信号与系统实验一

电科 2102 班

SZX

0000000000

2023 年 6 月 25 日

1 problem 1

1.1 问题描述

考虑离散时间信号 $x_k[n] = \sin(\omega_k n)$，其中 $\omega_k = 2\pi k/5$ 对于 $k = 1, 2, 4, 6$，在 $0 \le n \le 9$ 取值范围内利用 stem 函数绘制这四个信号。

(1) 共有几个不同的信号？

(2) 如果两个信号相同，说明 ω_k 取何值时可以得到相同的信号？

1.2 问题分析

1.2.1 question 1

由于 $\omega_k = 2\pi k/5$，我们可以得到这些离散时间信号的角频率为:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{5} \tag{1}$$
$$\omega_2 = \frac{4\pi}{5} \tag{2}$$
$$\omega_4 = \frac{8\pi}{5} \tag{3}$$
$$\omega_6 = \frac{12\pi}{5} \tag{4}$$

从上式中，我们可以得到：

$$\omega_6 = \omega_1 + 2\pi \tag{5}$$

所以，当 $k = 1, 6$ 时，$x_k[n] = \sin(\omega_k n)$ 表示的时同一种信号。

故共有 3 个信号。

1.2.2 question 2

在第一问的分析中，我们可以看到，只要满足 $\omega_{k+p} = \omega_k + 2\pi$，就可以得到相同的信号，因此，我们能得到 k 和 p 的关系：

$$\begin{aligned}\omega_{k+p} - \omega_k &= \frac{2\pi(k+p)}{5} - \frac{2\pi k}{5} \\ &= \frac{2\pi p}{5} = 2\pi N\end{aligned} \tag{6}$$

可以得到，当 $p = 5N$ 时，可以得到相同的信号。

1.2.3 matlab 验证

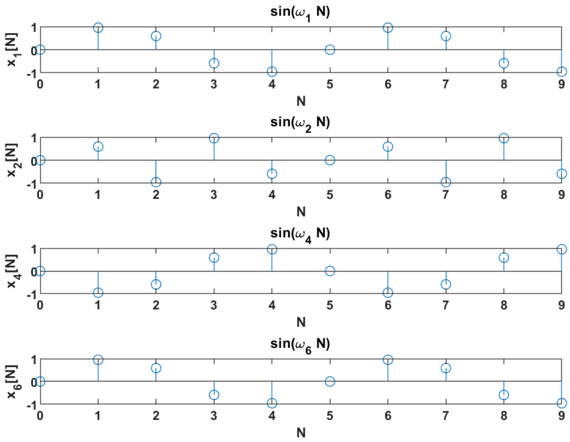

图 1: problem 1

当 $k=1,2,4,6$ 时，信号图像如图 1所示。可以看出，当 $k=1,6$ 时信号图像相同，符合我们之前的分析。

2 problem 2

2.1 问题描述

对于以下 3 个离散时间信号

$$x_1[n]=\cos(\frac{2\pi n}{N})+2\cos(\frac{3\pi n}{N}) \tag{7}$$

$$x_2[n]=2\cos(\frac{2n}{N})+2\cos(\frac{3n}{N}) \tag{8}$$

$$x_3[n]=\cos(\frac{2\pi n}{N})+3\cos(\frac{5\pi n}{2N}) \tag{9}$$

其中 N=6。

(1) 说明 3 个信号是否为周期信号。

(2) 对于周期信号，绘制两个周期（从 n=0 开始）；对于非周期信号，在 $0\leq n\leq 4N$ 取值范围内绘制该信号，并解释其为什么为非周期信号。

2.2 问题分析与 matlab 绘图

2.2.1 question 1

通过 $2\pi/\omega$，可以看出两项的周期均为有理数，所以 $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi n}{N}) + 2\cos(\frac{3\pi n}{N})$ 是周期信号，且基波周期周期为 12。

同理，我们可以看出 $x_3[n] = \cos(\frac{2\pi n}{N}) + 3\cos(\frac{5\pi n}{2N})$，且基波周期为 24。

而对于 $x_2[n] = 2\cos(\frac{2n}{N}) + 2\cos(\frac{3n}{N})$，相同操作下，得到的是无理数，所以第二个信号不是周期信号。

