

# Teme

LazR ('3')

24 Iunie, 2024

## Cuprins

1 Tema I . . . . .	3
2 Tema II . . . . .	6
3 Tema III . . . . .	12
4 Tema IV . . . . .	16
5 Tema V . . . . .	18

## 1 Tema I

1. Să se scrie desfășurat următoarele sume:

a)  $\sum_{k=1}^5 (k-1)$ ;

b)  $\sum_{i=-4}^2 \left(\frac{1-4i}{3-i}\right)$ ;

c)  $\sum_{j=4}^9 \sum_{i=2}^j j^i$ ;

d)  $\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{a_i^k}{j}$ .

**Indicație:** c) și d) sunt sume de sume, nu înmulțiri între sume!

2. Să se scrie în mod restrâns, folosind notația  $\Sigma$ , următoarele sume și să se calculeze rezultatul final, utilizând principii și formule cunoscute:

a)  $1 + 2 + 3 + \dots + 30$ ;

b)  $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + \dots + \frac{131}{2}$ ;

**Indicație:** Se poate folosi formula sumei primilor  $n$  termeni ai unei progresii aritmetice, stabilindu-se primul termen, al  $n$ -lea termen, și cât este de fapt  $n$  (câți termeni adunăm).

c)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2$ ;

d)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ ;

e)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 30^3$ ;

f)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)$ ;

g)  $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (\text{just kidding, nu te pun să faci așa ceva :p})^4$ .

h)  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3)$ .

3. Să se afle termenii  $a_2$  și  $a_3$  ai următoarelor progresii aritmetice, știind că:

a)  $a_1 = 2, r = -3$ ;

b)  $a_1 = -\frac{1}{3}, r = 2$ ;

c)  $a_1 = 3, r = -\frac{1}{4}$ ;

d)  $a_1 = 3, r^2 + \frac{4}{3}r - \frac{4}{3} = 0$ .

4. Numerele de forma  $a_n$  sunt în progresie aritmetică. Dacă  $a_{17} = 10$ , să se calculeze  $a_8 + a_{10} - a_1$ .

**Indicație:** Aplicând formula termenului general al unei progresii aritmetice, cum putem să rescriem  $a_8 + a_{10} - a_1$ ?

5. Fie progresia aritmetică cu primul termen  $a_1 = 2$  și suma primilor 20 termeni  $S_{20} = 610$ . Să se afle  $r$ ,  $a_4$  și  $S_{30}$ .

6. Să se rezolve ecuația:

$$3x + (3x + 2) + (3x + 4) + \dots + (3x + 100) = 2652.$$

**Indicație:** nu e obligatoriu să se utilizeze notația  $\Sigma$ .

7. Calculați:

a)  $[-\frac{5}{2}] + [\frac{5}{3}]$ ;

b)  $\{1, 64\} - \{-2, 36\}$ .

8. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $|x - 2| = 5$ ;

b)  $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$ ;

c)  $|1 - 2x| = |x + 4|$ .

9. Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^i j.$$

AL6 și AL7 din culegerea de poli.

## 2 Tema II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $|3 - x| - 2|x - 3| = 0;$

**Soluție:**

$$x : -\infty \xrightarrow[3-x<0]{x-3>0} 3 \xrightarrow[3-x>0]{x-3<0} \infty$$

(i)  $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow$

$$x - 3 - 2(x - 3) = 0 \iff -(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3 \in (-\infty, 3].$$

(ii)  $x \in (3, \infty) \Rightarrow$

$$3 - x - 2(3 - x) = 0 \iff -2(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3 \notin (3, \infty).$$

$$x \in \{3\}.$$

b)  $|2x + 1| = x + 3;$

c)  $|3x - 2| = |x + 1|;$

**Soluție:**

$$x : -\infty \xrightarrow[x+1<0]{3x-2<0} -1 \xrightarrow[x+1>0]{3x-2<0} \frac{2}{3} \xrightarrow[x+1>0]{3x-2>0} \infty$$

(i)  $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow$

$$2 - 3x = -x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin (-\infty, -1].$$

(ii)  $x \in (-1, \frac{2}{3}] \Rightarrow$

$$2 - 3x = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in \left(-1, \frac{2}{3}\right].$$

