[TK: section heading]

Bemerkung

Die elementaren Umformungen (III) und (IV) kann man durch Kombination der Umformungen (I) und (II) erhalten

Lemma 4.4

Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen, so ist:

$$ZR(B) = ZR(A)$$

Beweis

Nach der Bemerkung reicht es die Umformungen (I) und (II) zu betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

1) Sei $B = A_I$**:**

$$\begin{aligned} & v \in ZR(A) = span(a_1, \cdots, a_m) \\ \implies & v = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_m a_m \\ & \quad = \alpha_1 a_1 + \cdots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für $v \in ZR(B) = span(a_1, \cdots, \alpha a_i, \cdots, a_m)$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i(\alpha a_i) + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + (\alpha_i \alpha) a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist $ZR(B) = ZR(A)$.

2) Sei $B = A_{II}$:

$$
\begin{aligned}
& v \in ZR(A) = span(a_1, \cdots, a_m) \\
\implies & v = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\
& \quad = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (a_i + a_j) + \cdots + (\alpha_j - \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& v \in ZR(B) \in span(a_1, \cdots, a_i + a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_m) \\
\implies & v = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (a_i + a_j) + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\
& \quad = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + (\alpha_j + \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A)
\end{aligned}
$$

Also ist $ZR(A) = ZR(B)$.

Satz 4.5

Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform überführt werden.

Beispiel

$$
a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

$$
U = span(a_1, a_2, a_3, a_4)
$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Also ist (b_1, b_2, b_3) mit:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U = span(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Korollar 4.6

Für Vektoren $v_1, \cdots, v_n \in K^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(v_1, \cdots, v_n)$ ist Basis von K^n.
2) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$ lässt sich durch elemntare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix überführen und alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind $\neq 0$.

5. Lineare Gleichungssysteme

Nach [Lemma 1.8] definiert jede Matrix $A : K^n \to K^m$ durch $x \mapsto Ax$.

Defininition 5.1

Ist $A = (a_{ij}) \sim (m, n)$ eine Matrix und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, so heißt:

$$Ax = b \iff \begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Ist $b \neq 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**, andernfalls **homogen**. $Ax = 0$ heißt, dass zu dem inhomogenen System gehörende homogene lineare Gleichungssystem.

Die Menge $\mathbb{L}(A, b) = \{x \in K^n | Ax = b\} \subset K^n$ heißt der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ($b = 0$ oder $b \neq 0$).

A heißt die **Koeffizientenmatrix**, die Einträge a_{ij} **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems. Die Matrix $(A|b)$ heißt die **erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems** $Ax = b$.

Bemerkung

Bezeichnet $f : K^n \to K^m$ mit $f(x) = Ax$ die durch $A \sim (m, n)$ definiertes lineare Abbildung, so gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) = f^{-1}(b) \text{ (Menge der Urbilder von b unter f)}$$
$$\mathbb{L}(A, 0) = Kerf$$