Meditații matematică

LazR ('3')

7 Mai, 2024

Cuprins

1 Formule de calcul prescurtat

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^2 = (a-ib)(a+ib), \text{ unde } i = \sqrt{-1}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Aceste formule sunt relativ ușor de listat, deoarece conțin un număr fixat de termeni. Pentru a enunța formule mai complexe, care tratează cazuri generale, trebuie să apelăm la notații standard - altfel spus, prescurtări.
Mai întâi, cum putem restrânge o sumă, astfel încât să o putem scrie cât mai compact? Notația Σ (”Σ” se citește ”sigma” și este simbolul grecesc echivalent literei ”S”) facilitează acest lucru. De exemplu:

$$1+2+3 = \sum_{k=1}^{3} k \text{ (înlocuim } k\text{, pe rând, cu 1, 2 și 3, și le adunăm) ;}$$

$$7+8+9+10+11+12+13+14+15+16 = \sum_{k=7}^{16} k;$$

$$1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{n} k;$$

$$1+4+8+16+32+...+2^{n-1} = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k;$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)};$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Similar, notația Π (”Π” se citește ”pi” și este simbolul grecesc echivalent literei ”P”) e folosită pentru scrierea compactă a unui produs. De exemplu:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Observație

Ne-am putea întreba cum scriem suma $10 + 9 + \ldots + 3 + 2 + 1$ în mod compact. Introducem o nouă notație pentru ”sume inverse”? Mai simplu,

$$10 + \ldots + 1 = \sum_{k=1}^{10} (11 - k) = \sum_{k=1}^{10} k.$$

Astfel, putem exprima niște rezultate mai ”stufoase”, într-un mod mai eficient. Se știe încă din clasele mici faptul că, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, avem $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Altfel spus:

Suma lui Gauss

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k) \text{ (de ce?) } \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n+1) \\
&= n(n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$\square$

Sumă de pătrate

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație:

$$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 \Rightarrow k^2 = \frac{k^3 - (k-1)^3 + 3k - 1}{3} \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3 - (k-1)^3 + 3k - 1}{3} \right) \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 + 3 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1}{3} \\
&= \frac{n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n}{3} \\
&= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

$\square$

Sumă de cuburi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Demonstrație:

$$(k-1)^4 = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 \Rightarrow k^3 = \frac{k^4 - (k-1)^4 + 6k^2 - 4k + 1}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned} \tag{3}$$

$\square$

2 Progresii

Progresia aritmetică

Termenul general: $a_n = a_1 + r(n-1)$;
Rația $r = a_{k+1} - a_k$;

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Demonstrație:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)r \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_1 + r\sum_{k=1}^{n}(k-1) \\
&= na_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)r)}{2} \\
&= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

□

Proprietate specială:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Pe caz general:

Termenul din mijloc al unei progresii aritmetice

$$a_{\frac{m+n}{2}} = \frac{a_m + a_n}{2}.$$

Demonstrație:

$$\frac{a_m + a_n}{2} = \frac{2a_1 + (m-1+n-1)r}{2} = a_1 + \left(\frac{m-1}{2} - 1\right) r = a_{\frac{m+n}{2}}.$$

□

Progresia geometrică

Termenul general: $b_n = b_1 q^{n-1}$;
Rația $q = \frac{b_{k+1}}{b_k}$;

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} b_1 q^{k-1} \\ &= b_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}.\end{aligned} \tag{5}$$

$$q\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \sum_{k=1}^{n} q^k \Rightarrow (1-q)\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1(1-q^n) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$\square$

Proprietate specială:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}.$$

Pe caz general:

Termenul din mijloc al unei progresii geometrice

$$b_{\frac{m+n}{2}} = \sqrt{b_m b_n}.$$

Demonstrație:

$$\sqrt{b_m b_n} = \sqrt{b_1^2 q^{m+n-2}} = b_1 q^{\frac{m+n}{2}-1} = b_{\frac{m+n}{2}}.$$

$\square$

Două dezvoltări importante

$$(i) a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k;$$

$$(ii) a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k a^{2p-k}b^k, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right) \\ &= b^n\left(\frac{a}{b} - 1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k. \end{aligned} \tag{6}$$

Similar pentru $a^{2p+1} + b^{2p+1}$, ținând cont că semnul + se datorează faptului că rația $\frac{a}{b}$ este negativă iar puterea este un număr întotdeauna impar.

$\square$

3 Și mai multe formule de calcul prescurtat

Câteva identități mai mult sau mai puțin relevante (opțional)

$$(i) a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = \frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2];$$

$$(ii) a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2];$$

$$(iii) (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a);$$

$$(iv) a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Demonstrație:
(i)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca &= (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \\ &= \frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]. \end{aligned} \tag{7}$$

(ii) Similar.
(iii)

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= (a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c) \\ &= a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3c(a+b)(a+b+c) \\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(c^2+ab+bc+ca) \\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned} \tag{8}$$

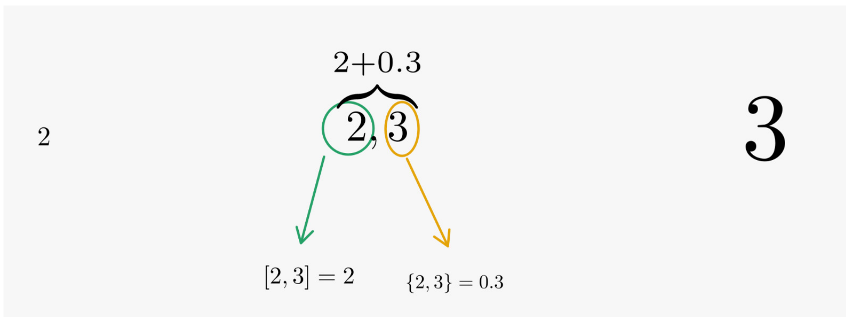
(iv)

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ca] \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \end{aligned} \tag{9}$$

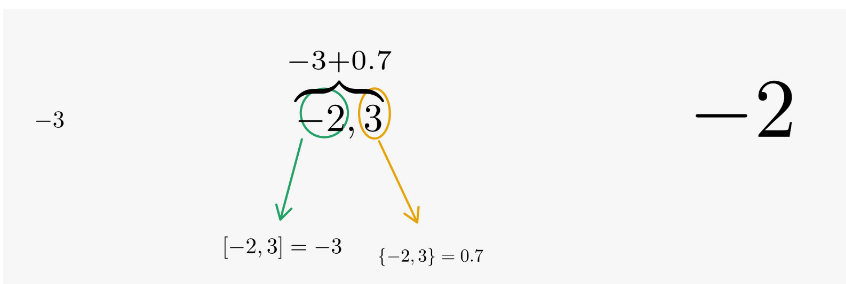
□

4 Partea întreagă și partea fracționară

Convențional, un număr este împărțit în partea sa întreagă și partea sa fracționară:



Pentru consistență, în cazul numerelor negative, acestea adoptă reguli poate mai puțin intuitive, dar care au la fel de mult sens:



Partea întreagă a lui x reprezintă cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x. Într-un fel, partea fracționară ne spune cât de mult ne-am deplasat la dreapta (adică ne-am îndepărtat) față de partea întreagă.
Mai formal:

Partea întreagă

Fie $x \in \mathbb{R}$. Partea întreagă este definită ca numărul notat $[x]$ care îndeplinește următoarea proprietate:

$$x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1.$$

Evident, $[k + x] = k + [x] \, \forall k \in \mathbb{Z}$ (deoarece numerele întregi sunt deja... ”întregi”).

Partea fractionară

Fie $x \in \mathbb{R}$. Partea întreagă reprezintă numărul notat $\{x\}$, definit prin:

$$\{x\} = x - [x].$$

Evident, $\{k + x\} = \{x\} \forall k \in \mathbb{Z}$ (numerele întregi au partea fracționară 0, deci nu contribuie la partea fracționară a altor numere).

