Notițe meditații matematică

LazR ('3')

5 Mai, 2023

Cuprins

Capitolul 1:Mulțimi

Mulțime

O mulțime este o colecție de obiecte. Obiectele unei mulțimi sunt enumerate între acolade și cu virgulă între ele.

Exemple de mulțimi

(i) Mulțimea patrupedelor = { câini, pisici, cai, ... }
(ii) Mulțimea țărilor europene = { Germania, Franța, Italia, Austria, România, ... }
(iii) Mulțimea claselor unei școli = {
$\underbrace{\{\text{ Andra, Darius, Ana, Emanuel, ...}\}}_{\text{VI E}}$,
$\underbrace{\{\text{ Alex, Andrada, Marius, Victor, ...}\}}_{\text{VII B}}$,
$\underbrace{\{\text{ Sandra, Andrei, Daniel, Anamaria, ...}\}}_{\text{V C}}$,
...
}

Observație

Atât ordinea, cât și repetițiile elementelor unor mulțimi sunt irelevante:

$$\{3,4,5\} = \{4,3,5\} = \{4,5,3\} = \{4,5,5,3\} = \{3,3,4,3,4,4,4,5,3,5,5\}$$

etc.

1.1 Operații cu mulțimi

Reuniunea: Reuniunea dintre două sau mai multe mulțimi este mulțimea ***tuturor elementelor*** din fiecare mulțime. Se notează cu $\cup$.
De exemplu, dacă $A = \{1,4,7,3\}$ și $B = \{2,1,6,8,3\}$, atunci $A \cup B = \{1,2,3,4,6,7,8\}$.

Intersecția: Intersecția dintre două sau mai multe mulțimi este mulțimea

tuturor elementelor comune ale mulțimilor. Se notează cu $\cap$.
De exemplu, dacă $A = \{1, 4, 7, 3\}$ și $B = \{2, 1, 6, 8, 3\}$, atunci $A \cap B = \{1, 3\}$.

Diferența: Diferența a două mulțimi oarecare A și B, notată $A \setminus B$, este mulțimea tuturor elementelor din A care nu sunt și în B.
De exemplu, dacă $A = \{1, 4, 7, 3\}$ și $B = \{2, 1, 6, 8, 3\}$, atunci $A \setminus B = \{4, 7\}$ și $B \setminus A = \{2, 6, 8\}$.

Observație

Există o mulțime unică, ce nu conține niciun element. Aceasta se numește ***mulțimea vidă*** și se notează $\emptyset$. Are următoarele proprietăți, valabile indiferent de mulțimea A:

$$A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \setminus \emptyset = A;$$

$$\emptyset \setminus A = \emptyset.$$

1.2 Submulțimi

Orice mulțime are submulțimi, adică mulțimi mai mici sau egale, ce conțin o parte, dacă nu chiar toate elementele mulțimii originale. Mulțimea submulțimilor unei mulțimi A se notează $\mathcal{P}(A)$.
De exemplu, dacă $A = \{1, 2, 3\}$, atunci

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Observație

Mulțimea vidă este submulțime pentru orice mulțime.

1.3 Incluziunea

O mulțime B este inclusă într-o mulțime A, dacă B este o submulțime a lui A. Relația de incluziune se notează cu $\subset$. De exemplu, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$, dar $\{1,3,4\} \not\subset \{1,2,3\}$.

Observație

Simbolul $\subseteq$ permite ca B să fie inclusiv egal cu A, în timp ce simbolul $\subset$ exclude cazul în care cele două mulțimi sunt egale.

1.4 Apartenența

Faptul că elementul a aparține mulțimii A se notează $a \in A$ și se citește ”a aparține mulțimii A”. De exemplu, $1 \in \{1,2,3\}$, dar $5 \notin \{1,2,3\}$.

Capitolul 2:Mulțimea numerelor naturale

Mulțimea numerelor naturale este mulțimea numerelor considerate, de obicei, ca fiind cele mai naturale și mai ușor de înțeles. Se noteză cu $\mathbb{N}$. Mai abstract, $\mathbb{N}$ este mulțimea cu următoarele proprietăți:

$$0 \in \mathbb{N};$$

orice element al lui $\mathbb{N}$ are un succesor.

De exemplu, succesorul lui 0 se notează cu 1, succesorul lui 1 se notează cu 2 etc. Desfăsurat, putem scrie:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

2.1 Adunarea

Definiția sumei

Suma lui a și a lui b este $a + b$. Spunem că adunăm b la a.

Câteva reguli ale adunării:

Comutativitatea adunării

a + b = b + a.

Asociativitatea adunării:

(a + b) + c = a + (b + c).

