第六章 有源滤波电路

6.2 二阶有源RC滤波器

二阶有源RC滤波器

- 具有二个独立的储能元件电容
  - 滤波器阶数越高，从通带到阻带的过渡越陡
- 根据频率特性，可以分为低通、高通、带通、带阻、以及全通滤波器
- 运放不仅起信号放大作用，同时也对电路的频率选择性有重要影响

二阶低通有源滤波电路

- 节点电压变量

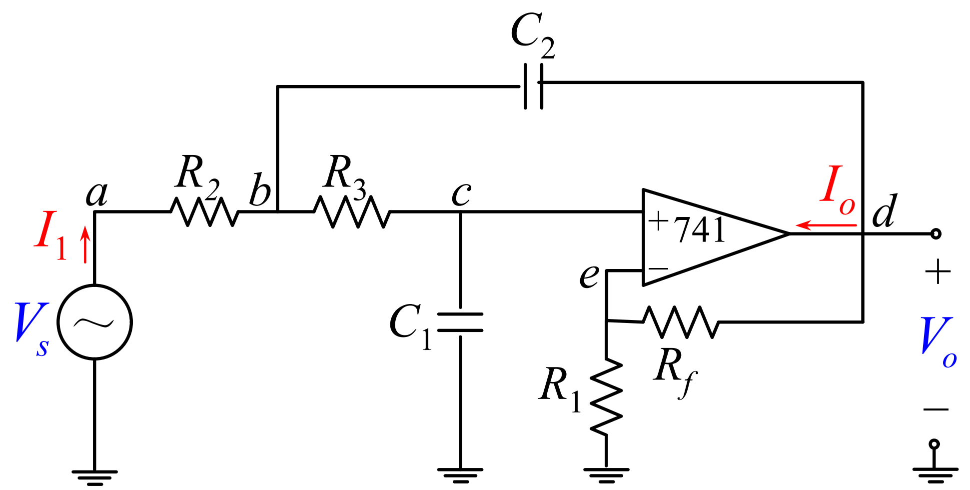
  V_a、V_b、V_c、V_d、V_e

- 增加变量

  I_1、I_o

- 增加约束方程

$$V_a = V_s \qquad V_c = V_e$$



零状态初始条件
741运放等效为理想运放

电路方程及其求解

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-\frac{1}{R_2} & (\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+sC_2) & -\frac{1}{R_3} & -sC_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -sC_2 & 0 & sC_2+\frac{1}{R_f} & -\frac{1}{R_f} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_f} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \\ I_o \\ I_1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_s \end{bmatrix}
$$

电路方程及其求解

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \qquad C_1 = C_2 = C$$

```
syms s; syms R RF C;

A = [1/R,   -1/R,   0,  0,  0,  0,  -1;...
    -1/R,2/R+s*C,-1/R,-s*C,0,  0,  0;...
     0,  -1/R,1/R+s*C, 0,  0,  0,  0;...
     0, -s*C, 0,  s*C+1/RF,-1/RF,1, 0;...
     0, 0,  0,  -1/RF,1/R+1/RF, 0,  0;...
     0, 0,  1,    0,   -1,     0,  0;...
     1, 0,  0,    0,    0,     0,  0];

B = [0; 0;  0;  0;  0;  0; 1];

V = inv(A)*B;

H = V(4)
```

$V_s = 1$

```
H =

(R + RF)/(C^2*R^3*s^2 + 2*C*R^2*s - RF*C*R*s + R)

>>
```

$$H(s) = \frac{1 + \dfrac{R_f}{R}}{(sCR)^2 + s2CR - sCR_f + 1}$$

系统函数

$$H(s)=\frac{1+\frac{R_f}{R}}{(sCR)^2+s2CR-sCR_f+1}$$

1. $\omega_n=\dfrac{1}{RC}$ 特征角频率

2. $\mu=1+\dfrac{R_f}{R}$

3. $\varsigma=(3-\mu)/2$ 阻尼因子

   $Q=1/(3-\mu)$ 品质因数

可以表示成任一形式：

$$H(s)=\frac{\mu\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$H(s)=\frac{\mu\omega_n^2}{s^2+\frac{\omega_n}{Q}s+\omega_n^2}$$

频率响应

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{\mu}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2+j\frac{\omega}{\omega_n Q}}$$

