第二章

线性时不变系统的时域分析

§ 2.0 引言

§ 2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§ 2.2 离散时间LTI系统的时域分析

§ 2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§ 2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

§ 2.5 LTI系统的响应分解

§ 2.6 LTI系统的框图表示

2.0 引言

- 本章将讨论一种最基本而又极为有用的LTI系统的分析方法——时域分析方法，即所涉及的信号的自变量都是关于时间t（或n）的一种分析方法。

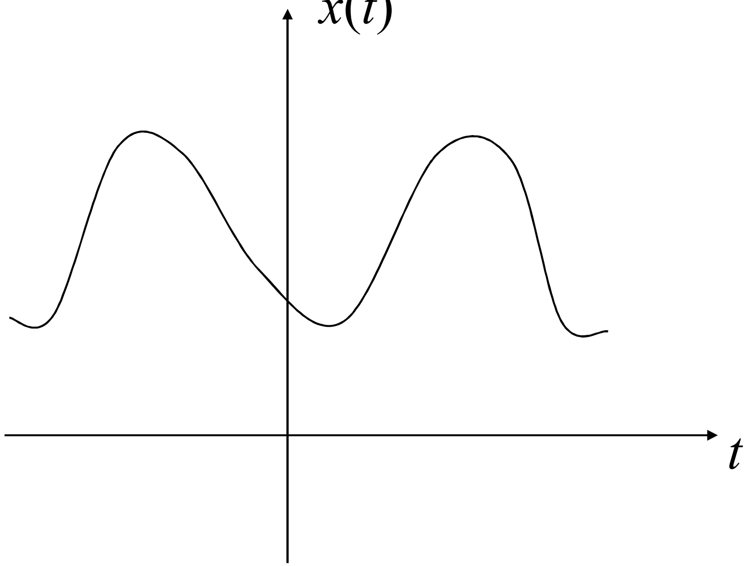
- 主要目的之一是给出求解LTI系统的一般方法——卷积，并以此为基础进一步讨论LTI系统的有关性质和相关问题。通过本章的讨论，将建立LTI系统的时域分析的理论框架。

- 基本思路：
  利用LTI系统的叠加性和齐次性
  以及用某一基本信号表示一般信号

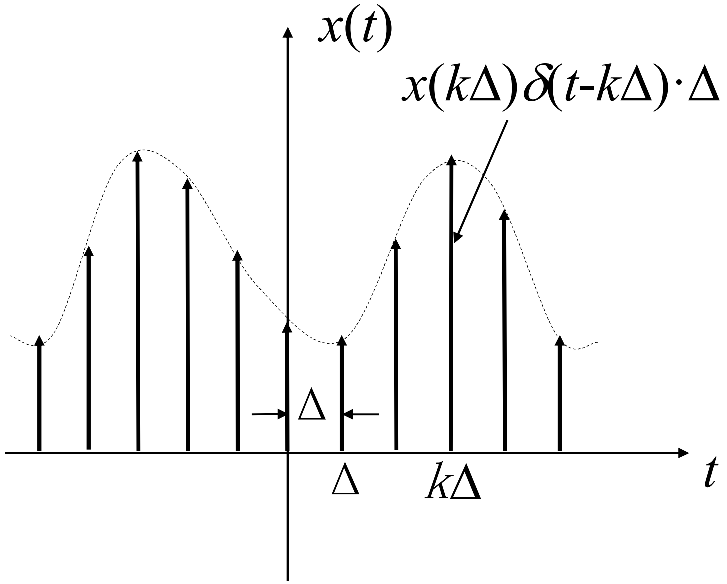
§ 2.0 引言
§ 2.1 连续时间LTI系统的时域分析
§ 2.2 离散时间LTI系统的时域分析
§ 2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质
§ 2.4 LTI系统的微分、差分方程描述
§ 2.5 LTI系统的响应分解
§ 2.6 LTI系统的框图表示

2.1.1 信号的脉冲分解

任一信号可用无穷多个单位冲激函数的移位、加权之“和”（即积分）来表示。



(a)



(b)

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \qquad (2.2)$$

← 冲激函数的线性组合

2.1.1 信号的脉冲分解

当 $\Delta \to 0$ 时，（2.2）式能够精确表示任一信号 $x(t)$，即（2.2）演变为积分的形式（2.3)式。

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \cdot d\tau \qquad (2.3)$$

筛选性质

单位冲激函数的移位、加权之“和”

2.1.1 信号的脉冲分解

如果用以下矩形脉冲近似表示单位冲激函数

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta},\ 0<\mathrm{t}<\Delta\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

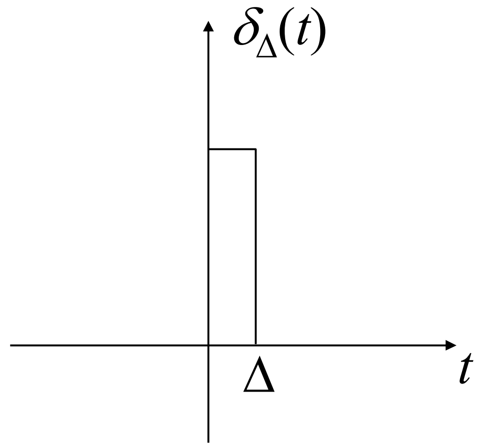


图2-2 $\delta_\Delta(t)$波形

显然

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

$$\delta(t-\Delta k)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-\Delta k)$$

2.1.1 信号的脉冲分解

用一系列矩形脉冲来近似，得到的以下近似表达：

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau$$

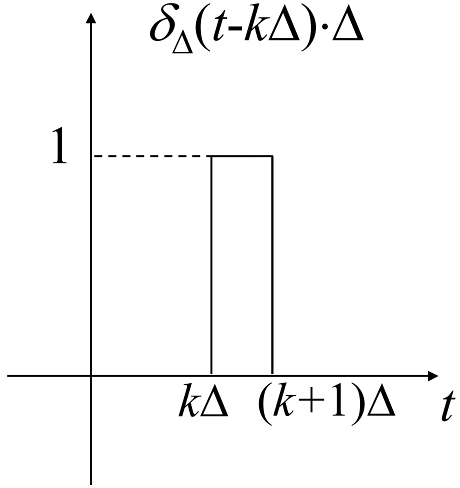


图2-3 $\delta_{\Delta}(t\text{-}k\Delta)\cdot\Delta$的形式

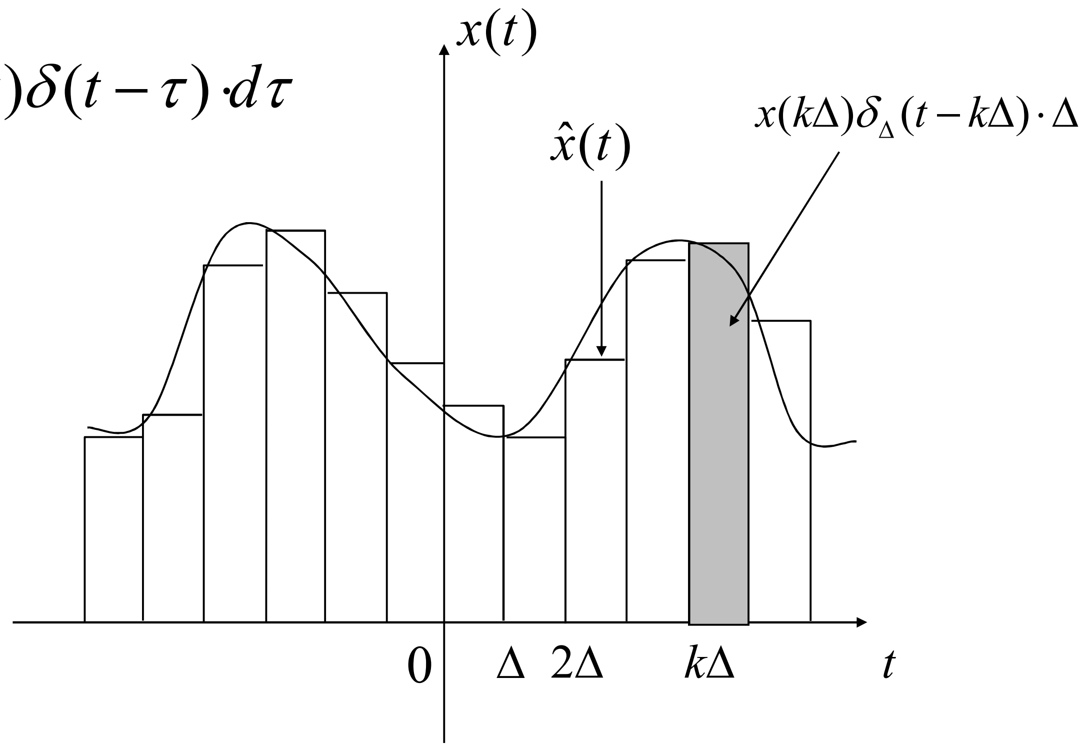


图2-4 用矩形脉冲$x(t)$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

卷积方法是LTI系统的最基本的分析方法，是用于LTI系统求解对激励信号的响应。

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

- 为了说明其基本原理，考虑以下LTI系统。

$$\delta(t) \to h(t)$$

$$\delta(t-t_0) \to h(t-t_0)$$

其中，$h(t)$ 称为系统的单位冲激响应。

将 $x(t)$ 分解为移位冲激信号的线性组合：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

- 根据LTI系统的齐次性，有

$$x(k\Delta)\cdot\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \to x(k\Delta)h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

- 再根据LTI系统的叠加性，我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

- 上式取极限，有

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \to \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

- 表示为积分形式

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau$$

- 因此，响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau$$

- 上式的数学运算称为卷积积分，简称卷积，通常记为

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

卷积积分的意义：

1. 原理：将信号分解为移位冲激信号的线性组合，借助系统的单位冲激响应，获得LTI系统对激励的响应解。

2. LTI系统对输入信号的响应过程可以看作是两个信号相互作用的过程：卷积积分运算。

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

3. LTI系统的单位冲激响应可以完全表征系统的特性。

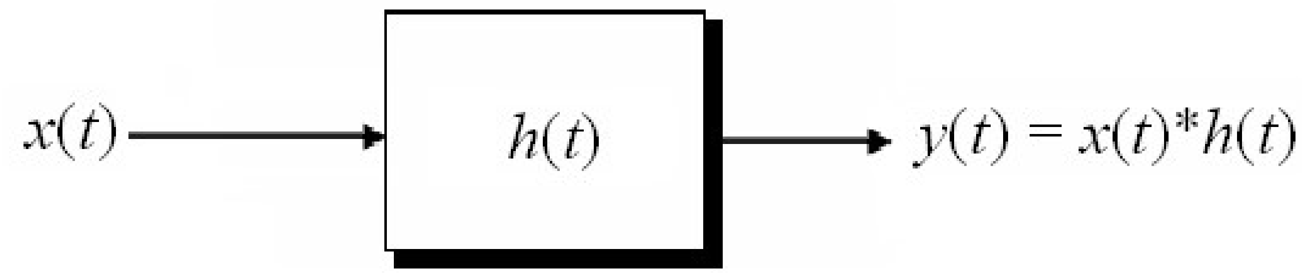


图　LTI系统的单位冲激响应的表示

4. 单位冲激响应给出连续时间LTI系统更一般的描述方法。

例2.1

【例2.1】已知一线性时不变系统的单位冲激响应为

$$h(t)=e^{-at}\cdot u(t)$$

系统的输入信号为一单边指数信号 $x(t)=e^{-bt}u(t)$，$a\neq b$

求系统对输入信号的响应输出 $y(t)$。

解：系统的输出 $y(t)$为

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b\tau}\cdot u(\tau)\cdot e^{-a(t-\tau)}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$$

由于 $\tau<0$ 时，$u(\tau)=0$；以及 $\tau>t$ 时，$u(t-\tau)=0$。

所以积分变量 τ 的取值区间应为 $0\leq\tau\leq t$。

在此区间内，$u(\tau)=u(t-\tau)=1$

例2.1

故有

$$y(t)=\int_0^t e^{-b\tau}\cdot e^{-a(t-\tau)}\cdot d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-at}\cdot e^{(a-b)\tau}\cdot d\tau$$

$$=e^{-at}\int_0^t e^{(a-b)\tau}\cdot d\tau$$

$$=e^{-at}\left.\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right|_{\tau=0}^{t}$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}e^{-bt}-\frac{1}{a-b}e^{-at}\right)u(t)$$

2.1.3 卷积积分的图示法

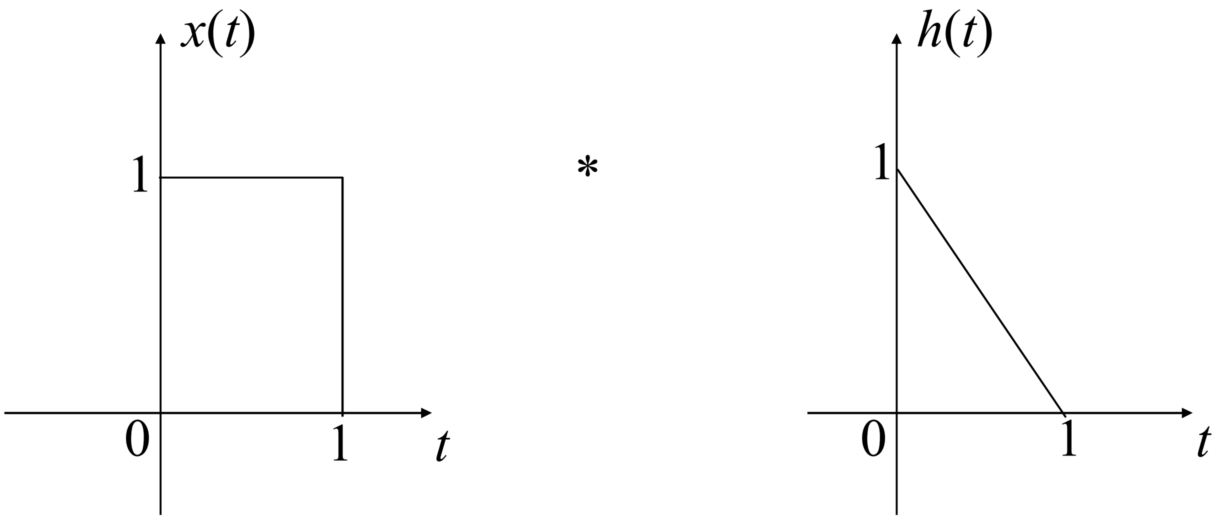


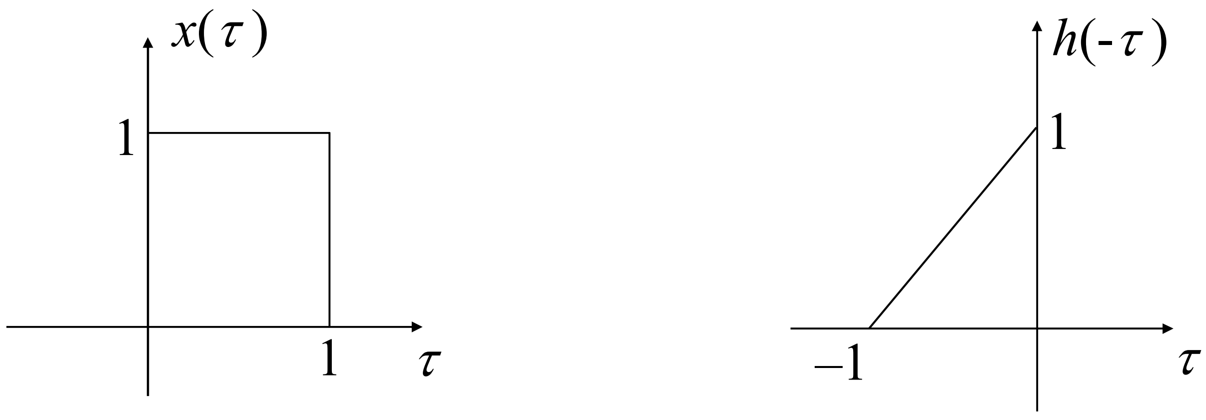
图2-6 $x(t)$和$h(t)$的波形

观察 $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$

可得卷积的计算的图示法的一般步骤为：

2.1.3 卷积积分的图示法

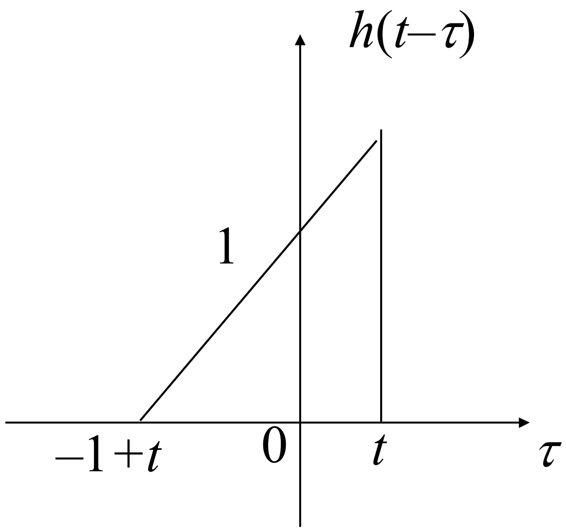
1. 反转：卷积积分中 τ 为积分变量，t 为参变量，将函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的自变量用 τ 代换，将 $h(\tau)$ 以纵坐标轴为轴线反转得 $h(-\tau)$。



(a) (b)

