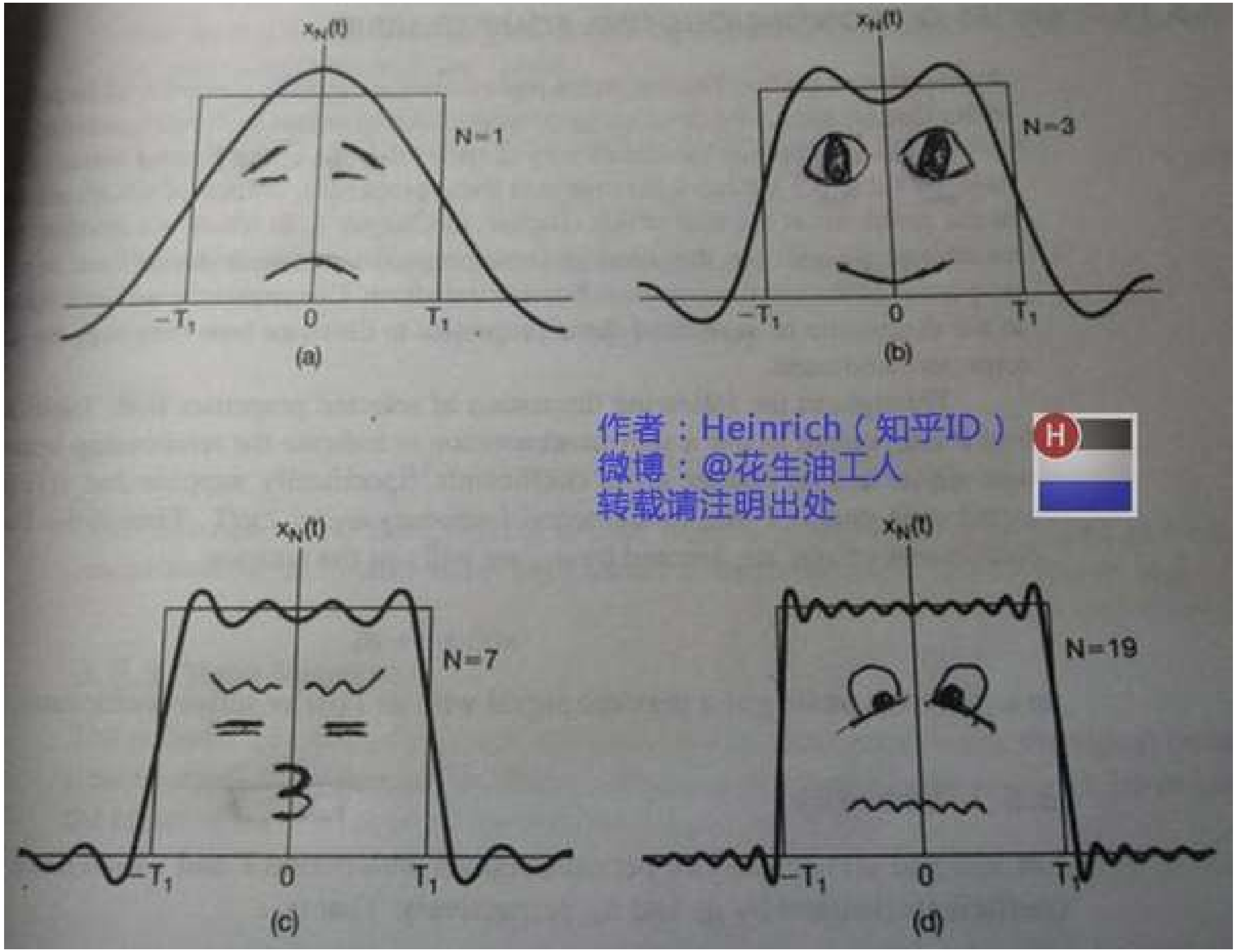


图3-2 周期方波

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开



3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

2. 周期方波信号

- k=0时，有 $a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}dt=\frac{2T_1}{T}$

- k≠0时，有 $a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}\cdot dt$

$$=-\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{1}{jk\omega_0 T}\left[e^{jk\omega_0 T}-e^{-jk\omega_0 T}\right]$$

或重写为 $a_k=\frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T}-e^{-jk\omega_0 T}}{2j}\right]=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

2. 周期方波信号

注意$\omega_0 T = 2\pi$，即 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$，上式可写为

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} Sa(k\omega_0 T_1) = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} Sa(\omega T_1)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

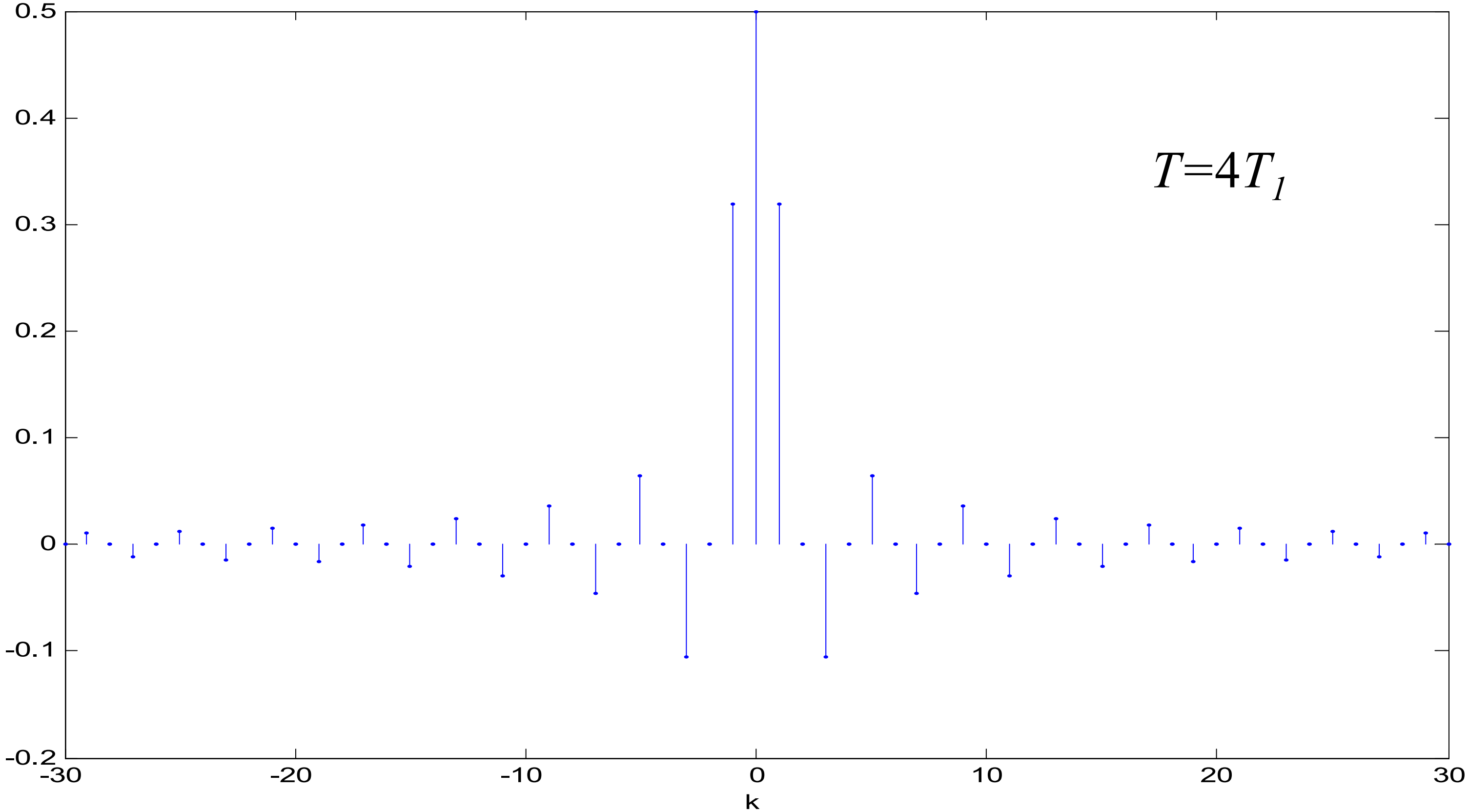
周期方波的傅里叶级数的系数是 $\dfrac{1}{n}$ 的规律收敛（衰减），

且 $\lim\limits_{n \to \infty} a_k = 0$ 。

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

2. 周期方波信号

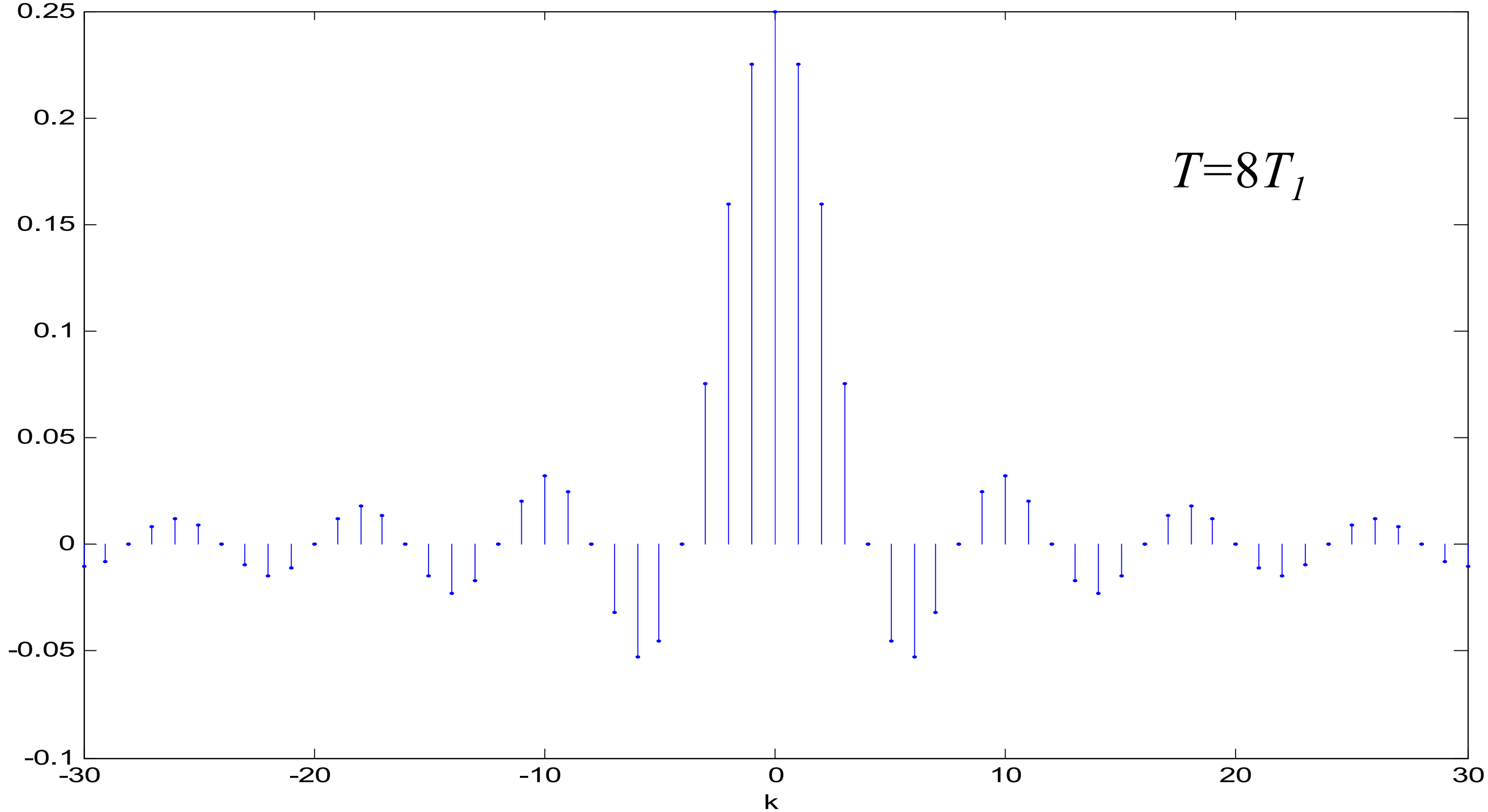
T1固定，T取不同值时的周期方波傅里叶级数系数a_k。



3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

2. 周期方波信号

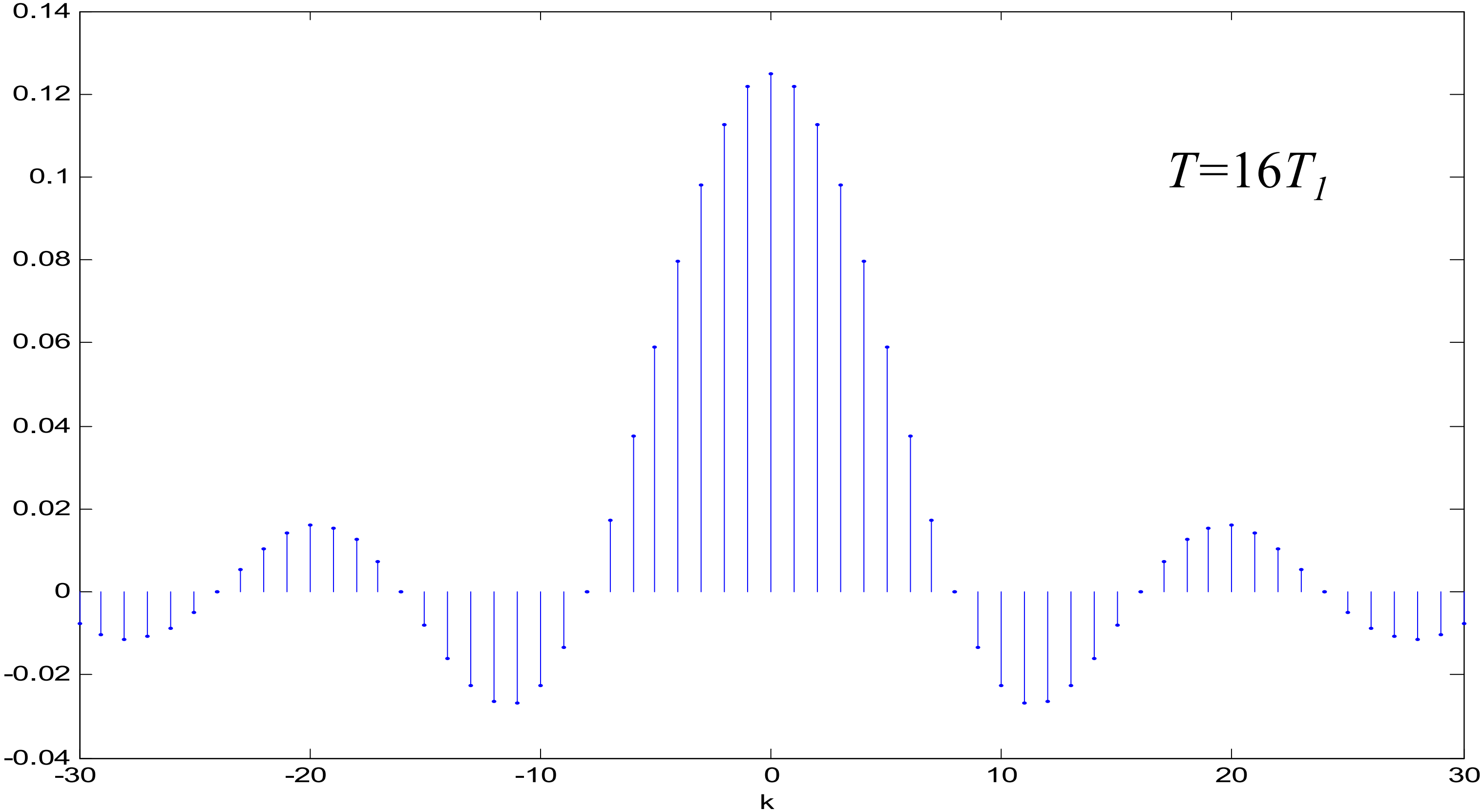
T1固定，T取不同值时的周期方波傅里叶级数系数a_k。



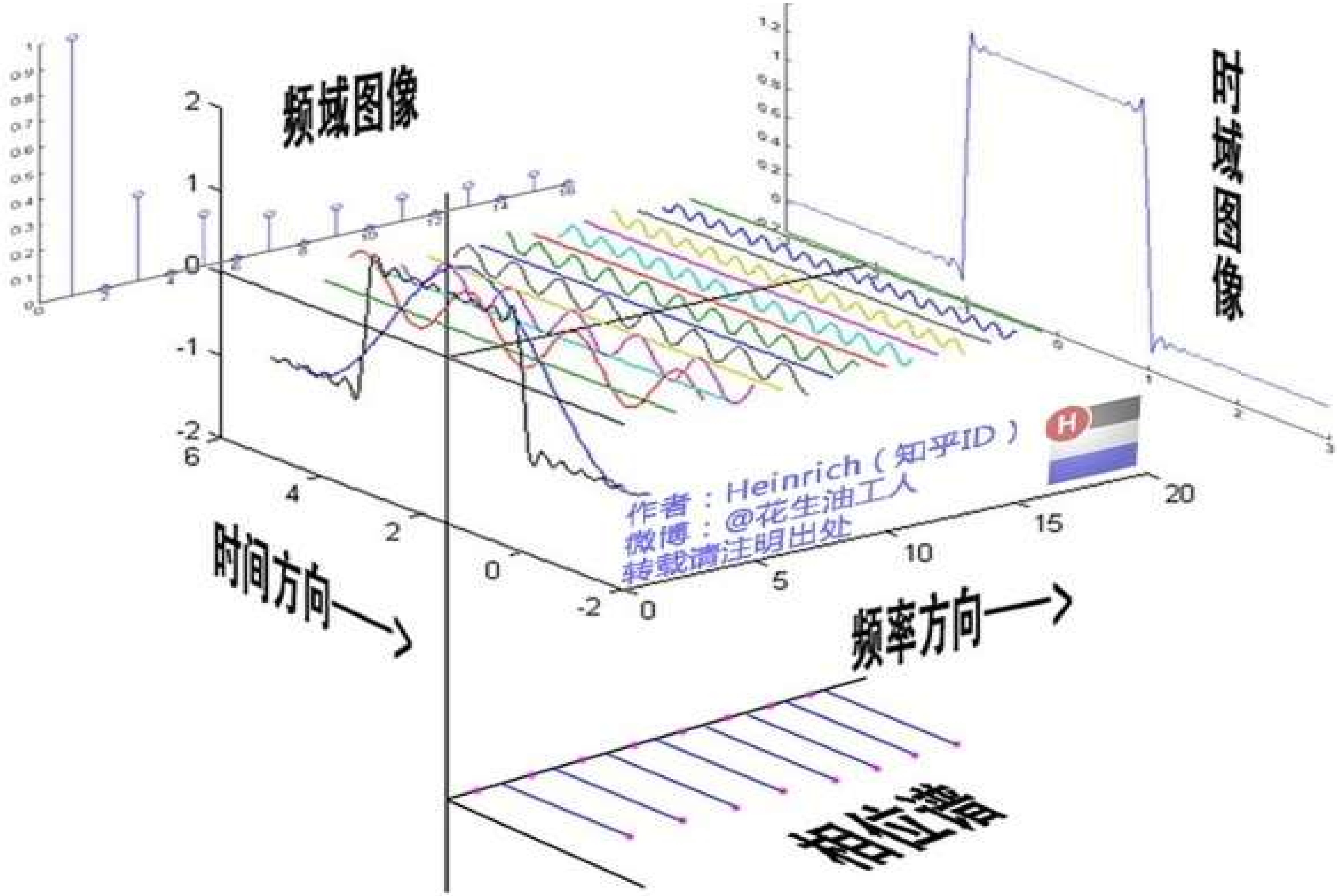
3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

2. 周期方波信号

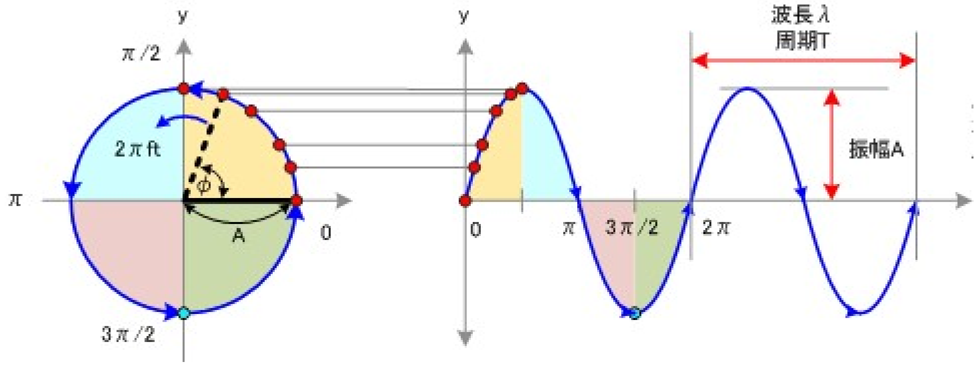
T1固定，T取不同值时的周期方波傅里叶级数系数a_k。

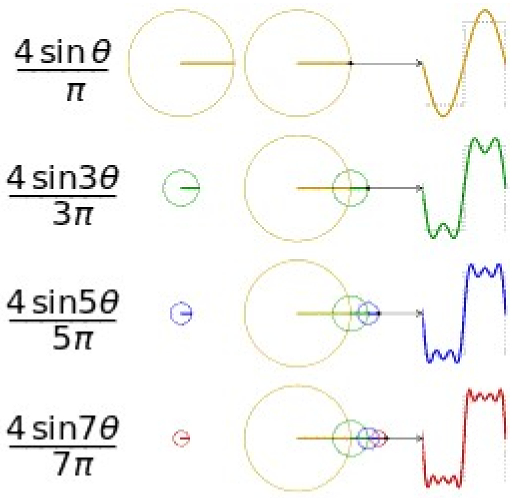


3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开



3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开





$$x(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(B_k \cos k\omega_0 t + C_k \sin k\omega_0 t)$$