- 幅频响应

$$|H(\omega)|=\frac{\mu}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2+(\frac{\omega}{\omega_n Q})^2}}$$

$$\omega\ll\omega_n,\quad |H(\omega)|=\mu$$

$$\omega\gg\omega_n,\quad |H(\omega)|\to 0$$

低通滤波特性

$$|H(\omega)|\big|_{\omega=\omega_n}=Q\mu$$

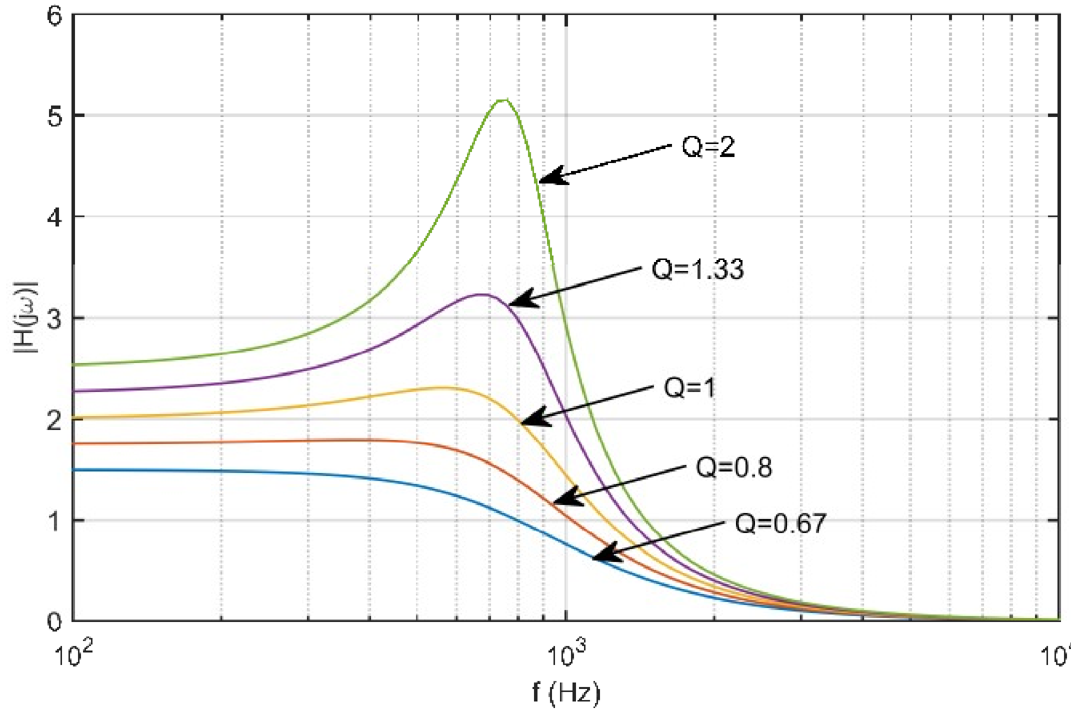
Q=0.707，对应下降3dB

Q值影响

$R = 20k\Omega, \quad C = 0.01\mu F$

$R_f\,(\mathrm{k}\Omega)$	Q
10	0.67
15	0.8
20	1
25	1.33
30	2

Q=0.707，平坦度最大



Q值影响

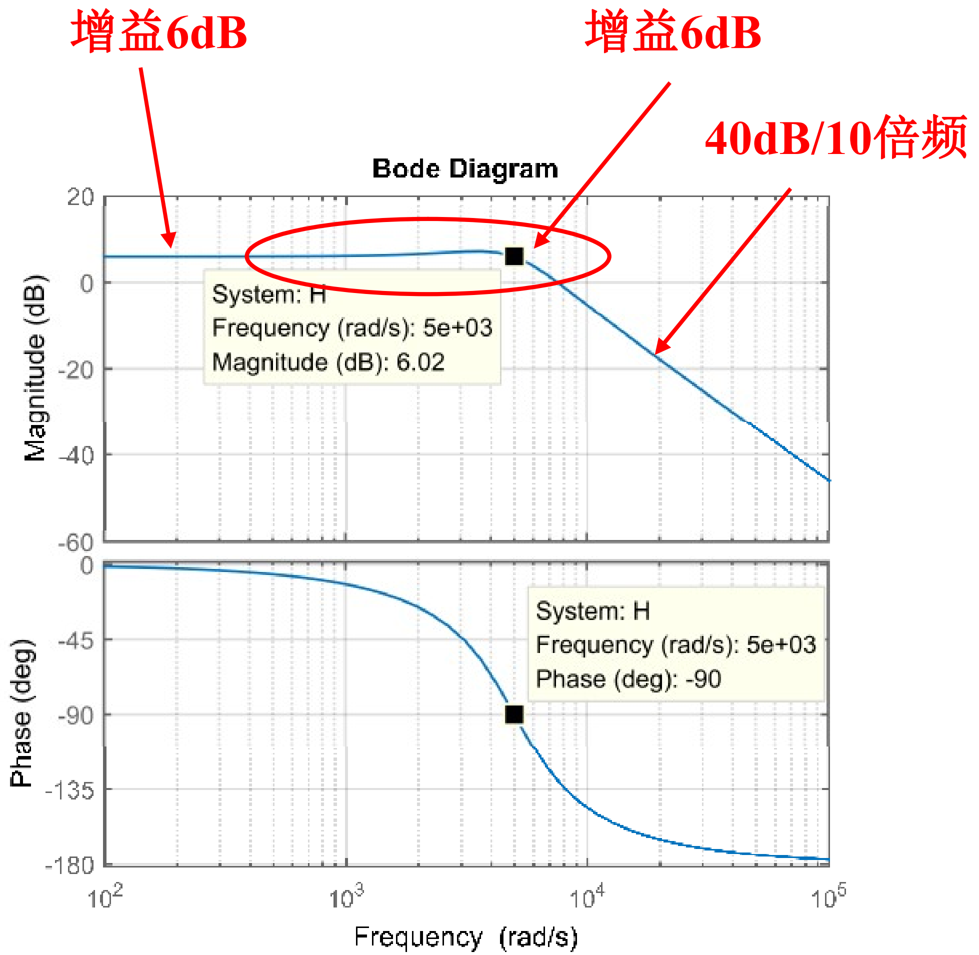
```
% R=20k, C=0.01uF
R=20e3; C=0.01e-6;
wn=1/R/C;
