Meditații matematică

LazR ('3')

7 Mai, 2024

Cuprins

1 Formule de calcul prescurtat

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^2 = (a-ib)(a+ib), \text{ unde } i = \sqrt{-1}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Aceste formule sunt relativ ușor de listat, deoarece conțin un număr fixat de termeni. Pentru a enunța formule mai complexe, care tratează cazuri generale, trebuie să apelăm la notații standard - altfel spus, prescurtări.
Mai întâi, cum putem restrânge o sumă, astfel încât să o putem scrie cât mai compact? Notația Σ (”Σ” se citește ”sigma” și este simbolul grecesc echivalent literei ”S”) facilitează acest lucru. De exemplu:

$$1 + 2 + 3 = \sum_{k=1}^{3} k \text{ (înlocuim } k\text{, pe rând, cu 1, 2 și 3, și le adunăm) ;}$$

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = \sum_{k=7}^{16} k;$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k;$$

$$1 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + 2^{n-1} = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k;$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)};$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Similar, notația Π (”Π” se citește ”pi” și este simbolul grecesc echivalent literei ”P”) e folosită pentru scrierea compactă a unui produs. De exemplu:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Observație

Ne-am putea întreba cum scriem suma $10 + 9 + ... + 3 + 2 + 1$ în mod compact. Introducem o nouă notație pentru ”sume inverse”? Mai simplu,

$$10 + ... + 1 = \sum_{k=1}^{10} (11-k) = \sum_{k=1}^{10} k.$$

Astfel, putem exprima niște rezultate mai ”stufoase”, într-un mod mai eficient. Se știe încă din clasele mici faptul că, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, avem $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Altfel spus:

Suma lui Gauss

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \text{ (de ce?) } \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n+1) \\
&= n(n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

Sumă de pătrate

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație:

$$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 \Rightarrow k^2 = \frac{k^3 - (k-1)^3 + 3k - 1}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3 - (k-1)^3 + 3k - 1}{3} \right) \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 + 3 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1}{3} \\
&= \frac{n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n}{3} \\
&= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned} \tag{2}$$

$\square$

Sumă de cuburi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Demonstrație:

$$(k-1)^4 = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 \Rightarrow k^3 = \frac{k^4 - (k-1)^4 + 6k^2 - 4k + 1}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned} \tag{3}$$

$\square$

2 Progresii

Progresia aritmetică

Termenul general: $a_n = a_1 + r(n-1)$;
Rația $r = a_{k+1} - a_k$;

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)r \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_1 + r\sum_{k=1}^{n}(k-1) \\ &= na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)r)}{2} \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.\end{aligned} \tag{4}$$

□

Proprietate specială:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Pe caz general:

Termenul din mijloc al unei progresii aritmetice

$$a_{\frac{m+n}{2}} = \frac{a_m + a_n}{2}.$$

Demonstrație:

$$\frac{a_m + a_n}{2} = \frac{2a_1 + (m-1+n-1)r}{2} = a_1 + \left(\frac{m-1}{2} - 1\right) r = a_{\frac{m+n}{2}}.$$

□

Progresia geometrică

Termenul general: $b_n = b_1 q^{n-1}$;
Rația $q = \frac{b_{k+1}}{b_k}$;

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} b_1 q^{k-1} \\ &= b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}.\end{aligned} \tag{5}$$

$$q\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^k \Rightarrow (1-q)\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1(1-q^n) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

□

Proprietate specială:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}.$$

Pe caz general:

Termenul din mijloc al unei progresii geometrice

$$b_{\frac{m+n}{2}} = \sqrt{b_m b_n}.$$

Demonstrație:

$$\sqrt{b_m b_n} = \sqrt{b_1^2 q^{m+n-2}} = b_1 q^{\frac{m+n}{2}-1} = b_{\frac{m+n}{2}}.$$

□

Două dezvoltări importante

$$(i) a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k;$$

$$(ii) a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k}b^k, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right) \\
&= b^n\left(\frac{a}{b} - 1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k.
\end{aligned} \tag{6}$$

Similar pentru $a^{2p+1} + b^{2p+1}$, ținând cont că semnul $+$ se datorează faptului că rația $\frac{a}{b}$ este negativă iar puterea este un număr întotdeauna impar.