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

3. 周期锯齿脉冲信号

- 该信号的傅里叶级数系数：

$$a_k = \frac{j}{2}(-1)^k \frac{E}{k\pi} \qquad k \neq 0$$

$$a_0 = 0$$

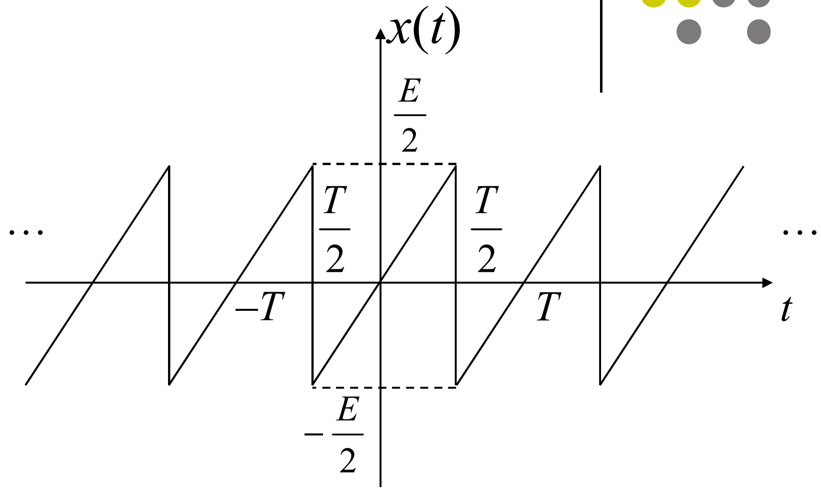


图3-4 周期锯齿脉冲信号的波形

- 其傅里叶级数为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2}(-1)^k \frac{E}{k\pi} e^{jk\omega_0 t} = \frac{E}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j(-1)^k \frac{1}{k} e^{jk\omega_0 t}$$

周期锯齿脉冲的傅里叶级数的系数以 $\frac{1}{k}$ 的规律收敛：$\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

4. 周期三角脉冲信号

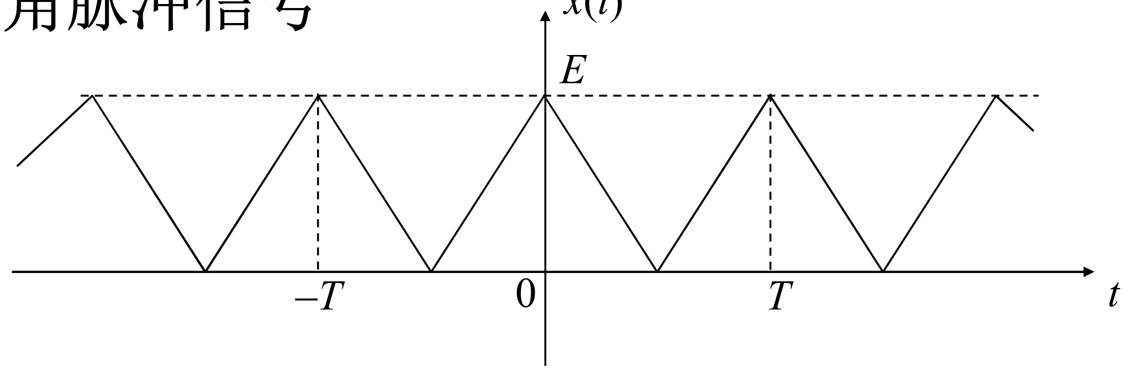


图3-5 周期三角脉冲信号的波形

- 傅里叶级数的系数 a_k 为：$a_k = \dfrac{E}{2} Sa^2(\dfrac{\pi}{2}k)$
- 该信号的傅里叶级数为 $x(t) = \dfrac{E}{2} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} Sa^2(\dfrac{\pi}{2}k) e^{jk\omega_0 t}$， $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

其傅里叶级系数是以 $\dfrac{1}{k^2}$ 的规律收敛。

3.2.2 典型周期信号的傅里叶级数展开

5. 周期半波余弦信号

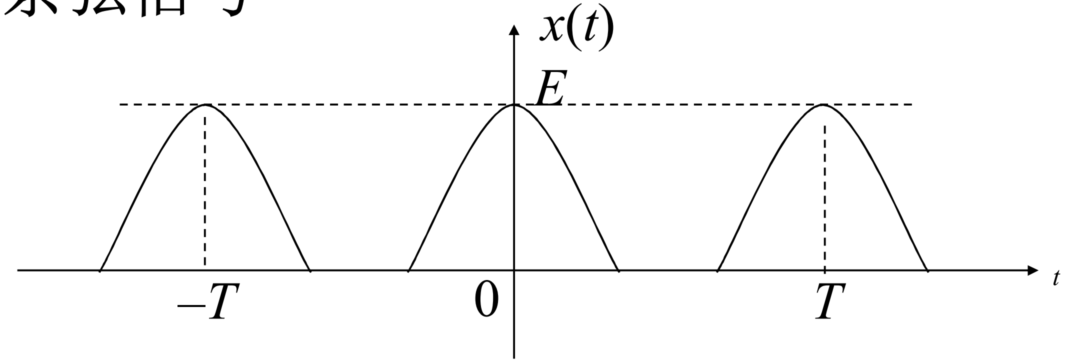


图3-6 周期半波余弦信号波形

周期半波余弦信号的傅里叶级数系数 $a_k = \dfrac{E}{(1-k^2)\pi}\cos(\dfrac{k\pi}{2})$

周期半波余弦信号的傅里叶级数为 $x(t) = \dfrac{E}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos(\dfrac{k\pi}{2})}{1-k^2} e^{jk\omega_0 t}$

该傅里叶级数系数是以 $\dfrac{1}{k^2}$ 的规律收敛

MATLAB: 计算傅里叶级数的系数

```
--------------------------------------------------------------------------------
% 程序 signal0.m：定义求傅里叶级数系数的被积函数：y=(1/T)*x(t).*exp(-j*(2*pi/T)*k*t)
function y=signal0(t,k,T)            %T 为信号周期，t 为时间变量，k 为 k 次谐波
x=(t>=T/4).*1.0;                     % 定义占空比为 25%的非对称周期方波  for one period=T
                                      % 对称周期三角形可定义: x=(abs(t)<=T/4).*(1-abs(t));
                                      % 占空比为 50%的对称周期方波可定义: x=(abs(t)<=T/4).*1.0;

y=((1/T)*x).*exp(-j*(2*pi/T)*k*t);
--------------------------------------------------------------------------------
```

MATLAB: 计算傅里叶级数的系数

```
%程序 spectrum0.m：计算傅里叶级数的系数 a(n)
T=0.5;
N=20;   %最大谐波
k=-N:N;
N1=length(k);a=zeros(1,N1);
for n=1:N1
    a(n)=quadl(@signal0,-T/2,T/2,[],[],k(n),T);   %计算傅里叶级数的系数 a(n)
end
A=abs(a);%计算傅立叶级数系数幅值
subplot(3,1,1);stem(k,A);ylabel('a(k)幅值');
axis([k(1) k(N1) min(A)-0.05 max(A)+0.05]);
subplot(3,1,2);stem(k,real(a));ylabel('a(k)实部');
axis([k(1) k(N1) min(real(a))-0.05 max(real(a))+0.05]);
subplot(3,1,3);stem(k,imag(a));ylabel('a(k)虚部');xlabel('k');
axis([k(1) k(N1) min(imag(a))-0.05 max(imag(a)) +0.05]);
```

MATLAB: 计算傅里叶级数的系数

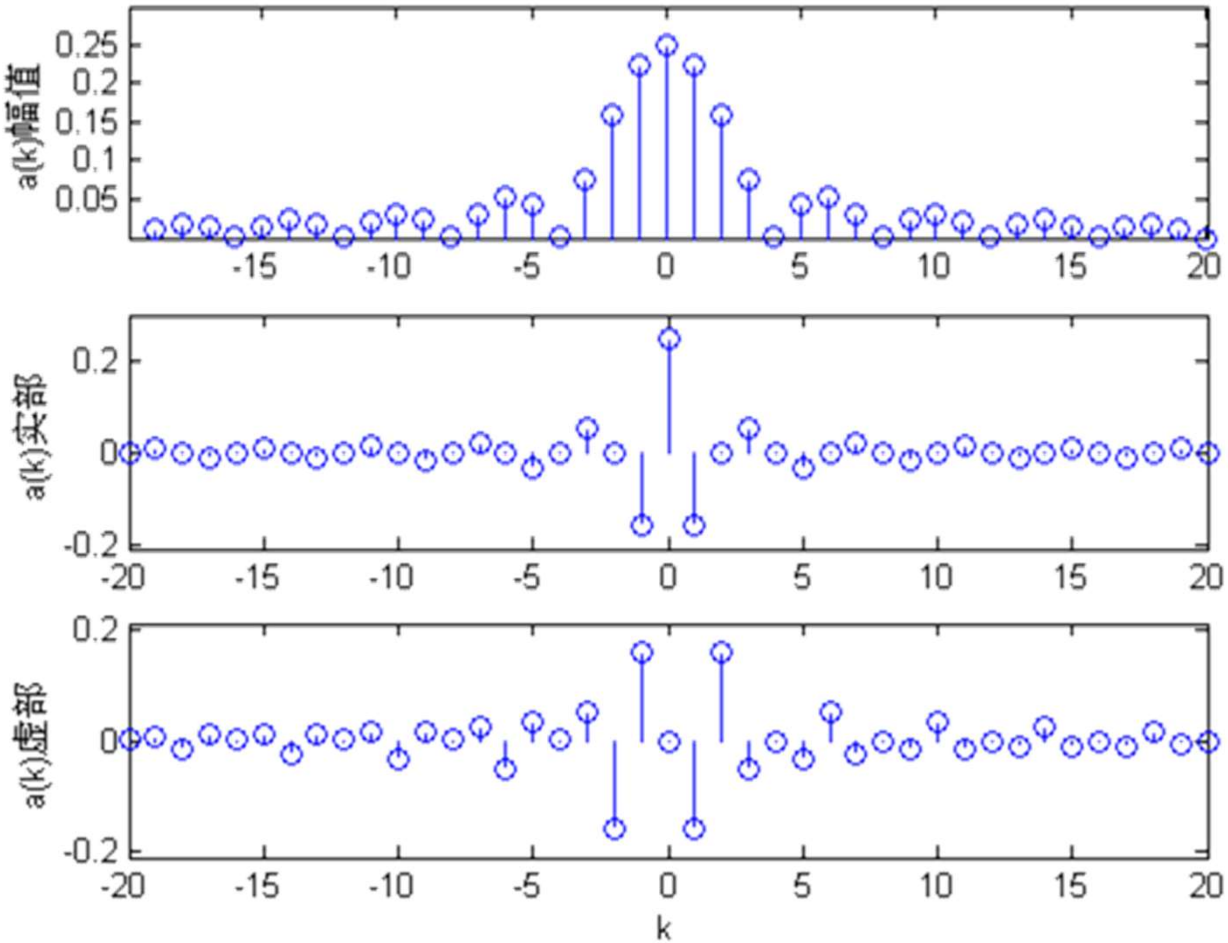


图 3.7 占空比为25%的非对称周期方波的傅里叶级数的系数

3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

傅里叶级数与原周期信号的等效

- 用下列有限项级数来近似 $x(t)$

$$x_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{jk\omega_0 t},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

- 令$e_N(t)$ 为近似误差

$$e_N(t)=x(t)-x_N(t)=x(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- 用一个周期内的误差能量E_N度量近似程度

$$E_N=\int_{T_0}|e_N(t)|^2 dt$$

3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

- 可以证明，使E_N最小的系数a_k的取值为

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

并有

$$\lim_{N\to\infty} E_N = 0$$

- 傅里叶级数是在$E_N = 0$的意义上，为其所对应的原周期信号的最佳表示。两者没有任何能量上的差别，但并不能保证它们在每个时刻上一定处处相等。

3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

两类稍微有些不同的收敛条件

- 1.根据信号功率
- 2.狄里赫利收敛条件

3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

1. 根据功率的收敛条件

可以用傅里叶级数来表示 $x(t)$的一类周期信号是在一个周期内能量有限的信号，即

$$\int_T |x(t)|^2 \cdot dt < \infty$$

- 该收敛条件仅保证求得 a_k是有限值。
- 满足使 $\lim_{N\to\infty} E_N = 0$ 。

$x(t)$ 与它的傅里叶级数两者没有任何能量上的差别；

但不能保证它们在每一个t值上都相等。

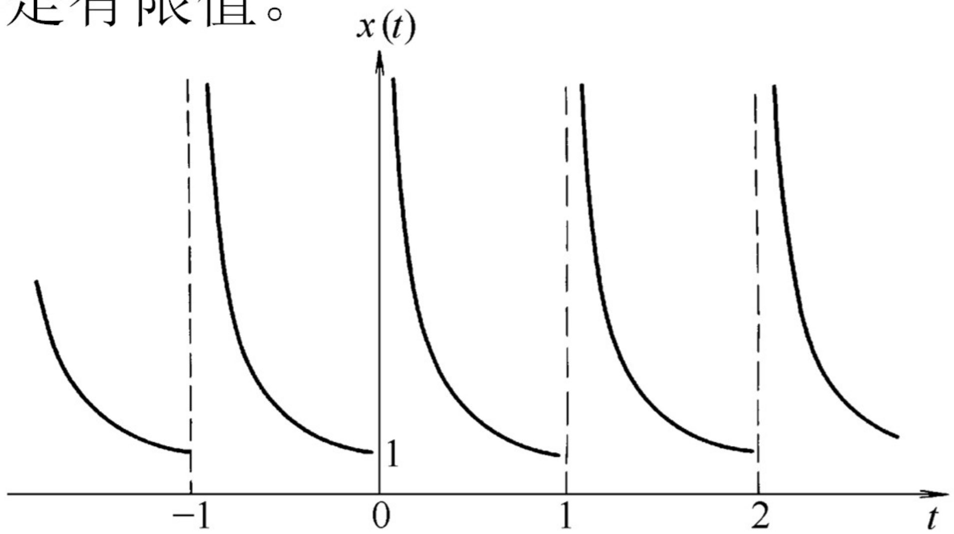
3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

2. 狄里赫利收敛条件

- 条件1：在任何周期内，$x(t)$ 必须绝对可积，即

$$\int_T |x(t)|\,dt < \infty$$

这一条件保证了每一系数 a_k 都是有限值。



不满足狄里赫利第一条件的周期信号可以举例如下：

$$x(t) = \frac{1}{t}\ ,0 < t \le 1\text{，周期}=1$$

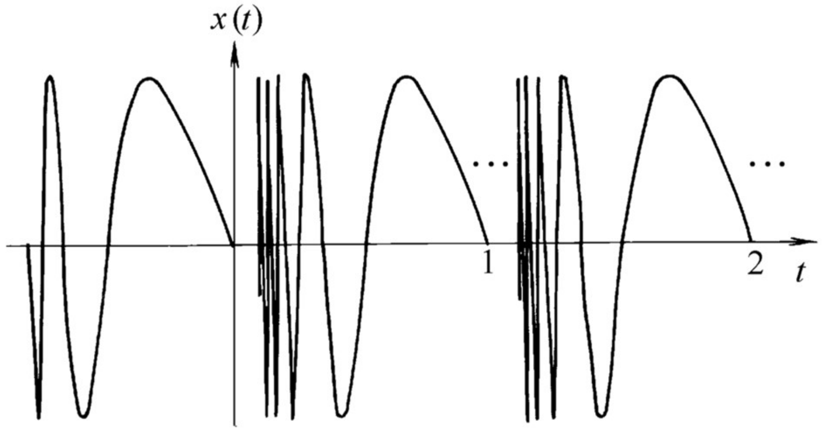
3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

2. 狄里赫利收敛条件

- 条件2：在任意单个周期间隔内，$x(t)$的最大值和最小值的数目有限。

满足条件1而不满足条件2的一个函数是

$$x(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right),\quad 0<t\le 1,\quad 周期=1$$



该函数满足

$$\int_0^1 |x(t)|\cdot dt<1$$

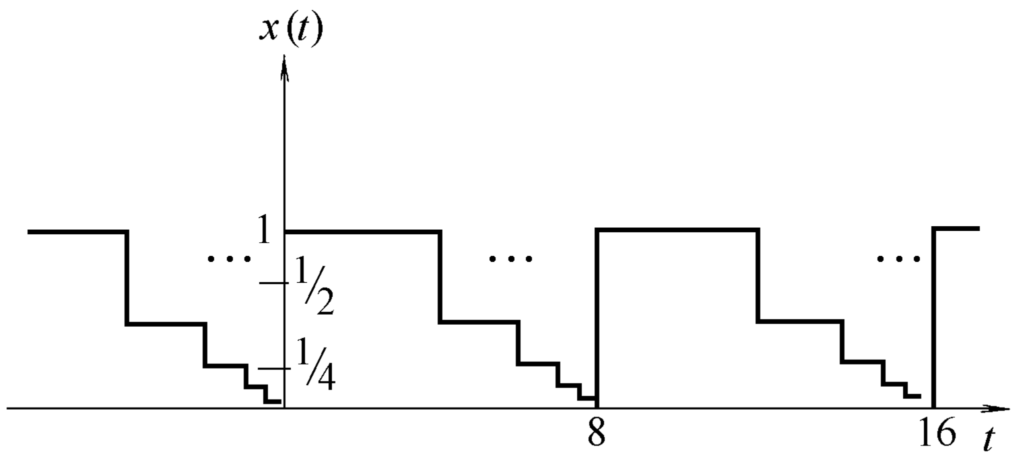
然而，它在一个周期内有无限多的最大点和最小点。

3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

2. 狄里赫利收敛条件

- 条件3：在 $x(t)$ 的任何有限区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数是有限值。

不满足条件的信号：

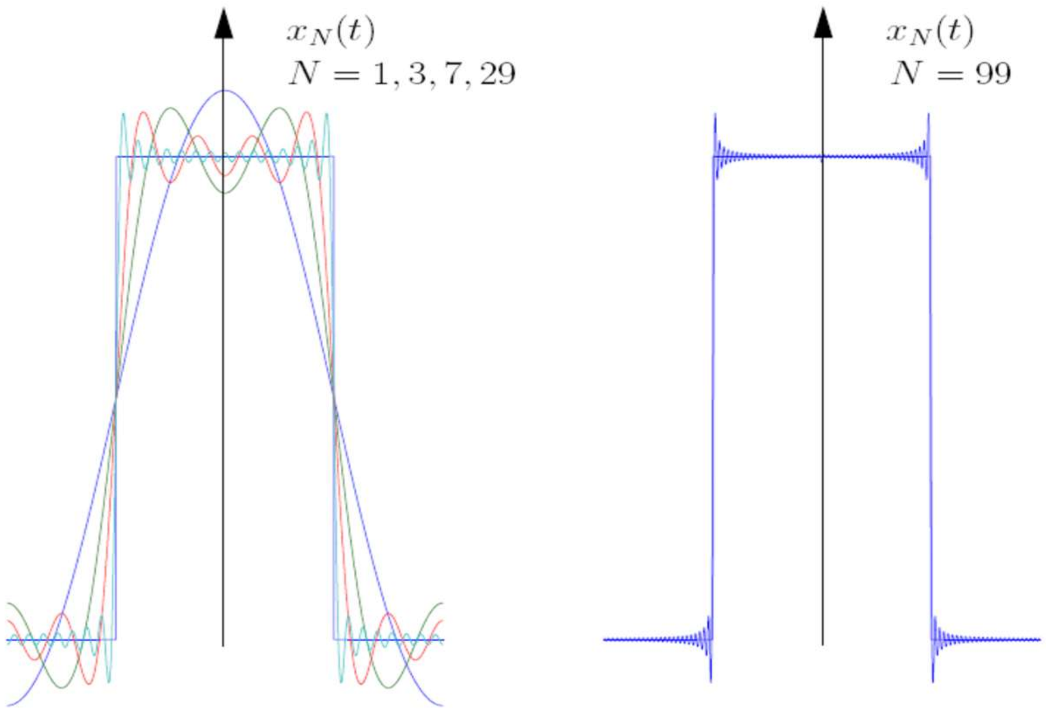


3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

吉布斯现象

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Discontinuity of unit height $\Rightarrow$ overshoot of 9%



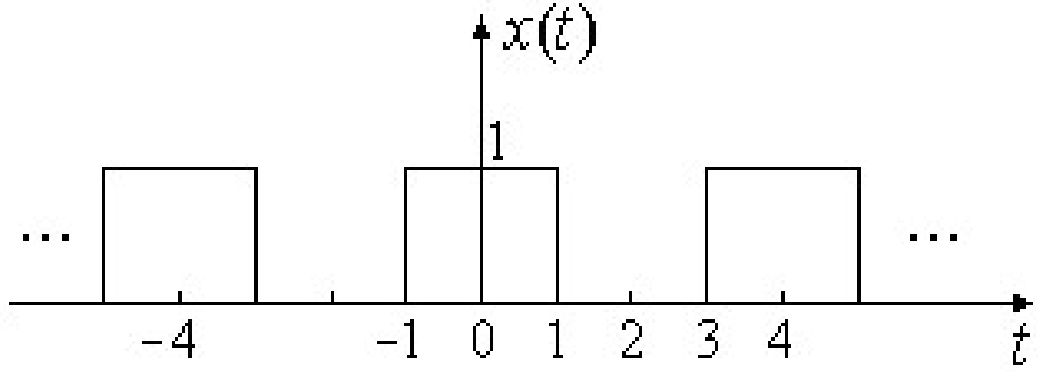
3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

收敛的含义与吉布斯现象

(1)处处收敛：$\forall t$， $\lim\limits_{N\to\infty} x_N(t) = x(t)$

(2)均方收敛：$\lim\limits_{N\to\infty} \int_T \left| x_N(t) - x(t) \right|^2 dt = 0$

考察图示的周期方波信号$x(t)$



3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad T=4，\quad \omega_0=\frac{\pi}{2}$$

$$a_0=\frac{2T_1}{T}=\frac{1}{2} \qquad a_k=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}=\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

$$a_{\pm1}=\frac{1}{\pi} \qquad a_{\pm3}=-\frac{1}{3\pi} \qquad a_{\pm5}=\frac{1}{5\pi}$$