2.1.3 卷积积分的图示法

2. 平移：为了计算 t时刻的卷积值，将 $h(-\tau)$ 随参变量 t 平移，得 $h(t-\tau)$ 。



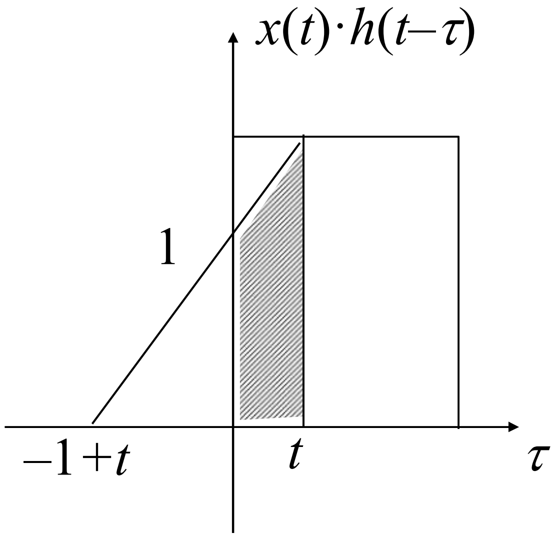
(c)

若$t>0$，则 $h(-\tau)$沿τ 轴向右平移 t,
若$t<0$ ，则 $h(-\tau)$沿τ 轴向左平移 t。

2.1.3 卷积积分的图示法

3. 相乘：将$x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘，得函数 $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$

4. 积分:求 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$乘积曲线下的面积，即为t时刻的卷积分值。



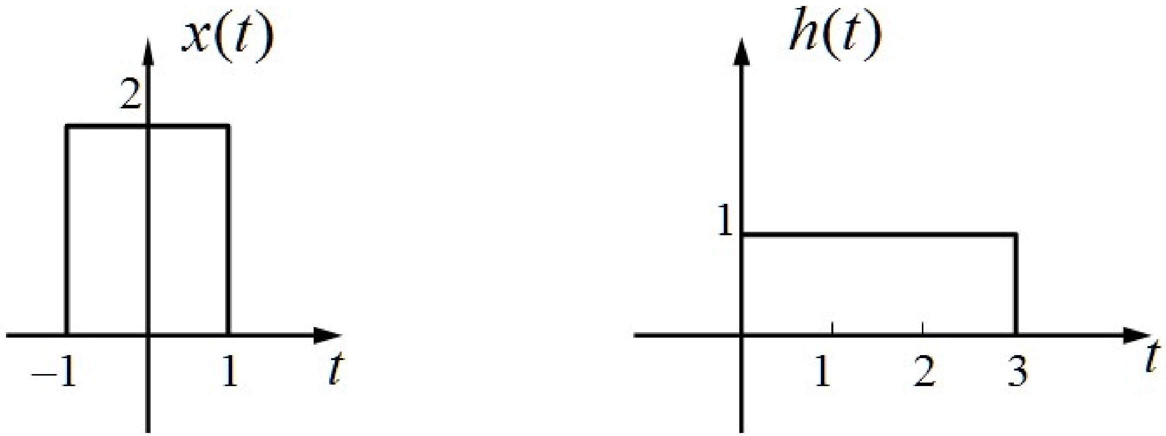
(d)

5. 选取不同的t值，重复上述2-4步骤，可计算出不同的时刻t所对应的卷积和值。

例2.2

【例2.2】 已知信号$x(t)$和$h(t)$如图(a)所示， 求卷积积分：

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

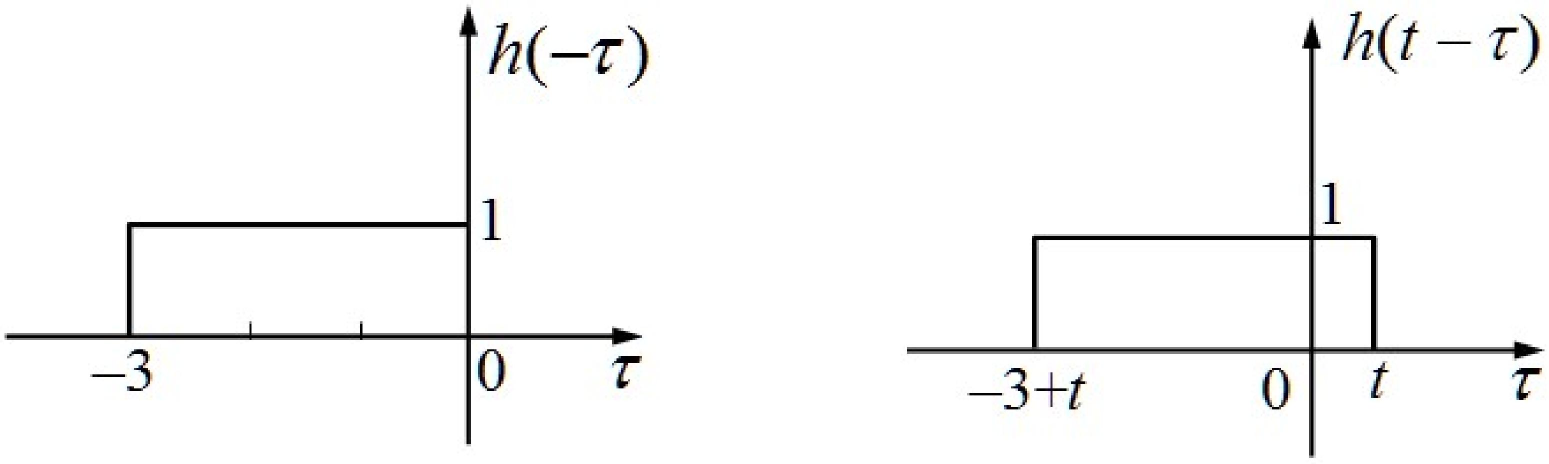


(a)

例2.2

解：

1. 先将$x(t)$和 $h(t)$ 的自变量更换为 τ ，再将$h(\tau)$反转为$h(-\tau)$；$h(-\tau)$沿τ 轴平移得$h(t-\tau)$；将$x(\tau)$ 与$h(t-\tau)$相乘，得曲线$x(\tau)\cdot h(t-\tau)$。

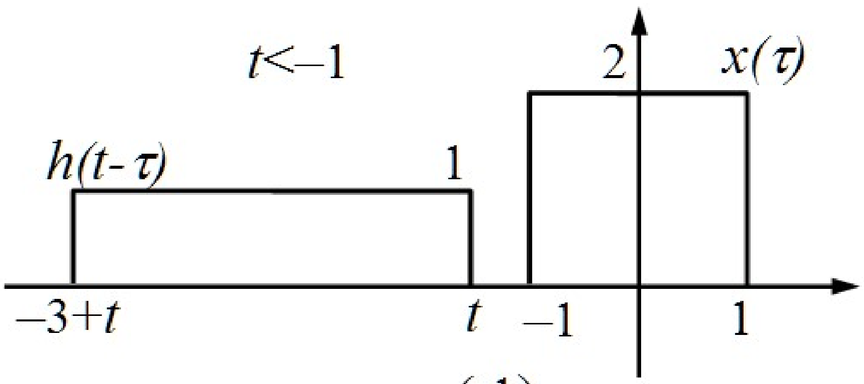


（b）　　（c）

例2.2

2. 由于$x(\tau)$和$h(\tau)$均为有限时宽信号，因此曲线$x(\tau)h(t-\tau)$的非零区（重叠区）将视t的取值不同而有所不同，因此相乘和积分应随不同t的取值范围分几个区间进行。

（1）当 $t<-1$ 时，由图 (d)所示，知$x(\tau)$与$h(t-\tau)$无重叠部分，乘积为零，所以 $y(t)=x(t)*h(t)=0, \quad t<-1$

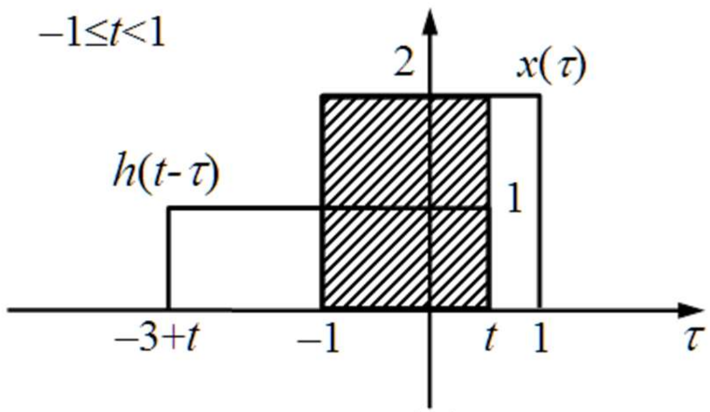


（d）

例2.2

(2) 当 $-1 \le t \le 1$ 时，由图2-8(e)所示，知$x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的重叠区为$[-1, t]$，即乘积 $x(\tau)h(t-\tau)$在区间$[-1, -t]$上非零，所以：

$$y(t)=\int_{-1}^{t}x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{-1}^{t}2d\tau=2(t+1)$$

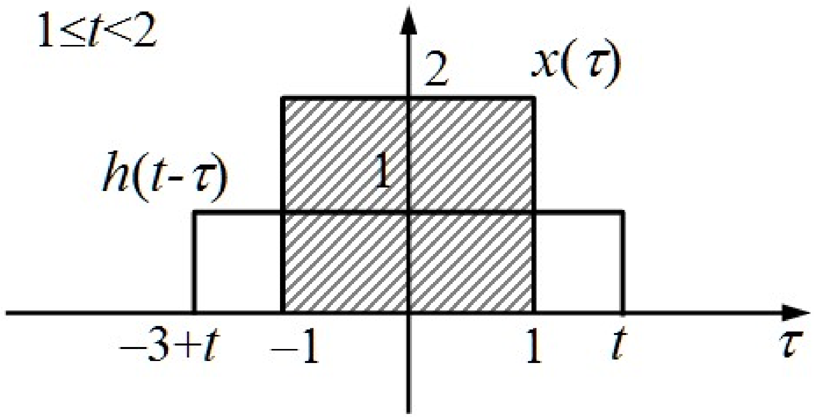


（e）

例2.2

(3) 当 $1 \le t \le 2$ 时，由图2-8(f)所示，知 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的重叠区为 [−1, 1]，所以：

$$y(t) = \int_{-1}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau = \int_{-1}^{1} 2d\tau = 4$$

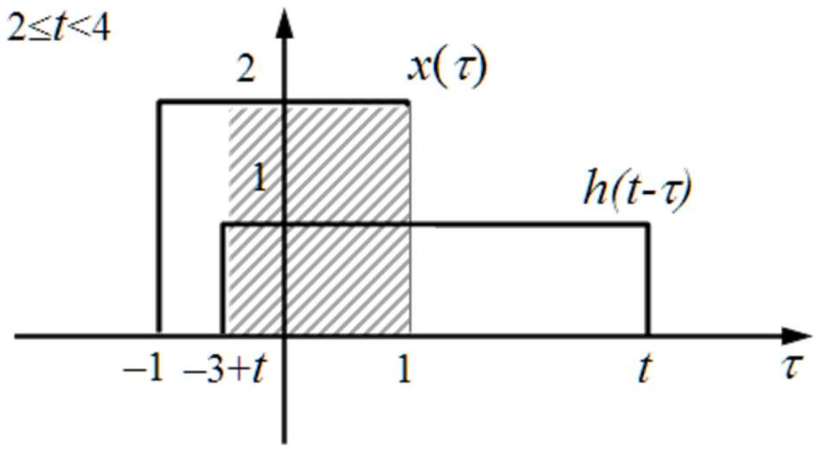


(f)

例2.2

(4)当 $2 \le t \le 4$ 时，由图2-8(g)所示，知 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的重叠区为$[-3+t,\ 1]$，所以：

$$y(t) = \int_{-3+t}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau = \int_{-3+t}^{1} 2d\tau = 2(4-t)$$

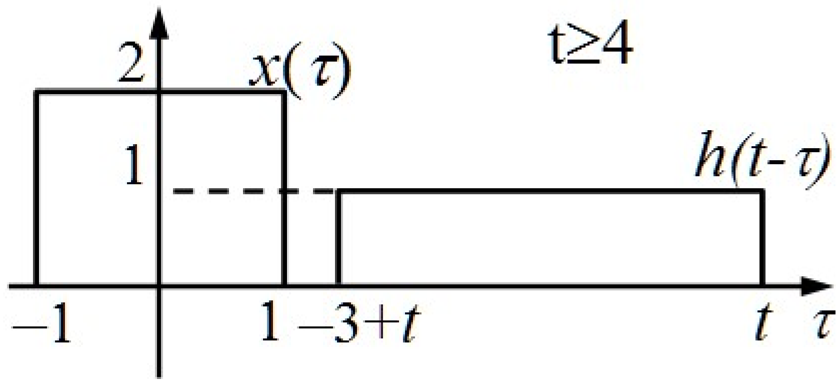


(g)

例2.2

(5)当 $t \geq 4$ 时，由图2-8(h)所示，知 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 无重叠区，所以：

$$y(t) = x(t) * h(t) = 0$$

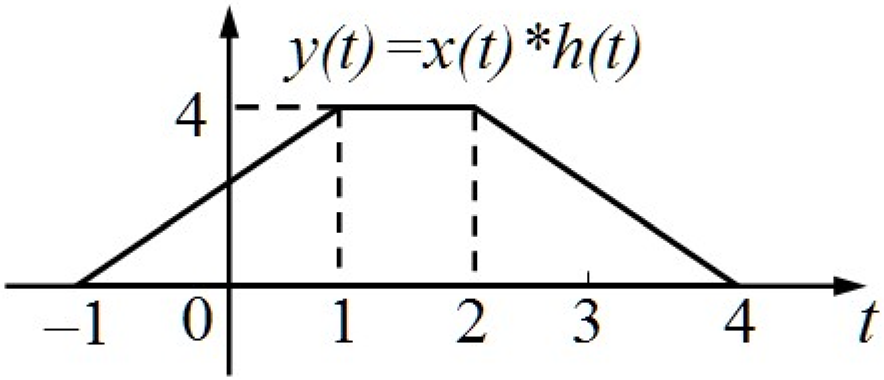


（h）

例2.2

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ 2(t+1) & -1\le t\le 1\\ 4 & 1\le t\le 2\\ 2(4-t) & 2\le t\le 4\\ 0 & t\ge 4\end{cases}$$

$y(t)$的波形如图 (i)所示：



(i)

MATLAB演示

【例2-24】计算两矩形窗信号的卷积。

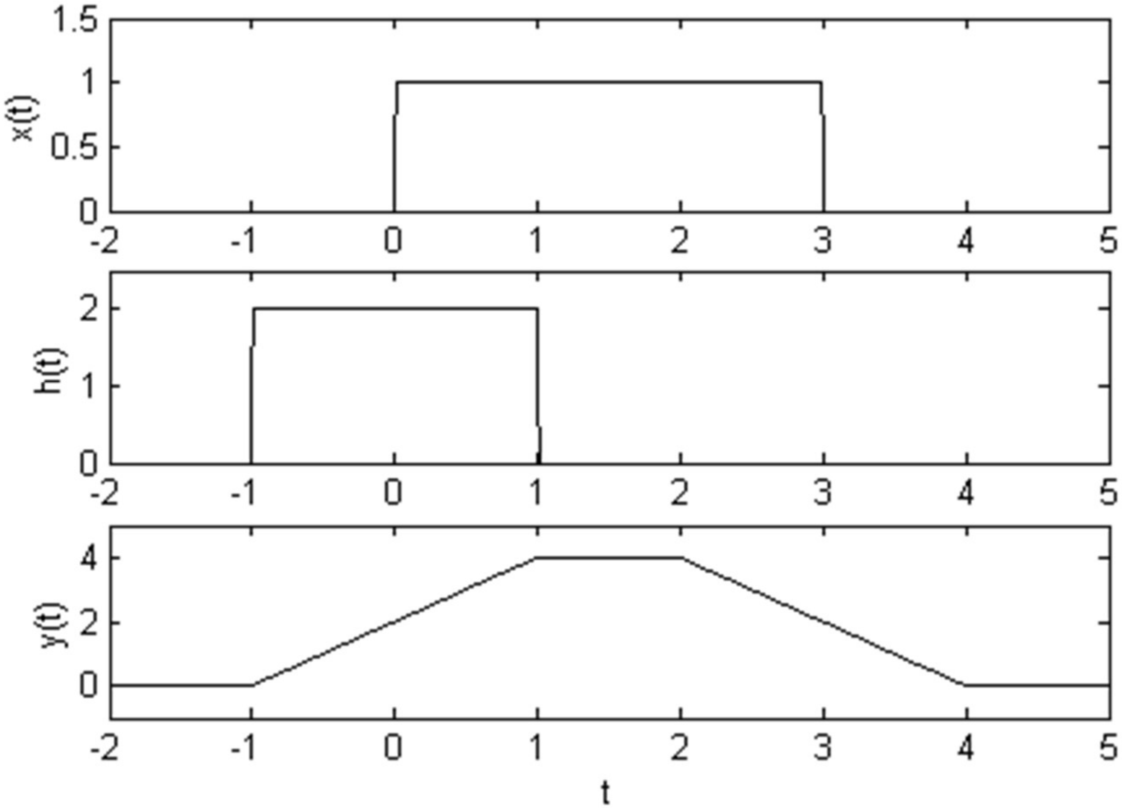


图2-36 例2-24的运行结果图

MATLAB演示

```
T = 0.01; t = -2 : T : 5; L = length(t);
h = 2*0.5*((sign(t+1)+1)-(sign(t-1)+1));
x = 0.5*((sign(t)+1)-(sign(t-3)+1));
y = conv(T*h, x); t1 = -4 : T : 10;
subplot(3,1,1); plot(t, x);
xlabel('t'); ylabel('x(t)'); axis([-2 5 0 1.5]);
subplot(3,1,2); plot(t, h);
xlabel('t'); ylabel('h(t)'); axis([-2 5 0 2.5]);
subplot(3,1,3); plot(t1, y);
xlabel('t'); ylabel('y(t)'); axis([-2 5 -1 5]);
```

