

# Culegere Poli

LazR ('3')

29 Septembrie, 2024

## Cuprins

1.1 AL 1-65 . . . . .	3
-----------------------	---

## 1.1 AL 1-65

AL 1. Să se calculeze:

$$\{3, 3\} + \{-3, 3\}.$$

**Soluție:**

$$\{3, 3\} + \{-3, 3\} = 0, 3 + 0, 7 = 1.$$

AL 2. Fie  $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$  și  $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$ . Câte numere naturale conține mulțimea  $A \cap B$ ?

AL 3. Să se determine suma soluțiilor ecuației  $|x| + |x + 2| = 3$ .

**Soluție:**

Observăm că expresia  $x$  se anulează în 0, iar expresia  $x + 2$  se anulează în  $-2$ . Vom lua deci în considerare intervalele  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, 0]$  și  $(0, \infty)$ .

I.  $x \in (-\infty, -2)$ :

$$-x - x - 2 = 3 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \in (-\infty, -2).$$

II.  $x \in [-2, 0]$ :

$$-x + x + 2 = 3 \Rightarrow 2 = 3 \text{ (absurd)} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

III.  $x \in (0, \infty)$ :

$$x + x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0, \infty).$$

Suma soluțiilor este

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2.$$

AL 4. Câte numere întregi se găsesc în mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| \leq 6\}$ ?

AL 5. Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui  $x$  pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} \geq 0.$$

AL 6. Andrei și Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu  $4a$ , respectiv  $4c$  puncte. Dacă Andrei câștigă prima rundă, iar Cristian o câștigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârșitul celei de-a doua runde?

AL 7. Maria cheltuiește  $\frac{3}{8}$  din salariul său lunar pe chirie și  $\frac{5}{12}$  pe mâncare. Ana, care câștigă dublu față de Maria, cheltuiește un sfert din salariul său pe chirie și jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată și suma pe care o câștigă fetele împreună?

AL 8. Dacă  $a = b \cdot c^2$ ,  $c$  scade cu 20%, iar  $a$  rămâne constant, cu ce procent crește  $b$ ?

AL9. Suma totală de bani depusă la Smart Bank se mărește de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor crește suma medie depusă în fiecare cont?

AL 10. Prețul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu  $p$  lei este  $s$  lei. Pentru comenzi ce depășesc  $p$  lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depășește  $p$  lei. Dacă valoarea comenzii este  $x$  lei ( $x > p$ ), care este prețul transportului?

AL 12. Să se calculeze suma soluțiilor ecuațiilor:

$$\left[ \frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}.$$

**Soluție:**

Cum partea întreagă este un număr întreg, avem:

$$\frac{15x-7}{5} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5k+7}{15}.$$

Astfel, fracția din stânga devine

$$\frac{5+6x}{8} = \frac{39+10k}{40}.$$

Folosind inegalitatea

$$m-1 < [m] \leq m$$

, unde  $m$ , în cazul acesta, este  $\frac{5+6x}{8} = \frac{39+10k}{40}$ , deducem

$$\frac{39+10k}{40} - 1 < k \leq \frac{39+10k}{40}.$$

Prin urmare, rezolvând inecuațiile, obținem

$$-\frac{1}{30} < k \leq \frac{13}{10},$$

iar cum  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$ , ceea ce înseamnă că

$$x \in \left\{ \frac{7}{15}, \frac{12}{15} \right\},$$

care, dacă verificăm, sunt într-adevăr soluții, iar suma lor este  $\frac{19}{15}$ .