(iii)  $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \Rightarrow$

$$3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

$$x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}.$$

d)  $|x| + |x - 1| = 1;$

f)  $|x - 1| + |2x - 2| + \dots + |9x - 9| = x.$

**Soluție:**

$$|x - 1| + 2|x - 1| + \dots + 9|x - 1| = x$$

$$(1 + 2 + \dots + 9)|x - 1| = x$$

$$\frac{9 \cdot 10}{2}|x - 1| = x$$

$$45|x - 1| = x$$

$$x : -\infty \xrightarrow{x-1 < 0} 1 \xrightarrow{x-1 > 0} \infty$$

(i)  $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow$

$$45(1 - x) = x \Rightarrow x = \frac{45}{46} \in (-\infty, 1].$$

(ii)  $x \in (1, \infty)$

$$45(x - 1) = x \Rightarrow x = \frac{45}{44} \in (1, \infty).$$

$$x \in \left\{\frac{45}{44}, \frac{45}{46}\right\}$$

2. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $|x + 5| \leq 2;$

**Soluție:**

$$-2 \leq x + 5 \leq 2 \iff -7 \leq x \leq -3 \Rightarrow x \in [-7, -3].$$

b)  $|1 - 3x| > 1;$

**Soluție:**

$$1 - 3x < -1 \text{ sau } 1 - 3x > 1 \iff x > \frac{2}{3} \text{ sau } x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

c)  $|3x - 1| + |3 - 9x| \leq 0;$

d)  $|2x - 1| \leq -1;$

e)  $|3x - 6| > 0;$

f)  $1 < |x - 2| < 2;$

g)  $|5 - 3x| < x;$

h)  $|x| < |3x - 1|.$

**Soluție:**

$$|x| < |3x - 1| \iff x < |3x - 1|;$$

(logic - dacă modulul unui număr e mai mic decât ceva, atunci și numărul în sine e mai mic decât acel ceva)

$$x < 3x - 1 \text{ sau } 3x - 1 < -x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

3. Să se calculeze următoarele sume:

a)  $\sum_{k=1}^n (4k + 3);$

b)  $\sum_{k=1}^n (k - 2)(k + 3);$



**Soluție:**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (k-2)(k+3) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 6) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k - 6 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 6n \\ &= n \left( \frac{(n+1)}{2} \left( \frac{2n+1}{3} + 1 \right) - 1 \right) \\ &= \frac{n(n^2 + 3n - 16)}{3}.\end{aligned}\tag{1}$$

c)  $\sum_{k=2}^n (k^2 + k)$ ;

d)  $\sum_{k=1}^n (k+1)^3$ ;

e)  $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ .

4. Să se determine termenii  $a_5, a_9, a_{20}$  ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că primii 5 termeni ai progresiei sunt:

a)  $-5, a_2, a_3, 1, a_5$ ;

**Soluție parțială:**

$$\overbrace{a_4}^1 = \overbrace{a_1}^{-5} + 3r \Rightarrow r = 2.$$

b)  $a_1, 4, 1, a_4, a_5$ ;

**Soluție parțială:**

$$r = \overbrace{a_3}^1 - \overbrace{a_2}^3 = -3 \text{ (nu } 3) .$$

c)  $a_1, -2, a_3, 2, a_5$ .

5. Să se determine care dintre numerele 3101, 770, 900, 1022 este termen al progresiei aritmetice având primul termen  $a_1 = 2$  și rația  $r = 4$ .

**Soluție:**

Căutăm soluții pentru ecuația  $a_k = a_1 + (k - 1)r$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$  este necunoscuta noastră.

Ecuația

$$2 + 4(k - 1) = 3101$$

într-adevăr nu are o soluție întreagă, deoarece 3101 e impar.

$$2 + 4(k - 1) = 770 \Rightarrow k = 193 \in \mathbb{Z}.$$

$$2 + 4(k - 1) = 900 \Rightarrow k = \frac{449}{2} + 1 \notin \mathbb{Z}.$$

$$2 + 4(k - 1) = 1022 \Rightarrow k = 256 \in \mathbb{Z}.$$

Deci  $a_{193} = 770$  și  $a_{256} = 1022$  sunt termeni ai progresiei.

6. Fie progresia aritmetică cu primul termen  $a_1 = 3$ . Să se afle  $r, a_4, S_{30}$  dacă:

a)  $S_{36} = 2628$ ;

**Soluție:**

$$S_{36} = 2628$$

$$36 \frac{a_1 + a_{36}}{2} = 2628$$

$$a_1 + a_1 + 35r = 146 \Rightarrow 35r = 140 \Rightarrow r = 4.$$

b)  $S_{50} = 3825$ .

