Teme

LazR ('3')

24 Iunie, 2024

Cuprins

1 Tema I 3
2 Tema II 6
3 Tema III 12
4 Tema IV 16

1 Tema I

1. Să se scrie desfășurat următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^{5}(k-1)$;

b) $\sum_{i=-4}^{2}(\frac{1-4i}{3-i})$;

c) $\sum_{j=4}^{9}\sum_{i=2}^{j} j^i$;

d) $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \frac{a_i^k}{j}$.

Indicație: c) și d) sunt sume de sume, nu înmulțiri între sume!

2. Să se scrie în mod restrâns, folosind notația Σ, următoarele sume și să se calculeze rezultatul final, utilizând principii și formule cunoscute:

a) $1 + 2 + 3 + ... + 30$;

b) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + ... + \frac{131}{2}$;

Indicație: Se poate folosi formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritemtice, stabilindu-se primul termen, al n-lea termen, și cât este de fapt n (câți termeni adunăm).

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 30^2$;

d) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 30^3$;

f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n+1)$;

g) $1^4 + 2^4 + 3^4 + ...+$ (just kidding, nu te pun să faci așa ceva :p)^4.

h) $1 + 5 + 9 + ... + (4n-3)$.

3. Să se afle termenii a_2 și a_3 ai următoarelor progresii aritemitce, știind că:

a) $a_1 = 2, r = -3$;

b) $a_1 = -\frac{1}{3}, r = 2$;

c) $a_1 = 3, r = -\frac{1}{4}$;

d) $a_1 = 3, r^2 + \frac{4}{3}r - \frac{4}{3} = 0$.

4. Numerele de forma a_n sunt în progresie aritmetică. Dacă $a_{17} = 10$, să se calculeze $a_8 + a_{10} - a_1$.

Indicație: Aplicând formula termenului general al unei progresii aritmetice, cum putem să rescriem $a_8 + a_{10} - a_1$?

5. Fie progresia aritemtică cu primul termen $a_1 = 2$ și suma primilor 20 termeni $S_{20} = 610$. Să se afle r, a_4 și S_{30}.

6. Să se rezolve ecuația:

$$3x + (3x + 2) + (3x + 4) + ... + (3x + 100) = 2652.$$

Indicație: nu e obligatoriu să se utilizeze notația Σ.

7. Calculați:

a) $\left[-\frac{5}{2}\right] + [\frac{5}{3}]$;

b) $\{1,64\} - \{-2,36\}$.

8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;

b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;

c) $|1-2x|=|x+4|$.
9. Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{i} j.$$

AL6 și AL7 din culegerea de poli.

2 Tema II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|3-x|-2|x-3|=0$;

Soluție:

$$x:-\infty \xrightarrow[3-x<0]{x-3>0} 3 \xrightarrow[3-x>0]{x-3<0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow$

$$x-3-2(x-3)=0 \iff -(x-3)=0 \Rightarrow x=3 \in (-\infty, 3].$$

(ii) $x \in (3, \infty) \Rightarrow$

$$3-x-2(3-x)=0 \iff -2(3-x)=0 \Rightarrow x=3 \notin (3, \infty).$$

$$x \in \{3\}.$$

b) $|2x+1|=x+3$;

c) $|3x-2|=|x+1|$;

Soluție:

$$x:-\infty \xrightarrow[x+1<0]{3x-2<0} -1 \xrightarrow[x+1>0]{3x-2<0} \frac{2}{3} \xrightarrow[x+1>0]{3x-2>0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow$

$$2-3x=-x-1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \notin (-\infty, -1].$$

(ii) $x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow$

$$2-3x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \in \left(-1, \frac{2}{3}\right].$$

(iii) $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \Rightarrow$

$$3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

$$x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}.$$

d) $|x| + |x - 1| = 1$;

f) $|x - 1| + |2x - 2| + ... + |9x - 9| = x$.

Soluție:

$$|x-1| + 2|x-1| + ... + 9|x-1| = x$$
$$(1 + 2 + ... + 9)|x - 1| = x$$
$$\frac{9 \cdot 10}{2}|x - 1| = x$$
$$45|x - 1| = x$$

$$x : -\infty \xrightarrow{x-1<0} 1 \xrightarrow{x-1>0} \infty$$

(i) $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow$

$$45(1 - x) = x \Rightarrow x = \frac{45}{46} \in (-\infty, 1].$$

(ii) $x \in (1, \infty)$

$$45(x - 1) = x \Rightarrow x = \frac{45}{44} \in (1, \infty).$$

$$x \in \left\{\frac{45}{44}, \frac{45}{46}\right\}$$

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x + 5| \leq 2$;

Soluție:

$$-2 \leq x+5 \leq 2 \iff -7 \leq x \leq -3 \Rightarrow x \in [-7,-3].$$

b) $|1-3x| > 1$;

Soluție:

$$1-3x < -1 \text{ sau } 1-3x > 1 \iff x > \frac{2}{3} \text{ sau } x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

c) $|3x-1| + |3-9x| \leq 0$;

d) $|2x-1| \leq -1$;

e) $|3x-6| > 0$;

f) $1 < |x-2| < 2$;

g) $|5-3x| < x$;

h) $|x| < |3x-1|$.

