1 Kapitel 3: Basis und Dimension eines Vektorraums

1.1 Definition 3.1

Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ \dots \ , \ v_r \in V$. Ein Vektor $v \in V$ heißt eine **Linearkombination** von $v_1, \ \dots \ , \ v_r$, wenn es Skalare $\alpha_1, \ \dots \ , \ \alpha_r \in K$ gibt, sodass $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \ \dots + \alpha_r \cdot v_r = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i$.

1.2 Bezeichnungen

Sei V ein K-Vektorraum und I eine nichtleere Menge, die wir als Indexmenge benutzen. Zu jedem $i \in I$ sei ein Vektor $v_i \in V$ gewählt. Die Menge dieser $v_i \in V, \ i \in I$, heißt eine **Familie** von Vektoren aus V und wird mit $(v_i)_{i \in I}$ bezeichnet. Für eine solche Familie $(v_i)_{i \in I}$ bilden wir die Menge aller möglichen Linearkombinationen von endlich vielen Vektoren der Familie und bezeichnen sie mit

$$span((v_i)_{i \in I}) = \{v \in V : \exists \, r \in \mathbb{N}, i_1, \dots , i_r \in I, \alpha_1, \ \dots \ , \ \alpha_r \in K : v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i\}$$

1.3 Satz und Definition 3.2

Sei V ein K-Vektorraum, I eine nichtleere Menge und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Dann gilt:
(1) $span((v_i)_{i \in I})$ ist ein Untervektorraum von V. Er heißt der von der Familie $(v_i)_{i \in I}$ aufgespannte Vektorraum.
(2) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V und $v_i \in U$ für alle $i \in I$, so ist $span((v_i)_{i \in I}) \subseteq U$ ein Untervektorraum von U.

Beweis:

(1) Nachweis von (UV1) - (UV3) aus 1.5:
(UV1) $v_j \in span((v_i)_{i \in I})$ für jedes $j \in I \ \Rightarrow span((v_i)_{i \in I}) \neq \emptyset$.
(UV2) $u, v \ \in \ span((v_i)_{i \in I}) \ \Rightarrow \ u \ = \ \alpha_1 \cdot v_{i_1} + \dots + \alpha_r \cdot v_{i_r}$ und $v = \beta_1 \cdot v_{j_1} + \cdot + \beta_s \cdot v_{j_s}$
(UV3) $\alpha \in K, \ u \in span((v_i)_{i \in I}) \Rightarrow u = \alpha_1 \cdot v_{i_1} + \dots + \alpha_r \cdot v_{i_r} \Rightarrow \alpha \cdot u = (\alpha \cdot \alpha_1) \cdot v_{i_1} + \dots + (\alpha \cdot \alpha_r) \cdot v_{i_r} \in span((v_i)_{i \in I})$

(2) Sind alle $v_i \in U$ für $i \in I$, so gehören alle Linearkombinationen von endlich vielen Vektoren aus $(v_i)_{i \in I}$ zu U.
Denn: U Vektorraum $\Rightarrow span((v_i)_{i \in I}) \subseteq U$

1.4 Folgerung

$span((v_i)_{i\in I})$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der alle $v_i, i \in I$, enthält.

1.5 Beispiele

(1) $V = \mathbb{R}^3,\ v \in V$ mit $v \neq 0$
$span(v) = \{\alpha \cdot v | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist die Gerade durch den Nullpunkt, die den Vektor v enthält

(2) $V = \mathbb{R}^3,\ u, v \in V$ mit $u \neq 0,\ v \neq 0$ und $u \notin span(v)$
$span(u, v) = \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ist die Ebene durch den Nullpunkt, die u und v entält.

(3) In K^n betrachten wir die Familie $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ mit $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht. Dann ist $span((e_i)_{i=1,\dots,n}) = K^n$
Denn: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \Rightarrow x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n$

1.6 Definition 3.3

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V heißt ein **Erzeugendensystem** von U, wenn $U = span((v_i)_{i\in I})$. U heißt **endlich erzeugt,** wenn es für U ein endliches Erzeugendensystem $(vi)_{i\in I}) = (v_1, \dots, v_n)$ gibt.

