

Teme

LazR ('3')

24 Iunie, 2024

Cuprins

1 Tema I	3
2 Tema II	6
3 Tema III	12
4 Tema IV	16
5 Tema V	18
6 Tema VI	28

1 Tema I

1. Să se scrie desfășurat următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^5 (k-1)$;

b) $\sum_{i=-4}^2 \left(\frac{1-4i}{3-i}\right)$;

c) $\sum_{j=4}^9 \sum_{i=2}^j j^i$;

d) $\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{a_i^k}{j}$.

Indicație: c) și d) sunt sume de sume, nu înmulțiri între sume!

2. Să se scrie în mod restrâns, folosind notația Σ , următoarele sume și să se calculeze rezultatul final, utilizând principii și formule cunoscute:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 30$;

b) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + \dots + \frac{131}{2}$;

Indicație: Se poate folosi formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, stabilindu-se primul termen, al n -lea termen, și cât este de fapt n (câți termeni adunăm).

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2$;

d) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 30^3$;

f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)$;

g) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (\text{just kidding, nu te pun să faci așa ceva :p})^4$.

h) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3)$.

3. Să se afle termenii a_2 și a_3 ai următoarelor progresii aritmetice, știind că:

a) $a_1 = 2, r = -3$;

b) $a_1 = -\frac{1}{3}, r = 2$;

c) $a_1 = 3, r = -\frac{1}{4}$;

d) $a_1 = 3, r^2 + \frac{4}{3}r - \frac{4}{3} = 0$.

4. Numerele de forma a_n sunt în progresie aritmetică. Dacă $a_{17} = 10$, să se calculeze $a_8 + a_{10} - a_1$.

Indicație: Aplicând formula termenului general al unei progresii aritmetice, cum putem să rescriem $a_8 + a_{10} - a_1$?

5. Fie progresia aritmetică cu primul termen $a_1 = 2$ și suma primilor 20 termeni $S_{20} = 610$. Să se afle r , a_4 și S_{30} .

6. Să se rezolve ecuația:

$$3x + (3x + 2) + (3x + 4) + \dots + (3x + 100) = 2652.$$

Indicație: nu e obligatoriu să se utilizeze notația Σ .

7. Calculați:

a) $[-\frac{5}{2}] + [\frac{5}{3}]$;

b) $\{1, 64\} - \{-2, 36\}$.

8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;

b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;

c) $|1 - 2x| = |x + 4|$.

9. Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^i j.$$

AL6 și AL7 din culegerea de poli.

2 Tema II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|3 - x| - 2|x - 3| = 0;$

Soluție:

$$x : -\infty \xrightarrow[3-x<0]{x-3>0} 3 \xrightarrow[3-x>0]{x-3<0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow$

$$x - 3 - 2(x - 3) = 0 \iff -(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3 \in (-\infty, 3].$$

(ii) $x \in (3, \infty) \Rightarrow$

$$3 - x - 2(3 - x) = 0 \iff -2(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3 \notin (3, \infty).$$

$$x \in \{3\}.$$

b) $|2x + 1| = x + 3;$

c) $|3x - 2| = |x + 1|;$

Soluție:

$$x : -\infty \xrightarrow[x+1<0]{3x-2<0} -1 \xrightarrow[x+1>0]{3x-2<0} \frac{2}{3} \xrightarrow[x+1>0]{3x-2>0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow$

$$2 - 3x = -x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin (-\infty, -1].$$

(ii) $x \in (-1, \frac{2}{3}] \Rightarrow$

$$2 - 3x = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in \left(-1, \frac{2}{3}\right].$$

