ZHEJIANG UNIVERSITY

机器人视觉

第二章 成像原理与相机标定

王 越
ywang24@zju.edu.cn
控制科学与工程学院
浙江大学

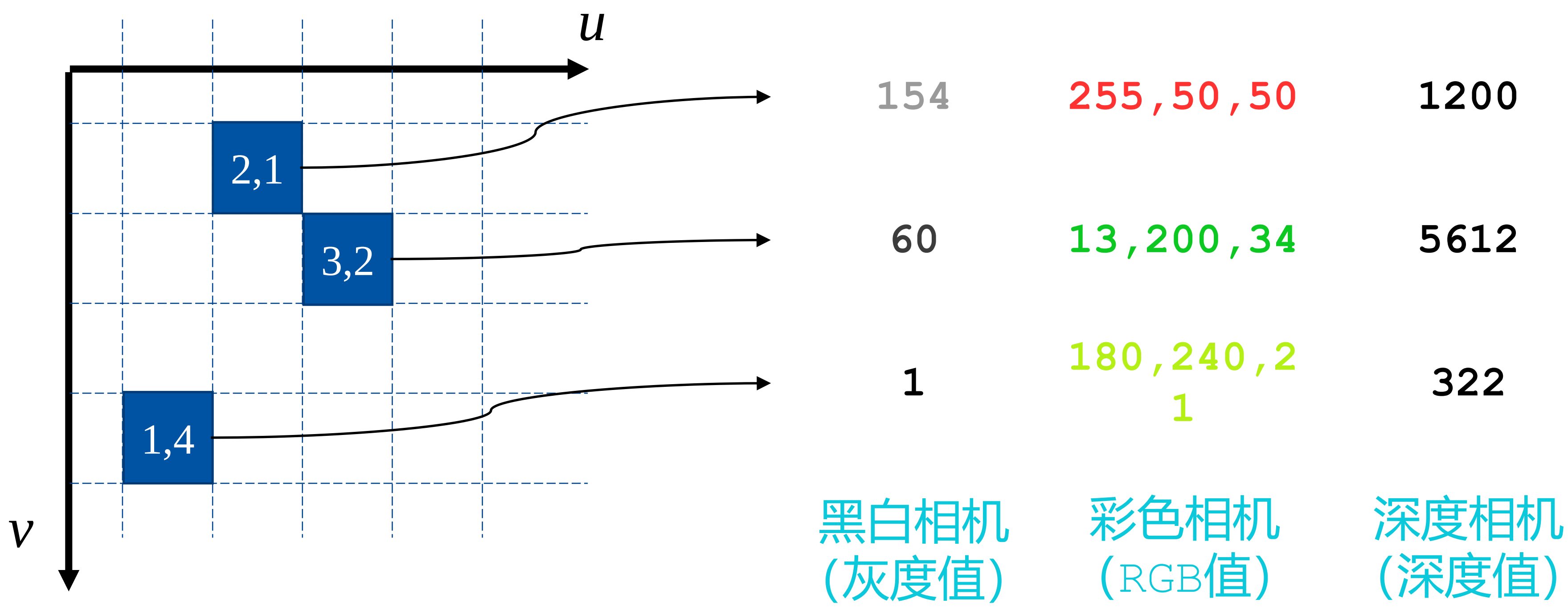
图像函数

- **数字图像是二维数组**

0	3	2	5	4	7	6	9	8
3	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1	0	3	2	5	4	7	6
5	2	3	0	1	2	3	4	5
4	3	2	1	0	3	2	5	4
7	4	5	2	3	0	1	2	3
6	5	4	3	2	1	0	3	2
9	6	7	4	5	2	3	0	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

图像函数

- **图像是定义在CCD阵列下的离散函数**



图像函数

- **图像是定义在CCD阵列下的离散函数**

$$I: (u, v) \in [0, W\text{-}1] \times [0, H\text{-}1] \rightarrow q \in R^N$$

$$q = I(u,v)$$

图像函数

- 图像是定义在CCD阵列下的离散函数

$$I:\ (u,\ v)\in[0,W\text{-}1]\times[0,H\text{-}1] \rightarrow q\in R^N$$

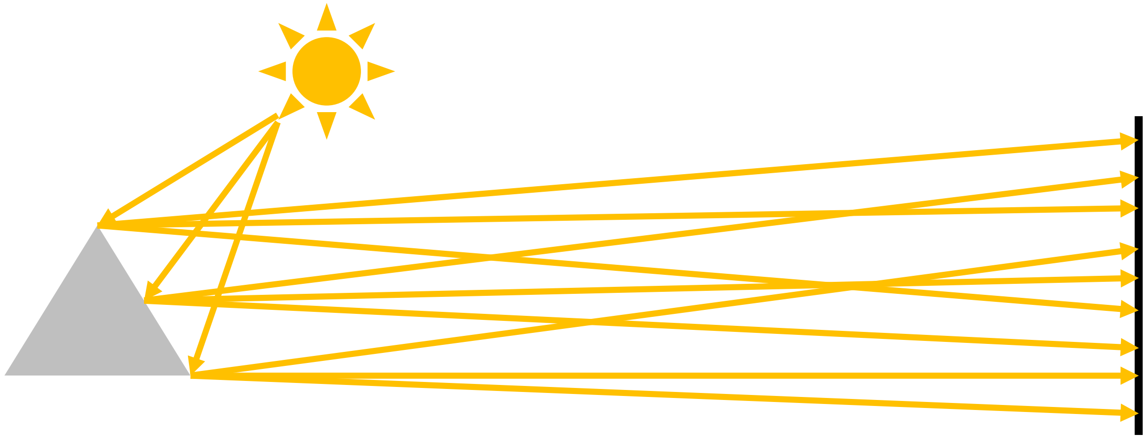
$$q = I(x)$$

图像函数

- 图像是定义在CCD阵列下的离散函数
- 像素的**位置**，涵盖了几何信息
  - 同一个物理世界的点，成像到不同图像位置，能够反映空间关系
- 像素的**取值**，涵盖了灰度信息
  - 同一个物理世界的点，成像到不同图像位置，对应灰度信息类似

