1 5. Lineare Gleichungssysteme

Nach [Lemma 1.8] und [Lemma 4.4] definiert jede Matrix $A : K^n \to K^m$ durch $x \mapsto Ax$.

1.1 Defininition 5.1

Ist $A = (a_{ij}) \sim (m, n)$ eine Matrix und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, so heißt:

$$Ax = b \iff \begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Ist $b \neq 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**, andernfalls **homogen**. $Ax = 0$ heißt, dass zu dem inhomogenen System gehörende homogene lineare Gleichungssystem.

Die Menge $\mathbb{L}(A, b) = \{x \in K^n | Ax = b\} \subset K^n$ heißt der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ($b = 0$ oder $b \neq 0$).

A heißt die **Koeffizientenmatrix**, die Einträge a_{ij} **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems. Die Matrix $(A|b)$ heißt die **erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems** $Ax = b$.

1.1.1 Bemerkung

Bezeichnet $f : K^n \to K^m$ mit $f(x) = Ax$ die durch $A \sim (m, n)$ definiertes lineare Abbildung, so gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) = f^{-1}(b) \text{ (Menge der Urbilder von b unter f)}$$
$$\mathbb{L}(A, 0) = Kerf$$

1.1.2 Beispiel

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \hat{=} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{erweiterte Matrix } (A|b)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

1.2 Satz 5.2

Gegeben sei das LGS $A \cdot x = b$, wobei $A \sim (m, n)$. Sei r der Spaltenrang von A, d.h. $r = dim(SR(A))$. Dann gilt:

1) $\mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$ ist $(n - r)$-dimensionaler UVR
2) $\mathbb{L} = \emptyset$ oder $\mathbb{L}(A, b)$ hat folgende Form:

$$\mathbb{L}(A, b) = v + \mathbb{L}(A, 0) \text{ , wobei } v \in \mathbb{L}(A, b) \text{ eine beliebige Lösung ist}$$

1.2.1 Beweis

(1) Sei $f : K^n \to K^m$ die durch A definierte lineare Abbildung mit $f(x) = A \cdot x$. Die Spalten von A sind genau die Bilder $f(e_j)$ der Standardbasisvektoren: $f(e_j) = A \cdot e_j = A_{\cdot j}$.
Daher sind die Spaltenvektoren von A ein EZS von $Im(f)$, d.h. es gilt $Im(f) = SR(A)$. Daraus folgt $dim(Im(f)) = r$.
Mit der Dimensionsformel (siehe 6.2) folgt:

$$dim(K^n) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \iff n = dim(Ker(f)) + r$$

Daraus folgt: $dim(Ker(f)) = n - r$.
Da $Ker(f) = \mathbb{L}(A, 0) \subseteq K^n$ ist UVR mit $dim(\mathbb{L}(A, 0)) = n - r$.

(2) Sei $w \in \mathbb{L}(A, 0)$ und $v \in \mathbb{L}(A, b)$, d.h. $A \cdot w = 0$ und $A \cdot v = b$.
$\implies A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b \quad \implies v + w \in \mathbb{L}(A, b)$
$\implies v + \mathbb{L}(A, 0) \subseteq \mathbb{L}(A, b)$
Sei $v' \in \mathbb{L}(A, b)$ eine weitere Lösung, d.h. $A \cdot v' = b$.
$\implies A \cdot (v - v') = A \cdot v - A \cdot v' = b - b = 0 \quad \implies v - v' \in \mathbb{L}(A, 0)$
$\implies v' \in v + \mathbb{L}(A, 0) \quad \implies \mathbb{L}(A, b) \subseteq v + \mathbb{L}(A, 0)$

1.2.2 Bemerkung

- $\mathbb{L}(A,0) \neq \emptyset$, da $0 \in \mathbb{L}(A,0)$
- 0 heißt die triviale Lösung des homogenen Systems.
- Ein inhomogenes System hat nicht immer Lösungen.

1.3 Satz 5.3

Für ein inhomogenes LGS $A \cdot x = b$ mit $A \sim (m,n)$ gilt:

$$\mathbb{L}(A,b) \neq \emptyset \iff \text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}((A|b))$$

1.3.1 Beweis

Definiere: $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Rg}(A)$, $\text{Spaltenrang}((A|b)) = \text{Rg}((A|b))$
Mit $\text{Rg}(A) = r$ gilt: $r \leq Rg((A|b)) \leq r+1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(A,b) \neq \emptyset &\iff \exists v \in K^n \text{ mit } A \cdot v = b \\
&\iff v_1 \cdot A_{\bullet 1} + \cdots + v_n \cdot A_{\bullet n} = b \\
&\iff b \text{ ist Linearkombination der Spalten von } A \\
&\iff b \text{ ist Linearkombination der } r \text{ linear unabhängigen Spalten von } A \\
&\iff Rg((A|b)) = r
\end{aligned}$$

1.4 Lemma 5.4

Sei $A \cdot x = b$ ein LGS und die Koeffizientenmatrix A in Zeilenstufenform, Pivots in den ersten r Spalten sitzen, $a_{11} \neq 0, \ldots, a_{rr} \neq 0, r \leq m$ und $r \leq n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & & & & b_1 \\
 & a_{22} & & & b_2 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
 & & & a_{rr} & b_r \\
\hline
 & & & & b_{r+1} \\
 & 0 & & & \vdots \\
 & & & & b_m
\end{array}\right)$$

Dann gilt:

(1) Ist $b_i \neq 0$ für ein i mit $r+1 \leq i \leq m$, so hat das LGS keine Lösung, da $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$ durch kein n-Tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ erfüllbar ist.

(2) Seien $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$. Dann hat das LGS Lösungen, die man wie folgt erhält:
Wir setzen $k = n - r$ und wählen für die Unbekannten $x_{r+1}, \ldots, x_n$ Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, d.h. setze $x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_k$. Die Parameter dürfen unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen. Die übrigen Variablen $x_1, \ldots, x_r$ kann man nun eindeutig in Abhängigkeit vo den Parametern berechnen. Das geschieht wie folgt:
r-te Gleichung: $a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} \cdot \lambda_1 + \ldots + a_{rn} \cdot \lambda_k = b_r$
$a_{rr} \neq 0 \implies x_r = \frac{1}{a_{rr}} \cdot (b_r - a_{rr_1} \cdot \lambda_1 - \ldots - a_{rn} \cdot \lambda_k)$
Man setzt x_r in die $(r-1)$-te Gleichung ein und berechnet man aus der ersten Gleichung x_1.

(3) Ist $r = m$, so kann man keinen Parameter einführen. Es gibt dann eine einzige Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$, d.h. das LGS ist dann eindeutig lösbar.

1.4.1 Beispiel

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{array}{cccccc|cc} 0 & & 2 & 0 & 4 & 60 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$