

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

**Боровий М.О., Оліх О.Я., Цареградська Т.Л.,
Овсієнко І.В., Подолян А.О., Козаченко В.В.**

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ.

ЗБІРНИК ЗАДАЧ.

**Частина 3. Оптика, елементи квантової
механіки, атомної та ядерної фізики.**

Навчальний посібник

Київ

2022

ББК
К

*Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № від р.)*

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Гололобов Ю.П.
д-р фіз.-мат. наук, проф. Зеленський С.Є.

Боровий М.О., Оліх О.Я., Подолян А.О.,

Овсієнко І.В., Цареградська Т.Л., Козаченко В.В.,

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ. ЗБІРНИК ЗАДАЧ.
Частина 3. Оптика, елементи квантової механіки, атомної та
ядерної фізики.

Навчальний посібник. – К.: 2022. – с.

*За структурою та змістом збірник задач відповідає програмі
курсу фізики хімічних факультетів закладів вищої освіти
України. В посібнику викладено теоретичні відомості, основні
методи розв'язання задач з курсу фізики та завдання для
самостійної роботи.*

Для студентів закладів вищої освіти України.

ББК
ISBN

Зміст

| | |
|--|-----|
| 1. ОПТИКА | 4 |
| 1.1. Теоретичні відомості | 4 |
| 1.2. Приклади розв'язку задач | 15 |
| 1.3. Задачі для самостійного розв'язку | 40 |
| 2. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ | 52 |
| 2.1. Теоретичні відомості | 52 |
| 2.2. Приклади розв'язку задач | 93 |
| 2.3. Задачі для самостійного розв'язку | 134 |
| 3. ЕЛЕМЕНТИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ | 4 |
| 3.1. Теоретичні відомості | |
| 3.2. Приклади розв'язку задач | |
| 3.3. Задачі для самостійного розв'язку | |
| Відповіді до задач | |
| Додатки | |
| Література | |

1. ОПТИКА

1.1. Теоретичні відомості

Оптика – це розділ фізики, який вивчає властивості та фізичну природу світла, а також його взаємодію з речовиною. Вчення про світло можна розділити на три частини:

- геометрична або променева оптика, яка базується на уявленнях про світлові промені;
- хвильова оптика, що вивчає прояви хвильових властивостей світла;
- квантова оптика, предметом дослідження якої є явища, насамперед, взаємодії світла з речовиною, де спостерігається прояв корпускулярних властивостей світла.

Видиме світло – це електромагнітні хвилі з довжиною хвилі, яка приблизно знаходиться у діапазоні 400÷760 нм. При розповсюдженні такої хвилі у середовищі її швидкість v зменшується порівняно з випадком поширення у вакуумі внаслідок взаємодії із зарядженими частинками (насамперед, електронами), які це середовище утворюють. Відношення швидкості світла у вакуумі c до v визначає **абсолютний показник заломлення** середовища n :

$$n = \frac{c}{v}. \quad (1.1)$$

Величина абсолютного показника заломлення визначає так звану оптичну густину середовища.

В оптично однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно. У зв'язку з цим використовується поняття світлового променя – геометричної лінії вздовж якої поширюється світло. Зауважимо, що закон прямолінійного світла порушується, а поняття променя втрачає зміст у випадку, коли, наприклад, світло проходить через отвір, розмір якого співрозмірний з довжиною хвилі, біля краю екрану тощо.

При падінні променя на границю розділу двох середовищ, світло, у загальному випадку, частково відбивається та частково заломлюється. При цьому падаючий, відбитий та заломлений промені, а також перпендикуляр до границі розділу, знаходяться у одній площині, кут відбивання дорівнює куту падіння i , а для кута заломлення r виконується співвідношення

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (1.2)$$

де n_1 та n_2 – абсолютні показники заломлення середовищ, де поширюється падаючий та заломлений промені, відповідно; n_{21} – відносний показник заломлення. Вираз (1.2) визначає **закон заломлення світла** або **закон Снеліуса**.

Оптична сила тонкої лінзи, розташованої в однорідному середовищі

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{лін}}}{n_{\text{сеп}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.3)$$

де F – фокусна відстань лінзи, $n_{\text{сеп}}$ і $n_{\text{лін}}$ – показники заломлення середовища і матеріалу лінзи, відповідно; R_1 і R_2 – радіуси кривизни поверхонь, що обмежують лінзу.

Формула тонкої лінзи

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \quad (1.4)$$

де a_1 та a_2 – відстані предмета та його зображення від лінзи. Відстані, які відраховуються від лінзи вздовж напрямку ходу світлового променя вважаються додатними, а ті, що відраховуються проти ходу – від’ємними. Це ж правило застосовується і до визначення знаків R_1 та R_2 у попередній формулі.

Поперечне лінійне збільшення

$$k = \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2}{a_1}, \quad (1.5)$$

де y_1 – висота предмету, y_2 – висота зображення.

Світловий потік Φ – це енергія, яка переноситься світловими хвилями через дану площу за одиницю часу:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (1.6)$$

Сила світла визначається величиною світлового потоку, що припадає на одиницю просторового кута

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (1.7)$$

Освітленість характеризується світловим потоком, що припадає на одиницю площі

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (1.8)$$

Освітленість на відстані r від точкового джерела світла силою I описується виразом

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha, \quad (1.8)$$

де α – кут падіння променів.

Світимість R визначається світловим потоком, що випромінюється одиницею площі тіла

$$R = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (1.9)$$

Якщо світимість тіла обумовлена лише його освітленістю, то

$$R = \rho E, \quad (1.10)$$

де ρ – коефіцієнт відбивання світла тілом.

Яскравість тіла, яке світиться

$$B = \frac{dI}{dS \cos \theta}, \quad (1.11)$$

де θ – кут між напрямком спостереження і нормаллю до елементу поверхні dS .

Якщо тіло випромінює по закону Ламберта (тобто яскравість не залежить від напрямку), то

$$R = \pi B. \quad (1.12)$$

Одиниці світлових величин узагальнені у додатку Д2.

Оптична довжина обчислюється за допомогою наступного виразу

$$L = n l, \quad (1.13)$$

де l – геометрична довжина шляху, що проходить промінь у середовищі з показником заломлення n .

Оптична різниця ходу двох променів

$$\Delta = L_2 - L_1. \quad (1.14)$$

Взаємозв'язок **різниці фаз** і оптичної різниці ходу:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}, \quad (1.15)$$

де λ – довжина світлової хвилі.

Інтенсивністю світла називають величину, яка дорівнює середньому значенню квадрата напруженості електричного поля електромагнітної хвилі. Закон **фотометричного додавання** передбачає, що в місцях накладання декількох електромагнітних хвиль загальна інтенсивність визначається сумою інтенсивностей окремих світлових променів. Явище відхилення від закону фотометричного додавання називається **інтерференцією**. Для спостереження цього явища необхідно, щоб хвилі, які накладаються, були когерентними, а саме, мали однакову частоту та незмінну в часі різницю початкових фаз.

Умова максимуму інтерференційної картини при накладанні двох когерентних хвиль

$$\Delta_{\max} = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.16)$$

Умова мінімуму інтерференційної картини при накладанні двох когерентних хвиль

$$\Delta_{\min} = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.17)$$

Оптична різниця ходу світлових хвиль, яка виникає при відбиванні у вакуум (повітря) монохроматичного світла від тонкої плівки

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = 2dn \cos r + \frac{\lambda}{2}, \quad (1.18)$$

де d – товщина плівки, n – її абсолютний показник заломлення, i та r – кути падіння та заломлення, доданок $\lambda/2$ враховує появу додаткової різниці ходу при відбитті від більш оптично густого середовища. У випадку, коли плівка знаходиться на поверхні середовища з більшим абсолютним показником заломлення, ніж у неї, цей доданок відсутній.

Інтерференційну картину у вигляді темних та світлих кілець (при монохроматичному освітленні) можна спостерігати, розташувавши плоско-опуклу лінзу на скляній пластинці. Інтерференція спостерігається як у відбитому світлі, так і в тому, що пройшло, причому для цих двох випадків світлі та темні кільця міняються місцями. Така інтерференційна картина називається **кільця Ньютонa**. Радіус k -го темного кільця Ньютонa у відбитому світлі може бути обчислений за допомогою співвідношення

$$r_{k,T} = \sqrt{2kR \frac{\lambda}{2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (1.19a)$$

тоді як для світлого справедливим є

$$r_{k,C} = \sqrt{(2k+1)R\frac{\lambda}{2}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (1.196)$$

де R – радіус кривизни сферичної поверхні лінзи.

Дифракцією називається відхилення світла від прямолінійного поширення, яке не зводиться до відбивання та заломлення.

Умова мінімуму та максимуму при **дифракції на одній щілині** при нормальному падінні світла

$$b \sin \varphi_{\min} = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (1.20a)$$

$$b \sin \varphi_{\max} = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (1.20b)$$

де φ_{\min} та φ_{\max} – кути відхилення променів, які відповідають мінімуму та максимуму інтенсивності, b – ширина щілини.

Дифракційна ґратка – це оптичний пристрій, який складається з великої кількості непрозорих (штрихів, щілин тощо) та прозорих областей, розташованих періодично. При нормальному падінні на дифракційну ґратку світла з довжиною хвилі λ максимумами інтенсивності спостерігаються в напрямках, які складають з нормаллю до ґратки кут φ , причому

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (1.21)$$

де d – стала ґратки (сумарна ширина прозорої та непрозорої областей); ціле число k ще називають порядком спектра.

Дифракційна ґратка здатна виконувати роль дисперсійного елемента, тобто пристрою, що розділяє в просторі хвилі з різної довжиною. При цьому для роздільної здатності дифракційної ґратки є справедливим співвідношення:

$$R_{\Delta} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \quad (1.22)$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця хвиль двох сусідніх спектральних ліній (λ і $\lambda + \Delta\lambda$), які ще можливо бачити окремо в k -му спектрі, отриманому за допомогою дифракційної ґратки із загальною кількістю щілин N .

Так як довжина електромагнітних хвиль рентгенівського діапазону співрозмірна з параметром ґратки кристалів, то останні можуть відігравати роль дифракційної ґратки. У цьому випадку застосовують **формулу Вульфа-Бреггів**

$$2d \sin \theta = \pm k\lambda, \quad (1.23)$$

де θ – кут ковзання (кут між напрямом паралельного пучка рентгенівського випромінювання, що падає на кристал, і атомною площиною в кристалі), який відповідає дифракційному максимуму; d – міжплощинна відстань.

Якщо напрям вектора напруженості електричного поля світлової хвилі (т.зв. світлового вектора) змінюється хаотично, то таке світло називається неполяризованим або природнім. У випадку, якщо вектор напруженості весь час перебуває у одній площині, то світло називається плоско (або лінійно) поляризованим, а сама площина – площиною поляризації. Напрямок світлового вектора описує коло у випадку циркулярно поляризованого світла. Циркулярно та плоскополяризоване світло є частковими випадками еліптичнополяризованого світла. Прилади, які дозволяють отримувати плоскополяризоване світло, називаються поляризаторами. Інша назва поляризатора – ніколь; це узагальнює іменування пов'язано з тим, що одним з найбільш популярних поляризуючих пристроїв є призма Ніколя, дія якої ґрунтується на використанні явищ подвійного променезаломлення та повного внутрішнього відбивання.

При падінні на поляризатор природнього світла, на його виході отримується плоскополяризоване світло вдвічі меншої інтенсивності. Інтенсивність світла на виході поляризатора при

падінні плоскополяризованого світла описується законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (1.24)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого плоскополяризованого світла, I – інтенсивність світла після поляризатора, α – кут між напрямками поляризації падаючого світла і площиною пропускання поляризатора. У системі, яка складається з двох поляризаторів, вихідний нерідко називають аналізатором.

Якщо коливання вектора напруженості мають переважаючий напрямок, проте спостерігаються і в інших, то говорять про частково поляризоване світло. **Ступінь поляризації** світла описується виразом

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (1.25)$$

де I_{\max} та I_{\min} – максимальна і мінімальна, відповідно, інтенсивності світла, які пропускається поляризатором.

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}, \quad (1.26)$$

де i_B – кут падіння, при якому відбитий від межі поділу двох діелектриків промінь повністю поляризований. Якщо кут падіння на задовольняє умові (1.26), то і відбитий, і заломлений промені будуть частково поляризованими. Зокрема, для відбитого світла справедливі формули Френеля:

$$I'_{\perp} = I_{\perp} \left[\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} \right]^2, \quad I'_{\parallel} = I_{\parallel} \left[\frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)} \right]^2, \quad (1.27)$$

де I_{\perp} і I_{\parallel} – інтенсивності падаючого світла, у якого коливання світлового вектора перпендикулярні та паралельні площині падіння, відповідно; I'_{\perp} і I'_{\parallel} – те саме для відбитого світла; i та r – кути падіння та заломлення.

Для природнього світла інтенсивністю I_0 :
 $I_{\perp} = I_{\parallel} = 0,5I_0$, $P = 0$.

Якщо при проходженні плоскополяризованого світла через середовище відбувається обертання площини поляризації, то середовище називається активним. Кут повороту в твердих тілах та розчинах описується виразами (1.28а) та (1.28б):

$$\varphi = \alpha d, \quad (1.28a)$$

де d – довжина шляху, пройденого світлом в оптично активному середовищі, яке характеризується сталою обертання α

$$\varphi = [\alpha] C d, \quad (1.28b)$$

де $[\alpha]$ – питома стала обертання, C – масова концентрація оптично активної речовини в розчині.

Спектральною випромінювальною здатністю тіла $E_{rad,\lambda}$ називають енергію, яка випромінюється з одиниці поверхні тіла за одиницю часу, причому довжини електромагнітних хвиль знаходяться в інтервалі довжин хвиль $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. Аналогічну величину, пов'язану з випромінюванням у частотному інтервалі $[\omega, \omega + d\omega]$ також називають спектральною випромінювальною здатністю, але позначають $E_{rad,\omega}$.

$$E_{rad,\lambda} d\lambda = E_{rad,\omega} d\omega. \quad (1.29)$$

Враховуючи, що $\omega = 2\pi c/\lambda$, то $\lambda d\omega = \omega d\lambda$. Інтегральна випромінювальна здатність E_{rad} визначається енергією, що випромінюється одиницею поверхні тіла за одиницю часу:

$$E_{rad} = \int_0^{\infty} E_{rad,\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} E_{rad,\omega} d\omega. \quad (1.30)$$

Поглиналина здатність визначається відношенням поглинутої енергії, до падаючої. Тіло, для якого поглиналина здатність рівна одиниці, називається **абсолютно чорним**. Для такого тіла спектральні випромінювальні здатності описуються **формулою Планка**:

$$E_{rad,\lambda} = \frac{8hc\pi}{\lambda^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}, \quad (1.31a)$$

$$E_{rad,\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}. \quad (1.31б)$$

Закон Стефана-Больцмана:

$$E_{rad} = \sigma T^4, \quad (1.32a)$$

де E_{rad} – інтегральна випромінювальна здатність теплового випромінювання абсолютно чорного тіла температурою T , σ – стала Стефана-Больцмана.

Тіло, для якого поглинальна здатність не залежить від температури та частоти падаючого світла, а за величиною менше одиниці, називається сірим. Для такого тіла

$$E_{rad}^{\prime} = \beta \sigma T^4, \quad (1.32б)$$

де β – коефіцієнт чорноти.

Закон зміщення Віна:

$$\lambda_m = \frac{b_w}{T}, \quad (1.33)$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної залежності енергії теплового випромінювання абсолютно чорного тіла температурою T , b_w – стала Віна.

Енергія фотона

$$\varepsilon = h\nu, \quad (1.34)$$

де h – стала Планка, ν – частота фотона.

Імпульс фотона

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (1.35)$$

Формула Ейнштейна для фотоефекта:

$$h\nu = A_B + E_{k,\max}, \quad (1.36)$$

де ν – частота світла, падаючого на поверхню металу; A_B – робота виходу електрону з металу, $E_{k,\max}$ - максимальна кінетична енергія фотоелектронів, які вилітають з металу.

Формула Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (1.37)$$

де $\Delta\lambda$ – зміна довжини хвилі фотону при його комптонівському розсіянні на частинці масою m , λ_1 і λ_2 – довжини хвилі до та після, відповідно, розсіяння на кут θ .

1.2. Приклади розв'язку задач

Задача О.1. Точкове джерело світла S знаходиться на відстані $a = 15$ см від розсіючої лінзи з фокусною відстанню $F = 10$ см на її головній оптичній вісі. По інший бік лінзи на відстані $b = 5$ см від неї розташовано плоске дзеркало. Знайти відстань L між джерелом і його уявним зображенням у дзеркалі.

Розв'язок:

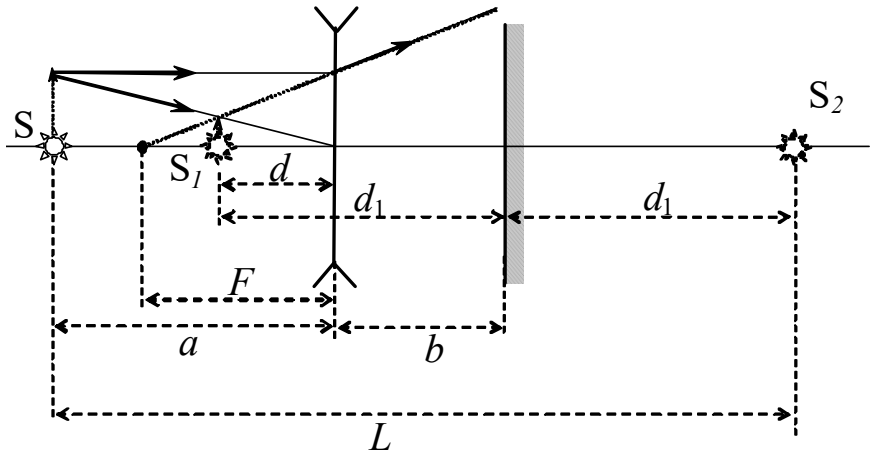


Рис.1.1

Спочатку знайдемо, де буде знаходитися зображення S_1 джерела світла S , утворене розсіючою лінзою. Для цього скористаємося формулою тонкої лінзи, яка у випадку розсіючої лінзи матиме вигляд:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = -\frac{1}{F}, \quad (1)$$

де a та d – відстані від лінзи до джерела світла і його зображення, F – фокусна відстань лінзи. Виразивши з (1) d , отримуємо

$$d = -\frac{aF}{a + F}. \quad (2)$$

Те, що значення d від'ємне свідчить, що зображення S_1 знаходиться з того ж боку від лінзи, що і джерело S . Побудувавши хід променів в даній оптичній системі (рис.1.1) ми можемо в цьому пересвідчитися.

Отже, уявне зображення S_1 , утворене лінзою, знаходиться на відстані

$$d_1 = b + |d| = b + \frac{aF}{a+F} \quad (3)$$

від дзеркала. Відповідно, уявне зображення S_2 , утворене у дзеркалі, знаходиться на відстані d_1 з іншого боку дзеркала. Таким чином, відстань між S і S_2 (як видно з рисунку)

$$L = a + b + d_1 = a + 2b + \frac{aF}{a+F} = 0.31 \text{ (м)}.$$

Задача О.2. Обчислити зміщення променя, що пройшов крізь скляну плоскопаралельну пластинку товщиною $d = 2 \text{ см}$, якщо кут падіння променя $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язок:

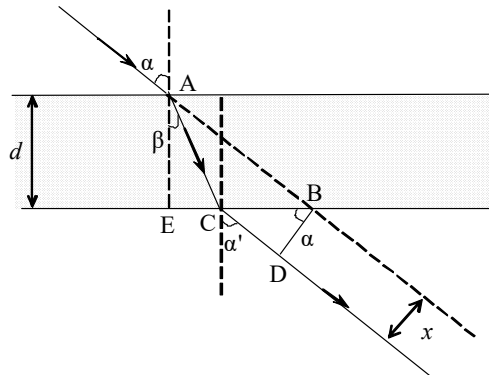


Рис.1.2

При падінні світла з повітря на скляну пластинку закон заломлення матиме вигляд:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (1)$$

де α – кут падіння, β – кут заломлення, n – абсолютний показник заломлення скла ($n = 1,5$) – у формулі (1) враховано, що абсолютний показник заломлення повітря дорівнює одиниці.

Нехай кут під яким світло виходить з пластини - α' . Тоді для заломлення світла на протилежній грані пластини, при виході з неї, можна записати:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha'} = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Порівнявши вирази (1) і (2) бачимо, що має бути $\alpha = \alpha'$, тобто кути під якими промінь світла падає на плоскопаралельну пластину і виходить з неї, однакові. Отже, після проходження пластини промінь буде йти паралельно своєму руху до зустрічі перетину з пластиною (див. рис.1.2) змістившись на відстань x . Як видно з рисунка, x може бути знайдена з прямокутного трикутника CBD:

$$x = BD = CB \cos \alpha. \quad (3)$$

В свою чергу $CB = EB - EC$, а для EC и CB справедливі є рівності:

$$EC = AE \operatorname{tg} \beta = d \operatorname{tg} \beta,$$

$$EB = AE \operatorname{tg} \alpha = d \operatorname{tg} \alpha,$$

де d – товщина пластини. Отже,

$$CB = d \operatorname{tg} \alpha - d \operatorname{tg} \beta,$$

$$x = d \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta). \quad (4)$$

З формули (1) впливає:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}. \quad (5)$$

Так як $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$, а $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, то з урахуванням (5)

отримуємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{n} \frac{n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставивши (6) в (4) знаходимо:

$$\begin{aligned} x &= d \cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) = \\ &= d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \approx 10^{-2} \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Задача О.3. У центрі квадратної кімнати площею $S = 25 \text{ м}^2$ висить лампа. На висоті h від підлоги повинна знаходитись лампа, щоб освітленість у кутах кімнати була найбільшою?

Розв'язок:

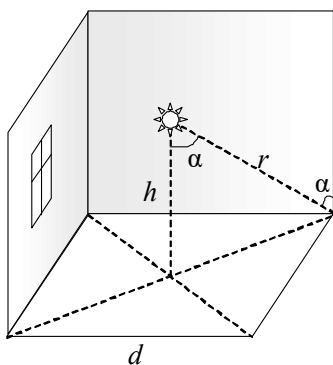


Рис.1.3

Лампу можна розглядати як точкове джерело світла. Освітленість E , що створюється точковим джерелом світла силою I на елементі площі, який розташований на відстані r , описується формулою:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha, \quad (1)$$

де α – кут падіння променів. Як видно з рис.1.3, r та $\cos \alpha$ пов'язані зі стороною квадратної кімнати d і висотою знаходження лампи h наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{h^2 + d^2 / 2}, \\ \cos \alpha &= \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2 / 2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $d / \sqrt{2}$ – половина діагоналі підлоги. Підставляючи (2) в (1), отримуємо:

$$E = \frac{I h}{(h^2 + d^2 / 2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Для знаходження максимуму освітленості знайдемо похідну dE/dh і прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dh} &= \frac{I \left[(h^2 + d^2 / 2)^{3/2} - h \frac{3}{2} (h^2 + d^2 / 2)^{1/2} 2h \right]}{(h^2 + d^2 / 2)^3} = \\ &= \frac{I (h^2 + d^2 / 2)^{1/2}}{(h^2 + d^2 / 2)^3} (d^2 / 2 - 2h^2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

З рівняння (4) знаходимо висоту на якій потрібно розташувати лампу, щоб досягти максимальної освітленості в кутах кімнати:

$$h = \frac{d}{2}.$$

Так як площа S квадратної кімнати і її сторона d пов'язані співвідношенням $d = \sqrt{S}$, то остаточно отримуємо

$$h = \frac{\sqrt{S}}{2} = 2,5 \text{ (м)}.$$

Задача О.4. Два когерентні джерела світла віддалені від екрану на відстань $L = 2$ м. Відстань між ними складає $d = 2$ мм. Знайти довжину хвилі λ , що випромінюється джерелами, якщо відстань на екрані між третім і п'ятим мінімумами інтерференційної картини дорівнює $\Delta x_{3,5} = 1,2$ см.

Розв'язок:

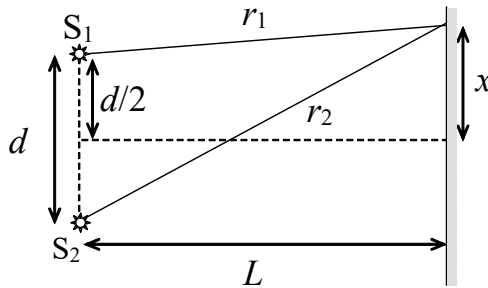


Рис.1.4

Різниця ходу Δ світлових хвиль, що поширюються від двох когерентних джерел S_1 та S_2 у точці екрану з координатою x :

$$\Delta = r_2 - r_1, \quad (1)$$

де зміст r_1 та r_2 зрозумілий з рис.1.4. З рисунку також видно, що

$$r_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad r_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \text{ Таким чином}$$

$$r_2^2 - r_1^2 = L^2 + x^2 + xd + \frac{d^2}{4} - L^2 - x^2 + xd - \frac{d^2}{4} = 2xd.$$

Водночас $r_2^2 - r_1^2 = (r_1 + r_2)(r_2 - r_1)$. Так як $d \ll L$, то $r_1 + r_2 \approx 2L$ і отже

$$r_2 - r_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{xd}{L},$$

тобто

$$\Delta = \frac{xd}{L}. \quad (2)$$

Мінімуми інтерференційної картини спостерігаються в тих областях екрану, для яких

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ визначає порядок мінімуму, λ – довжина хвилі, що випромінюється джерелами.

Нехай k_1 -му мінімуму відповідає координата на екрані x_{k1} , а k_2 -му мінімуму – x_{k2} . Тоді, враховуючи (2) і (3),

$$\begin{aligned} \frac{x_{k1}d}{L} &= (2k_1 + 1) \frac{\lambda}{2}, \\ \frac{x_{k2}d}{L} &= (2k_2 + 1) \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Віднімаючи від другого рівняння системи (4) перше, отримаємо

$$\frac{(x_{k2} - x_{k1})d}{L} = \lambda (k_2 - k_1). \quad (5)$$

Так як $x_{k2} - x_{k1} = \Delta x_{k2,k1}$ – відстань між k_1 -м та k_2 -м мінімумами, то

$$\frac{\Delta x_{k2,k1} d}{L} = \lambda (k_2 - k_1),$$

звідки

$$\lambda = \frac{\Delta x_{k2,k1} d}{(k_2 - k_1) L} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

Задача О.5. Визначити найменшу товщину мильної плівки d_{min} , якщо у відбитому світлі вона здається зеленою ($\lambda = 500 \text{ нм}$). Кут α між нормаллю і променем зору дорівнює 35° . Вважати,

що показник заломлення плівки $n = 1,4$. Який колір буде у плівки, якщо її спостерігати під кутом $\alpha_1 = 0^\circ$, тобто при нормальному промені зору?

Розв'язок:

При падіння світла на плівку внаслідок відбивання від її верхньої та нижньої границь утворюються дві когерентні хвилі. Колір плівки визначається тим, для якої з довжин хвиль виконується умова максимуму інтерференції. Таким чином, використовуючи вирази (1.16) та (1.18), отримуємо:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad (1)$$

де d – товщина плівки, k – ціле число. Найменша товщина плівки $d = d_{\min}$ відповідає випадку $k = 1$:

$$2d_{\min}\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

звідки

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx 9,8 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Щоб відповісти на друге запитання, необхідно використовуючи вираз (2) визначити довжину хвилі, яка відповідатиме максимуму інтерференції під кутом α_1 :

$$\lambda = 4d_{\min}\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} = \lambda \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Отже, у випадку нормального спостереження око побачить плівку, забарвлену в жовто-зелений колір.

Задача О.6. Поверхні скляного клина утворюють між собою кут $\alpha = 0,1^\circ$. Клин освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, яке падає нормально до його поверхні. Знайти лінійну b відстань між сусідніми інтерференційними смугами, вважаючи що абсолютний показник заломлення скла $n = 1,5$.

Розв'язок:

У цьому випадку когерентні хвилі з'являються внаслідок відбиття променів від обох поверхонь клину. Внаслідок мализни кута, можна вважати, що всі промені поширюються перпендикулярно до обох поверхонь клину. При обчисленні різниці ходу необхідно

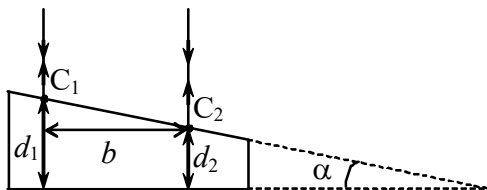


Рис.1.5

врахувати, що при відбитті від границі повітря-скло промінь отримує додаткову різницю ходу $\lambda/2$, тоді як у випадку границі скло-повітря друге середовище є менш оптично густим і додаткова різниця ходу для відбитого променя відсутня. Крім того, промені відбиті від нижньої границі клину (див. Рис.1.5) проходять надлишковий шлях, довжина якого залежить від товщини клина, що, в свою чергу, змінюється при русі вздовж нього. Таким чином, різниця ходу для інтерферуючих променів

$$\Delta = 2dn + \lambda/2, \quad (1)$$

де d – товщина клину у даній точці.

Нехай у точках C_1 і C_2 знаходяться дві сусідні світлі смуги. Тоді різниці ходу Δ_1 і Δ_2 для променів, які виходять з клину у цих точках мають виконуватися умови

$$\Delta_1 = 2d_1n + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad (2a)$$

$$\Delta_2 = 2d_2n + \frac{\lambda}{2} = (k-1)\lambda, \quad (26)$$

де d_1 та d_2 – товщина клина в місцях розташування точок C_1 та C_2 , відповідно; k – ціле число. Віднімаючи ці дві рівності, отримаємо

$$2n(d_1 - d_2) = \lambda,$$

звідки

$$d_1 - d_2 = \frac{\lambda}{2n}. \quad (3)$$

Як видно з рисунка, відстань між цими точками

$$b = \frac{d_1 - d_2}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{d_1 - d_2}{\alpha}, \quad (4)$$

де кут α виражається в радіанах.

Беручи до уваги вирази (3) та (4) остаточно запишемо

$$b \approx \frac{\lambda}{2n\alpha} \approx 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Задача О.7. Знайти фокусну відстань F плоско-опуклої лінзи, яка використовується у приладі для спостереження кілець Ньютонa, якщо радіус третього світлого кільця дорівнює $r_3 = 1,1 \cdot 10^{-3}$ м. Вважати, що показник заломлення матеріалу лінзи $n = 1,6$, довжина хвилі освітлення $\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7}$ м, а спостереження проводяться у відбитому світлі.

Розв’язок:

При спостереженні кілець Ньютонa у відбитому світлі в точці C (рис. 1.6) інтерферують між собою промінь, який відбився від внутрішньої поверхні лінзи, та промінь, який повернувся в т.С пройшовши відстань $CD = d$ вниз і потім відбився від зовнішньої поверхні плоско-паралельної пластинки в точці D . Оптична різниця ходу Δ інтерферуючих променів буде порівнювати:

$$\Delta = 2d + \lambda/2. \quad (1)$$

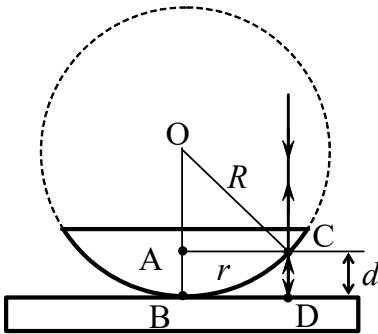


Рис.1.6

Формула (1) записана у припущенні, що між лінзою та пластинкою знаходиться повітря, для якого показник середовища $n_{\text{пов}} \approx 1$; другий доданок враховує додаткову різницю ходу, що виникає при відбиванні променя від пластинки.

Місця розташування повітряного проміжку однакової

товщини є колами з центром у точці дотику лінзи і пластинки, а отже інтерференційна картина має вигляд концентричних кілець.

Виразимо величину d через радіус інтерференційного кільця r та радіус кривизни лінзи R . Для цього розглянемо прямокутний трикутник OAC – див. Рис.1.6. Згідно з теоремою Піфагора $OC^2 = AC^2 + OA^2$. З рисунка видно, що $OC = OB = R$, $AC = r$, $OA = OB - AB$, $AB = CD = d$. Таким чином

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2 = d(2R - d).$$

Взявши до уваги, що $2R \gg d$, з останнього виразу отримаємо

$$r^2 \approx 2Rd. \quad (2)$$

Отже, для оптичної різниці ходу променів, які інтерферують на відстані r від точки дотику лінзи і пластинки, наближено виконується наступна рівність:

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Для утворення світлого кільця необхідно, щоб у місці його розташування виконувалась умова

$$\Delta = k\lambda, \quad (4)$$

де k – ціле число, що нумеруватиме кільця. Прирівнюючи вирази (3) та (4) маємо

$$\frac{r_k^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad (5)$$

де r_k – радіус k -го світлого кільця. Формула (5) дозволяє оцінити радіус кривизни лінзи опуклої поверхні лінзи:

$$R = \frac{r_k^2}{(k - 1/2)\lambda}. \quad (5)$$

Як відомо, фокусна відстань лінзи з поверхнями, які мають радіуси кривизни R та R_0 у випадку, коли вона знаходиться у повітрі визначається співвідношенням

$$F = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)}. \quad (5)$$

Для плоскої поверхні $R_0 = \infty$ і тому остаточно отримуємо

$$F = \frac{r_k^2}{(n-1)(k-1/2)\lambda} \approx 1,37(\text{м}).$$

Задача О.8. Дифракційна ґратка містить $N_1 = 800$ штрихів на 1 мм. На неї нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,585$ мкм. Визначити, як зміниться кут дифракції для спектра другого порядку, якщо взяти ґратку з $N_2 = 500$ штрихами на одному міліметрі.

Розв'язок:

Кут φ відхилення променів, що відповідає максимуму при дифракції на ґратці нормально падаючого світла довжиною λ визначається з умови:

$$d \sin \varphi = k \lambda, \quad (1)$$

де d – період ґратки,
 $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ - порядок спектру.
 Якщо на довжині L ґратки
 вкладається N штрихів, то період
 цієї ґратки:

$$d = \frac{L}{N}. \quad (2)$$

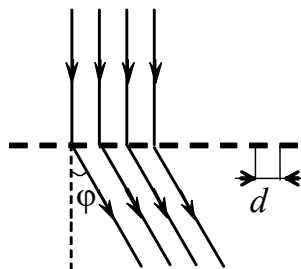


Рис.1.7

Виражаючи з (1) $\sin \varphi$ і підставляючи у (2) отримаємо:

$$\sin \varphi = \frac{k \lambda N}{L}. \quad (3)$$

Таким чином, кут спостереження максимуму при дифракції на першій ґратці

$$\varphi_1 = \arcsin \left(\frac{k \lambda N_1}{L} \right),$$

тоді як для другої

$$\varphi_2 = \arcsin \left(\frac{k \lambda N_2}{L} \right).$$

При заміні ґратки кут зміниться на величину:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arcsin \left(\frac{k \lambda N_2}{L} \right) - \arcsin \left(\frac{k \lambda N_1}{L} \right) \approx -33.59^\circ.$$

Отже, якщо взяти іншу ґратку, то кут дифракції для спектру другого порядку зменшиться приблизно на 33.6° .

Задача О.9. Кут α між площинами пропускання поляризаторів дорівнює 50° . Природне світло, проходить крізь таку систему послаблюється в $k = 5$ разів. Нехтуючи втратами світла при відбитті, визначити коефіцієнт поглинання χ світла в поляризаторах.

Розв'язок:

Природне світло, що падає на перший поляризатор N_1 , розщеплюється внаслідок подвійного променезаломлення на два промені: звичайний і незвичайний. Обидва промені однакові за інтенсивністю та повністю поляризовані. Площина коливань світлового вектора незвичайного променя (e) лежить у площині малюнка (площині головного перерізу поляризатора). Площина коливань для звичайного променя (o) перпендикулярна площині малюнка. Звичайний промінь повністю поглинається

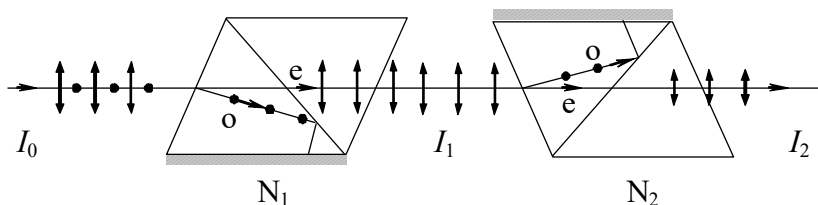


Рис.1.8

поляризатором. Незвичайний промінь проходить через поляризатор змінюючи свою інтенсивність внаслідок поглинання, таким чином:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \chi), \quad (1)$$

де I_0 – інтенсивність природного світла, що падає на оптичну систему, I_1 – інтенсивність світла, що пройшло перший поляризатор, χ – коефіцієнт поглинання світла поляризатором.

Плоскополяризований промінь інтенсивністю I_1 , який падає на другий поляризатор N_2 , також розщеплюється на звичайний і незвичайний промені різної інтенсивності. Звичайний промінь повністю поглинається поляризатором. Врахувавши поглинання світла в поляризаторі та користуючись законом Малюса для інтенсивності I_2 променя, який виходить з N_2 , можемо записати:

$$I_2 = I_1 (1 - \chi) \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Підставляючи (1) в (2), отримуємо:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \chi)^2 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$

Виражаючи з формули (3) χ та враховуючи, що згідно умови задачі $\frac{I_0}{I_2} = k$, остаточно маємо:

$$\chi = 1 - \sqrt{\frac{2I_2}{I_0 \cos^2 \alpha}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{k \cos^2 \alpha}} \approx 1.6 \cdot 10^{-2}.$$

Задача О.10. Частково поляризоване світло проходить крізь ніколь. При повороті ніколя на кут $\alpha = 60^\circ$ від положення, при якому інтенсивність світла, яке пройшло є максимальним, ця інтенсивність зменшується в $\eta = 2$ рази. Нехтуючи поглинанням і відбиванням світла ніколем, визначити: а) відношення інтенсивностей I_p лінійно поляризованої складової та I_0 природної складової світла на вході в ніколь; б) ступінь поляризації P вхідного пучка.

