

1 5. Lineare Gleichungssysteme

Nach [Lemma 1.8] und [Lemma 4.4] definiert jede Matrix $A : K^n \rightarrow K^m$ durch $x \mapsto Ax$.

1.1 Definition 5.1

Ist $A = (a_{ij}) \sim (m, n)$ eine Matrix und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, so heißt:

$$Ax = b \iff \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Ist $b \neq 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**, andernfalls **homogen**. $Ax = 0$ heißt, dass zu dem inhomogenen System gehörende homogene lineare Gleichungssystem.

Die Menge $\mathbb{L}(A, b) = \{x \in K^n | Ax = b\} \subset K^n$ heißt der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ($b = 0$ oder $b \neq 0$).

A heißt die **Koeffizientenmatrix**, die Einträge a_{ij} **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems. Die Matrix $(A|b)$ heißt die **erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems** $Ax = b$.

1.1.1 Bemerkung

Bezeichnet $f : K^n \rightarrow K^m$ mit $f(x) = Ax$ die durch $A \sim (m, n)$ definiertes lineare Abbildung, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) &= f^{-1}(b) \text{ (Menge der Urbilder von } b \text{ unter } f) \\ \mathbb{L}(A, 0) &= \text{Ker } f \end{aligned}$$

1.1.2 Beispiel

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 & = & 2 \end{array} \hat{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{erweiterte Matrix } (A|b)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

1.2 Satz 5.2

Gegeben sei das LGS $A \cdot x = b$, wobei $A \sim (m, n)$. Sei r der Spaltenrang von A , d.h. $r = \dim(SR(A))$. Dann gilt:

- 1) $\mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$ ist $(n - r)$ -dimensionaler UVR
- 2) $\mathbb{L} = \emptyset$ oder $\mathbb{L}(A, b)$ hat folgende Form:

$$\mathbb{L}(A, b) = v + \mathbb{L}(A, 0), \text{ wobei } v \in \mathbb{L}(A, b) \text{ eine beliebige Lösung ist}$$

1.2.1 Beweis

- (1) Sei $f : K^n \rightarrow K^m$ die durch A definierte lineare Abbildung mit $f(x) = A \cdot x$. Die Spalten von A sind genau die Bilder $f(e_j)$ der Standardbasisvektoren: $f(e_j) = A \cdot e_j = A_{\cdot j}$. Daher sind die Spaltenvektoren von A ein EZS von $\text{Im}(f)$, d.h. es gilt $\text{Im}(f) = SR(A)$. Daraus folgt $\dim(\text{Im}(f)) = r$. Mit der Dimensionsformel (siehe 6.2) folgt:

$$\dim(K^n) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \iff n = \dim(\text{Ker}(f)) + r$$

Daraus folgt: $\dim(\text{Ker}(f)) = n - r$.

Da $\text{Ker}(f) = \mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$ ist UVR mit $\dim(\mathbb{L}(A, 0)) = n - r$.

- (2) Sei $w \in \mathbb{L}(A, 0)$ und $v \in \mathbb{L}(A, b)$, d.h. $A \cdot w = 0$ und $A \cdot v = b$.
 $\implies A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b \implies v + w \in \mathbb{L}(A, b)$
 $\implies v + \mathbb{L}(A, 0) \subseteq \mathbb{L}(A, b)$
 Sei $v' \in \mathbb{L}(A, b)$ eine weitere Lösung, d.h. $A \cdot v' = b$.
 $\implies A \cdot (v - v') = A \cdot v - A \cdot v' = b - b = 0 \implies v - v' \in \mathbb{L}(A, 0)$
 $\implies v' \in v + \mathbb{L}(A, 0) \implies \mathbb{L}(A, b) \subseteq v + \mathbb{L}(A, 0)$

1.2.2 Bemerkung

- $\mathbb{L}(A, 0) \neq \emptyset$, da $0 \in \mathbb{L}(A, 0)$
- 0 heißt die triviale Lösung des homogenen Systems.
- Ein inhomogenes System hat nicht immer Lösungen.

1.3 Satz 5.3

Für ein inhomogenes LGS $A \cdot x = b$ mit $A \sim (m, n)$ gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset \iff \text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}((A|b))$$

1.3.1 Beweis

Definiere: $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Rg}(A)$, $\text{Spaltenrang}((A|b)) = \text{Rg}((A|b))$

Mit $\text{Rg}(A) = r$ gilt: $r \leq \text{Rg}((A|b)) \leq r + 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset &\iff \exists v \in K^n \text{ mit } A \cdot v = b \\ &\iff v_1 \cdot A_{\bullet 1} + \dots + v_n \cdot A_{\bullet n} = b \\ &\iff b \text{ ist Linearkombination der Spalten von } A \\ &\iff b \text{ ist Linearkombination der } r \text{ linear unabhängigen Spalten von } A \\ &\iff \text{Rg}((A|b)) = r \end{aligned}$$

1.4 Lemma 5.4

Sei $A \cdot x = b$ ein LGS und die Koeffizientenmatrix A in Zeilenstufenform, Pivots in den ersten r Spalten sitzen, $a_{11} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0, r \leq m$ und $r \leq n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{rr} & b_r \\ & 0 & & & b_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_m \end{array} \right)$$

Dann gilt:

- (1) Ist $b_i \neq 0$ für ein i mit $r + 1 \leq i \leq m$, so hat das LGS keine Lösung, da $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$ durch kein n -Tuple (x_1, \dots, x_n) erfüllbar ist.

