

电子版附录

目录

- A.1 用叠加原理证明卷积积分 p16
- A.2 Z 变换与 z 域中的传递函数 p42
- A.3 系统函数 $H(s)$ 的一般表达式 p47
- A.4 全差分闭环结构 S/H 电路的输出-输入关系 p176
- A.5 1.5bit/级数字校正原理 p187
- A.6 输入三阶交调 IIP3 表达式 p252
- A.7 TD-SCDMA 射频收发器发射机参数预算 p264
- A.8 锁相频率合成器原理简介 p276
- A.9 正弦交流稳态电路的复频域分析与相量分析 p297
- A.10 单相桥式整流滤波电路输出电压/电流波形分析 p305
- A.11 反激式高频变压器的设计 p335
- A.12 式 (6.9.12) ~ 式 (6.9.15) 的导出 p410
- A.13 开关电容积分器系统函数导出 p426
- A.14 Nauta 跨导器结构 OTA p430
- A.15 源端电感负反馈窄带 LNA 噪声系数的分析与吉尔伯特混频器噪声与非线性分析思路 p435

A.1 用叠加原理证明卷积积分 (p16)

设图 A.1.1 方框内所示电路是线性非时变的，即构成电路的元件都是线性的，其参数不随时间变化，且电路处于零状态。图(a)表示电路在单位冲激函数 $\delta(t)$ 作用下，其输出响应为 $h(t)$ ，并称其为电路的单位冲激响应。图(b)表示，电路在任意信号 $f(t)$ 作用下，其零状态输出响应 $g(t)$ 表示为输入信号 $f(t)$ 与电路单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积，即

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.1.1})$$

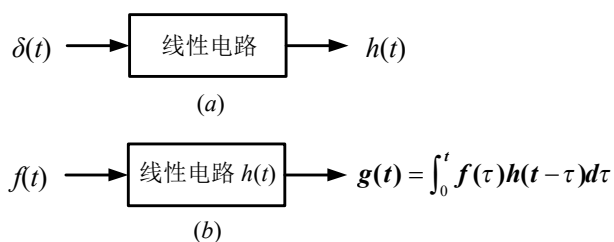


图 A.1.1 零状态下线性电路输入-输出关系

设 $f(t)$ 随时间变化的波形如图 A.1.2(a) 所示，从 $t=0$ 时刻起作用于电路，现在要求电路在 $t = t_0$ ($t_0 > 0$) 时刻响应

由于电路中含有电感、电容等记忆元件，电路在 $t = t_0$ 时刻的响应取决于 t 从 0 到 t_0 时刻的所有激励情况。将从 0 到 t_0 时刻均匀分为 N 段，激励可看成如图 A.1.2(b) 所示的一系列宽度为 $\Delta\tau = \frac{t_0}{N}$ 、高度为 $f(k\Delta\tau)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) 的矩形脉冲的组合。 $\Delta\tau$ 越小，脉冲幅值与函数值越为迫近。

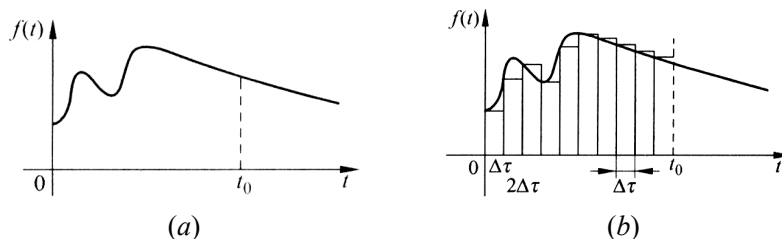


图 A.1.2 求任意激励下电路的零状态响应

(a) 任意激励 (b) 将从 0 到 t_0 时刻的激励分解成 N 个矩形脉冲

利用单位阶跃函数及其延迟，可以将 0 到 t_0 时刻的激励表示为

$$\begin{aligned} f(t) \approx & f(0)[u(t) - u(t - \Delta\tau)] + f(\Delta\tau)[u(t - \Delta\tau) - u(t - 2\Delta\tau)] \\ & + \dots + f[(N-1)\Delta\tau]\{u[t - (N-1)\Delta\tau] - u(t - N\Delta\tau)\} \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

如果 $N \rightarrow \infty$ ，上式表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta\tau) [u(t - k\Delta\tau) - u(t - (k+1)\Delta\tau)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta\tau) \Delta\tau \frac{1}{\Delta\tau} [u(t - k\Delta\tau) - u(t - (k+1)\Delta\tau)] \end{aligned}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta\tau) \Delta\tau p(t - k\Delta\tau) \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (\text{A.1.3})$$

式中

$$p(t - k\Delta\tau) = \frac{1}{\Delta\tau} [u(t - k\Delta\tau) - u(t - (k+1)\Delta\tau)] \quad (\text{A.1.4})$$

是延迟的单位脉冲函数。因为该脉冲的单位面积为 1。设单位脉冲 $p(t)$ 在电路中产生的零状态响应为 $h_p(t)$ ，则根据线性电路的齐次性、可加性以及非时变性，电路在 t_0 时刻的响应等于 t_0 时刻以前所有脉冲产生的在 t_0 时刻的响应之和

$$g(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta\tau) \Delta\tau h_p(t_0 - k\Delta\tau) \quad (\text{A.1.5})$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ ， $k\Delta\tau \rightarrow \tau$ ， $\sum \rightarrow \int$ ，单位脉冲函数变为单位冲激函数，即 $p(t) \rightarrow \delta(t)$ ，对应的响应就是单位冲激响应，即 $h_p(t) \rightarrow h(t)$ ，故式 (A.1.5) 可改写成

$$g(t_0) = \int_0^{t_0} f(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau \quad (\text{A.1.6})$$

由于 t_0 的任意性，可将 t_0 改写为 t ，即得式(A.1.1)。

按照一般的数学定义，卷积积分应从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。对于一个物理上可实现的电路网络，它的响应不可能先于激励产生，激励在 $t=0$ 时作用到网络，即 $t < 0$ 时， $f(t) = 0$ ，因此式 (A.1.1) 的积分下限为 0；又因 $t < 0$ 时，它的单位冲激响应 $h(t) = 0$ ，因此式 (A.1.1) 的积分上限为 t ，因为 $\tau > t$ 时， $h(t - \tau) = 0$ ，故式(A.1.1)与卷积积分的定义不矛盾。

单位冲激响应说明：在时域，对于不同电路系统，零状态情况下，加同样激励 $\delta(t)$ ，观察响应 $h(t)$ ， $h(t)$ 不同，说明其系统特性不同，故单位冲激响应可以衡量系统的特性，且基于 $h(t)$ ，即可按式(A.1.1)得出任意输入信号激励下零状态电路的输出响应。

A.2 Z 变换与 z 域中的传递函数 (p42)

Z 变换是在离散系统分析中为简化运算而建立的对函数序列的数学变换, 其作用与拉普拉斯变换在连续系统中的作用很相似。 z 域中系统传递函数也与 s 域中传递函数相类似。

离散序列信号的 Z 变换可以从拉普拉斯变换得出。

将第一章 1.4 节拉普拉斯变换与反变换表达式(1.4.18)与式(1.4.24)重写如下:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.2.1})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st} ds \quad (\text{A.2.2})$$

设连续时间信号 $f(t)$ 经过每一时间间隔 T 采样的信号为 $f(nT)$, $n=0, 1, 2, \dots$ 。采样信号 $f(nT)$ 通常记为 $f(n)$ 。如果式(A.2.1)中的 $f(t)$ 为 $f(n)$ 替代, 将积分表示为求和, 并注意到 $s = \sigma + j\omega$, 则式(A.2.1)成为

$$F(s) = F(\sigma, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]e^{-\sigma n}e^{-j\omega n} \quad (\text{A.2.3})$$

应注意, 尽管 $f[n]$ 随时间是离散的, 但是 (σ, ω) 可在一个范围内连续取值, 故 $F(\sigma, \omega)$ 仍是连续的。

改写式(A.2.3)中的指数项, 将 $e^{-\sigma n}$ 改写成

$$e^{-\sigma n} = r^{-n} \quad (\text{A.2.4})$$

由式(A.2.4)可知,

$$r = e^{\sigma}$$

或

$$\sigma = \ln r。$$

将式(A.2.4)代入式(A.2.3)就得到

$$F(\sigma, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \quad (\text{A.2.5})$$

定义新的变量 z , 即

$$z = re^{j\omega} \quad (\text{A.2.6})$$

将上式代入式(A.2.5)就得到对离散信号 $f[n]$ 作单边 Z 变换的表达式

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (\text{A.2.7})$$

而双边 Z 变换表达式则为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (\text{A.2.8})$$

如果 $n < 0$, $f[n] = 0$, 则式(A.2.7)与式(A.2.8)是等价的。

对于某一离散序列的 Z 变换, 存在着某一个 z 值的范围, 对该范围内的 z , $F(z)$ 收敛。这样一些值的范围称为收敛域。有关 Z 变换收敛域的进一步讨论见路线主编“复变函数与积分变换”, 科学出版社, 2010。

$F(z)$ 的反变换记作

$$f(n) = Z^{-1}[F(z)] \quad (\text{A.2.9})$$

并用以下的围线积分给出，即

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} F(z) z^{n-1} dz \quad (\text{A.2.10})$$

式中 $|z|=r$ 表示以原点为中心，半径为 r 的圆，取向为逆时针。 r 的值可选为使 $F(z)$ 收敛的任何值，也就是说，令 $|z|=r$ 的积分围线位于收敛域内的任何值。

Z 变换的基本性质如表 A.2.1 所示。一些常用函数的 Z 变换对见路线主编“复变函数与积分变换”，科学出版社，2010。

表 A.2.1 Z 变换的基本性质

性质	信号	Z 变换
	$x[n]$	$X[z]$
	$x_1(n)$	$X_1[z]$
	$x_2[n]$	$X_2[z]$
线性	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
时移	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X[z]$
Z 域尺度变换	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Z 域微分	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
复数序列的共轭	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$
时间倒置	$x[-n]$	$X(z^{-1})$
卷积性质	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$
初值定理	若 $n < 0$ ， $x[n] = 0$ ，则 $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	

对于离散序列信号，其输出-输入关系可用差分方程表示。分析表明，对于递归滤波器，表示其输出-输入关系的差分方程具有如下的形式：

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (\text{A.2.11})$$

如果电路处于零状态，根据表 A.2.1 所示 Z 变换的基本性质及常用函数 Z 变换简表，离散序列 $y(n)$ 的 Z 变换为

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k} \quad (\text{A.2.12})$$

定义零状态下，输出序列信号 $y(n)$ 的 Z 变换 $Y(z)$ 与输入序列信号 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 之比为离散时间系统传递函数 $H(z)$ ，则由式(A.2.12)可得递归滤波器这类电路的传递函数可表示为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (\text{A.2.13})$$

应指出，离散时间系统传递函数一般都具有式(A.2.13)表示的形式。

实际应用时一般将上式改写成 z 的正指数的多项式如下：

$$F(z) = \frac{b_0 z^{-M}}{z^{-N}} \times \frac{z^M + (b_1 / b_0) z^{M-1} + \cdots + (b_M / b_0)}{z^N - a_1 z^{N-1} - \cdots - a_N} \quad (\text{A.2.14})$$

A.3 系统函数 $H(s)$ 的一般表达式 (p47)

复频域中电路系统函数 $H(s)$ 一般可表示为关于 s 的两多项式相除的形式, 其导出过程简要说明如下。

设将要讨论的电路有 n 个节点, 激励电流源 $J_{j,\text{in}}(s)$ 接在第 j 节点与地之间, 输出信号电压从节点 k 取出, 第 k 节点与地之间连接一个负载 $Z_L(s)$ 。如只将输入端与输出端从电路中分离出来, 并将电路的其它部分表示在一个方框内, 就得到如图 A.3.1 所示的二端口网络。零状态下, 复频域中电路输出响应与输入激励之比定义为系统函数(或网络函数)。在工程应用中, 人们主要关注电路在给定输入激励下的输出响应, 并不在意电路内部每一节点的电压或每一支路的电流。在这种情况下, 只要得知系统函数就够了。

应指出, 图 A.3.1 所示二端口网络, 激励电流源与负载的一端均接地, 有失一般性, 这仅是为便于直接用 MNA 求得电路的系统函数。在一般情况下如何基于 MNA 求取多端口网络的系统函数可参阅: 陈抗生, 2012. 电路分析与电子线路基础[M], 北京, 高等教育出版社。

零状态下, 对于复频域中电感模型, 不涉及其附加运算电源; 同样对于复频域中电容模型, 也不涉及其附加运算电源。这样电感归结为 sL 的运算电抗表示, 电容归结为 $\frac{1}{sC}$ 的运算容抗表示。引入运算阻抗

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} \quad (\text{A.3.1})$$

的概念, 此时针对复频域中的运算电路按 MNA 列写的电路方程, 与电阻电路方程形式相当, 但系数矩阵每一元素可能是 s 的函数, 故电路方程的一般形式可表示为

$$\bar{\bar{Y}}(s) \bar{V}(s) = \bar{J}(s) \quad (\text{A.3.2})$$

式中 $\bar{\bar{Y}}(s)$ 是复频域中复数值的节点导纳矩阵; $\bar{V}(s)$ 是复频域中的节点电压向量; $\bar{J}(s)$ 是输入激励向量, 可分别表示为

$$\bar{\bar{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,k-1} & Y_{1,k} & Y_{1,k+1} & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} & \cdots & Y_{2,k-1} & Y_{2,k} & Y_{2,k+1} & \cdots & Y_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{n,1} & \cdots & Y_{n,k-1} & Y_{n,k} & Y_{n,k+1} & \cdots & Y_{n,n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\bar{V}(s) = [V_1, V_2, \cdots, V_k, \cdots, V_n]^T \quad (\text{A.3.4})$$

$$\bar{J}(s) = [0, 0, \cdots, J_{j,\text{in}}, \cdots, 0, 0]^T \quad (\text{A.3.5})$$

根据线性代数中克来默(Cramer)规则, 由式(A.3.2) 可得第 k 节点的电压响应为

$$V_k = \frac{\det \bar{\bar{T}}}{\det \bar{\bar{Y}}} \quad (\text{A.3.6})$$

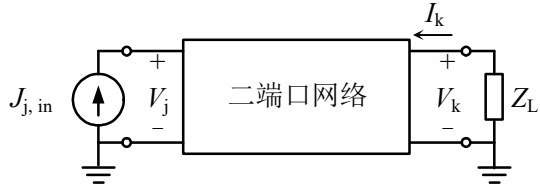


图 A.3.1 具有 n 个节点电路的二端口网络表示

式中

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,k-1} & 0 & Y_{1,k+1} & \cdots & Y_{1,n} \\ Y_{2,1} & \cdots & Y_{2,k-1} & 0 & Y_{2,k+1} & \cdots & Y_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{j,1} & \cdots & Y_{j,k-1} & J_{j,in} & Y_{j,k+1} & \cdots & Y_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{n,1} & \cdots & Y_{n,k-1} & 0 & Y_{n,k+1} & \cdots & Y_{n,n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.7})$$

即将式 (A.3.3) 表示的 $\bar{\bar{Y}}$ 矩阵中第 k 列用向量 $\bar{J}(s)$ 替代便得矩阵 $\bar{\bar{T}}$ 。

$Y_{i,j} (i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n)$ 是运算导纳, 因为 $\bar{\bar{Y}}$ 是 $n \times n$ 的矩阵, $\det \bar{\bar{Y}}$ 一般可写成

$$\det \bar{\bar{Y}} = P(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \quad (\text{A.3.8})$$

$$\det \bar{\bar{T}} = J_{j,in} \det \bar{\bar{T}}_{jk} \quad (\text{A.3.9})$$

式中 $\bar{\bar{T}}_{jk}$ 是矩阵 $\bar{\bar{T}}$ 划去第 k 列、第 j 行后的余子式。 $\det \bar{\bar{T}}_{jk}$ 一般可表示为

$$\det \bar{\bar{T}}_{jk} = Q(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (\text{A.3.10})$$

其中 m 一般小于 n , 所以 $\det \bar{\bar{T}}$ 可表示为

$$\det \bar{\bar{T}} = J_{j,in} [a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0] \quad (\text{A.3.11})$$

输出端复数电压 $V_k(s)$ 与输入电流 $J_{j,in}(s)$ 之比 $V_k(s) / J_{j,in}(s)$, 就是电路系统函数

$$\begin{aligned} H(s)|_{TZ} = Z_{jk}(s) &= \frac{V_k}{J_{j,in}} = \frac{\det \bar{\bar{T}}}{\det \bar{\bar{Y}}} = \frac{\det \bar{\bar{T}}_{jk}}{\det \bar{\bar{Y}}} \\ &= \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \end{aligned} \quad (\text{A.3.12})$$

如上式所示, 电路系统函数 $H(s)$ 可表示为关于 s 的两多项式相除的形式。

根据激励与响应是电压还是电流, 是在同一个端口还是不同的端口, 电路系统函数除了式 (A.3.12) 所示的转移阻抗这种形式外, 还有以下 5 种形式。

输入端口仍为 $J_{j,in}(s)$ 激励, 但输出响应是电流 $I_k(s)$ 。此时, 输出端电流 $I_k(s)$ 与输入电流 $J_{j,in}(s)$ 之比定义为转移电流比, 或电流增益

$$H(s)|_{TI} = \frac{I_k(s)}{J_{j,in}(s)} \quad (\text{A.3.13})$$

如果输入端为电压源 $V_{j,in}(s)$ 激励, 输出响应是 $V_k(s)$, 则输出端电压 $V_k(s)$ 与输入电压 $V_{j,in}(s)$ 之比定义为转移电压比, 或电压增益

$$H(s)|_{TV} = \frac{V_k(s)}{V_{j,in}(s)} \quad (\text{A.3.14})$$

如果输入端为电压源 $V_{j,in}(s)$ 激励, 输出响应却是 $I_k(s)$, 这种情况下, 输出端电流 $I_k(s)$ 与输入电压 $V_{j,in}(s)$ 之比具有导纳量纲, 定义为转移运算导纳, 或运算互导纳。

$$H(s)\big|_{TY} = \frac{I_k(s)}{V_{j,in}(s)} \quad (\text{A.3.15})$$

如果激励与响应在同一个端口，且输入激励是电流 $J_{j,in}(s)$ ，输出响应为电压 $V_j(s)$ ，则输出响应与输入激励之比也具有阻抗量纲，称为输入运算阻抗

$$H(s)\big|_Z = \frac{V_j(s)}{J_{j,in}(s)} \quad (\text{A.3.16})$$

如果激励与响应仍然在同一个端口，但输入激励是电压 $V_{j,in}(s)$ ，输出响应为电流 $J_j(s)$ ，则输出响应与输入激励之比具有导纳量纲，称为输入运算导纳

$$H(s)\big|_Y = \frac{J_j(s)}{V_{j,in}(s)} \quad (\text{A.3.17})$$

以上 $H(s)\big|_Y$ 、 $H(s)\big|_Z$ ，激励和响应位于同一个端口，也称为策动点函数，而对于 $H(s)\big|_{TZ}$ 、 $H(s)\big|_{TY}$ 、 $H(s)\big|_{TZ}$ 、 $H(s)\big|_{TY}$ ，激励和响应位于不同的端口，也称为传递函数(或转移函数)。策动点函数、传递函数统称为系统函数。

有一点要说明，当输出响应为电流时，负载一般取短路工作状态，即 $Z_L = 0$ ，此时列写电路方程时，负载 Z_L 以 0V 电压源替代。0V 电压源反映负载被短路，流过 0V 电压源支路的电流，即负载被短路时的电流，这就是输出响应。

式 (A.3.12) 表示的系统函数，其分母多项式 $P(s)$ 称为线性系统的特征多项式。 $P(s)$ 的阶数 n 称为系统的阶。常见的电路系统，分子多项式次数低于分母多项式次数，且要求 $P(s)$ 的根位于 s 的左侧平面。

A.4 全差分闭环结构 S/H 电路的输出-输入关系 (p176)

闭环结构的 S/H 电路通常有两种结构：电容翻转(Flip-around)型结构和电荷重分配(Charge-transferring)型结构。每一种又有单端结构和全差分结构之分。全差分结构应用最广。

(1)全差分电荷重分配型 S/H 电路

全差分电荷重分配型 S/H 电路如图 A.4.1 所示，由两个采样电容 C_s 、两个保持电容 C_h 、全差分运算放大器及相应开关管组成，该电路采用了底极板采样技术。图 A.4.2 为时钟信号 CKS 、 CKH 与 $CKSB$ 的时序图，其中 CKS 与 CKH 为两相不交叠时钟信号，时钟 $CKSB$ 是底极板采样技术中较时钟信号 CKS 提前关断的信号。

