1 Kapitel 2: Matrizen, Rechnen mit Matrizen, spezielle Matrizen

1.1 Definition 2.1

Sei A $\in K^{m\times n}$ eine Matrix. Die Matrix, deren Spalten die Zeilen von A sind, heißt die **Transponierte von A** und wird mit A^T (oft auch $A^{'}$ oder A^t) bezeichnet. Sie ist vom Typ $n \times m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n\times m}$$

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A^T = (a_{ji})$$

1.2 Beispiele

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Jeden Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ kann man als Matrix a $\sim$ (n,1) auffassen.

Dann ist $a^T = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \sim$ (1,n).

1.3 Defintion 2.2

Sei A $\in K^{m\times n}$ eine Matrix.

$$\textbf{Zeilenvektoren: } A_{1\bullet} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ A_{m\bullet} = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^n$$

$$\textbf{Spaltenvektoren: } A_{\bullet 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ A_{\bullet n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$$

1.4 Bemerkung

Jede Matrix A $\in K^{m\times n}$ kann man auch mit Hilfe ihrer Spalten- und Zeilenvektoren wie folgt angeben werden:

$$A = (A_{\bullet 1},\ \dots\ ,\ A_{\bullet n}) \text{ Spaltendarstellung von A}$$

$$A = (A_{1\bullet},\ \dots\ ,\ A_{m\bullet}) \text{ Zeilendarstellung von A}$$

1.5 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}^T$$

$$Spaltenvektoren:\ A_{\bullet 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},\ A_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},\ A_{\bullet 3} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \ \in K^2$$

$$Zeilenvektoren:\ A_{1\bullet} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix},\ A_{2\bullet} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \ \in K^3$$

1.6 Defition 2.3

Eine Matrix A vom Typ (n,n) heißt eine **quadratische** (n-reihige) Matrix. Bei einer quadratischen (n-reihigen) Matrix A ~ (n,n) bilden die Einträge $a_{11},\ \dots\ ,\ a_{nn}$ die sogenannte **(Haupt-) Diagonale.** Eine quadratische Matrix A ~ (n,n) heißt **symmetrisch,** wenn A = A^T.

1.7 Bemerkung

Ist A ~ (n,n) quadratisch, so erhält man A^T druch Spiegelung von A an der Diagonalen. Es gilt: A = (a_{ij}) symmetrisch $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j

1.8 Lemma 2.4

Für das Transponieren gelten folgende Rechenregeln:

$$(1)\ (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(2)\ (\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$$
$$(3)\ (A^T)^T = A$$
$$(4)\ (A^T)_{j\bullet} = A_{\bullet j} \text{ und } (A^T)_{\bullet i} = A_{i\bullet}$$

Beweis:

(1) $(A+B)^T = (a_{ij}+b_{ij})^T = (a_{ji}+b_{ji}) = (a_{ji})+(b_{ji}) = (a_{ij})^T+(b_{ij})^T = A^T+B^T$

(2) und (3) analog, (4) klar nach Definition

1.9 Bemerkung

Seien A ~ (m,n) und B ~ (n,r) Matrizen. Nach 1.8 definieren A und B lineare Abbildungen $A:\ K^n \rightarrow K^m$ und $B:\ K^r \rightarrow K^n$. Betrachte die Komposition dieser beiden Abbildungen. Kann diese Komposition durch eine Matrix C ~ (m,r) dargestellt werden?

$$\begin{tikzcd} K^r \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "C"'] & K^n \arrow[d, "A"] \\ & K^m \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \overset{B}{\longmapsto} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$B \cdot x = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{r} b_{1k} \cdot x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{r} b_{nk} \cdot x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot y = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot y_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{mj} \cdot y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$C \cdot x = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & b_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{r} c_{1i} \cdot x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{r} c_{mi} \cdot x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Daher folgt:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (\sum_{k=1}^{r} b_{jk} \cdot x_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot x_k = \sum_{k=1}^{r} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}) \cdot x_k$$

$$\text{Also } z_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ik} \cdot x_k$$

.

$$\text{Insgesamt folgt: } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} (i = 1, ..., m, k = 1, ..., r).$$

1.10 Bemerkung

$$(1)\ A \cdot B = A \cdot (B_{\bullet 1} \dots B_{\bullet r}) = (A \cdot B_{\bullet 1} \dots A \cdot B_{\bullet r})$$

(2) Jeder Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ kann als Matrix vom Typ (n,1) aufgefasst werden, die Transponierte

$a^T = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ von a als Matrix vom Typ (1,n). Es gibt zwei mögliche Produkte:

• $a^T \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \in K^{1 \times 1}$ heißt **Standard-Skalarprodukt** aus K^n.