$\square$

3 Și mai multe formule de calcul prescurtat

Câteva identități mai mult sau mai puțin relevante (opțional)

$$(i) a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2];$$

$$(ii) a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2];$$

$$(iii) (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a);$$

$$(iv) a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Demonstrație:
(i)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca &= (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \\ &= \frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]. \end{aligned} \tag{7}$$

(ii) Similar.
(iii)

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= (a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c) \\ &= a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3c(a+b)(a+b+c) \\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(c^2+ab+bc+ca) \\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned} \tag{8}$$

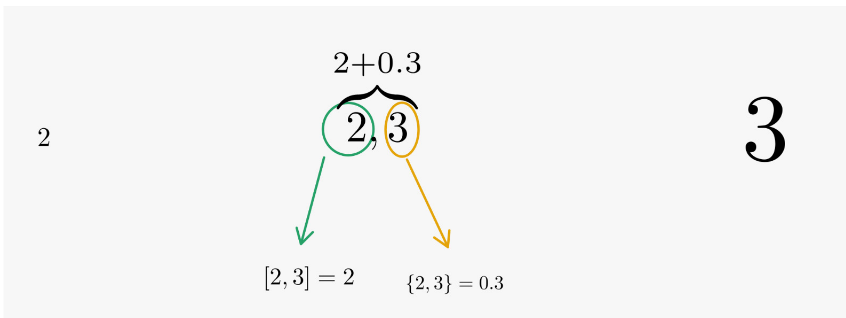
(iv)

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ca] \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \end{aligned} \tag{9}$$

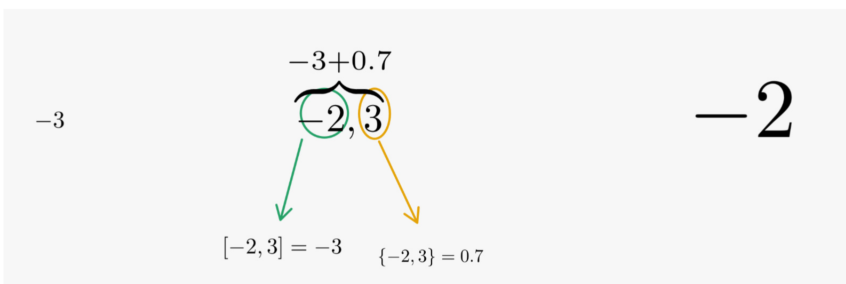
□

4 Partea întreagă și partea fracționară

Convențional, un număr este împărțit în partea sa întreagă și partea sa fracționară:



Pentru consistență, în cazul numerelor negative, acestea adoptă reguli poate mai puțin intuitive, dar care au la fel de mult sens:



Partea întreagă a lui x reprezintă cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x. Într-un fel, partea fracționară ne spune cât de mult ne-am deplasat la dreapta (adică ne-am îndepărtat) față de partea întreagă.
Mai formal:

Partea întreagă

Fie $x \in \mathbb{R}$. Partea întreagă este definită ca numărul notat $[x]$ care îndeplinește următoarea proprietate:

$$x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1.$$

Evident, $[k + x] = k + [x] \forall k \in \mathbb{Z}$ (deoarece numerele întregi sunt deja... ”întregi”).

Partea fractionară

Fie $x \in \mathbb{R}$. Partea întreagă reprezintă numărul notat $\{x\}$, definit prin:

$$\{x\} = x - [x].$$

Evident, $\{k + x\} = \{x\} \forall k \in \mathbb{Z}$ (numerele întregi au partea fracționară 0, deci nu contribuie la partea fracționară a altor numere).

Identitatea lui Hermite

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [n]x.$$

Demonstrație:
Observația cheie aici este faptul că termenii sumei pot lua doar două valori, $[x]$ și $[x] + 1$. Este ușor de văzut dacă le listăm:

$$[x] \leq \left[x + \frac{1}{n}\right] \leq ... \leq \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

Deci valoarea lor minimă este $[x]$. Iar cum

$$\left[x + \frac{n-1}{n}\right] = \left[[x] + \{x\} + 1 - \frac{1}{n}\right] = [x] + 1 + \underbrace{\left[\{x\} - \frac{1}{n}\right]}_{\text{care este 0, sau } -1} \leq [x] + 1.$$

