

# 1 VMR

## 2

### 2.1 Bemerkung

Die elementaren Umformungen (III) und (IV) kann man durch Kombination der Umformungen (I) und (II) erhalten

### 2.2 Lemma 4.4

Entsteht die Matrix  $B$  aus der Matrix  $A$  durch elementare Zeilenumformungen, so ist:

$$ZR(B) = ZR(A)$$

#### 2.2.1 Beweis

Nach der Bemerkung reicht es die Umformungen (I) und (II) zu betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

1) Sei  $B = A_I$ :

$$v \in ZR(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha a_i + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für  $v \in ZR(B) = \text{span}(a_1, \dots, \alpha a_i, \dots, a_m)$ :

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i (\alpha a_i) + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + (\alpha_i \alpha) a_i + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist  $ZR(B) = ZR(A)$ .

2) Sei  $B = A_{II}$ :

$$v \in ZR(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

$$\begin{aligned} \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i (a_i + a_j) + \dots + (\alpha_j - \alpha_i) a_j + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v \in ZR(B) &\in \text{span}(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_m) \\ \implies v &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i (a_i + a_j) + \dots + \alpha_j a_j + \dots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + (\alpha_j + \alpha_i) a_j + \dots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist  $ZR(A) = ZR(B)$ .

## 2.3 Satz 4.5

Jede Matrix  $A$  kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix  $\tilde{A}$  in Zeilenstufenform überführt werden.

### 2.3.1 Beispiel

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U = \text{span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \xleftarrow{\begin{smallmatrix} \square \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{smallmatrix} \square^1 \\ \leftarrow_+ \end{smallmatrix} \\
\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \xleftarrow{\begin{smallmatrix} \square \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{smallmatrix} \square^{-2} \\ \leftarrow_+ \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square^{-2} \\ \leftarrow_+ \end{smallmatrix} \\
\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} & \xleftarrow{\begin{smallmatrix} \square^{-1} \\ \leftarrow_+ \end{smallmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B
\end{aligned}$$