0. Grundlegendes

Menge

Eine Menge ist eine abgegrenzte Gesamtheit von unt\erscheidbaren Dingen. Diese heißen Elemente der Menge.

Beschreibung von Mengen

- durch Aufzählen aller Elemente ($M = \{1, 3, 3, 7\}$, $M = \{2, 4, 6, 8, ...\}$)
- durch eine die Elemente charakterisierende Eigenschaft E (M=\{x|x hat die eigenschaft E\})

Beispiel

M=\{x|x ist eine positive, gerade und ganze Zahl\}

Symbole für spezielle Zahlenmengen

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \emptyset$
Sei M eine Menge.
Dann $a \in M$: a ist Element von M
Dann $a \notin M$: a ist nicht Element von M

Beispiel

$1 \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$

Teilmengen

N, M seien Mengen N heißt Teilmenge von M, wenn jedes Element aus N zu M gehört:

$$N \subseteq M$$

Beispiel

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \emptyset$
$\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ gilt für jede Menge

Aussage

A und B Aussagen (= Aussagesätze unserer Sprache, denen genau einen Wahrheitswert W(wahr) oder F(falsch) zugeordnet werden kann)

$A \implies B$: aus A folgt B \ $A \iff B$: A ist äquivalent zu B

Abbildung

Seien D und W zwei nichtleere Mengen. Unter einer Abbildung von D nach W versteht man eine Vorschrift f, die jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in W$ zuordnet. Man schreibt $y = f(x)$. $f(x)$ heißt das Bild von x unter der Abbildung f. Man gibt die Abbildung an durch: $f : D \to W, x \mapsto f(x)$. D heißt Definintionsbereich, W heißt Zielbereich. Die Menge $f(D) = \{f(x)|x \in D\} \subseteq W$ heißt das Bild von f oder die Bildmenge von f. Man schreibt: $f(D) = Imf$.

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$
(2) Sei D eine Menge. Dann heißt die Abbildung $Id : D \to D$ mit $Id(x) = x$ für $x \in D$ die Identität von D.

Seien G und H zwei nichtleere Mengen. \ Dann heißt die Menge $G \times H = \{(g, h)|g \in G, h \in H\}$ das kartesische Produkt G und H.

Definition

(1) Sei G eine nichtleere Menge. Dann heißt eine Abbildung $* : G \times G \to G$ mit $(g, g') \mapsto g * g' \in G$ eine innere Verknüpfung auf G.
(2) Seien K und V nichtleere Mengen. Dann heißt eine Abbildung $\cdot : K \times V \to V$ mit $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \in V$ eine äußere Verknüpfung auf V.

Beispiele

(1) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto a + b$ und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$

sind innere Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ (2) $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(n, x) \mapsto n \cdot x \in \mathbb{R}$ ist eine äußere Verknüpfung auf $\mathbb{R}$.

Bemerkungen

(1) In $\mathbb{R}$ mit der inneren Verknüpfung $+$ gelten die die folgenden Gesetze:
(G1) Assoziativgesetz: $(a+b)+c = a+(b+c)$
(G2) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit $0+a = a = a+0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (Existenz des neutralen Elements)
(G3) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $-a \in \mathbb{R}$ mit $a+(-a) = 0$ (Existenz des inversen Elements)
(G4) Kommutativgesetz: $a+b = b+a$
Man sagt: $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) Ebenso ist $\mathbb{R} \setminus 0$ mit der Verknüpfung $\cdot$ eine abelsche Gruppe:
Assoziativgesetz und Kommutativgesetz: $\surd$
neutrales Element: 1
inverses Element zu $a : \frac{1}{a}$

(3) In $\mathbb{R}$ mit den inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gelten die Distributivgesetze:
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Man sagt wegen (1), (2), (3): $\mathbb{R}$ ist eine Körper. (Anderes Beispiel eines Körpers: $\mathbb{C}$)