1 6. Lineare Abbildungen und Matrizen

1.1 Erinnerung

- Begriff der linearen Abbildung $f : V \to W$ und die Begriffe Isomorphismus, Endomorphismus, Automorphismus
- Bisher bewiesene Eigenschaften: Satz 1.11 und Folgerungen daraus, $f(V) = Imf \subseteq W$ und $f^{-1}(\{0\}) = Kerf \subseteq V$ sind UVR, f surjektiv $\iff Imf = W, f$ injektiv $\iff Kerf = \{0\}$

1.2 Lemma 6.1

Ist $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung, so gilt: $v_1, ..., v_n \in V$ linear unabhängig $\implies f(v_1), ..., f(v_n) \in W$ linear unabhängig.

1.3 Beweis

$\alpha_1 \cdot f(v_1) + ... + \alpha_n \cdot f(v_n) = 0$
$\implies f(\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n) = 0$, da f linear
$\implies \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$, da f injektiv
$\implies \alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0$, da $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig.

1.4 Satz 6.2

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $dimV$ endlich. Sind Basen $(v_1, ..., v_k)$ von $Kerf$ und $(w_1, ..., w_r)$ von Imf sowie beliebige Vektoren $u_1, ..., u_r$ mit $f(u_i) = w_i$ für $i = 1, ..., r$ (also Urbilder der Basisvektoren von Imf gegeben, so ist $\mathcal{A} = (u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_k)$ eine Basis von V. Insbesondere folgt daraus die Dimensionsformel:

$$dimV = dim(Kerf) + dim(Imf)$$

1.5 Beweis

(1) $\mathcal{A}$ ist ein Erzeugendensystem von V :
Sei $v \in V$ beliebig. Dann ist $f(v) \in Imf$. da $w_1, ..., w_r$ Basis von Imf, folgt: Es existieren $\alpha_1, ..., \alpha_r \in K$ mit $f(v) = \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r$. Mit diesen Skalaren setze $v' := \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_r \cdot u_r$. Dann gilt:
$f(v') = f(\alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_r \cdot u_r)$
$= \alpha_1 \cdot f(u_1) + ... + \alpha_r \cdot f(u_r)$
$= \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r$
$= f(v)$

Daraus folgt: $f(v - v') = 0$, d.h. $v - v' \in Kerf$
Da $v_1, ..., v_k$ Basis von $Kerf$, folgt: Es existieren $\beta_1, ..., \beta_k \in K$ mit $v - v' = \beta_1 \cdot v_1 + ... + \beta_k \cdot v_k$
Insgesamt folgt: $v = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_r \cdot u_r + \beta_1 \cdot v_1 + ... + \beta_k \cdot v_k, v \in span(\mathcal{A})$.

(2) $\mathcal{A}$ ist linear unabhängig:
$\circledast \mu_1 \cdot u_1 + ... + \mu_r \cdot u_r + \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_k \cdot v_k = 0$
$\implies f(\mu_1 \cdot u_1 + ... + \mu_r \cdot u_r + \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_k \cdot v_k) = f(0) = 0$
$\implies \mu_1 \cdot f(u_1) + ... + \mu_r \cdot f(u_r) + \lambda_1 \cdot f(v_1) + ... + \lambda \cdot f(v_k) = 0$
$\implies \mu_1 \cdot w_1 + ... + \mu_r \cdot w_1 = 0$, da $f(v_i) = 0$
$\implies \mu_1 =, ..., \mu_r = 0$, da $w_1, ... w_r$ linear unabhängig.
Also gilt wegen $\circledast : \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_k \cdot v_k = 0$
$\implies \lambda_1 = 0, ..., \lambda_k = 0$, da $v_1, ..., v_k$ linear unabhängig

(3) Dimensionformel:
$\mathcal{A} = (u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_k)$ Basis von V mit $r = dim(Imf)$ und $k = dim(Kerf)$
$\implies dimV = r + k$

