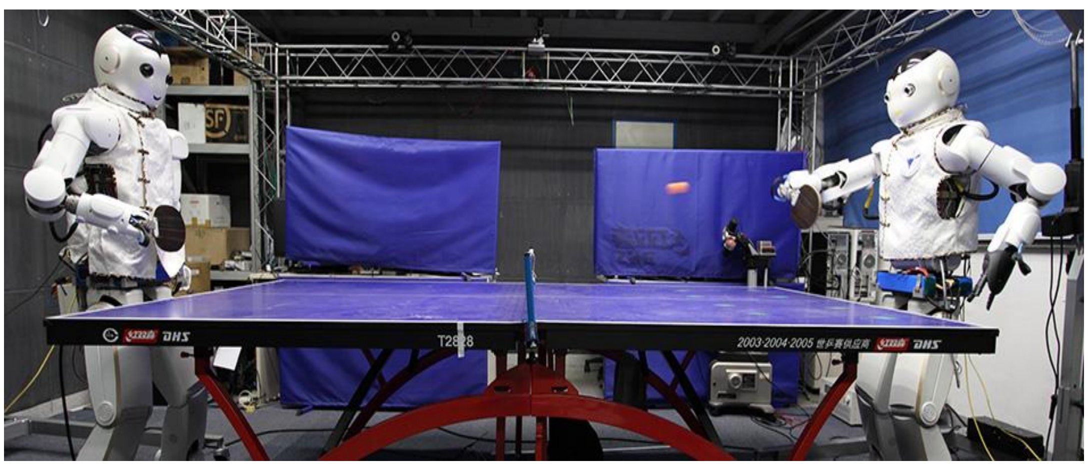
机器人运动学



朱秋国
浙江大学控制学院
机器人与机器智能实验室

Email：qgzhu@zju.edu.cn

2023年3月27日

课程内容

- 主要内容：
  - 1、平面四连杆运动学
  - 2、三维机器人运动学

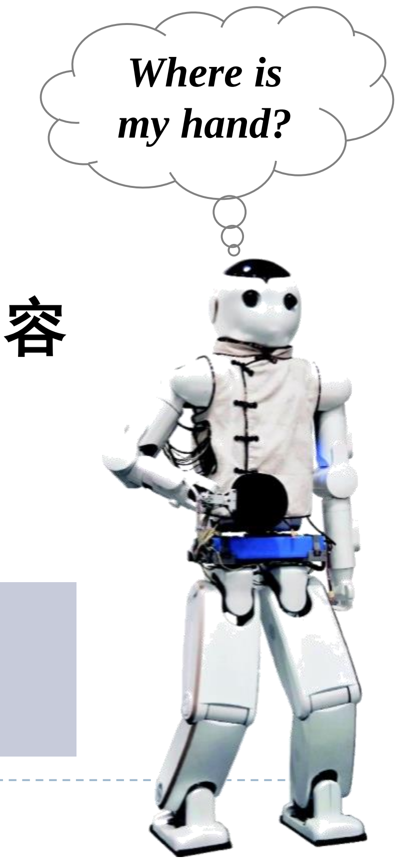
2. 三维机器人运动学

机器人运动学

- 运动学（Kinematics）：是指机器人连杆的位置和姿态（简称：位姿）与关节角度关系的理论。

- 正运动学：已知关节角，求连杆末端的位姿
- 逆运动学：已知连杆末端的位姿，求关节角度

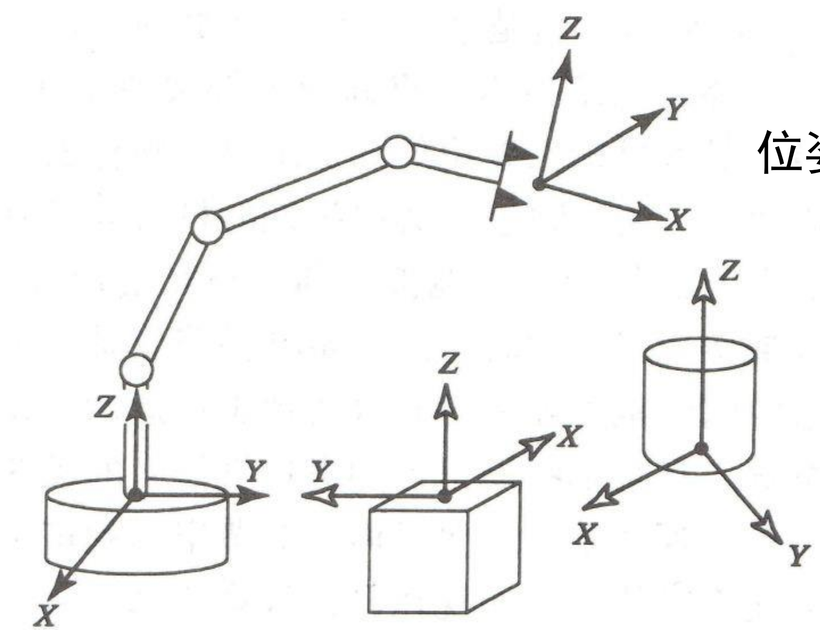
- 涉及内容：坐标变化、转动特性、空间速度等内容



运动学只研究物体的运动
而不考虑引起（或影响）这种运动的力

位姿描述

- **位姿：**三维空间中**刚体的位置和姿态**
- **物体：**包括操作臂的杆件、零部件和抓持工具，也包括操作臂工作空间中的其他物体
- **位姿描述：**如何在某一参考坐标系中用数学方法表示和计算位姿