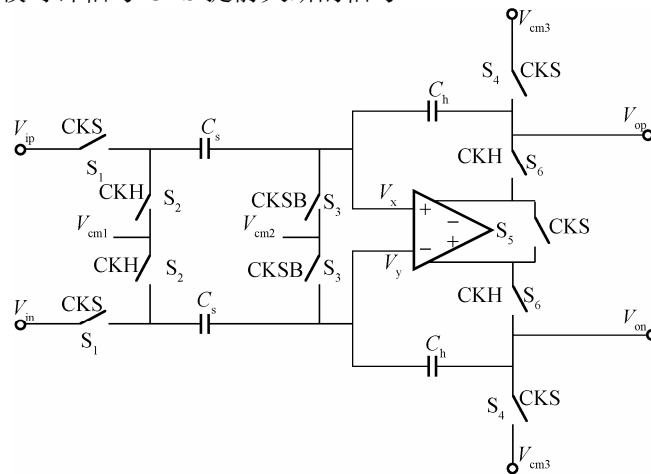


图 A.4.1 电荷重分配型 S/H 电路

图 A.4.1 所示的电荷重分配型采样保持电路的工作过程定性分析如下：

在采样阶段，时钟 CKS 为高电平，差分输入信号被采样到两个采样电容 C_s 上，此时运算放大器输入端接共模电压 V_{cm2} ，当采样过程结束时，采样到的信号以电荷形式存储在采样电容 C_s 上。在这一过程中，时钟 $CKSB$ 将提前关断与运算放大器输入端相连的开关 S_3 ，使采样电容 C_s 到地不再有直流通路，这使得时钟 CKS 关断采样开关 S_1 时，开关管 S_1 沟道中的电荷不再有直流通路到地，虽然在 $CKSB$ 关断开关管 S_3 时也会有电荷注入和时钟馈通效应，但开关管 S_3 的这两个效应产生的是与输入信号无关的直流量，可通过全差分电路得到消除。在保持阶段，时钟 CKS 为低电平， CKH 为高电平，采样电容 C_s 上采样到电荷转移到电容 C_h 上。当 $C_s=C_h$ 时，输出电压 $V_{op}-V_{on}$ 就等于时钟 $CKSB$ 关断时差分输入信号的瞬时电压值。

为简化分析，取 $V_{cm1}=V_{cm2}=V_{cm3}=V_{cm}$ ，同时假设运算放大器的增益为无穷大，输入端无失调电压影响，并令在保持相时运算放大器正负输入端电压分别为 V_x 、 V_y ，则根据采样和

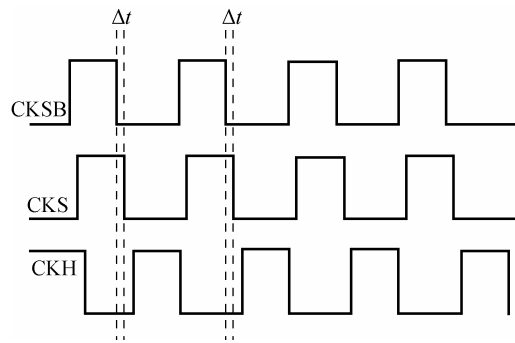


图 A.4.2 两相不交叠时钟

保持阶段时的电荷守恒原理，可得

$$C_s(V_{cm} - V_{ip}) = C_s(V_x - V_{cm}) + C_h(V_x - V_{op}) \quad (A.4.1)$$

$$C_s(V_{cm} - V_{in}) = C_s(V_y - V_{cm}) + C_h(V_y - V_{on}) \quad (A.4.2)$$

将式(A.4.1)与式(A.4.2)相减，并注意到已假设运放增益无穷大，利用运放的虚短特性，则保持阶段时运放输入端电压 $V_x = V_y$ ，由此可得

$$C_s(V_{ip} - V_{in}) = C_h(V_{op} - V_{on}) \quad (A.4.3)$$

若 $C_s = C_h$ ，则由上式可得

$$(V_{op} - V_{on}) = (V_{ip} - V_{in}) \quad (A.4.4)$$

此外，鉴于两个采样电容 C_s 在采样保持前后电荷守恒，又可得

$$C_s(V_{cm} - V_{ip}) + C_s(V_{cm} - V_{in}) = 2C_s(V_x - V_{cm}) \quad (A.4.5)$$

将式(A.4.1)与式(A.4.2)相加并代入式(A.4.5)，可得

$$V_x = V_y = \frac{V_{op} + V_{on}}{2} \cdot \frac{C_h}{C_s} = \frac{V_{op} + V_{on}}{2} \quad (A.4.6)$$

由式(A.4.6)可知，只要保证 $C_h = C_s$ ，且共模电压 $V_{cm1} = V_{cm2} = V_{cm3} = V_{cm}$ ，则运算放大器保持阶段时输入端的电压与输入信号的共模电压无关，仅由输出共模电压决定，而输出共模电压将由输出共模反馈电路决定，且该值恒定。因而，电荷重分配型结构的采样保持电路可处理非常大的输入共模电压的变化，即对运放的输入共模电压范围要求不高。

(2)全差分电容翻转型 S/H 电路

第二种电路是电容翻转型采样保持电路，如图 A.4.3 所示。该电路由两个电容 C 、运算放大器及相应开关管组成。

电路工作过程如下：在采样阶段，时钟 CKS 为高电平，差分输入信号被采样到两个输入电容 C 上；在保持阶段开始之前，时钟 $CKSB$ 提前关断，这是为了防止开关管 S_1 关断时产生与输入信号有关的电荷注入效应；在保持阶段，时钟 CKS 为低电平， CKH 为高电平，电容 C 中原与输入信号相连的极板连接到运放的输出端，电容 C 中的共模和差模电荷均发生转移，此时输出电压 $V_{op} - V_{on}$ 就等于时钟 $CKSB$ 关断时差分输入信号的瞬时电压值。由于电容翻转型采样保持电路具有反馈系数大，电容个数少的优点，从而使采样保持电路的噪声低、功耗小，在现代高速流水线 ADC 的设计中比较流行。

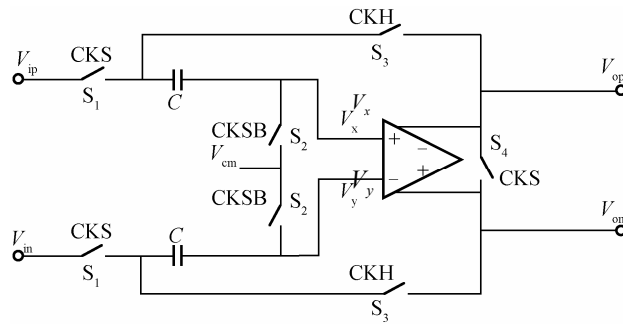


图 A.4.3 电容翻转型采样保持电路

对于图 A.4.3 所示 S/H 电路，根据采样阶段和保持阶段的电荷守恒原理，可得

$$C(V_{\text{cm}} - V_{\text{ip}}) = C(V_{\text{x}} - V_{\text{op}}) \quad (\text{A.4.7})$$

$$C(V_{\text{cm}} - V_{\text{in}}) = C(V_{\text{y}} - V_{\text{on}}) \quad (\text{A.4.8})$$

式中 V_{x} , V_{y} 为保持阶段运算放大器正负输入端电压。由于假设运放增益无穷大，则 $V_{\text{x}} = V_{\text{y}}$ 。

将式(A.4.7)与式(A.4.8)相减，即得

$$(V_{\text{op}} - V_{\text{on}}) = (V_{\text{ip}} - V_{\text{in}}) \quad (\text{A.4.9})$$

而将式(A.4.7)与式(A.4.8)相加，并注意到 $V_{\text{x}} = V_{\text{y}}$ ，可得到

$$\frac{V_{\text{ip}} + V_{\text{in}}}{2} - V_{\text{cm}} = \frac{V_{\text{op}} + V_{\text{on}}}{2} - V_{\text{x}} \quad (\text{A.4.10})$$

由上式可得运算放大器输入端的共模电压变化为

$$\Delta V_{\text{in,cm}} = V_{\text{cm}} - V_{\text{x}} = \frac{V_{\text{ip}} + V_{\text{in}}}{2} - \frac{V_{\text{op}} + V_{\text{on}}}{2} = V_{\text{in,cm}} - V_{\text{out,cm}} \quad (\text{A.4.11})$$

其中，输入信号共模电压为

$$V_{\text{in,cm}} = \frac{V_{\text{ip}} + V_{\text{in}}}{2} \quad (\text{A.4.12})$$

输出信号共模电压为

$$V_{\text{out,cm}} = \frac{V_{\text{op}} + V_{\text{on}}}{2} \quad (\text{A.4.13})$$

由式(A.4.11)可知，运算放大器输入端共模电压不仅与输出信号的共模电压有关，还与输入信号的共模电压有关。这是由于电容 C 在采样阶段时作采样电容，在保持阶段时作反馈电容，因此在工作过程中其共模电荷和差模电荷一起发生了转移。由于运算放大器的输出端有输出共模反馈电路，输出信号共模电压由输出共模反馈电路决定，因此当输入信号的共模电压与输出端的共模电压不一致时，运放在采样阶段和保持阶段的输入共模电压将发生变化，这就对采用该结构的采样保持电路的运算放大器的输入共模电压范围提出了要求。

进一步的分析表明，在同样信噪比要求下，电荷重分配型采样保持电路在采样阶段和保持阶段的热噪声都为电容翻转型的两倍。同时，由于电荷重分配型采样保持电路的反馈系数是电容翻转型的二分之一，使得在同样建立速度要求下，前者的单位增益带宽需为后者的两倍，即前者的运算放大器要比后者有更大的功耗。但是，电荷重分配型结构的采样保持电路对运算放大器输入共模电压范围的要求明显比后者宽裕，这使得该结构的模数转换器电路可适用于不同输入共模电压信号的应用。此种特性提高了所设计电路的通用性和适用性，这也正是业界的模数转换器电路更多地采用电荷重分配型采样保持电路结构的原因。

A.5 1.5bit/级数字校正原理 (p187)

流水线 ADC 中采用的开关电容动态锁存比较器虽然具有低的静态功耗和较快的速度，但是它所引入的失调要比一般的静态比较器大，另外比较器采样电容失配以及子 ADC 与 MDAC 之间采样时间误差等都会引入失调，这就需要采用数字校正技术来消除这些失调的影响。以下采用 Stephen H Lewis 提出的数字校正算法来实现对失调误差的校正。这种校准算法的特点是使用错位相加的方法，将子 ADC 所产生的小于 $1/4V_{\text{ref}}$ 的误差消除掉。现以 1.5bit/级为例来分析这种误差校准方法的原理。

图 A.5.1 所示为带有失调误差的 1.5bit/级流水线的输出余量图，其分别在 $1/4V_{\text{ref}}$ 和 $-1/4V_{\text{ref}}$ 处有 δ_1 和 δ_2 的失调误差，此时子 ADC 的量化参考电压为 $-V_{\text{ref}}/4+\delta$ 和 $V_{\text{ref}}/4+\delta$ 。由图中可以看出若 $-V_{\text{ref}}/4<\delta<V_{\text{ref}}/4$ ，则输出余量不会超出余量输出范围，输出数字误差为 1 或者 -1，余量输出误差为 V_{ref} 或 $-V_{\text{ref}}$ ，在误差之外的区域，输出余量和数字码与理想值相同，没有误差。

以处在 $V_{\text{ref}}/4+\delta$ 处的失调误差为例，设第 k 级余量所在区间为：

$$\frac{1}{4}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k} < \frac{1}{4}V_{\text{ref}} + \delta_1 \quad (\text{A.5.1})$$

此时第 k 级理想量化数字码为 $D_k^* = 10$ ，若存在大小为 δ_1 的误差，则实际量化数字码为 $D_k = 01$ ，实际输出码存在 -1 的误差；输出余量(即下一级的输入量)理想情况下为 $-\frac{1}{2}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k+1} < 0$ ，存在误差的情况下为 $\frac{1}{2}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k+1} < V_{\text{ref}}$ 。在存在误差的情况下，无论第 $k+1$ 级有没有误差其处理结果都为 $D_{k+1}=10$ ，与第 k 级错位相加得：

$$\begin{array}{r} D_k \quad \quad 01 \\ D_{k+1} \quad 10 \\ \hline 100 \end{array} \quad (\text{A.5.2})$$

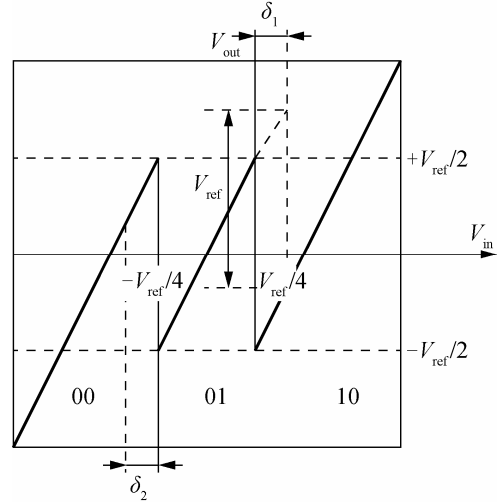


图 A.5.1 带失调误差的 1.5bit/级的输出余量图

在不存在误差的情况下，第 k 级的输出余量分为两种情况：

- (1) 当 $\frac{1}{4}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k} < \frac{3}{8}V_{\text{ref}}$ 时， $-\frac{1}{2}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k+1} < -\frac{1}{4}V_{\text{ref}}$ ，此时第 $k+1$ 级的输出数字码为 $D_{k+1}^* = 00$ ，

与第 k 级理想输出码错位相加得：

$$\begin{array}{r} D_k^* \quad \quad 10 \\ D_{k+1}^* \quad 00 \\ \hline 100 \end{array} \quad (\text{A.5.3})$$

所得结果与存在失调误差 δ_1 的结果相同，误差被抵消。

- (2) 当 $\frac{3}{8}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k} < \frac{1}{2}V_{\text{ref}}$ 时， $-\frac{1}{4}V_{\text{ref}} < V_{\text{in},k+1} < 0$ ，此时第 $k+1$ 级的输出数字码为 $D_{k+1}^* = 01$ ，与

第 k 级理想输出码错位相加得：

$$\begin{array}{r}
 D_k^* \quad 1\ 0 \\
 D_{k+1}^* \quad 0\ 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 1
 \end{array} \tag{A.5.4}$$

此时实际结果与此时的结果同样有-1 的误差，误差被传递到下一级的输出。

对比式(A.5.2)、式(A.5.3)和式(A.5.4)的结果可以发现，在第 k 级存在失调误差 $-V_{\text{ref}}/4 < \delta < V_{\text{ref}}/4$ 时，会出现两种可能发生的情况。第一种是误差在与下一级错位相加时被完全抵消；另一种情况则是误差没有被抵消，而是传递到下一级。传递到下一级的误差同样也会出现两种情况：被抵消或者继续传向下一级。以此类推，当传递到最后一级的 Flash ADC 时，由于其有一个三位的量化器，所以会将前面传递下来的误差全部抵消，最后的数字码只有最后一级所产生的最低位的失调误差，这几乎是可以忽略不计的。

A.6 输入三阶交调 IIP3 表达式导出 (p252)

双频测试时, $V_1=V_2=V$, $(2\omega_1-\omega_2)$ 或 $(2\omega_2-\omega_1)$ 分量的幅度为 $3k_3V^3/4$, 而基波分量为 k_1V , 所以在双音频测试情况下, 三阶交调分量 $(2\omega_1-\omega_2)$ 或 $(2\omega_2-\omega_1)$ 与基波分量之比为

$$\frac{\text{三阶交调分量}}{\text{基波分量}} = \frac{3 k_3}{4 k_1} V^2 \quad (\text{A.6.1})$$

根据三阶交调点 IP3 定义, 在 IP3 这一点, 三阶交调分量与基波分量相等, 即

$$\frac{3 k_3}{4 k_1} V_{\text{IP3}}^2 = 1$$

由此得到

$$V_{\text{IP3}} = \sqrt{\frac{4 k_1}{3 k_3}} \quad (\text{A.6.2})$$

当信号源与负载匹配时, 对应三阶交调点的输入功率

$$P_{\text{IP3}} = \frac{(V_{\text{IP3}})^2}{2R_s} = \left| \frac{2 k_1}{3 R_s k_3} \right| \quad (\text{A.6.3})$$

如用 V_{in} 表示每个频率上的输入水平, 用 V_{ω_1, ω_2} 表示在频率 ω_1, ω_2 处的输出幅度, 而 V_{IM3} 表示三阶交调 IM3 的幅度, 由式(A.6.1)可知

$$\frac{V_{\omega_1, \omega_2}}{V_{\text{IM3}}} \approx \frac{|k_1| V_{\text{in}}}{\frac{3}{4} |k_3| V_{\text{in}}^3} = \frac{4 |k_1|}{3 |k_3| V_{\text{in}}^2} \quad (\text{A.6.4})$$

将式(A.6.2)表示的 V_{IP3} 代入式(A.6.4)就得到

$$\frac{V_{\omega_1, \omega_2}}{V_{\text{IM3}}} = \frac{V_{\text{IP3}}^2}{V_{\text{in}}^2} \quad (\text{A.6.5})$$

式(A.6.5)还可写成

$$20 \lg V_{\omega_1, \omega_2} - 20 \lg V_{\text{IM3}} = 20 \lg V_{\text{IP3}}^2 - 20 \lg V_{\text{in}}^2 \quad (\text{A.6.6})$$

或表示成

$$20 \lg V_{\text{IP3}} = \frac{1}{2} (20 \lg V_{\omega_1, \omega_2} - 20 \lg V_{\text{IM3}}) + 20 \lg V_{\text{in}} \quad (\text{A.6.7})$$

如果所有信号功率用 dBm 表示, 上式可表示为

$$\text{IIP3} / \text{dBm} = \frac{1}{2} \Delta P / \text{dB} + P_{\text{in}} / \text{dBm} \quad (\text{A.6.8})$$

式中

$$\text{IIP3} / \text{dBm} = 20 \lg V_{\text{IP3}} \quad (\text{A.6.9a})$$

$$\Delta P / \text{dB} = P_{\omega_1, \omega_2} / \text{dBm} - P_{\text{IM3}} / \text{dBm} \quad (\text{A.6.9b})$$

$$P_{\omega_1, \omega_2} / \text{dBm} = 20 \lg V_{\omega_1, \omega_2} \quad (\text{A.6.9c})$$

$$P_{\text{IM3}} / \text{dBm} = 20 \lg V_{\text{IM3}} \quad (\text{A.6.9d})$$

$$P_{\text{in}} / \text{dBm} = 20 \lg V_{\text{in}} \quad (\text{A.6.9e})$$

因为如图 4.5.2 所示, ω_1 、 ω_2 就在所需的基频通带旁边, 故将 P_{ω_1, ω_2} 记为 $P_{\text{基频输出}}$ 。设通带及其附近增益 G/dB 为常数, 则以 dBm 计的 $P_{\text{基频输出}} = P_{\text{in}} + G$, 其中 P_{in} 为输入功率。同时输出三阶交调 P_{IM3} 归算到输入端三阶交调功率为 $P_{\text{IM3, in}} = P_{\text{IM3}} - G$ 。如此, 式(A.6.9b)可改写为

$$\Delta P = P_{\text{基频输出}} - P_{\text{IM3}} = (P_{\text{in}} + G) - P_{\text{IM3}} = P_{\text{in}} - (P_{\text{IM3}} - G) = P_{\text{in}} - P_{\text{IM3, in}} \quad (\text{A.6.10})$$

将上式代入 (A.6.8), 得到

$$\text{IIP3} / \text{dBm} = \frac{3P_{\text{in}} - P_{\text{IM3, in}}}{2} \quad (\text{A.6.11})$$

往后论及电路非线性时, 如非特别说明, IIP3 , P_{ω_1, ω_2} , P_{IM3} , P_{in} 都是指以 dBm 计的 $\text{IIP3}/\text{dBm}$, $P_{\omega_1, \omega_2}/\text{dBm}$, $P_{\text{IM3}}/\text{dBm}$, P_{in}/dBm , 请读者留意。

图 A.6.1 是式(A.6.8)或式(A.6.11)表示的 IP3 计算的图解。图中 L_1 、 L_3 分别为主信号功率与三阶交调功率曲线。因为直线 L_1 的斜率为 1, 而直线 L_3 的斜率为 3, 因此输入增加 $\Delta P/2$ 将在 L_1 上产生相等的增量, 而在 L_3 上产生 $3\Delta P/2$ 的增量, 这使得两条直线之间的差距为零。该图还同时显示, 输入三阶交调 IIP3 就等于基频输出($P_{\text{基频输出}}$)和 IM3 项输出(P_{IM3})幅度之差的一半($\Delta P/2$)加上相应的输入幅度(P_{in})。

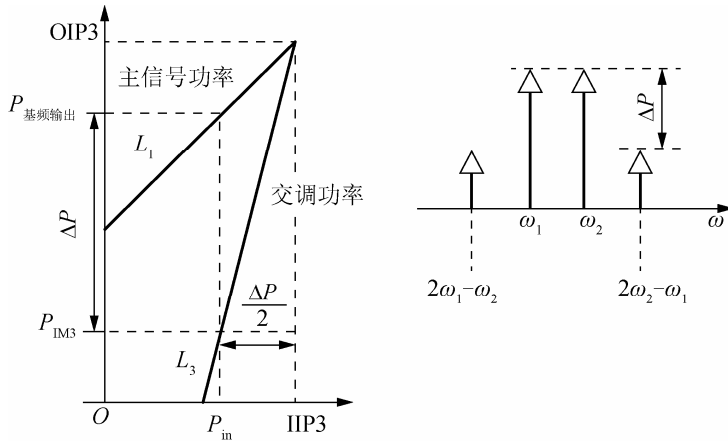


图 A.6.1 IP3 计算的图示解释(P_{in} 等均以 dBm 计)

式(A.6.11)这一表达式的优点是, IIP3 可以只用一个输入幅度来度量, 避免了使用外推的方法。在设计初期或表征初期估计 IP3 提供了方法, 但是准确的 IIP3 值仍然必须经过外推得到, 以保证所有的非线性效应和与频率相关的效应都包括在内。

类似地从图 A.6.2 可以证明二阶交调点 IIP2 为

$$\begin{aligned} \text{IIP2} / \text{dBm} &= P_{\text{in}} / \text{dBm} + (P_{\text{基频输出}} - P_{\text{IM2}}) / \text{dB} \\ &= P_{\text{in}} / \text{dBm} + \Delta P / \text{dB} \end{aligned} \quad (\text{A.6.12})$$

(式中 $\Delta P = P_{\text{基频输出}} - P_{\text{IM2}}$)