% Rf=10k, 15k 20k, 25k, 30k
Rf=[10e3 15e3 20e3 25e3 30e3];
u=1+Rf/R; Q=1./(3-u)

f=logspace(2,4,101);
% normalzed w = 2*pi*f/wn
w=(f*2*pi/wn);

for i=1:5
   % this is |H(jw)|
   hw(:,i)= u(i) ./ sqrt( (1-w.*w).^2+(w/Q(i)).^2 ) ;
end;

semilogx(f,hw); grid on;
legend('Q= 0.67','Q= 0.80','Q= 1.00','Q= 1.33','Q= 2.00')
xlabel('f (Hz)'); ylabel('|H(j\omega)|');
```

波特图

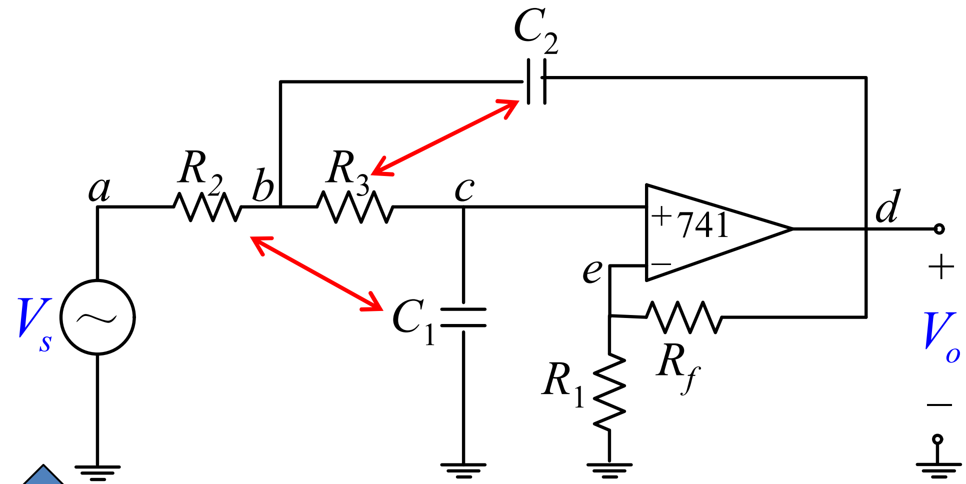
```
% R=20k, C=0.01uF, Rf=20k
R=20e3; C=0.01e-6; Rf=20e3;
wn=1/R/C;u=1+Rf/R; Q=1/(3-u);

H=tf([u*wn*wn],[1 wn/Q wn*wn])

bode(H);
```

