

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О. В. СЛОБОДЯНЮК

МЕХАНІКА

Підручник



УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я73
С51

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. П. І. Голод,
д-р фіз.-мат. наук, голов. наук. співроб. О. О. Чумак

*Рекомендовано до друку
вченою радою фізичного факультету
(протокол № 5 від 22 грудня 2010 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
26 червня 2013 року*

Слободянюк О. В.

С51 Механіка : підручник / О. В. Слободянюк. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 478 с.
ISBN 978-966-439-548-6

Розглянуто основні поняття та закони механіки Ньютона, а також основи релятивістської механіки переважно в аспекті її порівняння з механікою Ньютона, висвітлено застосування цих законів до ряду класичних задач. Охоплено всі розділи фізичних спеціальностей університетів, які традиційно містяться в навчальних програмах. Значну увагу приділено коректному введенню базових понять і фізичних величин, описанню й тлумаченню лекційних демонстрацій. Наведено приклади проявів законів механіки в природі та їх використання в науці та техніці. Показано, що перевагу слід віддавати безкоординатному (векторному і тензорному) запису співвідношень між фізичними величинами як фізично більш прозорому. Для ілюстрації викладеного матеріалу детально розглянуто відповідні задачі.

Для студентів фізичних спеціальностей університетів.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я73

ISBN 978-966-439-548-6

© Слободянюк О. В., 2016,
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2016

ПЕРЕДМОВА

Підручник спирається на багаторічний досвід викладання автором і його колегами дисципліни "Механіка" студентам першого курсу фізично-факультету, викладання на факультеті підвищення кваліфікації викладачів вищих навчальних закладів, спілкування з учнями фізико-математичних та загальноосвітніх шкіл, а також на особистий незабутній досвід автора, набутий під час вивчення фізики на фізичному факультеті.

За глибоким переконанням автора, якому випало читати лекції з усіх розділів загальної фізики і багатьох спеціальних курсів, ясне і тверде знання та розуміння механіки є запорукою успішного опанування фізичної науки та її методів загалом.

Механіка в силу своєї наочності та мінімуму вихідних постулатів і законів дає унікальну можливість для формування у майбутнього фізика культури фізичного мислення, яка, зокрема, передбачає глибоке розуміння означень, уміння застосовувати до розгляду конкретних явищ і задач адекватні моделі, робити й обґруntовувати необхідні наближення, усвідомлювати межі застосування отриманих результатів тощо.

Автор поставив за мету зосередити увагу читачів на основних поняттях та законах механіки Ньютона, приділяючи особливу увагу логіці коректного і послідовного введення базових понять і фізичних величин. На думку автора, кожен крок у викладенні матеріалу принаймні на першому курсі, має бути докладно обґруntованим, не залишати ніяких сумнівів або неоднозначних тлумачень, спиратися на попередній матеріал. Ця деталізація може здаватися надлишковою, проте вона виправдана принаймні з таких причин: 1) діапазон рівня шкільної підготовки першокурсників є надзвичайно широким – від випускників спеціалізованих фіз.-мат. шкіл до осіб, які взагалі не вивчали фізику в старших класах; 2) наявність маси джерел від сумнівних посібників для вступників і не-кваліфікованих статей в Інтернеті до шкільних і вузівських підручників та навіть статей в енциклопедичних виданнях, де містяться некоректні, а подекуди і помилкові твердження; 3) зменшення лекційних годин з механіки на фізичних факультетах до однієї лекції на тиждень; 4) плани вилучення фізики як такої з програми старших класів.

Автор щиро дякує своїм колегам з кафедри експериментальної фізики, а також з інших кафедр фізичного факультету за постійну підтримку і плідні дискусії, а також буде вдячний за всі зауваження і побажання щодо покращення цієї книги.

ПОЗНАЧЕННЯ

Вектори позначені так само як на аудиторній дошці та у студентському конспекті, а саме: стрілочкою над відповідною літерою (напр., \vec{r} , \vec{v} , \vec{F}); ті самі літери без стрілочек позначають модулі відповідних векторів (напр., r , v , F).

Середні величини позначені відповідною літерою, вміщеною в кутові дужки $\langle \rangle$ (напр., $\langle v \rangle$).

Суми n однорідних величин записуються за допомогою знака $\sum_{i=1}^n$, наприклад: $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n$.

Символи:

Δ перед позначенням фізичної величини означає її приріст, тобто різницю між її кінцевим та початковим значеннями, наприклад: $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$;

d перед позначенням фізичної величини означає її диференціал, наприклад: dt , $d\vec{r}$, dU ;

δ перед позначенням фізичної величини означає її елементарне значення, наприклад, δs – елементарний шлях, δA – елементарна робота.

Похідна за часом від фізичної величини позначена крапкою над літерою, що означає відповідну величину, наприклад:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Системи відліку позначені буквами K , K' .

ІСВ та НСВ – відповідно, *інерціальна* та *неінерціальна* системи відліку.

СЦМ – *система центра мас*.

Знак $\tilde{}$ (тильда) над величиною означає, що остання визначена відносно СЦМ, наприклад: \tilde{P} , \tilde{r} , \tilde{L} , \tilde{M} ^{зовн}.

Знак $\hat{}$ над літерою означає тензор або оператор, наприклад, \hat{I} означає тензор інерції.

Знак $*$ угорі праворуч від позначення величини означає комплексно спряжену величину, наприклад, a^* .

РОЗДІЛ 1

Вступ до механіки

1.1. Фізика – наука про загальні властивості матерії та її руху

Об'єкт фізики. Фізика вивчає найпростіші і водночас найбільш загальні властивості матерії, її будову та закони руху. Саме слово *фізика*, що походить від грецького фυσικά (природа, ество) вказує на приналежність фізики до природничих наук. Понад те, фізика, її поняття й закони лежать в основі всього природознавства. Фізика в буквальному розумінні є найбільш всеосяжною з природничих наук: вона вивчає найдрібніші матеріальні об'єкти, наприклад, електрони або кварки і найбільші, які тільки можна собі уявити, наприклад, галактики та Всесвіт. Найдрібніші й найбільші з цих об'єктів відрізняються за своїми розмірами більше як в 10^{40} разів! Межі, що відділяють фізику від інших природничих наук значною мірою умовні й змінюються з часом, але незаперечним є факт, що сучасні хімія, біологія, геологія, інші природничі науки, та всі технічні засоби, створені людством, спираються на міцний фізичний фундамент. Наочним проявом цього є виникнення всередині цілої низки природничих наук наукових дисциплін, у назві яких є слово "фізика", наприклад, хімічна фізика, фізична хімія, біофізика, геофізика, астрофізика. Проте і так звані гуманітарні науки зазнають опосередкованого впливу досягнень фізичної науки хоч би й через ті ж інформаційні та технічні засоби, без яких вони насправді не можуть не лише розвиватися, але й навіть просто існувати.

Практичне значення фізики для людства важко переоцінити: всі промислові та науково-технічні революції в історії земної цивілізації завдячують використанню здобутків фізичної науки.

Остання, так звана інформаційна революція, свідками якої ми є і яка несе радикальні зміни в спосіб існування людства загалом і кожного жителя Землі окремо, також повністю спирається на досягнення фізики. Отже, можна без перебільшення стверджувати, що фізика лежить в основі сучасної цивілізації.

На сьогодні відомі два види матерії: *речовина* і *поле*. До першого виду належать, наприклад, електрони, протони, нейтрони та всі побудовані з них тіла. Як найбільш відомі приклади полів можна назвати гравітаційні та електромагнітні поля.

Різні види матерії можуть перетворюватись один на інший. Наприклад, електрон e^- і позитрон e^+ (частинка та античастинка) при взаємодії можуть перетворитися на фотони, тобто кванти електромагнітного поля $h\nu$: $e^- + e^+ \rightarrow 2h\nu$. Це так званий процес *анігіляції* частинок. Можливий і зворотний процес, при якому з одного кванта електромагнітного поля утворюються електрон та позитрон $h\nu \rightarrow e^- + e^+$. Це так званий процес *народження* частинок.

Матерія перебуває в стані неперервного руху, під яким розуміють будь-які зміни взагалі, наприклад, щойно згадані процеси анігіляції та народження частинок. Рух становить невід'ємну властивість матерії.

Мета та методи фізичної науки. Метою фізики як науки є встановлення на основі узагальнення дослідних фактів і результатів спостережень *фізичних законів* матеріального світу. Фізичні закони виражають об'єктивні (тобто такі, що не залежать від нашої волі і свідомості) закономірності, що існують у природі. Фізичні закони зазвичай формулюють у вигляді кількісних співвідношень між *фізичними величинами*. Фізичні величини є мірою тих чи інших фізичних властивостей матерії. Оскільки кількісні співвідношення між фізичними величинами виражають мовою математики, то остання надзвичайно важлива для фізичної науки.

У процесі встановлення тих чи інших закономірностей матеріального світу виняткову роль відіграють *моделі*. У реальному світі зв'язки між явищами та предметами настільки численні й різноманітні, що охопити їх усі неможливо. Однак для людини можливе створення у своїй свідомості моделей, що складаються з образів фізичних об'єктів, явищ, ситуацій і зв'язків між ними,

а також правил оперування цими образами. При цьому беруть до уваги лише істотні для розглядуваного кола явищ властивості та зв'язки. Лише завдяки таким обмеженням вдається створити модель, яку можна охопити думкою. Задача відкидання всього несуттєвого для даного явища виступає як найважливіший момент фізичного дослідження. Наприклад, при співударі різномальорових більядрних куль, зроблених з одного й того самого матеріалу, колір очевидно не впливає на закони їх руху.

Необхідно підкреслити, що моделі завжди наближені й правильні лише в межах застосовності зроблених наближень. Один і той самий фізичний об'єкт у різних випадках може бути представлений різними моделями. Наприклад, при розгляді річного руху Землі навколо Сонця Землю можна вважати *матеріальною точкою* з масою, що дорівнює масі Землі, розміщеною в центрі останньої. Проте вже при з'ясуванні причин зміни дня і ночі або ж пори року необхідно враховувати той факт, що Земля має скінчені розміри, форма її подібна до кулі, і вона обертається навколо своєї осі як *абсолютно тверде тіло*.

Основним методом дослідження у фізиці є *дослід* (експеримент), тобто спостереження досліджуваного явища в точно контролюваних умовах, які дозволяють кожного разу відтворювати це явище при відтворенні певного набору умов досліду. Для пояснення якого-небудь експериментального факту або явища дослідники висувають так звані *гіпотези* – наукові припущення, які оперують адекватними моделями і підлягають перевірці. У фізиці правильність гіпотези перевіряється шляхом постановки дослідів або проведення спостережень, спрямованих на підтвердження передбачень, зроблених на підставі цієї гіпотези. У результаті вихідна гіпотеза може бути або прийнята і на її основі побудована теорія чи сформульований фізичний закон, або відкинута.

Фізична теорія являє собою систему основних ідей, які узагальнюють дослідні дані та відзеркалюють об'єктивні закономірності природи. Теорія відіграє винятково важливу роль у розвитку сучасної фізики. Вона не лише пояснює та узагальнює дослідні факти, але й вказує напрям подальших досліджень. При вивченні того чи іншого явища однаково важливі і дослід, і теорія, але критерієм правильності теорії завжди є експеримент.

Таким чином, фізика є експериментальною науковою, що базується на фактах, встановлених дослідним шляхом. Зрозуміло, що принципове значення має правильність постановки експерименту з перевірки тієї чи іншої гіпотези, оскільки некоректно поставлений експеримент може спричинити невірні висновки.

Відповідно до різноманітності досліджуваних об'єктів та форм руху матерії фізику поділяють на окремі розділи, які тісно чи іншою мірою пов'язані між собою. Наприклад, за характером матеріальних об'єктів, що вивчають, розрізняють фізику елементарних частинок, фізику ядра, фізику атомів і молекул, фізику газів, фізику плазми, фізику конденсованого стану, фізику твердого тіла тощо. За формами руху матерії та способами їх опису розрізняють механіку, електродинаміку (з оптикою включно), квантову механіку, термодинаміку та статистичну механіку, квантову теорію поля тощо. Ці розділи частково перетинаються, що є виявом єдності матеріального світу. Деякі розділи мають загальний характер для об'єктів та процесів різної фізичної природи, зокрема теорія коливань і хвильових процесів.

За методами дослідження розрізняють фізику експериментальну та теоретичну, але цей поділ ні в якому разі не слід абсолютновати: фізика єдина. У фіzikів-експериментаторів основним методом дослідження є експеримент, пояснення якого здійснюється на основі відомих, або, якщо це неможливо, на основі нових фізичних моделей. Фіzik-теоретики мають справу переважно не безпосередньо із самими фізичними об'єктами та явищами, а з їх фізичними моделями, характеристики (параметри) яких вони досліджують з використанням методів теоретичної фізики, які за своєю формою є методами математичними. Цей "розподіл праці" має об'єктивний характер, що склався історично, оскільки сучасна фізика накопичила колосальний експериментальний матеріал і використовує таку кількість різноманітних експериментальних методик і методів теоретичної фізики, які вже неможливо осягнути одній людині. У результаті безліч фізичних явищ і фактів у всій своїй різноманітності знаходить своє пояснення за допомогою порівняно невеликої кількості фундаментальних законів фізики і фізичних теорій, що містять основне знання про фізичні процеси та явища, і надають наближене, але найбільш повне відображення властивостей матерії та її руху.

Для успішної взаємодії фізиків-експериментаторів і фізиків-теоретиків необхідно, щоб вони глибоко розуміли суть фізичних явищ на рівні фізичних моделей, а також, щоб експериментатори розуміли зміст фізичних теорій і суть методів теоретичної фізики, а теоретики, у свою чергу, розуміли суть експериментальних методів і могли їх аналізувати на рівні фундаментальних фізичних законів і загальних фізичних моделей. Тоді може бути реалізований ланцюжок "...експеримент–теорія–передбачення теорії–експеримент, що перевіряє ці передбачення, – уточнена теорія ...", який певною мірою відображає логіку розвитку фізики як науки загалом експериментальної, але в якій теоретичне осмислення результатів експерименту становить необхідний і незамінний для її розвитку компонент.

В університетах фундаментальна підготовка студентів всіх фізичних спеціальностей ґрунтуються на курсі загальної фізики та курсі теоретичної фізики. У курсі загальної фізики розглядаються основні фізичні явища та результати експериментів, на основі узагальнення результатів яких побудовано фізичні моделі, що їх пояснюють, і сформульовано закони фізики. Курс загальної фізики традиційно поділяється на такі дисципліни, як механіка, молекулярна фізика, електрика та магнетизм, оптика, фізика атома та ядерна фізика. Курс теоретичної фізики, у якому основна увага приділена вивченню методів теоретичного опису фізичних явищ та їх застосування до різноманітних фізичних явищ на рівні їх фізичних моделей, включає в себе класичну механіку¹, електродинаміку, квантову механіку, статистичну фізику та термодинаміку.

Механіка, з якої традиційно починається вивчення фізики, посідає особливе місце в сучасній фізиці, і не лише тому, що вона дозволяє описати та пояснити надзвичайно широке коло явищ, але й тому, що механічний рух як найпростіша і наочна форма руху матерії є важливою складовою більш складних видів руху матерії, що вивчаються, наприклад, в оптиці, атомній або молекулярній фізиці і широко застосовується при побудові моделей фізичних явищ. Уведені в механіці поняття, величини і підходи широко використовуються і в теоретичній фізиці, на що вка-

¹ У технічних вищих навчальних закладах відповідну дисципліну називають теоретичною механікою.

зують самі назви відповідних розділів курсу теоретичної фізики. Наприклад, існує тісний зв'язок між понятійним апаратом, методами і результатами квантової механіки і класичної механіки.

1.2. Механічний рух та поняття простору і часу

*Зрозуміти – це означає звикнути
і навчитись користуватись.
Р. Фейнман*

1.2.1. Механічний рух

Найпростішою формою руху матерії є *механічний рух*, під яким зазвичай розуміють зміну положення тіла відносно інших тіл з часом. Зрозуміло, що це визначення охоплює і зміну положення однієї частини якогось тіла відносно іншої, наприклад, при деформації, оскільки ці частини можна розглядати як різні тіла.

Зміна положення тіл спостерігається повсякденно. Вона дуже наочна, що зумовлює і наочність поняття механічного руху та механічних уявлень загалом. Саме завдяки цій наочності механіка історично набула широкого розвитку раніше за інші природничі науки.

Беручи до уваги ті факти, що рух мікрочастинок підпорядкований законам квантової механіки, а тіла, механічний рух яких ми розглядаємо, завжди розташовані в певному фізичному середовищі (навіть у космічному вакуумі існують ті чи інші фізичні поля), можна уточнити поняття руху, який розглядає механіка та сформулювати таке означення:

Механічний рух – це зміна положення макроскопічних тіл відносно інших тіл або фізичного середовища.

Зрозуміло, що положення тіла може бути визначене лише відносно інших тіл. Тому, коли кажуть про положення деякого тіла в просторі, то фактично йдеться про його положення відносно якихось інших тіл.

Зауважимо, що положення тіла може бути визначене не лише відносно інших тіл, а також і відносно неоднорідностей фізичного середовища, наприклад, відносно області перетину двох

світлових пучків – неоднорідності електромагнітного поля. Якщо середовище однорідне, то положення тіла відносно нього визначити неможливо. Прикладом може бути політ літака в тумані або плавання підводного човна в глибинах океану. Водночас однорідність середовища не обмежує можливості встановлення самого факту механічного руху тіла відносно фізичного середовища, і навіть вимірювання його швидкості відносно цього середовища, наприклад, визначення швидкості літака відносно повітря¹.

При розгляді механічного руху тіл широко використовуються моделі *матеріальної точки* та *абсолютно твердого тіла*.

Тіло можна розглядати як матеріальну точку, якщо його розмірами в умовах даної задачі можна знехтувати.

Надалі для зручності будемо використовувати поряд з терміном *матеріальна точка* синонім *частинка*.

Тіло можна вважати абсолютно твердим, якщо його деформаціями в умовах даної задачі можна знехтувати. Поняття абсолютно твердого тіла можна також означити і через поняття *матеріальної точки* (частинки).

Абсолютно тверде тіло – це система матеріальних точок (частинок), відстані між якими залишаються сталими.

1.2.2. Простір і час

Поняття *простору* виникає у свідомості людини в процесі її практичної діяльності при розгляді відносного положення різних тіл. Так виникають поняття "далі", "ближче", "вище", "нижче" тощо. Немає рації роз'яснювати, що таке простір, тобто намагатись звести це поняття до більш простих і звичних. Поняття простору саме є простим (не в розумінні його осмислення, а в розумінні неможливості його зведення (редукції) до більш простих понять), а отже, фундаментальним. Таким же фундаментальним є поняття *часу*. Поняття часу відбиває порядок зміни подій. Добре відомим прикладом є зміна дня і ночі. Цілком зрозуміло, що поняття часу

¹ Іншим цікавим новітнім прикладом може бути визначення швидкості руху Землі відносно т. зв. *реліктового випромінення*.

може виникнути у людини лише при спостереженні руху в широкому розумінні слова, у тому числі й механічного руху.

Таким чином, поняття простору та часу формуються у свідомості людини в процесі її практичної діяльності, як, власне, і сама свідомість. Однак для формулювання фізичних законів якісних понять "далі", "ближче", "раніше", "пізніше" недостатньо. На деякому етапі діяльності людини виникає практична потреба введення кількісних характеристик простору та часу.

В основі кількісної характеристики простору лежить поняття *відстані* між двома точками (або довжини відрізка). Виникнення цього поняття докладно обговорюється у вступі до геометрії і є узагальненням поняття відстані між тілами. Покажемо, як, користуючись поняттям відстані, можна однозначно задати положення деякого тіла A в просторі, тобто його положення відносно деяких інших тіл, які ми будемо називати тілами відліку.

Задамо відстань від тіла A до деякого тіла відліку B_1 . Будемо вважати, що ця відстань набагато більша за розміри тіла A і тіла відліку B_1 . Це дає нам можливість розглядати тіла A і B_1 як *матеріальні точки*. Зрозуміло, що довжина l_1 відрізка AB_1 задає положення тіла A відносно тіла відліку B_1 неоднозначно: тіло A може бути розташоване в будь-якій точці сфери радіуса l_1 із центром у точці B_1 . Якщо ввести друге тіло відліку (також матеріальну точку) B_2 і додатково вказати відстань l_2 , що дорівнює довжині відрізка AB_2 , то положення тіла A все ще залишиться невизначенним. Дійсно, тіло A може бути розташоване в будь-якій точці кола із центром на прямій, на якій лежать тіла відліку B_1 і B_2 . Нарешті, якщо задати відстань l_3 до третього тіла відліку, матеріальної точки B_3 , яка не лежить на одній прямій з першими двома, залишаються лише два можливі варіанти розміщення тіла A відносно тіл відліку B_1 , B_2 , B_3 , що відповідають сукупності трьох заданих відстаней l_1 , l_2 , l_3 , а саме, у точках A та A' , симетричних відносно площини $B_1B_2B_3$, у якій лежать тіла відліку (рис. 1.1). Ця двозначність легко усувається залученням до розгляду поряд з додатними числами, що характеризують положення точки A і дорів-

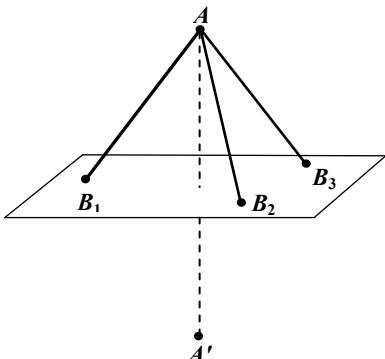


Рис. 1.1. До визначення положення тіла в тривимірному просторі

так, що послідовний перехід від вершини B_1 до B_2 і далі, до B_3 , здійснюється за годинниковою стрілкою, то відстані l_1 , l_2 , l_3 будемо брати зі знаком "плюс", а якщо в протилежному напрямку, то відстані l_1 , l_2 , l_3 будемо брати зі знаком "мінус".

Простір, у якому положення частинки може бути однозначно визначене не менш як *трьома* числами, називається *тривимірним*. Можуть бути розглянуті і простори інших розмірностей, як менших від 3, так і більших за 3. Наприклад, в одновимірному просторі, тобто на деякій лінії, наприклад, на прямій, положення будь-якої точки A відносно обраного на цій прямій початку відліку O може бути однозначно задано всього одним числом, причому як і в тривимірному випадку положенням точок A та A' , що розташовані на однаковій відстані від початку відліку O , відповідають однакові за модулем і протилежні за знаком дійсні числа (згадаємо відому із середньої школи числову вісь).

Наочні уявлення про простори розмірності вищої за 3 у людей відсутні, але це не заважає формально вводити і розглядати такі простори. Наприклад, у спеціальній теорії відносності користуються поняттям чотиривимірного простору Мінковського (див. підрозд. 9.1).

Довжини відрізків у числовій мірі можуть бути виражені, як це добре відомо з геометрії, після того, як обрано відрізок-еталон (одиничний відрізок). У різні часи в різних народів існували різні еталони та одиниці довжини. Сучасною одиницею довжини в Міжнарод-

ній системі (СІ) є *метр* (від грец. *metron* – міра, розмір), а *еталонним відрізком з 1983 р. є відстань, яку проходить світло у вакуумі за 1/299792458 частки секунди.*

Метр спочатку було введено як одну сорокатисячну частку Паризького меридіана земної кулі. Розгляд табл. 1.1 дає уявлення про історичний розвиток еталона метра з підвищеннем точності його відтворення. Зауважимо, що, починаючи з 1960 р., метр може бути відтворений у будь-якому місці, спираючись на фундаментальні квантові процеси, що забезпечують високу точність і надійність його відтворення. Так само можна діяти і при введенні кількісної характеристики часу, тобто треба обрати одиницю та еталон. Для цього необхідно використати якесь явище, яке регулярно повторюється і добре відтворюється, наприклад, добовий рух Сонця по небосхилу. Власне такі одиниці часу, як години, хвилини і секунди й були введені на основі поділу середньої доби на 24 год, години на 60 хв і хвилини на 60 с.

