



# 第六章

## 信号与系统的复频域分析



## § 6.0 引言

### § 6.1 拉普拉斯变换

### § 6.2 常用信号的拉氏变换对

### § 6.3 双边拉氏变换的性质

### § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

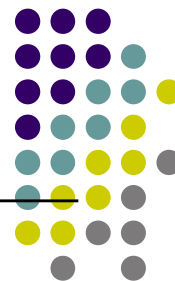
### § 6.5 拉氏反变换

### § 6.6 单边拉氏变换及性质

### § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.0 引言



- 本章将讨论连续时间信号与系统拉普拉斯变换的分析方法。它的本质是把连续时间信号分解为 $e^{st}$ 复指数信号的叠加，同时利用复指数信号 $e^{st}$ 是LTI系统的特征函数，求出连续时间系统在复频域对输入信号的响应。
- 与连续时间傅里叶分析方法相比，拉氏变换分析方法扩大了信号变换的范围，在本质上可以看作是广义的傅里叶变换，可以用于一些傅里叶变换不能应用的重要方面，如系统的稳定性分析。



## § 6.0 引言

### § 6.1 拉普拉斯变换

### § 6.2 常用信号的拉氏变换对

### § 6.3 双边拉氏变换的性质

### § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

### § 6.5 拉氏反变换

### § 6.6 单边拉氏变换及性质

### § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.1.1 从傅立叶变换到拉普拉斯变换



不是所有信号都能进行傅立叶变换。为了使更多的信号能进行变换，并简化某些变换形式或运算过程，引入一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ，将它乘以 $x(t)$ ，只要 $\sigma$ 的数值选择得当，就能保证当 $t \rightarrow \infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时， $x(t)e^{-\sigma t}$ 趋于零，并使 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅立叶变换收敛。

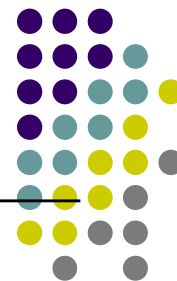
$$F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-t(\sigma+j\omega)} dt$$

它是 $s = \sigma + j\omega$ 的函数，可以写成

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$



## 6.1.1 从傅立叶变换到拉普拉斯变换



$X(\sigma + j\omega)$ 的傅立叶反变换

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}[X(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边乘以 $e^{\sigma t}$ : 
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{t(\sigma + j\omega)} d\omega$$

令  $\sigma + j\omega = s$  , 称为复频率

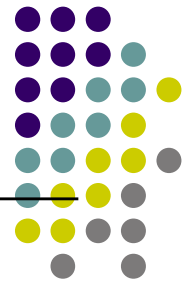
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

上式称为双边拉普拉斯变换的正变换式--简称为拉氏变换。

$$X(s) = L\{x(t)\} \qquad x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$



## 6.1.1 从傅立叶变换到拉普拉斯变换



以上从傅立叶变换导出拉氏变换的过程中可以看出,  $X(s)$  是  $x(t) \cdot e^{-\sigma t}$  的傅立叶变换, 对  $x(t)$  来说,  $X(s)$  则是它的双边拉氏变换。

若  $x(t)$  的傅立叶变换存在, 根据拉氏变换定义, 则有

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

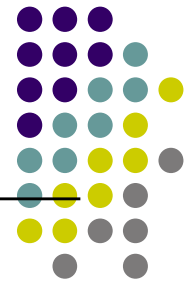
因为实际中的信号都是有始信号, 即  $t < 0$  时,  $x(t) = 0$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

上式称为单边拉氏变换式。式中积分下限取  $0^-$  是考虑到  $x(t)$  中可能包含冲激函数及其各阶导数。



## 6.1.2 拉氏变换的收敛域



- 拉氏变换对于 $\sigma = \text{Re}\{s\}$ 的范围有一定的选取，不同的选取范围将对应不同的信号。通常把能使信号 $x(t)$ 的拉氏变换存在的 $s$ 值的范围称为信号 $x(t)$ 的收敛域（Region of Convergence），简记为ROC，在S域平面上常用阴影部分表示ROC。
- 当收敛域包含 $j\omega$ 轴时，信号的傅里叶变换一定收敛。





## 例6.1



【例6.1】 设信号  $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ , ( $a > 0$ );  $x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$   
求  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$ 及其收敛域。

解：根据定义可得

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

由绝对可积条件，得  $\sigma + a > 0$

$$\text{因此 } e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

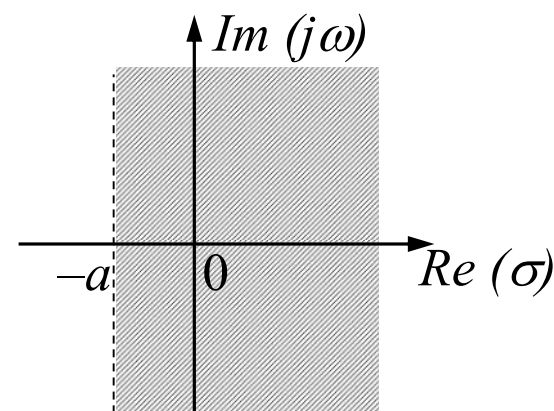
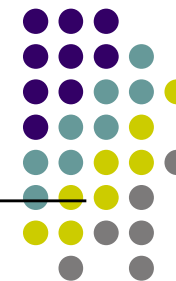


图6-1  $X_1(s)$ 的收敛域



## 例6.1



$$\begin{aligned} X_2(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(-t) e^{-st} dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

要使它满足绝对可积条件,  $\sigma + a < 0$

$$\text{即 } -e^{-at} u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

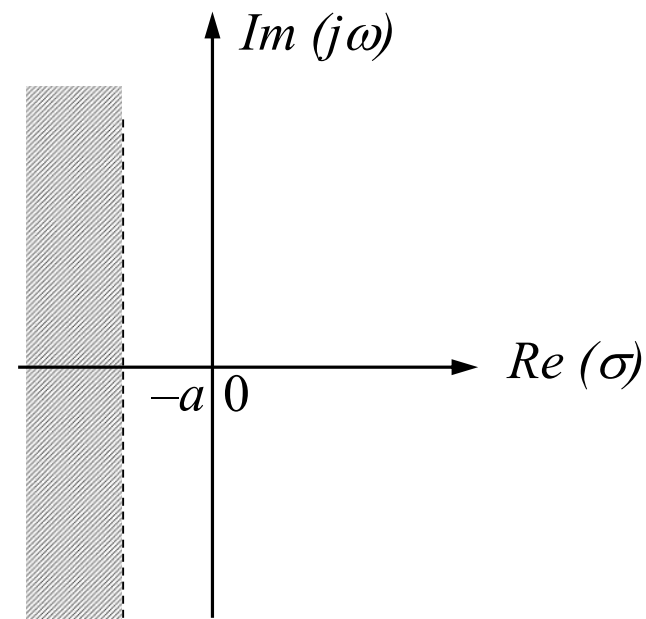


图6-2  $X_2(s)$ 的收敛域



## 例6.2

【例6.2】求信号  $x(t)=e^{-b|t|}$  的拉氏变换及其收敛域 ( $b>0$ )



解：由拉氏变换的定义式有

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-(s-b)t}}{s-b} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(s+b)t}}{s+b} \Big|_0^{\infty} = \frac{2b}{s^2 - b^2} \end{aligned}$$

第一项积分的收敛域为  $\text{Re}(s) < b$ ；第二项积分的收敛域为  $\text{Re}\{s\} > -b$ ，整个积分的收敛域应该是第一项积分和第二项积分收敛域的公共区域。

当  $b < 0$  时， $x(t)=e^{-b|t|}$  的拉氏变换不存在。

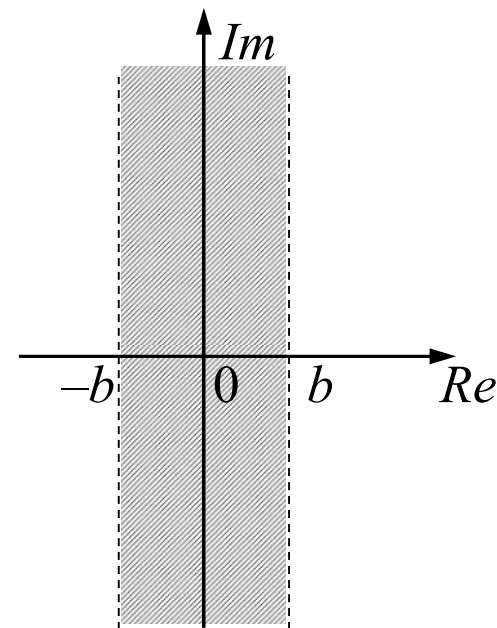
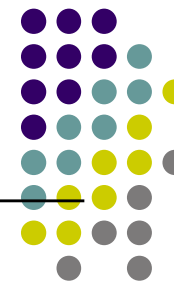


图6-3 例6.2中信号的收敛域



## 6.1.3 拉氏变换的几何表示：零极点图



- 许多信号 $x(t)$ 的拉氏变换都可表示为有理函数的形式

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n}, \quad n > m$$

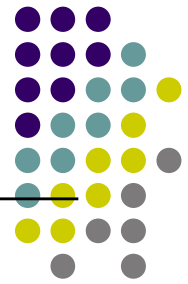
- 改写为因子相乘的形式

$$X(s) = \frac{A \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad A = b_m / a_n$$

- 其中，A为常数因子， $z_i$ 与 $p_j$ 分别为使分子多项式和分母多项式为零的根。



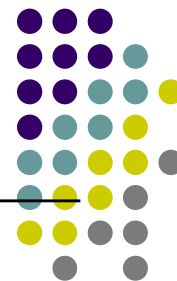
### 6.1.3 拉氏变换的几何表示：零极点图



- 因为
$$X(s)\big|_{s=z_i} = 0$$
$$X(s)\big|_{s=p_j} = \infty$$
- 故 $z_i$ 和 $p_j$ 分别称为 $X(s)$ 的零点和极点。在 $S$ 平面上分别用符号  $\circ$  和  $\times$  表示零极点的位置，这个图形称为 $X(s)$ 在 $S$ 平面的零极点图。
- $X(s)$ 可用它在 $S$ 平面上的零极点图来表征。



## 例6.3



【例6.3】画出 $X(s)$ 的零极点图

解：  $X(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} = \frac{2s+3}{(s+2)(s+1)}, \text{Re}(s) > -1$

$X(s)$  的零点是  $s = -\frac{3}{2}$ ,

极点有两个：一个是-2，一个是-1。

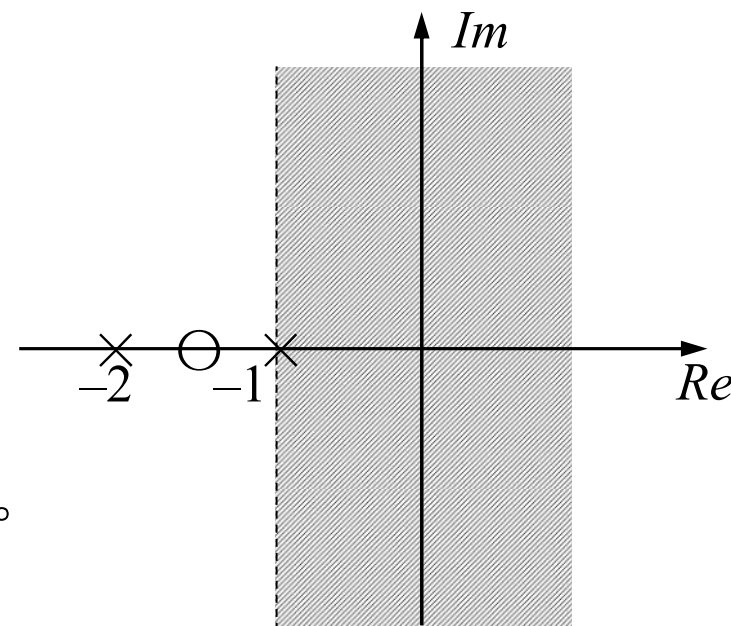
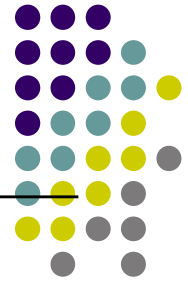


图6-4 例6.3的收敛域



# Matlab: 零极点计算



【例6-28】已知系统函数为

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2}$$

解：用Matlab求出系统的零极点，程序如下

```
%program: Pole-zero map of  $H(s)$  using plot function  
b=[1 -1];           %分子多项式  
a=[1 2 2];          %分母多项式  
zs=roots(b);  
ps=roots(a);  
plot (real(zs),imag(zs),'o',real(ps),imag(ps),'x','markersize',8);  
axis([-2 2 -2 2]);
```



# Matlab: 零极点计算

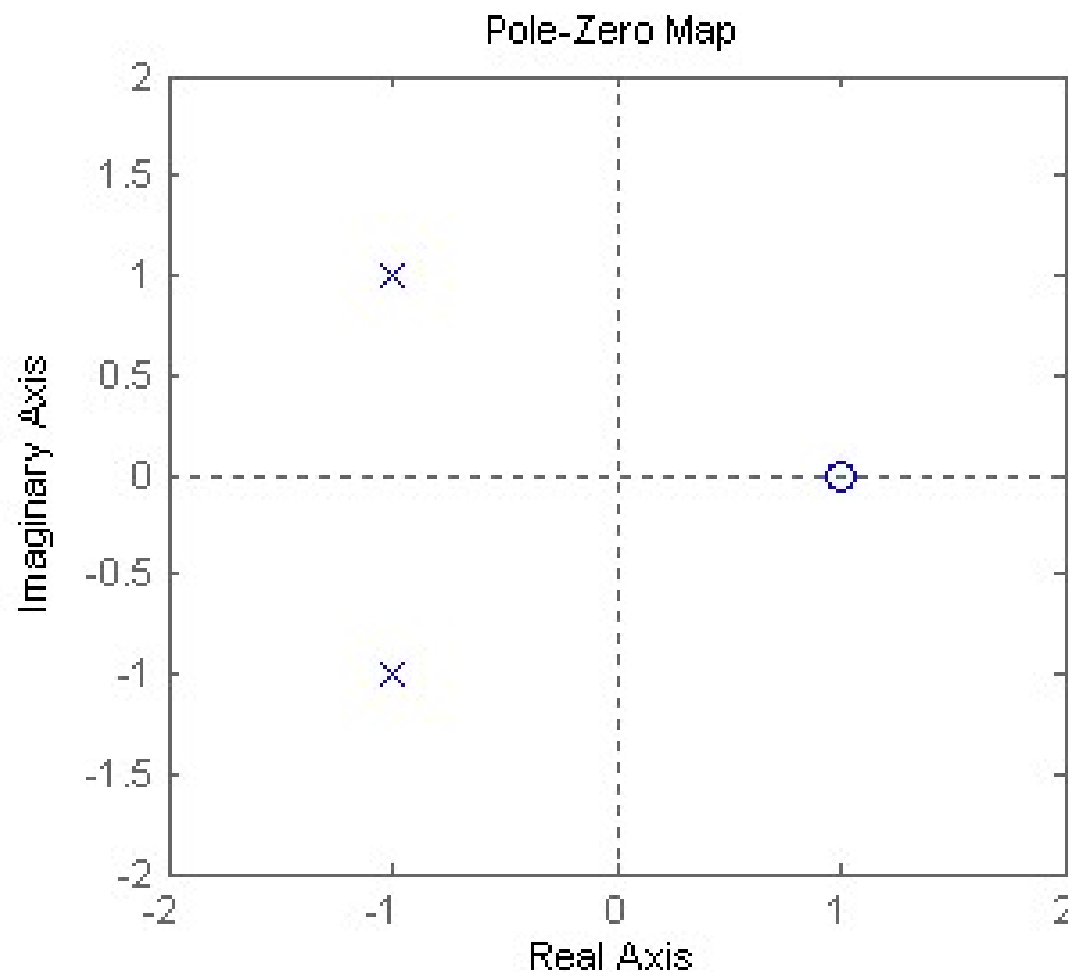
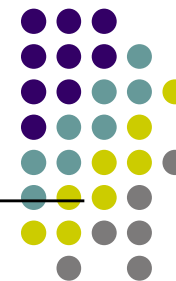
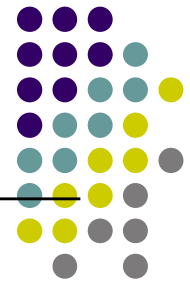


图6-31例6.28零极点图





# Matlab: 零极点计算



另外一种实现方法

```
%program: Pole-zero map of H(s) using pzmap function
```

```
b=[1 -1];
```

```
a=[1 2 2];
```

```
sys=tf(b,a)
```

```
pzmap(sys);
```



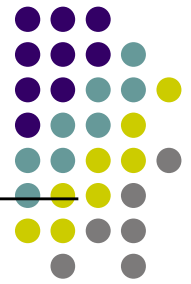
## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



- $x(t)$ 的时域特性不仅仅取决于 $X(s)$ 的代数表示，还与收敛域有关，仅有 $X(s)$ 的代数表示式并不能惟一表征它所对应的时间信号。
- 本节将讨论 $X(s)$ 收敛域的性质， $X(s)$ 的收敛域与信号 $x(t)$ 的时域特性之间的关系，收敛域边界的位置与 $X(s)$ 极点之间的关系。



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



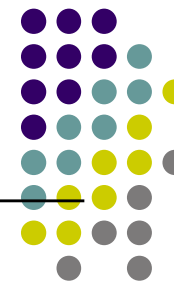
- **性质1:** 连续时间信号 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 的收敛域在 $S$ 平面上, 由平行于 $j\omega$ 轴的带状区域构成。

这是因为 $X(s)$ 的收敛域是由那些能使 $x(t)e^{-\sigma t}$ 绝对可积的复数 $s = \sigma + j\omega$ 的实部组成的, 而与 $S$ 的虚部无关, 因此收敛域的边界必然是平行于虚轴 ( $j\omega$ ) 的直线。

- **性质2:** 对有理拉氏变换 $X(s)$ 来说, 在收敛域内不应包含任何极点, 否则, 如果在收敛域内有个极点, 则 $X(s)$ 在该点为无穷大, 它就不可能收敛了。



