

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

фізичний факультет
(назва факультету, інституту)

Кафедра квантової теорії поля та космофізики



ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана з навчальної роботи

Оксана МОМОТ

2022 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

(повна назва навчальної дисципліни)

для студентів

галузь знань 10 Природничі науки
(шифр і назва)
спеціальність 104 Фізика та астрономія
(шифр і назва спеціальності)
освітній рівень бакалавр
(молодший бакалавр, бакалавр, магістр)
освітня програма фізичне матеріалознавство / неметалічне
матеріалознавство
(назва освітньої програми)
вид дисципліни ОК. 1.5 обов'язкова

Форма навчання денна
Навчальний рік 2022/2023
Семестр 1-2
Кількість кредитів ECTS 8
Мова викладання, навчання та оцінювання українська
Форма заключного контролю залік

Викладачі: Вільчинський Станіслав Йосипович, Приходько Олена
Олександрівна

Пролонговано: на 20__/20__ н.р. (_____) «____» 20__ р.
(підпис, ПІБ, дата)

* на 20__/20__ н.р. (_____) «____» 20__ р.
(підпис, ПІБ, дата)

КИЇВ – 2022

Розробник(и): *Вільчинський Станіслав Йосипович, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри квантової теорії поля та космофізики*

ЗАТВЕРДЖЕНО

Зав. кафедри квантової теорії поля та космофізики



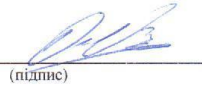
Станіслав ВІЛЬЧИНСЬКИЙ
(прізвище та ініціали)

Протокол № 17 від « 27 » травня 2022 р.

Схвалено науково - методичною комісією факультету/інституту
фізичного факультету

Протокол від « 10 » червня 2022 року № 11

Голова науково-методичної комісії



(Олег ОЛІХ)
(прізвище та ініціали)

Мета дисципліни – формування комплексу знань, вмінь і навичок фундаментальних розділів лінійної алгебри та аналітичної геометрії необхідних для володіння її апаратом та методами в процесі розв’язування прикладних задач, а також для вивчення профільних дисциплін.

1. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни (за наявності):

1. **Знати** основи алгебри, початку аналізу, тригонометрію, геометрію.
2. **Вміти** розв’язувати задачі з алгебри, геометрії, тригонометрії, планувати власну роботу і оцінювати її результати і наслідки.
3. **Володіти навичками** опрацьовувати літературу, роботи з інтерактивними і мультимедійними засобами, взаємодії з колегами під час навчання.

3. Анотація навчальної дисципліни: лінійна алгебра та аналітична геометрія є базовою математичною дисципліною, яка викладається два семестра. В рамках дисципліни студенти оволодіють основними поняттями векторної алгебри в просторі, прямих і площин, кривих і поверхонь другого порядку, теорією матриць, визначників, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, векторних просторів, векторних просторів зі скалярним добутком, лінійними оператори в евклідовому та унітарному просторах, функціями на векторних просторах.

4. Завдання (навчальні цілі): основними завданнями вивчення дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» є оволодіння необхідними теоретичними положеннями і методами курсу та застосування їх до профільних дисциплін, формування системи знань та застосування властивостей основних понять курсу для розв’язування практичних задач.

Згідно освітньо-професійної програми дисципліна забезпечує набуття здобувачами освіти наступних *компетентностей*:

Інтегральної:

Здатність розв’язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми з фізики у професійній діяльності або у процесі подальшого навчання, що передбачає застосування певних теорій і методів фізики і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

Загальних

ЗК5. Здатність приймати обґрунтовані рішення.

ЗК8. Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт.

ЗК9. Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов’язків.

ЗК12. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.

фахових:

ФК9. Здатність працювати з джерелами навчальної та наукової інформації.

ФК10. Здатність самостійно навчатися і опановувати нові знання з фізики, астрономії та суміжних галузей.

ФК14. Здатність здобувати додаткові компетентності через вибіркові складові освітньої програми, самоосвіту, неформальну та інформальну освіту.