$$\omega_n = 5000\ rad/s$$

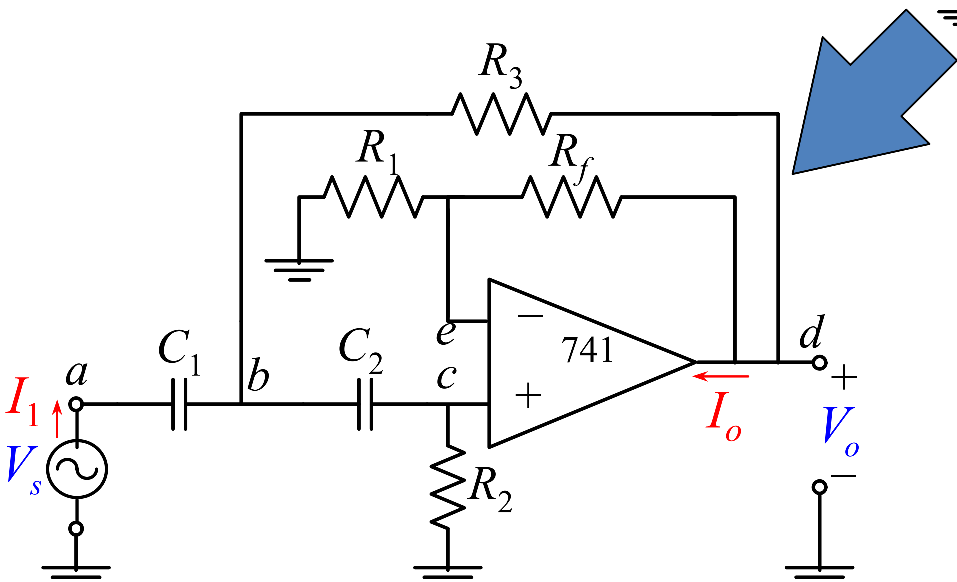
$$\mu = 2, \quad Q = 1$$



二阶高通有源滤波电路



二阶低通有源滤波电路



二阶高通有源滤波电路

- 节点电压变量

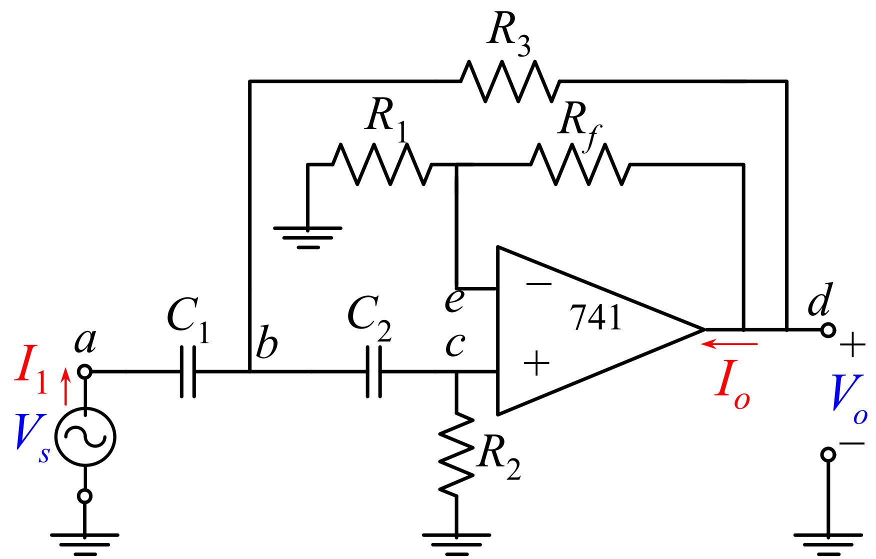
  V_a、V_b、V_c、V_d、V_e

- 增加变量

  I_1、I_o

- 增加约束方程

$$V_a = V_s \qquad V_c = V_e$$



零状态初始条件

741运放等效为理想运放

电路方程

$$\begin{bmatrix} sC_1 & -sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -sC_1 & (\frac{1}{R_3}+sC_2+sC_1) & -sC_2 & -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -sC_2 & \frac{1}{R_2}+sC_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_f} & -\frac{1}{R_f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_f} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \\ I_o \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_s \end{bmatrix}$$

系统函数

$$\boxed{R_1 = R_2 = R_3 = R \qquad C_1 = C_2 = C}$$

$$H(s) = \frac{\mu s^2}{s^2 + (3-\mu)\frac{1}{CR}s + (\frac{1}{CR})^2}$$

1. $\omega_n = \dfrac{1}{RC}$ 特征角频率

可以表示成任一形式：

2. $\mu = 1 + \dfrac{R_f}{R}$

$$H(s) = \frac{\mu s^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

3. $\varsigma = (3-\mu)/2$ 阻尼因子

   $Q = 1/(3-\mu)$ 品质因数

$$H(s) = \frac{\mu s^2}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2}$$

频率响应

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = -\frac{\mu\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + \dfrac{j\omega\omega_n}{Q}}$$