2.1.4 卷积积分的性质

卷积积分有一些有用的性质，掌握这些有用的性质可以简化卷积运算，同时也给信号与系统的分析提供了非常有用的分析方法，从中可以得出不少重要的结果。

2.1.4 卷积积分的性质

一、卷积代数

- 1. 交换律

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\cdot d\tau$$

即：

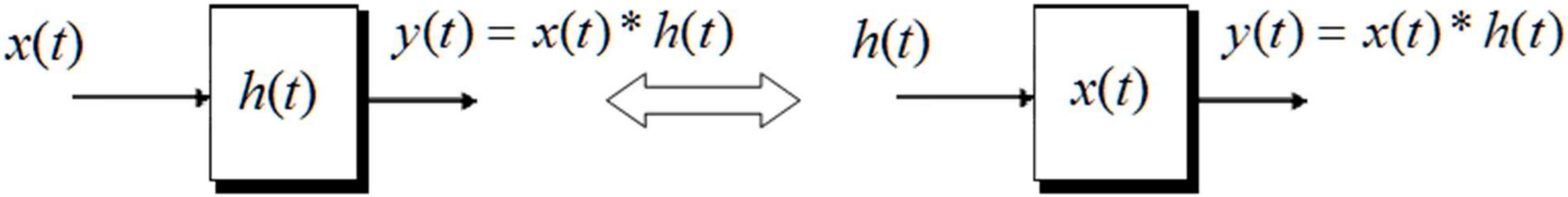


图2-9 从系统分析的观点解释卷积的交换律

卷积积分的交换律表明：卷积与两个信号的顺序无关。

2.1.4 卷积积分的性质

- 2. 结合律

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

考查如图所示的级联系统

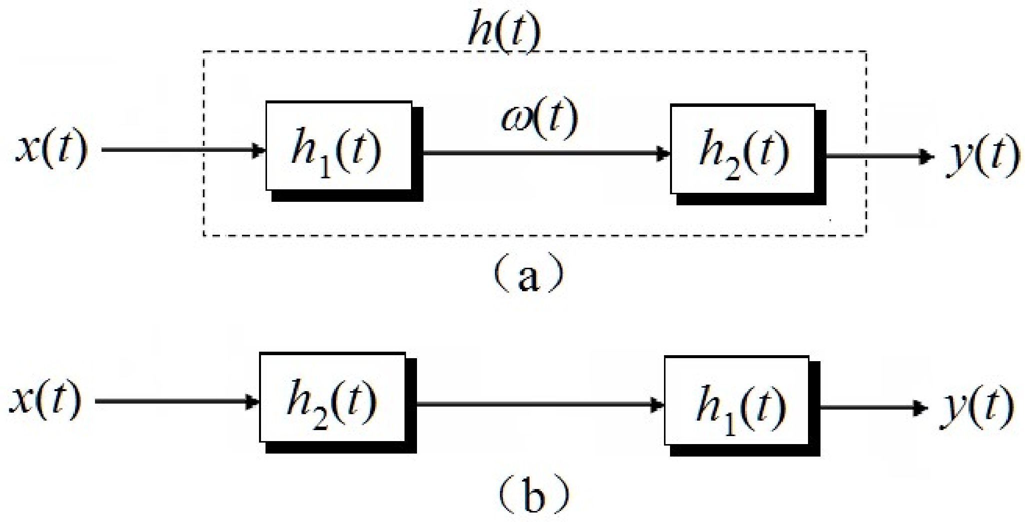


图2-10 卷积结合律及交换律的系统意义

2.1.4 卷积积分的性质

根据卷积积分，有 $\omega(t)=x(t)*h_1(t)$， $y(t)=\omega(t)*h_2(t)$

$$=\left(x(t)*h_1(t)\right)*h_2(t)$$

由结合律有 $y(t)=x(t)*\left(h_1(t)*h_2(t)\right)$

$$=x(t)*h(t)$$

再根据交换律，可得 $y(t)=x(t)*\left(h_1(t)*h_2(t)\right)$

$$=x(t)*\left(h_2(t)*h_1(t)\right)$$

$$=\left(x(t)*h_2(t)\right)*h_1(t)$$

重要结论：**LTI**系统的级联，与各子系统的次序无关，即各子系统连接的顺序可以调换，总的响应为各子系统的卷积。

2.1.4 卷积积分的性质

- 3. 分配律

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

考查图2-11所示并联LTI系统

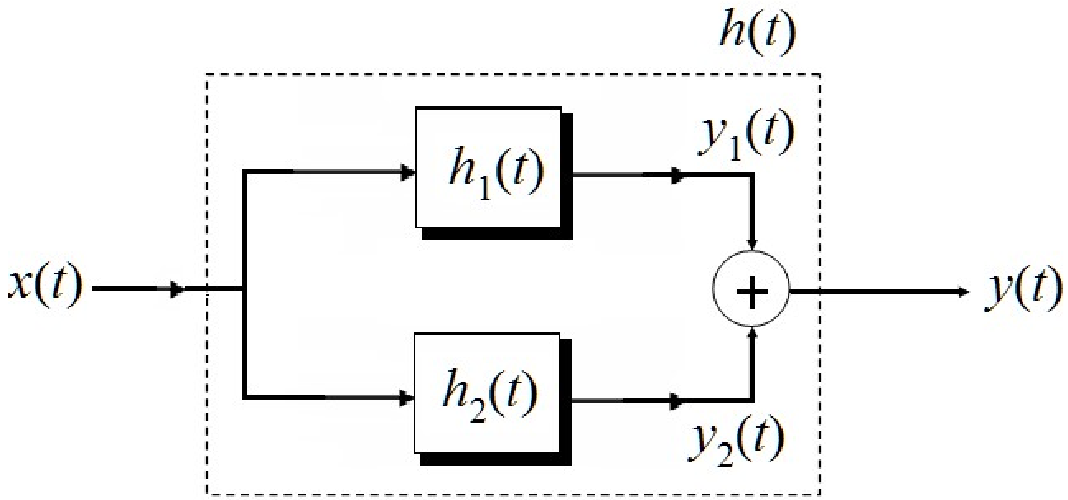


图2-11 分配律的系统意义

2.1.4 卷积积分的性质

我们有 $y_1(t) = x(t) * h_1(t) \qquad y_2(t) = x(t) * h_2(t)$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$
$$= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

根据分配律有

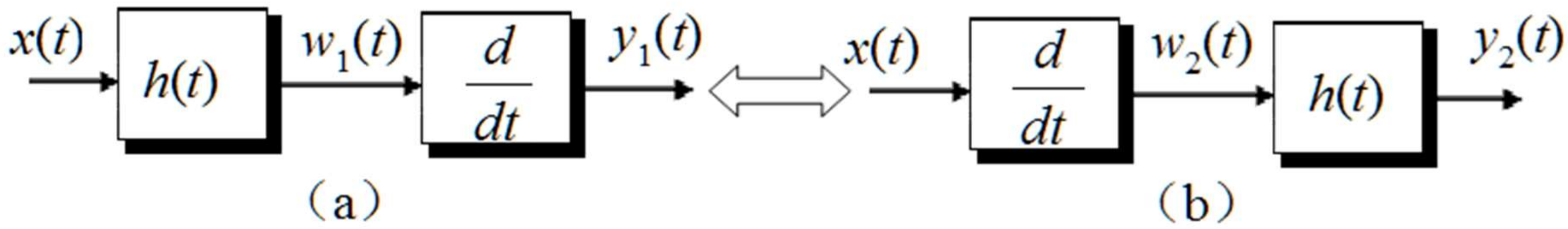
$$y(t) = x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t)\right) = x(t) * h(t)$$

分配律性质表明，并联**LTI**系统总的单位冲激响应等于各子系统单位冲激响应之和。

2.1.4 卷积积分的性质

二、卷积的微分与积分特性

- 1. 卷积的微分性质



从上述的卷积的代数性质可知，图所示的两个级联系统是完全等价，即$y_1(t)=y_2(t)$。结合卷积的代数性质，我们有

$$w_1(t)=x(t)*h(t) \qquad y_1(t)=\frac{dw_1(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[x(t)*h(t)\right]$$

$$w_2(t)=\frac{dx(t)}{dt} \qquad y_2(t)=w_2(t)*h(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$

2.1.4 卷积积分的性质

由于$y_1(t) = y_2(t)$ 因此有

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

利用交换律，可得

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[h(t) * x(t)\right] = \frac{dh(t)}{dt} * x(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

卷积的微分性质：

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

2.1.4 卷积积分的性质

- 2. 卷积的积分性质

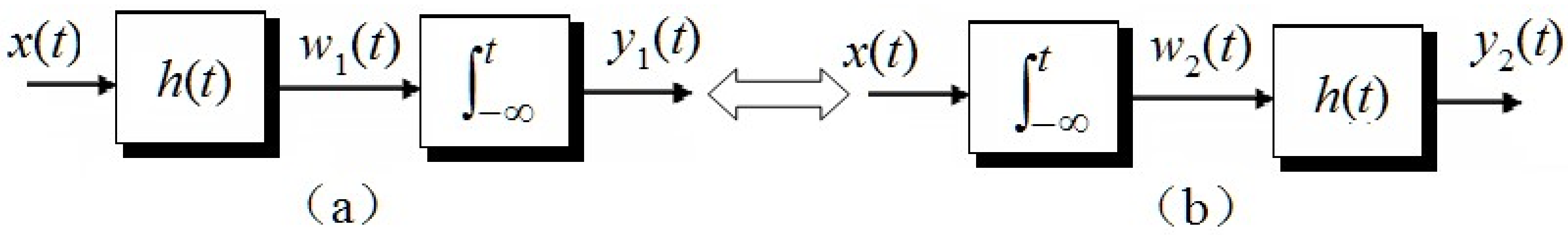


图2-13 卷积积分的图解说明

与卷积的微分性质相类似，同样我们可得卷积的积分性质：

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]\cdot d\lambda=[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)\cdot d\lambda]*h(t)=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)\cdot d\lambda]$$

其证明与微分性质的证明一样，可利用上面所示的图解说明。

2.1.4 卷积积分的性质

- 3. 推广

应用上述推演方法，可以导出卷积的高阶导数或多重积分的性质：

设$r(t)=\left[x_1(t)*x_2(t)\right]$，则有$r^{(i)}(t)=x_1^{(j)}(t)*x_2^{(i-j)}(t)$

其中，当i、j、$i\text{–}j$取正整数时为导数的阶次，取负整数时为重积分的次数，等式两边必须满足$i=j+(i-j)$。

2.1.4 卷积积分的性质

一个特例是取 $i=0$， $j=1$ ，$i-j=-1$， 或取 $i=0$，$j=-1$ ，$i-j=1$， 我们有

$$r(t)=r^{(0)}(t)=x_1^{(1)}t*x_2^{(-1)}(t)$$

$$=x_1^{(-1)}(t)*x_2^{(1)}(t)$$

即

$$r(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}x_2(t)\cdot dt$$

$$=\int_{-\infty}^{t}x_1(t)\cdot dt*\frac{dx_2(t)}{dt}$$

2.1.4 卷积积分的性质

三、与冲激函数 $\delta(t)$ 和阶跃函数 $u(t)$ 的卷积：

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

对于冲激偶 $\delta'(t)$，有

$$x(t)*\delta'(t)=x'(t)*\delta(t)=x'(t)$$

对于单位阶跃函数 $u(t)$，可得：

$$x(t)*u(t)=x(t)*\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{t}x(t)\cdot dt*\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)\cdot dt$$

2.1.4 卷积积分的性质

推广到更一般的情况，我们有

$$x(t) * \delta^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) * \delta(t) = x^{(k)}(t)$$

$$x(t) * \delta^{(k)}(t-t_0) = x^{(k)}(t) * \delta(t-t_0) = x^{(k)}(t-t_0)$$

当 k 取正整数时表示导数阶次，k 取负整时为重积分的次数。

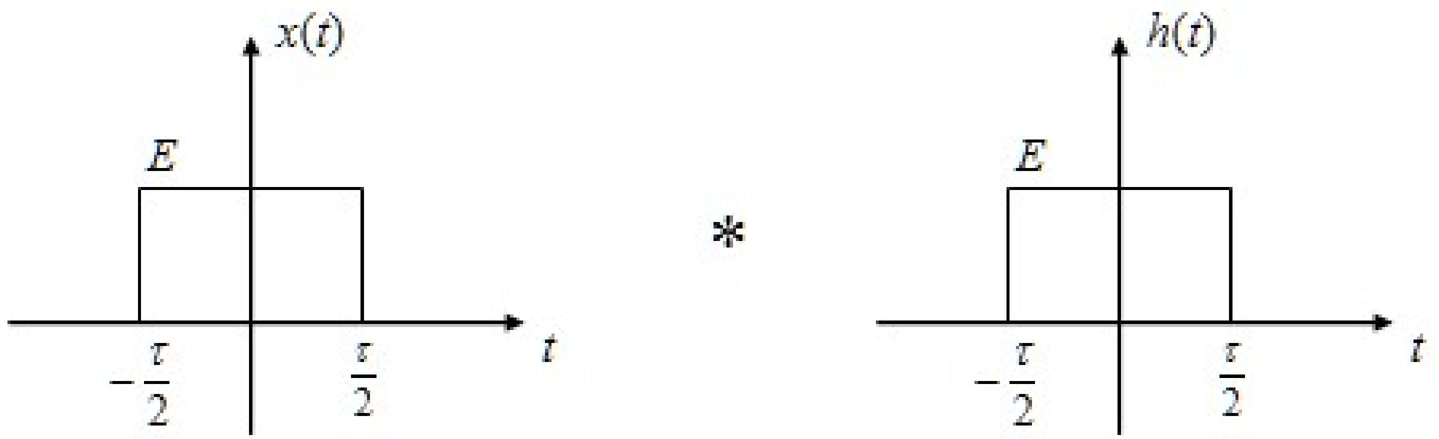
例如 $x^{(-1)}(t)$ 表示 $x(t)$ 一次积分。$\delta^{(-1)}(t) = u(t)$

例2.4

【例2.4】 用卷积性质计算图2-15(a)所示两信号的卷积。

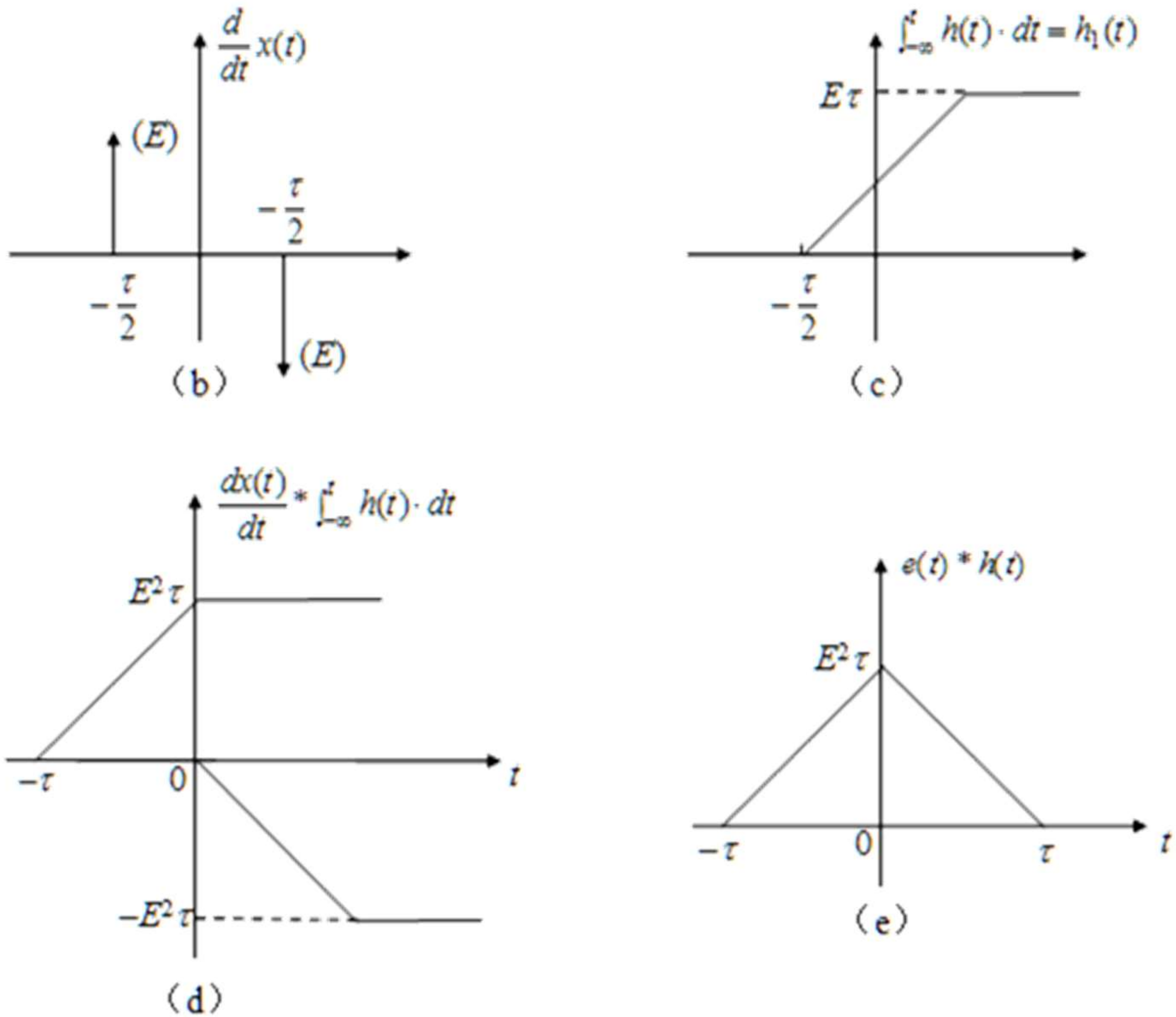
解：利用

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{d}{dt}x(t)*\int_{-\infty}^{t}h(t)\cdot dt$$



