1 1. Vektorräume und lineare Abbildungen

1.1 Definition 1.1

Sei K ein Körper (z.B. $K = \mathbb{R}$), V eine nichtleere Menge. Auf V seien zwei Verknüpfungen definiert, und zwar:

- eine innere Verknüpfung $+ : V \times V \to V, (u, v) \mapsto u + v$, die als Addition bezeichnet wird
- eine äußere Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V, (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$, die als Multiplikation mit Skalaren bezeichnet wird.

V mit diesen Verknüpfungen heißt **K-Vektorraum** (KVR), wenn folgende Axiome gelten:

(V1) V ist bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe, d.h. es gilt:

(G1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ für alle $u, v, w \in V$
(G2) Es existiert ein neutrales Element $0 \in V$ mit $0 + v = v = v + 0$ für alle $v \in V$
(G3) Zu jedem $v \in V$ existiert ein "negatives Element" $-v \in V$, sodass $v + (-v) = 0$
(G4) $u + v = v + u$ für alle $u, v \in V$

(V2) Die Multiplikation mit Skalaren ist verträglich mit der Addition in V und mit den Operationen in K, d.h. für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta, 1 \in K$ gilt:

(a) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
(b) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
(c) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$
(d) $1 \cdot v = v$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K heißen **Skalare**, $0 \in V$ heißt **Nullvektor**. Vereinbarung: statt $u + (-v)$ schreibt man $u - v$.

1.2 Satz 1.2

In einem KVR V gelten folgende Rechenregeln:

(1) $0 \cdot u = 0$ für alle $u \in V$
(2) $\alpha \cdot 0 = 0$ für alle $\alpha \in K$
(3) $\alpha \cdot u = 0 \implies \alpha = 0$ oder $u = 0$
(4) $(-1) \cdot u = -u$ für alle $u \in V$

1.2.1 Beweis

(1) $0 \cdot u \underset{\text{Körper}}{\overset{\text{G2}}{=}} (0+0) \overset{V2(a)}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u$
Addition des Negativen liefert:
$0 = (-0 \cdot u + 0 \cdot u) + 0 \cdot u = 0 + 0 \cdot u = 0 \cdot u$

(2) siehe Übungsaufgaben

(3) siehe Übungsaufgaben

(4) $u+(-1)\cdot u \overset{V2(d)}{=} 1\cdot u+(-1)\cdot u \overset{V2(a)}{=} (1-1)\cdot u = 0\cdot u \overset{(1)}{=} 0 \implies (-1)\cdot u = -u$

1.2.2 Beispiele

(1) Das Standardbeispiel eines KVRs ist der sogenannte Standardraum $K^n = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in K \text{ für } i = 1, ..., n\}$ der geordneten n-Tupel von Skalaren $x_i \in K$. Die x_i heißen **Komponenten** des Vektors x.

1.2.3 Bemerkung

Geordnet bedeutet, dass die Reihenfolge der Komponenten wichtig ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$$

Addition im K^n : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Multiplikation mit Skalaren im $K^n : \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$

(2) Vektorraum der Matrizen

1.3 Definition 1.3

Sei K ein Körper (z.B. $K = \mathbb{R}$). Für $m, n \in \mathbb{N}$ seien m Zahlenreihen aus jeweils n Zahlen aus K gebildet und die m Zahlenreihen so untereinander geschrieben, dass die Zahlen in Form eines Rechtecks durch Klammern zu einem neuen Objekt zusammengefasst werden. Das Schema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt dann eine **Matrix vom Typ** (m,n). Die a_{ij} nennt man allgemein die **Einträge** der Matrix.

Schreibenweisen: $A \sim (m,n)$ $A = (a_{ij}) \sim (m,n)$ $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

Die Menge der Matrizen $A \sim (m,n)$ mit Einträgen aus K bezeichnet man mit $K^{(m,n)}$: $K^{(m,n)} = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} | a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

$K^{(m,n)}$ ist ein KVR, wenn man definiert:

Additions: $A = (a_{ij}) \sim (m,n), B = (b_{ij} \sim (m,n)$
$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \sim (m,n)$

Multiplikation mit Skalaren: $A = (a_{ij}) \sim (m,n), \alpha \in K$
$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}) \sim (m,n)$

(3) Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, K ein Körper. Dann ist $Abb(M,K) = \{f : M \to K | f \textit{ Abbildung}\}$ ein KVR, wenn man definiert:

Addtion: $f, g : M \to K$

$f + g : M \to K, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Multiplikation mit Skalaren: $f : M \to K, \alpha \in K$

$\alpha \cdot f : M \to K, (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

1.4 Definition 1.4

Sei V ein KVR. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt **Untervektorraum** (UVR) von V, wenn sie mit der von V induzierten Addition und Mulitplikation mit Skalaren einen KVR bildet.

