

Teme

LazR ('3')

24 Iunie, 2024

Cuprins

1 Tema I	3
2 Tema II	6
3 Tema III	12
4 Tema IV	16

1 Tema I

1. Să se scrie desfășurat următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^5 (k-1)$;

b) $\sum_{i=-4}^2 \left(\frac{1-4i}{3-i}\right)$;

c) $\sum_{j=4}^9 \sum_{i=2}^j j^i$;

d) $\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \frac{a_i^k}{j}$.

Indicație: c) și d) sunt sume de sume, nu înmulțiri între sume!

2. Să se scrie în mod restrâns, folosind notația Σ , următoarele sume și să se calculeze rezultatul final, utilizând principii și formule cunoscute:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 30$;

b) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + \dots + \frac{131}{2}$;

Indicație: Se poate folosi formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, stabilindu-se primul termen, al n -lea termen, și cât este de fapt n (câți termeni adunăm).

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2$;

d) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 30^3$;

f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)$;

g) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (\text{just kidding, nu te pun să faci așa ceva :p})^4$.

h) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3)$.

3. Să se afle termenii a_2 și a_3 ai următoarelor progresii aritmetice, știind că:

a) $a_1 = 2, r = -3$;

b) $a_1 = -\frac{1}{3}, r = 2$;

c) $a_1 = 3, r = -\frac{1}{4}$;

d) $a_1 = 3, r^2 + \frac{4}{3}r - \frac{4}{3} = 0$.

4. Numerele de forma a_n sunt în progresie aritmetică. Dacă $a_{17} = 10$, să se calculeze $a_8 + a_{10} - a_1$.

Indicație: Aplicând formula termenului general al unei progresii aritmetice, cum putem să rescriem $a_8 + a_{10} - a_1$?

5. Fie progresia aritmetică cu primul termen $a_1 = 2$ și suma primilor 20 termeni $S_{20} = 610$. Să se afle r , a_4 și S_{30} .

6. Să se rezolve ecuația:

$$3x + (3x + 2) + (3x + 4) + \dots + (3x + 100) = 2652.$$

Indicație: nu e obligatoriu să se utilizeze notația Σ .

7. Calculați:

a) $[-\frac{5}{2}] + [\frac{5}{3}]$;

b) $\{1, 64\} - \{-2, 36\}$.

8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;

b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;

c) $|1 - 2x| = |x + 4|$.

9. Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^i j.$$

AL6 și AL7 din culegerea de poli.

2 Tema II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|3 - x| - 2|x - 3| = 0;$

Soluție:

$$x : -\infty \xrightarrow[3-x<0]{x-3>0} 3 \xrightarrow[3-x>0]{x-3<0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow$

$$x - 3 - 2(x - 3) = 0 \iff -(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3 \in (-\infty, 3].$$

(ii) $x \in (3, \infty) \Rightarrow$

$$3 - x - 2(3 - x) = 0 \iff -2(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3 \notin (3, \infty).$$

$$x \in \{3\}.$$

b) $|2x + 1| = x + 3;$

c) $|3x - 2| = |x + 1|;$

Soluție:

$$x : -\infty \xrightarrow[x+1<0]{3x-2<0} -1 \xrightarrow[x+1>0]{3x-2<0} \frac{2}{3} \xrightarrow[x+1>0]{3x-2>0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow$

$$2 - 3x = -x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin (-\infty, -1].$$

(ii) $x \in (-1, \frac{2}{3}] \Rightarrow$

$$2 - 3x = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in \left(-1, \frac{2}{3}\right].$$

(iii) $x \in (\frac{2}{3}, \infty) \Rightarrow$

$$3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

$$x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}.$$

d) $|x| + |x - 1| = 1;$

f) $|x - 1| + |2x - 2| + \dots + |9x - 9| = x.$

Soluție:

$$|x - 1| + 2|x - 1| + \dots + 9|x - 1| = x$$

$$(1 + 2 + \dots + 9)|x - 1| = x$$

$$\frac{9 \cdot 10}{2}|x - 1| = x$$

$$45|x - 1| = x$$

$$x : -\infty \xrightarrow{x-1 < 0} 1 \xrightarrow{x-1 > 0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow$

$$45(1 - x) = x \Rightarrow x = \frac{45}{46} \in (-\infty, 1].$$

(ii) $x \in (1, \infty)$

$$45(x - 1) = x \Rightarrow x = \frac{45}{44} \in (1, \infty).$$

$$x \in \left\{\frac{45}{44}, \frac{45}{46}\right\}$$

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x + 5| \leq 2;$

Soluție:

