

## [TK: section heading]

Ist  $(a_1, \dots, a_m)$  eine Familie von Vektoren aus  $K^n$ , so ist  $U = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$  der erzeugte Untervektorraum. Aus dem Basisauswahlsatz folgt: Basis = "unkürzbares" Erzeugendensystem (kann sehr aufwendig sein)

Betrachte  $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, a_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^n$ .

Bilde die folgende Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$

### Definiton 4.1

Der von den Zeilenvektoren  $A_{i\bullet} \in K^n$  von A aufgespannte Untervektorraum von  $K^n$  heißt der **Zeilenraum** von A und wird mit  $ZR(A)$  bezeichnet:  $ZR(A) = \text{span}(A_{1\bullet}, \dots, A_{m\bullet}) \subseteq K^n$ . Entsprechend heißt der von den Spaltenvektoren  $A_{\bullet j} \in K^m$  aufgespannte Untervektorraum von  $K^m$  der **Spaltenraum** von A und wird mit  $SR(A)$  bezeichnet:  $SR(A) = \text{span}(A_{\bullet 1}, \dots, A_{\bullet n}) \subseteq K^m$ . Die Dimension von  $ZR(A)$  heißt der **Zeilenrang** von A und die Dimension von  $SR(A)$  heißt der **Spaltenrang** von A.

### Bemerkung

Beachte:  $A \sim (m, n) \Rightarrow ZR(A) \subseteq K^n$  und  $SR(A) \subseteq K^m$  und in der Regel  $n \neq m$ .  
Später: Zeilenrang = Spaltenrang

### Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ZR(A) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Zeilenrang} = 2$$

$$SR(A) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Spaltenrang} = 2$$

**Definition 4.2**

Eine Matrix  $B = (b_{ij}) \sim (m, n)$  heißt eine **Matrix in Zeilenstufenform**, wenn sie folgendes Aussehen hat:

**Leo ergänzt hier noch ein Diagramm**

Dabei müssen die Einträge an den mit \* markierten Stellen ungleich 0 sein und unterhalb der "Stufenlinie" müssen alle Einträge 0 sein. Genauer:

- (1) Es gibt eine Zahl  $r$ ,  $0 \leq r \leq m$ , sodass in den Zeilen 1 bis  $r$  jeweils mindestens ein von 0 verschiedener Eintrag steht und in den Zeilen  $r+1$  bis  $n$  alle Einträge 0 sind.
- (2) Für jedes  $i$  mit  $1 \leq i \leq r$  bezeichne  $j_i$  die niedrigste Nummer der Spalten, in denen ein Eintrag ungleich 0 steht, also  $j_i = \min\{j | b_{ij} \neq 0\}$ . Natürlich ist  $1 \leq j_i \leq n$ . Dann lautet die Stufenbedingung:  $j_1 < \dots < j_r$ .

**Bemerkung**

Für  $r = 0$  ist natürlich  $B = 0$ . Die oben durch \* markierten Einträge sind genau die Elemente  $b_{1j_1}, \dots, b_{rj_r}$ . Sie heißen **Pivots** (Angelpunkte) bzw. Pivotelemente von  $B$ .

**Beispiel****Leo ergänzt hier ein Diagramm**

$$m = 4, n = 7, r = 3, j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 6, b_{1j_1} = 6, b_{2j_2} = 5, b_{3j_3} = 5$$

**Folgerung**

Sei  $B = (b_{ij})$  eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann bilden die ersten  $r$  Zeilenvektoren  $B_{1\bullet}, \dots, B_{r\bullet}$  von  $B$  eine Basis des Zeilenraums  $\text{ZR}(B)$  und es gilt  $\dim(\text{ZR}(B)) = r$ .

Beweis:

$\alpha_1 \cdot B_{1\bullet} + \dots + \alpha_r \cdot B_{r\bullet} = 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot b_{1j_1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ , da  $b_{1j_1} \neq 0$ . Also folgt:  
 $\alpha_2 \cdot B_{2\bullet} + \dots + \alpha_r \cdot B_{r\bullet} = 0 \Rightarrow \alpha_2 \cdot b_{2j_2} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ , da  $b_{2j_2} \neq 0$ . Usw. bis letztendlich folgt  $\alpha_r = 0$ .

**Definition 4.3**

Folgende Operationen bezeichnet man als **elementare Zeilenumformungen** einer Matrix:

- (I) Multiplikation einer  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit einem Skalar  $\alpha \in K, \alpha \neq 0$ .
- (II) Addition der  $j$ -ten Zeile von  $A$  zur  $i$ -ten Zeile von  $A$  wobei  $i \neq j$ .
- (III) Addition der  $\alpha$ -fachen  $j$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile von  $A$  wobei  $i \neq j$ .
- (IV) Vertauschen der  $i$ -ten Zeile mit der  $j$ -ten Zeile wobei  $i \neq j$ .

**Bemerkung**

Die elementaren Umformungen (III) und (IV) kann man durch Kombination der Umformungen (I) und (II) erhalten

**Lemma 4.4**

Entsteht die Matrix  $B$  aus der Matrix  $A$  durch elementare Zeilenumformungen, so ist:

$$ZR(B) = ZR(A)$$

**Beweis**

Nach der Bemerkung reicht es die Umformungen (I) und (II) zu betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

1) Sei  $B = A_I$ :

$$v \in ZR(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha a_i + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für  $v \in ZR(B) = \text{span}(a_1, \dots, \alpha a_i, \dots, a_m)$ :

$$\begin{aligned}
v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (\alpha a_i) + \cdots + \alpha_m a_m \\
&= \alpha_1 a_1 + \cdots + (\alpha_i \alpha) a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A)
\end{aligned}$$

Also ist  $ZR(B) = ZR(A)$ .

**2) Sei  $B = A_{II}$ :**

$$v \in ZR(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

$$\begin{aligned}
\implies v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\
&= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (a_i + a_j) + \cdots + (\alpha_j - \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
v &\in ZR(B) \in \text{span}(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_m) \\
\implies v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (a_i + a_j) + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\
&= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + (\alpha_j + \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A)
\end{aligned}$$

Also ist  $ZR(A) = ZR(B)$ .

### Satz 4.5

Jede Matrix  $A$  kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix  $\tilde{A}$  in Zeilenstufenform überführt werden.

### Beispiel

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B
\end{aligned}$$

Also ist  $(b_1, b_2, b_3)$  mit:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $U = \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ .

### Korollar 4.6

Für Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in K^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $(v_1, \dots, v_n)$  ist Basis von  $K^n$ .
- 2) Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$  lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix überführen und alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind  $\neq 0$ .