1.5 Satz 1.5

Sei V ein KVR und $U \subseteq V.U$ ist genau dann ein UVR von V, wenn gilt:

(UV1) $U \neq \emptyset$
(UV2) $u, v \in U \implies u + v \in U$ (d.h. U ist abgeschlossen gegenüber der in V induzierten Addition)
(UV3) $u \in U, \alpha \in K \implies \alpha \cdot u \in U$ (d.h. U ist abgeschlossen gegenüber der in V induzierten Mulitplikation mit Skalaren)

1.5.1 Beweis

" $\Longleftarrow$ ": Es gelten die (UVi). Zz: U ist UVR. Wegen (UV2) ist die Einschränkung der Addition $+: V \times V \to V$ auf $U \times U$ eine inere Verknüpfung $+: U \times U \to U$ auf U$. Zz: U ist bzgl. $+$ eine abelsche Gruppe:

(G1) Assoziativgesetz gilt, weil es in V gilt.

(G2) Nach (UV1) ist $U \neq \emptyset$, d.h. es existiert $u \in U \overset{UV3}{\Longrightarrow} 0 \cdot u = 0 \in U$

(G3) $u \in U$ beliebig $\implies -u \overset{1.2}{=} (-1) \cdot u \overset{UV3}{\in} U$

(G4) Kommutativgesetz gilt, weil es in V gilt

Wegen (UV3) ist die Einschränkung der Multiplikation mit Skalaren $\cdot : K \times V \to V$ auf $K \times V$ eine äußere Verknüpfung $\cdot : K \times U \to U$ auf U. Die Axiome (V2) gelten in U, weil sie in V gelten.

" $\implies$ ": Sei U ein UVR von V. Dann gilt (UV1), weil z.B. $0 \in U$ gelten muss (nach G2).

(UV2), weil $+: U \times U \to U$ eine innere Verknüpfung auf U ist.
(UV3), weil $\cdot : K \times U \to U$ eine äußere Verknüpfung auf U ist.

1.6 Defintion 1.6

Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung** (genauer K-lineare Abbildung), wenn sie mit der Vektorraumstruktur verträglich ist, d.h. wenn gilt:

(L1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ für alle $u, v \in V$
(L2) $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$ für alle $\alpha \in K, v \in V$

Kurz: (L) $f(\alpha \cdot u + \beta \cdot f(v)$ für alle $\alpha, \beta \in K$ und $u, v \in V$

1.6.1 Ergänzung

Seien V und W Vektorräume über K. Eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt auch **Homomorphismus**. Speziell heißt eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ ein

- **Isomorphismus**, wenn f bijektiv
- **Endomorphismus**, wenn $V = W$
- **Automorphismus**, wenn f bijektiv und $V = W$

1.7 Definition 1.7

Wei folgt ist eine Multiplikation von Matrizen $A \in K^{(m,n)}$ mit Vektoren aus K^n definiert.

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

1.7.1 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & +(-1) \cdot 2 & +2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & +0 \cdot 2 & +1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.8 Lemma 1.8

Jede Matrix $A \in K^{m,n}$ definiert eine lineare Abbildung $A : K^n \to K^m$ durch $x \mapsto A \cdot x$.

1.8.1 Beweis

$$A \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + \cdots + a_{1n} \cdot (\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + \cdots + a_{mn} \cdot (\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot (a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n) \\ \vdots \\ \alpha \cdot (a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot (a_{11} \cdot y_1 + \cdots + a_{1n} \cdot y_n) \\ \vdots \\ \beta \cdot (a_{m1} \cdot y_1 + \cdots + a_{mn} \cdot y_n) \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \cdot A \cdot x + \beta \cdot A \cdot y$$

1.9 Lemma 1.9

Seien V und W Vektorräume über K. Die menge $Hom(V, W) = \{f : V \to W | f$ ist K-linear$\}$ aller K-lineaeren Abbildungen von V nach W ist ein KVR.

1.10 Definition 1.10

Sei $f : V \to W$ eine Abbildung.