Розв'язок:

Частково поляризоване світло можна уявити як суміш природного та плоско поляризованого. Після проходження такою сумішню поляризатора найбільша інтенсивність буде спостерігатися у випадку, коли площина пропускання ніколя збігається з площиною поляризації лінійно поляризованої складової, а отже вона проходитиме повністю. Щодо природної складової, то при будь-якому положенні ніколя її внесок у вихідне світло буде дорівнюватиме половині I_0 . Таким чином, при першому положенні ніколя, сумарна максимальна інтенсивність вихідного світла I_1 може бути записана наступним чином:

$$I_1 = I_p + 0,5I_0. \quad (1)$$

При повороті ніколя на кут α внесок плоскополяризованої складової у загальну вихідну інтенсивність I_2 можна обчислити використовуючи закон Малюса. Тобто:

$$I_2 = I_p \cos^2 \alpha + 0,5I_0. \quad (2)$$

Оскільки згідно з умовою задачі $I_1 / I_2 = \eta$, то, використовуючи дві попередні рівності, отримуємо

$$\frac{I_p + 0,5I_0}{I_p \cos^2 \alpha + 0,5I_0} = \eta.$$

Перетворивши останній вираз матимемо

$$\frac{I_p}{I_0} = \frac{\eta - 1}{2(1 - \eta \cos^2 \alpha)} = 1.$$

Ступінь поляризації можна знайти за допомогою формули:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3)$$

де I_{\max} та I_{\min} – максимальна і мінімальна, відповідно, інтенсивності світла, які пропускається поляризатором. В нашому випадку $I_{\max} = I_1$, а I_{\min} спостерігається, коли лінійно поляризована складова повністю затримується нікелем, тобто $I_{\min} = 0,5 I_0$. Таким чином

$$P = \frac{I_p + 0,5I_0 - 0,5I_0}{I_p + 0,5I_0 + 0,5I_0} = \frac{I_p}{I_p + I_0},$$

$$P = \frac{\eta - 1}{\eta(1 - 2 \cos^2 \alpha) + 1} = 0,5.$$

Задача О.11. *Пластинку кварцу товщиною $d = 2$ мм помістили між паралельними ніколями, за рахунок чого площина поляризації монохроматичного світла повернулася на кут $\varphi = 53^\circ$. Якої найменшої товщини d_{\min} потрібно взяти кварцеву*

пластинку, щоб поле зору поляриметра стало повністю темним?

Розв'язок:

Кут повороту площини поляризації монохроматичного світла при проходженні через оптично активну речовину (в даному випадку кварц) описується формулою:

$$\varphi = \alpha d, \quad (1)$$

де α – стала обертання речовини, d – шлях, що пройшло світло. Тобто, якщо у світла, яке пройшло через пластину товщиною d площина поляризації повернулася на кут φ , то стала обертання для цього матеріалу:

$$\alpha = \frac{\varphi}{d}. \quad (2)$$

Щоб поле зору поляриметра було абсолютно темним необхідно, щоб напрям поляризації світла, яке падає на аналізатор і напрям площини пропускання аналізатора були перпендикулярні. Тобто, мінімальний кут, на який пластина має повернути площину поляризації світла $\varphi_{\min} = 90^\circ$. Використовуючи вираз (1), можемо записати:

$$\varphi_{\min} = \alpha \cdot d_{\min},$$

$$d_{\min} = \frac{\varphi_{\min}}{\alpha},$$

або, враховуючи (2),

$$d_{\min} = \frac{\varphi_{\min}}{\phi} d \approx 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Задача О.12. Як і в скільки разів зміниться потік випромінення абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінення зміститься з червоної границі видимого спектра ($\lambda_{m1} = 780 \text{ нм}$) до фіолетової ($\lambda_{m2} = 390 \text{ нм}$)?

Розв'язок:

Згідно із законом Стефана-Больцмана потік випромінення абсолютно чорного тіла описується виразом:

$$\Phi = S E_{rad} = S \sigma T^4, \quad (1)$$

де σ – стала Стефана-Больцмана, S та T – площа та термодинамічна температура поверхні тіла, відповідно.

З іншого боку, довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінення визначається законом зміщення Віна:

$$\lambda_m = \frac{b_w}{T}, \quad (2)$$

де b_w – стала Віна. Якщо з формули (2) виразити T та підставити в (1), отримаємо:

$$\Phi = S \sigma \left(\frac{b_w}{\lambda_m} \right)^4. \quad (3)$$

Тобто, для потоку випромінення в першому і другому випадках можемо записати:

$$\Phi_1 = S \sigma \left(\frac{b_w}{\lambda_{m1}} \right)^4, \quad \Phi_2 = S \sigma \left(\frac{b_w}{\lambda_{m2}} \right)^4. \quad (4)$$

Поділивши друге рівняння системи (4) на перше, отримуємо:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{S \sigma b_w^4}{\lambda_{m2}^4} \frac{\lambda_{m1}^4}{S \sigma b_w^4} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} \right)^4 = 16.$$

Тобто, потік випромінення збільшиться в 16 разів.

Задача О.13. Чорний тонкостінний куб зі стороною $a = 10$ см заповнений водою, нагрітою до температури $t_1 = 50^\circ\text{C}$. За який час температура куба зменшиться до температури $t_2 = 10^\circ\text{C}$, якщо він знаходиться в середині

замкнутої чорної площини, температура стінок якої підтримується рівною $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

Розв'язок:

Зміна температури куба визначається а) втратами енергії внаслідок власного теплового випромінювання; б) поглинанням електромагнітних хвиль, які випромінюються оточуючою площиною. Перша величина залежить від поточної температури куба і змінюється з часом. Друга величина збігається з потоком, який би випромінював куб у випадку, коли його температура була б рівною температурі площини і залишається постійною при охолодженні. Таким чином, кількість теплоти dQ , яку втрачає куб за нескінченно малий проміжок часу dt можна записати у вигляді

$$dQ = 6a^2\sigma(T^4 - T_0^4)dt, \quad (1)$$

де T – поточна температура куба, $6a^2$ – площа поверхні куба.

З іншого боку, dQ пов'язана зі зміною температури куба dT наступним співвідношенням:

$$dQ = \rho_m a^3 C_{II} dT, \quad (2)$$

де ρ_m – густина води, a^3 – об'єм куба, C_{II} – питома теплоємність води. Прирівнюючи праві частини (1) та (2) отримуємо рівняння теплового балансу охолодження куба протягом dt :

$$\rho_m a^3 C_{II} dT = 6a^2\sigma(T^4 - T_0^4)dt. \quad (3)$$

Розділяючи змінні та переходячи до скінченних інтервалів отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T^4 - T_0^4} &= \frac{6\sigma}{\rho_m a C_{II}} dt, \\ \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^4 - T_0^4} &= \int_0^{\tau} \frac{6\sigma}{\rho_m a C_{II}} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Враховуючи, що значення інтегралу

$$\begin{aligned}
\int \frac{dT}{T_0^4 - T^4} &= \int \frac{dT}{(T_0^2 - T^2)(T_0^2 + T^2)} = \\
&= \frac{1}{2T_0^2} \int \frac{(T_0^2 + T_0^2) dT}{(T_0^2 - T^2)(T_0^2 + T^2)} = \frac{1}{2T_0^2} \int \frac{(T_0^2 - T^2 + T_0^2 + T^2) dT}{(T_0^2 - T^2)(T_0^2 + T^2)} = \\
&= \frac{1}{2T_0^2} \left[\int \frac{dT}{(T_0^2 + T^2)} + \int \frac{dT}{(T_0^2 - T^2)} \right] = \\
&= \frac{1}{2T_0^2} \left[\frac{1}{T_0} \operatorname{arctg}\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{1}{2T_0} \ln \left| \frac{T_0 + T}{T_0 - T} \right| \right] + C
\end{aligned}$$

отримуємо

$$\tau = \frac{\rho_m a C_{II}}{12 \sigma T_0^3} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(T_0 + T_1)(T_0 - T_2)}{(T_0 - T_1)(T_0 + T_2)} \right| \right]$$

$$\tau \approx 1.4 \cdot 10^5 \text{ с.}$$

Задача О.14. Знайти довжину хвилі фотона λ_{ph} , імпульс якого дорівнює імпульсу електрона з кінетичною енергією $E_{k,e} = 0,3 \text{ MeV}$.

Розв'язок:

Задана в умові величина кінетичної енергії електрона співрозмірна з величиною його енергії спокою (0,511 MeV). А отже, при записі його імпульсу необхідно використовувати релятивістські вирази. Зокрема, зв'язок імпульсу електрона p_e та його повної енергії E_e можна записати, використовуючи релятивістський інваріант:

$$E_e^2 - p_e^2 c^2 = m_0^2 c^4, \quad (1)$$

де m_0 – маса спокою електрона, c – швидкість світла у вакуумі. Водночас

$$E_e = m_0 c^2 + E_{k,e}. \quad (2)$$

Підставляючи вираз (2) в (1) отримуємо

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{(2m_0 c^2 + E_{k,e}) E_{k,e}} . \quad (3)$$

Водночас, для фотона

$$p_{ph} = \frac{h}{\lambda_{ph}} . \quad (4)$$

Так як згідно з умовою задачі $p_{ph} = p_e$, остаточно отримуємо

$$\lambda_{ph} = \frac{hc}{\sqrt{(2m_0 c^2 + E_{k,e}) E_{k,e}}} \approx 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ (м)} . \quad (5)$$

Задача О.15. Червона границя фотоефекту для цинку $\lambda_0 = 310 \text{ нм}$ Визначити максимальну кінетичну енергію $E_{k,max}$ фотоелектронів в електрон-вольтах, якщо на цинк падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 200 \text{ нм}$.

Розв'язок:

Згідно з формулою Ейнштейна для фотоефекту:

$$\varepsilon = A_B + E_{k,max} , \quad (1)$$

де ε – енергія фотона, який падає на поверхню металу; A_B – робота виходу електрона для цього металу; $E_{k,max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Для фотону енергія ε зв'язана з довжиною хвилі λ співвідношенням:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} , \quad (2)$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі.

В свою чергу, червона границя фотоефекту λ_0 пов'язана з роботою виходу електрона:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_B} . \quad (3)$$

Підставивши у вираз (1) виражене з (3) значення роботи виходу, а також враховуючи (2), отримуємо:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + E_{k,\max},$$

звідки

$$E_{k,\max} = hc \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda \lambda_0}. \quad (5)$$

Перевіримо, чи має формула (5) розмірність енергії:

$$[E_{k,\max}] = \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}^2} = \text{Дж}.$$

Використовуючи формулу (5), знаходимо:

$$E_{k,\max} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{(3,1 - 2) \cdot 10^{-7}}{3,1 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-7}} \approx 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)}.$$

Враховуючи, що $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ остаточно запишемо

$$E_{k,\max} = \frac{3,5 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 2,2 \text{ (eV)}.$$

Задача О.16. Внаслідок ефекту Комптона, фотон розсіявся на вільному електроні на кут $\theta = \pi/2$. Визначити імпульс p , який отримав електрон, якщо енергія фотону до розсіяння була $\varepsilon_1 = 1,02 \text{ MeV}$.

Розв'язок:

Згідно з законом збереження імпульсу:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e, \quad (1)$$

де \vec{p}_1 та \vec{p}_2 – імпульси фотону до і після розсіяння, відповідно;
 \vec{p}_e – імпульс переданий електрону. З рис.1.9 видно, що, відповідно до теореми косинусів:

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta, \quad (2)$$

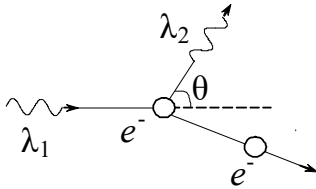


Рис.1.9

де θ – кут, на який розсіявся фотон.

Для фотону його імпульс p_{ph} і довжина хвилі λ_{ph} пов'язані між собою співвідношенням:

$$p_{ph} = \frac{h}{\lambda_{ph}}, \quad (3)$$

де h – стала Планка. Таким чином:

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1}, \quad p_2 = \frac{h}{\lambda_2}, \quad (4)$$

де λ_1 і λ_2 – довжини хвилі фотона до та після розсіювання, відповідно.

Згідно з формулою Комптона:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta), \quad (5)$$

де m_0 – маса спокою електрону, c – швидкість світла у вакуумі. Енергія фотону до розсіювання ε_1 пов'язана з λ_1 наступним чином:

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1}. \quad (6)$$

Виражаючи із співвідношення (6) λ_1 та підставляючи в (5), маємо:

$$\lambda_2 - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta);$$

звідки:

$$\lambda_2 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) + \frac{hc}{\varepsilon_1} = h \frac{\varepsilon_1 (1 - \cos \theta) + m_0 c^2}{m_0 c \varepsilon_1}. \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (4) і враховуючи (6), отримуємо:

$$p_1 = \frac{h}{hc / \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{c},$$

$$p_2 = \frac{h}{h \frac{\varepsilon_1 (1 - \cos \theta) + m_0 c^2}{m_0 c \varepsilon_1}} = \frac{m_0 c \varepsilon_1}{m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)}. \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (2) матимемо:

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(\frac{\varepsilon_1}{c} \right)^2 + \left(\frac{m_0 c \varepsilon_1}{m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)} \right)^2 - \\ &\quad - 2 \left(\frac{\varepsilon_1}{c} \right) \left[\frac{m_0 c \varepsilon_1}{m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)} \right] \cos \theta = \\ &= \varepsilon_1^2 \left\{ \frac{1}{c^2} + \left[\frac{m_0 c}{m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)} \right]^2 - \frac{2 m_0 \cos \theta}{m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)} \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_1^2}{c^2 [m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)]^2} \cdot \left\{ m_0^2 c^4 + \varepsilon_1^2 (1 - \cos \theta)^2 + \right. \\ &\quad + 2 \varepsilon_1 m_0 c^2 (1 - \cos \theta) + m_0^2 c^4 - 2 m_0^2 c^4 \cos \theta - \\ &\quad \left. - 2 m_0 c^2 \varepsilon_1 \cos \theta (1 - \cos \theta) \right\} = \frac{\varepsilon_1^2}{c^2 [m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)]^2} \times \\ &\quad \times \left\{ 2 m_0^2 c^4 (1 - \cos \theta) + \varepsilon_1^2 (1 - \cos \theta)^2 + 2 \varepsilon_1 m_0 c^2 (1 - \cos \theta)^2 \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_1^2 (1 - \cos \theta)}{c^2 [m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)]^2} \left\{ (1 - \cos \theta) \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 2 m_0 c^2) + 2 m_0^2 c^4 \right\} \\ p &= \frac{\varepsilon_1 \sqrt{1 - \cos \theta}}{c [m_0 c^2 + \varepsilon_1 (1 - \cos \theta)]} \sqrt{2 m_0^2 c^4 + \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 2 m_0 c^2) (1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Перевіримо, чи має формула (9) розмірність імпульсу:

$$\begin{aligned}
 [p] &= \frac{Дж}{\text{м/с} [\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 + Дж]} \sqrt{\text{кг}^2 \text{м}^4 \text{с}^{-4} + Дж (Дж + \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2})} = \\
 &= \frac{Дж}{\text{м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot Дж} \sqrt{Дж^2} = \frac{Дж \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.
 \end{aligned}$$

Користуючись формулою (9) знаходимо:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1,632 \cdot 10^{-13} \sqrt{(1 - \cos 90^\circ)}}{3 \cdot 10^8 \left[9,11 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 + 1,632 \cdot 10^{-13} (1 - \cos 90^\circ) \right]} \times \\
 &\times \sqrt{2 \cdot (9,11 \cdot 10^{-31})^2 (3 \cdot 10^8)^4 + 1,632 \cdot 10^{-13} (1 - \cos 90^\circ)} \cdot \\
 &\times \sqrt{\left(1,632 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \right)} \approx \\
 &\approx 5,74 \cdot 10^{-22} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.
 \end{aligned}$$

1.3. Задачі для самостійного розв'язку

Геометрична оптика

1.1. Побудувати хід променів – рис.1.10.

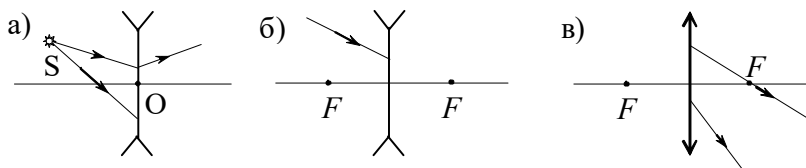


Рис.1.10

1.2. Вдovж головної оптичної осі збирної лінзи розташовано тонкий прямий предмет, обидва кінці якого знаходяться від лінзи на відстанях більше фокусної. Об'єкт, встановлений біля одного кінця предмету, зображується із збільшенням k_1 , а об'єкт, встановлений біля другого – зі збільшенням k_2 . Знайти, з яким збільшенням k зображується предмет.

1.3. Розсіююча та збирна лінзи з фокусними відстанями F_1 і F_2 , відповідно, розташовані на відстані b одна від одної. На відстані d від розсіючої лінзи на головній оптичній осі знаходиться точкове джерело світла. Знайти відстань a між джерелом та його дійсним зображенням.

1.4. Предмет знаходиться на відстані a від екрану. Між ними розміщують збирну лінзу, яка дає на екрані чітке зображення предмету при двох положеннях. Знайти відношення розмірів зображень n , якщо відстань між положеннями лінз дорівнює b .

1.5. Два точкових джерела світла розташовані на відстані b один від одного. Між ними на відстані d від одного з них розміщена збирна лінза. При цьому зображення обох джерел виявилися в одній точці. Знайти фокусну відстань F лінзи.

1.6. Визначити коефіцієнт заломлення n речовини лінзи, якщо радіуси кривизни її поверхонь становлять $R = 50$ см, а оптична сила – $D = 2$ дптр.

1.7. Яка товщина d скляної плоскопаралельної пластинки, якщо точку на задній поверхні пластинки спостерігач бачить на відстані $l = 5$ см від передньої поверхні? Показник заломлення скла $n = 1,6$. Промінь зору перпендикулярний до поверхні пластинки. Для малих кутів $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

1.8. На дні посудини, наповненою водою до висоти h , знаходиться точкове джерело світла. На поверхні води плаває круглий диск причому його центр знаходиться над джерелом світла. При якому мінімальному радіусі диска жоден промінь не вийде через поверхню води? Показник заломлення води n .

1.9. Промінь світла падає у воду зі скла. За якого найменшого кута падіння α_0 буде спостерігатися повне відбиття? Абсолютний показник заломлення скла 1,5, води – 1,33.

1.10. На яку відстань l зміститься промінь світла, який поширюється у склі з показником заломлення n , якщо на його шляху перебуває плоскопаралельна щілина шириною d , заповнена повітрям? Кут падіння променя на щілину дорівнює α . Повного відбивання не відбувається.

1.11. У центрі круглого столу діаметром $D = 1,2$ м стоїть настільна лампа з однією електричною лампочкою, розташованою на висоті $h_1 = 40$ см над поверхнею столу. Над центром столу на висоті $h_2 = 2$ м від його поверхні висить люстра з чотирьох таких самих лампочок. Яка з освітленостей більша: E_1 , коли горить лише настільна лампа, або E_2 , коли увімкнена люстра?

1.12. Лампа, в якій джерелом світла виступає розжарена кулька діаметром $d = 3$ мм, випромінює світло силою $I = 85$ кд. Знайти яскравість лампи B , якщо сферична колба лампи виготовлена: а) з прозорого скла; б) з матового скла. Діаметр колби $D = 6$ см.

1.13. На аркуш білого паперу площею $S = 600$ см² перпендикулярно до поверхні падає світловий потік $\Phi = 120$ лм. Знайти освітленість E , світимість R і яскравість B аркуша, якщо коефіцієнт відбивання $\rho = 0,75$.

1.14. При фотографуванні предмет освітлюється електричною лампою, розташованою від нього на відстані $r_1 = 2$ м. В скільки разів потрібно збільшити час експозиції, якщо цю ж лампу відсунути на відстань $r_2 = 3$ м від предмета?

Хвильова оптика

1.15. Чому дорівнює амплітуда E результуючої хвилі, що утворюється при накладанні N некогерентних коливань з однаковими напрямом зміщень та амплітудою E_0 ?

1.16. Дві світлові хвилі створюють у певній точці простору коливання однакового напрямку, що описуються функціями $E_0 \cos(\omega t)$ та $E_0 \cos((\omega + \Delta\omega)t)$, де $\Delta\omega = 0,628$ рад/с. Як буде змінюватись інтенсивність світла I в цій точці?

1.17. Дві електромагнітні хвилі з довжиною λ інтерферують у вакуумі. Чому дорівнює їхня різниця фаз $\Delta\phi$, якщо різниця ходу Δ складає а) 0; б) $0,2\lambda$; в) $0,5\lambda$; г) λ ; д) $1,2\lambda$?

1.18. Різниця фаз $\Delta\phi$ двох інтерферуючих хвиль дорівнює а) 0; б) 60° ; в) $\pi/2$; г) π ; д) 2π ; е) 540° . Чому в цьому випадку дорівнює відношення різниці ходу до довжини кожної з хвиль?

1.19. Оптична різниця ходу інтерферуючих променів $\Delta = 2,5$ мкм. Знайдіть всі довжини хвиль видимого діапазону, для яких у такому випадку виконується умова а) максимуму інтерференції; б) мінімуму інтерференції.

1.20. На шляху променя світла, який розповсюджується у воді ($n_s = 1,33$), перпендикулярно до нього розташували скляну пластинку ($n_c = 1,5$) товщиною $d = 1$ мм. На скільки при цьому зміниться оптична довжина шляху?

1.21. Від двох когерентних джерел, що випромінюють світло з довжиною хвилі λ , промені потрапляють на екран. На екрані спостерігається інтерференційна картина. Коли на шляху одного з променів перпендикулярно до нього помістили мильну плівку з показником заломлення n , інтерференційна картина змінилася на

протилежну. При якій найменшій товщині плівки d_{\min} це можливо?

1.22. Відстань L від щілини до екрану у досліді Юнга дорівнює 1 м. Визначити відстань d між щілинами, якщо на відрізку довжиною $l = 1$ см вкладається $N = 10$ темних інтерференційних смуг. Довжина хвилі $\lambda = 0,7$ мкм.

1.23. Два когерентні джерела світла S_1 і S_2 , що випромінюють світло з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм розташовані на відстані $d = 2$ мм одне від одного (рис.1.11). Паралельно лінії, яка сполучає джерела, розміщено екран на віддалі $L = 2$ м від них. Що спостерігатиметься в точці А екрану: світло чи темрява?

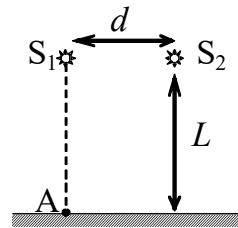


Рис.1.11

1.24. Відстані від скляної ($n = 1,5$) біпризми Френеля з кутом заломлення $\theta = 20'$ до вузької щілини та екрана дорівнюють $a = 0,25$ м та $b = 1$ м, відповідно. Знайти довжину хвилі світла, при освітленні яким на екрані з'являються інтерференційної смуги шириною $\Delta x = 5,5 \cdot 10^{-4}$ м.

1.25. На поверхні калюжі знаходиться плівка гасу. На плівку під кутом $i = 60^\circ$ падає паралельний пучок білого світла. При спостереженні у відбитому світлі плівка має зелений колір ($\lambda = 0,52$ мкм). Визначити мінімально можливу товщину плівки d_{\min} . Вважати, що показник заломлення гасу $n = 1,4$ і це більше, ніж показник заломлення води.

1.26. На скляну пластину нанесено тонкий шар прозорої речовини з показником заломлення $n = 1,3$. Пластина освітлюється паралельним пучком монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 640$ нм, який падає на пластину нормально. Яку мінімальну товщину d_{\min} повинен мати шар, щоб відбитий пучок мав найменшу яскравість? Вважати, що показник заломлення скла $n_c = 1,5$.

1.27. Пучок білого світла нормально падає на скляну пластинку товщиною якої $d = 4 \cdot 10^{-7}$ м. Показник заломлення скла $n = 1,5$. Які довжини хвиль з видимого спектра будуть підсилюватися у відбитому світлі?

1.28. Між скляною пластинкою і розташованою на ній плоскоопуклою лінзою, знаходиться рідина. Знайти показник заломлення рідини, якщо радіус r_3 третього темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм дорівнює $0,82$ мм. Радіус кривизни лінзи $R = 0,5$ м.

1.29. Відстань темними кільцями Ньютона з номерами $k_1 = 4$ та $k_2 = 25$ дорівнює $\Delta x = 9$ мм. Радіус кривизни лінзи $R = 15$ м. Знайти довжину хвилі падаючого нормально на прилад світла. Спостереження проводять у відбитому світлі.

1.30. Прилад для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, яке падає нормально до поверхні. Знайти товщину повітряного прошарку між лінзою та пластинкою у тому місці, де у відбитому світлі спостерігається темне кільце з номером $k = 4$.

1.31. Кільця Ньютона спостерігаються у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм. У певній точці товщина повітряного прошарку між опуклою поверхнею лінзи та плоскою пластинкою $d = 1,767$ мкм. Світле чи темне кільце проходить крізь цю точку?

1.32. На тонкий скляний клин нормально падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі λ . Відстань між сусідніми темними інтерференційними смугами у відбитому світлі дорівнює b . Визначити кут α між поверхнями клина, вважаючи, що показник заломлення скла, з якого виготовлений клин, дорівнює n .

1.33. Мильна плівка розташована вертикально і утворює клин через стікання рідини. Інтерференційну картину спостерігають перпендикулярно до поверхні плівки у відбитому світлі з довжиною $\lambda = 5,46 \cdot 10^{-7}$ м. Відстань між $k = 5$ смугами дорівнює

$d = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Показник заломлення мильної плівки $n = 1,33$. Знайти кут клина в секундах.

1.34. Якою має бути ширина щілини b , щоб перший дифракційний максимум спостерігався під кутом $\alpha = 90^\circ$, якщо освітлення проводиться: а) червоним світлом ($\lambda_1 = 760$ нм); б) синім світлом ($\lambda_2 = 440$ нм)?

1.35. Монохроматичне світло ($\lambda = 0,64$ мкм) нормально падає на щілину шириною $b = 0,2$ мм. Визначити розмір центральної світлої смуги в кутових одиницях. Вважати, що світла смуги обмежена мінімумами дифракційної картини.

1.36. На ширині щілини вкладається $\eta = 6$ довжин хвиль падаючого нормально світла. Під яким кутом буде спостерігатися третій дифракційний мінімум світла?

1.37. На дифракційну ґратку у напрямі нормалі до її поверхні падає монохроматичне світло. Період ґратки $d = 2$ мкм. Визначити найбільший порядок дифракційного максимуму, який може спостерігатися на цій ґратці, для червоного ($\lambda_1 = 0,7$ мкм) та фіолетового ($\lambda_2 = 0,41$ мкм) світла.

1.38. При нормальному освітленні дифракційної ґратки максимуму другого порядку для лінії $\lambda_1 = 0,65$ мкм відповідає кут $\varphi_1 = 45^\circ$. Знайти кут φ_2 , що відповідає максимуму третього порядку для лінії $\lambda_2 = 0,50$ мкм.

1.39. На дифракційну ґратку падає нормально паралельний пучок білого світла. Спектри третього і четвертого порядку частково накладаються один на одного. На яку довжину хвилі λ_0 в спектрі четвертого порядку накладається червона границя ($\lambda = 780$ нм) спектра третього порядку?

1.40. Чи можуть перекриватися спектри першого та другого порядків дифракційної ґратки при освітленні її видимим світлом ($\lambda_{\text{ф}} = 400$ нм та $\lambda_{\text{чер}} = 760$ нм)?

1.41. Скільки рисок має дифракційна ґратка на $D = 1$ мм довжини, якщо зелена лінія ртуті ($\lambda = 0,5461$ мкм) у спектрі

першого порядку спостерігають під кутом $\varphi = 19^\circ 8'$?

1.42. Дифракційна ґратка, що має $N = 500$ штрихів на $D = 1$ мм, освітлюється фіолетовим світлом ($\lambda = 0,4$ мкм). Визначити кутову $\Delta\varphi$ відстань між максимумами першого порядку.

1.43. На якій відстані від дифракційної ґратки треба розташувати екран, щоб відстань між невідхиленим зображенням і спектром четвертого порядку ($k = 4$) дорівнювала $l = 5 \cdot 10^{-2}$ м для світла з довжиною хвилі $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м? Постійна дифракційної ґратки дорівнює $d = 2 \cdot 10^{-5}$ м.

1.44. На дифракційну ґратку, яка містить $N = 600$ рисок на міліметрі, падає нормально біле світло. Отриманий спектр проєктується розташованою поблизу ґратки лінзою на екран. Визначити довжину l спектру першого порядку на екрані, якщо відстань від лінзи до екрана $L = 1,2$ м. Границі видимого спектру $\lambda_{\text{чер}} = 780$ нм, $\lambda_{\text{ф}} = 400$ нм.

1.45. Яку найменшу кількість N_{min} рисок повинна містити дифракційна ґратка, щоб у спектрі другого порядку можна було окремо побачити дві жовті лінії натрію з довжинами хвиль $\lambda_1 = 589,0$ нм і $\lambda_2 = 589,6$ нм? Яка довжина l такої ґратки, якщо постійна ґратки $d = 5$ мкм?

1.46. Дифракційна ґратка с постійною $d = 3$ мкм має $N = 1000$ штрихів. Визначте найбільшу роздільну здатність ґратки для лінії натрію з довжиною $\lambda = 589,6$ нм.

1.47. Пучок рентгенівських променів з довжиною хвилі λ падає під кутом ковзання $\alpha_0 = 60^\circ$ на лінійно розташовані центри розсіяння. Відстань між сусідніми центрами a . Знайти кути ковзання α , які відповідають всім дифракційним максимумам, якщо $\lambda = 0,4 a$.

1.48. Вузький пучок рентгенівських променів падає під кутом ковзання $\theta = 60^\circ$ на грань монокристала NaCl, густина якого $\rho_m = 2,16$ г/см³. При дзеркальному відбиванні від цієї грані спостерігається максимум другого порядку. Вважаючи, що

кристал має гранецентровану кубічну ґратку, визначити довжину хвилі випромінення λ .

1.49. Найменший кут зору, при якому око бачить окремо два штрихи, дорівнює $\theta = 1'$. Яку найменшу відстань розрізняє око на віддалі найкращого зору $L = 0,25$ м?

1.50. Пучок природного світла падає на поліровану поверхню скляної пластини з показником заломлення n_2 , яка занурена у рідину. Відбитий від пластини пучок світла утворює кут ϕ з падаючим пучком. Визначити показник заломлення n_1 рідини, якщо відбите світло максимально поляризоване.

1.51. Промінь світла падає з повітря на поверхню рідини під кутом $\alpha = 60^\circ$. Знайти кут заломлення β променя, якщо відбитий промінь максимально поляризований.

1.52. Під яким кутом до горизонту β повинно знаходитись Сонце, щоб його промені, відбиті від поверхні моря, були б повністю поляризовані? Вважати, що абсолютний показник заломлення морської води $n = 1.33$.

1.53. Знайти коефіцієнт відбиття ρ природного світла, яке падає на скло під кутом повної поляризації. Знайти ступень поляризації P променів, що пройшли в скло. Показник заломлення скла дорівнює $n = 1.54$.

1.54. Кут між площинами поляризації двох поляроїдів $\alpha = 70^\circ$. Як зміниться інтенсивність світла, що проходить через них, якщо цей кут зменшити у $k = 5$ разів.

1.55. Чому дорівнює кут ϕ між головними площинами поляризатора та аналізатора, якщо інтенсивність природного світла, яке пройшло крізь систему зменшилася у $k = 4$ рази? Поглинанням світла знехтувати.

1.56. Трубка довжиною $l = 0,1$ м заповнена водним розчином цукру та розташована між поляризатором і аналізатором. Щоб досягти повного затемнення світла після аналізатора, треба повернути його відносно аналізатора на кут $\phi = 60^\circ$. Вважаючи коефіцієнт питомого обертання світла рівним $\alpha = 66,7^\circ \text{г дм}^{-1} \text{см}^{-3}$,

визначити концентрацію цукру C в розчині.

1.57. При проходженні світла крізь шар товщиною $d_1 = 10$ см розчину цукру з концентрацією $C_1 = 10\%$ площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi_1 = 16^\circ 30'$. В іншому розчині цукру при проходженні відстані $d_2 = 25$ см площина поляризації повернулася на кут $\varphi_2 = 33^\circ$. Чому дорівнює концентрація C_2 другого розчину?

Квантова оптика

1.58. Початкова температура абсолютно чорного тіла складає $T = 10000$ К. Знайти на скільки відсотків зросте його енергетична світність при підвищенні температури на $\Delta T = 10$ К.

1.59. Абсолютно чорне тіло нагріли від кімнатної температури $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 500^\circ\text{C}$. Як при цьому змінилася потужність випромінювання? На скільки змінилися довжина максимуму випромінювальної здатності?

1.60. Початкова температура теплового випромінювання $T = 2000$ К. На скільки має змінитися ця температура, щоб найбільш ймовірна довжина хвилі у його спектрі збільшилась на $\Delta\lambda = 260$ нм?

1.61. Середня енергетична світність поверхні Землі $R = 0,54$ Дж/(см²·хв). Якою має бути температура T поверхні Землі, якщо вона випромінює як сіре тіло з коефіцієнтом чорноти $\beta = 0,25$?

1.62. Радіус Сонця дорівнює $r_C = 6,96 \cdot 10^5$ км; радіус орбіти Меркурія $R_{\text{Мк}} = 5,79 \cdot 10^7$ км, Марса - $R_{\text{Мр}} = 2,28 \cdot 10^8$ км. Температура поверхні Сонця складає приблизно $T_C = 6000$ К. Використовуючи закони теплового випромінювання, оцінити середні температури планет.

1.63. Вважаючи Сонце абсолютно чорною кулею радіусом $r_C = 6,96 \cdot 10^5$ км, для якої максимум випромінювальної здатності припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0,48$ мкм, знайти масу, яка ним втрачається щосекунди внаслідок випромінювання. Оцінити час,

за який маса Сонця зменшиться на $\eta = 1\%$, якщо маса Сонця $m_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

1.64. Потік випромінювання абсолютно чорного тіла $\Phi = 10$ кВт, максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0,8$ мкм. Визначити площу S випромінюючої поверхні.

1.65. Частота максимальної інтенсивності теплового випромінювання абсолютно чорного кубу об'ємом $V = 10^5$ см³ становить $\nu_m = 1,5 \cdot 10^{14}$ Гц. До якої температури T нагрітий куб? Яка потужність N його теплового випромінювання.

1.66. Вольфрамова спіраль лампочки розжарювання має діаметр $d = 0,3$ мм та довжину $l = 5$ см. При ввімкненні лампочки у мережу з напругою $U = 127$ В через неї протікає струм силою $I = 0,3$ А. Знайти температуру спіралі, припускаючи, що вся спожита енергія йде на випромінювання. Спіраль вважати сірим тілом з коефіцієнтом чорноти $\beta = 0,31$.

1.67. В яких областях спектру розташовані довжини хвиль, які відповідають максимуму спектральної густини енергетичної світності, якщо джерелом світла є: а) спіраль лампи розжарювання ($T = 3000$ К); б) поверхня Сонця ($T = 6000$ К); в) атомна бомба, в якій в момент вибуху розвивається температура $T \approx 10^7$ К? Вважати всі вищезначені тіла абсолютно чорними.

1.68. Оцініть положення максимуму випромінювальної здатності тіла людини.

1.69. Визначити енергію, що випромінюється крізь віконце печі впродовж часу $t = 1$ хв. Температура печі $T = 1500$ К, площа віконця $S = 10$ см². Вважати, що піч випромінює як абсолютне чорне тіло.

1.70. За допомогою формули Планка визначити, в скільки разів зростає інтенсивність випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм при збільшенні температури від $T_1 = 2000$ К до $T_2 = 2300$ К.

1.71. Яку потужність N потрібно підводити до металевої

кульки радіусом $r = 2$ см, щоб підтримувати її температуру на $\Delta T = 27$ К вище температури оточуючого середовища? Температура оточуючого середовища $T = 293$ К. Вважати, що тепло втрачається тільки за рахунок випромінення, кульку розглядати як абсолютно чорне тіло.

1.72. Мідну кульку помістили у посудину зі стінками, температура яких притримується близькою до абсолютного нуля. Початкова температура кульки дорівнювала T . За проміжок часу Δt її температури знизилась в η разів. Визначте радіус кульки r .

1.73. При якому значенні швидкості електрону v його імпульс дорівнюватиме імпульсу фотона з довжиною хвилі $\lambda = 1$ нм?

1.74. Людське око здатне сприймати світловий потік потужністю $N = 2 \cdot 10^{-17}$ Вт. Знайти кількість фотонів n_{ph} з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм, що потрапляють в око за час $t = 1$ с при вказаній потужності.

1.75. На пластину падає монохроматичне світло з частотою ν . Фотострум припиняється при затримуючій різниці потенціалів U . Визначити роботу виходу A_B електронів з поверхні пластини.

1.76. Визначити максимальну швидкість v_{\max} фотоелектронів, що вибиваються з поверхні срібла: а) ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,155$ мкм; б) γ -випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_2 = 1$ пм.

1.77. Фотони з енергією $\varepsilon = 4$ еВ падають на метал з роботою виходу $A_B = 2,5$ еВ. Визначте імпульс фотоелектрону p_e .

1.78. При деякому максимальному значенні затримуючої різниці потенціалів фотострум з поверхні літію, який освітлюється електромагнітним випроміненням з довжиною хвилі λ_0 , припиняється. Змінивши довжину хвилі випромінення в $\gamma = 1,5$ рази, встановили, що для припинення фотоструму необхідно збільшити затримуючу різницю потенціалів в $\eta = 2$ рази. Визначити λ_0 .

1.79. На поверхню металу падає монохроматичне світло з довжиною хвилі λ . Червона границя фотоелефекту дорівнює λ_0 . Яка

частка енергії фотону δ витрачається на надання електронів кінетичної енергії?