2.2.2 question 2

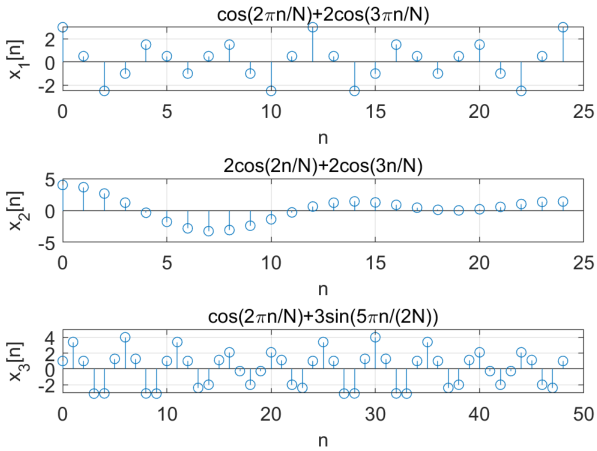

图 2: problem 2

根据题目要求得到的信号图像如图 2所示。

信号 2 不是周期信号得原因见 question1。

3 problem 3

3.1 问题描述

绘制以下 3 个离散时间信号 ($0 \le n \le 31$):

$$x_1[n] = \sin(\frac{\pi n}{4})\cos(\frac{\pi n}{4}) \tag{10}$$

$$x_2[n] = \cos^2(\frac{\pi n}{4}) \tag{11}$$

$$x_3[n] = \sin(\frac{\pi n}{4})\cos(\frac{\pi n}{8}) \tag{12}$$

(1) 说明每个信号的基本周期

(2) 在不使用 matlab 的情况下，如何确定每个信号的基本周期

(3) 结合问题二和问题三，回答两个周期信号的和是否一定是周期信号，两个周期信号的积是否一定是周期信号，并给出解释。

3.2 matlab 绘图

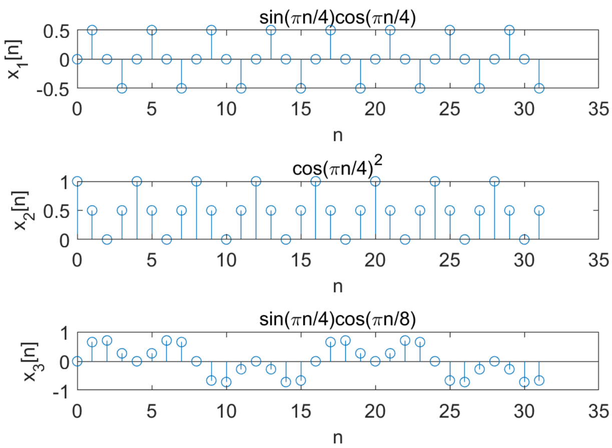

图 3: problem 3

三个离散时间信号得图像如图 3所示。

3.3 问题分析

3.3.1 question 1

由 matlab 所绘制的图像，我们可以看出：$x_1[n]$ 的基波周期为 4；$x_2[n]$ 的基波周期为 4；$x_2[n]$ 的基波周期为 16。

3.3.2 question 2

在不使用 matlab 直接绘图的情况下，我们可以通过对信号函数进行积化和差等数学变化得到信号周期。

对于 $x_1[n]$，

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \sin(\frac{\pi n}{4})\cos(\frac{\pi n}{4}) \\ &= \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi n}{2}) \end{aligned} \tag{13}$$

从以上推到，我们可以看出，$x_1[n]$ 的基波周期为 4。

对于 $x_2[n]$,

$$\begin{aligned} x_2[n] &= \cos^2(\frac{\pi n}{4}) \\ &= \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi n}{2}) + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

所以，$x_2[n]$ 的基波周期为 4。

对于 $x_3[n]$，

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \sin(\frac{\pi n}{4})\cos(\frac{\pi n}{8}) \\ &= \frac{1}{2}[\sin(\frac{3\pi n}{8}) + \sin(\frac{\pi n}{8})] \end{aligned} \tag{15}$$

由此，可以得到，$x_3[n]$ 的基波周期为 16。

3.3.3 question 3

两个离散时间周期信号的和是离散时间周期信号，且其周期是这两个信号周期的最小公倍数。不过也只是在离散信号时才成立，连续信号就不成立了。具体来说，假设有两个离散时间周期信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$，它们的周期分别为 N_1 和

N_2，那么它们的和 $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$ 仍然是离散时间周期信号，且其周期为 $N=\mathrm{lcm}(N_1,N_2)$，其中 $\mathrm{lcm}(N_1,N_2)$ 表示 N_1 和 N_2 的最小公倍数。

两个离散时间周期信号的积不一定是离散时间周期信号。这是因为两个周期信号的积仅在它们的基波周期相等或为倍数关系时才会是周期信号。具体来说，如果两个离散时间周期信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的周期不相等，即它们的周期 N_1 和 N_2 没有公共因子，那么它们的积 $x[n]=x_1[n]x_2[n]$ 就不是周期信号。

