

1 8. Determinanten

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine feste Zahl und $N = \{1, \dots, n\}$.

Eine Abbildung $\sigma : N \rightarrow N$ kann man angeben durch ihre Wertetabelle $\sigma =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dabei sind die zugeordneten Zahlen $\sigma(k)$ wieder aus N . Wann ist σ bijektiv? Wenn in der unteren Reihe der Wertetabelle jede Zahl aus N genau einmal vorkommt.

1.1 Definition 8.1

Eine bijektive Abbildung $\sigma : N \rightarrow N$ mit $N = \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation. Die Menge aller Permutationen der Zahlen 1 bis n wird mit γ_n bezeichnet. Die Komposition von Abbildungen definiert eine innere Verknüpfung \circ auf γ_n :

$\sigma, \tau \in \gamma_n \implies \sigma \circ \tau \in \gamma_n$ mit $\sigma \circ \tau(j) = \sigma(\tau(j))$ für $j \in N$

Es gilt natürlich das Assoziativgesetz:

$$(\sigma \circ \tau) \circ \mu = \sigma \circ (\tau \circ \mu)$$

Weiter gibt es ein "neutrales Element" $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ (\equiv Identität auf N)

mit $\sigma \circ \iota = \sigma = \iota \circ \sigma \forall \sigma \in \gamma_n$.

Ist $\sigma \in \gamma_n$, so ist $\sigma : N \rightarrow N$ bijektiv und es existiert Umkehrabbildung $\sigma^{-1} : N \rightarrow N$, die ebenfalls bijektiv ist. Daher ist $\sigma^{-1} \in \gamma_n$ mit $\sigma^{-1} \circ \sigma = \iota = \sigma \circ \sigma^{-1}$.

1.2 Folgerung

(γ_n, \circ) ist eine Gruppe. Sie heißt die symmetrische Gruppe (zur Zahl n).

1.2.1 Bemerkung

Für $n \geq 3$ ist γ_n nicht kommutativ.

1.2.2 Beispiel

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \tau \circ \sigma$$

$$\text{Weiter ist } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau$$

1.2.3 Bemerkung

In der unteren Zeile einer Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ kann man durch Vertauschungen jeweils benachbarter Zahlen erreichen, dass die Zahlen dann in der natürlichen Reihenfolge hintereinander stehen. Gleichgültig, wie man dabei vorgeht, benötigt man für eine Permutation σ immer eine gerade Anzahl von Vertauschungen. Dementsprechend spricht man von geraden bzw. ungeraden Permutationen und ordnet jeder Permutation ein Vorzeichen zu: das Vorzeichen $+$ der geraden und das Vorzeichen $-$ der ungeraden Permutationen. Um das Vorzeichen zu bestimmen, definieren wir für jede Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

die folgenden Anzahlen:

$\Phi_1(\sigma) = \text{Anzahl der Zahlen in } \sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ links von } 1$

$\Phi_2(\sigma) = \text{Anzahl der Zahlen in } \sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ links von } 2 \text{ und } > 2$

\vdots

$\Phi_{n-1}(\sigma) = \text{Anzahl der Zahlen in } \sigma(1), \dots, \sigma(n) \text{ von } n-1 \text{ und } > n-1$

Dann gilt: Die Summe $\Phi(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \Phi_2(\sigma) + \dots + \Phi_{n-1}(\sigma)$ ist die Anzahl der Nachbarvertauschungen, die nötig sind, um zuerst 1 nach links an ihren Platz, dann 2 nach links an ihren Platz usw. zu bringen, sodass schließlich die Reihenfolge $1, 2, \dots, n$ hergestellt ist.

1.3 Definition 8.2

Für eine Permutation $\sigma \in \gamma_n$ heißt $\Phi(\sigma)$ die Fehlstandszahl von σ und $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{\Phi(\sigma)}$ das Vorzeichen von σ .

Eine Permutation σ heißt gerade (bzw. ungerade), wenn $\Phi(\sigma)$ gerade (bzw. ungerade) ist.

1.3.1 Beispiel

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \Phi_1(\sigma) &= 3, \Phi_2(\sigma) = 2, \Phi_3(\sigma) = 0 \\ \implies \Phi(\sigma) &= 5 \text{ ist ungerade} \\ \implies \text{sgn}(\sigma) &= (-1)^5 = -1 \end{aligned}$$

1.4 Lemma 8.3

Für $\sigma, \tau \in \gamma_n$ gilt:

- (1) $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$
- (2) $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$

1.5 Definition 8.4

Sei $K^{(n,n)}$ der Vektorraum der n -reihigen Matrizen, $n \in \mathbb{N}$.