Identitatea lui Hermite

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx].$$

Demonstrație:
Observația cheie aici este faptul că termenii sumei pot lua doar două valori, $[x]$ și $[x] + 1$. Este ușor de văzut dacă le listăm:

$$[x] \leq \left[x + \frac{1}{n}\right] \leq ... \leq \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

Deci valoarea lor minimă este $[x]$. Iar cum

$$\left[x + \frac{n-1}{n}\right] = \left[[x] + \{x\} + 1 - \frac{1}{n}\right] = [x] + 1 + \underbrace{\left[\{x\} - \frac{1}{n}\right]}_{\text{care este } 0, \text{ sau } -1} \leq [x] + 1.$$

Deci valoarea maximă este $[x] + 1$ (termenii sumei sunt numere întregi cuprinse între două numere, tot întregi, consecutive, $[x]$ și $[x] + 1$, prin urmare pot lua doar una din două valori - $[x]$, sau $[x] + 1$).
Prin urmare, există un index i pentru care termenii, din $[x]$, devin la un moment dat $[x] + 1$. Altfel spus:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = \sum_{k=0}^{i-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] + \sum_{k=i}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = i \cdot [x] + (n-i) \cdot ([x]+1) = n[x] + n - i.$$

Cum i este punctul critic pentru care $\{x\} + \frac{i}{n}$ atinge, sau întrece valoarea 1, avem

$$\{x\} + \frac{i-1}{n} < 1 \text{ și } \{x\} + \frac{i}{n} \geq 1.$$

Obținem:

$$\frac{n-i}{n} \leq \{x\} < \frac{n-i+1}{n}$$
$$\Longleftrightarrow$$

$n-i \leq n\{x\} \leq n-i+1 \Rightarrow n[x]+n-i \leq n[x]+n\{x\} = nx < n[x]+n-i+1,$

ceea ce implică faptul că $[nx] = n[x] + n - i$.
Deci,

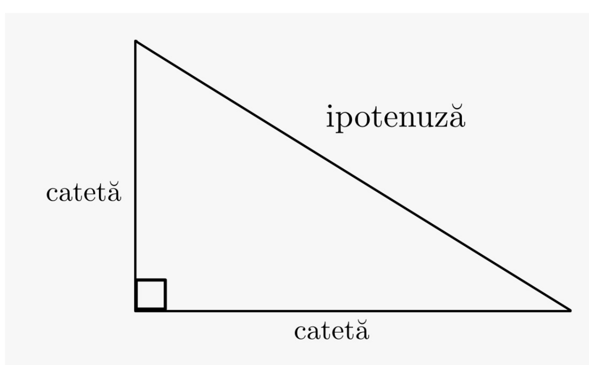
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = n[x] + n - i = [nx].$$

□

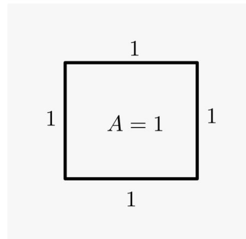
5 Modulul unui număr real

6 Câteva noțiuni generale de geometrie

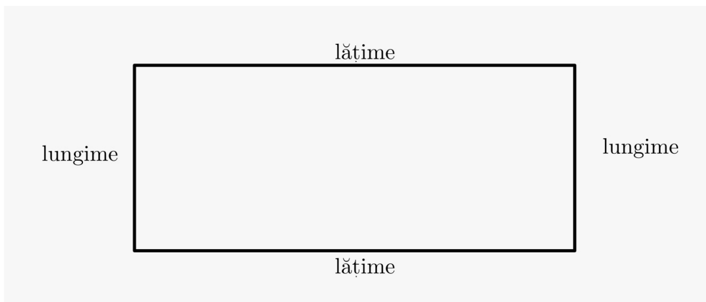
Pentru tratarea trigonometriei ca ramură a matematicii, trebuie să ne reamintim... multe chestii. În primul rând, teorema lui Pitagora n-ar strica nițel revizuită. Recapitulăm mai întâi ”anatomia” unui triunghi dreptunghic:



Aria (”suprafața”) unui pătrat de latură 1 e definită ca fiind 1.

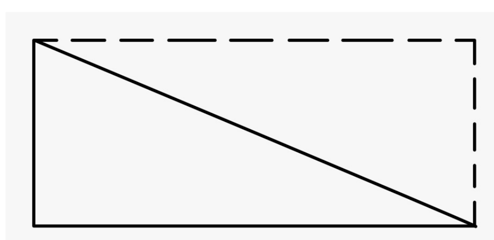


"Anatomia" unui dreptunghi este următoarea:



Față de pătratul de latură 1, dreptunghiul crește separat în lungime (de l ori) și în lățime (de L ori). Deci, aria lui, față de cea a pătratului de latură 1, crește de $L \cdot l$ ori - aria dreptunghiului. Pătratul este un caz particular al unui dreptunghi, cu lungimea și lățimea egale, deci aria unui pătrat de latură l este l^2.

Observăm că un triunghi dreptunghic reprezintă jumătate dintr-un dreptunghi:



Aria sa va fi, desigur, jumătate din aria dreptunghiului. O catetă a sa este lungimea, iar cealaltă catetă a sa este lățimea. Deci, aria triunghiului dreptunghic este dată de formula:

$$A = \frac{(\text{cateta 1}) \cdot (\text{cateta 2})}{2}.$$

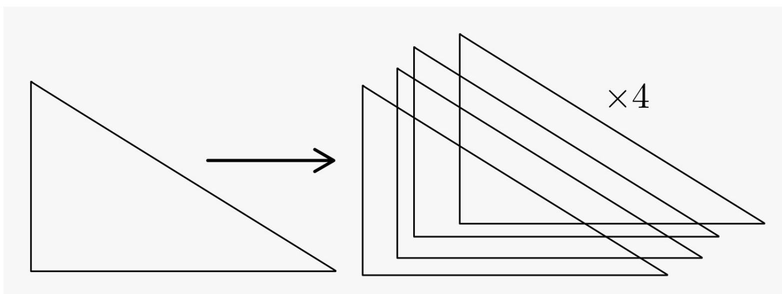
Revenind la oile noastre:

Teorema lui Pitagora

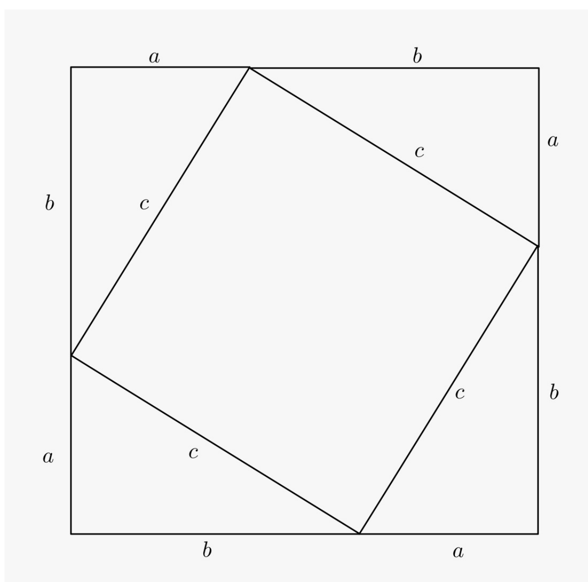
Fie un triunghi dreptunghic. Atunci:

$$(\text{cateta 1})^2 + (\text{cateta 2})^2 = \text{ipotenuza}^2.$$

Demonstrație:
Propunere: luăm fain frumos un triunghi dreptunghic și îl clonăm de 4 ori.



Apoi, rearanjăm cele 4 copii în următoarea configurație:



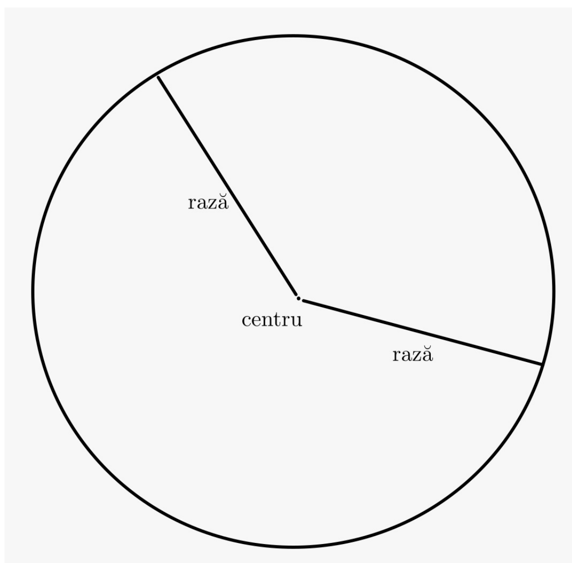
Aria pătratului din centru este egală cu aria pătratului mare, din care scădem aria adunată celor patru triunghiuri dreptunghice. Altfel spus:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2,$$

unde a și b sunt catetele triunghiului dreptunghic original, iar c reprezintă ipotenuza.

$\square$

Pe lângă triunghiuri, pătrate, și alte poligoane, un alt concept geometric la fel de important este cercul. Cercul este definit ca forma geometrică cu proprietatea că orice punct de pe conturul ei este egal depărtat de un punct interior special, numit centru al cercului. Reamintim ”anatomia” cercului:



Faptul că orice punct de pe contur este egal depărtat de centru este un alt fel de a spune că razele cercului au aceeași lungime.