2.2 Inmultirea

Produs

Produsul dintre a și b este $a \cdot b$. Spunem că înmulțim a cu b.

Câteva reguli ale înmulțirii:

Comutativitatea înmulțirii

$a \cdot b = b \cdot a.$

Asociativitatea înmulțirii

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

Observație

Efectuăm mai întâi parantezele.

Observație

O proprietate comună a adunării și înmulțirii este distributivitatea:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

2.3 Puteri

Definiția puterii

Numărul a ridicat la puterea n înseamnă $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^n$. Se citește "$a$ la puterea n", sau "a la a n-a". Expresia a^0 se definește ca fiind 1.

Exemple

(i) 2 la a 3-a : $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ (pentru că $2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$).
(ii) 5 la a 2-a : $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$.
(iii) 123456 la întâia: $123456 = 123456^1$.
(iv) $0^0 = 1^0 = 2^0 = 3^0 = 4^0 = 489012484904^0 = \text{orice}^0 = 0$.

2.4 Scrierea în baza 10

Definiția scrierii în baza 10

Numărul $\overline{a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 a_0}$ scris în baza 10 înseamnă

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + ... + 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0,$$

unde numerele de forma a_k sunt numere naturale mai mici decât 10.

Exemple ale scrierii în baza 10

(i) $\overline{1} = 10^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$.
(ii) $\overline{12} = 10^1 \cdot 1 + 10^0 \cdot 2 = 10 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 10 + 2 = 12$.
(iii) $\overline{123} = 10^2 \cdot 1 + 10^1 \cdot 2 + 10^0 \cdot 3 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 100 + 20 + 3 = 123$.
(iv) $\overline{502} = 10^2 \cdot 5 + 10^1 \cdot 0 + 10^0 \cdot 2 = 100 \cdot 5 + 10 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 500 + 0 + 2 = 502$.

Observație

Scrierea în baza zece ne poate ajuta în comunicarea mai eficientă a unei idei. De exemplu, în loc să spunem că lucrăm cu toate numerele de trei cifre, care au pe poziția zecilor cifra 2, putem spune direct că lucrăm cu toate numerele de forma $\overline{a2b}$.

2.5 Mai mic, mai mare, sau egal

Dacă avem două numere, a și b, acestea pot fi egale, sau, în caz contrar, unul dintre ele este cu siguranță mai mic, iar celălalt, mai mare. Se folosesc următoarele notații:

”a mai mic decât b”: $a < b$;

”a mai mare decât b”: $a > b$;

”a egal cu b”: $a = b$.

De asemenea, există notațiile $\leq$ - ”mai mic sau egal”, și $\geq$ - ”mai mare sau egal”.

2.6 Divizibilitate

Divizibil

Dacă numărul a se împarte exact la b (adică restul împărțirii lui a la b este 0), atunci spunem că numărul a este divizibil cu b, notat $a \vdots b$, sau că b divide a, notat $b|a$.

Divizor

Un număr care divide n se numește divizor al lui n. Mulțimea tuturor divizorilor lui n se notează D_n.

De exemplu, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Multiplu

Un număr divizibil cu n se numește multiplu al lui n. Mulțimea tuturor multiplilor lui n se notează M_n.

De exemplu, $M_{12} = \{12 \cdot 0, 12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, 12 \cdot 4, 12 \cdot 5, ...\} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, ...\}$.

Număr prim

Un număr este prim dacă singurii săi divizori sunt 1 și el însuși.

Primele câteva numere prime sunt $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ etc.

1. Fie $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \in A$;
b) $3 \notin A$;
c) $2 \notin B$;
d) $1^{2003} \in A$;
c) $4 \notin A \cap B$;
e) $7 \in A \cup B$.

2. Scrieți următoarele mulțimi sub o formă compactă:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
$D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.

3. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $3 \in \{0, 1, 3\}$;
b) $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
c) $4 \in \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$;
d) $0 \in \emptyset$;
e) $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3^{14}\}$;
f) $10 \in \{x \in \mathbb{N} | 7 \leq x < 12\}$.

4. Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x | x = 2^a + a, a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și aflați cardinalul lui B.