- 幅频响应

$$|H(j\omega)| = \frac{\mu}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\dfrac{\omega_n}{\omega Q}\right)^2}}$$

$$\omega \gg \omega_n, \quad |H(j\omega)| = \mu$$

$$\omega \ll \omega_n, \quad |H(j\omega)| \to 0$$

高通滤波特性

$$|H(\omega)|\big|_{\omega=\omega_n} = Q\mu$$

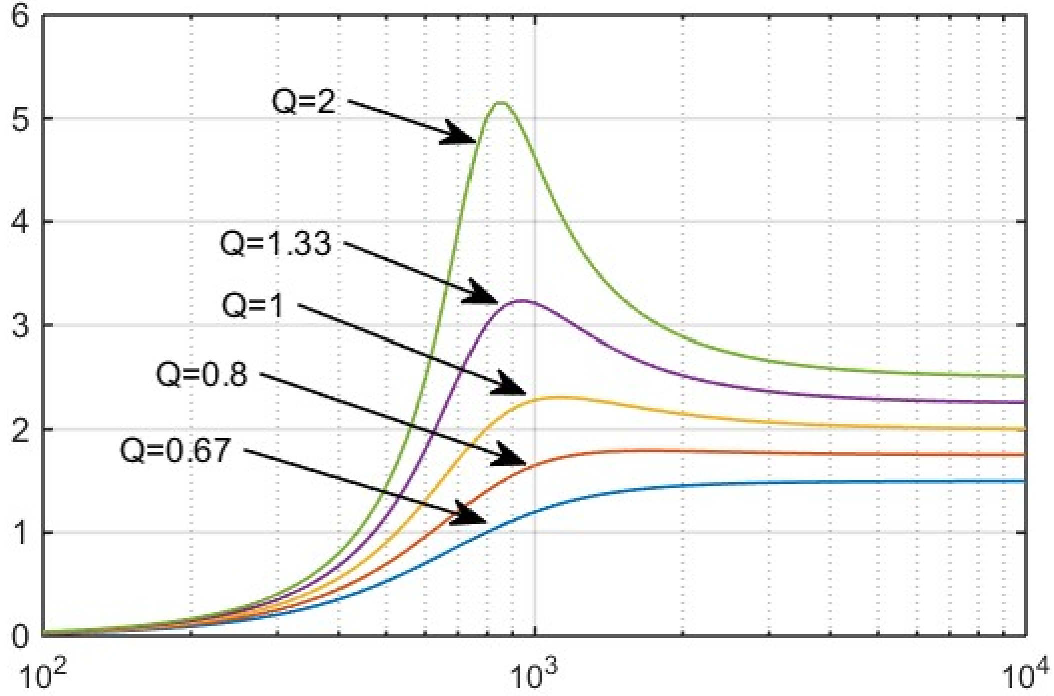
Q=0.707，对应下降3dB

Q值影响

$$R = 20k\Omega, \quad C = 0.01\mu F$$

R_f (kΩ)	Q
10	0.67
15	0.8
20	1
25	1.33
30	2

Q=0.707，平坦度最大



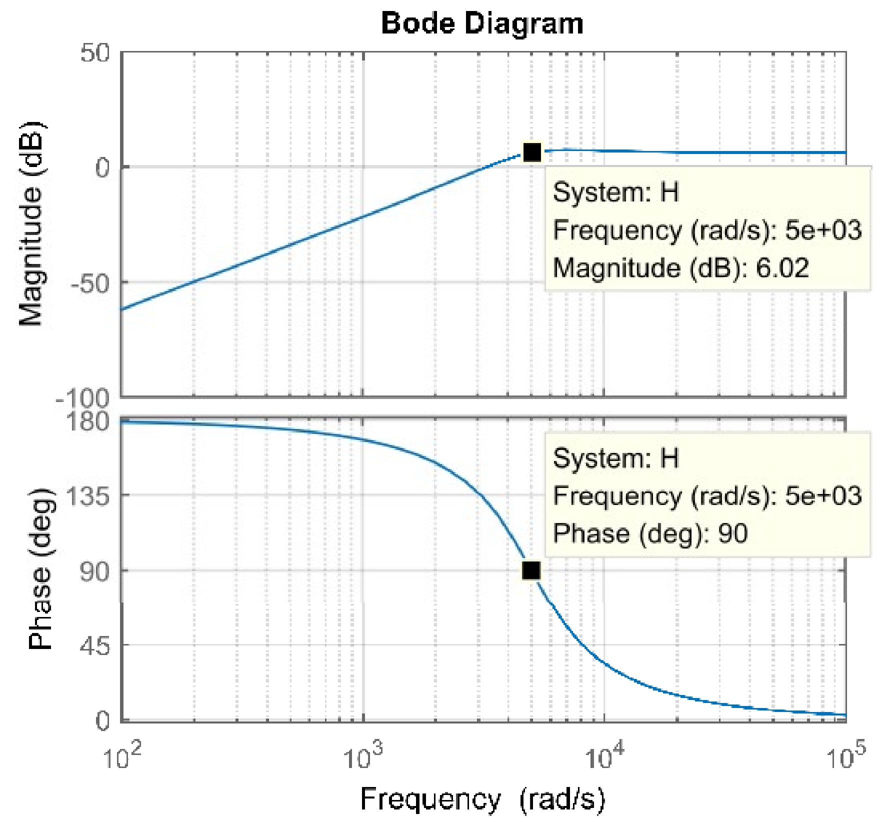
波特图

$$R = 20k\Omega, \quad C = 0.01\mu F$$

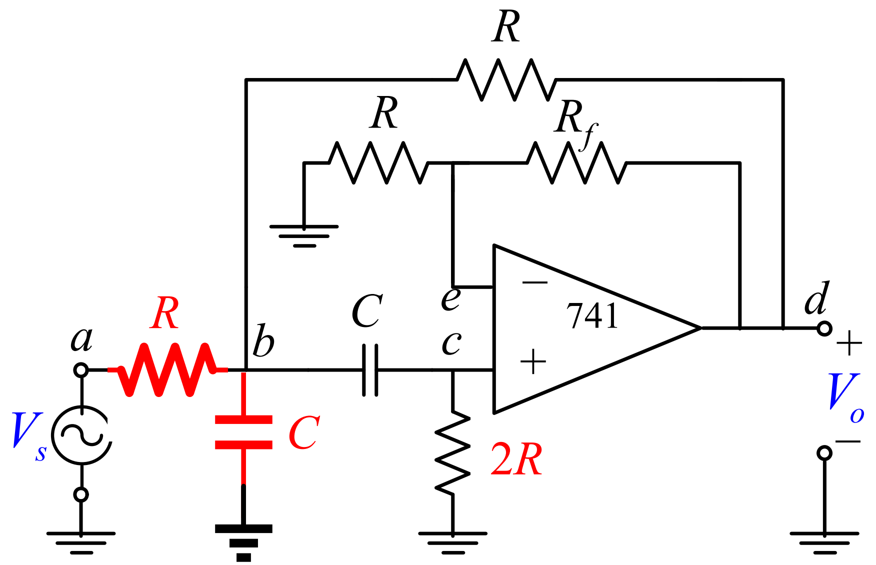
$$\omega_n = 5000\ rad/s$$

$$R_f = 20k\Omega$$

$$\mu = 2, \quad Q = 1$$