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



- 性质3: 如果 $x(t)$ 是时限的, 则它的拉氏变换 $X(s)$ 的收敛域是整个 $S$ 平面。

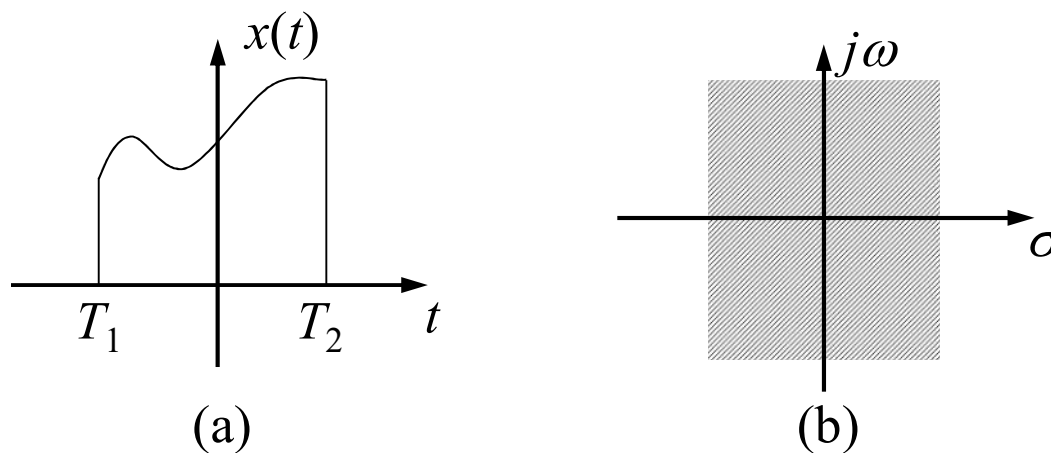
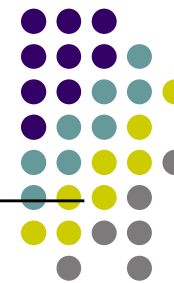


图6-5 时限信号及其收敛域



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



由于 $x(t)$ 是时限的，一般指数加权不可能无界，因此 $x(t)$ 乘以指数信号一定是可积的。

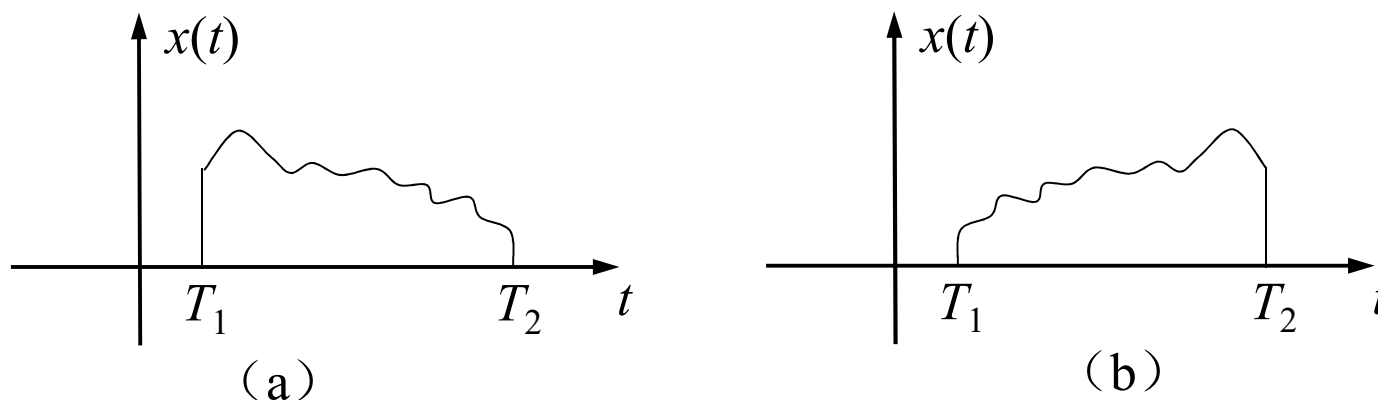


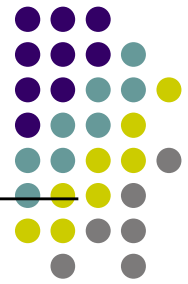
图6-6 (a)乘以指数衰减信号；(b)乘以指数增长信号

证明：由于 $x(t)$ 是时限的，所以

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty$$



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



对于在收敛域内的  $S = \sigma + j\omega$  , 要求  $x(t)e^{-\sigma t}$  是绝对可积的, 即

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

$\sigma = 0$  时的  $s$  是在 ROC 内。

对于  $\sigma > 0$ ,  $e^{-\sigma t}$  在  $x(t)$  为非零的区间的最大值是  $e^{-\sigma T_1}$ , 因此可以写成

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$$

因为右边是有界的, 所以左边也是有界的, 因此对于  $\text{Re}\{s\} > 0$  的  $S$  平面必然也在 ROC 内。



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



类似的证明方法，若  $\sigma < 0$ ，则有

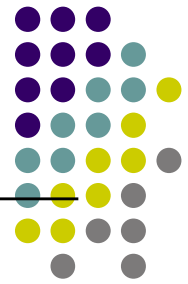
$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$$

$x(t)e^{-\sigma t}$  也是绝对可积的。

因此ROC包括整个 $S$ 平面。



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



**性质4:** 如果 $x(t)$ 是右边信号, 且 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 收敛域在其最右边极点的右边。

右边信号是指  $t < T_1$  时,  $x(t) = 0$  的信号。

若  $x(t)$  的拉氏变换对某一个  $s = s_0$  值收敛, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty, \quad \sigma_0 = \operatorname{Re}\{s_0\}$$

对任意 $s$ 有

$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t - (\sigma_1 - \sigma_0)t} dt,$$





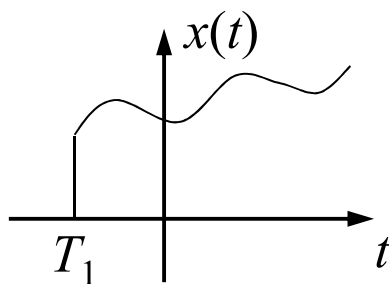
## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



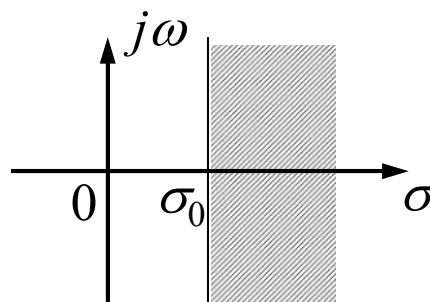
对于 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，则有

$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt \leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

这就是说 $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ 的区域在 $X(s)$ 的收敛域内，又因为收敛域内不能有极点，故收敛域一定位于 $X(s)$ 的最右边极点的右边。



(a)

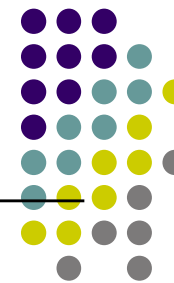


(b)

图6.7 右边信号及其收敛域



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



- 性质5: 如果 $x(t)$ 是左边信号, 且 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域一定在最左边极点的左边。

左边信号是指  $t > T_1$  时,  $x(t) = 0$  的信号。

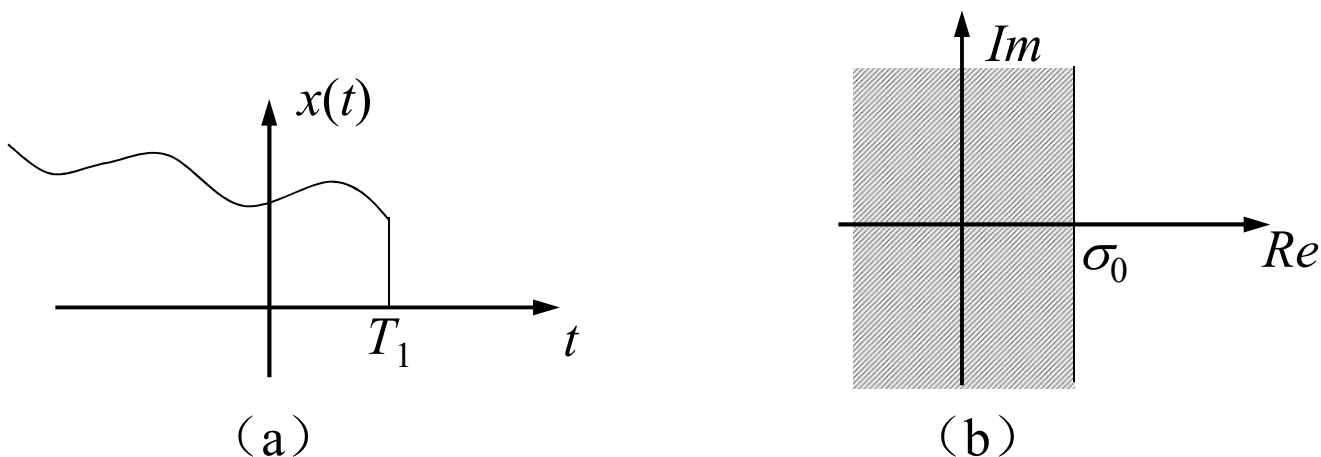
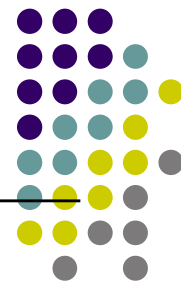


图6-8 左边信号及其收敛域



## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



- 性质6: 如果 $x(t)$ 是双边信号, 且 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域一定是由 $S$ 平面的一条带状域所组成。

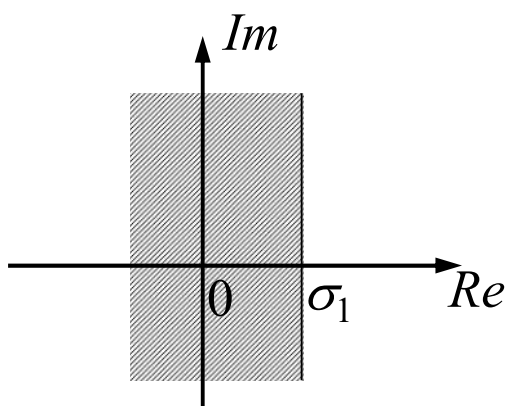
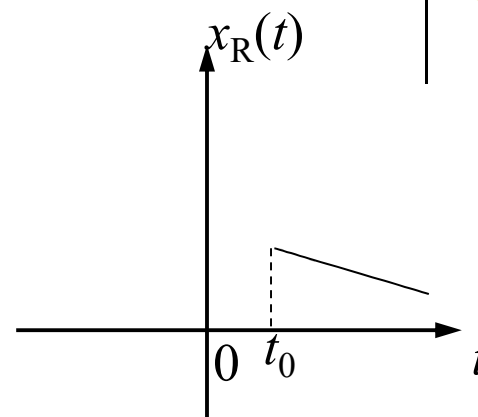
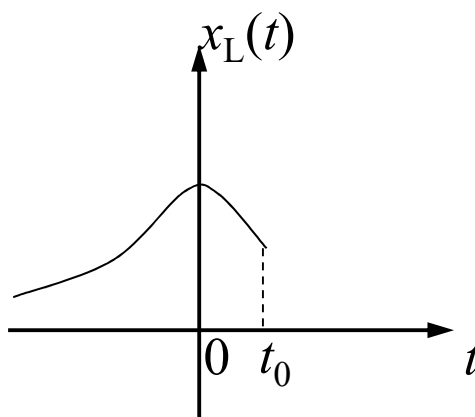
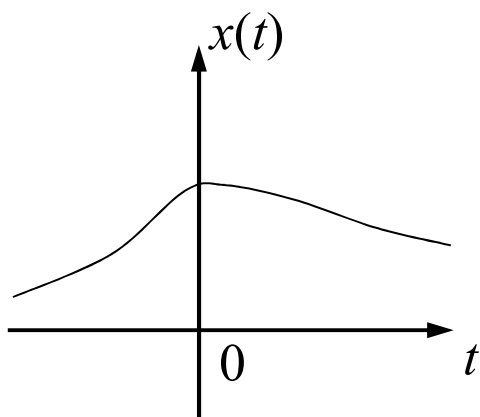
选取任意时间 $t_0$ 将它分成一个左边信号 $x_1(t)$ 和一个右边信号 $x_2(t)$ 之和, 如图所示。由性质4和性质5,  $x_1(t)$ 拉氏变换 $X_1(s)$ 的收敛域:  $\text{Re}\{s\} < \sigma_1$ ; 而 $x_2(t)$ 拉氏变换 $X_2(s)$ 的收敛域:  $\text{Re}\{s\} > \sigma_2$

由于 $x(t)$ 的拉氏变换存在, 故其收敛域一定为 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 收敛域的公共部分。

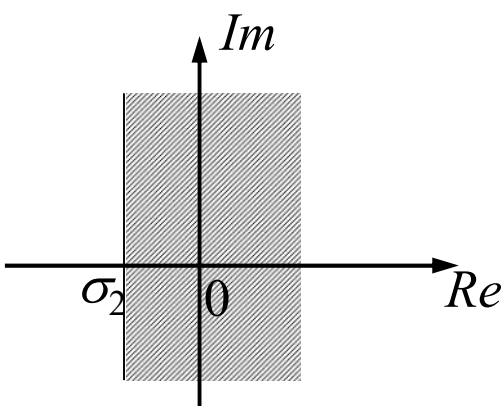
如果 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 无公共部分, 就意味着的 $x(t)$ 拉氏变换不存在(不收敛)。



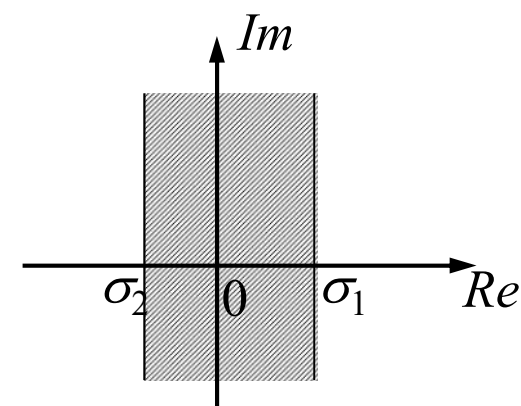
## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



(a)



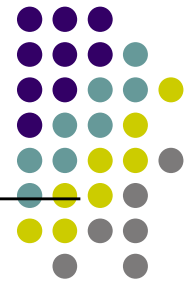
(b)



(c)



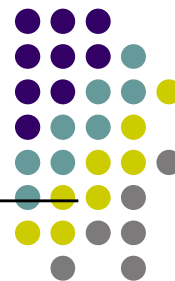
## 6.1.4 时域特性与拉氏变换收敛域的关系



- 性质7：如果 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是有理函数，则它的收敛域的边界由极点限定，或延伸到无穷远，且它的收敛域内不包含任何极点

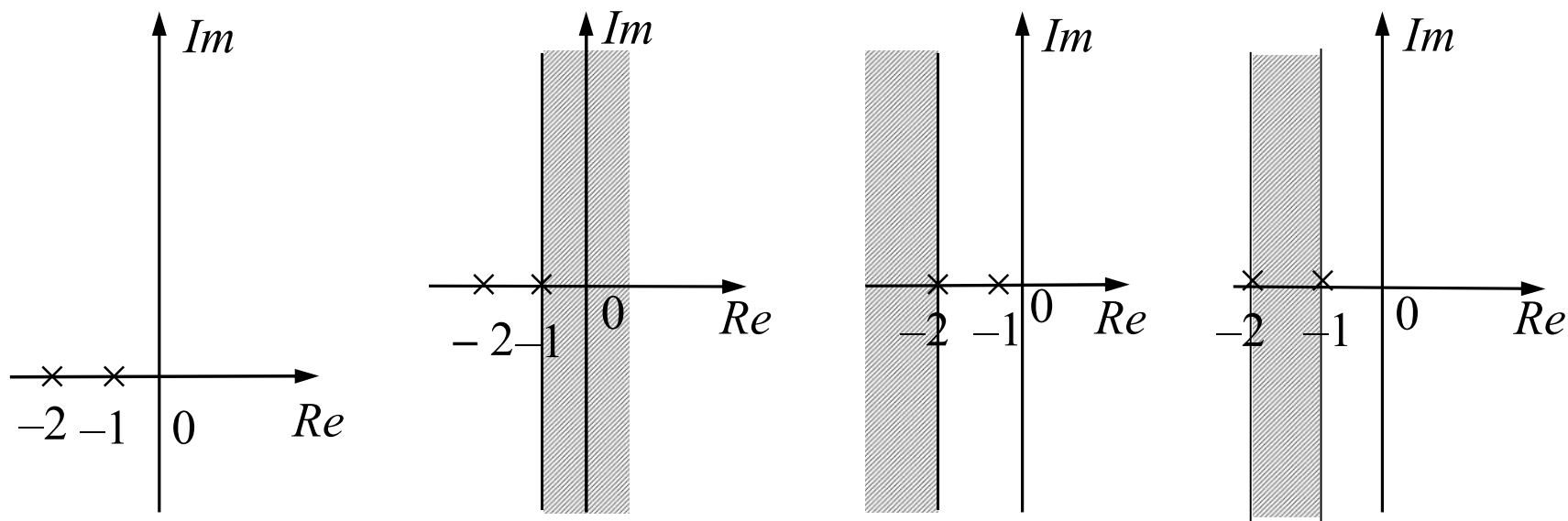


## 例6.4



【例6.4】设拉氏变换  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ，试画出该变换

式的零极点图及其收敛域的几种可能情况，见图。



(a)  $X(s)$  的零极点图 (b) 右边信号的ROC (c) 左边信号的ROC (d) 双边信号的ROC



## § 6.0 引言

## § 6.1 拉普拉斯变换

## § 6.2 常用信号的拉氏变换对

## § 6.3 双边拉氏变换的性质

## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

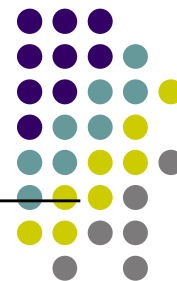
## § 6.5 拉氏反变换

## § 6.6 单边拉氏变换及性质

## § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.2 常用信号的拉氏变换对



- 1. 阶跃信号 $u(t)$

$$L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

- 2. 指数信号 $e^{-at}u(t)$

$$L\{e^{-at}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = -\left. \frac{e^{-(a+s)t}}{s+a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{a+s}, \quad \operatorname{Re}\{S\} > -a$$





## 6.2 常用信号的拉氏变换对



- 3. 冲激信号 $\delta(t)$

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

收敛域为整个 $S$ 平面

如果冲激出现在时刻 ( $t_0 > 0$ )，则有

$$L\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$$



## 6.2 常用信号的拉氏变换对



- 4.  $t^n$  ( $n$ 是正整数)

$$L\{t^n u(t)\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

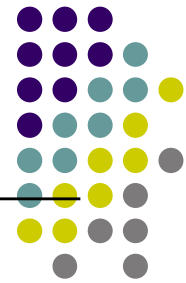
用分部积方法，得，

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = -\frac{t^n}{s} e^{-st} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$L\{t^n \cdot u(t)\} = \frac{n}{s} L\{t^{n-1} \cdot u(t)\}$$