（a）

例2.4


$\frac{d}{dt}x(t)$
(E)
$-\frac{\tau}{2}$
$-\frac{\tau}{2}$
(E)
(b)
$\int_{-\infty}^{t} h(t)\cdot dt = h_1(t)$
$E\tau$
$-\frac{\tau}{2}$
(c)
$\frac{dx(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} h(t)\cdot dt$
$E^2\tau$
$-\tau$
0
t
$-E^2\tau$
(d)
$e(t) * h(t)$
$E^2\tau$
$-\tau$
0
τ
t
(e)

§2.0 引言

§2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§2.2 离散时间LTI系统的时域分析

§2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

§2.5 LTI系统的响应分解

§2.6 LTI系统的框图表示

2.2.1 离散时间信号的单位脉冲分解

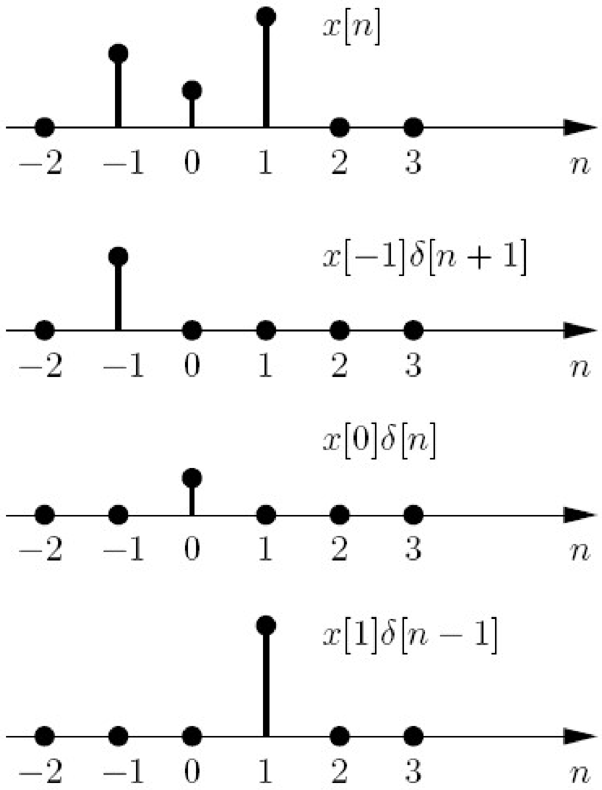
- 展开为：

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}} \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}}$$

2.2.1 离散时间信号的单位脉冲分解



$$x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]$$

图2-16 一个离散时间信号分解为一组加权的移位脉冲之和

例2.5

【例2.5】 用单位脉冲表示单位阶跃信号$u[n]$。

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k]$$

因为$k<0$时，$u[k]=0$，而$k\geq 0$时，$u[k]=1$，上式可表示为

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

如我们做变量替换$n-k=m$，$u[n]$还可以表示另一种形式，即

$$u[n]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

上式表明，$u[n]$也可表示为单位脉冲信号的累加。

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应

- 为了说明其基本原理，考虑以下LTI系统。

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$\delta[n-n_0] \rightarrow h[n-n_0]$$

其中，$h[n]$ 称为系统的单位脉冲响应。

将 $x[n]$ 分解为移位冲激信号的线性组合：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应

- 根据LTI系统的齐次性，有

$$x[k]\cdot\delta[n-k]\rightarrow x[k]\cdot h[n-k]$$

- 再根据LTI系统的叠加性，我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- 有

简称卷积和

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]=x[n]*h[n]$$

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应

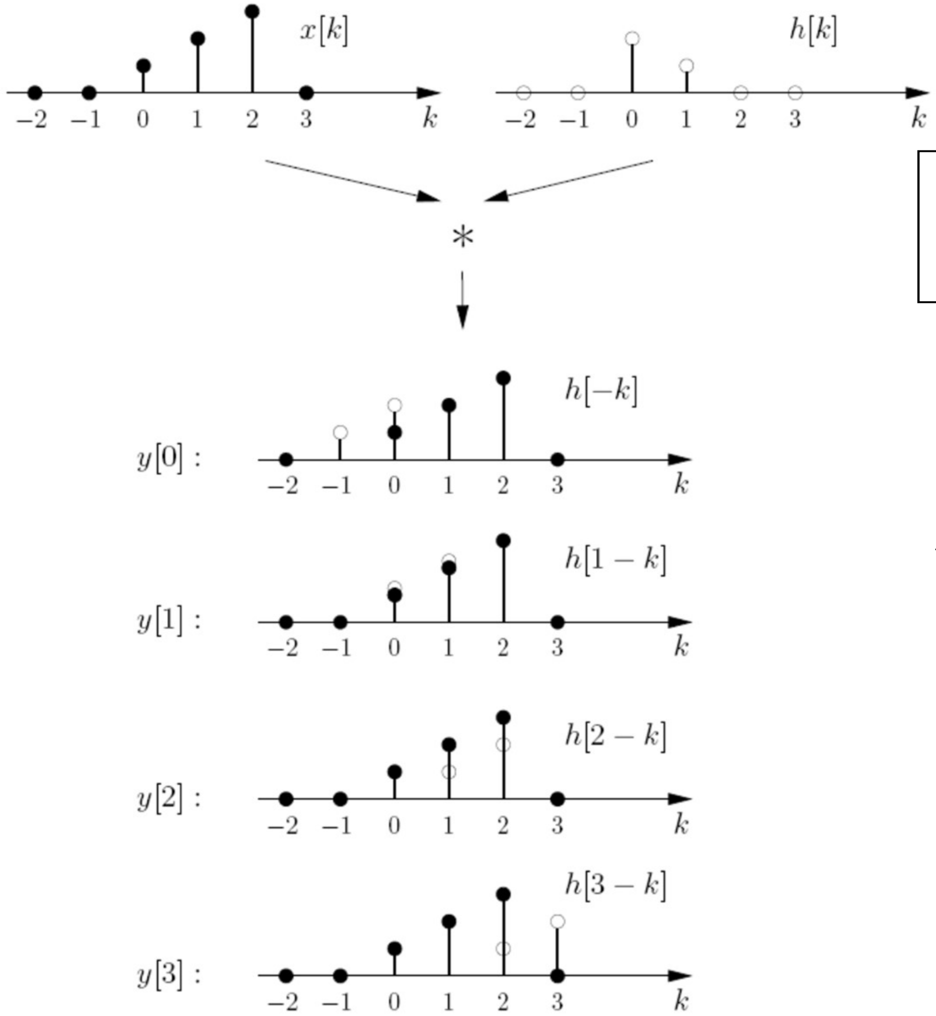
卷积和的意义

1. 离散时间LTI系统对输入信号的响应过程可以看作是两个信号相互作用的过程：卷积和运算。

2. 单位脉冲响应$h[n]$可以完全表征系统。

3. 单位冲激响应给出离散时间LTI系统更一般的描述方法。

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应



卷积和图示法：

1.反转：$h[k] \Rightarrow h[-k]$

2.平移：$h[n-k]$

3.相乘求和：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

MATLAB演示

【例2-23】已知：$x[n]=(0.5)^n u[n]$，$h[n]=(0.8)^n u[n]$

求 $y[n]=x[n]*h[n]$。

解：源程序如下

```
n = 0:100;
x = (1/2).^n;
h = (0.8).^n;
y = conv(x,h);
subplot(3,1,1);stem(n,x);
xlabel('n');ylabel('x[n]');
axis([0 20 0 1.5]);grid on;
subplot(3,1,2);stem(n,h);
xlabel('n');ylabel('h[n]');
axis;
subplot(3,1,3);
stem(0:length(y)-1,y);
xlabel('n');ylabel('x[n]*h[n]');
axis([0 20 0 1.5]);grid on;
```

MATLAB演示

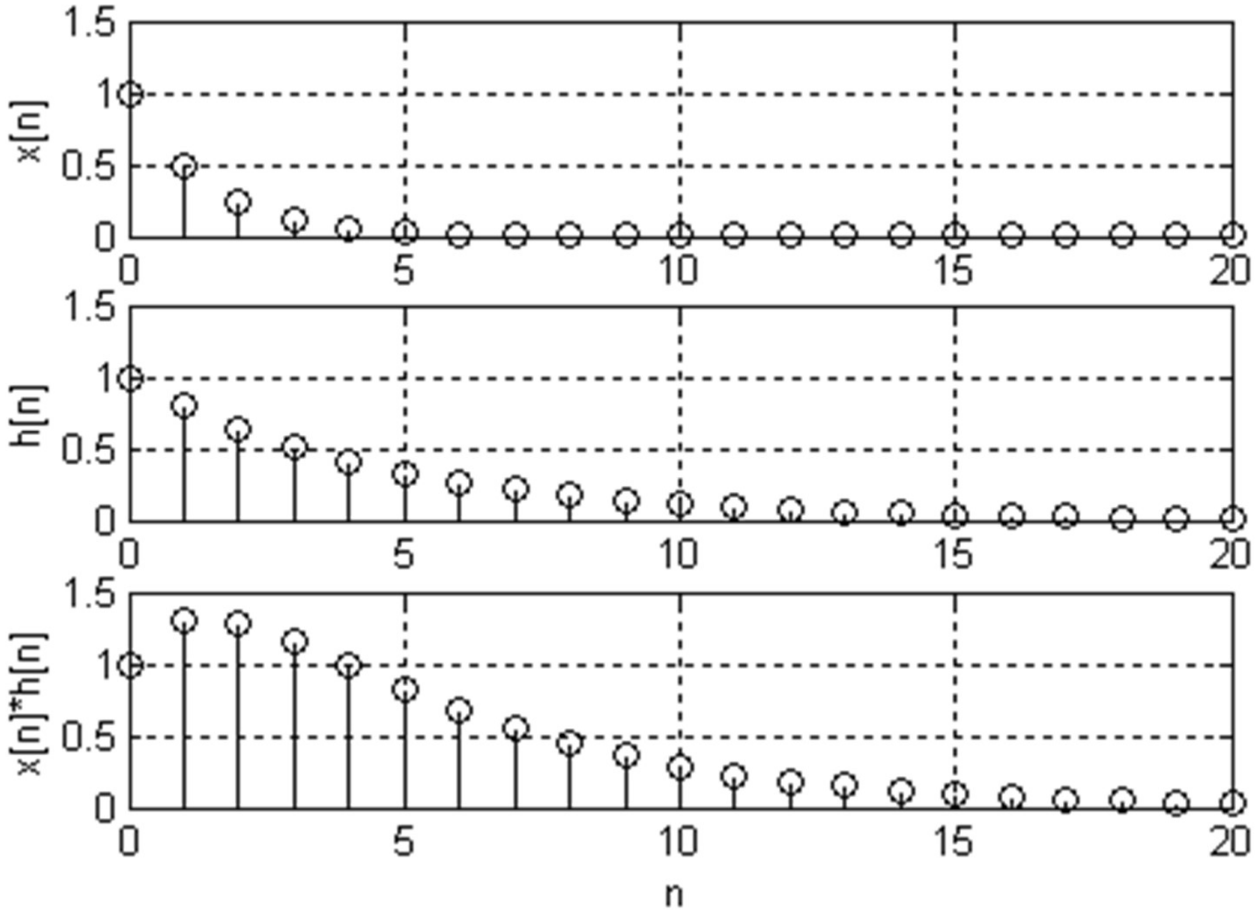


图2-35 例2.23的运行结果图

2.2.3 卷积和的性质

1．卷积和的代数性质

- 交换律：$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$
- 结合律：$x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)=\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]$
- 分配律：$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

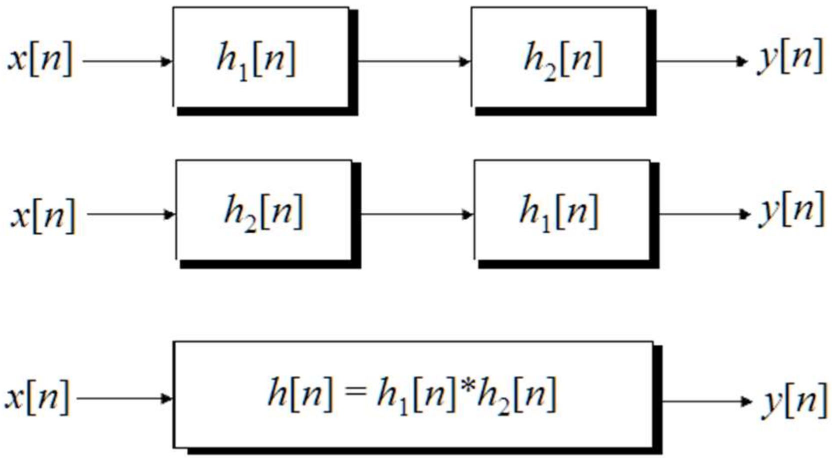


图2-19 离散时间LTI系统的级联

2.2.3 卷积和的性质

2．与冲激脉冲序列$\delta[n]$和阶跃函数$u[n]$的卷积

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

进一步有 $x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

任意信号 $x[n]$ 与单位阶跃 $u[n]$ 的卷积和，可表示为：

$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

推论：

（1） $x[n-n_1]*\delta[n-n_2]=x[n-n_1-n_2]$

（2）若：$x[n]*h[n]=y[n]$

则：$x[n-n_1]*h[n-n_2]=y[n-n_1-n_2]$

§ 2.0 引言

§ 2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§ 2.2 离散时间LTI系统的时域分析

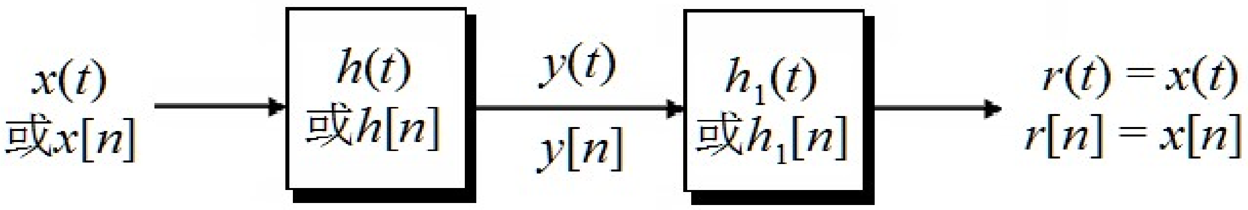
§ 2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§ 2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

§ 2.5 LTI系统的响应分解

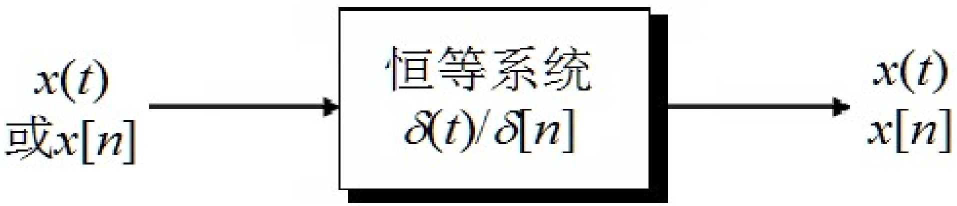
§ 2.6 LTI系统的框图表示

2.3.1 LTI系统的可逆性与可逆系统



（a）

图2-20 LTI系统的可逆性



（b）

LTI逆系统与原系统存在以下关系：

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t) \qquad h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

根据上式，可以构造LTI系统的可逆性及其逆系统。

例2.8

【例2.8】 一个连续时间LTI系统的输入输出关系为

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

试求它的逆系统。

解：将 $x(t)=\delta(t)$ 代入方程，可得该系统的单位冲激响应 $h(t)$

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

设该系统的逆系统为 $h_1(t)$ ，则有

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t)$$

例2.8

将$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)$ 代入上式,再根据 $\delta(t)$ 的卷积性质,有

$$\left(\delta'(t)+\delta(t)\right)*h_1(t)=h'_1(t)+h_1(t)=\delta(t)$$

观察上式，可知 $h_1(t)$ 为由方程$y'(t)+y(t)=x(t)$描述的连续LTI系统的单位冲激响应,故可求得逆系统为

$$y'(t)+y(t)=x(t)$$

例2.9

【例2.9】 一离散时间累加器系统的输入输出关系为

$$y[n]-y[n-1]=x[n]$$

试求它的逆系统。

解：根据单位脉冲$\delta[n]$的卷积和性质，可将上述输入输出关系重新写为

$$y[n]*\left(\delta[n]-\delta[n-1]\right)=x[n] \qquad \text{[A]}$$

将原系统脉冲响应代入上式，得

$$h[n]*(\delta[n]-\delta[n-1])=\delta[n]$$

根据逆系统的定义，可得逆系统

$$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

为一差分器。

例2.9

实际上，由[A]式，我们可得

$$y[n]*\left(\delta[n]-\delta[n-1]\right)*u[n]=x[n]*u[n]$$

等式左边化简得

$$y[n]*\left(u[n]-u[n-1]\right)=x[n]*u[n] \qquad \text{[B]}$$

由 $u[n]$ 的卷积和性质及与 $\delta[n]$的关系

$$x[n]*u[n]=\sum_{n=-\infty}^{n}x[n] \qquad u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

式[B]可变为$y[n]*\delta[n]=\sum_{n=-\infty}^{n}x[n]$，即$y[n]=\sum_{n=-\infty}^{n}x[n]$，为一累加器。

因此，累加器的逆系统为一差分器。

2.3.2 LTI系统的稳定性

- 对于稳定的系统：有界的输入必产生有界的输出。

- 充要条件为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

2.3.2 LTI系统的稳定性

证明：

1. 必要条件：

设一具有单位冲激响应$h(t)$的稳定LTI系统的输入信号为

$$x(t)=\begin{cases}0, & h(-t)=0\\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|}, & h(-t)\neq 0\end{cases}$$