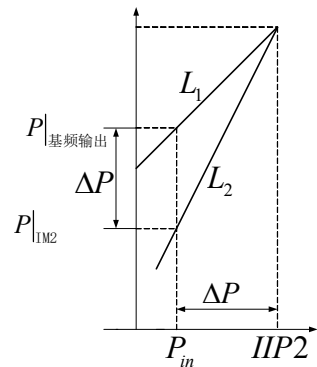


图 A.6.2 计算 IIP2 的图示

可以证明, 1dB 压缩点 $P_{-1\text{dB}}$ 与 IIP3 有如下近似关系

$$\text{IIP3} \approx P_{-1\text{dB}} + 9.6\text{dB} \quad (\text{A.6.13})$$

A.7 TD-SCDMA 射频收发器发射机参数预算 (p264)

发射机的功能一是调制，二是频率变换，三是功率放大。调制精度、发射谱、输出功率电平是其重要指标。

TD-SCDMA 采用非恒包络数字调制技术(OCQPSK)，信号幅度和相位都承载信息，对功率放大器的线性度要求很高。

收发机功耗，发射机占主要部分，因此对发射机的高效率要求十分迫切。另一个严峻的要求是输出功率控制需实现 79dBm 的动态范围，且控制步长为 1dB，精度为±0.5dB。

所以非恒包络调制、精确的且宽的功率控制范围、效率与发射谱是 TD-SCDMA 发射机主要关心之处。

(1) 输出 1dB 压缩点

输出 1dB 压缩点是放大器增益比线性输出时低 1dB 的点。

对于功率级别 3 的终端，如考虑比 21dBm 功率输出还高 3dB，则 1dB 压缩点为

$$P_{-1dB} = 24\text{dBm} \quad (\text{A.7.1})$$

(2) 输出上变频 OIP3

输出上变频 OIP3(Output Third order Intermodulation Products)是一组最大可允许漏洩到邻信道的功率。UE 标准规定邻信道功率比 ACPR(adjacent channel leakage power ratio)，当邻信道与指定信道频率偏差 1.6MHz 时小于-33dB，而当邻信道与指定信道频率偏差 3.2MHz 小于-43dBc

关于所需要的输出 OIP3 的一个保守的估计，就是直接将 ACPR 应用到双频测试中。此处假定，在指定信道内发送两个单频信号，并设所产生的三阶交调功率为-33dBc，对功率级别 3 的终端，天线连接处最大输出功率为 21dBm。OIP3 按下式计算

$$OIP3|_{\text{interceptpoint}} = \frac{3P_1 - P_3}{2}$$

式中 P_1 是线性功率， P_3 是三阶交调功率，所以

$$OIP3 = 1.5 \times P_1 - 0.5 \times P_3 = 1.5 \times 21 - 0.5 \times (21 - 33) = 37.5\text{dBm} \quad (\text{A.7.2})$$

考虑一定的余量，则 OIP3=40dBm。

(3) 邻信道泄漏功率比 ACPR

ACPR 是泄漏到邻信道功率与指定信道功率之比，取决于滤波器的滤波特性。

当邻信道频率与指定信道频率间隔 1.6MHz 时，ACPR 要小于 33dBc，而当邻信道频率与指定信道频率间隔 3.2MHz 时，ACPR 要小于 43dBc。

(4) 误差矢量模 EVM(Error Vector Magnitude)

EVM 表示信号调制的精度，反映测量得到的波形与理想调制波形的差别。定义为平均误差矢量功率与平均参考信号功率之比的平方根。

TD-SCDMA 对 EVM 的要求与 WCDMA 一样，为 17.5%。

(5) 发射功率控制(TPC, Transmitter Power Control)

发射功率控制(TPC)有两方面作用，一是减少干扰，二是降低功耗。按标准，TPC 包括开环功率与闭环功率控制。

总的功率控制范围，对于功率级别 3 的终端

$$P_{range} = 21 - (-49) = 70\text{dB} \quad (\text{A.7.3})$$

鉴于工艺参数波动对发射链路(功放)性能的影响，需要借助自动增益控制(AGC)来补偿，所以发射机 AGC 的动态范围要比前面计算的 70dB 要大，至少 79dB。

如上根据 TD-SCDMA 标准确定接收机、发射机参数的基本考虑对于确定 TDD LTE 收发机射频电路有关参数也是适用的。但要注意，TDD LTE 应用了 OFDM 技术与 MIMO(多天线)技术，有关收发机参数确定时要考虑 OFDM 技术与 MIMO(多天线)技术的影响。OFDM 技术要求信号有高的峰均比(峰值与平均值之比)，MIMO 则提高了天线增益。

A.8 锁相频率合成器原理简介 (p276)

锁相频率合成器 (*phase locked frequency synthesizer*) 是用锁相环实现的频率合成器。频率合成器是将一个高稳定性和高精度的标准频率, 经过对频率的加、减、乘、除四则运算, 产生同样稳定性和精确度的大量离散、按一定频率间隔输出频率的信号源。它广泛应用于广播通信、频率合成、自动控制及时钟同步等技术领域。

锁相环 (*Phase Locked Loop, PLL*) 是频率合成器的核心。图 A.8.1 是一个简单的模拟锁相环原理图, 它由鉴相器、环路滤波器、压控振荡器等几部分组成, 其基本功能是, 压控振荡器 (*VCO*) 的输出信号 $v_o(t)$ 能跟踪输入信号 $v_r(t)$ 的相位, 并实现相位的自动锁定控制。压控振荡器输出的信号 $v_o(t)$ 反馈到鉴相器 (*PD*) 中, 与输入参考信号进行相位比较, 得到一个反映二者相位差的电压信号 $v_{pd}(t)$, 再通过环路滤波器 (低通滤波器), 抑制其高频信号成份和高频噪声。滤波后的误差电压信号 $v_c(t)$ 加到压控振荡器, 对其输出信号频率进行调制。调制后的输出信号再反馈到鉴相器与参考信号进行相位比较, 产生的任何相位误差再通过环路滤波器调制压控振荡器频率, 直到压控振荡器以固定的相位关系锁住参考输入信号, 从而实现频率跟踪与频率同步, 即压控振荡器输出信号的频率 ω_o (或 $2\pi f_o$) 等于输入参考信号频率 ω_r (或 $2\pi f_r$)。如果参考输入信号的频率是高度稳定的, 那末压控振荡器的输出信号频率也将是高度稳定的。

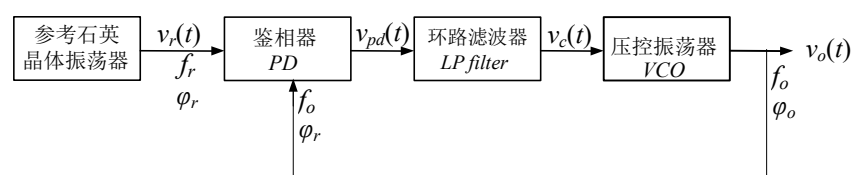


图 A.8.1 锁相环系统方框图

所以, 锁相环是一个反馈控制系统, 它利用外部输入的参考信号控制环路内部振荡信号。在这个反馈系统中, 被控制量是相位, 被控对象是压控振荡器 (*VCO*)。

下面定性分析一下图 A.8.1 所示锁相环 *VCO* 的输出信号 v_o 的频率怎样被输入参考信号 v_r 的频率锁定的。

假设锁相环在初始时没有实现相位锁定, 参考频率为 100MHz 。*VCO* 需调整到 5V 以使 *VCO* 的频率为 100MHz 。

前已提及, 锁相环用的环路滤波器为低通滤波器, 它在低频时的增益为 100, 高频时的增益为 0.1, 如图 A.8.2 所示。当环路处于未锁定状态时, *VCO* 的频率可以是在其工作范围内的任意一个频率。如没 *VCO* 工作在 101MHz 下, 那末当加入 100MHz 参考频率时, 在鉴相器输出会有 1MHz 的差频信号。这个差频信号频率足够高, 以至于环路滤波器只提供 0.1 的增益。*VCO* 的控制电压为

0.1V 峰-峰值电压所调制, 但是这个电压无法使 *VCO* 频率产生任何显著的变化。这就是说当 *VCO* 输出信号频率与输入参考频率相差太大时, *VCO* 输出信号的频率不能被参考信号频率

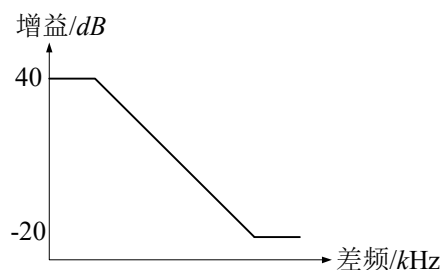


图 A.8.2 环路滤波器频率响应

锁定，即电路不会有足够的增益使环路处于锁定状态。

然而当加载 100MHz 参考频率时，VCO 的频率为 100.1MHz，则差频为 100kHz。这正好处于环路滤波器高增益范围。这个放大的差频电压可以对 VCO 进行调制。随着 VCO 频率和参考频率越来越接近，差频会变得越来越小，因此电路会进入环路滤波器的更高增益的区域。这个过程会加速 VCO 频率的变化，直到它等于参考频率，在这点上差频为零，锁相环被设计成稳定的闭环系统，因此 VCO 会保持和参考频率相同，即 VCO 频率被参考频率锁定。但请注意，当锁相环处于锁定状态时，VCO 的输出相位 φ_o 与参考振荡器输入到系统的相位 φ_r 并不相等。鉴相器检测到这个相位差并输出一个电压 v_{pd} ，此经滤波后控制 VCO 的输出频率使之跟踪参考振荡器的频率。

如果对压控振荡器输出信号进行模拟 N 分频，再反馈到鉴相器 PD，则得锁相频率合成器，如图 A.8.3 所示。当系统锁定时就可以得到

$$f_r = f_d \quad (\text{A.8.1})$$

和

$$f_o = Nf_d \quad (\text{A.8.2})$$

将式(A.8.1)代入上式，即得

$$f_o = Nf_r \quad (\text{A.8.3})$$

上式表示压控振荡器输出频率 f_o 为输入参考频率 f_r 的 N 倍。改变整数 N 即可得到不同的输出频率，其频率间隔正好等于参考频率。如果要减小输出频率间隔，或提高输出频率分辨率，就得降低输入参考信号的频率。

有必要指出，图 A.8.3 中的模拟 N 分频器是一个简化的模块，实际实现起来会用到混频器、带通滤波器等电路。

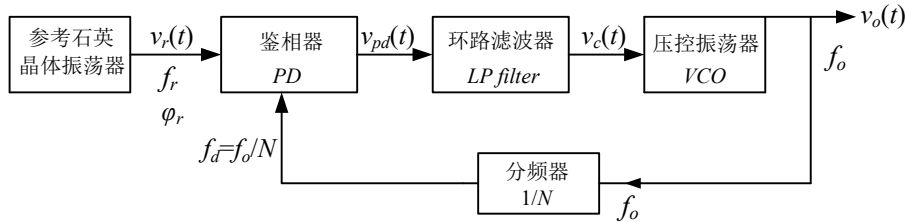


图 A.8.3 模拟整数分频锁相环系统方框图

A.9 正弦交流稳态电路的复频域分析与相量分析 (p297)

正弦交流稳态电路是指在正弦电压源或正弦电流源作用下达到稳态的电路，它是电力电路中最常见的运行工况。

工程中正弦交流稳态电路采用相量分析法进行分析。可以证明，正弦交流稳态电路的相量分析只是电路复频域分析的特例，但这种方法特别适合正弦交流稳态电路，至今在电力电路中得到广泛应用。

1. 正弦信号

电路为正弦信号激励，意味着驱动电路的电压源、电流源随时间 t 按正弦规律变化。按正弦规律变化的函数既可以用正弦函数表示，也可以用余弦函数表示。如果采用余弦函数表示。则正弦电压可表示为

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (\text{A.9.1})$$

正弦电压 v 随时间 t 的变化曲线示于图 A.9.1。式 (A.9.1) 或图 (A.9.1) 描述的正弦电压是时间的周期函数，可以用 3 个参数表示，它们是：幅值 V_m ，角频率 ω ，相角度 θ 。

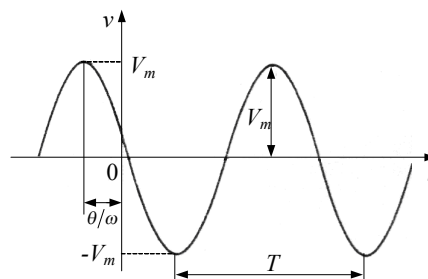


图 A.9.1 正弦电压

幅值 V_m 给出了正弦电压的最大值， $\pm V_m$ 是电压的上、下限值（幅值）。角频率 ω 与周期 T 的关系是

$$\omega T = 2\pi \quad \text{或} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{rad/s}) \quad (\text{A.9.2})$$

周期 T 的倒数是频率 f ，即 $T=1/f$ ，故角频率又可表示为

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{A.9.3})$$

描述正弦电压（电流）函数的另一个重要特征参数是它的均方根值。一个函数的均方根值定义为该函数平方的平均值再开方。因此，如果 $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ ，则按均方根值的定义， v 的均方根值 V_{rms} 为

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.9.4})$$

式 (A.9.4) 表示正弦电压的均方根值仅取决于 v 的最大值 V_m ，既不是频率的函数，也不是相位角的函数。均方根值 V_{rms} 也称为正弦电压的有效值，可记为 V_{eff} 。

同样正弦电流 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$ 的均方根值 I_{rms} (或 I_{eff}) 为

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.9.5})$$

v 与 i 的均方根值在功率计算中很有用。通常所说的市电 220V，380V 指的都是有效值。

2. 正弦信号激励下电路稳态响应的特点

设正弦激励信号 $f(t)$ 及其拉普拉斯变换 $F(s)$ 分别表示为

$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (\text{A.9.6})$$

$$F(s) = \frac{A(s \cos \theta - \omega \sin \theta)}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{A.9.7})$$

设电路系统函数为 $H(s)$ ，则复频域电路输出响应 $G(s)$ 为

$$G(s) = H(s) \frac{A(s \cos \theta - \omega \sin \theta)}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{A.9.8})$$

式中 $G(s)$ 是输出 $g(t)$ 的拉普拉斯变换。

观察式(A.9.8)的部分分式展开式。展开式的项数与 $H(s)$ 的极点有关，因为 $H(s)$ 作为物理可实现电路的传递函数是不难确定的。式(A.9.8)的展开式为

$$G(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} + \sum_{i=1}^n (\text{由 } H(s) \text{ 极点产生的项}) \quad (\text{A.9.9})$$

在式(A.9.9)中，前两项是由激励信号源的共轭复极点产生的，但 $H(s)$ 的极点产生的影响对 $g(t)$ 的稳态响应没有影响，因为，所有 $H(s)$ 的极点都位于左半 s 平面，所以当 t 增加时，相应的时域项趋于零，因此方程右边的前两项决定了稳态响应。剩下的问题是决定部分分式展开系数 K_1 ：

$$\begin{aligned} K_1 &= (s - j\omega)G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{H(s)A(s \cos \theta - \omega \sin \theta)}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} \\ &= \frac{H(j\omega)A(j\omega \cos \theta - \omega \sin \theta)}{j2\omega} \\ &= \frac{H(j\omega)A(\cos \theta + j\sin \theta)}{2} = \frac{1}{2}H(j\omega)Ae^{j\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.9.10})$$

一般情况下， $H(j\omega)$ 是复数，可以写成

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(j\omega)} \quad (\text{A.9.11})$$

注意， $H(j\omega)$ 的模与相角都是频率的函数。将式(A.9.11)代入式(A.9.10)， K_1 的表达式为

$$K_1 = \frac{A}{2}|H(j\omega)|e^{j[\varphi(j\omega) + \theta]} \quad (\text{A.9.12})$$

将式(A.9.12)代入式(A.9.9)进行反变换，求得 $g(t)$ 的稳态解。反变换过程中忽略 $H(s)$ 极点产生的项，得到

$$g(t) \Big|_{\text{稳态}} = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \theta + \varphi(j\omega)] \quad (\text{A.9.13})$$

注意， $H(j\omega)$ 、 $\varphi(j\omega)$ 有时也简记为 $H(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 。上式说明，电路在正弦信号激励下，其稳态响应有以下 2 个特点：

(1) 在正弦信号激励下电路达到稳态时，各节点电压、支路电流都按正弦规律变化，且响应的频率与激励信号源频率相同；

(2) 在正弦信号激励下电路达到稳态时，各节点电压、支路电流仅在幅值与相位上与激励源有差别：其幅值在激励源幅值的基础上有一个 $|H(j\omega)|$ 大小的增益，而其相位在激励相位的基础上有一个 $\varphi(j\omega)$ 大小的相移。

3. 正弦交流稳态电路输出响应的复频域分析

根据上述正弦交流稳态电路输出响应的特点(2)，式(A.9.13)表示的正弦稳态电路的输出

响应 $g(t)|_{\text{稳态}}$ 可按如下步骤计算:

- (1) 将时域时路转换为复频域运算电路;
- (2) 依据运算电路, 按节点电压法或修正节点分析法列写电路方程, 求系统函数 $H(s)$;
- (3) 令 $s=j\omega$, 求输出频率响应 $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ 的模 $|H(j\omega)|$ 与相角 $\varphi(\omega)$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(j\omega)}$$

- (4) 按式(A.9.13)求稳态输出响应。

以上计算过程通过下例予以说明。

【例 A. 9. 1】 电路如图 A.9.2(a)所示, 正弦电压源 $v_s(t) = 120\cos(5000t + 30^\circ)$, $R_1 = 1000\Omega$, $R_2 = 250\Omega$, $L = 50\text{mH}$, $C = 1\mu\text{F}$, 求输出响应 $v_o(t)$ 。

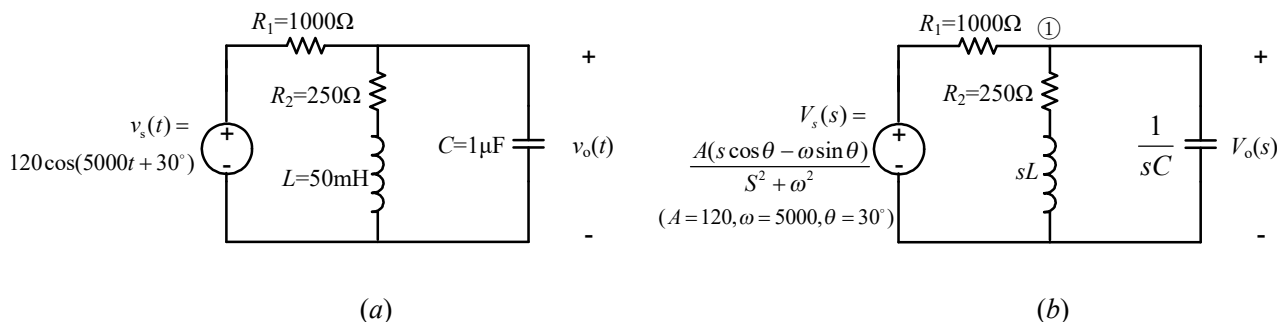


图 A.9.2 【例 A. 9. 1】 电路

解:

- (1) 将图 A.9.2(a)所示电路转换为图(b)所示运算电路。
- (2) 围绕图 A.9.2(b)节点①列写复频域中的 KCL 方程

$$\frac{V_o(s) - V_s(s)}{R_1} + \frac{V_o(s)}{R_2 + sL} + sCV_o(s) = 0$$

将 R_1 、 R_2 、 L 、 C 的值代入上式得到:

$$\frac{V_o(s) - V_s(s)}{1000} + \frac{V_o(s)}{250 + 0.05s} + \frac{s}{10^6}V_o(s) = 0$$

解上式得到系统函数 $H(s)$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}$$

- (3) 求 $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ 的模 $|H(j\omega)|$ 与相角 $\varphi(j\omega)$

$$\begin{aligned} H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega=j5000} &= \frac{1000(5000 + j5000)}{-25 \times 10^6 + j5000 \times 6000 + 25 \times 10^6} \\ &= \frac{1 + j1}{j6} = \frac{1 - j1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-j45^\circ} \end{aligned}$$

所以 $|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi(j\omega) = -45^\circ$

- (4) 将模 $|H(j\omega)|$ 与相角 $\varphi(j\omega)$ 代入式(A.9.13)即得在 $v_s(t) = 120\cos(5000t + 30^\circ)$ 激励下电路的稳态输出响应 $v_o(t)$

$$v_o(t) = 120 \times \frac{\sqrt{2}}{6} \cos(5000t + 30^\circ - 45^\circ) = 20\sqrt{2} \cos(5000t - 15^\circ) \quad \text{V}$$

4. 相量与相量变换

电力电路中, 常用相量分析法对正弦交流稳态电路进行分析, 这种分析法可以从电路的复频域分析得出。不过以下还是从正弦变量的相量表示, 相量变换, 相量域中的电路定律, 得出正弦交流稳态电路的相量分析法。具体过程与得出电路的复频域分析过程类似。

(1) 正弦电压(或正弦电流)的相量表示与相量变换

根据前面分析, 对于正弦交流稳态电路, 电路中任一节点电压, 任一支路电流随时间都按正弦规律变化, 且角频率 ω 与激励源的频率一致。因此正弦交流稳态电路的求解, 关键是确定按正弦规律变化的电压 (或电流) 的幅值与相位。

设节点电压 v 为

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (\text{A.9.14})$$

对应于这一正弦变化的电压 v , 今定义一个复数 \dot{V} , 即

$$\dot{V} = V_m e^{j\theta_v} \quad (\text{A.9.15})$$

由式 (A.9.15) 定义的复数, 通常称为相量。往后对随时间作正弦变化的量采用小写的英文字母表示, 对应的大写英文字母加一点, 就表示与该正弦变化量对应的相量。