Таблиця 1.1
Основні одиниці механічних величин

| Величина | Одиниця | Рік встановлення еталона | Еталон |
|----------|---------------|--------------------------|---|
| Довжина | Метр (м) | 1791 | $1 \text{ м} = 2,5 \cdot 10^{-8}$ Паризького меридіана |
| | | 1872 | 1 м – відстань між штрихами на платино-іридієвому стрижні-еталоні |
| | | 1960 | $1 \text{ м} = 1650763,73$ довжин хвиль випромінювання у вакуумі, що виникає при переході між рівнями $2p^{10}$ та $5d^5$ атома кріптону-86 |
| | | 1983 | 1 м – відстань, яку проходить світло у вакуумі за $1/299792458$ частку секунди. Відносна похибка відтворення 10^{-11} |
| Час | секунда (с) | 1967 | $1 \text{ с} = 9\ 192\ 631\ 770$ періодів випромінювання, що виникає при переході між двома рівнями надтонкої структури основного стану атома цезію-133. Відносна похибка 3×10^{-11} |
| Маса | кілограм (кг) | 1889 | 1 кг – маса міжнародного еталона кілограма (циліндр висотою та діаметром 39 мм, виготовлений зі сплаву 90 % платини та 10 % іридію). Відносна похибка порівняння еталонів-копій 10^{-9} . |

На сьогодні для встановлення еталона часу використовуються внутрішньоатомні рухи, що також забезпечує його відтворення в будь-якому місці. Одиницею часу в системі СІ є секунда, вона дорівнює **9192631770 періодів випромінювання, що виникає при переході між двома рівнями надтонкої структури основного стану атома цезію-133**.

Як було зазначено, поняття простору і часу виникають у людини в процесі її практичної діяльності як відзеркалення у свідомості властивостей матеріального світу, зокрема, руху матеріальних тіл. Це більш очевидно у випадку часу, але й згадані вище первіні поняття типу "ближче – далі" кінець кінцем також пов'язані з поняттям руху. Отже, поняття часу і простору можна розглядати як певні властивості, характеристики руху матерії, тобто характеристики її самої. Оскільки ті чи інші форми руху властиві всім видам матерії, то поняття простору і часу можна трактувати як найбільш загальні, універсальні властивості матерії. Проте ці поняття, що виникли як узагальнення властивостей матеріального світу, набули пізніше у значної частини вчених і філософів відносної самостійності як дещо таке, що існує незалежно від матеріальних тіл. Одним із продуктивних наслідків цього відокремлення було виникнення такої науки, як геометрія, що оперує абстрактним поняттям простору без усякого зв'язку з матеріальними тілами. Успіхи геометрії зокрема сприяли закріпленню погляду на простір як на деяке вмістилище матеріальних тіл, незалежне від них самих, а також відриву поняття часу від поняття простору, оскільки в геометрії поняття часу взагалі не використовується. Такий підхід знайшов своє відображення у відомих ньютонівських означеннях абсолютних, тобто не від чого незалежних, простору і часу: **"абсолютний простір за самим своїм змістом, безвідносно до чого-небудь зовнішнього, залишається завжди однаковим і нерухомим"; "абсолютний час, справжній математичний час сам по собі і за своїм змістом, безвідносно до чого-небудь зовнішнього, протікає рівномірно й інакше називається тривалістю"**. Проте Ньютона при цьому ввів і поняття про інший, так званий *відносний простір*, яким є "...якась частина обмеженого простору, що визначається нашими органами почуттів відносно деяких тіл".

Таким чином, геніальний Ньютона в означеннях *абсолютного простору* і *абсолютного часу* послідовно відокремлюючи понят-

тя простору і часу від матеріального світу, а потім і одне від одного, віддав належне сучасній йому геометрії й математиці в цілому, які оперують нематеріальними об'єктами, а в означенні відносного простору спирається на практичний досвід спостереження механічного руху відносно матеріальних тіл.

Надзвичайно точно про зв'язок між поняттями руху та простору висловився творець однієї з неевклідових геометрій М.І.Лобачевський: "У природі ми спізнаємо власне лише рух, без якого почутиє враження неможливе. Усі інші поняття, наприклад геометричні, утворені нашим розумом штучно, вони взяті у властивостях рухів, а тому простір сам по собі окремо для нас не існує".

Відрив понять простору і часу одне від одного як наслідок їх відриву від поняття руху, характерний для більшої частини науковців і філософів XIX ст., фізика подолала лише з розвитком і визнанням положень теорії відносності. З погляду сучасної фізики саме матерія визначає просторово-часові співвідношення у Всесвіті.

1.2.3. Системи відліку

Механічний рух тіла можна розглядати як послідовну зміну його положень відносно інших тіл. При описі механічного руху шляхом визначення положення тіла в кожний момент часу широко використовують поняття *системи відліку*.

Система відліку – це сукупність матеріальних точок, нерухомих одна щодо одної, відносно яких розглядається механічний рух, та годинників, що відлічують час.

У п. 1.2.2 ми з'ясували, що для однозначного визначення положення деякої частинки необхідно щонайменше три матеріальні точки (тіла відліку), що не лежать на одній прямій. А скільки потрібно годинників? Нескінченно багато: годинники мають бути розміщені в кожній точці простору, але всі вони повинні йти узгоджено, або, як кажуть, синхронно. Узгодження (синхронізацію) ходу годинників можна виконати за допомогою деяких сигналів, наприклад, світлових або радіосигналів. Процедуру синхронізації докладно викладено в підрозд. 9.1. Слід підкреслити, що поняття системи відліку є од-

ним із базових понять фізики, а не лише механіки, у межах якої воно зазвичай вводиться.

Чудовою ілюстрацією до вищевикладеного означення системи відліку є так звана глобальна система позиціонування, більше відома як GPS (*global positioning system*), призначена для визначення місцезнаходження об'єктів поблизу земної поверхні. Робота системи GPS ґрунтуються на одночасному вимірюванні відстаней від об'єкта до щонайменше чотирьох із 24-х спеціальних супутників Землі, що правлять за тіла відліку, необхідних для однозначного визначення положення об'єкта. Ці відстані l_i обчислюють за часом поширення радіосигналу від кожного із супутників до GPS-приймача, встановленого на об'єкті, місцезнаходження якого підлягає визначенню, за формулою $l_i = c\tau_i$, де c – швидкість поширення радіосигналу, τ_i – час поширення сигналу від i -го супутника до об'єкта. Проміжок часу τ_i обчислюється як різниця моментів прийому $t_{\text{пр}}$ і передачі $t_{\text{пер}}$ сигналу, визначених відповідно за годинником на супутнику і за годинником GPS-приймача, $\tau = t_{\text{пр}} - t_{\text{пер}}$. Годинники, встановлені на всіх супутниках, синхронізовані між собою. Вони використовують атомні стандарти частоти і визначають час із похибкою, меншою від 10^{-9} с, що відповідає відстані поширення радіосигналу 0,3 м. Положення супутників відносно опорних точок на поверхні Землі¹, а отже, і їх взаємне розташування відомі з необхідною точністю в кожний момент часу, оскільки безперервно обчислюється на підставі високоточних вимірювань їх відстаней до загаданих опорних точок. Із вищеперечисленого зрозуміло, що для визначення положення об'єкта поблизу поверхні Землі достатньо знати відстань до будь-яких трьох супутників, оскільки одна із двох точок простору, для яких сукупності трьох відста-

¹Ці опорні точки необхідні для прив'язки положення супутників до опорних пунктів геодезичної мережі на поверхні Землі, до яких прив'язана система координат, що визначає положення тіл біля поверхні Землі. Найчастіше це система координат з початком у центрі Землі, в якій положення тіла визначається географічною широтою та географічною довготою і т.зв. висотою над рівнем моря. На географічних картах часто зображають координатну сітку паралелей, меридіанів і т.зв. ліній одинакових (рівних) висот або глибин.

ней l_1 , l_2 , l_3 однакові (точки A та A' на рис. 1.1), може бути відкинута як така, що лежить не поблизу земної поверхні, а десь далеко в космосі, вище орбіт супутників.

Необхідність прийому сигналу з четвертого супутника пов'язана не з принциповими геометричними міркуваннями, а з тим, що точність ходу годинників у переносних GPS-приймачах розміром з мобільний телефон як з технічних, так і з економічних причин становить лише величину порядку 0,01, яка могла б призвести до похиби у визначенні відстані порядку 3000 км! Виявляється, що для нормальної роботи системи GPS достатньо використати та обробити одночасно сигнали від чотирьох супутників і за допомогою простих тригонометричних обчислень виключити похибку годинника-приймача (відмінність часу, що він показує, від системного часу супутникових годинників). У результаті точність визначення положення приймача на відкритій місцевості за сприятливих атмосферних умов сягає декількох метрів. Серед причин, що суттєво впливають на точність системи GPS, є відмінність швидкості поширення радіосигналу в іоносфері та атмосфері Землі від швидкості у вакуумі, додаткові відбиття сигналу від місцевих предметів (особливо в умовах міста), накопичення похибок визначення параметрів орбіт супутників, ходу годинників тощо.

Контрольні запитання та вправи

1.1. Скільки чисел потрібно для того, щоб однозначно задати положення точки на а) площині? б) на поверхні сфери? Навести приклади.

1.2. Скільки чисел потрібно для того, щоб однозначно задати положення: а) корабля; б) підводного човна; в) літака; г) автомобіля?

1.3. Пояснити, як можна на географічній карті вказати місцезнаходження корабля, якщо відомо на яких відстанях від двох берегових маяків він розташований.

1.4. Від якої мінімальної кількості супутників GPS необхідно зареєструвати сигнал для визначення положення GPS приймача?

РОЗДІЛ 2

Опис механічного руху (кінематика)

2.1. Кінематика точки

Кінематика (від грец. κίνηματος (*kinématos*) – рух, зміна) – розділ механіки, у якому розглядаються способи математичного опису механічного руху тіл, не торкаючись його причин. Відповідний рівень абстракції в кінематиці такий, що матеріальний характер точок, які рухаються, не має ніякого значення. Замість матеріальної точки в кінематиці можна оперувати поняттям точки, відомим з геометрії. Таким чином, вивчення кінематики зводиться до вивчення геометричних властивостей руху тіл. Залежно від характеристик об'єкта, рух якого вивчається, розрізняють кінематику точки (відповідає моделі матеріальної точки), кінематику абсолютно твердого тіла та кінематику неперервно деформованих тіл, рідин і газів.

Основною задачею кінематики точки та абсолютно твердого тіла¹, які ми розглядаємо, є кількісний опис (за допомогою аналітичних виразів, графіків, таблиць тощо) рухів, що їх здійснюють точки або тверді тіла відносно обраної системи відліку, і визначення всіх кінематичних характеристик цих рухів. Кінематика розглядає також рухи відносно систем відліку, що рухаються одна відносно одної, і зв'язок між кінематичними характеристиками руху відносно цих систем відліку.

Розглянемо три способи опису руху точки: *векторний*, *координатний* і *траекторний*.

¹ Надалі будемо вживати терміни *твірде тіло* та *тіло*, маючи на увазі тіла, що не деформується в процесі руху, замість більш довгого виразу *абсолютно твірде тіло*, якщо спеціально не вказано на деформованість цих тіл.

2.1.1. Векторний спосіб

Нехай нас цікавить рух деякої точки A відносно деякої наперед заданої системи відліку. Оберемо деяку точку O , нерухому відносно цієї системи відліку. Назвемо її *початком відліку*. Проведемо відрізок прямої з початком у точці O до точки A . Напрямлений відрізок OA , тобто такий, для якого вказано початок (точка O) і кінець (точка A)¹, називають *радіус-вектором* \vec{r} точки A відносно початку O . При зміні з часом свого положення точки A описує в просторі криву, яка називається *траєкторією* (рис. 2.1). При цьому змінюються і радіус-вектор \vec{r} , тобто він є функцією часу t . Таким чином, траєкторію точки A можна розглядати як геометричне місце кінців радіус-вектора $\vec{r}(t)$ ². Рівняння траєкторії у векторному вигляді записують як залежність радіус-вектора від часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

Залежно від форми траєкторії розрізняють прямолінійний рух частинки, рух по колу, криволінійний рух тощо.

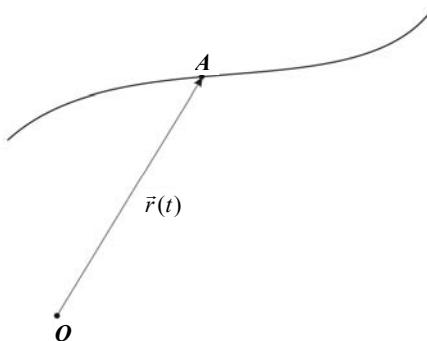


Рис. 2.1. Радіус-вектор та траєкторія точки

Зауважимо, що поняття траєкторії застосовне лише для макроскопічних тіл. Для мікрочастинок (напр., електронів, протонів, нейтронів) поняття траєкторії в багатьох випадках або незастосовне зовсім або застосовне з обмеженою точністю.

¹ Тобто положення точок O і A визначено відносно системи відліку, напр., відстанями l_i від цих точок до тіл відліку системи відліку.

² Поняттю траєкторії в аналітичній геометрії відповідає поняття *годографа*.

2.1.2. Координатний спосіб

Векторний спосіб є, по суті, геометричним і вельми наочним, але часто прагнуть до арифметизації опису руху. Для цього з обраною системою відліку пов'язують систему координат (декартову прямокутну, сферичну, циліндричну тощо). Вибір тієї чи іншої системи координат та її орієнтація визначається постановкою задачі, її симетрією та прагненням спростити розгляд руху. Як приклад розглянемо декартову прямокутну систему координат (рис. 2.2). Положення точки A однозначно визначається трьома її координатами x, y, z , які є функціями часу t :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.2)$$

Ці три рівняння описують траєкторію точки A . У математиці такий спосіб задавання кривої називається *параметричним*. Рівняння траєкторії в явному вигляді, тобто у вигляді рівняння, яке пов'язує між собою декартові координати x, y, z , можна отримати, виключаючи параметр t із системи рівнянь (2.2).

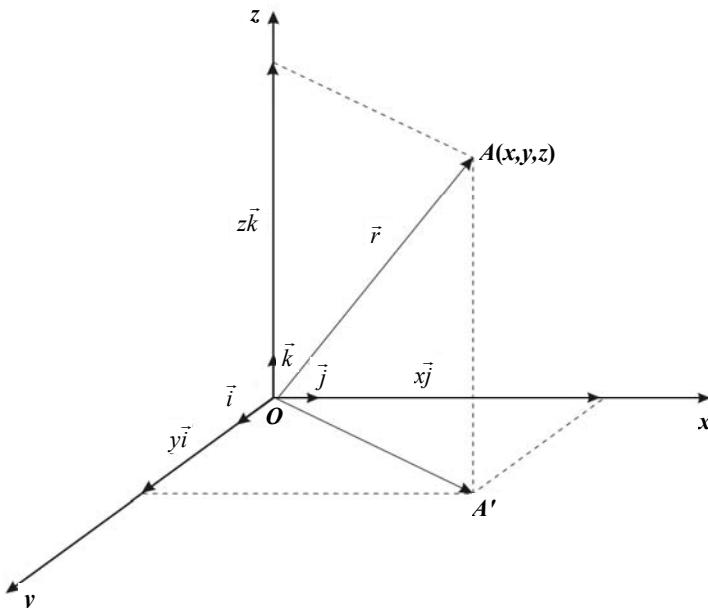


Рис. 2.2. Декартова система координат

Між векторним та координатним способами опису руху точки існує найтісніший зв'язок, зумовлений тим, що з точки зору математики задати координатну систему в просторі розмірності n означає задати n лінійно незалежних векторів (т. зв. векторний базис). На рис. 2.2 такий базис декартової прямокутної (ортогональної) системи координат утворено взаємно перпендикулярними одиничними векторами (ортами) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Радіус-вектор \vec{r} точки A відносно початку O може бути поданий у вигляді суми трьох векторів-складових $\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z$, напрямлених уздовж векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто вздовж осей Ox, Oy, Oz :

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z. \quad (2.3)$$

Кожну із цих складових можна виміряти відповідним ортом: $\vec{r}_x = x\vec{i}$, $\vec{r}_y = y\vec{j}$, $\vec{r}_z = z\vec{k}$ і подати радіус-вектор \vec{r} в остаточному вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.4)$$

де дійсні числа x, y, z у цій сумі за означенням є декартові координати точки A .

Підкреслимо, що радіус-вектор \vec{r} є геометричним об'єктом, що існує незалежно від того, чи обрано якую систему координат, чи ні. Тим більше радіус-вектор \vec{r} не залежить від того, яку саме систему координат обрано. Водночас координати x, y, z вектора \vec{r} залежать від вибору системи координат. Нехай точка A нерухома відносно обраної системи відліку. Тоді її радіус-вектор \vec{r} сталий, тобто його орієнтація відносно системи відліку і його довжина (модуль) $r = |\vec{r}|$ не змінюються з часом. Якщо тепер обирати різні декартові системи координат, то для одного й того самого вектора \vec{r} отримаємо різні набори координат. Наприклад, будемо по черзі обирати системи координат, у яких одна з координатних осей напрямлена вздовж радіус-вектора \vec{r} . Тоді за $\vec{r} \parallel Ox$ маємо $x = r, y = 0, z = 0$; за $\vec{r} \parallel Oy$ маємо $x = y, y = r, z = 0$; за $\vec{r} \parallel Oz$ маємо $x = 0, y = 0, z = r$.

Таким чином, **систему відліку та систему координат не можна ототожнювати**, як це іноді роблять. Система відліку – це

поняття суто фізичне, яке ґрунтуються на виборі певних матеріальних об'єктів. Поняття системи координат – абстрактно-математичне. В одній і тій самій фізичній системі відліку можна ввести безліч систем координат різних типів по-різному з нею пов'язаних, у тому числі й таких, що рухаються відносно цієї системи відліку. З огляду на це немає жодних підстав для включення системи координат до означення системи відліку, як це іноді трапляється.

2.1.3. Траекторний спосіб

Якщо траекторія руху точки наперед відома, то рух точки можна описати в найбільш простий спосіб, який називають *траекторним*, або *природним*. Для цього в деякій точці траекторії обирають початок відліку O , а також виділений напрямок уздовж траекторії (рис. 2.3). Тоді положення точки A відносно початку O можна однозначно описувати дуговою координатою s – відстанню вздовж траекторії від точки A до початку O , узятою зі знаком плюс або мінус, залежно від того, в якому напрямку, у виділеному чи у протилежному, треба рухатись з точки O вздовж траекторії, щоб досягти точки A .

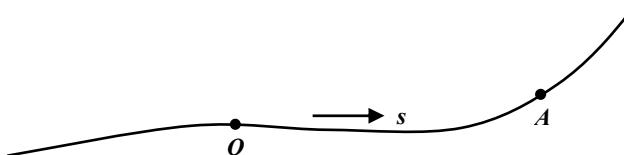


Рис. 2.3. До природного способу визначення положення точки

Саме так найчастіше характеризують положення об'єкта або місце події в повсякденному житті, прив'язуючись до мережі транспортних магістралей на поверхні Землі. Коли ми дізнаємося, наприклад, про пригоду на n -му кілометрі залізниці Київ–Харків, то дістаємо однозначне уявлення про місце події, незважаючи на те, що нам не сповіщають ні його координати, ні його радіус-вектор.

2.1.4. Шлях, вектори переміщення, швидкості та прискорення

Введемо деякі поняття необхідні для більш повного опису руху матеріальної точки (частинки). Нехай деяка частинка перемістилась з однієї точки простору в іншу. *Вектором переміщення* або просто *переміщенням* частинки називають вектор, початок якого збігається з початковим положенням частинки, а кінець – з її кінцевим положенням. Наприклад, на рис. 2.4 показано вектор переміщення із точки 1 в точку 2, позначений як \vec{r}_{12} .

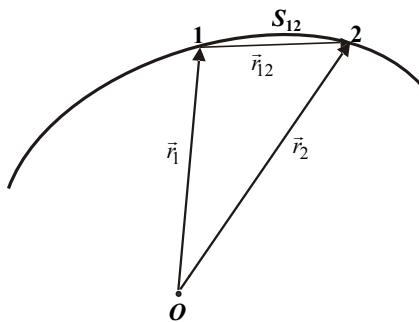


Рис. 2.4. Вектор переміщення та шлях

Рух частинки можна також характеризувати *шляхом*, який проходить частинка при переміщенні з однієї точки простору в іншу. *Шляхом* називається довжина дуги траєкторії, що з'єднує початкове та кінцеве положення частинки. На рис. 2.4 шлях на відрізку траєкторії частинки між точками 1 і 2 позначено як s_{12} .

Одному й тому самому вектору переміщення можуть відповідати різні траєкторії і, відповідно, різні шляхи. Переміщення за означенням є векторною величиною, а шлях – скалярною, причому завжди додатно визначеною, їх не слід плутати. Нехай, наприклад, частинка рухається таким чином, що її кінцеве положення збігається з початковим. При цьому переміщення дорівнює нулю (вектор переміщення є нуль-вектором), а шлях, пройдений частинкою, не дорівнює нулю, а дорівнює довжині замкненої траєкторії.

Нехай радіус-вектор частинки в деякий момент часу t_1 є $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, а в момент часу t_2 – $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$. Із рис. 2.4 видно, що

вектор переміщення $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ можна розглядати як приріст $\Delta\vec{r}$ радіус-вектора \vec{r} за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_{12}$. Середнім вектором швидкості називають векторну величину

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Ясно, що $\langle \vec{v} \rangle \parallel \Delta\vec{r}$. Зрозуміло також, що середній вектор швидкості залежить від проміжку часу Δt , на якому його обчислюють. Якщо, наприклад, за незмінного t_1 зменшувати Δt , то середній вектор швидкості змінюватиметься і за модулем, і за напрямком, оскільки буде змінюватись і приріст $\Delta\vec{r}$ радіус-вектора \vec{r} , набутий за цей проміжок часу. Точка 2, що визначає кінець вектора $\Delta\vec{r}$ (рис. 2.4), буде наближатися до точки 1. Можна поставити питання про границю, до якої прямує середній вектор швидкості $\langle \vec{v} \rangle$ при прямуванні Δt до нуля, а отже, і при нескінченному наближенні точки 2 до точки 1. Ця границя буде характеризувати рух частинки в момент часу t_1 , коли вона розташована в точці траєкторії 1, і називається *вектором швидкості*, або *миттєвою швидкістю*, або просто *швидкістю*. Таким чином, *вектор швидкості* в момент часу t визначається як границя

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.6)$$

У математиці така границя називається похідною радіус-вектора \vec{r} за часом t^1 . Вектор швидкості \vec{v} напрямлений так само, як нескінченно малий вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$, що здійснюється за нескінченно малий проміжок часу dt , тобто по дотичній до траєкторії в точці, де розташована частинка в момент часу t . Отже, вектор швидкості \vec{v} частинки напрямлений по дотичній до її траєкторії в напрямку руху. Модуль швидкості v визначається як модуль вектора швидкості \vec{v} :

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}, \quad (2.7)$$

¹ Похідну за часом (і лише її!) у механіці часто позначають крапкою над відповідною функцією часу, як це зроблено в правій частині виразу (2.6).

Оскільки за $\Delta t \rightarrow 0$ різниця між довжиною хорди $|\Delta \vec{r}|$ і довжиною дуги Δs , яку вона стягує, прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1, \quad (2.8)$$

то для модуля швидкості v справедлива рівність

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (2.9)$$

Таким чином, модуль швидкості дорівнює похідній шляху за часом, яку можна подати як відношення *елементарного шляху* ds до нескінченно малого проміжку часу dt , за який частинка проходить цей шлях.

Із уведених означень випливає зв'язок між швидкістю та *елементарним переміщенням*

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad (2.10)$$

і між модулем швидкості та елементарним шляхом

$$ds = v dt. \quad (2.11)$$

Ці співвідношення можуть бути використані для обчислення переміщення і шляху частинки за скінченні проміжки часу шляхом інтегрування (послідовного додавання) елементарних переміщень чи шляхів.