1.80. Знайти роботу виходу з деякого металу, якщо при почерговому освітленні його поверхні електромагнітним випроміненням з довжинами хвиль $\lambda_1 = 0,35$ мкм і $\lambda_2 = 0,54$ мкм максимальні швидкості фотоелектронів відрізняються в $\eta = 2$ рази.

1.81. Чи придатний барій для використання в фотоелементах, призначених для реєстрації видимого світла?

1.82. Мідна кулька, віддалена від інших тіл, опромінюється електромагнітними хвилями з довжиною хвилі $\lambda = 200$ нм. До якого максимального потенціалу зарядиться кулька?

1.83. Рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі $\lambda_1 = 55,8$ пм розсіюється під кутом $\theta = 60^\circ$. Визначте довжину хвилі λ_2 розсіяного світла.

1.84. Визначити максимальну зміну довжини хвилі $(\Delta\lambda)_{\max}$ при комптоновському розсіянні світла на вільних електронах і вільних протонах.

1.85. В результаті ефекту Комптона фотон при зіткненні був розсіяний на кут θ . Енергія розсіяного фотона ε_2 . Визначити енергію фотона ε_1 до розсіяння.

1.86. Фотон з енергією $\varepsilon_1 = 0,51$ МеВ був розсіяний при ефекті Комптона на вільному електроні на кут $\theta = 180^\circ$. Визначити кінетичну енергію E_k електрона віддачі.

1.87. Фотон з енергією ε_1 , яка дорівнює енергії спокою електрону, розсіявся на вільному електроні на кут $\theta = 120^\circ$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотону та кінетичну енергію E_k електрона віддачі (в одиницях $m_0 c^2$).

1.88. Визначити мінімальну довжину хвилі λ_{\min} гальмівного рентгенівського випромінювання, якщо до рентгенівської трубки прикладена напруга $U = 30$ кВ.

2. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ

2.1. Теоретичні відомості

Квантова механіка є розділом фізики, який вивчає методи опису та властивості елементарних частинок, атомів і молекул. Квантово-механічний підхід успішно поширюється і на опис фізичних властивостей макросистем, наприклад, твердих тіл та рідин, які складаються з великої кількості окремих атомів чи молекул.

Атомна фізика – розділ фізики, в якому предметом дослідження є властивості окремих атомів та фізичні процеси на атомному рівні. Значна частина експериментальних даних, що використовувалися при формуванні принципів квантової механіки, була отримана саме при дослідженні будови та спектрів атомів. І навпаки, теоретичною основою сучасної атомної фізики є квантова механіка.

Постулати Бора. Історично першим кроком при побудові квантового опису властивостей атомів були *постулати Бора* (1913р.):

1. З усіх колових орбіт, по яким може рухатися електрон навколо ядра, реалізуються тільки стаціонарні, рухаючись по яким електрон не випромінює електромагнітні хвилі. Момент імпульсу електрона на стаціонарній орбіті визначається квантовою умовою

$$m v r = n \hbar . \quad (2.1)$$

2. При переході електрона зі однієї стаціонарної орбіти, на якій його повна енергія E_1 , на іншу стаціонарну орбіту з енергією E_2 випромінюється чи поглинається квант електромагнітного поля (фотон) з енергією:

$$h \nu = E_1 - E_2 . \quad (2.2)$$

У виразах (2.1-2.2) v – лінійна швидкість електрона; m – маса електрона; r – радіус колової орбіти; $n = 1, 2, 3 \dots$ – цілі числа; ν – частота електромагнітної хвилі, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, $\hbar = h / 2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – зведена стала Планка.

У подальшому у роботах В. Гайзенберга, Е. Шрьодінгера, М. Борна, П. Дірака, Л. де Бройля, Н. Бора (1925 – 1927р.) були сформульовані принципи нерелятивістської квантової механіки та побудовано її математичний апарат. В їх основі покладено **постулати квантової механіки**:

1. Кожній фізичній величині f ставиться у відповідність певний математичний оператор \hat{f} .

Сукупність значень $\{f_n\}$ фізичної величини f , які можуть бути отримані при її вимірюваннях – *власні значення* оператора, які утворюють *спектр оператора*. Спектр оператора може бути як дискретним, так і неперервним. Нагадаємо, що математичний оператор визначає процедуру, за якою деяка функція ϕ переводиться в іншу функцію ϕ . Наприклад, оператор похідної $\frac{d}{dx}$ переводить функцію $\sin 2x$ у функцію $2 \cos 2x$ тощо.

2. Стан квантової системи може бути описаний певною комплексною функцією координат та часу $\psi(\vec{r}, t)$ – *хвильовою функцією*.

Вимірювання фізичної величини за допомогою приладу (математично – дія оператора \hat{f} на хвильову функцію $\psi(\vec{r}, t)$ квантової системи), в результаті якого фізична величина набуває певного значення f , можна описати операторним рівнянням:

$$\hat{f}\psi = f\psi . \quad (2.3)$$

Вимірювання є *передбачуваним*, якщо в результаті його деяке власне значення f_n спостерігається з достовірністю (імовірність

$P_n = 1$). Передбачуване вимірювання описується операторним рівнянням:

$$\hat{f}\psi_n = f_n\psi_n. \quad (2.4)$$

Передбачуване вимірювання, яке з імовірністю $P_n = 1$ дає значення f_n , можливе лише тоді, коли мікросистема перебуває у стані з певною хвильовою функцією ψ_n – власною функцією оператора, що відповідає власному значенню f_n . Отже, кожний оператор \hat{f} фізичної величини характеризується спектром $\{f_n\}$ та відповідною йому системою власних функцій $\{\psi_n\}$.

3. Принцип суперпозиції квантових станів. Якщо в результаті вимірювання фізичної величини f може спостерігатися будь-яке з власних значень $\{f_n\}$ оператора цієї величини, кожне зі своєю ймовірністю, то хвильова функція квантової системи може бути представлена у вигляді лінійної комбінації власних функцій $\{\psi_n\}$ оператора цієї величини

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \quad (2.5)$$

$n = \overline{1, N}$, N - кількість власних функцій оператора \hat{f} . Квадрат модуля $c_n c_n^* = |c_n|^2$ є імовірністю, з якою експериментально спостерігається значення f_n : $P_n = |c_n|^2$.

4. Хвильова функція системи $\psi(\vec{r}, t)$ може бути визначена як розв'язок рівняння Шрьодінгера.

Рівняння Шрьодінгера є рівнянням на відшукування функції $\psi(\vec{r}, t)$ у частинних похідних за часом та координатами і для частинки масою m , яка рухається у силовому полі з потенціальною енергією $U(\vec{r}, t)$, має вигляд:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{U}(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

де $\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ – оператор кінетичної енергії,

$\hat{U}(\vec{r}, t) \equiv U(\vec{r}, t)$ – оператор потенціальної енергії, Δ – оператор

Лапласа (у декартовій системі координат $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$);

i – уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$.

Оператор повної енергії частинки (*оператор Гамільтона*):

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{U}(\vec{r}, t). \quad (2.7)$$

Стаціонарне рівняння Шрьодінгера. При русі частинки у стаціонарному полі (тобто, у випадку, коли просторовий розподіл потенціальної енергії частинки не змінюється з часом $U(\vec{r}, t) \equiv U(\vec{r})$) рівняння (2.6) набуває вигляду

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}), \quad (2.8)$$

де $\varphi(\vec{r})$ – координатна частина хвильової функції $\psi(\vec{r}, t)$,

E – повна енергія частинки; при цьому $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \exp(-i \frac{E}{\hbar} t)$.

Стаціонарне рівняння Шрьодінгера є операторним рівнянням на відшукування власних функції $\varphi(\vec{r})$ та власних значень E оператора повної енергії частинки у стаціонарному полі:

$$\hat{H}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}). \quad (2.9)$$

Фізичний зміст хвильової функції. Квадрат модуля функції

$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi(\vec{r}, t)\psi^*(\vec{r}, t)$ дорівнює

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \frac{dP}{d\tau}, \quad (2.10)$$

де dP – імовірність відшукування частинки в об'ємі $d\tau$. Зокрема, у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) координати

точок, що знаходяться у цьому об'ємі, задовольняють умовам $x \div x + dx$; $y \div y + dy$; $z \div z + dz$. При $d\tau = 1$ квадрат модуля $|\psi|^2 = dP$. Отже, квадрат модуля хвильової функції визначає імовірність знаходження частинки в одиничному об'ємі, тобто, є густиною імовірності.

Нормування хвильової функції. Відшукування частинки у фізично доступному об'ємі τ є достовірною подією, імовірність якої дорівнює одиниці:

$$P = \int_{\tau} dP = \int_{\tau} |\psi|^2 d\tau = 1. \quad (2.11a)$$

У ПДСК інтеграл набуде вигляду:

$$P = \int_{\tau} dP = \int_{\tau} |\psi|^2 d\tau = \iiint_{xyz} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1. \quad (2.11б)$$

У рівняннях (2.11a, 2.11б) межі інтегрування визначаються діапазоном можливих значень проєкцій радіус-вектора частинки. Для виконання умови (2.11a) хвильова функція повинна бути: 1) *однозначно визначеною*; 2) *неперервною* за змінними (x, y, z) , причому похідні $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ також повинні бути неперервними; 3) *обмеженою* (у випадках, коли межі інтегрування в (2.11) змінюються від $-\infty$ до $+\infty$, умова обмеженості вимагає $\psi(\pm\infty) \rightarrow 0$).

Властивості **операторів** фізичних величин.

1. Оператори в квантовій механіці **лінійні**:

$$\hat{f}(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1(\hat{f}\psi_1) + C_2(\hat{f}\psi_2), \quad (2.12)$$

де C_1 та C_2 – константи.

2. **Сумою** операторів \hat{f} та \hat{g} є оператор $(\hat{f} + \hat{g})$, дія якого на функцію ψ визначається як

$$(\hat{f} \pm \hat{g})\psi = \hat{f}\psi \pm \hat{g}\psi. \quad (2.13)$$

3. **Добутком** операторів \hat{f} та \hat{g} є оператор $(\hat{f}\hat{g})$:

$$(\hat{f} \hat{g})\psi = \hat{f}(\hat{g}\psi), \quad (2.14)$$

тобто першим на функцію діє найближчий до неї оператор. Оператори **комутативні**, якщо порядок їх дії на функцію не впливає на кінцевий результат.

Комутатором операторів \hat{f} та \hat{g} є оператор

$$[\hat{f}, \hat{g}] = (\hat{f} \hat{g}) - (\hat{g} \hat{f}). \quad (2.15)$$

Умова комутативності операторів має вигляд:

$$[\hat{f}, \hat{g}]\psi = 0. \quad (2.16)$$

4. Кожному оператору \hat{f} можна поставити у відповідність **комплексно-спряжений оператор** \hat{f}^* , якій діє на множину функцій $\{\psi_n^*\}$, комплексно-спряжених з функціями $\{\psi_n\}$:

$$\hat{f}^* \psi_n^* = f_n^* \psi_n^*. \quad (2.17)$$

Важливо, що для операторів фізичних величин спектр може бути тільки дійсним: $\{f_n^*\} = \{f_n\}$. Отже, в цьому випадку

$$\hat{f}^* \psi_n^* = f_n^* \psi_n^* = f_n \psi_n^*. \quad (2.18)$$

5. Оператор $\tilde{\hat{f}}$ називається **транспонованим** до оператора \hat{f} , якщо для будь яких функцій ϕ, ψ виконується рівність

$$\int \psi^* (\hat{f} \phi) d\tau = \int \phi^* (\tilde{\hat{f}} \psi) d\tau. \quad (2.19)$$

Інтегрування у (2.19) проводиться по об'єму τ . Враховуючи (2.18) та (2.19), можна зробити висновок, що для оператора *фізичної величини* комплексно-спряжений оператор збігається з транспонованим оператором:

$$\hat{f}^* = \tilde{\hat{f}}. \quad (2.20)$$

6. **Спряженим** називають оператор \hat{f}^+ , транспонований до комплексно-спряженого

$$\hat{f}^+ = \hat{f}^{\sim*}. \quad (2.21)$$

Очевидно, для оператора **фізичної величини** спряжений оператор \hat{f}^+ збігається з самим оператором \hat{f}

$$\hat{f} = \hat{f}^+. \quad (2.22)$$

Оператори, які мають вказану властивість (2.22), називають **самоспряженими** або **ермітовими**. Усі оператори фізичних величин є ермітовими.

Середнє значення фізичної величини. Якщо квантова система перебуває у стані з хвильовою функцією ψ , то середнє значення фізичної величини f , якій відповідає оператор \hat{f} , у стані з такою хвильовою функцією, дорівнює

$$\langle f \rangle = \int_{\tau} \psi^* (\hat{f} \psi) d\tau. \quad (2.23)$$

Ортонормованість власних функцій операторів фізичних величин. Нехай оператор фізичної величини \hat{f} має спектр $\{f_n\}$ та систему власних функцій $\{\psi_n\}$, причому кожному власному значенню f_n відповідає **лише одна** власна функція ψ_n , тобто, при $n \neq m$ виконується умова $f_n \neq f_m$. Тоді система власних функцій $\{\psi_n\}$ є **ортонормованою**:

$$\int \psi_m^* \psi_n d\tau = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}, \quad (2.24)$$

величина δ_{mn} називається **символом Кронекера**. Інтеграл $\int \psi_m^* \psi_n d\tau$ називають **скалярним добутком** функцій ψ_n та ψ_m . Зауважимо, що можливі випадки, коли власному значенню f_n відповідає декілька власних функцій $\psi_{n1}, \psi_{n2}, \dots, \psi_{nk}$. Такий спектр

оператора називають **виродженням**, а число k характеризує **кратність виродження**.

Оператор похідної за часом від фізичної величини f дорівнює

$$\frac{\hat{d}f}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{f}], \quad (2.25)$$

\hat{H} – оператор Гамільтона для квантової системи. Оператор похідної визначає похідну від середнього значення фізичної

величини: $\frac{d}{dt} \langle f \rangle = \int \psi^* \frac{\hat{d}f}{dt} \psi d\tau$. Із співвідношення (2.25)

випливає умова збереження: *середнє значення фізичної величини f не змінюється з часом, якщо оператор цієї величини: 1) явно не залежить від часу; 2) комутує з оператором Гамільтона відповідної квантової системи.*

Явний вигляд операторів фізичних величин. У класичній механіці рух макрочастинок описується такими фізичними величинами, як координата та час (та похідними від них кінематичними характеристиками – швидкість, прискорення), імпульс та момент імпульса, потенціальна та кінетична енергія тощо. Як зазначалося, при переході від класичної до квантової механіки кожній фізичній величині ставиться у відповідність певний математичний оператор. Але дуже важливо, *що співвідношення між фізичними величинами, які встановлені у класичній фізиці, зберігаються такими ж і між відповідними операторами у квантовій механіці (принцип відповідності).* Виходячи з цього принципу, встановлюють явний вигляд операторів фізичних величин.

Оператори координати \hat{x} та часу \hat{t} збігаються з класично визначеними координатою x та часом t , тобто дія цих операторів зводиться до множення на них хвильової функції.

Оператор імпульса частинки (квантовомеханічне представлення класичного імпульса $\vec{p} = m\vec{v}$) має вигляд

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (2.26)$$

де $\vec{\nabla}$ - оператор (вектор) набла, явний вигляд якого залежить від системи координат.

У ПДСК оператор імпульса має вигляд

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla = \hat{p} = \hat{p}_x \vec{e}_x + \hat{p}_y \vec{e}_y + \hat{p}_z \vec{e}_z = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right),$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.26a)$$

Оператор моменту імпульса частинки (квантовомеханічне представлення класичного моменту імпульса $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$). Замінюючи в останньому співвідношенні вектори на відповідні оператори, можна отримати:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix};$$

$$\hat{L} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Відповідно, оператори проєкцій моменту імпульса на координатні вісі:

$$\hat{L} = \hat{L}_x \vec{e}_x + \hat{L}_y \vec{e}_y + \hat{L}_z \vec{e}_z = (\hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y) \vec{e}_x - (\hat{x} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_x) \vec{e}_y + (\hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x) \vec{e}_z,$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (2.28)$$

Оператор квадрата момента імпульса:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad (2.29)$$

Власні значення та власні функції операторів \hat{L}^2 , \hat{L}_z , \hat{p}_x .

Оператори квадрата моменту імпульсу та проєкції моменту на вибрану вісь (як правило, розглядають вісь OZ) використовуються для опису станів електронів у полі атомного ядра. Операторні рівняння на відшукування власних значень та власних функцій цих операторів зручно записувати у сферичній системі координат (ССК). У цій системі положення точки A у просторі задається (рис. 2.1):

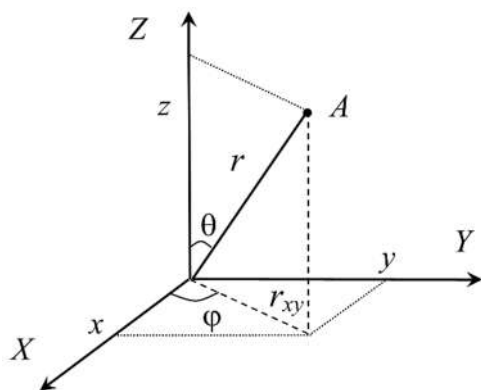


Рис. 2.1. Взаємозв'язок між координатами в ССК та ПДСК

- відстанню r від центра сфери до точки на сфері, $r = \overline{0, \infty}$;
- полярним кутом θ , відрахованим від полярної осі $\theta = \overline{0, \pi}$;
- азимутальним кутом, відрахованим від площини нульового меридіану, $\varphi = \overline{0, 2\pi}$.

Зв'язок між координатами сферичної

та прямокутної систем координат, як видно з рис. 2.1, задається

співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi ; \\ y = r \sin \theta \sin \varphi ; \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (2.30)$$

Оператор \hat{L}^2 (2.29) у сферичній системі координат набуває вигляду:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (2.31)$$

Рівняння на власні значення і власні функції $\hat{L}^2 \psi_L = L^2 \psi_L$ записується у вигляді:

$$-\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_L}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_L}{\partial \phi^2} \right\} = L^2 \psi_L. \quad (2.32)$$

Розв'язком операторного рівняння (2.32) є власні значення:

$$\begin{aligned} L^2 &= \hbar^2 l(l+1), \\ L &= \hbar \sqrt{l(l+1)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де $l = 0, 1, 2, \dots$ – ряд цілих чисел. Параметр l має назву **орбітального (або азимутального) квантового числа**.

Власними функціями оператора \hat{L}^2 є *сферичні функції*:

$$\begin{aligned} \psi_L &\equiv Y_{lm_l}(\theta, \varphi) = \\ &= (-1)^{\frac{m_l + |m_l|}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(i m_l \varphi) \cdot \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{2(l+|m_l|)!}} \cdot P_l^{m_l}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.34)$$

де m_l – **магнітне квантове число**, причому $|m_l| \leq l$. При даному l магнітне квантове число набуває наступних значень:

$$m_l = +l, l-1, l-2, \dots, 0, -1, -2, \dots, -l, \quad (2.35)$$

тобто усього $(2l + 1)$ можливих значень. Функції $P_l^{m_l}(\cos \theta)$ називаються приєднаними поліномами Лежандра

$$P_l^{m_l}(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{|m_l|}{2}} \frac{d^{|m_l|}}{d(\cos \theta)^{|m_l|}} \cdot P_l(\cos \theta). \quad (2.36)$$

Функції $P_l(\cos \theta)$ – поліноми Лежандра:

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} [(\cos^2 \theta - 1)^l]. \quad (2.37)$$

Оператор \hat{L}_z у сферичній системі координат має вигляд

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.38)$$

Розв'язком операторного рівняння $\hat{L}_z \psi_{L_z} = L_z \psi_{L_z}$ є власні значення

$$L_z = \hbar m_l, \quad (2.39)$$

де m_l – те саме магнітне квантове число. Власні функції:

$$\psi_{L_z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i m_l \varphi). \quad (2.40)$$

Оператор \hat{p}_x , як і оператор \hat{x} , має *неперервний* спектр, тобто проєкція імпульса може набувати усіх можливих значень у діапазоні $p_x = \overline{-\infty, +\infty}$. Власна функція оператора

$$\psi_{p_x} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right). \quad (2.41)$$

Спін. Важлива особливість багатьох елементарних частинок (електронів, протонів, нейтронів тощо) полягає у тому, що вони мають *власний момент імпульса (власний механічний момент)* або *спін*, який є суто квантово-механічним параметром

і не має класичного аналогу. Зокрема, некоректно пов'язувати спін з класичним обертанням частинки навколо власної осі.

Для операторів **квадрата власного моменту імпульса** \hat{L}_s^2 та оператора **проекції власного моменту імпульса** \hat{L}_{zs} на вісь OZ **власні значення** визначаються подібно до (2.33) та (2.39):

$$\begin{aligned} L_s^2 &= \hbar^2 s(s+1), \\ L_s &= \hbar \sqrt{s(s+1)}, \\ L_{zs} &= \hbar m_s. \end{aligned} \quad (2.42)$$

де s – **спінове квантове число**, яке, власне, і називають **спіном**; m_s – квантове число, що визначає **проекцію спіна** на вибрану вісь. Важливо, що для електронів, протонів та нейтронів спін $s = 1/2$. За загальним правилом (2.35):

$$m_s = +s, s-1, s-2, \dots, 0, -1, -2, \dots, -s. \quad (2.43)$$

Очевидно, при $s = 1/2$ можливі тільки два значення $m_s = -1/2, +1/2$, які визначають дві проекції $L_{zs} = \pm \hbar/2$. Частинки з **напівцілим спіном** називають **ферміонами**, на відміну від частинок з цілим спіном, які мають назву **бозонів** (наприклад, фотон, $s = 1$).

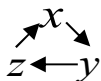
Комутаційні співвідношення для операторів фізичних величин. Комутатори операторів координати, імпульса, моменту імпульса, квадрата моменту імпульса дорівнюють:

$$\begin{aligned} [\hat{p}_x, \vec{x}] &= -i\hbar, \quad [\hat{p}_x, \hat{y}] = 0; \\ [\hat{L}_x, \hat{x}] &= 0, \quad [\hat{L}_x, \hat{y}] = i\hbar z, \\ [\hat{L}_y, \hat{z}] &= i\hbar x, \quad [\hat{L}_z, \hat{x}] = i\hbar y; \\ [\hat{L}_x, \hat{p}_x] &= 0, \quad [\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar p_z, \\ [\hat{L}_y, \hat{p}_z] &= i\hbar \hat{p}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar \hat{p}_y; \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y;$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0.$$

Доведення деяких з наведених комутаційних співвідношень розглянуто у прикладах розв'язку задач (А.12). Із співвідношень (2.44) випливає загальне правило обчислення виразів типу $[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = i\hbar p_k$ та $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar L_k$ (кожен з індексів i, j, k може набувати трьох значень x, y, z): перехід від першого індексу i до другого j , а потім до k здійснюється циклічно, за обходом трикутника за годинниковою стрілкою:



Важливо, що комутативність операторів визначається системами їх власних функцій. *Оператори комутують, якщо мають спільну систему власних функцій.*

Співвідношення невизначеностей Гайзенберга. Нехай в результаті великої кількості N *одночасних* вимірювань (гранично – нескінченно великої кількості) проєкції імпульса частинки p_x та її координати x визначено середнє значення проєкції імпульса $\langle p_x \rangle$, середнє значення координати $\langle x \rangle$, а також *середньоквадратичні відхилення* результатів окремих вимірювання від середніх значень

$$\langle (\Delta p_x)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N (\langle p_x \rangle - p_{x_i})^2 / N, \quad \langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N (\langle x \rangle - x_i)^2 / N.$$

Невизначеностями проєкції імпульсу Δp_x та координати частинки Δx називають корені квадратні з відповідних *середньоквадратичних відхилень*: $\Delta p_x = \sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle}$,

$$\Delta x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}. \quad \text{Очевидно, невизначеності } \Delta p_x \text{ та } \Delta x$$

характеризують статистичні розкиди значень p_x та x при їхньому одночасному вимірюванні.

Співвідношення невизначеностей Гайзенберга стверджує, що добуток невизначеностей Δp_x та Δx за порядком величини визначається сталою Планка \hbar : $\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar$. Такі ж співвідношення справедливі і для y - та z -складових імпульса та координати. Тобто:

$$\begin{aligned}\Delta p_x \cdot \Delta x &\sim \hbar, \\ \Delta p_y \cdot \Delta y &\sim \hbar, \\ \Delta p_z \cdot \Delta z &\sim \hbar.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Фізичний зміст співвідношень (2.45) полягає в наступному: при одночасному вимірюванні величин p_x та x чим з вищою точністю (меншим статистичним розкидом Δp_x) вимірюється проєкція імпульсу p_x , тим з меншою точністю (більшим статистичним розкидом Δx) вимірюється координата x , і навпаки.

При вимірюванні енергії системи справедливо наступне співвідношення невизначеностей:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar.\tag{2.46}$$

Фізичний зміст (2.46): при зменшенні проміжку часу Δt між послідовними вимірюваннями невизначеність енергії системи ΔE зростає, і навпаки. Невизначеність енергії при послідовних вимірюваннях 1 та 2 визначається як різниця значень енергії при цих вимірюваннях $\Delta E = |E_2 - E_1|$.

Поняття про теорію збурень. Важливо, що точний розв'язок рівняння Шрьодінгера, на жаль, є можливим тільки для невеликої кількості реальних фізичних систем. Але досить часто реальні системи мало відрізняються від ідеалізованих, для яких існує точний розв'язок рівняння Шрьодінгера. У таких випадках виконується **наближений розв'язок**, який зводиться до відшукування **поправок** до точного розв'язку відповідної ідеалізованої задачі. Нехай реальна фізична система описується

стаціонарним рівнянням Шрьодінгера $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$, для якого не існує точного розв'язку. Теорія збурень має застосування, якщо гамільтоніан реальної системи можна розділити на дві складові $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, де \hat{H}_0 – гамільтоніан ідеалізованої системи, для якої є точний розв'язок, \hat{V} – малий доданок, який називають **збуренням** (тобто $|H_0| \gg |V|$). У рівнянні Шрьодінгера для ідеалізованої системи $\hat{H}_0\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}$ хвильові функції $\psi_n^{(0)}$ та енергії $E_n^{(0)}$ точно визначені. Тоді у рівнянні для реальної системи $(\hat{H}_0 + \hat{V})\psi_n = E_n\psi_n$ відшуковують не величини E_n, ψ_n , а поправки до енергій та хвильових функцій $E_n^{(0)}, \psi_n^{(0)}$:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \Delta E_n^{(1)} + \Delta E_n^{(2)} + \dots \\ \psi_n &= \psi_n^{(0)} + \Delta\psi_n^{(1)} + \Delta\psi_n^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Величини $\Delta E_n^{(1)}, \Delta\psi_n^{(1)}$ – поправки **першого порядку** мализни, $\Delta E_n^{(2)}, \Delta\psi_n^{(2)}$ – поправки **другого порядку**. Зокрема, поправка до енергії в першому порядку дорівнює:

$$\Delta E_n^{(1)} = \int_{\tau} \psi_n^{(0)*} \hat{V} \psi_n^{(0)} d\tau. \quad (2.48)$$

Частинка у центрально-симетричному полі. У наближенні центрально-симетричного стаціонарного поля вважається, що поле має **силовий центр**, а потенціальна енергія частинки *залежить тільки від відстані до силового центру*, тобто $U(|\vec{r}|) \equiv U(r)$. Стаціонарне рівняння Шрьодінгера (2.8) для сферично-симетричної задачі зручно розв'язувати у сферичній системі координат, у якій:

- *елемент площі*: $dS = dl_1 dl_2 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$;
- *елементарний об'єм*: $d\tau = dS dr = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ (рис. 2.2).

У ССК оператор Лапласа набуває вигляд:

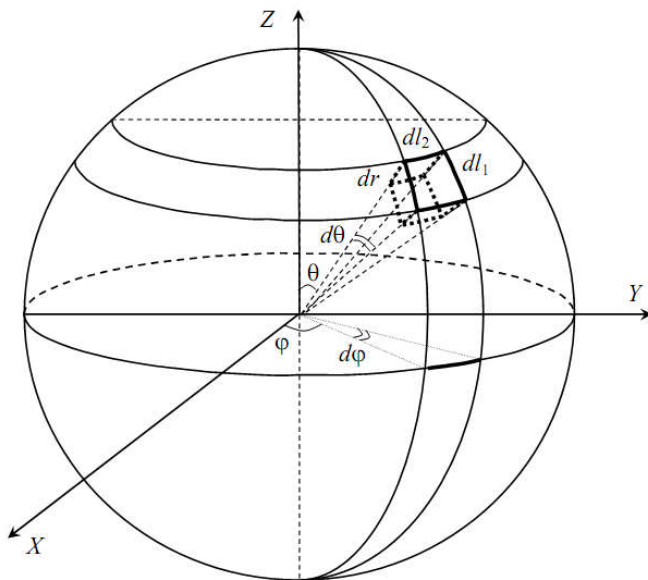


Рис. 2.2. Елемент об'єму в сферичній системі координат

$$\Delta(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2.49)$$

Важлива особливість стаціонарного рівняння Шрьодінгера (2.8) з оператором Лапласа (2.49), яке описує рух частинки у центрально-симетричному полі, полягає у тому, що хвильову функцію частинки $\psi(r, \theta, \varphi)$ можна представити як *добуток* радіальної $R(r)$ та кутової $Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$ частин:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm_l}(\theta, \varphi). \quad (2.50)$$

У рівнянні (2.50) $Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$ – сферичні функції (2.34).

Радіальна частина хвильової функції $R(r)$ та повна енергія частинки E визначаються як розв'язки рівняння:

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + [E - U(r)] r^2 R(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0} R(r) = 0, \quad (2.51)$$

де m_0 – маса частинки. Очевидно, кожному значенню орбітального квантового числа l відповідає певна енергія E та відповідна власна функція $R(r)$: $E \equiv E(l)$; $R(r) \equiv R_l(r)$. Стани з різними значеннями орбітального квантового числа прийнято позначати літерами:

$$\begin{array}{cccccc} l & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots \\ & & s & p & d & f & g & h \dots \end{array}$$

Оскільки при даному l магнітне квантове число може приймати $(2l + 1)$ значень (2.35), кожному з яких відповідає своя сферична функція, отже, і своя повна хвильова функція $\psi(r, \theta, \varphi) = R_l(r)Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$, то стан з певною енергією $E(l)$ є *виродженим за квантовим числом m_l з кратністю $(2l + 1)$* .

Воднеподібний іон – система, що складається з електрона, який рухається у полі атомного ядра, утвореного Z протонами. Випадок $Z = 1$ відповідає **атому водню**. Потенціальна енергія електростатичної (кулонівської) взаємодії електрона з ядром дорівнює

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.52)$$

Рівняння (2.51) для радіальної частини хвильової функції у випадку воднеподібного іону набуде вигляду

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] R(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0. \quad (2.53)$$

Радіальна частина хвильової функції, що є розв'язком рівняння (2.53), визначається виразом:

$$R(r) \equiv R_{nl}(r) = \left(\frac{2Z}{n} r \right)^l \exp\left(-\frac{Z}{n} r \right) \sum_{k=0}^l a_k \left(\frac{2Z}{n} r \right)^k, \quad (2.54)$$

де n – **головне квантове число**, яке може набувати нескінченного ряду значень

$$n = 1, 2, 3, \dots \infty. \quad (2.55)$$

При визначенні квантового стану електрона у кулонівському полі першим задається саме головне квантове число. При вказаному головному квантовому числі орбітальне квантове число набуває значень

$$l = 0, 1, 2, \dots n - 1. \quad (2.56)$$

Максимальне значення індексу k , за яким у (2.54) виконується підсумовування, дорівнює

$$k_{\max} = n - l - 1. \quad (2.57)$$

Енергія електрона у кулонівському полі набуває **дискретних значень**, які визначаються головним квантовим числом:

$$E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (2.58)$$

Отже, стан електрона у полі Z -ядра задається хвильовою функцією, яка визначається **трійкою одноелектронних квантових чисел n, l, m_l** :

$$\Psi_{nl m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{l m_l}(\theta, \varphi). \quad (2.59)$$

Атомна орбіталь – хвильова функція одноелектронного стану у центральній-симетричному полі, яка визначається трійкою одноелектронних квантових чисел n, l, m_l .

Оскільки енергія електрона у кулонівському полі залежить тільки від головного квантового числа $E \equiv E_n$, то кожний рівень енергії є *виродженим* за квантовими числами l, m_l . Кількість одноелектронних станів, які відповідають певному значенню n :

$$N_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{1+2(n-1)+1}{2} n = n^2. \quad (2.60)$$

З урахуванням двох можливих значень проєкції власного механічного моменту електрона (спіна) на вибрану вісь $N_S = 2 N_n = 2n^2$.

де $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ – координати першого, другого електрона тощо; $\psi_p(\vec{r}_1)$ – одночастинкові хвильові функції, які описують перебування першого електрона в одному з можливих $p = \overline{1, N}$ одночастинкових станів, відповідно $\psi_p(\vec{r}_2)$ – описують перебування другого електрона тощо. Варто звернути увагу на те, що кожний стовпчик у детермінанті (2.61) відповідає можливому розподілу одного електрона по усім одночастинковим станам, а кожний рядок – розподілу всіх N електронів у p -му одночастинковому стан. Вигляд хвильової функції системи незасмодіючих електронів (2.61) є наслідком загального **принципу тождественности неразрешенных частинок**, згідно з яким *при перестановці місцями будь-якої пари неразрешенных частинок знак хвильової функції системи, до якої належить вказана пара, може або змінитися на протилежний – хвильова функція антисиметрична (система ферміонів), або залишитися незмінним – хвильова функція симетрична (система бозонів)*. Оскільки електрони є ферміонами, то перестановці місцями частинок у (2.61) відповідає перестановка двох відповідних стовпчиків, що і забезпечує зміну знаку усього детермінанта.

Принцип Паулі. Якщо у системі є два або більше однакових одночастинкових стани, то у детермінанті (2.61) буде, відповідно, два або більше однакових рядка. У цьому випадку *детермінант дорівнює нулю*. Отже, в одному і тому ж одночастинковому стані ψ_p не може одночасно перебувати більше одного електрона. Оскільки в центрально-симетричному полі воднеподібного іона стан електрона задається четвіркою одноелектронних квантових чисел n, l, m, m_s , то для такої системи *принцип Паулі* формулюється так: в одноелектронному стані з заданою четвіркою одноелектронних квантових чисел n, l, m, m_s може перебувати тільки один електрон.

Стани електронів у багатоелектронному атомі. Якщо атом

містить Z електронів, то стаціонарне рівняння Шрьодінгера для системи таких електронів в електростатичному полі ядра має вигляд:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_{j=1}^Z \Delta_j - \sum_{j=1}^Z \frac{Ze^2}{|\vec{r}_j|} + \sum_{\substack{j=1, k=1 \\ j \neq k}}^Z \frac{e^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \right) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z) = \\ = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z), \quad (2.62)$$

де $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z)$ та E – хвильова функція та енергія системи електронів відповідно, \vec{r}_j, \vec{r}_k – радіус-вектори j -го та k -го електронів відносно ядра. Перші два доданки в дужках описують оператори кінетичної енергії електронів та їх потенціальної енергії в електростатичному полі ядра. Ці оператори відповідають сумі тих одноелектронних операторів, які входять у рівняння Шрьодінгера для воднеподібного іона. Однак, третій доданок суттєво інший – він враховує міжелектронну електростатичну взаємодію. За рахунок цієї взаємодії загальне електричне поле, у якому перебуває кожний електрон, **не є центрально-симетричним**, а хвильову функцію системи **не можна будувати у вигляді** (2.61) в силу існування міжелектронної взаємодії. Таке ускладнення задачі не дозволяє виконати аналітичний розв’язок рівняння (2.62) вже починаючи з $Z = 2$ (атом гелію). Важливо наголосити, що у гамільтоніан (2.62) не входить оператор спіна, отже, хвильова функція $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z)$ не залежить від спінових змінних s, m_s .

Для розв’язку рівняння (2.62) використовують наближені методи, зокрема, **метод самоузгодженого поля**. У спрощеній версії цього методу, яка отримала назву **методу Хартрі**:

– хвильова функція $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z)$ будується з одноелектронних хвильових функцій центрально-симетричного поля $\Psi_p(\vec{r}_j) \equiv \Psi_{n l m_l m_s}(\vec{r}_j)$;

– не враховується антисиметричність хвильової функції у (2.62), тобто $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z)$ будується тільки як сума добутків одноелектронних функцій $\psi_p(\vec{r}_j)$ з усіма можливими перестановками електронів по одночастинковим станам.

Тому рівняння (2.62) зводиться до системи Z одночастинкових рівнянь

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta_j - \frac{Ze^2}{|\vec{r}_j|} + \sum_{k=1}^Z \int \Psi_k^*(\vec{r}_k) \frac{e^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \Psi_k(\vec{r}_k) d\tau_k \right) \Psi_j(\vec{r}_j) = E_j \Psi_j(\vec{r}_j). \quad (2.63)$$

Важливу роль у рівняннях (2.63) відіграє доданок

$$U_j(\vec{r}_j) = \sum_{k=1}^Z \int \Psi_k^*(\vec{r}_k) \frac{e^2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \Psi_k(\vec{r}_k) d\tau_k, \quad (2.64)$$

який визначає суму середніх енергій електростатичної взаємодії j -го електрона з усіма іншими електронами атома. Величина $U_j(\vec{r}_j)$ залежить тільки від положення j -го електрона \vec{r}_j .