Soluție:

$$|x| < |3x-1| \iff x < |3x-1|;$$

(logic - dacă modulul unui număr e mai mic decât ceva, atunci și numărul în sine e mai mic decât acel ceva)

$$x < 3x-1 \text{ sau } 3x-1 < -x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

3. Să se calculeze următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$;

b) $\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k+3)$;

Soluție:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k-2)(k+3) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k-6) \\
&= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-6\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-6n \\
&= n\left(\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)-1\right) \\
&= \frac{n(n^2+3n-16)}{3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

c) $\sum_{k=2}^{n}(k^2+k)$;

d) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$;

e) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$.

4. Să se determine termenii a_5, a_9, a_{20} ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că primii 5 termeni ai progresiei sunt:

a) -5, a_2, a_3, 1, a_5;

Soluție parțială:

$$\overbrace{a_4}^{1}=\overbrace{a_1}^{-5}+3r \Rightarrow r=2.$$

b) a_1, 4, 1, a_4, a_5;

Soluție parțială:

$$r=\overbrace{a_3}^{1}-\overbrace{a_2}^{3}=-3\ (\text{nu } 3)\ .$$

c) a_1, -2, a_3, 2, a_5.

5. Să se determine care dintre numerele 3101, 770, 900, 1022 este termen al progresiei aritmetice având primul termen $a_1 = 2$ și rația $r = 4$.

Soluție:
Căutăm soluții pentru ecuația $a_k = a_1 + (k-1)r$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este necunoscuta noastră.

Ecuația

$$2 + 4(k-1) = 3101$$

într-adevăr nu are o soluție întreagă, deoarece 3101 e impar.

$$2 + 4(k-1) = 770 \Rightarrow k = 193 \in \mathbb{Z}.$$
$$2 + 4(k-1) = 900 \Rightarrow k = \frac{449}{2} + 1 \notin \mathbb{Z}.$$
$$2 + 4(k-1) = 1022 \Rightarrow k = 256 \in \mathbb{Z}.$$

Deci $a_{193} = 770$ și $a_{256} = 1022$ sunt termeni ai progresiei.

6. Fie progresia aritmetică cu primul termen $a_1 = 3$. Să se afle r, a_4, S_{30} dacă:

a) $S_{36} = 2628$;

Soluție:

$$S_{36} = 2628$$
$$36\frac{a_1 + a_{36}}{2} = 2628$$
$$a_1 + a_1 + 35r = 146 \Rightarrow 35r = 140 \Rightarrow r = 4.$$

b) $S_{50} = 3825$.

7. Să se determine termenii b_5, b_8, b_{20} ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă primii 4 termeni ai progresiei sunt:

a) b_1, 12, 36, b_4;

b) b_1, -6, b_3, b_4;

c) b_1, b_2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$;

d) 3, -2, b_3, b_4.

8. Să se calculeze (în principiu, să se restrângă) următoarele sume:
a) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2016}$;

Soluție:

$\sum_{k=0}^{2016} 2^k = 1 \cdot \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 1$ (pentru că, atenție, suma are 2017 termeni, nu 2016) .

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{100}}$;

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

9. Calculați:

$$\frac{\sin 75°}{\sin 15°} - \frac{\cos 75°}{\cos 15°}.$$

10. Calculați:

a) $\sin \frac{\pi}{12}$;

b) $\cos 75°$;

c) $\tan 15°$;

d) $\cos \frac{11\pi}{12}$.

11. Calculați:

a) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2(x+\pi)$;

b) $\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)0-\cos x\cos\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$;

c) $\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2(\pi-x)$.

12. Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x=\frac{1}{2}$ și $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

13. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\cos x=-\cos 40°,$$

unde $x\in(0,360°)$.

14. Care dintre numerele $\cos 55°$, $\sin 155°$, $\sin 15°$, $\cos 170°$, $\cos 100°$, $\sin 106°$ este cel mai aproape de 0?

3 Tema III

1. Să se compare numerele:

a) $\left(-\frac{8}{25}\right)^4, b=\frac{9}{16}^6$;

b) $a=\left(\frac{1}{32\sqrt{2}}\right)^{22}, b=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{242}$;

2. Să se ordoneze crescător numerele:

a) 2^{72}, 5^{48}, 3^{36};

b) $2^{15}\cdot 3^{30}$, $3^{15}\cdot 5^{15}$, $2^{30}\cdot 3^{15}$.

3. Să se ordoneze descrescător numerele:

a) $3^{40}\cdot 2^{80}$, $3^{60}\cdot 2^{120}$, $3^{80}\cdot 2^{160}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{54}$, $\left(-\frac{64}{125}\right)^{18}$, $\left(\frac{49}{16}\right)^{27}$.