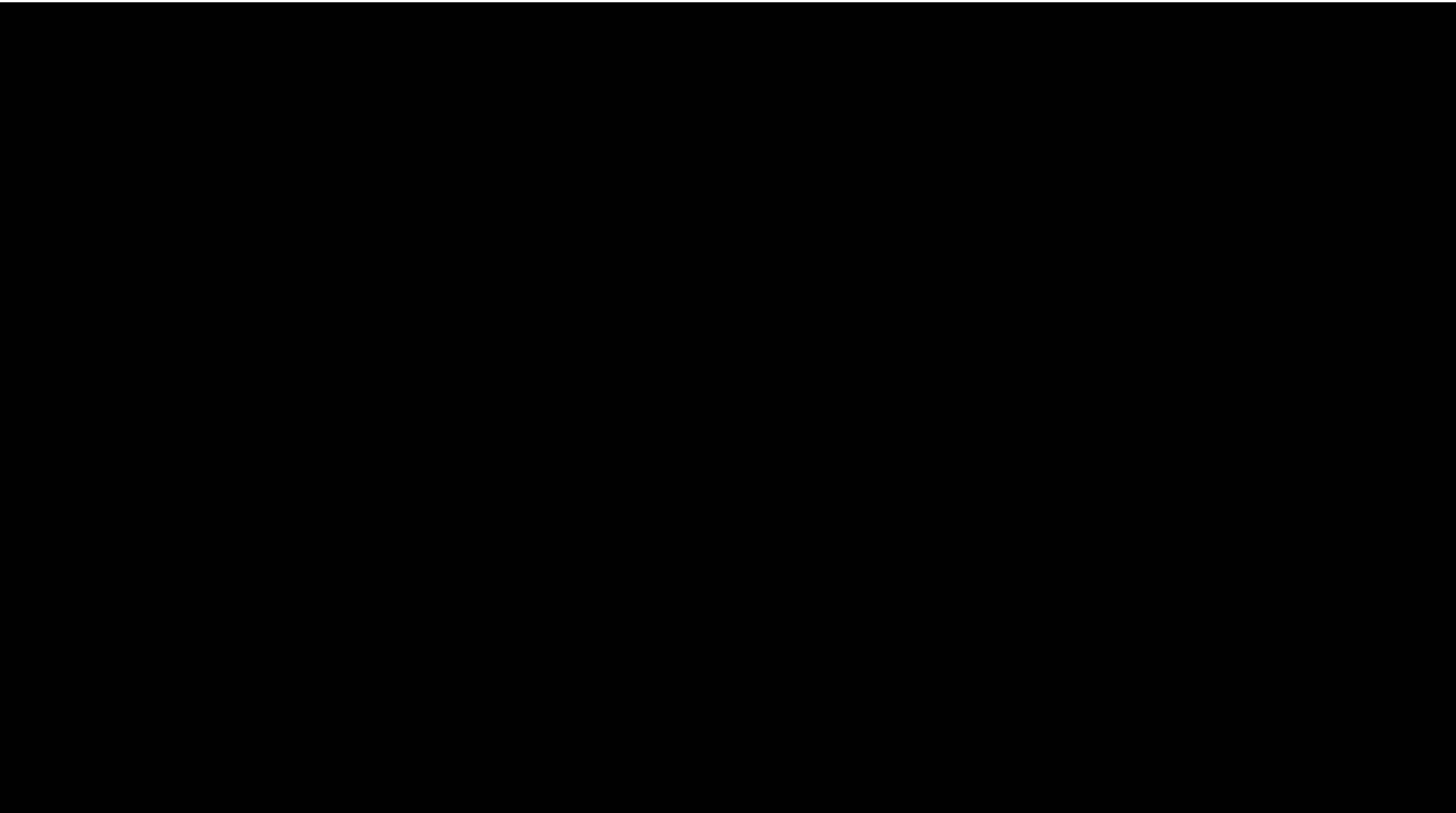


$$\text{位姿}\begin{cases}\text{位置 } p\\ \text{姿态 } R\end{cases}$$

运动学

- 运动学是研究机械系统的运动方式，是实现机器人运动控制和系统设计的基础
- 运动学只研究物体的运动，包括几何和时间特性，不考虑引起运动的力
- 即研究位置、速度、加速度和位置变量对于时间或者其他变量的高阶微分