有限项FS：$x_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{jk\omega_0 t}$

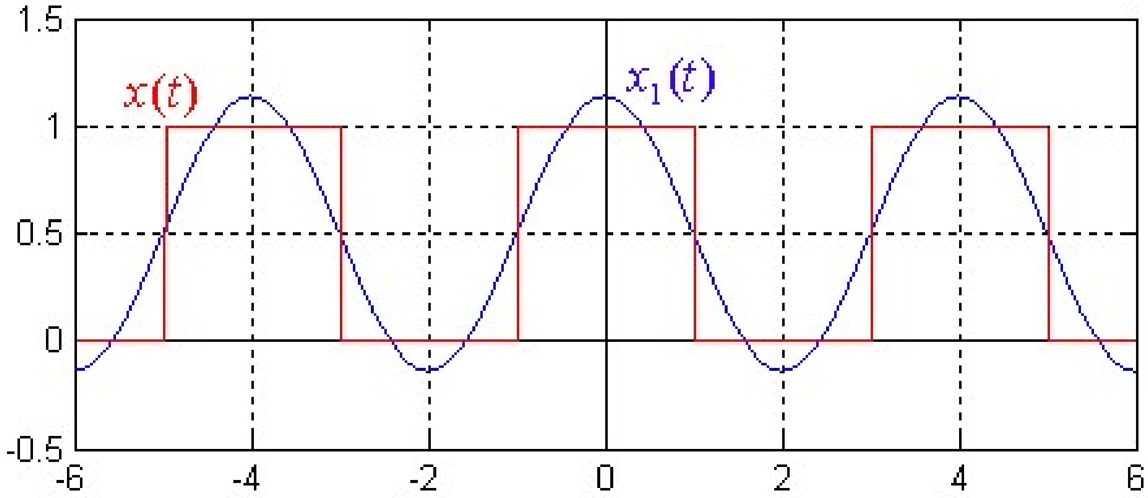
$$x_0(t)=\frac{1}{2} \qquad x_1(t)=\frac{1}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_T\left|x_N(t)-x(t)\right|^2dt=0$$

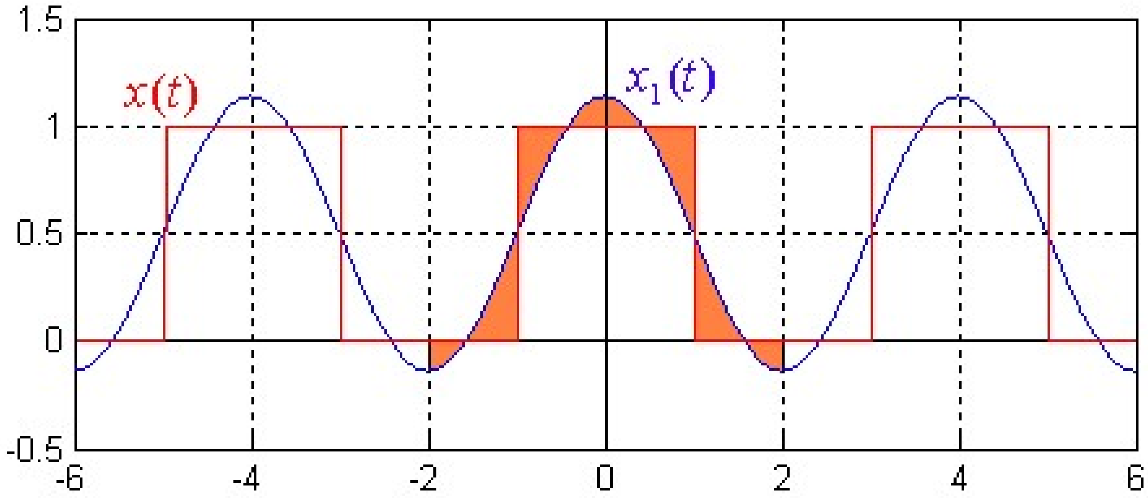


3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_T\left|x_N(t)-x(t)\right|^2dt=0$$

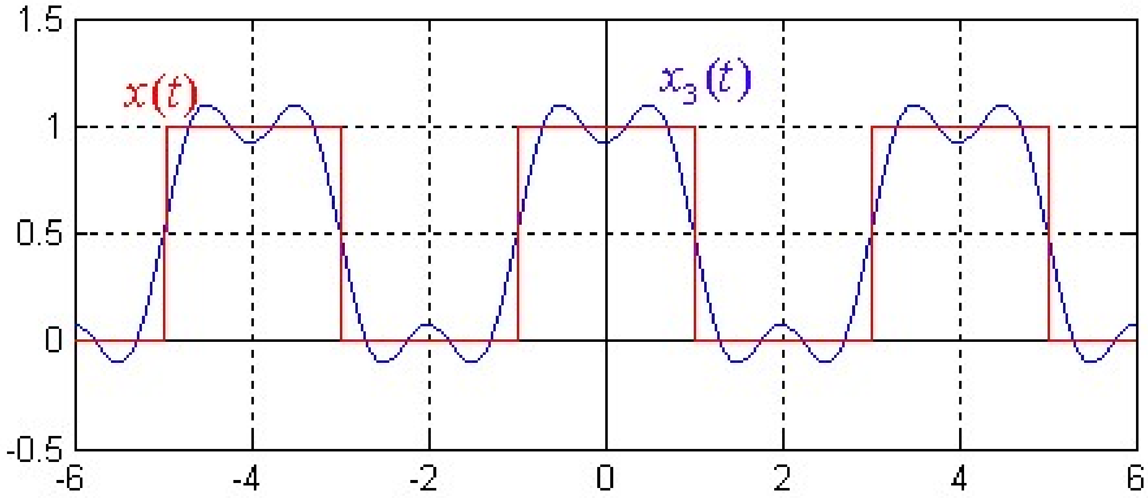


3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_T\left|x_N(t)-x(t)\right|^2dt=0$$

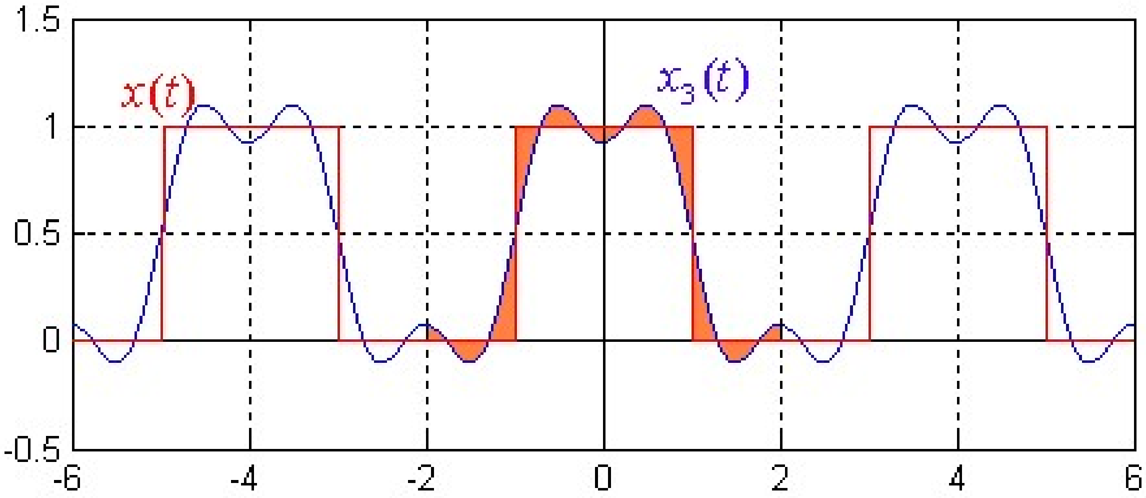


3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_T\left|x_N(t)-x(t)\right|^2dt=0$$

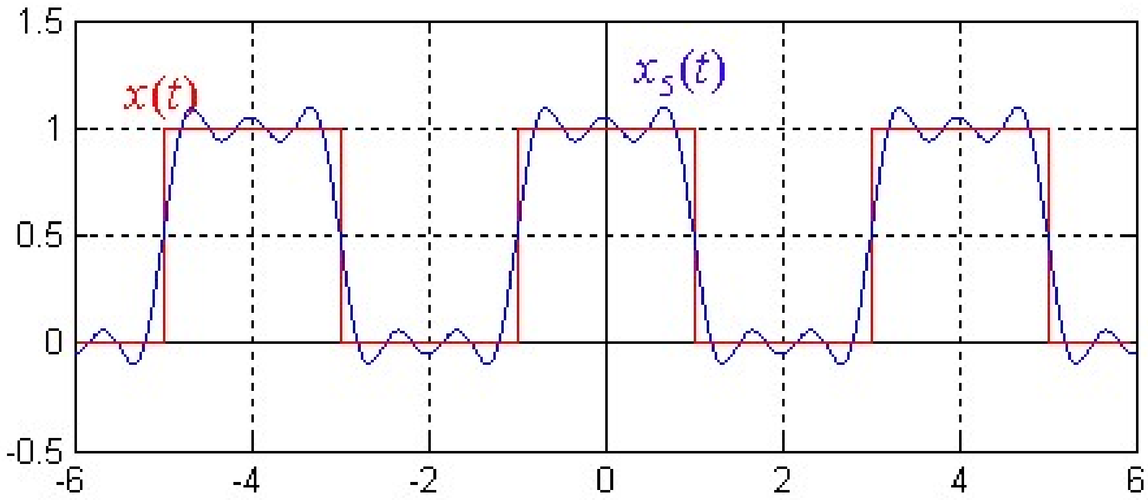


3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_T \left|x_N(t)-x(t)\right|^2 dt=0$$

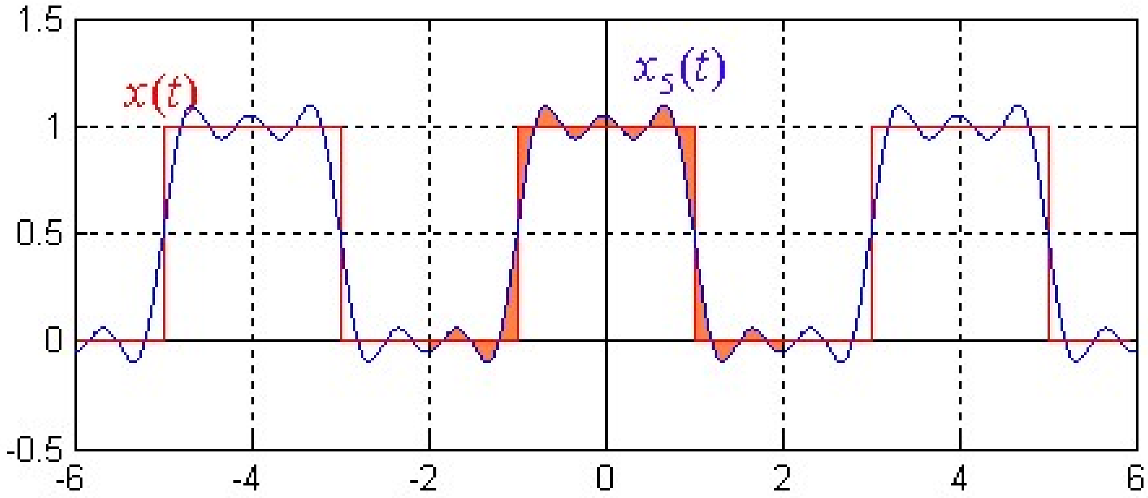


3.2.3 连续时间傅里叶级数的收敛

$$x_3(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

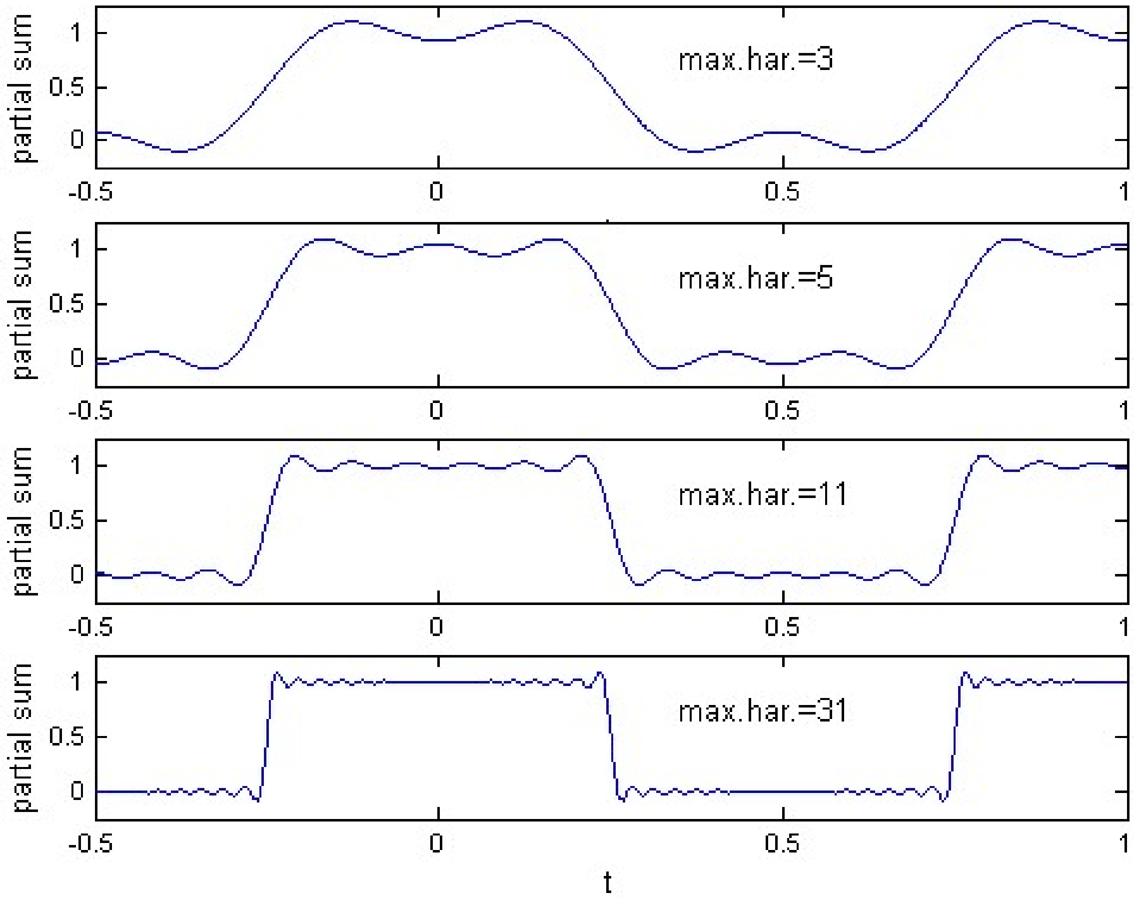
$$\lim_{N\to\infty}\int_T\left|x_N(t)-x(t)\right|^2dt=0$$



MATLAB: 吉布斯现象

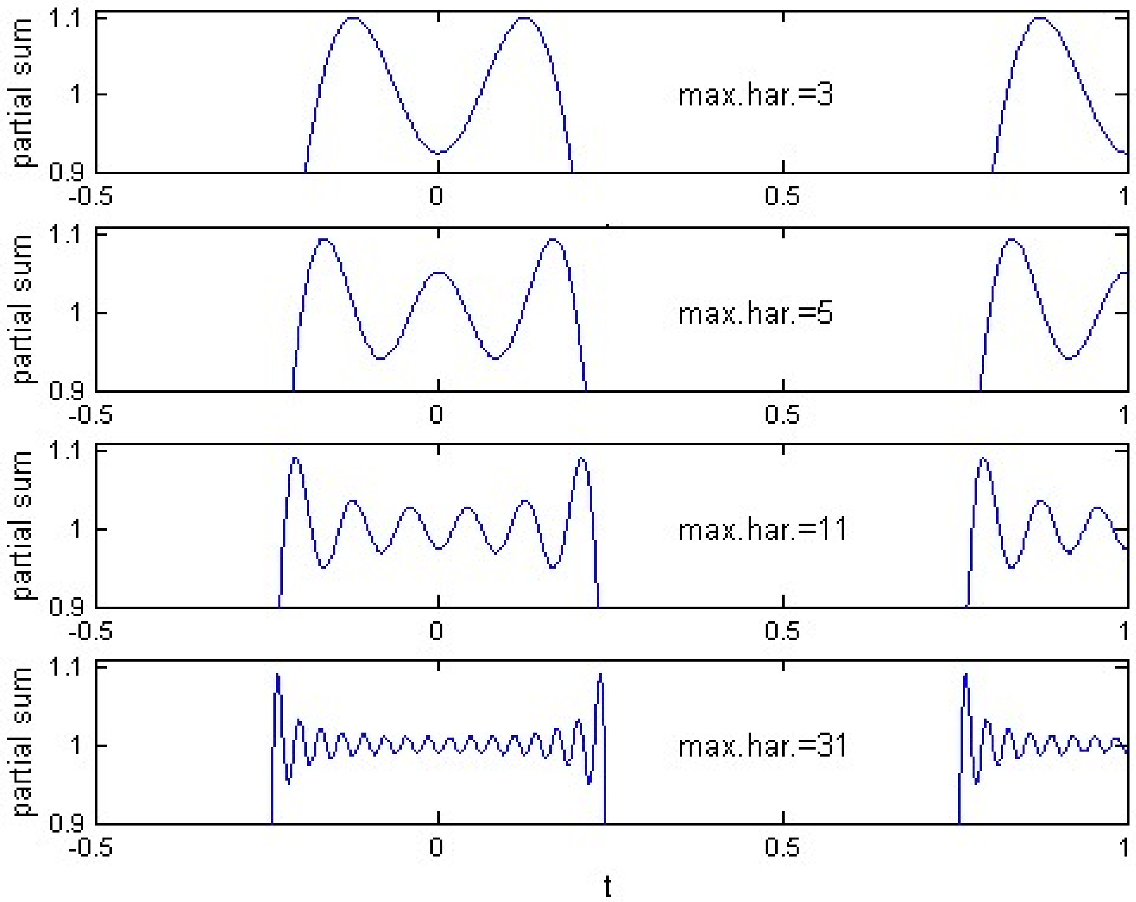
```
% Program：用有限项谐波叠加成占空比为 0.5 的方波
n_max=[3 5 11 31];          %最高谐波分量分别为 3、5 、11 和 31。
N=length(n_max);
t=-0.5:0.001:1;
w=2*pi;                     % 周期为 1
for k=1:N
    x=0.5; % 直流项
    for n=1:2:n_max(k);
      bn=2.*sin(pi*n/2)/(pi*n)     % 求系数。该方波表示为三角函数形式的傅里叶级数时，其傅里
                                   %叶级数系数为2.0×sin(π·n/2)/(n·π)。
      x=x+bn*cos(w*n*t);           %用有限项谐波叠加近似表示占空比为 0.5 的方波 x(t)
    end
    subplot(N,1,k);plot(t,x);xlabel('t');ylabel('partial sum');
    axis([min(t) max(t) -.5 1.25]),text(-.2,0.4,['max.har.=',num2str(n_max(k))]);
end
```

MATLAB: 吉布斯现象



(a) 用有限项谐波叠加近似表示占空比为0.5的方波

MATLAB: 吉布斯现象

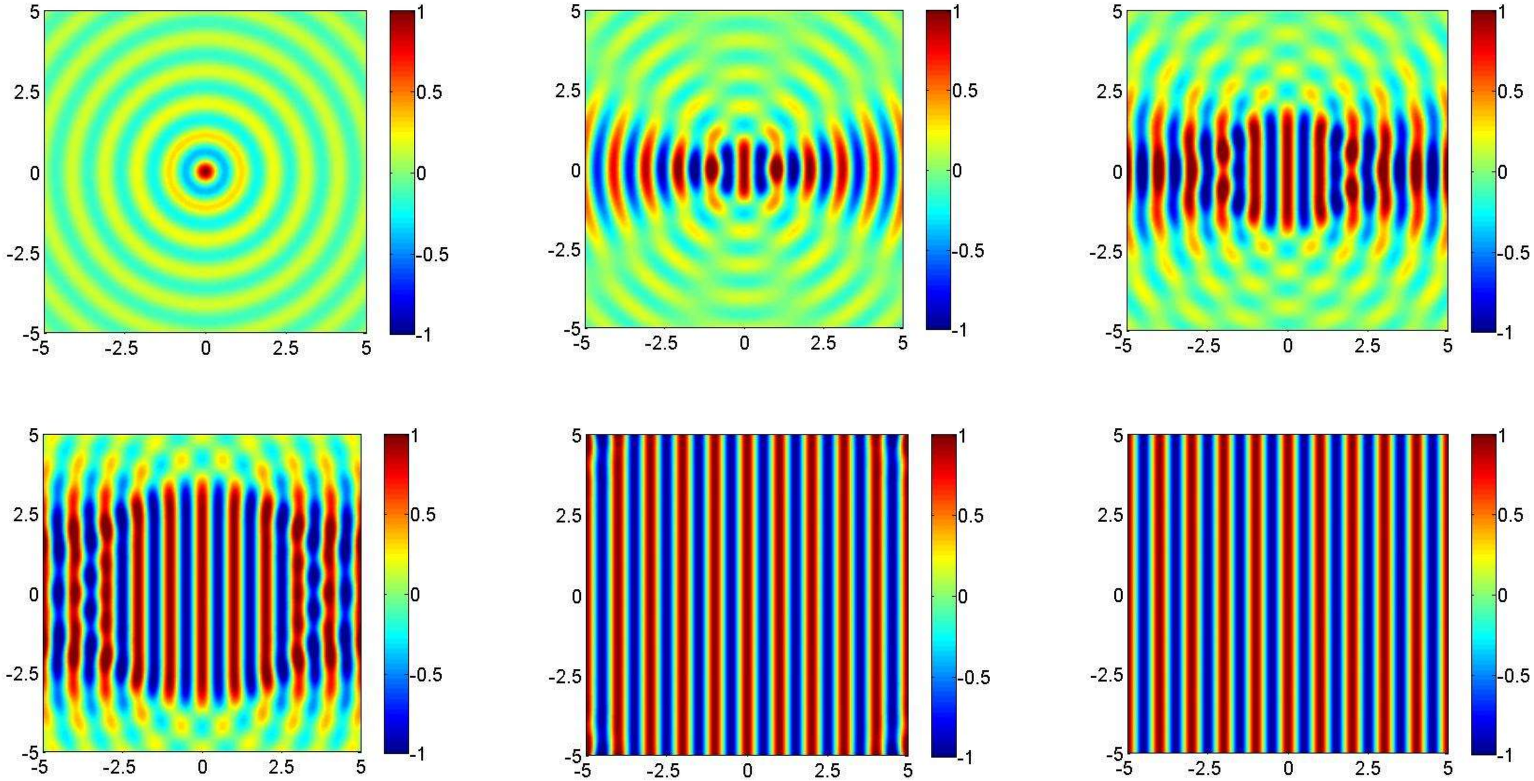


(b) 局部放大图

MATLAB: 计算傅里叶级数的系数

平面波的柱面波展开

$$e^{-jkx} = e^{-jk\rho\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\phi}$$