4. Să se calculeze:

a) $\frac{2^{-3}\cdot 3^{-4}}{4^{-2}\cdot 5^{-1}}$;

b) $\frac{(0{,}1)^{-1}\cdot(0{,}01)^{-2}\cdot(0{,}001)^{-3}}{(0{,}0001)^{-3}}$;

c) $\frac{(0{,}1)^{-3}:(0{,}01)^{-2}:(0{,}001)^{-1}}{(0{,}002)^{-1}:(0{,}02)^{-2}:(0{,}2)^{-3}}\cdot 2^6$.

5. Să se compare numerele:

a) 3^{-10} și 10^{-3};

b) $(1-a^2)^n$ și $(1-a^2)^{n-2}, n\in\mathbb{N}, |a|<1$;

c) 256^{-6} și 81^{-10};

d) $(1+a^2)^{2n}$ și $(1+a^2)^{n+2}, a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

6. Să se ordoneze crescător numerele:

a) 32^{-6}, 125^{-10}, 9^{-15};

b) 49^{-25}, $32^{-10}\cdot 9^{-25}$, 32^{-20};

c) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6}$, $\left(\frac{9}{16}\right)^{3}$.

7. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{-125}$;

b) $\sqrt[4]{(-3)^8}$;

c) $\sqrt[5]{0,00001}$;

d) $\sqrt[3]{(0,000001)^{-1}}$;

e) $\sqrt[6]{(\sqrt{65}-1)(\sqrt{65}+1)}$;

f) $\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{28+\sqrt[3]{-1}}}$;

g) $\sqrt[3]{1-3\sqrt{4}+3\sqrt[3]{2}}$.

8. Să se scoată factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{864\cdot 1701}$;

b) $\sqrt[3]{108}$;

c) $\sqrt[5]{-64\cdot 243}$;

d) $\sqrt[6]{324\cdot 81\cdot 4^7}$;

e) $\sqrt[4]{2^{13}\cdot 3^{10}\cdot 5^5}$;

f) $\sqrt[4]{243x^5}$;

g) $\sqrt[6]{x^{12}\cdot y^7}$;

h) $\sqrt{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)^3}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă expresia

$$E(x,y)=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7,$$

unde $x,y\in(0,\infty)$.

10. Arătați că numărul

$$a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$$

este rațional.

11. Să se calculeze:

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$;

b) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}}}$;

c) $(\sqrt[16]{2}-1)(\sqrt[16]{+}1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$.

12. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$;

b) $\log_3 0,125$;

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$;

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2\sqrt{8}}$.

13. Ordonați crescător numerele $a=-\sqrt[3]{64}$, $b=\log_3\frac{1}{27}$ și $c=\log_2\frac{1}{32}$.

14. Arătați că numărul $a=\log_4 8+\log_9 27-\sqrt[3]{8}$ este natural.

15. Demonstrați că numărul $b=\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2(6+\sqrt{8})+\log_2(6-\sqrt{8})-\log_2 7$;

b) $\lg 0,001+2^{\log_2 3}-9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$;

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}$.

4 Tema IV

1. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$;

$$\begin{aligned}\log_2 8\sqrt{2} &= \log_2 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 2^{3+\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}.\end{aligned} \tag{2}$$

b) $\log_2 0,125$;

$$\begin{aligned}\log_2 0,125 &= \log_2 \frac{125}{1000} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{10^3} \\ &= \log_2 \frac{5^3}{5^3 \cdot 2^3} \\ &= \log_2 2^{-3} \\ &= -3.\end{aligned} \tag{3}$$

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$;

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2} &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 2^{2+\frac{1}{3}} \\ &= 2\log_2 2^{\frac{7}{3}} \\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned} \tag{4}$$

d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2 \sqrt{8}}$.

$$\begin{aligned} 4^{1-\log_2 \sqrt{8}} &= (2^2)^{1-\log_2 (2^3)^{\frac{1}{2}}} \\ &= (2^2)^{1-3\cdot\frac{1}{2}} \\ &= (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Ordonați crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

3. Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

4. Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

5. Calculați:

a) $\log_2(6+\sqrt{8}) + \log_2(6-\sqrt{8}) - \log_2 7$;

b) $\lg 0,001 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$;

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}$.

6. Calculați:

a) $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5}$;

b) $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3}$;

7. Reduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$;

b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}$;

c) $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 - \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.

8. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2\log_{16} 5$;

b) $a = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

c) $a = \log_2 9 + \frac{\log_2 12}{\log_3 2} - \frac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

9. Arătați că numărul a este natural, unde:

$$a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}}.$$

10. Fie $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ și $b = \sqrt[16]{2}$. Arătați că $a \cdot b$ este număr rațional.

11. Arătați că $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[6]{7-3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.

12. Determinați numărul natural k, dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$.