7. Să se determine termenii  $b_5, b_8, b_{20}$  ai unei progresii geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , dacă primii 4 termeni ai progresiei sunt:

a)  $b_1, 12, 36, b_4$ ;

b)  $b_1, -6, b_3, b_4$ ;

c)  $b_1, b_2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ;

d)  $3, -2, b_3, b_4$ .

8. Să se calculeze (în principiu, să se restrângă) următoarele sume:

a)  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2016}$ ;

**Soluție:**

$$\sum_{k=0}^{2016} 2^k = 1 \cdot \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 1 \text{ (pentru că, atenție, suma are 2017 termeni, nu 2016) .}$$

b)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$ ;

c)  $\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

9. Calculați:

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

10. Calculați:

a)  $\sin \frac{\pi}{12}$ ;

b)  $\cos 75^\circ$ ;

c)  $\tan 15^\circ$ ;

d)  $\cos \frac{11\pi}{12}$ .

11. Calculați:

a)  $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2(x + \pi);$

b)  $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos x \cos \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$

c)  $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2(\pi - x).$

12. Să se calculeze  $\sin(2x)$ , știind că  $\sin x = \frac{1}{2}$  și  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

13. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\cos x = -\cos 40^\circ,$$

unde  $x \in (0, 360^\circ)$ .

14. Care dintre numerele  $\cos 55^\circ$ ,  $\sin 155^\circ$ ,  $\sin 15^\circ$ ,  $\cos 170^\circ$ ,  $\cos 100^\circ$ ,  $\sin 106^\circ$  este cel mai aproape de 0?

### 3 Tema III

1. Să se compare numerele:

a)  $\left(-\frac{8}{25}\right)^4, b = \frac{9}{16}^6;$

b)  $a = \left(\frac{1}{32\sqrt{2}}\right)^{22}, b = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{242};$

2. Să se ordoneze crescător numerele:

a)  $2^{72}, 5^{48}, 3^{36};$

b)  $2^{15} \cdot 3^{30}, 3^{15} \cdot 5^{15}, 2^{30} \cdot 3^{15}.$

3. Să se ordoneze descrescător numerele:

a)  $3^{40} \cdot 2^{80}, 3^{60} \cdot 2^{120}, 3^{80} \cdot 2^{160};$

b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{54}, \left(-\frac{64}{125}\right)^{18}, \left(\frac{49}{16}\right)^{27}.$

4. Să se calculeze:

a)  $\frac{2^{-3} \cdot 3^{-4}}{4^{-2} \cdot 5^{-1}};$

b)  $\frac{(0,1)^{-1} \cdot (0,01)^{-2} \cdot (0,001)^{-3}}{(0,0001)^{-3}};$

c)  $\frac{(0,1)^{-3} \cdot (0,01)^{-2} \cdot (0,001)^{-1}}{(0,002)^{-1} \cdot (0,02)^{-2} \cdot (0,2)^{-3}} \cdot 2^6.$

5. Să se compare numerele:

a)  $3^{-10}$  și  $10^{-3};$

b)  $(1 - a^2)^n$  și  $(1 - a^2)^{n-2}, n \in \mathbb{N}, |a| < 1;$

c)  $256^{-6}$  și  $81^{-10};$

d)  $(1 + a^2)^{2n}$  și  $(1 + a^2)^{n+2}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

6. Să se ordoneze crescător numerele:

a)  $32^{-6}, 125^{-10}, 9^{-15};$

b)  $49^{-25}, 32^{-10} \cdot 9^{-25}, 32^{-20};$

c)  $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}, \left(\frac{9}{16}\right)^3.$

7. Să se calculeze:

a)  $\sqrt[3]{-125};$

b)  $\sqrt[4]{(-3)^8};$

c)  $\sqrt[5]{0,00001};$

d)  $\sqrt[3]{(0,000001)^{-1}};$

e)  $\sqrt[6]{(\sqrt{65}-1)(\sqrt{65}+1)}$ ;

f)  $\sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{28 + \sqrt[3]{-1}}}$ ;

g)  $\sqrt[3]{1 - 3\sqrt{4} + 3\sqrt[3]{2}}$ .