如将随时间作正弦变化的电流记为

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

则相应的电流相量为

$$\dot{I} = I_m e^{j\theta_i}$$

所以与随时间作正弦变化的量对应的相量是一个复数, 其模就是该正弦变量的幅值, 而幅角就是正弦变量的相位。复数与二维平面上的一个矢量对应, 按照复数的图解表示, 就可得到相量的图解表示(简称相图表示)。 $\dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$ 、 $\dot{I} = I_m e^{j\theta_i}$ 的相图表示见图 A.9.3。

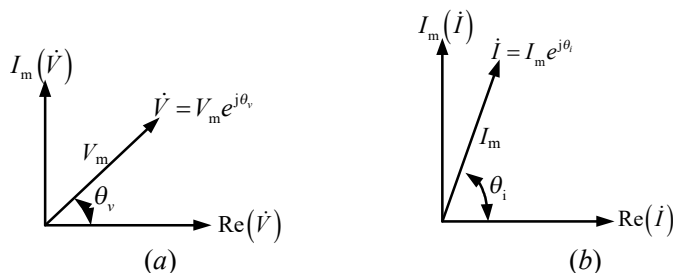


图 A.9.3 \dot{V} 、 \dot{I} 的相图表示

将正弦变量 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ 、 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ 变换为相量 $\dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$ 、 $\dot{I} = I_m e^{j\theta_i}$ 称之为正弦变量的相量变换。

因为由 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ 可得出对应的向量 $\dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$, 反过来由相量 $\dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$ 也可得出对应的 $v(t)$, 这只要将相量 \dot{V} 乘 $e^{j\omega t}$ 再取其实际部即可得出对应的随时间作正弦变化的量, 即

$$v(t) = R_e(\dot{V} e^{j\omega t}) = R_e(V_m e^{j\theta_v} e^{j\omega t}) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (\text{A.9.16})$$

式中 R_e 表示取实部运算。式 (A.9.16) 的推演中利用了下列欧拉恒等式:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (\text{A.9.17})$$

同样可由电流相量 $\dot{I} = I_m e^{j\theta_i}$ 得出相应的正弦电流变量

$$i(t) = R_e(\dot{I} e^{j\omega t}) = R_e(I_m e^{j\theta_i} e^{j\omega t}) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (\text{A.9.18})$$

必须指出，相量表达式中没有时间因子，相量与时间无关。

将相量 $\dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$ 、 $\dot{I} = I_m e^{j\theta_i}$ 乘 $e^{j\omega t}$ 再取其实部以得出对应的随时间作正弦变化的量 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ 、 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ ，这个过程称为反相量变换(或相量反变换)。

正弦变量的相量变换和反相量变换可以用双向箭头表示。如正弦变量 $v(t)$ 与对应的相量 \dot{V} 表示成

$$v(t) \leftrightarrow \dot{V}$$

根据相量及相量变换的上述定义，可以得出相量运算的一些规则如下：

(2) 正弦变量的加法运算法则

设正弦变量 v, u 及其对应的相量分别为 \dot{V}, \dot{U} ，即

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \leftrightarrow \dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u) \leftrightarrow \dot{U} = U_m e^{j\theta_u}$$

则 $(v(t) + u(t))$ 与 $(\dot{V} + \dot{U})$ 对应，即

$$(v(t) + u(t)) \leftrightarrow (\dot{V} + \dot{U}) \quad (\text{A.9.19})$$

因为新的相量 $(\dot{V} + \dot{U})$ 乘上 $e^{j\omega t}$ 取其实部就得到 $(v(t) + u(t))$

$$\begin{aligned} R_e[(\dot{V} + \dot{U})e^{j\omega t}] &= R_e[(V_m e^{j\theta_v} + U_m e^{j\theta_u})e^{j\omega t}] \\ &= R_e[V_m e^{j\theta_v} e^{j\omega t} + U_m e^{j\theta_u} e^{j\omega t}] \\ &= R_e[V_m e^{j(\omega t + \theta_v)} + U_m e^{j(\omega t + \theta_u)}] \\ &= V_m \cos(\omega t + \theta_v) + U_m \cos(\omega t + \theta_u) \\ &= v(t) + u(t) \end{aligned}$$

式 (A.9.19) 就是相量的加法运算法则。因为相量就是复数，而复数又与一个矢量对应，故相量加法的图解可按矢量加法规则得到，如图 A.9.4 所示。

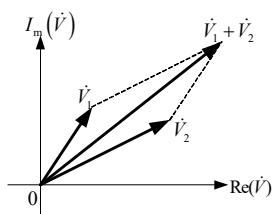


图 A.9.4 两相量相加的图示

(3) 正弦变量的微分运算与对应的相量乘 $j\omega$ 运算相当，即

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t) \leftrightarrow j\omega \dot{V} \quad (\text{A.9.20})$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t) = \frac{\partial}{\partial t} (V_m \cos(\omega t + \theta_v)) = -\omega V_m \sin(\omega t + \theta_v)$$

而

$$\begin{aligned} R_e[\dot{V} e^{j\omega t}] &= R_e(j\omega V_m e^{j\theta_v} e^{j\omega t}) = R_e(j\omega V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}) \\ &= -\omega V_m \sin(\omega t + \theta_v) \end{aligned}$$

式 (A.9.20) 表示, 对随时间作正弦变化物理量的微分运算, 如用对应的相量表示, 可以简化为乘 $j\omega$ 的代数运算。这就是相量运算的微分法则。

(4) 正弦变量的积分运算与对应的相量除以 $j\omega$ 运算相当, 即

$$\int v(t) dt \leftrightarrow \frac{\dot{V}}{j\omega} \quad (\text{A.9.21})$$

因为

$$\int v(t) dt = \int V_m \cos(\omega t + \theta_v) dt = \frac{V_m}{\omega} \sin(\omega t + \theta_v)$$

而

$$\begin{aligned} R_e\left(\frac{\dot{V}}{j\omega} e^{j\omega t}\right) &= R_e\left[\frac{V_m}{j\omega} e^{j\theta_v} e^{j\omega t}\right] = R_e\left[\frac{V_m}{j\omega} e^{j(\omega t + \theta_v)}\right] \\ &= \frac{V_m}{\omega} \sin(\omega t + \theta_v) \end{aligned}$$

式 (A.9.21) 表示, 对随时间作正弦变化的物理量的积分, 其对应的相量表示简化为除以 $j\omega$ 的代数运算, 这就是相量运算的积分规则。

(5) 两正弦变量乘积的时间的平均值计算可简化为取实部的代数运算。

设随时间正弦变化的物理量为 $v(t), i(t)$, 与其对应的相量为 \dot{V}, \dot{I} , 即

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \leftrightarrow \dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \dot{I} = I_m e^{j\theta_i}$$

则 $v(t)$ 与 $i(t)$ 乘积的时间平均值 $\langle v(t)i(t) \rangle$ 可表示为

$$\langle v(t)i(t) \rangle = \frac{1}{2} R_e(\dot{V} \dot{I}^*) \quad (\text{A.9.22})$$

式中 \dot{I}^* 为 \dot{I} 的共轭复数, 即 $\dot{I}^* = I_m e^{-j\theta_i}$ 。

式 (A.9.22) 的证明如下。因为 $v(t), i(t)$ 随时间作周期变化, $v(t)$ 与 $i(t)$ 乘积的时间平均值只要对一个周期 T 取其平均即可, 故有

$$\begin{aligned} \langle v(t)i(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cos(\omega t + \theta_v) I_m \cos(\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}R_e(VI^*) &= \frac{1}{2}R_e(V_m e^{j\theta_v} I_m e^{-j\theta_i}) = \frac{1}{2}R_e(V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)}) \\ &= \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)\end{aligned}$$

式 (A.9.22) 表示, 引入随时间作正弦变化物理量的相量表示后, 两乘积量随时间的平均值的计算简化为取实部的代数运算。

vi 乘积为功率, 对于正弦稳态电路, 利用式 (A.9.22) 平均功率的计算就很方便了。

随时间作正弦变化的电压 $v(t)$ 、 $i(t)$ 采用相量表示, 对正弦稳态电路的求解价值何在? 现以图 A.9.5 所示 RL 电路为例进行说明。正弦电压源 $v_s(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ 于 $t=0$ 时刻当开关 s 闭合时作用于电路, 电路方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (\text{A.9.23})$$

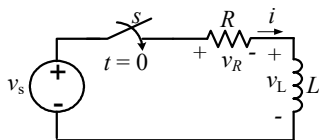


图 A.9.5 正弦电压激励下的 RL 电路

时域中求解上式, 其解可分解为特解和齐次方程的通解两个分量, 即

$$i(t) = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\theta_v - \varphi) e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \theta_v - \varphi) \quad (\text{A.9.24})$$

$$\text{式中} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (\text{A.9.25})$$

若正弦电压频率已知, 则可方便地求出电路的初相角 φ 。

式 (A.9.24) 右边第 1 项就是微分方程(A.9.23)对应的齐次方程的通解, 随着时间 t 的增加, 该分量趋于零, 表示电路的瞬态响应(或自由响应)。第 2 项是微分方程(A.9.23)的特解, 只要信号源电压为正弦电压且开关保持闭合状态, 这个分量随时间增长一直存在, 这就是电路的稳态响应(或强迫响应)。

下面通过相量变换对式(A.9.23)求解。因为电路达到稳态时, $v(t)$ 、 $i(t)$ 都按正弦函数变化, 可分别用相量表示

$$\begin{aligned}v(t) &\leftrightarrow \dot{V} = V_m e^{j\theta_v} \\ i(t) &\leftrightarrow \dot{I} = I_m e^{j\theta_i}\end{aligned}$$

$\frac{di(t)}{dt}$ 对应的相量为

$$\frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \dot{I} = j\omega I_m e^{j\theta_i}$$

于是微分方程 (A.9.23) 可简化为

$$j\omega L \dot{I} + R \dot{I} = \dot{V}$$

$$\text{所以} \quad \dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + j\omega L}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= R_e[\dot{I}e^{j\omega t}] = R_e\left[\frac{1}{R+j\omega L}V_m e^{j\theta_v} e^{j\omega t}\right] = R_e\left[\frac{V_m}{R+j\omega L} e^{j(\omega t+\theta_v)}\right] \\
&= R_e\left[\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j(\omega t+\theta_v)}\right] = R_e\left[\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j(\omega t+\theta_v-\varphi)}\right] \\
&= \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \theta_v - \varphi)
\end{aligned}$$

式中 $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$

此结果全同于通过解微分方程得到的稳态解。

因此引入正弦变化电压、电流的相量表示后,求解微分、积分形式的电路方程可简化为求解代数方程。必须指出,这里仅对正弦稳态电路有效,因为只是正弦稳态电路,电压、电流才只按正弦形式变化。

5. 相量域中的电路定理

以下从相量形式的基尔霍夫电路定律出发,引入电路阻抗(或导纳)的概念,从而可以借用电阻电路的分析法处理正弦交流信号激励下达到稳态的电路,这种处理正弦交流稳态电路的方法称为相量分析法。

(1) 相量域中的基尔霍夫电压、电流定律

设电路为正弦信号源激励,且已进入稳态, $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ 为某一闭合回路各分段上的电压, $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dots, \dot{V}_n$ 为其相量变换, $i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)$ 为从某一节点流出的电流, $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_n$ 为其相量变换,则时域和相量域的基尔霍夫电压定律(KVL)、电流定律 KCL 为:

$$\begin{array}{ccc}
\text{时域} & & \text{相量域} \\
\sum_{i=1}^n v_i(t) = 0 & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^n \dot{V}_i = 0
\end{array} \quad (\text{A.9.26})$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{时域} & & \text{相量域} \\
\sum_{i=1}^n i_i(t) = 0 & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^n \dot{I}_i = 0
\end{array} \quad (\text{A.9.27})$$

(2) 相量域中的元件约束关系

1) 相量域中的理想电压源与理想电流源

设 $v_s(t), i_s(t)$ 为时域中正弦变化电压源、电流源, \dot{V}_s, \dot{I}_s 为 $v_s(t), i_s(t)$ 的相量变换,则按相量变换定义,可得如下变换关系,图 A.9.6(a)、(b) 分别为正弦激励电压源、电流源的时域与相量域表示

$$\begin{array}{ccc}
\text{时域} & & \text{相量域} \\
v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \theta_s) & \leftrightarrow & \dot{V}_s = \dot{V}_{sm} e^{j\theta_s}
\end{array} \quad (\text{A.9.28})$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{时域} & & \text{相量域} \\
i_s(t) = I_{sm} \cos(\omega t + \theta_s) & \leftrightarrow & \dot{I}_s = I_{sm} e^{j\theta_s}
\end{array} \quad (\text{A.9.29})$$

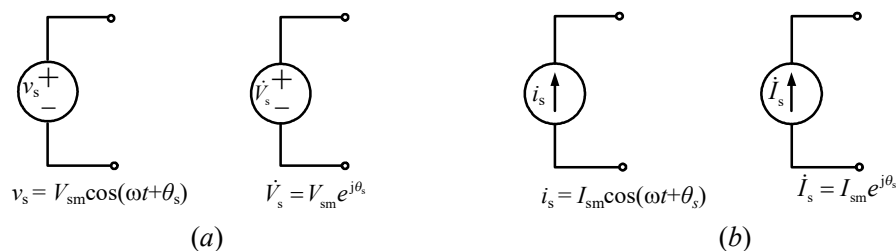


图 A.9.6 正弦激励的电压源、电流源的相量表示

2) 相量域中理想电阻的输入-输出关系及其图示

$$\begin{array}{ccc} \text{时域} & & \text{相量域} \\ v(t) = i(t)R & \leftrightarrow & \dot{V} = \dot{I}R \end{array} \quad (\text{A.9.30})$$

即电阻两端电压相量等于电阻乘以电流相量。故电阻在时域与相量域的等效电路分别如图 A.9.7(a)和(b)所示, 图(c)则是电阻两端电压与电流关系的相图表示, 相量 \dot{V} 与 \dot{I} 间的夹角为零, 即 \dot{V} 与 \dot{I} 同相。

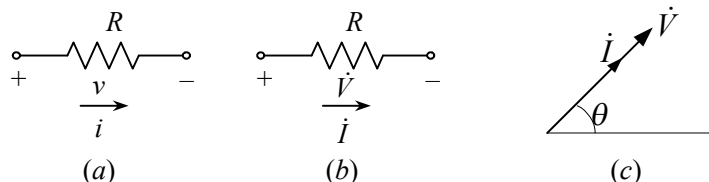
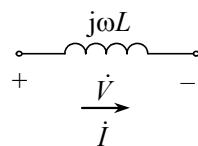


图 A.9.7 流经正弦电流的电阻元件之时域与相量域等效电路及其相图表示

(a) 时域等效电路 (b) 相量域等效电路 (c) 相图表示

3) 相量域中理想电感的输入-输出关系及其图示

$$\begin{array}{ccc} \text{时域} & & \text{相量域} \\ v(t) = L \frac{di(t)}{dt} & \leftrightarrow & \dot{V} = j\omega L \dot{I} \end{array} \quad (\text{A.9.31})$$



上式表示电感两端的电压相量等于 $j\omega L$ 与电流相量 \dot{I} 之积。故电感在相量频域可用图 A.9.8 所示电路等效。

式 (A.9.31) 还表示, 电压与电流间相位恰好差 90° , 图 A.9.9(a) 在时域中说明电压超前电流或电流滞后电压的概念, 例如电压到达负的峰值刚好比电流到负的峰值提前 90° 。图 (b) 则是其相图表示。

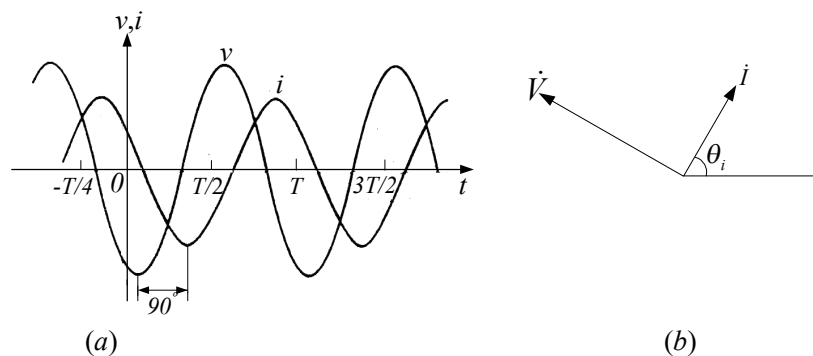
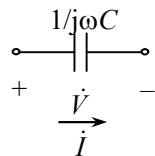


图 A.9.9 电感两端电压和电流的相位关系

4) 相量域中理想电容的输入-输出关系及其图示

$$\begin{array}{ccc}
 \text{时域} & & \text{相量域} \\
 i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} & \leftrightarrow & \dot{I} = j\omega C \dot{V} \quad \text{或} \quad \dot{V} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} \\
 & & (A.9.32)
 \end{array}$$



式 (A.9.32) 说明电容两端电压相量等于电流相量除以 $j\omega C$ ，其等效电路如图 A.9.10 所示。图 A.9.11(a) 在时域中说明电容两端电压与电流的相位关系，电容两端电压滞后电流 90° ，图(b)则是其相图表示。

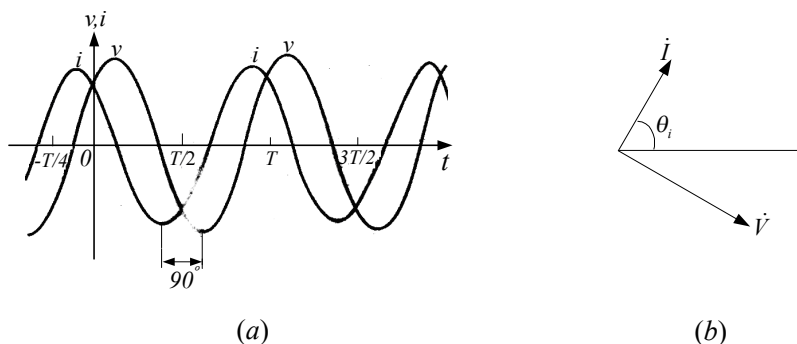


图 A.9.11 电容两端电压和电流的相位关系

5) 阻抗和导纳

总结前面对无源理想电路元件 R 、 L 、 C 两端电压、电流关系的相量表示 [式 (A.9.30)，(A.9.31) 和式 (A.9.32)]，可以将它们写成统一的形式

$$\dot{V} = Z \dot{I} \quad (A.9.33)$$

其中 Z 表示电路元件的阻抗，由式 (A.9.33) 可知，阻抗等于电路元件的电压相量与电流相量之比，因此电阻的阻抗为 R ，电感的阻抗为 $j\omega L$ ，电容的阻抗为 $1/(j\omega C)$ 。无论哪种情况，阻抗的单位均为欧姆 (Ω)。虽然阻抗是复数，但它不是相量。相量乘 $e^{j\omega t}$ 取实部就是与相量对应的时域中的量，而一般复数没有这一性质。因此虽然所有的相量是复数，但并不是所有的复数都是相量。

阻抗是电压相量与电流相量之比，与角频率 ω 有关，故称阻抗是频域中的量。频域下的阻抗类似于时域下的电阻、电感和电容。阻抗的虚部称为电抗，常用 X 表示。

因为电导 G 等于电阻的倒数，所以对于电阻元件式 (A.9.30) 又可写为

$$\dot{I} = G \dot{V} \quad (A.9.34)$$

对于电感、电容元件，式 (A.9.31) 和式 (A.9.32) 也可写为

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} \quad (\text{对于电感}) \quad (A.9.35)$$

$$\dot{I} = j\omega C \dot{V} \quad (\text{对于电容}) \quad (A.9.36)$$

所以式 (A.9.34)，式 (A.9.35) 和式 (A.9.36) 也可写成统一的形式

$$\dot{I} = Y \dot{V} \quad (A.9.37)$$

式中 Y 叫做电路元件的导纳，其值等于电路元件的电流相量与电压相量之比。显然阻抗 Z 与导纳 Y 互为倒数关系，即

$$Z = \frac{1}{Y} \quad (\text{A.9.38})$$

导纳的实部为电导，虚部称为电纳，常用 B 表示。每一个电路元件的阻抗或电抗 X ，导纳或电纳 B 示于表 A.9.1。

表 A.9.1 阻抗和导纳

电路元件	阻抗	电抗	导纳	电纳
电阻	R	—	$G = \frac{1}{R}$	—
电感	$j\omega L$	ωL	$-j\frac{1}{\omega L}$	$-\frac{1}{\omega L}$
电容	$-j\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{1}{\omega C}$	$j\omega C$	ωC

如果电路元件电流的参考方向是电压升的方向，那么电压和电流的关系式中就要加负号。

由前述可见，对于正弦信号源激励并达到稳态的电路，式 (A.9.26) 与式 (A.9.27) 表示的相量域中基尔霍夫电压、电流定律，与电阻电路分析时用的基尔霍夫电压、电流定律形式上相当，只要将 v 、 i 换成相量 \dot{V} 、 \dot{I} 即可。同样，式 (A.9.33) 或式 (A.9.37) 表示的相量域中的欧姆定律与电阻电路中的欧姆定律形式相当，换句话说，只要将电阻 R 换成阻抗 Z （或电导 G 换成导纳 Y ）即可。基尔霍夫电压、电流定律是分析电路的基本方程。分析电阻电路的节点电压法（包括修正的节点分析）都源于 KCL、KVL。既然相量表示的基尔霍夫电压定律、电流定律与相量表示的欧姆定律，电阻电路中的形式相当，因此分析电阻电路的各种分析方法都可推广应用于正弦稳态电路的分析。