1.7 Bemerkung

Ein Vektor u heißt **eindeutig darstellbar** als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_r$, wenn $u \in span(v_1, \dots, v_r)$ ist und gilt:
$u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i$ und $u = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \cdot v_i \ \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall\ i = 1, \dots, r$

1.8 Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = span\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Für $t \in \mathbb{R}$ beliebig gilt dann $-t \cdot v_1 - 2 \cdot t \cdot v_2 + t \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -t - 2 \cdot t + 3 \cdot t \\ -t - 0 + t \\ t - 2 \cdot t + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das bedeutet: Jeder Vektor $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \in U = span(v_1, v_2, v_3)$ lässt sich auf unendlich viele Arten als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellen, nämlich: $u = (\alpha_1 - t) \cdot v_1 + (\alpha_2 - 2 \cdot t) \cdot v_2 + (\alpha_3 + t) \cdot v_3$ mit $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

Grund: Erzeugendensystem ist zu groß
Behauptung: $span(v_1, v_2) = span(v_1, v_2, v_3)$
Beweis:
$v_1, v_2 \in span(v_1, v_2, v_3) \overset{3.1}{\Longrightarrow} span(v_1, v_2) \subseteq U$
$v_3 = v_1 + 2 \cdot v_2 \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \in span(v_1, v_2)$
$\overset{3.1}{\Longrightarrow} U = span(v_1, v_2, v_3) \subseteq span(v_1, v_2)$ ✓
Insgesamt folgt: $U = span(v_1, v_2)$

Jetzt gilt: Jeder Vektor $u \in U$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von (v_1, v_2) darstellen.

Sei $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 und u = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2$. Dann gilt:
$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 \\ -\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$

1.8.1 Vorüberlegung

Sei $U = span(v_1, \dots, v_n)$ und seien für einen Vektor $u \in U$ zwei Darstellungen als Linearkombination gegeben: $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ und $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot v_i$.

Dann ist $0 = u - u = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot v_i$. Dies ist eine Darstellung des Nullvektors 0 als Linearkombination der v_i.

Andererseits gilt immer $0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n$. Hat der Nullvektor nur diese Darstellung, so muss dann gelten:
$(\alpha_i - \beta_i) = 0 \ \forall \ i = 1, ..., n \iff \alpha_i = \beta_i \ \forall \ i = 1, ..., n.$
Ergebnis: Ist der Nullvektor eindeutig als Linearkombination von $v_1, ..., v_n$ darstellbar, so auch jeder beliebige Vektor $u \in U$.

1.9 Definition 3.4

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, ..., v_n)$ eine Familie von Vektoren aus V. Die Familie $(v_1, ..., v_n)$ heißt **linear unabhängig,** wenn gilt:
$\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \ \alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0.$

Allgemein heißt eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V **linear unabhängig,** wenn jede endliche Teilfamilie von $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist.

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ heißt **linear abhängig,** wenn es eine endliche Teilfamilie $(v_{i_1}, ..., v_{i_n})$ gibt, sodass:
Es gibt Skalare $\alpha_1, ...\alpha_n \in K$, die nicht alle 0 sind, sodass $\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$.

1.9.1 Vereinbarung

Statt "die Familie $(v_1, ..., v_n)$ ist linear (un-) abhängig" sagen wir kurz "die Vektoren $v_1, ..., v_n$ sind linear (un-) abhängig."

1.10 Lemma 3.5

Für eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren eines K-Vektorraums V sind äquivalent:
(1) $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig
(2) Jeder Vektor $u \in span((v_i)_{i \in I})$ ist eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $(v_i)_{i \in I}$ darstellbar.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Ist $u = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i \cdot v_i$ und $u = \sum\limits_{i \in I} \beta_i \cdot v_i$, so folgt $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i \cdot v_i = \sum\limits_{i \in I} \beta_i \cdot v_i$. Folglich gilt: $\sum\limits_{i \in I} (\alpha_i - \beta_i) \cdot v_i = 0$. Wegen (1) gilt $\alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall \ i \in I$ und damit $\alpha_i = \beta_i \ \forall \ i \in I$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wegen (2) ist insbesondere der Nullvektor eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $(v_i)_{i \in I}$ darstellbar, d.h. ist $\alpha_i \cdot v_{i_1} + \alpha_n \cdot v_{i_n} = 0$ für $v_{i_1}, ..., v_{i_n} \in (v_i)_{i \in I}$, so gilt $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0$, d.h. $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