Deci valoarea maximă este $[x] + 1$ (termenii sumei sunt numere întregi cuprinse între două numere, tot întregi, consecutive, $[x]$ și $[x] + 1$, prin urmare pot lua doar una din două valori - $[x]$, sau $[x] + 1$).
Prin urmare, există un index i pentru care termenii, din $[x]$, devin la un moment dat $[x] + 1$. Altfel spus:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = \sum_{k=0}^{i-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] + \sum_{k=i}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = i \cdot [x] + (n-i) \cdot ([x]+1) = [nx] + n - i.$$

Cum i este punctul critic pentru care $\{x\} + \frac{i}{n}$ atinge, sau întrece valoarea 1, avem

$$\{x\} + \frac{i-1}{n} < 1 \text{ și } \{x\} + \frac{i}{n} \geq 1.$$

Obținem:

$$\frac{n-i}{n} \leq \{x\} < \frac{n-i+1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n-i \leq n\{x\} \leq n-i+1 \Rightarrow n[x]+n-i \leq n[x]+n\{x\} = nx < n[x]+n-i+1,$$

ceea ce implică faptul că $[nx] = n[x] + n - i$.
Deci,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = n[x] + n - i = [nx].$$

$\square$

4 Funcții

Funcție

Fie D și C două mulțimi nevide. Se numește *funcție* definită pe D, cu valori în C, orice lege de corespondeță (relație) care asociază fiecărui element, $x \in D$, un unic element $y \in C$. Mulțimea D se numește *domeniul* funcției, iar mulțimea C, *codomeniul* funcției. Notația

$$f : D \to D, y = f(x)$$

se citește ”funcția f, definită pe A, cu valori în B, de relația $y = f(x)$”.

Observație

D și C sunt doar notații sugestive. Domeniul și codomeniul se pot nota, însă, cu orice litere.

Graficul funcției

Mulțimea

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$$

poară numele de *grafic* al funcției.

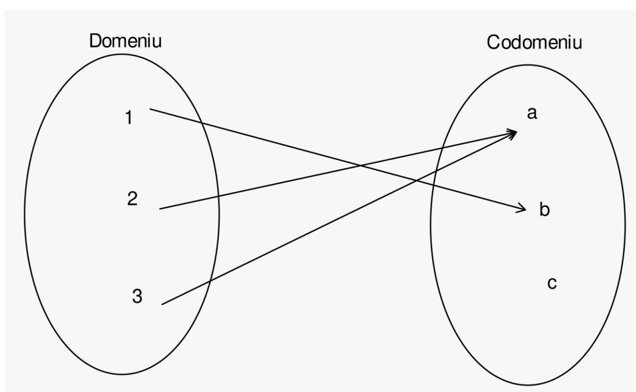
O funcție, dacă analizăm definiția ei, nu este obligată să acopere toate valorile codomeniului. Mulțimea tuturor valorilor $f(x)$ nu este, prin urmare, neapărat aceeași cu mulțimea valorilor din codomeniu, ci poate fi o mulțime mai restrânsă. De aici apare conceptul de ***imagine a funcției***.

Imaginea funcției

Imaginea funției $f : A \to B$ este submulțimea codomeniului alcătuită din toate elementele $y \in B$ care satisfac $y = f(x)$, pentru un $x \in A$.

$$Im(f) = \{y \in B | \exists x \in A \text{ a.î.} f(x) = y\}.$$

Dacă considerăm funția de mai jos, domeniul ei este $D = \{1, 2, 3\}$, codomeninul este $C = \{a, b, c\}$, iar $Im(f) = \{a, b\}$.



Funcția identică

Funcția identică, $f_{id} : D \to D$, este funția cu legea de asociere $f_{id}(x) = x, \forall x \in D$.

5 Bijectivitate

Injectivitate

Funcția f se numește injectivă dacă

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

sau, echivalent,

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Altfel spus, funcțiile injective asociază valori diferite pentru intrări diferite, sau, echivalent, funcțiile injective asociază aceeași valoare pentru două intrări, doar atunci când acestea sunt de fapt egale.

Observație

Ordinea ipotezelor și concluziilor este **foarte** importantă. A spune că o funcție este injectivă atunci când

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2,$$

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

este **greșit**. Afirmațiile de mai sus sunt de fapt evidente și se aplică pentru orice funcție (dacă $a = b$, normal că $f(a) = f(b)$).

Funcție inversabilă la stânga

O funție $f : D \to C$ are o inversă la stânga dacă există o funcție $g : D \to C$, astfel încât $g \circ f : D \to D$ să fie funcția identică. Se spune că funcția este inversabilă la stânga.

