Teme

LazR ('3')

24 Iunie, 2024

Cuprins

1 Tema I

1. Să se scrie desfășurat următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^{5}(k-1)$;

b) $\sum_{i=-4}^{2}(\frac{1-4i}{3-i})$;

c) $\sum_{j=4}^{9}\sum_{i=2}^{j} j^i$;

d) $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{a_i^k}{j}$.

Indicație: c) și d) sunt sume de sume, nu înmulțiri între sume!

2. Să se scrie în mod restrâns, folosind notația Σ, următoarele sume și să se calculeze rezultatul final, utilizând principii și formule cunoscute:

a) $1+2+3+...+30$;

b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+...+\frac{131}{2}$;

Indicație: Se poate folosi formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritemtice, stabilindu-se primul termen, al n-lea termen, și cât este de fapt n (câți termeni adunăm).

c) $1^2+2^2+3^2+...+30^2$;

d) $1+3+5+...+(2n-1)$;

e) $1^3+2^3+3^3+...+30^3$;

f) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)$;

g) $1^4+2^4+3^4+...+$ (just kidding, nu te pun să faci așa ceva :p)^4.

h) $1+5+9+...+(4n-3)$.

3. Să se afle termenii a_2 și a_3 ai următoarelor progresii aritemitce, știind că:

a) $a_1 = 2, r = -3$;

b) $a_1 = -\frac{1}{3}, r = 2$;

c) $a_1 = 3, r = -\frac{1}{4}$;

d) $a_1 = 3, r^2 + \frac{4}{3}r - \frac{4}{3} = 0$.

4. Numerele de forma a_n sunt în progresie aritmetică. Dacă $a_{17} = 10$, să se calculeze $a_8 + a_{10} - a_1$.

Indicație: Aplicând formula termenului general al unei progresii aritmetice, cum putem să rescriem $a_8 + a_{10} - a_1$?

5. Fie progresia aritemtică cu primul termen $a_1 = 2$ și suma primilor 20 termeni $S_{20} = 610$. Să se afle r, a_4 și S_{30}.

6. Să se rezolve ecuația:

$$3x + (3x + 2) + (3x + 4) + ... + (3x + 100) = 2652.$$

Indicație: nu e obligatoriu să se utilizeze notația Σ.

7. Calculați:

a) $\left[-\frac{5}{2}\right] + [\frac{5}{3}]$;

b) $\{1,64\} - \{-2,36\}$.

8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;

b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;

c) $|1-2x|=|x+4|$.
9. Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{i} j.$$

AL6 și AL7 din culegerea de poli.

2 Tema II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|3-x|-2|x-3|=0$;

Soluție:

$$x : -\infty \xrightarrow[3-x<0]{x-3>0} 3 \xrightarrow[3-x>0]{x-3<0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow$

$$x-3-2(x-3)=0 \iff -(x-3)=0 \Rightarrow x=3 \in (-\infty, 3].$$

(ii) $x \in (3, \infty) \Rightarrow$

$$3-x-2(3-x)=0 \iff -2(3-x)=0 \Rightarrow x=3 \notin (3, \infty).$$

$$x \in \{3\}.$$

b) $|2x+1|=x+3$;

c) $|3x-2|=|x+1|$;

Soluție:

$$x : -\infty \xrightarrow[x+1<0]{3x-2<0} -1 \xrightarrow[x+1>0]{3x-2<0} \frac{2}{3} \xrightarrow[x+1>0]{3x-2>0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow$

$$2-3x=-x-1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \notin (-\infty, -1]\,.$$

(ii) $x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow$

$$2-3x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \in \left(-1, \frac{2}{3}\right].$$

(iii) $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \Rightarrow$

$$3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

$$x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}.$$

d) $|x| + |x - 1| = 1$;

f) $|x - 1| + |2x - 2| + ... + |9x - 9| = x$.