§ 3.0 引言

§ 3.1 连续时间LTI系统的特征函数

§ 3.2 连续时间傅里叶级数

§ 3.3 连续时间傅里叶变换

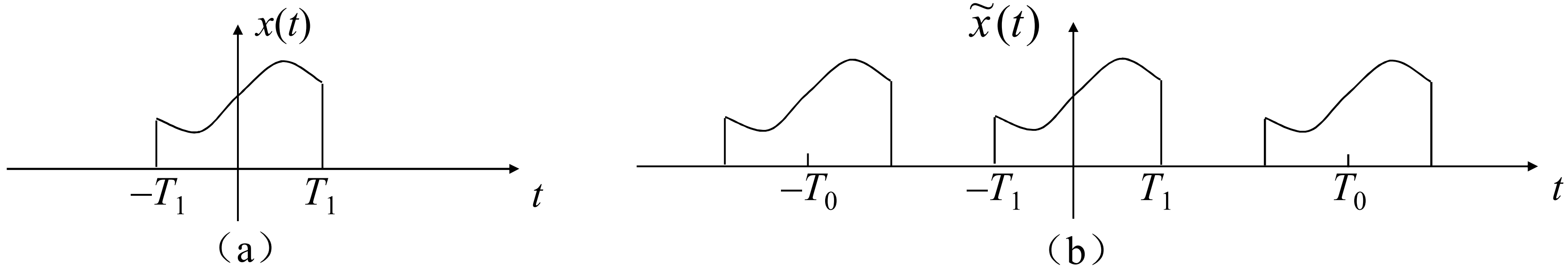
§ 3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

§ 3.5 连续时间傅里叶变换的性质

§ 3.6 连续时间LTI系统的频域分析

3.3.1 非周期信号的傅里叶变换的导出

考虑一个信号$x(t)$，它具有有限时宽：$x(t)=0$，当$|t|>T_1$



（a）非周期信号$x(t)$；（b）由$x(t)$构成的周期信号

$x(t)$进行周期延拓：　$\tilde{x}(t)=x(t)\quad |t|\le T_1$　且　$T_0>2T_1$

$$x(t)=\lim_{T_0\to\infty}\tilde{x}(t)$$

3.3.1 非周期信号的傅里叶变换的导出

将$\tilde{x}(t)$展开成傅里叶级数有

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}\cdot dt$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

3.3.1 非周期信号的傅里叶变换的导出

定义包络$T_0 a_k$为：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\cdot dt$$

有

$$a_k=\frac{1}{T_0}X(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}=\frac{1}{T_0}X(jk\omega_0)$$

代入傅里叶级数，有

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\cdot\omega_0$$

3.3.1 非周期信号的傅里叶变换的导出

随着$T_0 \to \infty$ 或者 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \to 0$，$\tilde{x}(t)$趋近于 $x(t)$ ：

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

$x(t)$ 表示成了复指数信号的线性组合形式。

$X(j\omega)$用来表示信号所包含不同频率复指数信号组成成份的度量，通常称为$x(t)$的频谱。

3.3.1 非周期信号的傅里叶变换的导出

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

其中 $x(t)$ 和 $X(j\omega)$ 表示一傅里叶变换对，它们间关系为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

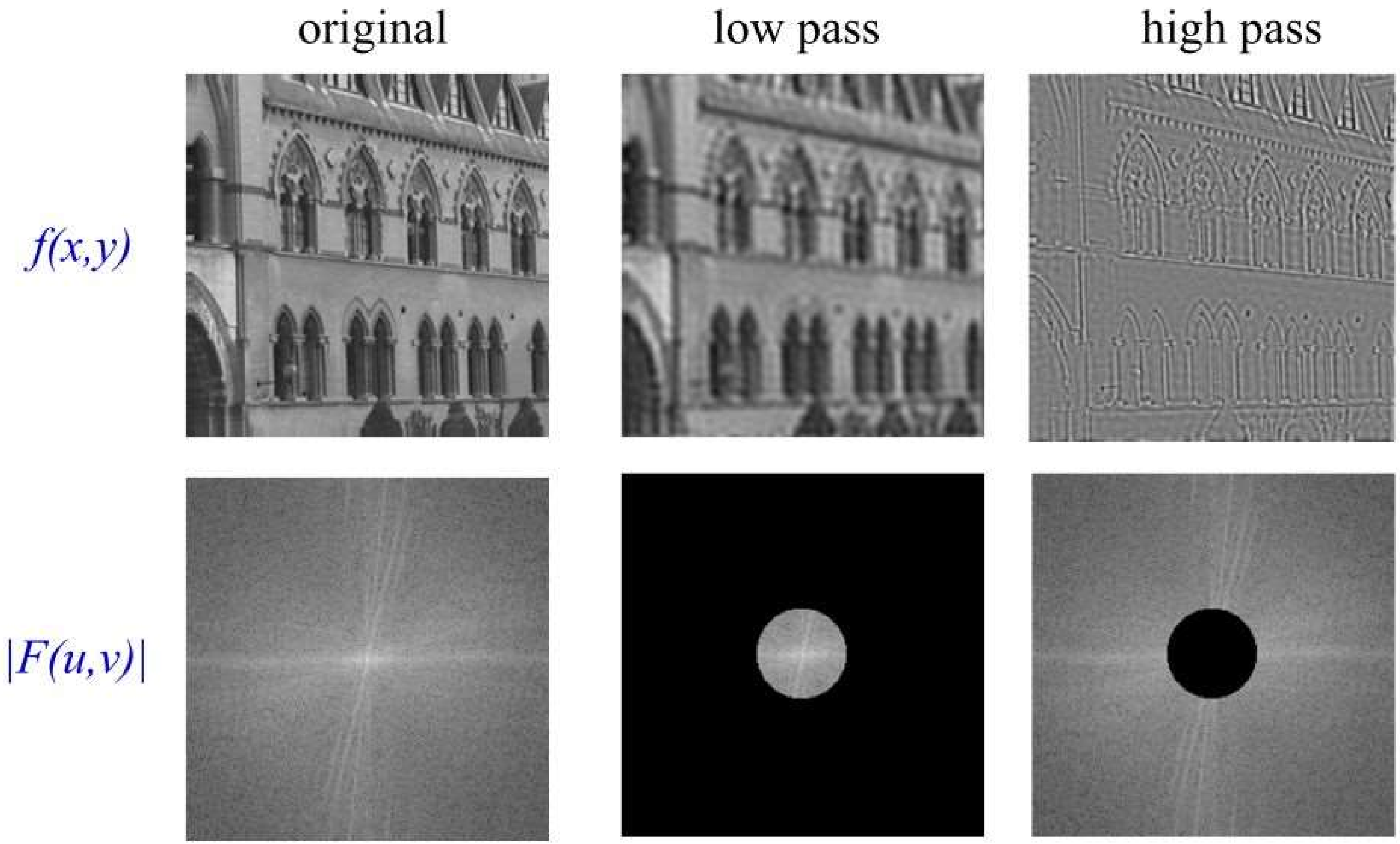
和
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

频谱 $X(j\omega)$ 极坐标形式：

$$X(j\omega) = \left| X\left(j\omega\right) \right| \cdot e^{j\theta\left(j\omega\right)}$$

其模 $|X(j\omega)|$ 称为信号幅度谱，其相位 $\theta(\omega)$ 称为信号的相位谱。

3.3.1 非周期信号的傅里叶变换的导出



3.3.2 连续时间傅里叶变换的收敛

傅里叶变换对相当广泛的一类信号是适用的，特别是对一些实际有用的信号。但并不是对所有信号都是适用的，傅里叶变换也存在着收敛条件。

令 $\hat{x}(t)$表示傅里叶反变换

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\cdot d\omega$$

$\hat{x}(t)$和 $x(t)$ 之间的误差：$e(t)=\hat{x}(t)-x(t)$

均方误差定义为 $E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|e(t)|^{2}\cdot dt$

3.3.2 连续时间傅里叶变换的收敛

与周期信号的傅里叶级数相类似，傅里叶变换通常有两个收敛条件。

- 条件1 若 $x(t)$ 能量有限，也即 $x(t)$ 平方可积：$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \cdot dt < \infty$

  那么 $X(j\omega)$ 就保证是有限的，且有 $E(t)=0$ 。

- 条件2 狄里赫利条件：

  该条件保证了傅里叶反变换除了那些不连续点外，在任何其他的值上都等于原信号，而在不连续点处，它等于原信号在不连续点两侧值的平均值。

3.3.2 连续时间傅里叶变换的收敛

- 狄里赫利条件：

1. $x(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot dt < \infty$

2. 在任何有限区间内，$x(t)$只有有限个最大值和最小值。

3. 在任何有限区间内，$x(t)$ 只有有限个不连续点，并且在每个不连续点上信号都必须是有限值。

3.3.2 连续时间傅里叶变换的收敛

吉布斯现象：当傅里叶变换综合公式（反变换）用有限频宽来近似表示原信号，即

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w}X(j\omega)e^{j\omega t}\cdot d\omega$$

在不连续点处同样存在吉布斯现象。

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

单边指数信号：$x(t)=e^{-at}u(t)$ ， $a>0$

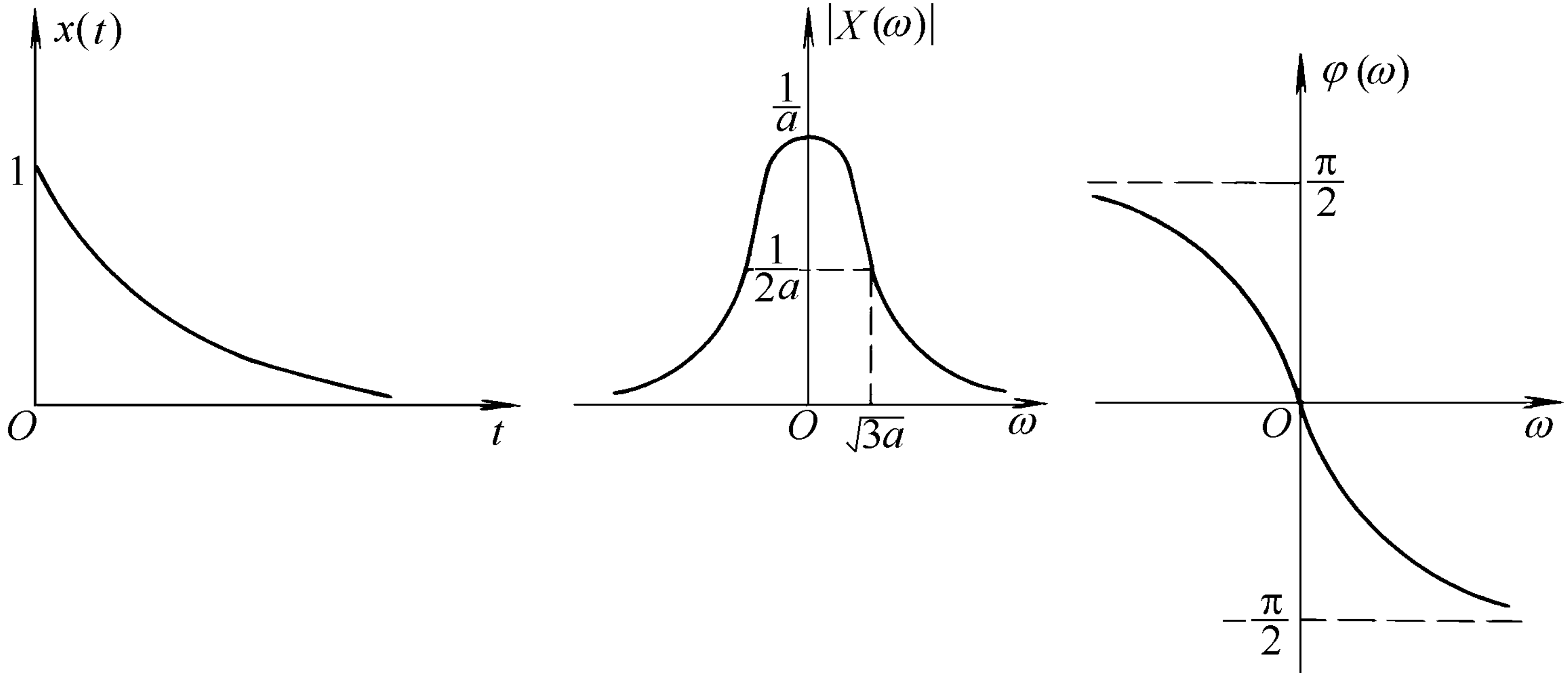
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

$$=-\frac{1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

得

$$e^{-at}\cdot u(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega},a>0$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对



$$e^{-at}\cdot u(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega},a>0$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

双边指数信号：$x(t)=e^{-a|t|}, a>0$

该信号可表示为 $x(t)=e^{at}\cdot u(-t)+e^{-at}\cdot u(t)$

其傅里叶变换

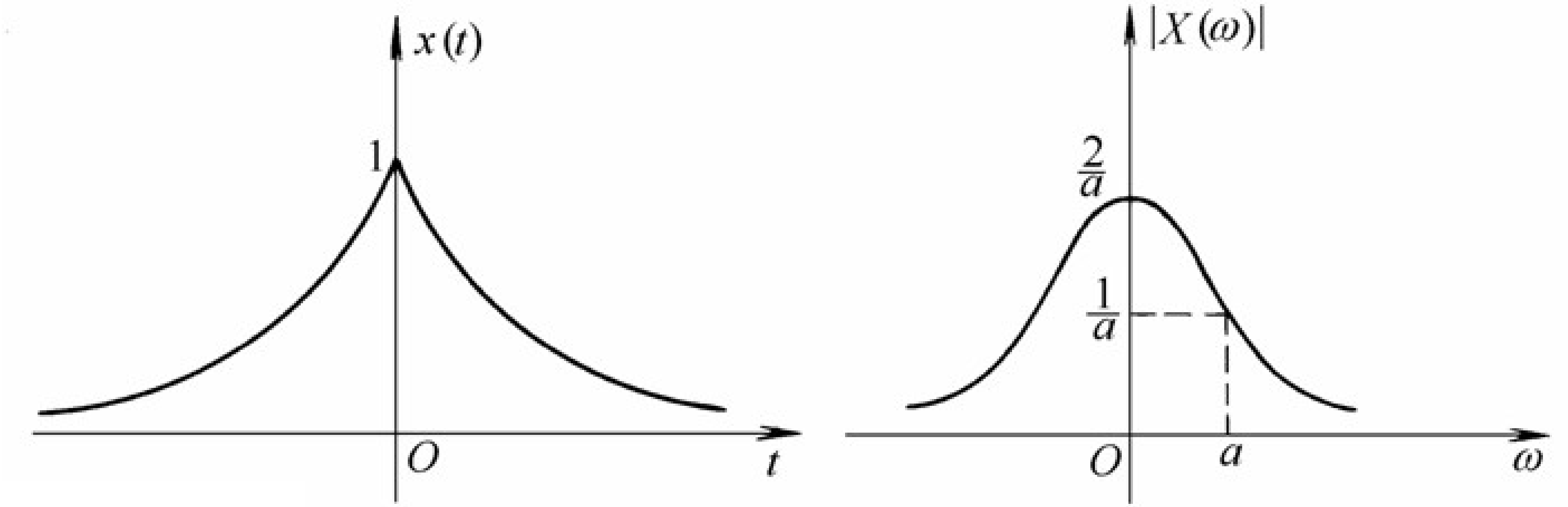
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}\cdot dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

得

$$e^{-a|t|}\xleftrightarrow{\mathrm{F}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对



$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

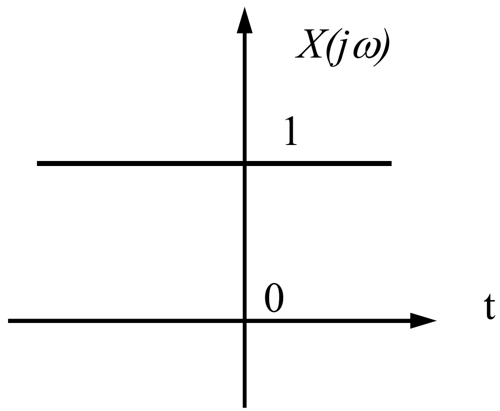
单位冲激信号

单位冲激信号 $\delta(t)$的傅里叶变换是

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\cdot dt=1$$

得

$$\delta(t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}1$$



单位冲激信号的频谱

$\delta(t)$所包含各种频率分量是相等的。

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

冲激偶信号

因为 $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$

可得 $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \cdot d\omega$

上式两边对t求微分，得

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

上式表示为$\delta'(t)$的傅里叶反变换，所以得

$$\delta'(t) \xleftrightarrow{F} j\omega$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

抽样函数

考虑一信号，其傅里叶变换$X(j\omega)$为 $X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & 其它\end{cases}$

傅里叶反变换

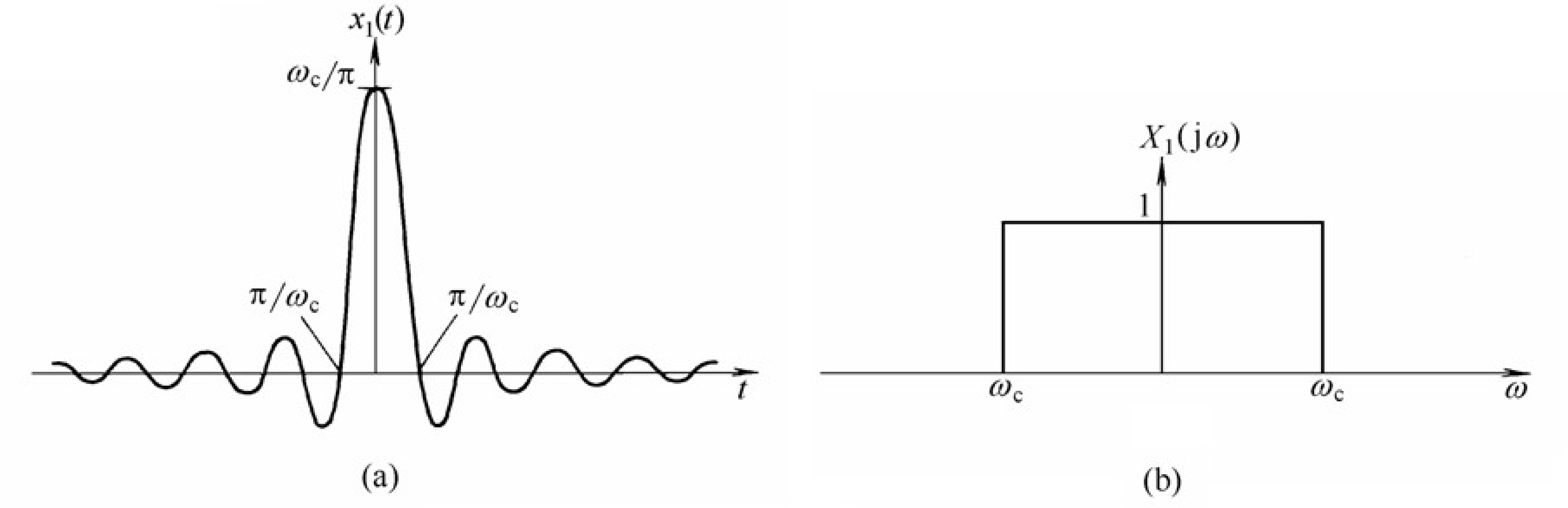
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\cdot d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c}\cos\omega t\cdot d\omega=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}=\frac{\omega_c}{\pi}\sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

得

$$\frac{\omega_c}{\pi}\sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)\xleftrightarrow{F}\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & 其它\end{cases}$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对



$$\frac{\omega_c}{\pi}\sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

当$\omega_c \to \infty$, $X(j\omega)$的极限为

$$\lim_{\omega_c \to \infty} X(j\omega) = 1$$

$$\lim_{\omega_c \to \infty} \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} 1$$

因为

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} 1$$

所以

$$\lim_{\omega_c \to \infty} \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) = \delta(t)$$