Рівняння (2.63) розв'язують **методом послідовних наближень**:

– на першому кроці задають хвильові функції **нульового наближення** $\Psi_j^{(0)}(\vec{r}_j)$ (наприклад, у вигляді (2.34), (2.54)) і обчислюють середні енергії $U_j^{(0)}(\vec{r}_j)$;

– підставляють $\Psi_j^{(0)}(\vec{r}_j)$, $U_j^{(0)}(\vec{r}_j)$ у систему рівнянь (2.63) і знаходять енергії $E_j^{(1)}$ та функції $\Psi_j^{(1)}(\vec{r}_j)$, які відповідають вже **першому наближенню**. На цих функціях обчислюють середні енергії $U_j^{(1)}(\vec{r}_j)$;

– на другому кроці у систему (2.63) підставляють $\Psi_j^{(1)}(\vec{r}_j)$, $U_j^{(1)}(\vec{r}_j)$ і в результаті розв'язку визначають вже $\Psi_j^{(2)}(\vec{r}_j)$, $E_j^{(2)}$; знову обчислюють середні енергії, тепер це $U_j^{(2)}(\vec{r}_j)$;

– наведену процедуру визначення $\psi_j^{(m)}(\vec{r}_j)$, $E_j^{(m)}$, $U_j^{(m)}(\vec{r}_j)$ повторюють доти, доки відмінність між хвильовими функціями m -ї та $(m + 1)$ -ітерації не стане меншою заданої величини.

Обчислені у такий спосіб одноелектронні хвильові функції $\psi_j(\vec{r}_j)$ називають хвильовими функціями **самоузгодженого поля**, а величини $U_j(\vec{r}_j)$ - **енергіями самоузгодженого поля**.

Важливо, що енергія $U_j(\vec{r}_j)$, обчислена у такий спосіб, залежить тільки від координати j -електрона, тобто можна вважати, що кожний електрон рухається у своєму центрально-симетричному полі. Отже, при використанні наближення самоузгодженого поля стани електронів у багатоелектронному атомі можна описувати одночастинковими хвильовими функціями, які визначаються четвіркою квантових чисел n, l, m_l, m_s .

У **наближенні Хартрі-Фока** враховується антисиметрія повної хвильової функції системи електронів атома і така функція записується у вигляді детермінанта Слетера (2.61).

Електронна конфігурація. Можливість застосування одночастинкових квантових чисел n, l, m_l, m_s для опису станів електронів не тільки у воднеподібному іоні, але й в багатоелектронному атомі, дозволяє використовувати поняття **електронної конфігурації** – розподілу електронів атома по електронним оболонкам та підоболонкам $(n_1 l_1)^{(k_1)}, (n_2 l_2)^{(k_2)}, \dots$. Числа k_1, k_2, \dots – фактична кількість електронів у кожній підоболонці атома того чи іншого хімічного елемента. Прилади електронних конфігурацій деяких атомів наступні:

вуглець (C): $1s^2 2s^2 2p^2$;

хлор (Cl): $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$;

титан (Ti): $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$;

йод (I): $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4d^{10} 5s^2 5p^5$.

Додавання орбітальних механічних моментів двох та більше електронів атома. Розглянемо атом з двома електронами понад заповнених електронних оболонок. Нехай перший електрон перебуває у стані з орбітальним квантовим числом l_1 , а другий – у стані з l_2 . Тоді, згідно з (2.33) власне значення орбітального моменту першого електрона $L_{l_1} = \hbar\sqrt{l_1(l_1+1)}$, другого – $L_{l_2} = \hbar\sqrt{l_2(l_2+1)}$. Важливо, що власне значення сумарного орбітального моменту двох електронів $\hat{L}_L = \hat{L}_{l_1} + \hat{L}_{l_2}$ визначається сумарним орбітальним числом L , яке набуває можливих значень:

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|. \quad (2.65)$$

Тоді значення сумарного орбітального моменту імпульса двох електронів:

$$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}. \quad (2.66)$$

Кожному значенню L з ряду (2.65) відповідає сукупність значень сумарного магнітного квантового числа

$$M_L = L, L-1, \dots, 0, -1, \dots, -L, \quad (2.67)$$

всього $(2L+1)$. Власне значення оператора проєкції сумарного орбітального моменту імпульса на вісь OZ .

Власне значення оператора проєкції сумарного орбітального моменту імпульса на вісь OZ

$$L_{zL} = \hbar M_L. \quad (2.68)$$

Якщо в атомі більше, ніж 2 електрони, то додавання орбітальних моментів окремих електронів здійснюється наступним чином: знаходять квантові числа L_{12} , які відповідають сумі квантових чисел l_1 та l_2 першого та другого електронів; до них додається квантове число l_3 третього електрона і будуються нові значення L_{123} , що відповідають вже сумі трьох електронів, і так далі. Для усіх отриманих значень сумарних квантових чисел $\{L_{1\dots Z} \equiv L\}$

за формулою (2.66) визначаються значення орбітального моменту імпульсу атома.

Додавання спінових механічних моментів двох та більше електронів атома. Відшукування суми спінових механічних моментів двох електронів $\hat{L}_S = \hat{L}_{s_1} + \hat{L}_{s_2}$ здійснюється у такий же спосіб, як і відшукування суми орбітальних моментів. А саме, визначається сумарне спінове число

$$S = s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, \dots, |s_1 - s_2|. \quad (2.69)$$

Власне значення оператора спінового механічного моменту \hat{L}_S дорівнює:

$$L_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}. \quad (2.70)$$

Оскільки для електрона $s_1 = s_2 = 1/2$, то для двох електронів можливі тільки значення $S = 1, 0$. Проекції сумарного спіна двох електронів визначаються квантовим числом M_S :

$$M_S = +S, \dots, 0, \dots, -S, \quad (2.71)$$

тому при $S = 1$ маємо три значення $M_S = +1, 0, -1$, а при $S = 0$ тільки $M_S = 0$. Для багатоелектронного атома значення спінового квантового числа усіх електронів знаходиться спочатку для двох електронів (величина S_{12}), потім додається квантове число s_3 третього електрона, визначається S_{123} і далі до визначення сукупності квантових чисел $\{S_{1\dots z} \equiv S\}$. Усі можливі значення спінового механічного моменту атома \hat{L}_S обчислюються за формулою (2.70).

Повний механічний момент електрона. Стан електрона в атомі також характеризується *повним механічним моментом*, який є сумою орбітального та спінового механічних моментів $\hat{L}_j = \hat{L}_l + \hat{L}_s$. Очевидно, власне значення повного механічного моменту дорівнює

$$L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}, \quad (2.72)$$

де j – квантове число повного механічного моменту одного електрона, яке визначається додаванням квантових чисел l та s . Як і у випадках (2.65) та (2.69):

$$j = l + s, l + s - 1, \dots, |l - s|. \quad (2.73)$$

Оскільки $s = 1/2$, маємо два можливих значення: $j = l + 1/2$, $j = l - 1/2$.

Повний механічний момент двох електронів. При побудові повного механічного моменту двох електронів існує дві граничні схеми додавання орбітальних моментів та спінів.

LS – зв’язок. У цій схемі окремо будується повний орбітальний механічний момент двох електронів \hat{L}_L , власне значення якого $L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}$ і можливі проєкції $L_{zL} = \hbar M_L$. Квантові числа L та M_L визначаються (2.65), (2.67). У такий же спосіб знаходять повний спіновий механічний момент двох електронів \hat{L}_S з власним значенням $L_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}$ і проєкцією $L_{zS} = \hbar M_S$; квантові числа S та M_S визначаються (2.69), (2.71). Тоді оператор повного механічного моменту $\hat{L}_J = \hat{L}_L + \hat{L}_S$ має власні значення:

$$L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}. \quad (2.74)$$

Квантове число повного механічного моменту, як і (2.65) та (2.69), дорівнює

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|. \quad (2.75)$$

Якщо в атомі більше двох електронів, то за наведеною вище методикою для системи Z електронів будуються квантові числа L та S , за якими визначається квантове число J .

$j-j$ -зв'язок. У моделі $j-j$ -зв'язку спочатку будуються повні механічні моменти кожного електрона: $L_{j_1} = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1)}$, $L_{j_2} = \hbar\sqrt{j_2(j_2+1)}$, де $j_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}$, $j_2 = l_2 \pm \frac{1}{2}$. Відтак, повний механічний момент двох електронів $\hat{L}_J = \hat{L}_{j_1} + \hat{L}_{j_2}$ згідно з наведеними вище загальними правилами додавання моментів також набуває значення $L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$, але тепер

$$J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|. \quad (2.76)$$

Для багатоелектронного атома спочатку визначаються j_{12} двох електронів, далі до j_{12} додається j_3 і знаходяться числа j_{123} системи трьох електронів і так далі, доки не буде визначено квантові числа $\{j_{1\dots Z} \equiv J\}$ системи усіх Z -електронів.

Орбітальний магнітний момент електрона. Наявність у електрона в атомі орбітального момента імпульса \hat{L}_l визначає існування у нього ще й орбітального *магнітного* момента $\hat{\mu}_l$. Дійсно, орбітальний механічний момент \hat{L}_l характеризує обертальний рух електрона навколо ядра. У свою чергу, такий обертальний рух зарядженої частинки породжує замкнений струм, що створює певний магнітний момент $\hat{\mu}_l$. Зв'язок між власними значеннями моментів \hat{L}_l та $\hat{\mu}_l$ визначається *гіромагнітним відношенням* для орбітальних моментів електрона:

$$G_l = \frac{\mu_l}{L_l} = -\frac{e}{2m_0}. \quad (2.77)$$

Знак мінус у (2.77) відображує той факт, що завдяки від'ємному заряду електрона моменти \vec{L}_l та $\vec{\mu}_l$ спрямовані протилежно. З (2.77) можна отримати значення магнітного орбітального момента електрона:

$$\mu_l = -\frac{e}{2m_0} L_l = -\frac{e\hbar}{2m_0} \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (2.78)$$

де $\mu_B = e\hbar / 2m_0 = 5,788 \cdot 10^{-5} \text{ еВ/Тл} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}$ – **магнетон Бора** для електрона. Проекція $\hat{\mu}_l$ на вісь OZ :

$$\mu_{zl} = -\frac{e}{2m_0} L_{zl} = -\frac{e}{2m_0} \hbar m_l = -\mu_B m_l. \quad (2.79)$$

Орбітальний магнітний момент атома. Гіромагнітне відношення (2.77) для одного електрона буде справедливим і при порівнянні значень орбітального механічного момента \hat{L}_L та магнітного орбітального момента $\hat{\mu}_L$ усіх Z-електронів атома:

$$\Gamma_L = \frac{\mu_L}{L_L} = -\frac{e}{2m_0}. \quad (2.80)$$

Отже, магнітний момент атома, зумовлений орбітальним рухом усіх електронів, дорівнює:

$$\mu_L = -\frac{e}{2m_0} L_L = -\frac{e\hbar}{2m_0} \sqrt{L(L+1)} = -\mu_B \sqrt{L(L+1)}. \quad (2.81)$$

Його проекція на вісь OZ:

$$\mu_{zL} = -\frac{e}{2m_0} L_{zL} = -\frac{e}{2m_0} \hbar M_L = -\frac{e\hbar}{2m_0} M_L = -\mu_B M_L. \quad (2.82)$$

Спіновий магнітний момент електрона. Як і випадку орбітальних моментів, існування у електрона спінового механічного момента імпульса \hat{L}_s зумовлює наявність у нього спінового магнітного момента $\hat{\mu}_s$. Експериментально встановлено, що гіромагнітне відношення для спінових моментів електрона у два рази перевищує гіромагнітне відношення для орбітальних моментів:

$$\Gamma_s = \frac{\mu_s}{M_s} = -\frac{e}{m_0} = 2\Gamma_L. \quad (2.83)$$

Отже,

$$\mu_s = -\frac{e\hbar}{m_0}\sqrt{s(s+1)} = -2\mu_B\sqrt{s(s+1)} = -\sqrt{3}\mu_B. \quad (2.84)$$

Проекція $\hat{\mu}_s$ на вісь OZ :

$$\mu_{zs} = -\frac{e}{m_0}L_{zs} = -\frac{e}{m_0}\hbar m_s = -2\mu_B m_s = \mp\mu_B. \quad (2.85)$$

Спіновий магнітний момент атома. Гіромагнітне відношення (2.83) можна застосувати і для системи Z-електронів атома. Тоді

$$\Gamma_s = \frac{\mu_s}{L_s} = -\frac{e}{m_0}, \quad (2.86)$$

де μ_s – значення спінового магнітного моменту усіх електронів атома, M_s – значення спінового механічного моменту всіх електронів атома. Отже,

$$\mu_s = -\frac{e}{m_0}L_s = -2\frac{e\hbar}{2m_0}\sqrt{S(S+1)} = -2\mu_B\sqrt{S(S+1)}, \quad (2.87)$$

$$\mu_{zs} = -\frac{e}{m_0}L_{zs} = -\frac{e}{m_0}\hbar M_s = -2\frac{e\hbar}{2m_0}M_s = -2\mu_B M_s. \quad (2.88)$$

Терми. Рівень енергії атома, який відповідає певним значенням квантових чисел L та S , називається термом. Терм позначають наступним чином:

$$^{(2S+1)}L_J. \quad (2.89)$$

Величина $2S+1$ називається *мультиплетністю* терма. Для позначення термів використовують великі літери латинського алфавіту. Відповідні позначення наведено у табл. 2.1

Таблиця 2.1

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Значення L | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Позначення | S | P | D | F | G | H | I | K | L | M | N |

При заданих L та S квантові числа проєкцій моментів M_L, M_S набувають відповідно $(2L + 1)$ та $(2S + 1)$ можливих значень. Отже, терму $^{2S+1}L_J$ усього відповідає $(2L + 1) \times (2S + 1)$ станів, які відрізняються значеннями z -компонентів орбітального та спінового механічних моментів. Внизу від символу L справа вказують усі можливі значення, яких набуває число J при заданих L та S . Оскільки $J = L + S, L + S - 1, |L - S|$, то при $L \geq S$ можливі $(2S + 1)$ значень J . Розглянемо, наприклад, терм $^3P_{2, 1, 0}$, для якого $S = 1, L = 1, J = 2, 1, 0$. Фактично, в цьому випадку мультиплетність $(2S + 1)$ визначає кількість компонентів терма з різними значеннями J . Хоча при $L < S$ таких значень вже $(2L + 1)$, назва «мультиплетність» зберігається саме за величиною $2S + 1$. При $2S + 1 = 1, (S = 0)$ терм називають **синглетним**; при $2S + 1 = 2, (S = 0,5)$ – **дублетним**; при $2S + 1 = 3, (S = 1), (S = 1)$ – **триплетним**; при $2S + 1 = 4, (S = 1,5)$ – **квартетним** тощо.

Електростатичне розщеплення. У наближенні центрально-симетричного самоузгодженого поля енергія атома (енергія системи Z -електронів) повністю визначається заданою електронною конфігурацією $(n_1 l_1)^{(k_1)}, (n_2 l_2)^{(k_2)}, \dots$. Тобто, **всі терми** даної електронної конфігурації мають **однакову енергію**. Однак, у наближенні центрально-симетричного поля при обчисленні самоузгоджених енергій $U_j(\vec{r}_j)$ (2.64) частина електростатичної взаємодії електронів залишається неврахованою (так звана нецентральна частина електростатичної взаємодії). Якщо її врахувати, зокрема, у першому порядку теорії збурень, то різним термам $^{2S+1}L_J$ заданої електронної конфігурації будуть відповідати різні енергії. Отже, *врахування електростатичної взаємодії електронів призводить до розщеплення єдиного рівня енергії заданої конфігурації на ряд дискретних рівнів, кожному з яких відповідає певний терм $^{2S+1}L_J$* . Енергія електростатичного розщеплення терма ΔE_{LS} залежить

квантових чисел L та S . Зокрема, основний терм конфігурації якісно визначається **правилом Гунда**: *найменшу енергію має терм з найбільшим можливим для даної конфігурації значенням S та найбільшим значенням L , можливим при даному S .*

Наприклад, якщо терми 1P_1 , $^3P_{2,1,0}$, $^3D_{3,2,1}$ належать одній конфігурації, то найменшу енергію має терм $^3D_{3,2,1}$. Важливо, що різним значенням J відповідає одна і та ж енергія терма. Тобто, з врахуванням електростатичного розщеплення кожний терм *вироджений* за квантовим числом J .

Мультиплетне (спін-орбітальне) розщеплення. Відомо, що існування електричного поля напруженістю \vec{E} в нерухомій системі відліку призводить до появи магнітного поля з індукцією $\vec{B} = (1/c)[\vec{E}, \vec{v}]$ у системі відліку, яка рухається з швидкістю \vec{v} відносно нерухомої системи. Можна розглядати ядро атома як нерухому систему, а з електроном пов'язати систему відліку, що обертається навколо ядра з лінійною швидкістю \vec{v} . Величина такої швидкості визначається орбітальним моментом \hat{L}_l . Тоді у власній системі відліку електрона вже буде обертатися ядро і в результаті такого руху створюватиме магнітне поле з індукцією, яка описується оператором $\hat{B}_l = (1/c)[\hat{E}_l, \hat{v}_l]$. Очевидно, $\hat{B}_l \sim \hat{L}_l$. З цим магнітним полем буде взаємодіяти спіновий магнітний момент електрона $\hat{\mu}_s$; енергія такої взаємодії визначається скалярним добутком $\hat{W}_l = -(\hat{\mu}_s, \hat{B}_l)$. Оскільки $\hat{\mu}_s \sim \hat{L}_s$, можна записати $\hat{W}_l = \alpha_{sl}(\hat{L}_s, \hat{L}_l)$. Взаємодія спінового магнітного момента електрона $\hat{\mu}_s$ з магнітним полем \hat{B}_l , яке створюється у системі відліку, пов'язаний з електроном, за рахунок його орбітального руху, називається **спін-орбітальною взаємодією**. Оператор спін-орбітальної взаємодії для усіх електронів атома визначається сумою по всіх електронах:

$$\hat{W}_{SL} = \sum_{j=1}^Z \alpha_j (\hat{L}_{s_j}, \hat{L}_{l_j}) = \alpha_{SL} (\hat{L}_S, \hat{L}_L), \quad (2.90)$$

де α_{SL} – стала спин-орбітальної взаємодії для атома.

З огляду на (2.90) спин-орбітальну взаємодію в атомі можна трактувати як взаємодію двох магнітних моментів – власного $\hat{\mu}_S$ (який $\hat{\mu}_S \sim \hat{L}_S$) та орбітального $\hat{\mu}_L$ (який, у свою чергу, $\hat{\mu}_L \sim \hat{L}_L$).

Спин-орбітальна взаємодія призводить до того, що *станам одного терма LS з різними значеннями квантового числа J вже будуть відповідати різні енергії*. Енергія такого розщеплення

$$\Delta E_J = \frac{1}{2} A_{SL} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)], \quad (2.91)$$

A_{LS} – стала спин-орбітального (або **мультиплетного** чи **тонкого**) розщеплення для атома. Компоненти терма LS з різними значеннями J називають **компонентами мультиплету**. Наприклад, для терма ${}^3P_{2,1,0}$ компонентами мультиплету є терми 3P_2 , 3P_1 , 3P_0 , а для терма ${}^3D_{3,2,1}$ відповідно 3D_3 , 3D_2 , 3D_1 . Отже, за рахунок спин-орбітальної взаємодії кожен терм розщеплюється на окремі компоненти мультиплету $J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|$ з різними значеннями енергії.

Різниця енергії між компонентами мультиплету з сусідніми значеннями J та $(J - 1)$ визначається **правилом інтервалів Ланде**:

$$\Delta E_J - \Delta E_{J-1} = \Delta E_{J,J-1} = A_{SL} J, \quad (2.92)$$

тобто зростає при збільшенні числа J . Наприклад, відстань по енергії між компонентами 3P_2 та 3P_1 у 2 рази більша, ніж між компонентами 3P_1 та 3P_0 . Для відшукування **основного компонента мультиплету** застосовується наступне правило:

– якщо $A_{LS} > 0$ (**нормальні мультиплети**), найменшу енергію має компонент $J = |L - S|$;

– якщо $A_{LS} < 0$ (**обернені мультиплети**), найменшу енергію має компонент $J = L + S$.

У тому випадку, коли електрони належать одній підоболонці, тобто мають однакові квантові числа n, l і відрізняються тільки значеннями квантових чисел m_l, m_s (еквівалентні електрони), знак сталої A_{LS} залежить від ступеня заповнення підоболонки:

$A_{LS} > 0$, якщо підоболонка заповнена **менше, ніж наполовину**, а саме, кількість електронів у підоболонці $n < (2l + 1)$;

$A_{LS} < 0$, якщо підоболонка заповнена **більше, ніж наполовину**, $n > (2l + 1)$. Якщо $n = (2l + 1)$, підоболонка заповнена наполовину – спін-орбітальне розщеплення відсутнє.

Умови застосування LS – та $j-j$ зв'язку. Вибір схеми додавання орбітального та спінового механічних моментів електронів при побудові повного механічного моменту атома залежить від співвідношення між енергіями електростатичного розщеплення ΔE_{LS} та спін-орбітального розщеплення ΔE_J :

а) $\Delta E_{LS} \gg \Delta E_J$ – відстань по енергії між окремими термами заданої конфігурації набагато більша за відстань по енергії між компонентами мультіплетів цих термів. У цьому випадку використовується схема LS -зв'язку;

б) $\Delta E_{LS} \ll \Delta E_J$ – відстань по енергії між окремими компонентами мультіплетів набагато більша за відстань по енергії між окремими термами, яким належать такі мультіплети. Це умова застосування $j-j$ зв'язку. Оскільки $\Delta E_{LS} \sim Z$, а $\Delta E_J \sim Z^4$, то LS -зв'язок, як правило, застосовується при описі термів атомів легких елементів ($Z < 20 \div 30$), а $j-j$ зв'язок – важких елементів ($Z > 50 \div 60$). Однак, умови застосування тієї чи іншої схеми залежать також від квантових чисел відповідної оболонки та ступеня збудження атома. В області $(20 \div 30) < Z < (50 \div 60)$ діє схема *проміжного зв'язку*, яка об'єднує елементи як LS -, так і $j-j$ - зв'язку.

Повний магнітний момент атома. Співвідношення (2.80) та (2.86) встановлюють зв'язок між магнітним та механічним

орбітальними моментами атома, а також магнітним та механічним спіновими моментами атома. Важливо, що знак мінус у цих співвідношеннях вказує на те, що механічний та магнітний моменти завжди спрямовані протилежно (якщо операторам $\hat{\mu}_L, \hat{\mu}_S$ та \hat{L}_L, \hat{L}_S ставити у відповідність класичні вектори $\vec{\mu}_L, \vec{\mu}_S$ та \vec{L}_L, \vec{L}_S – векторна модель атома). Тоді повний магнітний момент атома дорівнює:

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S = -\frac{e}{2m_0}\vec{L}_L - 2\frac{e}{2m_0}\vec{L}_S = -\frac{e}{2m_0}(\vec{L}_L + 2\vec{L}_S). \quad (2.93)$$

Або

$$\vec{\mu}_J = -\frac{e}{2m_0}(\vec{L}_L + 2\vec{L}_S) = -\frac{e}{2m_0}(\vec{L}_J + \vec{L}_S) \quad (2.94)$$

(враховано, що $\hat{L}_J = \hat{L}_L + \hat{L}_S$). З (2.94) можна зробити висновок, що у векторній моделі атома повний магнітний момент атома $\vec{\mu}_J$ та повний механічний момент атома \vec{L}_J *вже не будуть спрямовані у протилежні боки*, оскільки у (2.94) до повного механічного моменту \vec{L}_J ще й додається повний спіновий механічний момент атома \vec{L}_S . Таким чином, у загальному випадку зв'язок між операторами $\hat{\mu}_J$ та \hat{L}_J є більш складним, а саме

$$\hat{\mu}_J = -\frac{e}{2m_0}\hat{g}_J\hat{L}_J, \quad (2.95)$$

де \hat{g}_J - деякий оператор, який має вигляд:

$$\hat{g}_J = 1 + \frac{\hat{L}_J^2 - \hat{L}_L^2 + \hat{L}_S^2}{2\hat{L}_J^2}, \quad (2.96)$$

а його власні значення, відповідно, дорівнюють

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}. \quad (2.97)$$

Величина g_J має назву **множника Ланде**. Тому власні значення магнітного моменту атома та його проєкції на вибраний напрямок визначаються наступним чином:

$$\mu_J = -\frac{e}{2m_0} g_J L_J = -\frac{e\hbar}{2m_0} g_J \sqrt{J(J+1)} = -\mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}, \quad (2.98)$$

$$\mu_{zJ} = -\frac{e}{2m_0} g_J L_{zJ} = -\frac{e\hbar}{2m_0} g_J M_J = -\mu_B g_J M_J. \quad (2.99)$$

Співвідношення показують, що повний магнітний момент атома та його проєкція визначаються не тільки квантовим числом повного механічного моменту J , а всією трійкою квантових чисел L, S, J . Очевидно, наведені міркування справедливі у випадку LS -зв'язку.

Атом у слабкому магнітному полі (ефект Зеемана). Важливо нагадати, що для мультиплету $^{2S+1}L_{J_1, J_2, \dots, J_n}$ кожний компонент $^{2S+1}L_{J_i}$ є виродженим за квантовим числом M_{J_i} , яке набуває $(2J_i + 1)$ можливих значень:

$$M_{J_i} = +J_i, J_i - 1, \dots, 0, \dots, -J_i. \quad (2.100)$$

Тобто, при заданому значенні J_i усі стани з різними значеннями m_{J_i} мають однакову енергію. Нехай атом, що має повний магнітний момент μ , знаходиться у магнітному полі з індукцією $\vec{B}(0, 0, B)$. Згідно з класичною електродинамікою, цей магнітний момент буде взаємодіяти з магнітним полем, причому енергія такої взаємодії $W_B = -(\vec{\mu}, \vec{B}) = -\mu_{zJ} B$. Оскільки у квантовій механіці кожній фізичній величині ставиться у відповідність певний математичний оператор, то останнє рівняння можна записати як

$$\hat{W}_B = -\hat{\mu}_{zJ} \hat{B}. \quad (2.101)$$

Магнітне поле можна вважати *слабким*, якщо енергія \hat{W}_B набагато менша за енергію спін-орбітальної взаємодії $\hat{W}_B \ll \hat{W}_{SL}$. Це означає, що енергія взаємодії спінового магнітного моменту атома $\hat{\mu}_S$ з його орбітальним магнітним моментом $\hat{\mu}_L$ (що, власне, і є спін-орбітальною взаємодією) *набагато більша* за енергію взаємодії кожного з моментів $\hat{\mu}_S$, $\hat{\mu}_L$ із магнітним полем окремо. Тобто, магнітне поле *не розриває спін-орбітальну взаємодію* і магнітний момент атома характеризується саме величиною $\hat{\mu}_J$.

У такому наближенні значення енергії взаємодії атома зі слабким магнітним полем (ΔE_B) можна розрахувати, користуючись формулою для поправки до енергії у першому порядку теорії збурень (2.48)

$$\Delta E_B = \int \psi_n^{(0)*} (-\hat{\mu}_{zJ} \hat{B}) \psi_n^{(0)} d\tau, \quad (2.102)$$

де $\psi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)*}$ - незбурені хвильові функції n -го квантового стану. Оскільки до складу операторів $\hat{\mu}_{zJ}$, \hat{B} входять тільки чисельні значення відповідних величин, то замість операторів у рівняння (2.102) можна підставити саме ці величини і винести їх за знак інтеграла:

$$\begin{aligned} \Delta E_B = -\mu_{zJ} B \int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau &= -\left(-\frac{e\hbar}{2m_0} g_J M_J \right) B = \\ &= \hbar \frac{eB}{2m_0} g_J M_J, \end{aligned} \quad (2.103)$$

У (2.103) враховано: 1) вираз (2.99) для z -проекції повного магнітного моменту атома; 2) відому з курсу електрики величину $\omega_L = e B / 2m_0$ – частоту ларморівської прецесії електрона в

магнітному полі з індукцією B ; 3) умову нормування хвильової функції $\int \psi_n^{(0)*} \psi_n^{(0)} d\tau = 1$. Тоді,

$$\Delta E_B = E_n - E_n^{(0)} = \hbar \omega_L g_J M_J, \quad (2.104)$$

де $E_n^{(0)}$ - енергія n -го рівня за відсутності магнітного поля, E_n — енергія цього ж рівня в магнітному полі. Остаточно,

$$E_n = E_n^{(0)} + \hbar \omega_L g_J M_J. \quad (2.105)$$

З формули (2.105) можна зробити важливий висновок: *магнітне поле знімає виродження за квантовим числом M_J , тобто в магнітному полі компонент мультиплету $^{2I+1}L_{J_i}$ розщеплюється на систему $(2J_i + 1)$ рівнів енергії, кожний з яких характеризується своїм значенням квантового числа M_{J_i} .*

Нехай за відсутності магнітного поля при переході атома зі стаціонарного стану з енергією $E_1^{(0)}$ у стаціонарний стан з енергією $E_2^{(0)}$ випромінюється фотон, енергія якого $\hbar \omega_0 = E_1^{(0)} - E_2^{(0)}$. Тоді, у магнітному полі з врахуванням розщеплення компонентів мультиплетів на окремі рівні (2.105) будуть випромінюватися фотони, енергії яких визначаються співвідношенням:

$$\hbar \omega_{12} = E_1 - E_2 = (E_1^{(0)} - E_2^{(0)}) + \hbar \omega_L (g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2}). \quad (2.106)$$

Або, частоти фотонів у магнітному полі:

$$\omega_{12} = \omega_0 + \omega_L (g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2}). \quad (2.107)$$

Розщеплення окремих спектральних ліній у магнітному полі на ряд близько розташованих спектральних компонентів отримало назву **ефекта Зеемана**. Формули (2.106) та (2.107) визначають усі енергії та частоти фотонів при заданих значеннях квантових чисел J_1 та J_2 . Але фотони випромінюються тільки тоді, коли виконуються певні **правила відбору** для квантових чисел J та M_J .

Дипольні правила відбору. Найбільш інтенсивним випромінюванням атома є *дипольне випромінювання* електромагнітних хвиль (фотонів), при якому змінюється дипольний момент електронної оболонки атома. Виділяють *точні* та *наближені* правила відбору, які визначають можливі зміни квантових чисел атома. Точні правила відбору є наслідком законів збереження. Зокрема, закон збереження повного моменту імпульса L_J визначає дозволених зміни квантових чисел J, M_J : $\Delta J = 0, \pm 1$ та $\Delta M_J = 0, \pm 1$. Закон збереження парності стану дозволяє переходити тільки між станами *різної парності*. Якщо вказані точні правила відбору не задовольняються, імовірність відповідних переходів дорівнює нулю.

Якщо ж не враховувати спін-орбітальну взаємодію, при випромінюванні фотона можна розглядати можливі зміни орбітального механічного моменту атома L_L та спінового механічного моменту атома L_S окремо одне від одного. Так з'являються *наближені* правила відбору: $\Delta L = 0, \pm 1$ та $\Delta M_L = 0, \pm 1$, а також для спінового моменту імпульса: $\Delta S = 0$, $\Delta M_S = 0$. Ці правила називають наближеними, оскільки спін-орбітальна взаємодія, величина якої $\sim Z^4$, суттєво знижує імовірності таких переходів при зростанні порядкового номера атома. Крім того, при наявності спін-орбітальної взаємодії правило $\Delta S = 0$ може порушуватися і з'являтимуться слабкі *інтеркомбінаційні переходи* $\Delta S \neq 0$, імовірність яких нижча на декілька порядків за імовірність дозволених дипольних переходів.

Об'єднуючи точні і наближені правила відбору, можна записати:

$$\Delta J = 0, \pm 1; \Delta M_J = 0, \pm 1; \quad (2.108a)$$

$$\Delta L = 0, \pm 1; \Delta M_L = 0, \pm 1; \quad (2.108б)$$

$$\Delta S = 0; \Delta M_S = 0. \quad (2.108в)$$

Нормальний (простий) ефект Зеємана. Розглядають окремий випадок ефекта Зеємана, коли повний спін атома $\Delta S = 0$. За цієї умови, очевидно, $J = L$, і тоді множник Ланде $g_J = 1$ (див. рівняння (2.75) та (2.97)). Оскільки $J = L$, то також $\Delta M_J = \Delta M_L$. Отже, формула (2.107) набуває вигляду

$$\omega_{12} = \omega_0 + \omega_L (M_{L_1} - M_{L_2}). \quad (2.109)$$

Відповідно до правила відбору (2.108-2) різниця в дужках (2.109) може набувати тільки трьох значень: $-1, 0, +1$. Тому вираз (2.109) можна записати у вигляді

$$\omega_{12} = \omega_0 + \omega_L \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}. \quad (2.110)$$

Таким чином, для атомів, які перебувають у стані $S = 0$, у слабкому магнітному полі спектральна лінія з частотою ω_0 супроводжується двома додатковими лініями, які відрізняються за частотою від ω_0 на $+\omega_L$ та $(-\omega_L)$. Саме таке явище отримало назву **нормального (простого) ефекта Зеємана**. Якщо кількість спектральних компонентів у слабкому магнітному полі більше трьох, то явище називають **аномальним (складним) ефектом Зеємана**. Відзначимо, що за певних значень квантових чисел L, S, J нормальний ефект Зеємана може спостерігатися і за умови $S > 0$ (див. задачу А.17).

Атом у сильному магнітному полі. Магнітне поле вважається **сильним**, якщо енергії взаємодії магнітних моментів μ_L, μ_S з таким полем ($\hat{W}_L = -\hat{\mu}_L \hat{B}$ та $\hat{W}_S = -\hat{\mu}_S \hat{B}$ відповідно) більші за спін-орбітальну взаємодію $\hat{W}_L, \hat{W}_S > \hat{W}_{SL}$. У цьому випадку спін-орбітальна взаємодія «розривається» і з зовнішнім магнітним полем окремо взаємодіє кожний з моментів $\hat{\mu}_L, \hat{\mu}_S$. Отже, необхідно визначити суму двох поправок до енергії атомного рівня в сильному магнітному полі, зумовлених кожною

з вказаних взаємодій. Враховуючи (2.82) та (2.102), можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta E_L = \int \psi_n^{(0)*} (-\hat{\mu}_{zL} \hat{B}) \psi_n^{(0)} d\tau = -\mu_{zL} B = \\ - \left(-\frac{e\hbar M_L}{2m_0} \right) B = \hbar \frac{eB}{2m_0} M_L = \hbar \omega_L M_L. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \Delta E_S = \int \psi_n^{(0)*} (-\hat{\mu}_{zS} \hat{B}) \psi_n^{(0)} d\tau = -\mu_{zS} B = \\ - \left(-\frac{e\hbar M_S}{m_0} \right) B = 2\hbar \frac{eB}{2m_0} M_S = 2\hbar \omega_L M_S; \end{aligned} \quad (2.112)$$

тут враховано співвідношення (2.83).

Остаточно, енергія n -рівня в сильному магнітному полі дорівнює

$$E_n = E_n^{(0)} + \hbar \omega_L M_L + 2\hbar \omega_L M_S. \quad (2.113)$$

Тоді, частоти фотонів у сильному магнітному полі:

$$\omega_{12} = \omega_0 + \omega_L (M_{L_1} - M_{L_2}) + 2\omega_L (M_{S_1} - M_{S_2}). \quad (2.114)$$

Важливо, що в цьому випадку окремо застосовуються правила відбору (2.108-2) та (2.108-3) для квантових чисел M_L та M_S . Отже, можна зробити висновок, що при розгляді радіаційних переходів у сильному магнітному до уваги приймаються тільки квантові числа L та S , оскільки компоненти мультиплетів з різними значеннями J мають однакову енергію.

Експериментально встановлено, що умова руйнування спіно-орбітального зв'язку ($W_L, W_S > W_{LS}$) для більшості оптичних спектральних ліній атомів починає виконуватися при $B \geq 2,2 \div 2,5$ Тл.

2.2. Приклади розв'язку задач

Задача А.1. Отримати вирази для визначення радіусів борівських орбіт та енергій стаціонарних станів електрона для воднеподібного іона. Визначити відношення радіусів перших чотирьох борівських орбіт. Обчислити радіус першої борівської орбіти та енергію першого стаціонарного стану для атома водню.

Розв'язок:

Згідно з теорією Бора для воднеподібного іона рух електрона по стаціонарній орбіті розглядається як класичний обертальний рух з доцентровим прискоренням під дією сили електростатичної взаємодії з атомним ядром. За другим законом Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

Відповідно до першого постулата Бора, момент імпульса електрона на стаціонарній орбіті кратний зведеним сталій Планка:

$$mvr = n\hbar. \quad (2)$$

В рівняннях (1) та (2) Z – порядковий номер елемента; v – швидкість електрона, r – радіус орбіти, e – заряд електрона, m – маса електрона, n – номер орбіти (головне квантове число).

Виключаючи з (2) швидкість $v = nh/mr$ та підставляючи цей вираз у рівняння (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{m}{r} \cdot \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r^2} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ r &= \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Zme^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Відношення радіусів орбіт:

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = (1)^2 : (2)^2 : (3)^2 : (4)^2 = 1 : 4 : 9 : 16. \quad (4)$$

Повна механічна енергія електрона на n -й орбіті є сумою його кінетичної та потенціальної енергій:

$$W = \frac{m v^2}{2} + \left(-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right). \quad (5)$$

Підставимо в (5) отримане значення r та величину $m v^2$ з рівняння (1):

$$W = \frac{Ze^2}{8r\pi\epsilon_0} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{kZe^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

Виконаємо обчислення для атома водню ($Z = 1$) за формулами (3) та (6). Радіус першої орбіти:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1^2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2}{(9 \cdot 10^9) \cdot (9,1 \cdot 10^{-31}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ (м)} = \\ &= 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ нм} = 0,53 \text{ \AA} \end{aligned}$$

Енергія електрона в першому стаціонарному стані:

$$W_1 = -\frac{(9,1 \cdot 10^{-31}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{32 \cdot (3,14)^2 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2} \cdot \frac{1}{1^2} = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)}.$$

Оскільки $1 \text{ eV} = (1,6 \cdot 10^{-19}) \text{ Дж}$,

то $W_1 = -2,18 \cdot 10^{-18} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^{-1} = -13,6 \text{ eV}$.

Самостійно переконайтесь у вірності вказаних розмірностей.

Задача А.2. Атомарний водень збуджується потоком електронів з кінетичною енергією $E = 13,6 \text{ eV}$. Спектральні лінії з якою довжиною хвилі будуть спостерігатися у спектрі водню за таких умов?