## 6.2 常用信号的拉氏变换对



$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } L\{t \cdot u(t)\} = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } L\{t^2 \cdot u(t)\} = \frac{2}{s^3}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

依次类推, 可得

$$L\{t^n \cdot u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$



## 6.2 常用信号的拉氏变换对



• 5.

$$L\{\sin \omega_0 t \cdot u(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$L\{\cos \omega_0 t \cdot u(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

• 6.

$$L\{[e^{-at} \sin \omega_0 t]u(t)\} = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$L\{[e^{-at} \cos \omega_0 t]u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$



## § 6.0 引言

## § 6.1 拉普拉斯变换

## § 6.2 常用信号的拉氏变换对

## § 6.3 双边拉氏变换的性质

## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

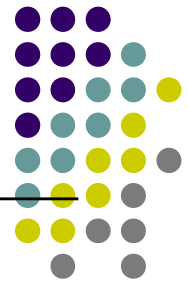
## § 6.5 拉氏反变换

## § 6.6 单边拉氏变换及性质

## § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.3 双边拉氏变换的性质



### 1. 线性

若  $L\{x_1(t)\} = X_1(s)$ ,  $ROC = R_1$

$L\{x_2(t)\} = X_2(s)$ ,  $ROC = R_2$

则  $L\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} = AX_1(s) + BX_2(s)$ ,  $ROC$ 至少:  $R_1 \cap R_2$

式中 $A$ ,  $B$ 为常数, 符号  $R_1 \cap R_2$  表示 $R_1$ 与 $R_2$ 的交集。

当 $AX_1(s)$ 和 $BX_2(s)$ 相加过程中发生零极点相抵消时, 则 $AX_1(s)+BX_2(s)$  的收敛域还可能扩大。



## 例6.5



【例6.5】已知：

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{1+s} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

求  $L\{x_1(t) - x_2(t)\}$

解：

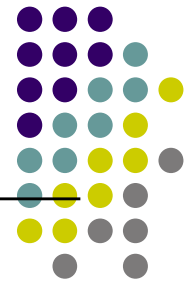
$$X(s) = L\{x_1(t) - x_2(t)\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

本例说明，由于零点、极点相消，故收敛域扩大。



## 6.3 双边拉氏变换的性质



### 2. 时域平移性质

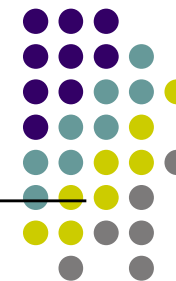
$$\text{若 } L\{x(t)\} = X(s), \quad ROC = R$$

$$\text{则 } L\{x(t - t_0)\} = e^{-st_0} X(s), \quad ROC = R$$





## 例6.6



【例6.6】求 $u(t-1)$ 的拉氏变换

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$L\{u(t-1)\} = L\{u(t)\}e^{-s} = \frac{1}{s}e^{-s}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

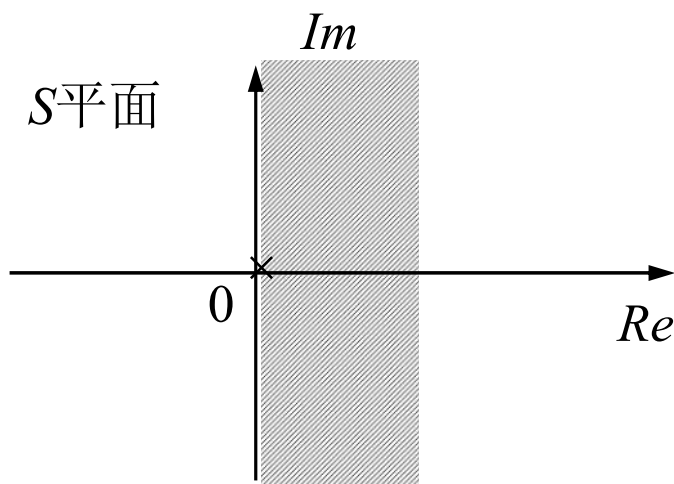
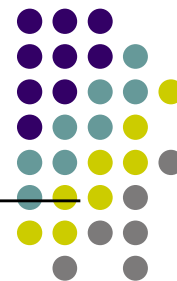


图6-12 例6.6的ROC



## 6.3 双边拉氏变换的性质



### 3. S域平移性质

若  $L\{x(t)\} = X(s)$ ,  $ROC = R$

则  $L\{x(t)e^{at}\} = X(s-a)$ ,  $ROC = R_1 = R + \text{Re}\{a\}$

时间函数 $x(t)$ 乘以 $e^{at}$ 后的 $ROC$ 是原信号 $X(s)$ 的 $ROC$ 在 $s$ 域内平移 $\text{Re}\{a\}$ 。因为 $X(s-a)$ 的收敛域是 $X(s)$ 的收敛域平移一个 $\text{Re}\{a\}$ 。

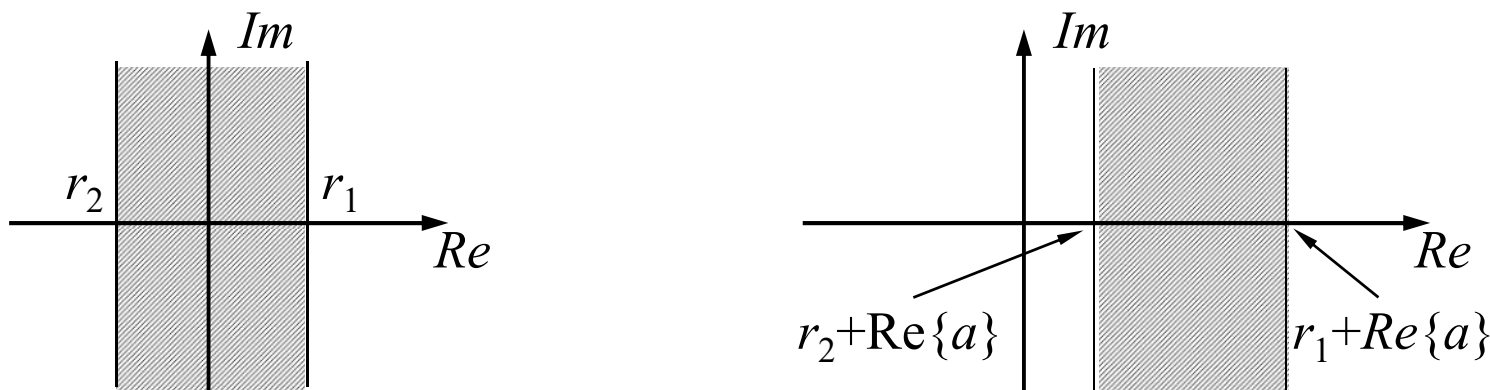
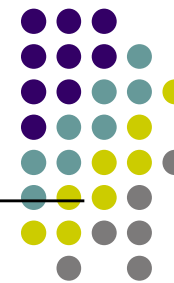


图6-13 S域平移的图解说明



## 例6.7



【例6.7】求  $e^{-at} \sin \omega t u(t)$  和  $e^{-at} \cos \omega t u(t)$  的拉氏变换。

解：

$$L\{\sin \omega t u(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

由S域平移定理

$$L\{e^{-at} \sin \omega t u(t)\} = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

同理可得：

$$L\{e^{-at} \cos \omega t u(t)\} = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$



## 4. 尺度变换特性



若  $L\{x(t)\} = X(s)$ ,  $ROC = R$

则  $L\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ ,  $ROC = R_1 = R \cdot a$

对于  $a > 1$ ,  $X(s)$  的  $ROC$  要扩大  $a$  的倍数。

若  $a$  为负,  $ROC$  要受到一个反褶再加一个尺寸变换。



## 4. 尺度变换特性

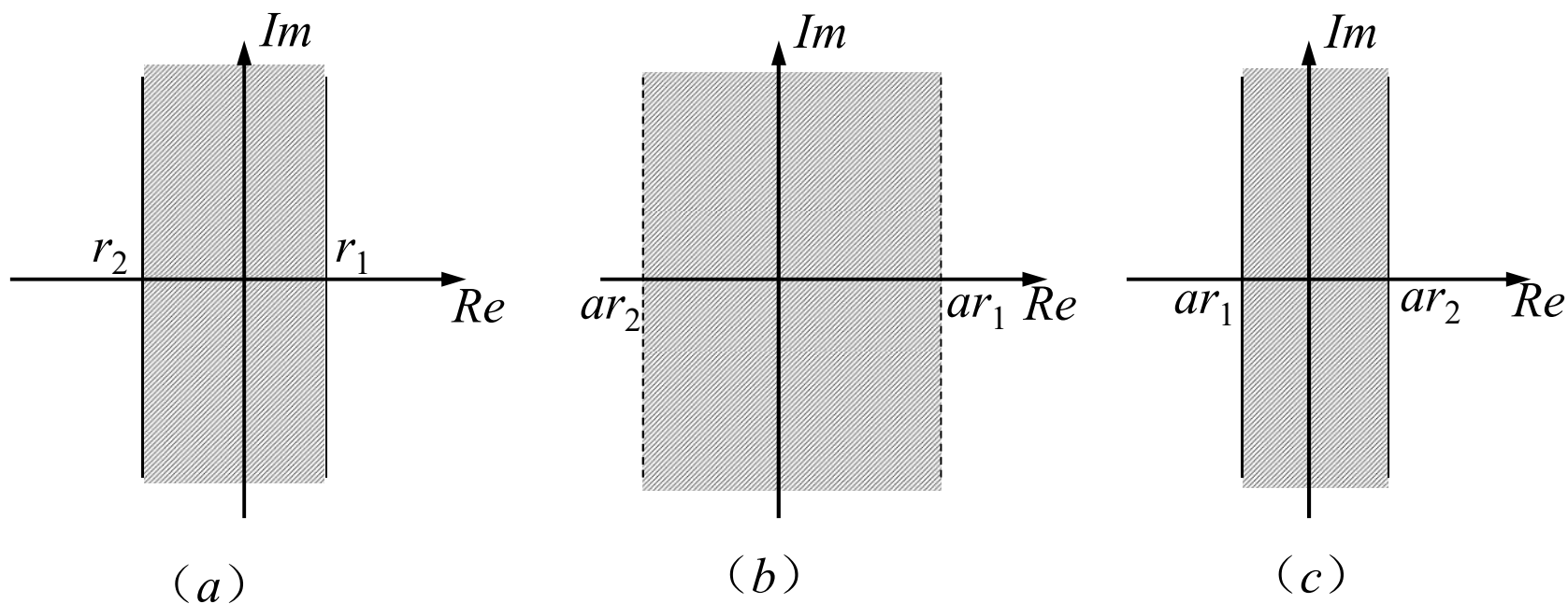
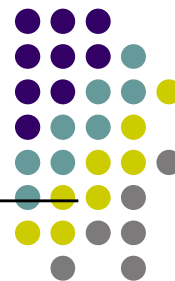


图6-14 时域尺寸变换在ROC上的变化



## 5. 时域微分



若  $L\{x(t)\} = X(s)$ ,  $ROC$  包括  $R$

则  $L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s)$ ,  $ROC$  包括  $R$

将反变换式两边对  $t$  微分, 就可得到这个性质。即

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st} ds$$

如果  $X(s)$  中有  $s=0$  的一阶极点, 被乘以  $s$  抵消, 则  $sX(s)$  的  $ROC$  可能比  $R$  大。

例如, 若  $x(t)=u(t)$ , 则  $X(s)=\frac{1}{s}$ ,  $ROC = \text{Re}\{s\} > 0$ ,

而  $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ , 其拉氏变换为  $L\{\delta(t)\} = 1$ ,  $ROC$  为整个  $S$  平面。



## 6. S域微分



若  $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ ,  $ROC = R$

则  $-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$ ,  $ROC = R$

对拉氏变换定义式两边对 $s$ 微分可得:

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} - (t)x(t)e^{-st} dt$$

可见,  $-tx(t)$ 的拉氏变换就是  $\frac{dX(s)}{ds}$



## 例6.8



【例6.8】求  $f(t) = te^{-at}u(t)$  的拉氏变换。

解：由【例6.1】可知：

$$L\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$L\{te^{-at}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

若重复上式运用，可得

$$L\left\{\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^3}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$





## 例6.8

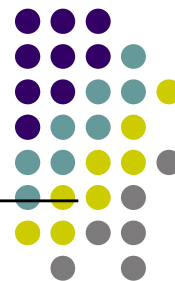


更为一般的关系是：

$$L\left\{\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$



## 7. 卷积性质



若  $L\{x_1(t)\} = X_1(s)$ ,  $ROC = R_1$

$L\{x_2(t)\} = X_2(s)$ ,  $ROC = R_2$

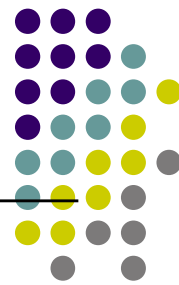
则  $L[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s)X_2(s)$ ,  $ROC$  包括  $R_1 \cap R_2$

如果有零极点相抵消, 则收敛域也可能比交集大。

如同傅里叶变换的卷积性质一样, 利用拉氏变换的卷积性质, 可以变时域的卷积运算为  $S$  域的代数运算, 它在 LTI 系统分析中起着很重要的作用。



## 8. 时域积分



若  $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$  ,  $ROC=R$

则  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$  ,  $ROC$  包含  $R \cap \{\operatorname{Re}\{s\} > 0\}$

因为

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

根据卷积性质有

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$$



## 9. 初值和终值定理



若 $t < 0$ ,  $x(t) = 0$ , 且在 $t = 0$ 时,  $x(t)$ 不包含冲激或者高阶奇异函数, 在这些限制下, 可以直接从拉普拉斯变换式中计算出 $x(t)$ 的初值和 $x(t)$ 的终值。

初值定理  $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

终值定理  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

终值定理表明, 信号 $x(t)$ 在时域中的终值, 可以通过在 $S$ 域中, 将 $X(s)$ 乘以 $s$ 后, 再取 $s$ 趋于零的极限得到。但在应用这个定理时, 必须保证  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  存在, 这个条件就意味着在 $X(s)$ 的极点必定是在 $s$ 平面的左半平面。



## § 6.0 引言

## § 6.1 拉普拉斯变换

## § 6.2 常用信号的拉氏变换对

## § 6.3 双边拉氏变换的性质

## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

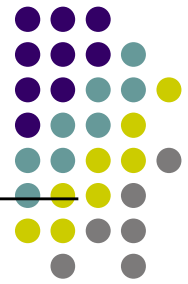
## § 6.5 拉氏反变换

## § 6.6 单边拉氏变换及性质

## § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换



### 1. 周期信号的拉氏变换

这里所指的周期信号是指仅在 $t>0$ 时存在的单边周期信号 $x(t)$ ，而 $t<0$ 时， $x(t)=0$ 。

设周期信号的周期为 $T$ ，根据单边周期信号 $x(t)$ 的定义应有：

$$x(t)=x(t-T), \quad t>T$$

第一个周期的时间函数用 $x_1(t)$ 表示，其拉氏变换用 $X_1(s)$ 表示。



## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换



$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^T x(t)e^{-st} dt + \int_T^{2T} x(t)e^{-st} dt \\ &\quad + \int_{2T}^{3T} x(t)e^{-st} dt + \cdots + \int_{nT}^{(n+1)T} x(t)e^{-st} dt + \cdots \\ &= X_1(s) + X_1(s)e^{-ST} + X_1(s)e^{-2ST} + \cdots + X_1(s)e^{-nST} + \cdots \\ &= X_1(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nST} \end{aligned}$$

当  $\text{Re}\{s\} > 0$  时，上式中的几何级数是收敛的，可得

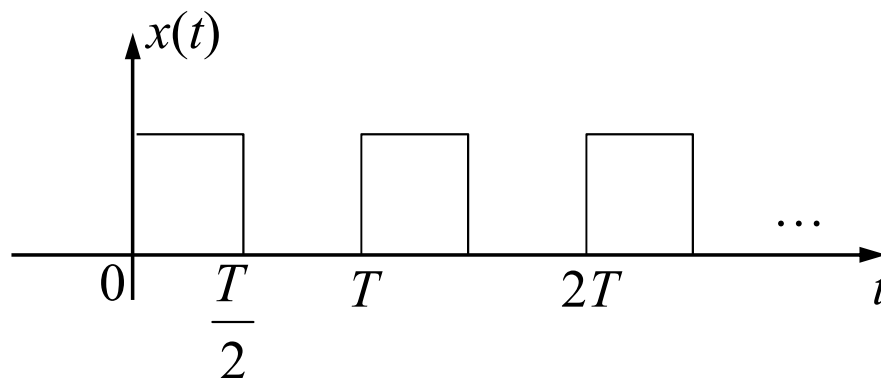
$$X(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}} = X_1(s) \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$



## 例6.9



【例6.9】求图6.15所示单边周期矩形脉冲的拉氏变换



解：第一个周期的拉氏变换为

$$X_1(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-\frac{T}{2}s})$$

$$X(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-\frac{T}{2}s}) \frac{1}{1 - e^{-sT}} = \frac{1}{s(1 + e^{\frac{T}{2}s})}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$





## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换



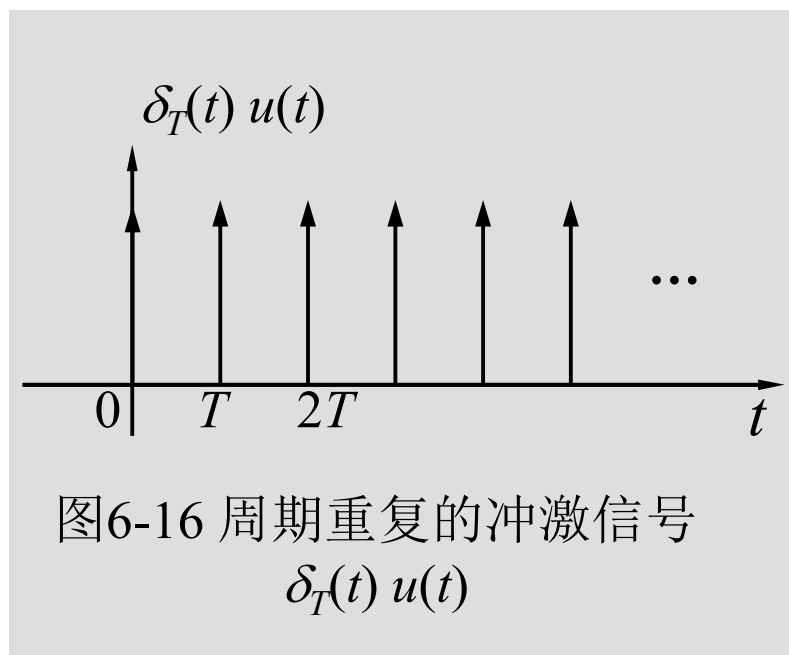
### 2. 抽样信号的拉氏变换

为求得任一抽样信号拉氏变换的一般形式，先求  $\delta_T(t) \cdot u(t)$  的拉氏变换。

$$\delta_T(t) \cdot u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

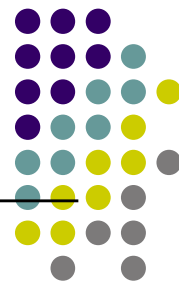
$$L\{\delta(t) \cdot u(t)\} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$





## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换



若将连续信号 $x(t)$ 以时间间隔 $T$ 进行冲激抽样，则被抽样后信号的表示式为

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) \cdot u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

它的拉氏变换为

$$L[x_s(t)] = \int_0^{\infty} x(nT) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) (e^{-sT})^n$$

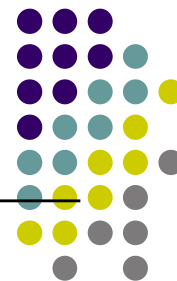
如令 $e^{sT} = z$ ， $z$ 为复数，则有

$$L[x_s(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

即被抽样后信号的拉氏变换可表示为 $z$ 的幂级数，在第九章中将会看到，上式正是一个离散时间信号 $x[n]$ 的 $z$ 变换的定义式。



## 例6.10

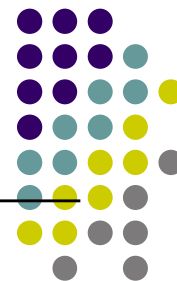


【例6.10】求指数抽样序列的拉氏变换

解：

$$x_s(t) = e^{-aTn} \delta_T(t)$$

$$L\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-aTn} e^{-nsT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT} = \frac{1}{1 + e^{-(a+s)T}}$$



## § 6.0 引言

## § 6.1 拉普拉斯变换

## § 6.2 常用信号的拉氏变换对

## § 6.3 双边拉氏变换的性质

## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

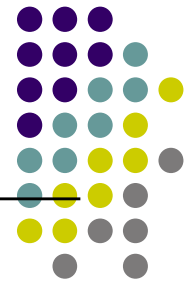
## § 6.5 拉氏反变换

## § 6.6 单边拉氏变换及性质

## § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.5 拉氏反变换

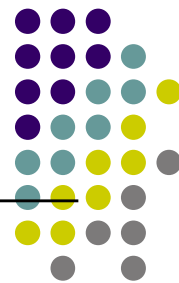


仅讨论可以用有理函数表示的拉氏函数的反变换，即

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n}$$



## 6.5 拉氏反变换



### 1. 分母多项式有 $n$ 个互异实根

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{a_n(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

展开成部分分式

$$X(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}$$

其中，各系数  $k_i = X(s)(s - p_i)|_{s = p_i}$



## 例6.11



【例6.11】 求下列函数的反变换

$$X(s) = \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

解：将 $X(s)$ 写成部分分式展开形式

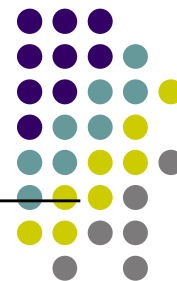
$$X(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+3} \quad \text{分别求出 } c_1, c_2, c_3$$

$$c_1 = sX(s)|_{s=0} = \frac{10 \times 2 \times 5}{1 \times 3} = \frac{100}{3} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$c_2 = (s+1)X(s)|_{s=-1} = \frac{10 \times (-1+2) \times (-1+5)}{(-1) \times (-1+3)} = -20 \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



## 例6.11



$$c_3 = (s + 3)X(s) \big|_{s=-3} = \frac{10 \times (-3 + 2) \times (-3 + 5)}{(-3) \times (-3 + 1)} = -\frac{10}{3} \quad \text{Re}\{s\} > -3$$

$$X(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

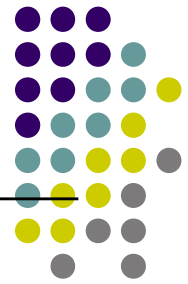
因为  $\text{Re}\{s\} > 0$ ，原信号为右边信号。根据基本信号的拉氏变换对，可求得

$$x(t) = \left( \frac{100}{3} - 20e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t} \right) \cdot u(t)$$





## 例6.11



在以上的讨论中，假定 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 表示式中 $N(s)$ 的阶次低于 $D(s)$ 的阶次，即 $m < n$ 。如果不满足此条件，不可以按上面方法展开成部分分式。对于 $m \geq n$ 的情况，可先用长除法将分子中的高次项提出，余下的部分满足 $m < n$ ，仍按以上方法分析。



## 例6.12



【例6.12】求下列函数的反变换

$$X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

解：用分子除以分母（长除法）得到

$$X(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

式中最后一项满足 $m < n$ 的要求，展开成部分分式

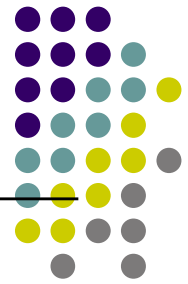
$$X(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

根据基本信号的拉氏变换对，可求得

$$x(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t}) \cdot u(t)$$



# Matlab: 部分分式展开



【例6-27】用Matlab求出的原函数

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

解: %program: Inverse Laplace transform by partial- fraction expansion

format rat; % 将分数以近似的小整数之比的形式显示

b=[1 2];

a=[1 4 3 0];

[r,p]=residue(b,a);

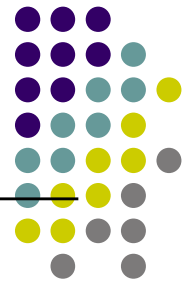
运行结果为（r和p均为列向量）

$$r' = -1/6 \quad -1/2 \quad 2/3$$

$$p' = -3 \quad -1 \quad 0$$



# Matlab: 部分分式展开



即得 $X(s)$ 的部分分式展开式

$$X(s) = \frac{2/3}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3}$$

于是可得

$$x(t) = \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$



## 6.5 拉氏反变换



### 2. 分母多项式中包含有重根

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)^k D_1(s)}$$

式中 $p_1$ 为 $X(s)$ 的 $k$ 阶极点。

$$\text{展开为 } X(s) = \frac{k_{11}}{(s - p_1)^k} + \frac{k_{12}}{(s - p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{k_{1k}}{(s - p_1)} + \frac{B(s)}{D_1(s)}$$

其中 $\frac{B(s)}{D_1(s)}$ 与极点 $p_1$ 无关。



## 例6.13



【例6.13】求以下函数的拉氏反变换

$$X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

解：将  $X(s)$  写成展开式

$$X(s) = \frac{k_{11}}{(s+1)^3} + \frac{k_{12}}{(s+1)^2} + \frac{k_{13}}{(s+1)} + \frac{k_2}{s}$$

$$k_2 = sX(s)|_{s=0} = -2$$

$$\text{令 } X_1(s) = (s+1)^3 X(s) = \frac{s-2}{s}$$



## 例6.13



$$k_{11} = \left. \frac{s-2}{s} \right|_{s=-1} = 3 \quad k_{12} = \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{s-2}{s} \right) \right|_{s=-1} = 2$$

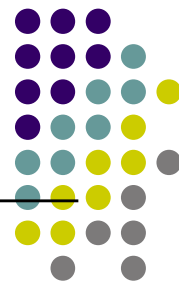
$$k_{13} = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2((s-2)/s)}{ds^2} \right|_{s=-1} = 2$$

于是 
$$X(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s}$$

$$x(t) = \left( \frac{3}{2} t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \right) \cdot u(t)$$



## 6.5 拉氏反变换



### 3. 分母多项式中包含共轭复数极点

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D_1(s)(s^2 + as + b)} = \frac{N(s)}{D_1(s)(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}$$

式中，共轭极点出现在  $-\alpha \pm j\beta$  处； $D_1(s)$  表示分母多项式中的其余部分。

引入中间函数  $X_1(s) = \frac{N(s)}{D_1(s)}$

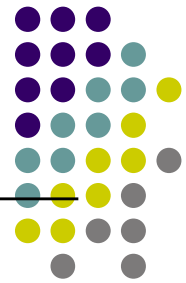
可得

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} = \frac{k_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{k_2}{s + \alpha + j\beta} + \dots$$





## 6.5 拉氏反变换



$$k_1 = (s + \alpha - j\beta)X(s) \Big|_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{X_1(-\alpha + j\beta)}{2j\beta}$$

$$k_2 = (s + \alpha + j\beta)X_1(s) \Big|_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{X_1(-\alpha - j\beta)}{-2j\beta}$$

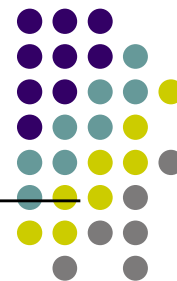
可以看出 $k_1$ 和 $k_2$ 呈共轭关系  $k_2 = k_1^*$

共轭极点所对应的信号部分为:  $(k_1 e^{-(\alpha-j\beta)t} + k_2 e^{-(\alpha+j\beta)t}) \cdot u(t)$

另一种比较简单的方法:保留分母中的二次式, 并将它写成相应的余弦或正弦拉氏变换, 然后进行反变换。



## 例6.14



【例6.14】 设  $X(s) = \frac{s+3}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$ ,  $\text{Re}\{s\} > -1$ 。求  $x(t)$

解：将  $X(s)$  展成部分分式

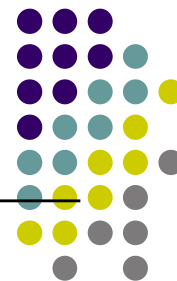
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)} = \frac{s+3}{(s+1)[(s+1)^2+4]} \\ &= \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2s+k_3}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

求得  $k_1 = \frac{1}{2}$

整理得：  $X(s) = \frac{(k_2 + \frac{1}{2})s^2 + (k_2 + k_3 + 1)s + k_3 + \frac{5}{2}}{(s+1)(s^2+2s+5)}$



## 例6.14



用比较系数法可确定  $k_2 = -\frac{1}{2}$  ,  $k_3 = \frac{1}{2}$  , 因此 :

$$X(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{(s+1)^2 + 4}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

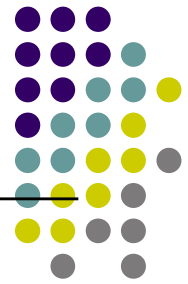
$$\text{Re}\{s\} > -1$$

逐项进行反变换后, 得

$$x(t) = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \cos 2t + \frac{e^{-t}}{2} \sin 2t \right] u(t)$$



## 6.5 拉氏反变换

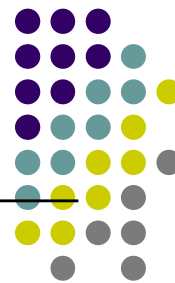


采用部分分式展开的方法来求解。具体步骤如下：

- (1) 用部分分式法将展成低阶项。
- (2) 确定各低阶变换式的收敛域。
- (3) 根据各低阶项及其收敛域，确定它的反变换。一般收敛域左边极点对应的项为右边信号，右边极点对应项则都为左边信号。



## 例6.15



【例6.15】试求拉氏变换  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$  的收敛域分别是图所示的三种情况的反变换。

解：将  $X(s)$  展成部分分式  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

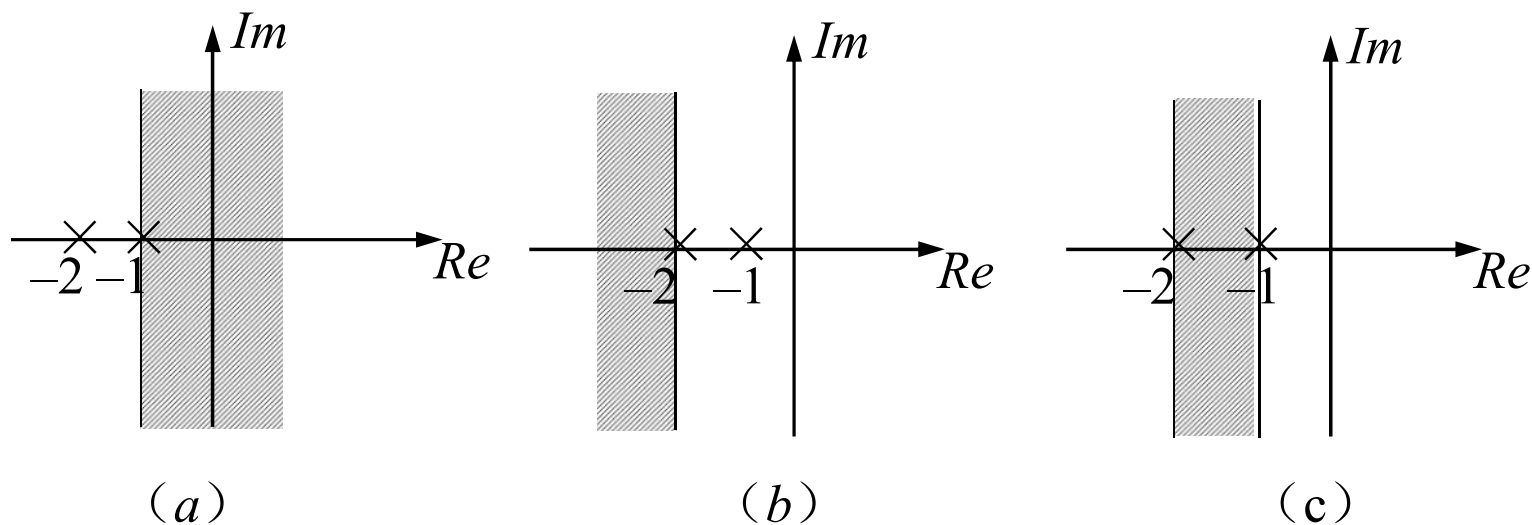
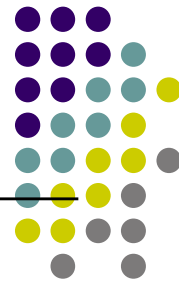


图6.17 例6.15图



## 例6.15



(1)  $\text{Re}\{s\} > -1$

因为各分式的收敛域必定包含  $\text{Re}\{s\} > -1$ ，并以该式的极点为界，因此有

$$\frac{1}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

所以  $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$



## 例6.15



$$(2) \operatorname{Re}\{s\} < -2$$

各分式的收敛域应包含  $\operatorname{Re}\{s\} < -2$ ，并以该式的极点为界，故有

$$\frac{1}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} < -1$$

$$\frac{1}{s+2} \quad \operatorname{Re}\{s\} < -2$$

$$\text{所以 } x(t) = (-e^{-t} - e^{-2t})u(-t)$$



## 例6.15



$$(3) \quad -1 < \operatorname{Re}\{s\} < -2$$

各分式的收敛域应包含  $-2 < \operatorname{Re}\{s\} < -1$ ，并以该式的极点为界，故有：

$$\frac{1}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} < -1$$

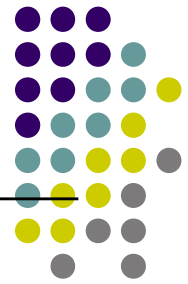
$$\frac{1}{s+2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -2$$

$$\text{所以} \quad x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$





## Matlab: 计算拉氏正反变换



【例6-26】用laplace 和ilaplace求

(1)  $x(t) = e^{-t} \sin(at)u(t)$  正变换;

(2)  $X(s) = \frac{s^2}{s^2+1}, \text{Re}\{s\} > 0$  反变换。

解: (1) `% program: laplace transform using laplace function`

`x=sym('exp(-t)*sin(a*t)');`

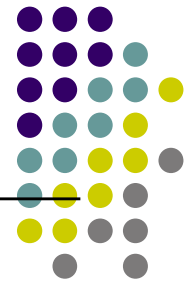
`X=laplace(x);`

运行结果为  $X = a / ((s + 1)^2 + a^2)$

即有  $L\{e^{-t} \sin(at)u(t)\} = \frac{a}{(s + 1)^2 + a^2}$



# Matlab: 计算拉氏正反变换



(2)

```
% program: inverse laplace transform using laplace function  
X=sym('s^2/(s^2+1)')  
x=ilaplace(X);
```

运行结果为

$$x = \text{Direct}(t) - \sin(t)$$

即有

$$L\left\{\frac{s^2}{s^2+1}\right\} = \delta(t) - \sin tu(t)$$



## § 6.0 引言

## § 6.1 拉普拉斯变换

## § 6.2 常用信号的拉氏变换对

## § 6.3 双边拉氏变换的性质

## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

## § 6.5 拉氏反变换

## § 6.6 单边拉氏变换及性质

## § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.6 单边拉氏变换及性质



将单边拉氏变换的定义重新写为

$$\tilde{X}(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$x(t) \xleftrightarrow{uL} \tilde{X}(s)$$

我们采用 $0^-$ 系统，书写时用 $0$ ，其含意即为 $0^-$ 。



## 例6.16



【例6.16】求信号  $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$  的双边和单边拉氏变换。

解：  $L\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$

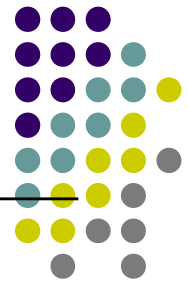
根据时移性质  $L\{e^{-a(t+1)}u(t+1)\} = \frac{e^s}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$

该信号的单边拉氏变换为

$$\begin{aligned} UL\{e^{-at}u(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt \\ &= e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{e^{-a}}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a \end{aligned}$$



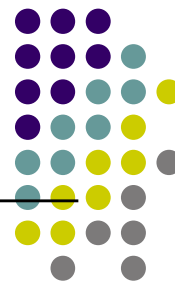
## 6.6 单边拉氏变换及性质



- 单边拉氏变换性质大部分与双边拉氏变换相同，主要区别在于时域微分和时域积分性质。
- 单边拉氏变换的时域微分和时域积分性质，引入了信号的起始值 $x(0^-)$ ,  $x'(0^-)$ ...，当采用复频域分析方法对LTI系统进行分析时，将会自动计入起始条件，使系统响应的求解得以简化。



# 1. 时域微分性质



若  $UL\{x(t)\} = \tilde{X}(s)$

则  $UL\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s\tilde{X}(s) - x(0)$