Наприклад, якщо відома залежність модуля швидкості від часу, то шлях, який проходить частинка за проміжок часу $t_2 - t_1$, можна обчислити за формулою, що безпосередньо випливає з (2.11):

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.12)$$

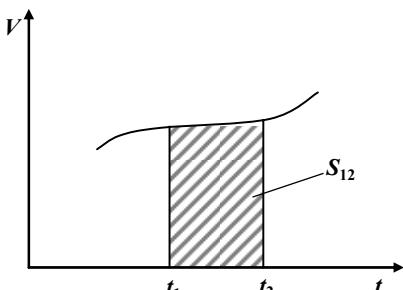


Рис. 2.5. До геометричної інтерпретації шляху

Геометричну інтерпретацію цього інтегрування подано на рис. 2.5: шуканий шлях s_{12} на графіку залежності модуля швидкості v від часу t чисельно дорівнює заштрихованій площині під кривою. Елементарний шлях зобразився б на такому графіку нескінченно вузьким (шириною dt) вертикальним

прямокутником висотою v . На рис. 2.6 показано графік залежності пройденого частинкою шляху s від часу t . Модуль швидкості частинки в будь-який момент часу може бути визначений з такого графіка як кутовий коефіцієнт дотичної до кривої.

Для відшукання переміщення частинки за деякий проміжок часу $t_2 - t_1$ треба діяти аналогічно, використовуючи (2.10):

$$\vec{r}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt. \quad (2.13)$$

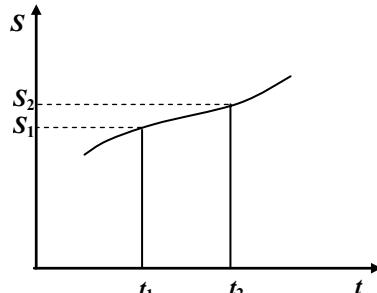


Рис. 2.6. Залежність шляху від часу

Це дає можливість записати формули для відшукання модуля середньої швидкості та вектора середньої швидкості в такому вигляді:

$$\langle v \rangle = \frac{s_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt}{t_2 - t_1}, \quad (2.14)$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt}{t_2 - t_1}. \quad (2.15)$$

Як уже зазначалось, швидкість частинки в загальному випадку змінюється з часом. Ці зміни величини $\vec{v}(t)$ можна охарактеризувати відношенням нескінченно малого (елементарного) приросту вектора швидкості до нескінченно малого проміжку часу, за який цей приріст набуто, тобто похідною від $\vec{v}(t)$ за часом:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (2.16)$$

Величина \vec{a} називається *вектором прискорення* або просто *прискоренням* частинки. Вектор прискорення збігається з напрямком елементарного приросту вектора швидкості $d \vec{v}$, а не з напрямком самого вектора швидкості \vec{v} .

Підставляючи в (2.16) вираз для швидкості з (2.6), отримаємо

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t), \quad (2.17)$$

звідки випливає, що прискорення частинки є другою похідною за часом від її радіус-вектора.

Отже, якщо відомий закон руху частинки, поданий як залежність її радіус-вектора від часу, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то шляхом послідовного диференціювання радіус-вектора за часом можна знайти швидкість і прискорення частинки в будь-який момент часу.

Наведені вище співвідношення між прискоренням, швидкістю і радіус-вектором частинки можна записати і в координатній формі. Наприклад, проектуванням відповідних векторних рівносітей на осі декартової системи координат отримаємо для компоненти радіус-вектора, швидкості та прискорення такі вирази:

$$\begin{aligned} x &= x(t), & v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), & a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t); \\ y &= y(t), & v_y(t) &= \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t), & a_y(t) &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}(t); \\ z &= z(t), & v_z(t) &= \frac{dz}{dt} = \dot{z}(t), & a_z(t) &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким чином, якщо задано закон руху частинки в координатній формі як залежність її координат від часу, то можна знайти проекції векторів швидкості і прискорення на координатні осі, а отже, і самі вектори. Наприклад, модуль вектора прискорення a :

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}. \quad (2.19)$$

При цьому напрямок вектора прискорення \vec{a} визначається кутами, які він утворює з осями Ox, Oy, Oz (рис. 2.7) і які можна знайти за напрямними косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}. \quad (2.20)$$

На практиці часто виникає обернена задача: за відомою залежністю прискорення частинки від часу $\vec{a}(t)$ знайти залежність від часу її швидкості $\vec{v}(t)$ та положення (радіус-вектора $\vec{r}(t)$), які разом визначають так званий *механічний стан* частинки. Цю задачу

можна розв'язати однозначно лише тоді, коли відомі так звані *початкові умови*, а саме, швидкість і радіус-вектор частинки в деякий початковий момент часу $t = 0$, відповідно $\vec{v}(0)$ та $\vec{r}(0)$, тобто її початковий механічний стан. Дійсно, за відомим прискоренням $\vec{a}(t)$ ми можемо, користуючись означенням прискорення (2.16), отримати лише приріст швидкості за проміжок часу $(0, t)$:

$$\Delta \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t) dt . \quad (2.21)$$

Щоб знайти саму швидкість у момент часу t треба до цього приросту додати початкову швидкість

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \Delta \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt . \quad (2.22)$$

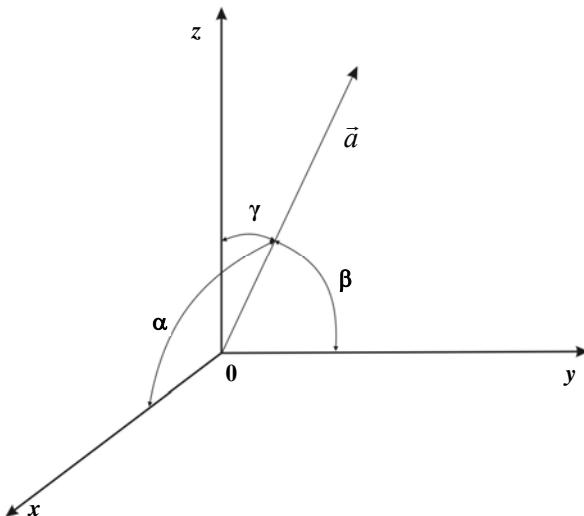


Рис. 2.7. До відшукання напрямку вектора прискорення \vec{a}

Аналогічно розв'язується питання і про радіус-вектор

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt , \quad (2.23)$$

де для відшукання $\Delta \vec{r}$ використано формулу (2.13), а $\vec{v}(t)$ треба взяти з (2.22). Обернена задача важлива і розв'язується у так зва-

них інерціальних системах навігації таких різноманітних рухомих об'єктів, як літаки, підводні човни, ракети. У таких системах шляхом двохкратного інтегрування безперервно вимірюваних безпосередньо на борту компонент вектора прискорення за відомими координатами старту (початкова умова) визначають поточні координати рухомого об'єкта без спостереження яких би то не було зовнішніх орієнтирувальних елементів.

2.1.5. Прискорення частинки, що рухається по криволінійній траєкторії

Вектор швидкості частинки можна подати у вигляді добутку модуля швидкості на одиничний вектор $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$, напрямлений уздовж \vec{v} :

$$\vec{v} = v\vec{\tau}. \quad (2.24)$$

Підставляючи (2.24) у (2.12), дістанемо

$$\vec{a}(t) = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}}, \quad (2.25)$$

тобто вектор прискорення частинки в загальному випадку можна подати у вигляді двох складових, одна з яких, $\dot{v}\vec{\tau}$, напрямлена так само, як швидкість, тобто по дотичній до траєкторії, а друга, $v\dot{\vec{\tau}}$, як ми покажемо нижче, перпендикулярна до першої.

Друга складова існує лише тоді, коли частинка рухається по криволінійній траєкторії. Ми дослідимо її більш детально, обмежившись випадком *плоскої траєкторії*, тобто такої, яка повністю лежить в одній площині. У випадку довільної гладенької плоскої кривої в будь-якій її точці (напр., у точці 1 на рис. 2.8) можна побудувати так зване *стичне коло (коло кривини)*, яке найщільніше прилягає до кривої в точці 1 порівняно з будь-якими іншими колами, що дотикаються до кривої в тій самій точці 1. Центр стичного кола називають *центром кривини*, а радіус – *радіусом кривини* R кривої в даній точці¹. Апроксимація (наближення) ділянки траєкторії стичним колом дозволяє розглядати рух частинки на цій ділянці як рівнотрійний.

¹ Іноді користуються оберненою до радіуса кривини величиною $\rho = R^{-1}$, яку називають просто *кривиною* кривої в даній точці.

ніці як такий, що відбувається по колу. Із рис. 2.8 видно, що при переміщенні частинки з точки 1 у точку 2 траєкторії вектор $\vec{\tau}$ набуває приросту $\Delta\vec{\tau}$. При цьому кут $\Delta\phi$ між векторами $\vec{\tau}(t)$ та $\vec{\tau}(t + \Delta t)$ дорівнює куту між радіусами, проведеними в точки 1 та 2 із центра кривини O (сторони цих кутів взаємно перпендикулярні). При прямуванні Δt до нуля також прямує до нуля і довжина дуги Δs , обмежена точками 1 та 2, а разом з нею прямує до нуля і кут $\Delta\phi$. Це означає, що в трикутнику, утвореному одиничними векторами $\vec{\tau}(t)$ та $\vec{\tau}(t + \Delta t)$, два інші кути прямують до $\pi/2$, тобто напрямок вектора $\Delta\vec{\tau}$ наближається до напрямку радіуса, який сполучає точку 1 із центром O .

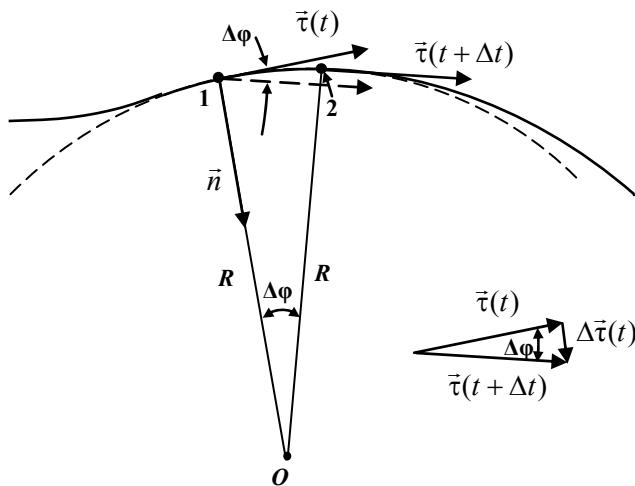


Рис. 2.8. До відшукання нормальної складової прискорення

Уведемо до розгляду одиничний вектор \vec{n} , напрямлений із точки 1 уздовж радіуса до центра кривини O . Саме до напрямку цього вектора \vec{n} прямує напрямок вектора $\Delta\vec{\tau}$. Щодо модуля вектора $\Delta\vec{\tau}$, то за малих значень $\Delta\phi$ $|\Delta\vec{\tau}| = |\vec{\tau}|\Delta\phi = \dot{\tau}\Delta\phi$, а $\Delta\phi = \Delta s/R$. Усе це дає можливість перетворити похідну $\dot{\vec{\tau}}$ таким чином:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\tau}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \vec{n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\Delta t} = \\ &= \vec{n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{R \Delta t} = \frac{\vec{n}}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\vec{v}}{R} \vec{n}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

При цьому враховано означення модуля швидкості (2.9). Після підстановки (2.26) у (2.25) вираз для вектора прискорення набуває вигляду

$$\vec{a} = \vec{v} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad \text{або} \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (2.27)$$

Таким чином, вектор прискорення подано як суму двох взаємно перпендикулярних складових: *тангенціальної*, або *дотичної*:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad (2.28)$$

та *нормальнюї*, або *доцентрової*:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (2.29)$$

напрямлених, відповідно, вздовж дотичної в даній точці траєкторії і нормальню до неї в напрямку до центра стичного кола (рис. 2.9). Модулем прискорення \vec{a} є

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (2.30)$$

Якщо частинка рухається по прямій, то нормальню складова прискорення $\vec{a}_n = 0$, оскільки для прямої $R \rightarrow \infty$. Вектор прискорення \vec{a} в цьому випадку колінеарний вектору швидкості \vec{v} . Він збігається за напрямком зі швидкістю, якщо остання зростає за модулем, і напрямлений протилежно, якщо модуль швидкості спадає з часом.

Коли ж частинка рухається зі сталою за модулем швидкості, то тангенціальна складова відсутня і вектор прискорення $\vec{a} \perp \vec{v}$ у будь-якій точці траєкторії. Важливим частинним випадком такого руху є так званий *рівномірний рух по колу*, для якого

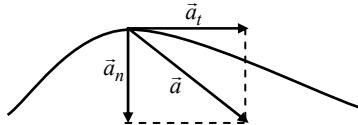


Рис. 2.9. Нормальна та тангенціальна складові вектора прискорення

$v = \text{const}$, а стало за модулем прискорення напрямлене до центра колової траєкторії. Таке прискорення називають *доцентровим прискоренням*.

2.2. Кінематика твердого тіла

Розгляд руху абсолютно твердого тіла окрім самостійного значення має ще один важливий аспект: із порівняння означень абсолютно твердого тіла та системи відліку випливає, що питання про рух абсолютно твердого тіла є водночас і питанням про рух системи відліку.

2.2.1. Поступальний рух та обертання навколо нерухомої осі

Розрізняють два основних види руху абсолютно твердого тіла: *поступальний рух та обертання навколо нерухомої осі*.

При поступальному русі будь-яка пряма, пов'язана з твердим тілом, залишається паралельною своєму початковому напрямку.

Поступальний рух твердого тіла можна описати як рух однієї його точки: траєкторії всіх точок твердого тіла можуть бути отримані паралельним зсувом траєкторії однієї з них. На рис. 2.10 пряма AB залишається паралельною так само своєму початковому напрямку, як і прямі, що їх можна було б провести через точки A і D , B і D тощо. Траєкторію точки B можна отримати, наприклад, шляхом зсуву траєкторії точки C на відстань, що дорівнює довжині відрізка CB . Отже, для опису поступального руху можна застосовувати всі ті величини, які були введені для матеріальної точки: переміщення, шлях, швидкість, прискорення.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі всі його точки описують кола, центри яких лежать на одній прямій, що називається віссю обертання. На рис. 2.11 показано вісь обертання OO' та колову траєкторію однієї з точок твердого тіла P , положення якої відносно початку O , через який проходить вісь обертання, визначається радіус-вектором \vec{r} .

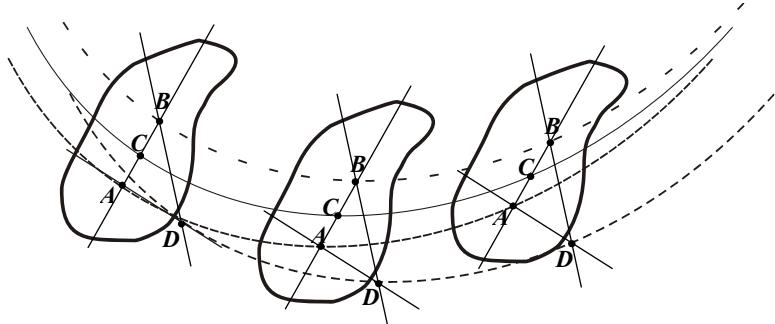


Рис. 2.10. Поступальний рух абсолютно твердого тіла

Покажемо тепер, що абсолютно тверде тіло може бути переведене із одного свого положення в будь-яке інше шляхом здійснення одного паралельного переносу (поступальний рух) та одного повороту (обертальний рух). Для цього розглянемо "початкове" та "кінцеве" положення твердого тіла.

Положення абсолютно твердого тіла можна однозначно визначити за його будь-якими трьома точками, що не лежать на одній прямій. Оберемо довільну точку O твердого тіла і навколо неї опишемо сферу одиничного радіуса. На поверхні цієї сфери відмітимо дві точки A і B . Якщо перевести ці три точки O , A і B з їх початкового положення в кінцеве,

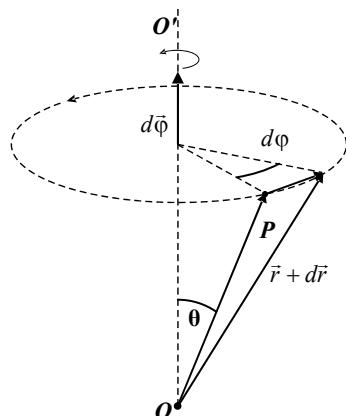


Рис. 2.11. Коловий рух точки абсолютно твердого тіла, що обертається

то і всі інші точки твердого тіла перейдуть з початкового положення в кінцеве.

Спочатку шляхом паралельного переносу тіла переведемо точку O з її початкового положення O_1 у кінцеве положення O_2 . При паралельному переносі кожна точка твердого тіла зазнає переміщення на вектор, що дорівнює за модулем і паралельний відрізку

O_1O_2 ¹. Оскільки при такому переміщенні траєкторіями всіх точок є однакові відрізки паралельних прямих, то поверхня одиничної сфери S_1 , описаної навколо точки O_1 , перейде в поверхню одиничної сфери S_2 , описаної навколо точки O_2 . Це, однак, аж ніяк не означає суміщення точок A_1 і B_1 на поверхні сфери S_1 з відповідними точками A_2 і B_2 на поверхні сфери S_2 (рис. 2.12).

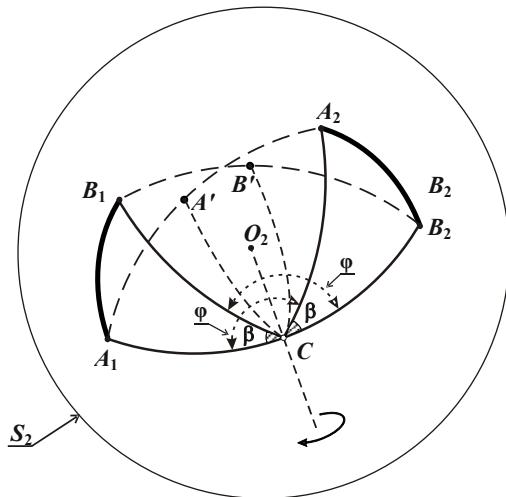


Рис. 2.12. До теореми Ейлера

Покажемо, що точки A_1 і B_1 можуть бути переведені в точки A_2 і B_2 шляхом повороту тіла на цілком визначений кут навколо осі, що проходить через центр сфери. Щоб визначити положення цієї осі, тобто знайти точку C її перетину з поверхнею сфери, з'єднаємо дугами великих кіл точки A_1 і A_2 та точки B_1 і B_2 , відповідно. Через середини цих дуг A' і B' проведемо пірпендикулярно до них дуги великих кіл, точка перетину яких C є шуканим виходом осі обертання на поверхню сфери.

Дійсно, сферичні трикутники A_1CB_1 та A_2CB_2 на рис. 2.12 рівні між собою за побудовою, як такі, що мають рівні сторони.

¹Таку операцію ще називають зсувом, або *трансляцією* на відповідний вектор.

Отже, рівні між собою і кути $\angle A_1CB_1$ та $\angle A_2CB_2$, що мають вершиною точку C і позначені на рис. 2.12 через β . Якщо відняти від кута $\angle A_1CB_2$ по черзі кожен із цих кутів β , то отримаємо кути $\angle A_1CA_2$ та $\angle B_1CB_2$, які виявляються, таким чином, рівними між собою (вони позначені на рис. 2.12 через φ). Рівність кутів $\angle A_1CA_2$ та $\angle B_1CB_2$ означає, що при повороті на кут φ не тільки точка A_1 переходить у положення A_2 , а й точка B_1 у положення B_2 , а отже, одночасно і всі відповідні точки твердого тіла досягають кінцевого положення.

Таким чином, ми довели *теорему Ейлера*, відповідно до якої тверде тіло, що має одну закріплена нерухому точку, може бути переведене з одного положення в будь-яке інше одним поворотом на деякий кут навколо нерухомої осі, що проходить через точку закрілення.

2.2.2. Вектор нескінченно малого повороту і вектори кутової швидкості та кутового прискорення

Для того, щоб однозначно описати поворот твердого тіла, необхідно, по-перше, вказати вісь обертання, по-друге, напрямок обертання навколо цієї осі і, по-третє, величину самого повороту. Розглянемо нескінченно малий (елементарний) поворот навколо осі OO' , при якому точка P описує дугу ds , а її радіус-вектор набуває приросту $d\vec{r}$ (рис. 2.11). А ні дуга ds , а ні переміщення $d\vec{r}$ не дають таких зручних геометричних образів повороту, як наприклад, вектор переміщення для поступального руху: при повороті різні точки твердого тіла проходять різні шляхи і набувають різних переміщень. Натомість поворот твердого тіла характеризують напрямленим відрізком, пропорційним куту повороту, відкладеним уздовж осі обертання, причому двом можливим напрямкам обертання ставлять у відповідність два протилежні напрямки цього відрізка. Нескінченно малому (елементарному) повороту, тобто повороту на нескінченно малий кут $d\varphi$ навколо деякої нерухомої осі, став-

лять у відповідність так званий *вектор нескінченно малого повороту* $d\vec{\phi}$, модуль якого дорівнює величині кута повороту, і який напрямлений уздовж осі обертання так, що коли дивитись у напрямку цього вектора, то поворот здійснюється за годинниковою стрілкою.

Із рис. 2.11 видно, що існує простий лінійний зв'язок між модулем приросту радіус-вектора та кутом повороту:

$$|d\vec{r}| = d\phi \cdot r \sin \theta. \quad (2.31)$$

Цей зв'язок з урахуванням обраного напрямку $d\vec{\phi}$ можна подати у формі векторної рівності:

$$d\vec{r} = [d\vec{\phi} \times \vec{r}]. \quad (2.32)$$

Покажемо, що величина $d\vec{\phi}$ дійсно є вектором. Для цього перевіримося, що величини такого типу мають основну властивість векторів, а саме: для них справедливий закон додавання векторів. Нехай тверде тіло здійснює послідовно два нескінченно малих повороти $d\vec{\phi}_1$ та $d\vec{\phi}_2$ навколо різних осей, що проходять через точку O . У результаті довільна точка P твердого тіла, радіус-вектор якої визначений відносно точки O і дорівнює \vec{r} , дістає переміщення $d\vec{r}_3$, яке є сумою переміщень $d\vec{r}_1$ та $d\vec{r}_2$, що виникають при нескінченно малих поворотах $d\vec{\phi}_1$ та $d\vec{\phi}_2$:

$$d\vec{r}_3 = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = [d\vec{\phi}_1 \times \vec{r}] + [d\vec{\phi}_2 \times \vec{r}]. \quad (2.33)$$

З іншого боку, це саме переміщення $d\vec{r}_3$ можна подати як результат нескінченно малого повороту $d\vec{\phi}_3$ навколо якоїсь третьої осі, що також проходить через точку O :

$$d\vec{r}_3 = [d\vec{\phi}_3 \times \vec{r}]. \quad (2.34)$$

Порівняння рівностей (2.33) та (2.34) дає рівність

$$[d\vec{\phi}_3 \times \vec{r}] = [d\vec{\phi}_1 \times \vec{r}] + [d\vec{\phi}_2 \times \vec{r}], \quad (2.35)$$

яка виконується для довільних векторів \vec{r} і довільних малих поворотів $d\vec{\phi}$, якщо припустити, що величини $d\vec{\phi}_1$, $d\vec{\phi}_2$ та $d\vec{\phi}_3$ є векторами, причому

$$d\vec{\phi}_3 = d\vec{\phi}_1 + d\vec{\phi}_2. \quad (2.36)$$

Властивість (2.36) векторів нескінченно малих поворотів відіграє винятково важливу роль як у класичній, так і у квантовій

механіці. Повороти на скінченні кути навколо різних осей такої властивості не мають. Це видно вже з того, що лінійний зв'язок між модулем переміщення $|d\vec{r}|$ і кутом нескінченно малого повороту $d\phi$ (2.31) у випадку скінченного повороту на кут ϕ має бути замінений нелінійним зв'язком між $|d\vec{r}|$ та ϕ :

$$|d\vec{r}| = 2r \sin \theta \sin(\phi / 2). \quad (2.37)$$

Фізична величина, що характеризує швидкість обертального руху, називається *вектором кутової швидкості* або просто *кутовою швидкістю* і визначається формулою

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \dot{\vec{\phi}}, \quad (2.38)$$

де $d\vec{\phi}$ – вектор нескінченно малого повороту, що здійснюється за нескінченно малий проміжок часу dt . Напрямок кутової швидкості збігається з напрямком $d\vec{\phi}$, тобто вектор $\vec{\omega}$ направлено вздовж осі обертання таким чином, що рух усіх точок твердого тіла відбувається за годинникою стрілкою.