成像原理

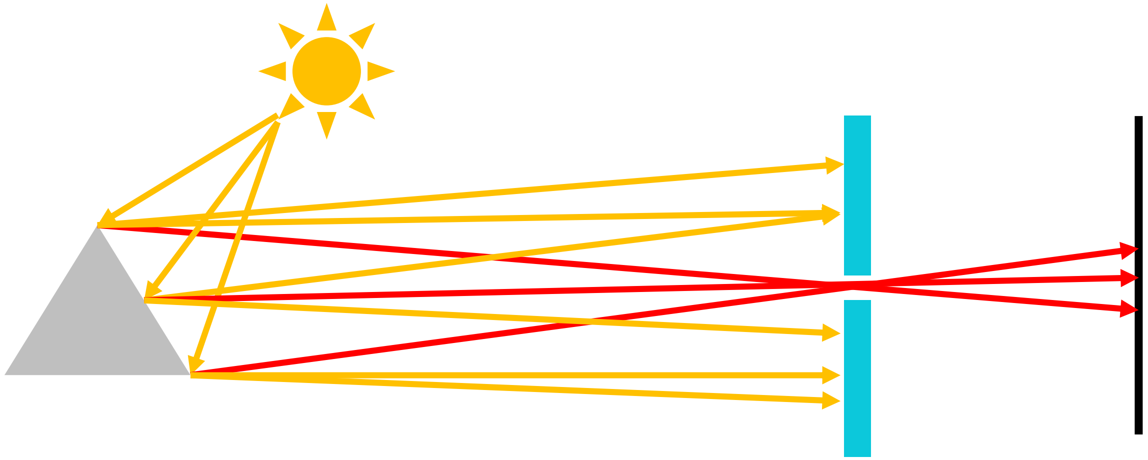
- 在3D（物理世界）和2D（图像）之间建立相机模型



表面漫反射无法成像

成像原理

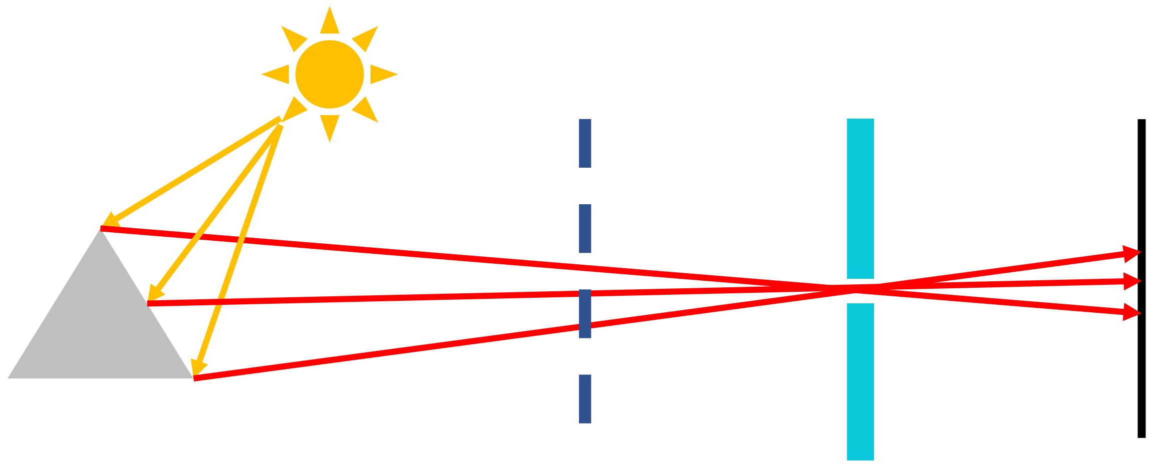
- 在3D（物理世界）和2D（图像）之间建立相机模型



小孔成像原理

相机建模

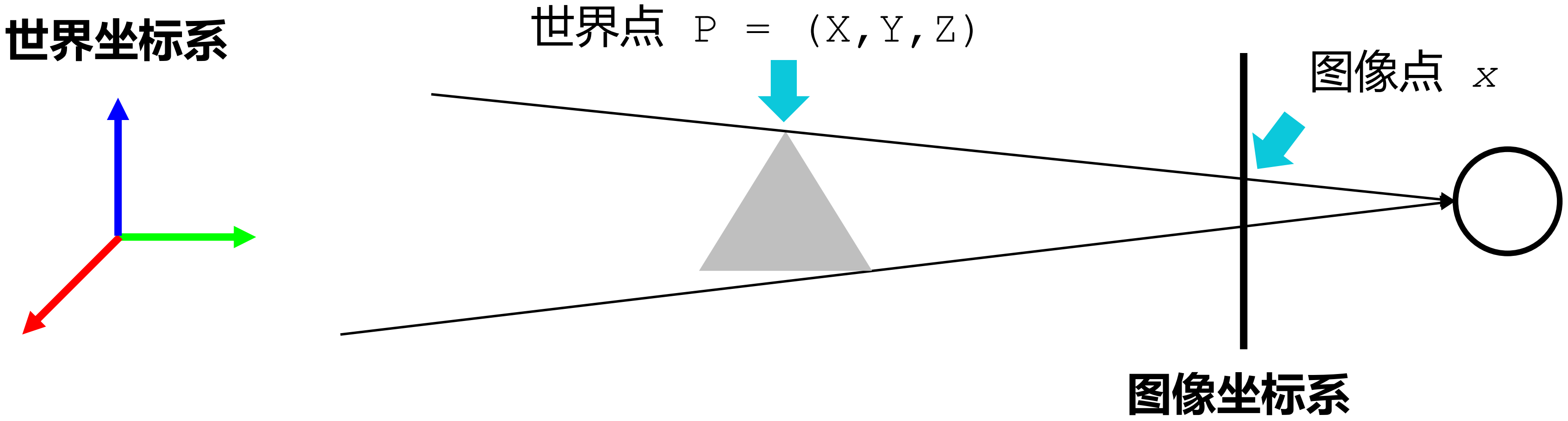
- 通常在小孔前建立坐标系



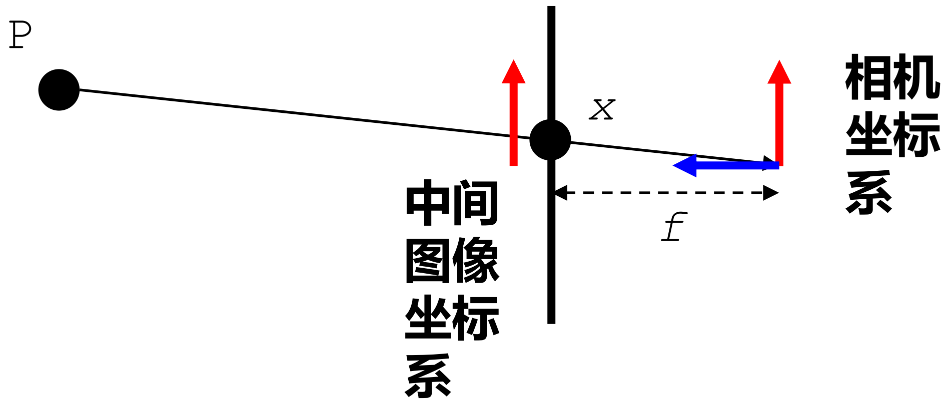
虚拟坐标系

相机建模

- 通常在小孔前建立坐标系



- 射影变换方程，二维世界（XZ平面）对一维图像案例（u轴）



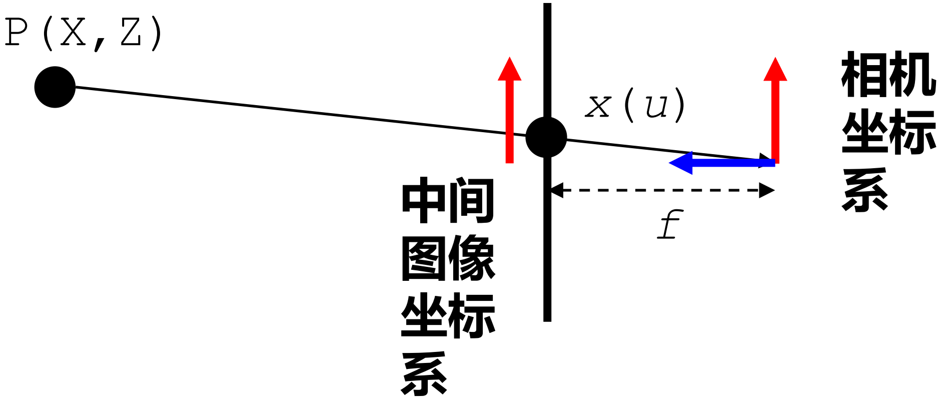
定义1：焦距用图像坐标系表示，*f* = 焦距/CCD一格的X方向宽度

定义2：*x* 定义在中间图像坐标系。

定义3：P 定义在相机坐标系。

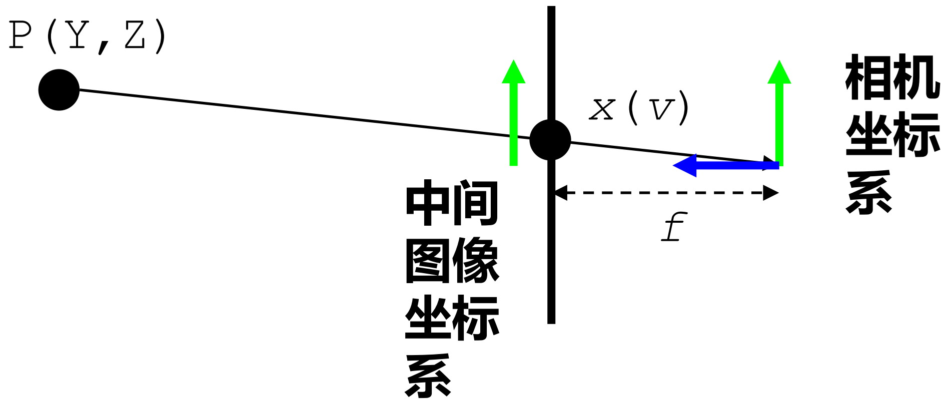
相机建模

- 射影变换方程，二维世界（XZ平面）对一维图像案例（u轴）



$$\frac{X}{u}=\frac{Z}{f}, \qquad u=\frac{fX}{Z}$$

- 射影变换方程，同理对 YZ平面-v轴



$$\frac{Y}{v} = \frac{Z}{f}, \qquad v = \frac{fY}{Z}$$

- 射影变换方程，三维世界对二维图像平面

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{Z}\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

相机建模

- **射影变换方程，三维世界对二维图像平面**

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{Z}\begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

CCD像素为矩形

X 方向一格的宽度和 Y 方向一个的宽度不同

相机建模

- **射影变换方程，三维世界对二维图像平面**

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Z}} \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix}$$