5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
1. Знати				

1.1	поняття вектору: скалярний, векторний, мішаний та подвійний векторні добутки	<ul style="list-style-type: none">• лекції• практичні заняття• консультації• самостійна робота	<ul style="list-style-type: none">• контрольні роботи• колоквіум• тематичний контроль самостійної роботи• залікова робота• екзаменаційна робота	8
1.2	теорію матриць і визначників, систем лінійних рівнянь			8
1.3	основні властивості кривих другого порядку, прямої та площини, поверхонь обертання			8
1.4	основні поняття лінійного простору, евклідового та унітарного просторів			8
1.5	основні поняття лінійних операторів в евклідовому та унітарному просторах			8
Загалом:				40
2. Вміти				
2.1	обчислювати визначник матриці, проводити дії над матрицями, обчислювати ранг матриці, знаходити обернену матрицю	<ul style="list-style-type: none">• лекції• практичні заняття• консультації• самостійна робота	<ul style="list-style-type: none">• контрольні роботи• колоквіум• тематичний контроль самостійної роботи• залікова робота• екзаменаційна робота	8
2.2	розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь			8
2.3	аналізувати загальні рівняння на площині та у просторі, будувати криві другого порядку, проводити канонізацію кривих другого порядку			8
2.4	знаходити матрицю переходу, матрицю Грама, будувати ортонормований базис (процес Грама-Шмідта)			8
2.5	проводити обчислення власних чисел і векторів, проводити канонізацію симетричних білінійних форм			8
Загалом:				40
3. Комунікація				
3.1	здатність бути активним учасником обговорень	<ul style="list-style-type: none">• лекції• практичні заняття• консультації• самостійна робота	<ul style="list-style-type: none">• контрольні роботи• колоквіум• тематичний контроль самостійної роботи• залікова робота• екзаменаційна робота	3
3.2	презентувати результати самостійної роботи у форматі усних та/або письмових повідомлень із/без використання наочних засобів			4
3.3	майстерність методологічного сумніву висловленої позиції колег та/або авторитетного джерела			3
Загалом:				10
4. Автономність та відповідальність				
4.1	віднаходити необхідну інформацію з різних джерел	<ul style="list-style-type: none">• лекції	<ul style="list-style-type: none">• контрольні роботи	4

4.2	застосовувати отримані знання в професійній діяльності	<ul style="list-style-type: none">• практичні заняття• консультації• самостійна робота	<ul style="list-style-type: none">• колоквиум• тематичний контроль самостійної роботи• залікова робота• екзаменаційна робота	3
4.3	демонструвати вміння працювати в колективі та самостійно			3
Загалом:				10

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання (не обов'язково для вибіркових дисциплін які не входять до блоків спеціалізації)

Програмні результати навчання	Результати навчання дисципліни					1					2					3			4		
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3					
ПРН4. Вміти застосовувати базові математичні знання, які використовуються у фізиці та астрономії: з аналітичної геометрії, лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії груп, методів математичної фізики, теорії функцій комплексної змінної, математичного моделювання.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+											
ПРН8. Мати базові навички самостійного навчання: вміти відшукувати потрібну інформацію в друкованих та електронних джерелах, аналізувати, систематизувати, розуміти, тлумачити та використовувати її для вирішення наукових і прикладних завдань.															+	+	+				
ПРН16. Мати навички роботи із сучасною обчислювальною технікою, вміти використовувати стандартні пакети прикладних програм і програмувати на рівні, достатньому для реалізації чисельних методів розв’язування фізичних задач, комп’ютерного моделювання фізичних та астрономічних явищ і процесів, виконання обчислювальних експериментів.													+	+	+	+	+	+			
ПРН18. Володіти державною та іноземною мовами на рівні, достатньому для усного і письмового професійного спілкування та презентації результатів власних досліджень.													+	+	+						

7. Схема формування оцінки.

Контроль знань здійснюється за системою ECTS, яка передбачає дворівневе оцінювання засвоєного матеріалу, зокрема:

- **оцінювання теоретичної підготовки**
(результати навчання: **знати** 1.1 – 1.6), що складає 40% від загальної оцінки;
- **оцінювання практичної підготовки**
(результати навчання: **вміти** 2.1-2.6; **комунікація** 3.1-3.6; **автономність та відповідальність** 4.1-4.6), що складає 60% загальної оцінки.

7.1 Форми оцінювання студентів:

- **семестрове оцінювання** розмежоване поміж практичними заняттями, лекційними заняттями, самостійною роботою. Загалом форми викладання і навчання проводяться у форматі усних та письмових завдань, обов'язкову кількість яких оцінюють різною кількістю балів:
 - *min* – найменша кількість балів (їх отримання є свідченням, що студент приділив недостатньо уваги окремому завданню)
 - *max* – висока кількість балів (їх отримання є свідченням, що студент приділив достатньо уваги та самоорганізації для опрацювання теми)

