1 5. Lineare Gleichungssysteme

Nach [Lemma 1.8] und [Lemma 4.4] definiert jede Matrix $A : K^n \to K^m$ durch $x \mapsto Ax$.

1.1 Defininition 5.1

Ist $A = (a_{ij}) \sim (m, n)$ eine Matrix und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, so heißt:

$$Ax = b \iff \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Ist $b \neq 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**, andernfalls **homogen**. $Ax = 0$ heißt, dass zu dem inhomogenen System gehörende homogene lineare Gleichungssystem.

Die Menge $\mathbb{L}(A, b) = \{x \in K^n | Ax = b\} \subset K^n$ heißt der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ($b = 0$ oder $b \neq 0$).

A heißt die **Koeffizientenmatrix**, die Einträge a_{ij} **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems. Die Matrix $(A|b)$ heißt die **erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems** $Ax = b$.

1.1.1 Bemerkung

Bezeichnet $f : K^n \to K^m$ mit $f(x) = Ax$ die durch $A \sim (m, n)$ definiertes lineare Abbildung, so gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) = f^{-1}(b) \text{ (Menge der Urbilder von b unter f)}$$
$$\mathbb{L}(A, 0) = Kerf$$

1.1.2 Beispiel

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \hat{=} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{erweiterte Matrix } (A|b)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

1.2 Satz 5.2

Gegeben sei das LGS $A \cdot x = b$, wobei $A \sim (m, n)$. Sei r der Spaltenrang von A, d.h. $r = dim(SR(A))$. Dann gilt:

1) $\mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$ ist $(n-r)$-dimensionaler UVR
2) $\mathbb{L} = \emptyset$ oder $\mathbb{L}(A, b)$ hat folgende Form:

$$\mathbb{L}(A, b) = v + \mathbb{L}(A, 0) \text{ , wobei } v \in \mathbb{L}(A, b) \text{ eine beliebige Lösung ist}$$

1.2.1 Beweis

(1) Sei $f : K^n \to K^m$ die durch A definierte lineare Abbildung mit $f(x) = A \cdot x$.
Die Spalten von A sind genau die Bilder $f(e_j)$ der Standardbasisvektoren: $f(e_j) = A \cdot e_j = A_{\cdot j}$.
Daher sind die Spaltenvektoren von A ein EZS von $Im(f)$, d.h. es gilt $Im(f) = SR(A)$. Daraus folgt $dim(Im(f)) = r$.
Mit der Dimensionsformel (siehe 6.2) folgt:

$$dim(K^n) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \iff n = dim(Ker(f)) + r$$

Daraus folgt: $dim(Ker(f)) = n - r$.
Da $Ker(f) = \mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$ ist UVR mit $dim(\mathbb{L}(A, 0)) = n - r$.

(2) Sei $w \in \mathbb{L}(A, 0)$ und $v \in \mathbb{L}(A, b)$, d.h. $A \cdot w = 0$ und $A \cdot v = b$.
$\Longrightarrow A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b \quad \Longrightarrow v + w \in \mathbb{L}(A, b)$
$\Longrightarrow v + \mathbb{L}(A, 0) \subseteq \mathbb{L}(A, b)$
Sei $v' \in \mathbb{L}(A, b)$ eine weitere Lösung, d.h. $A \cdot v' = b$.
$\Longrightarrow A \cdot (v - v') = A \cdot v - A \cdot v' = b - b = 0 \quad \Longrightarrow v - v' \in \mathbb{L}(A, 0)$
$\Longrightarrow v' \in v + \mathbb{L}(A, 0) \quad \Longrightarrow \mathbb{L}(A, b) \subseteq v + \mathbb{L}(A, 0)$

1.2.2 Bemerkung

- $\mathbb{L}(A, 0) \neq \emptyset$, da $0 \in \mathbb{L}(A, 0)$
- 0 heißt die triviale Lösung des homogenen Systems.
- Ein inhomogenes System hat nicht immer Lösungen.

1.3 Satz 5.3

Für ein inhomogenes LGS $A \cdot x = b$ mit $A \sim (m, n)$ gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset \iff \text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}((A|b))$$

1.3.1 Beweis

Definiere: $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Rg}(A)$, $\text{Spaltenrang}((A|b)) = \text{Rg}((A|b))$
Mit $\text{Rg}(A) = r$ gilt: $r \leq Rg((A|b)) \leq r + 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset &\iff \exists v \in K^n \text{ mit } A \cdot v = b \\
&\iff v_1 \cdot A_{\bullet 1} + \cdots + v_n \cdot A_{\bullet n} = b \\
&\iff b \text{ ist Linearkombination der Spalten von } A \\
&\iff b \text{ ist Linearkombination der } r \text{ linear unabhängigen Spalten von } A \\
&\iff Rg((A|b)) = r
\end{aligned}$$

1.4 Lemma 5.4

Sei $A \cdot x = b$ ein LGS und die Koeffizientenmatrix A in Zeilenstufenform, Pivots in den ersten r Spalten sitzen, $a_{11} \neq 0, \ldots, a_{rr} \neq 0, r \leq m$ und $r \leq n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & & & & b_1 \\
 & a_{22} & & & b_2 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & a_{rr} & b_r \\
\cline{4-5}
 & & & & b_{r+1} \\
 & 0 & & & \vdots \\
 & & & & b_m
\end{array}\right)$$

Dann gilt:

(1) Ist $b_i \neq 0$ für ein i mit $r + 1 \leq i \leq m$, so hat das LGS keine Lösung, da $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$ durch kein n-Tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ erfüllbar ist.