Вектор кутового прискорення, що характеризує швидкість і напрямок зміни вектора кутової швидкості, вводиться аналогічно вектору лінійного¹ прискорення, як відношення приросту вектора кутової швидкості до проміжку часу dt , за який набуто цього приросту

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}. \quad (2.39)$$

При обертанні навколо нерухомої осі вектор $\vec{\beta}$ буде колінеарним вектору кутової швидкості і може як збігатися з напрямком останнього, коли кутова швидкість зростає, так і мати протилежний напрямок, якщо обертання уповільнюється. Якщо ж орієнтація осі обертання відносно якоїсь системи відліку змінюється з часом, то навіть за незмінної за модулем кутової швидкості існує кутове прискорення $\vec{\beta}$, відмінне від нуля.

¹ Уведені для опису руху матеріальної точки характеристики (вектори швидкості, прискорення, переміщення тощо) називають *лінійними* на відмінну від таких *кутових* характеристик, як наприклад, кутова швидкість або кутове прискорення.

2.2.3. Зв'язок між лінійними та кутовими характеристикаами обертального руху

Щоб отримати зв'язок між вектором лінійної швидкості \vec{v} довільної точки твердого тіла, що обертається, і його кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, поділимо ліву й праву частини (2.32) на dt :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} \right] \text{ або } \vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (2.40)$$

Зазначимо, що вектори \vec{v} і $\vec{\omega}$ завжди взаємно перпендикулярні.

Диференціювання виразів (2.40) дає зв'язок між лінійним прискоренням \vec{a} довільної точки твердого тіла, що обертається, з одного боку, та його кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і кутовим прискоренням $\vec{\beta}$, з іншого:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}] = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Бачимо, що перший доданок у правій частині (2.41) являє собою тангенціальну складову прискорення точки, а другий – його нормальну складову.

Зазначимо деякі принципові відмінності між величинами, що описують поступальний та обертальний рух. Напрямки таких векторів, як \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} виникають природним шляхом без жодної видимої альтернативи. Напрямки ж векторів типу $d\vec{\phi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$ встановлено нами за певною угодою. Вектори типу \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} називають *полярними*, або *істинними* векторами, а вектори типу $d\vec{\phi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$ – *аксіальними*, або *псевдовекторами*.

На рис. 2.13 наведено символічне зображення полярного вектора \vec{p} у вигляді напрямленого відрізка певної довжини і певної орієнтації – стрілки. Аксіальний вектор \vec{a} також зображене відрізком прямої певної довжини і певної орієнтації, якому приписано обертання в напрямку, вказаному дуговою стрілкою. На практиці використовують більш зручне символічне зображення аксіального вектора у вигляді стрілочки, напрямок якої обрано за правилом правого гвинта, про що нагадує кружок у початку век-

тора. Під символами полярного й аксіального векторів для більшої наочності показані геометричні фігури, що мають симетрію цих векторів: для полярного вектора це круговий конус, а для аксіального вектора – круговий циліндр, що обертається.

При поворотах поведінка обох типів векторів однакова: вони переходят самі в себе при обертаннях на довільні кути навколо осей, що збігаються з ними (з осями конуса та циліндра), але змінюють напрямок на протилежний при поворотах на кут π навколо будь-якої з осей до них перпендикулярних.

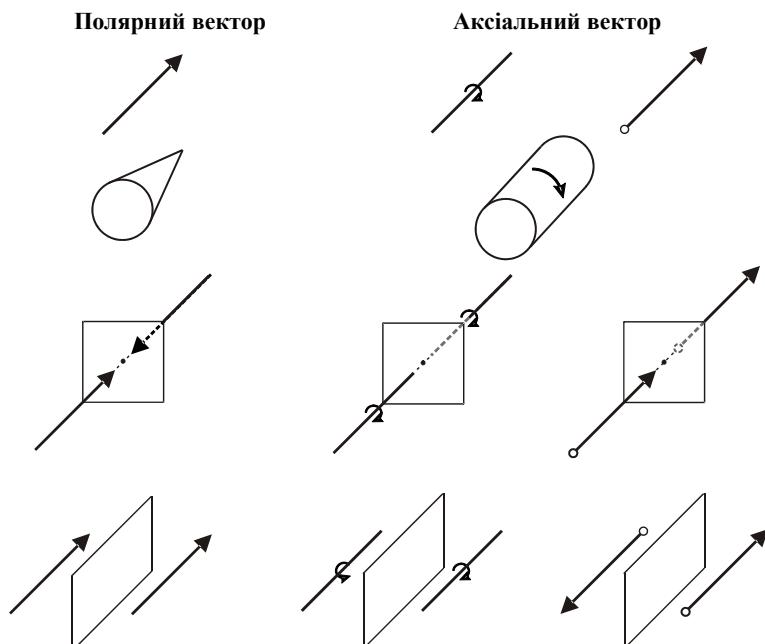


Рис. 2.13. Символічні зображення полярного й аксіального векторів та їх поведінка при відзеркаленні у площині

Суттєва різниця між полярними та аксіальними векторами виявляється при так званих дискретних перетвореннях простору типу *відзеркаллення у площині* та *просторової інверсії* (*відзеркаллення в точці*). У третьому рядку рис. 2.13 показано відзеркаллення зображень полярного та аксіального векторів у **перпендикулярній** до них площині (дзеркалі). Видно, що символ, який

зображає полярний вектор при віддзеркаленні, змінює свій напрямок на протилежний, коли символ аксіального вектора залишається без змін. Той самий результат буде при віддзеркаленні конуса і циліндра, що обертається, оскільки напрямок обертання при такому віддзеркаленні не змінюється.

Якщо ж віддзеркалення здійснюється у площині, **паралельний** полярному та аксіальному векторам, то результат буде протилежним: полярний вектор не зазнає зміни, а аксіальний вектор змінює напрямок, оскільки в дзеркалі обертання зображення відбувається в протилежному напрямку (для наочності на місце символів аксіальних векторів можна помістити циліндр, що обертається). У третьому стовпчику на рис. 2.13 показано, як змінюється символічне зображення аксіального вектора. Різниця в поведінці "полярної" та "аксіальної" стрілок очевидна.

Утворимо векторний добуток двох полярних векторів \vec{P}_1 та \vec{P}_2 : $\vec{A} = [\vec{P}_1 \times \vec{P}_2]$. Якщо застосувати перетворення інверсії до обох векторів \vec{P}_1 та \vec{P}_2 , то кожен з них змінить знак на протилежний: $\vec{P}'_1 = -\vec{P}_1$, $\vec{P}'_2 = -\vec{P}_2$, а їх векторний добуток залишиться незмінним $\vec{A}' = [\vec{P}'_1 \times \vec{P}'_2] = [\vec{P}_1 \times \vec{P}_2] = \vec{A}$. Отже, векторний добуток двох полярних векторів є аксіальним вектором.

Аксіальні вектори можна додавати за тими самими правилами, що й полярні, тобто за звичними правилами паралелограма, трикутника тощо, але додавати до полярного аксіального вектора і навпаки, не можна.

2.2.4. Формула додавання кутових швидкостей

Надамо деякому твердому тілу обертання з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$ навколо осі AA' , а потім цю вісь будемо обертати з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$ навколо осі BB' , що перетинається з віссю AA' в точці O (рис. 2.14). Вісь BB' нерухома відносно деякої системи відліку K . Вектор нескінченно малого повороту тіла за час dt відповідно до (2.36) дорівнює

$$d\vec{\phi} = d\vec{\phi}_1 + d\vec{\phi}_2, \quad (2.42)$$

причому вектор $d\vec{\phi}$ лежить в одній площині з векторами $d\vec{\phi}_1$ та $d\vec{\phi}_2$, тобто з осями AA' та BB' . Поділимо ліву і праву частини (2.42) на dt , врахуємо означення вектора кутової швидкості (2.38) й отримаємо так звану формулу додавання кутових швидкостей

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 . \quad (2.43)$$

Усі три вектори $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ у кожний момент часу лежать в одній площині, що проходить через осі AA' та BB' і обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ відносно системи відліку K . Отже, у системі відліку K результуючий рух тіла можна подати як обертання з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, яка в кожний момент часу збігається з вектором $\vec{\omega}$ і проходить через точку O . Ця вісь змінює напрямок відносно системи K : вона обертається разом із віссю AA' навколо осі BB' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$. У зв'язку з цим навіть тоді,

коли кутові швидкості $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ не змінюються за модулем, тіло матиме відмінне від нуля кутове прискорення відносно системи відліку K . Відповідно до означення вектор цього прискорення збігається за напрямком з напрямком приросту вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ у системі K . Для вказаного на рис. 2.14 положення векторів цей приріст кутової швидкості $d\vec{\omega}$ направлений за площину рисунка.

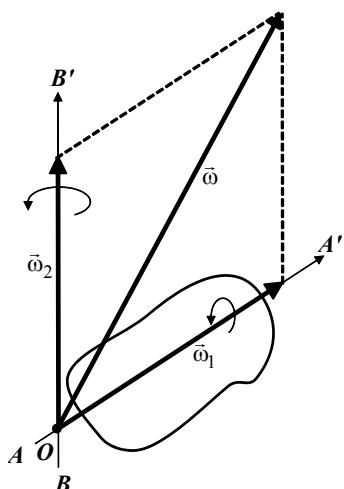


Рис. 2.14. Додавання векторів

кутової швидкості

кутової швидкості $d\vec{\omega}$ направлений за площину рисунка.

Зауважимо, що оскільки можливе додавання векторів кутової швидкості, то і будь-який вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ можна подати як векторну суму його складових за певними напрямками $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots$, де всі вектори визначені в одній і тій самій системі відліку.

2.2.5. Рух абсолютно твердого тіла як суперпозиція поступального та обертального руху

Розглянемо довільне елементарне переміщення твердого тіла як суму двох рухів: поступального руху, при якому радіус-вектори всіх точок твердого тіла набувають однакових приростів, і обертального, при якому відбувається нескінченно малий поворот твердого тіла. Нехай радіус-вектор \vec{R}_l характеризує положення деякої точки O'_l твердого тіла відносно початку O деякої системи відліку K (для наочності з нею пов'язано декартову систему координат x, y, z , рис. 2.15). Елементарне переміщення $d\vec{r}$ довільної точки P твердого тіла відносно системи K можна подати як суму приросту її радіус-вектора \vec{r} унаслідок її нескінченно малого переміщення $d\vec{R}_l$ при поступальному русі твердого тіла разом із точкою O'_l та переміщення точки P відносно точки O'_l при нескінченно малому повороті твердого тіла $d\vec{\phi}_l$ навколо осі, що проходить через точку O'_l :

$$d\vec{r} = d\vec{R}_l + [d\vec{\phi}_l \times \vec{r}'_l], \quad (2.44)$$

де \vec{r}'_l – радіус-вектор точки P відносно точки O'_l , обраної за початок рухомої системи відліку K'_l , жорстко пов'язаної з тілом. Поділимо рівність (2.44) на нескінченно малий проміжок часу dt , за який відбувається розглядуване переміщення $d\vec{r}$, і введемо відповідно до означень лінійні та кутову швидкості

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.45)$$

$$\vec{V}_l = \frac{d\vec{R}_l}{dt}, \quad (2.46)$$

$$\vec{\omega}_l = \frac{d\vec{\phi}_l}{dt} \quad (2.47)$$

ї отримаємо зв'язок між ними

$$\vec{v} = \vec{V}_l + [\vec{\omega}_l \times \vec{r}'_l]. \quad (2.48)$$

Таким чином, швидкість \vec{v} будь якої точки твердого тіла відносно деякої нерухомої системи відліку K може бути подана через лінійну швидкість деякої точки твердого тіла \vec{V}_1 , яку можна назвати миттєвою швидкістю поступального руху твердого тіла в даний момент часу, та кутову швидкість $\vec{\omega}_1$ обертання цього тіла навколо осі, що проходить через цю точку. Проте одразу виникає питання про однозначність визначення цих величин. Для його з'ясування введемо рухому систему відліку K'_2 , жорстко зв'язану з тілом, початок якої лежить у точці O'_2 , радіус-вектором якої відносно початку $O'_1 \in \vec{R}'_{12}$ (рис. 2.15). Позначимо швидкість початку O'_2 відносно системи K як \vec{V}_2 , а кутову швидкість обертання твердого тіла навколо осі, що проходить через цю точку як $\vec{\omega}_2$. Тоді цілком аналогічно виразу (2.48) маємо

$$\vec{v} = \vec{V}_2 + [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}'_2], \quad (2.49)$$

де тепер \vec{r}'_2 – радіус-вектор точки P , визначений відносно початку O'_2 . Оскільки, як видно із рис. 2.15, $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2 + \vec{R}'_{12}$, то (2.48) можна переписати у вигляді

$$\vec{v} = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_1] + [\vec{\omega}_1 \times \vec{R}'_{12}]. \quad (2.50)$$

У лівих частинах рівностей (2.49) і (2.50) стоїть вектор швидкості однієї і тієї самої точки P твердого тіла, визначеной відносно системи K . Отже, праві частини цих двох рівностей також рівні між собою

$$\vec{V}_2 + [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}'_2] = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_1] + [\vec{\omega}_1 \times \vec{R}'_{12}]. \quad (2.51)$$

Для довільної точки тіла (для довільного \vec{r}) ця рівність може бути справедливою тоді і лише тоді, коли

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1 \times \vec{R}'_{12}] \quad \text{i} \quad \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}. \quad (2.52)$$

Остання із цих рівностей дуже важлива. Вона означає, що **кутова швидкість, з якою обертається тверде тіло, у кожний момент**

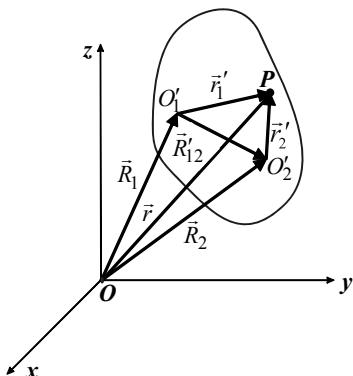


Рис. 2.15. До суперпозиції поступального та обертального рухів твердого тіла

часу не залежить від вибору осі обертання: усі системи відліку жорстко пов'язані з тілом обертаються в кожний момент часу навколо паралельних одна одній осей з однаковими кутовими швидкостями $\bar{\omega}$. Ця обставина дає нам можливість **вважати величину $\bar{\omega}$ єдиною (абсолютною) характеристикою обертального руху твердого тіла і називати її кутовою швидкістю обертання твердого як такого, не вказуючи точку, до якої вона належить.**

Щодо швидкості поступального руху твердого тіла, то вона такого абсолютноного характеру не має і залежить від вибору точки, до якої вона належить¹. Важливим частинним випадком руху твердого тіла є такий, коли вектор швидкості поступального руху перпендикулярний вектору кутової швидкості. Із рівностей (2.52) випливає, що коли $\vec{V}_1 \perp \vec{\omega}_1 = \bar{\omega}$, то і за будь-якого іншого вибору початку відліку O'_2 відповідна швидкість $\vec{V}_2 \perp \vec{\omega}_2 = \bar{\omega}$. Тоді із формул (2.48) та (2.49) видно, що вектор швидкості $\bar{\omega}$ довільної точки тіла відносно нерухомої системи відліку K лежить у площині? перпендикулярний вектору $\bar{\omega}$. Такий рух твердого тіла називається *плоским*. При плоскому русі кожна точка твердого тіла рухається у площині, паралельній деякій нерухомій площині. При плоскому русі завжди можна знайти таку точку тіла M , швидкість якої \vec{V}_M відносно нерухомої системи відліку K (поступальна швидкість твердого тіла в даний момент) дорівнює нулю. Вісь обертання, що проходить через точку M , є нерухомою в даний момент відносно системи відліку K і відповідно до рівності (2.47) швидкість $\bar{\omega}$ довільної точки твердого тіла зумовлена лише обертанням тіла навколо цієї осі. Таку вісь називають *миттєвою віссю обертання*. У кожний момент часу плоский рух тіла можна представити як обертання навколо миттєвої осі. Миттєва вісь може лежати і поза межами твердого тіла. Із часом положення миттєвої осі змінюється як відносно самого тіла, так і відносно нерухомої системи відліку K . Якщо миттєва вісь проходить через тіло, то швидкість точок тіла, що лежать на миттєвій осі дорівнює нулю (відносно системи відліку K).

Як приклад розглянемо практично важливий і поширеніший випадок плоского руху круглого циліндра або колеса по площи-

¹ Часто за таку точку обирають центр мас твердого тіла (див. підрозд. 5.4)

ні. Нехай геометрична вісь циліндра рухається з деякою швидкістю \vec{V}_C відносно площини (системи відліку K), а сам циліндр обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо цієї осі (на рис. 2.16 показано переріз, перпендикулярний осі циліндра).

Швидкість \vec{v}_A точки A циліндра, яка дотикається до площини, відносно площини може бути знайдена як сума поступальної швидкості \vec{V}_C його осі та лінійної швидкості точки A , пов'язаної з обертанням навколо осі, що проходить через точку O'_1 :

$$\vec{v}_A = \vec{V}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}_1']. \quad (2.53)$$

Якщо швидкість $\vec{v}_A = 0$, то кажуть про *чисте кочення* циліндра. При цьому виконується так звана умова (чистого) кочення

$$\vec{V}_C = -[\vec{\omega} \times \vec{r}_1'], \quad (2.54)$$

з якої випливає зв'язок між модулями векторів поступальної та кутової швидкості при чистому коченні:

$$V_C = \omega R, \quad (2.55)$$

де R – радіус циліндра. При чистому коченні положення миттєвої осі обертання M збігається з точкою дотику A (рис. 2.16, б) і лінійні швидкості всіх точок циліндра можна розглядати як такі, що виникли внаслідок обертання циліндра навколо цієї осі. Наприклад, швидкість точки C , через яку проходить геометрична вісь циліндра, $\vec{v}_C = [\vec{\omega} \times \vec{r}_{MC}] = \vec{V}_C$, а швидкість точки B , що розташована на протилежному кінці діаметра від точки A (не показана), є $\vec{v}_B = [\vec{\omega} \times \vec{r}_{MB}] = 2\vec{V}_C$.

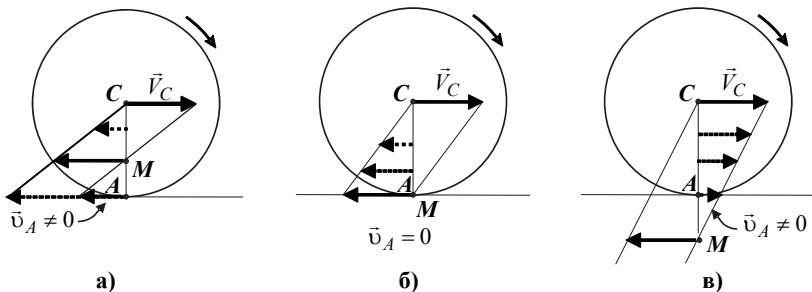


Рис. 2.16. Плоский рух круглого циліндра по площині

Якщо замість умови (2.55) маємо $V_C > \omega R$, то точка A рухатиметься відносно площини з деякою відмінною від нуля швидкістю \vec{v}_A в напрямку поступального руху циліндра, тобто в напрямку \vec{V}_C . У такому випадку кажуть про *кочення з ковзанням*. Легко зrozуміти, що при цьому миттєва вісь обертання лежить поза межами циліндра під площею, по якій він котиться (рис. 2.16, *в*). Зокрема, за $\omega = 0$ маємо *чисте ковзання* циліндра: миттєва вісь обертання M віддаляється при цьому на нескінченість.

За $V_C < \omega R$ маємо *кочення з проковзуванням*: точка A рухається відносно площини зі швидкістю \vec{v}_A , яка напрямлена протилежно вектору поступальної швидкості \vec{V}_C . Миттєва вісь M при цьому розташована над площею (рис. 2.16, *а*). У граничному випадку $V_C \rightarrow 0$ миттєва вісь збігається з геометричною віссю циліндра. Якщо в процесі руху циліндра по площині змінюється співвідношення між V_C та ω , то траєкторія точки M може бути доволі складною.

2.2.6. Степені вільності та зв'язки

Із попереднього можна помітити, що для опису положення матеріальної точки або твердого тіла і зміни його з часом у різних випадках потрібна різна кількість незалежних змінних. Наприклад, для опису нічим не обмеженого руху однієї частинки в фізичному тривимірному просторі необхідно задати залежність від часу трьох величин. Це можуть бути три координати частинки (декартові, сферичні, циліндричні чи ще якісь), такі величини, що характеризують її радіус-вектор, як наприклад, довжина та два кути, що задають його напрямок, тощо. Кажуть, що в цьому випадку частинка має *три степені вільності*.

Може трапитись, що переміщення частинки не може бути довільним, а обмежується якоюсь поверхнею. Наприклад, маленька кулька, прив'язана на кінці нерозтяжної нитки, інший кінець якої закріплено (т. зв. сферичний маятник), при натягнутій нитці може переміщуватись лише по поверхні сфери із центром у точці закріплення. У такому випадку кажуть, що на рух частин-

ки накладено зв'язки, які обмежують її можливі рухи. Математично наявність зв'язків виражається рівностями, що встановлюють зв'язок між змінними, за допомогою яких описують рух частинки. У нашому прикладі сферичного маятника координати кульки x, y, z мають у будь-який момент часу задовільняти рівняння поверхні, по якій може рухатись кулька, яке має загальний вигляд $F(x,y,z)=0$. Завдяки цьому незалежними залишаються тільки дві координати, наприклад, x та y . Третю координату z завжди можна знайти з рівняння $F(x,y,z)=0$. У такому випадку кажуть, що частинка має *два степені вільності*.

Нарешті, якщо частинка може переміщуватись лише вздовж деякої просторової кривої, яка може бути задана системою рівнянь $F_1(x,y,z)=0, F_2(x,y,z)=0$ як перетин двох поверхонь, то кількість незалежних величин, необхідних для визначення її положення, зменшується до однієї, тобто частинка має один степінь вільності. Такою величиною може бути, наприклад, відстань, відрахована вздовж кривої від частинки до деякої обраної на кривій точки – початку відліку (див. п. 2.1.3 про природний спосіб опису руху частинки). У цьому випадку кажуть, що частинка має *один степінь вільності*.

Як видно з двох наведених прикладів, використовувати декартові координати як незалежні не завжди зручно. Натомість можуть бути введені будь-які величини, кількість яких збігається з кількістю степенів вільності, і вони однозначно визначають положення частинки. Такі величини називають *узагальненими координатами* і традиційно позначають буквами q_1, q_2, q_3 тощо. У наведеному вище прикладі руху частинки вздовж фіксованої в просторі кривої за узагальнену координату взято довжину шляху s вздовж кривої, тобто $q_1 = s$. Якщо частинка рухається по колу, то її положення можна характеризувати як величиною s , так і величиною центрального кута φ , що його утворює в кожний поточний момент часу радіус-вектор частинки, проведений із центра колової траєкторії з напрямком, який він займає у деякий момент часу, наприклад, за $t = 0$. Узагальненій координаті q відповідає узагальнена швидкість $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, яка в останньому

прикладі $\dot{q} = \dot{\phi}$. Для згаданого вище сферичного маятника можна запропонувати різні варіанти конкретного вибору двох узагальнених координат, що відповідають його двом степеням вільності. Наприклад, можна ввести q_1 як кут θ відхилення нитки від вертикалі, а q_2 як азимутальний кут φ між площиною, яка містить вертикаль і нитку в поточний момент часу, та деякою вертикальною площиною, що проходить через точку підвісу.

У повсякденному житті узагальненими координатами ми користуємось частіше, ніж може здатися на перший погляд. Візьмемо приклад визначення координат різних транспортних засобів. Для визначення положення потяга в даний момент часу досить назвати одне число (узагальнену координату), відстань уздовж колії до найближчої вузлової станції. Надводний корабель на поверхні океану, на відміну від потяга, має два степені вільності і його положення визначене двома узагальненими координатами: географічною широтою q_1 та географічною довготою q_2 . Підводний човен або літак, на відміну від надводного корабля, має три степені вільності: до широти і довготи слід додати третю узагальнену координату q_3 – глибину занурення або висоту польоту.