1.11 Beispiel

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:
(1) Für $v \in V$ gilt: $v \neq 0 \iff$ v linear unabhängig
(2) Eine Familie von Vektoren, zu der der Nullvektor gehört, ist linear abhängig.
(3) Ist $n \geq 2$, so ist eine Familie $(v_1, ..., v_n)$ von Vektoren aus V genau dann linear abhängig, wenn sich einer der Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

1.12 Defintion 3.7

Eine Familie $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ in einem K-Vektorraum V heißt eine **Basis** von V, wenn gilt:
($\mathcal{B}$1) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V
($\mathcal{B}$2) $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig

Ist $\mathcal{B}$ eine Basis aus n Vektoren, so heißt n die **Länge der Basis.**

1.13 Beispiel

(1) $\mathcal{K} = (e_1, ..., e_n)$ ist eine Basis von K^n der Länge n. Sie heißt die kanonische Basis von K^n.

(2) Sei $K^{m \times n}$ der K-Vektorraum der Matrizen vom Typ (m,n) mit Einträgen aus K. Dann bilden die $m \cdot n$ Elementarmatrizen $E_{ij} \sim$ (m,n) eine Basis von $K^{m \times n}$ der Länge $m \cdot n$.
Für $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ heißt die Matrix $E_{ij} \sim$ (m,n), welche an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 und sonst überall 0 hat, eine **Elementarmatrix,**
z.B. $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$ (3,4).

1.14 Satz 3.8

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine endliche Familie von Vektoren aus V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) $\mathcal{B}$ ist eine Basis.
(2) $\mathcal{B}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V.
(3) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ gibt, sodass
$v = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n$ gilt.
(4) $\mathcal{B}$ ist unverlängerbar linear unabhängig.

Beweis: durch Ringschluss

(1) $\Rightarrow$ (2) : $\mathcal{B}$ Basis $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ linear unabhängig $\xRightarrow{3.6(3)}$ Kein Vektor $v_i \in \mathcal{B}$ lässt sich als Linearkombination der anderen Vektoren aus $\mathcal{B}$ darstellen $\Rightarrow$ Für i = 1,...,n ist $\mathcal{B} \setminus \{v_i\}$ kein Erzeugendensystem mehr. Da $\mathcal{B}$ als Basis ein Erzeugendensystem ist, ist $\mathcal{B}$ also ein unverkürzbares Erzeugendensystem.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $\mathcal{B}$ Erzeugendensystem $\Rightarrow$ Jeder Vektor $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$.
Angenommen, die Eindeutigkeitseigenschaft gilt nicht.
Betrachte $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ und $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \cdot v_i$ mit $\alpha_i \neq \beta_i$ für mindestens ein $i \in \{1, ..., n\}$. O.B.d.A. sei $\alpha_1 \neq \beta_1$. Subtraktion und Auflösung nach v_1 liefern: $v = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot v_i = 0$. Da $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$, folgt: $v_1 = -\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} \cdot v_2 - ... - \frac{\alpha_n - \beta_n}{\alpha_1 - \beta_1} \cdot v_n$
$\Rightarrow v_1 \in span(v_2, ..., v_n) \Rightarrow \mathcal{B}$ ist verkürzbar $\lightning$ zu (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) : Wegen der Eindeutigkeitseigenschaft ist $\mathcal{B}$ nach 3.5 linear unabhängig.
Sei $v \in V$ beliebig. Nach (3) gibt es $\alpha_1, ..., \alpha_n$, sodass
$v = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n. \Rightarrow$ $(-1) \cdot v + \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$ und nicht alle Koeffizienten sind 0 $\Rightarrow \mathcal{B} \cup \{v\} = (v, v_1, ..., v_n)$ ist linear abhängig.
Also ist $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ unverlängerbar linear unabhängig.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Nach (4) ist $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig und für jedes $v \in V$ ist $(v, v_1, ..., v_n)$ linear abhängig $\Rightarrow$ Es existieren $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit
$\alpha \cdot v + \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$, wobei nicht α und alle α_i gleich 0 sind. Wäre $\alpha = 0$, dann wären alle $\alpha_i = 0$, weil $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig sind. Also muss $\alpha \neq 0$ sein.
$\Rightarrow v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha} \cdot v_n \Rightarrow v \in span(v_1, ..., v_n) \Rightarrow \mathcal{B}$ Erzeugendensystem von V $\Rightarrow \mathcal{B}$ Basis.