证明：利用分部积分法，有

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = s\tilde{X}(s) - x(0)$$

类似的有

$$UL\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2\tilde{X}(s) - sx(0) - x'(0)$$



# 1. 时域微分性质



推广到 $x(t)$ 的 $n$ 阶导数的单边拉氏变换，有

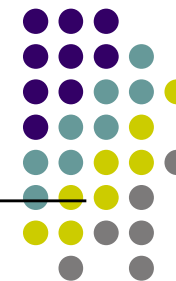
$$UL\left\{\frac{dx^n(t)}{dt^n}\right\} = s^n \tilde{X}(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) \cdots x^{(n-1)}(0)$$

式中  $x^{(k)}(t)$  表示  $x(t)$  的 $n$ 阶导数。上式中  $x(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$  中的 $(0)$ 均指  $0^-$ 时刻。





## 2. 时域积分性质



若  $UL\{x(t)\} = \tilde{X}(s)$

$$\text{则 } UL\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\tilde{X}(s) + \frac{\int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau}{s}$$

式中  $\frac{\int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau}{s}$  记为  $x^{-1}(0^-)$ ，是  $x(t)$  积分式在  $t=0$  的取值。

证明：由于  $UL[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau] = UL[\int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau + \int_0^t x(\tau)d\tau]$

$$\int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau = x^{-1}(0), \text{ 为一常量, 故 } UL[\int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau] = \frac{x^{-1}(0)}{s}$$



## 2. 时域积分性质



第二项可借助分部积分法求得：

$$\begin{aligned} UL[\int_0^t x(\tau) d\tau] &= \int_0^\infty [\int_0^t x(\tau) d\tau] e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t x(\tau) d\tau \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \tilde{X}(s) \end{aligned}$$

所以

$$UL\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{\tilde{X}(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0^-)}{s}$$



### 3. 卷积特性



如 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是单边信号，即当 $t < 0$ 时， $x_1(t) = x_2(t) = 0$ ，

那么有

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow \tilde{X}_1(s) \tilde{X}_2(s)$$

可用于分析一个输入在 $t < 0$ 为零的因果LTI系统。



## § 6.0 引言

## § 6.1 拉普拉斯变换

## § 6.2 常用信号的拉氏变换对

## § 6.3 双边拉氏变换的性质

## § 6.4 周期信号与抽样信号的拉氏变换

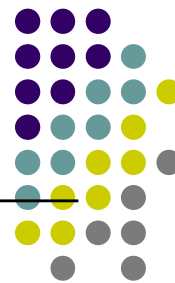
## § 6.5 拉氏反变换

## § 6.6 单边拉氏变换及性质

## § 6.7 连续时间LTI系统的复频域分析



## 6.7.1 系统函数



当 $e^{st}$ 信号激励一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的系统时，它的响应为

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

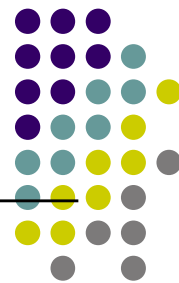
其中， $H(s)$ 为一个复常数，其值与 $s$ 有关，对某一给定的 $s$ 值， $H(s)$ 是与特征函数 $e^{st}$ 有关的特征值。

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

$H(s)$ 与 $h(t)$ 是一对拉氏变换，它表示了系统在复频域的性质。对于稳定系统，当 $\sigma = 0$ 时， $H(s)$ 就是 $H(j\omega)$ ，即频率域的频率响应。我们称 $H(s)$ 为系统函数。



## 6.7.1 系统函数



一个可实现的 $N$ 阶连续时间LTI系统可用起始状态为零的线性常微分方程来表示，即

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}$$

两边进行双边拉氏变换

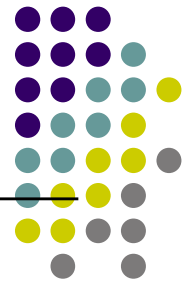
$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{r=0}^M b_r s^r X(s)$$

根据拉氏变换的卷积特性，系统对输入信号的响应在复频域上可表示为  $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$

因此，系统函数的另一种定义，即  $H(S) = \frac{Y_{zs}(S)}{X(S)}$



## 6.7.1 系统函数



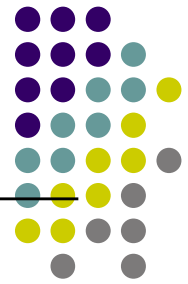
可求得线性常微分方程所表示的LTI系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r s^r}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

该式并没有包括 $H(s)$ 收敛域的说明, 收敛域可以通过其它条件推演出来---稳定性和因果性...。例如如果系统是初始松弛的, 则它是因果的, 其ROC一定是位于最右边极点的右边. 有时也表示了系统的复频域 ( $S$ 域) 特性, LTI系统的许多性质都与 $H(s)$ 零极点在 $S$ 平面上的位置分布有关。



## 6.7.1 系统函数



### 1. 系统函数的零极点与系统的稳定性和因果性

- 因果性：一个因果LTI系统，其收敛域为右半平面；如果系统是反因果的，收敛域为左半平面。相反的结论不一定都成立。
- 稳定性：稳定系统的冲激响应应该是绝对可积的：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

这表明稳定系统的频率响应存在。从而稳定系统的 $H(s)$ 的收敛域应包含 $j\omega$ 轴。

- 因果稳定系统：同时满足因果性和稳定性的系统，称为因果稳定系统。一个因果稳定的有理系统函数，其全部极点都分布在 $S$ 左半平面。





## 例6.17



【例6.17】 已知  $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$   $\text{Re}\{s\} > -1$

利用拉氏变换时移特性和指数信号拉氏变换公式可求得

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$$

上式表示  $-1 < t < 0$  时,  $h(t)$  不等于零, 故不是因果系统。

对一个有理系统函数的系统来说, 系统的因果性就等效于收敛域  $ROC$  位于最右边极点的右半平面。



## 例6.18

【例6.18】 讨论  $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$  的稳定性。

因为没有给出 $ROC$ ，故 $ROC$ 存在几种可能，从而有几种不同的单位冲激响应与上式相联系。

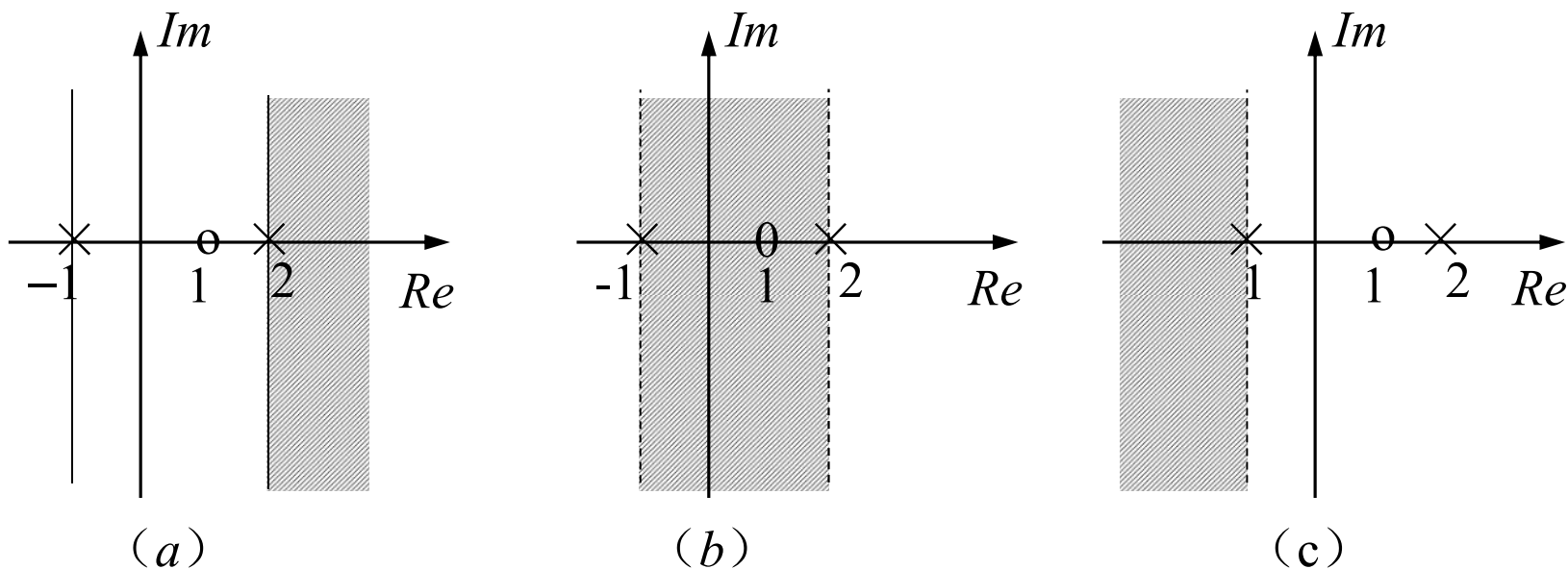


图6-18 例6-18图



## 例6.18



1. 已知系统是因果系统

则 $h(t)$ 为右边信号，故其 $H(s)$ 的 $ROC$ 如图6-18(a)所示

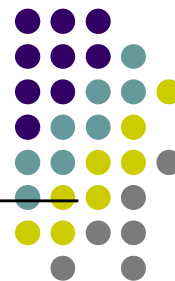
这个 $ROC$ 不包括 $j\omega$ 轴，因此系统不稳定。

从 $h(t)$ 的表达式也可以看出这一点。

$$h(t) = \left( \frac{2}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{3} e^{2t} \right) u(-t)$$



## 例6.18



2. 收敛域如图6-18(b)所示。

其收敛域包括了  $j\omega$  轴，是个稳定系统。

相应的单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

3. 收敛域如图6-18(c)所示。

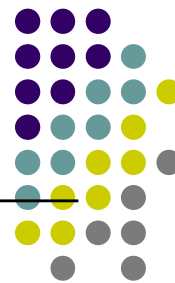
单位冲激响应为

$$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

系统是反因果的，不稳定。



## 6.7.1 系统函数



### 二、系统函数与系统的频率响应

根据系统函数 $H(s)$ 在 $S$ 平面上零点、极点的分布，可在 $S$ 域上求出系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

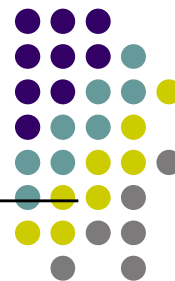
因为

$$H(s) = H_{\infty} \frac{\prod_{i=1}^M \overrightarrow{s - z_i}}{\prod_{j=1}^N \overrightarrow{s - p_j}}$$

$\overrightarrow{s - p_j}$  相当于由极点 $p_j$ 引向某点 $s$ 的一个向量，称为极点矢量；  
 $\overrightarrow{s - z_i}$  相当于由零点 $z_i$ 引向某点 $s$ 的一个矢量，称为零点矢量。



## 6.7.1 系统函数



系统的频率响应为

$$H(j\omega) = H_{\infty} \frac{\prod_{i=1}^M \overrightarrow{j\omega - z_i}}{\prod_{j=1}^N \overrightarrow{j\omega - p_j}}$$

即在 $S$ 平面上 $s$ 沿虚轴移动，就可得到系统的频率响应。

零点矢量  $\overrightarrow{j\omega - z_i} = N_i e^{j\varphi_i}$

极点矢量  $\overrightarrow{j\omega - p_k} = M_j e^{j\theta_j}$

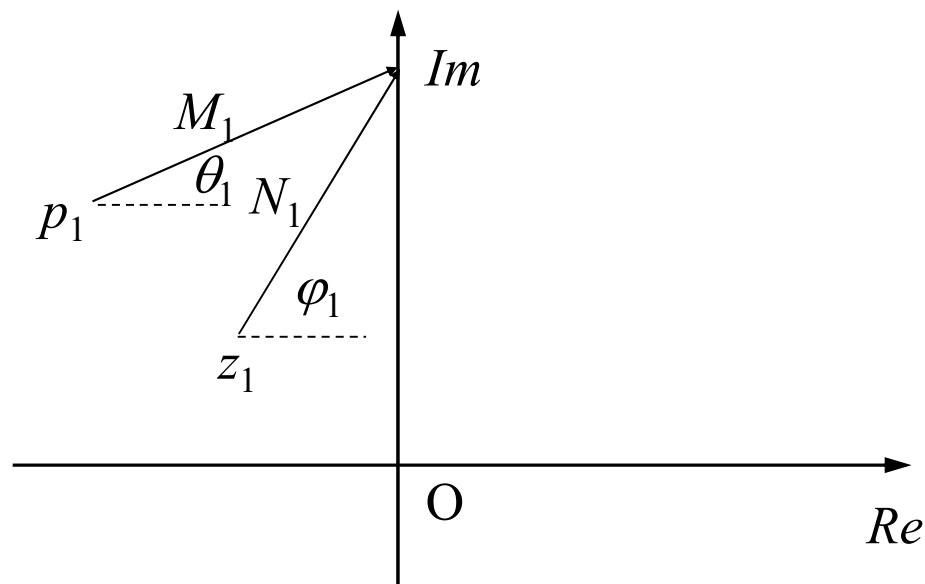
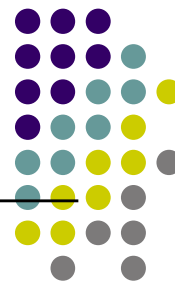


图6.19 零点，极点矢量



## 6.7.1 系统函数



系统的频率响应可以改写为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H_{\infty} \frac{N_1 e^{j\varphi_1} N_2 e^{j\varphi_2} \cdots N_m e^{j\varphi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \cdots M_n e^{j\theta_n}} \\ &= H_{\infty} \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} e^{j[(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]} \\ &= |H(j\omega) e^{j\psi(\omega)}| \end{aligned}$$

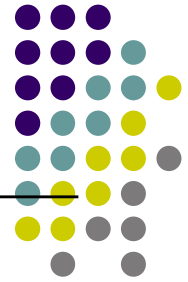
式中  $|H(j\omega)| = H_{\infty} \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n}$

$$\psi(\omega) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

当 $\omega$ 沿虚轴移动时，可画出幅频特性和相频特性。



## 例6.19



【例6.19】某一因果系统的系统函数可写成

$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

观察当 $\omega$ 从0沿虚轴向 $\infty$ 增长时,  $H(j\omega)$ 如何变化。





## 例6.19



1. 当  $\omega=0$ ,  $N_1 = 0$ ,  $M_1 = \frac{1}{RC}$ ,  $\frac{N_1}{M_1} = 0$ , 即  $\psi_1 = \varphi_1 - \theta_1 = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$ 。

2. 当  $\omega = \frac{1}{RC}$  时,  $N_1 = \frac{1}{RC}$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\psi_1 = 45^\circ$ ,  $M_1 = \sqrt{2} / RC$ 。

故  $\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 此点为高通滤波器的截止频率点。

3. 当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $N_1 / M_1 \rightarrow 1$ ,  $V_2 / V_1 = 1$ ,  $\theta_1 \rightarrow 90^\circ$ ,  $\psi_1 \rightarrow 0$ 。



## 例6.19

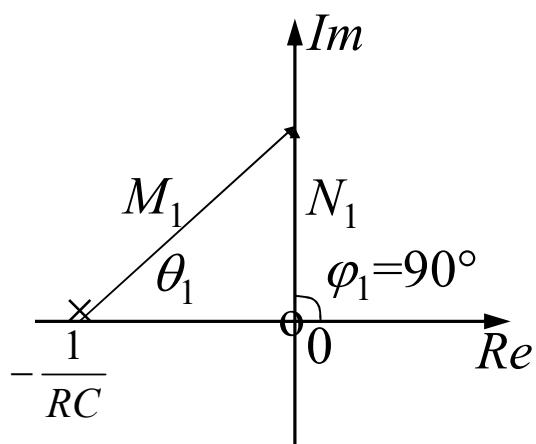


图6-20 系统的零极点图

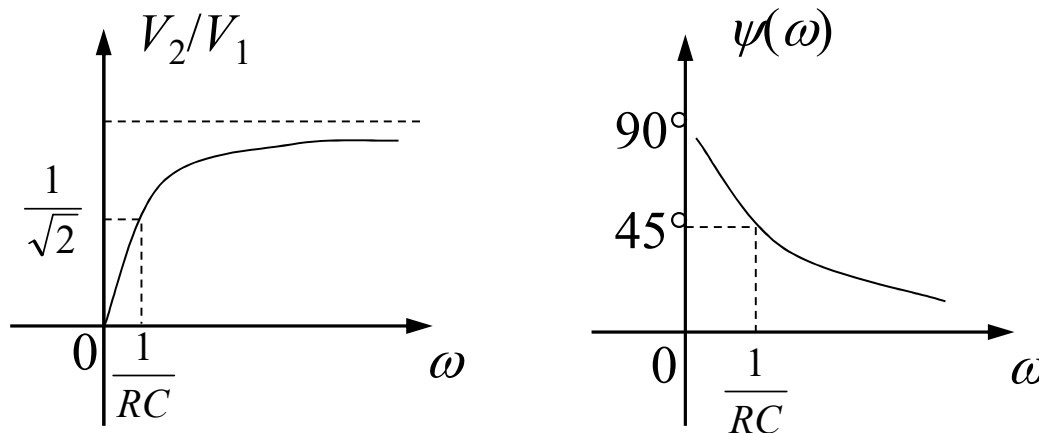
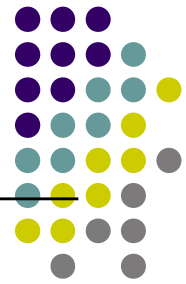


图6-21 系统的幅频、相频特性



# Matlab: 单位冲激响应和幅频特性



【例6-29】已知一稳定系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

用Matlab求出该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和幅频特性 $|H(j\omega)|$   
解：

```
%求系统单位冲激响应和幅频特性，
```

```
b=[1];a=[1 2 2 1];
```

```
sys=tf(b,a);
```

```
poles=roots(b);
```

```
figure(1);pzmap(sys);
```



# Matlab: 单位冲激响应和幅频特性



```
t=0:0.02:10;  
h=impulse(b,a,t);  
figure(2);plot(t,h);  
xlabel('t(s)');ylabel('h(t)');title('impulse');  
[H, w]=freqs(b,a);  
figure(3);plot(w,abs(H));  
xlabel('角频率(rad/s)');ylabel('幅度响应');title('Magnitude Response');
```