8. Să se scoată factorii de sub radicali:

a)  $\sqrt{864 \cdot 1701}$ ;

b)  $\sqrt[3]{108}$ ;

c)  $\sqrt[5]{-64 \cdot 243}$ ;

d)  $\sqrt[6]{324 \cdot 81 \cdot 4^7}$ ;

e)  $\sqrt[4]{2^{13} \cdot 3^{10} \cdot 5^5}$ ;

f)  $\sqrt[4]{243x^5}$ ;

g)  $\sqrt[6]{x^{12} \cdot y^7}$ ;

h)  $\sqrt{\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^3}$ .

9. Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$$E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7,$$

unde  $x, y \in (0, \infty)$ .

10. Arătați că numărul

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$$

este rațional.

11. Să se calculeze:

a)  $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$ ;

b)  $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}}}$ ;

c)  $(\sqrt[16]{2} - 1)(\sqrt[16]{2} + 1)(\sqrt[8]{2} + 1)(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)$ .

12. Calculați:

a)  $\log_2 8\sqrt{2}$ ;

b)  $\log_3 0,125$ ;

c)  $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$ ;

d)  $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ ;

e)  $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$ .

13. Ordonăți crescător numerele  $a = -\sqrt[3]{64}$ ,  $b = \log_3 \frac{1}{27}$  și  $c = \log_2 \frac{1}{32}$ .

14. Arătați că numărul  $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$  este natural.

15. Demonstrați că numărul  $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$  este întreg.

16. Calculați:

a)  $\log_2(6 + \sqrt{8}) + \log_2(6 - \sqrt{8}) - \log_2 7$ ;

b)  $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$ ;

c)  $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$ ;

d)  $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}.$

## 4 Tema IV

1. Calculați:

a)  $\log_2 8\sqrt{2};$

$$\begin{aligned}\log_2 8\sqrt{2} &= \log_2 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 2^{3+\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}.\end{aligned}\tag{2}$$

b)  $\log_2 0,125;$

$$\begin{aligned}\log_2 0,125 &= \log_2 \frac{125}{1000} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{10^3} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{5^3 \cdot 2^3} \\ &= \log_2 2^{-3} \\ &= -3.\end{aligned}\tag{3}$$

c)  $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2};$

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 2^{2+\frac{1}{3}} \\ &= 2 \log_2 2^{\frac{7}{3}} \\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned}\tag{4}$$



d)  $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}};$

e)  $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}.$

$$\begin{aligned}
 4^{1-\log_2 \sqrt{8}} &= (2^2)^{1-\log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= (2^2)^{1-3 \cdot \frac{1}{2}} \\
 &= (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

2. Ordonăți crescător numerele  $a = -\sqrt[3]{64}$ ,  $b = \log_3 \frac{1}{27}$  și  $c = \log_2 \frac{1}{32}$ .

3. Arătați că numărul  $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$  este natural.

4. Demonstrați că numărul  $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$  este întreg.

5. Calculați:

a)  $\log_2(6 + \sqrt{8}) + \log_2(6 - \sqrt{8}) - \log_2 7;$

b)  $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5};$

c)  $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8;$

d)  $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}.$

6. Calculați:

a)  $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5};$

b)  $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3};$

7. Reduceți la o formă mai simplă:

a)  $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$ ;

b)  $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}$ ;

c)  $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 - \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$ .

8. Arătați că numărul  $a$  este rațional, unde:

a)  $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2 \log_{16} 5$ ;

b)  $a = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ ;

c)  $a = \log_2 9 + \frac{\log_2 12}{\log_3 2} - \frac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$ .

9. Arătați că numărul  $a$  este natural, unde:

$$a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5 + 2\sqrt{6}}.$$

10. Fie  $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$  și  $b = \sqrt[16]{2}$ . Arătați că  $a \cdot b$  este număr rațional.

11. Arătați că  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt[6]{7 - 3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$ .

12. Determinați numărul natural  $k$ , dacă  $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$ .

## 5 Tema V

1. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că legea "\*" este asociativă și comutativă.

b) Determinați elementul neutru al legii "\*".

c) Demonstrați că, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , are loc identitatea

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x - 3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Soluție:**