1.15 Folgerung

Ist V nicht endlich erzeugt, so gibt es eine unendliche linear unabhängige Familie in V.

1.16 Satz 3.9: Basisauswahlsatz

Aus jedem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraums kann man eine Basis auswählen. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine endliche Basis.

Beweis:
Von dem endlichen Erzeugendensystem nehme man so lange nacheinander Vektoren weg, bis ein unverkürzbares Erzeugendensystem entsteht. Dieses ist nach 3.8 eine Basis. Sie ist endlich, weil das Erzeugendensystem endlich ist.

1.17 Satz 3.10

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

1.18 Lemma 3.11: Austauschlemma von Steinitz

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, ., , , v_n)$ eine Basis in V. Ist dann
$w = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_k \cdot v_k + ... + \alpha_n \cdot v_n$ und $\alpha_k \neq 0$, so ist
$\mathcal{B}' = (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ...v_n)$ wieder eine Basis von V.

Beweis:
O.B.d.A. sei $\alpha_1 \neq 0$ in $w = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n$. $Zz : \mathcal{B}'$ ist Erzeugendensystem.

(1) $Zz : \mathcal{B}' = (w, v_2, ..., v_n)$ ist Erzeugendensystem.
$v \in V \xRightarrow{\mathcal{B} Basis}$ Es existieren $\gamma_1, ..., \gamma_n$ mit $v = \gamma_1 \cdot v_1 + ... + \gamma_n \cdot v_n$. Wegen $\alpha_1 \neq 0$ gilt $v_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot w - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot v_n$ und damit
$v = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \cdot w + (\gamma_2 - \gamma_1 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}) \cdot v_2 + ... + (\gamma_n - \gamma_1 \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_1}) \cdot v_n$
(2) $Zz : \mathcal{B}'$ istlinear unabhängig.
$\beta \cdot w + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_n \cdot v_n = 0$ und $w = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n \Rightarrow \beta \cdot \alpha_1 \cdot v_1 + (\beta \cdot \alpha_2 + \beta_2) \cdot v_2 + ... + (\beta \cdot \alpha_n + \beta_n) \cdot v_n = 0$. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig, folgt: $\beta \cdot \alpha_1 = 0$ und $\beta \cdot \alpha_i + \beta_i = 0$ für i = 2,...,n. Da $\alpha_1 \neq 0$, folgt $\beta = 0$ und damit $\beta_i = 0$ für i 0 2,...,n. Folglich ist $(w, v_2, ..., v_n)$ linear unabhängig.

1.19 Satz 3.12: Austauschsatz

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, ...v_n)$ eine Basis von V und $(w_1, ..., w_r)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gilt:
(1) $r \leq n$
(2) Es gibt Indizes $i_1, ..., i_r \in \{1, .., n\}$, sodass man nach Austausch von v_{i_1} gegen w_1, v_{i_2} gegen w_2, ..., v_{i_r} gegen w_r, wieder eine Basis von V erhält.

1.20 Bemerkung

Umnummerieren der Vektoren $\mathcal{B}^* = (w_1, ..., w_r, v_{r+1}, ..., v_n)$

Beweis von Satz 3.12: durch vollständige Induktion nach r
(IA) r = 0: Es ist nichts zu zeigen.

$(IS):\ r-1 \mapsto r$: Sei $(w_1,...,w_r)$ linear unabhängig. Folglich ist $(w_1,...,w_{r-1})$ auch linear unabhängig. Nach IV ist $(w_1,...,w_{r-1},v_r,...,v_n)$ eine Basis von V und es gilt $r-1 \leq n$

• Wegen $r-1 \leq n$, muss gezeigt werden: $r-1 < n$. Wäre $r-1 = n$, so wäre $(w_1,...,w_{r-1})$ eine Basis von V. Nach 3.8 wäre $(w_1,...,w_{r-1})$ unverlängerbar linear unabhängig $\lightning$ zu $(w_1,...,w_{r-1},w_r)$ linear unabhängig. Also ist $r-1 < n$. Daraus folgt $r \leq n$.