$$-2 \leq x + 5 \leq 2 \iff -7 \leq x \leq -3 \Rightarrow x \in [-7, -3].$$

b) $|1 - 3x| > 1;$

Soluție:

$$1 - 3x < -1 \text{ sau } 1 - 3x > 1 \iff x > \frac{2}{3} \text{ sau } x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

c) $|3x - 1| + |3 - 9x| \leq 0;$

d) $|2x - 1| \leq -1;$

e) $|3x - 6| > 0;$

f) $1 < |x - 2| < 2;$

g) $|5 - 3x| < x;$

h) $|x| < |3x - 1|.$

Soluție:

$$|x| < |3x - 1| \iff x < |3x - 1|;$$

(logic - dacă modulul unui număr e mai mic decât ceva, atunci și numărul în sine e mai mic decât acel ceva)

$$x < 3x - 1 \text{ sau } 3x - 1 < -x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

3. Să se calculeze următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^n (4k + 3);$

b) $\sum_{k=1}^n (k - 2)(k + 3);$

Soluție:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (k-2)(k+3) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 6) \\&= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k - 6 \sum_{k=1}^n 1 \\&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 6n \\&= n \left(\frac{(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) - 1 \right) \\&= \frac{n(n^2 + 3n - 16)}{3}.\end{aligned}\tag{1}$$

c) $\sum_{k=2}^n (k^2 + k)$;

d) $\sum_{k=1}^n (k+1)^3$;

e) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$.

4. Să se determine termenii a_5, a_9, a_{20} ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că primii 5 termeni ai progresiei sunt:

a) $-5, a_2, a_3, 1, a_5$;

Soluție parțială:

$$\overbrace{a_4}^1 = \overbrace{a_1}^{-5} + 3r \Rightarrow r = 2.$$

b) $a_1, 4, 1, a_4, a_5$;

Soluție parțială:

$$r = \overbrace{a_3}^1 - \overbrace{a_2}^3 = -3 \text{ (nu } 3) .$$

c) $a_1, -2, a_3, 2, a_5$.

5. Să se determine care dintre numerele 3101, 770, 900, 1022 este termen al progresiei aritmetice având primul termen $a_1 = 2$ și rația $r = 4$.

Soluție:

Căutăm soluții pentru ecuația $a_k = a_1 + (k - 1)r$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este necunoscuta noastră.

Ecuația

$$2 + 4(k - 1) = 3101$$

într-adevăr nu are o soluție întreagă, deoarece 3101 e impar.

$$2 + 4(k - 1) = 770 \Rightarrow k = 193 \in \mathbb{Z}.$$

$$2 + 4(k - 1) = 900 \Rightarrow k = \frac{449}{2} + 1 \notin \mathbb{Z}.$$

$$2 + 4(k - 1) = 1022 \Rightarrow k = 256 \in \mathbb{Z}.$$

Deci $a_{193} = 770$ și $a_{256} = 1022$ sunt termeni ai progresiei.

6. Fie progresia aritmetică cu primul termen $a_1 = 3$. Să se afle r, a_4, S_{30} dacă:

a) $S_{36} = 2628$;

Soluție:

$$S_{36} = 2628$$

$$36 \frac{a_1 + a_{36}}{2} = 2628$$

$$a_1 + a_1 + 35r = 146 \Rightarrow 35r = 140 \Rightarrow r = 4.$$

b) $S_{50} = 3825$.

7. Să se determine termenii b_5, b_8, b_{20} ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă primii 4 termeni ai progresiei sunt:

a) $b_1, 12, 36, b_4$;

b) $b_1, -6, b_3, b_4$;

c) $b_1, b_2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$;

d) $3, -2, b_3, b_4$.

8. Să se calculeze (în principiu, să se restrângă) următoarele sume:

a) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2016}$;

Soluție:

$$\sum_{k=0}^{2016} 2^k = 1 \cdot \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 1 \text{ (pentru că, atenție, suma are 2017 termeni, nu 2016) .}$$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$;

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

9. Calculați:

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

10. Calculați:

a) $\sin \frac{\pi}{12}$;

b) $\cos 75^\circ$;

c) $\tan 15^\circ$;

d) $\cos \frac{11\pi}{12}$.

11. Calculați:

a) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2(x + \pi);$

b) $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos x \cos \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$

c) $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2(\pi - x).$

12. Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

13. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\cos x = -\cos 40^\circ,$$

unde $x \in (0, 360^\circ)$.