Injecție dacă compunerea este injecție

Fie f și g două funcții, astfel încât $g \circ f$ este o funcție injectivă. Atunci, f este injectivă.

Demonstrație:

Trebuie să demonstrăm că $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Presupunem $a, b \in D, f(a) = f(b)$. Atunci:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow g \circ f(a) = g \circ f(b) \Rightarrow a = b, \text{ deoarece } g \circ f \text{ este injectivă.}$$

□

Observație

Funcția g nu trebuie să fie neapărat injectivă pentru ca $f \circ g$ să fie injectivă. De exemplu, funcția $g(x) = x^2$ nu este injectivă, însă pentru $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ (injectivă), $g \circ f = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 = x^3$ este funcție injectivă.

Injectivitatea echivalentă cu inversabilitatea la stânga

O funcție este injectivă, dacă și numai dacă este inversabilă la stânga.

Demonstrație:
"$\Leftarrow$:" Funcția identică este, în mod evident, injectivă. Atunci, $g \circ f$ este injectivă și prin urmare f este injectivă.
"$\Rightarrow$:" Fie funcția $x_0 \in C$ fixat și $g : C \to D$,

$$g(y) = \begin{cases} x, \text{ dacă există } x \text{ astfel încât } f(x) = y \\ x_0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

Injectivitatea lui f asigură că alegerea pentru x (pe prima ramură) este unică. Se observă că $f \circ g(x) = x$.

□

Surjectivitate

Funcția $f : D \to C$ este surjectivă dacă $Im(f) = C$, sau, altfel spus,

$$\forall y \in C, \exists x \in D \text{ a.î } f(y) = x.$$

Deci o funcție surjectivă acoperă toate valorile codomeniului.

Funcție inversabilă la dreapta

O funție $f : D \to C$ are o inversă la dreapta dacă există o funcție $h : C \to D$, astfel încât $f \circ h : C \to C$ să fie funcția identică. Se spune că funcția este inversabilă la dreapta.

Surjecție dacă compunerea este surjecție

Fie f și g două funcții, astfel încât $f \circ g$ este o funcție surjectivă. Atunci, f este surjectivă.

Demonstrație:
Presupunem $f \circ g$ surjectivă. Trebuie să demonstrăm că

$$\forall z \in C_f, \exists y \in D_f \text{ a.î } f(y) = z.$$

Fixăm $z \in C_f$. Atunci, știm că există un $x \in C_g = D_f$ astfel încât

$$f \circ g(x) = z,$$

datorită surjectivității lui $f \circ g$. De asemenea, există $y \in C_g = D_f$ astfel încât $g(x) = y$. Prin urmare:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(g(x)) \\ &= f \circ g(x) \\ &= z. \end{aligned} \tag{10}$$

□

Surjectivitatea echivalentă cu inversabilitatea la dreapta

O funție este surjectivă, dacă și numai dacă aceasta este inversabilă la dreapta.

Demonstrație:

□

6 Derivate

Conceptul de derivată pleacă de la ideea familiară de ***pantă a unei drepte***.

Panta

Panta unei drepte d, dreaptă definită printr-o funție liniară f, pe un interval $\mathcal{I}$, este definită ca raportul

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

unde x_1 și $x_2 \in \mathcal{I}$.

Observație

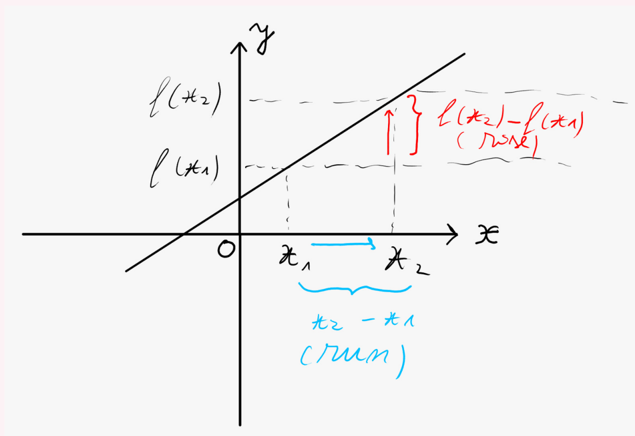
O funcție liniară este o funcție a cărei lege este de forma $f(x) = ax + b$, unde $x \in \mathbb{R}$. Definiția de mai sus are sens, deoarece