图像坐标系没有定义在中心，CCD中心也不可能对准光心

用c_x，c_y表示图像坐标系下的光心

相机建模

- **射影变换方程，三维世界对二维图像平面**

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

实际世界坐标系中心不在相机中心

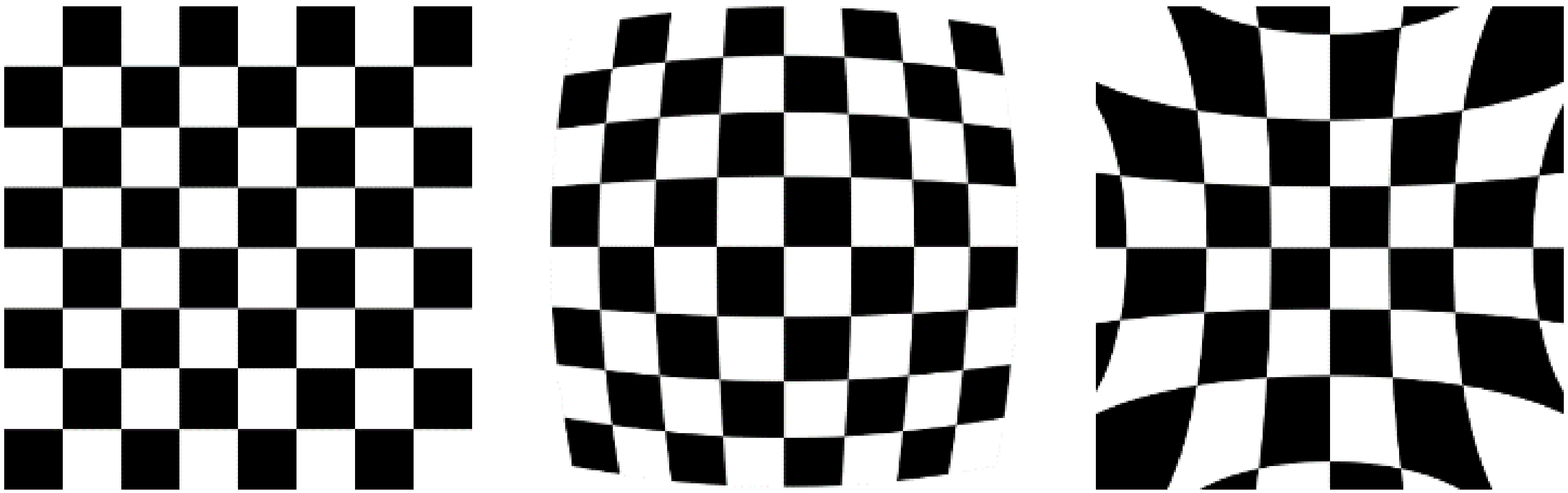
引入 R，t 表示实际世界坐标和相机中心之间的位姿

- **完整相机模型**

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_c} \underbrace{\begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{内参矩阵K}} \underbrace{\begin{bmatrix} R & t \end{bmatrix}}_{\text{外参矩阵T}} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

相机模型

- **镜头畸变**



- **镜头畸变**

$$\begin{pmatrix} u_d \\ v_d \end{pmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \begin{pmatrix} u - c_x \\ v - c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{u - c_x}{f_x}\right)^2 + \left(\frac{v - c_y}{f_y}\right)^2}$$

相机标定

- 将内参矩阵K和畸变参数合称为相机的内参，如何获得?

相机标定

- 将内参矩阵K和畸变参数合称为相机的内参，如何获得？
- 相机标定，借助外部已知尺寸的物体，解算出内参
- 张正友标定法

A flexible new technique for camera calibration

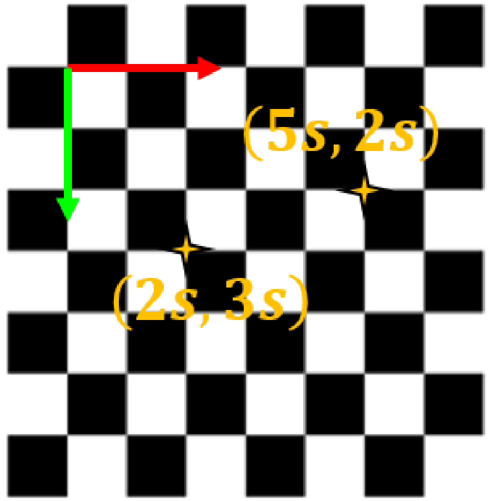
Z Zhang - IEEE Transactions on pattern analysis and machine ..., 2000 - ieeexplore.ieee.org

We propose a flexible technique to easily calibrate a camera. It only requires the camera to observe a planar pattern shown at a few (at least two) different orientations. Either the ...

