

## 1 5. Lineare Gleichungssysteme

Nach [Lemma 1.8] und [Lemma 4.4] definiert jede Matrix  $A : K^n \rightarrow K^m$  durch  $x \mapsto Ax$ .

### 1.1 Definition 5.1

Ist  $A = (a_{ij}) \sim (m, n)$  eine Matrix und  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ , so heißt:

$$Ax = b \iff \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten.

Ist  $b \neq 0$ , so heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**, andernfalls **homogen**.  $Ax = 0$  heißt, dass zu dem inhomogenen System gehörende homogene lineare Gleichungssystem.

Die Menge  $\mathbb{L}(A, b) = \{x \in K^n | Ax = b\} \subset K^n$  heißt der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  ( $b = 0$  oder  $b \neq 0$ ).

$A$  heißt die **Koeffizientenmatrix**, die Einträge  $a_{ij}$  **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems. Die Matrix  $(A|b)$  heißt die **erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems**  $Ax = b$ .

#### 1.1.1 Bemerkung

Bezeichnet  $f : K^n \rightarrow K^m$  mit  $f(x) = Ax$  die durch  $A \sim (m, n)$  definiertes lineare Abbildung, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) &= f^{-1}(b) \text{ (Menge der Urbilder von } b \text{ unter } f) \\ \mathbb{L}(A, 0) &= \text{Ker } f \end{aligned}$$

**1.1.2 Beispiel**

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 & = & 2 \end{array} \hat{=} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{erweiterte Matrix } (A|b)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

**1.2 Satz 5.2**

Gegeben sei das LGS  $A \cdot x = b$ , wobei  $A \sim (m, n)$ . Sei  $r$  der Spaltenrang von  $A$ , d.h.  $r = \dim(SR(A))$ . Dann gilt:

- 1)  $\mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$  ist  $(n - r)$ -dimensionaler UVR
- 2)  $\mathbb{L} = \emptyset$  oder  $\mathbb{L}(A, b)$  hat folgende Form:

$$\mathbb{L}(A, b) = v + \mathbb{L}(A, 0), \text{ wobei } v \in \mathbb{L}(A, b) \text{ eine beliebige Lösung ist}$$

**1.2.1 Beweis**

- (1) Sei  $f : K^n \rightarrow K^m$  die durch  $A$  definierte lineare Abbildung mit  $f(x) = A \cdot x$ . Die Spalten von  $A$  sind genau die Bilder  $f(e_j)$  der Standardbasisvektoren:  $f(e_j) = A \cdot e_j = A_{\cdot j}$ . Daher sind die Spaltenvektoren von  $A$  ein EZS von  $\text{Im}(f)$ , d.h. es gilt  $\text{Im}(f) = SR(A)$ . Daraus folgt  $\dim(\text{Im}(f)) = r$ . Mit der Dimensionsformel (siehe 6.2) folgt:

$$\dim(K^n) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \iff n = \dim(\text{Ker}(f)) + r$$

Daraus folgt:  $\dim(\text{Ker}(f)) = n - r$ .

Da  $\text{Ker}(f) = \mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$  ist UVR mit  $\dim(\mathbb{L}(A, 0)) = n - r$ .

- (2) Sei  $w \in \mathbb{L}(A, 0)$  und  $v \in \mathbb{L}(A, b)$ , d.h.  $A \cdot w = 0$  und  $A \cdot v = b$ .  
 $\implies A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b \implies v + w \in \mathbb{L}(A, b)$   
 $\implies v + \mathbb{L}(A, 0) \subseteq \mathbb{L}(A, b)$   
 Sei  $v' \in \mathbb{L}(A, b)$  eine weitere Lösung, d.h.  $A \cdot v' = b$ .  
 $\implies A \cdot (v - v') = A \cdot v - A \cdot v' = b - b = 0 \implies v - v' \in \mathbb{L}(A, 0)$   
 $\implies v' \in v + \mathbb{L}(A, 0) \implies \mathbb{L}(A, b) \subseteq v + \mathbb{L}(A, 0)$

**1.2.2 Bemerkung**

- $\mathbb{L}(A, 0) \neq \emptyset$ , da  $0 \in \mathbb{L}(A, 0)$
- 0 heißt die triviale Lösung des homogenen Systems.
- Ein inhomogenes System hat nicht immer Lösungen.

