第七章

Z变换

7.0 引言

- Z变换是离散时间傅立叶变换的推广。在Z域上进行信号与系统的分析。

7.1 双边Z变换

选择一实指数加权信号 r^{-n}（$r>0$），使信号 $x[n]r^{-n}$ 满足傅立叶变换收敛条件：

$$X\left(re^{j\varpi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{x[n]r^{-n}\right\}e^{-jn\omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left\{r^{-n}\ e^{-jn\omega}\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}$$

令复变量 $z=re^{j\omega}$，离散时间信号（序列）$x[n]$的Z变换$X(z)$可定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$X(z)$是z的一个幂级数。

7.1 双边Z变换

因此，离散时间信号（序列）$x[n]$的Z变换可以看成乘以一实指数加权信号r^{-n} 后的傅立叶变换，可以看成是傅立叶变换的推广。当$z=e^{j\omega}$时，Z变换就成为信号的傅立叶变换，即傅立叶变换为单位圆上的Z变换。

7.1 双边Z变换

假设r的取值使$X(z)$收敛，有

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\varpi})\}$$

$$x[n] = r^n F^{-1}\{X(re^{j\varpi})\}$$

利用傅立叶反变换的表示式，可得

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\omega}\right)\left(re^{j\omega}\right)^n d\omega$$

7.1 双边Z变换

由$z=re^{j\omega}$，得$dz=jre^{j\omega}d\omega=jzd\omega$ 或者$d\omega=(1/j)z^{-1}dz$。

代入上式，有：$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\cdot z^{n-1}dz$

式中$\oint$记为在半径为r，以原点为中心的封闭圆上沿逆时针方向的围线积分。

Z变换： $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X[z]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n} \qquad x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

7.1 双边Z变换

- Z变换收敛：信号$x[n]r^{-n}$的傅立叶变换收敛。
- Z变换的收敛域：存在着某一z值的范围，使Z变换$X(z)$收敛。

对于某一具体的信号（序列），除了给出Z变换的表达式外，必须同时给出明确的收敛域。

例 7.1

【例7.1】求序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的Z变换。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{a}{z}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{z}}$$

为使 $X(z)$ 收敛，必须满足 $\left|\frac{a}{z}\right|<1$ ，即 $|z|>|a|$

故Z变换为 $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$

例 7.1

对于$0 < a < 1$，例7.1的收敛域如图所示

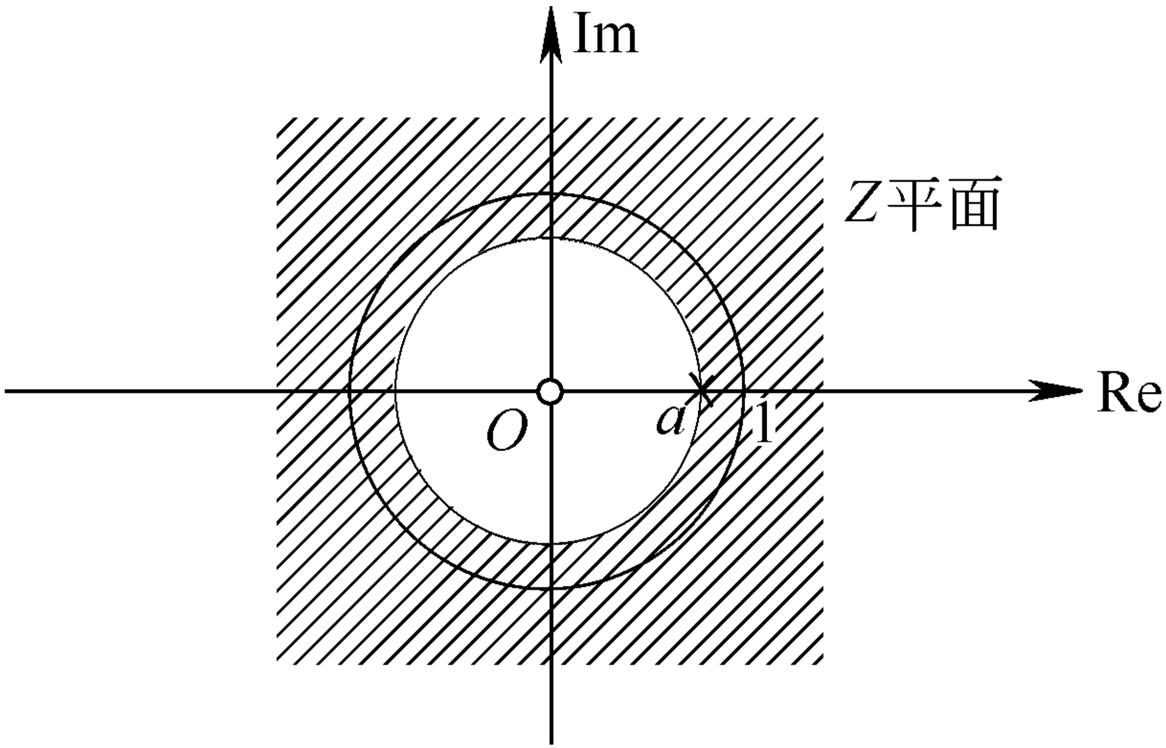


图7-1 当$0 < a < 1$时，例7.1的零极点和收敛域

例 7.2

【例7.2】设序列 $x(n)=-a^n u(-n-1)$，求其Z变换。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-a^n z^{-n}\right)$$

令m=-n，则

$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}-a^{-m}z^{m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-a^{-n}z^{n}+a^{0}z^{0}\ =1-\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}z^{n}$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}\right)\Bigg/\left(1-\frac{z}{a}\right)$$

例 7.2

显然上式只有当 $\left|\frac{z}{a}\right|<1$,即 $|z|<|a|$ 时收敛，此时

$$X(z)=1-\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \qquad |z|<|a|$$

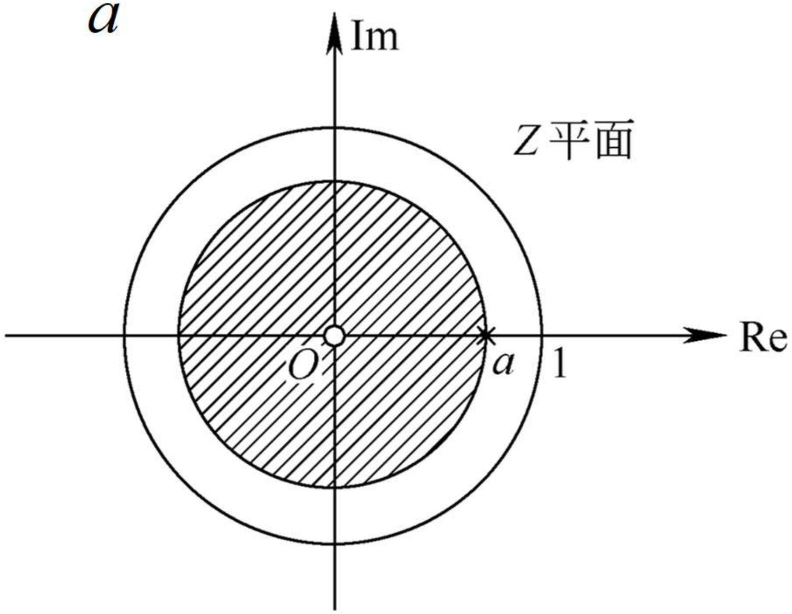


图7-2　当 $0<a<1$ 时，例7.2的零极点和收敛域

Matlab: 计算Z变换

【例7.26】计算下列信号的Z变换。

（1） $x[n]=\dfrac{a^n}{n+1}u[n]$

（2） $x[n]=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\cos(an)u[n]$

解：程序和运行结果如下

(1)

```
>>syms a n z
>>xn=a^n/(n+1)
>>xz=ztrans(xn,n,z)
xz =
-z/a*log(1-1/z*a)
```

(2)

```
>>syms a n z
>> xn=(1/3)^n*cos(a*n)
>> xz=ztrans(xn,n,z)
xz =
3*(3*z-cos(a))*z/(9*z^2-6*z*cos(a)+1)
```

7.2 Z变换收敛域

为使Z变换收敛，就要求信号$x[n]r^{-n}$的傅立叶变换收敛。因此，它的Z变换的 ROC就是由这样一些 $z = re^{j\omega}$值所组成，在这些Z值上，$x[n]r^{-n}$绝对可和，即：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$$

因此，收敛域仅决定于$r = |z|$，而与ω无关。

由此可得，若某一具体的Z值是在ROC内，那么位于以原点为圆心的同一圆上的全部Z值（他们具有相同的模）也一定在该ROC内，这就保证了$X(z)$的ROC是由以原点为中心的圆环组成。

例 7.3

【例7.3】设双边序列 $x(n)=b^{|n|}$ ， $-\infty \le n \le \infty \quad b>0$

$$x(n)=\underbrace{b^{n}u(n)}_{n\ge 0}+\underbrace{b^{-n}u(-n-1)}_{n<0}$$

$$Z[b^{n}u[n]]=\frac{1}{1-bz^{-1}} \qquad |z|>b$$

$$Z\left[b^{-n}u[-n-1]\right]=-Z\left[-\left(b^{-1}\right)^{n}u[-n-1]\right]=\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}} \qquad |z|<b^{-1}$$

对于b>1，没有任何公共的ROC。

对于b<1，上式的ROC有重叠，因此合成序列的Z变换是

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \qquad b<|z|<\frac{1}{b}$$

例 7.4

【例7.4】 求序列 $x[n]=\delta[n]$ 的Z变换，并确定它的收敛域。

解：这个序列可看成$n_1=n_2=0$时有限长序列的特例，由于

$$Z[\delta[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=1 \qquad 0\le|z|\le\infty$$

所以收敛域是整个平面（$0\le|z|\le\infty$）。

例 7.5

【例7.5】求序列 $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[-n-1]+(\frac{1}{3})^n u[n]$ 的Z变换，并确定它的收敛域。

解：其双边Z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(\frac{1}{2})^n u[-n-1]+(\frac{1}{3})^n u[n]\right]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n u[-n-1]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{3})^n u[n]z^{-n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n+\sum_{n=0}^{\infty}3(\frac{1}{3}z^{-1})^n$$

$$=-1+\frac{1}{1-2z}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{-(\frac{1}{6})z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{-\frac{1}{6}z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

例 7.5

当 $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| > 1$和 $\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1$ 时，上面的级数收敛。

或者等效为$|z| < \frac{1}{2}$和 $|z| > \frac{1}{3}$ 。

因此，其收敛域是 $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ 。

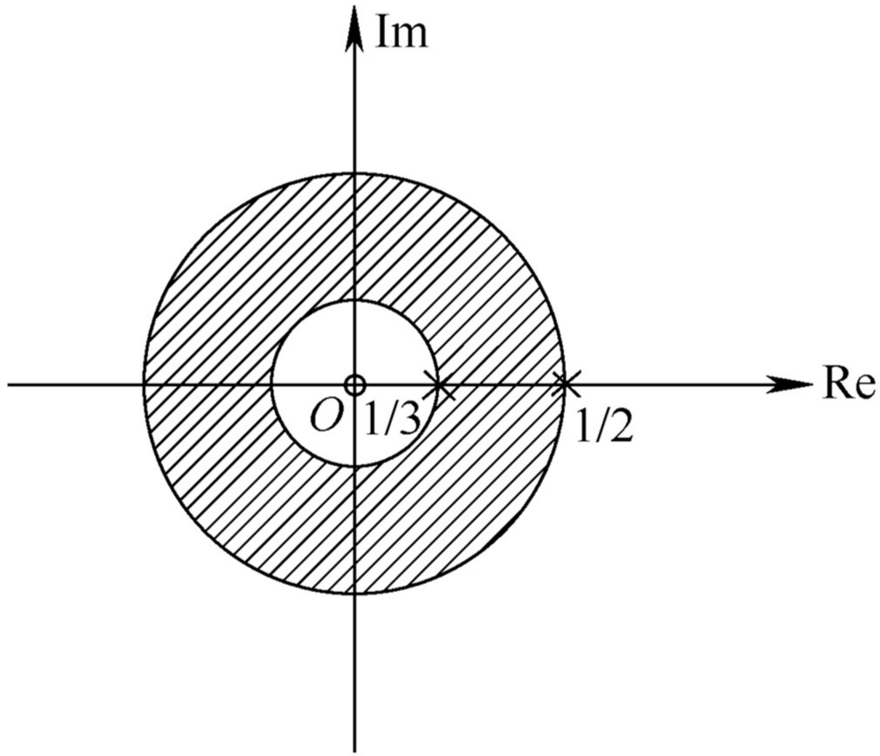


图7-6 例7-5的ROC

7.2 Z变换收敛域

- **1. 有限长序列**

在有限区间 $n_1 \le n \le n_2$之内序列才具有非零的有限值，其Z变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n}$$