二阶带通有源滤波电路



二阶带通有源滤波电路

- 节点电压变量

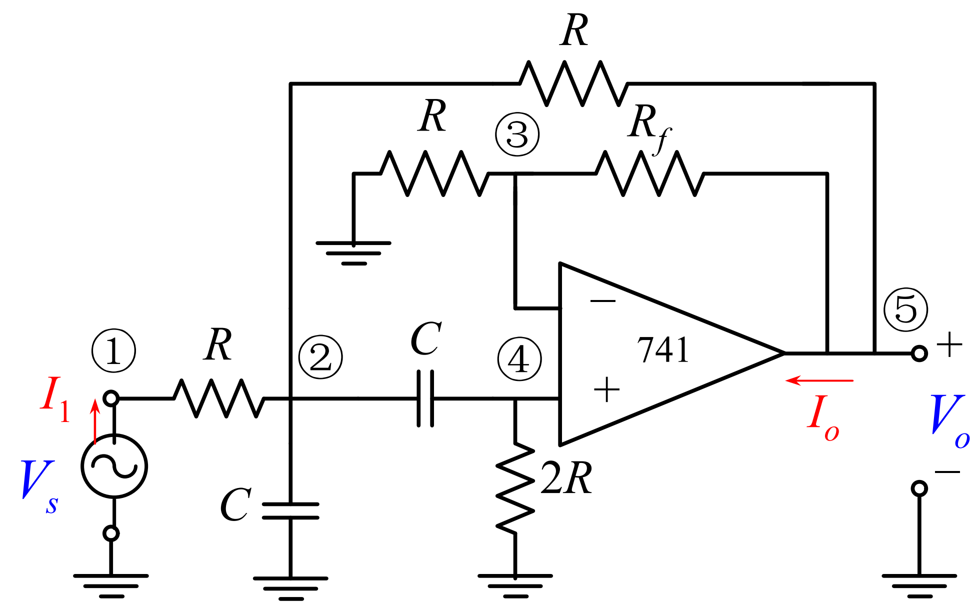
  V_1、V_2、V_3、V_4、V_5

- 增加变量

  I_1、I_o

- 增加约束方程

$$V_1 = V_s \qquad V_3 = V_4$$



零状态初始条件

741运放等效为理想运放

电路方程

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R} & (\frac{2}{R}+2sC) & 0 & -sC & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R}+\frac{1}{R_f} & 0 & -\frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ 0 & -sC & 0 & \frac{1}{2R}+sC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R_f} & 0 & \frac{1}{R_f}+\frac{1}{R} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_o \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_s \end{bmatrix}$$