• Da $(w_1,...,w_{r-1},v_r,...,v_n)$ Basis von V, gibt es $\alpha_1,...,\alpha_n \in K$, sodass
$w_r = \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_{r-1} \cdot w_{r-1} + \alpha_r \cdot v_r + ... + \alpha_n \cdot v_n$. Wäre $\alpha_r = 0,...,\alpha_n = 0$, so wäre w_r eine Linearkombination von $w_1,...,w_{r-1}$ $\lightning$ zu $(w_1,...,v_r)$ linear unabhängig. Also ist mindestens ein Element von $\{\alpha_r,...,\alpha_n\}$ ungleich 0. O.B.d.A. sei $\alpha_r \neq 0$.
Austauschlemma von Steinitz mit $(w_1,...,w_{r-1},v_r,...,v_n)$:
$\mathcal{B}^* = (w_1,...,w_{r-1},w_r,v_{r+1},...,v_n)$ ist Basis von V.

1.21 Korollar A

Sei V ein K-Vektorraum mit einer endlichen Basis. Dann gilt:
(1) Jede Basis von V ist endlich.
(2) Je zwei Basen von V haben dieselbe Länge.

1.22 Definition 3.13

Sei V ein K-Vektorraum.
(1) Hat V eine Basis der Länge n, so heißt diese allen Basen von V gemeinsame Länge n die **Dimension** von V. Man schreibt: $dim_K V = n$.
(2) Hat V keine Basis endlicher Länge, so definiert man: $dim_K V = \infty$.

1.23 Korollar B

Ist V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist auch U endlich erzeugt und es gitl: $dim_K U \leq dim_K V$. Weiter gilt: $dim_K U = dim_K V \Rightarrow U = V$.

1.24 Satz 3.14: Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum und $dim_K V = n$. Sei $(w_1,...,w_r)$ eine linear unabhängige Familie in V und $r < n$. Dann kann man Vektoren $w_{r+1},...,w_n \in V$ so finden, dass $(w_1,...,w_r,w_{r+1},...,w_n)$ eine Basis von V ist.

Beweis:
Erzeugendensystem $(v_1, .., v_m)$ mit $m \geq n \Rightarrow$ Basisauswahlsatz 3.9
$\Rightarrow$ Austauschsatz 3.12

1.25 Lemma 3.15

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann gilt:
(1) $U \cap W$ ist Untervektorraum von V
(2) $U + W = \{v \mid v = u + w \text{ mit } u \in U,\ w \in W\}$ ist Untervektorraum von V

1.26 Lemma 3.16

Sei V = U+W. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(1) $U \cap W = \{0\}$
(2) Jeder Vektor $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U, w \in W$.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2) : Sei $v = u + w$ und $v = u' + w'$. Dann gilt:
$0 = v - v = (u + w) - (u' + w') = (u - u') + (w - w') \Rightarrow \underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W}$
$\Rightarrow u - u' = 0 = w' - w$, da $U \cap W = \{0\} \Rightarrow u = u'$ und $w = w'$
(2) $\Rightarrow$ (1) : Angenommen, $U \cap W \neq \{0\}$. Dann existiert $x \in U \cap W$ mit $x \neq 0 \Rightarrow x = x + 0 \in U + W$ und $x = 0 + x \in U + W$ sind verschiedene Darstellungen von x $\lightning$ zu (2).

1.27 Definition 3.17

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann heißt V die **direkte Summe** von U und W (in Zeichen: $U \bigoplus W$), wenn jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig als Summe $v = u + w$ von Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ darstellen lässt. Entsprechend ist die direkte Summe $V = U_1 \bigoplus ... \bigoplus U_r$ von Untervektorräumen $U_1, ..., U_r$ definiert.

1.28 Folgerung A

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann gilt:
$V = U \bigoplus W \iff V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

1.29 Folgerung B: Dimensionsformel für direkte Summen

Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann gilt:
$V = U \bigoplus W \Rightarrow dim_K V = dim_K U + dim_K W$.

1.30 Korollar

Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum, so gibt es zu W einen (i.A. nicht eindeutig bestimmten) Untervektorraum W' von V, sodass $V = W \bigoplus W'$. W' heißt dann direkter Summand von V zu W.

Beweis:
Wir wählen eine Basis $(v_1, ..., v_m)$ von W und ergänze sie zu einer Basis $(v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n)$ von V. Dann sei $W' = span(v_{m+1}, ..., v_n)$. Da jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v_i + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ hat, ist $V = W \bigoplus W'$.

1.31 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^3,\ U = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),\ W = span\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow V = U \bigoplus W$$