6. 正弦交流稳态电路的相量分析法

基于相量域中的电路定律，可得正弦交流稳态电路的相量分析法，具体分析过程如下：

- (1) 将时域时路转换为相量域中的电路；
- (2) 依据相量域中的电路，按节点电压法或修正节点分析法列写电路方程；
- (3) 求解电路方程得到相量域电路的稳态输出响应；
- (4) 通过反相量变换得到时域输出响应。

以下仍以图 A.9.2(a) 所示电路为例予以说明，并将图 A.9.2(a) 重绘于图 A.9.12(a)。图(b) 为相量域中的电路。图(b) 与图(a) 的区别是：图(b) 为输入相量 $\dot{V}_s = 120e^{j30^\circ}$ 激励；所有节点电压、支路电流均用相量 (\dot{V} 、 \dot{I}) 表示，如输出电压就用电压相量 \dot{V}_o 表示；电感 L 为 $j\omega L = j5000 \times 0.05\Omega$ 的阻抗替代，电容 C 为 $1/(j\omega C) = 1/(j5000 \times 10^{-6})\Omega$ 的阻抗替代。

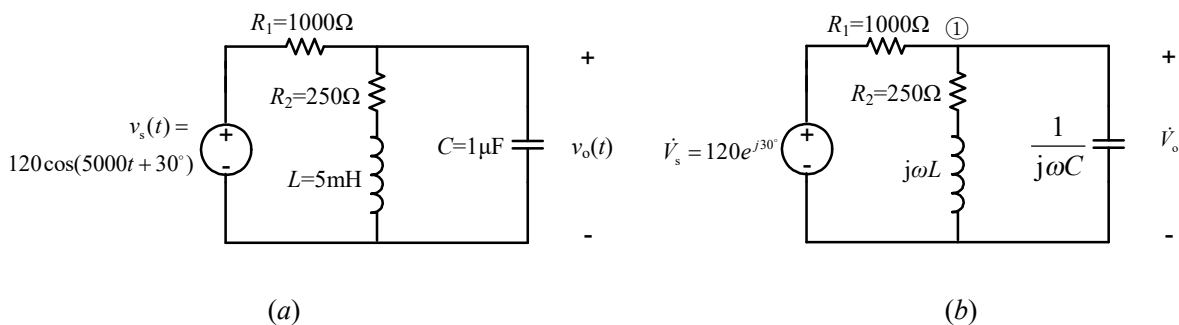


图 A.9.12 【例 A.9.1】电路

在相量域围绕图 A.9.12(b)节点①在相量域列写 KCL 方程, 得到

$$\frac{\dot{V}_o - \dot{V}_s}{R_1} + \frac{\dot{V}_o}{R_2 + j\omega L} + j\omega C \dot{V}_o = 0$$

将 R_1 、 R_2 、 L 、 C 的值代入上式得到:

$$\frac{\dot{V}_o - \dot{V}_s}{1000} + \frac{\dot{V}_o}{250 + j5000 \times 0.05} + j5000 \times 10^{-6} \dot{V}_o = 0$$

解上式得到输出电压相量 \dot{V}_o

$$\dot{V}_o = \frac{1000(j5000 + 5000)}{(j5000)^2 + j5000 \times 6000 + 25 \times 10^6} \dot{V}_s = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-j45^\circ} \dot{V}_s$$

将 $\dot{V}_s = 120e^{j30^\circ}$ 代入上式, 即得

$$\dot{V}_o = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-j45^\circ} \times 120e^{j30^\circ} = 20\sqrt{2} e^{-j15^\circ}$$

对上式作相量反变换, 得到

$$v_o(t) = \text{Re}(\dot{V}_o e^{j5000t}) = \text{Re}(20\sqrt{2} e^{-j15^\circ} e^{j5000t}) = 20\sqrt{2} \cos(5000t - 15^\circ) \text{ V}$$

与前面复频域分析得出的结果一致。往后正弦稳态电路的分析, 一般求出复频域中的输出响应就可以了。

7. 正弦稳态电路的功率

正弦稳态电路在电力系统中应用甚广, 功率是电力系统一个重要参数, 因此有必要对正弦稳态电路的功率专题进行讨论。

(1) 瞬时功率表达式

对于如图 A.9.13 所示一端口网络, 如果其内部不含独立源仅含有电阻、电感、电容等元件构成的电路, 在图示电压、电流参考方向下, 设

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (\text{A.9.39})$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (\text{A.9.40})$$

对于正弦稳态电路的分析, 可以选择一个合适的时刻为零时刻, 工程师发现, 对于大功率传输, 宜选择正弦电流最大值的时间为零时刻, 因此对式(A.9.39)与(A.9.40)作适当变换得

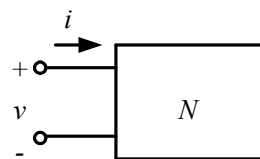


图 A.9.13 无源一端口网络

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.41})$$

$$i(t) = I_m \cos \omega t \quad (\text{A.9.42})$$

则电路瞬时吸收的功率 $p(t)$ 为

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \times I_m \cos \omega t \quad (\text{A.9.43})$$

利用三角函数乘积化为和与差的关系:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

式(A.9.43)可写成

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.44})$$

再利用三角函数关系:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

式(A.9.44)可写成

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \cos 2\omega t \\ &\quad - \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (\text{A.9.45})$$

定义

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.46})$$

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.47})$$

并注意正弦电压、电流有效值与峰值关系

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

则

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.48})$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.49})$$

对 P 、 Q 作这样定义后, 式(A.9.45)成为

$$p(t) = P + P \cos 2\omega t - Q \sin 2\omega t \quad (\text{A.9.50})$$

P 称为平均功率, 单位为 W (瓦); Q 称为无功功率, 单位为 VAR (乏)。

(2) 平均功率、无功功率、视在功率与复功率的关系

如果对式(A.9.50)所表示的瞬时功率在一个时间周期 T 内取平均值就得到对应于时间的平均功率

$$P|_{\text{时间平均值}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = P \quad (\text{A.9.51})$$

这就是将 P 称为平均功率的原因。平均功率有时称为实功率, 或有功功率。因为它描述了

电路将电能转变为其它能量的功率。而将 Q 称为无功功率，或称相对于 P 而言的虚功率。

由式(A.9.50)及 P 、 Q 的定义，可见瞬时功率由两部分组成，其一是不随时间变化的部分 P ；另一部分随时间以 2 倍 ω 的频率按正弦规律变化。

式(A.9.50)还表明，瞬时功率既可为正也可为负。图 A.9.14 给出 $\theta_v = 60^\circ$ 、 $\theta_i = 0^\circ$ 时 v 、 i 及 p 随时间的变化。在图 A.9.13 所示的电压、电流参考方向下， $p(t) > 0$ 表示网络从外部吸收能量，而 $p(t) < 0$ 则表示网络向外部输出能量。这就是说，该一端口网络与外部电路之间有能量交换。由于网络内部没有独立源，这种能量交换现象是由网络内部的储能元件(L 或 C)引起的。

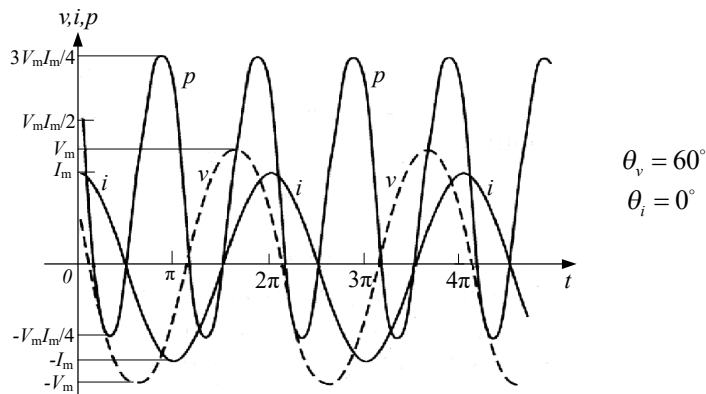


图 A.9.14 正弦稳态下的瞬时功率、电压、电流随 ωt 的变化

如果将式(A.9.50)写成

$$p(t) = P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t$$

从上式可见，第一项始终大于零，它是瞬时功率中不可逆的部分，而第 2 项正负交替变化，表示能量在外电路与一端口网络之间的交换，这部分功率的大小正由无功功率 Q 表征。

如果一端口网络由纯电阻元件组成，电压、电流同相， $\theta_v - \theta_i = 0$ ，按式(A.9.49)， $Q = 0$ ，于是式(A.9.50)成为

$$p(t) = P + P \cos 2\omega t \quad (\text{A.9.52})$$

即 $p(t)$ 总大于零，故所有电能都在一端口网络内消耗了，不存在一端口网络与外电路间的能量交换。

若一端口网络为纯电感，则电流滞后电压 90° ，即 $\theta_v - \theta_i = 90^\circ$ ，按式(A.9.48)， $P = 0$ ，故式(A.9.50)成为

$$p(t) = -Q \sin 2\omega t \quad (\text{A.9.53})$$

可见纯电感电路的平均功率为零，电能没有变为其它形式的能量，电路上的瞬时功率始终以 2ω 的频率在电路与激励源之间转换。换句话说，当 p 为正时，能量存储于电感元件的磁场中；当 p 为负时，能量从磁场中释放。

若一端口网络为纯电容，则电流超前电压 90° ，即 $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$ ，因此 $P = 0$ ，式(A.9.50)成为

$$p(t) = Q \sin 2\omega t \quad (\text{A.9.54})$$

可见纯电容电路的平均功率也为零，电能也没有变为其它形式的能量，而以 2ω 的频率在电路与激励源之间转换，只是当 p 为正时，能量存储于电容元件的电场中，当 p 为负时，能量从电场中释放。

若一端口网络内既有电感又有电容,则将是电感、电容储能之差在一端口网络与激励源之间以 2ω 的频率交换。

许多电力设备的容量是由它的额定电流和额定电压的乘积决定的,为此引入视在功率的概念。视在功率定义为端口电压与端口电流有效值的乘积,用 S 表示,其单位为 $V \cdot A$ 。

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (\text{A.9.55})$$

平均功率、无功功率和视在功率可通过复功率联系起来。复功率定义为端口电压相量 \dot{V} 与端口电流相量 \dot{I} 的共轭 \dot{I}^* 的乘积的一半,记为 \bar{S} , 单位为 $V \cdot A$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^* \quad (\text{A.9.56})$$

将相量 $\dot{V} = V_m e^{j\theta_v}$ 与 $\dot{I}^* = I_m e^{-j\theta_i}$ 代入上式,并应用欧拉恒等式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, 可得

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^* = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta_v} I_m e^{-j\theta_i} = \frac{V_m I_m}{2} e^{j(\theta_v - \theta_i)} \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \\ &= P + jQ \end{aligned} \quad (\text{A.9.57})$$

如果 V_m 、 I_m 用有效值表示,则

$$\bar{S} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = S \cos(\theta_v - \theta_i) + jS \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.58})$$

这就是说平均功率即为复功率的实部,无功功率即为复功率的虚部,而视在功率就是复功率的模,即

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\bar{S}) \\ Q &= \text{Im}(\bar{S}) \\ |\bar{S}| &= \sqrt{P^2 + Q^2} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = S \end{aligned} \quad (\text{A.9.59})$$

其图解示于图 A.9.15。图中 $\tan\theta = \frac{Q}{P}$

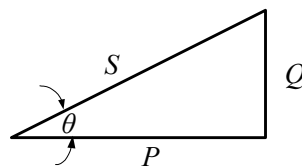


图 A.9.15 功率三角形

(3) 功率因数

在计算平均功率与无功功率时涉及的角度 $(\theta_v - \theta_i)$ 称为功率因数角。该角的余弦称为功率因数,记为 pf , 而它的正弦函数称为无功功率因数(无功因数),记为 rf , 即

$$pf = \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.60})$$

$$rf = \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (\text{A.9.61})$$

注意,由功率因数并不能确定功率因数角的大小,因为 $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$, 为了完整地描述功率因数角,对于感性负载,用相位滞后功率因数描述,而对于容性负载,则用超前功率因数予以描述。功率因数、无功因数都是描述负载特性的有用参数。

过低的功率因数对输电线路、用电设备和电源本身产生不良影响。一方面由于负载功率因数低,在传送相同有功功率情况下,电源向负载提供的电流就要大,这就增加了输电线路损耗,同时增加输电线上压降。另一方面当电源电压、电流一定时,负载功率因数越低,电源可输出的有功功率越小,这就限制了电源输出有功功率的能力,造成设备容量的浪费。

在电力系统和电工电路中,大多数负载呈感性,其功率因数 $\cos\theta$ 较低。为提高 $\cos\theta$ 常

在负载端并联合适容量的电容器, 由电容器提供感性负载所需的无功功率, 从而提高 $\cos\theta$, 这种工程处置的方式称为并联补偿, 如图 A.9.16(a)所示。这是因为在 R 、 L 串联的电感性电路中, 电流 I_1 滞后于电压 V , 如图 A.9.16(b)相图所示。并联上电容 C 后, 由于电容具有使电流超前于电压的作用, 这一作用与电感使电流落后的作用相抵消, 或部分抵消, 从而使供给的总电流 I 发生明显的变化, 即

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_C$$

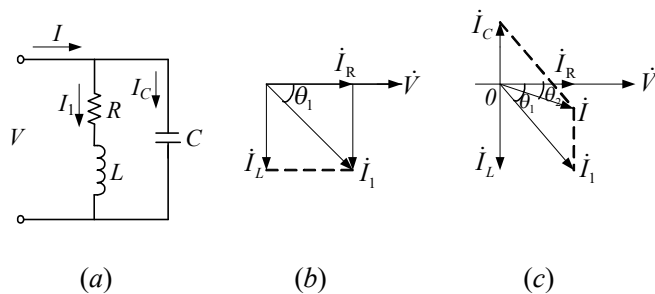


图 A.9.16 通过并联电容来提高功率因数

由图 A.9.16(c)所示的相图可见, $i < i_1$, 即电源供给的总电流减小, 并导致 $\theta_2 < \theta_1$, 即电压与电流之间的相位差由 θ_1 变为 θ_2 。因为 $\theta_2 < \theta_1$, 所以 $\cos\theta_2 > \cos\theta_1$, 改善并提高了整个电路的功率因数。

图 A.9.17(a)所示为常见的日光灯电路, 它利用镇流器(为一带铁芯的电感器)中的自感电动势产生高电压引起灯管弧光放电用于照明。将日光灯的开关合上后, 灯管两端的电压为 $220V$, 此电压不足以使日光灯点亮。但 $220V$ 电压通过灯丝施加在启辉器(也称启动器)内两个双金属触片上, 使启辉器内的氖管产生辉光放电发热, 两个触片接通, 于是电流通过镇流器和灯管两端的灯丝, 使灯丝加热并发射电子。此时氖管由于被双金属片短路已停止辉光放电, 双金属片也因温度降低而分离。在此瞬间, 镇流器随即产生一个阻止线圈电流减少的自感电动势, 其大小为 $L(di/dt)$ 。由于断开的瞬间“ dt ”极为短促, 自感电动势就较大。此电动势与电源电压一起加在灯管两端, 高电压使灯管内的气体迅速发生弧光放电, 将日光灯点亮。

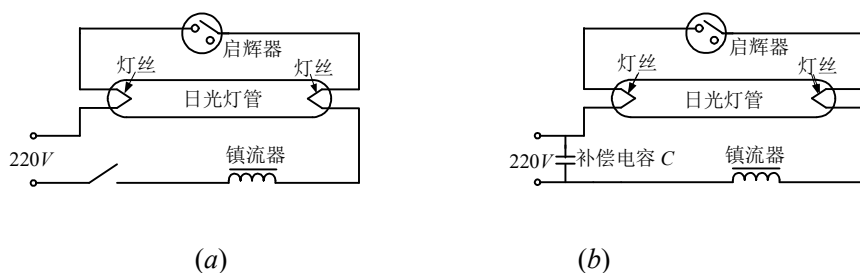


图 A.9.17 日光灯电路

在日光灯电路中, 镇流器是一个电感性负载, 它需要消耗一定的无功功率, 致使日光灯装置的功率因数降低, 因此电功率没有被充分利用。为了提高日光灯电路的功率因数, 可在日光灯的电源侧并联一个电容器 C , 如图 A.9.17(b)所示。这样镇流器所需的无功功率可由电容器提供。计算和实验表明, 对于 $40W$ 日光灯管, 选配 $6.7\mu F$ 的电容器, 其功率因数就可提高到 0.92 左右。

(4) 最大功率传输定理

工作在正弦稳态下的线性电路，输出端口接负载 Z_L ，如果端口以外的电路用一个方框表示，则该系统可用图 A.9.18(a)所示模型表示。应用戴维宁定理，方框内电路可用戴维宁电源等效，如图 A.9.18(b)所示，图中 V_{Th} 为戴维宁电压， R_{Th} 为戴维宁阻抗。所谓最大传输功率定理，是指负载 Z_L 取值多大时，系统传输到负载 Z_L 的平均功率最大。

为得出最大功率传输定理，首先将 Z_L 、 Z_{Th} 表示成复数形式如下：

$$Z_L = R_L + jX_L \quad (A.9.62)$$

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad (A.9.63)$$

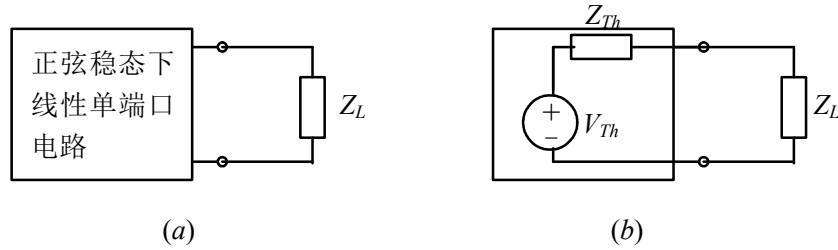


图 A.9.18 说明最大功率传输定理用的图

(a)最大功率传输电路图 (b)用戴维南等效电路代替

由图 A.9.18(b)所示电路，电流 \dot{I} 为

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)} \quad (A.9.64)$$

传输到负载上的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\dot{V}_{Z_L} \dot{I}^*) = \text{Re}(jZ_L \dot{I}^*) \\ &= \text{Re}\{j\dot{I}^*(R_L + jX_L)\} = |\dot{I}|^2 R_L \end{aligned} \quad (A.9.65)$$

将式(A.9.64)代入，得到

$$P = \frac{|\dot{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (A.9.66)$$

式中 V_{Th} 、 R_{Th} 、 X_{Th} 为固定值，而 R_L 、 X_L 为独立变量。今最大功率的传输条件要求 P 取最大值，即应令 $\partial P / \partial R_L$ 、 $\partial P / \partial X_L$ 均为零值。由此按式(A.9.66)得到

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{-|\dot{V}_{Th}|^2 2R_L(X_{Th} + X_L)}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} \quad (A.9.67)$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\dot{V}_{Th}|^2 [(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)]}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} \quad (A.9.68)$$

并由式(A.9.67) 和式(A.9.68)可知，当

$$X_L = -X_{Th} \quad (A.9.69)$$

$$R_L = R_{Th} \quad (A.9.70)$$

$\partial P / \partial R_L$ 、 $\partial P / \partial X_L$ 均取零值。因此满足式(A.9.69) 和式(A.9.70) 就能使系统传输到负载

Z_L 的平均功率最大。显然, 式(A.9.69) 和式(A.9.70)也可表示成

$$Z_L = Z_{Th}^* \quad (\text{A.9.71})$$

也就是说, 负载阻抗是戴维宁阻抗的共轭复数时, 可获得最大的平均功率。

【例 A. 9. 2】如图 A.9.19(a) 所示的电路, 若使 Z_L 获得最大平均功率, 则 Z_L 为多大? 并求该负载所得最大平均功率。

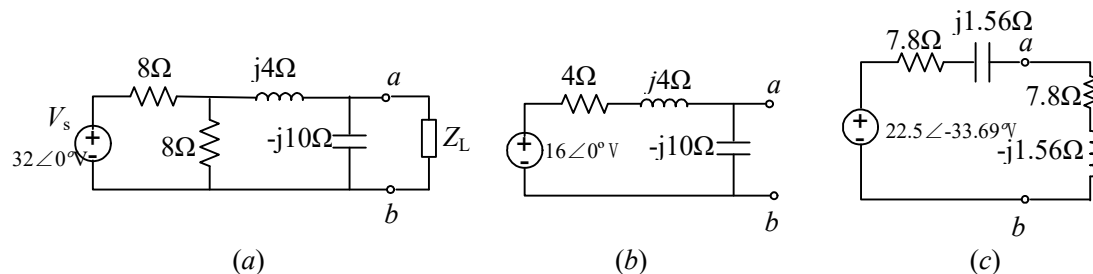


图 A.9.19 例 A.9.2 电路图

解: 先求图示 a 、 b 两端的戴维宁等效电路。通过对 $32V$ 电源、 8Ω 电阻和 8Ω 电阻组成的电路进行两次电源变换, 可得到图 A.9.19(b) 所示的简化电路。由此电路可得

$$\begin{aligned} V_{Th} &= \frac{16\angle 0^\circ}{4 + j4 - j10} (-j10) \\ &= 22.19\angle -33.69^\circ \text{ V} = 18.46 - j12.31 \text{ V} \end{aligned}$$

将短路线替代独立源, 使独立源失效, 则从 a 、 b 两端看进去的戴维宁等效阻抗为

$$Z_{Th} = \frac{-j10(4 + j4)}{4 + j4 - j10} = 7.85\angle 11.31^\circ = 7.7 + j1.54 \ \Omega$$

要满足最大功率传输, 负载阻抗 Z_L 应为戴维宁阻抗 Z_{Th} 的复共轭, 故

$$Z_L = Z_{Th}^* = 7.7 - j1.54 \ \Omega$$

用戴维南电源替代后, 图 A.9.10(a) 的电路为图 A.9.10(c)。由此电路可知, 负载电流为

$$\dot{I} = \frac{22.19\angle -33.69^\circ}{2 \times 7.7} = 1.441\angle -33.69^\circ \text{ A}$$

