1 8. Determinanten

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine feste Zahl und $N = \{1, ..., n\}$.
Eine Abbildung $\sigma : N \to N$ kann man angeben durch ihre Wertetabelle $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$
Dabei sind die zugeordneten Zahlen $\sigma(k)$ wieder aus N. Wann ist σ bijektiv? Wenn in der unteren Reihe der Wertetabelle jede Zahl aus N genau einmal vorkommt.

1.1 Definition 8.1

Eine bijektive Abbildung $\sigma : N \to N$ mit $N = \{1, ..., n\}$ heißt Permutation. Die Menge aller Permutationen der Zahlen 1 bis n wird mit γ_n bezeichnet. Die Komposition von Abbildungen definiert eine innere Verknüpfung $\circ$ auf γ_n :
$\sigma, \tau \in \gamma_n \implies \sigma \circ \tau \in \gamma_n$ mit $\sigma \circ \tau(j) = \sigma(\tau(j))$ für $j \in N$
Es gilt natürlich das Assoziativgesetz:
$(\sigma \circ \tau) \circ \mu = \sigma \circ (\tau \circ \mu)$
Weiter gibt es ein "neutrales Element" $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ ($\equiv$ Identität auf N) mit $\sigma \circ \iota = \sigma = \iota \circ \sigma \forall \sigma \in \gamma_n$.
Ist $\sigma \in \gamma_n$, so ist $\sigma : N \to N$ bijektiv und es existiert Umkehrabbildung $\sigma^{-1} : N \to N$, die ebenfalls bijektiv ist. Daher ist $\sigma^{-1} \in \gamma_n$ mit $\sigma^{-1} \circ \sigma = \iota = \sigma \circ \sigma^{-1}$.

1.2 Folgerung

$(\gamma_n, \circ)$ ist eine Gruppe. Sie heißt die symmetrische Gruppe (zur Zahl n).

1.2.1 Bemerkung

Für $n \geq 3$ ist γ_n nicht kommutativ.

1.2.2 Beispiel

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \tau \circ \sigma$
Weiter ist $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau$

1.2.3 Bemerkung

In der unteren Zeile einer Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \sigma(1) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ kann man durch Vertauschungen jeweils benachbarter Zahlen erreichen, dass die Zahlen dann in der natürlichen Reihenfolge hintereinander stehen. Gleichgültig, wie man dabei vorgeht, benötigt man für eine Permutation σ immer eine gerade Anzahl von Vertauschungen. Dementsprechend spricht man von geraden bzw. ungeraden Permutationen und ordnet jeder Permutation ein Vorzeichen zu: das Vorzeichen + der geraden und das Worzeichen - der ungeraden Permutationen. Um das Vorzeichen zu bestimmen, definieren wir für jede Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \sigma(1) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ die folgenden Anzahlen:
$\Phi_1(\sigma) =$ Anzahl der Zahlen in $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ links von 1
$\Phi_2(\sigma) =$ Anzahl der Zahlen in $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ links von 2 und > 2
$\vdots$
$\Phi_{n-1}(\sigma) =$ Anzahl der Zahlen in $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ von $n-1$ und $> n-1$
Dann gilt: Die Summe $\Phi(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \Phi_2(\sigma) + ... + \Phi_{n-1}(\sigma)$ ist die Anzahl der Nachbarvertauschungen, die nötig sind, um zuerst 1 nach links an ihren Platz, dann 2 nach links an ihren Platz usw. zu bringen, sodass schließlich dei Reihenfolge $1, 2, ..., n$ hergestellt ist.

1.3 Definition 8.2

Für eine Permutation $\sigma \in \gamma_n$ heißt $\Phi(\sigma)$ die Fehlstandszahl von σ und $sgn(\sigma) := (-1)^{\Phi(\sigma)}$ das Vorzeichen von σ.
Eine Permutation σ heißt gerade (bzw. ungerade), wenn $\Phi(\sigma)$ gerade (bzw. ungerade) ist.