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_2)}{x_2 - x_1} = a,$$

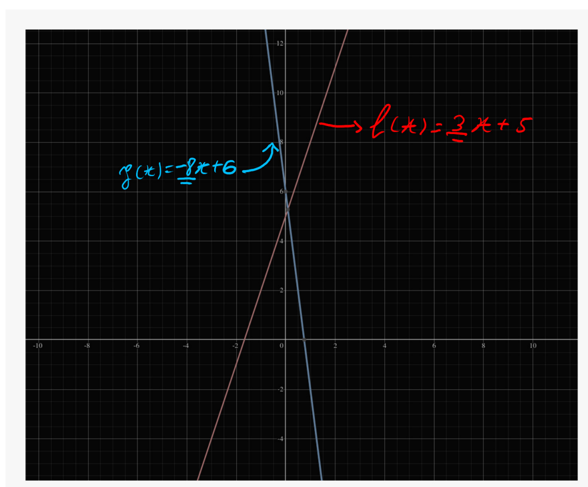
deci panta reprezintă un număr constant, care nu depinde de alegerea lui x_1 și x_2.

Observație

Panta e practic raportul dintre cât urcăm pe axa Oy și cât înaintăm pe axa Ox, de aceea o cale de a ne aminti formula este expresia *rise over run.*

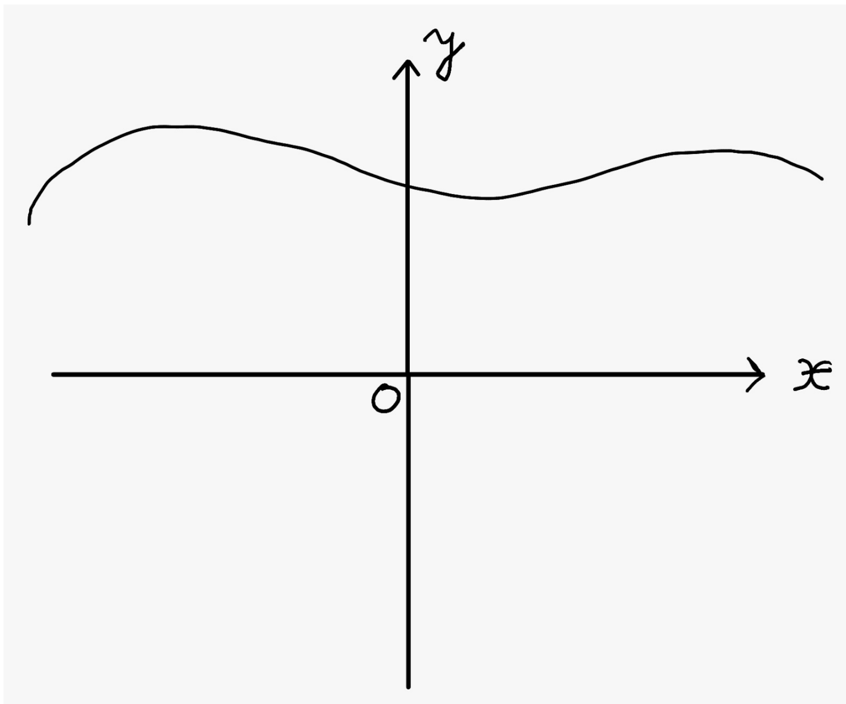


De exemplu, dreptele de mai jos, definite prin funcțiile $f(x) = 3x + 5$, respectiv, $g(x) = -8x + 6$, au pantele 3, respectiv -8.