级数收敛，一般要求 $\left| x[n] z^{-n} \right| < \infty$， $n_1 \le n \le n_2$

由于$x[n]$有界，显然，在 $0 < |z| < +\infty$ 上，都满足此条件。

故有限长序列的收敛域至少是除z=0和z=∞外的整个Z平面。

7.2 Z变换收敛域

如对 $n_1=-2,\quad n_2=3$情况

$$X(z)=\sum_{n=-2}^{3}x[n]z^{-n}$$

$$=\underbrace{x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}}_{|z|<\infty}+\underbrace{x(0)z^{0}}_{\text{常数}}+\underbrace{x(1)z^{-1}+x(2)z^{-1}+x(3)z^{-1}}_{|z|>0}$$

其收敛域就是除z=0和z=∞外的整个Z平面。

7.2 Z变换收敛域

在n_1、n_2的特殊选择下，收敛域还可扩大：

- 若$n_1>0$，收敛域为$0<|z|\le\infty$，即除z=0外的整个Z平面。
- 若$n_2<0$，收敛域为$0\le|z|<\infty$，即除z=∞外的整个Z平面。
- 若 $n_2<0$和$n_1>0$，收敛域为 $0<|z|<\infty$，即除z=0和z=∞外的整个Z平面。

7.2 Z变换收敛域

- **2.** 右边序列：当 $n < n_1$时，$x[n]$=0。

Z变换为 $X[z]=\sum_{n=n_1}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=n_1}^{-1}x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$

上式右端第一项为有限长序列的Z变换。

第二项是Z的负幂级数。存在一个收敛半径 R_{x-} ，级数在以原点为中心，以 R_{x-} 为半径的圆外任何点都绝对收敛。

因此，右边序列Z变换的收敛域为 $R_{x-}<|z|<\infty$ 。

若$n_1\geq 0$，则不存在第一项，故收敛域应包括Z=∞，收敛域为$R_{x-}<|z|\leq\infty$ 。

7.2 Z变换收敛域

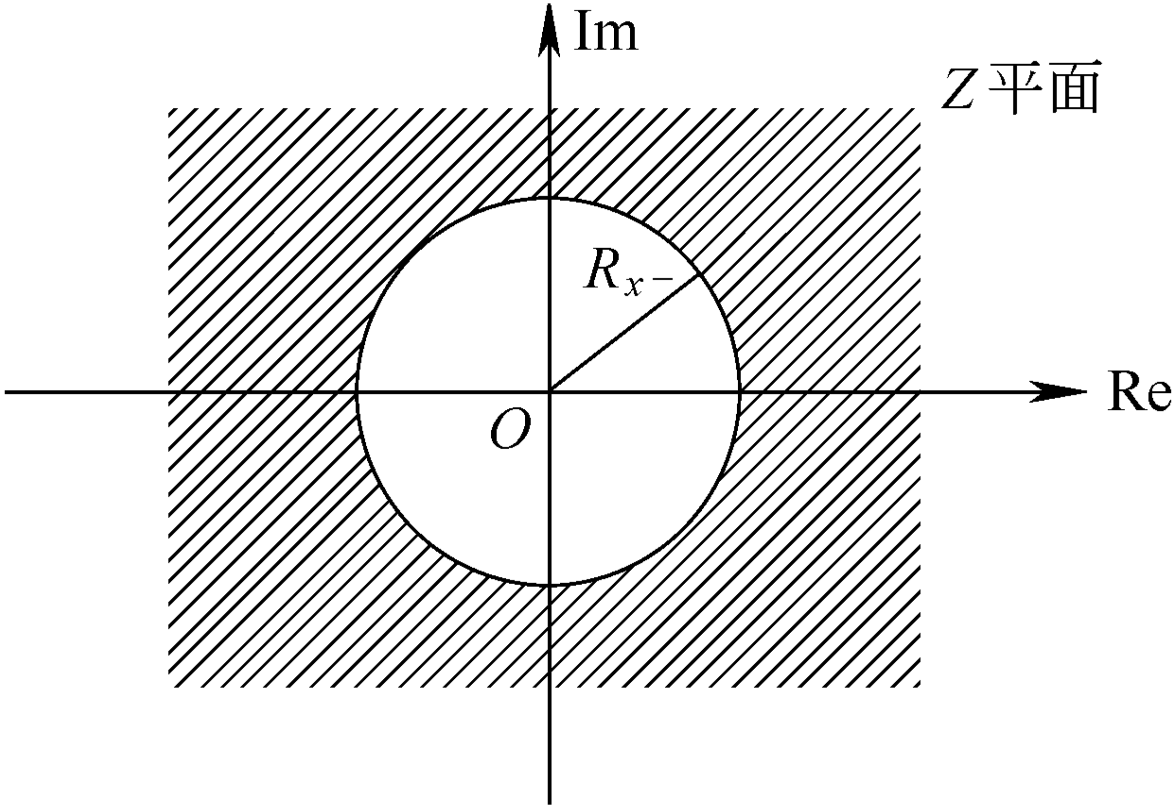


图7-3　右边序列的ROC

7.2 Z变换收敛域

- **3.** 左边序列：当 $n > n_2$ 时，$x[n]=0$。

Z变换为 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2} x[n]z^{-n}$$

上式右端第二项为有限长序列的Z变换，第一项是正幂级数。按级数收敛理论可推知，必有收敛半径 R_{x^+}，级数在以原点为中心，以 R_{x^+} 为半径的圆内任何点都绝对收敛。

左边序列Z变换的收敛域为 $0<|z|<R_{x^+}$ 。

若 $n_2 \le 0$，则不存在第二项，故收敛域应包括Z=0，收敛域为 $|Z|<R_{x^+}$。

7.2 Z变换收敛域

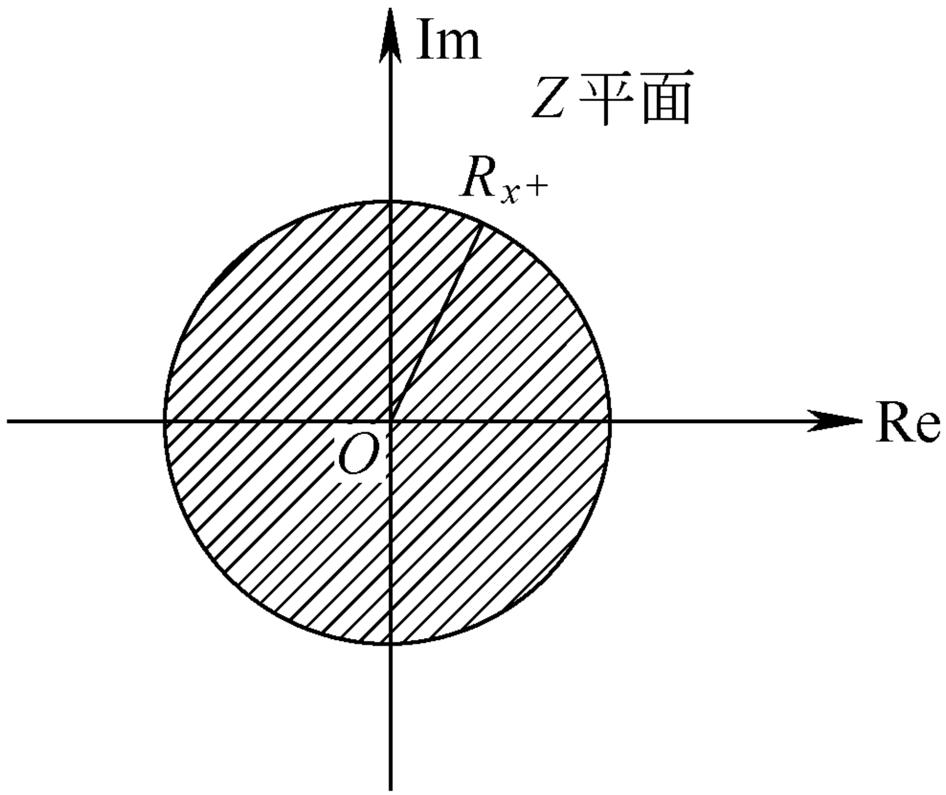


图7-4 左边序列的ROC

7.2 Z变换收敛域

- **4.** 双边序列

双边序列是从n=-∞延伸到n=+∞的序列，可以看成是一个右边序列和一个左边序列之和，即

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}x[n]z^{-n}$$

上式右边第一个级数是右边序列，其收敛域为$|z|>R_{x^-}$ ；第二个级数是左边序列，收敛域为 $|z|<R_{x^+}$ 。

如果满足$R_{x^-}<R_{x^+}$ 则存在公共收敛域，

收敛域为$R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$ 这是一个环状区域。

7.2 Z变换收敛域

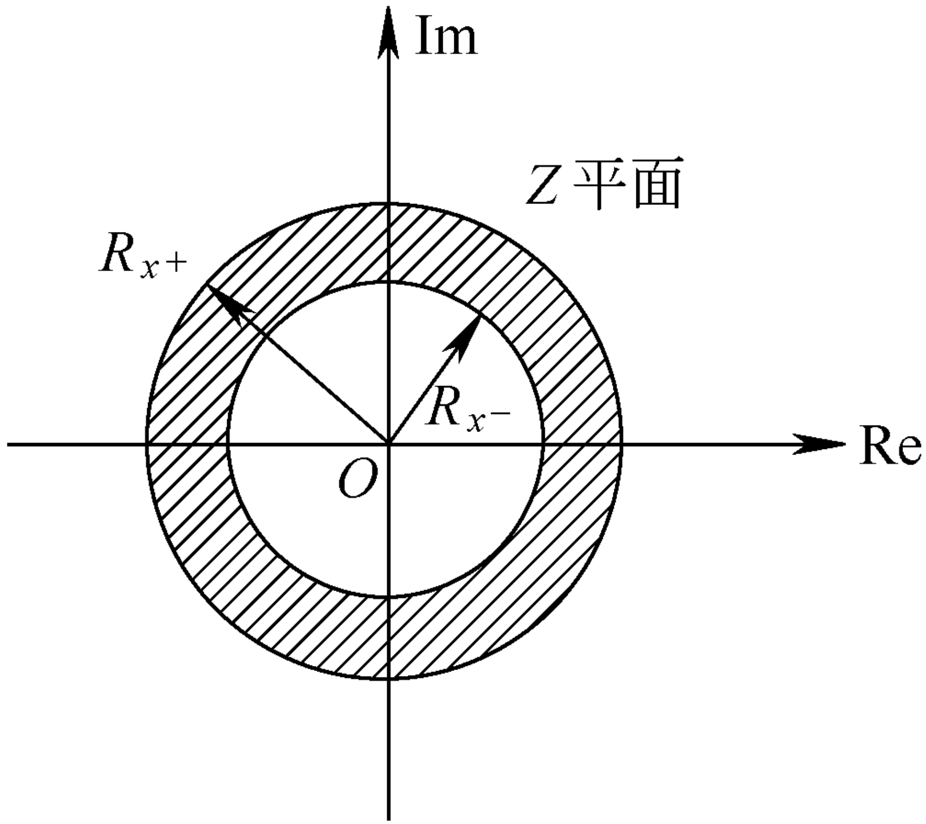


图7-5 双边序列的ROC

7.3 Z变换的几何表示：零极点图

- 考虑Z变换式是有理的：

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$N(z)$的根使$X(z)=0$，称为$X(z)$的零点；