运行结果（极点为列向量）

$$poles' = -1.0000 \quad -0.5000-0.8660j \quad -0.50000+0.8660j$$



# Matlab: 单位冲激响应和幅频特性

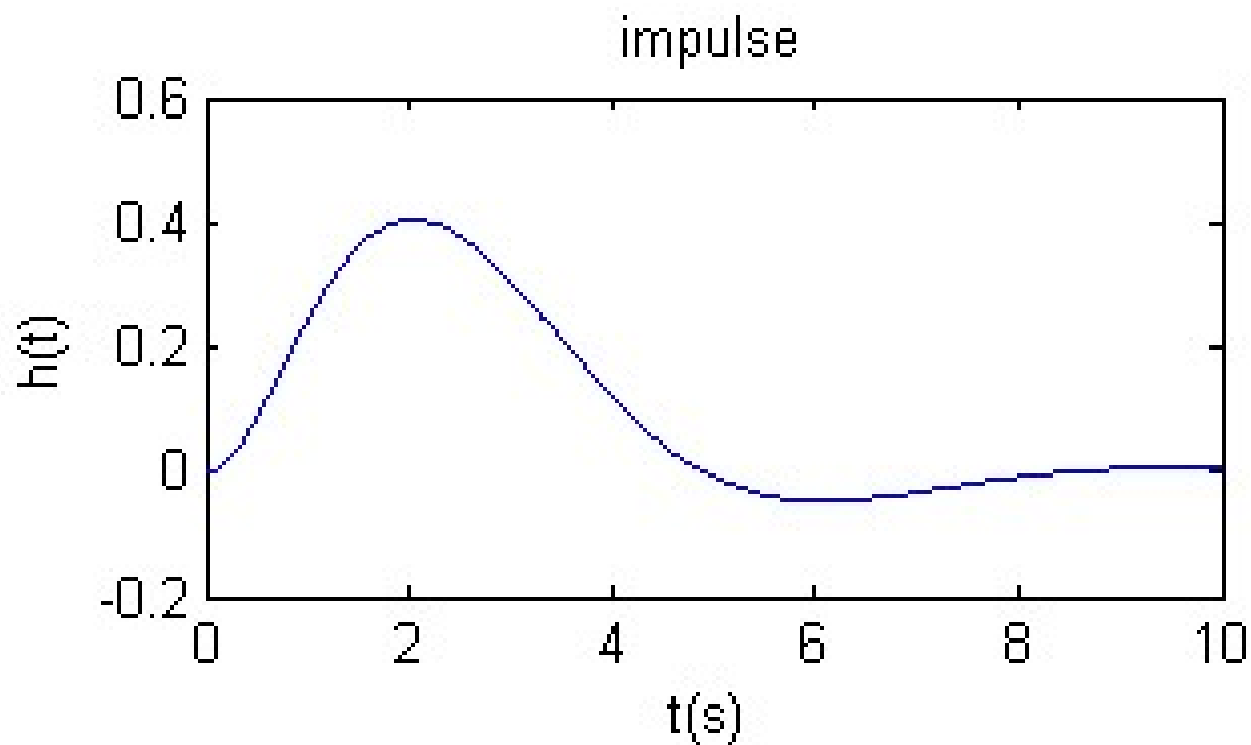


图6-32 (a) 系统单位冲激响应



# Matlab: 单位冲激响应和幅频特性

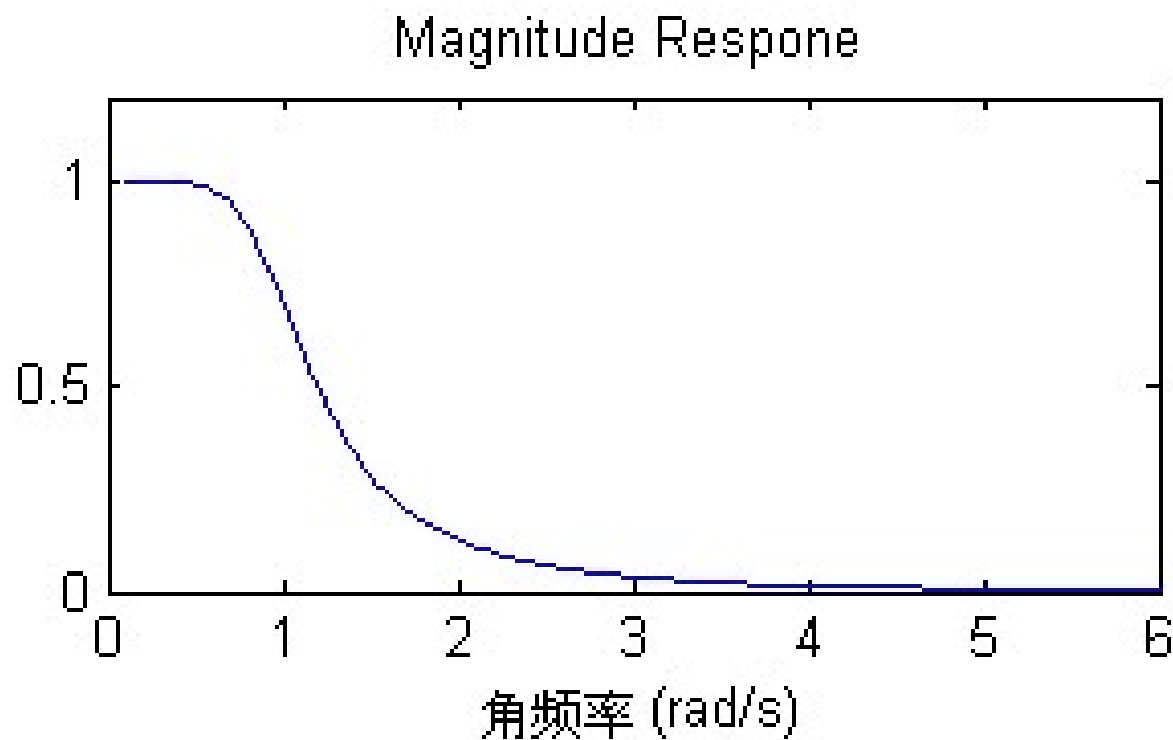


图6-32 (b) 系统幅频特性



# Matlab: 单位冲激响应和幅频特性

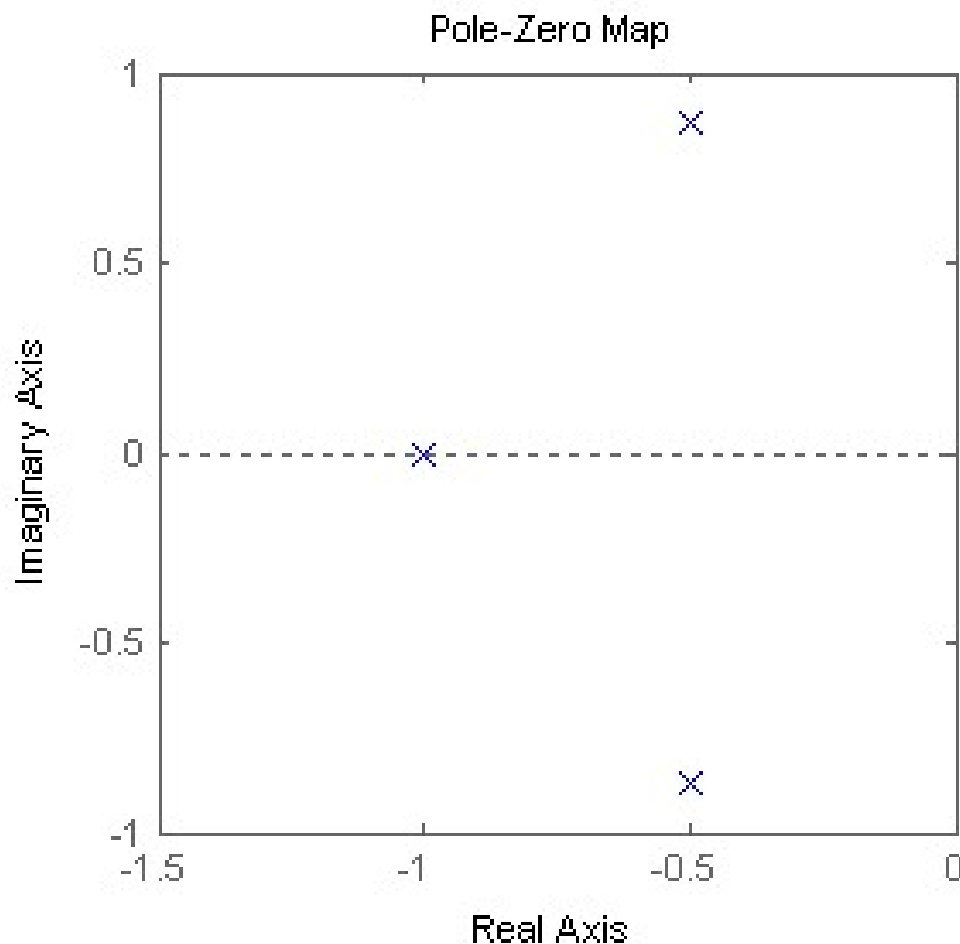
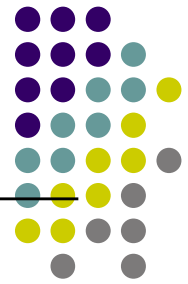


图6-32 (c) 系统极点图



# Matlab: 系统的输出响应



【例6-30】已知一系统的微分方程为：

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 16x$$

求：当  $x(t) = e^{-2t}$  时的输出  $y(t)$ 。

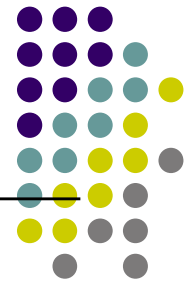
解：由微分方程可写出系统函数

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 16}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$





# Matlab: 系统的输出响应



```
b=[1 2 16 ];  
a=[1 4 8 0];  
sys=tf(b,a);  
t=0:10/300:10;x=exp(-2*t);  
y=lsim(sys,x,t);  
xlabel('t');ylabel('y(t)');title('系统输出');  
plot(t,y);
```



# Matlab: 系统的输出响应

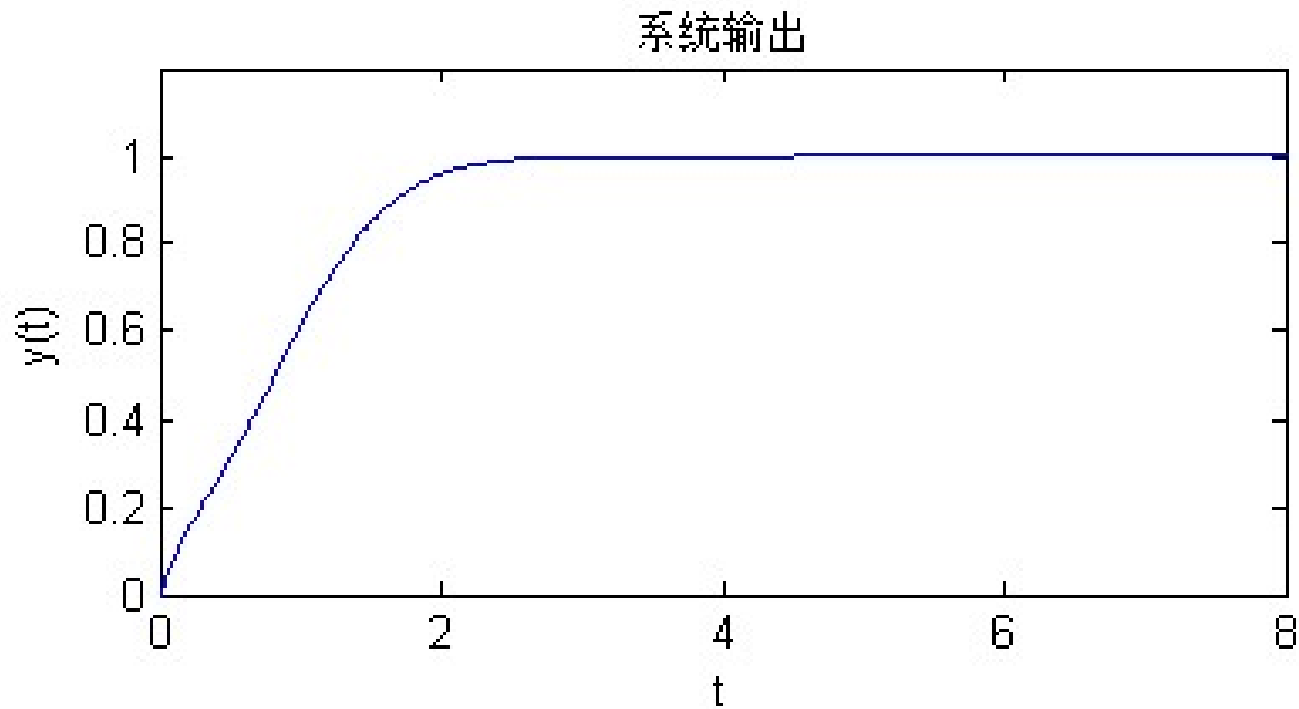
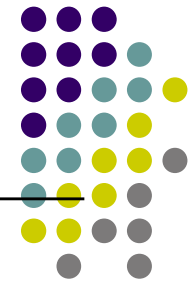
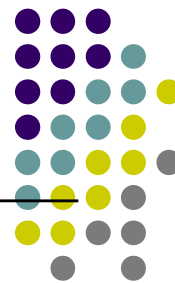


图6-33 输出 $y(t)$  例6-30图



## 6.7.2 S域的元件模型



将电路中的时域元件模型转换为S域模型，再用欧姆定理，基尔霍夫第一，第二定律导出网络的S域模型。

$R$ ， $C$ ， $L$ 上电压降与电流间关系的时域表示式。

$$v_R(t) = Ri_R(t) \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

分别进行单边拉氏变换，得到 $R$ ， $C$ ， $L$ 元件的S域模型：

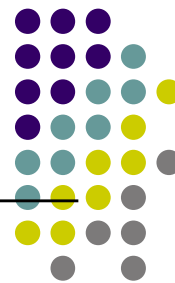
$$\tilde{V}_R(s) = R\tilde{I}_R(s)$$

$$\tilde{V}_L(s) = sL\tilde{I}_L(s) - Li_L(0)$$

$$\tilde{V}_C(s) = \frac{1}{sC} \tilde{I}_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0)$$



## 6.7.2 S域的元件模型



$sL$ 是无储能电感元件的复频域阻抗,  $-Li_L(0^-)$ 对应于时域非零的初始电流  $i(0^-)$  引入的一个恒压源。

$\frac{1}{sC}$ 是无储能电容元件的复频域阻抗,  $\frac{v_C(0^-)}{s}$ 则是电容的非零起始状态电压  $v_C(0^-)$  引入的等效阶跃电压  $v_C(0^-)u(t)$  的拉氏变换式。

相应的元件 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 的S域模型图所示。

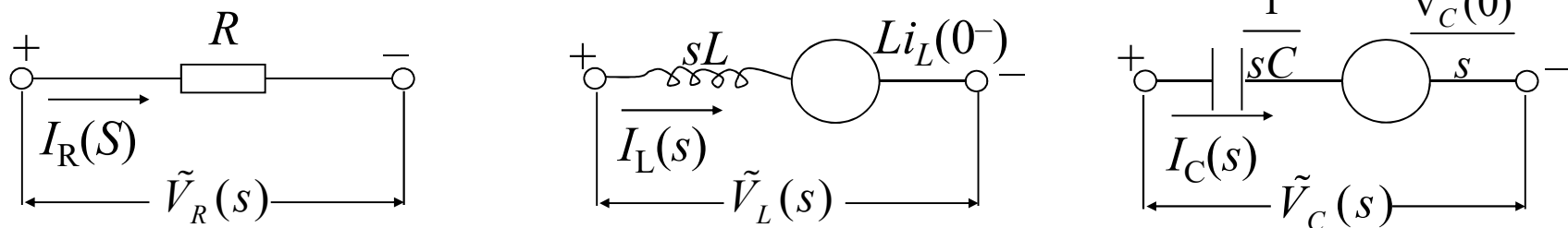
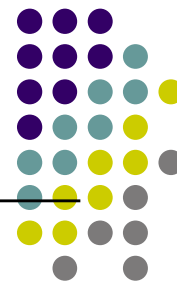


图6-23 元件的电压降与电流关系的S域模型（回路分析）

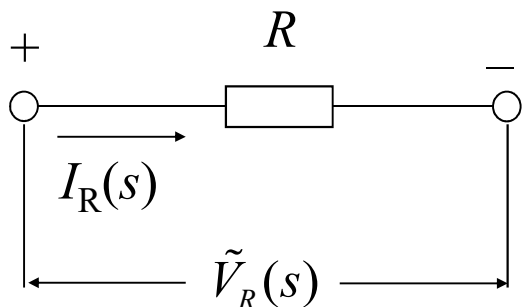


## 6.7.2 S域的元件模型

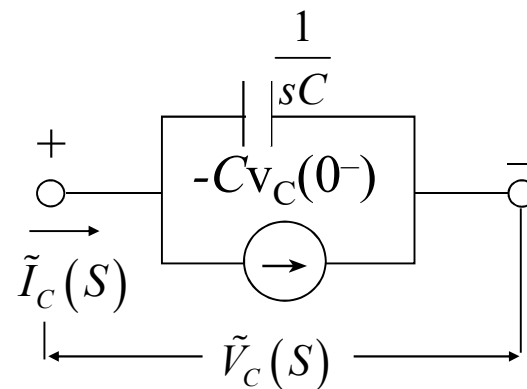


上面所示S域模型并非是唯一的形式，如对电流求解则  
可得到：

$$\tilde{I}_R(s) = \frac{\tilde{V}_R(s)}{R}$$



$$\tilde{I}_C(s) = sC\tilde{V}_C(s) - Cv_C(0^-)$$



$$\tilde{I}_L(s) = \frac{1}{sL}\tilde{V}_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0^-)$$

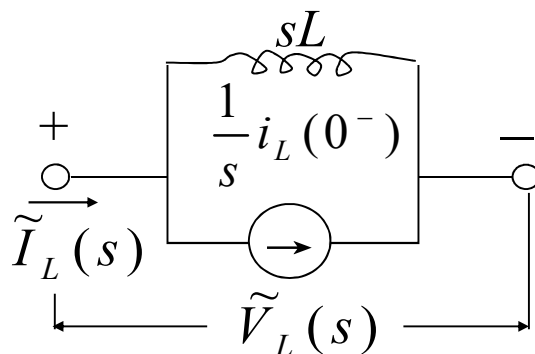
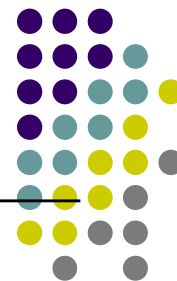