传输到负载上的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{V}\dot{I}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\dot{I}Z_L\dot{I}^*) = \frac{1}{2} |\dot{I}|^2 \text{Re}(Z_L) \\ &= \frac{1}{2} |1.441|^2 (7.7) = 7.99 \text{ W} \end{aligned}$$

A.10 单相桥式整流滤波电路输出电压/电流波形分析 (p305)

带滤波电容 C 的桥式整流电路应用较多, 如图 A.10.1(a)所示, 它由四只整流二极管及滤波电容 C 以及负载电阻 R_L 组成。电容 C 在二极管导通时充电(储能), 截止时放电(将储能释放给负载), 不仅使输出电压的平均值 \bar{v}_o 增大, 而且使电压更加平滑。

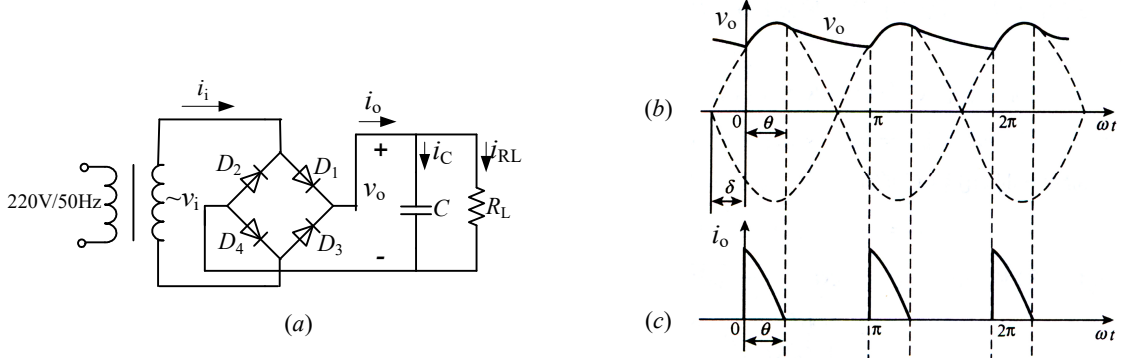


图 A.10.1 单相桥式整流滤波电路(a)及 v_o 、 i_o 波形(b)、(c)

图 A.10.1(b)所示的为电容滤波电路达到稳定时的输出电压波形, 在分析时一般将时间坐标取在输入电压 v_i 正半周和输出电压(负载电阻 R_L 上电压降) v_o 的交点处。注意, v_o 等于滤波电容 C 两端电压。交点($\omega t = 0$)的左边, 当 $v_i < v_o$ 时, 二极管 D_1 、 D_2 、 D_3 与 D_4 均处于反偏置状态, 不导通, 电容 C 放电向负载 R_L 提供电流, 同时 v_o 降低。 $\omega t = 0$ 以后, $v_i > v_o$, 二极管 D_1 、 D_4 处于正向偏置并导通, 交流电源向电容 C 充电, 同时也向负载 R_L 供电, 这个充电过程一直维持到 $\omega t = \theta$ 。当 $\omega t > \theta$, v_i 又一次小于 v_o , 二极管 D_1 、 D_2 、 D_3 与 D_4 又均不导通, 电容 C 又一次向负载提供电流, 直到 $\omega t = \pi$, 二极管 D_3 、 D_2 处于正偏并导通, 交流电源向电容 C 充电, 同时也向负载 R_L 供电。如此不断重复, 就得到图(b)实线所示电压波形。显然, 电压波形的脉动程度大为减小, 但电流只是在 $0 < \omega t < \theta$ 这个角度内导通, 电流的脉动程度反而增大了。图 A.10.1 所示滤波电路的电压、电流波形的具体分析如下。

设 v_i 正半周过零点与 D_1 、 D_4 开始导通时刻相差的角度为 δ , 则 D_1 、 D_4 导通后

$$v_i = v_o = v_C = \sqrt{2}V_{im} \sin(\omega t + \delta) = v_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt \quad (A.10.1)$$

当 $\omega t = 0$ 时, $v_{i0} = v_{C0} = v_{o0} = \sqrt{2}V_{im} \sin \delta$, 电容电流为

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{dv_i}{dt} = \sqrt{2}V_{im} \omega C \cos(\omega t + \delta) \quad (A.10.2)$$

负载电流为

$$i_{RL} = \frac{v_o}{R_L} = \frac{v_i}{R_L} = \frac{\sqrt{2}V_{im}}{R_L} \sin(\omega t + \delta) \quad (A.10.3)$$

整流桥输出电流

$$i_o = i_C + i_{RL} = \sqrt{2}V_{im} \omega C \cos(\omega t + \delta) + \frac{\sqrt{2}V_{im}}{R_L} \sin(\omega t + \delta) \quad (A.10.4)$$

过 $\omega t = 0$ 后, v_i 继续增大, $i_C > 0$, 向电容 C 充电, v_C 随 v_i 上升, 达到 v_i 峰值后, v_C 又随 v_i 下降, i_C 减小, 直至 $\omega t = \theta$ 时, $i_C = 0$, D_1 、 D_4 关断, 即 θ 为 D_1 、 D_4 导通角。令 $i_o = 0$, 可求得二极管导通角 θ 与初始相角 δ 的关系为

$$\tan(\delta + \theta) = -\omega RC \quad (\text{A.10.5})$$

由上式可知, $(\delta + \theta)$ 为位于第 2 象限的角, 故

$$\theta = \pi - \delta - \arctan(\omega RC) \quad (\text{A.10.6})$$

$\omega t > \theta$ 后, 电容 C 向负载 R_L 供电, v_C 从 $t = \theta/\omega$ 的数值按指数规律下降

$$v_C = v_o = \sqrt{2}V_{im} \sin(\theta + \delta) e^{\frac{t-\theta/\omega}{RC}} = \sqrt{2}V_{im} \sin(\theta + \delta) e^{\frac{\omega t - \theta}{\omega RC}} \quad (\text{A.10.7})$$

当 $\omega t = \pi$ 时, 电容 C 放电结束, 电压 v_C 的数值与 $\omega t = 0$ 时的电压数值相等, 即

$$v_C = v_o = \sqrt{2}V_{im} \sin(\theta + \delta) e^{\frac{\pi - \theta}{\omega RC}} = \sqrt{2}V_{im} \sin \delta \quad (\text{A.10.8})$$

将式(A.10.6)和由式(A.10.5)得出的关系式 $\sin(\theta + \delta) = \omega RC / \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ 代入上式, 可得

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{\frac{\arctan(\omega RC)}{\omega RC}} e^{\frac{\delta}{\omega RC}} = \sin \delta \quad (\text{A.10.9})$$

整流电路输出的直流电压可按式计算

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \sqrt{2}V_{im} \sin(\omega t + \delta) d\omega t + \frac{1}{\pi} \int_\theta^\pi \sqrt{2}V_{im} \sin(\theta + \delta) e^{\frac{\omega t - \theta}{\omega RC}} d\omega t \\ &= \frac{2\sqrt{2}V_{im}}{\pi} \sin \frac{\theta}{2} \left[\sin\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) + \omega RC \cos\left(\delta + \frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10.10})$$

因此, 在已知 ωRC 的条件下, 可通过式(A.10.9)求起始导电角 δ , 再由式(A.10.6)计算导通角 θ , 最后由式(A.10.10)求出整流电路输出直流电压平均值 V_o 。当 $C=0$, 即滤波电容不存在, 经计算可得 $\delta=0$, $\theta=180^\circ$, $V_o/V_{im}=0.9$ 。当负载为空载, 即 $R=\infty$ 时, $\delta=90^\circ$, $\theta=0^\circ$, $V_o/V_{im}=1.414$, 输出电压 V_o 数值最大。在 ωRC 由零增加至无穷大时, 起始导电角 δ 从 0° 增至 90° ; 导通角 θ 由 180° 减至 0° ; 整流桥输出电压 V_o 由 $0.9V_{im}$ 增至 $1.414V_{im}$ 。

A.11 反激式高频变压器的设计 (p335)

设计一个高频变压器，以满足下述开关电源性能指标要求：

- 标准输入电压：交流电 220V，50Hz。
- 输入电压范围：110~250V。
- 工作频率：40kHz。
- 输出电压/电流：24V/1A，15V/0.6A(反馈绕组)，15V/0.5A，9V/1A，2 路 5V/1A。
- 工作温度：-25°C~80°C。
- 输出电压准确度 $\leq 3\%$ 。
- 电压调整率 $\leq 3\%$ 。
- 输出纹波 $\leq 150\text{mV}$ 。
- 纹波系数 $\leq 2\%$ 。
- 效率：80%。

高频变压器设计主要是磁芯和线圈的设计。

开关电源中的高频变压器大部分采用 EI 或者 EE 型磁心。它们的外形分别如图 A.11.1 与图 A.11.2 所示。EI 型磁心有形状简单、磁心有效面积较大、可靠性高、热特性好、小漏感等优点，不足的是方形截面不易绕制粗线，磁屏蔽较差。本设计中使用 EI 磁心，常用 EI 磁心的尺寸规格如表 A.11.1 所示。

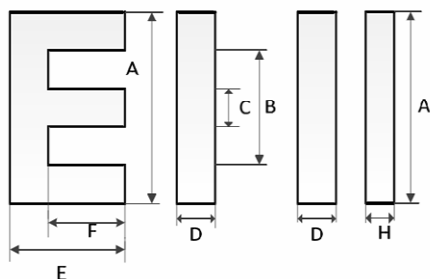


图 A.11.1 EI 型磁心外形

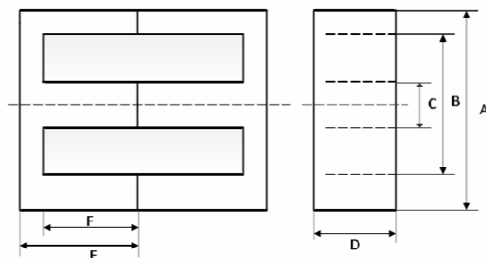


图 A.11.2 EE 型磁心外形

表 A.11.1 常用 EI 型磁心的规格外形

型号	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)	E (mm)	F (mm)	H (mm)	Lc (cm)	A (cm ²)	Aw (cm ²)	AP (cm ⁴)
EI16	16.0	11.8	4.0	4.8	12.0	10.87	2.0	3.59	0.19	0.42	0.08
EI19	19.0	14.2	4.85	4.85	13.6	11.3	2.4	3.96	0.23	0.53	0.12
EI22	22.0	13.0	5.75	5.75	14.55	10.55	4.5	3.96	0.41	0.38	0.16
EI25	25.4	19.0	6.35	6.35	15.8	12.5	3.2	4.8	0.40	0.79	0.32
EI28	28.0	18.7	7.2	10.6	16.75	12.25	3.5	4.86	0.83	0.70	0.58
EI30	30.25	20.1	10.65	10.65	21.3	16.3	5.5	5.86	1.09	0.77	0.91
EI33	33.0	23.6	9.7	12.7	23.75	19.25	5.0	6.75	1.18	1.34	1.58
EI40	40.5	26.8	11.7	11.7	27.3	21.3	6.5	7.75	1.43	1.61	2.30
EI50	50.0	34.5	15.0	15.0	33.0	24.5	9.0	9.5	2.27	2.39	5.43

以下给出反激式高频变压器的设计步骤，但设计所依据的公式的导出从略。

(1) 计算最大占空比

设计的开关电源输入交流电压范围为 110-250V，经单相全波整流与滤波后直流输入电压的最大值、最小值分别为 $V_{\max} \approx 340 \text{ V}$ ， $V_{\min} \approx 150 \text{ V}$ 。开关电源产生的反向电动势 $E \approx 170 \text{ V}$ 。脉冲信号最大占空比的公式为

$$D_{\max} = \frac{E}{E + V_{\min}} \times 100\% \quad (\text{A.11.1})$$

把上面参数代入上式算得

$$D_{\max} = \frac{170}{170 + 150} \times 100\% = 53.1\% \quad (\text{A.11.2})$$

(2) 选取磁芯

关于磁芯，有两种比较主流的计算方式：第一种方式是面积乘法，第二种是几何参数法。以下对磁芯设计采用面积乘法。先计算磁芯可绕导线的窗口面积 A_w 与磁心有效截面积 A_e 的乘积 AP ，再根据算得的 AP 值来查表选择符合的磁性材料。

已知电源效率 $\eta=80\%$ ，功率 $P_o=60\text{W}$ ，高频变压器的窗口面积的利用系数 K_w 的取值范围为 0.2~0.4，这里取 $K_w=0.35$ ，磁芯厚度 $D_{\max}=0.531$ ，对于反激式开关电源，磁感密度 B_M 值介于 0.2~0.3，现取 $B_M=0.25\text{T}$ ，铁芯间隙系数 $K_{RP}=0.7$ ，频率 $f=40\text{kHz}$ ，电流密度 J 的取值范围是 200~600A/cm²，这里取 $J=400\text{A/cm}^2$ 。代入下式得：

$$\begin{aligned} AP = A_w A_e &= \frac{0.433(1+\eta)P_o}{\eta K_w D J B_M K_{RP} f} \times 10^4 \\ &= \frac{0.433(1+0.8) \times 60}{0.80 \times 0.35 \times 0.531 \times 400 \times 0.25 \times 0.7 \times 40 \times 10^3} \times 10^4 = 1.12\text{cm}^4 \end{aligned} \quad (\text{A.11.3})$$

根据算得的 AP 值，从表 A.11.1 中查出与之最接近的最小磁芯为 EI33，其 $AP=1.58\text{cm}^4$ 。两者相差 0.46cm^4 ，但考虑到磁芯损耗等因素，可以选择磁心窗口面积 $A_w=1.34\text{cm}^2$ ，此时磁心有效截面积 $A_e=1.18\text{cm}^2$ 。

(3) 计算一次侧电感量 L_1

一次侧峰值电流为 $I_{1\max}$ ，由下式可计算得：

$$I_{1\max} = \frac{2P_o}{\eta V_{\min} D_{\max}} = \frac{2 \times 60}{0.8 \times 150 \times 0.531} = 1.88\text{A} \quad (\text{A.11.4})$$

一次侧的电感量 L_1 ，由公下式可计算得：

$$L_1 = \frac{V_{\min} D_{\max}}{I_{1\max} f} = \frac{150 \times 0.531}{1.88 \times 40 \times 10^3} = 1.07\text{mH} \quad (\text{A.11.5})$$

(4) 确定一次侧绕组的匝数

前面已经选择好了磁芯，可根据磁芯参数来计算变压器绕组的匝数，对于反激式变换器，通常在输入电压最小的情况下占空比最大。由于一次侧的电压波形可近似看作为矩形波，电流的波形系数 $K_f = 1/\sqrt{D}$ ，或 $1/K_f = \sqrt{D}$ ，因此一次侧绕组匝数公式为

$$N_p = \frac{V_{\min} \sqrt{D} \times 10^4}{B_M K_{RP} f} = \frac{150 \times \sqrt{0.531} \times 10^4}{0.25 \times 0.7 \times 40 \times 10^3} = 156.4 \text{ 匝} \quad (\text{A.11.6})$$

实取 157 匝。

(5) 各输出绕组及反馈绕组匝数的计算

一次绕组匝数确定以后，则可以计算反馈绕组的匝数 N 和各输出绕组的匝数，反馈绕组匝数的计算公式为

$$N_s = \frac{N_p}{V_{OR}} (V_o + V_F) = \frac{157}{135} \times (15 + 0.8) = 18.3 \text{ 匝} \quad (\text{A.11.7})$$

实取 19 匝。式中： V_{OR} 为二次侧的反射电压，在反激式开关电源中， V_{OR} 是固定不变的。一般 $V_{OR}=85\sim 165\text{V}$ ，典型值为 135V。 V_F 为输出整流管的正向压降，快速恢复二极管取 0.8V。

同理，可求得：

$$+24\text{V 的输出绕组匝数 } N1 = \frac{157}{135} \times (24 + 0.8) = 28.8 \text{ 匝，实取 29 匝。}$$

+15V 的输出绕组匝数 $N2$ 与反馈绕组匝数一致，为 19 匝。

$$+9\text{V 的输出绕组匝数 } N3 = \frac{157}{135} \times (9 + 0.8) = 11.4 \text{ 匝，实取 12 匝。}$$

$$\text{两组} +5\text{V 的输出绕组 } N4 = \frac{157}{135} \times (5 + 0.8) = 6.7 \text{ 匝，实取 7 匝。}$$

(6) 变压器气隙宽度的计算

在反激式开关电源中，为了预防高频变压器发生磁饱和现象，一般都要在磁芯中加入空气间隙，简称气隙。在相同绕组匝数与 B_M 的条件下，加入气隙可以提高绕组的工作电流，并且高频变压器磁饱和电流将会增大。同时，加入气隙可将磁化曲线线性化，即磁导率的变化会减少，使绕组电感量趋于定值。高频变压器加入气隙后的这些特性变化都有利于提高反激式开关电源的性能。气隙 δ 可由下式计算：

$$\delta = \frac{0.4\pi N_p^2 A_e}{L_1} \times 10^{-2} = \frac{0.4\pi \times 156.4^2 \times 1.18}{L_1} \times 10^{-2} = 3.4\text{mm} \quad (\text{A.11.8})$$

由于气隙宽度是磁路间隙的总和，所以磁芯间隙应为气隙宽度的一半，即 1.7mm。

(7) 导线直径计算

对于截面是圆形的漆包线，其导线的面积(S)与直径(d)的关系为

$$S = d^2 \pi / 4 \quad (\text{A.11.9})$$

而流过导线的电流有效值 I_{RMS} 和截面积(S)与电流密度(J)的关系为

$$I_{\text{RMS}} = SJ \quad (\text{A.11.10})$$

所以可以推出导线直径为

$$d = \sqrt{\frac{4I_{\text{RMS}}}{\pi J}} \quad (\text{A.11.11})$$

一次侧电流有效值为

$$\begin{aligned}
I_{\text{RMS0}} &= I_{1\text{max}} \sqrt{D_{\text{max}} \left(\frac{K_{\text{RP}}^2}{3} - K_{\text{RP}} + 1 \right)} \\
&= 1.88 \sqrt{0.531 \times \left(\frac{0.7^2}{3} - 0.7 + 1 \right)} = 0.92 \text{A}
\end{aligned} \tag{A.11.12}$$

故一次侧导线直径 d_1 为

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \times 0.92}{\pi \times 4}} = 0.54 \text{mm} \tag{A.11.13}$$

反馈绕组峰值电流 I_s 与一次侧峰值电流 $I_{1\text{max}}$ 的关系

$$I_s = I_{1\text{max}} \frac{N_p}{N_s} = 1.88 \times \frac{157}{19} = 15.5 \text{A} \tag{A.11.14}$$

所以反馈绕组导线直径为

$$d_s = \sqrt{\frac{4 \times 7.13}{\pi \times 6}} = 1.23 \text{mm} \tag{A.11.15}$$

式中取电流密度 $J=6\text{A/mm}^2$ 。

同理，可求各个输出绕组的导线直径：

+24V 输出绕组的峰值电流 I_a 为

$$I_a = I_{1\text{max}} \frac{N_p}{N_1} = 10 \text{A} \tag{A.11.16}$$

+24V 输出绕组的有效电流为

$$\begin{aligned}
I_{\text{SRMI}} &= I_a \sqrt{(1 - D_{\text{max}}) \left(\frac{K_{\text{RP}}^2}{3} - 0.7 + 1 \right)} \\
&= 10.1 \times \sqrt{(1 - 0.531) \left(\frac{0.7^2}{3} - 0.7 + 1 \right)} = 4.6 \text{A}
\end{aligned} \tag{A.11.17}$$

+24V 输出绕组的导线直径为

$$d_a = \sqrt{\frac{4 \times 4.6}{\pi \times J}} = 1.1 \text{mm} \tag{A.11.18}$$

+15V 输出绕组的导线直径与反馈绕组的导线直径相同， $d_b=d_s=1.23\text{mm}$ 。

+9V 输出绕组的导线直径为 $d_c=1.5\text{mm}$ 。

+5V 输出绕组的导线直径为 $d_d=2.0\text{mm}$ 。

当导线 $d > 1.4\text{mm}$ 时，一般采取多股导线并绕的方式。与单股粗导线绕制方法比较，多股导线并绕明显增大了输出绕组的等效截面积，并且改善了磁场的耦合程度，减少了磁场的泄漏与漏感，提高了变压器输出功率的效率

一些注意事项：

(1) 高频变压器一次侧绕组必须绕在最里面。这样既能够减少一侧绕组的分布电容，缩短每匝导线长度，也使一次绕组能被其他绕组屏蔽，降低一次绕组对相邻元器件的影响，减少 EMI 污染。

(2) 由于所选磁心材料、元器件参数以及高频变压器的制造工艺的不同，可以在必要时对匝数做适当的调整。

(3)在多路输出的副边绕组绕制时，输出功率最大的二次侧绕组尽量靠近原边绕组，这样可以减少漏感。假如二次侧匝数比较少，可以采取多股并绕的方式，或者每匝间留取适当的间隙，使绕组能够充满整个骨架。

(4)在变压器设计时，原边绕组线圈与副边绕组线圈所占面积保持相等，以获得最小的铜损；合理选取磁心的工作频率及工作磁感密度，以获取最小的铁损。

(5)对于开有少量气隙的高频变压器，可以在磁芯的两侧均匀对称加上绝缘绞线。原边、副边之间增加屏蔽层，减少共模干扰容性耦合的强度。

以上关于反激式高频变压器设计，参考了朱晓曲硕士论文“基于 UC3842 的多端反激式开关电源的设计与实现”，湖南大学，2013，特此说明。

A.12 负反馈放大器输入电阻与输出电阻表达式的导出 (p410)