1.6 Korollar

Seien V, W endlich-dimensionale VR, $dimV = dimW$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist injektiv
(2) f ist surjektiv
(3) f ist Isomorphismus

1.7 Satz 6.3

Seien V, W VR, $v_1, ..., v_r \in V$ und $w_1, ..., w_r \in W$. Dann gilt:

(1) $v_1, ..., v_r$ linear unabhängig $\implies$ es gibt mindestens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, ..., r$
(2) $v_1, ..., v_r$ Basis von $V \implies$ es gibt genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, ..., r$. Dabei hat diese lineare Abbildung folgende Eigenschaften:

(a) $Imf = span(w_1, ..., w_r)$
(b) f injektiv $\iff w_1, ..., w_r$ linear unabhängig

1.8 Beweis

(2) Sei $(v_1, ..., v_r)$ eine Basis von V. Seie $v \in V$ beliebig.
$\implies v = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_1 \cdot v_r$
Da $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, ..., r$ und f linear sein soll, gilt:
$f(v) = f(\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_r \cdot v_r)$
$= \alpha_1 \cdot f(v_1) + ... + \alpha_r \cdot f(v_r)$
$= \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r$
Es gibt also höchstens eine solche Abbildung, nämlich gerade bestimmte.
Mindestens eine lineare Abbildung?
(L1)$f(v + v') = f(\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_r \cdot v_r + \alpha'_1 \cdot v_1 + ... + \alpha'_r \cdot v_r)$
$= f((\alpha_1 + \alpha'_1) \cdot v_1 + ... + (\alpha_r + \alpha'_r) \cdot v_r)$
$= (\alpha + \alpha'_1) \cdot w_1 + ... + (\alpha_r + \alpha'_r) \cdot w_r$
$= \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r + \alpha'_1 \cdot w_1 + ... + \alpha'_r \cdot w_r$
$= f(v) + f(v')$
(L2) $f(\alpha \cdot v) = f(\alpha \cdot \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha \cdot \alpha_r \cdot v_r)$
$= \alpha \cdot \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha \cdot \alpha_r \cdot w_r$
$= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r$
$= \alpha \cdot f(v)$
Nachzuweisen sind noch (a) und (b):

(a) $v \in V \implies f(v) = f(\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_r \cdot v_r) = \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r \in span(w_1, ..., w_r)$
Also gilt: $Imf \subseteq span(w_1, ..., w_r)$
$w \in span(w_1, ..., w_r) \implies w = \lambda_1 \cdot w_1 + ... + \lambda_r \cdot w_r$
$\implies w = f(\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_r \cdot v_r) \in Imf$
Also gilt: $span(w_1, ..., w_r) \subseteq Imf$

(b) " $\Rightarrow$: Lemma 6.1
" $\Leftarrow$ " : Sei $v = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_r \cdot v_r \in V$ und $f(v) = 0$
$\implies \alpha_1 \cdot w_1 + ... + \alpha_r \cdot w_r = f(v) = 0 \implies \alpha_1 = 0, ..., \alpha_r = 0$, da $w_1, ..., w_r$ linear unabhängig $\implies v = 0 \implies Kerf = 0$

(1) $v_1, ..., v_r$ linear unabhängig $\overset{3.14}{\implies}$ $v_1, .., v_r$ kann ergänzt werden zu einer Basis $(v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ von V.
Wählen wir nun beliebig zu $w_1, ..., w_r$ weitere Vektoren $w_{r+1}, ..., w_r$, so können wir nach (2) genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ angeben, für die $f(v_i) = w_i, i = 1, ..., r, r + 1, ..., n$, gilt.

1.8.1 Bemerkung

$n - r$ ist ein Maß dafür, wie weit f davon entfernt ist, eindeutig zu sein.