(2) Seien $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$. Dann hat das LGS Lösungen, die man wie folgt erhält:
Wir setzen $k = n - r$ und wählen für die Unbekannten $x_{r+1}, \ldots, x_n$ Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, d.h. setze $x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_k$. Die Parameter dürfen unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen. Die übrigen Variablen $x_1, \ldots, x_r$ kann man nun eindeutig in Abhängigkeit vo den Parametern berechnen. Das geschieht wie folgt:
r-te Gleichung: $a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} \cdot \lambda_1 + \ldots + a_{rn} \cdot \lambda_k = b_r$
$a_{rr} \neq 0 \implies x_r = \frac{1}{a_{rr}} \cdot (b_r - a_{rr_1} \cdot \lambda_1 - \ldots - a_{rn} \cdot \lambda_k)$
Man setzt x_r in die $(r-1)$-te Gleichung ein und berechnet man aus der ersten Gleichung x_1.

(3) Ist $r = m$, so kann man keinen Parameter einführen. Es gibt dann eine einzige Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$, d.h. das LGS ist dann eindeutig lösbar.

1.4.1 Beispiel

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1.4.2 hier

$r = 3, b_4 = 0 \Rightarrow \mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset$
Parameter für die Unbekannten x_1, x_4, x_5, x_7 wählen:
$x_1 = \lambda_1, x_4 = \lambda_2, x_5 = \lambda_3, x_7 = \lambda_4$

3. Gleichung: $3 \cdot x_6 + \lambda_4 = 2 \Rightarrow x_6 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4$

2. Gleichung: $x_3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 + 2 \cdot \lambda_3 + 3 \cdot \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} - 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_4$

1. Gleichung: $2 \cdot x_2 + 5 \cdot \lambda_4 + 6 \cdot \lambda_3 + 4 \cdot \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1,5 - 2 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 - 2,5 \cdot \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1,5 - 2 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 - 2,5 \cdot \lambda_4 \\ \frac{1}{3} - 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen Systems}} \underbrace{+ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine Lösung des homogenen Systems}}$$

1.5 Satz 5.5: Gaußsches Eliminationsverfahren

Sei $(A|b)$ die eweiterte Matrix eins LGS $A \cdot x = b$. Durch elementare Zeilenumformungen sei $(A|b)$ überführt worden in $(\tilde{A}|\tilde{b})$, wobei $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform ist. Dann haben $(A|b)$ und $(\tilde{A}|\tilde{b})$ dieselben Lösungsräume, d.h. $\mathbb{L}(A,b) = \mathbb{L}(\tilde{A},\tilde{b})$.

1.6 Lemma 5.6

Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) A ist invertierbar
(2) A^T ist invertierbar
(3) Spaltenrang(A) = n
(4) Zeilenrang(A) =n

Insbesondere gilt dann: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis:

$(1) \Rightarrow (2)$: Sei A invertierbar. Dann gilt:
• $A^T \cdot (A^{-1})^T \overset{2.6}{=} (A^{-1} \cdot A)^T = I_n^T = I_n$.
• $(A^{-1})^T \cdot A^T \overset{2.6}{=} (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n$.
Also ist A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Sei A^T invertierbar. Dann gilt wegen "$(1) \Rightarrow (2)$": $(A^T)^T = A$ ist invertierbar.

$(1) \Leftrightarrow (3)$:
A invertierbar $\Leftrightarrow f_A : K^n \to K^n$ Isomorphismus $\Leftrightarrow Ker(f_A) = \{0\}$ und $Im(f_A) = K^n \Leftrightarrow n = dim(Im(f_A)) = Spaltenrang(A)$

$(1) \Leftrightarrow (4)$:
A invertierbar $\overset{(1)\Leftrightarrow(2)}{\Longleftrightarrow}$ A^T invertierbar $\overset{(1)\Leftrightarrow(3)}{\Longleftrightarrow}$ $Spaltenrang(A^T) = n \Leftrightarrow Zeilenrang(A) = n$

1.7 Folgerung A

Sei A ~ (n,n) invertierbar. Dann hat jedes LGS $A \cdot x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$.

Beweis:

Sei x eine Lösung von $A \cdot x = b$. Dann gilt: $x = I_n \cdot x = A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$. Also hat $A \cdot x = b$ höchstens eine Lösung. $A^{-1} \cdot b$ ist eine Lösung, da $A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b$.

1.8 Folgerung B

Sei A ~ (n,n) invertierbar. Zu jedem Standardbasisvektor $e_i \in K^n$ sei $x^i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ die nach Folgerung A eindeutige Lösung $A \cdot x = e_i$. Dann gilt:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 & ... & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Beweis:

$A \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} x^1 & ... & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot x^1 & ... & A \cdot x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & ... & e_n \end{pmatrix} = I_n$
$\Rightarrow X = I_n \cdot X = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}$

1.9 Verfahren zur Berechnung der Inversen einer invertierbaren Matrix

Anwenden des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf die LGS $A \cdot x = e_i$ für i=1,...,n $\Rightarrow Lösungen x^i$
Folgerung B liefert: x^i Spaltenvektoren von A^{-1}
Daher: Anwenden des Gaußschen Eliminationsverfahrens gleichzeitig auf alle

$A \cdot x = e_i$, also auf die folgende erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} A \mid e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenumformungen liefern: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & x^1 & \dots & x^n \\ 0 & & 1 & & & \end{array}\right)$

1.10 Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot(-2) & \cdot(-1) \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ + \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & + \\ + & \\ \cdot(-3) & \cdot 3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Also ist $\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ die Inverse zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.