运动学

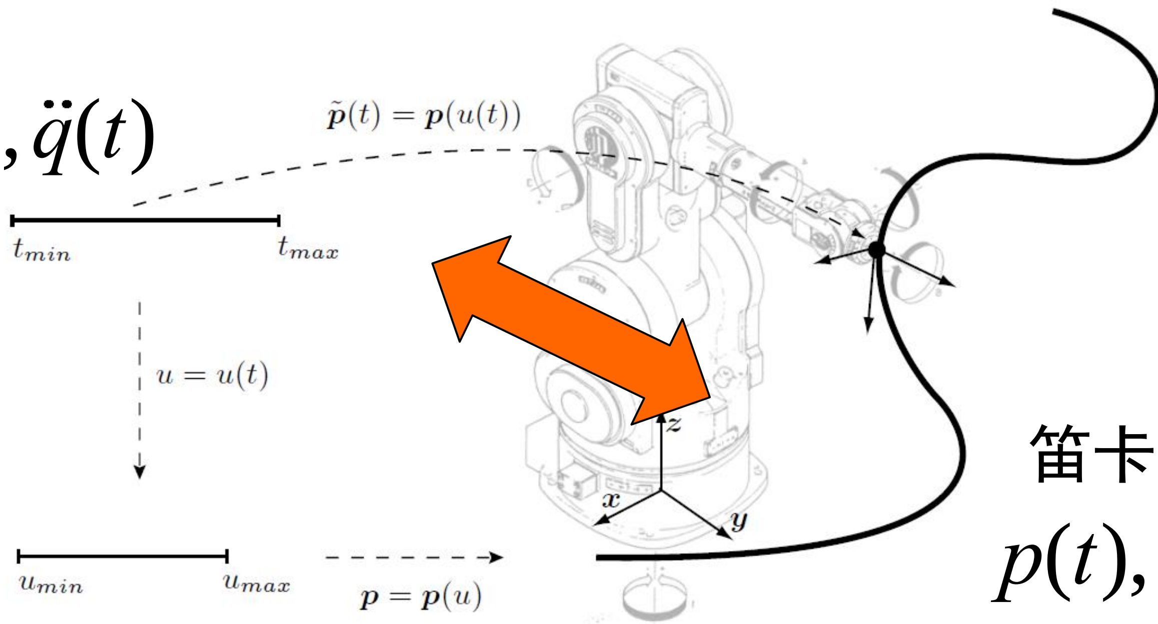


运动学

- **运动学建模：建立机器人参考点运动控制与各个驱动运动控制之间的关系（数学模型）**

$q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$

关节空间

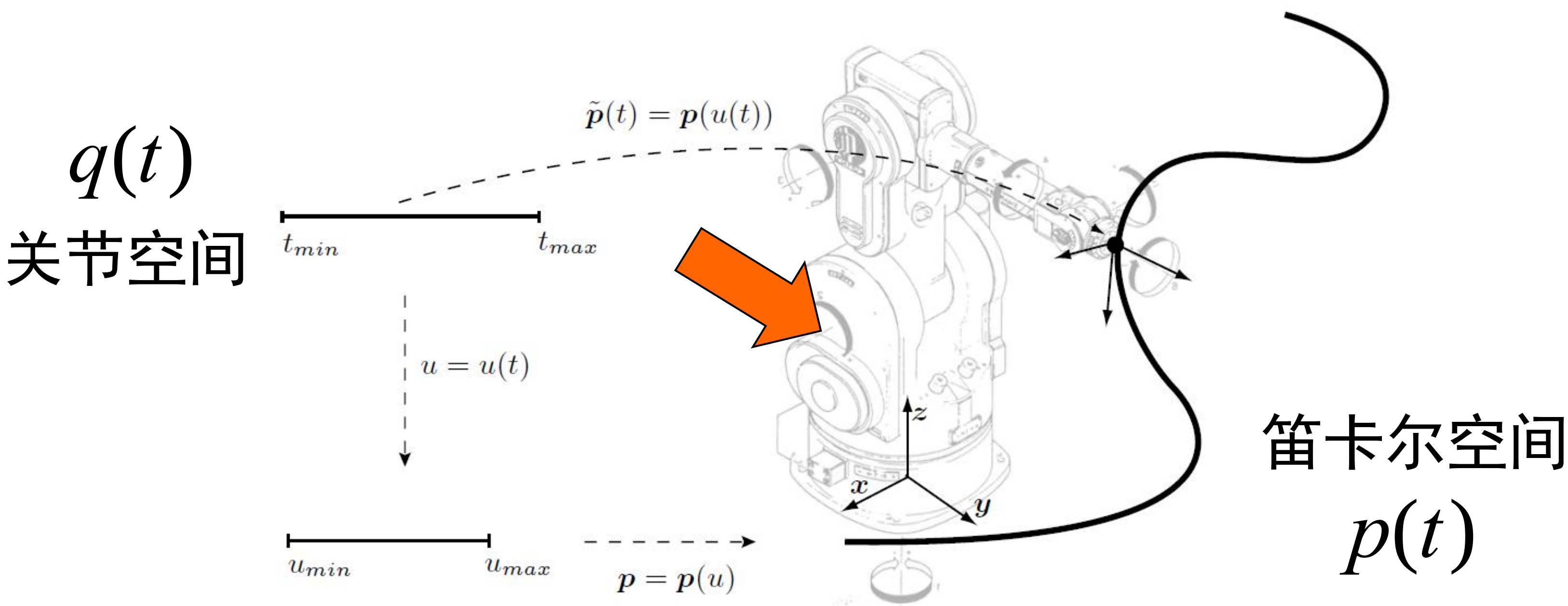


笛卡尔空间

$p(t), v(t), a(t)$

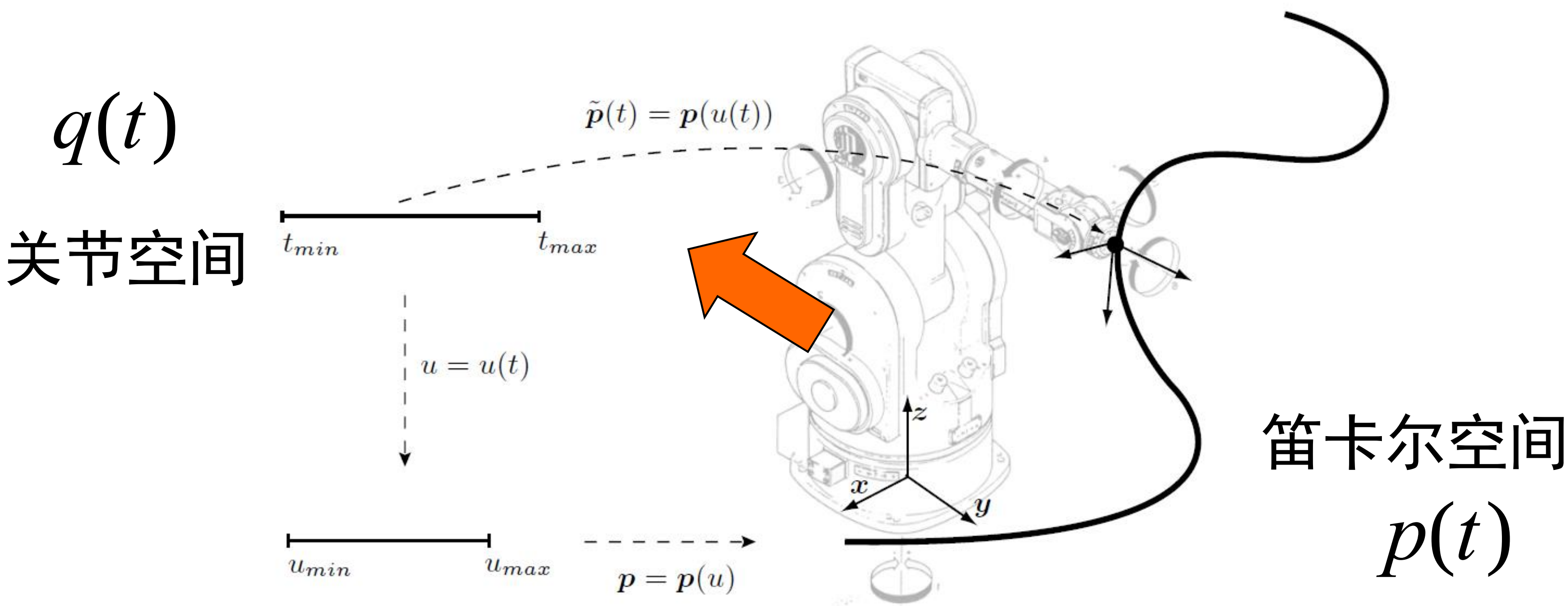
正运动学

- **给定一组关节角的值，计算工具坐标系相对于基坐标系的位置和姿态，即末端执行器位置和姿态**



逆运动学

- **给定操作臂末端执行器的位置和姿态，计算所有可达位置和姿态的关节角**



由于运动学方程是非线性的，很难得到封闭解，甚至无解同时提出了解的存在性和多解问题

机械臂的运动

- **涉及速度和静力问题**

$$\dot{q}(t),\ddot{q}(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(t),a(t)$$