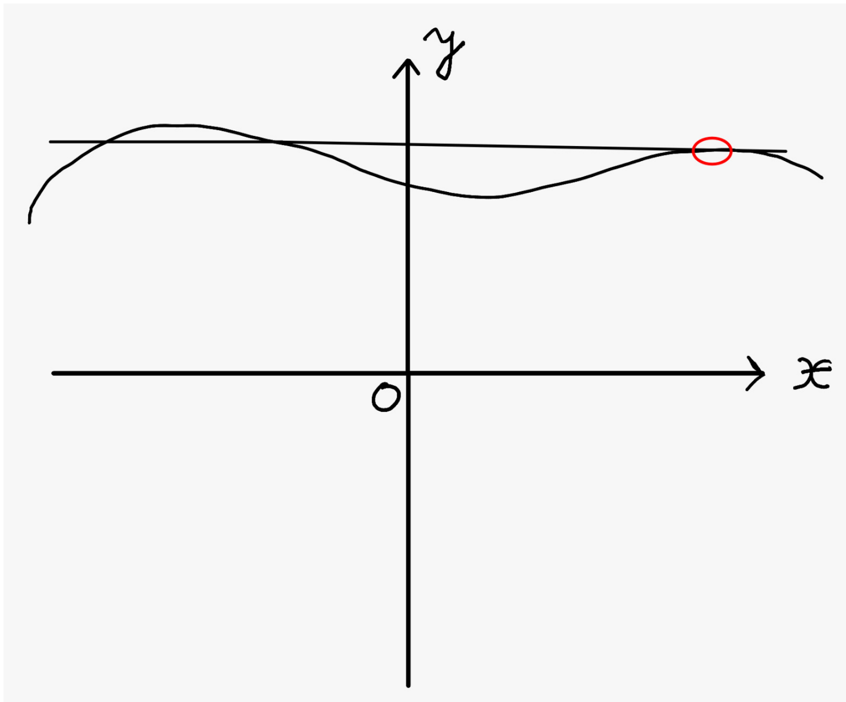


Este ușor de văzut că un *snapshot* oricât de mic din graficul unei astfel de funcții este suficient pentru a prezice comportamentul funcției de-a lungul întregului interval pe care este definită, deoarce funcția arată identic, ca formă și înclinație, pretutindeni.

Derivatele se nasc din dorința de a afla ”panta” unei curbe.



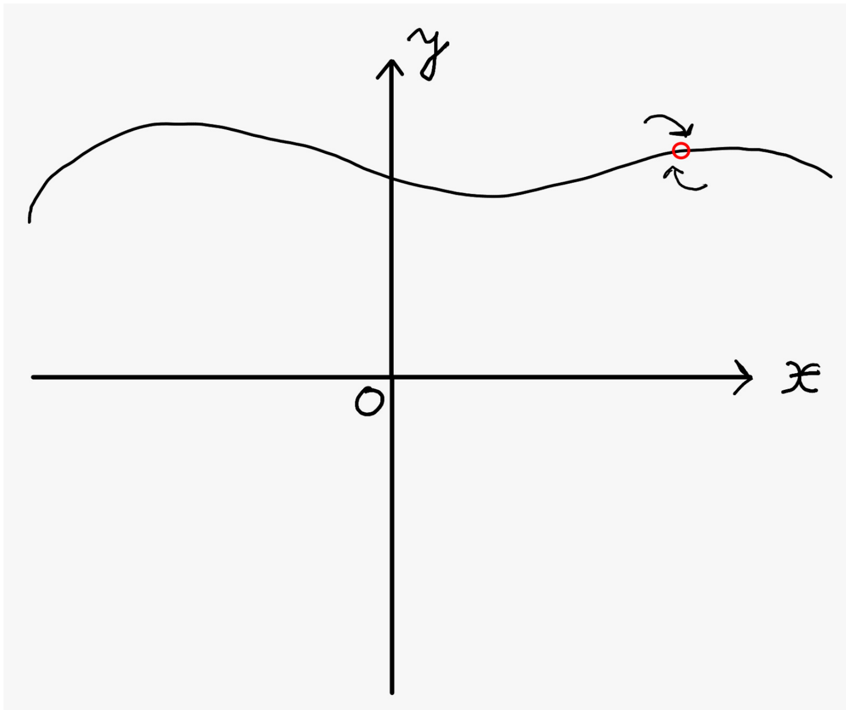
Curbele, însă, nu sunt la fel de previzibile ca și dreptele, iar raportul $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ variază, deoarece depinde de alegerea noastră pentru x_1 și x_2. De aceea, panta unei curbe nu este constantă, ci depinde de punctul în care vrem să o calculăm, astfel că panta curbei într-un punct va fi definită ca panta dreptei tangentă la curbă în acel punct.