显然 $x(t)$ 为一有界信号，$|x(t)|\leq 1$ ，对所有 t 。
则系统输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$$

2.3.2 LTI系统的稳定性

因此, $t=0$ 时，输出 $y(0)$ 为

$$y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(-\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\cdot d\tau$$

因为 $y(0)$ 为稳定系统在 $t=0$ 时刻上的输出, $y(0)$ 必有界。

因此要求上式的右边积分值有界，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\cdot d\tau<\infty \qquad (2.43)$$

即系统的单位冲激响应绝对可积。

这就证明了（2.43）式是连续LTI系统稳定的必要条件。

2.3.2 LTI系统的稳定性

2. 充分条件：

设系统的输入 $x(t)$ 为有界，即

$$|x(t)| \le B \quad \text{对所有} t$$

则系统输出的绝对值为

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cdot d\tau \right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)| \cdot d\tau$$

$$\le B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau$$

如 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau < \infty$ ，有 $|y(t)| \le B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau < \infty$

2.3.2 LTI系统的稳定性

用完全类似的方法可得到离散LTI系统稳定的充要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

即系统的单位脉冲响应绝对可和。

例2.10

【例2.10】 考查累加器的稳定性。

解：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

因为累加器的单位脉冲响应 $h[n]=u[n]$ ，因此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\,h[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$$

所以累加器是非稳定系统。

2.3.3 LTI系统的因果性

一个因果系统的输出仅决定于现在和过去时刻的系统输入值。

- 考虑离散时间LTI系统，其输出可表示为:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k]+\sum_{k=n+1}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

- 分析:

  上式中的第二项与将来的输入有关，危保证其输出与将来的输入无关，必使第二项等于零。

即在 $k>n$ 时 $(n-k<0)$， $h(n-k)=0$

2.3.3 LTI系统的因果性

- 离散时间LTI系统的因果性的充要条件：

$$h[n]=0, \qquad n<0$$

- 同理，一个连续时间LTI系统因果性的充要条件为：

$$h(t)=0, \qquad t<0$$

例2.11

【例2.11】 考查系统 $y(t)=x(t-t_0)$。

其冲激响应为 $h(t)=\delta(t-t_0)$。

当 $t_0\ge 0$ 时，是因果系统，系统为一延时器；
当 $t_0<0$ 时，是非因果系统，系统的输出超前输入。

同样，对于离散LTI系统 $y[n]=x[n-n_0]$，仅当 $n_0\ge 0$ 时，才是一因果系统，系统是一离散时间的延时器。

2.3.4 LTI系统的单位阶跃响应

- 连续时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\cdot d\tau$$

- 离散时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

2.3.4 LTI系统的单位阶跃响应

阶跃响应和冲激响应之间的关系：

- 连续时间LTI系统

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\cdot d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\frac{ds(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*s(t)$$

- 离散时间LTI系统

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=x[n]*(s[n]-s[n-1])=(x[n]-x[n-1])*s[n]$$

MATLAB演示

【例2-20】 求解方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t),\quad x(t)=e^{-t}\cdot u(t)$$

的单位冲激响应和单位阶跃响应。

解：源程序如下

```
ts = 0; te = 10; dt = 0.01;
sys = tf([1 3],[1 4 3]);
t = ts : dt : te;
x = exp(-1* t);
h = impulse(sys, t); %计算单位冲激响应
s = step(sys, t);   %计算单位阶跃响应
```

MATLAB演示

```
subplot(3,1,1);plot(t,h);xlabel('t(sec)');ylabel('h(t)');
axis([t(1) t(length(t)) -1 1]);grid on;
subplot(3,1,2);plot(t,s);xlabel('t(sec)');ylabel('s(t)');
axis([t(1) t(length(t)) 0 1.5]);grid on;
```

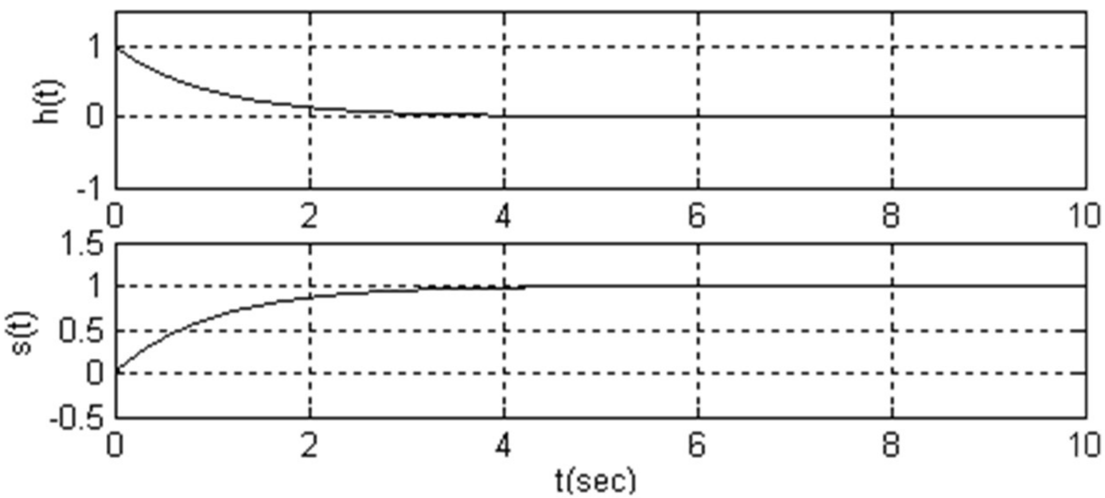


图2-32-1 例2-20的运行结果图

§ 2.0 引言

§ 2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§ 2.2 离散时间LTI系统的时域分析

§ 2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§ 2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

§ 2.5 LTI系统的响应分解

§ 2.6 LTI系统的框图表示

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

- 通常可用微分方程来描述连续时间系统，用差分方程来描述离散时间系统，即通过输出与输入间的关系来描述系统。

- 除了用卷积法求解系统的响应方法外，另一种方法是求解表征LTI系统的方程。

对于连续时间LTI系统：微分方程

对于离散时间LTI系统：差分方程

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

连续时间LTI系统的数学模型是常系数线性微分方程。可根据实际系统的结构、元件特性，利用有关基本定律来建立对应的微分方程。

- 高阶连续时间LTI的微分方程表示：

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

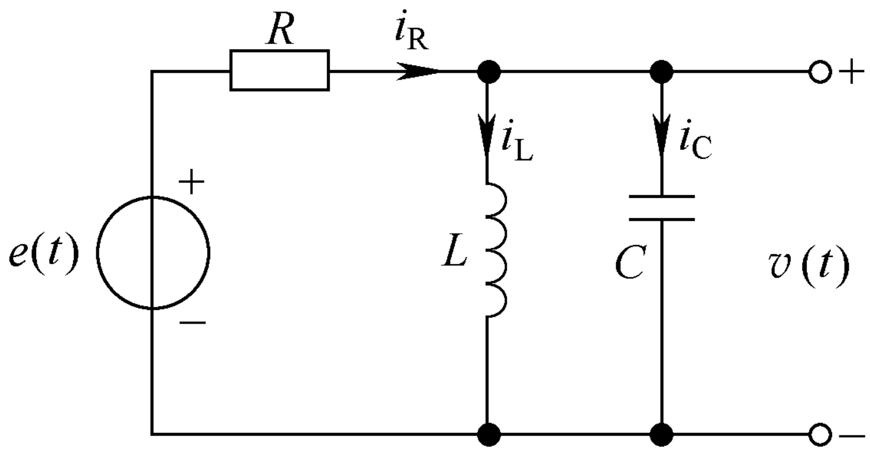
或缩写为：$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$

例2.13

【例2.13】图2-22所示为LC并联电路，求并联端电压$v(t)$与激励源 $e(t)$ 间关系。

解：根据元件的电压电流关系有

电感： $i_L(t) = \dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$ （2.55-1）



电容： $i_C(t) = C\dfrac{d}{dt}v(t)$ （2.55-2）

电阻： $i_R(t) = \dfrac{e(t)-v(t)}{R}$ （2.55-3）

例2.13

根据KCL定律，有

$$i_R(t) = i_L(t) + i_C(t)$$

将式（2.55-1）、式（2.55-2）和式（2.55-3）代入上式并化简得

$$C\frac{d^2}{dt^2}v(t)+\frac{1}{R}\frac{d}{dt}v(t)+\frac{1}{L}v(t)=\frac{1}{R}\frac{d}{dt}e(t)$$

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

全解由两部分组成：齐次解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 。

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- 1. 齐次解

齐次解是下面方程的解：

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = 0$$

其特征方程为 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

其 n 个根 λ_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）称为微分方程的特征根。

齐次解$y_h(t)$的函数形式由特征根确定。

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

不同特征根所对应的齐次解的函数形式

特征根 λ_i	各特征根 λ_i 在齐次解 $y_h(t)$ 中的函数形式
单实根（非重根）	$c_i e^{\lambda_i(t)}$
k 重实根	$\left(c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + \cdots + c_{k-1} t + c_k\right) e^{\lambda_i(t)}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t}\left(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t\right)$ 或 $Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \theta)$， $Ae^{j\theta} = c_1 + jc_2$
k 重共轭复根	$c_1 t^{k-1} \cdot e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta_1) + c_2 t^{k-2} e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta_2) + \cdots + c_k e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta_k)$

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

（1）无重根的情况下，微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$$

其中常数C_1，C_2，…，C_n由系统的初始条件决定。

（2）若特征根有实重根的情况下，则对应于 k 阶重根λ_i的部分将有 k 项

$$\left(c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + \cdots + c_{k-1} t + c_k\right) e^{\lambda_i (t)}$$

其中常数$c_1, c_2, \ldots, c_k$连同其它特征根所对应的项的系数，由系统的初始条件确定。

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

- 2. 特解

几种典型激励函数所对应特解的函数形式

激励函数 $x(t)$	响应函数 $y(t)$ 的特解 $y_p(t)$ 的函数形式
E（常数）	B
t^m	$B_1t^m+B_2t^{m-1}+\cdots+B_mt+B_{m+1}$，所有特征根不等于 0 $t^r\left(B_1t^m+B_2t^{m-1}+\cdots+B_mt+B_{m+1}\right)$，有 r 重等于 0 的特征根
e^{at}	Be^{at}，a不等于特征根 $B_1t^re^{at}+B_2t^{r-1}e^{at}+\cdots+B_rte^{at}+B_{r+1}e^{at}$，$a$等于 r 重特征根，$r=1$时为单根
$\cos\beta t$ or $\sin\beta t$	$B_1\cos\beta t+B_2\sin\beta t$ 或 $A\cos(\beta t+\theta)$，$Ae^{j\theta}=B_1+jB_2$ 所有特征根不等于 $\pm j\beta$
$t^me^{at}\cos t$ 或 $t^me^{at}\sin t$	$\left(B_1t^m+\cdots+B_mt+B_{m+1}\right)e^{at}\cos t+\left(D_1t^m+\cdots+D_mt+D_{m+1}\right)e^{at}\sin\beta t$ 所有特征根不等于 $a\pm j\beta$

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

- 3．全解

方程完全解为 $y(t)=y_n(h)+y_p(t)$

若微分方程特征根互不相同则其全解可表示为

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+y_p(t)$$

- 4．待定系数确定

通常取 $t_0=0_+$ 的 n 个边界条件来确定 n 阶系统完全解中的待定系数。

初始条件：$t=0_+$ 的n 个边界条件 $y^{(k)}(0_+)$ （$k=0,1,\cdots,n-1$）。
起始条件：$t=0\_$ 的n 个边界条件 $y^{(k)}(0\_)$（$k=0,1,\cdots,n-1$）。

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

在实际电路中，电容两端的电压和电感中的电流不会发生突变，即

$$v_C(0_+) = v_C(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

然后根据电网络的拓朴结构和元件特性求得 0_+时刻其它电流或电压值（初始条件）。

例2.14

【例2.14】 给定线性常系数微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=f(t)$$

求：当 $f(t)=2e^{-t}\cdot u(t)$；$y(0_+)=2$，$y'(0_+)=-1$ 时的全解

解：（1）齐次解

特征方程为 $\lambda^5+5\lambda+6=0$

其特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$。

方程的齐次解为 $y_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

例2.14

（2）求特解

由表可知，当输入 $f(t)=2e^{-t}$ 时，其特解可设为

$$y_p(t)=Be^{-t}$$

其一阶、二阶导数分别为

$$y'_p(t)=-Be^{-t} \qquad y''_p(t)=Be^{-t}$$

代入方程，得

$$Be^{-t}+5(-Be^{-t})+6Be^{-t}=2e^{-t}$$

由上式解得 $B=1$ ，方程的特解：$y_p(t)=e^{-t}$

例2.14

（3）微分方程的全解为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + e^{-t}$$

其一阶导数

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t} - e^{-t}$$

并将初始条件代入，得

$$\begin{cases} y(0_+) = c_1 + c_2 + 1 = 2 \\ y'(0_+) = -2c_1 - 3c_2 - 1 = -1 \end{cases}$$

由上式解得 $c_1 = 3$, $c_2 = -2$

例2.14

最后得微分方程的全解

$$y(t) = \underbrace{3e^{-2t} - 2e^{-3t}}_{\text{齐次解}} + \underbrace{e^{-t}}_{\text{特解}}, \quad t > 0$$

$$= \underbrace{\left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{e^{-t}u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

- 为确定自由响应部分的常数（$i = 1, 2, \ldots, n$），还必须根据系统的起始状态和激励信号求出初始状态。

例子：求解系统响应

【例】 如图所示电路，$t<0$ 时开关 s 处于“1”的位置而且已经达到稳态；当 $t=0$ 时，s 由“1”转向“2”。建立电流 $i(t)$ 的微分方程，并求解 $i(t)$ 在 $t\geq 0_+$ 的时域解。

解： （1）求解电路的微分方程

列回路方程：

$$R\cdot i(t)+v_c(t)=e(t) \qquad (1)$$

$$v_c(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad (2)$$

列结点方程：

$$i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}+i_L(t) \qquad (3)$$

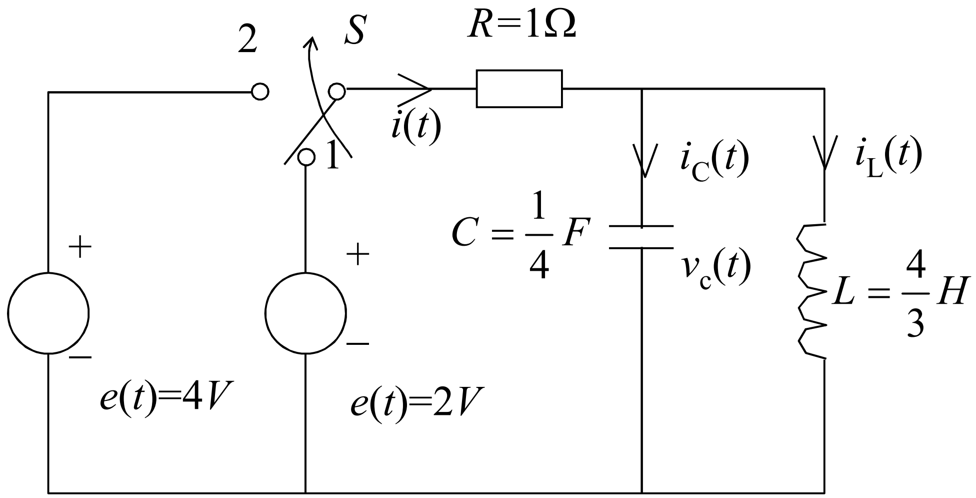
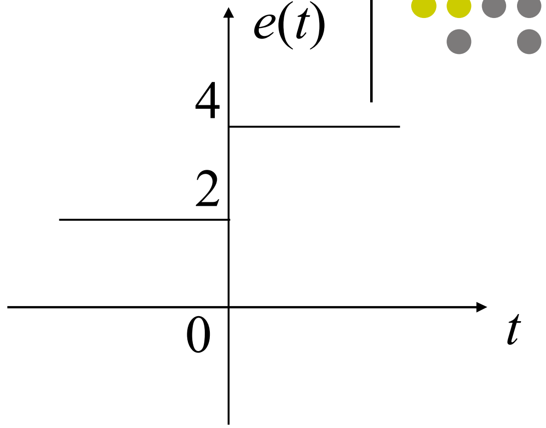


图 RLC 电路

例子：求解系统响应

对（3）式求导，并将（2）代入，得



$$\frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{v_c(t)}{L} \qquad (4)$$

结合（1）和（4）消去 $v_c(t)$ 得

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{R}\frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{1}{RLC}e(t) \qquad (5)$$

电路参数代入得

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 4\frac{di(t)}{dt} + 3i(t) = \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + 3e(t)$$