Сказане вище про степені вільності легко узагальнити для випадку системи частинок, яка складається із довільної кількості частинок. Якщо кожна із частинок системи (нехай їх буде n), може рухатись незалежно від інших без будь-яких обмежень, то, оскільки для визначення положення кожної точки необхідний **один** радіус-вектор або три координати, то для визначення положення всіх точок системи в деякий момент часу необхідно n незалежних радіус-векторів або $3n$ незалежних координат. Однак, якщо можливість переміщення частинок обмежена, то на їх координати накладаються додаткові умови – зв'язки, які виражаються *рівняннями зв'язку*, що встановлюють певні співвідношення між координатами частинок у процесі руху і зменшують, таким чином, кількість незалежних координат. Тоді для однозначного визначення положення всіх частинок системи досить знати меншу кількість координат $f < 3n$. Інші $3n - f$ координат можуть бути обчислені з рівнянь зв'язку. Як і у випадку однієї частинки для однозначного опису руху системи достатньо обра-

ти належним чином f узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_f . Це можна зробити по-різному, але завжди кількість узагальнених незалежних координат має бути однаковою і дорівнювати *кількості степенів вільності системи* f .

Наприклад, система, що складається із двох частинок, жорстко зв'язаних невагомим стрижнем, має п'ять степенів вільності, оскільки кількість степенів вільності двох незв'язаних частинок дорівнює шести, але вона зменшується на одиницю за рахунок наявності зв'язку. Справді, якщо одну частинку можна вважати вільною (три степені вільності), то рух другої відносно першої обмежений сферичною поверхнею, описаною навколо першої частинки радіусом, який дорівнює довжині стрижня (два степені вільності).

Аналогічні міркування застосовані й до визначення кількості степенів вільності абсолютно твердого тіла, рух якого нічим не обмежений. Як було зазначено, положення абсолютно твердого тіла в просторі може бути однозначно задане положенням будь-яких трьох його точок, що не лежать на одній прямій. Якщо до двох жорстко зв'язаних точок додати третю, відстані якої до перших двох фіксовані, то вона може рухатись лише по коловій трасекторії, центр якої лежить на прямій, що проходить через перші дві точки. Отже, третя точка має лише один степінь вільності руху відносно перших двох і, таким чином, повна кількість степенів вільності трьох жорстко зв'язаних точок, а значить і всього твердого тіла, становить $f = 3 + 2 + 1$. Такий самий результат можна отримати з дещо інших міркувань: три вільні точки мали б дев'ять степенів вільності, але оскільки існують три зв'язки (три фіксовані відстані між ними), то кількість степенів вільності буде $f = 9 - 3 = 6$. За тих чи інших обмежень руху твердого тіла кількість його степенів вільності зменшується. Наприклад, при вільному поступальному русі тверде тіло має три степені вільності, які часто називають поступальними, при вільному обертанні навколо однієї нерухомої точки також три степені вільності, які називають обертальними. При обертанні навколо нерухомої осі тверде тіло має один степінь вільності, а при плоскому русі – три, один з яких відповідає обертанню тіла навколо осі, перпендикулярної фіксованій у просторі площині, а два інших – поступальним переміщенням у цій площині.

Контрольні запитання та вправи

2.1. Пояснити, чому для визначення положення точки в тривимірному просторі векторним або координатним способом необхідно 3 числа, а при застосуванні траєкторного способу – лише одне.

2.2. Річковий прогулянковий катер курсує з пункту A вниз за течією річки, розвертався в пункті B і повертається назад до пункту A . Чи зміниться час прогулянки, якщо зміниться швидкість течії річки? Швидкість катера відносно води вважати незмінною.

2.3. Тілу надають одну й ту саму початкову швидкість v_0 , спрямовану під різними кутами α щодо горизонту. За яких значень кута α : а) досягається найбільше та найменше переміщення тіла; б) тіло проходить найкоротший і найдовший шлях до падіння на Землю? Опором повітря знехтувати. Зобразити відповідні траєкторії.

2.4. Чи може швидкість тіла дорівнювати нулю, а його прискорення в цей момент часу бути відмінним від нуля? Навести приклади.

2.5. Ліфт рухається вгору з постійною швидкістю 5 м/с. Один із пасажирів упустив яблуко. Яке прискорення має яблуко відносно кабіни ліфта?

2.6. Яку швидкість мали б дощові краплі, якби вони падали з висоти 300 м без опору повітря?

2.7. Чи може автомобіль мати миттєву швидкість, спрямовану на схід, і миттєве прискорення, спрямоване на північ? Наведіть приклад.

2.8. Яке прискорення має артилерійський снаряд у найвищій точці своєї траєкторії?

2.9. Чим зумовлені похибки визначення місцезнаходження (координат) рухомого об'єкта за допомогою інерціальних системах навігації?

2.10. Яким вектором – полярним чи аксіальним буде векторний добуток: а) двох аксіальних векторів; б) полярного та аксіального векторів?

2.11. Автомобіль виконує розворот на 180° за 5 с. Яка його середня кутова швидкість за час розвороту?

2.12. При скількох обертах на хвилину периферійна лінійна швидкість кінців лопатей пропелера літака діаметром 6 м може досягнути швидкості звуку (330 м/с)?

2.13. Гусеничний трактор рухається рівномірно і прямолінійно відносно горизонтальній поверхні дороги зі швидкістю V . З якою швидкістю відносно дороги та відносно корпусу трактора рухаються ланки верхньої та нижньої ділянок гусениці? Чи можна вважати рух усіх ланок гусениці плоским? Які ланки гусениці рухаються поступально?

2.14. Несучий ґвинт вертолітота здійснює 200 об/хв навколо вертикальної осі, а його хвостовий ґвинт – 1000 об/хв навколо горизонтальної осі. Знайти кутове прискорення хвостового ґвинта відносно несучого ґвинта.

2.15. Скільки степенів вільності мають молекули водню, води, вуглекислого газу та метану? Вважати відстані між ядрами атомів сталими.

РОЗДІЛ 3

Закони Ньютона

- основа класичної механіки

У попередньому розділі, присвяченому кінематиці, було введено поняття і фізичні величини, що дозволяють кількісно описати механічний рух, але питання про причини зміни або сталості таких величин, як, наприклад, радіус-вектор частинки, її швидкість або прискорення не розглядалися. Ці причини з'ясовуються в розділі механіки, що називається *динаміка* (від грец. δύναμις – сила). В основі динаміки і всієї класичної механіки Ньютона лежать три закони, які сформулював І. Ньютон у 1687 р. Із них можна отримати всі рівняння та теореми, необхідні для розв'язання задач механіки. Закони Ньютона з'явились як наслідок узагальнення численних спостережень, дослідів та теоретичних досліджень Г. Галілея, Х. Гюйгенса, самого Ньютона та ін.

У цьому розділі ми покажемо, як на підставі узагальнення дослідних фактів можна прийти до понять інерціальної системи відліку, сили та маси, необхідних для формульовання законів Ньютона відповідно до сучасних уявлень та термінології. Також будуть наведені приклади застосування законів Ньютона до розв'язання різноманітних задач динаміки матеріальної точки та окреслені межі їх застосування.

3.1. Перший закон Ньютона та інерціальні системи відліку

У кінематиці зазвичай розглядається лише опис рухів і не почується питання про причини, які їх викликають, причому немає ніякої принципової різниці між різними системами відліку: усі вони рівноправні. Якщо ж звернутися до причин, що зумовлюють той чи інший характер руху, наприклад, прискорений

рух тіла відносно обраної системи відліку, то виявляється, що такої рівноправності вже не існує. Досвід показує, що прискорення тіла відносно якоїсь системи відліку може бути спричинене як дією на тіло інших матеріальних об'єктів, так і властивостями самої системи відліку.

Розглянемо демонстраційний дослід, показаний на рис. 3.1, а. Сталева кулька A скочується по похилому жолобу і далі рухається по поверхні стола прямолінійно і, наскільки можна судити, рівномірно. При безпосередньому зіткненні з яким-небудь іншим тілом, наприклад, з іншою кулькою B , швидкість кульки A змінюється як за напрямком, так і за модулем, тобто кулька A набуває прискорення. Зауважимо, що безпосередній механічний контакт кульки A з іншими тілами не є необхідною умовою для зміни її швидкості. Прикладом може бути дія на кульку A постійного магніту M , підвішеного над поверхнею стола, унаслідок якої траєкторія кульки викривається (рис. 3.1, б). У цьому випадку кажуть, що кулька взаємодіє з магнітом через магнітне поле. Також можна сказати, що вона взаємодіє з магнітним полем (створеним постійним магнітом M). Саме тому в загальному випадку, коли ми кажемо про взаємодію, то не обмежуємося взаємодією з **тілами**, а маючи на увазі також взаємодію з **полями**, кажемо про взаємодію з **матеріальними об'єктами** загалом.

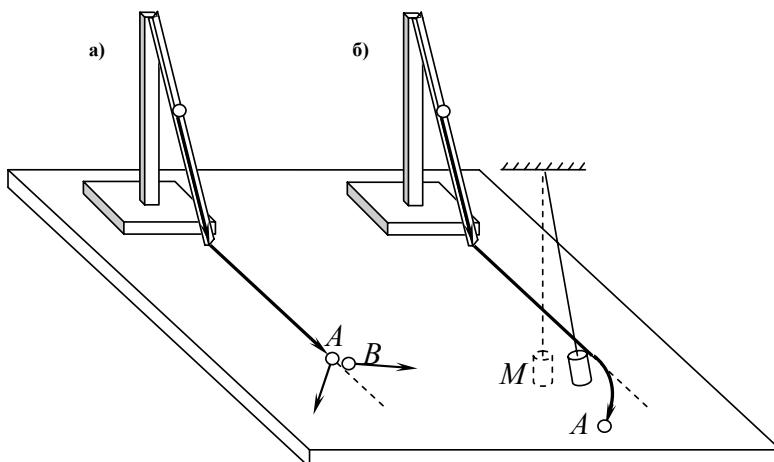


Рис. 3.1. До питання про виникнення прискорення тіл

Наведений дослід дозволяє **припустити**, що існують такі системи відліку, в яких прискорення тіла обумовлене лише його взаємодією з іншими матеріальними об'єктами. Якщо взаємодія *тіла* з іншими матеріальними об'єктами відсутня, тобто відбувається **вільний рух тіла** (*рух по інерції*), то в таких системах відліку відсутнє і його прискорення. Відсутність прискорення означає, що вільна матеріальна точка відносно такої системи відліку рухається **прямолінійно і рівномірно**. Системи відліку, що мають задану властивість, називають *інерціальними*.

Твердження про те, що інерціальні системи відліку (ICB) існують, становить зміст *першого закону Ньютона* (як іноді кажуть, *закону інерції Галілея–Ньютона*):

Існують інерціальні системи відліку, в яких вільний рух матеріальної точки відбувається прямолінійно і рівномірно.

Галілей прийшов до закону інерції на підставі проведених ним спостережень, а Ньютон поклав цей закон в основу своєї механіки. Ньютон формулював закон інерції так: **будь-яке тіло перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки дія на нього з боку інших тіл не змінить цей стан.**

Можна помітити, що в наведеному формулюванні нічого не сказано про систему відліку, відносно якої розглядається рух. Розглянемо дві системи відліку, які рухаються з прискоренням одна відносно одної. Якщо в одній із них закон інерції за Ньютоном виконується, то в тій, що рухається прискорено, він напевно не буде виконуватись. Для правильного розуміння ньютонівського формулювання закону інерції необхідно згадати, що Ньютон розглядав рух відносно так званої **абсолютної системи відліку**, існування якої спирається на введені ним постулати про існування **абсолютного простору та абсолютноого часу**. Саме в такій системі відліку, хоча про неї прямо нічого не сказано, і справедливе наведене вище формулювання Ньютона. Ця абсолютна система відліку фактично має властивості інерціальної системи відліку. Таким чином, обидва формулювання еквівалентні.

Існує безліч інерціальних систем відліку: будь-яка система відліку, яка рухається відносно деякої ICB рівномірно та прямолінійно, є також інерціальною. Твердження про існування інерціальних систем відліку має характер постулату, оскільки ICB – це деяке граничне поняття, певна ідеалізована модель, до якої більшою чи

меншою мірою наближаються ті чи інші реальні системи відліку. На практиці в різних випадках за інерціальні системи (з достатнім наближенням) можна обирати системи відліку, пов'язані з різними тілами відліку.

З описаного досліду можна зробити висновок, що **систему відліку, пов'язану з поверхнею стола** (рис. 3.1), тобто з поверхнею Землі в умовах даного досліду можна вважати інерціальною.

Можливість виникнення прискорення тієї самої кульки лише внаслідок певного характеру руху системи відліку добре видно в демонстраційному досліді з кулькою, яка скочується по похилій площині на поверхню горизонтального диска, що має можливість обертатися навколо вертикальної осі (див. розд. 4, рис. 4.3). Якщо диск нерухомий відносно поверхні лабораторного стола (поверхні Землі), то слід від попередньо натертого крейдою кульки на поверхні диска буде прямолінійним, тобто вільний рух кульки по горизонтальній поверхні нерухомого диска нічим не відрізняється від її вільного прямолінійного руху по поверхні лабораторного стола в досліді, показаному на рис. 3.1, а. Проте, якщо диск обертається, то слід, який залишає на поверхні диска кулька, що скочується, явно викривлений, тобто відносно системи відліку, зв'язаної з диском, що обертається відносно лабораторного стола, кулька має прискорення.

Зауважимо, що спостерігачі, які перебувають в аудиторії, прекрасно бачать, що відносно лабораторного стола кулька рухається прямолінійно, а причиною викривлення її траєкторії відносно диска є те, що його поверхня "прокручується" під кулькою, яка рухається прямолінійно і рівномірно відносно стола та поверхні Землі. Таким чином, системи відліку пов'язані з поверхнею Землі (поверхнею стола, поверхнею нерухомого диска) в умовах описаних дослідів можна вважати інерціальними, а систему відліку, пов'язану з поверхнею диска, що обертається, інерціальною вважати не можна.

Більш тонкі експерименти, які ми будемо обговорювати в подальшому, свідчать про те, що система відліку, пов'язана з поверхнею Землі, може вважатися інерціальною лише наближено. Причина полягає в обертанні Землі навколо полярної осі та її річному русі по орбіті навколо Сонця. Помітно кращим наближенням до ICB є так звана *геоцентрична* система відліку, пов'яза-

зана із центром Землі та з "нерухомими" віддаленими зірками. Багаторічні астрономічні спостереження свідчать про те, що дуже хорошим наближенням до ICB є система відліку, пов'язана із Сонцем та "нерухомими" зірками. Початок відліку в цій системі звичайно обирають у центрі Сонця, звідки і назва *геліоцентрична*, або *коперникова*¹. До останнього часу ця система повністю задовольняє всі практичні потреби.

У табл. 3.1 наведено дані про прискорення систем відліку, початки яких зв'язані з різними тілами відліку. Можна помітити загальну тенденцію, яка полягає в тому, що система відліку тим близчча до ідеальної ICB, чим більша маса тіл відліку та чим менша кривина траекторії, по якій вони рухаються.

Таблиця 3.1
Прискорення систем відліку

| Система відліку пов'язана із: | Прискорення, м/с ² |
|---|-------------------------------|
| 1) салоном міського транспорту | ~ 1 |
| 2) поверхнею Землі або тілами, нерухомими відносно неї (напр., аудиторію) | $3 \cdot 10^{-2}$ |
| 3) центром Землі (геоцентрична СВ) | $1,6 \cdot 10^{-3}$ |
| 4) центром Сонця (геліоцентрична СВ) | $3 \cdot 10^{-10}$ |
| 5) центром мас місцевої Галактики | ? |

3.2. Сила та інертна маса: другий закон Ньютона

Узагальнюючи результати спостережень та дослідні факти можна дійти висновку, що дія одного тіла на інше має характер взаємодії: якщо тіло *A* діє на тіло *B*, то й тіло *B* діє на тіло *A*, причому результатом взаємодії тіл у механіці є їх прискорення або деформація. Повернемося до досліду, зображеного на рис. 3.1. Коли кулька *A*, що рухається по поверхні стола, стикається з кулькою *B*, то не лише кулька *A*, але й кулька *B* набуває прискорення, оскільки після зіткнення вона рухається, а до зітк-

¹ Геліоцентричну модель руху планет сонячної системи запропонував М. Коперник у першій половині XVI ст. замість панівної на той час *геоцентричної* системи.

нення перебувала у спокої. У досліді з підвішеним магнітом можна також помітити, що внаслідок взаємодії не тільки викривлюється траєкторія кульки A , але й магніт M набуває деякої швидкості, а нитка підвісу відхиляється від вертикалі. Це відхилення можна розглядати як деформацію системи магніт–підвіс. Отже, наслідком взаємодії може бути прискорення або деформація. Загалом будь-яка деформація як зміна відносного положення частинок тіла супроводжується їх прискоренням, тобто прискорення тіл або їх частин можна вважати первинним наслідком взаємодії в механіці. Отже, можна казати про існування фізичної властивості тіл взаємодіяти між собою з виникненням прискорення. Для кількісної характеристики цієї фізичної властивості вводять відповідну фізичну величину – *силу*. Таким чином, **сила в механіці виступає як міра взаємодії**. Оскільки в ICB прискорення тіла може виникнути лише при його взаємодії з іншими тілами, то про силу, що діє на деяке тіло з боку інших тіл часто кажуть як про причину прискорення, і навпаки: прискорення тіла в ICB завжди є наслідком дії якоїсь сили. У зв'язку з цим постулюють, що сила – вектор \vec{F} , направлений так само, як і прискорення \vec{a} , викликане цією силою, тобто $\vec{F} \parallel \vec{a}$. Отже:

Сила в механіці – це векторна фізична величина, що характеризує механічну взаємодію тіл (є мірою механічної взаємодії тіл). За напрямок сили обирають напрямок прискорення, яке вона спричинює.

При введенні нової фізичної величини необхідно вказати спосіб її вимірювання, тобто спосіб її кількісного порівняння з еталоном цієї величини. Вимірювання сили ґрунтуються на вимірюванні величин, що характеризують наслідки дії сили: прискорення та деформації тіл. Відповідно існують два способи вимірювання сили: динамічний *та* статичний.

Статичний спосіб вимірювання сили, прикладеної до деякої частинки, полягає в урівноважуванні цієї сили іншою силою, прикладеною до цієї частинки з боку певним чином деформованої пружини-еталона, яка відтворює еталон сили (рис. 3.2). За еталон сили приймемо таку силу $\vec{F}_{\text{ет}}$, яка розтягує пружину-етalon на довжину Δl . Якщо при одночасній дії цих двох сил, направлених уздовж однієї прямої в протилежних напрямках,

частинка A перебуватиме у спокої відносно деякої ICB (рис. 3.2, а), то можна твердити, що вимірювана сила дорівнює за модулем силі-еталону. Маючи у своєму розпорядженні одну пружину – первинний еталон, ми можемо описанім способом відтворити будь-яку необхідну кількість вторинних пружин-еталонів $\vec{F}_{\text{et}1}, \vec{F}_{\text{et}}, \dots \vec{F}_{\text{et}N}$, певна деформація кожної з яких відповідає прикладанню до них еталонної сили \vec{F}_{et} . З'єднуючи ці вторинні пружини-еталони послідовно, паралельно або під різними кутами, можна виміряти невідому величину будь-якої сили \vec{F}_x , яка є більша чи менша й необов'язково кратна величині еталона сили \vec{F}_{et} (рис. 3.2, б–г). Найперше, у чому необхідно переконатись, навчившись порівнювати сили між собою, це в тому, що сили можна додавати за правилами додавання векторів, тобто сила дійсно є вектором.

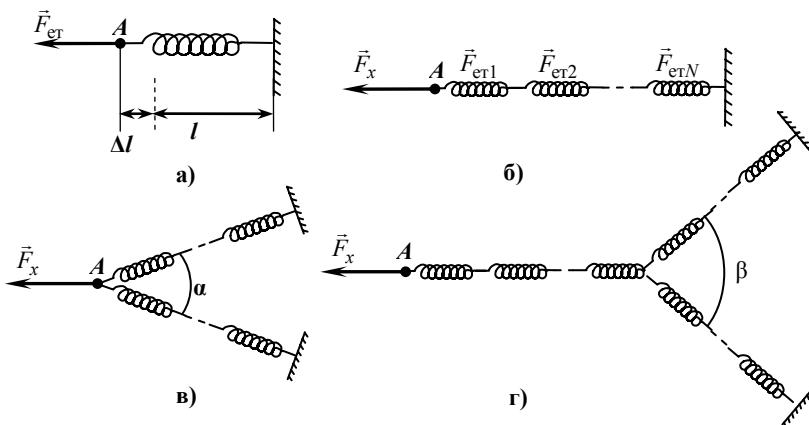


Рис. 3.2. До вимірювання сил статичним методом

Динамічний спосіб вимірювання сил має перед статичним ту перевагу, що дозволяє визначати сили, які прикладені до тіла в процесі руху. Він спирається на такий дослідний факт: прискорення, яких набуває одне й те саме тіло під дією різних сил, пропорційні величинам цих сил, вимірюваних статичним способом:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (3.1)$$

Із рівності (3.1) випливає, що для одного й того самого тіла відношення модуля сили до величини прискорення, зумовленого цією силою, є сталою величиною:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \text{const} . \quad (3.2)$$

Водночас дослід показує, що в загальному випадку для різних тіл ці відношення виявляються різними. Отже, можна зробити висновок про існування деякої властивості тіл, яку можна кількісно характеризувати величиною відношення сили до прискорення, нею спричиненого. Ця властивість, як свідчить досвід, універсальна, загальна для всіх без винятку тіл незалежно від їх форми, матеріалу, електричного заряду, намагніченості тощо. Вона являє собою здатність тіла зберігати незмінною свою швидкість відносно інерціальних систем відліку і називається *інертністю тіла*. Для кількісної характеристики інертності тіл (як міру інертності тіл) вводять фундаментальну фізичну величину, яку називають *масою тіла* m і яка прямо пропорційна відношенню модуля сили до модуля прискорення, F/a . Уведену в такий спосіб масу називають *інертною масою*, щоб відрізняти її від *маси гравітаційної*, що вводиться на основі закону всесвітнього тяжіння і про яку йтиметься пізніше.

Із визначення інертної маси випливає спосіб її вимірювання (порівняння мас). До кожного з тіл, маси яких необхідно порівняти, прикладаємо одну й ту саму силу і вимірюємо прискорення, яких вони набувають під дією цієї сили. Відношення мас буде дорівнювати оберненому відношенню прискорень

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} . \quad (3.3)$$

Обравши деяке тіло за еталон маси, можна в такий спосіб порівнювати масу будь-якого тіла із цим еталоном. Оскільки маса визначається одним числом – відношенням модулів двох векторів, то вона є скалярною величиною. Підводячи підсумок, можна сформулювати таке означення:

Маса – це скалярна фізична величина, що характеризує інерційні властивості тіл (є мірою інертності тіл).

Ще раз підкреслимо, що тут йдеться про так звану інерційну масу. Уся сукупність дослідів і спостережень свідчить про те, що в межах класичної механіки, тобто за швидкостей руху, набагато менших від швидкості світла, маса має дві такі важливі властивості:

- **маса є величиною адитивною, тобто маса складеного тіла дорівнює сумі мас його складових частин;**
- **маса тіла є сталою величиною, що не змінюється при його русі.**

На підставі узагальнення результатів дослідів (формули (3.1) – (3.3)) може бути сформульований другий закон Ньютона:

Прискорення матеріальної точки в ІСВ прямо пропорційне прикладеній до неї силі й обернено пропорційне її масі.

Другий закон Ньютона можна виразити векторним рівнянням

$$m\ddot{a} = \vec{F}, \quad (3.4)$$

де \vec{F} у загальному випадку результуюча (векторна сума) усіх сил, прикладених до матеріальної точки, $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. Зауважимо,

що при запису рівняння (3.4), коефіцієнт пропорційності, про яку йдеться в наведеному вище означенні другого закону Ньютона, покладено рівним одиниці.

Рівняння (3.4) називають *основним рівнянням динаміки матеріальної точки*, оскільки воно дозволяє за відомими масою матеріальної точки та силами, прикладеними до частинки, визначити її прискорення, а потім, використовуючи початкові умови, також її швидкість та положення в будь-який момент часу (див. п. 2.1.4), або, як прийнято казати, її *механічний стан*.

Механічний стан матеріальної точки в кожний момент часу визначається її положенням і швидкістю (радіус-вектором $\vec{r}(t)$ і вектором швидкості $\vec{v}(t)$).