(iii) $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \Rightarrow$

$$3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

$$x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}.$$

d) $|x| + |x - 1| = 1;$

f) $|x - 1| + |2x - 2| + \dots + |9x - 9| = x.$

Soluție:

$$|x - 1| + 2|x - 1| + \dots + 9|x - 1| = x$$

$$(1 + 2 + \dots + 9)|x - 1| = x$$

$$\frac{9 \cdot 10}{2}|x - 1| = x$$

$$45|x - 1| = x$$

$$x : -\infty \xrightarrow{x-1 < 0} 1 \xrightarrow{x-1 > 0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow$

$$45(1 - x) = x \Rightarrow x = \frac{45}{46} \in (-\infty, 1].$$

(ii) $x \in (1, \infty)$

$$45(x - 1) = x \Rightarrow x = \frac{45}{44} \in (1, \infty).$$

$$x \in \left\{\frac{45}{44}, \frac{45}{46}\right\}$$

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x + 5| \leq 2;$

Soluție:

$$-2 \leq x + 5 \leq 2 \iff -7 \leq x \leq -3 \Rightarrow x \in [-7, -3].$$

b) $|1 - 3x| > 1;$

Soluție:

$$1 - 3x < -1 \text{ sau } 1 - 3x > 1 \iff x > \frac{2}{3} \text{ sau } x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

c) $|3x - 1| + |3 - 9x| \leq 0;$

d) $|2x - 1| \leq -1;$

e) $|3x - 6| > 0;$

f) $1 < |x - 2| < 2;$

g) $|5 - 3x| < x;$

h) $|x| < |3x - 1|.$

Soluție:

$$|x| < |3x - 1| \iff x < |3x - 1|;$$

(logic - dacă modulul unui număr e mai mic decât ceva, atunci și numărul în sine e mai mic decât acel ceva)

$$x < 3x - 1 \text{ sau } 3x - 1 < -x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

3. Să se calculeze următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^n (4k + 3);$

b) $\sum_{k=1}^n (k - 2)(k + 3);$

Soluție:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (k-2)(k+3) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 6) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k - 6 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 6n \\ &= n \left(\frac{(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) - 1 \right) \\ &= \frac{n(n^2 + 3n - 16)}{3}.\end{aligned}\tag{1}$$

c) $\sum_{k=2}^n (k^2 + k)$;

d) $\sum_{k=1}^n (k+1)^3$;

e) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$.

4. Să se determine termenii a_5, a_9, a_{20} ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că primii 5 termeni ai progresiei sunt:

a) $-5, a_2, a_3, 1, a_5$;

Soluție parțială:

$$\overbrace{a_4}^1 = \overbrace{a_1}^{-5} + 3r \Rightarrow r = 2.$$

b) $a_1, 4, 1, a_4, a_5$;

Soluție parțială:

$$r = \overbrace{a_3}^1 - \overbrace{a_2}^3 = -3 \text{ (nu } 3) .$$

c) $a_1, -2, a_3, 2, a_5$.

5. Să se determine care dintre numerele 3101, 770, 900, 1022 este termen al progresiei aritmetice având primul termen $a_1 = 2$ și rația $r = 4$.

Soluție:

Căutăm soluții pentru ecuația $a_k = a_1 + (k - 1)r$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este necunoscuta noastră.

Ecuația

$$2 + 4(k - 1) = 3101$$

într-adevăr nu are o soluție întreagă, deoarece 3101 e impar.

$$2 + 4(k - 1) = 770 \Rightarrow k = 193 \in \mathbb{Z}.$$

$$2 + 4(k - 1) = 900 \Rightarrow k = \frac{449}{2} + 1 \notin \mathbb{Z}.$$

$$2 + 4(k - 1) = 1022 \Rightarrow k = 256 \in \mathbb{Z}.$$

Deci $a_{193} = 770$ și $a_{256} = 1022$ sunt termeni ai progresiei.

6. Fie progresia aritmetică cu primul termen $a_1 = 3$. Să se afle r, a_4, S_{30} dacă:

a) $S_{36} = 2628$;

Soluție:

$$S_{36} = 2628$$

$$36 \frac{a_1 + a_{36}}{2} = 2628$$

$$a_1 + a_1 + 35r = 146 \Rightarrow 35r = 140 \Rightarrow r = 4.$$

b) $S_{50} = 3825$.

7. Să se determine termenii b_5, b_8, b_{20} ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă primii 4 termeni ai progresiei sunt:

a) $b_1, 12, 36, b_4$;

b) $b_1, -6, b_3, b_4$;

c) $b_1, b_2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$;

d) $3, -2, b_3, b_4$.

