4. Elementare Umformungen von Matrizen und Konstruktion eins Untervektorraums $U = span(a_1, ..., a_m) \subseteq K^n$

Ist $(a_1, ..., a_m)$ eine Familie von Vektoren aus K^n, so ist $U = span(a_1, ..., a_m)$ der erzeugte Untervektorraum. Aus dem Basisauswahlsatz folgt: Basis = "unverkürzbares" Erzeugendensystem (kann sehr aufwendig sein)

Betrachte $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, ..., a_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^n$.

Bilde die folgende Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{m1} \\ \vdots & & vdots \\ a_{1n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$

Definiton 4.1

Der von den Zeilenvektoren $A_{i\bullet} \in K^n$ von A aufgespannte Untervektorraum von K^n heißt der **Zeilenraum** von A und wird mit ZR(A) bezeichnet: $ZR(A) = span(A_{1\bullet}, ..., A_{m\bullet}) \subseteq K^n$. Entsprechend heißt der von den Spaltenvektoren $A_{\bullet j} \in K^m$ aufgespannte Untervektorraum von K^m der **Spaltenraum** von A und wird mit SR(A) bezeichnet: $SR(A) = span(A_{\bullet 1}, ..., A_{\bullet n}) \subseteq K^m$. Die Dimension von ZR(A) heißt der **Zeilenrang** von A und die Dimension von SR(A) heißt der **Spaltenrang** von A.

Bemerkung

Beachte: A ~ (m,n) $\Rightarrow ZR(A) \subseteq K^n$ und $SR(A) \subseteq K^m$ und in der Regel $n \neq m$.

Später: Zeilenrang = Spaltenrang

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$ZR(A) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Zeilenrang = 2

$SR(A) = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Spaltenrang = 2

Definition 4.2

Eine Matrix $B = (b_{ij}) \sim$ (m,n) heißt eine **Matrix in Zeilenstufenform**, wenn sie folgendes Aussehen hat:

Leo ergänzt hier noch ein Diagramm

Dabei müssen die Einträge an den mit * markierten Stellen ungleich 0 sein und unterhalb der "Stufenlinie" müssen alle Einträge 0 sein. Genauer:

(1) Es gibt eine Zahl r, $0 \leq r \leq m$, sodass in den Zeilen 1 bis r jeweils mindestens ein von 0 verschiedener Eintrag steht und in den Zeilen r+1 bis n alle Einträge 0 sind.

(2) Für jedes i mit $1 \leq i \leq r$ bezeichne j_i die niedrigste Nummer der Spalten, in denen ein Eintrag ungleich 0 steht, also $j_i = min\{j | b_{ij} \neq 0\}$. Natürlich ist $1 \leq j_i \leq n$. Dann lautet die Stufenbedingung: $j_1 < ... < j_r$.

Bemerkung

Für r = 0 ist natürlich B = 0. Die oben durch * markierten Einträge sind genau die Elemente $b_{1j_1}, ..., b_{rj_r}$. Sie heißen **Pivots** (Angelpunkte) bzw. Pivotelemente von B.

Beispiel

Leo ergänzt hier ein Diagramm

$m = 4, n = 7, r = 3, j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 6, b_{1j_1} = 6, b_{2j_2}, b_{3j_3} = 5$

Folgerung

Sei $B = (b_{ij})$ eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann bilden die ersten r Zeilenvektoren $B_{1\bullet}, ..., B_{r\bullet}$ von B eine Basis des Zeilenraums ZR(B) und es gilt dim(ZR(B)) = r.

Beweis:

$\alpha_1 \cdot B_{1\bullet} + ... + \alpha_r \cdot B_{r\bullet} = 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot b_{1j_1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$, da $b_{1j_1} \neq 0$. Also folgt: $\alpha_2 \cdot B_{2\bullet} + ... + \alpha_r \cdot B_{r\bullet} = 0 \Rightarrow \alpha_2 \cdot b_{2j_2} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$, da $b_{2j_2} \neq 0$. Usw. bis letztendlich folgt $\alpha_r = 0$.

Definition 4.3

Folgende Operationen bezeichnet man als **elementare Zeilenumformungen** einer Matrix:

(I) Multiplikation einer i-ten Zeile von A mit einem Skalar $\alpha \in K, \alpha \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{i1} & ... & \alpha \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = A_I$$

(II) Addition der j-ten Zeile von A zur i-ten Zeile von A, wobei $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & ... & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = A_{II}$$

(III) Addition der α-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile von A, wobei $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \alpha \cdot a_{j1} & ... & a_{in} + \alpha \cdot a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = A_{III}$$

(IV) Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile, wobei $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = A_{IV}$$

Bemerkung

Die elementaren Umformungen (III) und (IV) kann man durch Kombination der Umformungen (I) und (II) erhalten

Lemma 4.4

Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen, so ist:

$$ZR(B) = ZR(A)$$

Beweis

Nach der Bemerkung reicht es die Umformungen (I) und (II) zu betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

1) Sei $B = A_I$:

$$\begin{aligned} & v \in ZR(A) = span(a_1, \cdots, a_m) \\ \implies & v = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_m a_m \\ & \quad = \alpha_1 a_1 + \cdots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für $v \in ZR(B) = span(a_1, \cdots, \alpha a_i, \cdots, a_m)$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i(\alpha a_i) + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + (\alpha_i \alpha) a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist $ZR(B) = ZR(A)$.

2) Sei $B = A_{II}$:

$$v \in ZR(A) = span(a_1, \cdots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i(a_i + a_j) + \cdots + (\alpha_j - \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

und

$$v \in ZR(B) \in span(a_1, \cdots, a_i + a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i(a_i + a_j) + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + (\alpha_j + \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist $ZR(A) = ZR(B)$.

Satz 4.5

Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform überführt werden.

Beispiel

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U = span(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Also ist (b_1, b_2, b_3) mit:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U = span(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Korollar 4.6

Für Vektoren $v_1, \cdots, v_n \in K^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(v_1, \cdots, v_n)$ ist Basis von K^n.
2) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$ lässt sich durch elemntare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix überführen und alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind $\neq 0$.