Розв'язок:

Важливо, що кінетична енергія електронів пучка менша за повну енергію електрона в основному стаціонарному стані (для

якої, відповідно до розв'язку попередньої задачі $|W_1| = 13,6 \text{ eV} > 13,0 \text{ eV}$). Це означає, що іонізація атома за законом збереження енергії неможлива, а відбуватися будуть лише процеси збудження електронів у стани $n > 1$. Розглянемо спочатку випадок, коли при непружному співударі з атомом кінетична енергія електрона, що налітає, повністю витрачається на збудження атома. Нехай W_n – енергія найвищого збудженого стану. За законом збереження енергії :

$$W_n = W_0 + E = -13,6 + 13,0 = -0,6 \text{ (eV)} \quad (1)$$

Тобто, електрон може перейти у збуджений стан, який також є зв'язаним (про що свідчить знак мінус у повної енергії електрона), причому величина енергії такого стану не може бути за модулем більшою за 0,6 eV. Знаючи енергію (1), можна визначити головне квантове число n цього збудженого стану:

$$W_1 \sim \frac{1}{1^2}; \quad W_n \sim \frac{1}{n^2}; \quad W_n = W_1 \frac{1}{n^2};$$

$$n = \sqrt{\frac{W_1}{W_n}} = \sqrt{\frac{13,6}{0,6}} \approx 4,76.$$

Оскільки квантове число n може набувати тільки цілих значень, то можливими будуть збудження у стан $n = 4$. Очевидно, кінетичної енергії E буде цілком достатньо і для збудження атома водню у стани $n = 2$ та $n = 3$:

$$W_2 = W_1 \frac{1}{2^2} = -\frac{13,6}{4} = -3,4 \text{ (eV)},$$

$$|(-13,6) - (-3,4)| = 10,2 \text{ (eV)} < 13,0 \text{ (eV)};$$

$$W_3 = W_1 \frac{1}{3^2} = -\frac{13,6}{9} = -1,5 \text{ (eV)},$$

$$|(-13,6) - (-1,5)| = 12,1 \text{ (eV)} < 13,0 \text{ (eV)}.$$

Таким чином, при взаємодії атомів водню з пучком електронів, які мають кінетичну енергію $E = 13,0 \text{ eV}$, електрони в атомах будуть збуджуватися у другий, третій та четвертий стаціонарні

стани. При переході атомів із збуджених станів можливими будуть наступні спектральні переходи: $n_4 \rightarrow n_1$, $n_3 \rightarrow n_1$, $n_2 \rightarrow n_1$ (серія Лаймана); $n_4 \rightarrow n_2$, $n_3 \rightarrow n_2$ (серія Бальмера); $n_4 \rightarrow n_3$ (лінія серії Пашена). Для визначення довжин хвиль спектральних ліній, які випромінюються, скористаємося відомою формулою для спектральних серій у спектрі водню:

$$\frac{1}{\lambda_{j-i}} = R_H \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right) \quad (2)$$

У рівнянні (2) $R_H = 10967758,34 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга для водню, n_j , n_i – головні квантові числа початкового збудженого стану та кінцевого стану електрона відповідно. Тоді, для трьох ліній серії Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda_{2-1}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right); \quad \lambda_{2-1} = \frac{4}{3 \cdot 10967758,34} = 121,6 \text{ нм};$$

$$\frac{1}{\lambda_{3-1}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right); \quad \lambda_{3-1} = \frac{9}{8 \cdot 10967758,34} = 102,6 \text{ нм};$$

$$\frac{1}{\lambda_{4-1}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right); \quad \lambda_{4-1} = \frac{16}{15 \cdot 10967758,34} = 97,3 \text{ нм}.$$

Дві лінії серії Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda_{3-2}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right); \quad \lambda_{3-2} = \frac{36}{5 \cdot 10967758,34} = 656,5 \text{ нм};$$

$$\frac{1}{\lambda_{4-2}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right); \quad \lambda_{4-2} = \frac{16}{3 \cdot 10967758,34} = 486,3 \text{ нм}.$$

Одна лінія серії Пашена:

$$\frac{1}{\lambda_{4-3}} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right); \quad \lambda_{4-3} = \frac{144}{7 \cdot 10967758,34} = 1875,6 \text{ нм}.$$

Задача А.3. Довести самоспряженість оператора \hat{p}_x .

Розв'язок:

За визначенням, в одномірному випадку оператор \hat{A} називається самоспряженим, якщо виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \hat{A}^* \psi_1^* dx, \text{ де } \psi_1 \text{ та } \psi_2 - \text{довільні функції.}$$

Спробуємо довести такі співвідношення, використовуючи явний вигляд операторів, що розглядаються. А саме, враховуючи, що

$$\hat{p}_x = -i\hbar \partial/\partial x, \text{ маємо:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{p}_x \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2 dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx.$$

Беручи до уваги що $(\partial \psi / \partial x) dx = d\psi$ та застосувавши формулу інтегрування частинами отримаємо

$$\begin{aligned} -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(\partial \psi_2 / \partial x \right) dx &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* d\psi_2 = \\ &= -i\hbar \left(\psi_1^* \psi_2 \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(\partial \psi_1^* / \partial x \right) dx. \end{aligned}$$

Так як на нескінченності хвильові функції прямують до нуля, то нульовим буде і перший доданок останньої суми. Якщо згадати, що $\hat{p}_x^* = i\hbar \partial/\partial x$, то остаточно матимемо

$$i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_1^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \hat{p}_x^* \psi_1^* dx.$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{p}_x \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \hat{p}_x^* \psi_1^* dx.$$

Що і треба було довести.

Задача А.4. Знайти наступні комутатори:

а) $[\hat{L}_x, y]$; б) $[\hat{L}_y, \hat{p}_x]$.

Розв'язок:

Побудуємо спочатку явний вигляд операторів компонентів моменту імпульса \hat{L}_x та \hat{L}_y . У класичній фізиці вектор моменту імпульса \vec{L} задається співвідношенням $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, тобто компоненти вектора моменту імпульса пов'язані з компонентами радіус-вектора та вектора імпульса наступним чином:

$$L_x = y p_z - z p_y; \quad L_y = z p_x - x p_z.$$

Відповідно,

$$\hat{L}_x = y \hat{p}_z - z \hat{p}_y; \quad \hat{L}_y = z \hat{p}_x - x \hat{p}_z$$

а) Отже, для першого завдання комутатор набуває вигляду

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, y] &= \hat{L}_x y - y \hat{L}_x = (y \hat{p}_z - z \hat{p}_y) y - y(y \hat{p}_z - z \hat{p}_y) = \\ &= y \hat{p}_z y - z \hat{p}_y y - y y \hat{p}_z + y z \hat{p}_y. \end{aligned}$$

Скористаємось комутативними співвідношеннями між операторами компонентів радіус-вектора та вектора імпульса, а саме

$$\begin{aligned} [\hat{p}_z, y] &= 0, \\ [\hat{p}_y, y] &= -i\hbar; \end{aligned} \quad \text{тобто} \quad \begin{aligned} \hat{p}_z y &= y \hat{p}_z; \\ \hat{p}_y y &= y \hat{p}_y - i\hbar. \end{aligned}$$

Отже, перший та другий доданок суми можна замінити наступним чином:

$$\begin{aligned} y \hat{p}_z y - z \hat{p}_y y - y y \hat{p}_z + y z \hat{p}_y &= y y \hat{p}_z - z(y \hat{p}_y - i\hbar) - y y \hat{p}_z + y z \hat{p}_y = \\ &= y y \hat{p}_z - z y \hat{p}_y + z i\hbar - y y \hat{p}_z + y z \hat{p}_y. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $z y = y z$, остаточно отримуємо

$$[\hat{L}_x, y] = i \hbar z.$$

б) В цьому випадку:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_y, \hat{p}_x] &= \hat{L}_y \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{L}_y = \left(z \hat{p}_x - x \hat{p}_z \right) \hat{p}_x - \hat{p}_x \left(z \hat{p}_x - x \hat{p}_z \right) = \\ &= z \hat{p}_x \hat{p}_x - x \hat{p}_z \hat{p}_x - \hat{p}_x z \hat{p}_x + \hat{p}_x x \hat{p}_z \end{aligned}$$

Так як

$$\begin{aligned} [\hat{p}_z, \hat{p}_x] &= 0, & \hat{p}_z \hat{p}_x &= \hat{p}_x \hat{p}_z, \\ [\hat{p}_x, z] &= 0, & \text{тобто} & \hat{p}_x z = z \hat{p}_x, \\ [\hat{p}_x, x] &= -i \hbar; & \hat{p}_x x &= x \hat{p}_x - i \hbar. \end{aligned}$$

Тоді, підставляючи ці рівності у другий, третій та четвертий доданки відповідно, отримуємо

$$\begin{aligned} z \hat{p}_x \hat{p}_x - x \hat{p}_z \hat{p}_x - \hat{p}_x z \hat{p}_x + \hat{p}_x x \hat{p}_z &= z \hat{p}_x \hat{p}_x - x \hat{p}_x \hat{p}_z - z \hat{p}_x \hat{p}_x + \\ &+ \left(x \hat{p}_x - i \hbar \right) \hat{p}_z = -x \hat{p}_x \hat{p}_z + x \hat{p}_x \hat{p}_z - i \hbar \hat{p}_z = -i \hbar \hat{p}_z, \end{aligned}$$

тобто

$$[\hat{L}_y, \hat{p}_x] = -i \hbar \hat{p}_z.$$

Задача А.5. Знайти власне значення оператора $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$,

що належить власній функції $\psi_A = \sin 2x$.

Розв'язок:

Нагадаємо, що у випадку, коли ψ_A та λ є, відповідно, власною функцією та власним значенням оператора \hat{A} , має виконуватися рівність

$$\hat{A} \psi_A = \lambda \psi_A.$$

Подіємо оператором \hat{A} на функцію ψ_A :

$$\hat{A} \psi_A = -\frac{d^2}{dx^2} \sin 2x = -\frac{d}{dx} (2 \cos 2x) = -2(-2 \sin 2x) = 4 \sin 2x.$$

Порівнюючи отриману формулу з попередньою можемо зробити висновок, що шукане власне значення $\lambda = 4$.

Задача А.6. Потік моноенергетичних електронів падає нормально на діафрагму з вузькою щілиною шириною $b = 2,0$ мкм. Знайти швидкість електронів, якщо на екрані, який знаходиться від щілини на відстані $l = 50$ см, ширина центрального дифракційного максимуму $\Delta x = 0,36$ мм.

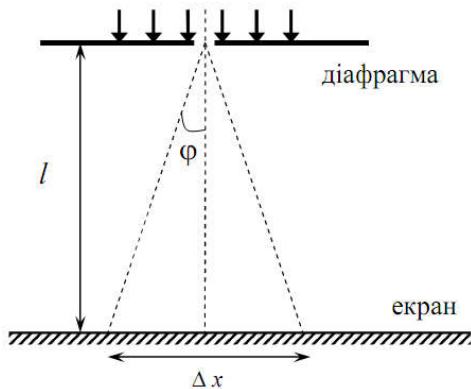


Рис. 2.3

Розв'язок:

З курсу оптики відомо, що границі центрального дифракційного максимуму при дифракції Фраунгофера на одній щілині спостерігаються під кутом ϕ , для якого

$$\sin \phi = \lambda/b, \quad (1)$$

де кут ϕ відраховується від нормалі до діафрагми, а λ – довжина хвилі падаючого опромінення. Так як в даному випадку $l \gg \Delta x$, то можна записати

$$\sin \phi \approx \tan \phi = \frac{\Delta x}{2l}. \quad (2)$$

Для потоку електронів, використовуючи співвідношення де Бройля, можна записати

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}, \quad (3)$$

де p – імпульс електрона. У випадку, коли швидкість частинок набагато менша за швидкість світла імпульс

$$p = m\nu, \quad (4)$$

де m – маса електрона, ν – його швидкість. Підставляючи вирази (3), (4) у формулу (1), можемо записати

$$\frac{\Delta x}{2l} = \frac{2\pi\hbar}{b m \nu},$$

звідки остаточно отримаємо

$$\nu = \frac{4\pi\hbar l}{b m \Delta x} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1,06 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3,6 \cdot 10^{-4}} \approx 10^6 \text{ (м/с)}. \quad (5)$$

Обчислене значення свідчить на користь можливості використання виразу класичного виразу для імпульса (4).

Задача А.7. *Переконайтесь, що вимірювання координати x частинки за допомогою мікроскопа (див. рисунок) призводить до такої невизначеності її імпульсу Δp_x , що $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$. Зважте, що роздільна здатність мікроскопу $d = \lambda / \sin \vartheta$, де λ - довжина хвилі світла, яке використовується.*

Розв'язок:

Для частинки невизначеність її координати, яка вимірюється за допомогою мікроскопа, визначається роздільною здатністю приладу, тобто

$$\Delta x = d = \frac{\lambda}{\sin \vartheta}. \quad (1)$$

Водночас, якщо для освітлення використовується світло з довжиною

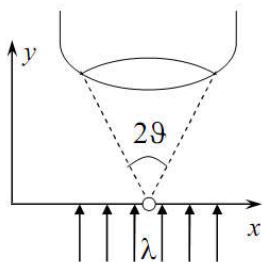


Рис. 2.4

хвилі λ , то імпульс налітаючих фотонів має лише компонент, спрямований паралельно осі y , величина якого

$$p_{y,ph} = \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{2\pi \hbar}{\lambda}, \quad (2)$$

де $\hbar \omega$ - енергія фотона. Для того, щоб після розсіяння на частинці фотон потрапив у об'єктив мікроскопа, необхідно щоб напрям його імпульса знаходився у конусі з кутом при вершині 2ϑ . Якщо припустити, що після розсіяння компонент імпульса $p_{y,ph}$ не змінюється, то це означає, що

$$\frac{p_{x,ph}}{p_{y,ph}} < \operatorname{tg} \vartheta,$$

або

$$p_{x,ph} < \left(\frac{2\pi \hbar \operatorname{tg} \vartheta}{\lambda} \right). \quad (3)$$

Водночас, компонент $p_{x,ph}$ з'явився у фотона в результаті взаємодії з частинкою, що означає зміну компонента імпульса частинки на таку ж величину. Так як невідомий точний напрямок поширення фотону, то можемо стверджувати, що невизначеність імпульса частинки

$$\Delta p_x \approx \left(\frac{2\pi \hbar \operatorname{tg} \vartheta}{\lambda} \right) \approx \left(\frac{2\pi \hbar \sin \vartheta}{\lambda} \right). \quad (4)$$

У виразі (4) враховано, що кут ϑ малий і тому $\operatorname{tg} \vartheta \approx \sin \vartheta$. Об'єднуючи вирази (1) та (4) отримуємо:

$$\Delta x \Delta p_x \approx \frac{\lambda}{\sin \vartheta} \frac{2\pi \hbar \sin \vartheta}{\lambda} = 2\pi \hbar > \hbar.$$

Задача А.8. Знайти власні значення енергії та хвилову функцію частинки масою m , потенціальна енергія якої описується виразом

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq -a; \\ 0, & -a < x < a; \\ \infty, & x \geq a \end{cases}$$

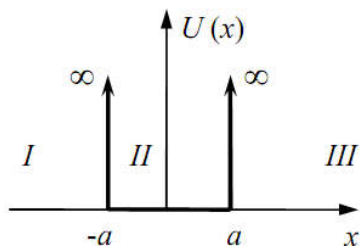


Рис. 2.5

(задача про частинку, яка знаходиться в нескінченно глибокій одномірній прямокутній потенціальній ямі шириною $2a$).

Розв'язок:

Для знаходження хвильової функції ψ та власного значення енергії E частинки масою m , яка знаходиться у потенціальному полі $U(x)$, необхідно розв'язати рівняння Шрьодінгера, яке у стаціонарному одномірному випадку має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi. \quad (1)$$

Вигляд залежності потенціальної енергії від координати наведено на рис.2.5. Розіб'ємо весь простір на три області залежно від величини потенціальної енергії: область I, де $x \leq -a$, $U \rightarrow \infty$; область II, де $-a < x < a$, $U = 0$ та область III, де $x \geq a$, $U \rightarrow \infty$; і запишемо рівняння Шрьодінгера для кожної окремо:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + (E - U) \psi_I &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + E \psi_{II} &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} + (E - U) \psi_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Так як хвильова функція та її перша і друга похідні мають бути обмеженими, а також обмеженим є значення повної енергії

частинки, то єдином можливим розв'язком рівняння Шрьодінгера за межами інтервалу $-a < x < a$ (в *I* та *III* областях) є нульове значення хвильової функції у цих точках простору, тобто

$$\psi_I = 0; \quad \psi_{III} = 0. \quad (3)$$

Якщо поглянути на цю ситуацію з іншої точки зору, то відповідно до класичних уявлень, частинка з кінцевим значенням повної енергії не може перебувати в області простору, де її потенційна енергія прямує до нескінченності. У квантовій механіці це твердження замінюється вимогою перетворення у нуль густини ймовірності $\rho = |\psi(x)|^2 = \psi(x) \psi^*(x)$ (а отже, і самої функції $\psi(x)$) в тих точках, де $U(x) \rightarrow \infty$.

Рівняння Шрьодінгера для хвильової функції у області *II* перепишемо у вигляді

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + k^2 \psi_{II} = 0, \quad (4)$$

де для скорочення введено позначення $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Рівняння (4) - нелінійне однорідне диференційне рівняння, його загальний розв'язок має вигляд

$$\psi_{II}(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (5)$$

де *A* та *B* – константи. Так як хвильова функція має бути неперервною, то необхідно, щоб в точках $x = \pm a$ значення функцій з сусідніх областей були однакові, тобто

$$\begin{cases} \psi_{II}(x = -a) = \psi_I(x = -a); \\ \psi_{II}(x = a) = \psi_{III}(x = a). \end{cases} \quad (6)$$

Використовуючи отримані розв'язки (3) та (5), система рівнянь (6) може бути переписана у вигляді

$$\begin{cases} A \cos(ka) - B \sin(ka) = 0; \\ A \cos(ka) + B \sin(ka) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно, що система (7) має розв'язок лише в тому випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів (A або B) дорівнює нулеві. Звичайно, з математичної точки зору цілком прийнятним є і варіант, коли одночасно і $A = 0$, і $B = 0$. Але в цьому випадку, як видно з рівнянь (3) та (5), $\psi = 0$ при будь-яких значеннях x , тобто ймовірність знайти частинку є нульовою у всіх точках простору, а це є неприйнятним з фізичної точки зору. Таким чином, розв'язки розбиваються на два класи.

$$1. B = 0, A \neq 0, \psi_{II}(x) = A \cos(kx), \text{ причому в цьому випадку} \\ \cos(ka) = 0,$$

а отже

$$k = \frac{\pi}{2a} n, \quad n = 1, 3, 5 \dots \text{ (непарне ціле число).}$$

$$2. A = 0, B \neq 0, \psi_{II}(x) = B \sin(kx), \text{ причому в цьому випадку} \\ \sin(ka) = 0,$$

а отже

$$k = \frac{\pi}{2a} n, \quad n = 2, 4, 6 \dots \text{ (парне ціле число).}$$

В останньому випадку до ряду парних чисел не включено 0, бо тоді $\psi_{II} \equiv 0$, а такий розв'язок, як зазначалося вище, не має фізичного змісту.

Узагальнюючи отримані результати, запишемо

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a; \\ A \cos\left(\frac{\pi n}{2a} x\right), & n = 1, 3, 5 \dots \\ B \sin\left(\frac{\pi n}{2a} x\right), & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \quad -a < x < a. \quad (8)$$

Крім того,

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{\pi}{2a} n \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots,$$

що дає змогу визначити можливі значення енергії

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots \quad (9)$$

Тобто енергетичний спектр частинки у даному випадку дискретний, величина повної енергії частинки залежить від квантового числа n . Для знаходження коефіцієнтів A та B скористаємось умовою нормування хвильової функції, яка у одномірному випадку має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1. \quad (10)$$

Розглянемо для визначеності випадок, коли $n = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx &= \int_{-\infty}^{-a} |\psi_I|^2 dx + \int_{-a}^a |\psi_{II}|^2 dx + \int_a^{\infty} |\psi_{III}|^2 dx = \int_{-a}^a |\psi_{II}|^2 dx = \\ &= \int_{-a}^a A^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2a} x \right) dx = \int_{-a}^a A^2 \left[\frac{\cos(\pi x/a) + 1}{2} \right] dx = A^2 a = 1. \end{aligned}$$

Тобто, $A = 1/\sqrt{a}$. Цілком аналогічно можна отримати, що $B = 1/\sqrt{a}$. Таким чином, остаточний вигляд шуканої хвильової функції наступний

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \left(\frac{\pi n}{2a} x \right), & n = 1, 3, 5 \dots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \left(\frac{\pi n}{2a} x \right), & n = 2, 4, 6 \dots \\ 0, & x \geq a. \end{cases} \quad -a < x < a; \quad (11)$$

Для прикладу розглянемо декілька хвильових функцій, які описують можливі стани частинки у заданому потенціальному полі і відповідають початковим значенням квантового числа n .

$n = 1$. Користуючись виразами (11) та (9), можемо сказати, що даний стан частинки описується хвильовою функцією

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a; \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right), & |x| < a, \end{cases}$$

а енергія частинки при цьому дорівнює $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$. Це найменше можливе значення енергії, тобто стан при $n = 1$ є основним.

$n = 2$. В цьому випадку енергія частинки $E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$, а хвильова функція

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a; \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), & |x| < a. \end{cases}$$

$n = 3$. Для цього стану: $E_3 = \frac{9\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$,

$$\psi_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a; \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right), & |x| < a. \end{cases}$$

Вигляд декількох хвильових функцій та частини енергетичного спектру частинки у нескінченно глибокій потенціальній ямі наведено на рис.2.6.

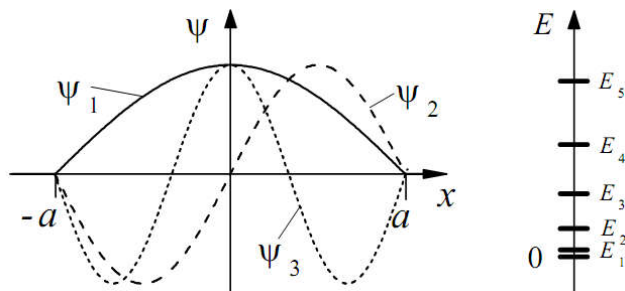


Рис. 2.6

Задача А.9. Знайти власні значення енергії E та хвильову функцію ψ частинки масою m , потенціальна енергія якої описується виразом

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ -U_0, & |x| < a \end{cases}$$

(задача про частинку в потенціальній ямі скінченної глибини). Розглянути випадок, коли $-U_0 < E < 0$.

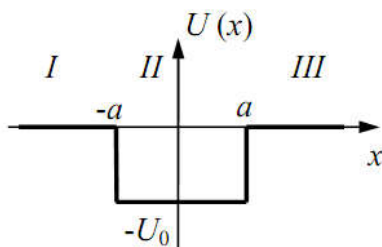


Рис. 2.7

Розв'язок:

Як і в попередній задачі, розіб'ємо весь простір на три області залежно від величини потенціальної енергії: область I , де $x \leq -a$, $U = 0$; область II , де $-a < x < a$, $U = -U_0$ та область III , де $x \geq a$, $U = 0$; і запишемо рівняння Шрьодінгера для кожної області окремо:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + E \psi_I &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + (U_0 + E) \psi_{II} &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} + E \psi_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо врахувати умову $-U_0 < E < 0$, то систему (1) можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} |E| \psi_I &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - |E|) \psi_{II} &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} |E| \psi_{III} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Ввівши позначення

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E|}, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - |E|)}\tag{3}$$

остаточно сукупність рівнянь Шрьодінгера можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} - \beta^2 \psi_I &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + k^2 \psi_{II} &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} - \beta^2 \psi_{III} &= 0.\end{aligned}\tag{2a}$$

Зауважимо, що коефіцієнти β та k є дійсними. Розв'язки диференційних рівнянь (2a) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\psi_I &= A_1 \exp(-\beta x) + B_1 \exp(\beta x); \\ \psi_{II} &= A_2 \cos(kx) + B_2 \sin(kx); \\ \psi_{III} &= A_3 \exp(-\beta x) + B_3 \exp(\beta x),\end{aligned}\tag{4}$$

де A_i та B_i ($i = \overline{1, 3}$) – константи, які спробуємо надалі визначити.

Оскільки хвильова функція має бути обмеженою при будь-яких значеннях аргументу, то щоб не допустити необмеженого

зростання функції ψ_I при $x \rightarrow -\infty$ та функції ψ_{III} при $x \rightarrow \infty$ необхідно покласти $A_1 = 0$ та $B_3 = 0$ відповідно.

Зазначимо, що так як залежність $U(x)$ є симетричною функцією відносно початку координат, то цілком очікуваним є те, що і густина ймовірності знаходження частинки в різних точках простору також має мати таку саму симетрію. Це, в свою чергу, означає, що повинна виконуватись рівність $|\psi_I(-x)|^2 = |\psi_{III}(-x)|^2$, тобто мають бути рівними квадрати модулів хвильових функцій в областях *I* та *III* для точок, однаково віддалених від початку координат. А це можливо лише у випадку, коли

$$B_1^2 = A_3^2. \quad (5)$$

Тобто, якщо припустити, що B_1 та A_3 дійсні, то вони мають бути пов'язані між собою наступним чином:

$$B_1 = A_3 \quad \text{або} \quad B_1 = -A_3. \quad (5a)$$

Хвильова функція, як і її перша похідна має бути неперервною. Тому необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x=-a) &= \psi_I(x=-a); \\ \left(\frac{d\psi_{II}}{dx} \right) \Big|_{x=-a} &= \left(\frac{d\psi_I}{dx} \right) \Big|_{x=-a}; \\ \psi_{II}(x=a) &= \psi_{III}(x=a); \\ \left(\frac{d\psi_{II}}{dx} \right) \Big|_{x=a} &= \left(\frac{d\psi_{III}}{dx} \right) \Big|_{x=a}. \end{aligned} \quad (6)$$

або, використовуючи (4), їх можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} A_2 \cos(ka) - B_2 \sin(ka) &= B_1 \exp(-\beta a); \\ k A_2 \sin(ka) + k B_2 \cos(ka) &= \beta B_1 \exp(-\beta a); \\ A_2 \cos(ka) + B_2 \sin(ka) &= A_3 \exp(-\beta a); \\ -k A_2 \sin(ka) + k B_2 \cos(ka) &= -\beta A_3 \exp(-\beta a) \end{aligned} \quad (6a)$$

Більш зручно провести аналіз системи рівнянь (6а), якщо провести її певне перетворення. Для цього додаємо перше та третє рівняння і віднімаємо від другого четверте; крім того віднімаємо від третього рівняння перше та додаємо між собою друге та четверте. В результаті отримаємо наступну систему

$$\begin{aligned} 2A_2 \cos(ka) &= (B_1 + A_3) \exp(-\beta a) ; \\ 2k A_2 \sin(ka) &= \beta (B_1 + A_3) \exp(-\beta a); \\ 2B_2 \sin(ka) &= (A_3 - B_1) \exp(-\beta a); \\ 2k B_2 \cos(ka) &= -\beta (A_3 - B_1) \exp(-\beta a) \end{aligned} \quad (6б)$$

Врахуємо, що всі чотири коефіцієнти (A_2 , A_3 , B_1 та B_2) одночасно не можуть бути рівними нулеві (бо в цьому випадку нульовою є ймовірність знайти частинку у будь-якій точці простору), а також, що одночасно з системою (6б) має виконуватись і умова (5а). У зв'язку з цим розв'язки розпадаються на два класи.

1. Якщо $B_1 = A_3$, то з двох останніх рівнянь системи (6б) випливає, що $B_2 = 0$, а з двох перших – $A_2 \neq 0$ і що має виконуватись умова

$$k \operatorname{tg}(ka) = \beta. \quad (7)$$

Останнє співвідношення можна отримати, якщо поділити друге рівняння системи (6б) на перше.

2. Якщо $B_1 = -A_3$, то з двох перших рівнянь системи (6б) випливає, що $A_2 = 0$, а з двох останніх – $B_2 \neq 0$ і що має виконуватись умова

$$k \operatorname{ctg}(ka) = -\beta \quad (8)$$

Зазначимо, що умови (7) та (8) одночасно не можуть виконуватись, так як в цьому випадку мала б мати місце також і рівність $k^2 = -\beta^2$, що неможливо через те що і k , і β дійсні. Врахувавши явний вигляд цих коефіцієнтів (3), можемо остаточно зробити висновки, що стани, в яких може знаходитися частинка розділяються на два наступні класи.

Можливі значення енергії в першому класі є коренями рівняння

$$\sqrt{(U_0 - |E|)} \operatorname{tg} \left(\sqrt{2m(U_0 - |E|)} \frac{a}{\hbar} \right) = \sqrt{|E|}, \quad (7a)$$

кожному значенню енергії відповідає парна хвильова функція

$$\psi(x) = \begin{cases} B_1 \exp \left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E|} x \right), & x \leq -a; \\ A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - |E|)} x \right), & -a < x < a; \\ B_1 \exp \left(-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E|} x \right), & x \geq a. \end{cases} \quad (9)$$

Можливі значення енергії другого класу розв'язків є коренями рівняння

$$\sqrt{(U_0 - |E|)} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{2m(U_0 - |E|)} \frac{a}{\hbar} \right) = -\sqrt{|E|}, \quad (8a)$$

кожному значенню енергії відповідає непарна хвильова функція

$$\psi(x) = \begin{cases} B_1 \exp \left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E|} x \right), & x \leq -a; \\ B_2 \sin \left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - |E|)} x \right), & -a < x < a; \\ -B_1 \exp \left(-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E|} x \right), & x \geq a. \end{cases} \quad (10)$$

Зв'язок між константами B_1 та A_2 (B_2) можна знайти, використавши умову нормування хвильової функції:

$$A_2^2 = B_2^2 = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{k^2 + \beta^2}{k^2 \beta} B_1^2 \exp(-2\beta a) \right]. \quad (11)$$

Задача А.10. Залежність потенціальної енергії частинки масою m від координати описується виразом

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x \geq L \\ U_0, & 0 < x < L \end{cases}.$$

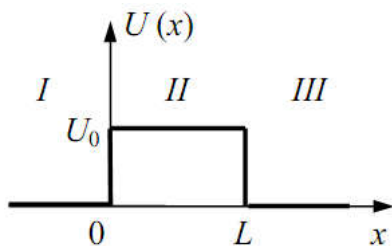


Рис. 2.8

Частинка рухається з області від'ємних значень координати в бік її зростання з енергією $E < U_0$. Знайти коефіцієнт прозорості даного потенціального бар'єру D .

Розв'язок:

Вигляд залежності потенціальної енергії від координати наведено на рисунку. Розіб'ємо весь простір на три області, які відрізняються величиною потенціальної енергії: область I , де $x \leq 0$, $U = 0$; область II , де $0 < x < L$, $U = U_0$ та область III , де $x \geq L$, $U = 0$; і запишемо рівняння Шрьодінгера для кожної області окремо:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + E \psi_I &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} - (U_0 - E) \psi_{II} &= 0; \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{III}}{dx^2} + E \psi_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введемо позначення

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad \gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E). \quad (2)$$

Зазначимо, що так як $E > 0$, то і k , і γ є дійсними. Тепер систему рівнянь (1) можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + k^2 \psi_I = 0;$$

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{d x^2} - \gamma^2 \psi_{II} = 0; \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 \psi_{III}}{d x^2} + k^2 \psi_{III} = 0.$$

Її розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_I &= A_1 \exp(-i k x) + B_1 \exp(i k x); \\ \psi_{II} &= A_2 \exp(-\gamma x) + B_2 \exp(\gamma x); \\ \psi_{III} &= A_3 \exp(-i k x) + B_3 \exp(i k x), \end{aligned} \quad (3)$$

де A_i та B_i ($i = \overline{1, 3}$) – нормувальні коефіцієнти. Фактично, перший доданок у формулах для ψ_I та ψ_{III} описує плоску хвилю, яка поширюється у бік зменшення координати x , а другий – хвилю, що поширюється у протилежному напрямі. Так як за умовою задачі частинка рухається і бік зростання координати, то можемо покласти $A_1 = 0$, $A_3 = 0$. Згідно з класичними уявленнями частинка не може перебувати у області, де її повна енергія менша потенціальної (область $0 < x < L$ в нашому випадку). Щоб це врахувати забезпечимо зменшення хвильової функції ψ_{II} (а отже, і густини імовірності знаходження частинки) при віддалені від точки з координатою $x = 0$ – точки з максимальним значенням абсциси, куди може потрапити частинка відповідно до класичних уявлень. Для цього покладемо $B_2 = 0$.¹ З врахуванням цього систему (3) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \psi_I &= B_1 \exp(i k x); \\ \psi_{II} &= A_2 \exp(-\gamma x) \\ \psi_{III} &= B_3 \exp(i k x). \end{aligned} \quad (3a)$$

¹ Загалом, при більш строгому розв'язку прирівнювати до нуля можна лише коефіцієнт A_3 . Проте і в цьому випадку вираз для коефіцієнта прозорості бар'єру буде мати такий самий вигляд, як і в нашому.

Для забезпечення неперервності хвильової функції необхідно, щоб

$$\begin{aligned}\psi_{II}(x=0) &= \psi_I(x=0); \\ \psi_{II}(x=L) &= \psi_{III}(x=L).\end{aligned}\tag{4}$$

Підставивши в (4) вирази (3а) отримуємо

$$\begin{aligned}A_2 &= B_1; \\ A_2 \exp(-\gamma L) &= B_3 \exp(ikL).\end{aligned}\tag{5}$$

Коефіцієнт прозорості бар'єру може бути визначений як відношення ймовірностей перебування частинки за бар'єром та перед ним, тобто

$$D = \frac{|\psi_{III}|^2}{|\psi_I|^2}.\tag{6}$$

Враховуючи вирази (3а) та (5), можемо остаточно записати

$$\begin{aligned}D &= \frac{|B_3 \exp(ikx)|^2}{|B_1 \exp(ikx)|^2} = \frac{|B_3|^2}{|B_1|^2} = \frac{|A_2 \exp(-\gamma L) \exp(-ikL)|^2}{|B_1|^2} = \exp(-2\gamma L) \\ D &= \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right)\end{aligned}$$

Задача А.11. Для 1s-електрона в атомі водню визначити:

- середнє значення його відстані від ядра $\langle r \rangle$;
- найбільшу імовірну відстань від ядра r_{im} та імовірність P знаходження електрону в області $r < r_{im}$.

Розв'язок:

- Середнє значення фізичної величини F у стані, який описується хвильовою функцією ψ , знаходиться за допомогою формули (2.23)

$$\langle F \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi dV,$$

де \hat{F} - оператор фізичної величини. Оператор відстані має вигляд $\hat{r} = r$, стан $1s$ -електрона в атомі водню описується функцією $\psi_{1s} = A \exp(-r/r_1)$ (де A – нормувальний коефіцієнт, $r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ - константа), тому

$$\langle r \rangle = \iiint \psi_{1s}^* r \psi_{1s} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \quad (1)$$

У формулі (1) враховано, що у сферичній системі координат $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. Перед тим, як проводити обчислення за формулою (1), знайдемо коефіцієнт A , використовуючи умову нормування:

$$\iiint \psi_{1s}^* \psi_{1s} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 1. \quad (2)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} 1 &= \iiint A^* \exp(-r/r_1) A \exp(-r/r_1) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \\ &= A^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right) r^2 dr = \\ &= A^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) r^2 dr \end{aligned}$$

Для знаходження останнього інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами та скористаємось тим, що

$$\begin{aligned} \exp(-2r/r_1) dr &= -\frac{r_1}{2} d(\exp(-2r/r_1)): \\ 4\pi A^2 \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) r^2 dr &= 4\pi A^2 \left(-\frac{r_1}{2}\right) \int_0^\infty r^2 d(\exp(-2r/r_1)) = \\ &= -2\pi A^2 r_1 \cdot \left[r^2 \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) d(r^2) \right]. \end{aligned}$$

Перший доданок у дужках, який складається з двох множників, рівний нулеві і на верхній і на нижній границі: на

верхній через те, що другий множник значно швидше спадає, ніж перший зростає; а на нижній – бо перший множник нуль, а другий обмежений (одиниця). Крім того, $d(r^2) = 2 d(r)$, тому

$$\begin{aligned}
 & -2\pi A^2 r_1 \cdot \left[r^2 \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) d(r^2) \right] = \\
 & = 4\pi A^2 r_1 \cdot \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) r dr = 4\pi A^2 r_1 \cdot (-r_1/2) \int_0^\infty r d(\exp(-2r/r_1)) = \\
 & = -2\pi A^2 r_1^2 \cdot \left[r \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) dr \right] = \\
 & = 2\pi A^2 r_1^2 \cdot \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) dr = 2\pi A^2 r_1^2 \cdot (-r_1/2) \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty = \pi A^2 r_1^3.
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$A^2 = 1/\pi r_1^3. \quad (3)$$

Скористаємось тепер безпосередньо виразом (1) для знаходження $\langle r \rangle$ (під час інтегрування застосовуватимуться прийоми, що описані вище):

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle & = \iiint A^* \exp(-r/r_1) r A \exp(-r/r_1) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\
 & = \frac{1}{\pi r_1^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right) r^3 dr = \\
 & = \frac{1}{\pi r_1^3} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) r^3 dr = \frac{4}{r_1^3} \cdot \left(-\frac{r_1}{2}\right) \int_0^\infty r^3 d(\exp(-2r/r_1)) = \\
 & = -\frac{2}{r_1^2} \cdot \left[r^3 \exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right) d(r^3) \right] = \\
 & = \frac{6}{r_1^2} \cdot \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) r^2 dr = \frac{6}{r_1^2} \cdot \left(-\frac{r_1}{2}\right) \int_0^\infty r^2 d(\exp(-2r/r_1)) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{r_1} \cdot \left[r^2 \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) d(r^2) \right] = \\
&= \frac{6}{r_1} \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) r dr = \frac{6}{r_1} \cdot \left(-\frac{r_1}{2} \right) \int_0^\infty r d(\exp(-2r/r_1)) = \\
&= -3 \cdot \left[r \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-2r/r_1) dr \right] = \\
&= 3 \cdot \left(-\frac{r_1}{2} \right) \exp(-2r/r_1) \Big|_0^\infty = \frac{3}{2} r_1;
\end{aligned}$$

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2} r_1. \quad (4)$$

б) Для знаходження найбільш імовірної відстані необхідно знайти, при яких значеннях r функція, що визначає імовірність $\omega(r, \theta, \varphi) = |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 dV$, набуває максимального значення, тобто обчислити, при яких r функція $\partial\omega(r, \theta, \varphi) / \partial r = 0$. Врахувавши явний вигляд ψ_{1s} можемо записати:

$$\omega(r, \theta, \varphi) = A^2 \exp(-2r/r_1) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\partial\omega/\partial r &= A^2 \left[2r \cdot \exp(-2r/r_1) - r^2 \cdot (2/r_1) \cdot \exp(-2r/r_1) \right] \times \\
&\times \sin \theta dr d\theta d\varphi = 0,
\end{aligned}$$

тобто

$$2r \cdot \exp(-2r/r_1) [1 - r/r_1] = 0. \quad (5)$$

З рівності (5) видно, що $\partial\omega / \partial r = 0$ при 1) $r = 0$; 2) $r \rightarrow \infty$; 3) $r = r_1$. Можна переконатися, що перші два корені відповідають мінімуму функції ω , а третій – максимуму. Тобто

$$r_{im} = r_1. \quad (6)$$

Імовірність P знаходження електрона в області $r < r_{im}$ може бути обчислена наступним чином:

$$P = \int_0^{r_{\text{in}}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Psi_{1s}^* \Psi_{1s} dV = \frac{1}{\pi r_1^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_1} \exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right) r^2 dr =$$

$$= 1 - 5 \exp(-2) \approx 0,32.$$

Задача А.12. Знайти всі можливі терми електронної конфігурації $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1 3d^1$, яка відповідає одному із збуджених станів атома кремнію ${}_{14}\text{Si}$.