Soluție:

$$|x - 1| + 2|x - 1| + ... + 9|x - 1| = x$$
$$(1 + 2 + ... + 9)|x - 1| = x$$
$$\frac{9 \cdot 10}{2}|x - 1| = x$$
$$45|x - 1| = x$$

$$x : -\infty \xrightarrow{x-1<0} 1 \xrightarrow{x-1>0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow$

$$45(1 - x) = x \Rightarrow x = \frac{45}{46} \in (-\infty, 1].$$

(ii) $x \in (1, \infty)$

$$45(x - 1) = x \Rightarrow x = \frac{45}{44} \in (1, \infty).$$

$$x \in \left\{\frac{45}{44}, \frac{45}{46}\right\}$$

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x + 5| \leq 2$;

Soluție:

$$-2 \leq x+5 \leq 2 \iff -7 \leq x \leq -3 \Rightarrow x \in [-7,-3].$$

b) $|1-3x| > 1$;

Soluție:

$$1-3x < -1 \text{ sau } 1-3x > 1 \iff x > \frac{2}{3} \text{ sau } x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

c) $|3x-1| + |3-9x| \leq 0$;

d) $|2x-1| \leq -1$;

e) $|3x-6| > 0$;

f) $1 < |x-2| < 2$;

g) $|5-3x| < x$;

h) $|x| < |3x-1|$.

Soluție:

$$|x| < |3x-1| \iff x < |3x-1|;$$

(logic - dacă modulul unui număr e mai mic decât ceva, atunci și numărul în sine e mai mic decât acel ceva)

$$x < 3x-1 \text{ sau } 3x-1 < -x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

3. Să se calculeze următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$;

b) $\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k+3)$;

Soluție:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k+3) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k-6) \\
&= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-6\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-6n \\
&= n\left(\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)-1\right) \\
&= \frac{n(n^2+3n-16)}{3}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

c) $\sum_{k=2}^{n}(k^2+k)$;

d) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$;

e) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$.

4. Să se determine termenii a_5, a_9, a_{20} ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că primii 5 termeni ai progresiei sunt:

a) -5, a_2, a_3, 1, a_5;

Soluție parțială:

$$\overbrace{a_4}^{1} = \overbrace{a_1}^{-5} + 3r \Rightarrow r = 2.$$

b) a_1, 4, 1, a_4, a_5;

Soluție parțială:

$$r = \overbrace{a_3}^{1} - \overbrace{a_2}^{3} = -3 \text{ (nu 3)} .$$

c) a_1, -2, a_3, 2, a_5.

5. Să se determine care dintre numerele 3101, 770, 900, 1022 este termen al progresiei aritmetice având primul termen $a_1 = 2$ și rația $r = 4$.

Soluție:
Căutăm soluții pentru ecuația $a_k = a_1 + (k-1)r$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este necunoscuta noastră.

Ecuația

$$2 + 4(k-1) = 3101$$

într-adevăr nu are o soluție întreagă, deoarece 3101 e impar.

$$2 + 4(k-1) = 770 \Rightarrow k = 193 \in \mathbb{Z}.$$
$$2 + 4(k-1) = 900 \Rightarrow k = \frac{449}{2} + 1 \notin \mathbb{Z}.$$
$$2 + 4(k-1) = 1022 \Rightarrow k = 256 \in \mathbb{Z}.$$

Deci $a_{193} = 770$ și $a_{256} = 1022$ sunt termeni ai progresiei.

6. Fie progresia aritmetică cu primul termen $a_1 = 3$. Să se afle r, a_4, S_{30} dacă:

a) $S_{36} = 2628$;

Soluție:

$$S_{36} = 2628$$
$$36\frac{a_1 + a_{36}}{2} = 2628$$
$$a_1 + a_1 + 35r = 146 \Rightarrow 35r = 140 \Rightarrow r = 4.$$

b) $S_{50} = 3825$.

7. Să se determine termenii b_5, b_8, b_{20} ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă primii 4 termeni ai progresiei sunt:

a) b_1, 12, 36, b_4;

b) b_1, -6, b_3, b_4;

c) b_1, b_2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$;

d) 3, -2, b_3, b_4.

8. Să se calculeze (în principiu, să se restrângă) următoarele sume:
a) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2016}$;

Soluție:

$$\sum_{k=0}^{2016} 2^k = 1 \cdot \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 1 \text{ (pentru că, atenție, suma are 2017 termeni, nu 2016) }.$$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{100}}$;

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

9. Calculați:

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

10. Calculați:

a) $\sin \frac{\pi}{12}$;

b) $\cos 75^\circ$;

c) $\tan 15^\circ$;

d) $\cos \frac{11\pi}{12}$.

11. Calculați:

a) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2(x+\pi)$;

b) $\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)0-\cos x\cos\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

c) $\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2(\pi-x)$.

12. Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x=\frac{1}{2}$ și $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

13. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\cos x=-\cos 40°,$$

unde $x\in(0,360°)$.

14. Care dintre numerele $\cos 55°$, $\sin 155°$, $\sin 15°$, $\cos 170°$, $\cos 100°$, $\sin 106°$ este cel mai aproape de 0?