8. Să se calculeze (în principiu, să se restrângă) următoarele sume:

a) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2016}$;

Soluție:

$$\sum_{k=0}^{2016} 2^k = 1 \cdot \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 1 \text{ (pentru că, atenție, suma are 2017 termeni, nu 2016) .}$$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$;

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

9. Calculați:

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

10. Calculați:

a) $\sin \frac{\pi}{12}$;

b) $\cos 75^\circ$;

c) $\tan 15^\circ$;

d) $\cos \frac{11\pi}{12}$.

11. Calculați:

a) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2(x + \pi);$

b) $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos x \cos \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$

c) $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2(\pi - x).$

12. Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

13. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\cos x = -\cos 40^\circ,$$

unde $x \in (0, 360^\circ)$.

14. Care dintre numerele $\cos 55^\circ$, $\sin 155^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\sin 106^\circ$ este cel mai aproape de 0?

3 Tema III

1. Să se compare numerele:

a) $\left(-\frac{8}{25}\right)^4, b = \frac{9}{16}^6;$

b) $a = \left(\frac{1}{32\sqrt{2}}\right)^{22}, b = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{242};$

2. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $2^{72}, 5^{48}, 3^{36};$

b) $2^{15} \cdot 3^{30}, 3^{15} \cdot 5^{15}, 2^{30} \cdot 3^{15}.$

3. Să se ordoneze descrescător numerele:

a) $3^{40} \cdot 2^{80}, 3^{60} \cdot 2^{120}, 3^{80} \cdot 2^{160};$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{54}, \left(-\frac{64}{125}\right)^{18}, \left(\frac{49}{16}\right)^{27}.$

4. Să se calculeze:

a) $\frac{2^{-3} \cdot 3^{-4}}{4^{-2} \cdot 5^{-1}};$

b) $\frac{(0,1)^{-1} \cdot (0,01)^{-2} \cdot (0,001)^{-3}}{(0,0001)^{-3}};$

c) $\frac{(0,1)^{-3} \cdot (0,01)^{-2} \cdot (0,001)^{-1}}{(0,002)^{-1} \cdot (0,02)^{-2} \cdot (0,2)^{-3}} \cdot 2^6.$

5. Să se compare numerele:

a) 3^{-10} și $10^{-3};$

b) $(1 - a^2)^n$ și $(1 - a^2)^{n-2}, n \in \mathbb{N}, |a| < 1;$

c) 256^{-6} și $81^{-10};$

d) $(1 + a^2)^{2n}$ și $(1 + a^2)^{n+2}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

6. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $32^{-6}, 125^{-10}, 9^{-15};$

b) $49^{-25}, 32^{-10} \cdot 9^{-25}, 32^{-20};$

c) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}, \left(\frac{9}{16}\right)^3.$

7. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{-125};$

b) $\sqrt[4]{(-3)^8};$

c) $\sqrt[5]{0,00001};$

d) $\sqrt[3]{(0,000001)^{-1}};$

e) $\sqrt[6]{(\sqrt{65}-1)(\sqrt{65}+1)}$;

f) $\sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{28 + \sqrt[3]{-1}}}$;

g) $\sqrt[3]{1 - 3\sqrt{4} + 3\sqrt[3]{2}}$.

8. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{864 \cdot 1701}$;

b) $\sqrt[3]{108}$;

c) $\sqrt[5]{-64 \cdot 243}$;

d) $\sqrt[6]{324 \cdot 81 \cdot 4^7}$;

e) $\sqrt[4]{2^{13} \cdot 3^{10} \cdot 5^5}$;

f) $\sqrt[4]{243x^5}$;

g) $\sqrt[6]{x^{12} \cdot y^7}$;

h) $\sqrt{\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^3}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$$E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7,$$

unde $x, y \in (0, \infty)$.

10. Arătați că numărul

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$$

este rațional.

11. Să se calculeze:

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$;

b) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}}}$;

c) $(\sqrt[16]{2} - 1)(\sqrt[16]{2} + 1)(\sqrt[8]{2} + 1)(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)$.

12. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$;

b) $\log_3 0,125$;

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$;

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$.

13. Ordonăți crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

14. Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

15. Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2(6 + \sqrt{8}) + \log_2(6 - \sqrt{8}) - \log_2 7$;

b) $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$;

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}.$

4 Tema IV

1. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2};$

$$\begin{aligned}\log_2 8\sqrt{2} &= \log_2 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 2^{3+\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}.\end{aligned}\tag{2}$$

b) $\log_2 0,125;$

$$\begin{aligned}\log_2 0,125 &= \log_2 \frac{125}{1000} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{10^3} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{5^3 \cdot 2^3} \\ &= \log_2 2^{-3} \\ &= -3.\end{aligned}\tag{3}$$

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2};$

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 2^{2+\frac{1}{3}} \\ &= 2 \log_2 2^{\frac{7}{3}} \\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned}\tag{4}$$

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}};$

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}.$

$$\begin{aligned}
 4^{1-\log_2 \sqrt{8}} &= (2^2)^{1-\log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= (2^2)^{1-3 \cdot \frac{1}{2}} \\
 &= (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

2. Ordonăți crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

3. Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

4. Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

5. Calculați:

a) $\log_2(6 + \sqrt{8}) + \log_2(6 - \sqrt{8}) - \log_2 7;$

b) $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5};$

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8;$

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}.$

6. Calculați:

a) $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5};$

b) $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3};$

7. Reduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$;

b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 - \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.

8. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2 \log_{16} 5$;

b) $a = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a = \log_2 9 + \frac{\log_2 12}{\log_3 2} - \frac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

9. Arătați că numărul a este natural, unde:

$$a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5 + 2\sqrt{6}}.$$

10. Fie $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ și $b = \sqrt[16]{2}$. Arătați că $a \cdot b$ este număr rațional.

11. Arătați că $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt[6]{7 - 3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.

12. Determinați numărul natural k , dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$.

5 Tema V

1. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că legea "*" este asociativă și comutativă.

b) Determinați elementul neutru al legii "*".

c) Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x - 3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:

Mai întâi, este recomandabil să rescriem legea de compoziție astfel:

$$\begin{aligned}
 x * y &= 2(xy - 3x - 3y) + 21 \\
 &= 2\underbrace{(xy - 3x - 3y + 9 - 9)}_{(x-3)(y-3)} + 21 \\
 &= 2(x-3)(y-3) + 21 - 2 \cdot 9 \\
 &= 2(x-3)(y-3) + 21 - 18 \\
 &= 2(x-3)(y-3) + 3.
 \end{aligned} \tag{6}$$

a) Legea ”*” este asociativă, dacă și numai dacă

$$(x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Verificăm acest lucru:

$$\begin{aligned}
 (x * y) * z &= (2(x-3)(y-3) + 3) * z \\
 &= 2(2(x-3)(y-3) + 3 - 3)(z-3) + 3 \\
 &= 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 x * (y * z) &= x * (2(y-3)(z-3) + 3) \\
 &= 2(x-3)(2(y-3)(z-3) + 3 - 3) + 3 \\
 &= 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Din (7) și (8) \Rightarrow legea ”*” este asociativă.

Comutativitatea e trivială și o lăsăm ca exercițiu pentru cititor.

b) Fie $e \in M$. Elementul e este considerat element neutru al legii ”*”, dacă și numai dacă

$$e * x = x * e = x \forall x \in M.$$

Faptul că $e * x = x * e$ este asigurat de faptul că legea este comutativă. Rezolvăm următoarea ecuație, în funcție de e :

$$x * e = x$$

$$2(x-3)(e-3) + 3 = x$$

$$2(x-3)(e-3) = x-3;$$

presupunând că $x \neq 3$,

$$2(e-3) = 1 \Rightarrow e = \frac{7}{2}.$$

Pentru $x = 3$, avem $3 * e = 2(3-3)(e-3) + 3 = 3$ (3 este element absorbant).
Deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii $*$.

c) Vom demonstra prin inducție. Cazul de bază:

$$x * x = 2(x-3)(x-3) + 3 = 2^1(x-3)^2 + 3.$$

Presupunem că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3 \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pasul inductiv:

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} * x.$$

Astfel,

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = (2^{n-1}(x-3)^n + 3) * x,$$

adică

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = 2(2^{n-1}(x-3)^n + 3 - 3)(x-3) + 3 = 2^n(x-3)^{n+1} + 3.$$

Prin urmare, presupunerea făcută este corectă, iar identitatea cerută este demonstrată.