Mai întâi, este recomandabil să rescriem legea de compoziție astfel:

$$\begin{aligned}
 x * y &= 2(xy - 3x - 3y) + 21 \\
 &= 2\underbrace{(xy - 3x - 3y + 9 - 9)}_{(x-3)(y-3)} + 21 \\
 &= 2(x-3)(y-3) + 21 - 2 \cdot 9 \\
 &= 2(x-3)(y-3) + 21 - 18 \\
 &= 2(x-3)(y-3) + 3.
 \end{aligned} \tag{6}$$

a) Legea ”\*” este asociativă, dacă și numai dacă

$$(x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Verificăm acest lucru:

$$\begin{aligned}
 (x * y) * z &= (2(x-3)(y-3) + 3) * z \\
 &= 2(2(x-3)(y-3) + 3 - 3)(z-3) + 3 \\
 &= 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 x * (y * z) &= x * (2(y-3)(z-3) + 3) \\
 &= 2(x-3)(2(y-3)(z-3) + 3 - 3) + 3 \\
 &= 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Din (7) și (8)  $\Rightarrow$  legea ”\*” este asociativă.

Comutativitatea e trivială și o lăsăm ca exercițiu pentru cititor.

b) Fie  $e \in M$ . Elementul  $e$  este considerat element neutru al legii ”\*”, dacă și numai dacă

$$e * x = x * e = x \forall x \in M.$$

Faptul că  $e * x = x * e$  este asigurat de faptul că legea este comutativă. Rezolvăm următoarea ecuație, în funcție de  $e$ :

$$x * e = x$$

$$2(x - 3)(e - 3) + 3 = x$$

$$2(x - 3)(e - 3) = x - 3;$$

presupunând că  $x \neq 3$ ,

$$2(e - 3) = 1 \Rightarrow e = \frac{7}{2}.$$

Pentru  $x = 3$ , avem  $3 * e = 2(3 - 3)(e - 3) + 3 = 3$  (3 este element absorbant).  
Deci  $e = \frac{7}{2}$  este elementul neutru al legii " $*$ ".

c) Vom demonstra prin inducție. Cazul de bază:

$$x * x = 2(x - 3)(x - 3) + 3 = 2^1(x - 3)^2 + 3.$$

Presupunem că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x - 3)^n + 3 \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pasul inductiv:

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n + 1 \text{ ori}} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} * x.$$

Astfel,

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n + 1 \text{ ori}} = (2^{n-1}(x - 3)^n + 3) * x,$$

adică

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n + 1 \text{ ori}} = 2(2^{n-1}(x - 3)^n + 3 - 3)(x - 3) + 3 = 2^n(x - 3)^{n+1} + 3.$$

Prin urmare, presupunerea făcută este corectă, iar identitatea cerută este demonstrată.

2. Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se definește legea de compoziție

$$x * y = 5xy + 6x + 6y + 6 \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Demonstrați că legea este asociativă.
- b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii  $\mathbb{Z}$  în raport cu legea ”\*”.
- c) Rezolvați ecuația  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 101 ori}} = -1.$

**Soluție:**

Rescriem legea astfel

$$x * y = 5 \left( x + \frac{6}{5} \right) \left( y + \frac{6}{5} \right) - \frac{6}{5}.$$

De ce o putem scrie așa? Demonstrați!

- b) Căutăm elementele  $x \in \mathbb{Z}$ , astfel încât să existe  $x' \in \mathbb{Z}$  pentru care

$$x * x' = x' * x = e.$$

Un detaliu subtil aici este că ar trebui să demonstrăm că legea este comutativă (faceți asta!).

Mai întâi, determinăm elementul neutru. Aflăm  $e = -1$  (de ce? demonstrați!). Apoi, rezolvăm în funcție de  $x'$  ecuația

$$x * x' = e,$$

a cărei soluție este  $x' = \frac{-6x-7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$  (de ce? demonstrați!). Cum  $x' \in \mathbb{Z}$ , rezultă că

$$(5x+6) | (-6x-7)$$

$$(5x+6) | (5x+6),$$

echivalent cu

$$(5x+6) | (-30x-35)$$

$$(5x+6) | (30x+36),$$

adică

$$(5x+6) | 1.$$

Deci  $5x + 6 = 1$ , sau  $5x - 6 = -1$ , iar singura soluție în  $\mathbb{Z}$  este  $x = -1$ . Prin urmare, elementele simetrizabile ale lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu legea "\*" sunt  $-1$  și  $\frac{6-7}{-5+6} = -1$  ( $-1$  este propriul său simetric în acest caz).

Observăm că acesta e un caz trivial în care elementul neutru este singurul element simetrizabil.

c) Demonstrăm prin inducție că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 101 \text{ ori}} = 5^{n-1} \left( x + \frac{6}{5} \right)^n - \frac{6}{5}$$

și rezolvăm ecuația dată.