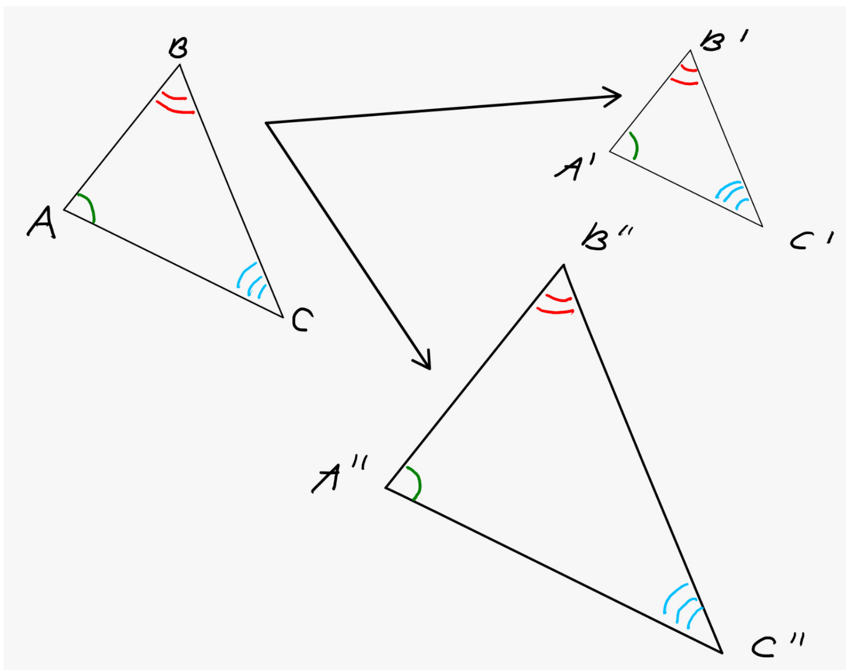
Se poate demonstra că raportul dintre lungimea cercului (”lungimea” conturului) și dimametrul său (dublui razei) este constant și egal cu un număr irațional 3.1415... := π. Astfel, dacă notăm lungimea cercului cu L, obținem:

$$\frac{L}{2r} = \text{ constantă } = \pi \iff L = 2\pi r.$$

Un ultim lucru relevant este conceptul de triunghiuri asemenea.

Triunghiuri asemenea

Două triunghiuri se numesc asemenea dacă acestea au unghiurile egale între ele, două câte două.



În figura de mai sus,

$$\angle A = \angle A' = \angle A'',$$

$$\angle B = \angle B' = \angle B'',$$

$$\angle C = \angle C' = \angle C'',$$

prin urmare, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ ("$\sim$" se citește "asemenea cu").
Proprietatea fundamentală a asemnănării spune că triunghiurile asemnea sunt proporționale, adică, dacă avem un triunghi oarecare, un alt triunghi

asemenea cu acesta este practic o variantă micșorată sau mărită a triunghiului original. Dacă avem o cantitate x, o variantă micșorată sau mărită a lui x este de forma $k \cdot x$, spre exemplu $0.5 \cdot x$, sau $2 \cdot x$. Astfel,

$$BC = k \cdot B'C',$$

$$CA = k \cdot C'A',$$

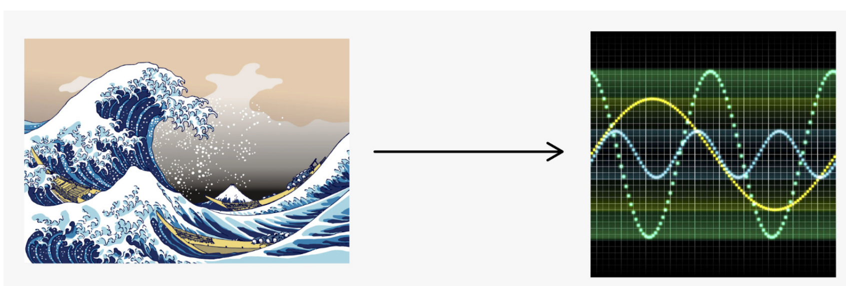
$$AB = k \cdot A'B',$$

ceea ce înseamnă că, având în vedere că k este o constantă:

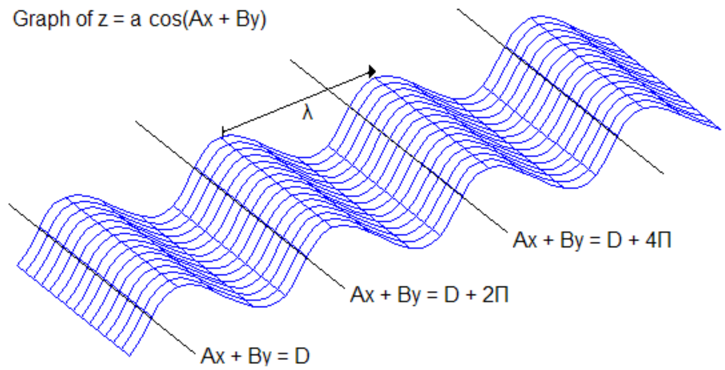
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

7 Trigonometrie

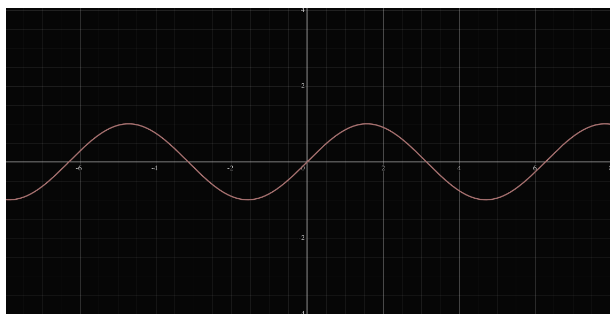
Trigonometria în sine studiază comportamentul matematic al vibrațiilor, sau, altfel spus, al undelor. Putem modela perturbațiile petrecute în natură, precum valurile unui ocean, sau mișcarea particulelor de aer, sau deplasarea unui arc, sau a unei corzi, cu ajutorul unui concept matematic numit undă.



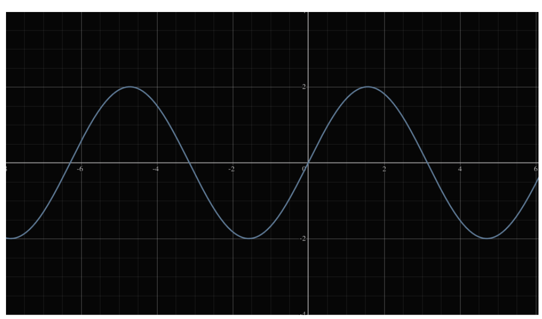
Unda, la nivel fundamental, urmărește mișcarea acestor perturbații (de exemplu, mișcarea ”în sus și în jos” a valurilor) și o reprezintă printr-un grafic:



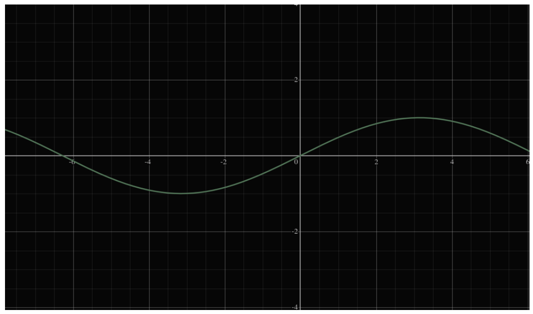
Plecând de la o funție oarecare f, care descrie o undă cât mai basic:



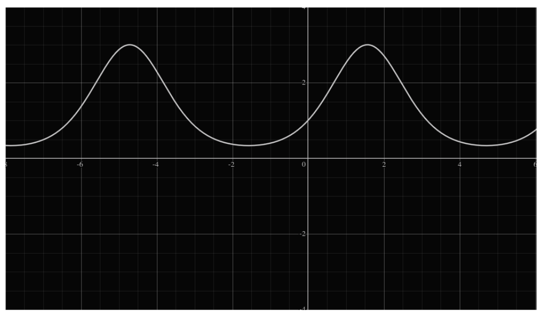
putem distorsiona, amplifica, în general, modifica această undă după bunul nostru plac. De exemplu, o putem amplifica cu un factor de 2, astfel obținând graficul lui $2f(x)$:



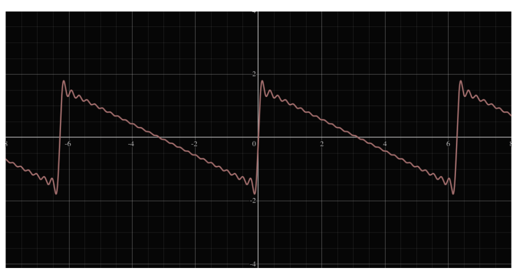
Putem dispersa valorile output-ului, micșorând valorile input-ului - de exemplu, graficul funcției $f(\frac{x}{2})$:



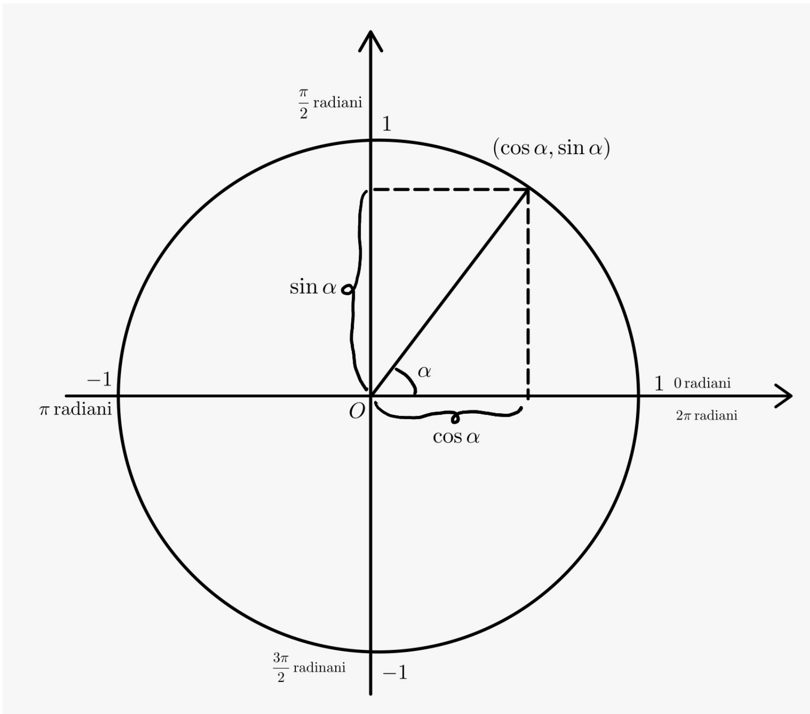
Putem... obține asta, aplicând $3^{f(x)}$:



