Exerciții

LazR ('3')

6 Iulie, 2024

Cuprins

1 Numere reale

1. Să se restrângă expresiile:

a) $a^2 - 4a + a$;

b) $\frac{4}{a^2} - \frac{12}{a} + 9$;

c) $-2a^2 + 2\sqrt{2}ab - b^2$;

d) $a^2 + b^2 + 1 - 2a - 2b - 2ab$;

e) $4a^2 + 4 + 4\sqrt{3}a - 4a - 2\sqrt{3}$.

2. Să se descompună în factori expresiile:

a) $4a^2 - 9b^2$;

b) $3 - a^2$;

c) $2a^2 - 5$;

d) $1 - 16a^4$;

e) $a^3 + 125b^3$;

f) $a^6 - b^6$;

g) $(a + b - c)^3 - (a - b + c)^3$.

3. Să se calculeze:

a) $299 \cdot 301$;

b) $599 \cdot 601$;

c) $1001 \cdot (-999)$;

d) $(-2501) \cdot (-2499)$.

4. Să se pună în evidență un pătrat de binom:

a) $a^2 - 2a + 3$;

b) $-a^2 + 5a + 2$;

c) $a^4 + 3a^2$;

d) $(a-1)^2 - 2(a^2 - 1)$;

e) $-2a^2 + 7a + 3$.

5. Să se arate că următoarele expresii sunt constante:

a) $(a-2)^2 - (a-3)^2 - 2a$;

b) $(2a+1)(4a^2 - 2a + 1) - 8a^3$;

c) $(a-2)^3 + 6(a-1)^2 - a^3$;

d) $\frac{a^3-8}{a-2} - \frac{a^3+8}{a+2} - 4a$;

e) $(2a+1)^3 - (2a-3)^3 - 48 \cdot \frac{a^3+1}{a+1}$.

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a > b$, astfel încât $a + b = 6$ și $a \cdot b = 4$. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

b) $\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}$;

c) $\frac{a}{b^3} - \frac{b}{a^3}$;

d) $\frac{a^2}{b+2} + \frac{b^2}{a+2}$;

e) $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b}$;

f) $\frac{a}{b-3}+\frac{b}{a-3}$;

g) $\frac{a}{a^2+a+1}+\frac{b}{b^2+b+1}$.

7. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2=26$ și $a \cdot b=5$. Să se calculeze:
a) $a+b$;

b) $a-b$;

c) a^3-b^3;

d) a^4-b^4;

e) a^4+b^4;

f) a^5+b^5.

8. Fie $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x+\frac{1}{x}=a, a>2$. Să se calculeze în funcție de a expresiile:
a) $x^2+\frac{1}{x^2}$;

b) $x-\frac{1}{x}$;

c) $x^3+\frac{1}{x^3}$;

d) $x^4+\frac{1}{x^4}$;

e) $x^5+\frac{1}{x^5}$.

9. Fie $x>0$. Dacă $x^2+\frac{1}{x^2}=14$, să se demonstreze că $x^5+\frac{1}{x^5} \in \mathbb{Z}$.

10. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|3-x|-2|x-3|$;

b) $|2x+1|=x+3$;

c) $|3x-2|=|x+1|$;

d) $|x|+|x-1|=1$;

f) $|x-1|+|2x-2|+...+|9x-9|=x$.

11. Să se afle $[x]$ și $\{x\}$, dacă:

a) $x-[\sqrt{2}]+\{-2,(3)\}=\{2\}+\{\frac{1}{3}\}+\{3,(4)\}$;

b) $2x-(1+[1-\sqrt{3}])x=\{\frac{5}{3}\}x-\{\frac{99}{4}\}$.
12. Să se calculeze partea întreagă a numerelor:

a) $\sqrt{n^2+2}$;

b) $\sqrt{n^2+4n}$;

c) $\sqrt{9n^2+n}$;

d) $\sqrt{n^2-n+1}$;

e) $\sqrt{4n^2+3n+1}$;

f) $\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{4n^2+1}$.

13. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $p=\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{n^2+k}]$. Să se demonstreze că numărul p este pătrat perfect.

14. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{x+1}{2}$;

b) $\left[\frac{4x-1}{3}\right]=\left[\frac{2x+1}{4}\right]$;

c) $[\frac{x+1}{x+2}]=\frac{2x+1}{2x+2}$;

d) $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$.

15. Să se demonstreze că:

a) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = 2x + \frac{1}{2}$;

b) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} = 3x + 1$;

c) $\left[\frac{x+1}{2}\right] = [x] - \left[\frac{x}{2}\right]$.

16. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $[a] = 1$, unde $a = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

17. Să se calculeze $\sum_{k=2}^{n} \left[\frac{k+\sqrt{k}}{k}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

18. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n}[\sqrt{k(k+1)}]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Să se afle partea întreagă a numerelor:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de rație r. Știind că $a_{21} = 20$ și $a_{101} = 60$, să se determine r și formula termenului a_{n+1}.

21. Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 metri în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu 6 centimeri mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

22. Fie n un număr natural, mai mare decât 3. Să se calculeze suma:

$$2 + 22 + 222 + ... + \underbrace{22..2}_{\text{de } n \text{ ori}} .$$

23. Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică cu termeni nenuli și rație $q \neq 1$. Știind că $b_1 = 1$ și $2b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q și S_n.

2 Trigonometrie

1. Să se calculeze $\sin^2 120°$ - $\cos^2 30°$.

2. Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\tan x$.

3. Se consideră expresia $E(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $E(\frac{2\pi}{3})$.

4. Aflați valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2\cos(\pi - a) - 1 = 0$.

5. Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

6. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\cos x = -\cos 40°,$$

unde $x \in (0, 360°)$.

7. Care dintre numerele $\cos 55°$, $\sin 155°$, $\sin 15°$, $\cos 170°$, $\cos 100°$, $\sin 106°$ este cel mai aproape de 0?

8. Verificați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sin 144° = \cos 54°$;

b) $\cos 2018° = -\cos 38°$.

9. Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, unde $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, atunci calculați valoarea lui $\cos \frac{a}{2}$.
10. Să se calculeze $\tan a + \tan b$, unde $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, dacă $\cos a + \cos b = 0$.