系统函数

$$H(s)=\frac{V_5}{V_1}=\frac{s\mu CR}{1+(3-\mu)sCR+(sCR)^2}$$

1. $\omega_n=\frac{1}{RC}$ 特征角频率

2. $\mu=1+\frac{R_f}{R}$

3. $\varsigma=(3-\mu)/2$ 阻尼因子

   $Q=1/(3-\mu)$ 品质因数

可以表示成任一形式：

$$H(s)=\frac{s\mu\omega_n}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$H(s)=\frac{s\mu\omega_n}{s^2+\frac{\omega_n}{Q}s+\omega_n^2}$$

频率响应

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega\omega_n\mu}{\omega_n^2-\omega^2+\dfrac{j\omega\omega_n}{Q}}$$

- 幅频响应

$$\left|H(j\omega)\right|_{\omega=\omega_n}=Q\mu$$

$$\omega\gg\omega_n\text{或}\omega\ll\omega_n,\quad \left|H(j\omega)\right|\to 0$$

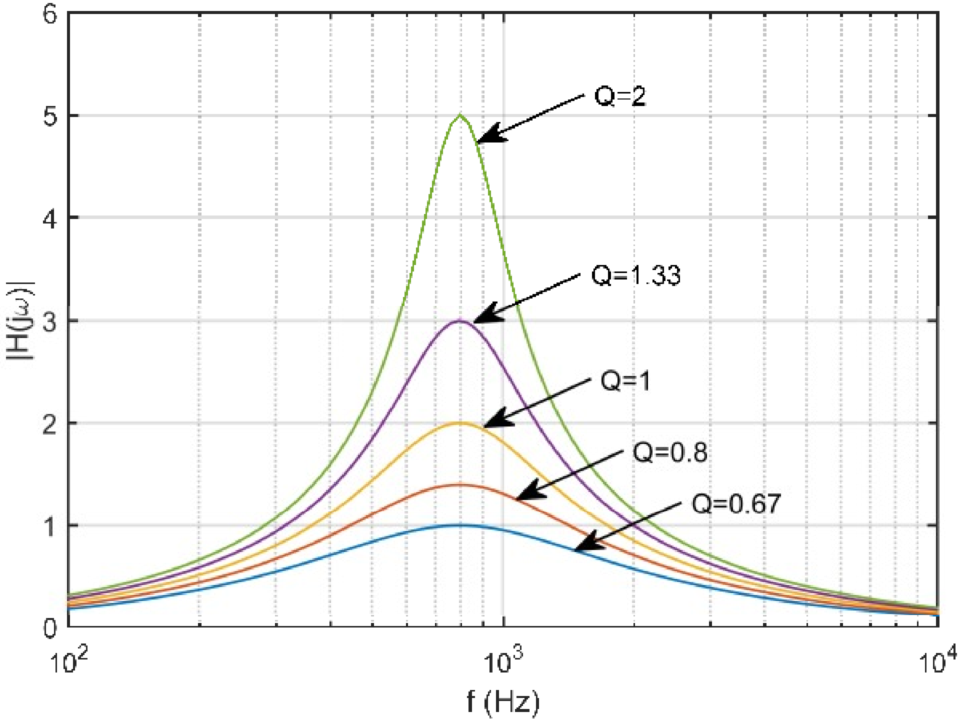
带通滤波特性

Q值影响