$D(z)$的根使$X(z)$变成无界，称为$X(z)$的极点。

在Z平面内，画出$X(z)$的零点和极点，分别用○和×表示，这样的图称为$X(z)$的零极点图。

7.3 Z变换的几何表示：零极点图

$X(z)$的值等于所有的零点矢量的乘积除以所有的极点矢量的乘积，并乘以一个常数因子。

零点矢零点矢量为 $\overrightarrow{z_1 - 0} = Ae^{j\theta}$

极点矢量为 $\overrightarrow{z_1 - 1/3} = B_1 e^{j\varphi_1}$

和 $\overrightarrow{z_1 - 2} = B_2 e^{j\varphi_2}$

$$X(z) = K \frac{A}{B_1 \cdot B_2} \cdot \frac{e^{j\theta}}{e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

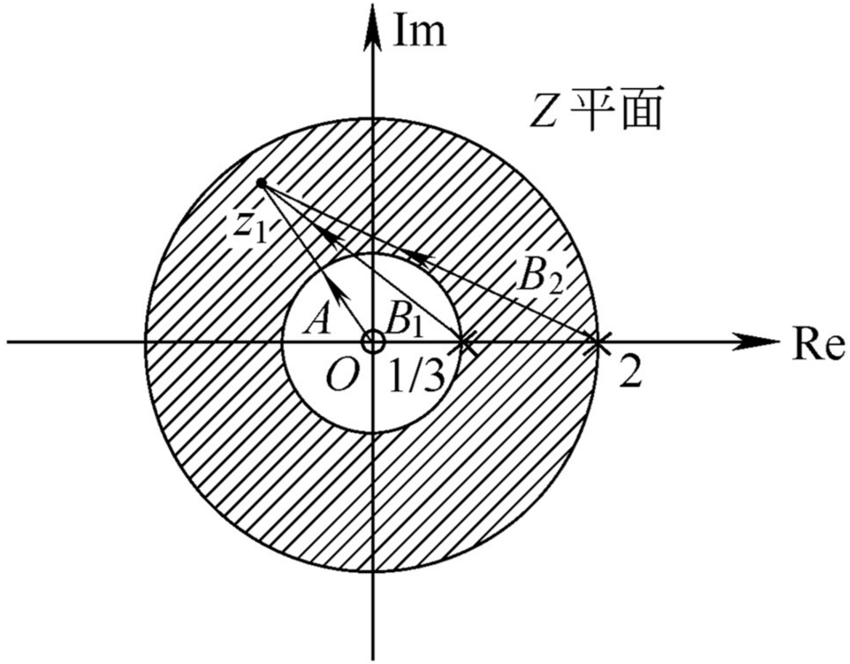


图7-7 零极点矢量

当 z_1位于z平面单位圆上，上式就是$x[n]$频谱$H(j\omega)$。

Matlab: 零极点图

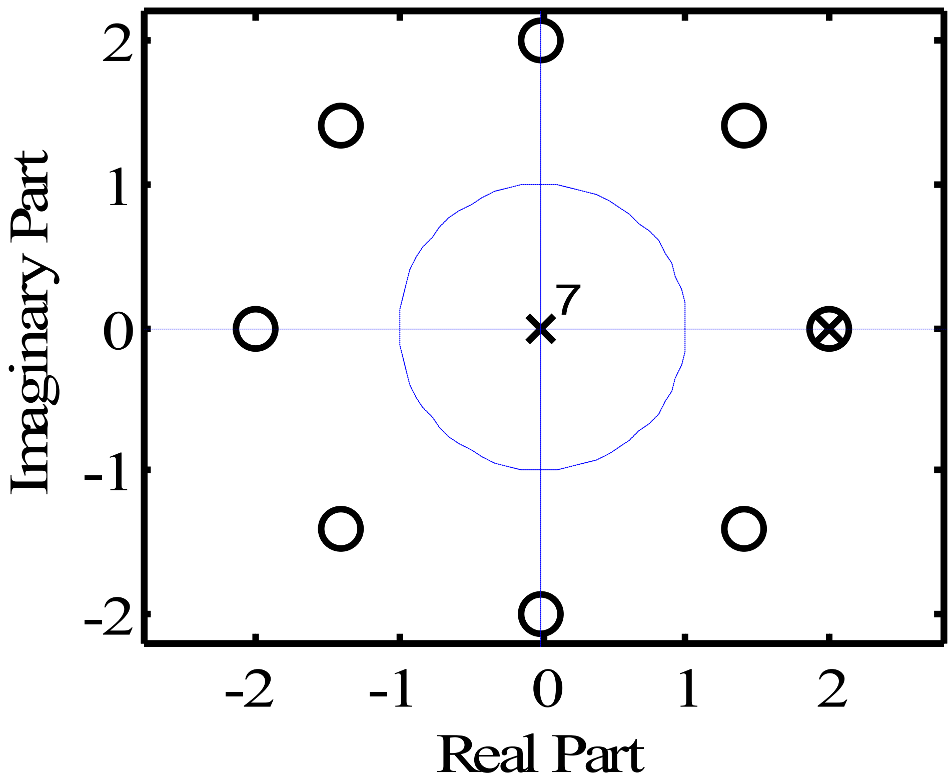
【例7.30】已知 $X(z)=\dfrac{1-(2z^{-1})^{8}}{1-2z^{-1}}$ ，试画出零极点图。

解：在Matlab的信号处理工具箱中提供的zplane( )函数可直接用于在z平面内绘制出零点和极点,零点用○表示，极点用×表示，该函数同时给出用作参考的单位圆。 zplane( )函数的调用格式之一为zplane(b,a)， 其中b和a分别表示由 的分子和分母多项式的系数所构成的行向量。程序如下：

```
>> b=[1,0,0,0,0,0,0,0,-256]
>> a=[1,-2]
>> zplane(b,a)
```

Matlab: 零极点图

程序运行结果如图所示。图中在z=0处有一个7阶极点(边上的数字标明了极点的阶数)，在z=2处有1个极点和1个零点相消。$X(z)$的其他零点位置为 $z_k = 2e^{j2\pi k/8}$， $k = 1, \cdots, 7$



7.4 Z变换性质

- **1. 线性**

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)$ $\qquad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$

则 $ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{Z} aX(z) + bY(z)$ $\qquad R_- < |z| < R_+$

$$R_- = \max\left(R_{x^-},\ R_{y^-}\right), \qquad R_+ = \min\left(R_{x^+},\ R_{y^+}\right)$$

如果有零点和极点相抵消，从而使ROC的边界发生改变，则收敛域可能在原来收敛域的基础上扩大。

例 7.6

【例7.6】求序列$x_1[n]=a^n u[n]-a^n u[n-1]$的Z变换

解：令　$x[n]=a^n u[n],\qquad y[n]=a^n u[n-1]$

由Z变换定义式，得

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]z^{-n}=\frac{a}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

所以　$Z[x_1[n]]=X(z)-Y(z)=\dfrac{z-a}{z-a}=1\qquad 0\le|z|\le\infty$

例 7.7

【例7.7】已知 $x[n]=[\cos\omega_0 n]u[n]$，求它的Z变换。

解：已知 $Z[a^n u[n]]=\dfrac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$

所以 $Z[e^{j\omega_0 n}u[n]]=\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} \qquad |z|>|e^{j\omega_0}|=1$

$Z[e^{-j\omega_0 n}u[n]]=\dfrac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} \qquad |z|>|e^{-j\omega_0}|=1$

$$Z[\cos(\omega_0 n)u[n]]=Z\left[\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}u[n]\right]=\frac{1}{2}Z[e^{j\omega_0 n}u[n]]+\frac{1}{2}Z[e^{-j\omega_0 n}u[n]]$$

$$=\frac{1}{2(1-e^{j\omega_0}z^{-1})}+\frac{1}{2(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})}=\frac{1-z^{-1}[\cos\omega_0]}{1-2z^{-1}[\cos\omega_0]+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

7.4 Z变换性质

- **2. 移位性**

若序列$x[n]$的双边Z变换为 $x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z) \qquad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

则有 $x[n-m]\xleftrightarrow{Z}z^{-m}X(z) \qquad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

式中m为任意整数，m为正则为延迟，m为负则为超前。

证：按Z变换的定义

$$Z\left[x[n-m]\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-m]z^{-n}=z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}=z^{-m}X(z)$$

上式推导过程中，应用了变量替换$k=n-m$。

7.4 Z变换性质

- **3. Z域微分**

若$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{d}{dz}X(z)$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

证： $X(\mathrm{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{dz}\left(z^{-n}\right)$$

$$= -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] z^{-n} = -z^{-1} Z\big[nx[n]\big]$$

7.4 Z变换性质

所以有 $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

同理可得

$$n^m x[n] \xleftrightarrow{Z} \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m X(z)$$

式中 $\left[-z\dfrac{d}{dz}\right]^m$ 符号表示 $-z\dfrac{d}{dz}\left[-z\dfrac{d}{dz}\left(-z\dfrac{d}{dz}\cdots\left(-z\dfrac{d}{dz}X(z)\right)\right)\right]$

共求导m次。

例 7.8

【例7.8】 已知 $Z[u[n]] = \frac{z}{z-1}$， $|z|>1$，

求斜变序列 $nu[n]$ 的Z变换。

解：

$$Z[nx[n]] = -z\frac{d}{dz}Z[u[n]] = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z|>1$$

7.4 Z变换性质

- **4. Z域尺度变换**

若 $X[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left[\frac{z}{a}\right] \qquad R_{x^-} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x^+}$

式中a是常数，它可以是复数。

证：按定义

$$Z\left[a^n x[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left[\frac{z}{a}\right] \quad R_{x^-} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x^+}$$

特别地，当 $a=-1$ 时： $(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(-z)$

7.4 Z变换性质

- **5. 时域扩展**

离散时间的时间扩展可定义为

$$x_{(k)}=\begin{cases}x[n/k], & n\text{是}k\text{的整数倍}\\ 0, & n\text{不是}k\text{的整数倍}\end{cases}$$

即，它在原有序列$x[n]$的各连续值之间插入（k-1）个零值序列。当k<0时，它在原有序列$x[n]$上还有一次时间反转变换。

若 $x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z),\quad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

则 $x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{Z}X\left(z^k\right),\quad R_{k^-}^{1/k}<|z|<R_{k^+}^{1/k}$

7.4 Z变换性质

由于

$$X\left(z^{k}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-kn}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] z^{-n}$$

从上式中我们可以看出，$X\left(z^{k}\right)$所对应的原信号$x_{(k)}[n]$仅在kn值上非零，且等于$x[n]$。

若取$k=-1$，则有

$$x[-n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(1/z), \quad R_{k^-}<|1/z|<R_{k^+}$$

上式称为时间反转性质。

7.4 Z变换性质

- **6. 时域卷积定理**

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) \qquad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$