Таким чином, рівняння (3.4) описує еволюцію механічного стану матеріальної точки із часом. Рівняння, які описують часову еволюцію стану фізичної системи прийнято називати *рівняннями руху*. Отже, рівняння (3.4) є *рівнянням руху матеріальної точки*. За його допомогою за наявності необхідних даних може бути знайдено *закон руху матеріальної точки* у формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

У частинному випадку вільного руху матеріальної точки, коли на неї не діють ніякі сили, у рівнянні (3.4) $\vec{F} = 0$, звідки випливає, що $\vec{a} = 0$, а отже, і $\vec{v} = \text{const}$, що відповідає прямолінійному рівномірному руху. Цей висновок збігається за змістом з першим законом Ньютона, у зв'язку з чим може виникнути враження, що перший закон Ньютона є наслідком другого. Однак, як ми бачили, саме перший закон постулює існування інерціальних систем відліку, а другий закон справедливий лише в ICB, і тому перший закон формулюють незалежно від другого.

3.3. Фундаментальні взаємодії та сили актуальні в механіці

Оскільки сила в механіці є мірою взаємодії, то логічно класифікувати сили за відповідними взаємодіями. На сьогодні відомі чотири фундаментальні взаємодії, характеристики яких наведено в табл. 3.2. Хоча сильна взаємодія набагато інтенсивніша за інші, її радіус оцінюється лише як 10^{-13} м. Ще менший радіус слабкої взаємодії. Ці взаємодії відіграють вирішальну роль у фізиці атомного ядра та елементарних частинок, але в задачах класичної механіки, область застосування якої обмежується макроскопічними тілами, вони ніяк не проявляються внаслідок малого радіуса їх дії.

Таблиця 3.2
Фундаментальні взаємодії

| Назва взаємодії | Інтенсивність взаємодії | Радіус взаємодії |
|--------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1. Сильна | 1 | 10^{-13} м |
| 2. Електромагнітна | $10^{-2} \div 10^{-3}$ | $\infty (F \sim 1/r^2)$ |
| 3 Слабка | 10^{-12} | 10^{-18} м |
| 4. Гравітаційна | $10^{-39} \div 10^{-45}$ | $\infty (F \sim 1/r^2)$ |

Таким чином у механіці актуальні лише **гравітаційна** та **електромагнітна** взаємодії та відповідні сили.

Для того, щоб звести відшукання закону руху матеріальної точки до суто математичної задачі, необхідно знати так звані **закони сил**, або, як ще іноді кажуть, **формули сил**, прикладених

до матеріальної точки, тобто залежність сил від інших фізичних величин. Закони сил встановлюються експериментальним шляхом за допомогою розглянутих вище способів вимірювання сил. Розглянемо закони сил, які застосовують при розв'язуванні задач класичної механіки.

3.3.1. Сили гравітаційної та електромагнітної взаємодії

Сила гравітаційного притягання. Сила гравітаційного притягання, що діє між двома матеріальними точками, визначається встановленим Ньютоном законом всесвітнього тяжіння, який виражається формулою

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.5)$$

де G – так звана гравітаційна стала ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$); m_1 та m_2 – *гравітаційні* маси матеріальних точок, що взаємодіють; r – відстань між ними. Гравітаційні маси, що фігурують у формулі закону всесвітнього тяжіння (3.5) встановлюють на основі цього закону, і вони є мірою гравітаційних властивостей тіл, тобто їх здатності притягуватись одне до одного незалежно від їх інших фізичних властивостей. Закон всесвітнього тяжіння (3.5) і гравітаційна маса докладно будуть розглянуті в розд. 7. Зараз ми лише зауважимо, що дослідним шляхом з високою точністю встановлено пропорційність інертної та гравітаційної мас. Обравши коефіцієнт пропорційності таким, що дорівнює одиниці, ці маси можна вважати рівними одна одній, а для їх вимірювання використовувати один і той самий еталон та одну й ту саму одиницю. Одиницею маси в системі СІ є кілограм, а первинним еталоном, що відтворює цю одиницю є спеціально створений прототип, що являє собою циліндр висотою та діаметром 39 мм, виготовлений зі сплаву платини (90 %) та іридію (10 %). Він постійно зберігається в Міжнародному бюро мір і ваг в Парижі.

Еталон кілограма – це єдиний з еталонів основних механічних одиниць системи СІ (табл. 1.1), який не може бути відтворений природним шляхом, а потребує порівняння з

прототипом, хоча початкова ідея полягала в тому, що маса прототипу має збігатися з масою 1 дм³ води за її найбільшої густини (за температури 3,98 С) і тиску 1 фізична атмосфера (101 325 Па). На перший погляд, такий еталон легко відтворити, але на практиці виникає цілий ряд серйозних проблем, починаючи від точного відтворення згаданих умов до коливань ізотопного складу води різного походження. Це спонукало вдастися до виготовлення спеціального еталона, який здатний забезпечити сталість визначення 1 кг з відносною точністю краще за 10⁻⁸ протягом багатьох тисяч років. Насправді виявилось, що маса прототипу більша за масу 1 дм³ води при згаданих умовах на 28 мкг. Принципова можливість створення еталона одиниці маси, який можна відтворити будь-де, подібно до еталонів метра і секунди існує, наприклад, як маси певної кількості атомів певного стабільного ізотопу певного хімічного елемента.

З урахуванням вищевикладеного можна дати розгорнуте означення маси, справедливе в межах класичної механіки Ньютона.

Маса – це скалярна фізична величина, що є мірою інерційних та гравітаційних властивостей матерії.

Надалі термін *маса* використовуватимемо без вказівок на її характер, за винятком випадків, коли таке уточнення необхідне.

Вектор сили гравітаційного притягання \vec{F}_{12} , яка прикладена до матеріальної точки m_1 з боку матеріальної точки m_2 , у векторному вигляді можна записати так:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}, \quad (3.5a)$$

де початок радіус-вектора \vec{r}_{12} , який характеризує відносне положення матеріальних точок, обрано в місці розташування матеріальної точки m_1 , а кінець – у місці розташування матеріальної точки m_2 . Відповідно напрямок сили \vec{F}_{12} збігається з напрямком радіус-вектора \vec{r}_{12} (рис. 3.3).

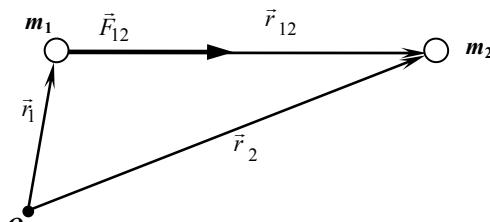


Рис. 3.3. Сила гравітаційного притягання

Однорідна сила тяжіння. У багатьох задачах про рух тіла в обмеженій ділянці простору поблизу поверхні Землі вважають, що на тіло діє однорідна сила тяжіння:

$$\vec{F}_{\text{тж}} = m\vec{g}, \quad (3.6)$$

де \vec{g} – так званий *вектор прискорення вільного падіння*, напрямлений по лінії виска в даній точці земної поверхні (докладніше про однорідну силу тяжіння див. у розд. 4).

Сила електромагнітної взаємодії. До електрично зарядженої частинки, що перебуває в електромагнітному полі, з боку цього поля прикладена сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (3.7)$$

де q – заряд частинки, \vec{v} – швидкість частинки, а \vec{E} і \vec{B} , відповідно – вектори напруженості електричного поля та індукції магнітного поля в місці знаходження частинки, визначені в тій самій системі відліку, що й швидкість частинки \vec{v} .

Сила Лоренца. Силу, прикладену до точкового заряду з боку магнітного поля $\vec{F}_{\text{Лор}} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$, називають *силою Лоренца*. Вона завжди перпендикулярно до векторів \vec{v} і \vec{B} . Її знак змінюється на протилежний при зміні знака заряду (рис. 3.4).

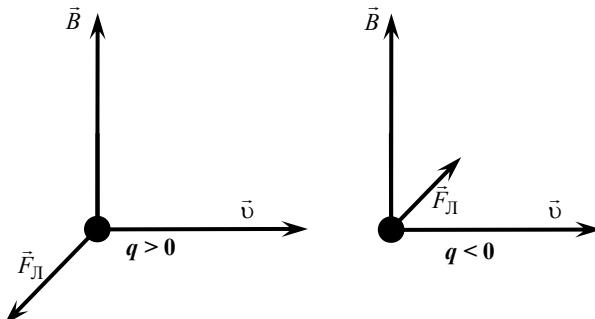


Рис. 3.4. Сила Лоренца

Закон Кулона. Якщо електричне поле, що діє на заряджену частинку (точковий заряд) q_1 створюється іншим точковим зарядом q_2 , то сила взаємодії між ними, яку називають *кулонівською силою*, визначається законом Кулона:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3.8)$$

де r – відстань між ними, k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибору системи одиниць¹. Формули гравітаційної та кулонівської сил цілком подібні, але, на відміну від маси m , яка є додатно визначеною величиною, величини електричних зарядів q можуть бути як додатними, так і від'ємними, причому заряди одного знака взаємно відштовхуються, а заряди різних знаків – притягаються.

Кулонівську силу \vec{F}_{12} , яка прикладена до точкового заряду q_1 з боку точкового заряду q_2 , у векторному вигляді можна записати у вигляді

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.8a)$$

де \vec{r}_{12} – радіус-вектор, початок якого обрано в місці розташування точкового заряду q_1 , а кінець – у місці розташування точкового заряду q_2 . Якщо взаємодіють заряди різних знаків, тобто, коли $q_1 q_2 > 0$, то відбувається притягання і напрямок сили \vec{F}_{12} збігається з напрямком радіус-вектора \vec{r}_{12} . Якщо взаємодіють заряди одного знака, тобто, коли $q_1 q_2 < 0$, то відбувається відштовхування і напрямок сили \vec{F}_{12} буде протилежним напрямку радіус-вектора \vec{r}_{12} (рис. 3.5).

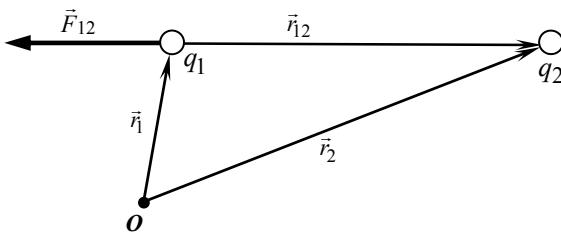


Рис. 3.5. Кулонівська сила відштовхування

¹ У системі СІ, у якій одиницею електричного заряду є кулон, $k = 1 / 4\pi\epsilon_0$, де $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \Phi / \text{м}$.

3.3.2. Формули сил, що виникають при механічному контакті тіл

Усі взаємодії тіл, рух яких розглядається в класичній механіці, можуть бути зведені до двох фундаментальних взаємодій: гравітаційної та електромагнітної. Однак у такому разі аналіз цілого ряду явищ виявився б настільки складним, що його практично не можна було б здійснити. Візьмемо для прикладу безпосередній механічний контакт двох тіл. На мікроскопічному рівні, тобто між атомами та молекулами цих тіл, діють електромагнітні сили, які зумовлюють сили взаємодії між тілами, що проявляються макроскопічно, наприклад, як деформація цих тіл. Проте розрахувати ці макроскопічні сили шляхом врахування електромагнітної взаємодії величезної кількості атомів практично неможливо. У таких випадках зручно ввести *наближені закони сил*, які встановлюють емпіричним шляхом і за допомогою яких з достатньою точністю кількісно описують реально існуючі на макроскопічному рівні взаємодії тіл.

Сили пружності. При деформації твердих тіл відбувається зміщення частинок з положень рівноваги і на кожну частинку деформованого тіла діє сила, направлена до відповідного положення рівноваги, яку при малих зміщеннях можна вважати пропорційно величині зміщення. Цю силу називають *силою пружності деформації*, або *пружною силою (силою пружності)*:

$$\vec{F}_{\text{пруж}} = -k\vec{r}, \quad (3.9)$$

де \vec{r} – вектор зміщення з положення рівноваги, а коефіцієнт k називається *коефіцієнтом пружності*. Будь-яку силу, яку можна описати формулою (3.9), навіть не пов'язану з деформацією, називають *квазіпружною силою*¹.

Сили тертя. Нехай два тверді тіла A і B дотикаються одне до одного (мають механічний контакт) у точці K (рис. 3.6). Силу \vec{R} , з якою одне тіло (напр., A) діє на інше тіло (напр., B) завжди можна розкласти на дві лінійно незалежні складові. Одна з них, \vec{N} , перпендикулярна до дотичної площини Q у точці контакту (на рис. 3.6 слід площини Q показано штриховою лінією)

¹ Префікс *квазі* має грецьке походження й означає *подібний*.

і називається *нормальню складовою сили реакції* \vec{R} , або *силою нормального тиску* з боку тіла A на тіло B . Тангенціальна складова сили \vec{R} , що лежить у площині Q , дістала назву *сила тертя* $\vec{F}_{\text{тер}}$. У випадку, коли відбувається відносний рух поверхонь, що дотикаються, тобто ковзання, то силу $\vec{F}_{\text{тер}}$ називають *силою тертя ковзання*, або *силою зовнішнього тертя*:

$$\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{ков}} = -kN \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3.10)$$

де $N = |\vec{N}|$ – модуль сили нормального тиску, \vec{v} – відносна швидкість цих поверхонь, k – *коефіцієнт тертя ковзання*, який залежить від природи та стану поверхонь, що ковзають. Вважають, що коефіцієнт тертя ковзання для даної пари матеріалів стабільний і не залежить від швидкості v , але експеримент показує, що така залежність існує, а отже, існують і незначні відхилення від закону тертя (3.10). Типову залежність сили тертя ковзання від швидкості показано на рис. 3.7. Вона обумовлена зміною стану поверхонь, що контактирують у процесі руху. Вивчення механізмів тертя є предметом спеціальних фізико-технічних дисциплін.

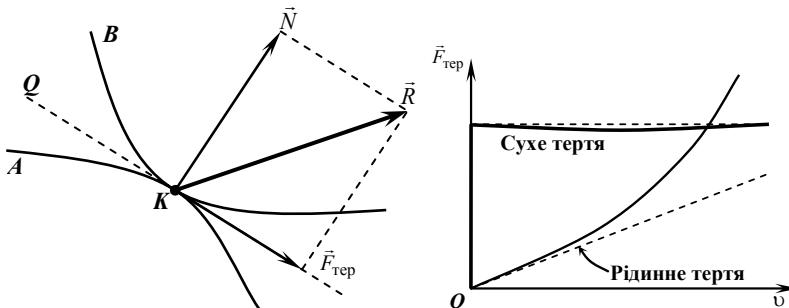


Рис. 3.6. Сили при контакті двох тіл

Рис. 3.7. Залежність сил сухого і рідинного тертя від швидкості v

Якщо прикласти до якого-небудь тіла, наприклад, до шафи, що перебуває у спокої на підлозі кімнати, зовнішню силу $\vec{F}^{\text{зовн}}$ у горизонтальному напрямку, щоб зрушити його з місця і пересунути по підлозі, то рух починається не одразу: якщо величина прикла-

деної нами сили недостатня, то тіло залишається у спокої¹. Прискорення тіла при цьому дорівнює нулю, а отже, сума всіх сил, прикладених до тіла, дорівнює нулю відповідно до рівняння руху

$$0 = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{зовн}} , \quad (3.11)$$

де $m\vec{g}$ – сила тяжіння, а \vec{R} – сила реакції з боку підлоги. Оскільки сила тяжіння $m\vec{g}$ не має горизонтальної складової, то вона не може врівноважувати зовнішню силу $\vec{F}_{\text{зовн}}$. Остання може врівноважуватись лише горизонтальною складовою сили реакції \vec{R} , яку і називають силою тертя спокою $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{сп}}$ (рис. 3.8). Рівняння (3.11) можна переписати у вигляді

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}^{\text{сп}} + \vec{F}_{\text{зовн}} . \quad (3.11a)$$

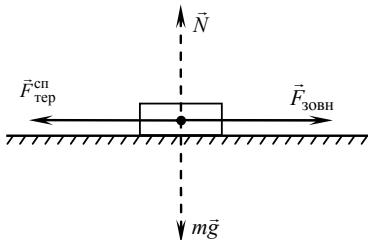


Рис. 3.8. До поняття сили тертя спокою

Оскільки взаємно перпендикулярні вектори лінійно незалежні, то останнє рівняння еквівалентне двом векторним рівнянням, записаним окремо для горизонтальних і вертикальних складових

$$0 = \vec{F}_{\text{тер}}^{\text{сп}} + \vec{F}_{\text{зовн}} \quad (3.12a)$$

та

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} . \quad (3.12b)$$

Із рівняння (3.12a) однозначно випливає, що доти, поки тіло не зрушило з місця, сила тертя спокою $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{сп}}$ направлена протилежно силі $\vec{F}_{\text{зовн}}$ і дорівнює їй за модулем (у загальному випадку дорівнює за модулем і напрямлена протилежно сумі тангенціальних складових усіх інших сил, прикладених до тіла).

Таким чином, при збільшенні сили $\vec{F}_{\text{зовн}}$ зростає і сила тертя спокою $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{сп}}$ (ділянка OA на рис. 3.9), а після початку руху вона переходить у силу тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{ковз}}$. При цьому модуль сили

¹ Спочатку відбувається деформація (за малих навантажень оборотна) обох тіл, у першу чергу, мікрокопічні деформації поблизу площини контакту.



Рис. 3.9. До поняття сил тертя спокою і ковзання справді це справедливо лише на початку руху, а потім модуль сили тертя ковзання може змінюватися в силу вищеперелічених причин.

При поступальному русі тіла в рідині або газі виникає сила, прикладена до тіла в напрямку, протилежному швидкості тіла \vec{v} відносно рідини або газу, яку називають *силою опору* середовища. За малих швидкостей величина цієї сили пропорційна швидкості. Отже, формула сили опору має вигляд

$$\vec{F}_{\text{оп}} = -k\vec{v}, \quad (3.13)$$

де коефіцієнт k називається *коєфіцієнтом опору* і залежить як від форми та розмірів тіла, так і від характеристик рідини або газу.

Реальна залежність величини сили опору від швидкості нелінійна (рис. 3.7). Цю нелінійність у формулі сили опору можна врахувати або введенням залежного від швидкості коефіцієнта опору $k(v)$, або безпосереднім урахуванням наступних степенів швидкості. Наприклад, в аеродинаміці використовують формулу

$$\vec{F}_{\text{оп}} = -k v^2 \frac{\vec{v}}{v}. \quad (3.14)$$

Силу опору $\vec{F}_{\text{оп}} = -k\vec{v}$ часто називають *силою внутрішнього тертя*, щоб відрізняти її від сили зовнішнього тертя, $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{зовн}}$. Пояснення цього терміна пов'язано з тим, що у переважній більшості випадків найближчий до тіла шар рідини рухається разом із тілом, і вже цей шар має відмінну від нуля швидкість щодо наступного шару рідини, внаслідок чого сила опору фактично виникає не безпосередньо між поверхнею тіла і рідиною, а між сусіднimi шарами самої рідини, що рухаються з різною швидкістю. Внутрішнє тертя в рідинах називають також *рідинним тертям*, на

тертя спокою досягає своєї максимальної величини, що дорівнює модулю сили тертя ковзання, який в ідеалізованому випадку стає горизонтальною штриховою лінією на рис. 3.9).

Насправді це справедливо лише на початку руху, а потім модуль сили тертя ковзання може змінюватися в силу вищеперелічених причин.

відміну від *сухого* або (*зовнішнього*) *тертя*, яке існує безпосередньо між поверхнями твердих тіл. Використання нами для поозначення коефіцієнтів пружності, тертя та опору різних за своєю природою однієї тісії самої букви k , як це найчастіше робиться в літературі, не повинно призводити до непорозумінь. Там, де необхідно, будемо вживати додаткові індекси.

Спільною рисою всіх сил тертя (за винятком сили тертя спокою) та опору незалежно від конкретного механізму їх виникнення є те, що вони завжди направлені протилежно вектору відносної швидкості, тобто протилежно напрямку руху.

Водночас між рідинним і сухим тертям існує суттєва відмінність, яка полягає в тому, що в рідині відсутня сила тертя спокою: рух одного шару рідини відносно іншого може початись під дією наскільки завгодно малої сили. Це добре відомо з повсякденної практики: людина може легко зрушити з місця навантажений човен або навіть невеликий катер, що плаває на воді, хоча про ту саму дію на суходолі не може бути й мови. Для зменшення сили тертя між рухомими частинами різних механізмів зовнішнє (сухе) тертя між поверхнями замінюють внутрішнім (рідинним) тертям шляхом змащування цих поверхонь різноманітними мастилами. При змащуванні між поверхнями твердих тіл існує тонкий шар рідини (оливи, мастила) і в ідеальному випадку ці поверхні втрачають безпосередній контакт між собою, а лише захоплюють прилеглі шари рідини, які потім "трутися" між собою. Характерними для сухого тертя є так звані явища *застою* та *заносу*, аналогів яким немає у випадку рідинного тертя.

Явище застою можна продемонструвати на досліді, схему якого подано на рис. 3.10. Брусок розміщено на горизонтальній поверхні на однаковій відстані між двома упорами, з якими він сполучений двома однаковим пружинами, які діють на брусок справа і зліва з однаковими силами. Якщо брусок вивести із середнього положення, перемістивши його вправо або вліво, то одна пружина буде стискатись, а інша розтягуватись, у результаті чого виникне сила, спрямована до початкового положення бруска в точці O , у яку ми вмістимо початок системи координат з віссю OX , направленою горизонтально. Доти, поки зміщення бруска x не виходитиме за межі області AB , у якій модуль сили пружності $F_{\text{пр}} = k_{\text{пр}} |x|$ мен-

ший від максимального значення сили тертя спокою $k_{\text{тер}}mg$, бруск не буде рухатись. Лише коли величина зміщення бруска $|x|$ перевищить довжину відрізка OA чи OB , тоді бруск почне рухатись у бік точки O , а потім зупиниться на межі "зони застою". Розмір цієї зони $|x_A - x_B| = 2 \frac{k_{\text{тер}}mg}{k_{\text{пп}}}$ може бути зменшений за рахунок зменшення коефіцієнта тертя $k_{\text{тер}}$, наприклад, шляхом змащування поверхні, по якій рухається бруск.

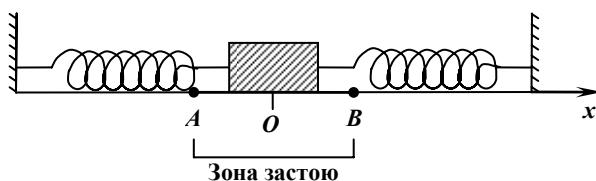


Рис. 3.10. Явище застою

Явище застою дуже шкідливе для пристрій точної механіки, зокрема для вимірювальних приладів, що мають рухомі частини, наприклад, стрілки. Боротьба з ним полягає в усуненні сухого тертя змащуванням, розміщенням рухомих частин у рідині, у вихідному потоці повітря, підвішуванням на нитках та в магнітному полі.

Явище заносу можна спостерігати в такому досліді: поклали бруск на плоску поверхню, нахилену щодо горизонту на кут α , який дещо менший за критичний кут $\alpha_{\text{кр}}$, при перевищенні якого бруск починає ковзати вниз. За таких умов бруск може залишатися у спокої як завгодно довго. Якщо ж цьому бруску надати деякої швидкості (почати рухати його) у горизонтальному напрямку (уздовж осі OY на рис. 3.11), то він одразу почне ковзати донизу (уздовж осі OX). У цьому й полягає явище заносу.

При переході бруска від стану спокою до руху в горизонтально-

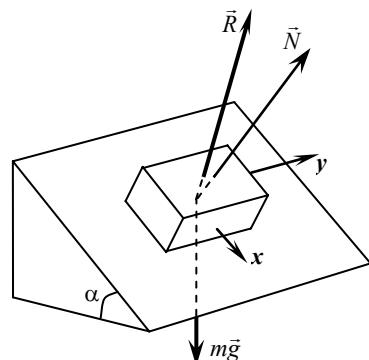


Рис. 3.11. Явище заносу

му напрямку напрямок тангенціальної складової сили реакції \vec{R} , тобто **сили тертя спокою**, яка врівноважувала складову сили тяжіння $mg \sin \alpha$, напрямлену вздовж осі OY , змінюється на ортогональний: при русі бруска вздовж осі OY тангенціальна складова сили реакції \vec{R} , тобто **сила тертя ковзання**, напрямлена протилежно напрямку руху. Унаслідок цього брусок починає ковзати вниз під дією тепер нічим неврівноваженої складової сили тяжіння $mg \sin \alpha$.