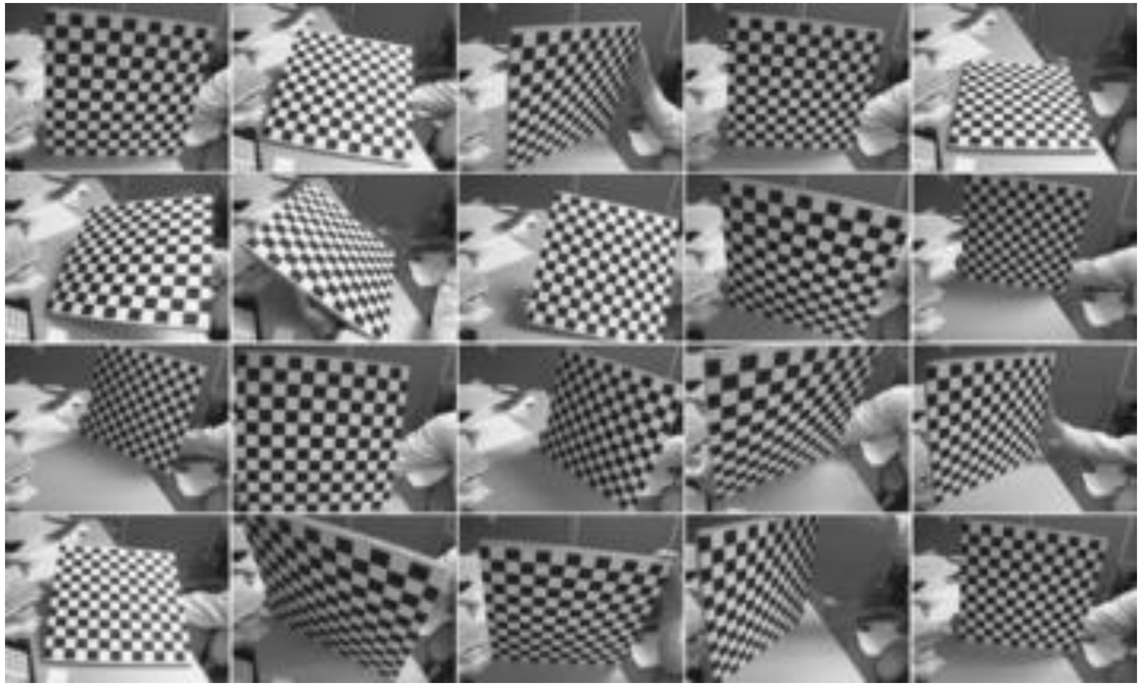
☆ 99 被引用次数：16152 相关文章 所有 43 个版本

相机标定

- 采用棋盘格作为已知尺寸的物体，利用平面特性方便求解
- 棋盘格的角点检测相对简单，可靠性高

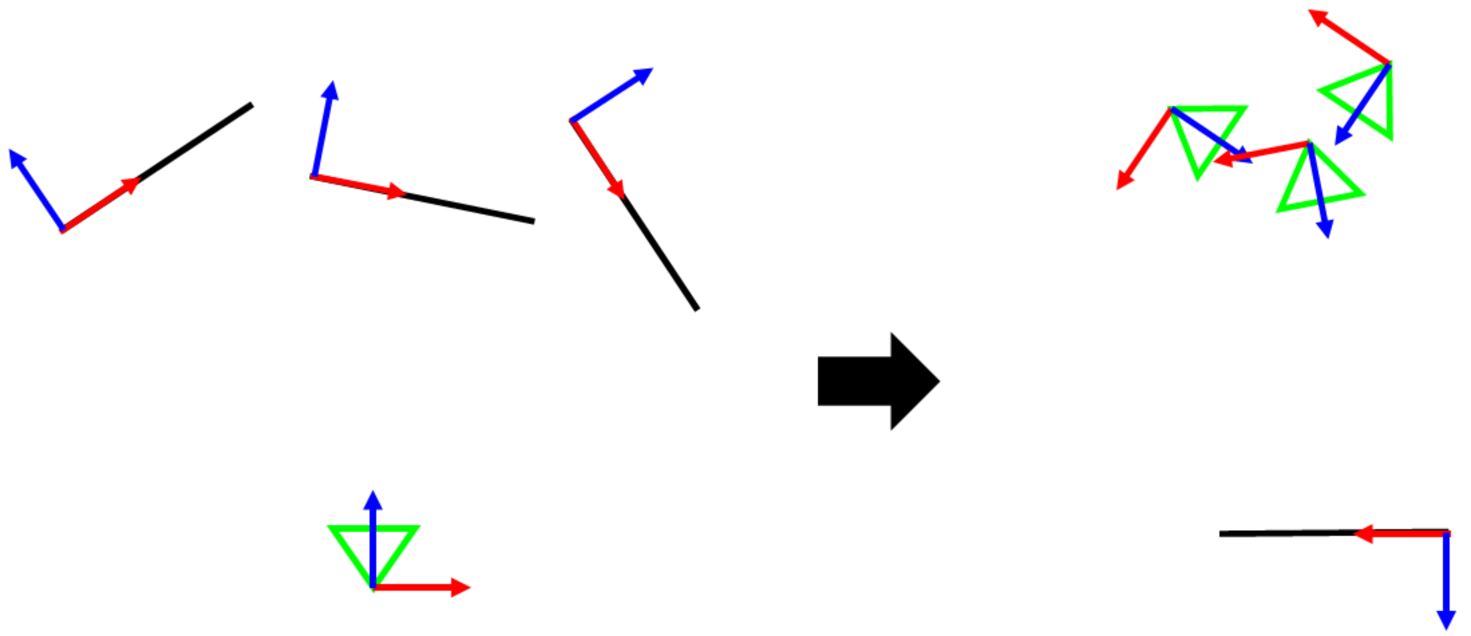


世界坐标系



相机标定

- 在棋盘格确定的世界坐标系下，得到多个位姿相机的观测



通过采集多张不同位姿的标定板图像实现

相机标定

- 在棋盘格确定的世界坐标系下，得到多个位姿相机的观测

$$zU = K(R_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}}P^{\mathbb{W}} + t_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}})$$

- 考虑到世界坐标系下棋盘格点的第三个元素是0，存在

$$zU = K\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{\mathbb{W}} \\ y^{\mathbb{W}} \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq H\begin{pmatrix} x^{\mathbb{W}} \\ y^{\mathbb{W}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- H有8个自由度，可以用4个点进行求解

相机标定

- 每张图片存在一个各自的H，可以分解为如下形式

$$H = \frac{1}{\gamma} K \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}} \end{pmatrix}$$

- 构造出如下的方程

$$r_1 = \gamma K^{-1} h_1$$
$$r_2 = \gamma K^{-1} h_2$$
$$t_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}} = \gamma K^{-1} h_3$$