4 problem 4

4.1 问题描述

(1) 通过 Matlab 编程，利用 $x_1[n]=\delta[n]$ 和 $x_2[n]=2\delta[n]$ 说明系统 $y[n]=\sin(\frac{\pi}{2}x[n])$ 的非线性特性。

(2) 通过 matlab 编程，利用 $x[n]=u[n]$ 说明系统 $y[n]=x[n]+x[n+1]$ 的非因果性，对于输入序列：$-5\le n\le 9$, 对于输出序列：$-6\le n\le 9$。

4.2 matlab 编程及问题分析

4.2.1 question 1

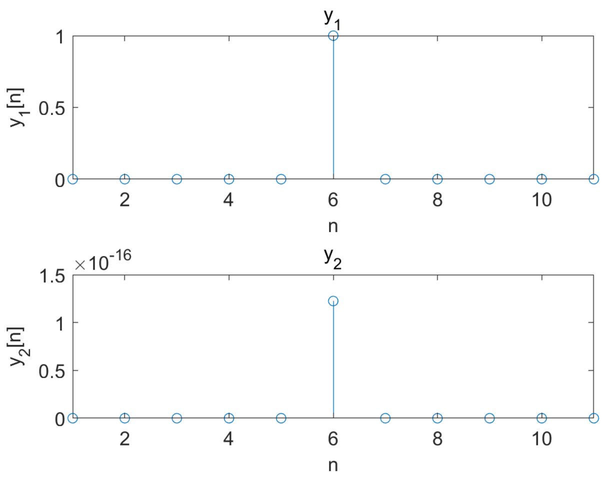

图 4: problem 4 1

根据题目要求编程，得到的信号图像结果如图 4所示。

若某一信号满足非线性特性，则当输入变为两倍时，输出也会随之变为两倍；而对于题给信号，从图像中我们可以看出，当输入信号变为两倍时，输出信号与 2 相差甚远，故信号具有非线性特性。

4.2.2 question 2

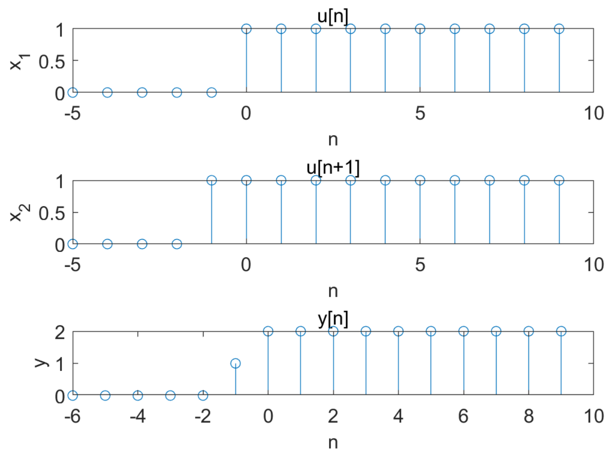

图 5: problem 4 2

输入与输出信号如图 5所示。

从图中，我们可以看出，输出信号 $y[n]$ 在输入信号 $x[n]$ 产生输入之前就存在输出，所以该系统是非因果信号。

5 problem 5

5.1 问题描述

(1) 创建信号 $x(t)$ 的符号表达式：

$$x(t) = e^{i2\pi t/16} + e^{i2\pi t/8} \tag{16}$$

利用 ezplot 绘制该信号。注意：ezplot 无法直接绘制复信号，可以分别绘制其实部和虚部。（在新版本的 matlab 中，ezplot 不推荐使用，故实际代码使用的是 fplot）

(2) 创建函数 $xr = sreal(x)$，使其返回 $x(t)$ 的实部；同样，创建函数 $xi = simage(x)$，使其返回 $x(t)$ 的虚部。