$$R = 20k\Omega, \quad C = 0.01\mu F$$

R_f (kΩ)	Q
10	0.67
15	0.8
20	1
25	1.33
30	2

Q值越大，频率选择性越好

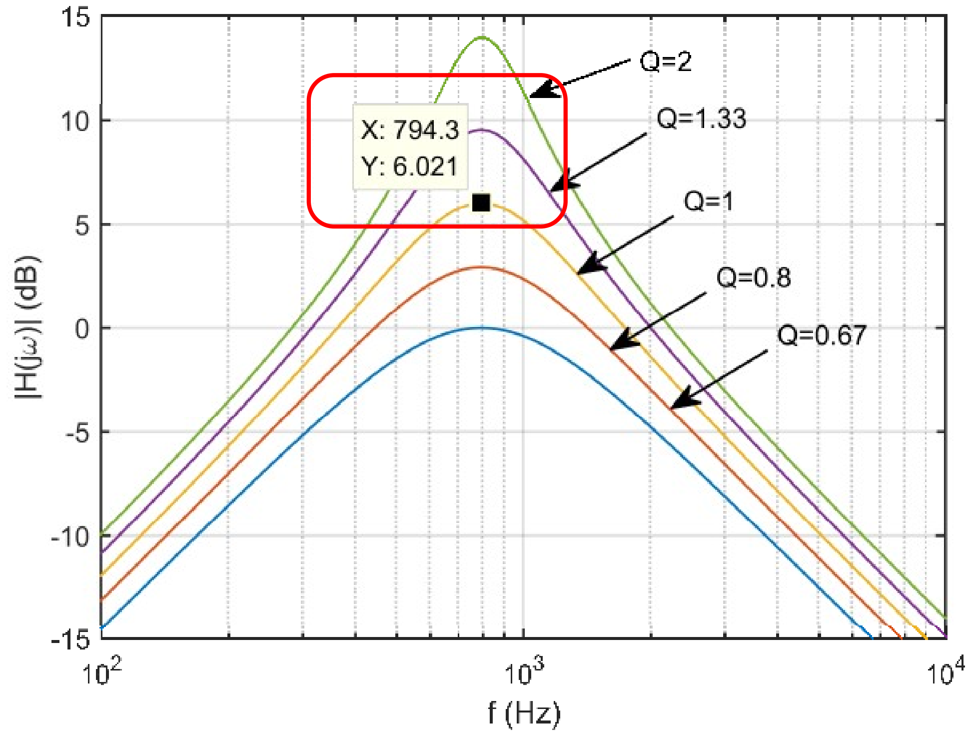


Q值影响

$$R = 20k\Omega, \quad C = 0.01\mu F$$

R_f (kΩ)	Q
10	0.67
15	0.8
20	1
25	1.33
30	2

Q值越大，3dB带宽越窄



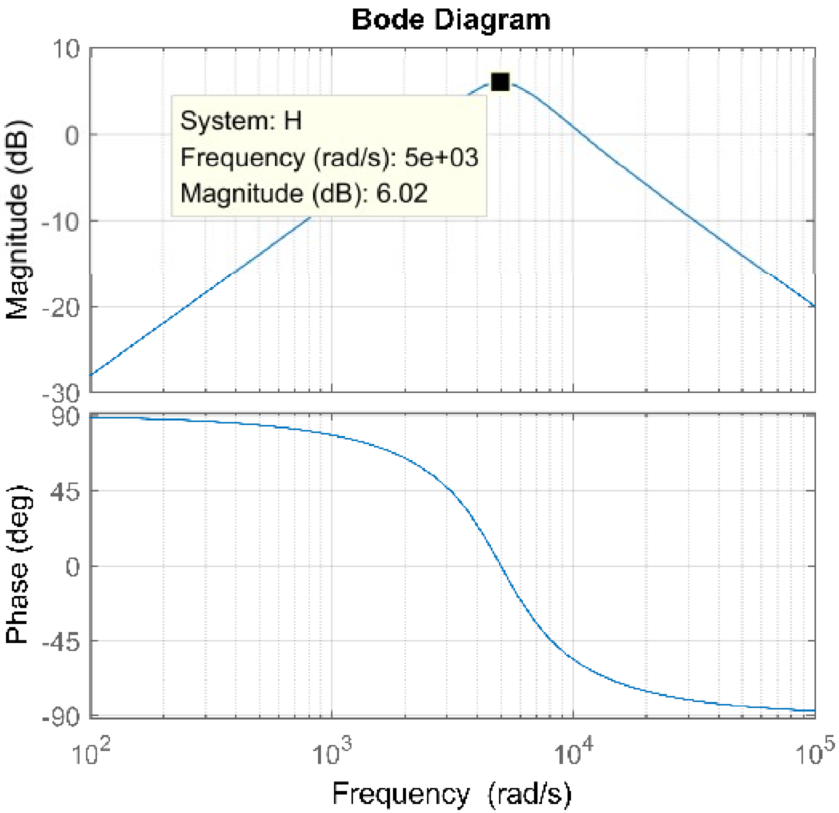
波特图

$$R = 20k\Omega, \quad C = 0.01\mu F$$

$$\omega_n = 5000\ rad/s$$

$$R_f = 20k\Omega$$

$$\mu = 2, \quad Q = 1$$



滤波器传递函数形式

$$H(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$P(s)=s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2 \qquad P(s)=s^2+\frac{\omega_n}{Q}s+\omega_n^2$$

低通 $Q(s)=\mu\omega_n^2$

带通 $Q(s)=\mu\omega_n s$

高通 $Q(s)=\mu s^2$

小结

- 二阶有源RC滤波器
  - 低通
  - 高通
  - 带通