图6-24 S域元件模型（节点分析）



## 例6.20



【例6.20】RLC串联电路如图所示。已知  $R = 2\Omega$ ,  $C = 0.2F$ ,  $L = 1H$ ,  $i(0^-) = 1A$ ,  $v_C(0^-) = 1V$ , 输入  $v_S(t) = tu(t)$ , 求零状态响应  $i_{zs}(t)$ , 零输入响应  $i_{zi}(t)$  以及全响应  $i(t)$  和  $H(s)$

解：先转换成S域模型电路

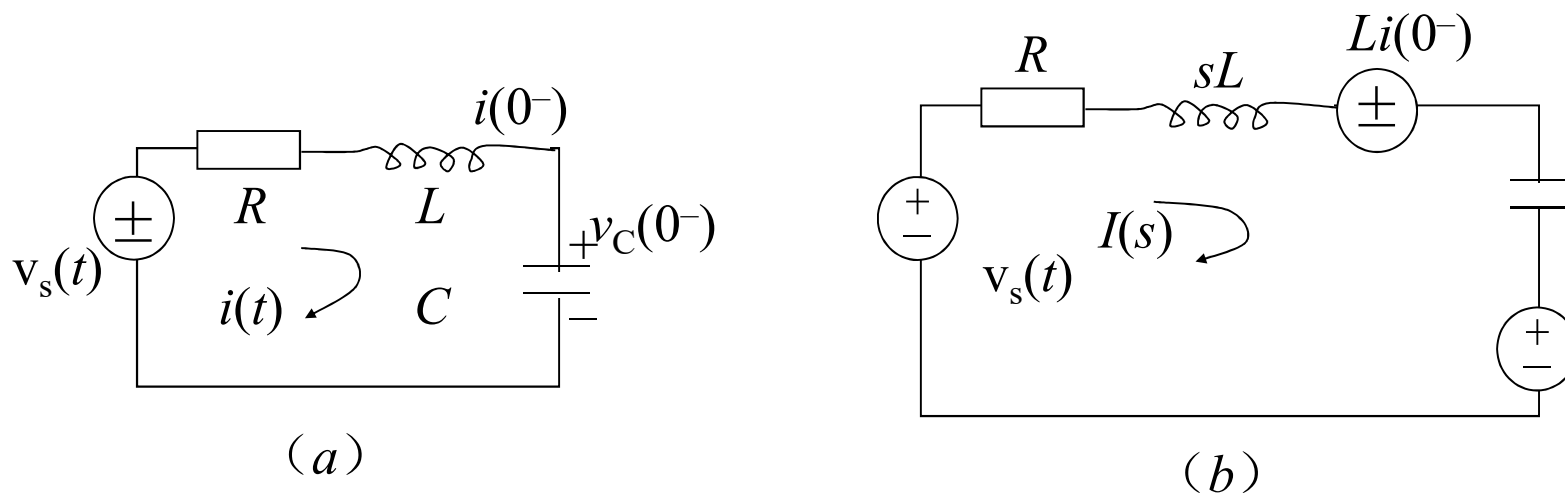


图6-25 RLC电路S域模型



## 例6.20



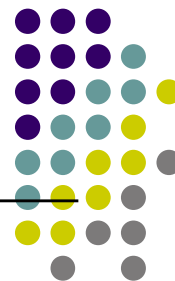
$$\begin{aligned}\tilde{I}(s) &= \frac{\tilde{V}(s) + Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \\ &= \frac{\tilde{V}(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}} + \frac{Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \tilde{I}_{zs}(s) + \tilde{I}_{zi}(s)\end{aligned}$$

第一项仅取决于输入，与非零起始状态无关，它是零状态响应  $i_{zs}(t)$  的拉氏变换记作  $\tilde{I}_{zs}(s)$ 。

第二项仅取决于非零起始状态与输入无关，它是零输入响应的  $i_{zi}(t)$  拉氏变换，记作  $\tilde{I}_{zi}(s)$ 。



## 例6.20



因为  $\tilde{V}(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$

所以 
$$\tilde{I}_{zs}(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s(Ls^2 + Rs + 1/C)}$$

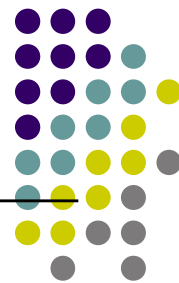
将给定的RLC元件值代入，并展成部分分式，

$$\tilde{I}_{zs}(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2s + C_3}{(s+1)^2 + 4} \quad C_1 = sI_{zs}(s)\big|_{s=0} = \frac{1}{5}$$





## 例6.20



将  $c_1 = \frac{1}{5}$  代入原式，用系数比较法，整理可得

$$\frac{1}{5}(s^2 + 2s + 5) + c_2 s^2 + c_3 s = 1$$

得  $\frac{1}{5} + c_2 = 0$  ,  $\frac{2}{5} + c_3 = 0$  , 于是  $c_2 = -\frac{1}{5}$       $c_3 = -\frac{2}{5}$

$$\text{有 } \tilde{I}_{zs}(s) = \frac{1}{5s} + \frac{-\frac{1}{5}s - \frac{2}{5}}{(s+1)^2 + 4} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 4} - \frac{1}{10} \times \frac{2}{(s+1) + 4}$$

对上式取反变换，得  $I_{zs}(t) = \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{10} e^{-t} \sin 2t \right) u(t)$



## 例6.20



同样我们可得到零输入响应的拉氏变换式

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{zi}(s) &= \frac{Li(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s-1}{(s+1)^2 + 4} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} - \frac{2}{(s+1)^2 + 4}\end{aligned}$$

对上式逐项取反变换，得零输入响应

$$i_{zi}(t) = (e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \sin 2t)u(t)$$



## 例6.20



全响应

$$i(t) = i_{zs}(t) + i_{zi}(t) = \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{11}{10} e^{-t} \sin 2t \right) u(t)$$

根据  $H(s)$  定义

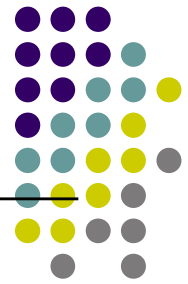
$$H(s) = \frac{I_{zs}(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

将电路数值代入后可得：

$$H(s) = \frac{1}{2 + s + \frac{1}{0.2s}} = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$



## 6.7.3 全响应的求解



如果系统的状态不为零，则可直接从微分方程的起始状态求出零输入响应，再加上

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s) \rightarrow y_{zs}(t) = L^{-1}\{Y_{zs}(s)\} = L^{-1}\{X(s)H(s)\}$$

即可得到全响应，也可以直接采用单边拉氏变换法，由于它自动计入起始状态，使求解变得简洁。



## 例6.21



【例6.21】 设某因果LTI系统的微分方程如下。

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}u(t)$$

$$y(0^-) = y'(0^-) = 0, \text{ 求全响应 } y(t)。$$

解:系统是零状态的,对以上方程取双边拉氏变换,得

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

由上式解得:

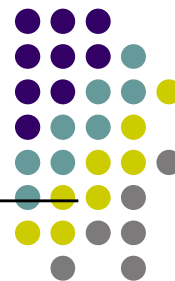
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

考虑到输入的拉氏变换式的收敛域及系统的因果性, 可知 $Y(s)$ 的收敛域为 $\operatorname{Re}\{s\} > -1$ 。取 $Y(s)$ 的反变换, 得

$$y(t) = (-e^{-t} + e^{-2t} + te^{-t})u(t)$$



## 例6.22



【例6.22】 已知因果LTI系统的微分方程如下

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} y(t) = 5e^{-3t} u(t)$$

已知:  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 0$ , 求全响应  $y(t)$ ,  $y_{zi}(t)$ ,  $y_{zs}(t)$ 。

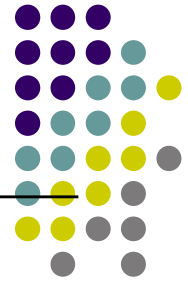
解: 取微分方程两边的单边拉氏变换, 得

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + \frac{3}{2} [sY(s) - y(0)] + \frac{1}{2} Y(s) = \frac{5}{s+3}$$

$$\text{所以 } Y(s) = \frac{\frac{5}{s+3} + sy(0) + y'(0) + \frac{3}{2} y(0)}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$



## 例6.22



将初始条件 $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ 代入上式, 经整理得

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{s+3}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}} + \frac{s + \frac{3}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$

显然, 第一项是零状态响应的拉氏变换; 第二项是零输入响应的拉氏变换。将这两项分别记为 $Y_{zi}(s)$ 和 $Y_{zs}(s)$ , 有

$$Y_{zs}(s) = \frac{\frac{5}{s+3}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{s + \frac{3}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$



## 例6.22



将以上两式展成部分分式，取反变换，可得，

$$Y_{zs}(s) = \frac{-5}{s+1} + \frac{4}{s+\frac{1}{2}} + \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+\frac{1}{2}} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{zs}(s)] = (-5e^{-t} + 4e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-3t})u(t)$$

$$y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{zi}(s)] = (-e^{-t} + 2e^{-\frac{1}{2}t})u(t)$$





## 例6.22

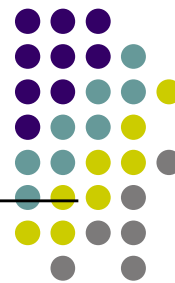


系统的全响应

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = \left[ 6(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t}) + e^{-3t} \right] u(t)$$

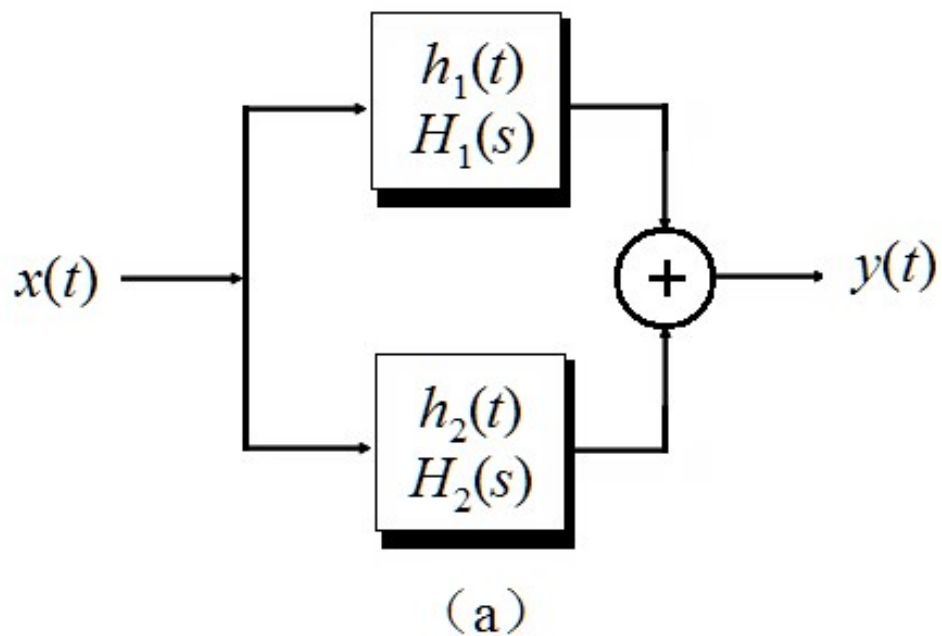


## 6.7.4 系统函数代数属性和方框图表示



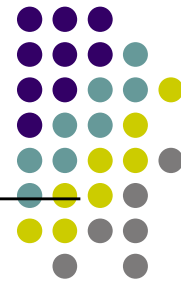
系统的基本连接方式有并联连接、串联连接、反馈连接。

- 并联系统的系统函数为  $Y(s) = X(s)[H_1(s) + H_2(s)]$

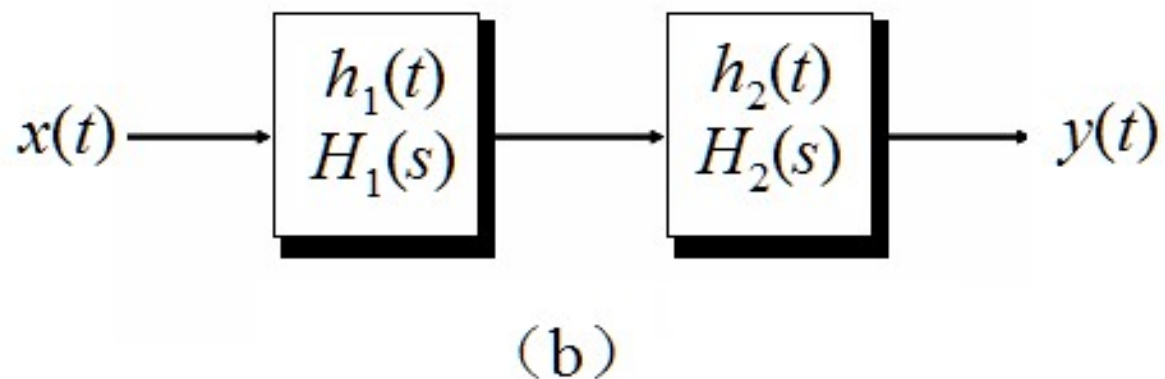




## 6.7.4 系统函数代数属性和方框图表示



- 串联系统的系统函数为  $Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s)$





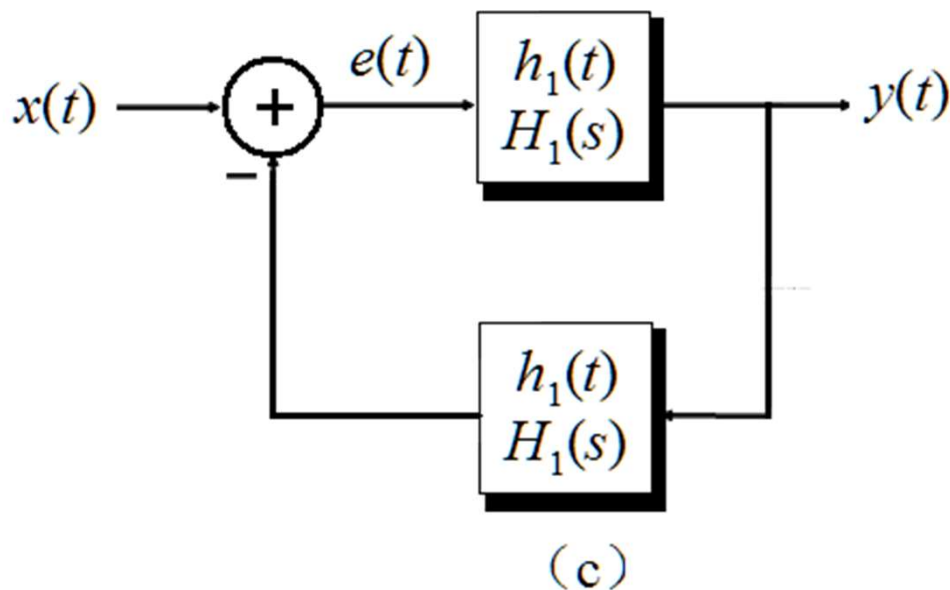
## 6.7.4 系统函数代数属性和方框图表示



- 反馈系统的系统函数为

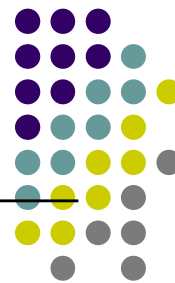
$$Y(s) = H_1(s)E(s) \quad E(s) = X(s) - Y(s)H_2(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$





## 例6.23



【例6.23】已知一LTI系统的微分方程为  $y' + 3y = x(t)$   
画出其系统方框图。

解：以上微分方程可以改写为

$$y' = x(t) - 3y$$

因为微分器不易实现，它对误差和噪声很敏感，一般都会采用积分器，该系统的时域模拟框图如图6-27所示。

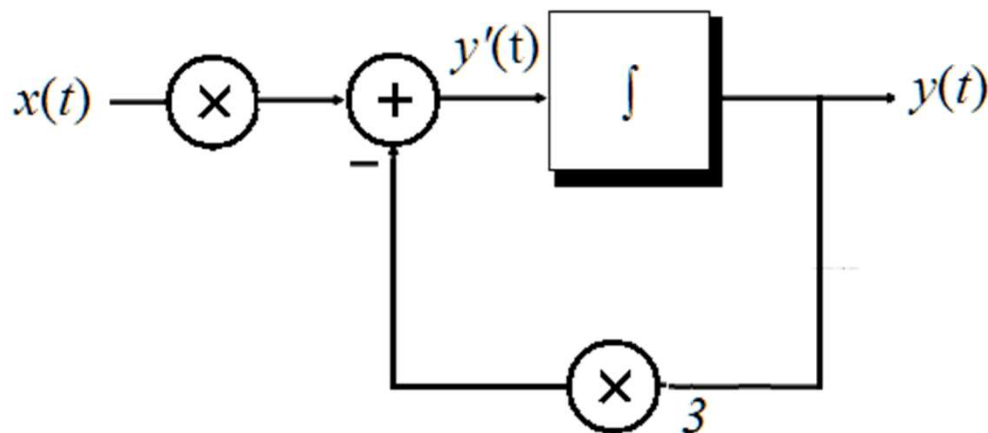


图6-27中例6.23时域模拟框图



## 例6.23

如用积分器的系统函数  $\frac{1}{s}$  来表示积分器，则构成了S域的模拟方框图，如图6-28所示。

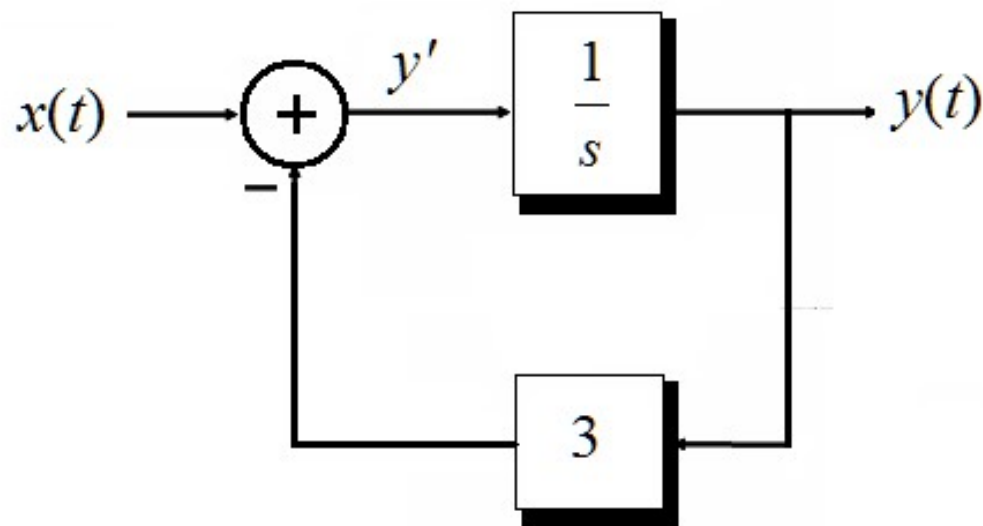


图6-28 例6.23 S域拟框图



## 例6.24



【例6.24】已知一因果LTI系统，其系统函数为

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = (s+2) \frac{1}{s+3}$$

画出其方框图。

$H(s)$  可以看成两个系统函数分别为  $\frac{1}{s+3}$  与  $(s+2)$  的级联，如图6-29(a)所示。

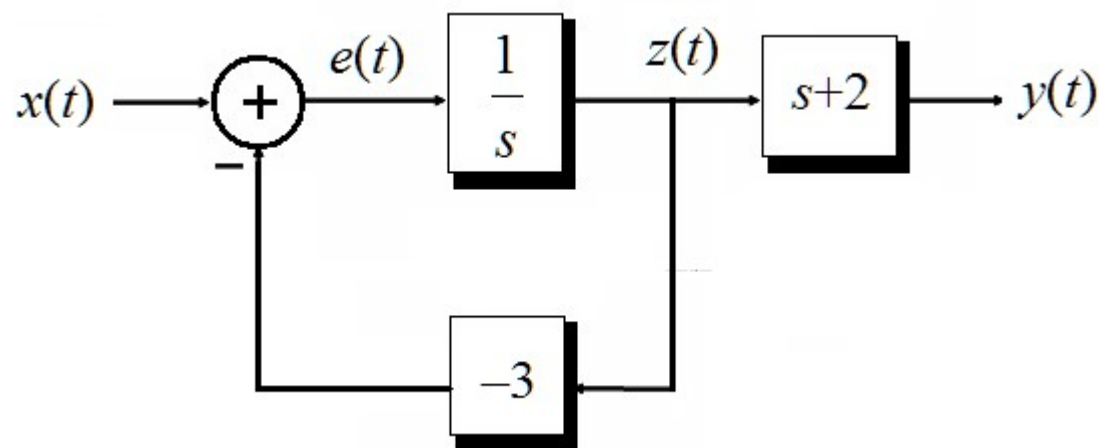
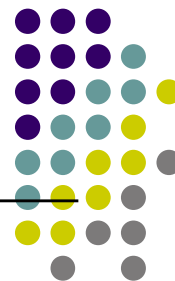