1.9 Korollar A

Sind V und W endlich-dimensionale VR, so gilt:
Es gibt einen Isormorphismus $f : V \to W$ genaz dann, wenn $dimV = dimW$.

1.10 Beweis

" $\Rightarrow$ " : $f : V \to W$ Isomorphismus $\implies dim(Kerf) = 0$ und $dim(Imf) = dimW \overset{6.2}{\implies} dimv = dimW$
" $\Leftarrow$ " : $dimV = dimW \implies V$ und W haben Basen gleicher Länge n, etwa $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ Basis von W. Nach 6.3 gibt es daher (genau) einen Isomorphismus $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i, i = 1, ..., n$.

1.11 Korollar B

Sei V ein VR und $dimV = n$. Dann gibt es zu jeder Wahl einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ von V genau einen Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$ für $i = 1, ..., n$.
Bezüglich der Basis $\mathcal{B}(v_1, .., v_n)$ ist jeder Vektor $v \in V$ eindeutig gegeben durch seine Darstellung $v = x_1 \cdot v_1 + ... + x_n \cdot v_n$.
Definitionsgemäß gilt dann für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$:
$\Phi_{\mathcal{B}}(x) = \Phi_{\mathcal{B}}(x_1 \cdot e_1 + ... + x_n \cdot e_n) = x_1 \cdot v_1 + ... + x_n \cdot v_n = v$
Das bedeutet: Unter dem Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}}$ entspricht der Vektor $v = x_1 \cdot v_1 + ... + x_n \cdot v_n \in V$ dem Vektor $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

1.12 Definition 6.4

Sei V ein KVR und $dimV = n$. Dann heißt der zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ von V eindeutig bestimmte Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$ für $i = 1, ..., n$ das durch $\mathcal{B}$ bestimmte Koordinatensystem in V. Für $v = x_1 \cdot v_1 + ... + x_n \cdot v_n \in V$ heißt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ die Koordinatendarstellung von v bzgl. $\mathcal{B}$ und $x_1, ..., x_n$ heißten die Koordinaten von v.
(Zur Berechnung: $(v_1, ..., v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$)

1.13 Lemma 6.5

Zu jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ gibt es genau eine Matrix $A \sim (m, n)$ sodass $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$.

1.14 Beweis

Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis von K^n und sei $f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, da $A \cdot x = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = x_1 \cdot f(e_1) + ... + x_n \cdot f(e_n) = f(x)$

1.15 Satz 6.6

Seien V und W KVR, $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_m)$ Basis von W. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ gneau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{(m,n)}$, sodass $f(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$ für $j = 1, ..., n$.
Die Matrix, die f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellt, bezeichnet man mit $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ und nennt sie dia darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

1.16 Beweis

Da $\mathcal{B}$ Basis, ist zu jedem $f(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$ die Linearkombination eindeutig bestimmt und damit die j-te Spalte von A. Folglich ist $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ eindeutig bestimmt.

1.17 Folgerung

Seien V, W KVR, $dimV = n, dimW = m, \mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $V, \mathcal{B} = (w_1, ..., w_m)$ eine Basis von $W, \Phi_{\mathcal{B}}(e^{(n)}_j) = v_j$ und $\Phi_{\mathcal{B}} : K^m \to W$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e^{(m)}_i = w_i$ seien die durch die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bestimmten Koordinatensysteme in V bzw. W. Dann erhält man für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)"'] & V \arrow[d, "f"] \\ K^m \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{B}}"] & W \end{tikzcd}$$

wobei $\Phi_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = f \circ \Phi_{\mathcal{A}}$.
Oder gleichbedeutend: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}$
Man sagt kurz: Das Diagramm ist kommutativ.