(a) f heißt **surjektiv** $\iff \forall w \in W \exists v \in V$ mit $f(u) = w$
(b) f heißt **injektiv** $\iff \forall v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$ gilt $v_1 = v_2$
(c) f heißt **bijektiv** $\iff f$ ist surjektiv und injektiv

1.10.1 Graphische Darstellung

- f surjektiv: HIER FOLGT EIN DIAGRAMM
- f injektiv: HIER FOLGT EIN DIAGRAMM
- f bijektiv: HIER FOLGT EIN DIAGRAMM

1.11 Satz 1.11

Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

(1) $f(0) = 0$ und $f(u - v) = f(u) - f(v)\ \forall\ u, v \in V$
(2) $f(\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \cdot f(v_1) + ... + \alpha_n \cdot f(v_n)\ \forall\ \alpha_i \in K, v_i \in V$
(3) $V' \subseteq V$ UVR und $W' \subseteq W$ UVR $\implies$ $f(V') \subseteq W$ und $f^{-1}(W') \subseteq V$ sind Untervektorräume
(4) $f : V \to W$ Isomorphismus $\implies$ $f^{-1} : W \to V$ ist linear

1.11.1 Beweis

(1) $f(0) \overset{1.2}{=} f(0 \cdot 0) \overset{L}{=} 0 \cdot f(0) \overset{1.2}{=} 0$
$f(u - v) \overset{1.2}{=} f(u + (-v)) \overset{L}{=} f(u) + (-1) \cdot f(v) \overset{1.2}{=} f(u) - f(v)$

(2) klar, da wiederholte Anwendung von L

(3) $f(V') \subseteq W$ UVR ÜBUNGSAUFGABE
$f^{-1}(W) = \{v \in V : f(v) \in W'\} \subseteq V$

(UV1) $0 \in W'$ und $f(0) = 0 \implies 0 \in f^{-1}(W') \implies f^{-1}(W') \neq \emptyset$
(UV2) $u, v \in f^{-1}(W') \implies f(u), f(v) \in W' \implies f(u + v) = f(u) + f(v) \in W' \implies u + v \in f^{-1}(W')$
(UV3) $u \in f^{-1}(W'), \alpha \in K \implies f(u) \in W \implies f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u) \in W' \implies \alpha \cdot u \in f^{-1}W'$
(UV4) $f : V \to W$ ist Isomorphismus, also linear und bijektiv. Da f bijektiv, existiert die Abbildung $f^{-1} : W \to V$.

Zz: $f^{-1} : W \to V$ ist linear
$\alpha, \beta \in K$ und $w, w' \in W \implies u = f^{-1}(w), u' = f^{-1}(w') \in V \implies \alpha \cdot u + \beta \cdot w') \underset{bijektiv}{=} \alpha \cdot u + \beta \cdot u' = \alpha \cdot f^{-1}(w) + \beta \cdot f^{-1}(w')$

1.12 Folgerung

Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so sind $f(V) \subseteq W$ und $f^{-1}(0) \subseteq V$ Untervektorräume.

1.13 Definition 1.12

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt der Untervektorraum

- $Imf := f(V)$ von W das **Bild von** f
- $Kerf := f^{-1}(0)$ von V der **Kern von** f

1.13.1 Bemerkung

Ist $A \in K^{m,n}$, so kann man A nach 1.8 als Abbildung $A : K^n \to K^m$ auffassen und schreibt dann $Im(A)$ und $Ker(A)$.

Statistische Notation:

$Im(A) = R(A)$ ("range")
$Ker(A) = N(A)$ ("nullspace")

1.13.2 Bemerkung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

(1) $f : V \to W$ surjektiv $\iff Imf = W$
(2) $f : V \to W$ injektiv $\iff Kerf = \{0\}$

1.14 Satz 1.13

Seien U, V und W Vektorräume über K. Seien $g : U \to V$ und $f : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist die Kompostion $f \circ g : U \to W$ eine lineare Abbildung.

1.15 Beweis

$(f \circ g)(\alpha \cdot u + \beta \cdot u') = f(g(\alpha \cdot u + \beta \cdot u')) \stackrel{L}{=} f(\alpha \cdot g(u) + \beta \cdot g(u')) \stackrel{L}{=} \alpha \cdot f(g(u)) + \beta \cdot f(g(u')) = \alpha \cdot (f \circ g)(u) + \beta \cdot (f \circ g)(u')$