3 Tema III

1. Să se compare numerele:

a) $\left(-\frac{8}{25}\right)^4, b=\frac{9}{16}^6$;

b) $a=\left(\frac{1}{32\sqrt{2}}\right)^{22}, b=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{242}$;

2. Să se ordoneze crescător numerele:

a) 2^{72}, 5^{48}, 3^{36};

b) $2^{15}\cdot3^{30}$, $3^{15}\cdot5^{15}$, $2^{30}\cdot3^{15}$.

3. Să se ordoneze descrescător numerele:

a) $3^{40}\cdot2^{80}$, $3^{60}\cdot2^{120}$, $3^{80}\cdot2^{160}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{54}$, $\left(-\frac{64}{125}\right)^{18}$, $\left(\frac{49}{16}\right)^{27}$.

4. Să se calculeze:

a) $\frac{2^{-3}\cdot 3^{-4}}{4^{-2}\cdot 5^{-1}}$;

b) $\frac{(0{,}1)^{-1}\cdot(0{,}01)^{-2}\cdot(0{,}001)^{-3}}{(0{,}0001)^{-3}}$;

c) $\frac{(0{,}1)^{-3}:(0{,}01)^{-2}:(0{,}001)^{-1}}{(0{,}002)^{-1}:(0{,}02)^{-2}:(0{,}2)^{-3}}\cdot 2^6$.

5. Să se compare numerele:

a) 3^{-10} și 10^{-3};

b) $(1-a^2)^n$ și $(1-a^2)^{n-2}, n\in\mathbb{N}, |a|<1$;

c) 256^{-6} și 81^{-10};

d) $(1+a^2)^{2n}$ și $(1+a^2)^{n+2}, a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

6. Să se ordoneze crescător numerele:

a) 32^{-6}, 125^{-10}, 9^{-15};

b) 49^{-25}, $32^{-10}\cdot 9^{-25}$, 32^{-20};

c) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6}$, $\left(\frac{9}{16}\right)^{3}$.

7. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{-125}$;

b) $\sqrt[4]{(-3)^8}$;

c) $\sqrt[5]{0,00001}$;

d) $\sqrt[3]{(0,000001)^{-1}}$;

e) $\sqrt[6]{(\sqrt{65}-1)(\sqrt{65}+1)}$;

f) $\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{28+\sqrt[3]{-1}}}$;

g) $\sqrt[3]{1-3\sqrt{4}+3\sqrt[3]{2}}$.

8. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{864 \cdot 1701}$;

b) $\sqrt[3]{108}$;

c) $\sqrt[5]{-64 \cdot 243}$;

d) $\sqrt[6]{324 \cdot 81 \cdot 4^7}$;

e) $\sqrt[4]{2^{13} \cdot 3^{10} \cdot 5^5}$;

f) $\sqrt[4]{243x^5}$;

g) $\sqrt[6]{x^{12} \cdot y^7}$;

h) $\sqrt{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)^3}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$$E(x,y)=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7,$$

unde $x, y \in (0, \infty)$.

10. Arătați că numărul

$$a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$$

este rațional.

11. Să se calculeze:

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$;

b) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}}}$;

c) $(\sqrt[16]{2}-1)(\sqrt[16]{+}1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$.

12. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$;

b) $\log_3 0,125$;

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$;

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$.

13. Ordonați crescător numerele $a=-\sqrt[3]{64}$, $b=\log_3 \frac{1}{27}$ și $c=\log_2 \frac{1}{32}$.

14. Arătați că numărul $a=\log_4 8+\log_9 27-\sqrt[3]{8}$ este natural.

15. Demonstrați că numărul $b=\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2(6+\sqrt{8})+\log_2(6-\sqrt{8})-\log_2 7$;

b) $\lg 0,001+2^{\log_2 3}-9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$;

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}$.

4 Tema IV

1. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$;

$$\begin{aligned}\log_2 8\sqrt{2} &= \log_2 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 2^{3+\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}.\end{aligned} \tag{2}$$

b) $\log_2 0,125$;

$$\begin{aligned}\log_2 0,125 &= \log_2 \frac{125}{1000} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{10^3} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{5^3 \cdot 2^3} \\ &= \log_2 2^{-3} \\ &= -3.\end{aligned} \tag{3}$$

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$;

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 2^{2+\frac{1}{3}} \\ &= 2\log_2 2^{\frac{7}{3}} \\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned} \tag{4}$$

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$.

$$\begin{aligned} 4^{1-\log_2 \sqrt{8}} &= (2^2)^{1-\log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}}} \\ &= (2^2)^{1-3\cdot\frac{1}{2}} \\ &= (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Ordonați crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

3. Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

4. Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

5. Calculați:

a) $\log_2(6+\sqrt{8}) + \log_2(6-\sqrt{8}) - \log_2 7$;

b) $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$;

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}$.