3.4. Третій закон Ньютона

Аналізуючи результати досліду, зображеного на рис. 3.1, ми дійшли загального якісного висновку, що дія одного тіла на інше має характер взаємодії. Уведене в підрозд. 3.2 поняття сили й узагальнення дослідних фактів дозволяють висловити таке твердження, що стосується взаємодії двох тіл і має кількісний характер та становить зміст *третього закону Ньютона*:

Будь-яка дія одного тіла на інше має характер взаємодії, причому сили, з якими взаємодіють дві матеріальні точки, дорівнюють одна одній за модулем і протилежно напрямлені вздовж прямої, що з'єднує ці точки.

Третій закон Ньютона виражається рівнянням

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (3.15)$$

де \vec{F}_{12} – це сила, прикладена до частинки 1 з боку частинки 2, а \vec{F}_{21} – сила, прикладена до частинки 2 з боку частинки 1. На рис. 3.12 ці сили показані для випадку відштовхування.

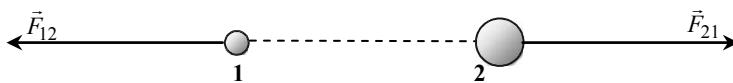


Рис. 3.12. До третього закону Ньютона

У класичній механіці вважається, що рівність (3.15) виконується в будь-який момент часу незалежно від руху частинок. Це можливо за припущення, що взаємодія поширюється в просторі

з нескінченно великою швидкістю, тобто миттєво. Саме такого припущення дотримувався Ньютон. Воно дістало назву *принципу далекодії* класичної механіки. Однак на сьогодні відомо, що максимальна швидкість поширення взаємодій обмежена швидкістю поширення світла у вакуумі ($c = 299792458 \approx 3 \cdot 10^8$ м/с), тому під час руху частинок одна відносно одної, третій закон Ньютона може порушуватись.

Нехай дві частинки займають положення 1 та 2 і взаємодіють із силами \vec{F}_{12} та \vec{F}_{21} , які однакові за величиною та протилежні за напрямком (рис. 3.13). Якщо частинка 1 за малий проміжок

часу $\Delta t \ll \frac{r_{12}}{c}$ переміститься із

положення 1 у точку простору 1', то в цій точці до неї буде прикладена сила $\vec{F}_{1'2}$, що має інший напрямок і величину ніж \vec{F}_{12} , якщо сила взаємодії залежить від від-

стані між частинками r_{12} . До того часу, поки збурення силового поля, що його створює частинка 1 у місці розташування частинки 2, не досягне точки 2, на неї буде діятиме як і раніше прикладена сила \vec{F}_{21} . Отже, поки рухалась частинка 1, а також протягом деякого часу після її зупинки в точці 1', третій закон Ньютона буде порушенено. Цілком зрозуміло, що за умови $\Delta t > \frac{r_{12}}{c}$ по-

рушенння третього закону спостерігатись не будуть. Якщо вважати, що переміщення Δr частинки 1 з положення 1 у положення 1' відбувається із середньою швидкістю v , то $\Delta t = \frac{\Delta r}{v}$,

тоді умова, за якої третій закон виконується, набуває вигляду $\frac{\Delta r}{v} > \frac{r_{12}}{c}$ або $\frac{\Delta r}{r_{12}} > \frac{v}{c}$. Ця умова завжди виконується, якщо

$\frac{v}{c} \ll 1$, що відповідає руху зі швидкостями значно меншими від

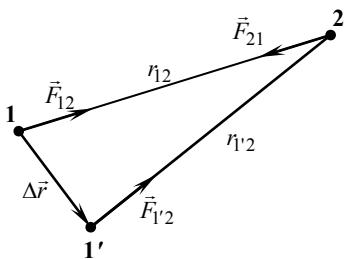


Рис. 3.13. До порушення третього закону Ньютона

швидкості поширення взаємодії. Границний перехід $c \rightarrow \infty$ відповідає принципу далекодії.

Широко відомим прикладом порушення третього закону Ньютона є нерівність сил взаємодії двох електричних зарядів, що рухаються по взаємно перпендикулярних траекторіях. Нехай у деякий момент часу точкові заряди q_1 та q_2 займають положення, показані на рис. 3.14. Запишемо вираз для сили \vec{F}_{12} , що прикладена до заряду q_1 , користуючись формулою (3.7):

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}(\vec{r}_1) + q_1 [\vec{v}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1)],$$

де $\vec{E}(\vec{r}_1)$ та $\vec{B}(\vec{r}_1)$ – відповідно електричне та магнітне поля, створені зарядом q_2 у місці розташування заряду q_1 :

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad \text{та} \quad \vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2}{r_{12}^2} \frac{[\vec{v}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}}.$$

Отже,

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} [\vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times \vec{r}_{12}]]. \quad (3.16)$$

Аналогічно для сили, що прикладена до заряду q_2 , можна записати

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} [\vec{v}_2 \times [\vec{v}_1 \times \vec{r}_{21}]], \text{ де } \vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}. \quad (3.17)$$

Оскільки $\vec{v}_1 \parallel \vec{r}_{21}$, то другий доданок у правій частині (3.17) дорівнює нулю: магнітне поле створене зарядом q_2 у місці розташування заряду q_1 дорівнює нулю. Водночас другий доданок у правій частині (3.16) відмінний від нуля. При рівності за модулем перших доданків, які описують кулонівську взаємодію, маємо порушення третього закону Ньютона для цього випадку, оскільки вектори \vec{F}_{21} і \vec{F}_{12} не рівні

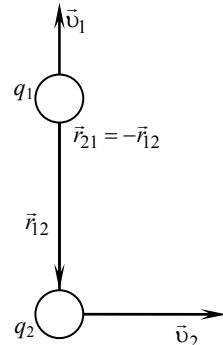


Рис. 3.14. До розрахунку сили взаємодії рухомих зарядів

за модулем і неколінеарні. Очевидно, що це порушення пов'язане з урахуванням сили Лоренца. Ця сила не центральна, тобто не діє по прямій, що з'єднує заряди, але її вплив тим більший, чим більша швидкість руху заряду. Можна показати, що відношення модулів другого доданка (3.17) до першого, тобто сили магнітної взаємодії до сили кулонівської взаємодії зарядів q_1 і $q_2 \in \frac{v_1 v_2}{c^2}$.

Отже, за малих швидкостей зарядів помітити порушення третього закону Ньютона дуже важко. Дійсно, для того, щоб сила магнітної взаємодії двох електронів становила 0,01 від сили їх кулонівської взаємодії, вони мають рухатись зі швидкостями порядку 0,1 від швидкості світла c .

3.5. Принцип відносності механіки та межі застосування законів Ньютона

Закони Ньютона справедливі в деякій ICB, принаймні в тій, у якій їх справедливість підтверджена експериментальними фактами. А чи виконуються ці закони в інших системах відліку, наприклад в інших ICB, а також у неінерціальних системах відліку (НСВ)? Покажемо, що на перше запитання відповідь позитивна, а на друге – негативна.

Відповідно до принципу відносності Галілея, або *принципу відносності механіки*, в усіх ICB властивості простору та часу однакові, однакові також і закони механіки і, внаслідок цього, всі механічні явища в усіх ICB відбуваються однаково. Цей принцип є результатом узагальнення досвіду і підтверджується всією сукупністю експериментальних даних про рух тіл зі швидкостями набагато меншими від швидкості світла. Однаковість перебігу всіх механічних явищ в усіх ICB вказує на те, що ніякими механічними дослідами, які здійснюються "всередині" ICB, неможливо встановити, перебуває вона у спокої чи рухається відносно іншої ICB. Наприклад, спостерігаючи механічні рухи в повністю закритому приміщені всередині корабля не можна встановити, чи корабель стоїть на місці, чи рівномірно

і прямолінійно рухається відносно поверхні води та берегів. Математично принцип відносності механіки означає інваріантність рівнянь механіки при переході від однієї ICB до іншої. Відповідні перетворення просторових і часових характеристик руху називаються перетвореннями Галілея.

Розглянемо ICB K' , що рухається зі сталою швидкістю \vec{V} відносно іншої ICB K . Радіус-вектор \vec{r}' деякої частинки A , визначений відносно початку O' , обраного в системі відліку K' і нерухомого відносно неї, зв'язаний з радіус-вектором \vec{r} цієї ж частинки, визначенним відносно початку O , обраного в системі відліку K і нерухомого відносно неї (рис. 3.15), співвідношенням

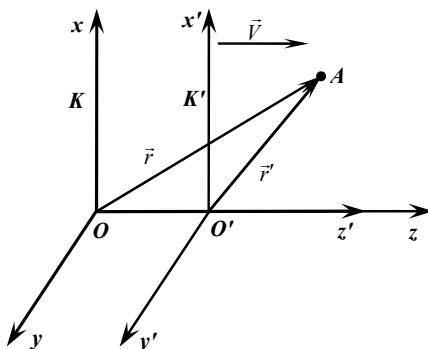


Рис. 3.15. До перетворень Галілея

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{V}t. \quad (3.18)$$

Припустимо, що за $t=0$ початки відліку O та O' збігались¹. Також вважатимемо, що плин часу одинаковий в обох ICB K і K' , тобто

$$t' = t. \quad (3.19)$$

Формули (3.18) і (3.19) описують перехід від однієї ICB до іншої і є шуканими перетвореннями Галілея, які відповідають припущенняю, що довжини просторових відрізків і часових інтервалів між двома подіями однакові в обох ICB, тобто ці величини інваріантні відносно перетворень Галілея. Ці припущення про абсолютність простору та часу лежать в основі уявлень класичної механіки, що підтверджується вивченням рухів тіл зі швидкостями набагато меншими швидкості світла.

¹ Це припущення не принципове, а даніна традиції, і ні в якому разі не обмежує загальності нашого розгляду. Легко переконатися, що додавання до правої частини (3.18) будь-якого сталого вектора $\vec{R}_{OO'}(0)$, який задає положення початку відліку O' відносно початку відліку O в момент часу $t=0$, не впливає на висновки, зроблені нижче.

Тепер покажемо, що перетворення Галілея залишають незмінним основне рівняння динаміки руху матеріальної точки в ICB – рівняння другого закону Ньютона $m\ddot{a} = \vec{F}$.

Будемо виходити з того, що маса частинки не залежить від швидкості, $m' = m$. Сили взаємодії \vec{F} також вважатимемо однаковими в обох системах відліку K і K' . Це припущення можна зробити принаймні для сил, які залежать від відстані, оскільки відстані інваріантні відносно перетворень Галілея. Отже, $\vec{F}' = \vec{F}$. Залишається знайти зв'язок між прискоренням частинки \ddot{a} відносно ICB K та її прискоренням \ddot{a}' відносно ICB K' . Диференціювання виразу (3.18) за часом дає закон перетворення швидкостей при переході від однієї ICB до іншої:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} \quad \text{або} \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}.$$

Це одне диференціювання за часом дає закон перетворення прискорень $\ddot{a}' = \ddot{a}$. Отже, прискорення частинки інваріантне відносно перетворень Галілея.

Зауважимо, що при диференціюванні використовувалось припущення, що $\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r}$ та $\Delta t' = \Delta t$. Отже, оскільки всі величини, що входять до рівняння другого закону Ньютона, не змінюються при переході від ICB K до ICB K' , то й саме рівняння другого закону Ньютона буде інваріантним відносно цих перетворень.

Співвідношення (3.18) можна подати також у координатній формі. Без обмеження загальності можна ввести декартові системи координат x, y, z та x', y', z' у системах відліку K і K' , відповідно, щоб їх початки містилися в точках O та O' , осі OZ та OZ' були паралельні одна одній і вектору \vec{V} , а осі OX, OY та OX', OY' були попарно паралельні одна одній (рис. 3.15). При такому виборі перетворення Галілея запишуться таким чином:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - Vt, \quad t' = t. \quad (3.20)$$

Саме у такому вигляді перетворення Галілея наводяться в літературі.

Із наведеного вище випливає, що при переході від деякої ICB K до будь-якої HCB K' , швидкість якої $\vec{V}(t)$ відносно

системи K , не є сталою, прискорення частинки A відносно систем відліку K і K' будуть різні й другий закон Ньютона не виконуватиметься в НСВ K' . Невиконання першого закону Ньютона при переході до НСВ очевидне із самого початку. Якщо згадати обговорення меж застосування третього закону, то можна зробити загальний висновок: **три закони динаміки Ньютона справедливі лише в ICB за швидкостей руху значно менших від швидкості світла.**

3.6. Рівняння другого закону Ньютона – основне рівняння динаміки матеріальної точки в ICB

Основним рівнянням динаміки точки в ICB є **рівняння другого закону Ньютона:**

$$m\ddot{\vec{a}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{або} \quad m\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i .$$

Це векторне диференційне рівняння другого порядку. У зв'язку з цим рівнянням можливі дві постановки задачі:

1) знайти закон руху матеріальної точки з масою m , тобто залежність від часу її радіус-вектора $\vec{r}(t)$, якщо відомі прикладені до неї сили \vec{F}_i та початкові умови: положення матеріальної точки $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ та її швидкість $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ у деякий початковий момент часу $t = 0$;

2) знайти закон прикладеної до матеріальної точки сили, якщо відомий закон її руху, тобто залежність від часу її радіус-вектора $\vec{r}(t)$.

Розв'язування другої, більш простої задачі, фактично зводиться до відшукання прискорення матеріальної точки шляхом двократного диференціювання радіус-вектора $\vec{r}(t)$ за часом, яке вже було розглянуто в кінематиці (п. 2.1.1).

Перша ж задача в загальному випадку вимагає інтегрування рівняння (3.21), хоча іноді потрібно знайти лише прискорення,

що взагалі не потребує інтегрування, або ж лише швидкість, для чого достатньо однократного інтегрування. Залежно від конкретної постановки задачі розв'язування виконують або безпосередньо у векторному вигляді, або в координатному записі, або в проекціях на дотичну та нормаль до траекторії.

Можна рекомендувати таку послідовність дій при розв'язуванні задач динаміки матеріальної точки:

1) зробити ясний схематичний рисунок, зобразити тіла та зв'язки між ними;

2) зобразити вектори сил, прикладених до кожного тіла, яке розглядається як матеріальна точка¹, та до зв'язків, що обмежують його рух, керуючись правилом: **сил має бути враховано стільки, скільки є матеріальних об'єктів, з якими взаємодіє тіло**². При цьому необхідно перевірити, чи відповідає кожній силі взаємодії протилежно направлена і прикладена до іншого тіла (до зв'язку) сила (третій закон Ньютона!). Якщо в задачі задано силове поле (напр., гравітаційне чи електричне), то сила, про яку йдеться в третьому законі Ньютона, прикладена до джерела поля, її зображати не слід, за винятком випадку, коли ці джерела поля (маси, електричні заряди) безпосередньо задано в умовах задачі;

3) записати для кожного тіла рівняння руху у векторній формі $m\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. Наголосимо, що не слід у векторній сумі записувати деякі сили зі знаком "−" на підставі якихось "очевидних" міркувань;

4) записати формули всіх сил, що діють на розглядуване тіло, у векторній формі й підставити їх у рівняння руху; записати рівності, що випливають із третього закону Ньютона, рівності, що випливають із наявності зв'язків, формули кінематичних зв'язків, початкові умови тощо;

¹ Нагадаємо, що поступальний рух будь-якого твердого тіла, можна описати як рух однієї його точки. Тому рух різного роду брусків, тягарців тощо, які рухаються поступально, у задачах динаміки можна розглядати як рух матеріальних точок відповідної маси.

² При цьому сили треба розрізняти за їх джерелами, тобто за матеріальними об'єктами, з якими взаємодіє розглядуване тіло, а не за їх видимою або передбачуваною дією, як то "рушина", "скочувальна", "гальмівна" тощо.

5) переконатися, що кількість рівнянь і співвідношень між величинами достатня для відшукання або виключення всіх невідомих, що в них містяться. Якщо їх недостатньо, то це означає, що або не всі можливі рівняння і співвідношення записано, або в умові задачі недостатньо вихідних даних;

6) розв'язати отриману систему рівнянь тим, чи іншим способом. Це суто математичний етап розв'язання задачі.

При цьому корисно насамперед оцінити, чи можна отримати відповідь на питання задачі без переходу до координатної форми запису. Якщо розв'язування доцільно виконувати в координатній формі, то обирають зручну систему координат і проектиують усі векторні рівняння на осі цієї системи. Якщо розв'язування зручніше виконувати в проекціях на дотичну та нормаль до траекторії, то проектиують всі векторні рівняння на дотичну та нормаль;

7) проаналізувати одержаний розв'язок насамперед щодо розмірностей фізичних величин, які входять до нього. Okрім цього, корисно переконатися в тому, що знайдений розв'язок за певних умов переходить у наперед відомі для деяких частинних випадків розв'язки. Нарешті, одержаний розв'язок має узгоджуватись зі "здоровим глузdom". З огляду на це, важливо доводити розв'язання до чисельної відповіді або до чисельної оцінки. При аналізі одержаної відповіді слід звертати увагу не лише на абсолютні значення отриманих величин, але й на їх знаки, напрямки тощо. Успіх такої перевірки не гарантує правильність отриманого розв'язку, але неуспіх свідчить про те, що знайдена відповідь неправильна;

8) дослідити область застосування отриманого розв'язку, наприклад, встановити межі параметрів задачі, для яких він є правильним.

Нижче наведено докладні приклади розв'язання деяких відомих простих задач динаміки частинки відповідно до вищенаведених рекомендацій. У ряді випадків у круглих дужках для зручності значено порядкові номери рекомендованих етапів розв'язання.

Затяжний стрибок парашутиста. Знайти максимальну швидкість, якої може досягти парашутист, що виконує затяжний стрибок, якщо його маса m , а сила опору повітря $\vec{F}_{\text{оп}} = -k\vec{v}$.

Розв'язання.

(1–2) За умовою задачі рух парашутиста можна розглядати як рух матеріальної точки. На рис. 3.16 зображені дві сили, що прикладені до парашутиста: однорідна сила тяжіння з боку Землі $m\vec{g}$ та сила опору повітря $\vec{F}_{\text{оп}} = -k\vec{v}$.

(3) Запишемо рівняння другого закону Ньютона:

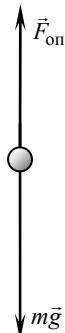


Рис. 3.16. Сили, що прикладені до парашутиста

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{оп}}. \quad (3.21)$$

(4) Використаємо формулу сили опору повітря $\vec{F}_{\text{оп}} = -k\vec{v}$, після чого рівняння руху набирає вигляду

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}. \quad (3.21a)$$

(5) Рівняння руху (3.21a) містить дві невідомі величини \vec{a} та \vec{v} . З умови задачі також випливає початкова умова $v(0) = 0$. Цих даних недостатньо для відшукання максимальної швидкості \vec{v}_{\max} . Звернемо увагу, що в початковий момент часу $t = 0$ прискорення парашутиста згідно з рівнянням

(3.21a) максимальне (дорівнює прискоренню вільного падіння \vec{g}). Унаслідок цього швидкість \vec{v} співнапрямлена з вектором \vec{g} і зростає за модулем. При зростанні швидкості \vec{v} модуль правої частини рівняння (3.21a) прямує до нуля. Отже, прямує до нуля і модуль прискорення \vec{a} , унаслідок чого зростання швидкості уповільнюється і припиниться за умови $\vec{a} = 0$. Досягнута швидкість і буде шуканою максимальною швидкістю \vec{v}_{\max} .

(6) Максимальну швидкість \vec{v}_{\max} знаходимо із рівняння руху (3.21a) за умови $\vec{a} = 0$: $0 = m\vec{g} - k\vec{v}_{\max}$.

Таким чином, $\vec{v}_{\max} = \frac{m}{k}\vec{g}$.

(7) Перевіримо розмірність. За розв'язком $[v] = \frac{[M]}{[k]}[g]$. Підставляючи у праву частину розмірність коефіцієнта опору $[k] = \frac{[F]}{[v]}$,

одержимо $[\mathbf{v}] = \frac{[M]}{[F]} [g] [\mathbf{v}] = \frac{[F]}{[F]} [\mathbf{v}] = [\mathbf{v}]$, причому використано очевидне співвідношення $[M][g] = [F]$. Отже, і права і ліва частини мають однакову розмірність – розмірність швидкості.

Можна йти іншим шляхом – виражати розмірності всіх величини через розмірності основних фізичних величин довжини $[L]$, часу $[T]$, маси $[M]$ тощо. Наприклад,

$$[\mathbf{v}] = \frac{[M]}{[F]} [g] [\mathbf{v}] = \frac{[M]}{[M]} \frac{[L]}{[L]} \frac{[L]}{[T^2]} \frac{[L]}{[T]} = \frac{[L]}{[T]} = [\mathbf{v}].$$

Якщо коефіцієнт опору k спрямувати до нуля, то максимальна швидкість необмежено зростає, що відповідає "здоровому глузду". Також видно, що максимальна швидкість зростає зі збільшенням маси m або прискорення вільного падіння g .

І нарешті зазначимо, що одержаний напрямок швидкості парашутиста, як і має бути, збігається з напрямком прискорення вільного падіння. Тут доречно згадати про типову помилку початківців, які при написанні рівняння руху частинки у векторній сумі сил намагаються записувати деякі сили зі знаком "–" на підставі якихось "очевидних" міркувань. У розглядуваній задачі на підставі "очевидного міркування" "сила опору повітря $\vec{F}_{\text{оп}}$ направлена протилежно до сили тяжіння $m\vec{g}$ ", цю силу опору записують зі знаком "–" у правій частині рівняння руху (3.21). Наслідком цього є зміна знака швидкості \vec{v}_{\max} у розв'язку, яка тепер буде направлена вгору, що напевно суперечить здоровому глузду. На практиці, щоб узгодити невірну відповідь зі здоровим глуздом, на якомусь етапі розв'язування неправомірно змінюють знак, оголошують про написання якогось векторного рівняння у "скалярному вигляді", що є повною нісенітницею, оскільки векторне рівняння звести до рівносильної системи скалярних рівнянь можна лише проектуванням на деякий векторний базис. (Зауважимо, що в розглядуваній задачі рівняння (3.21a) може бути абсолютно правомірно спроектоване, напр., на напрямок вектора \vec{g} , що зроблено нижче (див. рівняння (3.22)).

Недолугість (і шкідливість) наведеного вище "очевидного міркування" щодо напрямку сили $\vec{F}_{\text{оп}}$ стає очевидною, якщо звернути

увагу на те, що векторне рівняння (3.21) застосовне не лише до руху тіла, що вільно падає на землю, але й до тіла, що рухається в повітрі в будь-якому напрямку, зокрема і до тіла, підкинутого вертикально вгору, коли вектор швидкості \vec{v} напрямлений протилежно вектору \vec{g} . При цьому відповідно до формули сили опору $\vec{F}_{\text{оп}} = -k\vec{v}$ остання на ділянці підйому напрямлена так само, як і сила тяжіння, тобто вниз, уздовж вектора \vec{g} .

Таким чином, задачу про затяжний стрибок парашутиста розв'язано шляхом елементарних алгебраїчних перетворень на підставі аналізу основного рівняння динаміки точки безпосередньо у векторному вигляді з урахуванням умови досягнення швидкістю максимального, отже сталого, значення. Аналіз одержаного розв'язку дає підстави вважати, що отримана відповідь з великою ймовірністю¹ є правильною. Щодо застосування одержаного розв'язку, то треба насамперед пам'ятати, що формула сили опору визначена умовами задачі, незастосовна за великих швидкостей.

У розглядуваній задачі можна поставити додаткове і практично важливе в багатьох випадках питання: за яким законом швидкість парашутиста змінюється із часом? Щоб дістати на нього відповідь, необхідно розв'язати рівняння (3.21a), яке ми перепишемо у вигляді

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}. \quad (3.22)$$

Спроектуємо це рівняння на напрямок вектора \vec{g} :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = mg - k\vec{v}. \quad (3.22a)$$

Відокремимо змінні, тобто виконаємо алгебраїчні перетворення, після яких ліва частина рівняння (3.22a) буде функцією лише однієї змінної, а права частина – функцією лише другої змінної:

$$\frac{d\vec{v}}{\frac{m}{k}\vec{g} - \vec{v}} = \frac{k}{m} dt. \quad (3.22b)$$

¹ Підкреслимо, що виконаний аналіз отриманого розв'язку не дає стовідсоткової гарантії його правильності, але допомагає "відфільтрувати" більшість неправильних розв'язків.