则 $x[n]*y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z) \quad \max\{R_{x^-}, R_{y^-}\} < |z| < \min\{R_{x^+}, R_{y+}\}$

证：

$$Z[x[n]*y[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x[n]*y[n]]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}[x[m]*y[n-m]]\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n-m]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m}Y(z) = Y(z)\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m}$$

$$= X(z)Y(z) \qquad \max\{R_{x^-}, \quad R_{y^-}\} < |z| < \min\{R_{x^+}, \quad R_{y+}\}$$

例 7.9

【例7.9】设 $x[n]=a^n u[n]$， $y[n]=b^n u[n]-ab^{n-1}u[n-1]$，求它们的卷积和 $x[n]*y[n]$ 。

解：由于 $X(z)=Z[x[n]]=\dfrac{z}{z-a}$ $\qquad |z|>|a|$

$$Y[Z]=Z[y[n]]=\frac{z}{z-b}-\frac{a}{z-b}=\frac{z-a}{z-b} \qquad |z|>|b|$$

根据卷积定理 $Z[x[n]*y[n]]=X(z)Y(z)=\dfrac{z}{z-b}$， $\qquad |z|>|b|$

其Z反变换 $x[n]*y[n]=z^{-1}[X(z)Y(z)]=b^n u[n]$

例 7.9

在$z=a$处，$X(z)$的极点被$Y(z)$的零点所取消，若$|b|<|a|$，则卷积运算后，信号的收敛域比$X(z)$和$Y(z)$的收敛域的重叠部分要大。

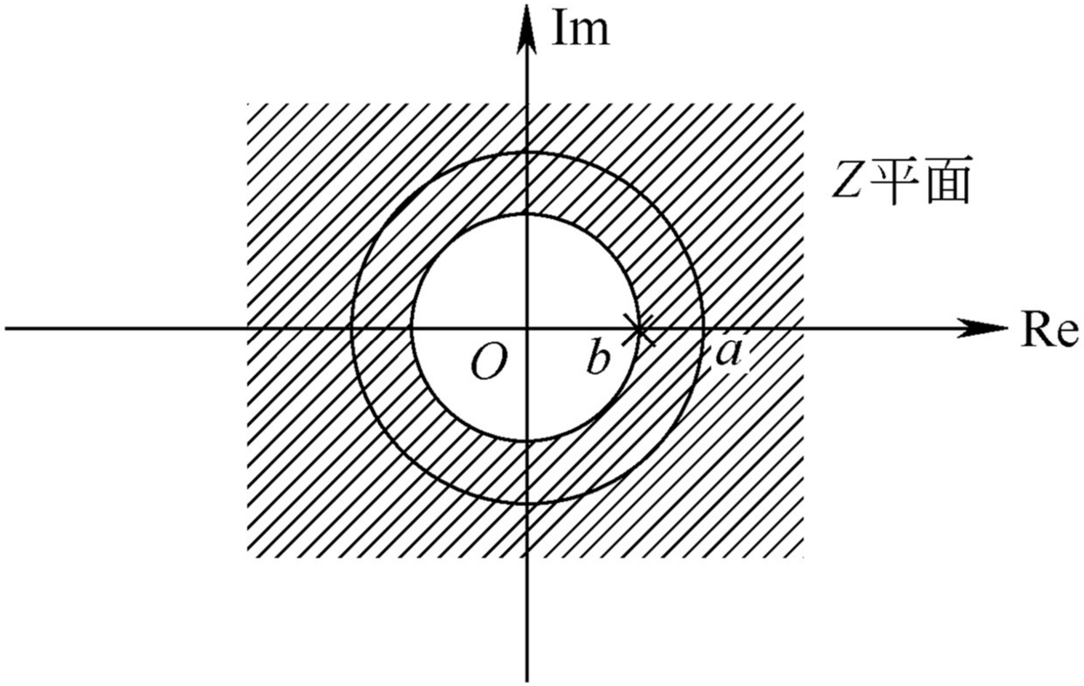


图7-8 例7-9的ROC图形

7.4 Z变换性质

- **7. 共轭序列**

一个复序列$x[n]$的共轭序列记为$x^*[n]$，

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

证：按定义

$$Z[x^*[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[x[n] \cdot (z^*)^{-n} \right]^*$$

$$= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n] (z^*)^{-n} \right]^* = X^*(z^*) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

7.4 Z变换性质

- **8.** 累加性质

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $\qquad ROC = R$

则 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$ $\qquad ROC$至少包含$R \cap |z|>1$

由$u[n]$的卷积性质，可得 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = u[n] * x[n]$

又因为 $u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$ $\qquad |z|>1$

因此，根据卷积性质， 我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = u[n] * x[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \qquad ROC = R \cap |z|>1$$

7.4 Z变换性质

- **9.** 初值定理

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

要求$x[n]$为因果序列，且$|z|>R_x^-$

7.4 Z变换性质

- **10.** 终值定理

$$x[\infty] = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$$

要求$x[n]$为因果序列，且当$|z| \geq 1$ 时，$(z\text{-}1)X(z)$收敛。

7.5 常用信号的Z变换对

序号	序列	z 变换	收敛域
1	$\delta[n]$	1	整个 z 平面
2	$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4	$\delta[n-m]$	z^{-m}	除去 0（若 m>0）或∞（若 m<0）的所有 z
5	$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6	$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

7.5 常用信号的Z变换对

序号	序列	z 变换	收敛域
8	$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9	$[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10	$[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11	$[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12	$[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

7.6.1 幂级数展开法（长除法）

由Z变换的定义

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\underbrace{\ldots x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}}_{z\text{的正幂}}+$$

$$x(0)z^{0}+\underbrace{x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots x(n)z^{n}+\ldots}_{z\text{的负幂}}$$

根据收敛域判断所要得到的$x[n]$的特性(单边、双边等)，然后再展开成相应的Z的幂级数。

如果$X(z)$的收敛域是$|z|>R_{x^-}$，则$x[n]$必然是因果序列，此时$N(z)$、$D(z)$按z^{-1}的升幂次序进行长除法。

如果收敛域是$|z|<R_{x^+}$，则$x[n]$必然是左边序列，此时$N(z)$、$D(z)$按z的升幂次序进行长除法。

例 7.10

【例7.10】已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$，收敛域为$|z|>1$，求其Z反变换$x[n]$。

解：由$X(z)$的收敛域得，$x[n]$必然是因果序列（右边序列）。

按 z^{-1}升幂次序排成下列形式

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

进行长除。

例 7.10

$$
\begin{array}{r}
z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
1-2z^{-1}+z^{-2}\,\big)\,\overline{z^{-1}\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}} \\
2z^{-2}-z^{-3} \\
\underline{2z^{-2}-4z^{-3}+2z^{-4}} \\
3z^{-3}-2z^{-4} \\
\underline{3z^{-3}-6z^{-4}+3z^{-5}} \\
4z^{-4}-3z^{-5} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

所以 $X(z)=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$，得到 $x[n]=nu[n]$

例 7.11

【例7.11】已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ ，收敛域为 $|z|<1$，求其Z反变换 $x[n]$。

解： 由 $X(z)$ 的收敛域得，$x[n]$ 必然是左边序列。

按 z 的升幂次序排成下列形式

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z^1+1}$$

长除运算

例 7.11

$$
\begin{array}{r}
z+2z^2+3z^3+\cdots \\
1-2z+z^2 \overline{\big) z \qquad\qquad\qquad} \\
\underline{z-2z^2+z^3} \\
2z^2-z^3 \\
\underline{2z^2-4z^3+2z^4} \\
3z^3-2z^4 \\
\underline{3z^3-6z^4+3z^5} \\
4z^4-3z^5 \\
\cdots
\end{array}
$$

所以 $X(z)=z^1+2z^2+3z^3+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{-1}-nz^{-n}$，得到 $x[n]=-nu[-n-1]$

例 7.12

【例7. 12】求反变换 $X(z)=\log\left(1+az^{-1}\right)$, $|z|>|a|$

由$|z|>|a|$，可得$az^{-1}<1$。因此，可用泰勒级数展开为

$$\log\left(1+az^{-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(az^{-1}\right)^{n}}{n},\quad \left|az^{-1}\right|<1$$

即 $X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n},\quad \left|az^{-1}\right|<1$

据此，可以确定$x[n]$为 $x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n}}{n}, & n\geq 1\\ 0, & n\leq 0\end{cases}$

或写为 $x[n]=\dfrac{-(-a)^{n}}{n}u[n-1]$

7.6.2 部分分式展开法

如Z变换式$X(z)$具有如下形式的有理分式

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^{-M}+b_{m-1}z^{-(M-1)}+\cdots+b_1 z^{-1}+b_0}{a_n z^{-N}+a_{n-1}z^{-(N-1)}+\cdots+a_1 z^{-1}+a_0}$$

式中的$N(z)$、$D(z)$都是变量z^{-1}的实数系数多项式。

一般情况下（无重根），可展开成以下的部分分式形式

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{z-z_k}$$

当$M\geq N$时，存在B_n（$M=N$时只有B_0项），$M<N$时，各个$B_n=0$。B_n可用长除法求得。

例 7.13

【例7. 13】 已知 $X(z)=\dfrac{10z}{z^2-3z+2}$，$|z|>2$，试用部分分式展开法求其反变换。

解：

$$X(z)=\frac{10z}{z^2-3z+2}=\frac{10z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

将此式展开成部分分式

$$X(z)=\frac{-10}{1-z^{-1}}+\frac{10}{1-2z^{-1}}$$

根据收敛域可得 $x[n]=10\left(2^n-1\right)u[n]$

例 7.14

【例7. 14】已知 $X(z)=\dfrac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2}$， $|z|>2$ ， 试用部分分式法求其反变换。

解:将此等式两端同除以z并展开成部分分式得

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{C_1}{z-2}+\frac{C_2}{(z-2)^2}$$

待定参数

$$A_1=z\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=0}=-1$$

$$A_2=(z-1)\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=1}=6$$

例 7.14

$$C_2 = (z-2)^2 \frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=0} = 4$$

取z=-2，得 $0 = \frac{A_1}{-2} + \frac{A_2}{-3} + \frac{C_1}{-4} + \frac{C_2}{16}$ 从而 $C_1 = -5$

得 $$\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{z} + \frac{6}{z-1} + \frac{-5}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2}$$

$$X(z) = -1 + \frac{6z}{z-1} - 5\frac{z}{z-2} + 2\frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$X(z) = -1 + \frac{6}{1-z^{-1}} - \frac{5}{1-2z^{-1}} + 2\frac{2z}{(z-2)^2}$$

根据收敛域得 $x[n] = -\delta[n] + 6u[n] - 5(2)^n u[n] + 2n(2)^n u[n]$

Matlab: 部分分式展开

【例7.28】已知 $X(z)=\dfrac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2}, |z|>2$，试对$X(z)$作部分分式展开，并求$x[n]$。

解：首先改写$X(z)$，将分子和分母多项式按z的降幂次序排列。

$$X(z)=\frac{2z^{-2}+4^{-3}}{1-5z^{-1}+8z^{-2}-4z^{-3}}$$

程序如下：

```
>> b=[0,0,2,4]
>> a=[1,-5,8,-4]
>> [r,p,k]=residuez(b,a)
```

Matlab: 部分分式展开

运行结果：

r =	p =	k =
-7.0000	2.0000	-1
2.0000	2.0000	
6.0000	1.0000	

其中，p向量的第一、二两个值均为2，表明它是一个二阶极点，它们的展开系数分别对应于r向量中的第一、二个值。故

$$X(z)=\frac{-7}{1-2z^{-1}}+\frac{2}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{6}{1-z^{-1}}-1$$