1.3.1 Beispiel

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\Phi_1(\sigma) = 3, \Phi_2(\sigma) = 2, \Phi_3(\sigma) = 0$
$\implies \Phi(\sigma) = 5$ ist ungerade
$\implies sgn(\sigma) = (-1)^5 = -1$

1.4 Lemma 8.3

Für $\sigma, \tau \in \gamma_n$ gilt:

(1) $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$
(2) $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$

1.5 Definition 8.4

Sei $K^{(n,n)}$ der Vektorraum der n-reihigen Matrizen, $n \in \mathbb{N}$.
Die Determinantenfunktion $det : K^{(n,n)} \to K$ ordnet jeder Matrix $A \in K^{(n,n)}$ eine Zahl aus K zu, die die Determinante von A ist und wie folgt bezeichnet wird:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \to det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Dabei ist $det(A) \sum\limits_{\sigma \in \gamma_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}$

Berechnung der 2- und 3-reihigen Dterminanten:

(1) $n = 2$
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
Denn: $N = \{1,2\} \to \gamma_2 = \{\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$ mit $sgn(\tau) = (-1)^0 = 1$ und $sgn(\sigma) = (-1)^1 = -1$

(2) $n = 3$
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Permutationen	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\Phi(\sigma)$	0	2	2	3	1	1
$sgn(\sigma)$	1	1	1	-1	-1	-1

$\implies det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Merkregel: Regel von Sarus

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

1.5.1 Beispiele

(1) $det\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & -2\end{pmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot 4 = -10$

(2) $det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-4 & 5 & 6\\7 & -8 & 9\end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot(-4)\cdot(-8) - 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot (-8) - 2\cdot(-4)\cdot 9 = 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72 = 240$

1.5.2 Bemerkung

Analoge Rechen- und Merkregeln wie in diesen Fällen ($n = 2$ und $n = 3$) gibt es für $n \geq 4$ nicht!

1.6 Satz 8.5 Es gelten folgende Eigenschaften von Determinanten

(1) Homogenität in den Zeilen $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda\cdot a_{i1} & \cdots & \lambda\cdot a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

D.h. ein gemeinsamer Faktor aller Elemente einer Zeile kann vor die Determinante gezogen werden.

(2) Additivität in den Zeilen $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1}+\tilde{a}_{i1} & \cdots & a_{in}+\tilde{a}_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \tilde{a}_{i1} & \cdots & \tilde{a}_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{vmatrix} = detI_n = 1$

(4)**!** Bei Addieren des $\alpha-$fachen einer Zeile zu einer **anderen** Zeile bleibt der Wert der Determinante **unverändert**.

(5) Sind zwei Zeilen einer Determinante gleich, so hat die Determinante den Wert 0. Zusatz: Ist eine Zeile einer Nullzeile, so hat die Determinante den Wert 0.

(6)**!** Vertauscht man zwei Zeilen einer Determinante miteinander, so **ändert die Determinante ihr Vorzeichen**.

(7) Sind die Zeilen einer Determinante linear abhängig, so hat die Determinante den Wert 0.

1.7 Beweis

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \cdots & \lambda \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \gamma_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda \cdot a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \cdot \sum_{\sigma \in \gamma_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) Entsprechend gilt (2) wegen: $\sum_{\sigma \in \gamma_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + \tilde{a}_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \gamma_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in \gamma_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \tilde{a}_{i\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