可看作是$\delta(t)$的另一种数学模型形式。

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

矩形窗函数：

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其傅里叶变换为

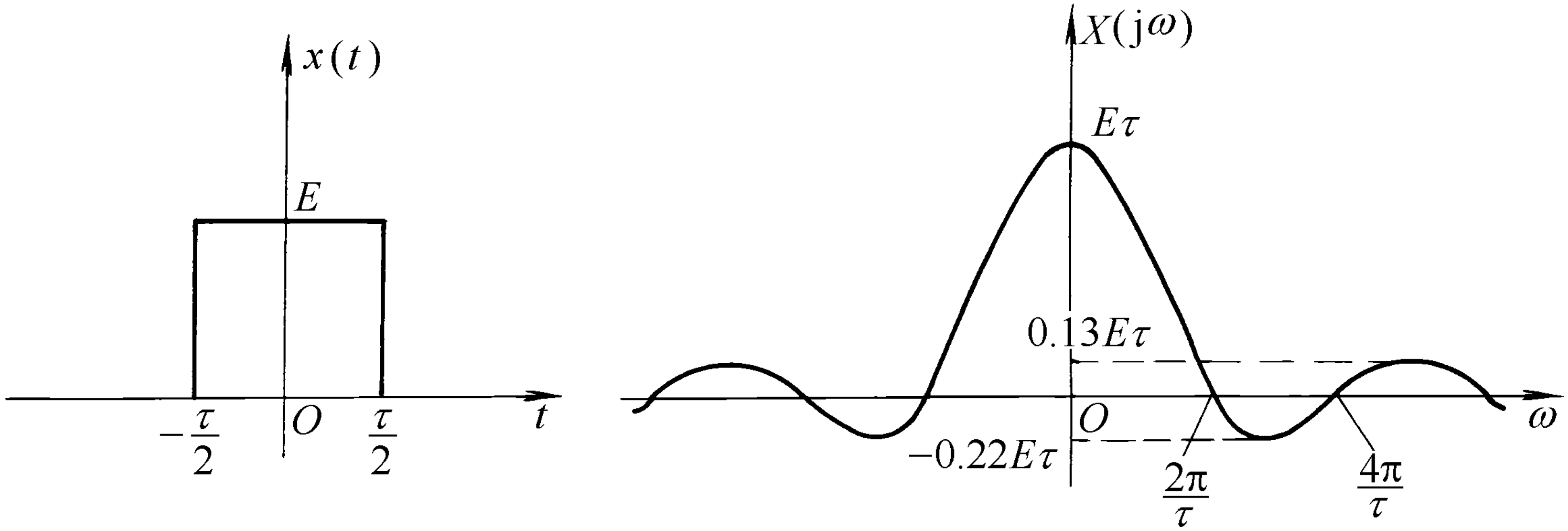
$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1}e^{-j\omega t}\cdot dt=\int_{-T_1}^{T_1}(\cos\omega t-j\sin\omega t)\cdot dt$$

$$=2\int_{0}^{T_1}\cos\omega t\cdot dt=\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2T_1\sin c\left(\frac{\omega\pi}{\pi}\right)$$

得

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\xleftrightarrow{F}2T_1\sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)=2T_1 sa(\omega T_1)$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对



$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \xleftrightarrow{F} 2T_1\sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)=2T_1 sa(\omega T_1)$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

当 $T_1 \to \infty$ 时，信号 $x(t)$ 为一常数：

$$\lim_{T_1\to\infty} x(t) = 1$$

$$1 \xleftrightarrow{F} \lim_{T_1\to\infty} 2T_1 \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = 2\pi \lim_{T_1\to\infty} \frac{T_1}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega \pi}{\pi}\right)$$

因为 $\lim\limits_{\omega_c\to\infty} \dfrac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\dfrac{\omega_c t}{\pi}\right) = \delta(t)$

可得傅里叶变换对 $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对

高斯脉冲：

$$x(t) = E \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

其傅里叶变换为

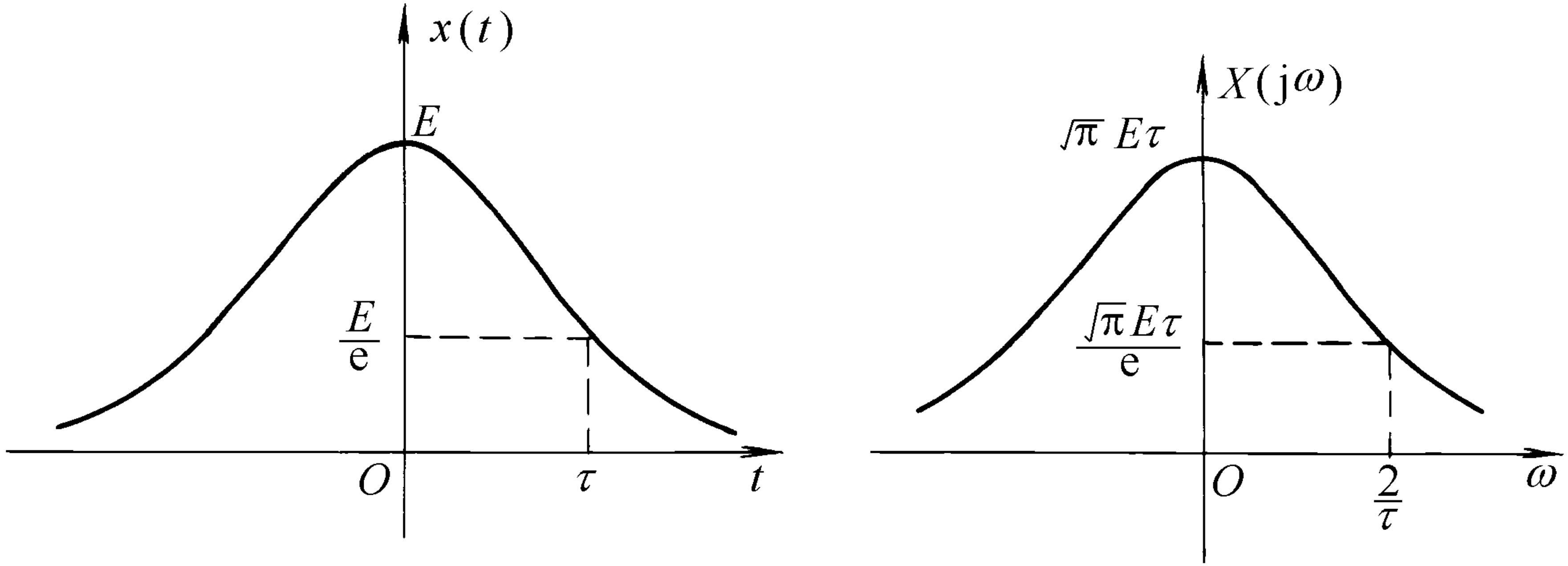
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} [\cos \omega t - j \sin \omega t] \cdot dt$$

$$= 2E \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos \omega t \cdot dt$$

积分后得

$$E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \xleftrightarrow{F} \sqrt{\pi} E \tau \cdot e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$$

3.3.3 典型连续时间信号的傅里叶变换对



$$Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \xleftrightarrow{F} \sqrt{\pi}E\tau \cdot e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$$

MATLAB: 计算信号的傅里叶变换

```
%程序 signal.m：定义求傅里叶变换的被积函数： y=x(t).*exp(-j*w*t)
function y=signal(t,w,T)      %[-T,T]为信号时宽，t 为时间变量，w 为频域变量
x=(t>=0).*1.0;                %[0,T]方波
                              %对称三角形可定义为：x=(abs(t)<=T).*(1-abs(t));
                              %对称斜波可定义为：x=(abs(t)<=T).*t;
                              %斜波可定义为：x=(t>=0).*t;
                              %对称方波可定义为：x=(abs(t)<=T).*1.0;
y=x.*exp(-j*w*t);
```

MATLAB: 计算信号的傅里叶变换

```
%程序 spectrum.m：求信号的傅里叶变换
T=1;   %设置信号时宽
w=linspace(-10*pi,10*pi,1024);%设置频域变量取值范围
N=length(w);F=zeros(1,N);
for k=1:N
      F(k)=quadl(@signal,-T,T,[],[],w(k),T);
end
A=abs(F);%计算傅立叶变换的幅值
subplot(3,1,1);plot(w,A);ylabel('幅频特性');
axis([w(1) w(N)   min(A)-0.05 max(real(A))+0.05]);
subplot(3,1,2);plot(w,real(F));ylabel('实部');
axis([w(1) w(N)   min(real(F))-0.05 max(real(F))+0.05 ]);
subplot(3,1,3);plot(w,imag(F));xlabel('\omega');ylabel('虚部）');
axis([w(1) w(N)   min(imag(F))-0.05 max(imag(F))+0.05 ]);
```

MATLAB: 计算信号的傅里叶变换

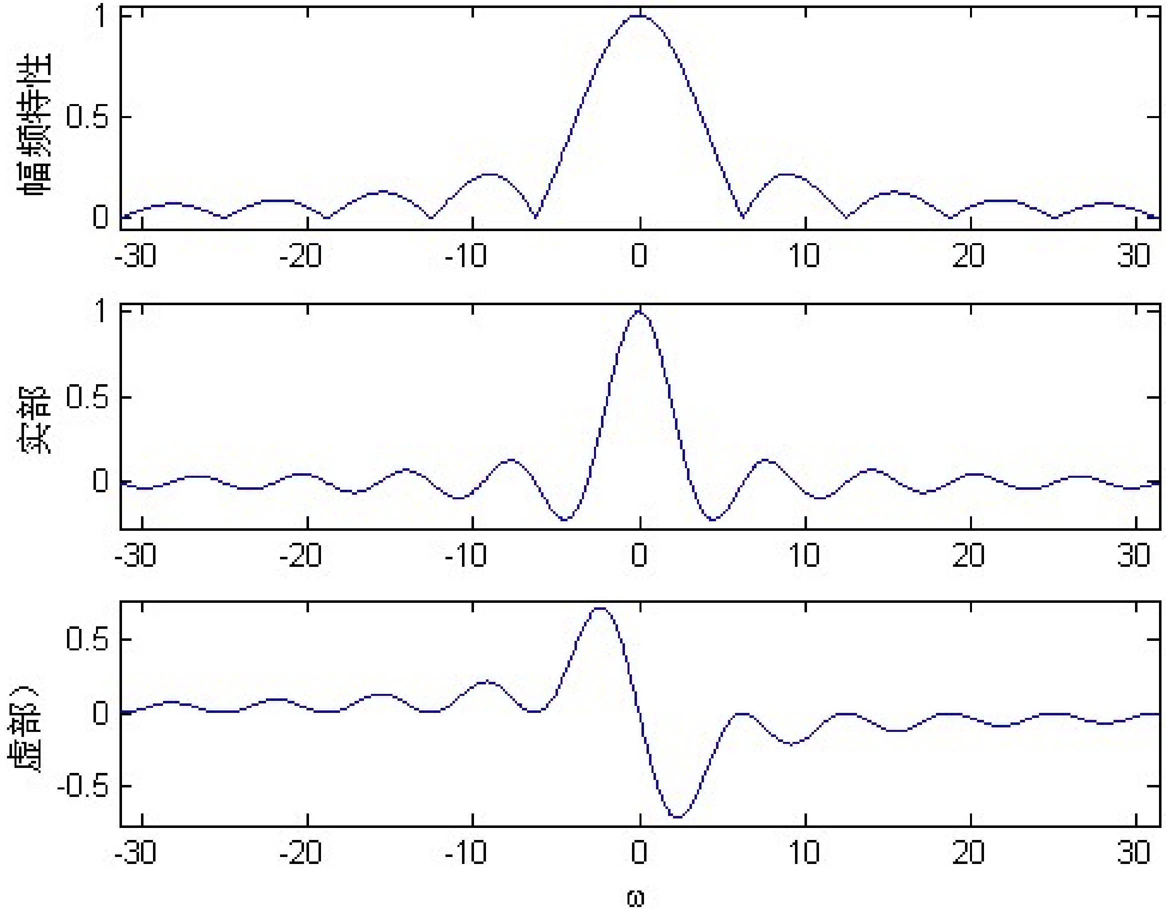


图 3-17 方波的频谱

§ 3.0 引言

§ 3.1 连续时间LTI系统的特征函数

§ 3.2 连续时间傅里叶级数

§ 3.3 连续时间傅里叶变换

§ 3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

§ 3.5 连续时间傅里叶变换的性质

§ 3.6 连续时间LTI系统的频域分析

3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

- 周期信号能够表示成傅里叶级数形式的复指数信号的表示式，因此，周期信号存在着某种形式的傅里叶变换——用冲激串信号来表示，并使傅里叶反变换收敛。

考虑一个信号 $x(t)$，其傅里叶变换为 $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

应用反变换公式得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t} \cdot d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

即 $$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

如某一周期信号的傅里叶级数为

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\ , \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

可得周期信号$x(t)$的傅里叶变换为

$$x(t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)=X(j\omega)$$

其傅里叶反变换: $x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)\Big)e^{j\omega t}\cdot dt$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)e^{j\omega t}\cdot d\omega\Big)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

周期信号反变换，就是其傅里叶级数。

例3.2

【例3.2】考虑图3. 18的周期方波，其傅里叶级数系数为

$$a_k=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}\ ,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

因此，该信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 是

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k}\cdot\delta(\omega-k\omega_0)$$

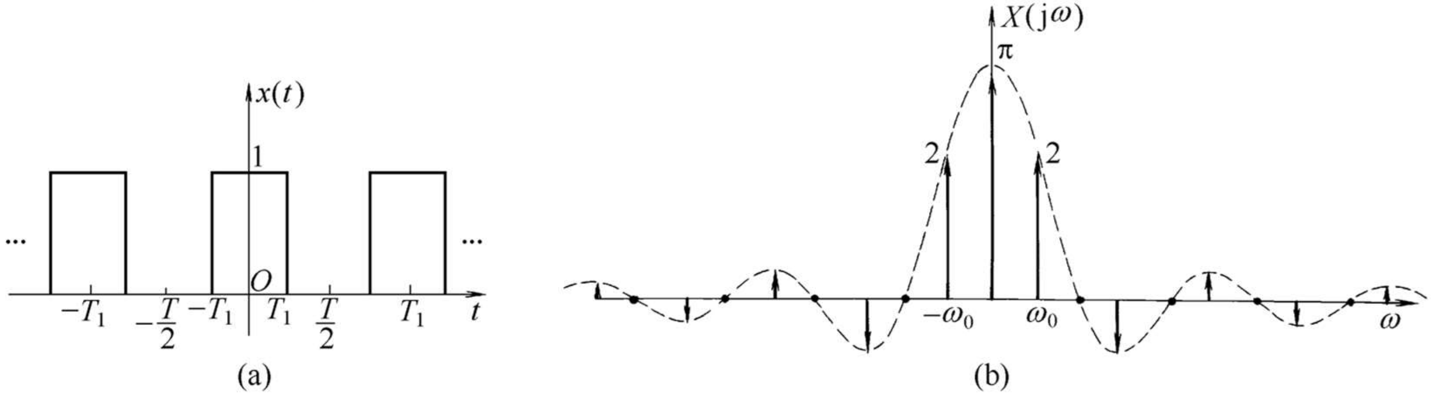


图3-18 周期对称方波的傅里叶变换 (T=4T$_1$)

例3.3

【例3.3】 正弦和余弦信号的频谱

余弦信号 $x(t)=\cos\omega_0 t$

正弦信号 $x(t)=\sin\omega_0 t$

展开为傅里叶级数形式

$$x(t)=\cos\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

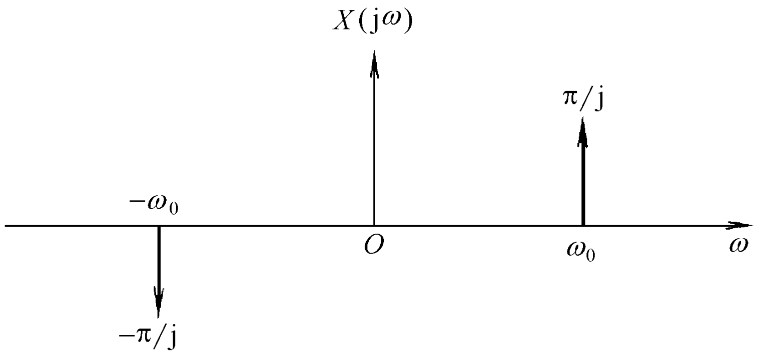
$$x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

因此,有

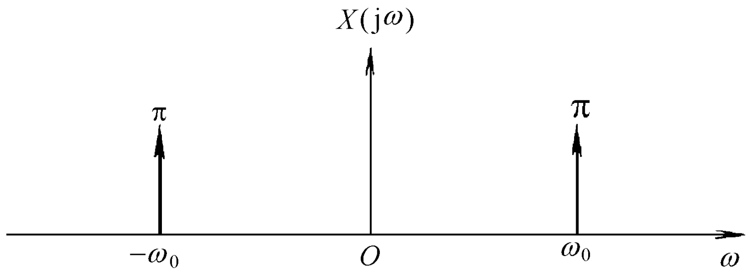
$$\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

$$\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0))$$

例3.3



(a) $x(t)=\sin\omega_0 t$



(b) $x(t)=\cos\omega_0 t$

图3-19 正弦和余弦信号的频谱

例3.4

【例3.4】 周期冲激串

周期冲激串定义为 $\delta_T(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$

该信号的傅里叶级数系数

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\cdot dt=\frac{1}{T}\text{，}\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

因此，可得冲激串的傅里叶变换。

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}k)$$

$$=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$$

例3.4

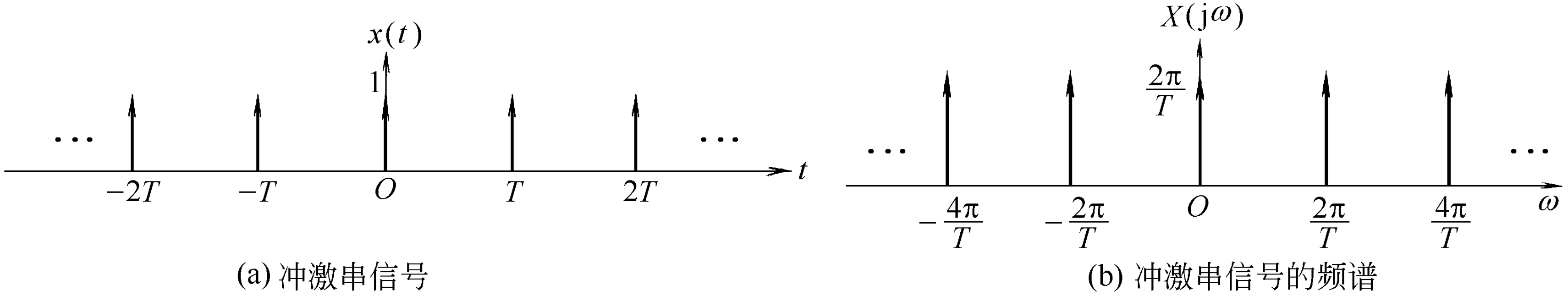


图3-20 冲激串频谱

§ 3.0 引言

§ 3.1 连续时间LTI系统的特征函数

§ 3.2 连续时间傅里叶级数

§ 3.3 连续时间傅里叶变换

§ 3.4 连续时间周期信号的傅里叶变换

§ 3.5 连续时间傅里叶变换的性质

§ 3.6 连续时间LTI系统的频域分析

3.5.1 线性性质

若 $$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

和 $$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

则 $$ax_1(t)+bx_2(t) \xleftrightarrow{F} aX_1(j\omega)+bX_2(j\omega)$$

其中a、b为任意常数。

3.5.2 时移性质

若 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则 $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

根据傅里叶反变换，有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

在上式中以 $t-t_0$ 取代 t ，可得

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)} \cdot d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j\omega t_0} X(j\omega)) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

3.5.2 时移性质

显然，上式是$x(t-t_0)$的傅里叶反变换式，所以得

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

将信号的频谱用极坐标形式表示时

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

那么

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} |X(j\omega)| e^{j[\theta(\omega)-\omega t_0]}$$

对于傅里叶级数，有：

若 $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

则 $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j(\frac{2\pi}{T_0})kt_0} \cdot a_k$

例3.5

【例3.5】 信号 $x(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$ 的频谱

将信号 $x(t)$ 改写为

$$x(t)=\cos\omega_0(t+\theta/\omega_0)=\cos\omega_0(t+t_0)\ ,\quad t_0=\theta/\omega_0$$

已知 $\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$

根据延时性质，有

$$\cos\omega_0(t+t_0) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} e^{j\omega t_0}\cdot\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\pi\left[e^{j\omega_0 t_0}\cdot\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\omega_0 t_0}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\pi\left[e^{j\theta}\cdot\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\theta}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

3.5.3 频移特性

若 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则 $x(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$

利用傅里叶变换公式，有

$$[x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j(\omega-\omega_0)t}\cdot dt$$

所以 $x(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$

同理 $x(t)\cdot e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X\big(j(\omega+\omega_0)\big)$

3.5.3 频移特性

如 $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{F}} X(j\omega)$$

那么，可以导出：

$$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\text{F}} \frac{1}{2}\left[X\left(j(\omega-\omega_0)\right) + X\left(j(\omega+\omega_0)\right)\right]$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{\text{F}} \frac{j}{2}\left[X\left(j(\omega+\omega_0)\right) - X\left(j(\omega-\omega_0)\right)\right]$$

该性质也适用于傅里叶级数。

3.5.4 共轭及共轭对称性

若 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

则 $x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

因为 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$

$$X^*(j\omega)=[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\cdot dt]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\cdot dt$$

以 $-\omega$ 替代 ω ，得 $X^*(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\cdot dt$

若$x(t)$为实数，即有 $x(t)=x^*(t)$

那么$X(j\omega)$ 就具有共轭对称性，即

$$X(j\omega)=X^*(-j\omega)\text{，}x(t)\text{为实数}$$

3.5.4 共轭及共轭对称性

1. $x(t)$ 为实信号

若将$X(j\omega)$用直角坐标表为

$$X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

若 $x(t)$为实数，则有

$$\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$$

$$\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$$

即实数信号傅里叶变换的实部是偶函数，虚部是奇函数。

类似地，若 $X(j\omega)$ 用极坐标表示为 $X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

信号的幅度谱$|X(j\omega)|$是偶函数，相位谱 $\theta(\omega)$是奇函数。

3.5.4 共轭及共轭对称性

2. $x(t)$ 为实且偶函数

根据信号傅里叶变换，可以写出 $X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\omega t}\cdot dt$

用 $\tau=-t$ 替换，可得 $X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(-\tau)e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau$

因为 $x(-\tau)=x(\tau)$，所以有 $X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=X(j\omega)$

又由 $X^{*}(j\omega)=X(-j\omega)$ 可得 $X(j\omega)=X^{*}(-j\omega)$

故有 $X^{*}(j\omega)=X(j\omega)$，所以 $X(j\omega)$ 只能是实值函数，

因此，当 $x(t)$ 为实且偶函数时，其频谱为实值偶函数。

3.5.4 共轭及共轭对称性

3. $x(t)$ 为实且奇函数

同样可以证明，此时，$x(t)$的频谱是纯虚且为奇函数。

4. 若一个实函数用其偶部和奇部表示，即

$$x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

其中 $$x_0(t) = \theta_d\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

$$x_e(t) = \varepsilon_v\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

根据傅里叶变换的线性，有

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\} = \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

3.5.4 共轭及共轭对称性

根据上面的讨论，$F\{x_e(t)\}$ 是一实值偶函数，$F\{x_o(t)\}$是一个纯虚数且为奇函数，于是可得出以下结论。

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X(j\omega) = \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