...sau asta, aplicând magie neagră asupra funcției originală f:



Ideea este că, plecând de la o undă fundamentală, simplă și elegantă, putem modela tot felul de alte unde, arbitrar de complexe. Două astfel de unde fundamentale preferate sunt ***sinusoida*** și ***cosinusoida***. Ele se obțin plecând de la ce numim ”cercul trigonometric”. Cercul trigonometric este practic un cerc de rază 1, a cărui centru coincide cu centrul sistemului său de coordonate.



Sensul trigonometric de rotație al unui punct de pe conturul acestui cerc este ***invers acelor de ceasornic***. Dacă urmărim mișcarea circulară a acestui punct, observăm că cele două direcții după care se descompune, verticală și orizontală, ”penduleează”, de jos în sus, respectiv de la dreapta la stânga. Coordonatele punctului, pe verticală și orizontală, se numesc, tradițional ***sinus***, respectiv ***cosinus*** (”sinsus” provine dintr-un cuvânt de origine arabă, cu sensul de ”coardă”... cred).

Măsura unghiului (al acelui α de pe desen) determinat de dreapta care unește centrul cercului și punctul de pe contur pe care îl urmărim este tipic reprezentat prin altă unitate de măsură decât gradul, și anume ***radianul***.

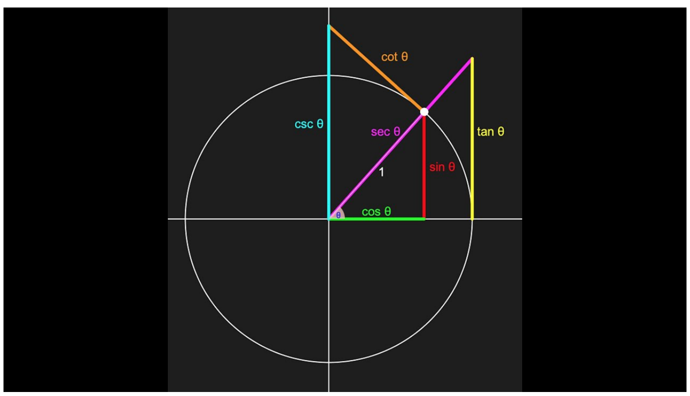
Radian

Un radian este egal cu lungimea sectorului de cerc subîntins de un grad.

Cum cercul trigonometric este de rază $r = 1$, lungimea sa este egală cu $2\pi r = 2\pi$, iar cum un unghi de 180 de grade subîntinde un ***semicerc***, 180 de grade corespund la $2\pi : 2 = \pi$ radiani. Radianii corespunzători unui alt unghi oarecare se pot afla prin regula de trei simplă:

$$180 \text{ grade } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pi \text{ radiani}$$
$$g \text{ grade } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r \text{ radiani}$$
$$\Rightarrow r = \frac{g \cdot \pi}{180}.$$

Bine, bine, dar unde apar sinusoida și cosinusoida în toată povestea asta? **Ahem**:
Click/tap aici: Generarea sinusoidei și cosinusoidei, utilizând cercul trigonometric.
După cum am menționat, direcțiile verticală și orizontală ”pendulează”, adică sinusul, respectiv cosinusul, generează acele unde fundamentale pe care le căutăm. Putem defini o grămadă de alte funcții trigonometrice, pe lângă sinus și cosinus:



Avem, de exemplu, funcțiile ***tangentă***, ***contangentă***, ***secantă*** și ***cosecantă***. Din triunghiuri asemenea, rezultă:

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{1} \iff \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta};$$
$$\frac{\sec\theta}{1} = \frac{1}{\cos\theta} \iff \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta};$$
$$\frac{\cot\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \iff \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$
$$\frac{\csc\theta}{1} = \frac{\cot\theta}{\cos\theta} \iff \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Acum urmează să luăm aceste funcții și să listăm și să demonstrăm o cantitate obscenă de formule trigonometrice.

8 O cantitate obscenă de formule trigonometrice

Proprietatea fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Demonstrație:
Este o consecință evidentă a teoremei lui Pitagora.

$\square$

Proprietatea fundamentală - rescrisă

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta;$$

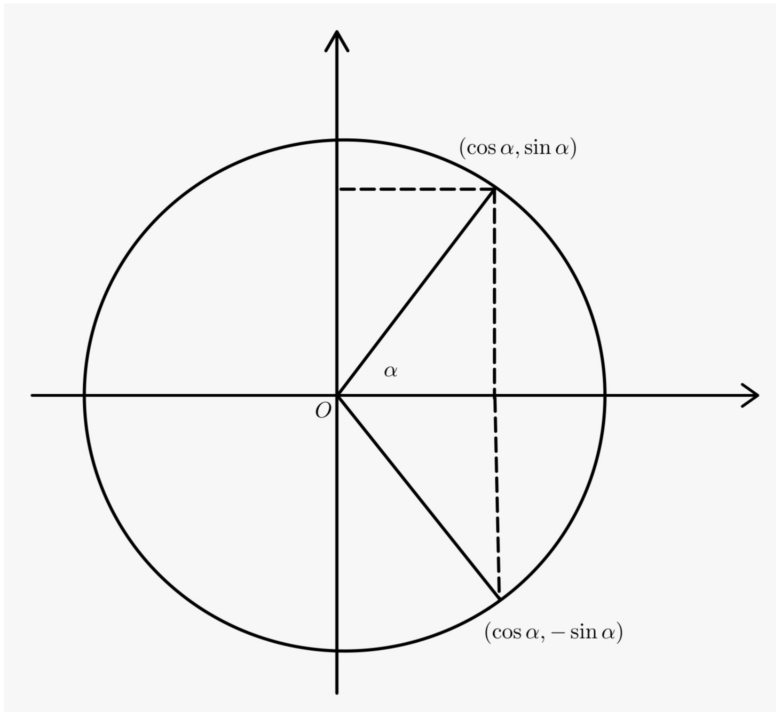
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

Imparitatea funcției sinus - Paritatea funcției cosinus

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta;$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta).$$

Demonstrație:
Cum definiția noastră pentru funcțile trigonometrice este una vizuală, vom apela la o ”demonstrație”-ish vizuală:

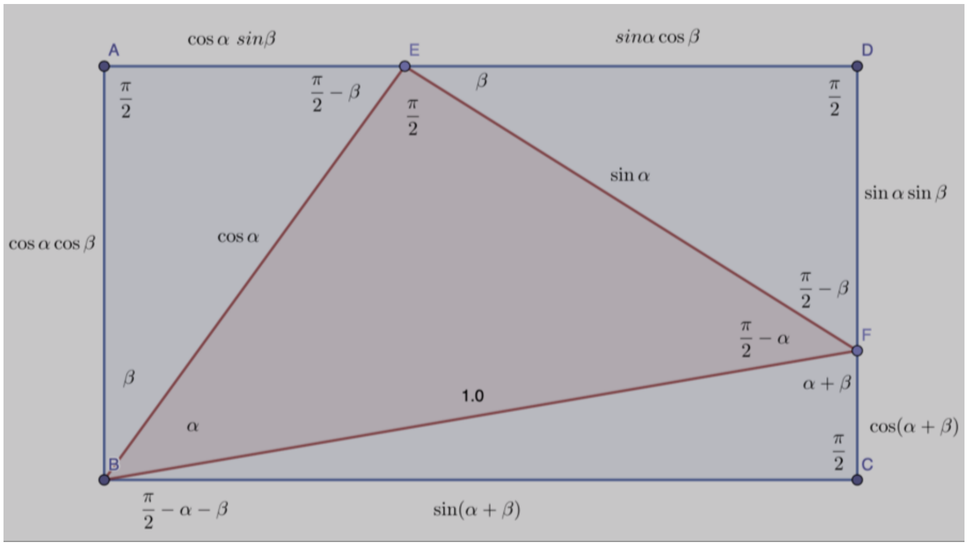


□

Sinus/Cosinus de sumă/diferență

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha;$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Demonstrație:
Demonstrațiile de liceu la chestiile astea chiar sunt de obicei vizuale:



Notă: teoretic, asta reduce discuția doar la unghiuri mai mici sau egale cu 90 de grade, dar prin desene și mai complicate de atât se poate demonstra pe caz general.