例子：求解系统响应

（2）求系统完全响应

系统特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

特征根：$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -3$。

齐次解：$i_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}$ ，$t \geq 0_+$

特解：由于 $t \geq 0_+$ 时，$e(t) = 4V$

令特解 $i_p(t) = B$ ，代入方程，得 $B = 4$

系统完全响应为

$$i(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} + 4$$

例子：求解系统响应

（3）由电路确定 $i(0_+)$ 和 $\dfrac{di(0_+)}{dt}$

开关换路前：

$$i(0_-) = i_L(0_-) = \frac{2}{R} = 2A$$

由于电感电压等于零，得：

$$\frac{di(0_-)}{dt} = \frac{di_L(0_-)}{dt} = 0\text{；}$$

或 $$v_c(0_-) = 0v$$

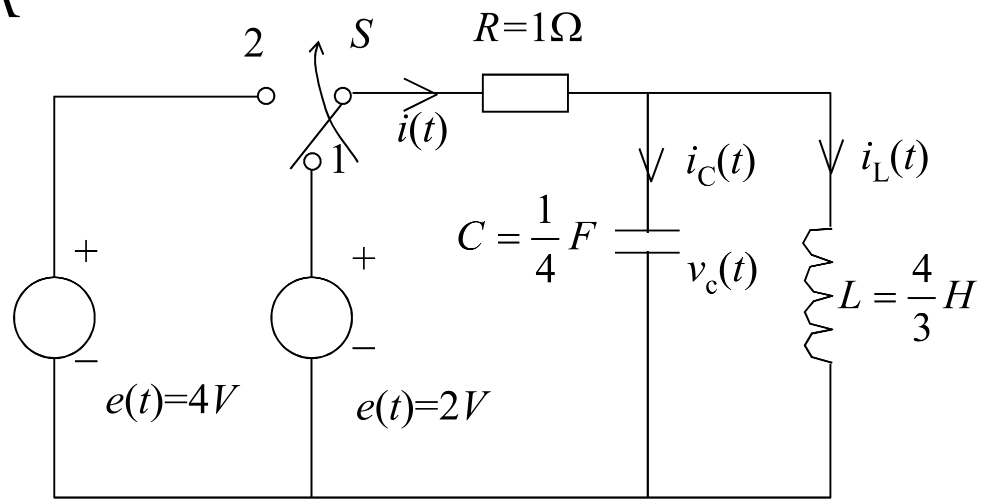


图 RLC 电路

例子：求解系统响应

开关换路后：

由于电容两端电压和电感中的电流不会发生突变，因而有

$$i(0_+) = \frac{e(0_+) - v_c(0_+)}{R} = 4A$$

$$\frac{di(0_+)}{dt} = \frac{1}{R}\left[\frac{de(0_+)}{dt} - \frac{dv_c(0_+)}{dt}\right] = \frac{1}{R}\left[\frac{de(0_+)}{dt} - \frac{1}{c}i_c(0_+)\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{de(0_+)}{dt} - \frac{1}{c}\left[i(0_+) - i_L(0_-)\right]\right]$$

$$= \left[0 - 4(4-2)\right] = -8A$$

例子：求解系统响应

（4）求 $i(t)$ 在 $t \geq 0_+$ 的完全响应

代入初始条件，得

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + 4 = 4 \\ \dfrac{di(0_+)}{dt} = -A_1 - 3A_2 = -8 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_1 = -4 \\ A_2 = 4 \end{cases}$$

完全响应为：

$$i(t) = \left(-4e^{-t} + 4e^{-3t} + 4\right) \quad ， \quad t \geq 0_+$$

$$= 4\left(-e^{-t} + e^{-3t} + 1\right)u(t)$$

2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

- 齐次解中的常数(i=1,2,…,n)可由冲激函数匹配法确定。
  原理：冲激函数及其n阶导数仅在零时刻非零。

例2.17

【例2.17】 求方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

所描述的因果LTI系统的冲激响应 $h(t)$。

解： $t>0$ 时系统响应为齐次解的形式。

冲激响应的特解仅在 $t=0$ 处被反映出来，其特解形式为 $\delta(t)$ 及其导数形式。

（1）齐次解

特征方程： $\lambda^2+3\lambda+2=0$

冲激响应的齐次解：$h_h(t)=\left(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}\right)u(t)$

例2.17

（2）特解

将 $x(t)=\delta(t)$ 代入方程右边，得

$$右边 = 2\delta''(t)+\delta'(t)+\delta(t)$$

由于方程的最高阶数为2（当阶数小于2时，冲激响应的特解中不包含冲激函数），所以，冲激响应 $h(t)$ 的特解 $h_p(t)=B\delta(t)$ 代入方程使方程两边的 $\delta''(t)$ 项的系数相同，得

$$B=2$$

所以 $h(t)$ 的全解为

$$h(t)=h_h(t)+h_p(t)=2\delta(t)+\left(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}\right)u(t)$$

例2.17

（3）用冲激函数匹配法确定齐次解的系数

$$h'(t) = 2\delta'(t) + (c_1 + c_2)\delta(t) + \left(-c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t}\right)u(t)$$

$$h''(t) = 2\delta''(t) + (c_1 + c_2)\delta'(t) + (-c_1 - 2c_2)\delta(t) + \left(c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t}\right)u(t)$$

将$h(t)$、$h'(t)$和$h''(t)$中的冲激函数项代入方程，
即$t=0$时，方程为

$$2\delta''(t) + (c_1 + c_2)\delta'(t) - (c_1 + 2c_2)\delta(t) + 3(2\delta'(t) + (c_1 + c_2)\delta(t)) \\ + 4\delta(t) = 2\delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$$

例2.17

两边系数要平衡，得

$$\begin{cases}(c_1+c_2)+6=1\\ -(c_1+2c_2)+3(c_1+c_2)+4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=2\\ c_2=-7\end{cases}$$

所以，$h(t)=2\delta(t)+\left(2e^{-t}-7e^{-2t}\right)u(t)$

2.4.2 离散时间LTI系统差分方程描述

线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]\ ,\quad a_0 \neq 0$$

其解有齐次解和特解构成：$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

齐次解的形式是由特征根决定：$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \lambda^{N-k} = 0$

不同特征根所对应的齐次解

特征根	齐次解 $y_h[n]$
单实根 λ_i	$C_i\lambda_i^n$
r 重实根 λ	$\left(C_{r-1}n^{r-1} + C_{r-2}n^{r-2} + \cdots + C_1 n + C_0\right)\lambda^n$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = a \pm jb = pe^{\pm j\beta}$	$p^n\left[(\cos\beta n + D\sin\beta n)\right]$或 $Ap^n\cos(\beta n - \theta)$

2.4.2 离散时间LTI系统差分方程描述

特解的形式是由输入信号决定（见教材62页表2-4）。

全解：如特征根都是单根，则全解可表示如下：

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=\sum_{i=1}^{N}C_i\lambda_i^n+y_p[n]$$

式中常数 C_i 由初始条件（或边界条件）确定。

§ 2.0 引言

§ 2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§ 2.2 离散时间LTI系统的时域分析

§ 2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§ 2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

§ 2.5 LTI系统的响应分解

§ 2.6 LTI系统的框图表示

2.5 LTI系统的响应分解

零输入响应：不考虑外加输入信号的作用,仅由系统的起始状态所产生的响应。零输入响应是齐次解形式，是齐次解的一部分。

零状态响应：不考虑系统起始状态的作用，仅由系统外加激励信号所产生的响应。零状态响应由强迫响应（特解）及自由响应的一部分构成。

系统的全响应=零输入响应+零状态响应

2.5 LTI系统的响应分解

系统全响应的表示式（特征根无重根）：

对连续时间系统：

$$y(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k e^{\lambda_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \qquad t\ge 0$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik} e^{\lambda_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk} e^{\lambda_k t}+B(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik} e^{\lambda_k t}+x(t)*h(t)$$

对离散时间系统：

$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k (\lambda_k)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B[N]}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik} (\lambda_k)^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk} (\lambda_k)^n+B[N]}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik} (\lambda_k)^n+x[n]*h[n]$$

MATLAB演示

【例2-21】 求解下列方程的零输入响应。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t),\quad y(0_-)=1,\dot{y}(0_-)=2$$

解：源程序如下

```
T=0.05;
Y0=[1 1+2*T];
n=2:100;
c=[4*T-2 1-4*T+3*T^2];
d=[1];f=0*n;
y1=recur(c,d,n,f,0,Y0);
y=[Y0 y1];
t=0:T:(length(n)+1)*T;
plot(t,y);
xlabel('t(sec)');ylabel('y(t)');
axis([t(1) t(length(t)) -0.5 1.5]);
grid on;
```

MATLAB演示

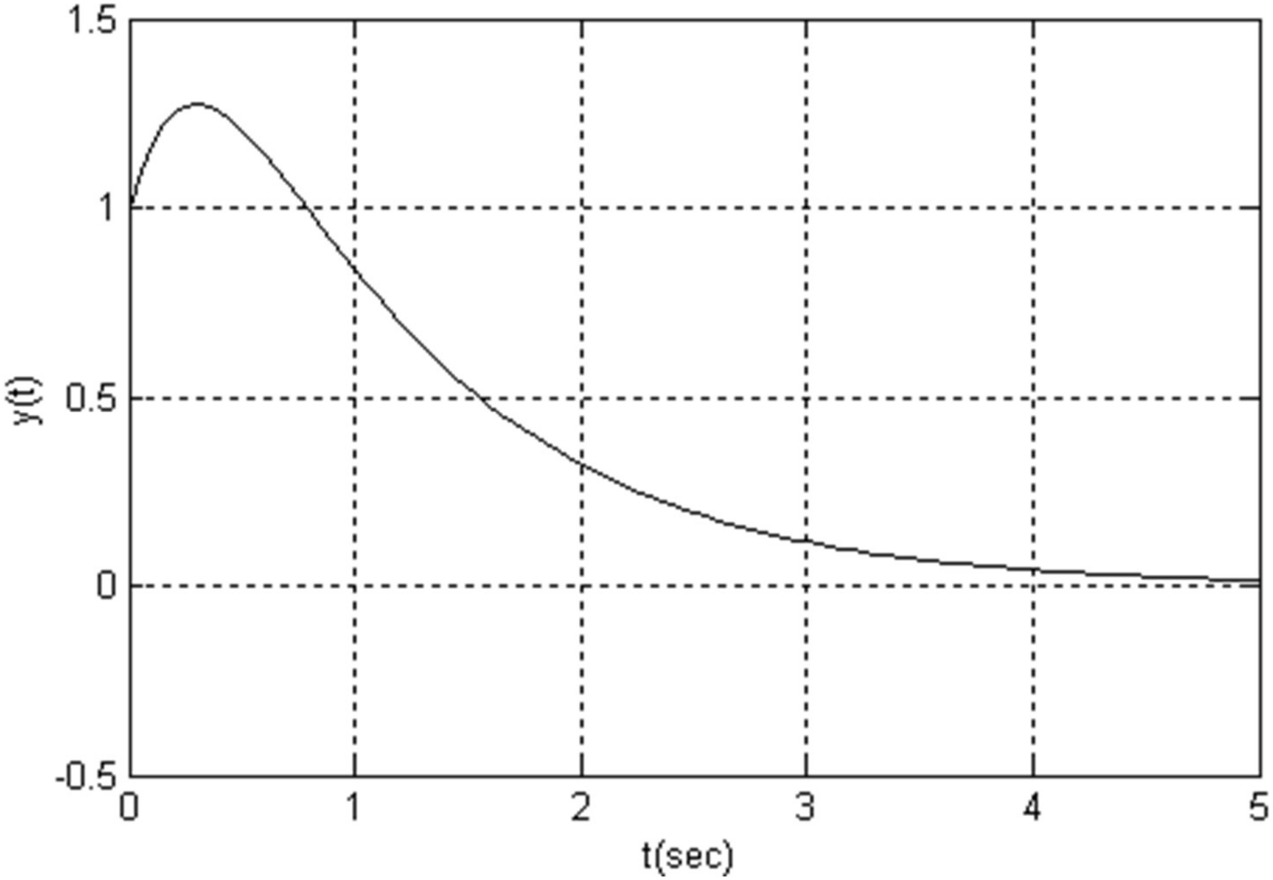


图2-33 例2.21的运行结果图

MATLAB演示

【例2-20】 求解方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t),\quad x(t)=e^{-t}\cdot u(t)$$

的零状态响应。

解：源程序如下

```
%Program2.1 Numerical Solution of
%Linear Constant - Coefficient Differential Equations
ts = 0; te = 10; dt = 0.01;
sys = tf([1 3],[1 4 3]);
t = ts : dt : te;
x = exp(-1* t);
```

MATLAB演示

$y = \mathrm{lsim}(sys, x, t);$ %计算零状态响应

subplot(3,1,3);plot(t, y);xlabel('t(sec)');ylabel('y(t)');

axis([t(1) t(length(t)) -0.5 1]);grid on;

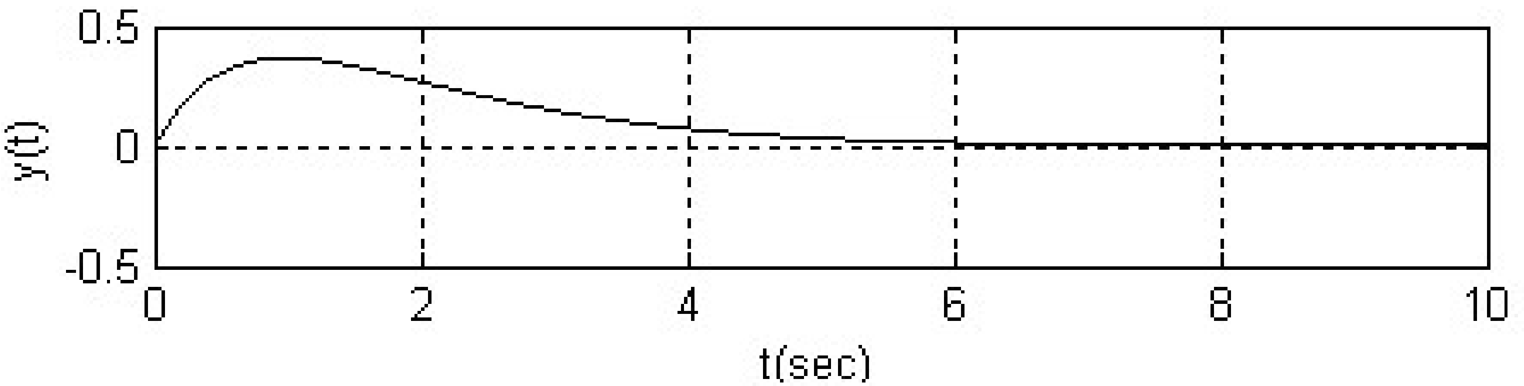


图2-32-2 例2-20的运行结果图

例2.14

【例2.14】输入信号如图2-24，系统的方程描述为

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 4\frac{di(t)}{dt} + 3i(t) = \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + 3e(t)$$

求系统的零状态响应和零输入响应（$t \geq 0^+$）。

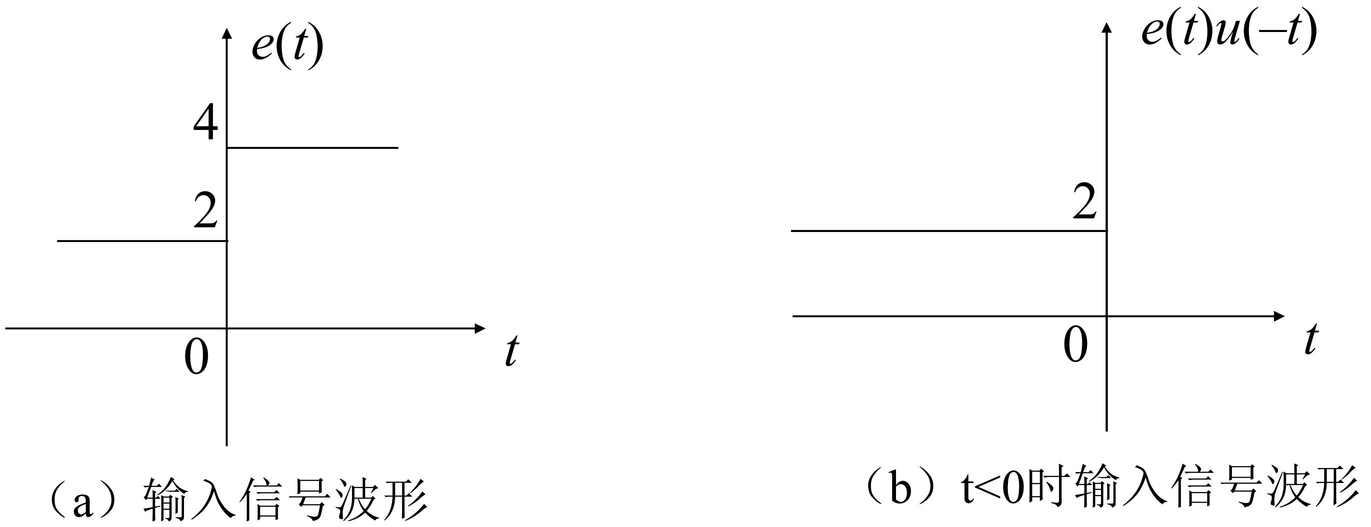


图2-24 例2-17的输入信号波形

例2.14

解：（1）根据方程

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+4\frac{di(t)}{dt}+3i(t)=\frac{d^2 e(t)}{dt^2}+3e(t)$$

特征根：$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-3$

（2）确定系统响应 $i(t)$ 的起始条件。

$$i(0_-)=B \qquad i'(0_-)=0$$

代入方程，得 $3B=3\times 2$，所以 $B=2$ 。

有 $i(0_-)=2$，$i'(0_-)=0$

以及 $e(0_-)=2$ ，$e'(0_-)=0$

例2.14

（3）求零输入响应$i_{zi}(t)$

零输入响应应满足

$$\frac{d^2 i_{zi}(t)}{dt^2}+4\frac{d i_{zi}(t)}{dt}+3i_{zi}(t)=0,\quad t\geq 0_+$$

但在 $t=0$ 时刻，方程的右边应有：

$$\left.\frac{d^2 e(t)u(-t)}{dt^2}\right|_{t=0}=-2\delta'(t)$$

例2.14

右边的$\delta(t)$ 最高导数阶数小于方程左边输出信号导数的阶数，因此，$i_{zi}(t)$在$t=0$处无冲激函数。

因此，有

$$i_{zi}(t)=\left(C_{zi1}e^{-t}+C_{zi2}e^{-3t}\right)u(t)$$

$$i'_{zi}(0)\text{包含}:\left(i_{zi}(0_+)-i_{zi}(0_-)\right)\delta(t)$$

$$i''_{zi}(0)\text{包含}:\left(i_{zi}(0_+)-i_{zi}(0_-)\right)\delta'(t)+\left(i'_{zi}(0_+)-i'_{zi}(0_-)\right)\delta(t)$$