其中，$x(t)$ 为实值函数

$$\varepsilon_v\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$\theta_d\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathrm{F}} j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

上述结果，完全适用于周期信号的傅里叶级数。

3.5.5 微分与积分

若 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(j\omega)$ ，可得

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t t}\cdot dt$$

也就是 $$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

将微分性质进一步推广，有 $$\frac{d^n x(t)}{dt^n}\xleftrightarrow{F}(j\omega)^n X(j\omega)$$

时域内的积分有

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

例3.6

【例3.6】 求单位阶跃信号 $x(t)=u(t)$ 的傅里叶变换。

我们已得到 $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$

因为 $u(t)=\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\cdot dt$

利用时域积分特性，有 $u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

若 $j\omega Y(j\omega)=X(j\omega)$

则 $Y(j\omega)=\dfrac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$

例3.7

【例3.7】求三角脉冲的傅里叶变换。

三角脉冲信号的表达式 $x(t)=\begin{cases} E(1-\dfrac{2}{\tau}|t|), & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

将 $x(t)$ 取一阶和二阶导数，得

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\frac{\tau}{2})+\delta(t-\frac{\tau}{2})-2\delta(t)\right]$$

令 $X(j\omega)$、 $X_1(j\omega)$ 和 $X_2(j\omega)$分别表示 $x(t)$及其一、二阶导数的傅里叶变换，则它们有以下关系

$$X_1(j\omega)=j\omega X(j\omega) \qquad X_2(j\omega)=(j\omega)^2X(j\omega)$$

例3.7

$$X_2(j\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}=\frac{2E}{\tau}(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-2)$$

$$=\frac{2E}{\tau}[2\cos(\omega\frac{\tau}{2})-2]$$

$$=-\frac{8E}{\tau}\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

因此，有 $(j\omega^2)X(j\omega)=-\frac{8E}{\tau}\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$

所以 $(j\omega)X(j\omega)=-\frac{8E}{\tau}\frac{Sin^2(\frac{\omega\tau}{4})}{j\omega}+\pi X_2(0)\delta(\omega)=-\frac{8E}{\tau}\frac{Sin^2(\frac{\omega\tau}{4})}{j\omega}=X_1(j\omega)$

故可得 $X(j\omega)=\frac{E\cdot\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$

例3.7

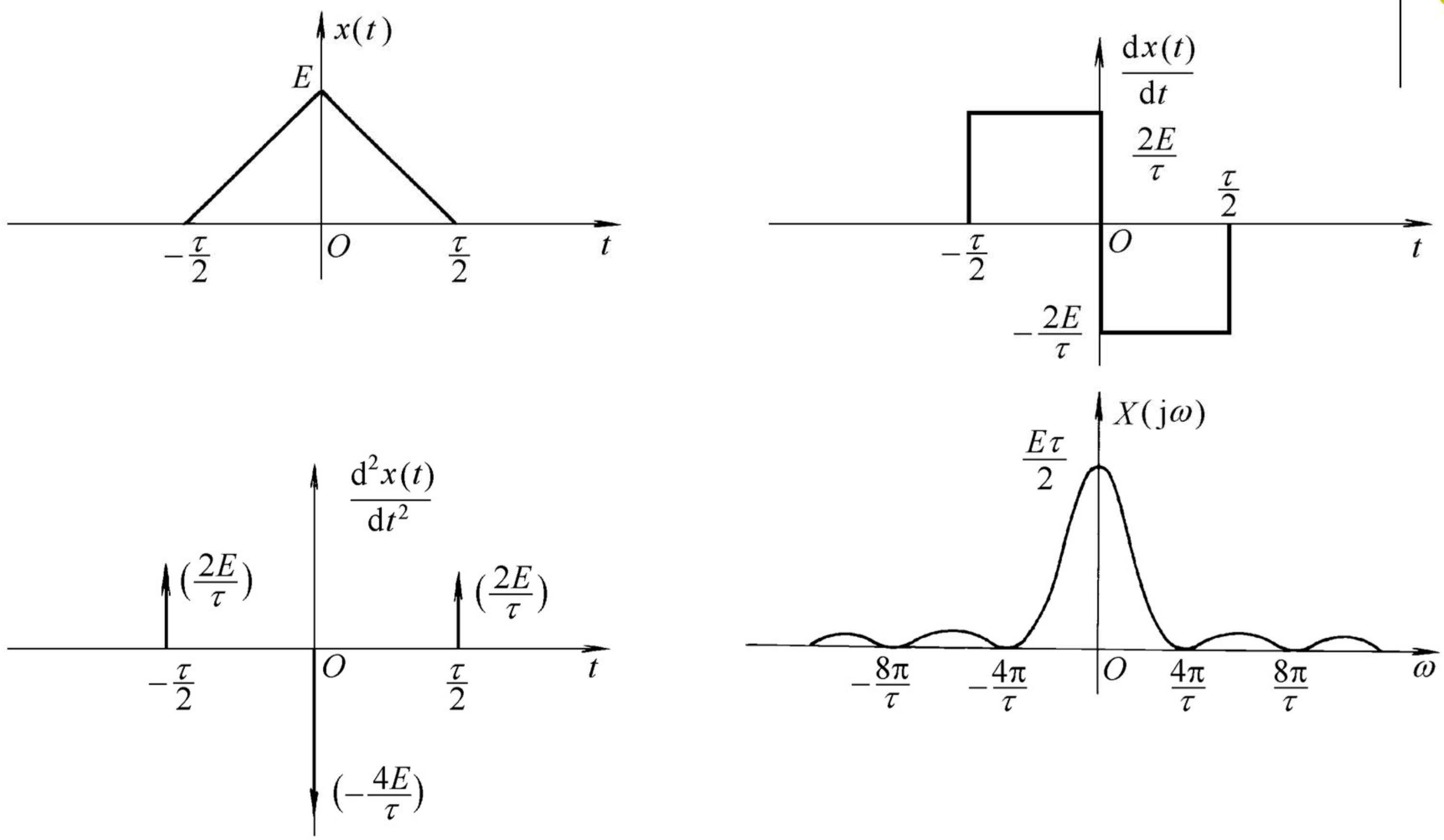


图3-21 三角脉冲信号的波形和频谱

例3.8

【例3.8】 求符号函数sgn(t) 的傅里叶变换

$$x(t)=\text{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$

单位阶跃信号可以表示为 $u(t)=\varepsilon_v\{u(t)\}+O_d\{u(t)\}$

其中 $\varepsilon_v\{u(t)\}=\dfrac{u(t)+u(-t)}{2}=\dfrac{1}{2}$

$$O_d\{u(t)\}=\frac{u(t)-u(-t)}{2}$$

即 $O_d\{u(t)\}=\dfrac{1}{2}\text{sgn}(t)$

例3.8

已知

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

根据实信号的共轭对称性，$u(t)$奇部的傅里叶变换应为其频谱的虚部，即

$$O_d\{u(t)\} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}$$

因此有

$$\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} \frac{2}{j\omega}$$

例3.8

将符号函数的频谱表示为极坐标形式，有

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

$$X(j\omega)=\frac{2}{|\omega|}$$

$$\theta(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & \omega>0\\ \dfrac{\pi}{2}, & \omega<0\end{cases}$$

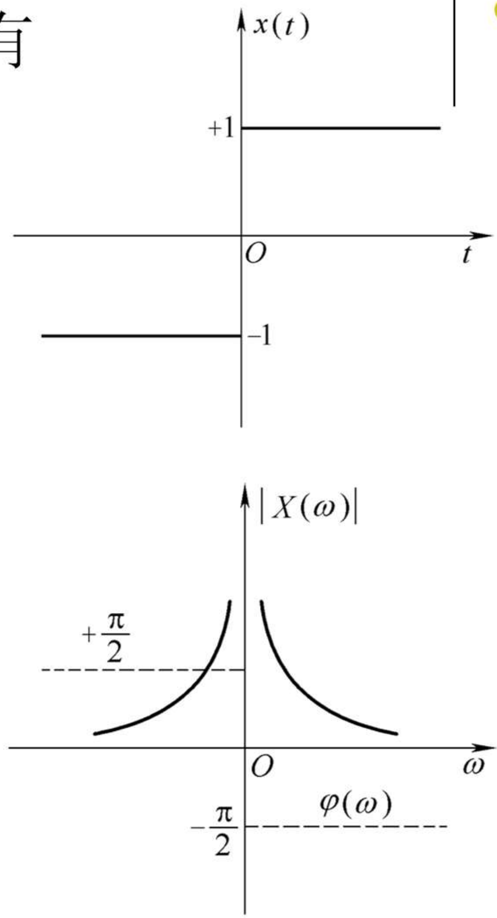


图3-22 符号函数波形和频谱

3.5.6 时间与频率的尺度变换

若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} X(j\omega)$

则 $x(at) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{j\omega}{a})$ ，或 $\dfrac{1}{|a|}x(\dfrac{t}{a}) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} X(ja\omega)$

式中a是一个实常数。

该性质可以直接利用傅里叶变换公式得到，即

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} \cdot dt$$

置换$\tau = at$，可得

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)} \cdot d\tau, & a > 0 \\ -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

3.5.6 时间与频率的尺度变换

上式中，由于 $a<0$ 时，$-\frac{1}{a}>0$，因此，上式可化简为

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\frac{\omega}{a})} \cdot d\tau = \frac{1}{|a|}X(j\frac{\omega}{a})$$

一个特例：如$a=-1$，则有

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

例3.9

【例3.9】 证明 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$，$a$ 为实数

证明：因为 $\delta(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}1$

所以，根据尺寸变换性质，有

$$\delta(at)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{|a|}\qquad |a|\delta(at)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}1$$

因此，可得 $|a|\delta(at)=\delta(t)$

即 $$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

当 $a=-1$ 时，根据以上所证明的结果，有 $\delta(-t)=\delta(t)$

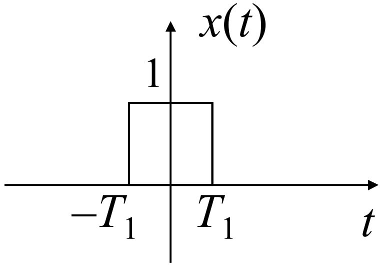
也就是说 $\delta(t)$ 是偶函数。

3.5.7 对偶性

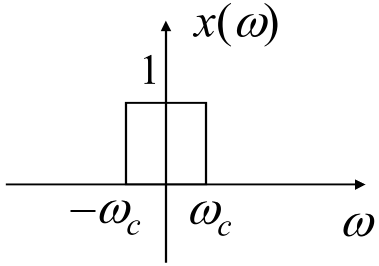
比较傅里叶变换中的正变换和反变换关系

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{和} \quad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\cdot d\omega$$

1.



$$\xleftrightarrow{F} 2T_1\frac{\sin\omega T_1}{\omega T_1}=2T_1 sa(\omega T_1)$$



和 $$\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}=\frac{\omega_c}{\pi}sa(\omega_c t)\xleftrightarrow{F}$$

2. $\delta(t)\xleftrightarrow{F}1$ 和 $1\xleftrightarrow{F}2\pi\delta(\omega)$

3.5.7 对偶性

对偶性：

如果 $x(t) \xleftrightarrow{\text{F}} X(j\omega) = X(\omega)$

则 $X(t) \xleftrightarrow{\text{F}} 2\pi x(-\omega)$

3.5.7 对偶性

考查时域微分性质： $\dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega) = j\omega X(\omega)$

我们可以证明它存在着对偶性质，即频域微分性质

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

证明：

因为 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X(\omega)$

根据对偶性，则有 $X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi\, x(-\omega)$

根据微分性质，有 $\dfrac{dX(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} 2\pi \cdot j\omega \cdot x(-\omega)$

3.5.7 对偶性

再次运用对偶性，有 $2\pi jtx(-t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}2\pi\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=-\omega}$

上式改写为 $-j(-t)x(-t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=-\omega}$

利用尺度变换性质（取 $a=-1$，对左边时域信号进行反转操作），则有

$$-jtx(t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}\frac{dX(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=-(-\omega)}=\frac{dX(\omega)}{d\omega}=\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

用同样方法，可以从时域积分性质推出频域积分性质

$$-\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}\int_{-\infty}^{\omega}X(j\tau)d\tau$$

例3.10

【例3.10】求下面信号的傅里叶变换

$$x(t)=\frac{2}{t^2+1}$$

我们已知双边指数信号的傅里叶变换为

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

取a=1，则有

$$\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{\mathrm{F}} 2\pi e^{-|-\omega|}=2\pi e^{-|\omega|}$$

例3.11

【例3.11】求所给频谱的反变换 $X(j\omega)=\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

已知指数信号傅里叶变换对 $e^{-at}\cdot u(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{a+j\omega}$

利用频域微分性质，则有

$$-jte^{-at}\cdot u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{d\dfrac{1}{a+j\omega}}{d\omega}=\frac{-j}{(a+j\omega)^2}$$

所以得：$te^{-at}u(t)\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

因此，$X(j\omega)$的反变换为 $te^{-at}\cdot u(t)$ 。

例3.11

作为例3.11的推广，可得下面更一般关系

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

3.5.8 帕斯瓦尔定理

帕斯瓦尔定理：

$$x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega$$

证明如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega\right] \cdot dt$$

3.5.8 帕斯瓦尔定理

变换右边的积分次序有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\cdot dt\right]\cdot d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)X(j\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\cdot d\omega$$

周期信号的帕斯瓦尔定理为

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\ dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$$

式中，T_0是信号的基波周期，a_k是其傅里叶级数系数。

MATLAB: 指数信号的能量密度谱

```
% 利用 Matlab 符号处理功能，求指数信号的能量密度谱
x=sym('(exp(-1*t)-2*exp(-2*t))*Heaviside(t)');  % 定义指数信号
X=fourier(x);                                    % 求傅立叶变换
X_conj=subs(X,'i','-i');                         % 取傅立叶变换共轭
G=X*X_conj;                                      % 计算能量密度谱
ezplot(G);
```

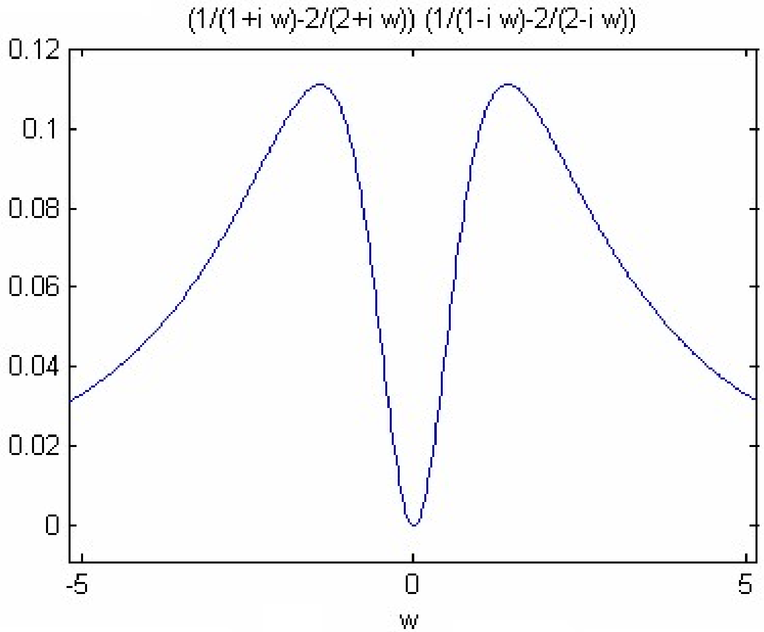


图3-23 两相加指数信号的能量密度谱

3.5.9 时域卷积性质

时域卷积性质：

若 $x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$ 和 $h(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} H(j\omega)$

则 $x(t) * h(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)H(j\omega)$

证明：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} \cdot d\omega = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} \cdot dt$$

3.5.9 时域卷积性质

利用LTI系统的叠加性，系统对 $x(t)$ 的响应可表示为

$$x(t)=\lim_{\omega_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \to \lim_{\omega_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

因此，该系统对 $x(t)$ 的响应就可表示为

$$y(t)=\lim_{\omega_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\cdot\omega_0$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}\cdot d\omega$$

该式为$y(t)$的傅里叶反变换，因此有

$$y(t)=x(t)*h(t)\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)H(j\omega)$$

3.5.9 时域卷积性质

由于两周期信号的卷积是无穷大的，因此，傅里叶级数的卷积性质在形式上稍有不同。

设两周期都T的周期信号$x(t)$和 $y(t)$,有：

若 $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ 和 $y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

则 $\int_T x(\tau)y(t-\tau)\cdot d\tau \overset{FS}{\longleftrightarrow} Ta_k b_k$

3.5.10 调制性质（频域卷积）

调制性质：

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$　　$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$

则 $x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

3.5.10 调制性质（频域卷积）

调制性质表明：时域上的相乘对应于频域上的卷积。

可以利用傅里叶变换的对偶性，直接从卷积性质推出调制性质。

根据对偶性，有 $X_1(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_1(-\omega)$ $X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_2(-\omega)$

利用卷积性质，可得到 $X_1(jt) * X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 4\pi^2 x_1(-\omega) x_2(-\omega)$

再次利用对偶性，有 $4\pi^2 x_1(-t) x_2(-t) \xleftrightarrow{F} 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$

由于$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$，从上式我们可得到

$$x_1(t) x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

3.5.10 调制性质（频域卷积）

将该性质直接用于周期信号的傅里叶变换，可得傅里叶级数的调制特性。

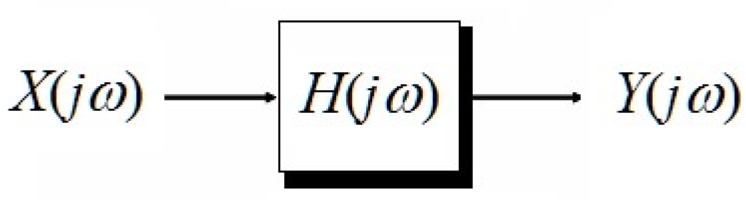
若 $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ 和 $y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

则 $x(t) \cdot y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$

式中$x(t)$和$y(t)$为同一周期。如将它们的系数 a_k 和 b_k 看作是离散信号，则 $\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$ 就是 a_k 和 b_k 的卷积和。

3.6.1 连续时间LTI系统的频率响应

根据卷积性质，一个冲激响应为$h(t)$的LTI系统可表示为



其中$H(j\omega)$:

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$$

称为LTI系统频率响应，显然它也是特征函数$e^{j\omega t}$的特征值。

根据卷积性质，输出信号的频谱$Y(j\omega)$满足以下关系

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

3.6.1 连续时间LTI系统的频率响应

LTI系统的频率响应另一种定义可表示为

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

在LTI系统分析中，与$h(t)$ 一样，频率响应$H(j\omega)$可以完全表征它所对应的LTI系统，LTI系统的很多性质也能够很方便地借助于$H(j\omega)$来反映。

3.6.1 连续时间LTI系统的频率响应

级联系统总的频率响应为各单个子系统频率响应的乘积，总的频率响应与各子系统的级联顺序无关。

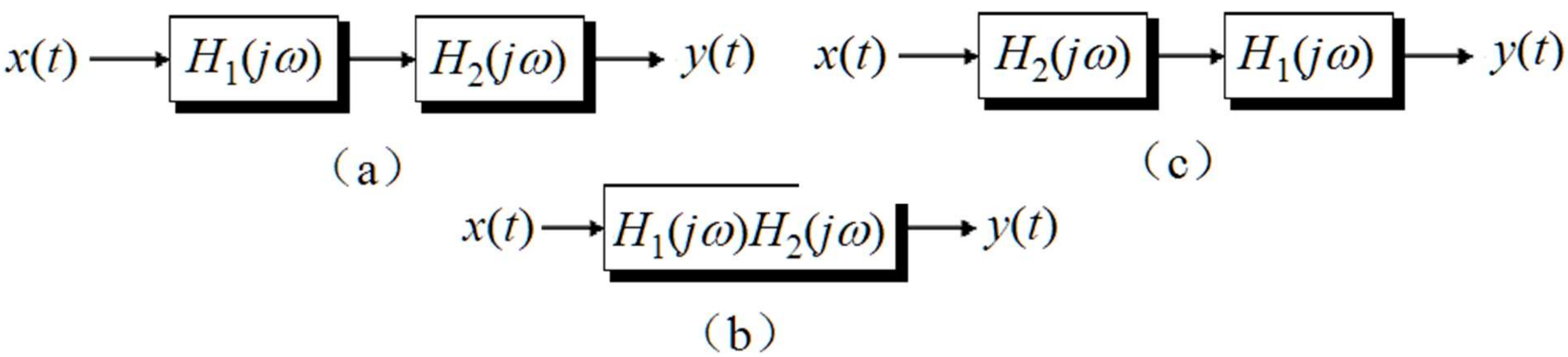


图3-21 三种相等的系统

$$W(j\omega)=X(j\omega)H_1(j\omega)$$

$$Y(j\omega)=W(j\omega)H_2(j\omega)$$

$$=X(j\omega)\big(H_1(j\omega)H_2(j\omega)\big)=\big(X(j\omega)H_2(j\omega)\big)H_1(j\omega)$$

3.6.1 连续时间LTI系统的频率响应

- 通常将系统频率响应表示为极坐标形式：

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

其中$|H(j\omega)|$称为系统的幅频特性，它表征了系统对输入信号的放大特性；$\theta(\omega)$称为系统的相频特性，它表征了系统对输入信号的延时特性。

- 利用傅里叶变换方法分析LTI系统时，仅局限于系统的冲激响应存在傅里叶变换的情况：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<0$$

一般说来，LTI系统的频域分析法适用于稳定系统。已知LTI系统的频率响应，可以借助卷积性质，在频域上求解对任何输入信号的零状态响应。

例3.12

【例3.12】 试求微分器的频率响应 $H(j\omega)$

描述微分器的方程为 $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

根据微分性质，有 $Y(j\omega)=j\omega X(j\omega)$

微分器的频率响应：$H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=j\omega$

微分器的冲激响应是 $h(t)=\delta'(t)$

例3.13

【例3.13】 试求积分器的频率响应$H(j\omega)$

积分器由下列方程给出

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\cdot d\tau$$

$$y(t)=x(t)*u(t)$$

积分器的冲激响应 $h(t)=u(t)$

因此，积分器的频率响应就是

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

例3.14

【例3.14】考查一延时系统：

$$y(t)=x(t-t_0)\text{，}\quad t_0\text{为实常数}$$

若 $\quad x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)$

则 $\quad y(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

因此，延时器的频率响应：$H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=e^{-j\omega t_0}$