Форми викладання і навчання	Форми контролю	Результати навчання	Кількість балів	
			min	max
Практичні завдання	Контрольна робота 1	1.1-1.5	8	15
	Контрольна робота 2	2.1-2.5		
	Контрольна робота 3	3.1-3.3		
	Контрольна робота 4	4.1-4.3		
Лекційні заняття	Модульний контроль1 Модульний контроль2	1.1-1.5 2.1-2.5 3.1-3.3 4.1-4.3	9	30
Самостійна робота	Виконання домашніх завдань	1.1-1.5 2.1-2.5 3.1-3.3 4.1-4.3	7	15
Загалом за роботу у семестрі			24	60

- враховуючи важливість даного курсу підсумкова кількість балів з дисципліни (максимум 100 балів), визначається як сума (проста або зважена) балів за систематичну роботу впродовж семестру (60 балів) та (40 балів) за екзаменаційну роботу.
- **відпрацювання пропусків** практичних занять, всі пропуски студентом без поважної причини повинні бути відпрацьовані за вимогами викладачів, які читають практичні.
- **допуском студента до підсумкового оцінювання** є виконання обов'язкових самостійних завдань, написання контрольних робіт, відпрацювання пропусків практичних занять та набирання мінімальної (**24**) кількості балів.
- **підсумкове оцінювання у формі екзамену (заліку)** здійснюється у формі письмового екзамену. Білет включає два теоретичних питання і три практичних. Загальна кількість балів за екзаменаційну роботу складає 40 балів (20 +4+6+10).
Оцінка за екзаменаційну роботу вноситься у екзаменаційну відомість тільки якщо вона рівна або більша 24 балам (тобто від 24 до 40). Якщо загальна оцінка за екзаменаційну

роботу буде меншою 24 балів, тоді у екзаменаційну відомість вноситься 0 балів і іспит є нескладеним і загальна оцінка за навчальну дисципліну є «незадовільною».

-результуюча оцінка з дисципліни ставиться за результатами II-го семестру і екзаменаційної роботи.

7.2 Організація оцінювання:

Форма оцінювання	Форми викладання і навчання	Форми контролю	Графік оцінювання	
			конкретизований	загальний
Семестрова	Практичні завдання	Контрольна робота 1	Після теми 1-4	Впродовж теоретичного навчання у семестрі
		Контрольна робота 2	Після теми 5-6	
		Контрольна робота 3	Після теми 7-8	
		Контрольна робота 4	Після теми 9-10	
	Лекційні заняття	Модульний контроль 1 Модульний контроль 2	I-ий семестр в кінці Жовтня II-ий семестр в кінці Квітня	
		Виконання домашніх завдань	В рамках теоретичного навчання, до початку семестрового контролю	
Підсумкова	Письмова робота	Екзаменаційна робота	Залежно від графіку навчання	Впродовж семестрового контролю

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59
Зараховано / Passed	60-100
Не зараховано / Fail	0-59

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ п/п	Назва лекції	Кількість годин		
		лекції	практичні	С/Р
Змістовий модуль 1 Теорія матриць.				
1	Тема 1 Матриці. Пропедевтика.	4	6	8
2	Тема 2. Детермінант (визначник) квадратної матриці. Матриці і визначники.	10	8	16
	Тема 3. Ранг матриці.	4	2	6
	Тема 4. Множення матриць	2	2	4
	Модульна контрольна робота 1		1	4
Змістовий модуль 2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)				
3	Тема 5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	10	4	12
4	Тема 6. Лінії та поверхні першого порядку		6	6
	Колоквіум і модульна контрольна робота 2		1	3
Всього		30	30	59
Змістовий модуль 3 Лінійні простори				
5	Тема 7 Лінійні простори Лінії та поверхні другого порядку.	8	8	12
6	Тема 8. Лінійні оператори в евклідових та унітарних просторах. Функції на векторних просторах.	6	8	13
	Модульна контрольна робота 3		2	4
Змістовий модуль 4 Лінійні оператори				
7	Тема 9. Лінійні відображення та оператори	8	6	12
8	Тема 10. Білінійні та квадратичні форми	8	4	14

	<i>Колоквіум і модульна контрольна робота 4</i>		2	4
	ВСЬОГО	30	30	59

Загальний обсяг 1-ший семестр

120 год., в тому числі:

Лекцій – **30 год.**

Практичні – **30 год.**

Консультація – **1 год.**

Самостійна робота – **59 год.**

Загальний обсяг 2-ий семестр

120 год., в тому числі:

Лекцій – **30 год.**

Практичні – **30 год.**

Самостійна робота – **59 год.**

Консультація – **1 год.**

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

Основна: (Базова):