$\Rightarrow$ 雅克比矩阵

$\Leftarrow$ 逆雅克比矩阵

在奇异点，雅克比矩阵不可逆

奇异性不影响机械臂在空间的定位，但在奇异点附近的运动会受影响

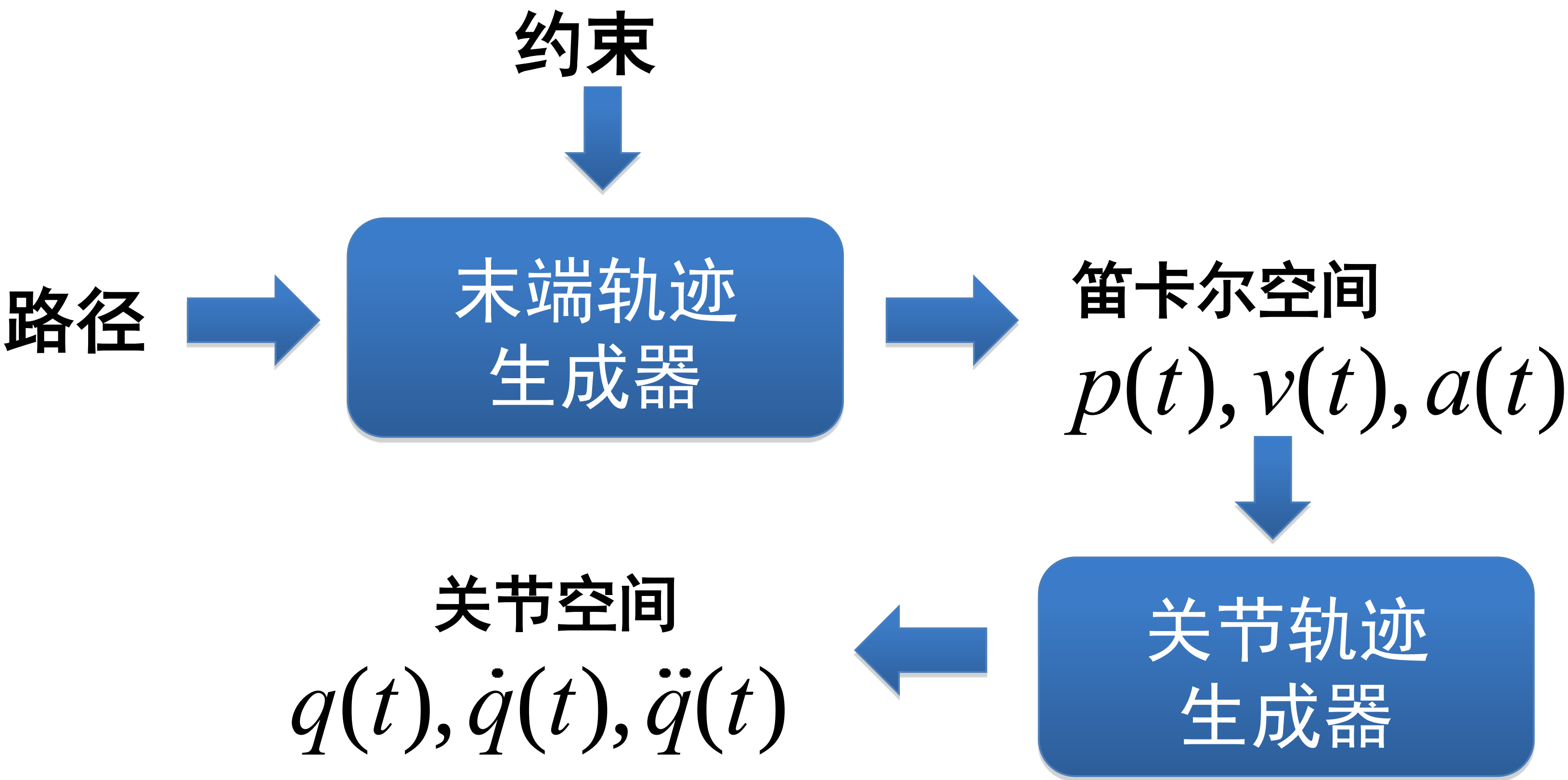
动力学

- 研究产生运动所需要的力
- 操作臂的各种运动都必须通过关节驱动器产生一组复杂的力矩函数来实现
- 力矩函数形式取决于末端执行器路径的空间特性和瞬时特性、连杆和负载的质量特性、以及关节摩擦等

要使机械臂沿着期望路径运动，必须考虑动力学方程，并根据动力学方程求出关节力矩函数

轨迹生成

- 生成末端及每个关节关于时间的连续运动函数

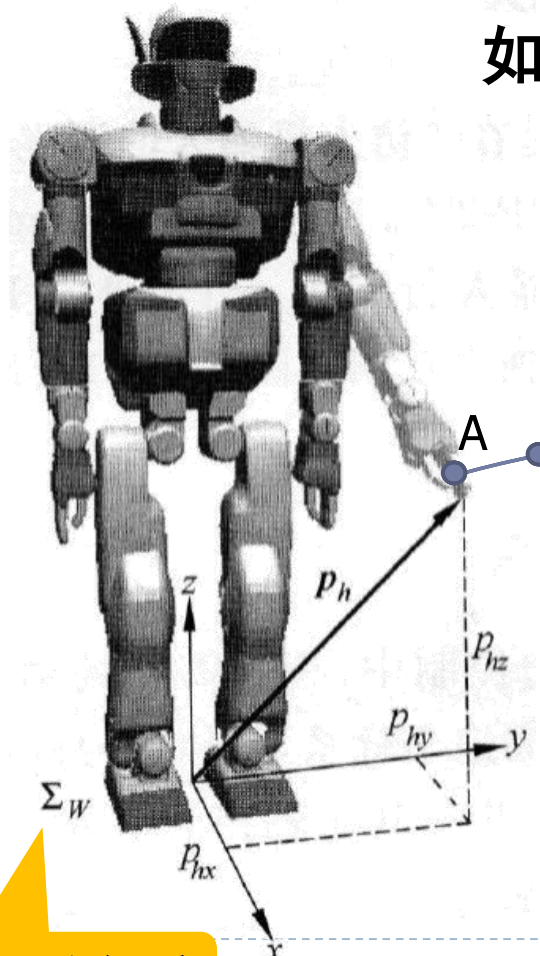


3. 坐标变换

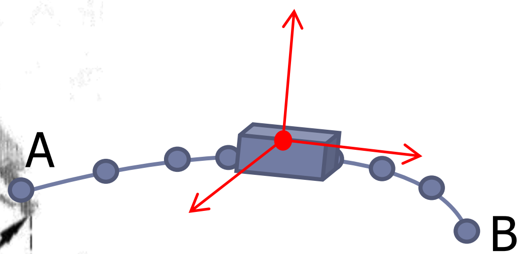
坐标变换

- **绝对位置**:在世界坐标系中来描述的位置,如手臂末端的绝对位置用三维矢量表示:

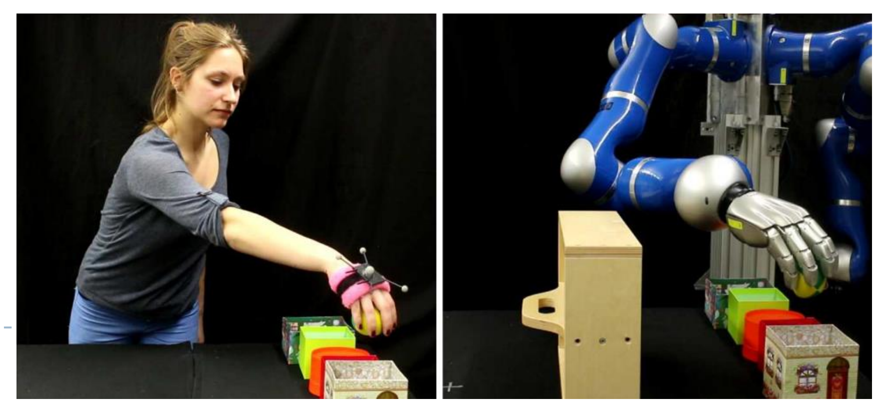
$$\boldsymbol{p}_h = \begin{bmatrix} p_{hx} \\ p_{hy} \\ p_{hz} \end{bmatrix}$$