□

Tangentă/Cotangentă de sumă/diferență

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta};$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\color{red}{\cos\alpha\cos\beta} \mp \sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \pm \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 \mp \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha} \\
&= \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \mp 1}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \pm \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}} \\
&= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

□

Sinus/Cosinus dublu

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta;$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

Demonstrație:

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta;$$
$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

□

Tangentă/Cotangentă dublă

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta};$$
$$\cot(2\theta) = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}.$$

Demonstrație:

$$\tan(2\theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{10\tan\theta \cdot \tan\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta};$$
$$\cot(2\theta) = \frac{\cot\theta\cot\theta - 1}{\cot\theta + \cot\theta} = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}.$$

□

Sinus/Cosinus triplu

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta;$$
$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \sin(2\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(2\theta)\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 3\sin^3\theta.\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos\theta - \sin\theta\sin(2\theta)\\ &= \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.\end{aligned} \tag{13}$$

$\square$

9 Clasicul tabel trigonometric

Pornim de la un fapt simplu:

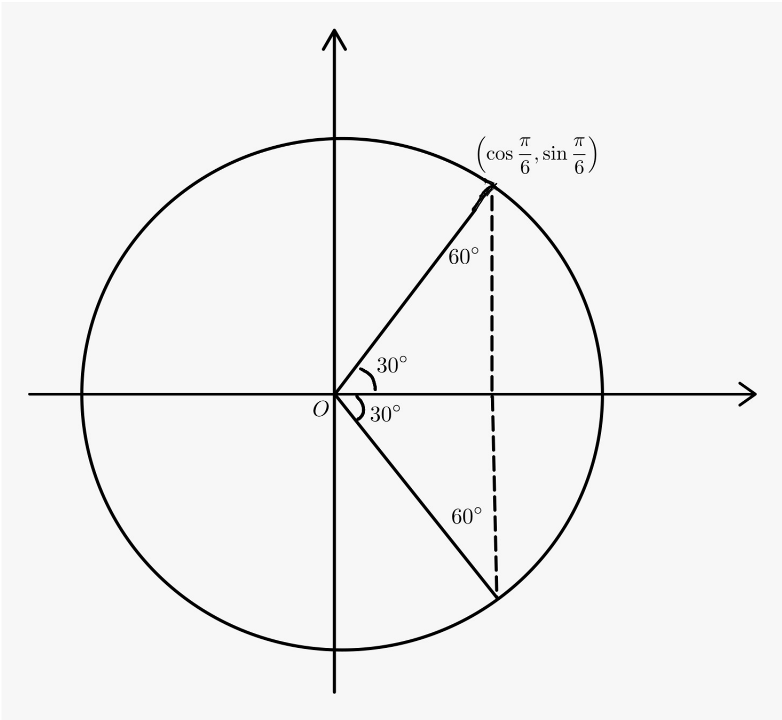
$\frac{\pi}{6}$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Demonstrație:
Avem

$$\text{radiani} = \text{grade}\cdot\frac{\pi}{180} \iff \text{grade} = \text{radiani}\cdot\frac{180}{\pi} \Rightarrow \frac{\pi}{6}\ \text{radiani} = \frac{180}{6} = 30\ \text{grade}.$$

Observăm, în desenul de mai jos, că putem forma un triunghi echilateral pe cercul trigonometric:



Fiind un triunghi echilateral, bisectoarea sa este și mediană, iar, având în vedere că latura sa este de lungime 1, avem că

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

$\frac{\pi}{3}$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Demonstrație:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{3}} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

$\frac{\pi}{4}$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Demonstrație:
Evident, din cercul trigonometric, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ și $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4};$$
$$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Singura soluție a sistemului care convine este $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\square$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X
$\cot\theta$	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

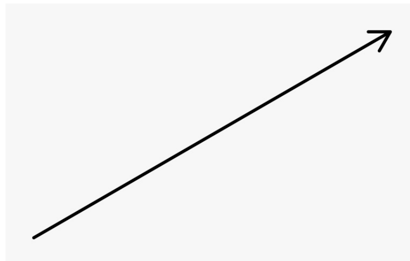
10 Vectori

Vectorii, în sensul cel mai vag, și nu foarte de ajutor, sunt ”definiți” ca ”segemente de dreaptă orientate”, orice o fi însemnând asta.

Protodefiniția unui vector

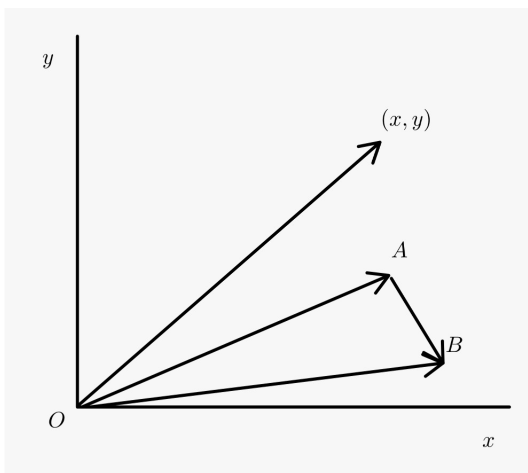
Un vector este un segment de dreaptă orientat. Are un modul, adică o lungime, ca orice segment de dreaptă, de altfel, și, în plus, are direcție și sens. Se notează printr-o literă, sau cu ajutorul capetelor segmentului de dreaptă, la care adăugăm o săgeată deasupra: $\vec{v}$, $\vec{AB}$.

Această tentativă de a defini un vector se întâlnește des în fizică, unde vectorii, în primă instanță, descriu mișcarea corpurilor. Din acest punct de vedere, un vector în plan arată în felul următor:



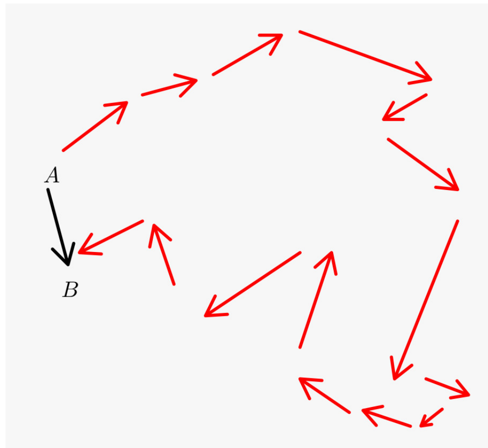
Lungimea segementului de dreaptă ne dă modulul vectorului, înclinația segmentului de dreaptă ne dă direcția vectorului, iar săgeata din vârf ne dă sensul vectorului.

Poate să exprime deplasarea față de un punct de plecare, de obicei, matematic, originea unui sistem de coordonate, sau deplasarea, de la un punct A oarecare, la un punct B oarecare.



Săgeata vectorului subliniază care este punctul de sosire, în vreme ce coada sa indică punctul de plecare.

Fiind un mod de a reprezenta o traiectorie, singurele două obiective care contează sunt punctul de plecare și punctul de sosire, astfel că, în universul vectorilor, următoarele două căi de a ajunge din punctul A în punctul B, cea directă și cea complexă și întortocheată, sunt, de fapt, echivalente.



Altfel spus, putem descompune un vector în arbitrar de mulți alți vectori intermediari:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CB} \\ &= \vec{AM} + \vec{MC} + \vec{CN} + \vec{NB} \\ &= \vec{AP} + \vec{PM} + \vec{MQ} + \vec{QC} + \vec{CR} + \vec{RN} + \vec{NT} + \vec{TB} \text{ etc.}\end{aligned} \tag{14}$$

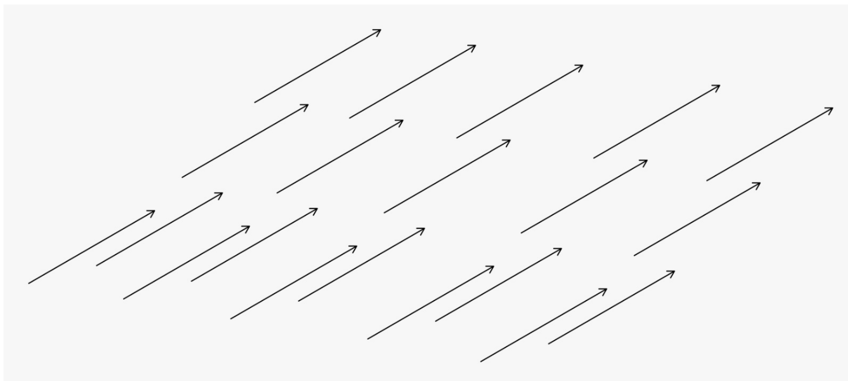
Observăm că, totuși, capătul primului vector trebuie să coincidă cu originea celui de al doilea vector, ca descompunerea să aibă sens.

Făcând abstrație de poziția lor într-un sistem de coordonate, vectorii cu același modul și aceeași direcție și sens sunt consideranți, oarecum, echivalenți.