1.18 Beweis

Nach Satz 6.3 genügt es zu zeigen, dass $\Phi_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ und $f \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ auf der kanonischen Basis $(e_1^{(n)}, ..., e_n^{(n)})$ von K^n übereinstimmen. Setze $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) =: A$.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{B}}(A(e_j^{(n)})) = \Phi_{\mathcal{B}}(A_{\bullet j}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i \\ f(\Phi_{\mathcal{A}}(e_j^{(n)})) = f(v_j) &\overset{6.6}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot w_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \textit{Gleichheit}$$

1.18.1 Bemerkung

Ist$W = V$, als $f : V \to V$ ein Endomorphismus, so wählt man im Allgemeinen $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
Bezeichnung: $M_{\mathcal{A}}(f)$ statt $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$.
Die Matrix der identischen Abbildung $id_V : V \to V$ mit $id_V(v) = v$ bzgl. einer Basis $\mathcal{A}$ in V ist $M_{\mathcal{A}}(id_V) = I_n$.

1.18.2 Beispiel

$\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^2$
lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_1) = 2 \cdot w_1 + w_2, f(v_2) = w_1 - w_2, f(v_3) = w_1 - 2 \cdot w_2$
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
$\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi_{\mathcal{A}}(e_i) = v_i$
$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \overset{\Phi_{\mathcal{A}}}{\mapsto} \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3$
$\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e_j) = w_j$
$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \overset{\Phi_{\mathcal{B}}}{\mapsto} \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2$

Nach der Folgerung gilt dann: $\Phi_{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}) = f(\Phi_{\mathcal{A}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix})$

Sei $v = -2 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3$. Bestimme $f(v)$:

$f(v) = f(-2 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3)$

$= f(\Phi_{\mathcal{A}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

$= \Phi_{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix})$

$= \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix})$

$= \Phi_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= -3 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2$

1.19 Korollar (zu Satz 6.6)

Sei $f : V \to W$ linear, $dimV = n, dimW = m$ und $dim(Imf) = r$. Dann gibt es Basen $\mathcal{A}$ (von V) und $\mathcal{B}$ (von W), sodass gilt.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (m, n)$$

1.20 Beweis

Nach Satz 6.2 gibt es eine Basis $\mathcal{A} = (u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-r})$ von V mit $(v_1, ..., v_{n-r})$ ist eine Basis von $Kerf$ und $(w_1 = f(u_1), ..., w_r = f(u_r))$ ist eine Basis von Imf. Wir ergänzen $(w_1, ..., w_r)$ zu einer Basis von $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_m)$ von W (mit dem Basisergänzungssatz). Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} f(u_j) = w_j \text{ für } j = 1, ..., r \\ f(v_j) = 0 \text{ für } j = 1, ..., n-r \end{aligned}\right\} \implies M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.21 Satz 6.7

Seien U, V, W KVR mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und seien $g : U \to V, f : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)$

1.22 Beweis (Hier fehlen noch die Zahlen und die Klammer im DIagramm)

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)"] \arrow[dd, "M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g\circ f)"'] & & & U \arrow[dl, "g"] \arrow[dd, "g\circ f"] \\
& K^m \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dl, "M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)"] & V \arrow[dr, "f"] & \\
K^n \arrow[rrr, "\Phi_{\mathcal{C}}"] & & & W
\end{tikzcd}$$

Zz: Das Diagramm ⑤ ist kommutativ
Die Diagramme ①, ② und ③ sind kommutativ nach Definition der darstellenden Matrizen.
Das Diagramm ④ ist natürlich kommutativ.
Damit folgt: $\Phi_{\mathcal{C}} \circ M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)$
$\overset{2}{=} f \circ \Phi_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)$
$\overset{1}{=} f \circ g \circ \Phi_{\mathcal{A}}$
$\overset{3}{=} \Phi_{\mathcal{C}} \circ M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g)$
Da $\Phi_{\mathcal{C}}$ Isomorphismus folgt: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g)$

1.23 Folgerung

Sei V ein KVR mit der Basis $\mathcal{B}$ und seien $f, g : V \to V$ Endomorphismen. Dann gilt
$M^{\mathcal{B}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(g)$.