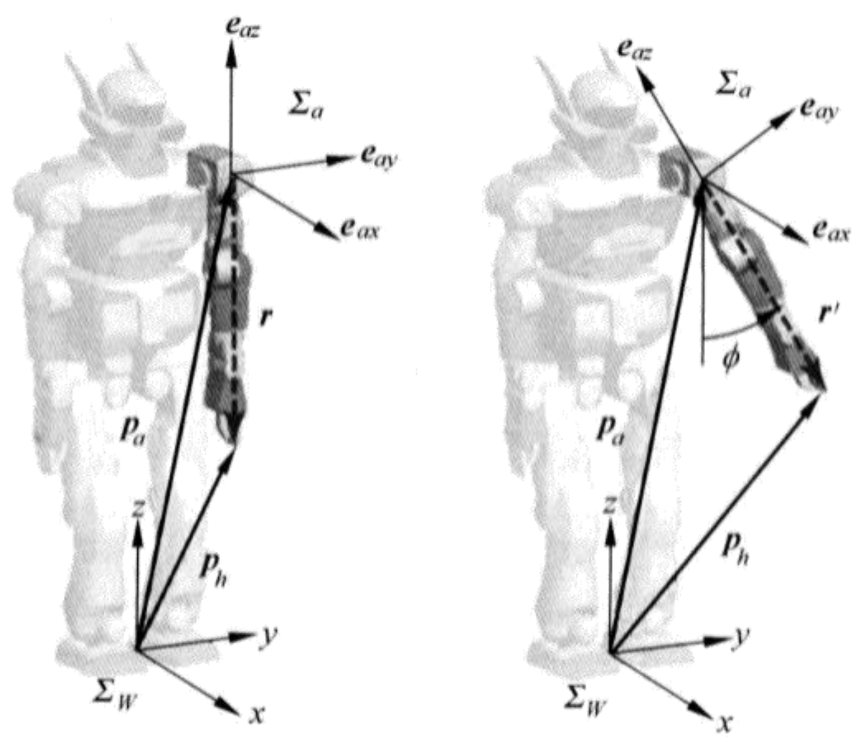
世界坐标系



前提条件：构建每个关节的坐标系（本文略）



坐标变换



定义手端在局部坐标系a中位置为 ${}^a p_h$
那么：

$$r = {}^a p_h$$

那么末端点在世界坐标系中的位置：

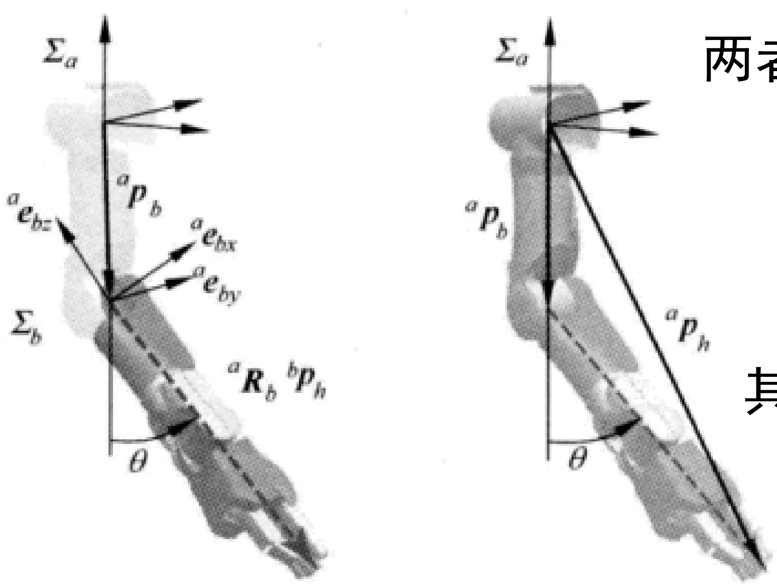
$$p_h = p_a + R_a {}^a p_h$$

r 和 r' 之间的关系可表示为：

$$r' = R_a r$$

R_a 称为旋转矩阵，是在局部坐标 $\sum_a$ 中的描述。

坐标变换



在坐标系 $\sum_b$ 中观察的end-point位置为 $^b p_h$，

到在 $\sum_a$ 中观察的end-point位置为 $^a p_h$。

两者的变换关系为：

$$\begin{bmatrix} ^a p_h \\ 1 \end{bmatrix} = {}^a T_b \begin{bmatrix} ^b p_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $^a T_b$ 称为变换矩阵：

$$^a T_b = \begin{bmatrix} & ^a R_b & & ^a p_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标变换

假设有个机械链将从Σ_1到Σ_N的局部坐标系依次联结起来，对于相邻两个坐标系Σ_i和Σ_{i+1}，从Σ_{i+1}到Σ_i的齐次变换矩阵为${}^{i}T_{i+1}$，那么迭代上面讨论的变换过程可得：

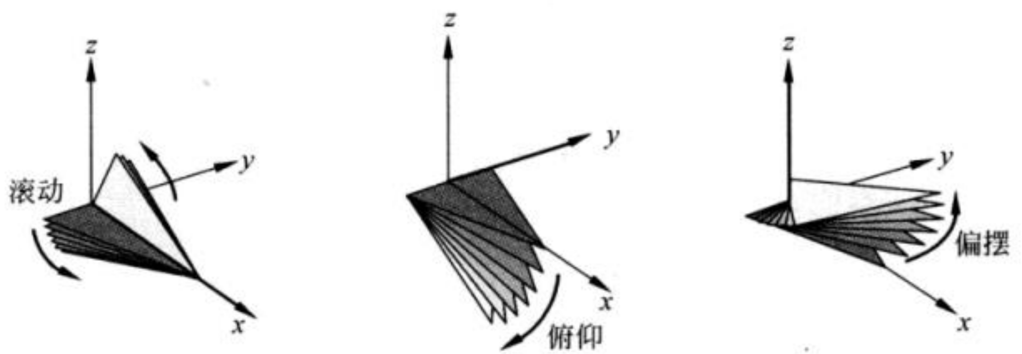
$$\boldsymbol{T}_N = \boldsymbol{T}_1 \, {}^{1}\boldsymbol{T}_2 \, {}^{2}\boldsymbol{T}_3 \cdots {}^{N-1}\boldsymbol{T}_N$$

式中$\boldsymbol{T}_N$为从Σ_N到世界坐标系Σ_W的齐次变换矩阵。

如果在连杆末端追加关节，那么应该将相应的矩阵放在**右边相乘**。

转动特性

- 最基本的转动: 是绕 X, y 和 Z 轴的旋转运动，分别称为滚动（roll）、俯仰（pitch）和偏摆（yaw）



转 动 轴	名 称	所用符号
x 轴	滚动（roll）	ϕ
y 轴	俯仰（pitch）	θ
z 轴	偏摆（yaw）	ψ

转动特性

- 对应于**滚动**（ϕ）、**俯仰**（θ）和**偏摆**（ψ）的旋转矩阵依次为：

$$R_x(\varphi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\qquad R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

转动特性

- Z-Y-X欧拉角：如果有一点 p 绕原点依次作滚动、俯仰和偏摆，其位置将变成：

$$p' = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)p$$

- 其中：

$$R_{rpy}(\varphi,\theta,\psi) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\varphi + c_\psi s_\theta s_\varphi & s_\psi s_\varphi + c_\psi s_\theta c_\varphi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\varphi + s_\psi s_\theta s_\varphi & -c_\psi s_\varphi + s_\psi s_\theta c_\varphi \\ -s_\theta & c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \end{bmatrix}$$

转动特性

$$R_{rpy}(\varphi,\theta,\psi)=R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)$$

$$=\begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\varphi + c_\psi s_\theta s_\varphi & s_\psi s_\varphi + c_\psi s_\theta c_\varphi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\varphi + s_\psi s_\theta s_\varphi & -c_\psi s_\varphi + s_\psi s_\theta c_\varphi \\ -s_\theta & c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \end{bmatrix}$$