**1.3 Satz 5.3**

Für ein inhomogenes LGS  $A \cdot x = b$  mit  $A \sim (m, n)$  gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset \iff \text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}((A|b))$$

**1.3.1 Beweis**

Definiere:  $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Rg}(A)$ ,  $\text{Spaltenrang}((A|b)) = \text{Rg}((A|b))$

Mit  $\text{Rg}(A) = r$  gilt:  $r \leq \text{Rg}((A|b)) \leq r + 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset &\iff \exists v \in K^n \text{ mit } A \cdot v = b \\ &\iff v_1 \cdot A_{\bullet 1} + \dots + v_n \cdot A_{\bullet n} = b \\ &\iff b \text{ ist Linearkombination der Spalten von } A \\ &\iff b \text{ ist Linearkombination der } r \text{ linear unabhängigen Spalten von } A \\ &\iff \text{Rg}((A|b)) = r \end{aligned}$$

**1.4 Lemma 5.4**

Sei  $A \cdot x = b$  ein LGS und die Koeffizientenmatrix  $A$  in Zeilenstufenform, Pivots in den ersten  $r$  Spalten sitzen,  $a_{11} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0, r \leq m$  und  $r \leq n$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{rr} & b_r \\ & 0 & & & b_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_m \end{array} \right)$$

Dann gilt:

- (1) Ist  $b_i \neq 0$  für ein  $i$  mit  $r + 1 \leq i \leq m$ , so hat das LGS keine Lösung, da  $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$  durch kein  $n$ -Tuple  $(x_1, \dots, x_n)$  erfüllbar ist.

- (2) Seien  $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ . Dann hat das LGS Lösungen, die man wie folgt erhält:

Wir setzen  $k = n - r$  und wählen für die Unbekannten  $x_{r+1}, \dots, x_n$  Parameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , d.h. setze  $x_{r+1} = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_k$ . Die Parameter dürfen unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen. Die übrigen Variablen  $x_1, \dots, x_r$  kann man nun eindeutig in Abhängigkeit von den Parametern berechnen. Das geschieht wie folgt:

$r$ -te Gleichung:  $a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} \cdot \lambda_1 + \dots + a_{rn} \cdot \lambda_k = b_r$

$a_{rr} \neq 0 \implies x_r = \frac{1}{a_{rr}} \cdot (b_r - a_{rr+1} \cdot \lambda_1 - \dots - a_{rn} \cdot \lambda_k)$

Man setzt  $x_r$  in die  $(r-1)$ -te Gleichung ein und berechnet man aus der ersten Gleichung  $x_1$ .

- (3) Ist  $r = m$ , so kann man keinen Parameter einführen. Es gibt dann eine einzige Lösung  $(x_1, \dots, x_n)$ , d.h. das LGS ist dann eindeutig lösbar.

#### 1.4.1 Beispiel

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

#### 1.4.2 hier

$$r = 3, b_4 = 0 \implies \mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset$$

Parameter für die Unbekannten  $x_1, x_4, x_5, x_7$  wählen:

$$x_1 = \lambda_1, x_4 = \lambda_2, x_5 = \lambda_3, x_7 = \lambda_4$$

$$3. \text{ Gleichung: } 3 \cdot x_6 + \lambda_4 = 2 \implies x_6 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4$$

$$2. \text{ Gleichung: } x_3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 + 2 \cdot \lambda_3 + 3 \cdot \lambda_2 = 1 \implies x_3 = \frac{1}{3} - 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_4$$

$$1. \text{ Gleichung: } 2 \cdot x_2 + 5 \cdot \lambda_4 + 6 \cdot \lambda_3 + 4 \cdot \lambda_2 = 3 \implies x_2 = 1,5 - 2 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 - 2,5 \cdot \lambda_4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1,5 - 2 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 - 2,5 \cdot \lambda_4 \\ \frac{1}{3} - 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen Systems}} + \underbrace{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine Lösung des homogenen Systems}}$$

## 1.5 Satz 5.5: Gaußsches Eliminationsverfahren

Sei  $(A|b)$  die erweiterte Matrix eines LGS  $A \cdot x = b$ . Durch elementare Zeilenumformungen sei  $(A|b)$  überführt worden in  $(\tilde{A}|\tilde{b})$ , wobei  $\tilde{A}$  in Zeilenstufenform ist. Dann haben  $(A|b)$  und  $(\tilde{A}|\tilde{b})$  dieselben Lösungsräume, d.h.  $\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(\tilde{A}, \tilde{b})$ .

## 1.6 Lemma 5.6

Für eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (1)  $A$  ist invertierbar
- (2)  $A^T$  ist invertierbar
- (3)  $\text{Spaltenrang}(A) = n$
- (4)  $\text{Zeilenrang}(A) = n$

Insbesondere gilt dann:  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis:

(1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $A$  invertierbar. Dann gilt:

$$\bullet A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I_n^T = I_n.$$

$$\bullet (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Also ist  $A^T$  invertierbar und  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $A^T$  invertierbar. Dann gilt wegen "(1)  $\Rightarrow$  (2)":  $(A^T)^T = A$  ist invertierbar.

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) :

A invertierbar  $\Leftrightarrow f_A : K^n \rightarrow K^n$  Isomorphismus  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f_A) = \{0\}$  und  $\text{Im}(f_A) = K^n \Leftrightarrow n = \dim(\text{Im}(f_A)) = \text{Spaltenrang}(A)$

(1)  $\Leftrightarrow$  (4) :

A invertierbar  $\Leftrightarrow A^T$  invertierbar  $\Leftrightarrow \text{Spaltenrang}(A^T) = n \Leftrightarrow \text{Zeilenrang}(A) = n$