例2.14

将上式代入方程（2），得

$$\left(i_{zi}(0_+)-i_{zi}(0_-)\right)\delta'(t)+\left(i'_{zi}(0_+)-i'_{zi}(0_-)\right)\delta(t)$$
$$+4\left(i_{zi}(0_+)-i_{zi}(0_-)\right)\delta(t)=-2\delta'(t)$$

化简上式，并使两边冲激函数项的系数相同，有

$$\begin{cases} i_{zi}(0_+)-i_{zi}(0_-)=-2 \\ i'_{zi}(0_+)-i'_{zi}(0_-)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{zi}(0_+)=i_{zi}(0_-)-2=0 \\ i'_{zi}(0_+)=i'_{zi}(0_-)+8=8 \end{cases}$$

因此，解得系统的零输入响应为

$$i_{zi}(t)=\left(4e^{-t}-4e^{-3t}\right)u(t)$$

例2.14

（4）零状态响应

零状态响应 $i_{zs}(t)$ 应满足以下条件

$$i_{zs}(0_-)=i'_{zs}(0_-)=0 \quad \text{且输入} \quad e(t)=4u(t)$$

由于当 $t=0$ 时，方程右边有

$$=\frac{d^2e(t)}{dt^2}+3e(t)=\frac{d^2\left(4u(t)\right)}{dt^2}=4\delta'(t) \qquad (1)$$

由于 $t>0$ 时，输入信号 $e(t)=4$ 为一常数，

因此有 $i_{zsp}(t)=Bu(t)$，代入方程（$t>0_+$），得 $B=4$

得特解 $e(t)=4u(t)$

例2.14

因此，$i_{zs}(t)$ 可表示为

$$i_{zs}(t)=\left(C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-3t}+4\right)\cdot u(t) \qquad (2)$$

根据上式，我们有（$t=0$ 时刻）

$$i'_{zs}(0)\text{包含}:\left(i_{zs}(0_+)-i_{zs}(0_-)\right)\delta(t)=i_{zs}(0_+)\delta(t)$$

$$\begin{aligned} i''_{zs}(0)\text{包含}:&\left(i_{zs}(0_+)-i_{zs}(0_-)\right)\delta'(t)+\left(i'_{zs}(0_+)-i'_{zs}(0_-)\right)\delta(t)\\ &=i_{zs}(0_+)\delta'(t)+i'_{zs}(0_+)\delta(t)\end{aligned}$$

例2.14

结合（1）式，在 $t=0$ 时刻。系统的方程可表示为（仅需考虑冲激函数项）

$$i_{zs}(0_+)\delta'(t)+i'_{zs}(0_+)\delta(t)+4i_{zs}(0_+)\delta(t)=4\delta'(t)$$

得 $\begin{cases} i_{zs}(0_+)=4 \\ i'_{zs}(0_+)=-16 \end{cases}$

代入（2），得

$$\begin{cases} i_{zs}(0_+)=C_{zs1}+C_{zs2}+4=4 \\ i'_{zs}(0_+)=-C_{zs1}-3C_{zs2}=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{zs1}=-8 \\ C_{zs2}=+8 \end{cases}$$

零状态响应为：$i_{zs}(t)=\left(-8e^{-t}+8e^{-3t}+4\right)u(t)$

最终得完全响应为：$i(t)=\left(-4e^{-t}+4e^{-3t}+4\right)u(t)$

例2.20

【例2.20】 描术某一因果离散系统的差分方程

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]=x[n]，\ n\geq 0$$

已知激励 $x[n]=2^n u[n]$ ；响应信号$y[n]$的起始条件，$y[-1]=1$ $y[-2]=0$ ，求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

例2.20

解：（1）零输入响应

零输入响应满足

$$\begin{cases} y_{zi}[n]+\frac{1}{2}y_{zi}[n-1]-\frac{1}{2}y_{zi}[n-2]=0 \\ y_{zi}[-1]=y[-1]=1, \quad y_{zi}[-2]=y[-2]=0, \quad x[-1]=x[-2]=0 \end{cases}$$

首先求$y_{zi}[0]$和$y_{zi}[1]$ 。将差分方程改写为

$$y_{zi}[n]=-\frac{1}{2}y_{zi}[n-1]+\frac{1}{2}y_{zi}[n-2]$$

将 $y_{zi}[-1]$ 和 $y_{zi}[-2]$代入上式，有： $y_{zs}[0]=-\frac{1}{2}$

$$y_{zs}[1]=\frac{3}{4}$$

例2.20

差分方程的特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\frac{1}{2}$，

故零输入响应

$$y_{zi}[n]=\left[C_{zi1}(-1)^n+C_{zi2}(\frac{1}{2})^n\right]u[n]$$

初始值代入上式，得

$$\begin{aligned} y_{zs}[0]&=C_{zi1}+C_{zi2}=-\frac{1}{2} \\ y_{zs}[1]&=-C_{zi1}+\frac{1}{2}C_{zi2}=\frac{3}{4} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} C_{zi1}=-\frac{2}{3} \\ C_{zi2}=\frac{1}{6} \end{cases}$$

系统的零输入响应

$$y_{zi}[n]=\left[-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^n\right]u[n]$$

例2.20

（2）零状态响应

零状态响应满足

$$\begin{cases} y_{zs}[n]+\frac{1}{2}y_{zs}[n-1]-\frac{1}{2}y_{zs}[n-2]=x[n] \\ y_{zs}[-1]=y_{zs}[-2]=0, \quad x[-1]=x[-2]=0 \end{cases}$$

首先求出初始值$y_{zs}[0]$ 和 $y_{zs}[1]$，改写系统方程

$$y_{zs}[n]=-\frac{1}{2}y_{zs}[n-1]+\frac{1}{2}y_{zs}[n-2]+2^{n}\cdot u[n]$$

因此，有

$$y_{zs}[0]=-\frac{1}{2}y_{zs}[-1]+\frac{1}{2}y_{zs}[-2]+1=1$$

$$y_{zs}[1]=-\frac{1}{2}y_{zs}[0]+\frac{1}{2}y_{zs}[-1]+2=\frac{3}{2}$$

例2.20

特解 $B[n]=B2^{n}$

代入方程，有

$$B2^{n}+\frac{1}{2}B2^{n-1}-\frac{1}{2}B2^{n-2}=2^{n}$$

解得$B=\frac{8}{9}$，故特解

$$B[n]=\frac{8}{9}(2)^{n}u[n]$$

故零状态响应

$$y_{zs}[n]=\left(C_{zs1}(-1)^{n}+C_{zs2}(2)^{n}+\frac{8}{9}(2)^{n}\right)u[n]$$

例2.20

将初始值 $y_{zs}[0]$ 、$y_{zs}[1]$ 代入上式，得

$$\begin{cases} y_{zs}[0] = C_{zs1} + C_{zs2} + \dfrac{8}{9} = 1 \\ y_{zs}[1] = -C_{zs1} + \dfrac{1}{2}C_{zs2} + \dfrac{16}{9} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

解得 $C_{zs1} = \dfrac{2}{9}$ ，$C_{zs2} = -\dfrac{1}{9}$ ，故零状态响应

$$y_{zs}[n] = \left[\frac{2}{9}(-1)^n - \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^n + \frac{8}{9}(2)^n\right]u[n]$$

例2.20

（3）全响应

$$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]=\Big[\underbrace{-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\frac{2}{9}(-1)^n-\frac{1}{9}(\frac{1}{2})^n+\overbrace{\frac{8}{9}(2)^n}^{\text{强迫响应}}}_{\text{零状态响应}}\Big]u[n]$$

(The terms $-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^n+\frac{2}{9}(-1)^n-\frac{1}{9}(\frac{1}{2})^n$ are marked 自由响应.)

$$=\left(-\frac{4}{9}(-1)^n+\frac{1}{18}(\frac{1}{2})^n+\frac{8}{9}(2)^n\right)\cdot u[n]$$

2.5 LTI系统的响应分解

单纯从数学角度说，这类用线性常系数微分方程描述的系统也可以是非因果的。要使这类系统严格满足因果LTI性质，必须附加初始静止条件。

- 初始静止条件：对于 $t \le t_0$（或 $n \le n_0$），若输入 $x(t)=0$（或$x[n]=0$），则输出$y(t)=0$（或 $y[n]=0$）。

- 初始静止条件下，线性常系数微分/差分方程所描述的系统是因果的和LTI的。

2.5 LTI系统的响应分解

系统的线性性进一步描述成：

- 系统响应具有可分解性：零输入响应和零状态响应之和。
- 零状态线性：即系统的零状态响应对于外加激励信号呈线性。
- 零输入线性：即系统的零输入响应对于各系统的起始状态呈线性关系。

§2.0 引言

§2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§2.2 离散时间LTI系统的时域分析

§2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

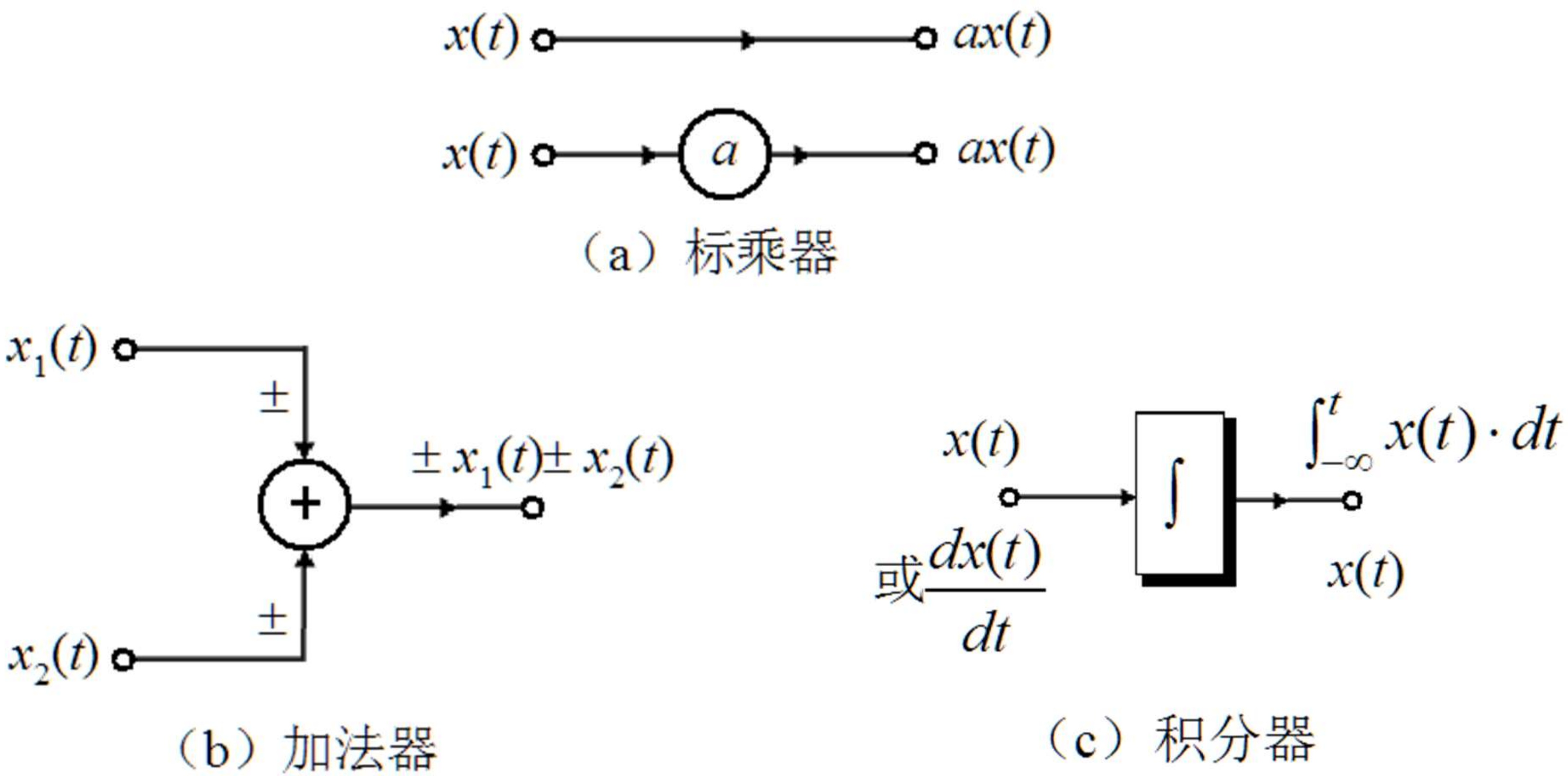
§2.5 LTI系统的响应分解

§2.6 LTI系统的框图表示

2.6 LTI系统的框图表示

- **1.** 连续时间线性时不变系统的方框表示

三种基本运算器：



2.6 LTI系统的框图表示

描述一个二阶系统的微分方程为

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (2.81)$$

考虑以下方程

$$a_2 \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\omega(t)}{dt} + a_0 \omega(t) = x(t) \quad (2.82)$$

则式(2.81)的系统可看成输入信号为 $b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$ 的式(2.82)所描述的系统。

根据LTI的叠加性和微分性质，有 $y(t) = b_2 \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\omega(t)}{dt} + b_0 \omega(t)$

2.6 LTI系统的框图表示

将（2.82）式描述的系统方程改写为

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}=\left(x(t)-a_1\frac{d\omega(t)}{dt}-a_0\omega(t)\right)\Big/a_2$$

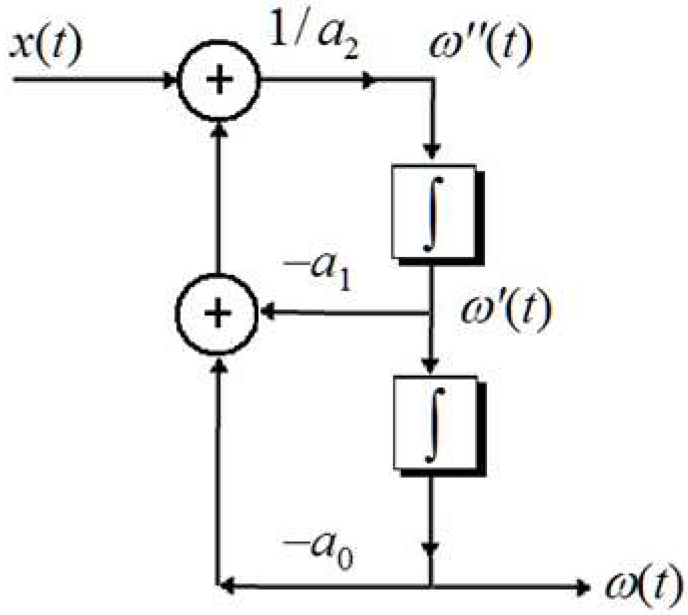


图2-25 （2.81）所描述的系统的模拟框图

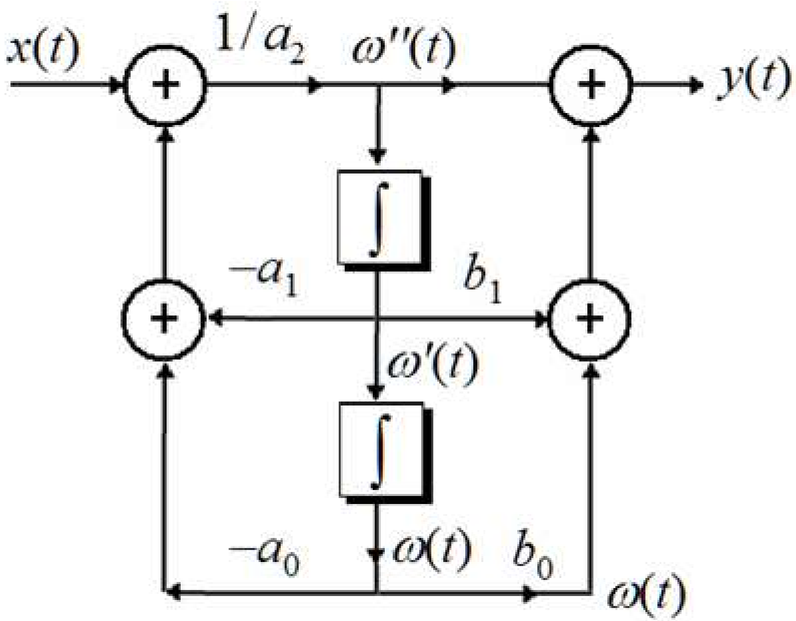


图2-26 二阶系统的模拟图

2.6 LTI系统的框图表示

一个由N阶微分方程描述的系统可表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

其模拟框图可用图2-27所示框图来表示。一般将图2-27所示的模拟框图称为直接II型结构。

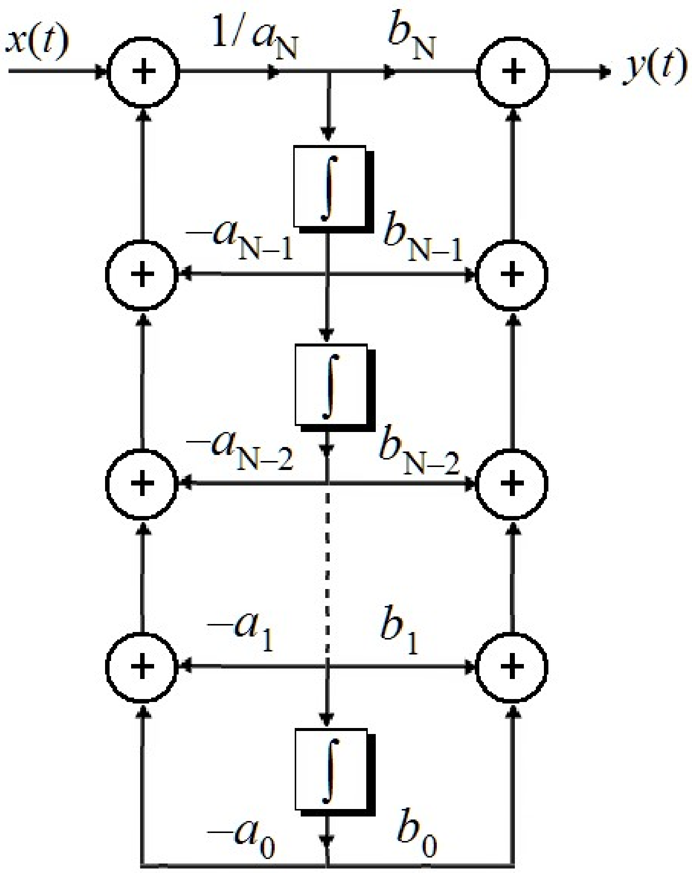
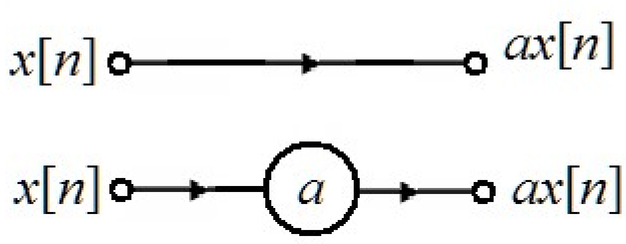