- 利用上式，可以实现三维空间中从一个给定的姿态到任一姿态的变换。

$$^{a}R_s = {}^{a}R_b\,{}^{b}R_s$$

4. 正运动学解算

范例：机械臂的正运动学

正运动学的计算可根据齐次变换按链式法则进行。

例:7关节击球臂

关节1：肩俯仰关节，关节角q_1

关节2：肩滚动关节，关节角q_2

关节3：肩偏摆关节，关节角q_3

关节1~3的三个关节轴线相交于肩心

关节4：肘滚动关节，关节角q_4

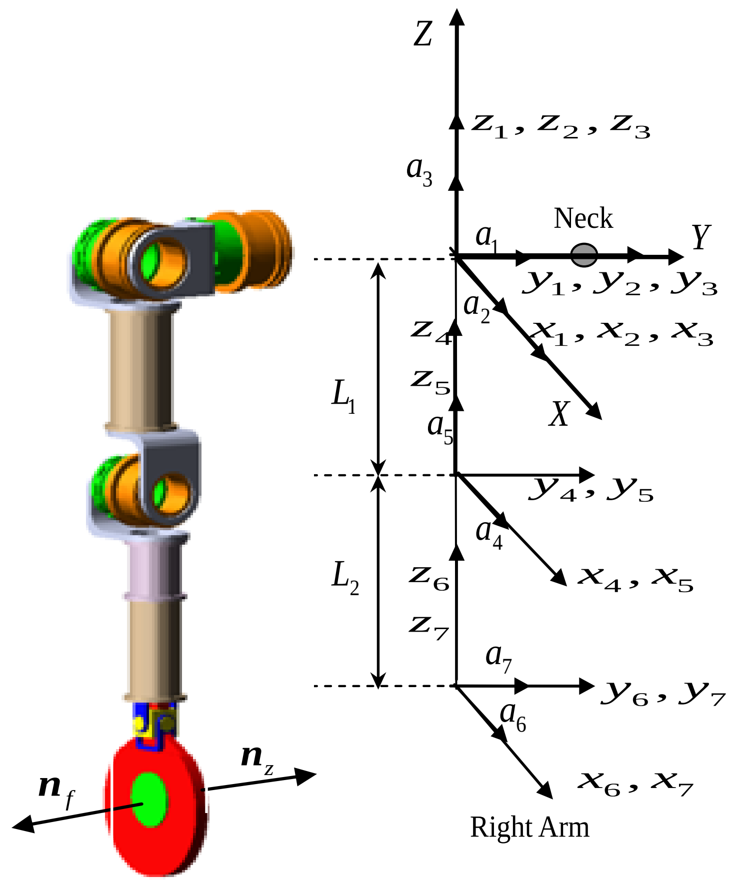
关节5：肘偏摆关节，关节角q_5

关节4~5的二个关节轴线相交于肘心

关节6：腕滚动关节，关节角q_6

关节7：腕俯仰关节，关节角q_7

关节6~7的二个关节轴线相交于腕心



范例：机械臂的正运动学

已知肩心在Σ_W中的坐标为$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 1.45 \end{bmatrix}$ 米

上臂长（肩心至肘心的距离）0.25米

下臂长（肘心至腕心的距离）0.26米

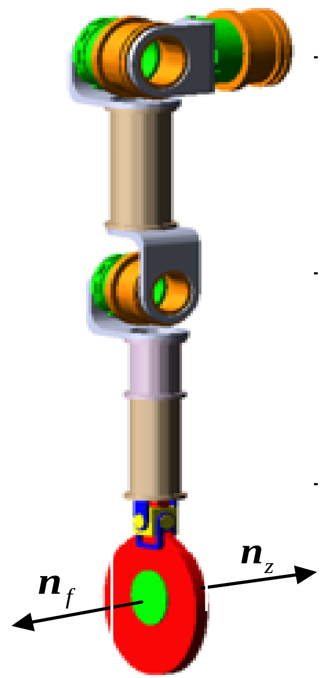
腕心至拍心的距离0.18米

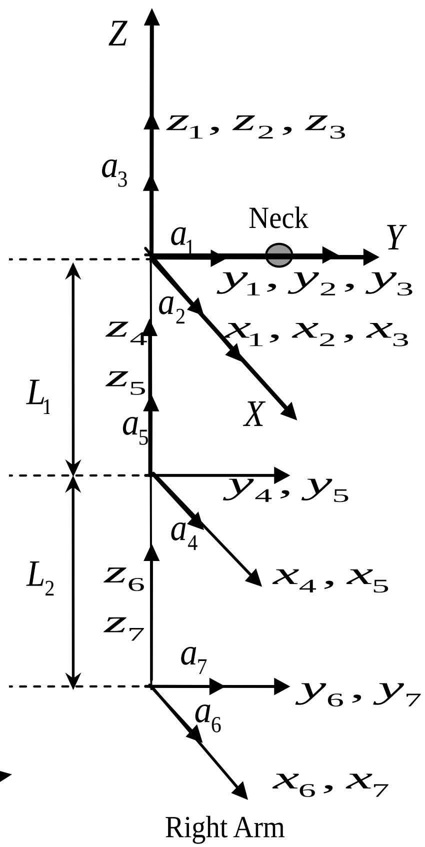
Σ_1、Σ_2和Σ_3的原点均取为肩心

Σ_4和Σ_5的原点均取为肘心

Σ_6和Σ_7的原点均取为腕心

Σ_S的原点取为拍心





当$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = 0$时

上臂、小臂和球拍均下垂

肩心、肘心、腕心和拍心在同一直线上

Σ_W、Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4、Σ_5、Σ_6、Σ_7和Σ_S的x轴、y轴和z轴分别平行

$$T_1=\begin{bmatrix}\cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -0.16\\ -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 1.45\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^1T_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos q_2 & -\sin q_2 & 0\\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^2T_3=\begin{bmatrix}\cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & 0\\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

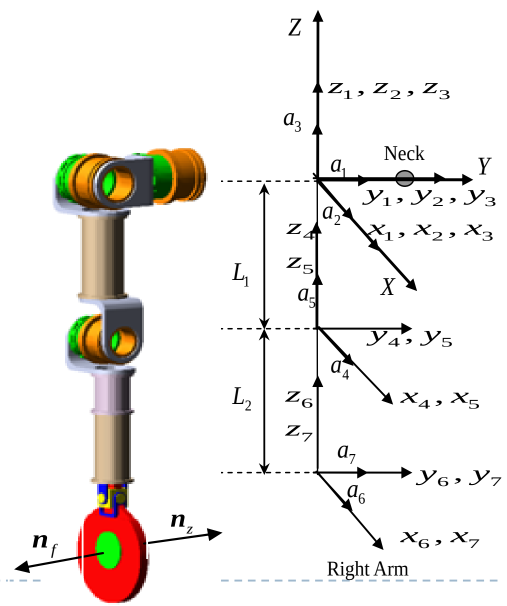
$${}^3T_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 & 0\\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 & -0.25\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^4T_5=\begin{bmatrix}\cos q_5 & -\sin q_5 & 0 & 0\\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^5T_6=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 & 0\\ 0 & \sin q_6 & \cos q_6 & -0.26\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$${}^6T_7=\begin{bmatrix}\cos q_7 & 0 & \sin q_7 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin q_7 & 0 & \cos q_7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad {}^7F_S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -0.18\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