Vectori echipolenți

Doi sau mai mulți vectori sunt considerați echipolenți, dacă aceștia sunt egali în modul, doi câte doi, și au aceeași direcție și sens.

Vectorii de mai jos sunt cu toții echipolenți:



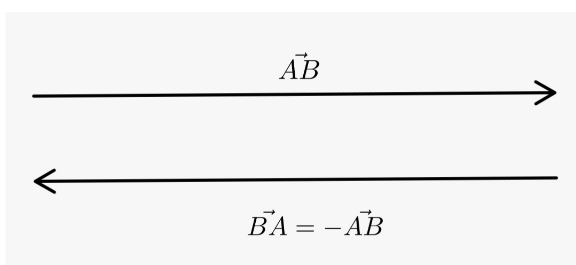
Nimeni nu prea folosește de fapt cuvântul ”echipolent”, dar... anyway.

Mergând în continuare pe analogia cu drumul, există, desigur, un drum nul, în care punctul de plecare și cel de sosire coincid - adică nu ne-am deplasat deloc.

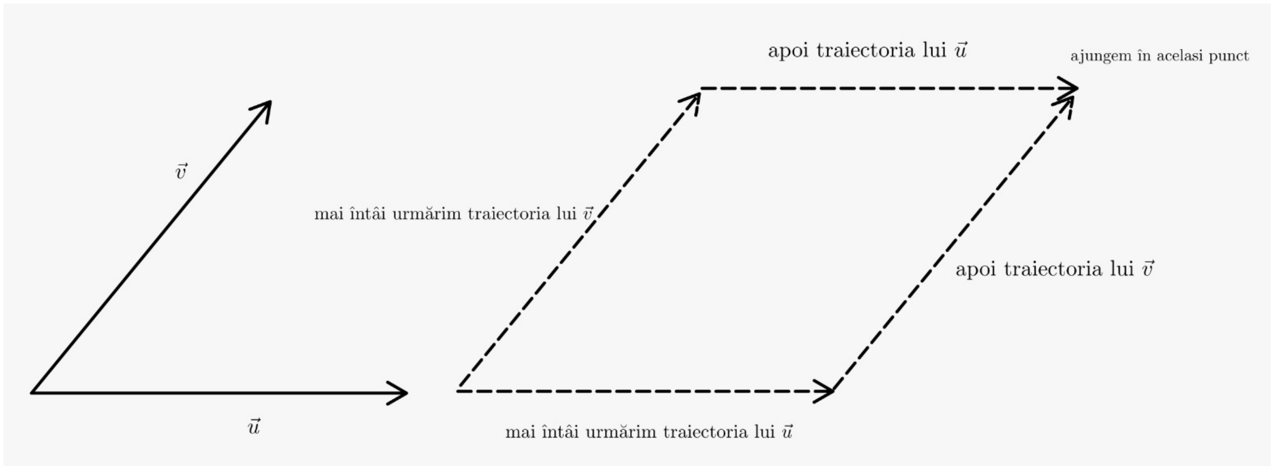
Vectorul nul

Vectorul nul, sau vectorul zero, este vectorul de modul 0 și se notează cu $\vec{0}$.

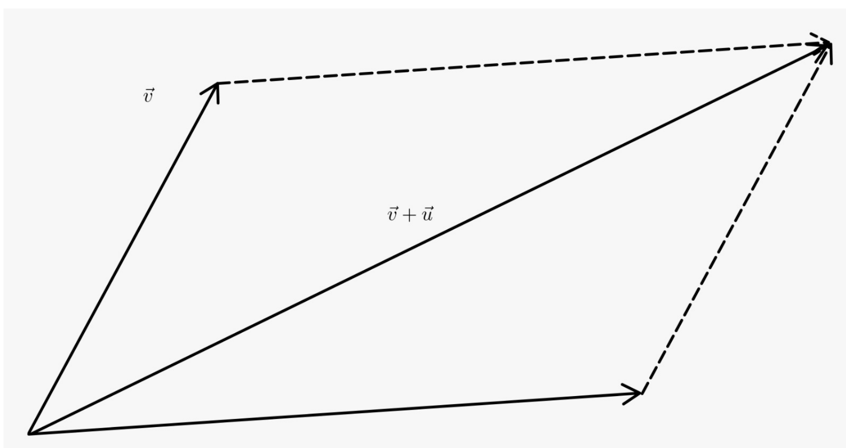
Vectorii de mai jos sunt egali în modul, au aceeași direcție, dar sensurile lor sunt opuse, deci acțiunea lor combinată este echivalentă cu vectorul nul:

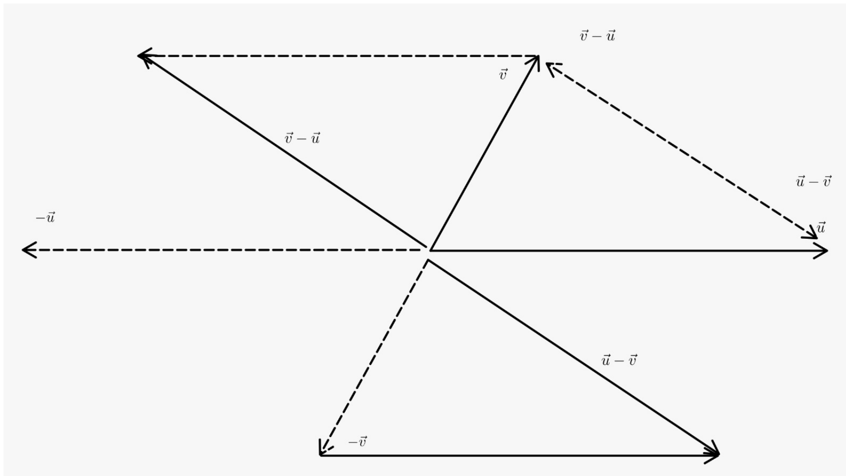


A aduna doi vectori cu aceeași origine, tot mergând pe analogia cu drumul, însemană a combina cele două traiectorii într-una singură:

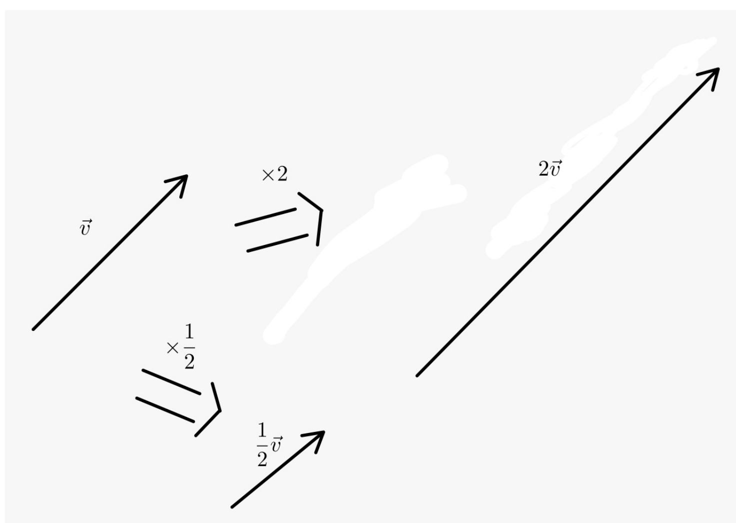


Observăm configurația în formă de paralelogram rezultată. De aici vine regula paralelogramului:





Pe lâgă adunare, prima operație de care suntem interesați este înmulțirea unui vector cu un scalar (un scalar, adică un număr real). Această operație duce la mărirea, sau micșorarea vectorului:



11 Funcții

Funcție

Fie D și C două mulțimi nevide. Se numește *funcție* definită pe D, cu valori în C, orice lege de corespondeță (relație) care asociază fiecărui element, $x \in D$, un unic element $y \in C$. Mulțimea D se numește *domeniul* funcției, iar mulțimea C, *codomeniul* funcției. Notația

$$f : D \to D, y = f(x)$$

se citește ”funcția f, definită pe A, cu valori în B, de relația $y = f(x)$”.

Observație

D și C sunt doar notații sugestive. Domeniul și codomeniul se pot nota, însă, cu orice litere.

Graficul funcției

Mulțimea

$$G_f = \{(x, f(x))|x \in A\}$$

poară numele de *grafic* al funcției.

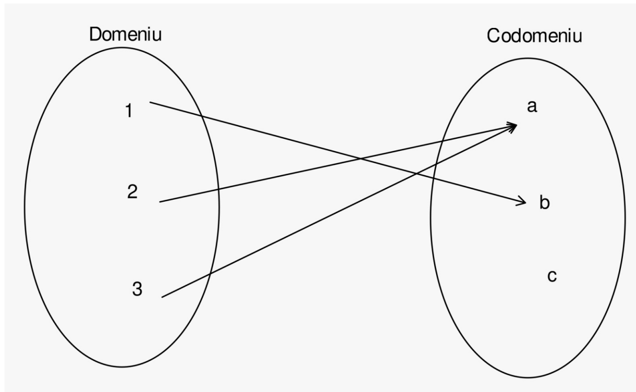
O funcție, dacă analizăm definiția ei, nu este obligată să acopere toate valorile codomeniului. Mulțimea tuturor valorilor $f(x)$ nu este, prin urmare, neapărat aceeași cu mulțimea valorilor din codomeniu, ci poate fi o mulțime mai restrânsă. De aici apare conceptul de ***imagine a funcției***.