改写为 $$X(z)=\frac{-7}{1-2z^{-1}}+\frac{z\cdot 2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{6}{1-z^{-1}}-1$$

Matlab: 部分分式展开

查表可求得$x[n]$:

$$x[n] = -7(2)^n u[n] + (n+1)(2)^{n+1} u[n+1] + 6u[n] - \delta[n]$$

当n=-1时上式中等号后面第二项为零，故可进一步化简为

$$x[n] = -5(2)^n u[n] + 2n(2)^n u[n] + 6u[n] - \delta[n]$$

也可直接调用iztrans( )函数来获得反变换。

7.6.3 围线积分法（留数法）

根据$X(z)$反变换的围线积分表示式

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

围线C为反时针方向。

根据留数定理：$X(z)z^{n-1}$沿围线C的积分等于$X(z)z^{n-1}$在围线C内部各极点的留数之和，

$$x[n]=\begin{cases}0, & n<n_0\\ \sum_m \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{Z=P_m}, & n\geq n_0\end{cases}$$

当收敛域$|z|>a$时，式中P_m是逆时针方向围线C外的$X(z)z^{n-1}$的极点。

7.6.3 围线积分法（留数法）

同样，当收敛域 $|z|<a$，有：

$$x[n]=\begin{cases}-\sum_m \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{Z=P_m}, & n<n_0 \\ 0, & n\ge n_0\end{cases}$$

尽管当收敛域 $|z|<a$ 时，极点在围线 C 的外部，式中的极点 P_m 可以看作是顺时针方向围线 C 内 $X(z)z^{n-1}$ 的极点。$x[n]$ 是一左边序列。

7.6.3 围线积分法（留数法）

$X(z)z^{n-1}$是有理分式，如果 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=P_m$ 处是L阶极点，围线C为反时针方向，则

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=P_m}=\frac{1}{(L-1)!}\left[\frac{d^{L-1}}{dz^{L-1}}(z-P_m)^L X(z)z^{n-1}\right]_{z=P_m}$$

如果$z=P_m$仅是单极点，即L=1，则有

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=P_m}=\left[(z-P_m)X(z)z^{n-1}\right]_{z=P_m}$$

应当注意收敛域内的围线所包围的极点情况，以及对应于不同的n值，在z=0处的极点可能具有不同的阶次。

例 7.15

【例7.15】已知$X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)}$，收敛域为$|z|>2$，用围线积分法求Z反变换。

解：因为$X(z)$收敛域$|z|>2$，所以$x[n]$必为因果序列。

由 $$X(z)z^{n-1}=\frac{z^2}{(z-1)(z+2)}z^{n-1}$$

当 $n\geq -1$ $X(z)z^{n-1}$ 只有$p_1=1$，$p_2=-2$两个极点，得：

$$\mathrm{Re}\,s\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=1}=\frac{z^{n+1}}{Z+2}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Re}\,s\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=-2}=\frac{z^{n+1}}{z-1}\bigg|_{z=-2}=\frac{2}{3}(-2)^n$$

例 7.15

得 $$x[n]=\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n\right]u[n+1]$$

当n=-1时，$x[n]$=0，因此上式可简化为

$$x[n]=\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n\right]u[n]$$

当 $n\leq -1$，在z=0处有极点存在，不难求得该极点与其它两个极点处之留数总和为零。实际上，由于收敛域为$|z|>2$，不包含z=∞，因此Z变换不应该包含正幂次项，即要求 $n\leq -1$时，$x[n]$=0。

Matlab: 计算Z反变换

【例7.27】已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$，$|z|>2$，求$x[n]$。

解：程序和运行结果如下

```
>> syms n z
>> xz=z/((z-1)*(z-2)^2)
>> xn=iztrans(xz,z,n)
xn =
-2^n+1/2*2^n*n+1
```

上述运算结果适用于n≥0。

7.7 单边Z变换

一个序列的单边Z变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$X(z)=Z(x[n]u[n])$$

$$x[n]\xleftrightarrow{uz}X(z)$$

例 7.16

【例7.16】 求序列 $x[n]=a^n u[n+1]$的单边Z变换。

解： 按单边Z变换式的定义

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n u[n+1]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

例 7.17

【例7.17】求单边Z变换 $X(z)=\dfrac{10z^2}{(z-1)(z+1)}$ 的反变换。

解：由于Z变换式的两个极点在单位圆上，收敛域为单位圆的外边，对应的序列为因果序列。

用部分分式展开，得

$$X(z)=\frac{5z}{z-1}+\frac{5z}{z+1}$$

得 $\quad x[n]=5u[n]+5(-1)^n u[n] \qquad n\geq 0$

7.8 单边Z变换的性质

- **1. 位移性**

若$x[n]$单边变换的定义为

$$x[n] \xleftrightarrow{uz} X(z)$$

则 $$Z\big[x[n+m]u[n]\big] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right]$$

$$Z\big[x[n-m]u[n]\big] = z^{-m}\left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k}\right]$$

例 7.18

【例7.18】已知系统的一阶差分方程为

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

输入$x[n]$=$4^n u[n]$，初始条件$y[-1]$=4，试求系统的响应$y[n]$。

解：对差分方程求单边Z变换，得

$$Y(z)-\frac{1}{4}z^{-1}(Y(z)+y[-1]z)=X(z)$$

代入初始值 $y[-1]$=4，有 $Y(z)-\frac{1}{4}z^{-1}(Y(z)+4z)=X(z)$

其中 $X(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}, \qquad |z|>4$

例 7.18

整理得

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\cdot(\frac{1}{1-4z^{-1}}+1)=\frac{2-4z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-4z^{-1})},\qquad |z|>4$$

部分分式展开，得 $$Y(z)=\frac{\frac{14}{15}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{\frac{16}{15}}{1-4z^{-1}},\qquad |z|>4$$

求Z反变换，得 $$y[n]=[\frac{14}{15}(\frac{1}{4})^n+\frac{16}{15}(4)^n]u[n]$$

第一项为零输入响应，完全由系统的起始状态决定；第二项为零状态响应，由系统的输入引起。

7.8 单边Z变换的性质

- **2.** 初值定理

对于因果序列，若

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \qquad ROC = R$$

则有：

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$$

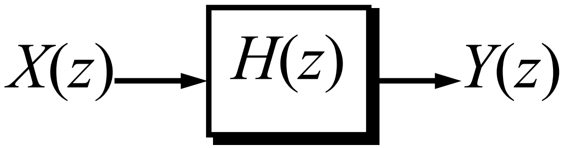
7.8 单边Z变换的性质

- **3. 终值定理**

对于因果序列$x[n]$,且$Z[x[n]]=X(z)$的极点处于单位圆$|z|=1$以内（单位圆上最多在$z=1$处可有一阶极点），则有：

$$\lim_{z\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)X(z)\right]$$

7.9.1 系统函数与系统性质



其中 $h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z)$

通常将$H(z)$称为离散LTI的系统函数。

根据卷积性质： $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

或等价地表示为： $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

7.9.1 系统函数与系统性质

1.因果性

一个因果离散LTI系统的单位脉冲响应$h[n]$满足

$$n<0,\ h[n]=0$$

且它的Z变换（系统函数）可表示为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

因果离散LTI系统的单位脉冲响应$h[n]$是一因果序列，它是一右边信号，而且$H(z)$的幂级数不包含任何z的正幂次项。

因此ROC包含 $z=\infty$。故可得到以下性质：

一个离散LTI系统是因果，当且仅当它的系统函数$H(z)$ 的ROC是某一个圆的外部，且包含无限远点 $z=\infty$ 。

例 7.19

【例7.19】考察一系统的因果性，其系统函数是

$$H(z)=\frac{z(2z^2-\frac{3}{2}z)}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}$$

解：由于系统函数分子的阶数大于分母的阶数，表明其ROC不含∞，这不符合因果性的条件。因此，该系统不是因果的。

实际上，$H(z)$可展开为如下部分分式形式

$$H(z)=\frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{z}{1-z^{-1}}$$

例 7.19

按上式求反变换，如果ROC在圆外，可得单位脉冲响应为

$$h[n]=[(\frac{1}{2})^{n+1}+1]u[n+1]$$

显然，$h[n]$不是一个因果序列。

因此，一个因果的有理系统函数$H(z)$，除了满足ROC是某一个圆的外部之外，还必须满足$H(z)$ 的分子阶次要小于分母的阶次。

例 7.20

【例7.20】考察一个系统的因果性，其系统函数表达式为

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-z^{-1}}$$

解：其收敛域ROC可分成以下三种情况

1. $|z|<\frac{1}{2}$，$h[n]$是一左边信号，因此，系统不是因果系统。

2. $\frac{1}{2}<|z|<1$，$h[n]$是一双边信号，因此，系统不是因果系统。

3. $|z|>1$，$h[n]$是一因果信号，因此，系统是因果系统。

7.9.1 系统函数与系统性质

2. 稳定性

一个稳定离散时间LTI系统的充要条件是其单位脉冲响应$h[n]$满足：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h[n] < \infty \right|$$

在这种情况下$h[n]$的傅立叶变换收敛，也就是说，系统函数$H(z)$的ROC必须包含单位圆。

因此，一个离散时间LTI系统是稳定的，当且仅当它的系统函数$H(z)$的ROC包含单位圆。

7.9.1 系统函数与系统性质

3. 因果稳定离散时间LTI系统

综合以上讨论结果，可得因果稳定离散时间系统的判据：

一个离散时间LTI系统是因果稳定的，当且仅当它的系统函数$H(z)$的ROC是某一个圆的外部，且包含无限远点$z=\infty$ ，以及系统函数$H(z)$的ROC包含单位圆。

例 7.21

【例7.21】考察一系统的因果性的稳定性，其系统函数表达式是

$$H(z)=\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

解：根据以上判据，可知当ROC: $|z|>\frac{1}{2}$ 时，$h[n]$是一因果稳定系统。该系统函数$H(z)$的两个极点都落在单位圆内。

推广至一般情况，可得如下性质：

一个因果的离散时间LTI系统是稳定的，当且仅当它的系统函数$H(z)$的全部极点都位于单位圆内。

Matlab: 系统稳定性

【例7.31】已知某一因果离散时间LTI系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z^2-z}{z^3-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}}$$

