
VMR

Bemerkung

Die elementaren Umformungen (III) und (IV) kann man durch Kombination der Umformungen (I) und (II) erhalten

Lemma 4.4

Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen, so ist:

$$ZR(B) = ZR(A)$$

Beweis

Nach der Bemerkung reicht es die Umformungen (I) und (II) zu betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

1) Sei $B = A_I$:

$$\begin{aligned} v \in ZR(A) &= \text{span}(a_1, \dots, a_m) \\ \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha a_i + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für $v \in ZR(B) = \text{span}(a_1, \dots, \alpha a_i, \dots, a_m)$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i (\alpha a_i) + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + (\alpha_i \alpha) a_i + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist $ZR(B) = ZR(A)$.

2) Sei $B = A_{II}$:

$$v \in ZR(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i (a_i + a_j) + \dots + (\alpha_j - \alpha_i) a_j + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v \in ZR(B) &\in \text{span}(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_m) \\ \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i (a_i + a_j) + \dots + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + (\alpha_j + \alpha_i) a_j + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist $ZR(A) = ZR(B)$.

Satz 4.5

Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix \tilde{A} in Zeilenstufenform überführt werden.

Beispiel

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \boxed{} \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{}^1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \boxed{} \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{}^{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{}^{-1} \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B
 \end{aligned}$$