延时器的冲激响应为 $h(t)=\delta(t-t_0)$

例3.14

回音系统即为一延时系统。

发送信号：$x(t)$

接受到的回波信号：$y(t) = x(t) + a \cdot x(t - t_0)$

回音

MATLAB: 系统的频率响应

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}$$

```
% 有理函数频率响应的计算
w=linspace(-10,10,256);
b=[1 2];a=[1 4 3];
H=freqs(b,a,w);      % freqs()用于计算系统的频率响应
subplot(2,1,1);plot(w,abs(H));
ylabel('幅频|H(j\omega)|');
subplot(2,1,2);plot(w,angle(H));
xlabel('\omega(rad/s)');ylabel('相频 phi(j\omega)');
```

MATLAB: 系统的频率响应

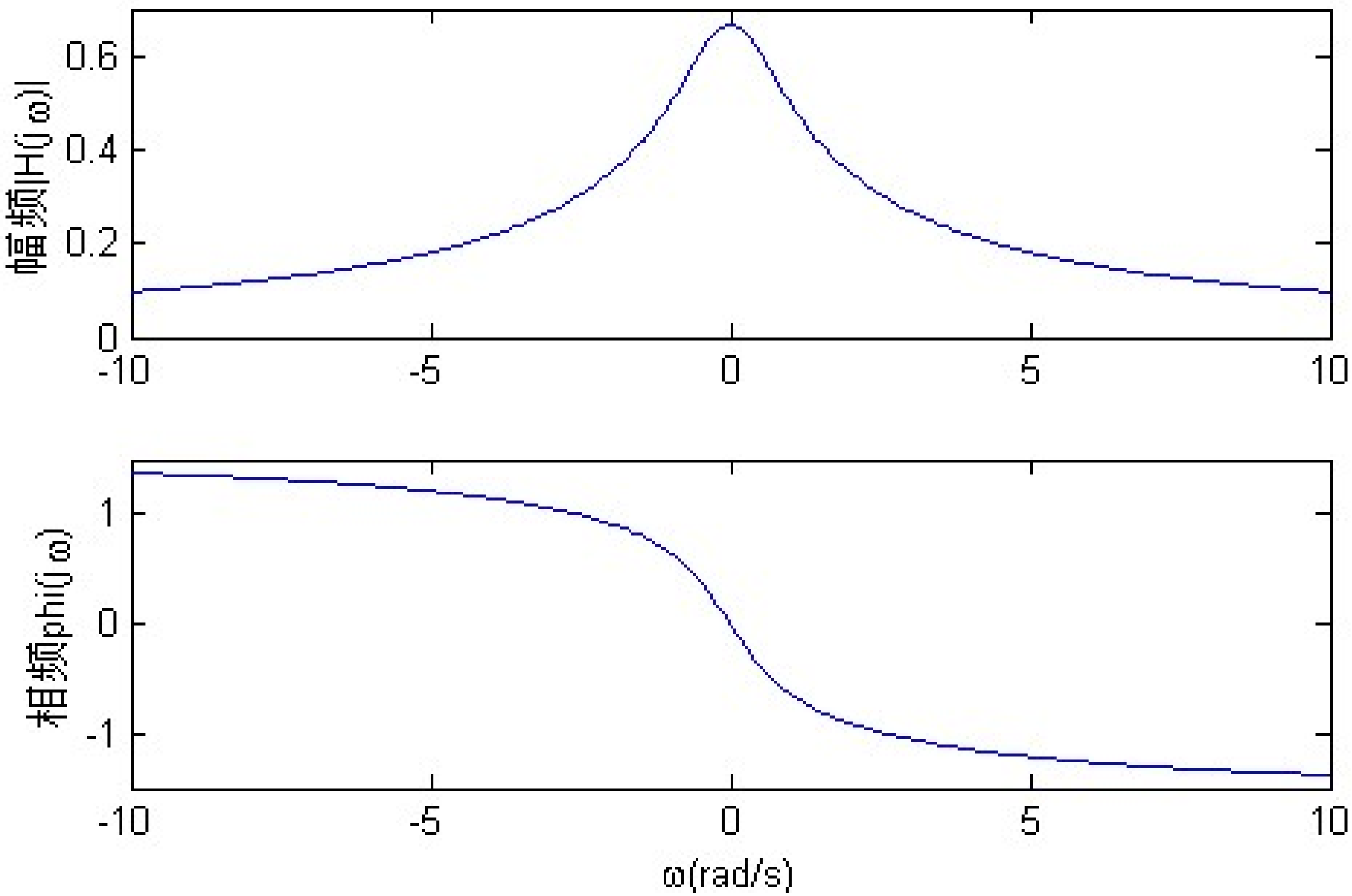


图3-25 系统频率响应的幅频特性和相频特性

3.6.2 零状态响应的频域求解

可以利用傅里叶变换的卷积性质求解LTI系统的零状态响应。

- **一般思路：**通过卷积性质求得输出信号的频谱，然后对该频谱作反变换求得其时域表达式。

例3.15

【例3.15】 某一因果LTI系统的冲激响应为

$$h(t)=e^{-at}u(t) \qquad a>0$$

该系统的输入为 $x(t)=e^{-bt}u(t) \qquad b>0$

可求得系统的频率响应为 $H(j\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$

和输入信号的傅里叶变换 $X(j\omega)=\dfrac{1}{b+j\omega}$

由卷积性质可得输出信号 $y(t)$（零状态响应）的傅里叶变换为

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}$$

例3.15

（1）$a \neq b$ 时，$Y(j\omega)$ 的部分分式展开为（将 $j\omega$ 看作为一变量）

$$Y(j\omega)=\frac{A}{a+j\omega}+\frac{B}{b+j\omega}$$

$$A=Y(j\omega)(a+j\omega)\big|_{j\omega=-a}=\frac{1}{b-a}$$

$$B=Y(j\omega)(b+j\omega)\big|_{j\omega=-b}=\frac{-1}{b-a}$$

因此

$$Y(j\omega)=\frac{1}{b-a}[\frac{1}{a+j\omega}-\frac{1}{b+j\omega}]$$

$$y(t)=\frac{1}{b-a}[e^{-at}-e^{-bt}]u(t)$$

例3.15

（2）$a=b$时

$$Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

可得$y(t)$为 $y(t)=te^{-at}\cdot u(t)$

例3.16

【例3.16】已知某一因果LTI系统对输入信号$x(t)=e^{-2t}u(t)$的零状响应为

$$y(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})u(t)$$

问该系统的频率响应$H(j\omega)$和$h(t)$。

$$X(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega})=\frac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

频率响应$H(j\omega)$为

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2+j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

例3.16

将上式展开为部分分式

$$H(j\omega)=\frac{A}{1+j\omega}+\frac{B}{3+j\omega}$$

$$A=H(j\omega)(1+j\omega)\big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{2}$$

$$B=H(j\omega)(3+j\omega)\big|_{j\omega=-3}=\frac{1}{2}$$

因此，系统的冲激响应为 $h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$

3.6.3 用线性常系数微分方程表征的LTI系统

线性常系数微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

两边求傅里叶变换

$$\mathrm{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathrm{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

根据傅里叶变换线性性质，上式变为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathrm{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

3.6.3 用线性常系数微分方程表征的LTI系统

由微分性质 $$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^k X(j\omega)$$

可得 $$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

即 $$Y(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\right] = X(j\omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\right]$$

因此，系统的频率响应为 $$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

例3.17

【例3.17】 某一因果LTI系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

可直接写出该系统的频率响应

$$H(j\omega)=\frac{2j\omega+1}{(j\omega)^2+3j\omega+2}$$

将$H(j\omega)$展开为部分分式：

$$H(j\omega)=\frac{2j\omega+1}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=\frac{A}{1+j\omega}+\frac{B}{2+j\omega}$$

例3.17

解得

$$A = H(j\omega)\cdot(1+j\omega)\big|_{j\omega=-1} = -1$$

$$B = H(j\omega)(2+j\omega)\big|_{j\omega=-2} = 3$$

求得冲激响应为 $h(t) = (e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$

例3.18

【例3.18】 已知某一因果LTI系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

和输入信号$x(t)=e^{-t}u(t)$，且系统初始静止。

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3} \qquad X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

输出信号$y(t)$的频谱为

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\left[\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}\right]\left[\frac{1}{j\omega+1}\right]$$

$$=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

例3.18

其部分分式展开式为

$$Y(j\omega)=\frac{A_{11}}{j\omega+1}+\frac{A_{12}}{(j\omega+1)^2}+\frac{A_{21}}{j\omega+3}$$

$$A_{11}=\frac{d}{d(j\omega)}\left(Y(j\omega)(j\omega+1)^2\right)\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{4}$$

$$A_{12}=Y(j\omega)(j\omega+1)^2\Big|_{j\omega=-1}=\frac{1}{2}$$

$$A_{21}=Y(j\omega)(j\omega+3)\Big|_{j\omega=-3}=-\frac{1}{4}$$

例3.18

于是

$$Y(j\omega)=\frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{j\omega+3}$$

上式的反变换为

$$y(t)=\left[\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$

3.6.4 周期信号激励下的系统响应

假设某稳定的LTI系统的频率响应为$H(j\omega)$。
输入信号$x(t)$为一周期信号，其傅里叶级数展开式为

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

系统对该周期信号的响应为

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

输出$y(t)$也为相同的基波周期的周期信号，其傅里叶级数系数

$$b_k=a_k H(jk\omega_0)$$

3.6.4 周期信号激励下的系统响应

在工程中应用较多的是三角函数形式的傅里叶级数形式

$$x(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \cos k\omega_0 t + C_k \sin k\omega_0 t\right)$$

只要求得系统对 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 的响应特性，就可求得系统对一般周期信号的响应。

3.6.4 周期信号激励下的系统响应

- LTI系统对$\cos\omega_0 t$的响应

假设LTI系统的冲激响应 $h(t)$是实函数。根据共轭对称性，有

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} \qquad |H(-j\omega)|=|H(j\omega)| \qquad \theta(\omega)=-\theta(-\omega)$$

因为 $$x(t)=\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi\big(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big)$$

因此，输出 $y(t)$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned}
Y(j\omega)&=H(j\omega)\cdot\pi\big(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big)\\
&=\pi\big(H(j\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)+H(-j\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)\big)\\
&=\pi\big(|H(j\omega_0)|e^{j\theta(\omega_0)}\cdot\delta(\omega-\omega_0)+|H(-j\omega_0)|e^{j\theta(-\omega_0)}\cdot\delta(\omega+\omega_0)\big)\\
&=\pi|H(j\omega_0)|(e^{j\theta(\omega_0)}\cdot\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\theta(\omega_0)}\cdot\delta(\omega+\omega_0))
\end{aligned}$$

3.6.4 周期信号激励下的系统响应

上式的反变换为

$$y(t) = |H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta(\omega_0))$$

同理，对 $x(t) = \sin\omega_0 t$ 的响应是

$$y(t) = |H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \theta(\omega_0))$$

上述结果进一步推广为

$$A\cos(\omega_0 t + \theta_0) \to A|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta_0 + \theta(\omega_0))$$

$$A\sin(\omega_0 t + \theta_0) \to A|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \theta_0 + \theta(\omega_0))$$

3.6.4 周期信号激励下的系统响应

我们可求得，LTI系统对

$$x(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \cos k\omega_0 t + C_k \sin k\omega_0 t\right)$$

的响应为

$$y(t) = B_0\,|H(0)| + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[B_k\,|H(jk\omega_0)|\cos(k\omega_0 t + \theta(k\omega_0))$$
$$+ C_k\,|H(jk\omega_0)|\sin(k\omega_0 t) + \theta(k\omega_0)\Big]$$

$$= B_0\,|H(0)| + \sum_{k=1}^{\infty} D_k\,|H(jk\omega_0)|\cos(k\omega_0 t + \theta_k + \theta(k\omega_0))$$

3.6.5 电路系统的频域求解

在频域上定义复阻抗 $R(j\omega)=\dfrac{U(j\omega)}{I(j\omega)}$

电阻 $u_R(t)=Ri_R(t)\longleftrightarrow U_R(j\omega)=RI_R(j\omega)$

电容 $u_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(t)dt\longleftrightarrow U_C(j\omega)=\dfrac{1}{C}[\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]I_C(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega C}I_C(j\omega)$

电感 $u_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}\longleftrightarrow U_L(j\omega)=j\omega LI_L(j\omega)$

复阻抗分别为：

电阻 $R(j\omega)=R$　　电容 $R(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega C}$　　电感 $R(j\omega)=j\omega L$

例3.19

【例3.19】 如图所示的RC低通网络，$\frac{1}{RC}=2$，其输入端的信号为单位阶跃信号，$x(t)=u(t)$。用傅里叶分析法求该电路的输出信号$v_C(t)$。

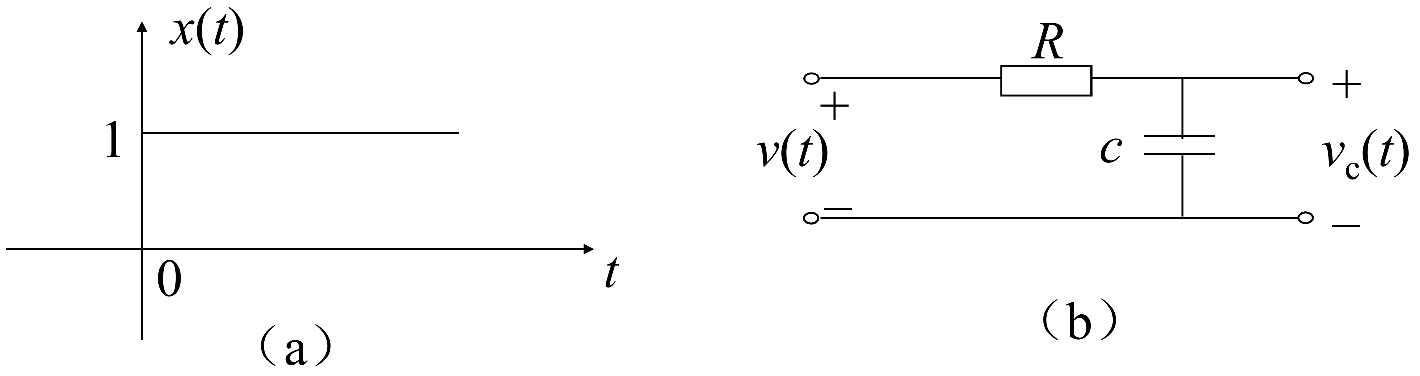


图3-26 例3-19的图

例3.19

如图所示，输出$v_C(t)$的傅里叶变换为

$$V_C(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R}X(j\omega)$$

所以，系统的频率响应$H(j\omega)$为

$$H(j\omega)=\frac{V_C(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R}=\frac{1}{1+j\omega CR}=\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}+j\omega}=\frac{2}{2+j\omega},\quad \frac{1}{RC}=2$$

例3.19

输入信号$x(t)$的傅里叶变换为

$$x(t)=u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

因此，可得

$$V_C(j\omega)=\frac{2}{2+j\omega}[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]=\frac{2}{(2+j\omega)j\omega}+\frac{2}{2+j\omega}\pi\delta(\omega)$$

$$=\frac{2}{(2+\mathrm{j}\omega)\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$=[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]-\frac{1}{2+j\omega}$$

例3.19

求上式的傅里叶反变换，可得

$$v_C(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$$

当输入信号$x(t)$为矩形脉冲时，由于输入信号可以表示为移位阶跃信号的线性组合，即

$$x(t) = E[u(t) - u(t - T)]$$

因此，根据LTI系统的叠加性和时不变性原理，可求得输出信号$y(t)$为：

$$y(t) = E(1 - e^{-2t})u(t) - E[1 - e^{-2(t-T)}]u(t - T)$$

MATLAB: 计算对矩形脉冲的响应

```
% 按式（3.143）计算 RC 低通网络对矩形脉冲响应的程序
T=3;                                                    %设置信号时宽
E=1.0;                                                  %设置信号幅度
t=linspace(-2,3*T,512);                                 %设置时域变量取值范围
x=E*0.5*((sign(t+eps)+1.)-(sign(t+eps-T)+1.0));        %[0,T]矩形脉冲
y1=E*(1.0-exp(-2*t)).*(0.5*(sign(t+eps)+1.0));
y2=E*(1.0-exp(-2*(t-T))).*(0.5*(sign(t-T+eps)+1.0));
y=y1-y2;                                                %按式（3.143）计算输出信号
subplot(1,2,1);plot(t,x);ylabel('x(t)');axis([-2 3*T -0.25 1.25]); xlabel('t');
subplot(1,2,2);plot(t,y);ylabel('y(t)');axis([-2 3*T -0.25 1.25]); xlabel('t');
```

MATLAB: 计算对矩形脉冲的响应

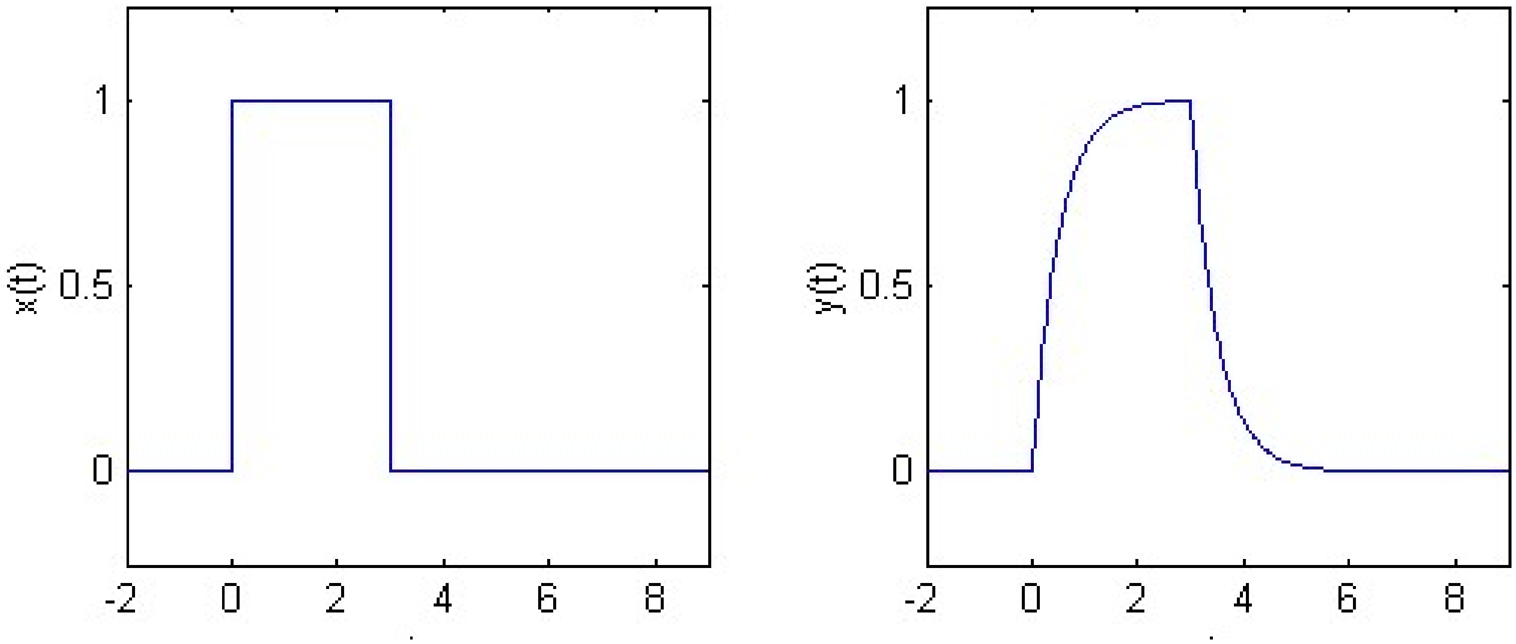


图3-27　RC低通网络对矩形脉冲的响应，E=1.0，T=3.0

3.6.6 信号的不失真传输

- 无失真传输：输出信号与输入信号相比，只是大小与相对时间轴的位置不同，而无波形上的变化。

- 无失真传输条件

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

式中K为增益常数，t_0为滞后时间。

傅里叶变换为：

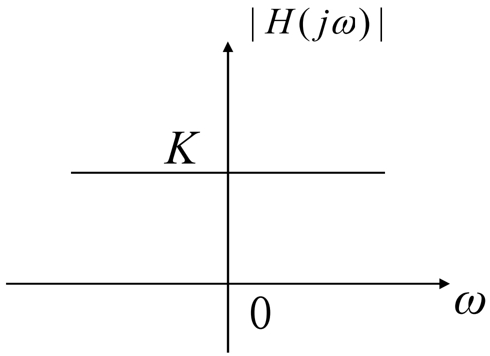
$$Y(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

3.6.6 信号的不失真传输

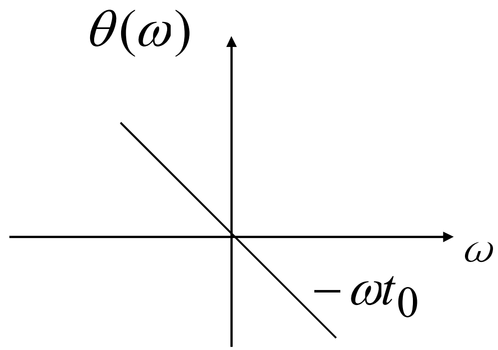
无失真系统的频率响应

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=Ke^{-j\omega t_0}=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

系统的幅频特性和相频特性分别为 $\begin{cases}|H(j\omega)|=K\\ \theta(\omega)=-\omega t_0\end{cases}$