计算$H(z)$的零点和极点，画出零极点图，并判断系统是否稳定。

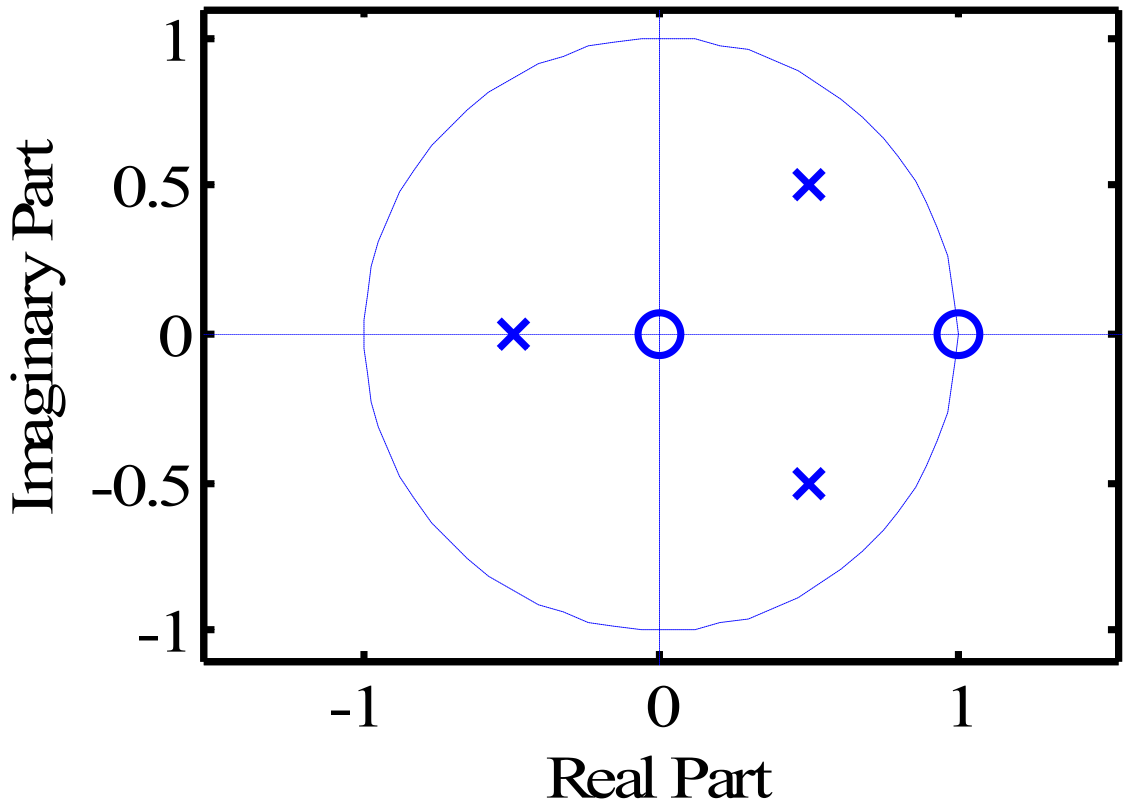
解：程序如下

```
>> b=[0,1,-1,0]
>> a=[1,-1/2,0,1/4]
>> zs=roots(b)
>> ps=roots(a)
>> zplane(b,a)
```

运行结果

```
zs =
        0
        1
ps =
     0.5000 + 0.5000i
     0.5000 - 0.5000i
    -0.5000
```

Matlab: 系统稳定性



由图可看出，该因果系统的极点都落于单位圆内，故系统稳定。

7.9.2 线性常系数差分方程的Z域分析

1. 系统函数

二阶系统的差分方程为

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_0y[n-2]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$$

对上式进行双边Z变换

$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+a_2z^{-2}Y(z)=b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)+a_2z^{-2}X(z)$$

合并整理，有

$$\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\right)Y(z)=\left(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right)X(z)$$

二阶系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$

7.9.2 线性常系数差分方程的Z域分析

同理，对于二阶系统的前向差分方程为

$$y[n+2]+a_1 y[n+1]+a_0 y[n]=b_2 x[n+2]+b_1 x[n+1]+b_0 x[n]$$

对上式进行Z变换

$$z^2 Y(z)+a_1 zY(z)+a_0 Y(z)=b_2 z^2 X(z)+b_1 zX(z)+b_0 X(z)$$

前向二阶系统的系统为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_2 z^2+b_1 z+b_0}{z^2+a_1 z+a_0}$$

例 7.22

【例7.22】已知描述系统的二阶差分方程为

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n-1]$$

求该系统的系统函数和单位样值响应。

解：作Z变换，可得 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$

将上式部分分式展开,有 $H(z)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1-2z^{-1}}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1+3z^{-1}}$

可得单位脉冲响应$h[n]$为 $h[n]=\dfrac{1}{5}\left(2^{n}-(-3)^{n}\right)u[n]$

例 7.22

推广至N阶系统：

对于N阶系统，系统的差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n \pm k] = \sum_{k=0}^{M} b_r x[n \pm k]$$

系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_r z^{\pm k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{\pm k}} = \frac{b_M z^{\pm M} + b_{M-1} z^{\pm(M-1)} + \cdots + b_1 z^{\pm 1} + b_0}{a_N z^{\pm N} + a_{N-1} z^{\pm(N-1)} + \cdots + a_1 z^{\pm 1} + a_0}$$

7.9.2 线性常系数差分方程的Z域分析

2. 线性常系数差分方程的Z域求解

描述因果线性LTI离散系统的线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad a_0 = 1$$

两边取单边Z变换，并利用Z变换的位移性质可以得到：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\left[X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x[m] z^{-m}\right]$$

于是 $$Y(z) = \frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\left[X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x[m] z^{-m}\right]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

7.9.2 线性常系数差分方程的Z域分析

如$x[n]$为因果序列（实际应用通常可满足该条件），上式可写成

$$Y(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]+\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)X(z)}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}+\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}X(z)$$

7.9.2 线性常系数差分方程的Z域分析

$$=\underbrace{\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1}y(l)z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{X(z)H(z)}_{\text{零状态响应}}$$

将起始条件及常系数a_k，b_k代入上式式可解得$Y(z)$,由Z反变换即可由$Y(z)$求出线性时不变离散系统的输出序列$y[n]$。

例 7.23

【例7.23】已知描述因果系统的二阶差分方程为

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n]$$

输入$x[n]=4^n u[n]$， 起始条件$y[-2]=0$， $y[-1]=1$，试求系统的响应$y[n]$

解： 利用单边Z变换对给定的差分方程求单边Z变换

$$Y(z)+z^{-1}[Y(z)+y[-1]z]-6z^{-2}\left[Y(z)+y[-2]z^2+y[-1]z\right]=X(z)$$

代入起始值$y[-2]=0$， $y[-1]=1$，和 $X(z)=\dfrac{1}{1-4z^{-1}}$ $|z|>4$，

有 $Y(z)+z^{-1}[Y(z)+z]-6z^{-2}\left[Y(z)+z\right]=\dfrac{1}{1-4z^{-1}}$

例 7.23

整理得 $\left(1+z^{-1}-6z^{-2}\right)Y(z)=\dfrac{1}{1-4z^{-1}}+(-1+6z^{-1})$

则：

$$Y(z)=\frac{1}{\left(1+z^{-1}-6z^{-2}\right)(1-4z^{-1})}+\frac{(-1+6z^{-1})}{\left(1+z^{-1}-6z^{-2}\right)}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{(1-2z^{-1})(1+3z^{-1})(1-4z^{-1})}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{(-1+6z^{-1})}{(1-2z^{-1})(1+3z^{-1})}}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\underbrace{\frac{A_1}{(1-2z^{-1})}+\frac{A_2}{(1+3z^{-1})}+\frac{A_3}{(1-4z^{-1})}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{B_1}{(1-2z^{-1})}+\frac{B_2}{(1+3z^{-1})}}_{\text{零输入响应}}$$

例 7.23

其中：

$$A_1=-\frac{2}{5},\qquad A_2=\frac{9}{35},\qquad A_3=\frac{8}{7};$$

$$B_1=\frac{4}{5},\qquad B_2=-\frac{9}{5};$$

进行Z反变换，得

$$y[n]=\underbrace{(-\frac{2}{5}\cdot 2^n+\frac{9}{35}\cdot(-3)^n+\frac{8}{7}\cdot 4^n)u[n]}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{(\frac{4}{5}\cdot 2^n-\frac{9}{5}\cdot(-3)^n)u[n]}_{\text{零输入响应}}$$

$$=(\frac{2}{5}\cdot 2^n-\frac{54}{35}\cdot(-3)^n+\frac{8}{7}\cdot 4^n)\cdot u[n]$$

例 7.24

【例7.24】已知描述因果系统的二阶前向差分方程为

$$y[n+2]-5y[(n+1)]+6y[n]=x[n+2]-3x[n]$$

初始条件$y[0]=2$，$y[1]=3$。试求系统的零输入响应$y[n]$。

解：当$x[n]=0$时利用单边Z变换对给定的差分方程求单边Z变换

$$z^2(Y(z)-y[0]-z^{-1}y[1])-5z(Y(z)-y[0])+6Y(z)=0$$

得 $$Y(z)=\frac{y(0)z^2+[y(1)-5y(0)]z}{z^2-5z+6}$$

例 7.24

代入初始条件$y[0]=2$，$y[1]=3$，得

$$Y(z)=\frac{2-7z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}$$

进行部分分式展开，得

$$Y(z)=\frac{3}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

进行Z反变换，得零输入响应

$$y[n]=(3\cdot 2^{n}-3^{n})\cdot u[n]$$

Matlab: 计算零状态响应

【例7.29】已知某一离散时间LTI系统的单位样值响应为

$$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$$

求当输入$x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$时系统的零状态响应，并画出输出波形。

解：系统的零状态响应为$x[n]$与$h[n]$的卷积，但Matlab符号工具箱没有提供直接进行符号卷积运算的函数。因此，根据卷积定理，可以首先将信号作Z变换，在Z域实现两者相乘，然后通过反变换求得时域解。

Matlab: 计算零状态响应

计算程序和运行结果如下

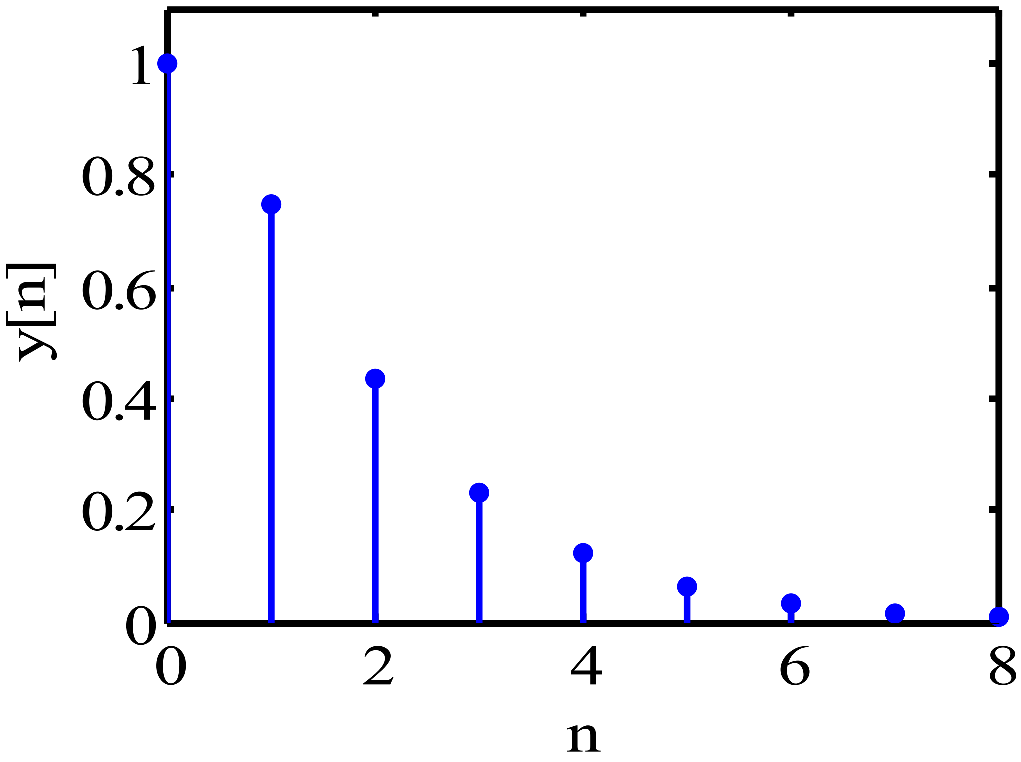
（运行结果适用于$n \geq 0$）

```
>> syms n z
>> xn=(1/4)^n
>> hn=(1/2)^n
>> xz=ztrans(xn,n,z)
>> hz=ztrans(hn,n,z)
>> yz=xz*hz
>> yn=iztrans(yz,z,n)
yn =
2*(1/2)^n-(1/4)^n
```