14. Care dintre numerele $\cos 55^\circ$, $\sin 155^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\sin 106^\circ$ este cel mai aproape de 0?

3 Tema III

1. Să se compare numerele:

a) $\left(-\frac{8}{25}\right)^4, b = \frac{9}{16}^6;$

b) $a = \left(\frac{1}{32\sqrt{2}}\right)^{22}, b = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{242};$

2. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $2^{72}, 5^{48}, 3^{36};$

b) $2^{15} \cdot 3^{30}, 3^{15} \cdot 5^{15}, 2^{30} \cdot 3^{15}.$

3. Să se ordoneze descrescător numerele:

a) $3^{40} \cdot 2^{80}, 3^{60} \cdot 2^{120}, 3^{80} \cdot 2^{160};$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{54}, \left(-\frac{64}{125}\right)^{18}, \left(\frac{49}{16}\right)^{27}.$

4. Să se calculeze:

a) $\frac{2^{-3} \cdot 3^{-4}}{4^{-2} \cdot 5^{-1}};$

b) $\frac{(0,1)^{-1} \cdot (0,01)^{-2} \cdot (0,001)^{-3}}{(0,0001)^{-3}};$

c) $\frac{(0,1)^{-3} \cdot (0,01)^{-2} \cdot (0,001)^{-1}}{(0,002)^{-1} \cdot (0,02)^{-2} \cdot (0,2)^{-3}} \cdot 2^6.$

5. Să se compare numerele:

a) 3^{-10} și $10^{-3};$

b) $(1 - a^2)^n$ și $(1 - a^2)^{n-2}, n \in \mathbb{N}, |a| < 1;$

c) 256^{-6} și $81^{-10};$

d) $(1 + a^2)^{2n}$ și $(1 + a^2)^{n+2}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

6. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $32^{-6}, 125^{-10}, 9^{-15};$

b) $49^{-25}, 32^{-10} \cdot 9^{-25}, 32^{-20};$

c) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}, \left(\frac{9}{16}\right)^3.$

7. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{-125};$

b) $\sqrt[4]{(-3)^8};$

c) $\sqrt[5]{0,00001};$

d) $\sqrt[3]{(0,000001)^{-1}};$

e) $\sqrt[6]{(\sqrt{65}-1)(\sqrt{65}+1)}$;

f) $\sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{28 + \sqrt[3]{-1}}}$;

g) $\sqrt[3]{1 - 3\sqrt{4} + 3\sqrt[3]{2}}$.

8. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{864 \cdot 1701}$;

b) $\sqrt[3]{108}$;

c) $\sqrt[5]{-64 \cdot 243}$;

d) $\sqrt[6]{324 \cdot 81 \cdot 4^7}$;

e) $\sqrt[4]{2^{13} \cdot 3^{10} \cdot 5^5}$;

f) $\sqrt[4]{243x^5}$;

g) $\sqrt[6]{x^{12} \cdot y^7}$;

h) $\sqrt{\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^3}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$$E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7,$$

unde $x, y \in (0, \infty)$.

10. Arătați că numărul

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$$

este rațional.

11. Să se calculeze:

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$;

b) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}}}$;

c) $(\sqrt[16]{2} - 1)(\sqrt[16]{2} + 1)(\sqrt[8]{2} + 1)(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)$.

12. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$;

b) $\log_3 0,125$;

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$;

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$.

13. Ordonăți crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

14. Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

15. Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2(6 + \sqrt{8}) + \log_2(6 - \sqrt{8}) - \log_2 7$;

b) $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$;

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}.$

4 Tema IV

1. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2};$

b) $\log_3 0,125;$

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2};$

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}};$

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}.$

2. Ordonăți crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

3. Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

4. Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

5. Calculați:

a) $\log_2(6 + \sqrt{8}) + \log_2(6 - \sqrt{8}) - \log_2 7;$

b) $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5};$

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8;$

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}.$

6. Calculați:

a) $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5};$

b) $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3}$;

7. Reduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$;

b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 - \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.

8. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2 \log_{16} 5$;

b) $a = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a = \log_2 9 + \frac{\log_2 12}{\log_3 2} - \frac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

9. Arătați că numărul a este natural, unde:

$$a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5 + 2\sqrt{6}}.$$

10. Fie $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ și $b = \sqrt[16]{2}$. Arătați că $a \cdot b$ este număr rațional.

11. Arătați că $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt[6]{7 - 3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.

12. Determinați numărul natural k , dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$.