(3) 利用 ezplot(fplot) 和创建的函数，分别绘制 $x(t)$ 的实部和虚部，并给出 $x(t)$ 的基本周期。

5.2 matlab 编程和问题分析

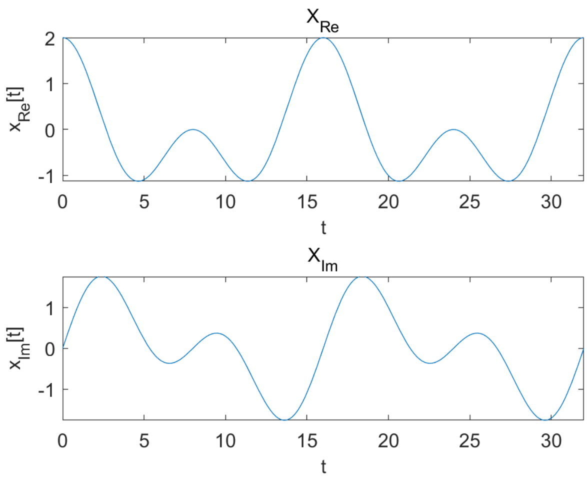

图 6: problem 5

通过 mtalab 编程绘制的函数实部和虚部图像如图 6所示。

$x(t)$ 是通过两个谐波信号叠加形成，因此求取两个信号周期的最小公倍数，即可得到 $x(t)$ 的基本周期为 16。

6 filter of lab 2

6.1 问题描述

对于因果 LTI 系统

$$y[n] = 0.5x[n] + x[n-1] + 2x[n-2] \tag{17}$$

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 2x[n] \tag{18}$$

$$y[n] - 0.8y[n-1] = 2x[n-1] \tag{19}$$

输入为 $x[n] = nu[n]$，利用 filter 命令计算并绘制输出 $y[n]$，其中 $1 \leq n \leq 4$

6.2 matlab 编程及分析

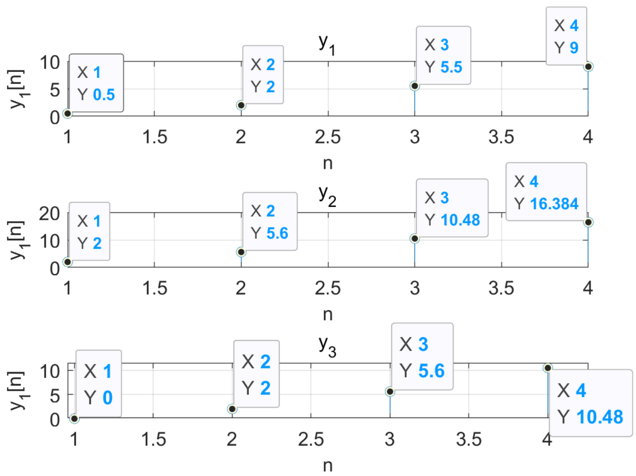

图 7: lab 2 1

三个 LTI 系统的输出信号如图所示。

7 lism of lab 2

7.1 问题描述

(1) 因果 LTI 系统由一阶微分方程表征，$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{2}y(t) + x(t)$，计算并绘制该系统的阶跃响应。

(2) 因果 LTI 系统由一阶微分方程表征，$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)+x(t)$，输入为 $x(t)u(t-2)$，$t = [0 : 0.5 : 10]$，利用 lsim 命令计算输出响应。

(3) 分别利用 impulse 和 step 命令计算问题（1）的脉冲响应和阶跃响应。比较 step 和 lsim 命令得到的阶跃响应；比较求导后得到的脉冲响应和 impulse 命令得到的脉冲响应是否相同。

7.2 matlab 编程及分析

7.2.1 question 1

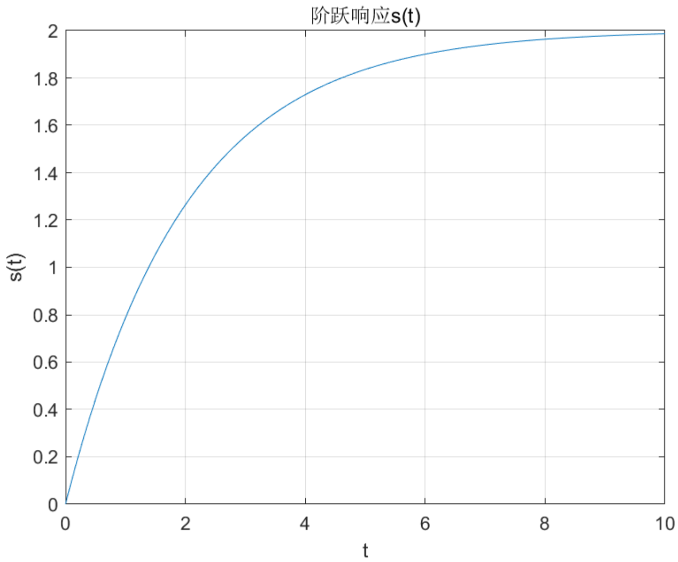

图 8: lab 2 2 1

通过 lsim 函数得到的输出信号图像如图 8所示。

我们可以通过在复频域的计算来验证这一结果：

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{2}y(t) + x(t) \tag{20}$$

$$j\omega Y(j\omega) = -\frac{1}{2}Y(j\omega) + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{21}$$

$$Y(j\omega) = \frac{2}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega) - \frac{2}{j\omega + \frac{1}{2}} \tag{22}$$