6. Calculați:

a) $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5}$;

b) $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3}$;

7. Reduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$;

b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 - \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.

8. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2\log_{16} 5$;

b) $a = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a = \log_2 9 + \frac{\log_2 12}{\log_3 2} - \frac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

9. Arătați că numărul a este natural, unde:

$$a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}}.$$

10. Fie $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ și $b = \sqrt[16]{2}$. Arătați că $a \cdot b$ este număr rațional.
11. Arătați că $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[6]{7-3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.

12. Determinați numărul natural k, dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$.

5 Tema V

1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că legea ”$*$’” este asociativă și comutativă.

b) Determinați elementul neutru al legii ”$*$”.

c) Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:
Mai întâi, este recomandabil să rescriem legea de compoziție astfel:

$$\begin{aligned} x * y &= 2(xy - 3x - 3y) + 21 \\ &= 2(\underbrace{xy - 3x - 3y + 9}_{(x-3)(y-3)} - 9) + 21 \\ &= 2(x-3)(y-3) + 21 - 2 \cdot 9 \\ &= 2(x-3)(y-3) + 21 - 18 \\ &= 2(x-3)(y-3) + 3. \end{aligned} \tag{6}$$

a) Legea ”$*$” este asociativă, dacă și numai dacă

$$(x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Verificăm acest lucru:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (2(x-3)(y-3) + 3) * z \\ &= 2(2(x-3)(y-3) + 3 - 3)(z-3) + 3 \\ &= 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (2(y-3)(z-3) + 3) \\ &= 2(x-3)(2(y-3)(z-3) + 3 - 3) + 3 \\ &= 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3. \end{aligned} \tag{8}$$

Din (7) și (8) $\Rightarrow$ legea ”$*$” este asociativă.

Comutativitatea e trivială și o lăsăm ca exercițiu pentru cititor.

b) Fie $e \in M$. Elemementul e este considerat element neutru al legii ”$*$”, dacă și numai dacă

$$e * x = x * e = x \forall x \in M.$$

Faptul că $e * x = x * e$ este asigurat de faptul că legea este comutativă.
Rezolvăm următoarea ecuație, în funție de e:

$$x * e = x$$
$$2(x-3)(e-3)+3 = x$$
$$2(x-3)(e-3) = x-3;$$

presupunând că $x \neq 3$,

$$2(e-3) = 1 \Rightarrow e = \frac{7}{2}.$$

Pentru $x = 3$, avem $3*e = 2(3-3)(e-3)+3 = 3$ (3 este element absorbant). Deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii "$*$".

c) Vom demonstra prin inducție. Cazul de bază:

$$x * x = 2(x-3)(x-3)+3 = 2^1(x-3)^2+3.$$

Presupunem că

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3 \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pasul inductiv:

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = \underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} * x.$$

Astfel,

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = (2^{n-1}(x-3)^n + 3) * x,$$

adică

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = 2(2^{n-1}(x-3)^n + 3 - 3)(x-3) + 3 = 2^n(x-3)^{n+1} + 3.$$

Prin urmare, presupunerea făcută este corectă, iar identitatea cerută este demonstrată.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 5xy + 6x + 6y + 6 \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Demonstrați că legea este asociativă.

b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$".

c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de 101 ori}} = -1$.

Soluție:
Rescriem legea astfel

$$x * y = 5\left(x + \frac{6}{5}\right)\left(y + \frac{6}{5}\right) - \frac{6}{5}.$$

De ce o putem scrie așa? Demonstrați!

b) Căutăm elementele $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât să existe $x' \in \mathbb{Z}$ pentru care

$$x * x' = x' * x = e.$$

Un detaliu subtil aici este că ar trebui să demonstrăm că legea este comutativă (faceți asta!).
Mai întâi, determinăm elementul neutru. Aflăm $e = -1$ (de ce? demonstrați!). Apoi, rezolvăm în funcție de x' ecuația

$$x * x' = e,$$

a cărei soluție este $x' = \frac{-6x-7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$ (de ce? demonstrați!). Cum $x' \in \mathbb{Z}$, rezultă că

$$(5x + 6)|(-6x - 7)$$
$$(5x + 6)|(5x + 6),$$

echivalent cu

$$(5x + 6)|(-30x - 35)$$
$$(5x + 6)|(30x + 36),$$

adică

$$(5x + 6)|1.$$

Deci $5x+6=1$, sau $5x-6=-1$, iar singura soluție în $\mathbb{Z}$ este $x=-1$. Prin urmare, elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea ”$*$” sunt -1 și $\frac{6-7}{-5+6}=-1$ (-1 este propriul său simetric în acest caz).