相机标定

- **利用旋转矩阵的正交特性，转化为如下的方程**

$$h_1^T K^{-T} K^{-1} h_2 \triangleq h_1^T B h_2 = 0$$

$$h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 = h_2^T K^{-T} K^{-1} h_2 = h_1^T B h_1 = h_2^T B h_2 = 1$$

- **B有对称性，且2个元素为0**
- **通过该方程，可以用所有的H，借助最小二乘解得B的5个元素**

相机标定

- **从B恢复出内参中的4个元素和1个尺度因子**

$$B = \gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x^2} & 0 & -\frac{c_x}{f_x^2} \\ 0 & \frac{1}{f_y^2} & -\frac{c_y}{f_y^2} \\ -\frac{c_x}{f_x^2} & -\frac{c_y}{f_y^2} & \frac{c_x^2}{f_x^2} + \frac{c_y^2}{f_y^2} + 1 \end{bmatrix}$$

相机标定

- **从B恢复出内参中的4个元素和1个尺度因子**

$$c_x = -B_{13}/B_{11} \qquad c_y = -B_{23}/B_{22} \qquad \gamma = B_{33} + c_x B_{13} + c_y B_{23}$$

$$f_x = \sqrt{\gamma/B_{11}} \qquad f_y = \sqrt{\gamma/B_{22}}$$

- **解得内参矩阵K**

相机标定

- 由该方程恢复出所有的外参矩阵

$$r_1 = \gamma K^{-1} h_1$$
$$r_2 = \gamma K^{-1} h_2 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}}, t_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}}$$
$$t_{\mathbb{W}}^{\mathbb{C}} = \gamma K^{-1} h_3$$

- QED，得到了相机的内参，和所有图片的相机外参

相机标定

- 利用解得的外参和内参将棋盘格的点投影到图像，仍然有误差，两个原因
  - 分步求解有累积误差
  - 没有考虑畸变参数
- 考虑包含畸变的相机模型，一个非线性方程，自变量为外参和内参，因变量为棋盘格点在图像中的位置，并受到噪声的干扰

$$\begin{pmatrix} u_d \\ v_d \end{pmatrix} = f\left(K, k, R_{\mathbb{C}j}^{\mathbb{W}}, t_{\mathbb{C}j}^{\mathbb{W}}\right) + n$$

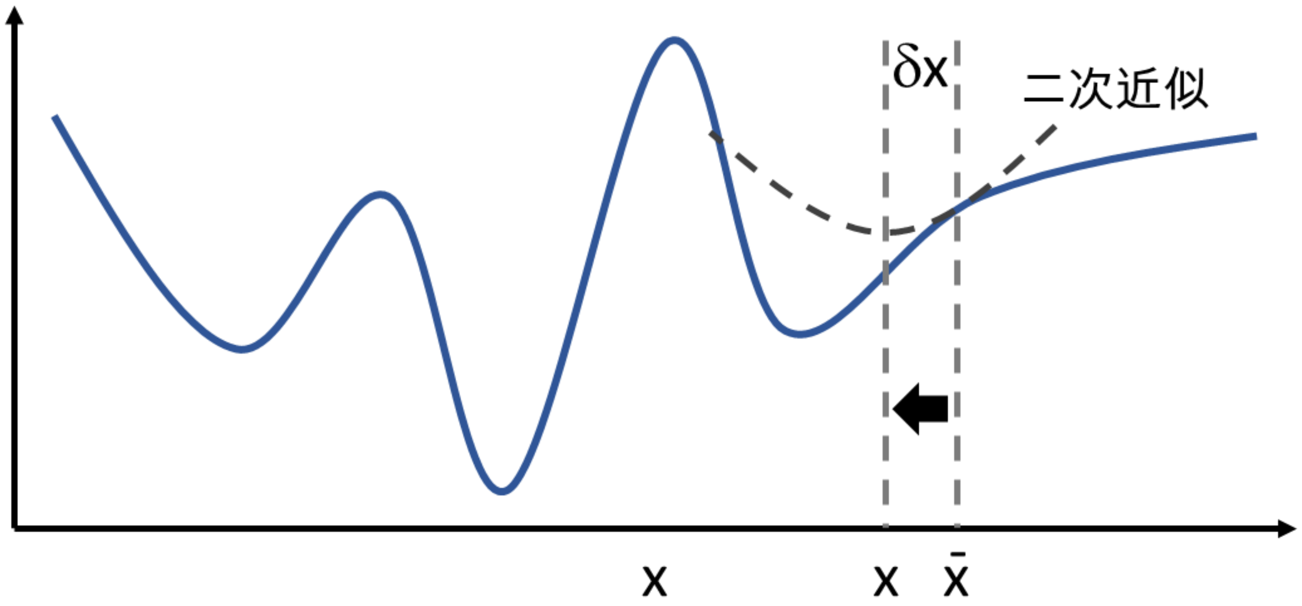
- 直接优化非线性方程，减少误差，提高自变量，也就是内参和外参的精度
- 数值优化，如高斯牛顿法，用上一步的结果作为初值

$$\min_{K,k,R_{\mathbb{C}j}^{\mathbb{W}},t_{\mathbb{C}j}^{\mathbb{W}}} \left\| \begin{pmatrix} u_d \\ v_d \end{pmatrix} - f\left(K,k,R_{\mathbb{C}j}^{\mathbb{W}},t_{\mathbb{C}j}^{\mathbb{W}}\right) \right\|^2$$

$$\min_{x} \begin{pmatrix} u_d \\ v_d \end{pmatrix} - f(\bar{x}) - \frac{df}{dx}(x-\bar{x})^2$$