所以，我们可以得到，阶跃响应为：

$$y(t) = 2(1 - e^{-t/2})u(t) \tag{23}$$

比较得到，图像是正确的。

7.2.2 question 2

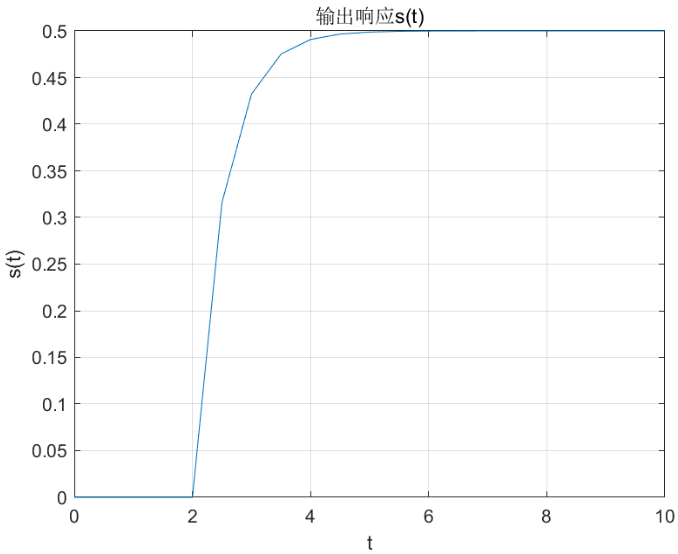

图 9: lab 2 2 2

输出响应的信号图像如图 9所示。

同样的，我们通过计算来验证该结果：

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + x(t) \tag{24}$$

$$j\omega Y(j\omega) = -2Y(j\omega) + [\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]e^{-j2\omega} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

在第一问的基础上，我们可以得到其输出响应为：

$$y(t) = 2(1 - e^{-(t-2)/2})u(t-2) \tag{27}$$

由此可以看出，图像和表达式是相匹配的。

7.2.3 question 3

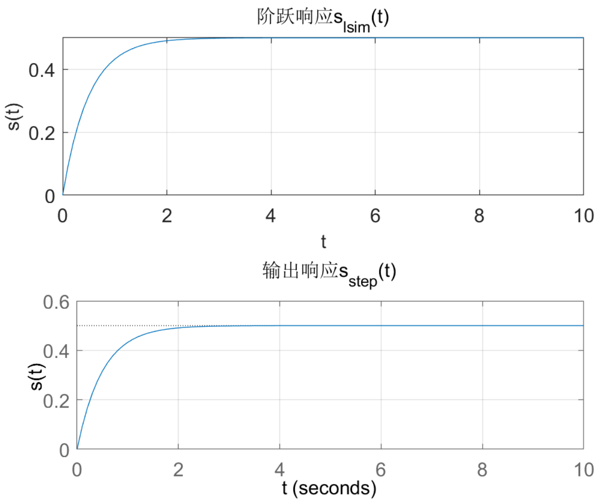

图 10: lab 2 2 3 阶跃

如图 10所示的图像是 step 函数和 lsim 命令得到的信号图像的比较，可以看出，图像是相同的，但由 step 函数绘制的图像会将渐近线给出，更加专业一些。

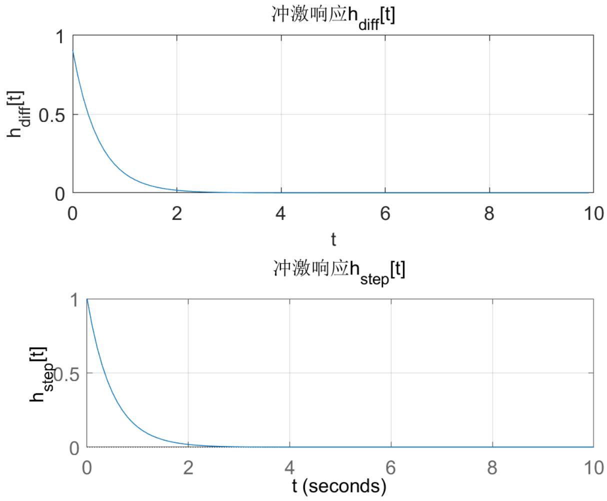

图 11: lab 2 2 3 冲激

如图 11所示，是通过对阶跃响应求导和通过 impulse 函数得到的信号响应的比较，可以看出，两种方法绘制的信号响应的图像是完全相同的。