Die Determinantenfunktion $\det : K^{(n,n)} \rightarrow K$ ordnet jeder Matrix $A \in K^{(n,n)}$ eine Zahl aus K zu, die die Determinante von A ist und wie folgt bezeichnet wird:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dabei ist $\det(A) = \sum_{\sigma \in \gamma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$

Berechnung der 2- und 3-reihigen Determinanten:

(1) $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Denn: $N = \{1, 2\} \rightarrow \gamma_2 = \left\{ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit
 $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^0 = 1$ und $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^1 = -1$

(2) $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Permutationen	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\Phi(\sigma)$	0	2	2	3	1	1
$\operatorname{sgn}(\sigma)$	1	1	1	-1	-1	-1

$$\implies \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Merkregel: Regel von Sarrus

+	+	+		
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{11}	a_{12}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	a_{22}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{31}	a_{32}
-	-	-		

1.5.1 Beispiele

$$(1) \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -10$$

$$(2) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot (-4) \cdot (-8) - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot (-8) - 2 \cdot (-4) \cdot 9 = 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72 = 240$$

1.5.2 Bemerkung

Analoge Rechen- und Merkgeregeln wie in diesen Fällen ($n = 2$ und $n = 3$) gibt es für $n \geq 4$ nicht!

1.6 Satz 8.5 Es gelten folgende Eigenschaften von Determinanten

$$(1) \text{ Homogenität in den Zeilen } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \cdots & \lambda \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D.h. ein gemeinsamer Faktor aller Elemente einer Zeile kann vor die Determinante gezogen werden.

$$(2) \text{ Additivität in den Zeilen } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \tilde{a}_{i1} & \cdots & a_{in} + \tilde{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{i1} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = \det I_n = 1$$

(4)! Bei Addieren des α -fachen einer Zeile zu einer **anderen** Zeile bleibt der Wert der Determinante **unverändert**.

(5) Sind zwei Zeilen einer Determinante gleich, so hat die Determinante den Wert 0. Zusatz: Ist eine Zeile einer Nullzeile, so hat die Determinante den Wert 0.

(6)! Vertauscht man zwei Zeilen einer Determinante miteinander, so **ändert die Determinante ihr Vorzeichen**.

(7) Sind die Zeilen einer Determinante linear abhängig, so hat die Determinante den Wert 0.

Beweis bei moodle. Bitte noch einfügen.

1.7 Satz 8.6

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt $\det A = \det A^t$

1.8 Beweis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in \gamma_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} (\star)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \det A^T = \sum_{\tau \in \gamma_n} (\operatorname{sgn} \tau) a_{\tau(1)1} \cdots a_{\tau(n)n} (\star\star)$$

Für jeden $\tau \in \gamma_n$ erhalten wir durch Umrechnung der Faktoren $a_{\tau(1)1} \cdots a_{\tau(n)n} = a_{1\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\tau^{-1}(n)}$
 $(\tau(j) = i \iff j = \tau^{-1}(i), a_{\tau(j)j} = a_{i\tau^{-1}(i)})$ Wegen $\operatorname{sgn} \tau = \operatorname{sgn} \tau^{-1}$ folgt damit aus $(\star\star)$
 $(\#) \det A^T = \sum_{\tau \in \gamma_n} (\operatorname{sgn} \tau^{-1}) a_{1\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\tau^{-1}(n)}$ Da mit τ auch τ^{-1} alle Permutationen von γ durchläuft, stimmen $(\#)$ und (\star) überein. $\implies \det A = \det A^T$

1.9 Folgerung

Die in Satz 8.5 für die Zeilen einer Determinante angegebenen Eigenschaften gelten entsprechend für die Spalten einer Determinante.

1.9.1 Bemerkung

Wegen der Eigenschaften (4) und (6) für die Zeilen und der Eigenschaft (6) für die Spalten einer Determinante stehen für Determinanten genau die elementaren Matrizenumformungen zur Verfügung, die es erlauben, eine Matrix so in Zeilenstufenform zu überführen, dass die Pivots in den ersten r Spalten sitzen, also eine Matrix in obere Dreiecksform zu überführen. Wegen der Eigenschaften (4) und (6) ist daher der Wert der Determinante bis auf möglicherweise eine Vorzeichenänderung gleich dem Wert dieser oberen Dreiecksmatrix, in welche die ursprüngliche Matrix überführt ist.

1.10 Lemma 8.7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

1.11 Beweis

wiederholte Anwendung von (4), (1) und (3) aus Satz 8.5.

1.12 Folgerung 1

Determinante von $A \rightsquigarrow$ überführe A in eine obere Dreiecksmatrix $\tilde{A} \rightsquigarrow \det A = (-1)^t \det \tilde{A}$ und t ist die Anzahl der benötigten Zeilen- und Spaltenvertauschungen, um A in \tilde{A} zu überführen.

1.12.1 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \square \\ \leftarrow \square \\ \leftarrow \square \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \square^{-2} \\ \square \\ \leftarrow + \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \square^{-1} \\ \square \\ \leftarrow + \end{matrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(8.7)}{=} -1 \cdot 1 \cdot 3 = -3$$

1.13 Folgerung 2

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt: $Rg(A) = n \iff \det A \neq 0$

1.14 Korollar

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt: Die Zeilen(Spalten) von A sind linear abhängig $\iff \det A = 0$

1.15 Folgerung 3

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt: A invertierbar $\iff \det A \neq 0$