5. Indicați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \in \{1, 7, 3\}$;
b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$;
c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$;
e) $0 \notin \emptyset$

6. Enumerați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 4\};$
$B = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 4\};$
$C = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x < 7\};$
$D = \{x \in \mathbb{N} | 4 < x \leq 10\}.$

7. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\};$
$B = \{x \in \mathbb{N} | x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\};$
$C = \{x \in \mathbb{N}^* | 2^x < 32\};$
$D = \{x \in \mathbb{N} | x$ este ultima cifră a lui $n^2, n \in \mathbb{N}\};$
$E = \{x \in \mathbb{N}^* | x^3 \leq 64\};$
$F = \{x \in \mathbb{N} | 3^x = 1$ sau $3^x = 27\};$
$G = \{x \in \mathbb{N} | 2^x = 2$ și $2^x = 32\};$
$H = \{x \in \mathbb{N} | x^2 < 12$ și $x^{12} \geq 9\};$
$I = \{x \in \mathbb{N} | x$ este pătrat perfect și are ultima cifră $3\};$
$J = \{\overline{x2y} | x = 2k_1 + 1, k_1 \in \mathbb{N}, x < 6, y = 2k_2, k_2 \in \mathbb{N}, k_2 < 5\}.$

8. Aflați cardinalul următoarelor mulțimi:

$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 2001\};$
$B = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 1957\};$
$C = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x \leq 10\};$
$D = \{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 7\};$
$E = \{x \in \mathbb{N} | 5 < x \leq 14\};$
$F = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x < 2002\};$
$G = \{x \in \mathbb{N} | 2^{2004} < x < 2^{2005}\}.$

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} | x + 2 \leq 5\};$
$\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} | x - 1$ este cifră pară $\};$
$\{2, 4, 6, 8\} = \{x \in \mathbb{N} | x - 1$ este cifră impară $\}.$

10. Scrieți elementele mulțimilor de mai jos:

$A = \{x \in \mathbb{N} | 7 \leq x \leq 11\};$

$B = \{x \in \mathbb{N} | 5 \leq x - 2 \leq 9\};$
$C = \{x \in \mathbb{N} | 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}.$

11. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} | x \in D_{15}\};$
$B = \{x \in \mathbb{N}^* | x + 1 \in D_{18}\};$
$C = \{x \in \mathbb{N} | x \in D_{10} \text{ și } x + 2 \in D_{12}\};$
$D = \{x \in \mathbb{N} | x \in M_{10} \text{ și } x - 4 \in D_{26}\};$
$E = \{x \in \mathbb{N} | x | 18 \text{ și } 2x + 3 \leq 15\};$
$F = \{x \in \mathbb{N} | x | 14 \text{ și } 2x - 1 < 19\};$
$G = \{x \in \mathbb{N} | 3 | x\};$
$H = \{x \in \mathbb{N} | 41 | (2x - 1)\};$
$I = \{x \in \mathbb{N} | 5 | (3x - 1)\};$
$J = \{x \in \mathbb{N} | 4 | (x + 2)\};$
$K = \{x \in \mathbb{N} | (x + 2) | 50 \text{ și } 3 | x\};$
$K = \{x \in \mathbb{N} | (2x + 3) | 18\};$
$L = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq 2x < 10 \text{ și } (2x + 1) | 7\}.$

12. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} | (2x + 1) | (2x + 5)\};$
$B = \{x \in \mathbb{N} | (x + 1) | (x + 50)\};$
$C = \{x \in \mathbb{N} | (x + 1) | (x^2 + 2)\};$
$D = \{x \in \mathbb{N} | (x + 2) | (x^2 + 4x + 16)\}.$

13. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} | 2 | \overline{3x8}\};$
$B = \{x \in \mathbb{N} | 6 | \overline{x56}\}.$

14. Enumerați elementele mulțimilor A și B, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cap B = \{2, 3\}, A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \setminus B = \{0, 1, 4\};$
b) $A \cap B = \{5, 6\}, A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A \setminus B = \{3, 7\}.$

15. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$;
b) $|A| = |B| = 2$;
c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$;

16. Se dă mulțimea A formată din numere naturale, cu propritățile:

a) $9 \in A$;
b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$;
c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătați că $6 \in A$.

17. Fie $M = \{0, 1, 7\}$. Aflați $\mathcal{P}(M)$.

18. Fie $M = \{\overline{x1} | 1 \leq x \leq 9\}$. Aflați $|N|$, unde $N = \{P \subset M || P| = 8\}$.

19. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x \leq 7\}, B = \{y = x + 2 | x \in A\}, C = \{z = 2x | x \in A\}$.

a) Calculați $|A|$, $|B|$, $|C|$.
b) Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$\{5, 6\} \subset A; A \subset C; \{7, 8\} \subseteq B.$$

20. Precizați cardinalul mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x^2 < 70\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} | 5 < x^3 \leq 125\}$.

21. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^* | 3x + a < 14, a \in \mathbb{N}\}$. Determinați a, astfel încât:

a) $|M| = 0$;
b) $|M| = 1$;
c) $|M| = 2$;
b) $|M| = 3$;

22. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} | 2x - 3 < 9\}, B = \{y \in \mathbb{N} | y + 2 < 8\}, C = \{z \in \mathbb{N} | z = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$. Precizați care dintre propozițițiile următoare sunt

adevărate și care sunt false:

$$A = B, A \subset C, C \subset B, A = C, A \not\supset B, B \neq C.$$

23. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2014\}$. Determinați numărul submulțimilor formate din doă elemente a căror sumă este 2015.