Розв'язок:

Зауважимо, що в основному стані будь-якого з атомів періодичної таблиці подібна електронна конфігурація не існує. Вона може утворитися в результаті взаємодії атома з бомбардуючою частинкою чи при поглинанні фотона достатньої енергії, коли один з $2p$ -електронів переходить у збуджений незаповнений $3d$ -стан. Оскільки електронні оболонки $n = 1$ та $n = 2$ повністю заповнені, задача полягає у відшуванні термів двоелектронної конфігурації $3p^1 3d^1$. Для цієї конфігурації головне квантове число в електронів однакове, але вони відрізняються значеннями орбітального квантового числа – для p -електронів $l_1 = 1$, а для d -електронів $l_2 = 1$. Тому електрони є нееквівалентними і для них за принципом Паулі (див. ст. 72) немає обмежень за можливими комбінаціями квантових чисел m_l , m_s . Насамперед, знайдемо квантові числа орбітального моменту атома. Згідно з формулою (2.65)

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2| = 1 + 2, 1 + 2 - 1, \dots, |1 - 2| = 3, 2, 1.$$

Отже, можливі терми F , D , P (див. табл. 2.1). Далі визначимо спінове число атома, використовуючи (2.69):

$$S = s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, \dots, |s_1 - s_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1, 0$$

Цим значенням відповідають мультиплетності $2S + 1 = 3, 1$. Тому з урахуванням спіна маємо терми 3F , 1F , 3D , 1D , 3P , 1P . Для

кожного з них визначимо квантове число J , що характеризує повний механічний момент атома, з використанням (2.75).

$$^3F. \quad J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S| = 3 + 1, \dots, |3 - 1| = 4, 3, 2.$$

Тобто, маємо мультиплет $^3F_{4,3,2}$.

$$^1F. \quad J = 3 - 0 = 3. \text{ Терм } ^1F_3.$$

$$^3D. \quad J = 2 + 1, \dots, |2 - 1| = 3, 2, 1. \text{ Мультиплет } ^3D_{3,2,1}.$$

$$^1D. \quad J = 2 - 0 = 2. \text{ Терм } ^1D_2.$$

$$^3P. \quad J = 1 + 1, \dots, |1 - 1| = 2, 1, 0. \text{ Мультиплет } ^3P_{2,1,0}.$$

$$^1P. \quad J = 1 - 0 = 0. \text{ Терм } ^1P_1.$$

Задача А.13. Знайти всі можливі терми електронної конфігурації атома арсена $_{33}\text{As}$ ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^3$).

Розв'язок:

Електронна конфігурація атома арсена містить конфігурацію повністю заповнених оболонок аргона ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$), а також заповнені електронні підоболонки $3d^{10}$ та $4s^2$. Незаповненою залишається $4p$ -підоболонка, в якій розподілені три з шести можливих p -електронів.

Необхідно зауважити, що, на відміну від попередньої задачі, три електрони у $4p$ -підоболонці еквівалентні (числа n, l однакові), а отже, згідно з принципом Паулі мають відрізнятися значеннями квантових чисел m_l, m_s . p -станам ($l = 1$) відповідають $m_l = 1, 0, -1$, а для кожного з електронів можливими є проєкції спіна $m_s = 1/2, -1/2$. Отже, всього існує 6 незалежних одноелектронних станів: $(1, 1/2), (1, -1/2), (0, 1/2), (0, -1/2), (-1, 1/2), (-1, -1/2)$. По цим станам необхідно розподілити три електрони так, щоб у кожному розподілі електрони мали різні значення m_l, m_s . Кількість незалежних розподілів n -частинок по N -станам дорівнює

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{6!}{3!3!} = 20. \text{ Нагадаємо, що у векторній моделі атома}$$

механічні моменти \hat{L}_l, \hat{L}_s можна представляти як вектори \vec{L}_l, \vec{L}_s ,

для яких вказано значення модулів $|\vec{L}_l|, |\vec{L}_s|$ та проєкцій $\pm L_{zl}, \pm L_{zs}$ на вибрану вісь. За таких умов можливі напрямки векторів \vec{L}_l, \vec{L}_s утворюють конуси з вершиною в точці О, висотами $\pm L_{zl}, \pm L_{zs}$ та довжинами твірних ліній $|\vec{L}_l|, |\vec{L}_s|$ відповідно – див. рис. 2.9 для моменту \hat{L}_s . Знайдемо можливі розподіли (m_l, m_s) . Як прийнято, стан з проєкцією $m_s = 1/2$ будемо позначати стрілкою вгору \uparrow , а стан $m_s = -1/2$ відповідно \downarrow .

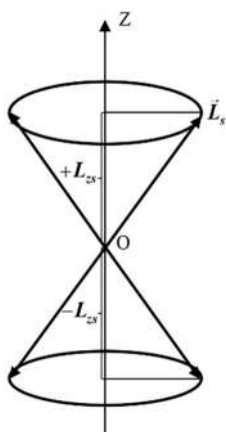


Рис.2.9. Векторна модель \hat{L}_s

Для зручності побудуємо таблиці, по коміркам яких будемо розподіляти 3 електрони. У табл. 2.2 наведено 10 можливих варіантів розподілів 3-х електронів за станами зі значеннями $m_l = 1, 0, -1$ (відповідні рядки таблиці) та різними комбінаціями проєкцій спіна на вісь OZ (10 вертикальних стовпчиків). В останньому та передостанньому рядках обчислено значення квантових чисел $M_L = m_{l_1} + m_{l_2} + m_{l_3}$ та

$M_S = m_{s_1} + m_{s_2} + m_{s_3}$. Як видно, вказані розподіли забезпечують додатні значення сумарних проєкцій M_S .

Таблиця 2.2

| m_l | m_s | | | | | | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | \uparrow | \uparrow | \downarrow | \uparrow | $\uparrow\downarrow$ | $\uparrow\downarrow$ | \uparrow | | | \uparrow |
| 0 | \uparrow | \uparrow | \uparrow | \downarrow | \uparrow | | $\uparrow\downarrow$ | $\uparrow\downarrow$ | \uparrow | |
| -1 | \uparrow | \downarrow | \uparrow | \uparrow | | \uparrow | | \uparrow | $\uparrow\downarrow$ | $\uparrow\downarrow$ |
| M_L | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | -1 | -2 | -1 |
| M_S | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

У табл. 2.3 знаки проєкцій спінів змінено на протилежні і утворено ще 10 розподілів з від'ємними значеннями M_S .

Таблица 2.3

| m_l | m_s | | | | | | | | | |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 1a | 2a | 3a | 4a | 5a | 6a | 7a | 8a | 9a | 10a |
| 1 | ↓ | ↓ | ↑ | ↓ | ↓↑ | ↓↑ | ↓ | | | ↓ |
| 0 | ↓ | ↓ | ↓ | ↑ | ↓ | | ↓↑ | ↓↑ | ↓ | |
| -1 | ↓ | ↑ | ↓ | ↓ | | ↓ | | ↓ | ↓↑ | ↓↑ |
| M_L | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | -1 | -2 | -1 |
| M_S | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

1) Випишемо значення M_S (табл. 2.2): $M_S = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$. Очевидно, такі проєкції відповідають терму зі спіном $S = 3/2$. При цьому $M_L = 0$. Таким чином, вказані розподіли електронів вказують на терм 4S .

2) Розглянемо значення M_L із стовпчиків 4, 5, 6, 8, 9 (табл. 2.2): $M_L = 2, 1, 0, -1, -2$. Усім цим значенням відповідає $M_S = 1/2$. Аналогічний набір M_L наведено у стовпчиках 4a, 5a, 6a, 8a, 9a, але для них $M_S = -1/2$. Отже, маємо $L = 2, S = 1/2$, тобто терм 2D .

3) Залишилися розподіли 3, 7, 0, для яких $M_L = 1, 0, -1, M_S = 1/2$. У стовпчиках 3a, 7a, 10a також розподіли з $M_L = 1, 0, -1$, але для випадку $M_S = -1/2$. Таким чином, присутній терм $L = 1, S = 1/2$, а саме 2P . Отже, електронній конфігурації атома арсену відповідають терми $^4S, ^2D, ^2P$.

На завершення розв'язку зауважимо, що таблиця 2.3 фактично повторює розподіли табл. 2.2. Відмінність тільки у тому, що цим розподілам відповідають від'ємні значення проєкції $M_S = -1/2$. Тому при розв'язку подібних задач можна обмежитися побудовою таблиці типу табл. 2.2, розуміючи, що інша половина можливих розподілів електронів буде відрізнятися тільки знаком проєкції M_S .

Задача А.14. Знайти основний терм електронної конфігурації атомів:

1) ${}_{14}\text{Si} (1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2)$;

2) ${}_{27}\text{Co} (1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7 4s^2)$.

Розв'язок:

1. **Атом кремнію.** Його електронна конфігурація складається з повністю заповнених електронних оболонок $n = 1$ та $n = 2$ (конфігурація неона) та зовнішньої електронної оболонки $n = 3$, в якій $2s$ -підоболонка заповнена повністю, а $2p$ -підоболонка містить тільки 2 електрони. Тому задача зводиться до визначення основного терму конфігурації $3p^2$. Оскільки два p -електрони еквівалентні (n, l однакові), для розв'язку задачі будемо розглядати значення квантових чисел m_l, m_s . Як зазначалося раніше, можливі значення $m_l = 1, 0, -1$ та $m_s = 1/2, -1/2$. Два p -електрони необхідно розподілити по цим квантовим станам так, щоб виконувалося правило Гунда (див. ст. 83). Основному терму має відповідати конфігурація з максимальним спіном S . Очевидно, максимальне значення спіна для двох електронів $S = 1$, тобто проєкції m_s мають бути одного знаку (обидві стрілки або вгору, або вниз). А як далі треба розподілити 2 електрони по станам m_l , щоб виконувалася друга частина правила Гунда – при максимальному S було максимальним квантове число L . Оскільки квантові числа проєкції повного орбітального моменту $M_L = m_{l_1} + m_{l_2}$ набувають значень $M_L = L, L-1, \dots, -L$, то для необхідного максимального L у наборі можливих значень M_L має міститися найбільше можливе число $|M_L^{(\max)}| = L$. Таке число можна отримати, розмістивши 2 електрони в комірки $m_{l_1} = 1, m_{l_2} = 0$, або в комірки $m_{l_1} = -1, m_{l_2} = 0$. І в тому, і в іншому випадках $|M_L^{(\max)}| = 1, L = 1$ – див. табл. 2.4. У цій таблиці такий розподіл електронів показано парою стрілок вгору або парою стрілок вниз (позначений пунктиром прямокутник). Таким

чином, мінімальну енергію буде мати терм $L = 1, S = 1$, тобто, 3P . Для цього терма число $J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S| = 2, 1, 0$, отже, маємо мультиплет з трьома компонентами ${}^3P_{2,1,0}$. Оскільки для атома кремнію $3p$ -оболонка заповнена менш, ніж наполовину (нормальний мультиплет), мінімальну енергію буде мати компонент $J = |L - S| = 0$ (див. правило ст. 84). Отже, основним термом електронної конфігурації атома кремнію є 3P_0 .

Таблиця 2.4

| m_l | 1 | 0 | -1 |
|-------|---|--------|----|
| m_s | ↑ | ↑ ↓ | ↓ |

2. **Атом кобальту.** Електронна конфігурація складається з повністю заповнених електронних оболонок $n = 1$ та $n = 2$ (конфігурація неона) та електронної оболонки $n = 3$, в якій $3s$ - та $3p$ -підоболонки заповнені повністю, а $3d$ -підоболонка містить 7 з 10 можливих електронів. Оскільки $4s$ -підоболонка також повністю заповнена, фактично необхідно визначити основний конфігурації $3d^7$.

Як і для атома хлора, побудуємо таблицю значень квантових чисел m_l, m_s , врахувавши, що для d -станів $m_l = 2, 1, 0, -1, -2$ (табл. 2.5). Спочатку розподілимо сім d -електронів по станах m_l, m_s так, щоб досягти максимального спіна системи. Очевидно, необхідно щоб 5 електронів мали однакове значення проєкції m_s (всі ↑ або всі ↓). Два d -електрони, що залишилися, повинні бути розподілені в комірки, в яких вже перебувають d -електрони, але для виконання принципу Паулі їх проєкції m_s мають відрізнятись від проєкцій спінів тих електронів, що вже займають комірки. Тому повинна реалізовуватися така конфігурація: для трьох електронів проєкції ↑, для чотирьох попарно ↑↓ та ↑↓ (або, навпаки, 3 електрони ↓, чотири попарно ↑↓ та ↑↓):

Таблиця 2.5

| | | | | | |
|-------|----|----|---|----|----|
| m_l | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| m_s | ↑ | ↑ | ↑ | ↑↓ | ↑↓ |
| або | | | | | |
| m_s | ↑↓ | ↑↓ | ↑ | ↑ | ↑ |

Пари проєкцій $\uparrow\downarrow$ та $\uparrow\downarrow$ в сумі дають нульову проєкцію спіна, тому проєкція повного спіна $|M_S| = |\pm 1/2 \pm 1/2 \pm 1/2| = 3/2$. Оскільки $|M_S^{(\max)}| = S$, максимальний повний спін $S = 3/2$.

Далі необхідно забезпечити такий розподіл електронів конфігурації $\uparrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow$ за станами m_l , щоб досягалося максимальне значення числа L , відповідно, максимально можливою була величина $|M_L^{(\max)}|$. Для цього достатньо розподілити $\uparrow\uparrow\uparrow$ електрони у стани $m_l = 2, 1, 0$ або $m_l = 0, -1, -2$. Тоді $|M_L| = |\pm 2 \pm 1 \pm 0 \mp 2 \mp 2 \mp 1 \mp 1| = 3$, що визначає $L = 3$. Таким чином, згідно з правилом Гунда основним термом електронної конфігурації $3d^7$ є мультиплет ${}^4F_{9/2, 7/2, 5/2, 3/2}$ (враховано, що $J = 3 + 3/2, \dots, |3 - 3/2| = 9/2, 7/2, 5/2, 3/2$). Оскільки $3d$ -підоболонка заповнена більш ніж наполовину (обернений мультиплет), за умови врахування спин-орбітальної взаємодії мінімальну енергію буде мати компонент мультиплета $J = L + S$, тобто терм ${}^4F_{9/2}$.

Задача А.15. Визначити можливі значення магнітного моменту атома в стані 4P . Якими будуть значення проєкцій магнітного моменту на вісь OZ у стані з найбільшим квантовим числом J ?

Розв'язок:

Згідно з формулою (2.98) значення магнітного моменту атома μ_J визначаються: 1) магнетоном Бора для електрона

$\mu_B = e\hbar / 2m_0$; 2) множителем Ланде g_J (формула (2.97)); 3) квантовим числом повного механічного моменту J . Для обчислення величин 2) та 3) необхідно визначити квантові числа L, S, J . Очевидно, для терма 4P вказані квантові числа набувають наступних значень: $L = 1$; мультиплетність $2S + 1 = 4$, а отже $S = 3/2$; число J набуває значень (див. формула (2.75)) $J = 1 + 3/2, (1 + 3/2) - 1, |1 - 3/2| = 5/2, 3/2, 1/2$. Використовуючи (2.97), обчислимо множник Ланде для трьох наборів квантових чисел L, S, J , а саме, $(1, 3/2, 5/2), (1, 3/2, 3/2), (1, 3/2, 1/2)$:

$$g_{5/2} = 1 + \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right) - 1(1+1) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{2\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)} = 1 + \frac{42}{2 \cdot 35} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5},$$

$$g_{3/2} = 1 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - 1(1+1) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{2\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)} = 1 + \frac{11}{15} = \frac{26}{15},$$

$$g_{1/2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - 1(1+1) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}.$$

Далі за формулою (2.98) визначимо абсолютні значення магнітних моментів атома, які відповідають вказаним вище наборам квантових чисел:

$$\mu_{5/2} = \mu_B g_{5/2} \sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)} = \mu_B \frac{8}{5} \cdot \sqrt{\frac{35}{4}} = 4\sqrt{\frac{7}{5}} \mu_B,$$

$$\mu_{3/2} = \mu_B g_{3/2} \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \mu_B \frac{26}{15} \cdot \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{13}{\sqrt{15}} \mu_B,$$

$$\mu_{1/2} = \mu_B g_{1/2} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \mu_B \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \mu_B.$$

У стані з найбільшим значенням квантового числа $J = 5/2$ квантові числа M_J набувають значень $M_J = +J, J - 1, \dots, -J = 5/2, 3/2, 1/2, -1/2, -3/2, -5/2$. Для визначення абсолютних значень проєкції μ_{zJ} скористаємося формулою (2.99):

$$\mu_{z(5/2)_1} = \mu_B g_{5/2} \frac{5}{2} = \mu_B \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{2} = 4\mu_B,$$

$$\mu_{z(5/2)_2} = \mu_B g_{5/2} \frac{3}{2} = \mu_B \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{5} \mu_B,$$

$$\mu_{z(5/2)_3} = \mu_B g_{5/2} \frac{1}{2} = \mu_B \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \mu_B.$$

Задача А.16. Визначити, на які компоненти розщеплюється жовтий дублет натрію у слабкому та сильному магнітному полі. Довжина хвилі високоенергетичного компонента (ВК) $\lambda_B = 5889,96 \text{ \AA}$, низькоенергетичного (НК) $\lambda_H = 5895,93 \text{ \AA}$.

Розв'язок:

Вказані спектральні лінії випромінюються в результаті дипольних переходів $3s$ -електрона атома Na із збудженого $3p$ -стану, якому відповідають спектральні терми $^2P_{3/2}$ ($L = 1, S = 1/2, J = 3/2$) та $^2P_{1/2}$ ($L = 1, S = 1/2, J = 1/2$), в основний $3s$ -стан – терм $^2S_{1/2}$ ($L = 0, S = 1/2, J = 1/2$). Тобто, ВК відповідає перехід $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$, а НК – перехід $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$. Очевидно, такі переходи задовольняють дипольним правилам відбору (2.108а) – (2.108в).

Слабке магнітне поле. Як зазначалося вище, у слабкому магнітному полі знімається виродження по квантовому числу m_J , тобто рівень енергії з квантовим числом J розпадається на систему окремих енергетичних рівнів (хоча і близьких за енергією), кожному з яких відповідає своє значення m_J (формула (2.105)). При цьому спін-орбітальна взаємодія не розривається, тобто зі слабким магнітним полем взаємодіятиме повний магнітний момент атома μ_J . Визначимо для кожного з термів $^2P_{3/2}$,

$^2P_{1/2}$, $^2S_{1/2}$ значення множника Ланде g_J (див. задачу А.15), можливі значення квантових чисел M_J (2.100), а також обчислимо добутки $g_J M_J$. Заповнимо таблицю 2.6. Для зручності значення $g_J M_J = 2, -2$ представлено як $g_J M_J = 6/3, -6/3$. Самостійно отримайте числа, наведені у таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

| Терм | g_J | M_J | $g_J M_J$ |
|---------------------------------------|---------------|--|--|
| $^2P_{3/2} (L = 1, S = 1/2, J = 3/2)$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ | $\frac{6}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{6}{3}$ |
| $^2P_{1/2} (L = 1, S = 1/2, J = 1/2)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ |
| $^2S_{1/2} (L = 0, S = 1/2, J = 1/2)$ | 2 | $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | 1, -1 |

На рис. 2.10 наведено компоненти мультиплетів, тобто окремі рівні з різними значеннями M_J , на які розщепилися терми $^2P_{3/2}$, $^2P_{1/2}$, $^2S_{1/2}$. Розглянемо ВК, тобто переходи між компонентами $^2P_{3/2}$ терма (чотири компоненти $M_J = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$) та $^2S_{1/2}$ терма (два компоненти $M_J = 1/2, -1/2$). Дозволеними за правилами відбору будуть тільки ті переходи, для яких $\Delta J = 0, \pm 1$; $\Delta M_J = 0, \pm 1$ – див. (2.108а). Очевидно, таких переходів буде шість: $3/2 \rightarrow 1/2$; $1/2 \rightarrow 1/2$; $1/2 \rightarrow -1/2$; $-1/2 \rightarrow 1/2$; $-1/2 \rightarrow -1/2$; $-3/2 \rightarrow -1/2$. На рис. 2.10 вони позначені стрілками з дрібними штрихами. Відповідно, різниці добутків $g_J M_J$ для них набувають значень:

$$\begin{aligned}
 g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2} &= \\
 &= \left(\frac{6}{3} - 1\right), \left(\frac{2}{3} - 1\right), \left(\frac{2}{3} + 1\right), \left(-\frac{2}{3} - 1\right), \left(-\frac{2}{3} + 1\right), \left(-\frac{6}{3} + 1\right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

або

$$g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2} = \frac{3}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{3}. \quad (2)$$

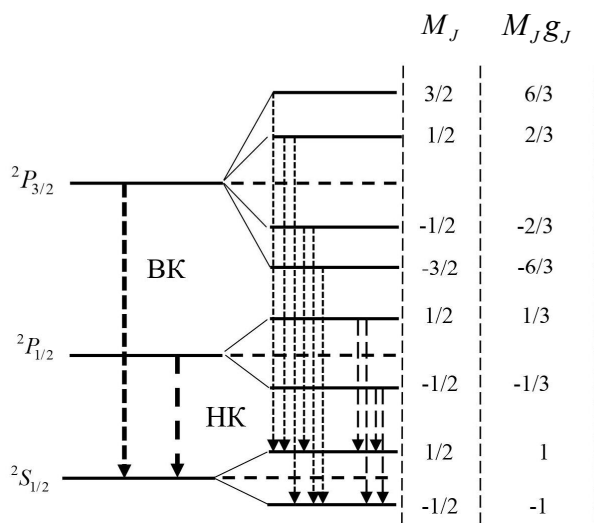
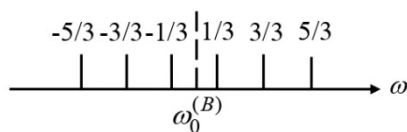


Рис. 2.10. Схема розщеплення жовтого дублета Na у слабкому магнітному полі

Тоді за формулою (2.107) набір частот ВК можна представити наступним чином

$$\omega_{ij}^{(B)} = \omega_0^{(B)} + \omega_L \cdot \left\{ \begin{array}{c} 5/3 \\ 3/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ -3/3 \\ -5/3 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Отже, штрих-діаграма спектра ВК Na у слабкому магнітному полі має вигляд:



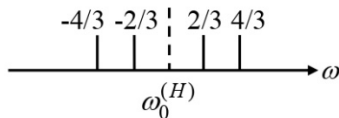
Аналогічно, для НК маємо чотири переходи: $1/2 \rightarrow 1/2$; $1/2 \rightarrow -1/2$; $-1/2 \rightarrow 1/2$; $-1/2 \rightarrow -1/2$, які на рис. 2.10 позначені лініями з більш довгими штрихами. Для них різниці добутків $g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2} = (1/3 - 1), (1/3 + 1), (-1/3 - 1), (-1/3 + 1)$, або

$$g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2} = -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}. \quad (4)$$

Отже, частоти НК дорівнюють

$$\omega_{ij}^{(H)} = \omega_0^{(H)} + \omega_L \cdot \begin{Bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Відповідна штрих-діаграма НК:



Розрахунок частот і довжин хвиль ВК та НК компонентів виконайте самостійно, вважаючи, що індукція слабого магнітного поля складає $B = 0,5$ Тл.

Сильне магнітне поле. На відміну від слабого поля у сильному магнітному полі взаємодія орбітального магнітного моменту атома μ_L зі спіновим моментом μ_S менша за взаємодію кожного з цих моментів із зовнішнім магнітним полем. Тобто, спін-орбітальна взаємодія розривається і тому необхідно розглядати окремо взаємодію кожного моменту μ_L , μ_S з полем B . У цьому випадку терм з квантовими числами L, S буде розщеплюватися на ряд окремих близьких рівнів, енергії яких визначаються квантовими числами M_L, M_S (формула (2.113)). Оскільки в такій задачі спін-орбітальна взаємодія не враховується, терми $^2P_{3/2}$,

${}^2P_{1/2}$ не відрізняються за енергією, тобто можна розглядати єдиний терм 2P . Аналогічно ${}^2S_{1/2} \equiv {}^2S$. Для терма 2P ($L = 1, S = 1/2$) квантові числа M_L та M_S набувають значень $M_L = 1, 0, -1$; $M_S = 1/2, -1/2$. Отже, терм 2P розщеплюється на шість рівнів. Терм 2S ($L = 0, S = 1/2$) характеризується значеннями $M_L = 0$ та $M_S = 1/2, -1/2$, тобто розщеплюється на два рівні. Можливі переходи між рівнями 2P та 2S термів визначаються правилами відбору $\Delta L = 0, \pm 1$; $\Delta M_L = 0, \pm 1$ (2.108б) та $\Delta S = 0$; $\Delta M_S = 0$ (2.108в). Тобто, за квантовим числом M_L дозволено переходити $1 \rightarrow 0$; $0 \rightarrow 0$; $-1 \rightarrow 0$, а за квантовим числом M_S : $1/2 \rightarrow 1/2$; $-1/2 \rightarrow -1/2$. Таким чином, правила відбору дозволяють існування шести переходів, квантові числа яких наведено у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7

| | | | | | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|---|---------------------------------------|---|---------------------------------------|---|
| $m_{L_1} \rightarrow m_{L_2}$ | $1 \rightarrow 0$ | $1 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 0$ | $-1 \rightarrow 0$ | $-1 \rightarrow 0$ |
| $m_{S_1} \rightarrow m_{S_2}$ | $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ |
| Номер переходу | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Але частота фотонів, які випромінюються, згідно з формулою (2.114), визначається різницями $(M_{L_1} - M_{L_2})$ та $(M_{S_1} - M_{S_2})$.

Перша з цих різниць набуває можливих значень (1, 0, -1), а друга дорівнює нулю. Тому переходи 1 та 2, 3 та 4, 5 та 6 будуть попарно мати однакові частоти. Остаточно, частоти ліній, які спостерігаються експериментально, визначаються виразом

$$\omega_{ij} = \omega_0 + \omega_L (M_{L_i} - M_{L_j}) = \omega_0 + \omega_L \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Таким чином, у магнітному полі жовтий дублет натрію спочатку розщеплюється на шість ВК та чотири НК (слабке поле, аномальний ефект Зеемана), а при подальшому зростанні індукції поля, починаючи з 2,2 – 2,4 Тл, перетворюється на три спектральні лінії (ефект Пашена-Бака). Розрахунок частот і довжин хвиль двох додаткових спектральних компонентів виконайте самостійно для випадку, коли індукція сильного магнітного поля складає 3 Тл.

Задача А.17. Визначити, який – нормальний чи аномальний, ефект Зеемана спостерігається у слабкому магнітному полі для спектральної лінії ${}^5I_5 \rightarrow {}^5H_4$?

Розв’язок:

Перш за все, визначимо трійку квантових чисел L, S, J для початкового та кінцевого термів. Терм 5I_5 . Згідно з таблицею 2.1 (ст. 81) літері I відповідає $L = 6$. Мультиплетність $2S + 1 = 5$, тобто $S = 2$, отже $(L, S, J) = (6, 2, 5)$. Терм 5H_4 . Очевидно, $(L, S, J) = (5, 2, 4)$ Обчислимо значення множника Ланде для початкового та кінцевого термів:

$$\begin{aligned} g_5 &= 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} = \\ &= 1 + \frac{5 \cdot 6 - 6 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 1 - \frac{6}{60} = \frac{9}{10}. \\ g_4 &= 1 + \frac{4 \cdot 5 - 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} = 1 - \frac{4}{40} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Виявляється, що множники Ланде для початкового та кінцевого термів однакові. Тоді формулу (2.107) можна переписати так

$$\omega_{12} = \omega_0 + \omega_L (g_{J_1} M_{J_1} - g_{J_2} M_{J_2}) = \omega_0 + \omega_L g (M_{J_1} - M_{J_2}), \quad (1)$$

в якій $g_4 = g_3 = g$. Таким чином, частоти спектральних компонентів будуть визначатися тільки різницями $(M_{J_1} - M_{J_2})$. Для $J = 5$ $M_{J_1} = 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5$, а для $J = 4$ $M_{J_2} = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$. Згідно з правилом відбору (2.108а) $\Delta J = 0, \pm 1$; $\Delta M_J = 0, \pm 1$, тобто можливі тільки три значення різниці $M_{J_1} - M_{J_2} = 1, 0, -1$. Частоти компонентів будуть визначатися виразом

$$\omega_{12} = \omega_0 = \omega_0 + \omega_L g \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

який збігається з формулою (2.110), що визначає частоти у випадку нормального ефекта Зеемана. Можна зробити висновок, що для спектральної лінії ${}^5I_5 \rightarrow {}^5H_4$ у слабкому магнітному полі спостерігатиметься саме нормальний ефект Зеемана.

2.3. Задачі для самостійного розв'язку

2.1. Оцініть час, за який електрон, що рухається навколо протона в атомі водню по орбіті радіусом $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м, мав би впасти на ядро, якби втрачав енергію за формулою класичної електродинаміки $\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2$. Скільки повних обертів

навколо ядра він встиг би виконати? (W – повна енергія електрона, c – швидкість світла у вакуумі, a – доцентрове прискорення електрона).

2.2. Знайти комутатор операторів а) $\hat{A} = x$ та $\hat{B} = \frac{d}{dx}$;

б) $\hat{A} = i\hbar\nabla$ та $\hat{B} = f(\vec{r})$; в) $\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ та $\hat{B} = \frac{\partial}{\partial y}$.

2.3. Знайти оператор, спряжений до добутку двох операторів $\hat{A} \cdot \hat{B}$.

2.4. Довести самоспряженість оператора а) $\hat{A} = x$; б) $\hat{A} = i \frac{\partial}{\partial y}$.

2.5. Відомо, що $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$. Знайти комутатор $[\hat{A}, \hat{B}^2]$.

2.6. Довести, що $\hat{A}^{-1} \hat{B}^2 \hat{A} = (\hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A})^2$.

2.7. Довести наступні рівності: а) $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$;

б) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.

2.8. Знайти власне значення оператора \hat{A} , що належить власній функції ψ_A :

а) $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $\psi_A = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$;

б) $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}$, $\psi_A = \frac{\sin \alpha x}{x}$, де α - стала.

2.9. Знайти власні функції та власні числа операторів:

а) $\frac{d}{dx}$; б) $i \frac{d}{dx}$; в) $\left(x + \frac{d}{dx}\right)$; г) $\exp\left(ia \frac{d}{d\phi}\right)$; д) $\frac{d^2}{d\phi^2}$.

2.10. Знайти власні значення оператора імпульсу $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ та відповідні власні функції.

2.11. Побудувати оператор моменту імпульсу \hat{L} у прямокутній декартовій системі координат.

2.12. Знайти комутатори наступних компонент моменту імпульсу:

а) $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$; б) $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$; в) $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$.

2.13. Знайти правила комутації наступних операторів:

а) \hat{L}_x та \hat{p}_x ; б) \hat{L}_x та \hat{p}_y ; в) \hat{L}_x та \hat{p}_z .

2.14. Довести, що оператор квадрату моменту імпульсу

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

комутує з будь-якою компонентою

оператора \hat{L} в прямокутній декартовій системі координат.

2.15. Відомо, що власна функція одновірної системи у певному

стані має вигляд $\psi(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x\right)$, де a та k_0 – відомі

константи. Знайти величину константи C , а також середні значення координати $\langle x \rangle$, імпульсу $\langle p \rangle$ та квадрату відхилення координати $\langle \Delta x^2 \rangle$ у цьому стані.

2.16. Визначити середнє значення фізичної величини, що

описується оператором \hat{L}_z^2 в стані, який описується функцією $\psi(\phi) = C \sin^2 \phi$ (C – невідома константа).

2.17. Електрон, початковою швидкістю якого можна

знехтувати, пройшов прискорюючи різницю потенціалів U . Знайти довжину хвилі де Бройля цього електрону у двох випадках: а) $U = 51$ В; б) $U = 510$ кВ.

2.18. Кінетична енергія протона $K = 1$ кеВ. Визначити додаткову енергію ΔK , яку необхідно йому надати, щоб його довжина хвилі де Бройля зменшилась в η разів.

2.19. Кінетична енергія K електрона дорівнює подвоєному значенню його енергії спокою. Визначити довжину хвилі λ де Бройля для такого електрона.

2.20. При якому значенні швидкості електрона його імпульс дорівнює імпульсу фотона з довжиною хвилі $\lambda = 1$ нм?

2.21. Знайти довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона з кінетичною енергією $K = 0,3$ МеВ.

2.22. При аналізі розсіяння α -частинок (досліди Резерфорда) прицільні відстані приймалися порядку $0,1$ нм. Хвильові властивості α -частинок при цьому не враховувались. Чи припустимо це, якщо енергія α -частинок приблизно дорівнювала $7,7$ МеВ?

2.23. Частинка масою m рухається в потенціальному полі

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ -U_0, & x \geq 0 \end{cases}. \text{ Швидкість частинки в області } x < 0 \text{ дорівнює}$$

v_1 . Знайти показник заломлення потенціального бар'єру, розташованого при $x = 0$.

2.24. Розподіл молекул певного газу за модулем їх швидкості описується формулою Максвелла. Запишіть розподіл молекул за дебройлівськими довжинами хвиль та визначте найбільш імовірну довжину $\lambda_{\text{ім}}$. При обчисленнях вважати, що температура газу дорівнює T , маса однієї молекули - m , їхня концентрація - n .

2.25. На яку кінетичну енергію має бути розрахований прискорювач заряджених частинок масою m , щоб за допомогою потоку даних частинок можна було досліджувати структури з лінійними розмірами l ? Провести розрахунки для випадку, коли

частинками є електрони та протони, а $l \sim 1$ фм.

2.26. Знайти кінетичну енергію електронів, що падають на діафрагму з двома вузькими щілинами, якщо на екрані, розташованому на відстані $l = 75$ см від діафрагми, відстань між сусідніми максимумами $\Delta x = 7,5$ мкм. Відстань між щілинами $d = 25$ мкм.

2.27. Кінетична енергія електрона в атомі водню складає величину порядку $K = 10$ еВ. Використовуючи співвідношення невизначеності, оцінити мінімальні лінійні розміри атому.

2.28. Визначити відносну невизначеність $\Delta p/p$ імпульсу рухомої частинки, якщо припустити, що невизначеність її координати дорівнює довжині хвилі де Бройля.

2.29. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію електрону, що рухається всередині сферичної області діаметром $d = 0,1$ нм.

2.30. Атом випроменив фотон з довжиною хвилі $\lambda = 0,58$ мкм за час $\tau \approx 10^{-8}$ с. Оцінити невизначеність Δx , з якою можна визначити координату фотону в напрямі його руху, а також відносну невизначеність його довжини хвилі.

2.31. Деяка система знаходиться у стаціонарному стані, який описується хвильовою функцією $\Phi(x, t)$. Чи буде залежати від часу густина ймовірності знайти систему у точці з координатою x ?

2.32. Знайти власні значення енергії та хвильову функцію вільної частинки.

2.33. Визначити густину ймовірності знайти частинку в точці з координатою x , якщо її хвильова функція а) $\psi(x, t) = C \exp(i k x)$; б) $\psi(x, t) = C [\exp(i k x) + \exp(-i k x)]$, де C – стала.

2.34. Частинка, яка перебуває в нескінченно глибокій потенціальній ямі, знаходиться в основному стані. Яка ймовірність виявлення частинки: а) в середній третині ящика; б) в крайній третині ящика?

2.35. Частинка, яка перебуває в нескінченно глибокій

потенціальній ямі шириною $2a$ знаходиться у збудженому стані, який характеризується квантовим числом $n = 3$. Визначити, в яких точках інтервалу $[-a, a]$ густина ймовірності знаходження частинки має максимальне і мінімальне значення.

2.36. Електрон знаходиться в прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями $2a = 0,2$ нм, енергія електрона $-E = 37,8$ еВ. Визначити номер n енергетичного рівня і модуль хвильового вектора \vec{k} електрона.

2.37. Електрон знаходиться в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною $2a$. В яких точках інтервалу $[-a, a]$ густина ймовірності знаходження електрона на другому та третьому енергетичному рівнях однакові? Розв'язок пояснити графічно.

2.38. Частинка в нескінченно глибокій прямокутній потенціальній ямі перебуває у стані, який характеризується квантовим числом $n = 2$. Яка ймовірність виявити частинку в крайній чверті ящика?