• $a \cdot b^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n \cdot b_1 & \dots & a_n \cdot b_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ heißt **Dyadisches Produkt** aus K^n.

1.11 Bemerkung

Das Produkt zweier n-reihiger quadratischer Matrizen A und B ist immer definiert, aber das Kommutativgesetzt ($A \cdot B = B \cdot A$) gilt im Allgemeinen nicht.

1.12 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Nullmatrix kann das Ergebnis der Maltrizenmultiplikation von $A \neq 0$ und $B \neq 0$ sein!

1.13 Lemma 2.6

Seien $A_1,\ A_2 \in K^{m\times n},\ B_1,\ B_2 \in K^{n\times r},\ C \in K^{r\times s},\ \alpha \in K$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

(1) Distributivgesestze

$$(a)\ A_1 \cdot (B_1 + B_2) = A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 \text{ und } (A_1 + A_2) \cdot B_1 = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1$$

$$(b)\ A_1 \cdot (\alpha \cdot B_1) = (\alpha \cdot A_1) \cdot B_1 = \alpha \cdot (A_1 \cdot B_1)$$

(2) Assoziativgesetz

Ist eines der Produkte $(A{\cdot}B){\cdot}C$, $A{\cdot}(B{\cdot}C)$ definiert, so auch das andere und es gilt: $(A{\cdot}B){\cdot}C = A{\cdot}(B{\cdot}C)$

$$(3)\ (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

(4) $A{\cdot}I_n = A = I_n{\cdot}A$ für $A \in K^{n\times n}$ mit $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ **Einheitsmatrix.**

1.14 Bemerkung

Es gelten keine Kürzungsregeln:

- $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ oder $D = 0$
- $A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow B = C$

1.15 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.16 Definition 2.7

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ heitßt...

obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle i > j:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle i < j:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kurz: diag(a_{11}, ... , a_{nn})

1.17 Lemma 2.8

Das Produkt zweier oberer (bzw. unterer) Dreiecksmatrizen ist eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix. Das Produkt zweier Diagonalmatrizen ist eine Diagnonalmatrix.

1.18 Definiton 2.9

Sei $A = (a_{ij}) \sim$ (n,n) eine quadratische Matrix. Dann heißt $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die **Spur** von A ($\rightarrow$ trace).

1.19 Beispiel

$$tr\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 4 & 1 & 7\\ 2 & 9 & 3\end{pmatrix} = 2+1+3 = 6$$

1.20 Satz 2.10

Seien A, B ~ (n,n) quadratische Matrizen und sei $\alpha \in K$. Dann gilt:

$$(1)\ tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

$$(2)\ tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot tr(A)$$

$$(3)\ tr(A^T) = tr(A)$$

Seien A ~ (m,n) und B ~ (n,m) Matrizen. Dann sind $A \cdot B$ und $B \cdot A$ quadratische Matrizen und es gilt: $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

1.21 Beweis:

(1), (2), (3) sind klar.

(4) Sei A = (a_{ij}) und B = (b_{ij}). Dann gilt:

$$tr(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki} \cdot a_{ik} = tr(B \cdot A)$$

1.22 Folgerung

Sind A, B, C Matrizen, sodass $A \cdot B \cdot C$ definiert und quadratisch ist, so sind auch $B \cdot C \cdot A$ und $C \cdot A \cdot B$ definiert und quadratisch und es gilt: tr($A \cdot B \cdot C$) = tr($B \cdot C \cdot A$) = tr($C \cdot A \cdot B$).

1.23 Definition 2.11

Für i, j ∈ ℕ versteht man unter **Kronecker-Delta** die Zahl

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ wenn i = j} \\ 0 \text{ wenn } i \neq j \end{cases}$$

1.24 Beispiel

Sei I_n ~ (n,n) die Einheitsmatrix. Dann gilt: $I_n = (\delta_{ij})$ ~ (n,n).

1.25 Definition 2.12

Eine Matrix kann man durch Einfügen von horizontalen und vertikalen Trennungslinien in Untermatrizen zerlegen. Man nennt eine solche Zerlegung eine **Partitionierung** der Matrix und bezeichnet die Matrix dann als eine **partitionierte Matrix**. Die Untermatrizen einer partitionierten Matrix bezeichnet man als **Blöcke**.