Imaginea funcției

Imaginea funției $f : A \to B$ este submulțimea codomeniului alcătuită din toate elementele $y \in B$ care satisfac $y = f(x)$, pentru un $x \in A$.

$$Im(f) = \{y \in B|\exists x \in A \text{ a.î.} f(x) = y\}.$$

Dacă considerăm funția de mai jos, domeniul ei este $D = \{1, 2, 3\}$, codomeninul este $C = \{a, b, c\}$, iar $Im(f) = \{a, b\}$.



Funcția identică

Funcția identică, $f_{id} : D \to D$, este funția cu legea de asociere $f_{id}(x) = x, \forall x \in D$.

6 Bijectivitate

Injectivitate

Funcția f se numește injectivă dacă

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

sau, echivalent,

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Altfel spus, funcțiile injective asociază valori diferite pentru intrări diferite, sau, echivalent, funcțiile injective asociază aceeași valoare pentru două intrări, doar atunci când acestea sunt de fapt egale.

Observație

Ordinea ipotezelor și concluziilor este **foarte** importantă. A spune că o funcție este injectivă atunci când

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2,$$

$$x_1, x_2 \in D \text{ și } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

este **greșit**. Afirmațiile de mai sus sunt de fapt evidente și se aplică pentru orice funcție (dacă $a = b$, normal că $f(a) = f(b)$).

Funcție inversabilă la stânga

O funție $f : D \to C$ are o inversă la stânga dacă există o funcție $g : D \to C$, astfel încât $g \circ f : D \to D$ să fie funcția identică. Se spune că funcția este inversabilă la stânga.

Injecție dacă compunerea este injecție

Fie f și g două funcții, astfel încât $g \circ f$ este o funcție injectivă. Atunci, f este injectivă.

Demonstrație:
Trebuie să demonstrăm că $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Presupunem $a, b \in D, f(a) = f(b)$. Atunci:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow g \circ f(a) = g \circ f(b) \Rightarrow a = b, \text{ deoarece } g \circ f \text{ este injectivă.}$$

$\square$

Observație

Funcția g nu trebuie să fie neapărat injectivă pentru ca $f \circ g$ să fie injectivă. De exemplu, funcția $g(x) = x^2$ nu este injectivă, însă pentru $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ (injectivă), $g \circ f = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 = x^3$ este funcție injectivă.

Injectivitatea echivalentă cu inversabilitatea la stânga

O funcție este injectivă, dacă și numai dacă este inversabilă la stânga.

Demonstrație:
"$\Leftarrow$:" Funcția identică este, în mod evident, injectivă. Atunci, $g \circ f$ este injectivă și prin urmare f este injectivă.
"$\Rightarrow$:" Fie funcția $x_0 \in C$ fixat și $g : C \to D$,

$$g(y) = \begin{cases} x, \text{ dacă există } x \text{ astfel încât } f(x) = y \\ x_0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

Injectivitatea lui f asigură că alegerea pentru x (pe prima ramură) este unică. Se observă că $f \circ g(x) = x$.

$\square$

Surjectivitate

Funcția $f : D \to C$ este surjectivă dacă $Im(f) = C$, sau, altfel spus,

$$\forall y \in C, \exists x \in D \text{ a.î } f(y) = x.$$

Deci o funcție surjectivă acoperă toate valorile codomeniului.

Funcție inversabilă la dreapta

O funție $f : D \to C$ are o inversă la dreapta dacă există o funcție $h : C \to D$, astfel încât $f \circ h : C \to C$ să fie funcția identică. Se spune că funcția este inversabilă la dreapta.

Surjecție dacă compunerea este surjecție

Fie f și g două funcții, astfel încât $f \circ g$ este o funcție surjectivă. Atunci, f este surjectivă.

Demonstrație:
Presupunem $f \circ g$ surjectivă. Trebuie să demonstrăm că

$$\forall z \in C_f, \exists y \in D_f \text{ a.î } f(y) = z.$$

Fixăm $z \in C_f$. Atunci, știm că există un $x \in C_g = D_f$ astfel încât

$$f \circ g(x) = z,$$

datorită surjectivității lui $f \circ g$. De asemenea, există $y \in C_g = D_f$ astfel încât $g(x) = y$. Prin urmare:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(g(x)) \\ &= f \circ g(x) \\ &= z. \end{aligned} \tag{15}$$

$\square$

Surjectivitatea echivalentă cu inversabilitatea la dreapta

O funție este surjectivă, dacă și numai dacă aceasta este inversabilă la dreapta.

Demonstrație:

$\square$

12 Derivate

Conceptul de derivată pleacă de la ideea familiară de ***pantă a unei drepte***.

Panta

Panta unei drepte d, dreaptă definită printr-o funție liniară f, pe un interval $\mathcal{I}$, este definită ca raportul

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

unde x_1 și $x_2 \in \mathcal{I}$.

Observație

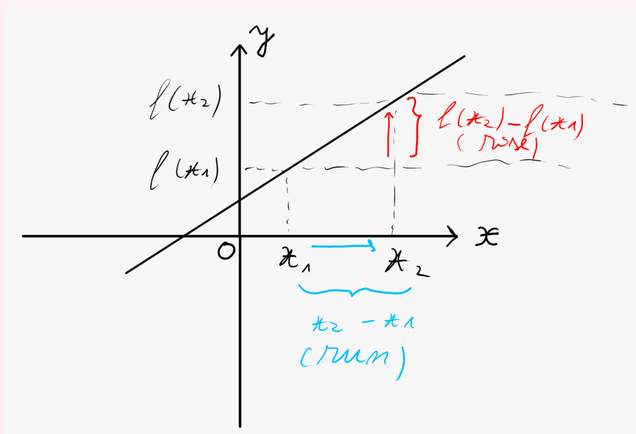
O funcție liniară este o funcție a cărei lege este de forma $f(x) = ax + b$, unde $x \in \mathbb{R}$. Definiția de mai sus are sens, deoarece

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_2)}{x_2 - x_1} = a,$$

deci panta reprezintă un număr constant, care nu depinde de alegerea lui x_1 și x_2.

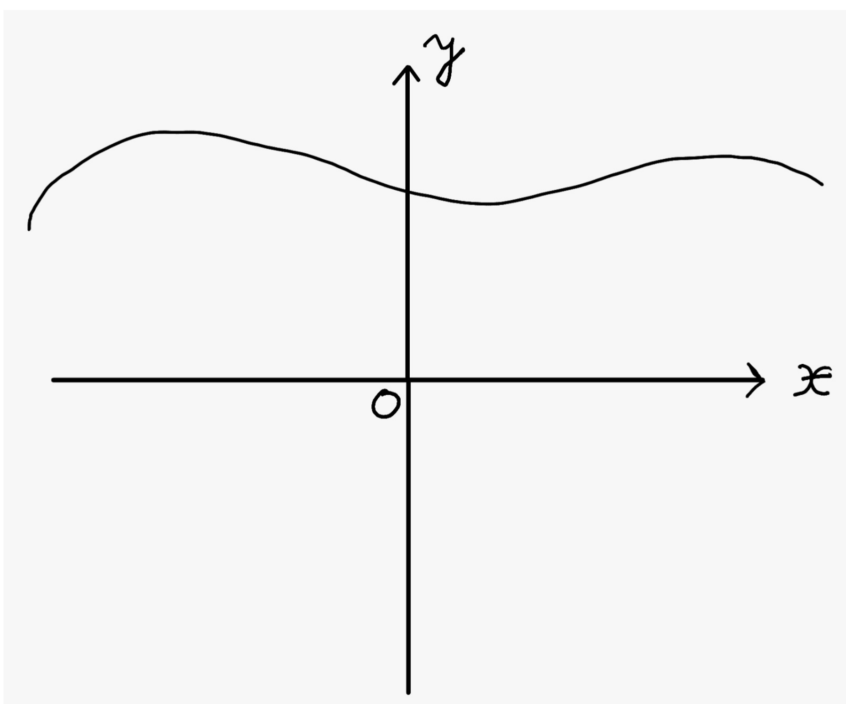
Observație

Panta e practic raportul dintre cât urcăm pe axa Oy și cât înaintăm pe axa Ox, de aceea o cale de a ne aminti formula este expresia *rise over run*.