2. Pe mulțimea \mathbb{Z} se definește legea de compoziție

$$x * y = 5xy + 6x + 6y + 6 \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Demonstrați că legea este asociativă.
- b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z} în raport cu legea ”*”.
- c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 101 ori}} = -1.$

Soluție:

Rescriem legea astfel

$$x * y = 5 \left(x + \frac{6}{5} \right) \left(y + \frac{6}{5} \right) - \frac{6}{5}.$$

De ce o putem scrie așa? Demonstrați!

- b) Căutăm elementele $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât să existe $x' \in \mathbb{Z}$ pentru care

$$x * x' = x' * x = e.$$

Un detaliu subtil aici este că ar trebui să demonstrăm că legea este comutativă (faceți asta!).

Mai întâi, determinăm elementul neutru. Aflăm $e = -1$ (de ce? demonstrați!). Apoi, rezolvăm în funcție de x' ecuația

$$x * x' = e,$$

a cărei soluție este $x' = \frac{-6x-7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$ (de ce? demonstrați!). Cum $x' \in \mathbb{Z}$, rezultă că

$$(5x+6) | (-6x-7)$$

$$(5x+6) | (5x+6),$$

echivalent cu

$$(5x+6) | (-30x-35)$$

$$(5x+6) | (30x+36),$$

adică

$$(5x+6) | 1.$$

Deci $5x + 6 = 1$, sau $5x - 6 = -1$, iar singura soluție în \mathbb{Z} este $x = -1$. Prin urmare, elementele simetrizabile ale lui \mathbb{Z} în raport cu legea "*" sunt -1 și $\frac{6-7}{-5+6} = -1$ (-1 este propriul său simetric în acest caz).

Observăm că acesta e un caz trivial în care elementul neutru este singurul element simetrizabil.

c) Demonstrăm prin inducție că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 101 ori}} = 5^{n-1} \left(x + \frac{6}{5} \right)^n - \frac{6}{5}$$

și rezolvăm ecuația dată.

3. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea "*", unde:

a) $M = [4, \infty)$, $x * y = xy - 4x - 4y + 20 \forall x, y \in M$;

Soluție:

Rescriind legea de compoziție, obținem:

$$x * y = (x - 4)(y - 4) + 4.$$

Trebuie să arătăm că $x * y \in M \forall x, y \in M$.

Dacă $x \in [4, \infty) \Rightarrow (x - 4) \in [0, \infty)$.

Dacă $y \in [4, \infty) \Rightarrow (y - 4) \in [0, \infty)$.

Avem că

$$\left. \begin{array}{l} (x - 4) \in [0, \infty) \\ (y - 4) \in [0, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow (x - 4)(y - 4) \in [0, \infty) \Rightarrow (x - 4)(y - 4) + 4 \in [4, \infty).$$

Prin urmare, $x * y \in M \forall x, y \in M$, deci mulțimea M este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea "*".

b) $M = (-\infty, -2]$, $x * y = -xy - 2x - 2y - 6 \forall x, y \in M$;

c) $M = [2, 4]$, $x * y = xy - 3x - 3y + 12 \forall x, y \in M$.

4. Se consideră legea de compoziție definită pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6 \forall x, y \in \mathbb{R},$$

și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$. Să se arate că:

a) $M_1 = (2, \infty)$ și $M_2 = (2, 3)$ sunt părți stabile ale lui \mathbb{R} în raport cu legea $*$;

b) $M_3 = (3, 4)$ nu este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea $*$;

Soluție:

Fie $x, y \in (3, 4)$. Atunci,

$$x - 2, y - 2 \in (1, 2)$$

. Prin urmare,

$$(x - 2)(y - 2) \in (1, 4)$$

(produsul a două numere din intervalul $(1, 2)$ **NU** se află neapărat în intervalul $(1, 2)$). În concluzie,

$$(x - 2)(y - 2) + 2 \in (3, 6) \neq (3, 4),$$

astfel că $(3, 4)$ nu este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea $*$.

c) $f(xy) = f(x) * f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$;

d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (2x + 3)^n + 2, x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

A spune că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = x^n$$

este **de-a dreptul aberant**, deoarece legea $*$ nu este echivalentă cu înmulțirea.