Observăm că acesta e un caz trivial în care elementul neutru este singurul element simetrizabil.
c) Demonstrăm prin inducție că

$$\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 101 ori}}=5^{n-1}\left(x+\frac{6}{5}\right)^n-\frac{6}{5}$$

și rezolvăm ecuația dată.

3. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea ”$*$”, unde:

a) $M=[4,\infty), x*y=xy-4x-4y+20\forall x,y\in M$;
Soluție:

Rescriind legea de compoziție, obținem:

$$x*y=(x-4)(y-4)+4.$$

Trebuie să arătăm că $x*y\in M\forall x,y\in M$.

Dacă $x\in[4,\infty)\Rightarrow(x-4)\in[0,\infty)$.
Dacă $y\in[4,\infty)\Rightarrow(y-4)\in[0,\infty)$.

Avem că

$$\left.\begin{array}{l}(x-4)\in[0,\infty)\\(y-4)\in[0,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow(x-4)(y-4)\in[0,\infty)\Rightarrow(x-4)(y-4)+4\in[4,\infty).$$

Prin urmare, $x*y\in M\forall x,y\in M$, deci mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea ”$*$”.

b) $M=(-\infty,-2], x*y=-xy-2x-2y-6\forall x,y\in M$;
c) $M=[2,4], x*y=xy-3x-3y+12\forall x,y\in M$.

4. Se consideră legea de compoziție definită pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6 \forall x, y \in \mathbb{R},$$

și funția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$. Să se arate că:

a) $M_1 = (2, \infty)$ și $M_2 = (2, 3)$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$";

b) $M_3 = (3, 4)$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$";

Soluție:

Fie $x, y \in (3, 4)$. Atunci,

$$x - 2, y - 2 \in (1, 2)$$

. Prin urmare,

$$(x - 2)(y - 2) \in (1, 4)$$

(produsul a două numere din intervalul $(1, 2)$ **NU** se află neapărat în intervalul $(1, 2)$). În conculzie,

$$(x - 2)(y - 2) + 2 \in (3, 6) \neq (3, 4),$$

astfel că $(3, 4)$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$".

c) $f(xy) = f(x) * f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$;

d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (2x + 3)^n + 2, x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

A spune că

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = x^n$$

este **de-a dreptul aberant**, deoarece legea "*" nu este echivalentă cu înmulțirea.

Încercăm să ne prindem de o regulă:

$$x * x = (x-2)(x-2)+2 = (x-2)^2+2;$$

$$x*x*x = (x*x)*x = ((x-2)^2+2-2)(x-2)+2 = (x-2)^2(x-2)+2 = (x-2)^3+2.$$

Putem specula faptul că:

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2.$$

Demonstrăm prin inducție:

(i) Cazul de bază:

$$x * x = (x-2)^2 + 2.$$

(ii) Pasul inductiv: presupunem

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2$$

ca fiind adevărat. Arătăm că

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = (x-2)^{n+1} + 2,$$

în felul următor:

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = \underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} * x,$$

iar, conform presupunerii făcute,

$$((x-2)^n+2)*2 = ((x-2)^n+2-2)(x-2)+2 = (x-2)^n(x-2)+2 = (x-2)^{n+1}+2.$$

Deci presupunerea făcută este într-adevăr corectă. Putem astfel rezolva ecuația

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (2x+3)^n + 2,$$

folosind formula găsită:

$$(x-2)^n + 2 = (2x+3)^n + 2;$$

$$(x-2)^n = (2x+3)^n \Rightarrow x-2 = 2x+3 \Rightarrow x = -5 \in \mathbb{R}.$$

5. Fie $H = [3, \infty)$ și

$$x \perp y = \sqrt{x^2+y^2-9} \forall x, y \in H.$$

a) Să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\perp$".