2.39. У скільки разів змінюється енергія частинки масою m після її тунелювання через потенціальний бар'єр висотою U та шириною l ?

2.40. Частинка масою m перебуває в основному стані у потенціальному полі $U = kx^2 / 2$, а її хвильова функція має вигляд $\psi(x) = A \exp(-\alpha x^2)$, де A – коефіцієнт нормування, α – додатна стала. За допомогою рівняння Шрьодінгера знайти величину α та енергію частинки у цьому стані.

2.41. Електрон в атомі водню знаходиться в основному стані, що описується хвильовою функцією $\psi = A \exp(-r / r_1)$. За допомогою рівняння Шрьодінгера знайти енергію E електрона та величину r_1 .

2.42. Визначити для $1s$ -електрона в атомі водню середні значення його квадрата відстані від ядра $\langle r^2 \rangle$ та квадрата середнього відхилення $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$.

2.43. Знайти для $2p$ - та $3d$ -електронів в атомі водню а) найбільш ймовірну відстань від ядра; б) середнє квадратичне відхилення $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$.

2.44. Знайти значення повного механічного моменту атома, який перебуває у станах термів: а) 3P ; б) 4D ; в) 1F . Відповідь представити в одиницях \hbar .

2.45. Побудувати можливі терми для конфігурацій нееквівалентних електронів: а) $n s^1 d^1$; б) $n p^1 f^1$; в) $n_1 p^1 n_2 p^1$; г) $n s^1 p^1 d^1$.

2.46. Побудувати можливі терми для конфігурацій еквівалентних електронів: а) $n p^2$; б) $n d^2$.

2.47. Побудувати можливі терми для конфігурацій, які містять як еквівалентні, так і нееквівалентні електрони: а) $n_1 s^1 n_2 p^2$; б) $n_1 p^1 n_2 p^2$.

2.48. Визначити терм, який відповідає максимальному орбітальному моменту атома, що перебуває у стані з мультиплетністю 3 та є виродженим за квантовим числом J з кратністю 5.

2.49. Атом знаходиться у стані, мультиплетність якого 3, а повний механічний момент дорівнює $\hbar\sqrt{20}$. Яких значень може набувати квантове число L ?

2.50. Знайти основний терм атома, у якого незаповнена підоболонка містить 7 електронів, що складає половину від максимально можливої кількості електронів у цій підоболонці.

2.51. Використовуючи правила Гунда, знайти основний терм атома, електронна конфігурація незаповненої підоболонки якого: а) $n p^5$; б) $n d^2$; в) $n d^6$; г) $n f^{10}$; д) $n f^4$.

2.52. Користуючись правилами Гунда, записати основний терм атома, єдина незаповнена підоболонка якого містить третину від можливого числа електронів, а спин $S = 1$.

2.53. Скориставшись правилами Гунда, знайти число електронів у єдиній незаповненій підоболонці атома, основний

терм якого: а) 3F_2 ; б) ${}^2P_{3/2}$; в) ${}^6S_{5/2}$.

2.54. Знайти магнітний момент μ та можливі значення його проєкцій μ_z атома, який перебуває у станах: а) 1P_1 ; б) ${}^2F_{5/2}$; в) ${}^2D_{3/2}$.

2.55. Визначити спіновий механічний момент атома в стані D_2 , якщо максимальне значення проєкції магнітного моменту при цьому дорівнює чотирьом магнетонам Бора.

2.56. Атом знаходиться у стані 3P_2 . На скільки компонентів розщепиться цей терм у слабкому магнітному полі? Як буде визначатися величина розщеплення $\Delta E = E_J - E_{J-1}$ (різниця енергій сусідніх компонентів)?

2.57. Побудувати схему можливих оптичних переходів у слабкому магнітному полі для спектральних ліній: а) ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$; б) ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$. Знайти величини $\Delta\omega_i / \omega_L = (\omega_i - \omega_0) / \omega_L$, де ω_i – частота i -компонента, ω_0 – частота лінії за відсутності магнітного поля, ω_L – ларморовська частота.

2.58. Який ефект Зеемана – нормальний чи аномальний, спостерігається у слабкому магнітному полі для спектральних ліній: а) ${}^1P_1 \rightarrow {}^1S_0$; б) ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$.

3. ЕЛЕМЕНТИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

3.1. Теоретичні відомості

Ядерна фізика вивчає фізичні властивості атомних ядер, зокрема, процеси ядерних перетворень, як спонтанних, так і стимульованих взаємодією з зовнішніми частинками. Як і для атомної фізики, теоретичним апаратом ядерної фізики також є квантова механіка.

Структура ядра. Ядра атомів складаються з двох видів частинок – **протонів** (p) та **нейтронів** (n), які називають **нуклонами**. Маса протона $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг = 1836,153 m_e , а маса нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг = 1838,684 m_e , де $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – маса спокою електрона (e^-). В **енергетичних одиницях** (добуток маси спокою частинки на квадрат швидкості світла) маси протона та нейтрона дорівнюють $m_p = 938,272$ MeV та $m_n = 939,565$ MeV, відповідно. Нарешті, в **атомних одиницях маси** (1 а.о.м. = $1,660539 \cdot 10^{-27}$ кг = 931,50 MeV) маси протона та нейтрона дорівнюють $m_p = 1,007825$ а.о.м. та $m_n = 1,008665$ а.о.м., відповідно. Вільний протон є стабільною частинкою (час життя не менш ніж $2,9 \cdot 10^{29}$ років) з додатнім зарядом $+e$ і спіном $s = 1/2$. Вільний нейтрон є нейтральною частинкою зі спіном $s = 1/2$. Нейтрон- нестабільна частинка. Період напіврозпаду нейтрона складає приблизно 12 хвилин. Розпадається нейтрон з утворенням протона, електрона та антинейтрино ($\bar{\nu}$):

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}. \quad (3.1)$$

Зарядове число Z визначає кількість протонів у ядрі та його повний заряд, який дорівнює $+Ze$. Z також визначає порядковий номер хімічного елемента з даним ядром в періодичній таблиці елементів Менделєєва. Z називають також **атомним номером** ядра. **Масове число** A визначає кількість нуклонів (сумарне число протонів і нейтронів) у ядрі. Кількість нейтронів у ядрі $N = A - Z$.

Прийняте наступне позначення ядер атомів A_ZX , де через X позначено хімічний символ елемента з даним ядром.

Ядра з однаковими Z та різними A називають **ізотопами**. Наприклад, кисень має три стабільних ізотопи ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{17}_8\text{O}$ та ${}^{18}_8\text{O}$. Ядра з однаковим масовим числом A називають **ізобарами** (наприклад ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ та ${}^{40}_{20}\text{Ca}$). Ядра з однаковим числом нейтронів називають **ізотонами** (наприклад ${}^{13}_6\text{C}$ та ${}^{14}_7\text{N}$). Ядра з однаковими Z та A , але різними періодами напіврозпаду, називають **ізомерами** (наприклад ${}^{80}_{35}\text{Br}$ має два ізомери з періодами напіврозпаду 18 хвилин та 4,4 години).

Більшість ядер можна вважати сферичними з радіусом

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (3.2)$$

де $R_0 = 1,23$ фм ($1 \text{ фм} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ – несистемна одиниця довжини в ядерній фізиці). Це означає, що об'єм сферичного ядра зростає пропорційно до A . Маса ядра також зростає пропорційно до A . Отже густина всіх ядер приблизно однакова.

Енергія зв'язку ядра. Енергія зв'язку визначається як різниця суми енергій спокою невзаємодіючих нуклонів, що входять до складу ядра, та енергії спокою ядра:

$$E_{\text{зв}}(A, Z) = c^2 \left\{ \left[Zm_p + (A - Z)m_n \right] - m_{\text{я}}(A, Z) \right\}. \quad (3.3)$$

Інколи зручніше оперувати не масами протонів m_p і ядер атомів $m_{\text{я}}(A, Z)$, а масою m_H ізотопу гідрогену ${}^1_1\text{H}$ та масою $m_a(A, Z)$, атома з ядром A_ZX , значення яких представлено в періодичній системі елементів. В цьому випадку нехтуючи енергією зв'язку електронів з ядром порівняно з енергією зв'язку нуклонів у ядрі можна записати

$$E_{\text{зв}}(A, Z) = c^2 \left\{ \left[Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n \right] - \right. \\ \left. - (m_{\text{я}}(A, Z) + Zm_e) \right\} = c^2 \left\{ \left[Zm_H + (A - Z)m_n \right] - m_a(A, Z) \right\}. \quad (3.4)$$

Величину

$$\Delta = \left[Zm_p + (A - Z)m_n \right] - m_{\text{я}}(A, Z). \quad (3.5)$$

називають **дефектом маси ядра**.

В **крапельній моделі ядра** енергія зв'язку атомних ядер описується формулою Вайцзеккера

$$E_{\text{зв}}(A, Z) = a_1 \cdot A - a_2 \cdot A^{2/3} - a_3 \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \\ - a_4 \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + a_5 \cdot \frac{1}{A^{3/4}}. \quad (3.6)$$

де $a_1 = 15,78$ MeB, $a_2 = 17,8$ MeB, $a_3 = 0,71$ MeB, $a_4 = 23,7$ MeB. Значення коефіцієнту a_5 залежить від складу ядра. Так $a_5 = 0$ для ядер з непарним A , $a_5 = -34$ MeB для ядер з непарними A і Z та $a_5 = 34$ MeB для ядер з парними A і Z .

Радіоактивний розпад. Існують стабільні та нестабільні атомні ядра. Нестабільні ядра зазнають спонтанного розпаду з вивільненням однієї або декількох частинок. Явище спонтанного розпаду нестабільних ядер називають **радіоактивністю**. Вихідне ядро називають **материнським**, а утворювані в результаті розпаду – **дочірніми**.

Радіоактивний розпад відбувається за умови вивільнення енергії. Тому маса материнського ядра перевищує суму мас продуктів розпаду.

Природня радіоактивність відбувається з ядрами, які існують в природніх умовах. Радіоактивність за участю ядер, отриманих в лабораторії, називають **штучною**. Принципової різниці між двома типами радіоактивності не існує.

Радіоактивний розпад ядра- спонтанний процес. Якщо через dN позначити приріст числа ядер N , які не розпались, тоді кількість ядер, які розпадаються за дуже малий проміжок часу dt , виражається як $-dN$. Вона буде пропорційною кількості N існуючих ядер та проміжку часу dt :

$$-dN = \lambda N dt, \quad (3.7)$$

де λ – характерна для кожної радіоактивної речовини стала, яку називають **сталю розпаду**.

Після інтегрування отримаємо основний закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (3.8)$$

де N_0 – кількість ядер в момент $t = 0$, а N – кількість ядер, які ще не зазнали розпаду в момент $t > 0$.

Активність розпаду I – це кількість ядер, що розпадаються за одиницю часу, або швидкість розпаду ядер. З урахуванням (3.7) для активності розпаду отримаємо

$$I = (-dN/dt) = \lambda N \quad (3.9)$$

Одиницями вимірювання активності є *бекерель* (1 Бк = 1 розпад/с) або *кюри* (1 Ки = $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк).

Питома активність – це активність одиниці маси радіоактивної речовини.

Період напіврозпаду $T_{1/2}$ – час, протягом якого розпадається половина від початкової кількості ядер:

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}. \quad (3.10)$$

Логарифмуючи вираз (3.10) можна отримати зв'язок періоду напіврозпаду зі сталою розпаду

$$T_{1/2} = \ln 2/\lambda = 0,693/\lambda. \quad (3.11)$$

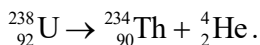
Види радіоактивного розпаду. До процесів радіоактивного розпаду відносять: 1) α -розпад, 2) β -розпад, 3) γ -випромінювання

ядер, 4) спонтанний поділ важких ядер, 5) протонна радіоактивність.

α -розпад. Радіоактивний розпад, який супроводжується радіоактивним випромінюванням α -променів, що представляють собою потік ядер гелію ${}^4_2\text{He}$. Схема розпаду:



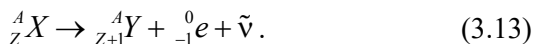
де через X позначено хімічний символ материнського ядра, а через Y - хімічний символ дочірнього ядра. α -розпад зазвичай супроводжується випромінюванням дочірнім ядром γ -променів. Прикладом α -розпаду є наступна реакція:



Енергія спокою материнського ядра перевищує суму енергій спокою дочірнього ядра та α -частинки. Надлишок виділяється у вигляді кінетичної енергії, яка розподіляється між дочірнім ядром та α -частинкою в співвідношенні, обернено пропорційному їх масам. Материнське радіоактивне ядро випромінює декілька груп α -частинок внаслідок того, що дочірнє ядро виникає не тільки в основному, а і в декількох збуджених станах. Якщо дочірнє ядро народжується в одному із збуджених станів, то при переході в основний стан надлишок енергії виділяється шляхом випромінювання γ -квантів, протона, нейтрона, електрона або α -частинки. Енергія збудженого дочірнього ядра може бути передана одному з електронів K -, L - або M - оболонки атома (явище *внутрішньої конверсії*).

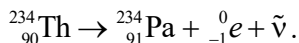
β -розпад. Існує три різновиди β -розпаду:

1. **Електронний** або β^- - розпад супроводжується випромінюванням материнським ядром електрона ${}^0_{-1}e$ та антинейтрино $\tilde{\nu}$



Якщо дочірнє ядро народжується в одному із збуджених станів, його перехід в основний стан супроводжується випромінюванням γ -квантів.

Прикладом електронного β^- - розпаду може слугувати наступна реакція розпаду:

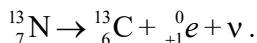


Енергія електронів, випромінюваних при β^- - розпаді, припадає на деякий інтервал $(0, E_{\max})$, де E_{\max} – різниця енергій спокою материнського ядра та суми енергій спокою електрона і дочірнього ядра. Частина енергії припадає на антинейтрино.

2. Позитронний або β^+ - розпад супроводжується випромінюванням материнським ядром позитрона ${}_{+1}^0e$ та нейтрино ν

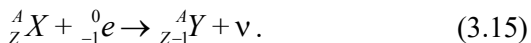


Прикладом позитронного β^+ - розпаду може слугувати наступна реакція розпаду:



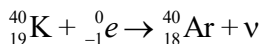
Якщо дочірнє ядро народжується в одному із збуджених станів, його перехід в основний стан супроводжується випромінюванням γ -квантів

3. Електронне захоплення або ***K*-захоплення** полягає в захопленні ядром одного електрона *K*-оболонки (рідше електрона *L*- або *M*-оболонки) свого атома і супроводжується перетворенням одного з протонів ядра в нейтрон і випромінюванням ядром нейтрино ν

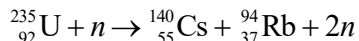


При утворенні дочірнього ядра в збудженому стані відбувається його перехід в більш низькі енергетичні стани з

випромінюванням γ -квантів. Вакансія захопленого електрона у відповідній оболонці атома заповнюється електронами з більш віддалених оболонок, що супроводжується *характеристичним рентгенівським випромінюванням*. Прикладом електронного захоплення є наступна реакція



Спонтанний поділ важких ядер вперше спостерігався в 1940 році на прикладі поділу ядер урана на дві приблизно однакові частини. Пізніше було виявлено, що явище спонтанного поділу відбувається за участю і багатьох інших важких ядер. Якщо ж використовується зовнішнє збудження ядер нейтронами, протонами, дейтронами, α -частинками та γ -квантами, тоді такі реакції прийнято називати **вимушеним поділом важких ядер**. Прикладом може слугувати стимульована тепловими нейтронами реакція вимушеного поділу ядер урана



За характерними ознаками спонтанний поділ близький до вимушеного поділу. Реакції вимушеного поділу покладені в основу роботи **ядерного реактора**.

Протонна радіоактивність – це процес перетворення ядра, при якому ядро випромінює один або два протони. Цей вид радіоактивності вперше спостерігався дослідниками в 1963 році.

Ядерною реакцією називають процес сильної взаємодії елементарної частинки або атомного ядра з ядром-мішенню, результатом якого є перетворення ядра (або ядер). Ядерні реакції відбуваються при зближенні реагуючих частинок на відстані, які дорівнюють за порядком величини радіусу дії ядерних сил і складають $\sim 10^{-13}$ см.

Рівняння ядерної реакції записують або у повному вигляді



або в скороченому вигляді

$$X(a, b)Y, \quad (3.17)$$

де символом a позначено легку частинку, взаємодія якої з ядром X супроводжується утворенням нової легкої частинки b і нового ядра Y .

Легкими частинками a і b можуть бути нейтрон (n), протон (p), дейтрон (d), α -частинка (α) та γ -квант (γ).

Енергія реакції Q – це кількість енергії, яка виділяється під час ядерної реакції. Визначається через різницю енергій спокою вихідних та кінцевих ядер:

$$Q = c^2 (m_a + m_X - m_b - m_Y) \quad (3.18)$$

Якщо ця різниця додатна величина, тоді енергія виділяється і реакція називається **екзотермічною**. Якщо ж різниця мас спокою від'ємна, тоді енергія поглинається і реакцію називають **ендотермічною**.

Мінімальна кінетична енергія налітаючої частинки, при якій стає можливою ядерна реакція, називається **порогом реакції $T_{\text{пор}}$** .

Поріг реакції $X(a, b)Y$ можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned} T_{\text{пор}} &= \frac{(m_b + m_Y)^2 - (m_a + m_X)^2}{2m_X} c^2 = \\ &= \frac{(m_b + m_Y - m_a - m_X)(m_b + m_Y + m_a + m_X)}{2m_X} c^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Якщо відома енергія реакції Q , тоді поріг реакції розраховується за формулою

$$T_{\text{пор}} = |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_X} + \frac{|Q|}{2m_X c^2} \right). \quad (3.20)$$

В нерелятивістському наближенні ($|Q| \ll 2m_X c^2$) вираз для розрахунку порогу реакції спрощується

$$T_{\text{пор}} = |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_X} \right) \quad (3.21)$$

В ядерних реакціях завжди виконуються **закони збереження** числа нуклонів (що еквівалентно збереженню масового числа A) та електричного заряду.

Ядерні реакції, які викликаються не дуже швидкими частинками, відбуваються в два етапи з утворенням проміжного **компаунд-ядра Π**



У випадку, коли випущена ядром частинка тотожна захопленій, вищезазначений двоетапний процес називають **розсіюванням**. Якщо енергії частинок a і b співпадають, тоді розсіювання називають **пружним**, а інакше **непружним**. Лише коли частинки a і b нетотожні відбувається ядерна реакція.

Ядерні реакції, які викликаються швидкими нуклонами та дейтронами, відбуваються без утворення проміжного ядра і називаються **прямими ядерними взаємодіями**. **Реакцією зриву** називають захоплення ядром-мішенню одного з нуклонів налітаючого дейтрона при нецентральному зіткненні. **Реакцією підхоплення** називають захоплення налітаючим нуклоном одного з нуклонів ядра-мішені з утворенням дейтрона.

Імовірність ядерної взаємодії характеризують **ефективним перерізом реакції σ** . Зміст цього поняття полягає в тому, що коли налітаюча частинка потрапляє в межі кола з поперечним перерізом σ , центр якого співпадає з ядром, тоді вона достовірно викликає ядерну реакцію. За визначенням

$$\sigma = \frac{N_R}{N_I}, \quad (3.23)$$

де N_I – кількість налітаючих частинок, які потрапляють за одиницю часу на одиничну поверхню мішені перпендикулярно до неї (**інтенсивність падаючого потоку**), а N_R – число ядерних

реакцій, які відбуваються за одиницю часу в розрахунку на одне ядро мішені.

За рахунок ядерних реакцій за участі ядер атомів мішені інтенсивність падаючого потоку частинок зменшується зі зростанням глибини проникнення в мішень за законом

$$N_I(x) = N_{I0} \exp(-\sigma n_x x), \quad (3.24)$$

де N_{I0} – інтенсивність падаючого потоку, $N_I(x)$ – інтенсивність потоку на глибині x , відрахованій від опромінюваної поверхні мішені, n_x – концентрація атомів мішені. Ефективні перерізи ядерних реакцій виражають в спеціальних одиницях *барн*: $1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2$.

3.2. Приклади розв'язку задач

При розв'язку задач слід використовувати актуальні значення атомних мас ядер хімічних елементів, які можна знайти за посиланням

<https://www.nist.gov/pml/atomic-weights-and-isotopic-compositions-relative-atomic-masses>

Задача Я.1. Розрахувати енергію зв'язку нуклонів в ядрі ${}^4_2\text{He}$.

Розв'язок:

До складу ядра входять два протона ($Z = 2$) та два нейтрона ($A - Z = 2$). Маса ядра ${}^4_2\text{He}$ дорівнює $m_{\text{я}}(4,2) = 4,002603$ а.о.м. або 3728,425 МеВ. Враховуючи масу протона $m_p = 938,272$ МеВ та нейтрона $m_n = 939,565$ МеВ для енергії зв'язку отримаємо

$$\begin{aligned} E_{\text{зв}}(4,2) &= c^2 \left\{ \left[2m_p + (4-2)m_n \right] - m_{\text{я}}(4,2) \right\} = \\ &= (2 \cdot 938,272 + 2 \cdot 939,565) - 3728,425 = 27.249 \text{ МеВ}. \end{aligned}$$

В розрахунку на один нуклон енергія зв'язку ядра гелію ${}^4_2\text{He}$ дорівнює 6,812 МеВ. Для порівняння, енергія зв'язку валентних електронів в атомах дорівнює приблизно 10 еВ.

Задача Я.2. Розрахувати енергію зв'язку нейтрона в ядрі ${}^4_2\text{He}$.

Розв'язок:

Енергію зв'язку нейтрона дорівнює сумі енергій спокою ядра ${}^3_2\text{He}$ ($m_{\text{я}}(3,2) = 3,016030$ а.о.м.) і нейтрона n ($m_n = 1,008665$ а.о.м.) мінус енергія спокою ядра ${}^4_2\text{He}$ ($m_{\text{я}}(4,2) = 4,002603$ а.о.м.)

$$\begin{aligned} E_{\text{звн}}(4,2) &= c^2 \left\{ m_{\text{я}}(3,2) + m_n - m_{\text{я}}(4,2) \right\} = \\ &= (3,016030 + 1,008665 - 4,002603) \cdot 931,50 \text{ МеВ} = 20,579 \text{ МеВ}. \end{aligned}$$

Задача Я.3. Оцінити розмір атомного ядра ${}^{238}_{92}\text{U}$.

Розв'язок:

Скористаємось емпіричною залежністю радіуса ядра від числа нуклонів (3.2) і отримаємо

$$R = R_0 A^{1/3} = 1,23 \cdot \sqrt[3]{238} = 7,6 \text{ фм} = 7,6 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Задача Я.4. Оцінити густину ядерної матерії в ядрі ${}^4_2\text{He}$.

Розв'язок:

Маса ядра ${}^4_2\text{He}$ дорівнює 4,002603 а.о.м. або $4,002603 \cdot 1,660539 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 6,646 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Вважаючи ядро сферичним для об'єму ядра отримуємо

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_0^3 \cdot A = 31,163 \text{ фм}^3 = 31,163 \cdot 10^{-45} \text{ м}^3.$$

Остаточно для густини ядерної матерії отримаємо

$$\rho = \frac{6,646 \cdot 10^{-27} \text{ кг}}{31,163 \cdot 10^{-45} \text{ м}^3} = 2,133 \cdot 10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Задача Я.5. Скориставшись формулою Вайцзеккера розрахувати енергію відділення нейтрона з ядра ${}^{38}_{20}\text{Ca}$.

Розв'язок:

Енергія відділення нейтрона з ядра із зарядовим Z та масовим A числами

$$E_{\text{звн}}(A, Z) = (m_n + m_{\text{я}}(A-1, Z) - m_{\text{я}}(A, Z)) \cdot c^2. \quad (1)$$

Енергію спокою ядра з зарядовим Z та масовим A числами можна представити як

$$m_{\text{я}}(A, Z) \cdot c^2 = (Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n) \cdot c^2 - E_{\text{зв}}(A, Z). \quad (2)$$

Після підстановки для енергії відділення нейтрона отримаємо

$$\begin{aligned}
 E_{\text{зеп}}(A, Z) &= (m_n + Z \cdot m_p + (A - Z - 1) \cdot m_n) \cdot c^2 - \\
 E_{\text{зє}}(A - 1, Z) &- (Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n) \cdot c^2 + E_{\text{зє}}(A, Z) = \quad (3) \\
 &= E_{\text{зє}}(A, Z) - E_{\text{зє}}(A - 1, Z).
 \end{aligned}$$

Скориставшись формулою Вайцзеккера розрахуємо енергію зв'язку ядра $^{38}_{20}\text{Ca}$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{зє}}(38, 20) &= 15,78 \cdot 38 - 17,8 \cdot 38^{2/3} - 0,71 \cdot \frac{20(20-1)}{38^{1/3}} - \\
 &- 23,7 \cdot \frac{(38/2 - 20)^2}{38} + 34 \cdot \frac{1}{38^{3/4}} = 319,8 \text{ MeB.}
 \end{aligned}$$

та енергію зв'язку ядра $^{37}_{20}\text{Ca}$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{зє}}(37, 20) &= 15,78 \cdot 37 - 17,8 \cdot 37^{2/3} - 0,71 \cdot \frac{20(20-1)}{37^{1/3}} - \\
 &- 23,7 \cdot \frac{(37/2 - 20)^2}{37} + 0 \cdot \frac{1}{37^{3/4}} = 303,8 \text{ MeB.}
 \end{aligned}$$

Остаточно для енергії відділення нейтрона від ядра $^{38}_{20}\text{Ca}$ отримаємо

$$E_{\text{зеп}}(38, 20) = E_{\text{зє}}(38, 20) - E_{\text{зє}}(37, 20) = 16 \text{ MeB.}$$

Задача Я.6. У скільки разів число розпадів ядер радіоактивного йоду ^{131}I протягом першої доби більше за число розпадів протягом другої доби? Період напіврозпаду ізотопу ^{131}I дорівнює $T_{1/2} = 193$ години.

Розв'язок:

З урахуванням основного закону радіоактивного розпаду отримаємо, що наприкінці першої доби кількість нерозкладених ядер ^{131}I буде дорівнювати

$$N_1 = N_0 \exp(-24\lambda), \quad (1)$$

а наприкінці другої доби

$$N_2 = N_1 \exp(-24\lambda) = N_0 \exp(-24\lambda) \exp(-24\lambda). \quad (2)$$

Вирази (1) та (2) записано з врахуванням того, що період напіврозпаду в умові задачі задано в годинах, а в одній добі – 24 години. Таким чином, кількість розпадів ядер ^{131}I протягом першої доби буде дорівнювати

$$\Delta N_1 = N_0 - N_1 = N_0 (1 - \exp(-24\lambda)), \quad (3)$$

а протягом другої доби

$$\Delta N_2 = N_1 - N_2 = N_0 \exp(-24\lambda) (1 - \exp(-24\lambda)). \quad (4).$$

Враховуючи зв'язок періоду напіврозпаду $T_{1/2}$ зі сталою розпаду λ , отримаємо

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \exp(24\lambda) = \exp(24 \ln 2 / T_{1/2}) = 1,09.$$

Задача Я.7. *Що більше – середній час життя τ радіоактивного ядра чи період напіврозпаду $T_{1/2}$? У скільки разів?*

Розв'язок:

Кількість ядер $dN(t)$, які розпадаються за проміжок часу від t до $t + dt$, визначається виразом

$$dN = \lambda N dt. \quad (1)$$

Вважаючи проміжок часу dt дуже малим ($dt \ll t$), можна з високою точністю вважати, що $dN(t)$ – це кількість ядер, час життя кожного з яких дорівнює t . Тоді $t dN(t)$ – це сума часів життя ядер, кількість яких дорівнює $dN(t)$. Щоб знайти повну суму часів життя всіх N_0 ядер, які існували до початку розпаду, потрібно підсумувати всі $t dN(t)$ для всіх можливих значень часів життя від $t = 0$ до $t = \infty$. Ця сума виражається у вигляді інтегралу

$\int_0^{\infty} t dN$. Поділивши повну суму часів життя ядер на повну кількість

N_0 всіх ядер отримаємо згідно з визначенням середній час життя τ радіоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N(t) dt. \quad (2)$$

Підставимо у вираз для середнього часу життя значення $N(t)$, яке визначається виразом (3.8), і отримаємо після інтегрування

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (3)$$

З основного закону радіоактивного розпаду (3.8) випливає, що τ – це проміжок часу, протягом якого початкова концентрація ядер зменшується в $e = 2,71828$ разів. З виразу (3.11) випливає, що період напіврозпаду $T_{1/2}$ та середній час життя τ пов'язані співвідношенням

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693 \tau. \quad (4)$$

Отже середній час життя τ радіоактивного ядра буде більшим за період напіврозпаду $T_{1/2}$ в $1/\ln 2 \approx 1,443$ рази.

Задача Я.8. Чому дорівнює імовірність P того, що радіоактивний атом розпадеться за час t , який дорівнює середньому часу життя τ атома?

Розв'язок:

Згідно із законом радіоактивного розпаду кількість радіоактивних атомів, які не зазнали розпаду за час $t = \tau$, буде дорівнювати $N = N_0 / e$, де N_0 – початкова кількість атомів, $e = 2,71828$. Отже кількість атомів, що зазнала розпаду за час $t = \tau$, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 / e = N_0 (1 - 1/e). \quad (1)$$

Тоді імовірність P розпаду за час $t = \tau$ знайдемо як

$$P = \Delta N / N_0 = (1 - 1/e) = 0,632 \text{ або } 63,2\%.$$

Задача Я.9. Активність та період напіврозпаду препарату ^{32}P дорівнюють відповідно $I = 2 \text{ мкКи}$ та $T_{1/2} = 14,5 \text{ діб}$. Яка маса даного препарату?

Розв'язок:

Активність препарату, що містить N ядер

$$I = \lambda N. \quad (1)$$

Стала розпаду λ та період напіврозпаду $T_{1/2}$ пов'язані співвідношенням

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda. \quad (2)$$

Кількість ядер у зразку масою m можна виразити через масове число A

$$N = \frac{mN_a}{A}, \quad (3)$$

де N_a – стала Авогадро.

Отже для активності розпаду препарату отримаємо

$$I = \frac{mN_a \ln 2}{AT_{1/2}}. \quad (4)$$

Виразимо масу m і підставивши відомі величини отримаємо

$$m = \frac{AT_{1/2} I}{N_a \ln 2} =$$

$$\frac{0,032 \text{ кг/моль} \times 14,5 \times 86400 \text{ с} \times 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ки} \times 3,7 \cdot 10^{10} \text{ розп/с} \cdot \text{Ки}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \times 0,693}$$

$$\approx 7,1 \cdot 10^{-12} \text{ кг}.$$

Задача Я.10. *Радіоактивний натрій $^{24}_{11}\text{Na}$ розпадається, випромінюючи β -частинки. Період напіврозпаду натрію складає $T_{1/2} = 14,8$ год. Визначити кількість атомів ΔN , що розпалися за 10 годин в 10^{-6} кг радіоактивного препарату.*

Розв'язок:

Число атомів, що розпалися за час t дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N, \quad (1)$$

де N_0 – початкова кількість атомів; N – кількість атомів на момент t . Вищенаведену формулу можна привести до вигляду

$$\Delta N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}), \quad (2)$$

де λ – стала розпаду.

Враховуючи, що $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$, отримаємо

$$\Delta N = N_0 (1 - e^{-\ln 2 t / T_{1/2}}) = N_0 (1 - (e^{\ln 2})^{-t / T_{1/2}}) = N_0 (1 - 2^{-t / T_{1/2}}) \quad (3)$$

Оскільки в одному молі $^{24}_{11}\text{Na}$ міститься N_a атомів, то в даній масі препарату міститься $N_0 = m N_a / M$ атомів (m – маса радіоактивного препарату; M – молярна маса натрію $^{24}_{11}\text{Na}$).

Остаточно одержимо

$$\Delta N = \frac{m}{M} N_a (1 - 2^{-t / T_{1/2}}). \quad (4)$$

$$\Delta N = \frac{10^{-6}}{24 \cdot 10^{-3}} 6,02 \cdot 10^{23} (1 - 2^{-3,6 \cdot 10^4 / 5,33 \cdot 10^4}) \approx 9,3 \cdot 10^{18} \text{ (атомів)}.$$

Задача Я.11. *Активність I ізотопу вуглецю $^{14}_6\text{C}$ в старовинних дерев'яних предметах складає $4/5$ активності цього ізотопу у свіжозрубаних деревах. Період піврозпаду ізотопу $^{14}_6\text{C}$ становить $T_{1/2} = 5570$ років. Визначити вік старовинних предметів.*

Розв'язок:

За законом радіоактивного розпаду

$$N = N_0 \exp(-\lambda t), \quad (1)$$

тоді активність речовини дорівнює

$$I = -dN / dt = \lambda N_0 \exp(-\lambda t), \quad (2)$$

де N_0 – початкова кількість атомів радіоактивної речовини; N – число радіоактивних атомів на момент часу t ; λ – стала розпаду.

У початковий момент часу активність

$$I_0 = \lambda N_0, \quad (3)$$

тому

$$I = I_0 \exp(-\lambda t), \quad (4)$$

де $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$, а $T_{1/2}$ – період піврозпаду. Тоді

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\lambda t), \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\lambda t = -\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}, \quad (5)$$

де t – вік старовинних предметів. Остаточно отримаємо

$$t = \frac{-T_{1/2} \ln \left(\frac{I}{I_0} \right)}{\ln 2} = \frac{-5570 \text{ років} \cdot \ln(4/5)}{\ln 2} = \frac{-5570 \text{ років} \cdot (-0,225)}{0,693} \approx 1800 \text{ років}.$$

Задача Я.12. Ідентифікувати частинку X та розрахувати енергію реакції Q для ядерної реакції $^{35}_{17}\text{Cl} + X \rightarrow ^{32}_{16}\text{S} + \alpha$, де α – це ядро ^4_2He .

Розв'язок:

Масові числа $A = 35$ та $A = 32$ належать ізотопам $^{35}_{17}\text{Cl}$ та $^{32}_{16}\text{S}$, відповідно. Скористаємося законами збереження числа нуклонів

та електричного заряду. Позначивши для невідомої частинки Z – зарядове число, A – масове число можна записати

$$35 + A = 32 + 4, \quad (1)$$

$$17 + Z = 16 + 2. \quad (2)$$

Отже для невідомої частинки $A = 1$ і $Z = 1$. Значить невідомою частинкою є протон p .

Розрахуємо енергію реакції ${}^{35}_{17}\text{Cl} + p \rightarrow {}^{32}_{16}\text{S} + \alpha$.

Маса ядра ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ $m_{\alpha}(35,17) = 34,968853$ а.о.м., маса ядра ${}^{32}_{16}\text{S}$ $m_{\alpha}(32,16) = 31,972072$ а.о.м., маса протона $m_p = 1,007825$ а.о.м., маса α -частинки $m_{\alpha}(4,2) = 4,002603$ а.о.м.

Початкова маса взаємодіючих частинок

$$m_i = 34,968853 \text{ а.о.м.} + 1,007825 \text{ а.о.м.} = 35,976678 \text{ а.о.м.}$$

Кінцева маса продуктів реакції

$$m_f = 31,972072 \text{ а.о.м.} + 4,002603 \text{ а.о.м.} = 35,974675 \text{ а.о.м.}$$

Різниця мас

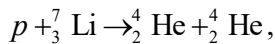
$$\Delta m = m_f - m_i = 35,976678 - 35,974675 = 0,002003 \text{ (а.о.м.)}$$

Енергія реакції

$$Q = \Delta m c^2 = 0,002003 \text{ а.о.м.} \times 931,5 \text{ MeV/а.о.м.} = 1,866 \text{ MeV} > 0,$$

а отже реакція екзотермічна.

Задача Я.13. Знайти енергію ядерної реакції



вперше проведеної Кокрофтом і Уолтоном за участю штучно прискорених частинок. Якою буде дана реакція - екзотермічною, чи ендотермічною?

Розв'язок:

Маса протона $m_p = 1,007825$ а.о.м., маса ядра ${}^7_3\text{Li}$ $m_{\alpha}(7,3) = 7,016004$ а.о.м., маса ядра ${}^4_2\text{He}$

$m_\alpha(4,2) = 4,002603$ а.о.м. Початкова маса взаємодіючих частинок

$$m_i = 1,007825 \text{ а.о.м.} + 7,016004 \text{ а.о.м.} = 8,023829 \text{ а.о.м.}$$

Кінцева маса продуктів реакції

$$m_f = 2 \times 4,002603 \text{ а.о.м.} = 8,005206 \text{ а.о.м.}$$

Різниця мас

$$\Delta m = m_f - m_i = 8,023829 \text{ а.о.м.} - 8,005206 \text{ а.о.м.} = 0,018623 \text{ а.о.м.}$$

Енергія реакції

$$Q = \Delta m c^2 = 0,018623 \text{ а.о.м.} \times 931,5 \text{ Мев/а.о.м.} = 17,35 \text{ Мев.}$$

Оскільки $Q > 0$, то дана реакція екзотермічна.

Задача Я.14. Чи можливі такі ядерні реакції

1. $\alpha + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^{10}\text{B} + n$;

2. $\alpha + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{14}\text{N} + d$

за участю α -частинок з кінетичною енергією $T = 10 \text{ Мев}$?

Розв'язок:

Масові числа $A = 7, 10, 12$ та 14 належать ізотопам ${}^7_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{12}_6\text{C}$ та ${}^{14}_7\text{N}$, відповідно. Маса α -частинки $m_\alpha(4,2) = 4,002603$ а.о.м., маса нейтрона $m_n = 1,008665$ а.о.м., маса дейтрона $m_d = 2,014102$ а.о.м., маса ядра ${}^7_3\text{Li}$ $m_{\text{Li}}(7,3) = 7,016004$ а.о.м., маса ядра ${}^{10}_5\text{B}$ $m_{\text{B}}(10,5) = 10,012939$ а.о.м., маса ядра ${}^{12}_6\text{C}$ $m_{\text{C}}(12,6) = 12,000000$ а.о.м., маса ядра ${}^{14}_7\text{N}$ $m_{\text{N}}(14,7) = 14,003074$ а.о.м.