获取输出波形的程序如下

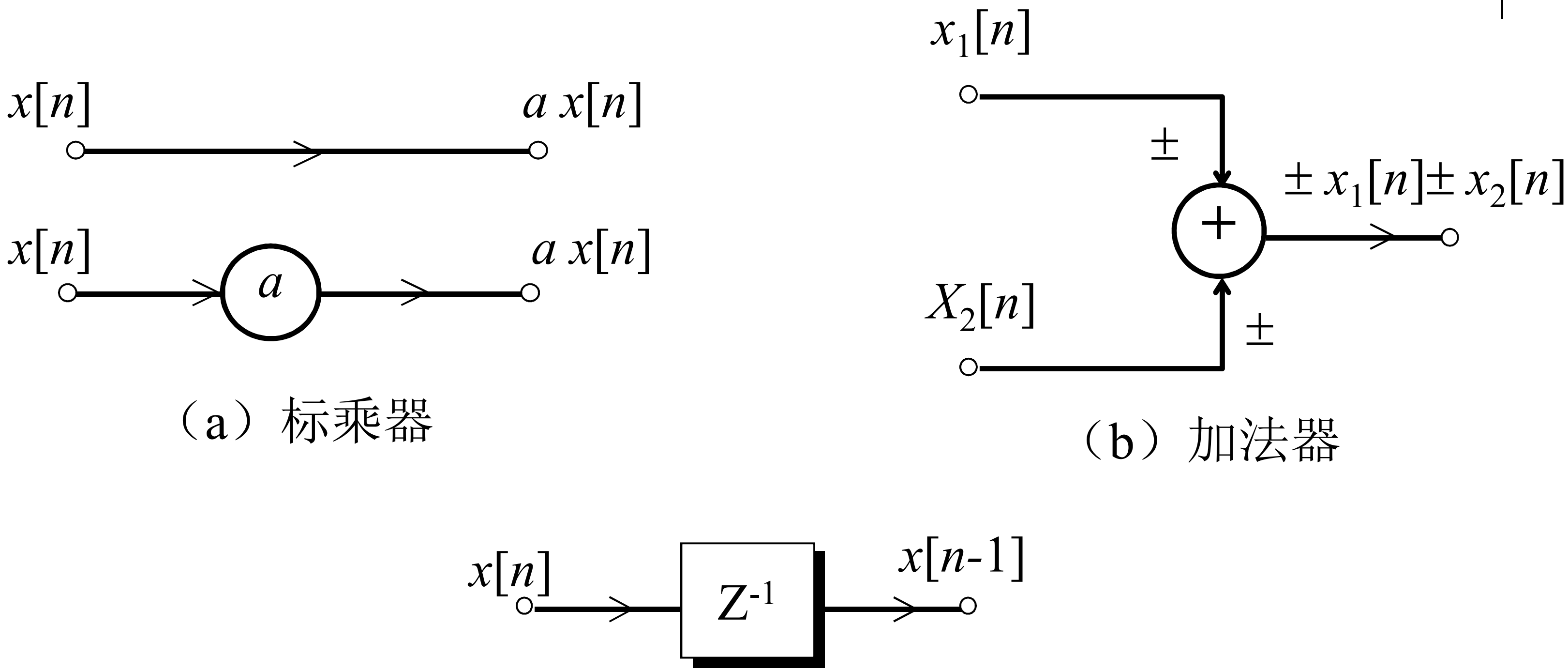
```
>> n=0:8
>> y=2*(1/2).^n-(1/4).^n
>> stem(n,y,'filled')
>> xlabel('n')
>> ylabel('y[n]')
```

Matlab: 计算零状态响应



7.9.3 系统函数的方框图表示

三个基本运算单元的Z域表示形式



（a）标乘器

（b）加法器

（c）单位延迟器

图7-9 离散系统的三个基本运算单元

7.9.3 系统函数的方框图表示

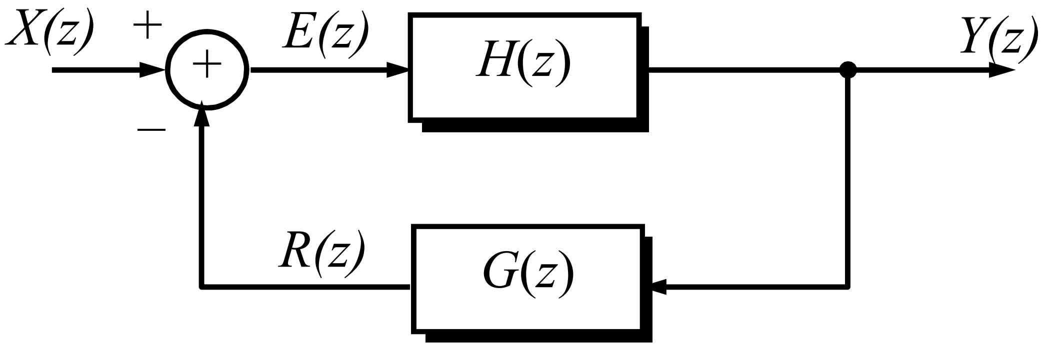


图7.10 基本LTI系统反馈互连

$$R(z)=Y(z)G(z)$$
$$E(z)=X(z)-R(z)$$
$$Y(z)=E(z)H(z)$$

可得反馈互连系统总的系统函数

$$Y(z)=\big(X(z)-Y(z)G(z)\big)H_1(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1+G(z)H_1(z)}$$

7.9.3 系统函数的方框图表示

一个N阶差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] \,, \qquad a_0 \neq 0$$

则该所对应的系统函数是

$$H(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_r z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_M z^{-M} + b_{M-1} z^{-(M-1)} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-(N-1)} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

7.9.3 系统函数的方框图表示

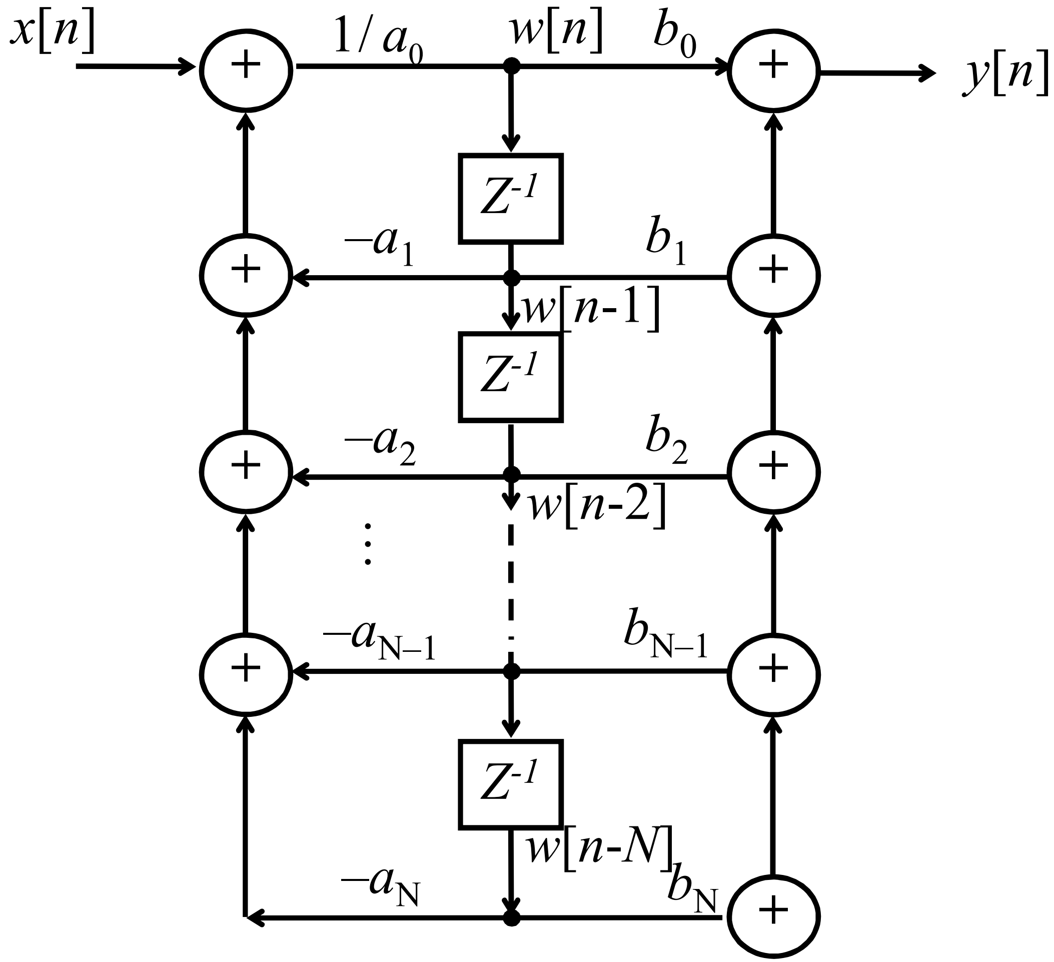


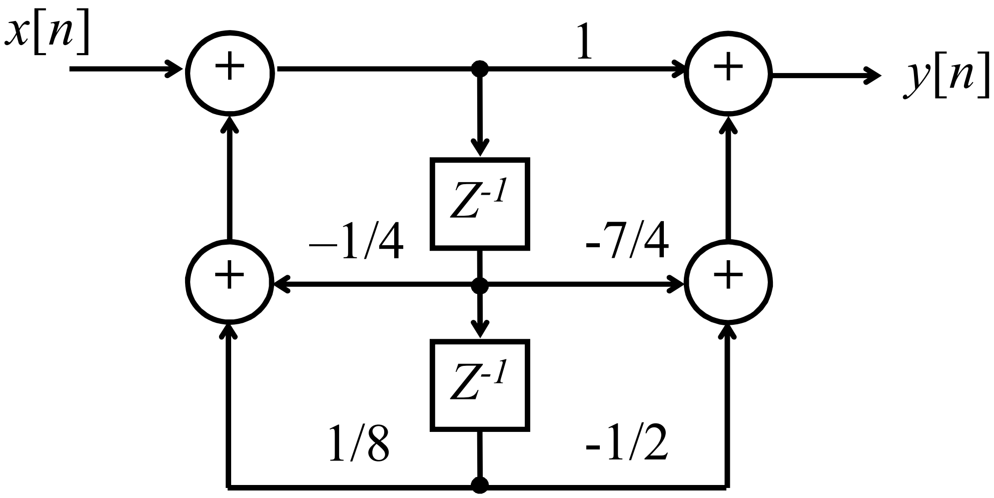
图7-11 N阶离散系统的Z域直接型模拟框图

例 7.25

【例7.25】试画出由下式给出的系统函数的框图表示。

$$H(z)=\frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

1. 直接II型



(a)直接II型

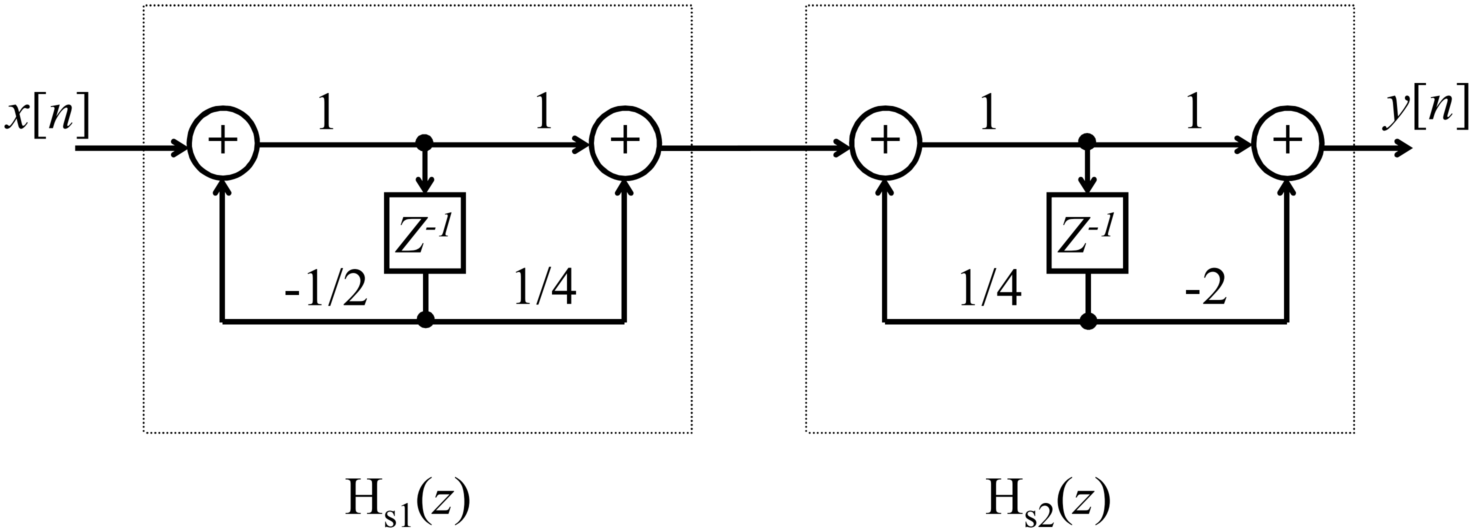
例 7.25

2. 级连型

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=H_{s1}(z)\cdot H_{s2}(z)$$

其中 $$H_{s1}(z)\cdot=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}},\ H_{s2}(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