负反馈可以改变放大器的输入电阻和输出电阻, 现分别讨论如下:

(1)对输入电阻的影响

负反馈对放大器输入电阻的影响与输入端原输入信号和反馈信号的求和方式有关, 而与输出端的取样方式无关, 因此, 在导出输入电阻表达式时, 只需画出反馈放大电路输入端的连接图即可。

串联反馈提高输入电阻

串联反馈时输入端的连接图如图 A.12.1 所示, R_i 是基本放大器的输入电阻(或放大器开环输入电阻), 它等于

$$R_i = \frac{v_i'}{i_i}$$

由于输入信号 v_i 部分被反馈电压 v_f 抵消, 使基本放大器净输入电压 $|v_i'|$ 下降, 输入电流 $|i_i|$ 较无 v_f 时小, 故闭环输入

电阻 $R_{if} = v_i / i_i$ 比开环输入电阻 R_i 高。反馈越深, $|v_f|$ 越大, R_{if} 提高越多。由图 A.12.1 可知

$$R_{if} = \frac{v_i}{i_i} = \frac{v_i' + v_f}{i_i}$$

根据图 A.12.1 可得 $v_f = T v_i' = A \beta v_i'$, 将此关系代入上式, 得到

$$R_{if} = \frac{v_i' + A \beta v_i'}{i_i} = (1 + A \beta) \frac{v_i'}{i_i} = (1 + A \beta) R_i \quad (\text{A.12.1})$$

上式表明串联负反馈使放大电路的输入电阻 R_{if} 比开环输入电阻 R_i 大 $(1 + A \beta)$ 倍。

并联反馈降低输入电阻

并联反馈时输入端的连接图如图 A.12.2 所示, 由于反馈电流 i_f 的存在, 使基本放大器净输入电流 $|i_i'|$ 下降, 则输入电压 $|v_i|$ 较 i_f 不存在时变小了, 但信号源的注入电流 i_i 基本不变, 因而闭环输入电阻 R_{if} 比开环输入电阻 R_i 低。反馈越深, $|i_f|$ 越大, $|v_i|$ 下降得越多, R_{if} 就越低。由图 A.12.2

可知, 基本放大器的输入电阻(或放大器开环输入电阻) R_i 等于

$$R_i = \frac{v_i}{i_i'} \quad (\text{A.12.2})$$

而负反馈放大器闭环输入电阻 R_{if} 为

$$R_{if} = \frac{v_i}{i_i} = \frac{v_i}{i_i' + i_f} = \frac{v_i}{i_i' (1 + A \beta)} = \frac{R_i}{1 + A \beta} \quad (\text{A.12.3})$$

上式表示并联负反馈使放大电路的输入电阻 R_{if} 只是开环输入电阻的 $1/(1 + A \beta)$ 。

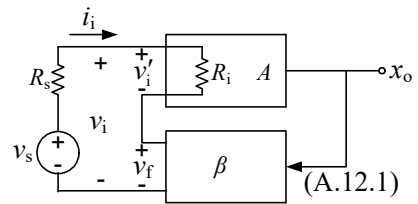


图 A.12.1 求串联反馈放大电路输入端连接图

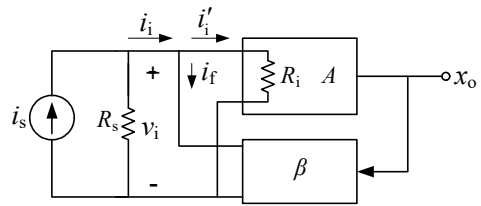


图 A.12.2 求并联反馈放大电路输入端连接图

(2)对输出电阻的影响

电压负反馈减小输出电阻

负反馈放大器的输出电阻即从输出端口看入的戴维宁等效电阻。对于电压负反馈,将图 6.9.2(a)与(d)所示电压网络中负载 R_L 为测试电压源 v_t 替代,同时将输入信号源失去作用(电压源作短路处理,电流源作开路处理),即得到图 A.12.3 所示测量电压反馈结构输出电阻(或放大器闭环输出电阻)的等效网络。设 i_t 为从测试电源 v_t 流入网络的电流,则闭环输出电阻 R_{of} 定义为

$$R_{of} = \frac{v_t}{i_t}$$

图 A.12.3 中,从输出端看入的基本放大器用受控电压源($A_{it}x'_i$)以及与其串联的电阻 R_o 表示。其中 A_{it} 为负载开路时基本放大器增益, R_o 则是基本放大器输出电阻(或放大器开环输出电阻)。

由图 A.12.3 可写出下列两个方程

$$v_t - i_t R_o - A_{it} x'_i = 0$$

$$x'_i = -x_f = -\beta v_t$$

联立解上述两式得到

$$R_{of} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{R_o}{1 + A_{it}\beta} \quad (\text{A.12.4})$$

上式表示电压负反馈结构放大器,闭环输出电阻 R_{of} 只是开环输出电阻 R_o 的 $1/(1+A_{it}\beta)$ 。反馈越深,闭环输出电阻越小。

电流负反馈增大输出电阻

对于电流负反馈结构的输出电阻,类似于上面对电压负反馈结构输出电阻的分析,同样将图 6.9.2(b)与(c)所示电流反馈网络中负载 R_L 为测试电压源 v_t 替代,同时将输入信号源失去作用(电压源作短路处理,电流源作开路处理),即得到图 A.12.4 所示测量电流反馈结构输出电阻(或放大器闭环输出电阻)的等效网络。

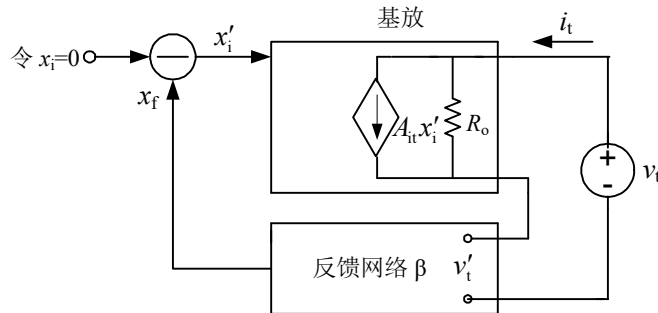


图 A.12.4 求电流负反馈结构输出电阻的等效网络

图 A.12.4 中, 从输出端看入的基本放大器则用受控电流源($A_{it}x'_i$)以及与其并联的电阻 R_o 表示。其中 A_{it} 为负载短路时基本放大器增益, R_o 则是基本放大器输出电阻(或放大器开环输出电阻)。为了减小反馈网络对放大器输出电流的影响, 反馈网络的输入电阻应尽量小, 理想情况下, 可以将反馈网络输入端看作短路。因此图 A.12.4 中, 反馈网络输入端 $v'_i = 0$ 。

由图 A.12.4 可写出下列两个方程

$$v_i - (i_i - A_{it}x'_i)R_o = 0$$

$$x'_i = -x_f = -\beta i_i$$

联立解上述两方程得到电流负反馈结构闭环输出电阻

$$R_{of} = \frac{v_i}{i_i} = R_o(1 + A_{it}\beta) \quad (\text{A.12.5})$$

上式表示电流负反馈结构放大器, 闭环输出电阻 R_{of} 为开环输出电阻 R_o 的 $(1+A_{it}\beta)$ 倍。反馈越深, 闭环输出电阻越大。

A.13 开关电容积分器系统函数导出 (p426)

1. 电荷守恒原理

电荷守恒原理是指：在开关电容电路中，用“闭合面”包围电容器的一个极板的集合里，若无导电通路穿过该“闭合面”，则“闭合面”内所有电容器极板上所存储的电荷为恒量，与各电容器上的电压变化及开关状态的改变无关。要指出的是：“闭合面”不能从开关中通过，否则开关闭合时便形成导电通路，“闭合面”内的电荷会向外溢出而不能守恒；“闭合面”内不能含接地点，除非“闭合面”外无接地点；“闭合面”内可含不能存贮电荷的开关、电阻、电压源及整个电容器(因其两极板上净电荷为零)。

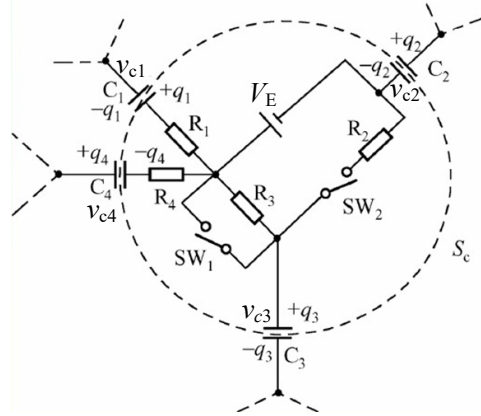


图 A.13.1 说明电荷守恒原理的图

2. 对寄生电容不敏感的开关电容反相积分器的系统函数

如果用图 6.11.1(a)所示的对寄生电容不敏感的开关电容串联模拟电阻代替图 6.11.2 所示反相积分器中的 R ，就得到图 A.13.2 所示的对寄生电容不敏感的开关电容反相积分器。由于该积分器输入端的 MOS 管 M_1 是由 ϕ_1 相时钟控制的，所以该积分器总是在 ϕ_1 时钟为高电平时对输入信号 v_i 取样。下一级电路对该积分器输出电压的取样与 MOS 管 M_5 的控制脉冲 ϕ_1 还是 ϕ_2 有关。下面分析当 M_5 的控制脉冲的相位是 ϕ_1 时的情况。

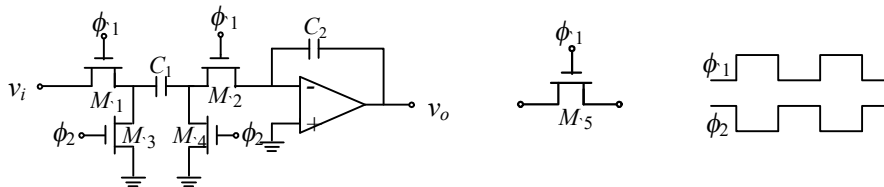


图 A.13.2 对寄生电容不敏感的开关电容反相积分器

当 ϕ_1 为低电平、 ϕ_2 为高电平(称为 ϕ_2 相)， M_1 、 M_2 断开， M_3 、 M_4 接通，图 A.13.2 简化为图 A.13.3(a)；而当 ϕ_1 为高电平、 ϕ_2 为低电平(称为 ϕ_1 相)， M_1 、 M_2 接通， M_3 、 M_4 断开，图 A.13.2 简化为图 A.13.3(b)。图中同时用虚线标出“闭合面”，“闭合面”内所有电容器极板上所存储的电荷守恒。

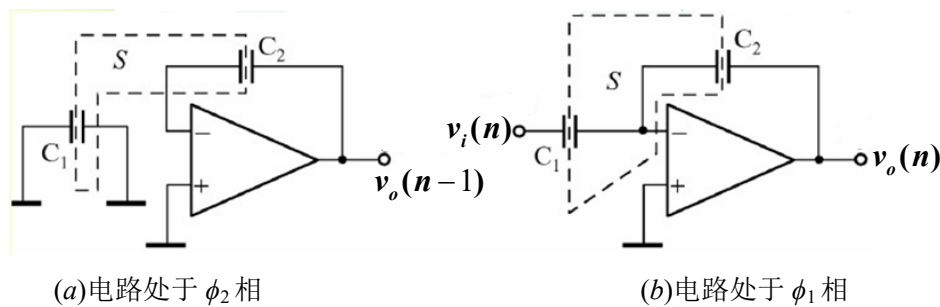


图 A.13.3 当图 A.13.2 所示电路处于 ϕ_2 相、 ϕ_1 相时的简化电路

根据图 A.13.3(a), 电路处于 ϕ_2 相, 闭合面内总电荷为

$$Q(n-1) = C_1(0-0) + C_2[0 - v_o(n-1)] = -C_2 v_o(n-1) \quad (\text{A.13.1})$$

而由图 A.13.3(b)可得闭合面内总电荷为

$$Q(n) = C_1[0 - v_i(n)] + C_2[0 - v_o(n)] = -C_1 v_i(n) - C_2 v_o(n) \quad (\text{A.13.2})$$

而由前述电荷守恒原理, 可得 $Q(n) = Q(n-1)$, 将上 2 式代入, 即得差分方程

$$v_o(n) = v_o(n-1) - \frac{C_1}{C_2} v_i(n) \quad (\text{A.13.3})$$

式(A.13.13)就是描述图 A.13.2 所示对寄生电容不敏感的开关电容反相积分器的差分方程。表示 nT 时刻的输出既与 nT 时刻输入有关, 也与前一时刻, $(n-1)T$ 输出值有关。对上式作 z 变换, 得

$$V_o(z) = z^{-1}V_o(z) - \frac{C_1}{C_2} V_i(z) \quad (\text{A.13.4})$$

从而得到开关电容反相积分器 z 域系统函数

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (\text{A.13.5a})$$

一般情况下系统函数 z 的负幂都要消去, 因此上式通常表示为

$$H(z) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{z}{z - 1} \quad (\text{A.13.5b})$$

3. 对寄生电容不敏感的开关电容同相积分器

如果用图 A.11.1(b)所示的对寄生电容不敏感的开关电容串联模拟电阻代替图 6.11.2 所示反相积分器中的 R , 就得到图 A.13.4 所示的对寄生电容不敏感的开关电容同相积分器。

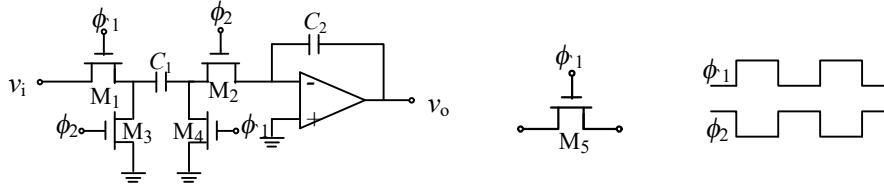


图 A.13.4 对寄生电容不敏感的开关电容同相积分器

当 ϕ_1 为高电平、 ϕ_2 为低电平(称为 ϕ_1 相), M_1 、 M_4 接通, M_2 、 M_3 断开, 图 A.13.4 简化为图 A.13.5(a); 而当 ϕ_1 为低电平、 ϕ_2 为高电平(称为 ϕ_2 相), M_1 、 M_4 断开, M_2 、 M_3 接通, 图 A.13.4 简化为图 A.13.5(b)。图中同时用虚线标出“闭合面”, “闭合面”内所有电容器极板上所存储的电荷守恒。

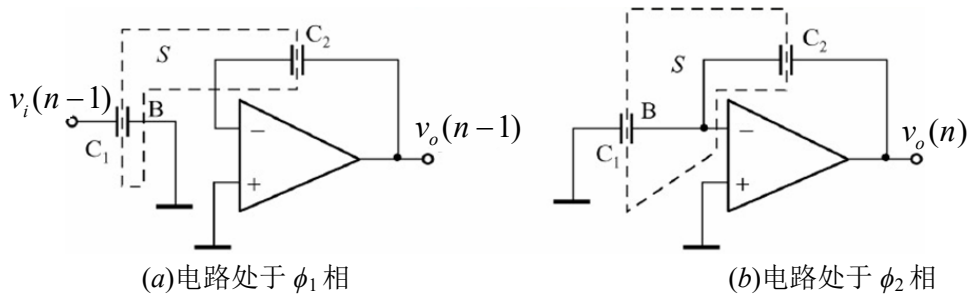


图 A.13.5 当图 A.13.4 所示电路处于 ϕ_1 相、 ϕ_2 相时的简化电路

根据图 A.13.5(a)，电路处于 ϕ_1 相，闭合面内总电荷为

$$\begin{aligned} Q(n-1) &= C_1[0 - v_i(n-1)] + C_2[0 - v_o(n-1)] \\ &= -C_1v_i(n-1) - C_2v_o(n-1) \end{aligned} \quad (\text{A.13.6})$$

而由图 A.13.5(b)可得闭合面内总电荷为

$$Q(n) = C_1[0 - 0] + C_2[0 - v_o(n)] = -C_2v_o(n) \quad (\text{A.13.7})$$

而由前述电荷守恒原理，可得 $Q(n) = Q(n-1)$ ，将上 2 式代入，即得差分方程

$$v_o(n) = v_o(n-1) + \frac{C_1}{C_2}v_i(n-1) \quad (\text{A.13.8})$$

式(A.13.8)就是描述图 A.13.4 所示对寄生电容不敏感的开关电容同相积分器的差分方程。对上式作 z 变换，得

$$V_o(z) = z^{-1}V_o(z) + \frac{C_1}{C_2}z^{-1}V_i(z) \quad (\text{A.13.9})$$

从而得到对寄生电容不敏感的开关电容同相积分器 z 域系统函数

$$H(z) = +\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{z-1} \quad (\text{A.13.10})$$

4. 全差分开关电容同相积分器

现代开关电容电路中，全差分模拟运算放大器比单端模拟放大器应用更广，这主要是因为与单端放大器相比，全差分放大器不仅能够更加有效地抑制电路的共模噪声，如电源噪声，电压偏移等，还可以通过交叉接线，来改变整个传递函数的极性。

标准的全差分开关电容积分器如图 A.13.6 所示。图中的运放是跨导运算放大器。不难看出，该电路是由图 A.13.4 所示对寄生电容不敏感的开关电容同相积分器及其沿水平线翻转而得的版本结合而成。一般来说，所有全差分开关电容积分器都做成是对寄生电容不敏感的，因为每个全差分积分器通常可由两个或更多个对寄生电容不敏感的单端电路组合而成。

可以证明，如果图中电路的输入和输出都在 $\phi_1=1$ 时采样(如图所示)则其传递函数如下式所示

$$H(z) = \frac{C}{C_0} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (\text{A.13.11})$$

如果输出只在 $\phi_2=1$ 时采样，则上式分子中延迟项(z^{-1})将不会出现。

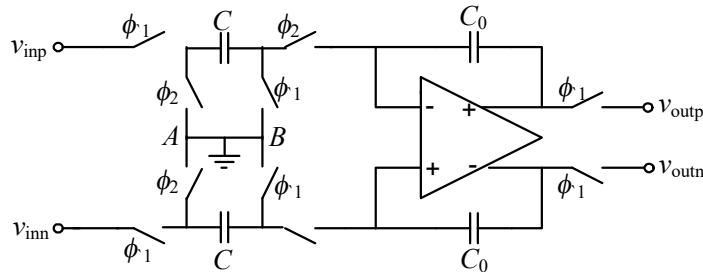


图 A.13.6 全差分欧拉开关电容积分器

在图 A.13.6 中，节点 A 和节点 B 都被画成接地。但在实际设计中，很少同时接地或连接在一起。例如，节点 A 被分割成上、下两个节点，分属于电路的上下两个部分，上节点

连接到正参考电压 V_{refp} ，下节点连接到负参考电压 V_{refn} 。这样一来，输入节点 $V_{\text{inn(p)}}$ 和参考节点 $V_{\text{refp(n)}}$ 间的电压差将由电容 C 来采样保持。

A.14 Nauta 跨导器结构 OTA (p430)

Nauta跨导器结构OTA(简称Nauta OTA)提出至今已20多年,这种简单的跨导单元仅由六个反相器构成,该跨导结构属于工作在饱和区、采用非线性项消除技术的OTA。其优点是速度快。

图 A.14.1 为 Nauta OTA 原理电路图,它仅由六个 CMOS 反相器构成。反相器 Inv1 和 Inv2 构成 OTA 的差分输入,实现电压到电流的转换。因为当其中一个反相器的电流变化时,并不会引起另一个反相器中电流的反方向变化,所以该电路必须以差分形式驱动,属于伪差分实现方式。输出 Inv3, Inv6 是共模反馈电路,交叉耦合的 Inv4, Inv5 形成负阻抗。这一结构的特点之一是,从输入到输出没有内部节点。所谓“内部节点”是指:这些节点在电路中不与输入、输出、偏压或地直接相连。因为没有内部节点,就不会引入与内部节点相关联的寄生极点,从而保证了 Nauta OTA 电路的传输函数有很高的频率范围。

Nauta 跨导器的进一步分析,请参阅 B.Nauta, A CMOS transconductance-C filter technique for very high frequencies[J]. IEEE JSSC, 1992, 27(2):142-153。

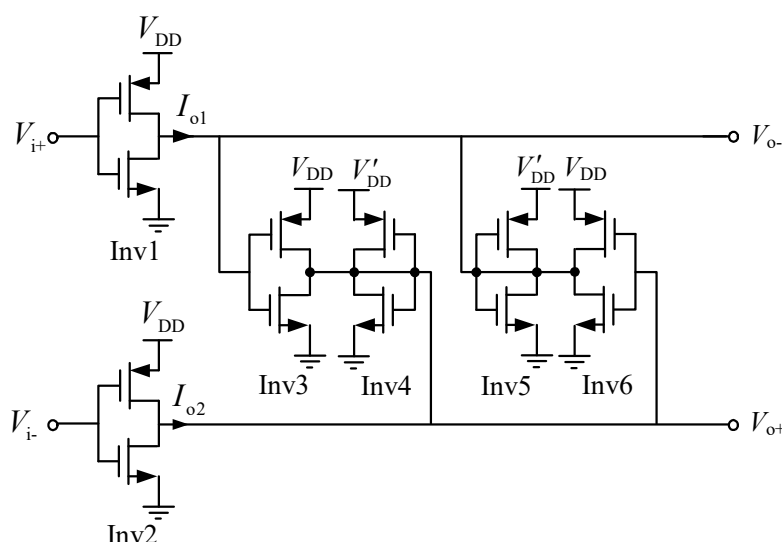


图 A.14.1 Nauta OTA 原理电路

A.15 源端电感负反馈窄带 LNA 噪声系数的分析与吉尔伯特混频器噪声与非线性分析思路 (p435)

