浙江大学 2014－2015 学年秋冬学期

《微积分 I》课程期中考试模拟试卷

评分细则

一、计算题

1、　设 $\begin{cases} x(t)=\sqrt{6-\dfrac{t^2}{2}} \\ y(t)=\sqrt{3-\dfrac{t^2}{2}} \\ z(t)=t \end{cases}$ 则曲线$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$……………………5 分

则 $\begin{cases} x^{'}(t)=\dfrac{-t}{2\sqrt{6-\dfrac{t^2}{2}}} \\ y^{'}(t)=\dfrac{-t}{2\sqrt{3-\dfrac{t^2}{2}}} \\ z^{'}(t)=1 \end{cases}$ 只要有一次求导即给分…………………………2 分

$\begin{cases} x^{''}(t)=\dfrac{-(6+\dfrac{t^2}{2})}{2(\sqrt{6-\dfrac{t^2}{2}})^3} \\ y^{''}(t)=\dfrac{-(3+\dfrac{t^2}{2})}{2(\sqrt{3-\dfrac{t^2}{2}})^3} \\ z^{''}(t)=0 \end{cases}$ 只要有二次求导即给分……………………2 分

从而$k=\dfrac{\left|\vec{r}^{'}(t)\times\vec{r}^{''}(t)\right|}{\left|\vec{r}^{'}(t)\right|^3}$

在 t=2 处，k=$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$……………………………………………………………1 分

此题超纲，故若只写了二维空间中曲线曲率公式给 8 分

2、$0<\frac{1}{n^2}\ln(n!)=\frac{\ln 1+\ln 2+\ldots\ldots\ln n}{n^2}<\frac{n\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{n}$

想到取对数给 5 分
放缩正确（其他放缩也可）给 2 分
答案正确给 10 分

故$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^0=1$

3、对 sinx，tanx，arctanx 作泰勒展开

若用洛必达证明
则答案错误给 5 分
答案正确给 10 分

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ ………………3 分

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ ………………3 分

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ ………………3 分

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}=\frac{-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$…………………………1 分

4、$\frac{dy}{dx}=(\sin x)^x(\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x})+8(\arcsin x)^3\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

此处求导正确给 5 分　　　　此处求导正确给 5 分

5、$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n}\frac{\sin(\frac{(k-1)\pi}{2})(x-\pi)^k}{k!}+\frac{(-1)^{n-1}\sin[\theta(x-\pi)]}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$　　$\theta\in$（0,1）

8 分　　　　2 分

6、$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[k]{x}}{1-x}=\frac{1}{k}$ ……………………………………………………………6 分

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}$ ………………………………4 分

7、过曲线上任一点$(x_0,\frac{1}{x_0})$的切线为$y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}$ ……………………2 分

$x=a$时，$y_a=\frac{2}{x_0}-\frac{a}{x_0^2}$ ………………………………………………2 分

$x=b$时，$y_a=\frac{2}{x_0}-\frac{b}{x_0^2}$ ………………………………………………2 分

答案正确给 10 分

梯形面积为$S=\dfrac{(y_a+y_b)\times(b-a)}{2}$ ……………………………………………2 分

当$x=\dfrac{a+b}{2}$时，$S_{\max}$即过点$(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{2}{a+b})$ ………………………………2 分

二、证明题

1、$\forall\varepsilon>0,\exists t>0,st.\quad x>t时,\left|f^{'}(x)\right|<\varepsilon$ ………………………………2 分

$\forall x>t,由中值定理f(x)-f(t)=f^{'}(\xi)(x-t)\qquad \xi\in(t,x)$ ………2 分

故$\begin{aligned}&-\varepsilon(x-t)<f(x)<f(t)<\varepsilon(x-t)\\&\Rightarrow f(t)-\varepsilon(x-t)<f(x)<f(g)+\varepsilon(x-t)\end{aligned}$ …………………………2 分

不妨可设 x>0，故

$\dfrac{f(t)-\varepsilon(x-t)}{x}<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{f(t)+\varepsilon(x-t)}{x}$ …………………………2 分

从而$-\varepsilon<\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}<\varepsilon$

由ε任意性知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ …………………………………………2 分

2、$\exists\xi\quad$ s.t $\quad\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f^{'}(\xi)\qquad\xi\in(a,c)\ 故f^{'}(\xi)>0$ ………………3 分

$\exists\eta\quad$ s.t $\quad\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f^{'}(\eta)\qquad\eta\in(a,c)\ 故f^{'}(\eta)>0$ ……………………3 分

$\exists\varsigma\quad$ s.t $\quad\dfrac{f^{'}(\xi)-f^{'}(\eta)}{\xi-\eta}=f^{''}(\varsigma)\qquad\varsigma\in(a,c)\ 故f^{''}(\varsigma)>0$ ……………………4 分

3、由 Taylor 定理 $\qquad e^x=P_n(x)+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}>0$ …………………………4 分

（1）$x\geq0时，显然P_n(x)>0$

$x<0时，P_{2n}(x)=e^x-\dfrac{e^{\theta x}}{(2n+1)!}x^{2n+!}>0$ ………………………………1 分

$故n为偶数时P_n(x)>0$

（2）

1 分

1 分

1 分

$P_{2n+1}^{'}(x)=P_{2n}(x)$

由$P_{2n}(x)>0$故$P_{2n+1}(x)$单调递增

而$\lim\limits_{x\to+\infty}P_{2n+1}(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}P_{2n+1}(x)=-\infty$故仅有一个零点

（3）

$$P_{2n+3}(x)=P_{2n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}(1+\frac{x}{2n+3})$$

用归纳法证明$x_n>-(2n+3)$

于是$P_{2n+3}(x_n)>0\Rightarrow x_n>x_{n+1}$故$\{\mathrm{x_n}\}$单调递减 1 分

假设$\lim\limits_{\mathrm{x}\to\infty}x_n=a$

则$P_{2n+1}(x_n)=1+\frac{x_n}{1!}+\frac{x_n^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}P_{2n+!}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x_n}{1!}+\frac{x_n^2}{2!}+\ldots\ldots+\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!})$

$\Rightarrow 0=e^a$矛盾

故无下界即趋近于$-\infty$ 1 分