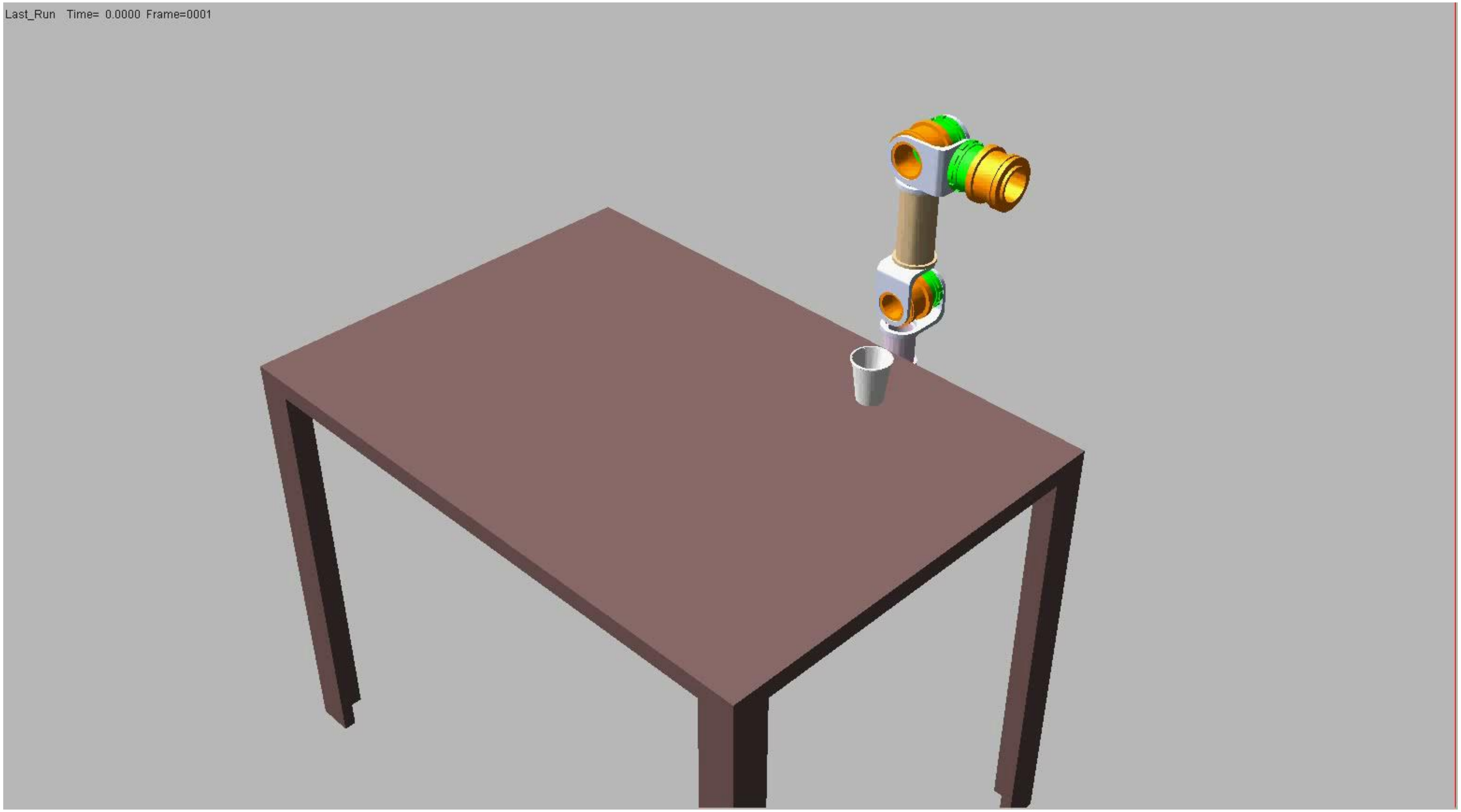
$$F_S = T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4\,{}^4T_5\,{}^5T_6\,{}^6T_7\,{}^7F_S$$

F_S表示球拍在Σ_W中的位姿

当已知q_1、q_2、q_3、q_4、q_5、q_6和q_7时将它们的值代入上式即可求得F_S



Demo-1



Demo-2

5. 逆运动学解算

机器人逆运动学

- **逆运动学是指根据机器人末端位姿求解关节角**
- **正运动学一般用于检验逆运动学是否正确**
- **逆运动学的难度高于正运动学**

求解结果：

无解

多解（可根据一定的原则，选择最优解）

唯一解

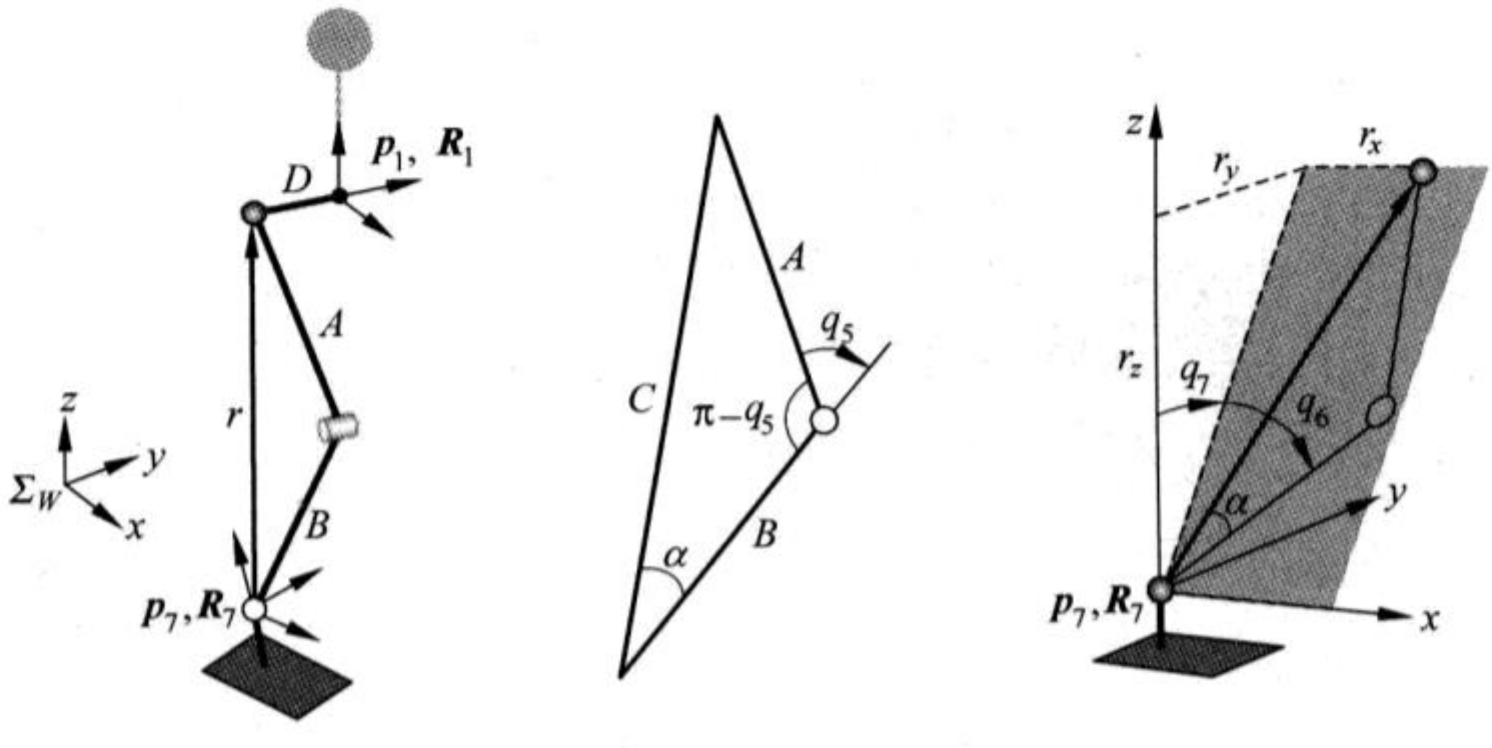
求解方法：

数值方法（需迭代，实时性差，通用性好）

解析方法（无需迭代，实时性好，通用性差）

机器人逆运动学

- 以右腿运动为例，给定躯干和右脚的位置 (p_1, R_1) 和 (p_7, R_7)