（a）幅频特性



（b）相频特性

图3-28 无失真传输系统的频率响应特性

例3.20

【例3.20】 电路如图所示，为得到无失真传输，元件参数R_1、R_2、C_1、C_2应满足什么关系。

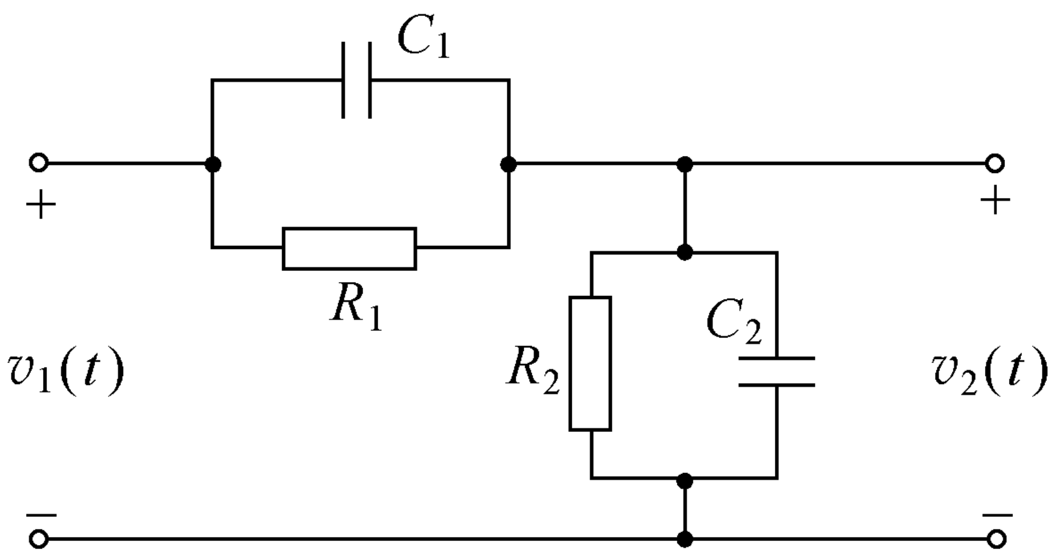


图3-29 无失真传输系统电路图（当$R_1C_1=R_2C_2$）

例3.20

可以求出该电路的频率响应 $H(j\omega)$

$$H(j\omega)=\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}=\frac{Z_{12}(\omega)}{Z_{12}(\omega)+Z_{13}(\omega)}=\frac{\dfrac{R_2\dfrac{1}{j\omega C_2}}{\dfrac{1}{j\omega C_2}+R_2}}{\dfrac{R_2\dfrac{1}{j\omega C_2}}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C_2}}+\dfrac{R_1\dfrac{1}{j\omega C_1}}{R_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}}}$$

化简为 $H(j\omega)=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}\dfrac{j\omega+\dfrac{1}{R_1C_1}}{j\omega+\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}}$

例3.20

从上式可以看出，为使电路成为无失真传输系统，必须满足下列条件

$$\frac{1}{R_1C_1}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}$$

化简可得 $R_1C_1=R_2C_2$

此时，$H(j\omega)$可重新写成

$$H(j\omega)=\frac{C_1}{C_1+C_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

该$H(j\omega)$为一常数，满足无失真的幅频特性和相频特性。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

- 滤波：改变信号中各频率分量的大小 。
- 滤波器 ： 完成滤波功能的系统 。
- 频率选择性滤波器 ： 无失真地通过某些频率范围的信号，而衰减掉另一些频率范围内的信号。
- 理想滤波器 ： 将滤波器的某些特性理想化而定义的滤波器系统 。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

理想滤波器是指将滤波器的某些特性理想化而定义的滤波器系统。

最常用的是具有矩形幅度特性和线性相移特性的理想低通滤波器。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

1. 理想低通的频域特性和冲激响应

理想低通滤波器的频域特性可以表示为

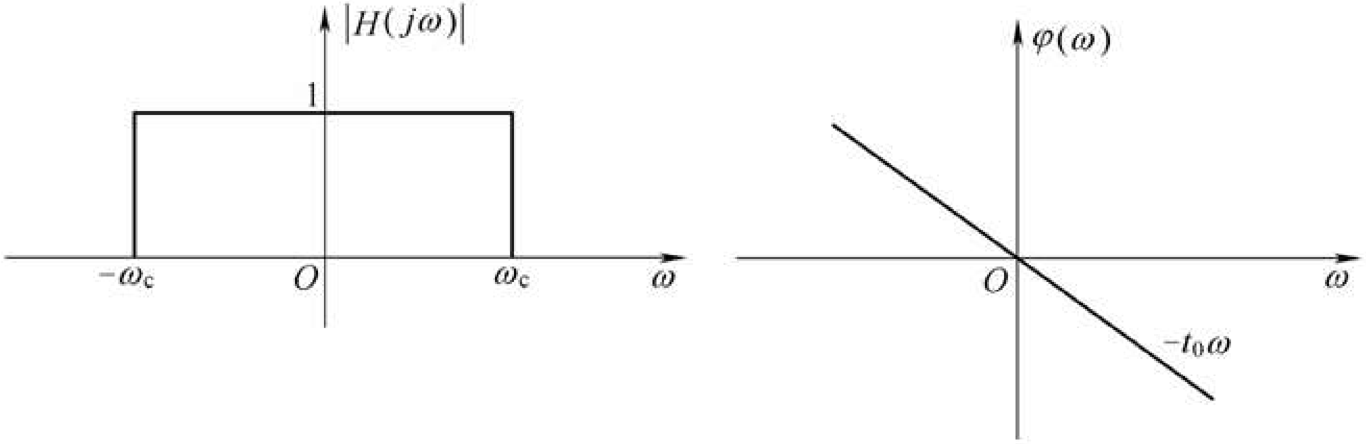
$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对 $H(j\omega)$ 作傅里叶反变换，可得低通滤波器的单位冲激响应：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)}$$

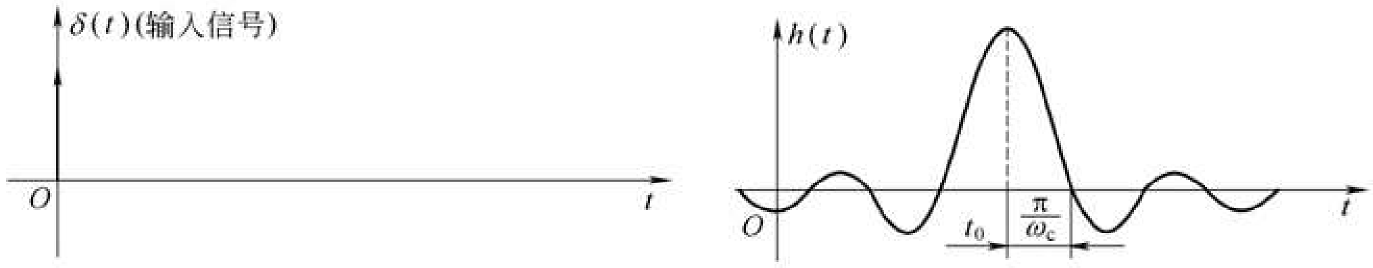
注意到，当 $t<0$时，$h(t)\neq 0$，因此理想低通滤波器是个非因果系统，因而在时域上它是物理不可实现的。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器



(a) (b)

图 3-30 理想低通滤波器特性



(a) (b)

图 3-31 理想低通滤波器的冲激响应

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

2. 理想低通滤波器的阶跃响应

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{理想低通}} \longrightarrow s(t)$$

阶跃信号的傅里叶变换为

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

于是

$$s(t) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} \left(\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

求上式的傅里叶反变换可得阶跃响应 $s(t)$

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{-j\omega t_0}\cdot d\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega}\cdot d\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{j\omega}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}\cdot d\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}\cdot d\omega$$

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

上式作变量替换 $x=\omega(t-t_0)$，于是有

$$s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}\cdot dx$$

对函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的积分称为“正弦积分”。以符号 $Si(y)$ 表示。

$$Si(y)=\int_0^{y}\frac{\sin x}{x}dx$$

阶跃响应可写成

$$s(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$$

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

定义输出由最小值到最大值所需时间为上升时间t_r，其值为

$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$$

阶跃响应的上升时间与系统的截止频率（带宽）成反比。该结论具有普遍意义，适用于各种实际滤波器。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

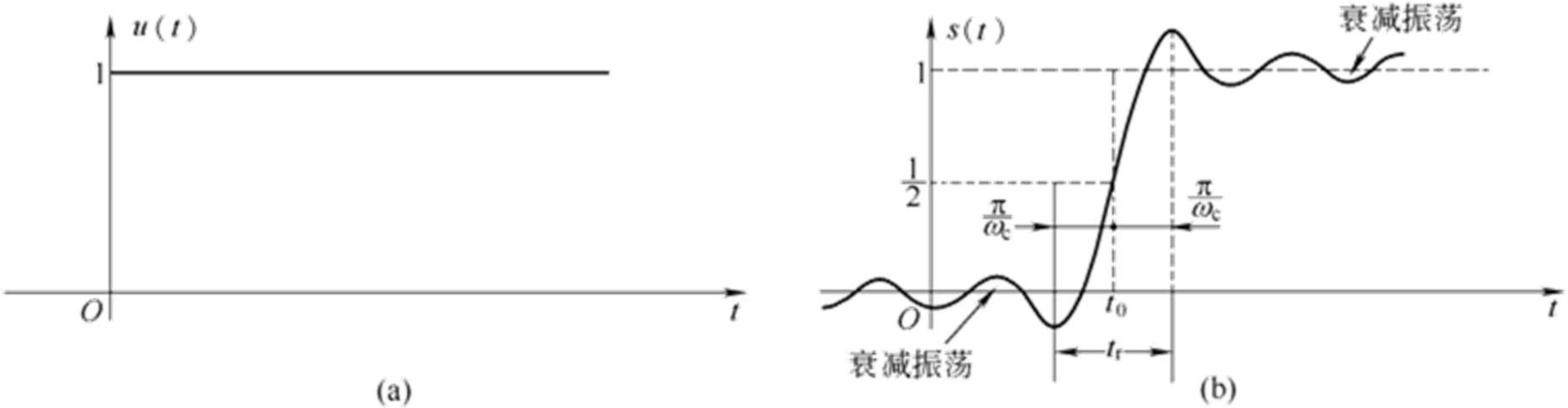


图 3-32 理想低通滤波器的阶跃响应

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

吉布斯现象：

一个信号通过理想低通滤波器，其实质是用信号的有限频率分量近似原信号：

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega$$

根据傅里叶变换的物理意义，在 $u(t)$ 的断点处，其输出必存在吉布斯现象。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

实际情况：

第一个峰值在 $t = t_0 + \dfrac{\pi}{\omega_c}$ 处，有 $s(t)\big|_{\max} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} Si(\pi)$

利用函数 $Si(\pi) = 1.8514$，可计算出该峰值（上冲）

$$s(t)\big|_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1.8514}{\pi} \doteq 1.0895$$

即，第一个峰值的上冲为跳变值的8.95%，近似为9%，该值与 ω_c 无关。

3.6.7 信号的滤波与理想滤波器

3. 理想低通对矩形脉冲的响应

矩形脉冲的表示式为 $x(t)=u(t)-u(t-\tau)$

理想低通对矩形脉冲$y(t)$响应为

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\{Si[\omega_c(t-t_0)]-Si[\omega_c(t-t_0-\tau)]\}$$

- $\frac{2\pi}{\omega_c}<<\tau$ 时，脉冲的宽度远远大于系统的上升时间，$y(t)$波形接近矩形脉冲信号。
- τ 接近或小于$\frac{2\pi}{\omega_c}$，$y(t)$波形将严重失真于矩形脉冲信号。

MATLAB: 理想低通对矩形脉冲的响应

```
------------------------------------------------------------------------------------------------
% 程序 XHforRect：产生用于计算傅立叶反变换的被积函数：y=(XH(w)/(2*pi)).*exp(j*w*t)
function y=XHforRect(w,t,T,W)    % w 为频域变量,t 为信号时间变量，W 为理想低通滤波器截止频率
                                 % T 为对称方波的时宽
XH=(abs(w)<=W).*(T*sinc(w*T/(2.0*pi)));    %[-T/2,T/2]方波频谱与理想低通滤波器频率响应相乘:X*H
                                           %方波频谱为 T*sinc(w*T/(2.0*pi))
y=(XH/(2.0*pi)).*exp(j*w*t);
------------------------------------------------------------------------------------------------
```

MATLAB: 理想低通对矩形脉冲的响应

```
%程序 RectResponse：计算理想低通对矩形脉冲的响应。
W=2.*pi;                                   %设置理想低通滤波器截止频率。
T=1.*(2*pi/W);                             %设置信号时宽。
w1=linspace(-1.5*W,1.5*W,512);             %设置频域变量取值范围。
H=0.5*((sign(w1+eps+W)+1.)-(sign(w1+eps-W)+1.));   %理想低通滤波器频率响应，仅用于显示。
t=linspace(-10*T/2,10*T/2,512);                    %设置时域变量取值范围。
x=0.5*((sign(t+eps+T/2.0)+1.)-(sign(t+eps-T/2.0)+1.));   %[-/2,T/2]矩形脉冲，仅用于显示。
N=length(t);y=zeros(1,N);
for k=1:N
    y(k)=quadl(@XHforRect,-W,W,[],[],t(k),T,W);      % 计算傅立叶反变换。
end
subplot(3,1,1);plot(w1,H);xlabel('\omega');ylabel('H(j\omega)'); axis([-1.5*W 1.5*W -0.1 1.1]);title('截止频率
=2\pi');
subplot(3,1,2);plot(t,x);ylabel('x(t)');axis([-5 5 -0.25 1.25]);title('T=1.0');
subplot(3,1,3);plot(t,y);ylabel('y(t)');axis([-5 5 -0.25 1.25]);xlabel('t');
```

MATLAB: 理想低通对矩形脉冲的响应

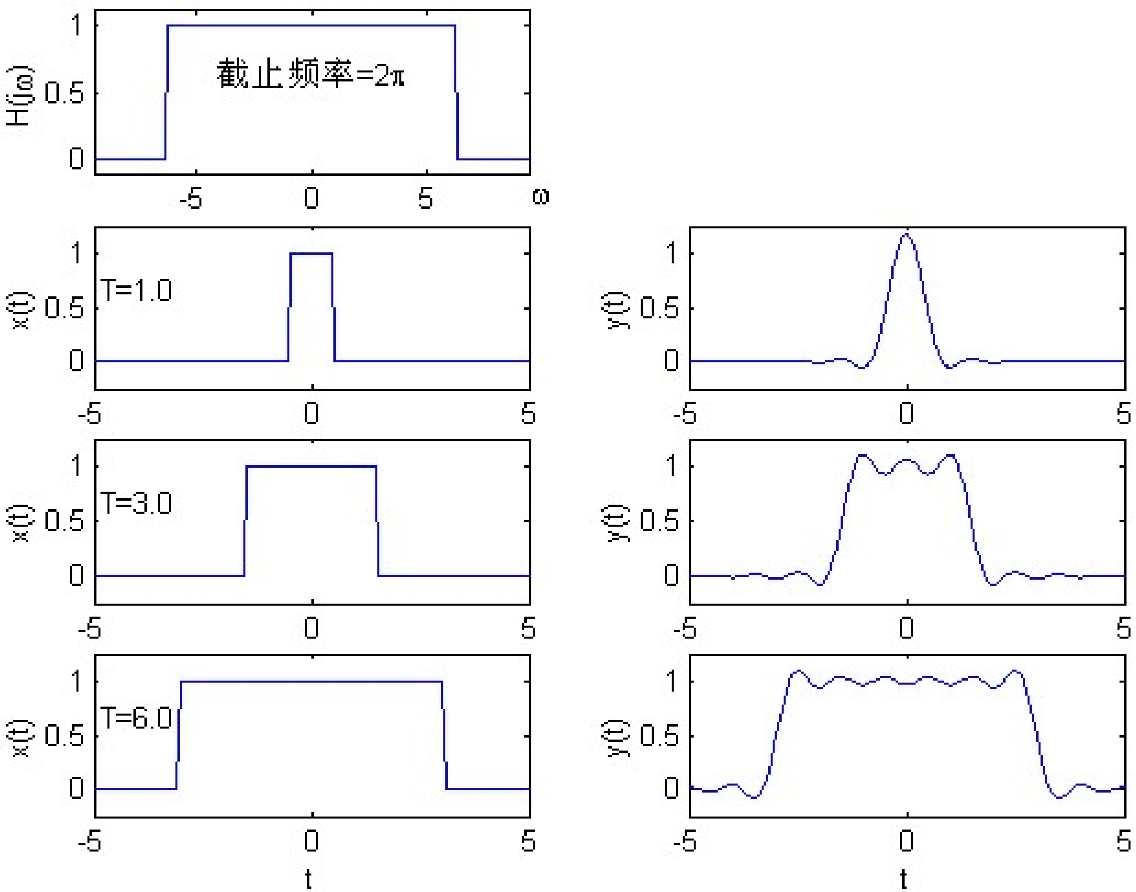


图3-33 理想低通对矩形脉冲的响应

MATLAB: RC低通网络对矩形脉冲的响应

```
---------------------------------------------------------------------------------------------------------
% 程序 RCforRect：RC 低通网络对矩形脉冲的响应----产生用于计算傅立叶反变换的被积函数。
function y=RCforRect(w,t,T,RC)            % t 为信号时间变量，w 为频域变量,RC 低通网络时间常数,T 为方
                                          %波宽。
H=1.0./(1+j*w*RC);                        %RC 低通网络频率响应---确定 LTI 系统的频率响应。
X=T*sinc(w*T/(2.0*pi)).*exp(-j*w*T/2); %[0,T]方波频谱-----确定输入信号的频谱。
XH=X.*H;                                  %[0,T]方波频谱与频率响应相乘:X*H---利用卷积定理计算输出
                                          %信号的频谱。
y=(XH/(2.0*pi)).*exp(j*w*t);              %计算输出信号傅立叶反变换的被积函数
---------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

MATLAB: RC低通网络对矩形脉冲的响应

```
%程序 RectResponseofRC ： RC 低通网络对矩形脉冲的响应
T=.2;                          %设置信号时宽。
RC=.5;                         %设置 RC 低通网络时间常数。
W=100.0/RC;                    %设置傅立叶反变换积分上下限。
t=linspace(-2,10,128);         %设置时域变量取值范围。
x=0.5*((sign(t+eps)+1.)-(sign(t+eps-T)+1.));          %[0,T]矩形脉冲，仅用于显示。
N=length(t);y=zeros(1,N);
for k=1:N
    y(k)=quadl(@RCforRect,-W,W,[],[],t(k),T,RC);    % 计算傅立叶反变换。
end
subplot(1,2,1);plot(t,x);ylabel('x(t)');axis([-2 10 -0.25 1.25]);xlabel('t');title('T=0.2');
subplot(1,2,2);plot(t,abs(y));ylabel('y(t)');axis([-2 10 -0.25 1.25]);xlabel('t');title('RC=0.5');
```

MATLAB: RC低通网络对矩形脉冲的响应

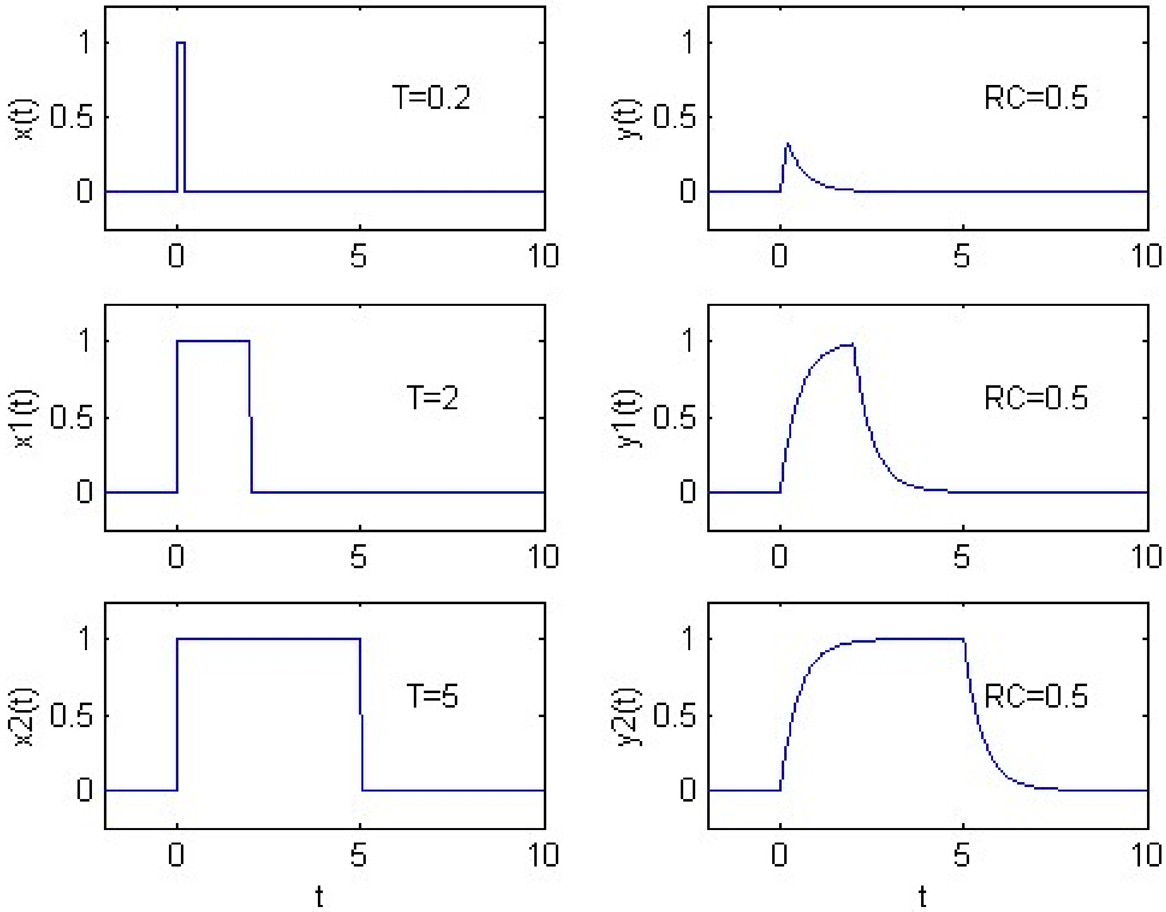


图3-35 RC低通网络对矩形脉冲的响应