图2-27 N阶系统的模拟图

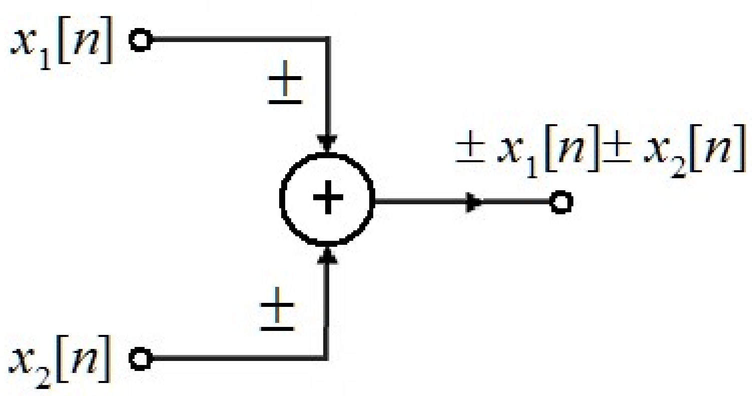
2.6 LTI系统的框图表示

- **2.** 离散时间线性时不变系统的方框表示

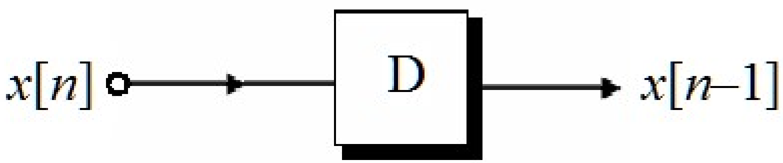
三个基本运算单元：



（a）标乘器



（b）加法器



（c）单位延迟器

2.6 LTI系统的框图表示

一个N阶的离散系统的差分方程可表示为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] \text{ ， } a_0 \neq 0 \qquad (2.86)$$

考查系统

$$\sum_{k=0}^{N} a_k w[n-k] = x[n] \qquad (2.87)$$

当(2.87)的系统输入信号为$\sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$组合信号，就是(2.86)系统。

根据LTI系统的叠加性和时不变性，我们有 $y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k w[n-k]$

将(2.87)式改写为 $w[n] = \left(x[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k [n-k] \right) \Big/ a_0$

2.6 LTI系统的框图表示

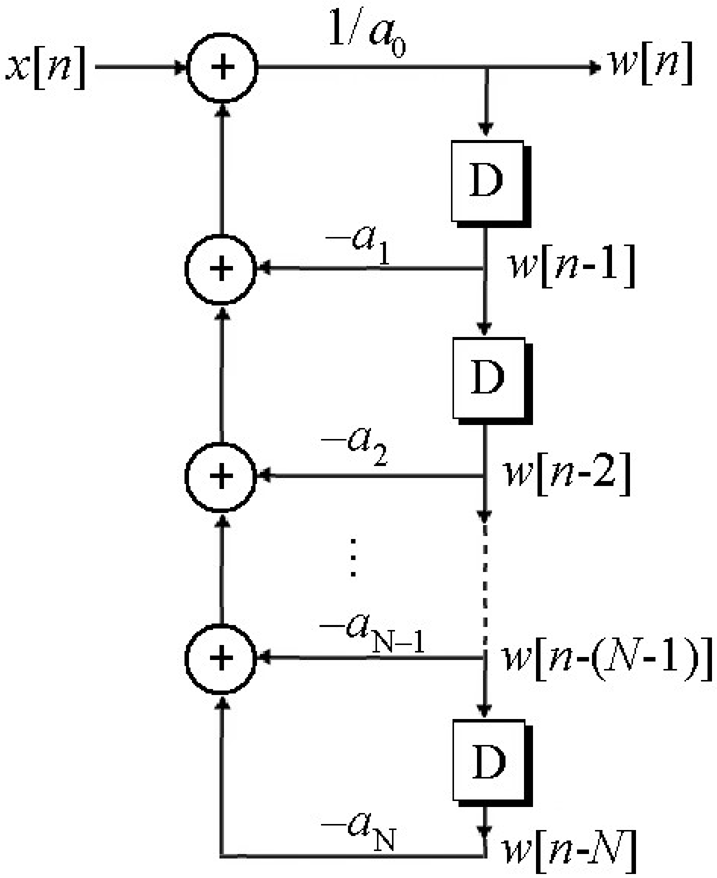


图2-28 式2.87所描述的系统框图

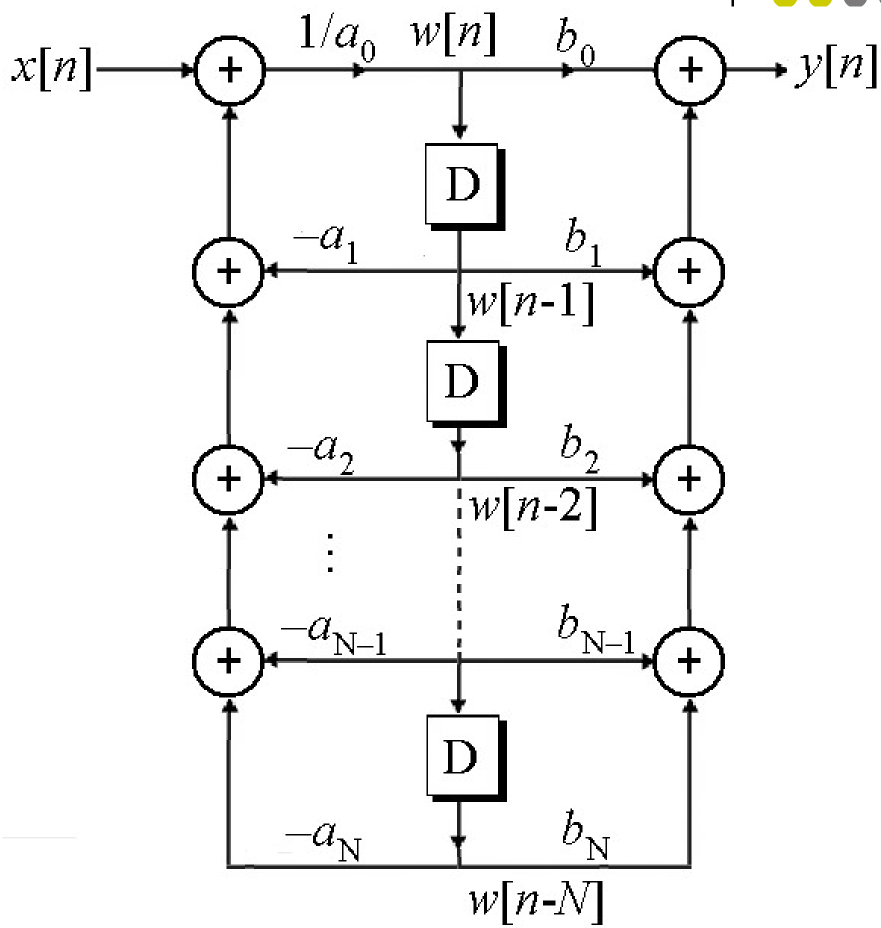


图2-29 N阶离散系统的模拟框图

MATLAB演示

【例2-25】试用MATLAB仿真如图所示的LC并联电路。

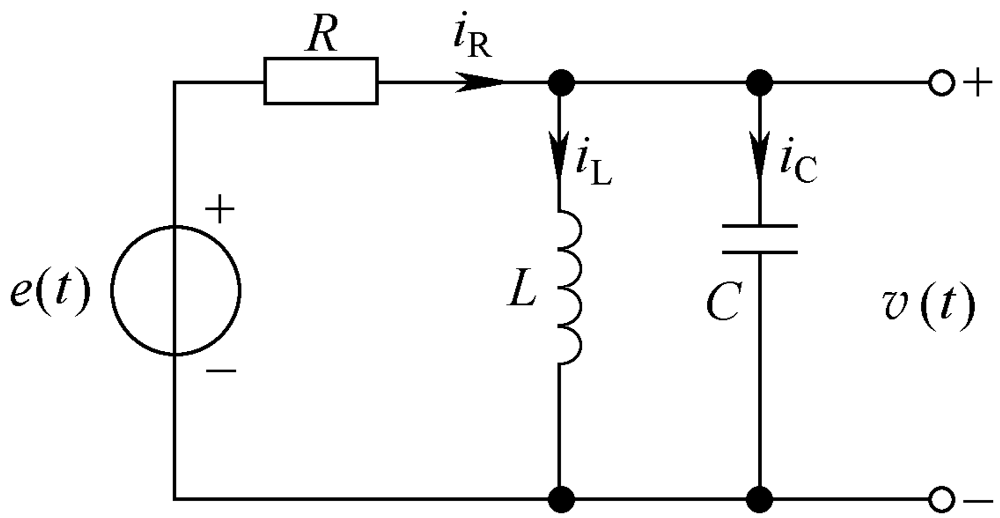


图2-37 例2.25所讨论的LC并联电路

MATLAB演示

解: LC并联电路的方程为:

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t)+\frac{1}{RC}\frac{d}{dt}v(t)+\frac{1}{LC}v(t)=\frac{1}{RC}\frac{d}{dt}e(t)$$

模拟框图:

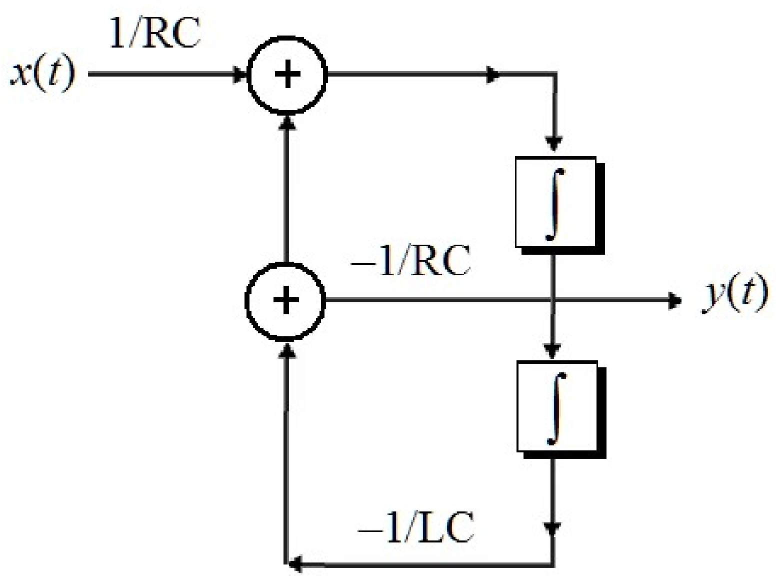
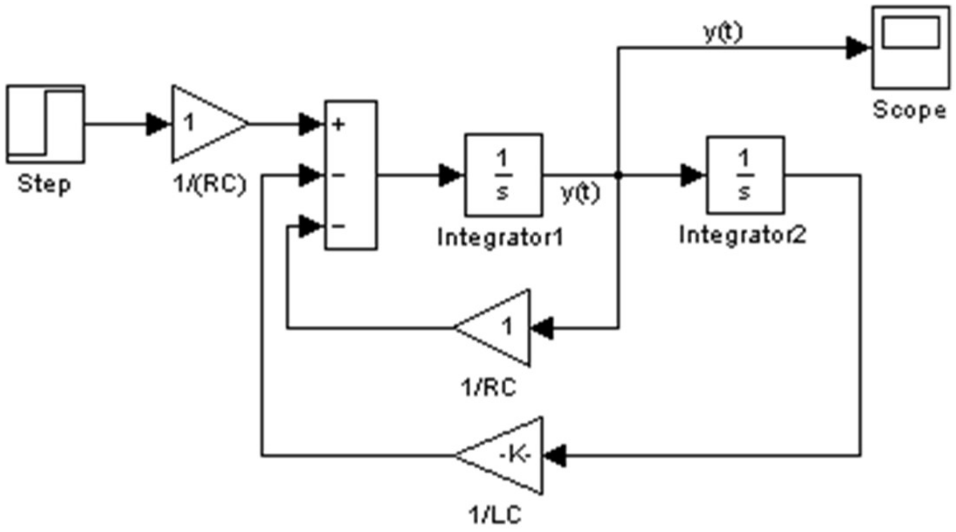


图2-38 LC并联电路的模拟框图

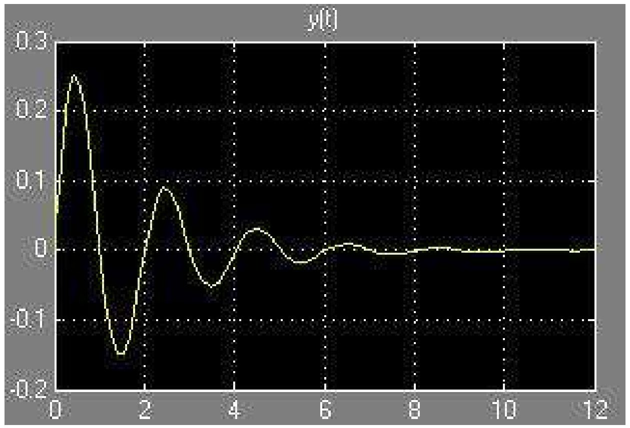
MATLAB演示

取 $1/RC = 1, 1/LC = 10, e(t) = u(t)$

SIMULINK仿真框图



仿真结果



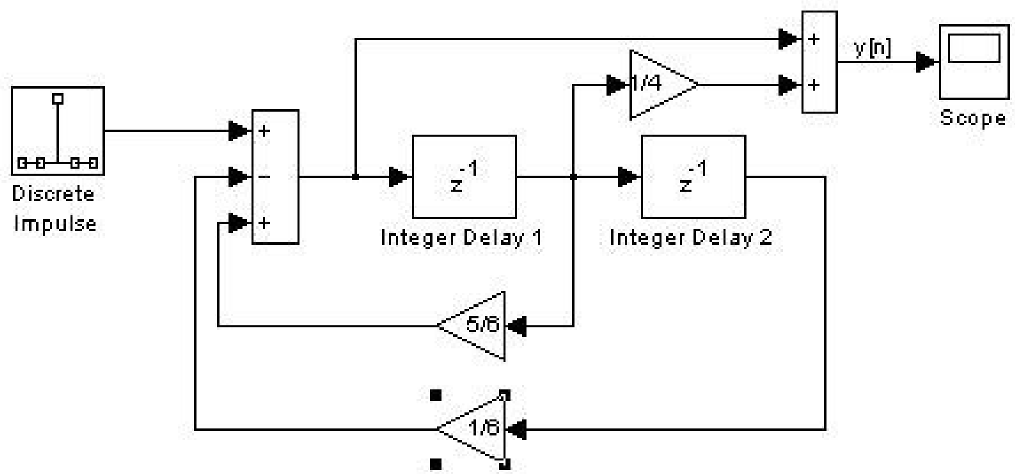
MATLAB演示

【例2-26】 试用MATLAB的SIMULINK工具箱仿真以下离散系统：

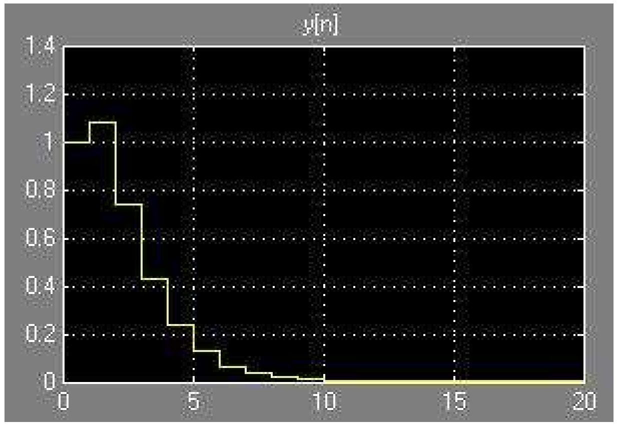
$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]+\frac{1}{4}x[n-1],\quad x[n]=\delta[n]$$

解：

SIMULINK仿真框图



仿真结果



小结

- 本章着重论述了线性时不变系统的卷积表示方法，还讨论了线性时不变系统的时域经典求解方法、响应的零状态响应和零输入响应解和LTI系统的框图表示。