相机标定

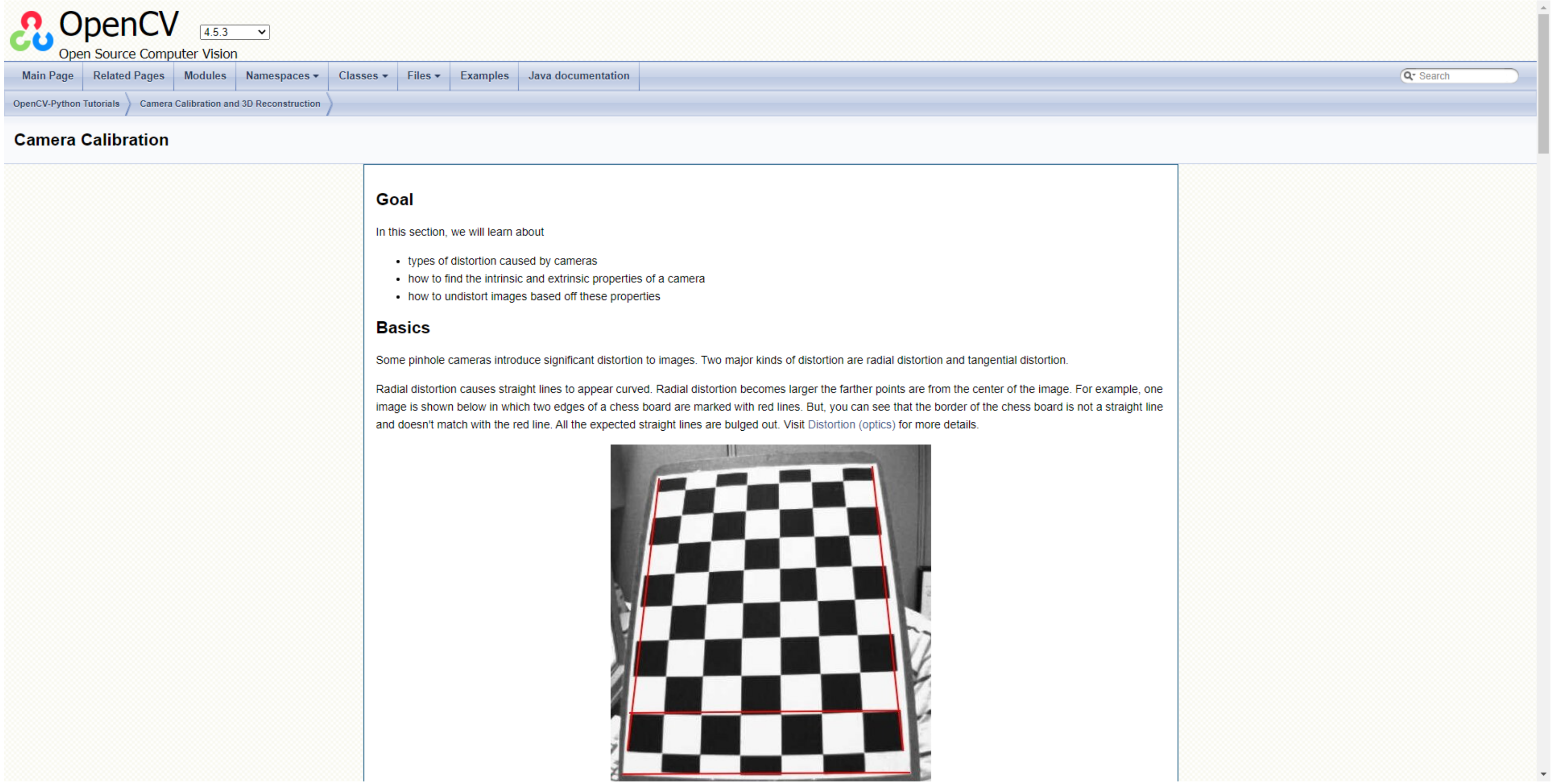
- 直接优化非线性方程，减少误差，提高自变量，也就是内参和外参的精度
- 数值优化，如高斯牛顿法，用上一步的结果作为初值



$$x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > \cdots$$

相机标定

- 有现成工具箱，OpenCV



OpenCV 4.5.3
Open Source Computer Vision

Main Page | Related Pages | Modules | Namespaces | Classes | Files | Examples | Java documentation | Search

OpenCV-Python Tutorials 〉 Camera Calibration and 3D Reconstruction

Camera Calibration

Goal

In this section, we will learn about

- types of distortion caused by cameras
- how to find the intrinsic and extrinsic properties of a camera
- how to undistort images based off these properties

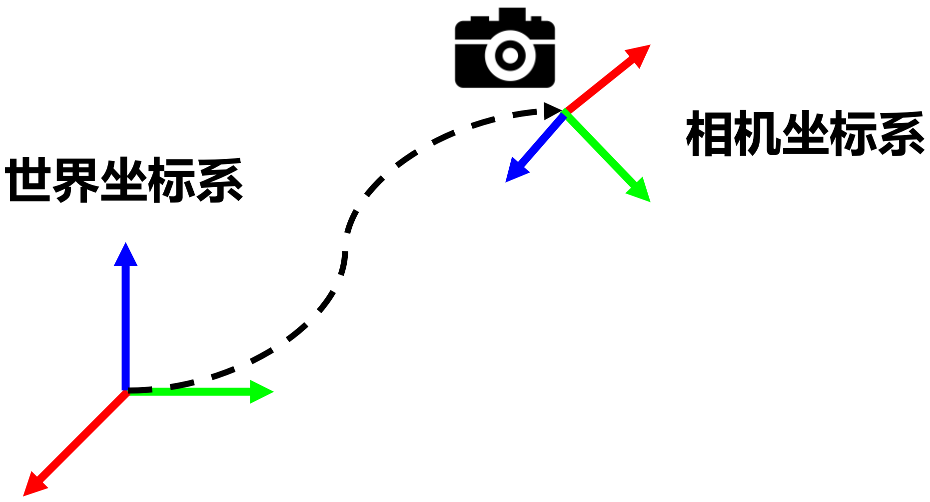
Basics

Some pinhole cameras introduce significant distortion to images. Two major kinds of distortion are radial distortion and tangential distortion.