(3) $$detI_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = det(\delta_{ij}) = \sum_{\sigma \in \gamma_n} (sgn\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \cdots \sigma_{n\sigma(n)} = \underbrace{\sum_{\sigma \in \gamma_n, \sigma \neq \iota} (sgn\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \cdots \delta_{n\sigma(n)}}_{=0, \text{denn}: \sigma \neq \iota \implies \exists k \in 1, \ldots n \text{mit} \sigma(k) \neq k \implies \delta_{k\sigma(k)} = 0} + \underbrace{(sgn\iota)}_{=1} \underbrace{\delta_{11}}_{=1} \cdots \underbrace{\delta_{nn}}_{=1} = 1$$

$$(4)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{j1}+\alpha\cdot a_{i1}) & \cdots & (a_{jn}+\alpha\cdot a_{in}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{nach(1)und(2)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0\text{nach (5) (Beweis folgt!)}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5)Seien $i, j \in 1, ..., n, i \neq j$ und $A_{i\bullet} = A_{j\bullet}$, also $a_{j1} = a_{j1}, ..., a_{in} = a_{jn}$.

$$(\star)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\gamma_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ Für die festen Indizes i, j betrachten wir die Permutationen. $\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$, die i nach j und j nach i abbildet und alle anderen Zahlen fest lässt. Dann gilt $sgn(\tau_{ij}) = -1$

1.8 Satz 8.6

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt $detA = detA^T$

1.9 Beweis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to detA = \sum_{\sigma\in\gamma_n} (sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(1)n}(\star)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to detA^T = \sum_{\tau\in\gamma_n} (sgn\tau)a_{\tau(1)1}...a_{\tau(n)n}(\star\star)$$

Für jeden $\tau \in \gamma_n$ erhalten wir durch Umrechnung der Faktoren $a_{\tau(1)1}...a_{\tau(n)n} = a_{1\tau^{-1}(1)}...a_{n\tau^{-1}(n)}$
$(\tau(j) = i \iff j = \tau^{-1}(i), a_{\tau(j)j} = a_{i\tau^{-1}(i)})$ Wegen $sgn\tau = sgn\tau^{-1}$ folgt damit aus $(\star\star)$
$(\#)detA^T = \sum_{\tau\in\gamma_n} (sgn\tau^{-1})a_{1\tau^{-1}(1)}...a_{n\tau^{-1}(n)}$ Da mit τ auch τ^{-1} alle Permutationen von γ durchläuft, stimmen $(\#)$ und $(\star)$ überein. $\implies detA = detA^T$

1.10 Folgerung

Die in Satz 8.5 für die Zeilen einer Determinante angegebenen Eigenschaften gelten entsprechend für die Spalten einer Determinante.

1.10.1 Bemerkung

Wegen der Eigenschaften (4) und (6) für die Zeilen und der Eigenschaft (6) für die Spalten einer Determinante stehen für Determinanten genau die elementaren Matrizenumformungen zur Verfügung, die es erlauben, eine Matrix so in Zeilenstufenform zu überführen, dass die Pivtos in den ersten r Spalten sitzen, also eine Matrix in obere Dreiecksform zu überführen. Wegen der Eigenschaften (4) und (6) ist daher der Wert der Determinante bis auf möglicherweise eine Vorzeichenänderung gleich dem Wert dieser oberen Dreiecksmatrix, in welche die ursprüngliche Matrix überführt ist.

1.11 Lemma 8.7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.12 Beweis

wiederholte Anwendung von (4), (1) und (3) aus Satz 8.5.

1.13 Folgerung 1

Determinante von$A \rightsquigarrow$ überführe A in eine obere Dreiecksmatrix $\tilde{A} \rightsquigarrow detA = (-1)^t det\tilde{A}$ und t ist die Anzahl der benötigten Zeilen- und Spaltenvertauschungen, um A in $\tilde{A}$ zu überführen.

1.13.1 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} {}^{-2} \\ \\ {}_{+} \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {}^{-1} \\ {}_{+} \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot 3) = -3$$

1.14 Folgerung 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt: $Rg(A) = n \iff detA \neq 0$

1.15 Korollar

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt: Die Zeilen(Spalten) von$A$ sind linar abhängig $\iff detA = 0$

1.16 Folgerung 3

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt: A invertierbar $\iff detA \neq 0$