Încercăm să ne prindem de o regulă:

$$x * x = (x - 2)(x - 2) + 2 = (x - 2)^2 + 2;$$

$$x * x * x = (x * x) * x = ((x - 2)^2 + 2 - 2)(x - 2) + 2 = (x - 2)^2(x - 2) + 2 = (x - 2)^3 + 2.$$

Putem specula faptul că:

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2.$$

Demonstrăm prin inducție:

(i) Cazul de bază:

$$x * x = (x - 2)^2 + 2.$$

(ii) Pasul inductiv: presupunem

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2$$

ca fiind adevărat. Arătăm că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n + 1 \text{ ori}} = (x - 2)^{n+1} + 2,$$

în felul următor:

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n + 1 \text{ ori}} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} * x,$$

iar, conform presupunerii făcute,

$$((x - 2)^n + 2) * x = ((x - 2)^n + 2 - 2)(x - 2) + 2 = (x - 2)^n(x - 2) + 2 = (x - 2)^{n+1} + 2.$$

Deci presupunerea făcută este într-adevăr corectă. Putem astfel rezolva ecuația

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (2x + 3)^n + 2,$$

folosind formula găsită:

$$(x-2)^n + 2 = (2x+3)^n + 2;$$
$$(x-2)^n = (2x+3)^n \Rightarrow x-2 = 2x+3 \Rightarrow x = -5 \in \mathbb{R}.$$

5. Fie $H = [3, \infty)$ și

$$x \perp y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \forall x, y \in H.$$

a) Să se arate că H este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \perp ".

Soluție:

A spune că

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 9} = (x + y + 3)^2$$

este **de-a dreptul aberant** și nu are nicio bază logică. Pare o concluzie vag înrudită cu concluzia eronată cum că

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \text{ (ceea ce este } \mathbf{FALS}) ,$$

lucru care se poate nega cu ușurință printr-un contraexemplu:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq 7 = 3 + 4.$$

La asta s-a mai adăugat și incluziunea halucinantă a puterii a doua în expresia $(x + y + 3)^2$. În fine.

Fie

$$x, y \in [3, \infty) \Rightarrow x^2, y^2 \in [9, \infty) \Rightarrow (x^2 + y^2) \in [18, \infty) \Rightarrow (x^2 + y^2 - 9) \in [9, \infty).$$

Aplicând radicalul,

$$x \perp y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \in [3, \infty).$$

Deci, $[3, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \perp ".

b) Să se rezolve ecuația $x \perp x = 1$.

Indicație:

Avem de rezolvat ecuația

$$\sqrt{x^2 + x^2 - 9} = 1.$$

c) Să se calculeze $\underbrace{x \perp x \perp \dots \perp x}_{\text{de } n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*.$

Indicație:

Încercăm să ne dăm seama de o regulă:

$$x \perp x = \sqrt{2x^2 - 9}.$$

$$x \perp x \perp x = (x \perp x) \perp x = (\sqrt{2x^2 - 9}) \perp x,$$

adică

$$x \perp x \perp x = \sqrt{\sqrt{2x^2 - 9}^2 + x^2 - 9} = \sqrt{2x^2 - 9 + x^2 - 9} = \sqrt{3x^2 - 2 \cdot 9}.$$

Obsevăm că, prin compunerea consecutivă a lui x cu el însuși de **trei** ori, am obținut radical din 3 ori x la puterea **a doua (adică 3 - 1) - 2 (doi = 3 - 1)** ori 9. Dacă calculăm

$$x \perp x \perp x \perp x,$$

ne putem da seama de o regulă? Dacă da, va trebui să o demonstrăm prin inducție.