Radial distortion causes straight lines to appear curved. Radial distortion becomes larger the farther points are from the center of the image. For example, one image is shown below in which two edges of a chess board are marked with red lines. But, you can see that the border of the chess board is not a straight line and doesn't match with the red line. All the expected straight lines are bulged out. Visit Distortion (optics) for more details.

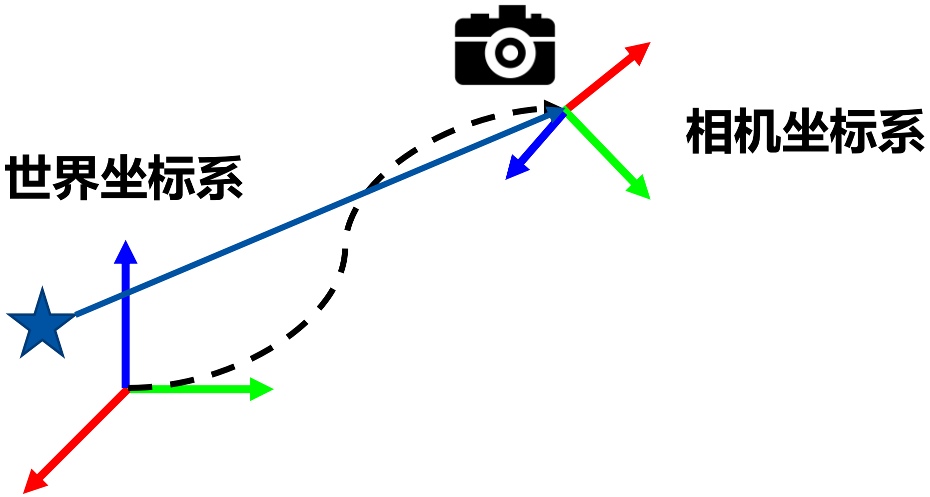
外参应用

- 基于指定尺寸平面，可以估计出平面和相机的外参，也就是相机在世界坐标系下的位姿



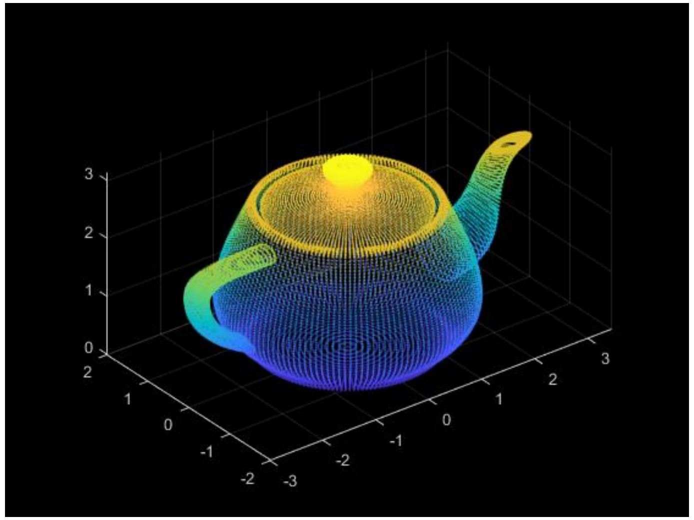
外参应用

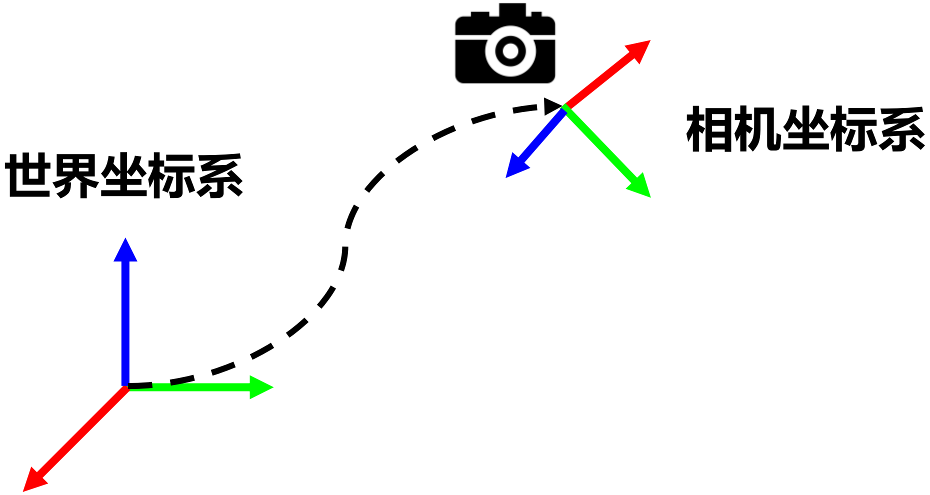
- 基于指定尺寸平面，可以估计出平面和相机的外参，也就是相机在世界坐标系下的位姿
- 如果在世界坐标系下，增加一个虚拟点，可以计算出在图像中的成像



外参应用

- 基于指定尺寸平面，可以估计出平面和相机的外参，也就是相机在世界坐标系下的位姿
- 如果在世界坐标系下，增加一个虚拟点，可以计算出在图像中的成像
- 那么很多世界坐标系下的虚拟点？？？





外参应用

外参应用

- 基于指定尺寸平面，可以估计出平面和相机的外参，也就是相机在世界坐标系下的位姿
- 如果在世界坐标系下，增加一个虚拟点，可以计算出在图像中的成像
- 那么很多世界坐标系下的虚拟点
- 如果是一段运动的点云？？？

外参应用