Soluție:

A spune că

$$\sqrt{x^2+y^2+9} = (x+y+3)^2$$

este **de-a dreptul aberant** și nu are nicio bază logică. Pare o concluzie vag înrudită cu concluzia eronată cum că

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b \text{ (ceea ce este } \textbf{FALS}) \ ,$$

lucru care se poate nega cu ușurință printr-un contraexemplu:

$$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq 7 = 3+4.$$

La asta s-a mai adăugat și incluziunea halucinantă a puterii a doua în expresia $(x+y+3)^2$. În fine.

Fie

$x, y \in [3, \infty) \Rightarrow x^2, y^2 \in [9, \infty) \Rightarrow (x^2+y^2) \in [18, \infty) \Rightarrow (x^2+y^2-9) \in [9, \infty).$

Aplicând radicalul,

$$x \perp y = \sqrt{x^2+y^2-9} \in [3, \infty).$$

Deci, $[3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\perp$".

b) Să se rezolve ecuația $x \perp x = 1$.

Indicație:
Avem de rezolvat ecuația

$$\sqrt{x^2 + x^2 - 9} = 1.$$

c) Să se calculeze $\underbrace{x \perp x \perp ... \perp x}_{\text{de } n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Indicație:

Încercăm să ne dăm seama de o regulă:

$$x \perp x = \sqrt{2x^2 - 9}.$$

$$x \perp x \perp x = (x \perp x) \perp x = (\sqrt{2x^2 - 9}) \perp x,$$

adică

$$x \perp x \perp x = \sqrt{\sqrt{2x^2 - 9}^2 + x^2 - 9} = \sqrt{2x^2 - 9 + x^2 - 9} = \sqrt{3x^2 - 2 \cdot 9}.$$

Obsevăm că, prin compunerea consecutivă a lui x cu el însuși de **trei** ori, am obținut radical din 3 ori x la puterea **a doua (adică 3 - 1)** - 2 (**doi** = 3 - 1) ori 9. Dacă calculăm

$$x \perp x \perp x \perp x,$$

ne putem da seama de o regulă? Dacă da, va trebui să o demonstrăm prin inducție.

6. Fie $H = (-\infty, 0], x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \forall x, y \in H$.

a) Să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea dată.

Indicație:

A spune că

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y$$

este **de-a dreptul aberant**. Procedăm similar ca la subpunctul a) din exercițiul anterior.

b) Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{9}}$.

7. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea pe mulțimea M a următoarelor legi de compoziție:

a) $M = \mathbb{Z}, x * y = 2xy - x - y$;

b) $M = (-3, -1), x * y = xy + 2x + 2y + 2$;

c) $M = \mathbb{Q}, x * y = 2x - 2y + xy$;

d) $M = (-1, \infty), x * y = \frac{x+y}{x+y+4}$;

f) $M = (-\infty, 2), x * y = \frac{3-xy}{4-x-y}$.

8. Să se stabilească dacă legea "$*$" definită pe $M \times M$ admite element neutru și în caz afirmativ să se determine elementele simetrizabile (care au simetric) și expresia simetricului:

a) $M = \mathbb{R}, x * y = xy - 4x - 4y + 20$;

Soluție:
Determinăm $e = 5$ (de ce?). Prin urmare, putem afla expresia simetricului din ecuația

$$x * x' = e,$$

de unde obținem (de ce?)

$$x' = \frac{1}{x-4} + 4,$$

astfel că elementele simetrizabile sunt toate elementele din $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (excludem 4, deoarece nu putem împărți la 0).
b) $M = (3, \infty), x * y = xy - 2x - 2y + 6$;

c) $M = [5,7], x * y = xy - 6x - 6y + 42$;

d) $M = \mathbb{R}, x * y = (x-3)(y-3) + 3$;

e) $M = [1, \infty), x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$.

9. Pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea $x * y = 2xy - 4x - 4y + 10$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se determine elementul neutru.

c) Să se calculeze $p = 1 * 2 * ... * 100$.

d) Să se afle $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $x' = x$ (adică astfel încât x să fie propriul său simetric).

10. Pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea $x * y = 5xy - 5x - 5y + 6$.

a) Să se arate că legea este comutativă, asociativă și are element neutru.

b) Să se determine elementele simetrizabile.

c) Să se determine elementul absorbant și să se calculeze expresia

$$(-200) * (-199) * ...(-1) * (0) * 1... * (199) * (200).$$

d) Să se rezolve ecuația

$$\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 1 + 5^{n-1} \cdot (x-1)^{2n}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$