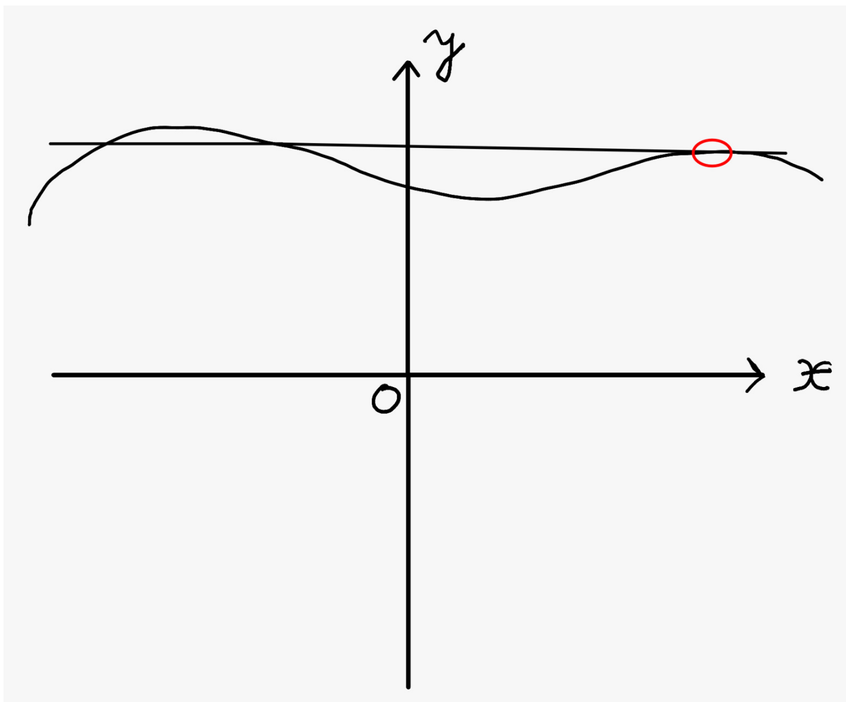


De exemplu, dreptele de mai jos, definite prin funcțiile $f(x) = 3x + 5$, respectiv, $g(x) = -8x + 6$, au pantele 3, respectiv -8.

Este ușor de văzut că un *snapshot* oricât de mic din graficul unei astfel de funcții este suficient pentru a prezice comportamentul funcției de-a lungul întregului interval pe care este definită, deoarce funcția arată identic, ca formă și înclinație, pretutindeni.
Derivatele se nasc din dorința de a afla ”panta” unei curbe.



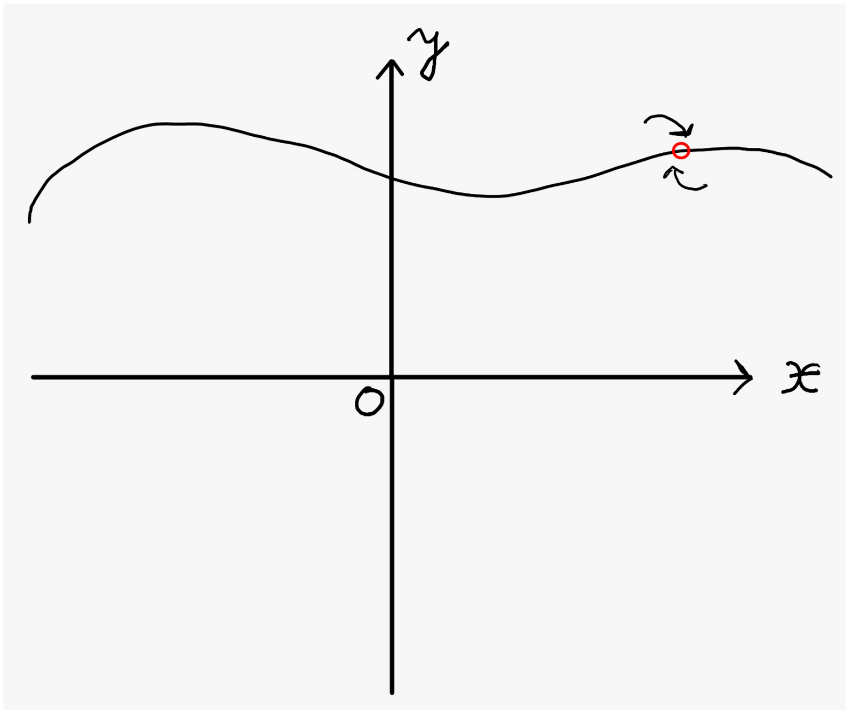
Curbele, însă, nu sunt la fel de previzibile ca și dreptele, iar raportul $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ variază, deoarece depinde de alegerea noastră pentru x_1 și x_2. De aceea, panta unei curbe nu este constantă, ci depinde de punctul în care vrem să o calculăm, astfel că panta curbei într-un punct va fi definită ca panta dreptei tangentă la curbă în acel punct.



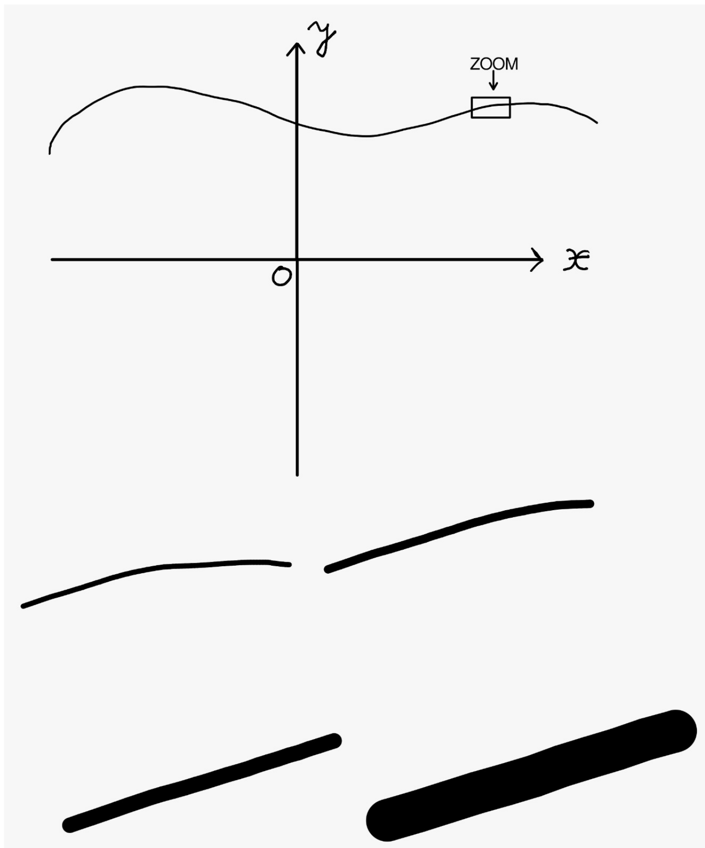
Observație

Dreapta trebuie să fie tangentă la grafic numai în imediata apropiere a punctul în care studiem panta; panta unei curbe într-un punct nu poate prezice comportamentul funcției mai departe de vecinătatea acelui punct.

Cu toate acestea, cum calculăm acea pantă? Să spunem că vrem să calculăm panta în punctul de mai jos.



Dacă dăm *zoom in* în vecinătatea (imediata apropiere) a punctului, și facem asta în mod repetat, constatăm că, la nivel ”microscopic”, orice curbă, în orice punct, se aseamănă cu o dreaptă. Acea dreaptă este chiar tangenta în acel punct.



Putem concluziona astfel că panta unei curbe într-un punct dat se poate calcula ca și panta dreptei ***limită***, tangentă la grafic. Însă asta este de fapt definiția unei derivate.

Derivata

Fie o funcție f, continuă într-un punct oarecare din x_0. Derivata de ordinul întâi al funcției f (notată, de obicei, f') în punctul x_0 este definită prin următoarea formulă:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observație

A doua variantă pentru formula de mai sus se trage din faptul că am notat $h = x - x_0$. Când $x \to x_0$, $x - x_0 \to 0$ și $f(x) = f(x_0 + x - x_0)$.

Observație

Condiția ca funcția să fie continuă este foarte importantă. Nimic din paragrafele de mai sus nu s-ar aplica pentru o funcție discontinuă, adică cu întreruperi sau salturi imprevizibile, în punctul în care dorim să calculăm derivata.

De asemenea, conform discuției de mai sus, derivata poate fi privită și ca ***cea mai bună aproximare liniară a funcției într-un punct***, adică cea mai bună metodă de a reduce ceva misterios și imprevizibil (o funție oarecare) la ceva deja cunoscut și intuitiv (o dreaptă).
Este ușor să intuim de aici faptul că derivatele reprezintă un instrument important în descrierea funcțiilor, din mai multe puncte de vedere. Ele reprezintă de fapt ***tendința de creștere*** a unei funcții într-un punct. De exemplu, comparând funcția x^2 cu derivata ei, $2x$, constatăm că funcția nu scade și nici nu crește în punctul $x = 0$ ($f'(0) = 0$, punct de extrem), pe intervalul $(-\infty, 0)$ este descrescătoare (derivata este negativă pe $(-\infty, 0)$), descrește tot mai abrupt în apropierea lui $-\infty$ (derivata este tot mai mare în modul în apropierea lui $-\infty$) și tot mai lin în apropierea lui 0 (derivata este tot mai mică în modul în apropierea lui 0) și similiar pe intervalul $(0, \infty)$.