- (2) Seien $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$. Dann hat das LGS Lösungen, die man wie folgt erhält:

Wir setzen $k = n - r$ und wählen für die Unbekannten x_{r+1}, \dots, x_n Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, d.h. setze $x_{r+1} = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_k$. Die Parameter dürfen unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen. Die übrigen Variablen x_1, \dots, x_r kann man nun eindeutig in Abhängigkeit von den Parametern berechnen. Das geschieht wie folgt:

r -te Gleichung: $a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} \cdot \lambda_1 + \dots + a_{rn} \cdot \lambda_k = b_r$

$a_{rr} \neq 0 \implies x_r = \frac{1}{a_{rr}} \cdot (b_r - a_{rr+1} \cdot \lambda_1 - \dots - a_{rn} \cdot \lambda_k)$

Man setzt x_r in die $(r-1)$ -te Gleichung ein und berechnet man aus der ersten Gleichung x_1 .

- (3) Ist $r = m$, so kann man keinen Parameter einführen. Es gibt dann eine einzige Lösung (x_1, \dots, x_n) , d.h. das LGS ist dann eindeutig lösbar.

1.4.1 Beispiel

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1.4.2 hier

$$r = 3, b_4 = 0 \implies \mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset$$

Parameter für die Unbekannten x_1, x_4, x_5, x_7 wählen:

$$x_1 = \lambda_1, x_4 = \lambda_2, x_5 = \lambda_3, x_7 = \lambda_4$$

$$3. \text{ Gleichung: } 3 \cdot x_6 + \lambda_4 = 2 \implies x_6 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4$$

$$2. \text{ Gleichung: } x_3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 + 2 \cdot \lambda_3 + 3 \cdot \lambda_2 = 1 \implies x_3 = \frac{1}{3} - 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_4$$

$$1. \text{ Gleichung: } 2 \cdot x_2 + 5 \cdot \lambda_4 + 6 \cdot \lambda_3 + 4 \cdot \lambda_2 = 3 \implies x_2 = 1,5 - 2 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 - 2,5 \cdot \lambda_4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1,5 - 2 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 - 2,5 \cdot \lambda_4 \\ \frac{1}{3} - 3 \cdot \lambda_2 - 2 \cdot \lambda_3 + \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen Systems}} + \underbrace{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine Lösung des homogenen Systems}}$$

1.5 Satz 5.5: Gaußsches Eliminationsverfahren

Sei $(A|b)$ die erweiterte Matrix eines LGS $A \cdot x = b$. Durch elementare Zeilenumformungen sei $(A|b)$ überführt worden in $(\tilde{A}|\tilde{b})$, wobei \tilde{A} in Zeilenstufenform ist. Dann haben $(A|b)$ und $(\tilde{A}|\tilde{b})$ dieselben Lösungsräume, d.h. $\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(\tilde{A}, \tilde{b})$.

1.6 Lemma 5.6

Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (1) A ist invertierbar
- (2) A^T ist invertierbar
- (3) $\text{Spaltenrang}(A) = n$
- (4) $\text{Zeilenrang}(A) = n$

Insbesondere gilt dann: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis:

(1) \Rightarrow (2): Sei A invertierbar. Dann gilt:

$$\bullet A^T \cdot (A^{-1})^T \stackrel{2.6}{=} (A^{-1} \cdot A)^T = I_n^T = I_n.$$

$$\bullet (A^{-1})^T \cdot A^T \stackrel{2.6}{=} (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Also ist A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(2) \Rightarrow (1): Sei A^T invertierbar. Dann gilt wegen "(1) \Rightarrow (2)": $(A^T)^T = A$ ist invertierbar.

(1) \Leftrightarrow (3) :

A invertierbar $\Leftrightarrow f_A : K^n \rightarrow K^n$ Isomorphismus $\Leftrightarrow \text{Ker}(f_A) = \{0\}$ und $\text{Im}(f_A) = K^n \Leftrightarrow n = \dim(\text{Im}(f_A)) = \text{Spaltenrang}(A)$

(1) \Leftrightarrow (4) :

A invertierbar $\xLeftrightarrow{(1) \Leftrightarrow (2)} A^T$ invertierbar $\xLeftrightarrow{(1) \Leftrightarrow (3)} \text{Spaltenrang}(A^T) = n \Leftrightarrow \text{Zeilenrang}(A) = n$

1.7 Folgerung A

Sei $A \sim (n,n)$ invertierbar. Dann hat jedes LGS $A \cdot x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$.

Beweis:

Sei x eine Lösung von $A \cdot x = b$. Dann gilt: $x = I_n \cdot x = A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$. Also hat $A \cdot x = b$ höchstens eine Lösung. $A^{-1} \cdot b$ ist eine Lösung, da $A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b$.

1.8 Folgerung B

Sei $A \sim (n,n)$ invertierbar. Zu jedem Standardbasisvektor $e_i \in K^n$ sei $x^i =$

$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ die nach Folgerung A eindeutige Lösung $A \cdot x = e_i$. Dann gilt:

$$X = (x^1 \quad \dots \quad x^n) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= A \cdot (x^1 \quad \dots \quad x^n) = (A \cdot x^1 \quad \dots \quad A \cdot x^n) = (e_1 \quad \dots \quad e_n) = I_n \\ \Rightarrow X &= I_n \cdot X = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1} \end{aligned}$$