图6-29(a) 例6-24图



## 例6.24



利用拉氏变换的线性和微分性质，还可以画成另一种形式的方框图。

$$y(t) = \frac{dz}{dt} + 2z(t)$$

而  $e(t) = \frac{dz}{dt}$

故  $y(t) = e(t) + 2z(t)$

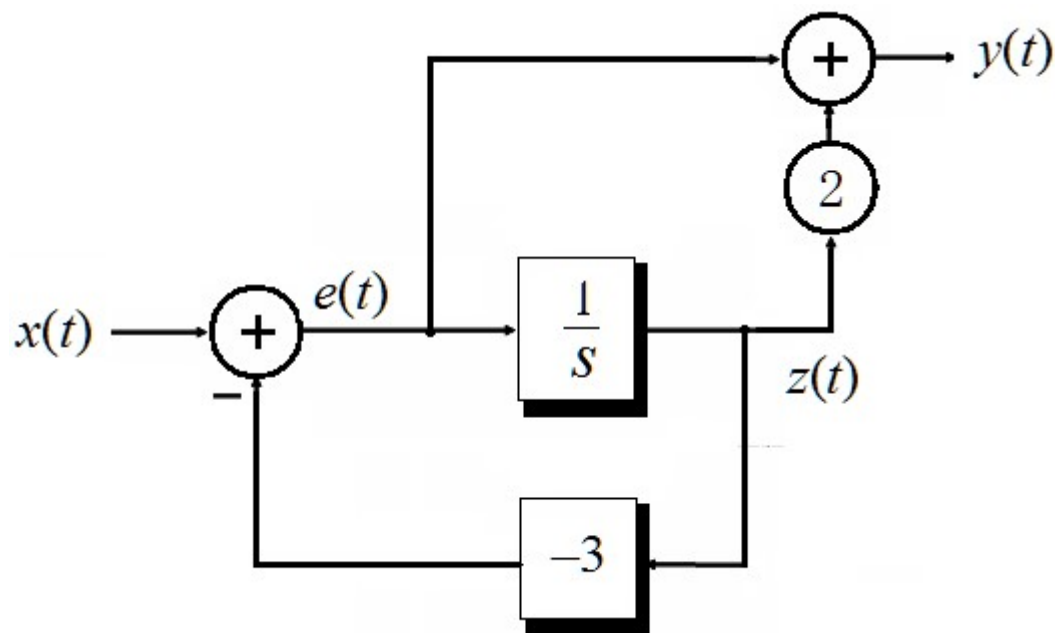
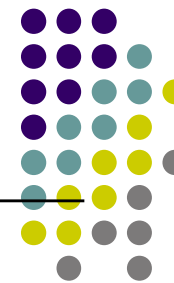


图6-29(b) 例6-24图





## 例6.25



【例6.25】已知一因果LTI系统，其系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

画出其系统方框图。

解：由 $H(s)$ 求得微分方程为

$$y'' + 3y' + 2y = x(t)$$

$$e(t) = y''(t) = x(t) - 2y(t) - 3y'(t)$$

由该方程可直接求得系统的方框图。



## 例6.25

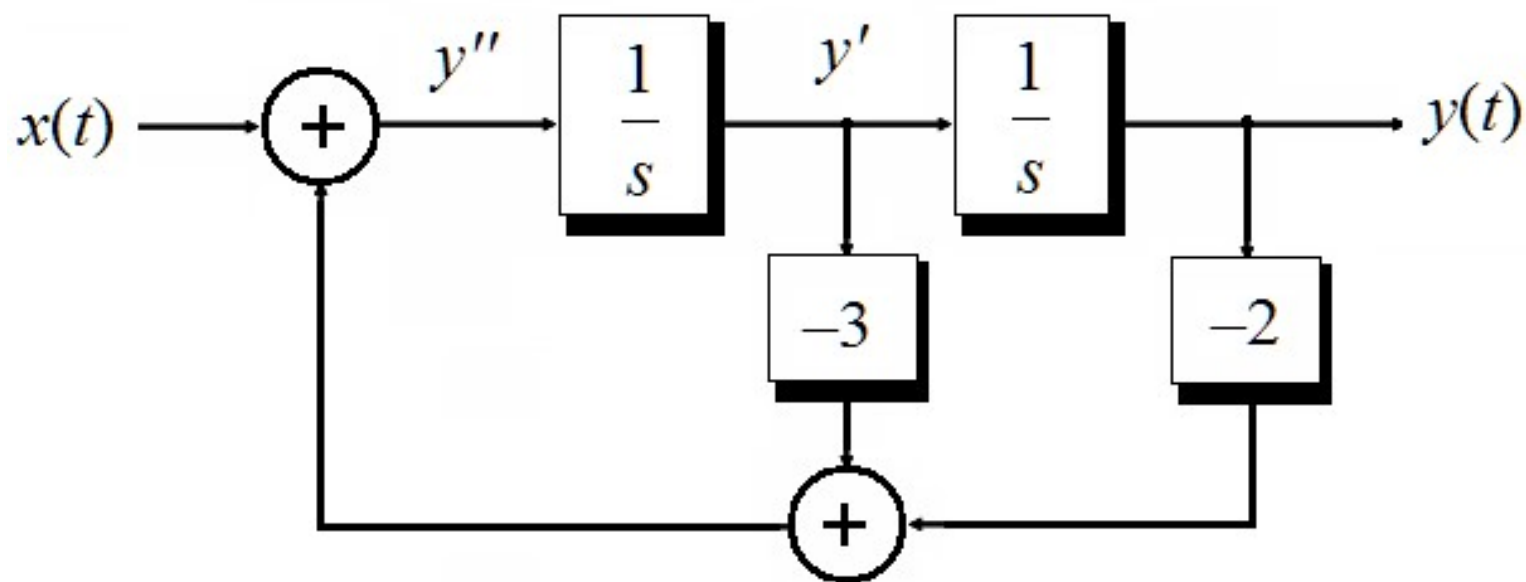


图6-30(a) 例6-25 直接型



## 例6.25



因为  $H(s) = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s+2}$ ，故可看作两个系统的级联。

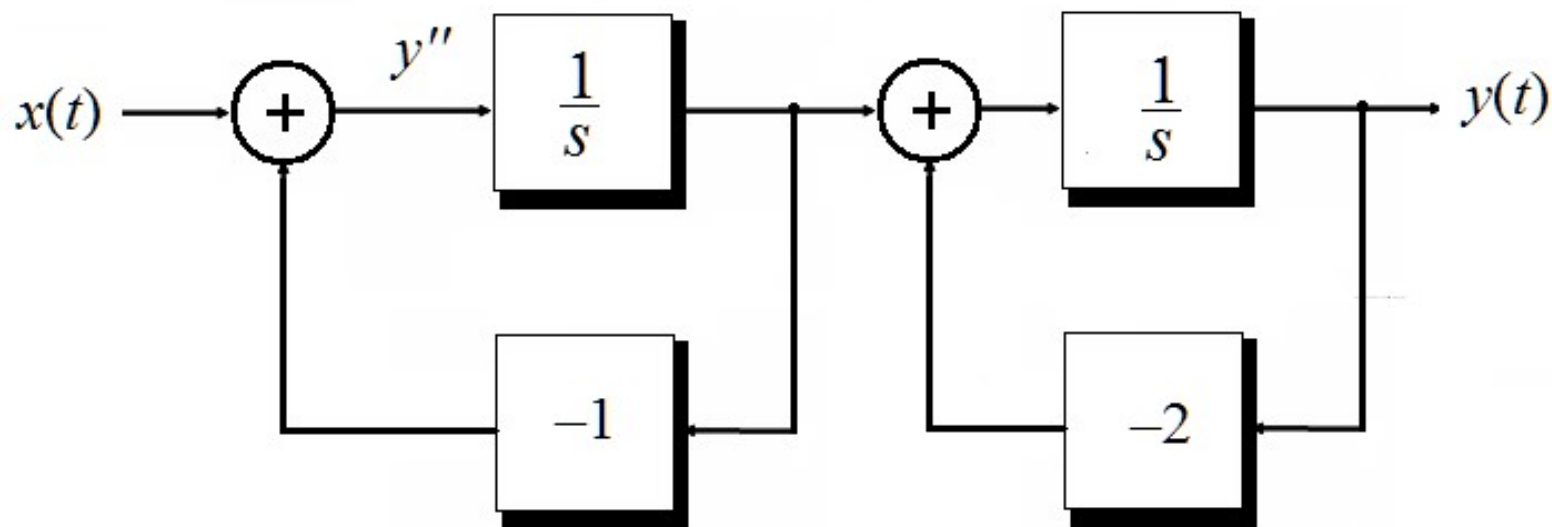


图6-30(b) 例6-25 串联型



## 例6.25



将  $H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ ，用并联型方框图表示，有

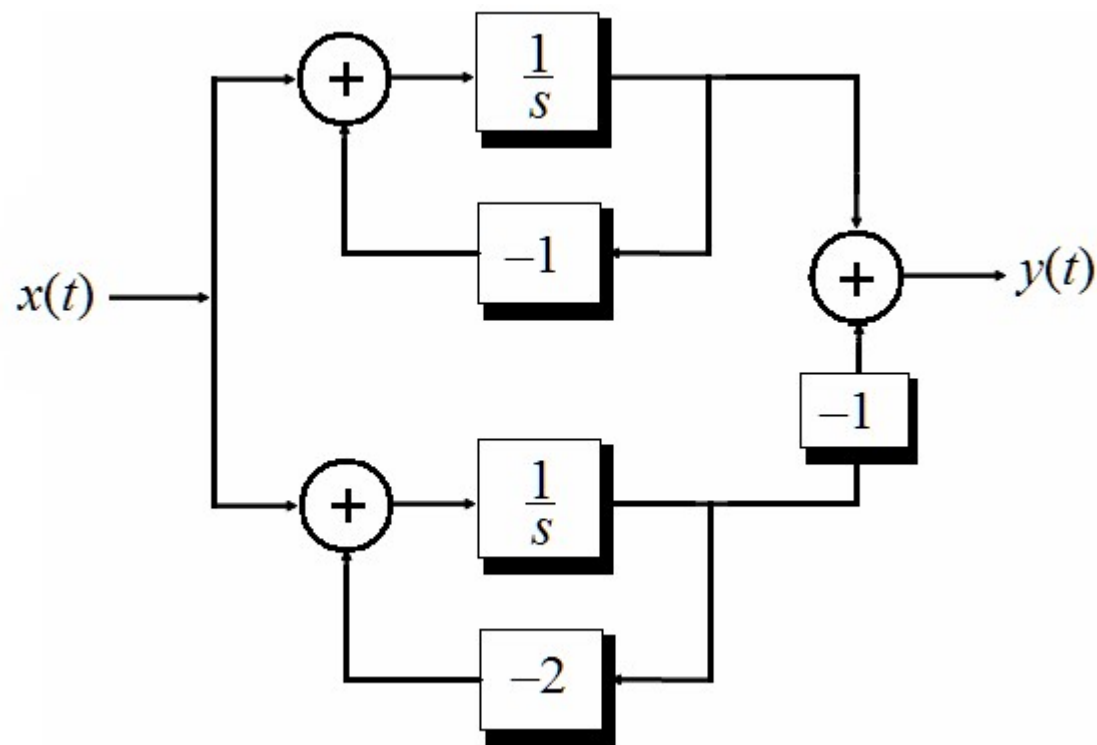
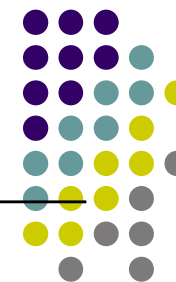


图6-30(c) 例6-25 并联型



## 【例】

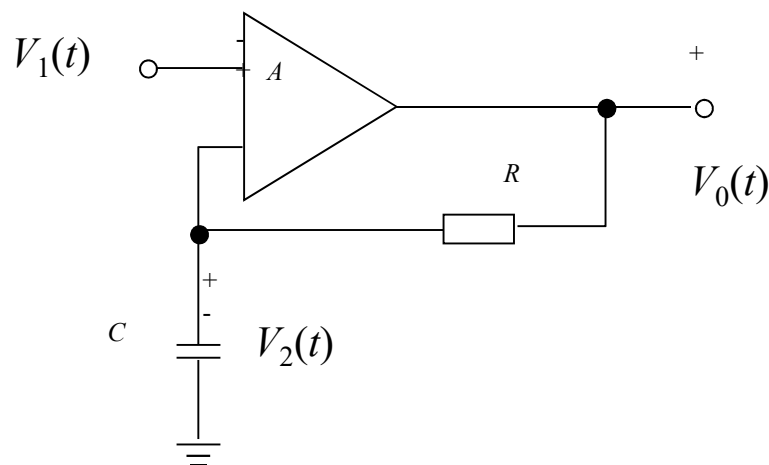


已知如图所示放大器的输入阻抗为无限大，输出信号  $V_0(s)$  与差分输入信号  $V_1(s)$  和  $V_2(s)$  之间满足关系

$$V_0(s) = A[V_2(s) - V_1(s)]$$

试求 (1) 系统函数  $H(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)}$

(2) 由  $H(s)$  极点分布判断  $A$  满足什么条件时，系统是稳定的。





解：  $\because \frac{V_2(s)}{V_0(s)} = \frac{\frac{1}{sc}}{R + \frac{1}{sc}}$

$$V_0(s) = A[V_2(s) - V_1(s)] = AV_0(s) \frac{\frac{1}{sc}}{R + \frac{1}{sc}} - AV_1(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{A}{1 - \frac{\frac{A}{sc}}{R + \frac{1}{sc}}} = \frac{-(s + \frac{1}{Rc})A}{s + \frac{1-A}{Rc}}$$



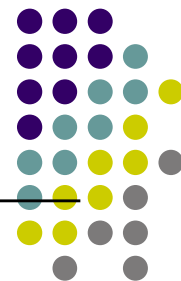
为使此系统稳定， $H(s)$ 的极点应落于 $s$ 平面的左半平面，即

$$\frac{1-A}{RC} > 0$$

$\therefore$ 当 $A < 1$ 时，系统稳定。



## 【例】



已知一因果连续  $LTI$  系统的微分方程为

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

- 求：
- (1) 系统的  $H(s)$ , 零极图,
  - (2)  $y(0^-) = y'(0^-) = 1$ ,  $x(t) = e^{-2t}u(t)$  时  $y(t)$
  - (3) 当激励  $x(t) = u(-t) + 2u(t)$  时求  $y(t)$
  - (4) 画出模拟框图





解: | (1)  $H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$ , 有一个零点, 二个极点

$$z_1 = -2, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -3$$

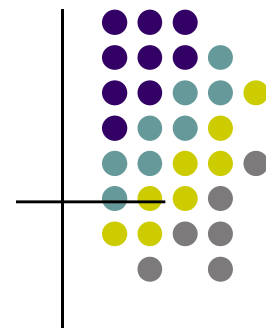
(2) 利用单边拉氏变换

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 4[sY(s) - y(0^-)] + 3Y(s) = sX(s) - x(0^-) + 2X(s)$$

把  $y(0^-) = y'(0^-) = 1$  数值代入上式后可得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{S}{S+2} + \frac{2}{S+2}}{S^2+4S+3} + \frac{S+5}{S^2+4S+3} = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) \\ &= \frac{s+6}{(s+3)(s+1)} = -\frac{3}{s+3} + \frac{5}{s+1} \end{aligned}$$

$\because$  是因果系统  $\therefore y(t) = \left( -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-t} \right) u(t)$



(3)  $\because x(t)$  双边  $LT$  不存在, 故不能直接应用,  $H(s)X(s)$  方法,

$$x(t) = 1 + u(t) = e^{j0t} + u(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$e^{j0t}$  可看成是  $s=0$  的特征函数

$$y_1(t) = e^{j0t} H(0) = \frac{0+2}{0+0+3} = \frac{2}{3}$$

当  $u(t)$  激励时

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{-\frac{1}{6}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+1}$$

$$\therefore y_2(t) = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \right) u(t)$$

$$\therefore y(t) = \frac{2}{3} + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \right) u(t)$$



(4) 直接 II 型模拟框图，如图示。