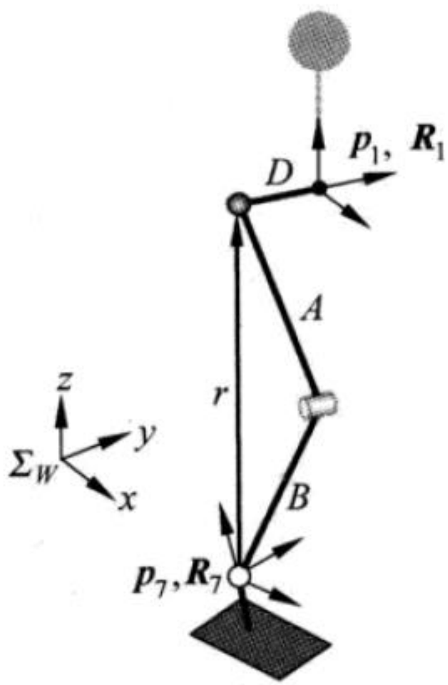


(a) (b) (c)

- 定义躯干原定到髋关节的距离为D，大腿长为A，小腿长为B

机器人逆运动学

- 由左图可知，髋关节的位置为：



$$p_2 = p_1 + R_1 \begin{bmatrix} 0 \\ D \\ 0 \end{bmatrix}$$

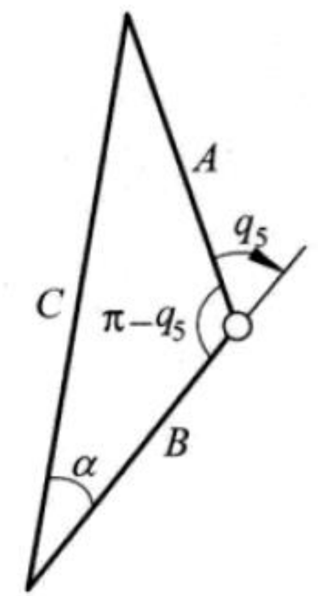
- 脚踝坐标系在髋关节中的位置矢量为：

$$r = R_7^T (p_2 - p_7) \equiv \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}^T$$

- 正交矩阵：$R^{-1} = R^T$

机器人逆运动学

- 由此可以求得踝髋间的距离，定义为 C



$$C=\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}$$

- 根据余弦定理有：

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos(\pi-q_5)$$

- 膝关节角度为：

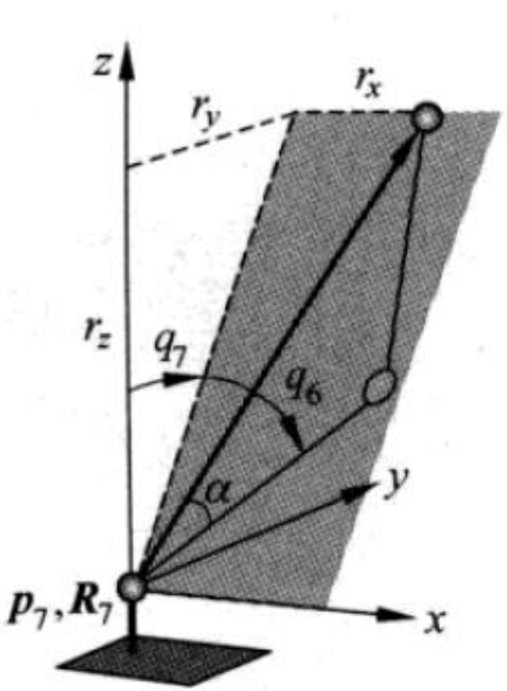
$$q_5=-\arccos\left(\frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}\right)+\pi$$

- 根据余弦定理有：

$$\frac{C}{\sin(\pi-q_5)}=\frac{A}{\sin\alpha} \Rightarrow \alpha=-\arcsin\left(\frac{A\sin(\pi-q_5)}{C}\right)$$

机器人逆运动学

- 在脚踝坐标系中，根据矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以求得踝关节的滚动角和俯仰角分别为：



$$q_7 = a\tan 2(r_y, r_z)$$

$$q_6 = -a\tan 2(r_x, sign(r_z)\sqrt{r_y^2 + r_z^2}) - \alpha$$

机器人逆运动学

- 最后，根据各连杆的姿态关系

$$R_7 = R_1 R_z(q_2) R_x(q_3) R_y(q_4) R_y(q_5 + q_6) R_x(q_7)$$

- 对上式进行变形可得：

$$R_z(q_2) R_x(q_3) R_y(q_4) = R_1^T R_7 R_x(q_7) R_y(q_5 + q_6)$$

- 两边展开，即得：

$$\begin{bmatrix} c_2 c_4 - s_2 s_3 s_4 & -s_2 c_3 & c_2 s_4 + s_2 s_3 c_4 \\ s_2 c_4 + c_2 s_3 s_4 & c_2 c_3 & s_2 s_4 - c_2 s_3 c_4 \\ -c_3 s_4 & s_3 & c_3 c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

机器人逆运动学

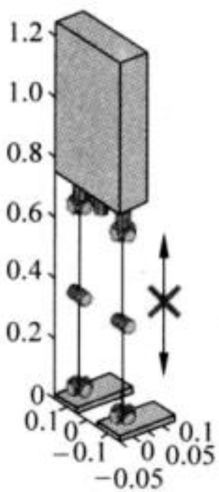
- 最后得到：

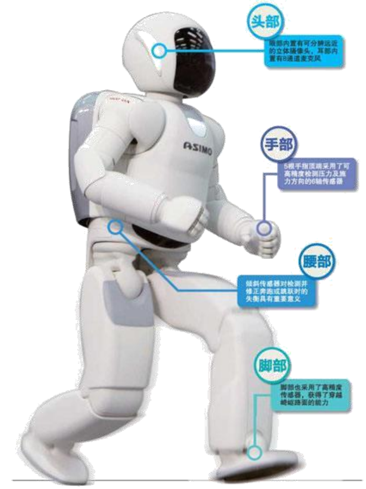
$$q_2 = a\tan 2(-R_{12}, R_{22})$$

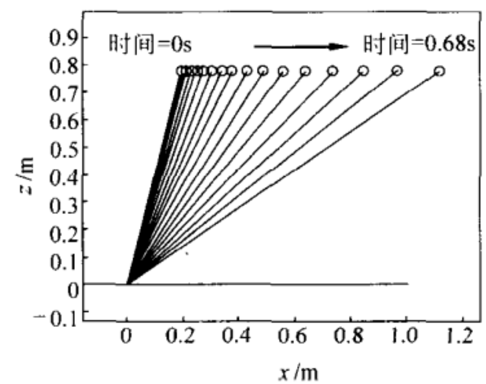
$$q_3 = a\tan 2(R_{32}, -R_{12}s_2 + R_{22}c_2)$$

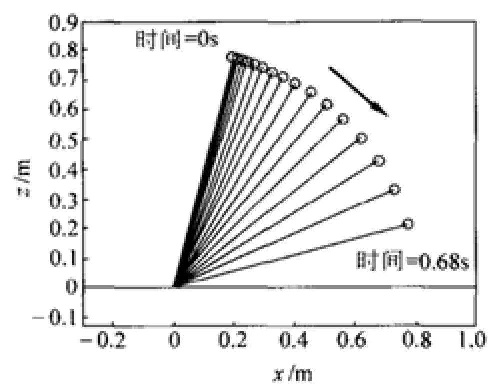
$$q_4 = a\tan 2(-R_{31}, R_{33})$$

防止奇异点









The End.

Thanks for your attention.