24. Fie $M = \{1, 4, 7, ..., 100\}$ și P o submulțime a sa formată din 19 elemente. Arătați că, indiferent de elementele lui P, există doă elemente din P distincte, a căror sumă este divizibilă cu 52.

25. Fie mulțimile $A = \{x|x = 1995n+7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y|y = 1985p+3, p \in \mathbb{N}\}$. Stabiliți dacă mulțimea $A \cap B$ are un număr finit de elemente, sau o infinitate de elemente.

26. Arătați că oricare mulțime de 5 numere naturale are o submulțime de 3 elemente, astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 3.

27. Se dau mulțimile $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d\}$ și $C = \{c, d, e\}$. Determinați mulțimile:

a) $(A \setminus B) \cup C$;
b) $(A \setminus C) \cup B$;
c) $(B \setminus C) \cup (A - \emptyset)$;
d) $A \cup B \cup C$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $(A \cap B) \setminus C$;

28. Aflați câte numere nenule mai mici decât 100 nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 7.

29. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}|x = 2^k, 1 < k \leq 4\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N}|y = 3^{k-1}, 3 \leq k < 6\}$. Determinați mulțimile: $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, (A \setminus B) \cup (B \cap A), (A \cup B) \cap (B - A), A\delta B$.

30. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}|x$ x este cifră impară $\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}|2x - 1 \leq 5\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N}|2x^2 + 1 \leq 19\}$. Determinați mulțimile: $A, B, C, A \cup B, A \cap B, A \cap C, A \setminus B, B \setminus C, A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, B\delta C$. Reprezentați fiecare

mulțime printr-o diagramă.

31. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* | 3(x-2) \leq 2(x+1)-1\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} | x+1 = 3$ sau $x+1 = 5\}$. Calculați $A, B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, (A \cup B) \setminus (A \cup B), A \delta B$.

32. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} |, x = 2^a + 2^b, a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ $B = \{y \in \mathbb{N}^* | y = x - 1, x \in A\}$, și $C = \{z \in \mathbb{N} | z = y^c + 1, c \in \{0, 1\}, y \in B\}$.
Calculați $A, B, A \cup B, A \cap B, B \setminus A, A \cap B \cap C, A \cup B \cup C, (A \cap B) \cup (B \cap C), (A \cup B) \cap (B \setminus C), (A \setminus B) \cap (C \setminus A)$.

33. Fie A și B două mulțimi. Dacă:

a) $|A \cup B| = 10, |A| = 5, |B| = 7$, calculați $|A \cap B|$;
b) $|A| = 10, |A \setminus B| = 4$, calculați $|B|$;
c) $B \subset A, |A| = 12, |B| = 5$, calculați $|A \cap B|$.

34. Fie mulțimile $A = \{\overline{1x0} | x \in \mathbb{N}, 2 | \overline{1x0}\}$ și $B = \{\overline{12x} | x \in \mathbb{N}, 5 | \overline{12x}\}$. Calculați $A, B, A \cup B, A \cap B, A \delta B$.

35. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N}^* | 2x + a < 10, a \in \mathbb{N}\}$. Determinați numărul a, astfel încât:

a) $|A| = 0$;
b) $|A| = 1$;
c) $|A| = 2$;
d) $|A| = 3$;

36. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;
b) $A \cap B = \{c, d\}$;
c) $A \cap \{e, f\} = \emptyset$;
d) $\{a, b\} \cap B \neq \emptyset$.

37. Determinați numărul natural A, astfel încât reuniunea mulțimilor $\{7, a + 5\}$ și $\{1, 2a + 1\}$ să fie formată din trei elemente.

38. Se dau mulțimile $A = \{5k + 2007, 5k + 2008 | k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x^2 | x \in \mathbb{N}\}$.

Determinați $A \cap B$.

39. Într-o clasă sunt 27 de elevi. Dintre aceștia, nota 8 au obținut 19 elevi la teza de la limba română și 16 la teza de la matematică, iar doi elevi, fiind bolnavi, nu au participat la teze. Calculați câți elevi au obținut nota 8 la ambele teze.

Dintre cei 27 de elevi ai unei clase, 3 nu au media maximă la română sau la matematică, 13 au media maximă la română, iar 15 la matematică.

a) Câți elevi au medii maxime la ambele materii?
b) Câți elevi au medii maxime doar la română?
c) Câți elevi au medii maxime doar la matematică?