1. 典型共源极放大器噪声分析

图 A.15.1(a)所示共源极放大器, 因其输入电阻太大, 很难与前级滤波器要求的 50Ω 电阻匹配, 不宜用作射频低噪声放大器。不过以该电路为例, 说明电路噪声特性的分析方法还是十分有意义的。

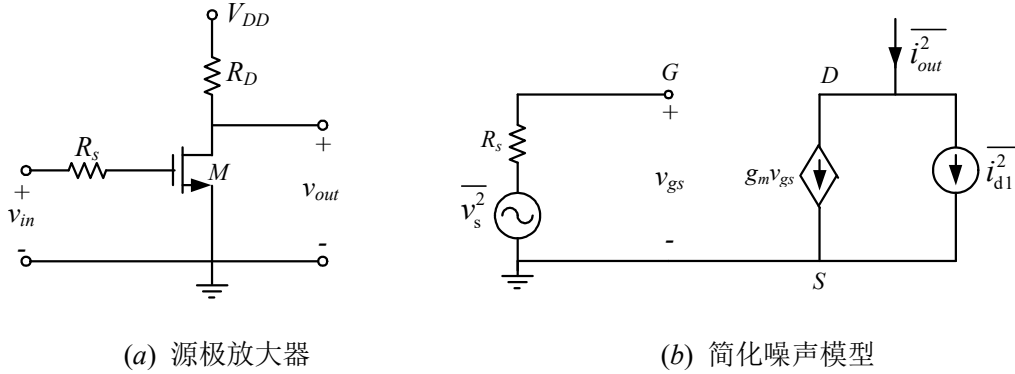


图 A.15.1 共源极放大器及其简化噪声模型

电路的噪声特性用噪声系数 F 表示, 根据第 4 章 4.4 节关于噪声系数的定义, 它可表示为

$$F = \frac{\overline{i_{out,total}^2}}{\overline{i_{out,s}^2}} \quad (\text{A.15.1})$$

其中 $\overline{i_{out,total}^2}$ 是电路各噪声源在 MOS 管漏极产生的噪声电流平方的平均值之和, 其值与电路总的噪声输出功率谱密度成比例。 $\overline{i_{out,s}^2}$ 仅是 $\overline{i_{out,total}^2}$ 中的一部分, 即信源电阻(R_s)激发的热噪声电压在 MOS 管漏极端引发的噪声电流平方的平均值, 它与该热噪声源在漏极处产生的输出功率谱密度成比例。如果将所有输出端噪声电流归算到输入端, 并用其在输入端等效的噪声电压表示, 噪声系数 F 也可表示为

$$F = \frac{\overline{v_{in,total}^2}}{\overline{v_{in,s}^2}} \quad (\text{A.15.2})$$

其中 $\overline{v_{in,total}^2}$ 为各噪声源在输出端产生的总的输出噪声功率归算到输入端(MOS 管栅极)等效的总的输入噪声电压平方的平均值, $\overline{v_{in,s}^2}$ 仅等效信源输入电阻(R_s)在输入端(MOS 管栅极)激发的噪声电压平方的平均值。

噪声作用于电路, 其输出功率谱密度怎么计算? 这就要利用线性系统中的噪声整形原理。

线性系统中的噪声整形原理

如果一个谱密度为 $S_x(f)$ 的信号加到一个传输函数为 $H(s)$ 的线性时不变系统上, 如图 A.15.2 所示, 其输出谱密度 $S_y(f)$ 为

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2 \quad (\text{A.15.3})$$

式中 $H(f)=H(s=j2\pi f)$ 。此处传输函数即系统的增益。

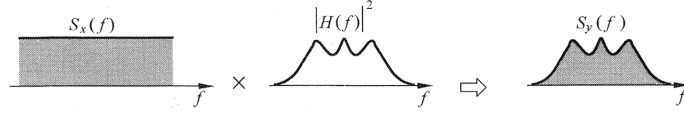


图 A.15.2 线性系统中的噪声整形

噪声谱密度对频率的积分即噪声功率。

因此放大器噪声系数的计算归结为：确定放大电路的噪声源并计算其功率谱密度 $S_x(f)$ ；计算各噪声源到放大器输出端的传输函数 $H(f)$ ，即各噪声源到放大器输出端的增益，并按式 (A.15.3) 计算相应的输出噪声谱密度 $S_y(f)$ ；在此基础上进一步依据式 (A.15.1) 或式 (A.15.2) 计算噪声系数。

为计算图 A.15.1(a) 所示共源极放大器电路的噪声系数，如果 MOS 管内部噪声源只考虑沟道产生的热噪声，对于噪声系数的分析，图 A.15.1(a) 所示放大器电路可用图(b)所示电路模型等效。图中并联在节点 D 与 S 之间的电流源 $\overline{i_{d1}^2}$ 表示沟道噪声电流，输入回路中 $\overline{v_s^2}$ 表示信源内阻 R_s 激发的热噪声，而回路中的 R_s 为无噪电阻。 $\overline{v_s^2}$ 、 $\overline{i_{d1}^2}$ 表示为

$$\overline{v_s^2} = 4kTR_s\Delta f \quad (\text{A.15.4})$$

$$\overline{i_{d1}^2} = 4kT\gamma g_{d0}\Delta f = 4kT\frac{\gamma}{\alpha}g_m\Delta f \quad (\text{A.15.5})$$

式中， k 为玻尔兹曼常数， T 为绝对温度， Δf 为带宽。 g_m 为 MOS 管跨导， g_{d0} 是漏源电压 $V_{ds}=0$ 时漏源电导。 γ 是与 MOS 管直流偏置有关的参数。 $\alpha = g_m / g_{d0}$ ，对于长沟道器件， $\alpha \rightarrow 1$ 。

沟道噪声电流源 $\overline{i_{d1}^2}$ 直接连接到栅极 D ，其传递函数为 1。故 $\overline{i_{out}^2} \Big|_{\text{源自 } \overline{i_{d1}^2}} = \overline{i_{d1}^2}$ 。因为栅极在 $\overline{v_{gs}^2}$ 作用下在漏极引发的噪声电流 $\overline{i_{out}^2} \Big|_{\text{源自 } \overline{v_{gs}^2}} = g_m^2 \overline{v_{gs}^2}$ ，所以将 $\overline{i_{out}^2} \Big|_{\text{源自 } \overline{i_{d1}^2}}$ 归算到栅端的等效噪声电压为

$$\overline{v_{gs}^2} \Big|_{\text{源自 } \overline{i_{d1}^2}} = \frac{\overline{i_{d1}^2}}{g_m^2} = 4kT \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{g_m} \Delta f \quad (\text{A.15.6})$$

根据式(A.15.2)定义的噪声系数，并将式(A.15.4)~式(A.15.6)代入，即得噪声系数 F

$$F = \frac{\overline{v_{in, total}^2}}{\overline{v_{in, s}^2}} = \frac{\overline{v_s^2} + \overline{v_{gs}^2} \Big|_{\text{源自 } \overline{i_{d1}^2}}}{\overline{v_s^2}} = \frac{4kTR_s\Delta f + 4kT \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{g_m} \Delta f}{4kTR_s\Delta f} = 1 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{R_s g_m} \quad (\text{A.15.7})$$

为使共源极放大器输入电阻与前级滤波器要求的 50Ω 电阻匹配，一个直接方法就是将一个 50Ω 的电阻(R_1)跨接在共源放大器的输入端上，如图 A.15.3 所示（偏置电路未画出）。遗憾的是，电阻 R_1 会附加上它自己的热噪声，并使输入到晶体管的信号比源输出的信号减小了一半，两种因素结合在一起，一般都会产生不可接受的高噪声系数。

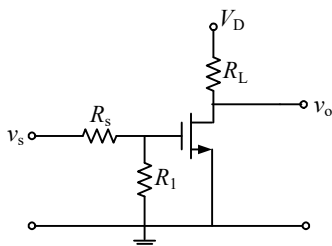


图 A.15.3 共源放大器
(偏置电路未画出)

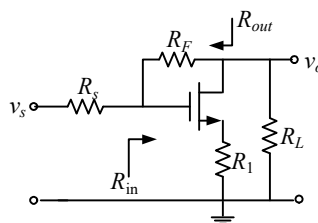


图 A.15.4 并联-串联负反馈
放大器(偏置电路未画出)

类似于对图 A.15.1(a)所示电路对噪声系数的分析,图 A.15.3 所示的共源放大器,对 MOS 晶体管仅考虑沟道热噪声的情况下,噪声系数为

$$F = 2 + \frac{4\gamma}{\alpha} \frac{1}{g_m R_s} \quad (6.15.8)$$

上式的导出留作练习。

图 A.15.4 所示的放大器(偏置电路未画出),是一个负反馈电路,可以提供宽带实数输入阻抗。该电路在放大之前没有含噪声的衰减器,它的噪声系数比图 6.15.3 所示电路要小,但电阻反馈网络仍然会产生它自己的热噪声并且也不能在所有频率下对晶体管表现为最佳的导纳(y_{opt})。所以未经改进的如图 6.15.4 所示电路也不可取。 y_{opt} 是使噪声最小的负载导纳值。

2. 源端电感负反馈的窄带低噪声放大器噪声分析思路

图 A.15.5 所示电路是基于源端电感负反馈的窄带低噪声放大器典型电路。晶体管 M_1 、 M_2 构成共源-共栅放大器。共源级 M_1 为主放大器,将输入电压转换成输出电流,故共源级放大器也称为跨导级放大器。共源级的设计在于实现输入阻抗匹配以及良好的噪声性能,共栅级(也称作 *cascode* 级) M_2 的作用在于减少输出到输入的密勒电容效应,提高增益与带宽。 M_1 、 M_2 一般具有相同的栅长 L 与栅宽 W 。 L_s 为共源级源电感, L_g 为共源级栅电感。有些低噪声放大器电路,在栅-源极间并联电容 C_{ex} 以增大放大器输入电容。该附加电容的作用,一是增加了一个自由度,可调节输入回路的品质因数;二是可减小全集成片上输入电感的值。与共栅级漏极连接的电感 L_o ,其作用有两个方面,一是电感上直流压降很小,有利于降低直流供电电压,二是电感的阻抗随频率增加,有助于补偿输出端电容阻抗的减小,对改善高频端频率响应有利。输入端偏置网络是由晶体管 M_3 控制的电阻分压网络,栅偏置电压足够高使晶体管 M_1 导通。通常偏置电阻取较大的值,在输入匹配和噪声分析中,偏置电路对交流可视为开路,因而可以忽略这部分电路的影响。如果输出端接容性负载,可以不考虑输出匹配网络。如果接 50Ω 负载,输出匹配网络是必要的。图 A.15.5 所示电路中输出匹配网络没有表示出来。

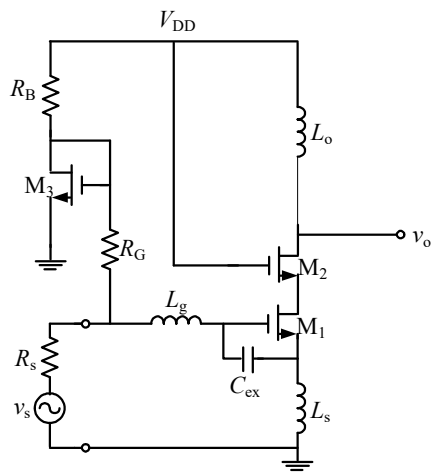


图 A.15.5 具有源端电感负反馈的
窄带 LNA 典型电路

以下着重分析如图 A.15.5 所示的源端电感负反馈结构的窄带 LNA 电路。

图 A.15.6 是图 A.15.5 所示 LNA 的小信号等效电路，可明显分为两部分，下半部分是跨导级的等效电路，上半部分是 *cascade* 级的等效电路。图中 r 为晶体管 M_1 的栅寄生电阻 r_{g1} 与栅电感 L_g 的寄生电阻 R_1 之和，除了 C_{M1} 、 C_{M2} 之外其它电路元件的意义一看就明白。

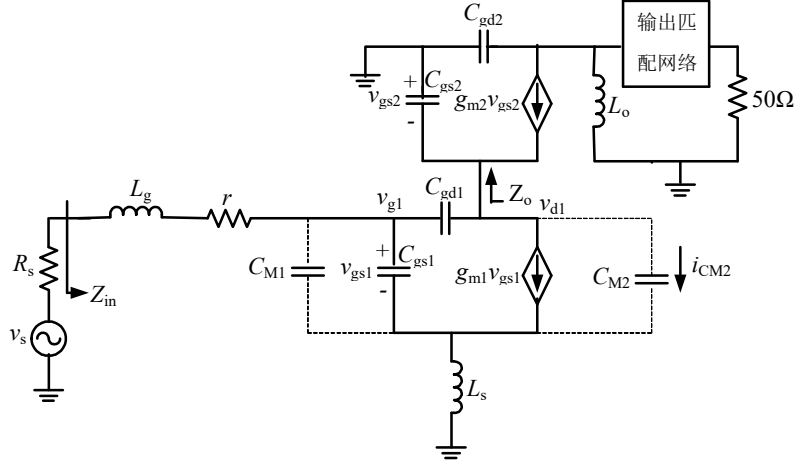


图 A.15.6 具有源端电感负反馈的 LNA 小信号等效电路

依据图 A.15.6 所示小信号等效电路模型，即可按 MNA 列写电路方程，求得输入阻抗及输入回路谐振条件，电压增益。

对于图 A.15.5 所示共源-共栅放大器电路的噪声系数 F 可分两步来计算，先计算跨导级噪声 F_1 ，再计算 *cascade* 级对噪声的贡献 F_c ，总的噪声系数 F 就是 F_1 与 F_c 之和。

$$F = F_1 + F_c \quad (\text{A.15.9})$$

图 A.15.5 所示共源-共栅放大器电路的噪声分析模型如图 A.15.7 所示。跨导级共有 4 个噪声源，即信号源内阻 R_s 热噪声 $\overline{v_s^2}$ ，晶体管 M_1 寄生电阻 r 产生的热噪声 $\overline{v_r^2}$ 。 r 为晶体管 M_1 栅寄生电阻 r_{g1} 与栅电感 L_g 的寄生电阻 R_1 之和。以及栅感应噪声 $\overline{i_g^2}$ 、沟道热噪声 $\overline{i_{d1}^2}$ 。

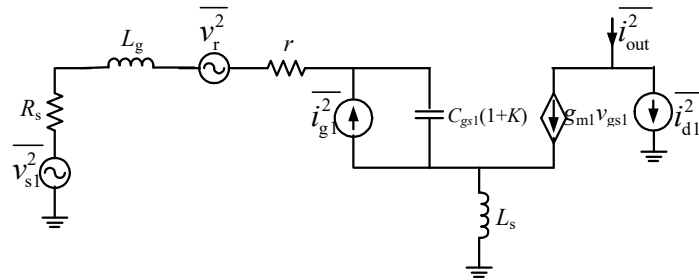


图 A.15.7 具有源端电感负反馈的 LNA 噪声分析的电路模型

依据图 A.15.7 所示噪声分析模型，并利用前面关于小信号增益计算结果，即可得出噪声系数 F_1 。进一步，在计算图 A.15.5 所示共源-共栅低噪声放大器等效电路中 M_2 漏极的均方噪声电流 $\overline{i_{d2}^2}$ 的基础上又可得噪声系数 F_c 。

图 A.15.5 所示源端电感负反馈结构 LNA 关于增益与噪声系数的具体分析，见黄晓华硕士论文“CMOS 低噪声放大器的设计与优化”，浙江大学，2010。

假设开关理想，则当处于 LO 的任一相位时，混频器表现为一个 *Cascode* 结构，此时的噪声由输入跨导管、开关管和负载电阻贡献。考虑开关管的噪声贡献，图 A.15.10(a) 为仅计算开关级输出噪声电流谱密度 $\overline{I_{out,n2}^2}$ 的模型，图中跨导级 M_1 用电容 C_p 等效近似， $C_p = C_{DB1} + C_{GD1} + C_{SB2}$ ，而 I/V 转换级电阻 R_D 假定为无噪电阻。根据线性系统中的噪声整形原理，为计算 $\overline{I_{out,n2}^2}$ ，需要计算开关级从输入电压到输出电流传递函数 $H(s)|_{\text{开关级}, V_{n2} \rightarrow I_{n2}}$ ，图 A.15.10(b) 就是计算 $H(s)|_{\text{开关级}, V_{n2} \rightarrow I_{n2}}$ 的等效电路。 V_{n2} 为输入电压信号， $V_{out,n2}$ 为输出电压信号， I_{n2} 为输出端漏极电流。 $V_2 = -V_{out,n2} / (g_{m2} R_D)$ ， g_{m2} 为开关管 M_2 的跨导。

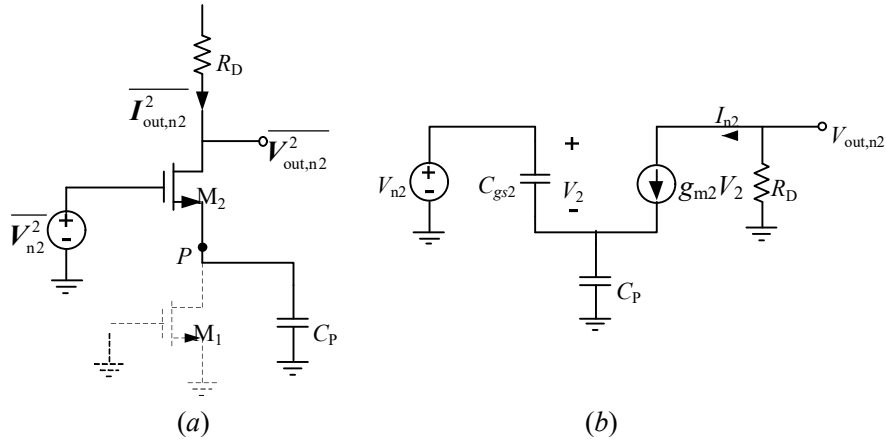


图 A.15.10 开关管噪声计算等效电路

根据图 A.15.10(b)所示的计算开关管噪声的等效电路模型，即可求出开关级电压传递函数，并进一步计算开关级输出噪声电流谱密度，将差分结构两个支路的噪声电压相加便得到输出端的总噪声电压谱密度。

通过如上分析，至少可以得出以下 2 点：

增大输入管的跨导和负载电阻值，可以增大增益，从而减小输入参考噪声；

减小开关管源端寄生电容 C_p 一方面增大了增益，另一方面减小了 Cascode 结构时的开关管的噪声贡献，因此减小了输入参考噪声。

4. 非线性分析

对吉尔伯特混频器的非线性分析主要是得出三阶交调 $IM3$ 与三阶交调点 $IP3$ 。在开关理想的情况下，开关管对不存在同时导通的时间，混频器仅表现为一个 Cascode 结构。对于 Cascode 结构，非线性一般主要由输入管决定。不过，如果开关管源端节点阻抗分配不合适，如该节点的寄生电容较大时，以及开关管自身的非线性系数较大时，开关管对整体电路的非线性的影响会增加。

吉尔伯特单元中，对于输入管可以有差分对和伪差分对两种形式，如图 A.15.11(a)、(b)所示。

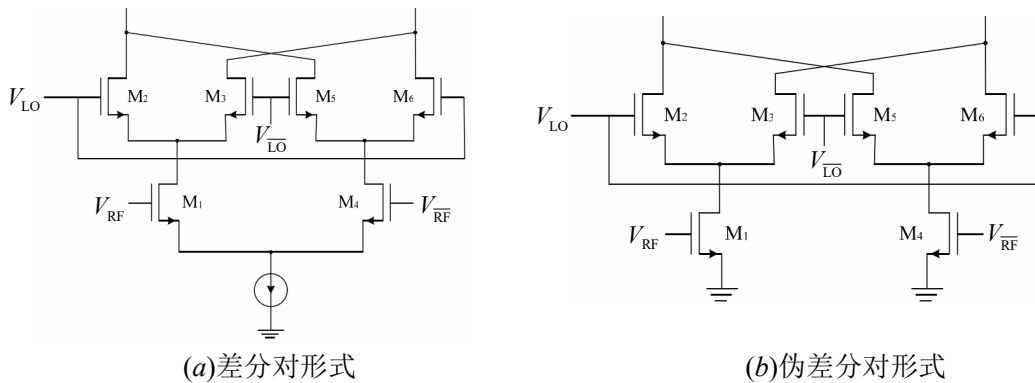


图 A.15.11 吉尔伯特单元输入差分对的两种形式

对于图 A.15.11(b)所示的伪差分对，在理想长沟道近似下，仅存在最高二阶的非线性，如果计及 MOS 管的短沟道效应，则会因输入信号对 MOS 管有效迁移率和速度饱和特性的

影响而引入高阶非线性。差分对即使在不计及短沟道效应的情况下也会产生三阶非线性。因此，对于线性度要求较高的吉尔伯特单元，可以使用伪差分对。

当考虑开关的非理想效应时，在同时导通时间内，射频电流会在两个开关管之间分流。对于一阶近似，分流比率与开关管各自的跨导相关。如果此时两个管子的栅源电压相同，则分流相同，从而差分输出电流为 0，开关管不会引入非线性。但实际上，两个开关管的栅源电压并不相等，而是关于 LO 共模电平对称，这样两支路的电流就不相等，从而使得输出电流 $I_0 = I_1 - I_2$ 与射频电流 I_{RF} 之间引入了非线性。因此，为了减少开关管引入的非线性，需要减小它们的同时导通时间 ΔT 。分析可知，减小开关管的偏置电流，增大 LO 信号的幅度，都可以减小 ΔT ，从而减小开关管对混频器非线性的影响。