[TK: section heading]

Bemerkung

Die elementaren Umformungen (III) und (IV) kann man durch Kombination der Umformungen (I) und (II) erhalten

Lemma 4.4

Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen, so ist:

$$ZR(B) = ZR(A)$$

Beweis

Nach der Bemerkung reicht es die Umformungen (I) und (II) zu betrachten:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

1) Sei $B = A_I$:

$$\begin{aligned} & v \in ZR(A) = span(a_1, \cdots, a_m) \\ \implies & v = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_m a_m \\ & \quad = \alpha_1 a_1 + \cdots + \frac{\alpha_i}{\alpha} \alpha a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für $v \in ZR(B) = span(a_1, \cdots, \alpha a_i, \cdots, a_m)$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i(\alpha a_i) + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + (\alpha_i \alpha) a_i + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A) \end{aligned}$$

Also ist $ZR(B) = ZR(A)$.

2) Sei $B = A_{II}$:

$$v \in ZR(A) = span(a_1, \cdots, a_m)$$

$$\begin{aligned}\implies v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (a_i + a_j) + \cdots + (\alpha_j - \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(B)\end{aligned}$$

und

$$v \in ZR(B) \in span(a_1, \cdots, a_i + a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_m)$$

$$\begin{aligned}\implies v &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i (a_i + a_j) + \cdots + \alpha_j a_j + \cdots + \alpha_m a_m \\ &= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + (\alpha_j + \alpha_i) a_j + \cdots + \alpha_m a_m \in ZR(A)\end{aligned}$$

Also ist $ZR(A) = ZR(B)$.

Satz 4.5

Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform überführt werden.

Beispiel

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U = span(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Also ist (b_1, b_2, b_3) mit:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U = span(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Korollar 4.6

Für Vektoren $v_1, \cdots, v_n \in K^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(v_1, \cdots, v_n)$ ist Basis von K^n.
2) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$ lässt sich durch elemntare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix überführen und alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind $\neq 0$.

5. Lineare Gleichungssysteme

Nach [Lemma 1.8] und Lemma 4.4 definiert jede Matrix $A : K^n \to K^m$ durch $x \mapsto Ax$.

Defininition 5.1

Ist $A = (a_{ij}) \sim (m, n)$ eine Matrix und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, so heißt:

$$Ax = b \iff \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten.

Ist $b \neq 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem **inhomogen**, andernfalls **homogen**. $Ax = 0$ heißt, dass zu dem inhomogenen System gehörende homogene lineare Gleichungssystem.

Die Menge $\mathbb{L}(A, b) = \{x \in K^n | Ax = b\} \subset K^n$ heißt der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ($b = 0$ oder $b \neq 0$).

A heißt die **Koeffizientenmatrix**, die Einträge a_{ij} **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems. Die Matrix $(A|b)$ heißt die **erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems** $Ax = b$.

Bemerkung

Bezeichnet $f : K^n \to K^m$ mit $f(x) = Ax$ die durch $A \sim (m, n)$ definiertes lineare Abbildung, so gilt:

$$\mathbb{L}(A, b) = f^{-1}(b) \text{ (Menge der Urbilder von b unter f)}$$
$$\mathbb{L}(A, 0) = Kerf$$

Beispiel

$$\begin{matrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 & = 2 \end{matrix} \quad \hat{=} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{erweiterte Matrix } (A|b)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix

Satz 5.2

Gegeben sei das LGS $A \cdot x = b$, wobei $A \sim (m,n)$. Sei r der Spaltenrang von A, d.h. $r = dim(SR(A))$. Dann gilt:

1) $\mathbb{L}(A,0) \subseteq K^n$ ist $(n-r)$-dimensionaler UVR
2) $\mathbb{L} = \varnothing$ oder $\mathbb{L}(A,b)$ hat folgende Form:

$$\mathbb{L}(A,b) = v + \mathbb{L}(A,0) \text{ , wobei } v \in \mathbb{L}(A,b) \text{ eine beliebige Lösung ist}$$

Beweis

(1) Sei $f : K^n \to K^m$ die durch A definierte lineare Abbildung mit $f(x) = A \cdot x$.
Die Spalten von A sind genau die Bilder $f(e_j)$ der Standardbasisvektoren: $f(e_j) = A \cdot e_j = A_{\cdot j}$.
Daher sind die Spaltenvektoren von A ein EZS von $Im(f)$, d.h. es gilt $Im(f) = SR(A)$. Daraus folgt $dim(Im(f)) = r$.
Mit der Dimensionsformel (siehe 6.2) folgt:

$$dim(K^n) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \iff n = dim(Ker(f)) + r$$

Daraus folgt: $dim(Ker(f)) = n - r$.
Da $Ker(f) = \mathbb{L}(A,0) \subseteq K^n$ ist UVR mit $dim(\mathbb{L}(A,0)) = n - r$.

(2) Sei $w \in \mathbb{L}(A,0)$ und $v \in \mathbb{L}(A,b)$, d.h. $A \cdot w = 0$ und $A \cdot v = b$.
$\implies A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b \quad \implies v + w \in \mathbb{L}(A,b)$
$\implies v + \mathbb{L}(A,0) \subseteq \mathbb{L}(A,b)$
Sei $v' \in \mathbb{L}(A,b)$ eine weitere Lösung, d.h. $A \cdot v' = b$.
$\implies A \cdot (v - v') = A \cdot v - A \cdot v' = b - b = 0 \quad \implies v - v' \in \mathbb{L}(A,0)$
$\implies v' \in v + \mathbb{L}(A,0) \quad \implies \mathbb{L}(A,b) \subseteq v + \mathbb{L}(A,0)$

Bemerkung

- $\mathbb{L}(A,0) \neq \varnothing$, da $0 \in \mathbb{L}(A,0)$
- 0 heißt die triviale Lösung des homogenen Systems.
- Ein inhomogenes System hat nicht immer Lösungen.

Satz 5.3

Für ein inhomogenes LGS $A \cdot x = b$ mit $A \sim (m,n)$ gilt:

$$\mathbb{L}(A,b) \neq \varnothing \iff \text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}((A|b))$$