Розрахуємо енергії реакцій.

1. Початкова маса взаємодіючих частинок

$$m_i = 4,002603 \text{ а.о.м.} + 7,016004 \text{ а.о.м.} = 11,018607 \text{ а.о.м.}$$

Кінцева маса продуктів реакції

$$m_f = 10,012939 \text{ а.о.м.} + 1,008665 \text{ а.о.м.} = 11,021604 \text{ а.о.м.}$$

Різниця мас

$$\Delta m = m_f - m_i = 11,018607 - 11,021604 = -0,002997 \text{ (а.о.м.)}$$

Енергія реакції

$$Q = \Delta mc^2 = -0,002997 \text{ а.о.м.} \times 931,5 \text{ МеВ/а.о.м.} = -2,792 \text{ МеВ.}$$

$2 m_{Li} c^2 \approx 13070 \text{ МеВ}$ і $|Q| \ll 2 m_{Li} c^2$, а отже порогова енергія реакції

$$T_{пор} = |Q| \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Li}} \right) = 2,792 \left(1 + \frac{4,002603}{7,016004} \right) = 4,385 \text{ МеВ}$$

Реакція можлива, оскільки $T = 10 \text{ МеВ} > T_{пор}$.

2.

$$m_i = 4,002603 \text{ а.о.м.} + 12,000000 \text{ а.о.м.} = 16,002603 \text{ а.о.м.}$$

$$m_f = 14,003074 \text{ а.о.м.} + 2,014102 \text{ а.о.м.} = 16,017176 \text{ а.о.м.}$$

$$\Delta m = m_f - m_i = -0,014573 \text{ а.о.м.}$$

$$Q = \Delta m c^2 = -0,014573 \text{ а.о.м.} \times 931,5 \text{ МеВ/а.о.м.} = -13,575 \text{ МеВ}$$

$2 m_C c^2 = 22356 \text{ МеВ}$ і $|Q| \ll 2 m_C c^2$, а отже порогова енергія реакції

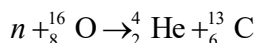
$$T_{пор} = |Q| \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_C} \right) = 13,575 \left(1 + \frac{4,002603}{12,000000} \right) = 18,103 \text{ МеВ.}$$

Оскільки $T < T_{пор}$, то реакція неможлива.

Задача Я.15. Яку мінімальну кінетичну енергію повинен мати нейтрон щоб відбулась ядерна реакція $^{16}_8\text{O}(n, \alpha)^{13}_6\text{C}$?

Розв'язок:

Ядерна реакція може бути записана в розгорнутому вигляді як



Маса нейтрона $m_n = 1,008665$ а.о.м., маса ядра $^{16}_8\text{O}$
 $m_{\text{O}}(16,8) = 15,994915$ а.о.м., маса ядра ^4_2He
 $m_{\text{He}}(4,2) = 4,002603$ а.о.м., маса ядра $^{13}_6\text{C}$
 $m_{\text{C}}(13,6) = 13,003354$ а.о.м.

Початкова маса взаємодіючих частинок

$$m_i = 1,008665 \text{ а.о.м.} + 15,994915 \text{ а.о.м.} = 17,00358 \text{ а.о.м.}$$

Кінцева маса продуктів реакції

$$m_f = 4,002603 \text{ а.о.м.} + 13,003354 \text{ а.о.м.} = 17,005957 \text{ а.о.м.}$$

Різниця мас

$$\Delta m = m_f - m_i = 17,00358 \text{ а.о.м.} - 17,005957 \text{ а.о.м.} = -0,002377 \text{ а.о.м.}$$

Енергія реакції

$$Q = \Delta m c^2 = -0,002377 \text{ а.о.м.} \times 931,5 \text{ Мев/а.о.м.} = -2,214 \text{ Мев.}$$

Отримане значення від'ємне, а отже реакція ендотермічна.

Мінімальна кінетична енергія нейтрона, при якій можлива дана ядерна реакція, дорівнює порогу реакції. Оскільки $|Q| \ll 2 m_{\text{O}} c^2$, тоді

$$T_{\text{мін}} = T_{\text{пор}} = |Q| \left(1 + \frac{m_n}{m_{\text{O}}} \right) = 2,214 \left(1 + \frac{1,008665}{15,994915} \right) = 2,354 \text{ Мев.}$$

3.3. Задачі для самостійного розв'язку

3.1. Визначити енергію зв'язку $E_{зв}(A, Z) / A$, що припадає на один нуклон, для ядра:

а) ${}^{11}_5\text{B}$, б) ${}^{20}_{10}\text{Ne}$, в) ${}^{28}_{14}\text{Si}$, г) ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, д) ${}^{68}_{30}\text{Zn}$, є) ${}^{137}_{56}\text{Ba}$, ж) ${}^{207}_{82}\text{Pb}$, з) ${}^{235}_{92}\text{U}$.

Використовуючи отримані дані, побудувати графічну залежність $E_{зв}(A, Z) / A$ від масового числа A .

3.2. Розрахувати енергію зв'язку нейтрона в ядрі

а) ${}^7_3\text{Li}$; б) ${}^{14}_6\text{C}$; в) ${}^{15}_7\text{N}$.

3.3. Скориставшись формулою Вайцзеккера розрахувати енергію відділення нейтрона з ядра ${}^{48}_{20}\text{Ca}$.

3.4. Сонце має масу $2 \cdot 10^{30}$ кг яка розподілена із середньою густиною $1,4 \cdot 10^3$ кг/м³. Яким був би діаметр Сонця, якби воно мало ту саму масу, але густину, рівну густині ядерної матерії?

3.5. Яка частина β атомів радіоактивної речовини залишиться не зазнавши розпаду за проміжок часу t , що дорівнює двом середнім часам життя τ атома?

3.6. Яка частина β атомів радіоактивної речовини розпадеться за час t , що дорівнює п'яти періодам напіврозпаду $T_{1/2}$?

3.7. Чому дорівнює імовірність P того, що радіоактивний атом розпадеться за час t , який дорівнює періоду напіврозпаду $T_{1/2}$ атома?

3.8. Визначити енергію W , яка виділяється 1 мг препарату ${}^{210}\text{Po}$ за час, що дорівнює середньому часу життя, якщо в одному акті розпаду виділяється енергія 5,4 МеВ.

3.9. Скільки ядер урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ розпалися на протязі року, якщо початкова маса урану 1 г? Період напіврозпаду урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ $4,51 \cdot 10^9$ років.

3.10. Період напіврозпаду радіоактивного фосфору $^{30}_{15}\text{P}$ дорівнює $T_{1/2} = 30$ хвилин. Чому дорівнює постійна розпаду цього елемента?

3.11. Визначити період піврозпаду радону, якщо за 1 добу з 1 млн. атомів розпадається 175 000 атомів.

3.12. Для діагностики у кров людини ввели незначну кількість розчину, що містить ^{24}Na з активністю $I = 2,0 \cdot 10$ Бк. Активність 1 см^3 крові через $t = 5$ год становила $I' = 0,267$ Бк/см 3 . Період напіврозпаду даного радіоізоотопу становить $T_{1/2} = 15$ год. Знайти об'єм крові людини.

3.13. Питома активність препарату, що містить радіоактивний ^{58}Co і неактивний ^{59}Co , становить $2,2 \cdot 10^{12}$ Бк/г. Період напіврозпаду ^{58}Co становить 71,3 доби. Знайти відношення маси активного кобальту в цьому препараті до маси препарату.

3.14. Радіоізоотоп ^{32}P , період напіврозпаду якого $T_{1/2} = 14,3$ доби, утворюється в ядерному реакторі зі швидкістю $q = 2,7 \cdot 10^9$ ядер/с. Через який час t після початку утворення цього радіоізоотопу його активність становитиме $I = 1,0 \cdot 10^9$ Бк?

3.15. В 1 мл морської води міститься 10^{-15} г радону $^{222}_{86}\text{Rn}$ (період напіврозпаду радону $T_{1/2} = 3,825$ діб). Яка кількість води має активність рівну $I = 10$ мКи?

3.16. В скільки разів зменшиться кількість ядер радіоактивного цезію (період напіврозпаду 27 років) за 10 років?

3.17. В джерелі мінеральної води активність радону (період напіврозпаду радону $T_{1/2} = 3,825$ діб) становить 1000 Бк на 1 л. Яка кількість атомів радону потрапляє в організм людини зі склянкою води об'ємом 0,2 л?

3.18. Через який проміжок часу після радіоактивного зараження місцевості стронцієм (період напіврозпаду $T_{1/2} = 28$ років) можна буде використовувати землі для вирощування різноманітних культур, якщо розрахунки показують, що кількість радіоактивного препарату повинна зменшитись в 100 разів?

3.19. В ампулі знаходиться радіоактивний йод $^{131}_{53}\text{I}$ (період напіврозпаду $T_{1/2} = 8,05$ діб) активністю 100 мкКі. Чому буде дорівнювати активність препарату через добу?

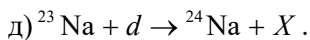
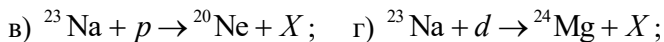
3.20. Внаслідок радіоактивного розпаду $^{238}_{92}\text{U}$ перетворюється в $^{206}_{82}\text{Pb}$. Скільки α - та β -розпадів має місце в цьому випадку?

3.21. Внаслідок захоплення нейтрона ядром атома азоту $^{14}_7\text{N}$ утворюється невідомий елемент і α -частинка. Написати реакцію і визначити утворений елемент.

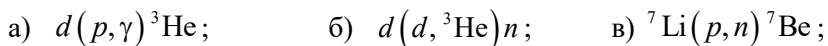
3.22. З'ясувати якою буде реакція $^6\text{Li}(d, \alpha)^4\text{He}$, ендотермічною чи екзотермічною?

3.23. Визначити пороги реакцій $^7\text{Li}(p, \alpha)^4\text{He}$ та $^7\text{Li}(p, \gamma)^8\text{Be}$.

3.24. Ідентифікувати частинку X та розрахувати енергію реакції Q для випадків:



3.25. Розрахувати енергії та пороги наступних реакцій:



Відповіді до задач

Оптика

1.1. Див.рис.1.12.

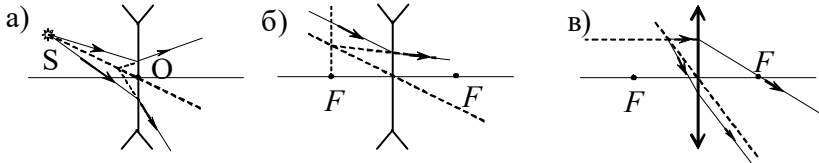


Рис.1.12

1.2. $k = -k_1 \cdot k_2$.

1.3. $a = S + b + \frac{F_2 [SF_1 + b(S + F_1)]}{SF_1 + (b - F_2)(S + F_1)}$.

1.4. $n = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2$.

1.5. $F = \frac{d(b-d)}{2b}$.

1.6. $n = \frac{1}{2}(DR + 2) = 1,5$.

1.7. $d = n l$.

1.8. $R = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

1.9. $\alpha_0 \approx 62,5$.

1.10. $l = d \sin \alpha \left(\frac{n \cos \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)$.

1.11. $\frac{E_2}{E_1} \approx 1,2$.

1.12. а) $B = 1,2 \cdot 10^7$ кД/м²; б) $B = 3,0 \cdot 10^4$ кД/м².

1.13. $E = 2 \cdot 10^3$ Лк, $R = 1,5 \cdot 10^3$ лм/м², $B = 480$ кД/м².

1.14. В 2,25 рази.

1.15. $E = E_0 \sqrt{N}$.

1.16. $I = E_0^2 (1 + \cos(\Delta\omega t))$, тобто інтенсивність буде пульсувати з періодом $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx 10 \text{ с}$.

1.17. $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$; а) 0; б) 72° ; в) π ; г) 2π ; д) 432° .

1.18. $\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$; а) 0; б) $1/6$; в) 0,25; г) 0,5; д) 1; е) 1,5.

1.19. а) 625, 500 та 417 нм; б) 714, 556 та 455 нм.

1.20. $\delta\Delta = (n_c - n_g) d = 0,17 \text{ мм}$.

1.21. $d_{\min} = \frac{\lambda}{2(n-1)}$.

1.22. $d = \frac{\lambda NL}{l} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

1.23. Світло.

1.24. $\lambda = \frac{2a\theta(n-1)\Delta x}{(a+b)} \approx 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

1.25. $d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \approx 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

1.26. $d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} \approx 123 \text{ нм}$.

1.27. $\lambda = 4dn / 5 \approx 480 \text{ нм}$.

1.28. $n = \frac{Rk\lambda}{r_k^2} \approx 1,34$.

1.29. $\lambda = \frac{(\Delta x)^2}{R(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1})^2} = 600 \text{ нм}$.

1.30. $d = k\lambda / 2 = 1,2 \text{ мкм}$.

1.31. Темне.

- 1.32. $\alpha = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2nb}\right).$
- 1.33. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{k\lambda}{2nd}\right) \approx 11''.$
- 1.34. $b = \frac{3\lambda}{2 \sin \alpha}$; а) $b = 1,14 \text{ мкм}$; б) $b = 0,66 \text{ мкм}.$
- 1.35. $\Delta\varphi = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right) \approx 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$
- 1.36. $\phi_{\min,k} = \arcsin\left(\frac{k}{\eta}\right) = 30^\circ.$
- 1.37. $k_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda}\right], k_{\max,1} = 2, k_{\max,2} = 4.$
- 1.38. $\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{k_2\lambda_2}{k_1\lambda_1} \sin \varphi_1\right) \approx 54^\circ 41'.$
- 1.39. $\lambda_0 = 0,75 \lambda = 585 \text{ нм}.$
- 1.40. Hi.
- 1.41. $N = \frac{D \sin \varphi}{\lambda} \approx 600.$
- 1.42. $\Delta\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda N}{D}\right) \approx 23^\circ 4'.$
- 1.43. $x = \frac{l}{k\lambda} \sqrt{d^2 - k^2 \lambda^2} \approx 0,5 \text{ м}.$
- 1.44. $l = N L \left(\frac{\lambda_{\text{чep}}}{\sqrt{1 - \lambda_{\text{чep}}^2 N^2}} - \frac{\lambda_{\phi}}{\sqrt{1 - \lambda_{\phi}^2 N^2}} \right) \approx 0,34 \text{ м}.$
- 1.45. $N_{\min} = \frac{\lambda_1}{k(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx 490, l = d N_{\min} \approx 2,5 \text{ мм}.$
- 1.46. $R_{\Lambda} = N \cdot \left[\frac{d}{\lambda}\right] = 5000.$

$$1.47. \quad \alpha = \arccos\left(\frac{k\lambda}{a} + \cos\alpha_0\right); \alpha = 26^\circ, 60^\circ, 84^\circ, 107^\circ, 134^\circ.$$

$$1.48. \quad \lambda = \frac{2 \sin \theta}{k} \sqrt[3]{\frac{M(\text{NaCl})}{2 \rho_m N_A}} \approx 2,44 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

$$1.49. \quad \Delta x = L \cdot \theta \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

$$1.50. \quad n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi / 2)}.$$

$$1.51. \quad \beta = \pi / 2 - \alpha = 30^\circ.$$

$$1.52. \quad \beta = \pi / 2 - \arctg n \approx 37^\circ.$$

$$1.53. \quad \rho = \frac{1}{2} \cos^2(2 \arctg n) \approx 0,083, \quad P = \frac{\rho}{1 - \rho} \approx 0,091.$$

$$1.54. \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2(\alpha/k)}{\cos^2 \alpha} \approx 8,05.$$

$$1.55. \quad \varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\right) = 45^\circ.$$

$$1.56. \quad C = \frac{\pi / 2 - \varphi}{\alpha l} \approx 450 \text{ кг/м}^3.$$

$$1.57. \quad C_2 = C_1 \frac{\varphi_2 d_1}{\varphi_1 d_2} = 8\%.$$

$$1.58. \quad \varepsilon_R = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^4 - 1 \approx 0.4\%$$

$$1.59. \quad \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{t_2 + 273,16}{t_1 + 273,16}\right)^4 \approx 48;$$

$$\lambda_{\text{м},2} - \lambda_{\text{м},1} = \frac{b_{\text{в}}(t_2 - t_1)}{(t_1 + 273,16)(t_2 + 273,16)} \approx 6 \text{ мкм}.$$

$$1.60. \quad \Delta T = \frac{T}{1 + b_w / T \Delta \lambda} \approx 300 \text{ К}.$$

$$1.61. \quad T = \sqrt[4]{\frac{R}{\beta \sigma}} \approx 282 \text{ К}.$$

$$1.62. \quad T_{\text{Пл}} = T_{\text{C}} \sqrt{\frac{r_{\text{C}}}{2R_{\text{Пл}}}}; \quad T_{\text{МК}} \approx 465 \text{ К}, \quad T_{\text{Мр}} \approx 332 \text{ К}.$$

$$1.63. \quad \frac{dm_{\text{C}}}{dt} = \frac{4\sigma b_w^4 \pi r_{\text{C}}^2}{c^2} \approx 5,1 \cdot 10^9 \text{ кг/с}; \quad t = \frac{\eta m_{\text{C}}}{dm_{\text{C}}/dt} \approx 1,2 \cdot 10^{11} \text{ років}.$$

$$1.64. \quad S = \frac{\Phi}{\sigma} \left(\frac{\lambda_m}{b_w} \right)^4 \approx 10 \text{ см}^2.$$

$$1.65. \quad T = \frac{b_w v_m}{c} = 1449 \text{ К}; \quad N = 6\sigma \left(\frac{b_w v_m}{c} \right)^4 V^{2/3} \approx 323 \text{ кВт}.$$

$$1.66. \quad T = \sqrt[4]{\frac{IU}{\beta \sigma l \pi d}} \approx 2500 \text{ К}.$$

$$1.67. \quad \lambda_m = \frac{b_w}{T}; \quad \text{а) } \lambda_m = 1 \text{ мкм} \quad (\text{інфрачервона область});$$

б) $\lambda_m = 500 \text{ нм}$ (видима область); в) $\lambda_m \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ (рентгенівські промені).

$$1.68. \quad \lambda_m = \frac{b_w}{T} \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$1.69. \quad E = \sigma T^4 S t \approx 17,2 \text{ кДж}.$$

$$1.70. \quad \frac{E_{\text{rad}, \lambda 2}}{E_{\text{rad}, \lambda 1}} = \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T_1}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T_2}\right) - 1} \approx 4,8.$$

$$1.71. \quad N = 4\pi r^2 \sigma \left((T + \Delta T)^4 - T^4 \right) \approx 0,84 \text{ Вт}.$$

$$1.72. \quad r = \frac{9 \sigma \Delta t T^3}{(\eta^3 - 1) \rho_{m, \text{Cu}} C_{\Pi, \text{Cu}}}.$$

$$1.73. \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c \lambda}{2\pi \hbar} \right)^2}} \approx 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

$$1.74. \quad n_{ph} = \frac{N t \lambda}{hc} \approx 50.$$

$$1.75. \quad A_B = h\nu - eU.$$

$$1.76. \quad \text{a) } v_{\max} \approx \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\frac{hc}{\lambda_1} - A_B \right)} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с};$$

$$\text{б) } v_{\max} = \frac{c \sqrt{(2m_0 c^2 + hc / \lambda_2) \cdot hc / \lambda_2}}{(m_0 c^2 + hc / \lambda_2)} \approx 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

$$1.77. \quad p_e = \sqrt{2m_0 (\epsilon - A_B)} \approx 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ кг м/с}.$$

$$1.78. \quad \lambda_0 = \frac{hc(\gamma - \eta)}{A_{\text{Li}}(1 - \eta)} \approx 0,26 \text{ нм}.$$

$$1.79. \quad \delta = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0}.$$

$$1.80. \quad A_B = \frac{hc(\eta^2 - \lambda_2 / \lambda_1)}{\lambda_2(\eta^2 - 1)} \approx 1,9 \text{ эВ}.$$

$$1.81. \quad \text{Так.}$$

$$1.82. \quad U = \frac{1}{e} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{Cu}} \right) \approx 1,74 \text{ В}.$$

$$1.83. \quad \lambda_2 = \lambda_1 + 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx 5,7 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

$$1.84. (\Delta\lambda)_{\max} = \frac{2h}{mc}; \quad (\Delta\lambda)_{\max,e} \approx 4,85 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

$$(\Delta\lambda)_{\max,p} \approx 2,64 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

$$1.85. \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 m_0 c^2}{m_0 c^2 - 2\varepsilon_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

$$1.86. E_k = \frac{2\varepsilon_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{m_0 c^2 - 2\varepsilon_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \approx 0,34 \text{ MeB}.$$

$$1.87. \varepsilon_2 = \frac{m_0 c^2}{\left(1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} = 0,4 m_0 c^2, \quad E_k = \frac{2m_0 c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} = 0,6 m_0 c^2.$$

$$1.88. \lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{eU} \approx 4,1 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

Елементи квантової механіки та атомної фізики

$$2.1. \tau \approx 1,4 \cdot 10^{-11} \text{ с}. \quad N = 1.$$

$$2.2. \text{ а) } -1; \text{ б) } i\hbar \operatorname{div} f; \text{ в) } 0.$$

$$2.3. (\hat{B}^+ \cdot \hat{A}^+).$$

$$2.5. 2\hat{B}.$$

$$2.8. \text{ а) } 1; \text{ б) } -\alpha^2.$$

$$2.9. \text{ а) } \psi_n = C \exp(f_n x), \quad f_n - \text{ уявне}; \text{ б) } \psi_n = C \exp(-if_n x),$$

$$f_n - \text{ дійсне}; \text{ в) } \psi_n = C \exp\left(-\left(x^2/2 - f_n x\right)\right), \quad f_n - \text{ будь-яке};$$

$$\text{ г) } \psi_n = C \exp(-if_n \phi), \quad f_n - \text{ ціле}; \text{ д) } \psi_n = C \exp\left(-i \operatorname{Im}\left(\sqrt{f_n}\right)\phi\right),$$

$$f_n < 0, \quad \operatorname{Im}\left(\sqrt{f_n}\right) - \text{ ціле}.$$

2.10. $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$, де p_i – дійсні,

$$\psi_n = C \exp\left(-i(p_x x + p_y y + p_z z)/\hbar\right).$$

2.11. $\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial y}\right), \hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

2.12. а) $i\hbar\hat{L}_x$; б) $-i\hbar\hat{L}_y$; в) 0.

2.13. а) 0; б) $i\hbar\hat{p}_z$; в) $-i\hbar\hat{p}_y$.

2.15. $|C|^2 = \sqrt{2/\pi a^2}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = \hbar k_0$, $\langle \Delta x^2 \rangle = a^2/4$.

2.16. $\langle L_z^2 \rangle = 4\hbar^2/3$.

2.17. а) $1,7 \cdot 10^{-10}$ М; б) $1,4 \cdot 10^{-12}$ М.

2.18. $(\eta^2 - 1)K$.

2.19. $8,6 \cdot 10^{-13}$ М.

2.20. $v = c/\sqrt{1 + (m_0 c \lambda / 2\pi \hbar)^2} \approx 2,8 \cdot 10^8$ М/с.

2.21. $\lambda = 2\pi \hbar c / \sqrt{(2m_0 c^2 + K)K} \approx 2 \cdot 10^{-12}$ М.

2.23. $n = \lambda_1 / \lambda_2 = \sqrt{1 + 2U_0 / m v_1^2}$.

2.24. $\lambda_{\text{im}} = \pi \hbar / \sqrt{m k T}$,

$$\varphi(\lambda) d\lambda = -4\pi n \left(2\pi \hbar^2 / k T m\right)^{3/2} \frac{1}{\lambda^4} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \hbar^2}{k T m \lambda^2}\right) d\lambda.$$

2.25. $K > mc^2 \left(\sqrt{1 + (\hbar / m c l)^2} - 1\right)$, $K_e > 1,2 \cdot 10^9$ еВ, $K_p > 6 \cdot 10^8$

еВ.

2.26. $K = (2/m) \cdot (\pi \hbar l / d \Delta x)^2 \approx 24$ еВ.

- 2.27. $l_{\min} \approx 2\hbar/\sqrt{2mK} \approx 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$
- 2.28. $\Delta p/p \geq 1/2\pi \approx 0.16.$
- 2.29. $K_{\min} \approx 2\hbar^2/d^2 m \approx 15 \text{ eВ.}$
- 2.30. $\Delta x \approx c\tau = 3 \text{ м, } \Delta\lambda/\lambda \approx \lambda/2\pi c\tau \approx 3 \cdot 10^{-8}.$
- 2.31. Ні.
- 2.33. а) C^2 ; б) $4C^2 \cos^2(kx).$
- 2.34. а) 0,61; б) 0,195.
- 2.35. $x_{\min} = -a, -a/3, a/3, a$; $x_{\max} = -2a/3, 0, 2a/3.$
- 2.36. $n = 2$, $k = \pi n/2a \approx 3,14 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}.$
- 2.37. $x = \pm a, \pm 3a/5, \pm a/5.$
- 2.38. 0,25.
- 2.39. Не змінюється.
- 2.40. $\alpha = \sqrt{km}/2\hbar$, $E = \sqrt{\hbar^2 k/4m}.$
- 2.41. $r_1 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/me^2$, $E = -\hbar^2/2m r_1^2.$
- 2.42. $\langle r^2 \rangle = 3r_1^2$, $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle = 3r_1^2/4.$
- 2.43. а) $4 r_1, 9 r_1$; б) $5 r_1^2, 15,75 r_1^2.$
- 2.44. а) $\sqrt{6}, \sqrt{2}, 0$; б) $\sqrt{\frac{63}{4}}, \sqrt{\frac{35}{4}}, \sqrt{\frac{15}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}$; в) $2\sqrt{3}.$
- 2.45. а) $^1D_2, ^3D_{3,2,1}$;
 б) $^3D_{3,2,1}, ^1D_2, ^3F_{4,3,2}, ^1F_3, ^3G_{5,4,3}, ^1G_4$;
 в) $^1S_0, ^3S_1, ^1P_1, ^3P_{2,1,0}, ^1D_2, ^3D_{3,2,1}$;
 г) $^4P_{5/2, 3/2, 1/2}, ^2P_{3/2, 1/2}, ^4D_{7/2, 5/2, 3/2, 1/2}, ^2D_{5/2, 3/2}, ^4D_{7/2, 5/2, 3/2, 1/2}, ^2F_{7/2, 5/2}.$
- 2.46. а) $^1S_0, ^1D_2, ^3P_{2,1,0}$; б) $^1S_0, ^1D_2, ^1G_4, ^3P_{2,1,0}, ^3F_{4,3,2}.$
- 2.47. а) $^2S_{1/2}, ^2P_{3/2, 1/2}, ^4P_{5/2, 3/2, 1/2}, ^2D_{5/2, 3/2}$; б) $^2S_{1/2}$, три терми $^2P_{3/2, 1/2},$
 $4 \ ^2D_{5/2, 3/2}, S_{3/2}, ^4P_{5/2, 3/2, 1/2}, ^2D_{5/2, 3/2}, ^2F_{7/2, 5/2}.$
- 2.48. $^3F_2.$
- 2.49. $L = 3, 4, 5.$
- 2.50. $^8S_{7/2}.$
- 2.51. а) $^2P_{3/2}$; б) 3F_2 ; в) 9D_6 ; г) $^9J_{10}.$

2.52. 3P_0 .

2.53. а) $n d^2$; б) $n p^5$; в) $n d^5$.

2.54. а) $\mu = \mu_B \sqrt{2}$, $\mu_z = 0, \pm \mu_B$; б) $\mu = \mu_B \frac{3}{7} \sqrt{35}$;

в) $\mu = \mu_B \frac{2}{5} \sqrt{15}$.

2.55. $L_s = \hbar \cdot 2\sqrt{3}$.

2.56. $\Delta E = \frac{3}{2} \hbar \omega_L$.

2.57. а) $\Delta \omega_i / \omega_L = \pm(4, 8, 12, 16, 24) / 15$;

б) $\Delta \omega_i / \omega_L = \pm(1, 3, 15, 17, 19, 21) / 15$.

2.58. а) норм.; б) аном.

Елементи ядерної фізики

3.1. а) 6,93 МеВ/нуклон; б) 8,03 МеВ/нуклон; в) 8,45 МеВ/нуклон; г) 8,79 МеВ/нуклон; д) 8,76 МеВ/нуклон; е) 8,39 МеВ/нуклон; ж) 7,87 МеВ/нуклон; з) 7,59 МеВ/нуклон.

3.2. а) 7,25 МеВ; б) 8,18 МеВ; в) 10,83 МеВ.

3.3. 13,3 МеВ.

3.4. $\approx 26,3$ км.

3.5. $\beta = e^{-2} \approx 0,135$.

3.6. $\beta = 0,9685$.

3.7. $P = 0,5$.

3.8. $W \approx 9,8 \cdot 10^{18}$ МеВ.

3.9. $0,4 \cdot 10^{12}$.

3.10. $3,85 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

3.11. $T_{1/2} \approx 3,3 \cdot 10^5 \text{ с.}$

3.12. $V = (I/I') \exp \left(-t \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \right) = 6 \text{ л.}$

3.13. 0,19 %.

3.14. $t = -(T_{1/2} / \ln 2) \ln (1 - I/q) = 9,5 \text{ діб.}$

3.15. $300 \text{ м}^3.$

3.16. Зменшиться в 1,3 рази.

3.17. $9,5 \cdot 10^7 \phi$

3.18. 186 років.

3.19. 92 мкКі.

3.20. 8 α -розпадів і 6 β -розпадів.

3.21. $^{11}_5\text{B}.$

3.22. Ендотермічна.

3.23. $T_{\text{нор}} = 17,348 \text{ МеВ}$ та $T_{\text{нор}} = 17,26 \text{ МеВ.}$

3.24. а) нейтрон; б) протон; в) α -частинка; г) нейтрон; д) протон.

3.25. а) $Q = +5,494 \text{ МеВ,}$ екзотермічна; б) $Q = +3,27 \text{ МеВ,}$
екзотермічна; в) $Q = -1,643 \text{ МеВ,}$ $T_{\text{нор}} = 1,88 \text{ МеВ;}$
г) $Q = +1,587 \text{ МеВ,}$ екзотермічна; д) $Q = -17,34 \text{ МеВ,}$
 $T_{\text{нор}} = 34,68 \text{ МеВ.}$

ДОДАТКИ

Д1. Деякі фізичні константи

| | |
|----------------------------|---|
| Швидкість світла у вакуумі | $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$ |
| Елементарний заряд | $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ |
| Стала Стефана-Больцмана | $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ Вт м}^{-2}\text{К}^{-4}$ |
| Стала Віна | $b_W = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м К.}$ |
| Стала Планка | $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$ |
| | $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$ |
| Стала Рідберга | $R_H = 10967758,34 \text{ м}^{-1}$ |
| Маса електрона | $m_0 = \begin{cases} 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \\ 0,511 \text{ MeV} \end{cases}$ |
| Маса протона | $m_p = \begin{cases} 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 938,26 \text{ MeV} \end{cases}$ |

Д2. Одиниці світлових величин

| Величина | Одиниця | |
|------------------|----------------------------|-------------------|
| | назва | позначення |
| Сила світла | кандела | кд |
| Світловий потік | люмен | лм |
| Світлова енергія | люмен-секунда | лм·с |
| Освітленість | люкс | лк |
| Світимість | люмен на квадратний метр | лм/м ² |
| Яскравість | кандела на квадратний метр | кд/м ² |

Д3. Робота виходу електрону з металів

| Метал | A, eV | Метал | A, eV |
|----------|-------|--------|-------|
| Алюміній | 3,74 | Мідь | 4,47 |
| Барій | 2,29 | Натрій | 2,27 |
| Вольфрам | 4,50 | Нікель | 4,84 |

| | | | |
|--------|------|--------|------|
| Залізо | 4,36 | Срібло | 4,28 |
| Калій | 2,15 | Цезій | 1,89 |
| Літій | 2,39 | Цинк | 3,74 |

**Д4. Хвильові функції електрона у кулонівському полі для
 $n = 1 \div 3$**

| Квантові числа | | | $\Psi_{n l m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n l}(r) Y_{l m_l}(\theta, \varphi)$ |
|-------------------|-----|-------|--|
| n | l | m_l | |
| 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \cdot \exp \left(-\frac{Z}{r_0} r \right)$ |
| 2 | 0 | 0 | $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{Z}{r_0} r \right) \cdot \exp \left(-\frac{Z}{2r_0} r \right)$ |
| 2 | 1 | 0 | $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(\frac{Z}{r_0} r \right) \cdot \exp \left(-\frac{Z}{2r_0} r \right) \cdot \cos \theta$ |
| 2 | 1 | +1 | $\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(\frac{Z}{r_0} r \right) \cdot \exp \left(-\frac{Z}{2r_0} r \right) \cdot \sin \theta \cdot e^{i \varphi}$ |
| 2 | 1 | -1 | $\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(\frac{Z}{r_0} r \right) \cdot \exp \left(-\frac{Z}{2r_0} r \right) \cdot \sin \theta \cdot e^{-i \varphi}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(27 - 18 \frac{Z}{r_0} r + 2 \left(\frac{Z}{r_0} r \right)^2 \right) \cdot \exp \left(-\frac{Z}{3r_0} r \right)$ |
| 3 | 1 | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(6 - \frac{Z}{r_0} r \right) \cdot \frac{Z}{r_0} r \cdot \exp \left(-\frac{Z}{3r_0} r \right) \cdot \cos \theta$ |
| 3 | 1 | +1 | $\frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{r_0} \right)^{3/2} \left(6 - \frac{Z}{r_0} r \right) \cdot \frac{Z}{r_0} r \cdot \exp \left(-\frac{Z}{3r_0} r \right) \cdot \sin \theta \cdot e^{i \varphi}$ |

| | | | |
|---|---|----|---|
| 3 | 1 | -1 | $\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{r_0}\right)^{3/2}\left(6-\frac{Z}{r_0}r\right)\cdot\frac{Z}{r_0}r\cdot\exp\left(-\frac{Z}{3r_0}r\right)\cdot\sin\theta\cdot e^{-i\varphi}$ |
| 3 | 2 | 0 | $\frac{1}{81\sqrt{6\pi}}\left(\frac{Z}{r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{r_0}r\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{Z}{3r_0}r\right)\cdot(3\cos^2\theta-1)$ |
| 3 | 2 | +1 | $\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{r_0}r\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{Z}{3r_0}r\right)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{i\varphi}$ |
| 3 | 2 | -1 | $\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{r_0}r\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{Z}{3r_0}r\right)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{-i\varphi}$ |
| 3 | 2 | +2 | $\frac{1}{81\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{r_0}r\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{Z}{3r_0}r\right)\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{i2\varphi}$ |
| 3 | 2 | -2 | $\frac{1}{81\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{r_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{r_0}r\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{Z}{3r_0}r\right)\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot e^{-i2\varphi}$ |

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учебное пособие. М., 1988.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М., 1985.
3. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике: Учебное пособие. – М., 1983.
4. Макара В.А., Оглобля В.І. Плющай І.В., Цареградська Т.Л. Навчальний посібник „Загальна фізика для біологів. Збірник задач”, ВПЦ "Київський університет", 2011.
5. Савченко Н.Е. Решение задач по физике. Справочное пособие. – Минск, 1988.
6. Ландау Л.Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М. : ГИФМЛ "Наука", 1963. – Т.3 – 704 с.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики / Д.И. Блохинцев – М. : ГРФМЛ "Наука", 1976. – 670 с.
8. Савельев И.В. Основы теоретической физики / И.В. Савельев – М. : ГРФМЛ "Наука", 1977. – Т.2 – 352 с.
9. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Квантова механіка, термодинаміка і статистична фізика. Т.2./ Федорченко А. М. – Київ: Вища школа, 1993. – 378 с.
10. Вакарчук І.О. Квантова механіка / І.О. Вакарчук. – Львів: Вид-во ЛДУ, 1998. – 617 с.
11. Давыдов А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. – М.: ГРФМЛ "Наука", 1973. – 704 с.
12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Ч.1./ Д.В. Сивухин. – М.: "Наука", 1984. – 416 с.
13. Шпольский Э.В. Атомная физика / Э.В.Шпольский – М.: "Наука", 1984. – Т. 1, 2.
14. Степанов Н.Ф. Квантовая механика и квантовая химия / Н.Ф. Степанов – М. Изд-во "Мир", 2001. – 519с.

Додаткова

1. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики / Макс Джеммер. ; пер. с англ. В.Н. Покровского, под ред. Л.И. Пономарева – М: ГРФМЛ "Наука", 1985.– 380 с.
2. Де Бройль Л. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация квантовой механики / Л. Де Бройль. – М.: "Мир", 1986. – 340с.
3. Алексеев И.С. Концепция дополнительности / И.С. Алексеев, М.А. – М. : Изд-во "Наука", 1978. – 276 с.
4. Блохинцев Д.И. Принципиальные вопросы квантовой механики / Д.И. Блохинцев – М. : ГРФМЛ "Наука", 1987. – 152 с.
5. Гольдин Л.Л. Квантовая физика. Вводный курс. / Л.Л. Гольдин, Г.И. Новикова – Ижевск : АНО ИКС, 2002. – 490 с.
6. Карлов Н.В. Начальные главы квантовой механики / Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 360 с.
7. Мартинсон Л.К. Квантовая физика / Л.К. Мартинсон, Е.В. Смирнов. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 496 с.
8. Барабанов А.Л. Квантовая механика / А.Л. Барабанов. – М. Изд-во МФТИ, 2005. – Ч. 1,2.

Навчальне видання

Микола Олександрович Боровий

Олег Ярославович Оліх

Тетяна Леонідівна Цареградська

Ірина Володимирівна Овсієнко

Артем Олександрович Подолян

Віктор Васильович Козаченко

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ.

ЗБІРНИК ЗАДАЧ.

Частина ІІІ. Механіка.

Молекулярна фізика та термодинаміка.

Збірник задач

(українською мовою)

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку

Формат 60х84/16.Папір офсетний

Ум.-друк. арк. . Наклад 300 прим. Зам. №