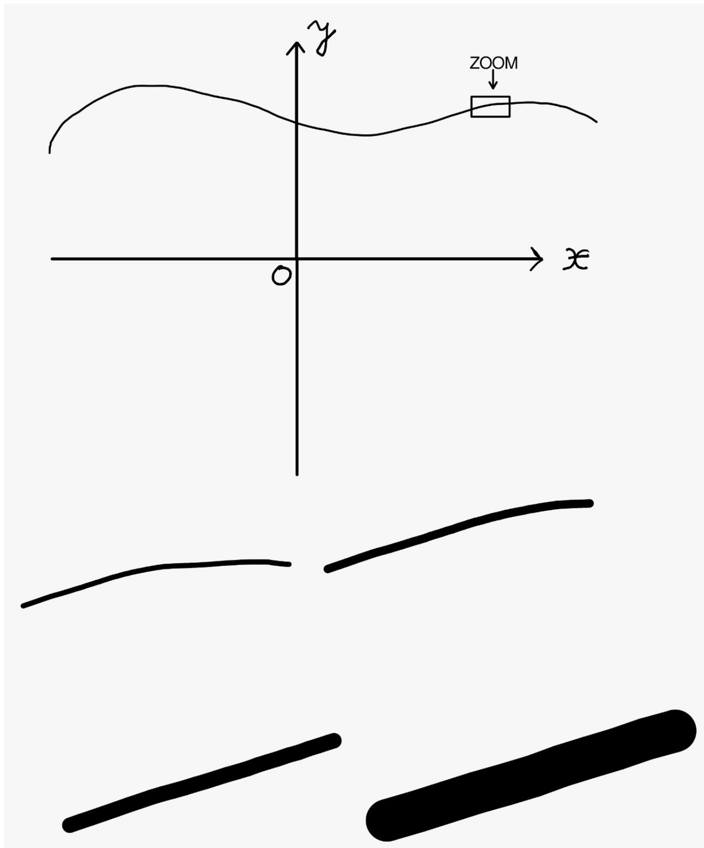
Observație

Dreapta trebuie să fie tangentă la grafic numai în imediata apropiere a punctul în care studiem panta; panta unei curbe într-un punct nu poate prezice comportamentul funcției mai departe de vecinătatea acelui punct.

Cu toate acestea, cum calculăm acea pantă? Să spunem că vrem să calculăm panta în punctul de mai jos.



Dacă dăm *zoom in* în vecinătatea (imediata apropiere) a punctului, și facem asta în mod repetat, constatăm că, la nivel ”microscopic”, orice curbă, în orice punct, se aseamănă cu o dreaptă. Acea dreaptă este chiar tangenta în acel punct.



Putem concluziona astfel că panta unei curbe într-un punct dat se poate calcula ca și panta dreptei ***limită***, tangentă la grafic. Însă asta este de fapt definiția unei derivate.

Derivata

Fie o funcție f, continuă într-un punct oarecare din x_0. Derivata de ordinul întâi al funcției f (notată, de obicei, f') în punctul x_0 este definită prin următoarea formulă:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observație

A doua variantă pentru formula de mai sus se trage din faptul că am notat $h = x - x_0$. Când $x \to x_0$, $x - x_0 \to 0$ și $f(x) = f(x_0 + x - x_0)$.

Observație

Condiția ca funcția să fie continuă este foarte importantă. Nimic din paragrafele de mai sus nu s-ar aplica pentru o funcție discontinuă, adică cu întreruperi sau salturi imprevizibile, în punctul în care dorim să calculăm derivata.

De asemenea, conform discuției de mai sus, derivata poate fi privită și ca ***cea mai bună aproximare liniară a funcției într-un punct***, adică cea mai bună metodă de a reduce ceva misterios și imprevizibil (o funție oarecare) la ceva deja cunoscut și intuitiv (o dreaptă).
Este ușor să intuim de aici faptul că derivatele reprezintă un instrument important în descrierea funcțiilor, din mai multe puncte de vedere. Ele reprezintă de fapt ***tendința de creștere*** a unei funcții într-un punct. De exemplu, comparând funcția x^2 cu derivata ei, $2x$, constatăm că funcția nu scade și nici nu crește în punctul $x = 0$ ($f'(0) = 0$, punct de extrem), pe intervalul $(-\infty, 0)$ este descrescătoare (derivata este negativă pe $(-\infty, 0)$), descrește tot mai abrupt în apropierea lui $-\infty$ (derivata este tot mai mare în modul în apropierea lui $-\infty$) și tot mai lin în apropierea lui 0 (derivata este tot mai mică în modul în apropierea lui 0) și similiar pe intervalul $(0, \infty)$.