1. О.О. Приходько, В.Б. Шевченко, Л.В. Задорожна, А.В. Чумаченко, методичний посібник до практичних занять “Лінійна алгебра та аналітична геометрія” (https://qft.knu.ua/wp-content/uploads/2022/01/metod_%D0%90GLA.pdf)
2. О.М. Теслик, О.О. Приходько, С.Й. Вільчинський, Е.В. Горбар, навчальний посібник для студентів фізичного факультету “Лекції з лінійної алгебри” (https://qft.knu.ua/wp-content/uploads/2022/01/lectures_agla.pdf).
3. Придатченко Ю.В., Львов В.А. Алгебра для фізиків: вектори і координати: Навч. посібник. Видавничо–поліграфічний центр “Київський університет”., 2002. 87 с.
4. Axler S. Linear Algebra Done Right. Springer New York, 2004. 251 p.
5. Treil S. Linear Algebra Done Wrong. Brown University, 2017. 276 p.
6. Strang G. Introduction to Linear Algebra. 5th Edition. Wellesley-Cambridge Press, 2016. 574 p.
7. Hoffman K, Kunze R. Linear Algebra. Second Edition. Prentice-Hall, Inc., 1971, 407 p.
8. Halmos P.R. Finite-Dimensional Vector Spaces: Second Edition. Dover Publications, 2017. 208 p.
9. Friedberg S, Insel A., Spence L. Linear Algebra. 5th Edition. Pearson, 2018. 608 p.
10. Roman S. Advanced Linear Algebra. 3rd Edition. Springer, 2007. 525 p.
11. Hefferron J. Linear Algebra. 4th Edition. 525 p. (<https://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/>).
12. Krishnamurthy V., Mainra V.P., Arora J.L. An Introduction to LINEAR ALGEBRA. Chaukhamba Auriyantaliya, 2018. 348 p.
13. Baker A. Analytical geometry for beginners. Alpha Editions, 2020. 228 p.
14. Fuller G., Tarwater D. Analytic Geometry (7th Edition). Pearson, 1992. 440 p.
15. Riddle D.F. Analytic Geometry. 6th Edition. Cengage Learning, 1995. 496 p.
16. Sochi T. Tensor Calculus Made Simple. Create Space Independent Publishing Platform, 2016. 170 p.
17. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd Edition. Cambridge University Press, 2012. 662 p.

Збірники задач:

18. Ізвєков С.В., М.Ф. Ледней «Методичні вказівки для розв'язування задач з аналітичної геометрії для студентів фізичного факультету» К.: РВЦ «Київський університет», 1998. 50 с.
19. Ф.С. Гудименко «Збірник задач з вищої математики» Київ: Видавництво Київського Університету, 1967. 352с.

20. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука., 1987. 496 с.
21. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Физматлит., 2002. 248 с.
22. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука., 1972. 240 с.

Екзаменаційні питання з курсу аналітичної геометрії та лінійної алгебри.

1. Матриця: означення і властивості. Операції додавання матриць, множення на число. Властивості лінійних операцій над матрицями.
2. Віднімання матриць. Матриця, протилежна до даної. Одинична, нульова матриці.
3. Транспонування матриць. Симетрична та антисиметрична матриці. Матриці Паулі.
4. Матриці-стовпчики та матриці стрічки, означення їх лінійної комбінації. Представлення матриці довільних розмірів у вигляді матриць-стрічок і матриць-стовпчиків
5. Означення і приклади лінійно незалежної системи вектор-стовпчиків.
6. Властивості лінійно незалежної системи вектор-стовпчиків.
7. Означення детермінанту (визначника) матриці
8. Властивості детермінанту (визначника) матриці. (з доведенням!)
9. Формула повного розкладу детермінанту матриці за елементами матриці.
10. Методи обчислення визначників порядку n .
11. Поняття мінору. Мінори довільного порядку. Додатковий мінор та алгебраїчне доповнення.
12. Поняття базисного мінору та рангу матриці.
13. Елементарні перетворення матриці. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень (метод Гауса).
14. Перетворення квадратної матриці до одиничної.
15. Теореми про базисний мінор та ранг матриці.
16. Множення матриць-означення, властивості
17. Елементарні перетворення матриці як множення чотирьох.
18. Детермінант добутку матриць.
19. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР): загальна постановка задачі. Сумісна та несумісна система.
20. Розв'язування СЛАР, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих за допомогою теореми Крамера.
21. Метод Гауса розв'язування СЛАР, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих
22. Обернена матриця: означення, властивості та способи знаходження
23. Умова сумісності СЛАР. Теорема Кронекера-Капеллі та наслідок з неї
24. Однорідна СЛАР та властивості множини розв'язків однорідної СЛАР
25. Нормальна фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР
26. Фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР
27. Загальний розв'язок СЛАР
28. Теорема Крамера як частинний випадок теореми Кронекера-Капеллі
29. Векторний (лінійний) простір: означення. Приклади лінійних просторів
30. Векторний простір: наслідки з означення. Підмножина лінійного простору. Лінійна оболонка
31. Система лінійно незалежних (залежних) векторів. Властивості.
32. Вимірність лінійного простору, приклади
33. Базис векторного простору.
34. Координати вектора відносно базису. Приклади. Властивості.
35. Заміна базису. Матриця переходу між базисами, її властивості
36. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах.
37. Скалярний добуток геометричних векторів-означення, властивості
38. Евклідов простір-означення, та наслідки з аксіоматики
39. Приклади евклідових просторів