6. Fie $H = (-\infty, 0], x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \forall x, y \in H.$

a) Să se arate că H este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea dată.

Indicație:

A spune că

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y$$

este **de-a dreptul aberant**. Procedăm similar ca la subpunctul $a)$ din exercițiul anterior.

b) Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{9}}$.

7. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea pe mulțimea M a următoarelor legi de compoziție:

a) $M = \mathbb{Z}, x * y = 2xy - x - y$;

b) $M = (-3, -1), x * y = xy + 2x + 2y + 2$;

c) $M = \mathbb{Q}, x * y = 2x - 2y + xy$;

d) $M = (-1, \infty), x * y = \frac{x+y}{x+y+4}$;

f) $M = (-\infty, 2), x * y = \frac{3-xy}{4-x-y}$.

8. Să se stabilească dacă legea ” $*$ ” definită pe $M \times M$ admite element neutru și în caz afirmativ să se determine elementele simetrizabile (care au simetric) și expresia simetricului:

a) $M = \mathbb{R}, x * y = xy - 4x - 4y + 20$;

Soluție:

Determinăm $e = 5$ (de ce?). Prin urmare, putem afla expresia simetricului din ecuația

$$x * x' = e,$$

de unde obținem (de ce?)

$$x' = \frac{1}{x-4} + 4,$$

astfel că elementele simetrizabile sunt toate elementele din $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (excludem 4, deoarece nu putem împărți la 0).

b) $M = (3, \infty), x * y = xy - 2x - 2y + 6$;

c) $M = [5, 7], x * y = xy - 6x - 6y + 42;$

d) $M = \mathbb{R}, x * y = (x - 3)(y - 3) + 3;$

e) $M = [1, \infty), x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}.$

9. Pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea $x * y = 2xy - 4x - 4y + 10.$

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se determine elementul neutru.

c) Să se calculeze $p = 1 * 2 * \dots * 100.$

d) Să se afle $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $x' = x$ (adică astfel încât x să fie propriul său simetric).

10. Pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea $x * y = 5xy - 5x - 5y + 6.$

a) Să se arate că legea este comutativă, asociativă și are element neutru.

b) Să se determine elementele simetrizabile.

c) Să se determine elementul absorbant și să se calculeze expresia

$$(-200) * (-199) * \dots * (-1) * (0) * 1 \dots * (199) * (200).$$

d) Să se rezolve ecuația

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 1 + 5^{n-1} \cdot (x - 1)^{2n}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

6 Tema VI

1. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 4;$

b) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2};$

c) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5};$

Indicație:

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}; \frac{1}{x^4} = x^{-4}; \frac{1}{x^5} = x^{-5};$$

d) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (\sqrt[3]{x})^7 + 1;$

Indicație:

$$(\sqrt[3]{x})^7 = x^{\frac{7}{3}};$$

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + e^x;$

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 5^x;$

Indicație:

$$(2^x)' = (e^{\ln(2^x)})' = (e^{x \ln(2)})' = e^{x \ln(2)} \ln(2) = 2^x \ln(2),$$

iar, în general,

$$(a^x)' = a^x \ln(a),$$

unde e^x este un caz particular, deoarece

$$(e^x)' = e^x \ln(e) = e^x.$$

g) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x) - x + 1;$

h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \sin(x) + 3 \cos(x);$

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2^{-x};$

j) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \arcsin(x).$

2. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții și calculați apoi limitele specificate:

a) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 2) \ln(x);$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1};$$

Indicație: cât este $f(1)$?

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x-1};$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2};$$

Indicație: cât este $f(2)$?

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x-1};$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2, 25}{x - 5};$$

Indicație: cât este $f(5)$?

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1};$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x};$$

Indicație: cât este $f(0)$?

e) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1};$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x};$$

Indicație: cât este $f(0)$?

f) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$;

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - \frac{1}{3}}{x - \frac{\pi}{6}};$$

Indicație: cât este $f(\frac{\pi}{6})$?

3. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

b) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$;

d) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$;

e) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)e^{-\frac{1}{x}}$;

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.