1.26 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } A_{11} \sim (2,3),\ A_{12} \sim (2,1),\ A_{21} \sim (1,3),\ A_{22} \sim (1,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \text{ mit } r_i \sim (1,4)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \text{ mit } c_i \sim (3,1)$$

1.27 Lemma 2.13

Seien A, B ~ (m,n) partitionierte Matrizen mit derselben Partitionierung, d.h. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ mit $A_{11} \sim (m_1, n_1) \sim B_{11},\ A_{22} \sim (m_2, n_2) \sim B_{22},\ A_{12} \sim (m_1, n_2) \sim B_{12},\ A_{21} \sim (m_2, n_1) \sim B_{21},\ m_1 + m_2 = m$ und $n_1 + n_2 = n$. Dann gilt:

$$\bullet A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot A_{11} & \alpha \cdot A_{12} \\ \alpha \cdot A_{12} & \alpha \cdot A_{22} \end{pmatrix}$$

1.28 Lemma 2.14: Multiplikation und Transponierte

Seien A ~ (m,n) und C ~ (n,p) partitionierte Matrizen mit

$$\bullet A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

mit $A_{11} \sim (m_1, n_1),\ A_{22} \sim (m_2, n_2),\ A_{12} \sim (m_1, n_2),\ A_{21} \sim (m_2, n_1),\ m_1{+}m_2 = m,\ n_1{+}n_2 = n.$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

mit $C_{11} \sim (n_1, p_1),\ C_{22} \sim (n_2, p_2),\ C_{12} \sim (n_1, p_2),\ C_{21} \sim (n_2, p_1),\ n_1{+}n_2 = n, p_1{+}p_2 = p.$

Dann gilt:

$$\bullet A \cdot C = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot C_{11} + A_{12} \cdot C_{21} & A_{11} \cdot C_{12} + A_{12} \cdot C22 \\ A_{21} \cdot C_{11} + A_{22} \cdot C_{21} & A_{21} \cdot C_{12} + A_{22} \cdot C_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$

Was bedeutet es, wenn f: $K^n \to K^n$ (bzw. $A \in K^{n \times n}$) ein Isomorphismus ist?

Es gibt eine lineare Abbildung $f^{-1} : K^n \to K^n$ (bzw. $\tilde{A} \in K^{n \times n}$) mit $f^{-1} \circ f = Id_{K^n} = f \circ f^{-1}$ (bzw. $\tilde{A} \cdot A = I_n = A \cdot \tilde{A}$).

1.29 Definiton 2.15

Eine quadratische Matrix $A \ \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar,** wenn es eine Matrix $\tilde{A} \in K^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot \tilde{A} = I_n = \tilde{A} \cdot A$.

1.30 Lemma 2.16

Ist A ~ (n,n) invertierbar, so ist $\tilde{A}$ ~ (n,n) mit $A \cdot \tilde{A} = I_n = \tilde{A} \cdot A$ eindeutig bestimmt.

Beweis:
Sei $A{\cdot}\tilde{A} = I_n = \tilde{A}{\cdot}A$ und B eine weitere Matrix mit $A{\cdot}B = I_n = B{\cdot}A$. Dann gilt:

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot \tilde{A}) = (B \cdot A) \cdot \tilde{A} = I_n \cdot \tilde{A} = \tilde{A}$$

1.31 Definition 2.17

Sei A ~ (n,n) invertierbar. Dann heißt die eindeutig bestimmte Matrix $\tilde{A}$ ~ (n,n) mit $A \cdot \tilde{A} = I_n = \tilde{A} \cdot A$ die **Inverse** von A. Sie wird mit A^{-1} bezeichnet.

1.32 Lemma 2.18

Seinen A, B ~ (n,n) invertierbare Matrizen. Dann ist $A \cdot B$ invertierbar und es gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Beweis:
Zz: $B^{-1} \cdot A^{-1}$ hat die Eigenschaft einer Inversen zu $A \cdot B$:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

1.33 Bemerkung

Durch Induktion folgt allgemein:
$A_1,\ \ldots\ ,\ A_n$ invertierbar $\Rightarrow (A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$

1.34 Lemma 2.19

Sei $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, wobei $A_{11} \ \sim\ (n_1, n_1)$ und $A_{22} \ \sim\ (n_2, n_2)$ invertierbare Matrizen sind. Dann ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$.