40. Довжина вектора та кут між векторами в евклідовому просторі Нерівність Коші-Буняковського Нерівність трикутника
41. Ортонормовані системи векторів.
42. Процедура ортогоналізації заданої системи лінійно незалежних векторів (алгоритм Грама-Шмідта).
43. Матриця Грама базису, вираз скалярного добутку через координати векторів-співмножників та матрицю Грама.
44. Зв'язок між матрицями Грама різних базисів та властивості матриці Грама будь-якого базису.
45. Ортогональні матриці-означення, приклади та властивості.
46. Матриця Грама довільної системи векторів. Критерій лінійної залежності та незалежності векторів у просторі Евкліда. Узагальнення нерівності Коші-Буняковського
47. Взаємні базиси: означення та приклади.
48. Властивості взаємних базисів.
49. Координати вектора у взаємних базисах. Коваріантний і контраваріантний базис. Коваріантні і контраваріантні координати вектора.
50. Унітарний простір: означення та приклади.
51. Властивості унітарного простору. Ермітова та унітарна матриці
52. Лінійний оператор. Дії з лінійними операторами
53. Матриця лінійного оператора, зв'язок між матрицями оператора в різних базисах.
54. Оператор, обернений до даного.
55. Інваріантний підпростір, власні числа і власні значення лінійного оператора, їх властивості.
56. Алгоритм пошуку власних векторів і власних значень лінійного оператора.
57. Визначення і властивості спряженого оператора в евклідовому просторі.
58. Визначення і властивості самоспряженого (симетричного) оператора в евклідовому просторі.
59. Визначення і властивості ортогонального оператора в евклідовому просторі.
60. Визначення і властивості спряженого оператора в унітарному просторі.
61. Нормальний оператор і його властивості
62. Визначення і властивості самоспряженого (симетричного) оператора в унітарному просторі.
63. Визначення і властивості ортогонального оператора в унітарному просторі.
64. Лінійні функції одного аргументу (лінійні форми) Білінійні форми
65. Квадратичні форми. Теорема про діагоналізацію квадратичних форм
66. Ранг, індекс, визначеність квадратичних форм
67. Закон інерції квадратичної форми
68. Додатньо означені квадратичні форми. Означення евклідового простору за допомогою додатньо означеної квадратичної форми
69. Критерій Сильвестра
70. Лінійний оператор, заданий в евклідовому просторі, приєднаний до квадратичної форми

71. Алгоритм приведення двох квадратичних форм до діагонального вигляду.
72. Визначення алгебраїчної лінії та поверхні довільного порядку.
73. Параметричні рівняння лінії та поверхні.
74. Поверхні та лінії першого порядку.
75. Параметричні рівняння прямої та площини.
76. Векторне рівняння площини.
77. Векторне рівняння прямої.
78. Ознаки паралельності прямих на площині..
79. Векторне рівняння прямої в просторі.
80. Канонічне та параметричне рівняння прямої.
81. Рівняння площини, яка проходить через три точки.
82. Ознаки паралельності прямих та площин.
83. Лінії і поверхні другого порядку. Дослідження рівнянь ліній другого порядку.
84. Еліпс.
85. Гіпербола.
86. Дотична до еліпса. Дотична до гіперболи.
87. Основна властивість дотичних до еліпса, до гіперболи.
88. Парабола.
89. Визначення та загальне рівняння поверхні обертання.
90. Конус другого порядку.
91. Еліпсоїд
92. Однопорожнинний гіперболоїд
93. Двопорожнинний гіперболоїд.
94. Еліптичний параболоїд.
95. Гіперболічний параболоїд, рболічний параболоїд.
96. Взаємне розташування прямої та точки
97. Взаємне розташування двох прямих.
98. Відстань між мимобіжними прямими. Спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих
99. Проекція прямої на площину.
100. Проекція точки на пряму та площину.
101. Відстань між точкою та площиною. Нормальне рівняння площини.