例 7.25



(b) 级联型

例 7.25

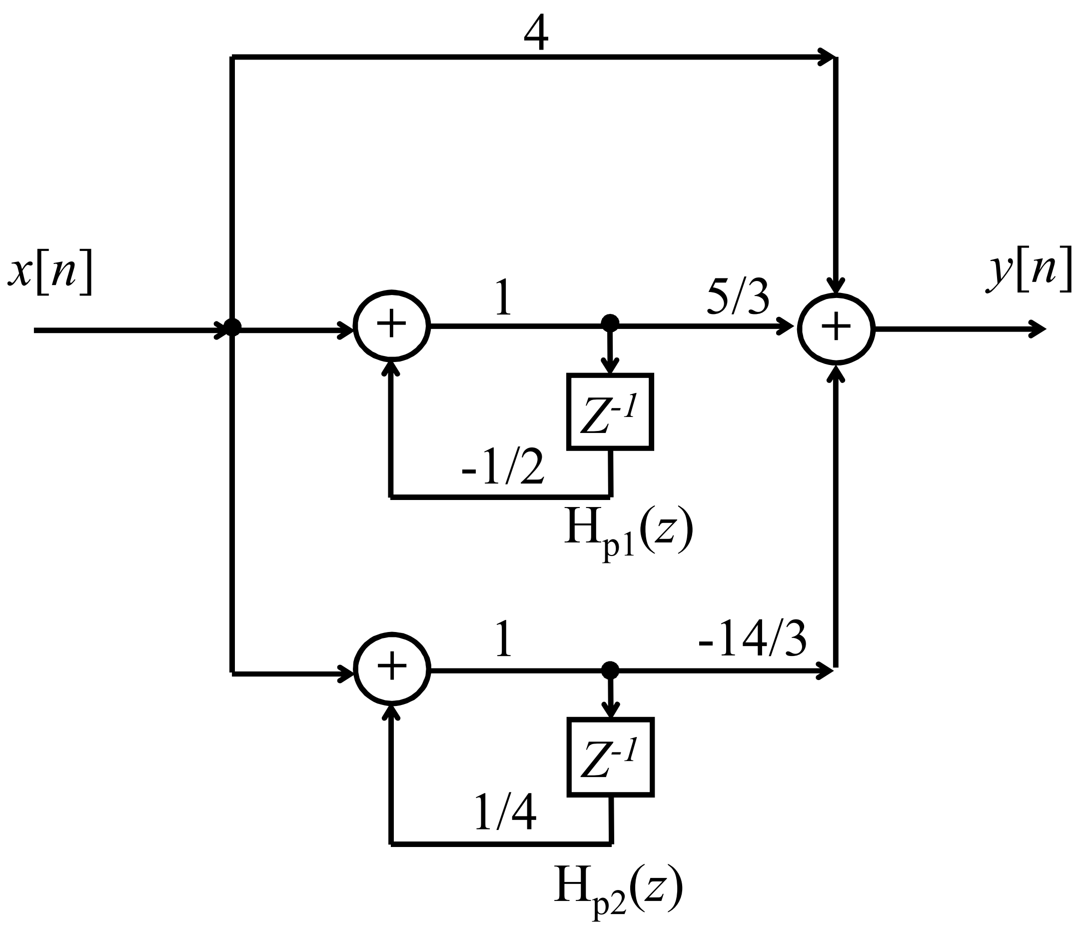
3. 并联结构

$H(z)$也能表示成部分分式展开形式

$$H(z)=4+\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=4+H_{p1}(z)+H_{p2}(z)$$

其中 $$H_{p1}(z)\cdot=\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}},H_{p2}(z)=-\frac{\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

例 7.25



(c)并联型

Matlab: 系统分析

【例7.32】已知某一因果离散时间LTI系统的差分方程为

$$y[n]-0.4y[n-1]=x[n]$$

(1) 求单位样值响应$h[n]$;
(2) 求单位阶跃响应 $s[n]$;
(3) 求系统函数$H(z)$和系统的频率响应，并画出幅频特性和相频特性曲线。

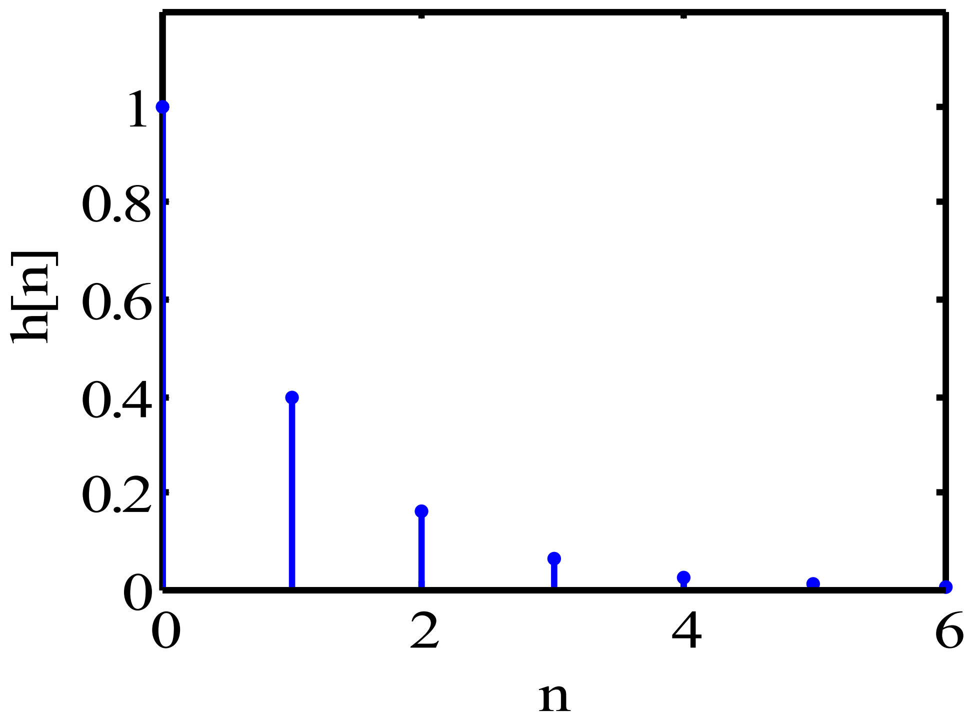
解:

(1) 在Matlab的信号处理工具箱中提供的impz( )函数可直接用于求解离散系统的单位样值响应,其调用格式之一为impz(b,a,n1:n2), 其中b和a分别为差分方程中输入变量和未知变量的系数向量。

Matlab: 系统分析

程序如下

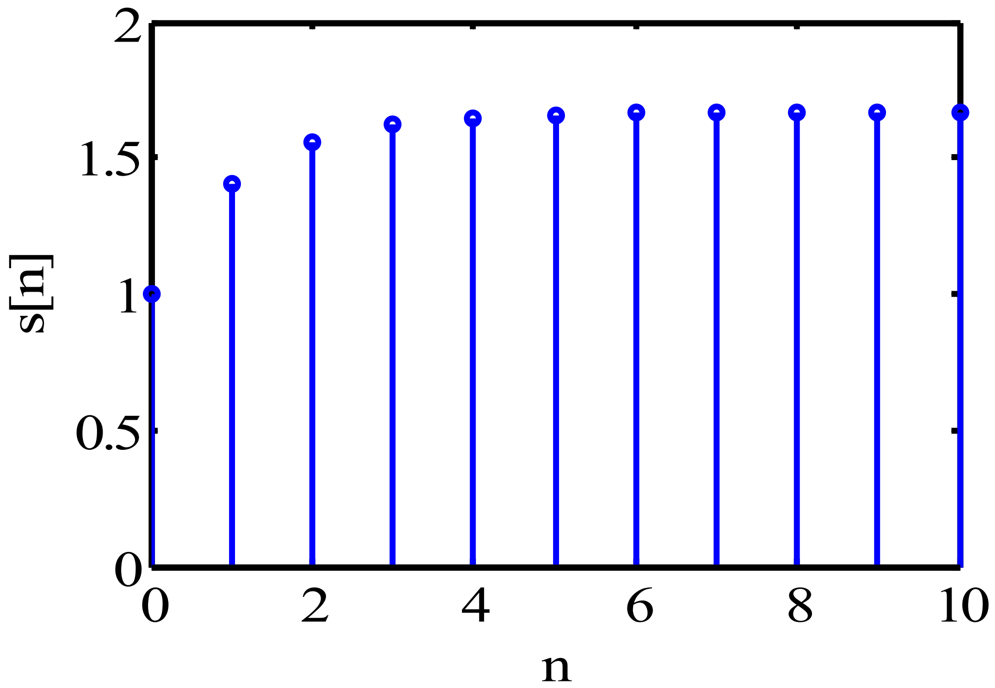
```
b=[1]
a=[1,-0.4]
impz(b,a,0:6)
axis([0,6,0,1.2])
xlabel('n')
ylabel('h[n]')
```



Matlab: 系统分析

(2) 利用Matlab信号处理工具箱中的filter( )函数可计算出由差分方程描述的LTI系统在输入信号的指定时间范围内所产生的输出信号的数值解。其调用格式之一为filter(b,a,x)，其中x为输入信号非零值构成的行向量。程序如下：

```
b=[1]
a=[1,-0.4]
t=0:10
xn=ones(1,length(t))
yn=filter(b,a,xn)
stem(t,yn)
xlabel('n')
ylabel('s[n]')
```



Matlab: 系统分析

(3)对差分方程作z变换,可得

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}$$

在Matlab信号处理工具箱中提供了求系统频率响应的函数freqz( )，其调用格式之一为H=freqz(b,a, omega)，其中b、a分别为系统函数的分子和分母多项式的系数向量。 此函数返回由omega指定的频率点上的频率响应。程序如下：

Matlab: 系统分析

```
% 用函数 freqz(求系统频率响应
b=[1,0]
a=[1,-2/5]
omega =-pi:pi/200:pi
H=freqz(b,a, omega)
subplot(2,1,1)
plot(omega /pi,abs(H))
ylabel('|H(j\omega)|')
subplot(2,1,2)
plot(omega /pi,180/pi*unwrap(angle(H)))
xlabel('\omega/\pi')
>> ylabel('\phi(\omega)')
```