Тепер можна взяти інтеграли від лівої і правої частини цього рівняння:

$$-\int \frac{d\left(\frac{m}{k}g - v\right)}{\frac{m}{k}g - v} = \frac{k}{m} \int dt,$$

що дає

$$\ln \left| \frac{m}{k}g - v \right| = -\frac{k}{m}t + \ln C, \quad (3.23)$$

де $\ln C$ – стала інтегрування, записана у зручному для подальшого використання вигляді.

Оскільки, $\frac{m}{k}g > v$, то $\left| \frac{m}{k}g - v \right| = \frac{m}{k}g - v$ і рівність (3.23) можна подати у вигляді

$$\frac{m}{k}g - v = C e^{-\frac{k}{m}t}. \quad (3.24)$$

Для відшукання сталої інтегрування C використаємо початкову умову $v(0) = 0$. Після підстановки до (3.24) $t(0) = 0$ та

$v(0) = 0$ маємо $C = \frac{m}{k}g$. З урахуванням останнього з рівності

(3.24) дістанемо шуканий закон зміни швидкості:

$$v = \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}). \quad (3.25)$$

Відповідний графік залежності $v(t)$ для двох різних k наведено на рис. 3.17. За малих t експоненту можна розвинути у ряд Тейлора й утримати лише лінійний за t член, $v \approx \frac{m}{k}g(1 - 1 + \frac{k}{m}t) = gt$. Отже, спочатку сила опору практично не впливає на рух парашутиста, і він падає з прискоренням вільного падіння. При збільшенні швидкості сила опору зростає, прискорення зменшується і швидкість v асимптотично наближається до границі $v_{\max} = mg/k$, яку вже було знайдено раніше.

Звернемо увагу на розмірність аргументів трансцендентних функцій (логарифмічних, експоненціальних, тригонометричних тощо). Ці аргументи в усіх кінцевих виразах мають бути безрозмірними. На проміжкових стадіях математичних перетворень припускається запис трансцендентних функцій, аргументи яких є безрозмірними величинами, через рівносильні вирази, що містять трансцендентні функції від розмірних величин: наприклад, $\ln(v/v_0) = \ln v - \ln v_0$. У нашому випадку безрозмірним є аргумент експоненти $\frac{k}{m}t$ у розв'язку (3.25). Докладніший аналіз цього розв'язку, зокрема, щодо його залежності від параметрів k, m, g залишаємо читачеві.

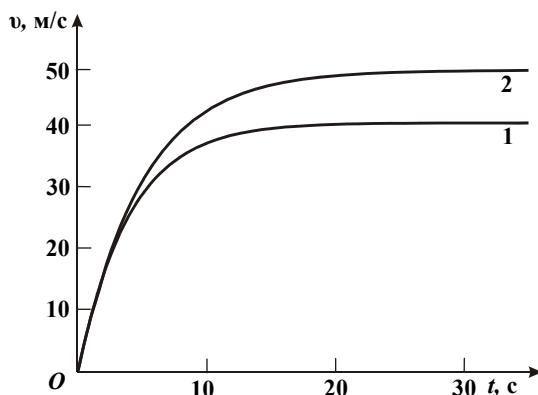


Рис. 3.17. Залежності швидкості падіння парашутиста від часу для двох значень коефіцієнта опору k_1 (1) та k_2 (2), $k_2 > k_1$

Задача про тіло на похилій площині. Бруск масою m починає ковзати вниз по похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя ковзання між бруском і площею k . Знайти прискорення бруска.

Розв'язання.

(1–2) До бруска прикладені дві сили: однорідна сила тяжіння $m\vec{g}$ з боку Землі та сила реакції \vec{R} з боку похилої площини (рис. 3.18). Під час руху бруска тангенціальна складова сили реакції \vec{R} направлена протилежно напрямку руху. Отже, напрямок

сили реакції \vec{R} має лежати між місцевою вертикальлю, що задана напрямком \vec{g} , та перпендикуляром до похилої площини.

(3–5) Рівняння руху бруска має вигляд $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. Як відомо, силу реакції \vec{R} можна подати у вигляді суми її нормальню і тангенціально складових, відповідно, сили нормального тиску \vec{N} та сили тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{ков}} = -kN \frac{\vec{v}}{v}$: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}^{\text{ков}}$. Отже, прискорення бруска визначається рівнянням його руху, яке можна подати у вигляді

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}^{\text{ков}} \quad \text{або} \quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - kN \frac{\vec{v}}{v} \quad (3.26)$$

за наявності зв'язку, що обмежує рух бруска, а саме, похилої площини.

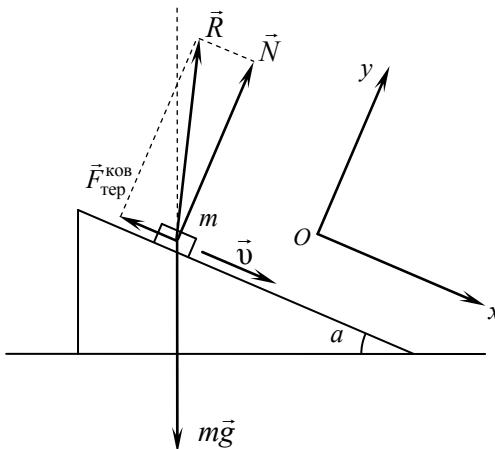


Рис. 3.18. Ковзання бруска по похилій площині

Розв'язування будемо проводити в координатній формі. Оберемо декартову систему координат, як показано на рис. 3.18. Проекції рівняння (3.26) на осі OX та OY :

$$ma_x = mg \sin \alpha - kN, \quad (3.27a)$$

$$ma_y = -mg \cos \alpha + N. \quad (3.27b)$$

Вищезгаданий зв'язок (похила площа) накладає на рух бруска обмеження $y = \text{const}$, з якого випливають умови $\dot{y} = 0$ та $\ddot{y} = 0$. З урахуванням останньої рівності $a_y = 0$, унаслідок чого система рівнянь (3.27a, б) набуває вигляду

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - kN, \\ 0 &= -mg \cos \alpha + N, \end{aligned} \quad (3.28)$$

з якої визначаємо шукане прискорення

$$a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha). \quad (3.29)$$

(7) Якщо $\alpha = \pi/2$, то $a = g$. Дійсно, у цьому випадку маємо вільне падіння бруска. Якщо тертя відсутнє, $k = 0$, то $a = g \sin \alpha$. При зростанні коефіцієнта тертя прискорення зменшується і $a = 0$ за деякого $k = \tan \alpha$. Усе це не суперечить спостереженням і здоровому глузду.

(8) Якщо покладемо у формулі (3.29) $\alpha = 0$, то одержимо $a = -gk$, що немає ніякого сенсу, оскільки відповідно до останньої рівності брусков має прискорено рухатися по горизонтальній площині, причому з тим більшим прискоренням, чим більший коефіцієнт тертя! Такий математично можливий, але фізично беззмістовний результат лежить поза областью застосування формули (3.29), яка обмежена кутами α , для яких $\tan \alpha > k$, оскільки за умовою задачі брусков починає ковзати, тобто існує прискорення $a > 0$. Отже, повний коректний запис відповіді виглядає так:

$$a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \text{ за } \alpha > \arctan(k).$$

Таким чином, при поступовому збільшенні кута нахилу α площини щодо горизонту за деякої критичної величини $\alpha = \arctan(k)$ брусков починає ковзати і за більших кутів рухається рівноприскорено¹.

Підкреслимо, що отриманий результат не залежить від вибору системи координат. Нами було обрано традиційну орієнтацію системи координат, у якій розв'язання найпростіше. Цю задачу можна розв'язати і при інших виборах системи координат або взагалі в безкоординатному вигляді (впр. 3.8).

¹ На цьому ґрунтуються простий метод визначення коефіцієнта тертя ковзання.

Ковзання тіла з вершини гладенької сфери. Невелике тіло починає ковзати з вершини гладенької сфери радіуса r . Визначити його швидкість у момент відриву від поверхні сфери.

Розв'язання.

(1–3) Вказівка на те, що тіло невелике, дає підставу розглядати його рух як рух матеріальної точки, не зважаючи на те, що рух тіла, що ковзає по поверхні сфери, не є поступальний. На рис. 3.19 показано дві сили, що діють на тіло: однорідна сила тяжіння $m\vec{g}$ з боку Землі та сила нормальна складова \vec{N} сили реакції \vec{R} з боку сфери, оскільки за умовою задачі тангенціальна складова сили \vec{R} – сила тертя ковзання – відсутня (сфера гладенька).

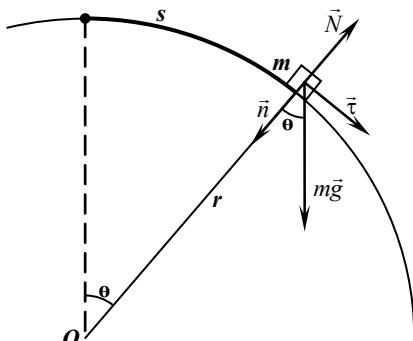


Рис. 3.19. Ковзання тіла з вершини гладенької сфери

Отже, рівняння руху тіла

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \quad (3.30)$$

слід розв'язувати за початкової умови $\vec{v}(0) = 0$ і використати умову відриву тіла від поверхні сфери у вигляді $N = 0$ (тіло втрачає контакт зі сфeroю).

(4–6) Спроектуємо рівняння (3.30) на напрямки дотичної та нормальні до траекторії, що задані одиничними векторами $\vec{\tau}$ та \vec{n} :

$$ma_{\tau} = mg \sin \theta, \quad (3.30a)$$

$$ma_n = mg \cos \theta - N, \quad (3.30b)$$

де θ – центральний кут між поточним напрямком вектора нормалі \vec{n} та напрямком вектора \vec{g} .

Оскільки тангенціальна складова прискорення дорівнює $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$, а нормальні складові $a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$, то система рівнянь (3.30а, б) набуває вигляду

$$\frac{d\upsilon}{dt} = g \sin \theta, \quad m \frac{\upsilon^2}{r} = mg \cos \theta - N. \quad (3.31)$$

Система двох рівнянь (3.31) містить три змінні: υ, t і θ . Для виключення однієї зі змінних необхідне додаткове співвідношення принаймні між двома змінними. Оскільки за означенням $\upsilon = \frac{ds}{dt}$, а $ds = rd\theta$, то $\upsilon = \frac{rd\theta}{dt}$, де ds – елементарний шлях уздовж дуги кола, $d\theta$ – відповідна елементарна зміна кута θ , dt – елементарний проміжок часу, за який тіло проходить шлях ds . Отже, $dt = \frac{rd\theta}{\upsilon}$ і перше рівняння системи (3.31) можна подати у вигляді

$$\upsilon d\theta = gr \sin \theta d\theta. \quad (3.32)$$

Виключення змінної t потребує переформулювання початкової умови: оскільки за $t = 0$ тіло розташоване на вершині сфери, тобто $\theta = 0$, то початкову умову можна записати так: за $\theta = 0$ $\upsilon = 0$. Тепер можна взяти невизначені інтеграли від лівої та правої частини рівняння (3.32), а потім, використовуючи початкову умову, визначити сталу інтегрування, як це було зроблено в задачі про затяжний стрибок парашутиста. Початкову умову можна застосувати і безпосередньо при інтегруванні, якщо брати визначені інтеграли від лівої й правої частини в межах, визначених початковою умовою, а саме:

$$\int_0^\upsilon \upsilon d\theta = gr \int_0^\theta \sin \theta d\theta.$$

У результаті отримуємо зв'язок між υ та θ у процесі ковзання тіла по поверхні сфери:

$$\frac{\upsilon^2}{2} = gr(1 - \cos \theta).$$

У момент відриву $N = 0$ і для визначення швидкості відриву v_0 маємо систему двох рівнянь з двома невідомими v_0 та θ_0 , відповідно, швидкість та кут у момент відриву:

$$\frac{v_0^2}{2} = gr(1 - \cos \theta_0), \quad \frac{v_0^2}{r} = g(1 - \cos \theta_0).$$

Виключивши із цієї системи $\cos \theta_0$, знаходимо швидкість $v_0 = \sqrt{2gr/3}$, а потім і косинус кута в момент відриву $\cos \theta_0 = 2/3$.

(7) Аналіз розмірностей у цьому випадку елементарний. Швидкість v_0 у момент відриву зростає при збільшенні g , що доволі очевидно, а також при збільшенні радіуса сфери r . Цікаво, що при цьому кут відриву завжди одинаковий.

(8) Отриманий розв'язок справедливий для розмірів тіла, якими можна захистувати порівняно з радіусом сфери.

Прискорений рух автомобіля по колу. На горизонтальній поверхні автомобіль починає рухатися по коловій траекторії радіуса $r = 50$ м, причому його швидкість постійно зростає на 1 м за секунду. Коефіцієнт тертя ковзання коліс автомобіля об поверхню $k = 0,2$. Знайти максимальну швидкість, яку може розвинути автомобіль, залишаючись на згаданій коловій траекторії.

Розв'язання.

(1–3) Автомобіль у цій задачі можна розглядати як матеріальну точку. На автомобіль діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила реакції поверхні \vec{R} (рис. 3.20). Рівняння руху автомобіля має вигляд $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. Силу реакції \vec{R} , як завжди, можна подати у вигляді суми нормальні (щодо горизонтальної поверхні) складової сили реакції \vec{N} та тангенціальної складової $\vec{F}_{3\text{ч}}$, яка являє собою силу зчленення горизонтальної поверхні з колесами автомобіля і лежить у горизонтальній площині:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{3\text{ч}}. \quad (3.33)$$

Це рівняння руху необхідно розглядати разом з початковою умовою $v(0) = 0$ і з урахуванням дії зв'язку (горизонтальної поверхні), що обмежує рух автомобіля у вертикальному напрямку. Останнє означає що вектор прискорення \vec{a} повністю лежить у горизонтальній площині.

Отже, замість рівняння (3.33) можна записати рівносильну систему двох рівнянь – окрім для горизонтальних та вертикальних складових векторних величин, що входять до нього:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{3\text{ч}}, \quad (3.34\text{a})$$

$$0 = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (3.34\text{б})$$

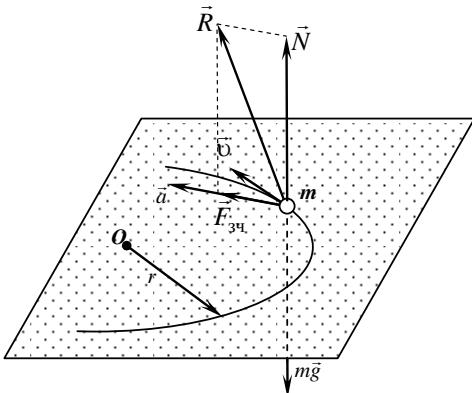


Рис. 3.20. До задачі про прискорений рух автомобіля по колу

Рівняння (3.34a) є рівнянням руху автомобіля по горизонтальній поверхні, а рівняння (3.34б) показує, що у вертикальному напрямку прискорення і рух відсутні, а модуль сили нормального тиску $N = mg$. Із рівняння (3.34a) випливає, що єдиною силою, яка спричиняє прискорення автомобіля, є сила зчеплення з поверхнею $\vec{F}_{3\text{ч}}$. Отже, рівняння (3.34a) можна переписати як

$$m\vec{a} = \vec{F}_{3\text{ч}} \quad (3.35)$$

і надалі розглядати рух автомобіля по плоскій коловій траєкторії, що лежить у горизонтальній площині, лише під дією сили зчеплення коліс із поверхнею, яка в нашому випадку є силою тертя спокою $\vec{F}_{\text{тер}}^{\text{сп}}$ і своїм максимальним значенням має kN , тобто kmg .

Зауважимо, що напрямки вектора прискорення і вектора сили зчеплення (сили тертя спокою) **однакові**, а не протилежні, як іноді помилково вважають. Саме сила зчеплення з поверхнею

(сила тертя спокою) є єдиною причиною прискорення автомобіля, а не міфічна "сила тяги двигуна"¹.

Максимальне значення прискорення можна знайти з рівності $ma_{\max} = kmg$, що безпосередньо випливає із рівняння (3.35).

Оскільки $a_{\max} = \sqrt{a_{\tau}^2 + (v_{\max}^2/r)^2}$, де $a_{\tau} = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ – тангенціальна складова прискорення, а v_{\max} – шукана максимальна швидкість, при перевищенні якої колеса автомобіля починають ковзати й автомобіль відхиляється від колової траекторії (явище заносу, описане вище), то для відшукання v_{\max} маємо рівняння

$$m\sqrt{a_{\tau}^2 + (v_{\max}^2/r)^2} = kmg, \text{ з якого знаходимо}$$

$$v_{\max} = \sqrt[4]{r^2(k^2g^2 - a_{\tau}^2)} \approx 9,2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \text{ або приблизно } 33 \text{ км/год.}$$

Зауважимо, що проведений розгляд застосовний до руху по колу не лише автомобілів, але й будь-яких транспортних засобів з ведучими колесами, гусеницями (сила зчеплення!), а також людей, тварин та інших об'єктів, що рухаються завдяки силі зчеплення із земною поверхнею. Саме тому, щоб запобігти явищу заносу на криволінійних ділянках шляху, намагаються збільшити силу зчеплення коліс, гусениць транспортних засобів з поверхнею (спеціальні "зимові" покришки для автомобілів з розвинутим рельєфом, різного роду колеса з шипами, гусениці з профільованими виступами тощо), а також спортивного взуття (профільована підошва або навіть шипи в легкоатлетичних бігових туфлях).

Коливання тіла під дією

пружної сили. Бруск масою m лежить на гладенькій горизонтальній поверхні. До нього приєднана пружина, коефіцієнт жорсткості якої k , а її другий кінець закріплено нерухомо (рис. 3.21). Бруск виводять із положення рівноваги, розтягуючи пружину

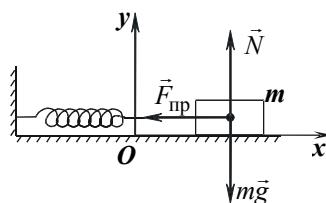


Рис. 3.21. До задачі про коливання тіла під дією пружної сили

¹ Про силу тяги двигуна як про силу, що спричинює рух автомобіля, можна казати лише тоді, коли колеса автомобіля не є ведучими, наприклад, у випадку експериментальних автомобілів з реактивним двигуном.

на величину x_0 , а потім відпускають. Знайти закон подальшого руху бруска.

Розв'язання. До бруска прикладені три сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила реакції горизонтальної поверхні, представлена своєю єдиною нормальню складовою \vec{N} (поверхня гладенька – тертя відсутнє) та пружна сила $\vec{F}_{\text{пр}}$ з боку пружини. Рівняння руху бруска має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{пр}}. \quad (3.36)$$

Наявність зв'язку – горизонтальної поверхні – унеможлилює рух у вертикальному напрямку і так само, як у попередній задачі, прискорення \vec{a} повністю лежить у горизонтальній площині. Отже, знову замість рівняння (3.36) можна записати два рівняння – окремо для горизонтальних і окремо для вертикальних складових векторних величин, що входять до нього:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{пр}}, \quad (3.36a)$$

$$0 = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (3.36b)$$

При виборі початку відліку у точці O , що відповідає початковому рівноважному положенню бруска, рівняння руху бруска (3.36a) має вигляд

$$m\vec{a} = -k\vec{r}, \quad (3.37)$$

де \vec{r} – вектор зміщення бруска з положення рівноваги.

Уведемо декартову систему координат з початком у точці O та віссю OX , направленою вздовж напрямку розтягу пружини. Спроектуємо рівняння руху (3.37) на цей напрямок

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3.38)$$

Для знаходження закону руху $x = x(t)$ це рівняння треба інтегрувати за початкових умов $x(0) = x_0$ та $\dot{x}(0) = 0$. Поділимо ліву й праву частини рівняння (3.38) на m і запишемо його у вигляді

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Оскільки коефіцієнт тертя і маса є додатними величинами, $k > 0$, $m > 0$, то їх відношення можна позначити як $k/m = \omega_0^2$. Тоді рівняння руху набуває вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.39)$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відоме як *рівняння коливань*. Існує загальна методика розв'язання таких рівнянь, ми її використаємо в розд. 8, а зараз зробимо спробу вгадати розв'язок рівняння (3.39), виходячи з простих фізичних міркувань і дослідних фактів.

Після того як за умовою задачі бруск відпускають, він буде рухатися до положення рівноваги під дією пружної сили з боку розтягнутої пружини, але не зупиниться в цьому положенні, а буде за інерцією продовжувати рух, стискаючи пружину. Після зупинки в лівому крайньому положенні бруск під дією пружної сили з боку стиснутої пружини почне переміщуватись праворуч, знову пройде положення рівноваги і досягне крайнього правого, вихідного положення. Після цього описаний вище процес повториться. Таким чином, маємо періодичний процес коливань бруска біля положення рівноваги, що підтверджується дослідним шляхом. Під час такого періодичного руху як зміщення бруска, так і його швидкість та прискорення змінюються нерівномірно: поблизу точок повороту бруск рухається повільно, а положення рівноваги проходить з найбільшою швидкістю. Серед відомих періодичних функцій найбільш близькими до описаного процесу за характером змін є гармонічні функції синуса або косинуса, які можемо випробувати як можливі розв'язки рівняння руху бруска (3.39).

Візьмемо спочатку $x(t)$ у вигляді $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, обчислимо $\ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ і підставимо разом з $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ до рівняння (3.39). У результаті отримаємо рівність $\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi)$, звідки випливає, що $\omega^2 = \omega_0^2$. Отже, періодична функція

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.40)$$

є загальним розв'язком рівняння (3.39). Величина ω_0 називається *власною частотою* коливань, оскільки вона визначається винятково властивостями коливної системи: у розглядуваній задачі масою бруска і жорсткістю пружини. Величина A , яка дорівнює модулю максимального відхилення від положення рівноваги, називається *амплітудою* коливань.

Аргумент гармонічної функції $\omega_0 t + \varphi$ називається фазою коливань, а його значення за $t = 0$, тобто φ , називають початковою фазою коливань. Сталі величини A та φ є не чим іншим, як сталими інтегрування рівняння (3.37), яке містить похідну другого порядку і для розв'язання якого необхідно двічі застосовувати операцію інтегрування, якої ми уникли вгадавши розв'язок (3.40). Ці величини підлягають визначенню з початкових умов. Застосування початкових умов розглядуваної задачі дає систему рівнянь

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi, \\ 0 &= -\omega_0 A \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.41)$$

з якої знаходимо $\varphi = 0$ та $A = x_0$.

Таким чином, розв'язок нашої задачі можна подати у вигляді

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad (3.42)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.43)$$

Оскільки циклічна частота коливань ω_0 пов'язана з періодом коливань T рівністю $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то період коливань бруска

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.43a)$$

Видно, що період коливань зростає при збільшенні маси і зменшенні коефіцієнта жорсткості пружини. Зокрема, коли $k \rightarrow 0$, що відповідає відсутності пружини (відсутності сили пружності), період коливань прямує до нескінченості, тобто брускок ніколи не повернеться до початкового положення.

Зауважимо, що за інших початкових умов, наприклад, коли брускок спочатку перебуває в положенні рівноваги, $x_0 = 0$, і йому в початковий момент коротким поштовхом надають деякої початкової швидкості $\dot{x}(0) = v_0$, розв'язок матиме вигляд, відмінний від (3.42). Дійсно, тепер для визначення сталіх A і φ

маємо рівняння $0 = A \cos \varphi$ та $v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi$, звідки знаходимо $\varphi = \pi/2$ та $A = -v_0/\omega_0$ і, таким чином:

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Малі коливання математичного маятника. Під *математичним маятником* розуміють матеріальну точку, підвішену в однорідному полі тяжіння на нерозтяжному невагомому підвісі. Маятник відхиляють від положення рівноваги на малий кут θ_0 і відпускають без початкової швидкості. Знайти закон руху маятника, якщо довжина підвісу l .

Розв'язання. До матеріальної точки прикладені дві сили (рис. 3.22): однорідна сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила \vec{T} з боку підвісу. Отже, рівняння руху математичного маятника має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \quad (3.44)$$

Якщо відхилення маятника від положення рівноваги характеризувати радіус-вектором \vec{r} матеріальної точки відносно точки O , то помітно, що векторна сума сил у правій частині рівняння (3.44) завжди напрямлена протилежно вектору відхилення \vec{r} (більш точно, має складову протилежну \vec{r}). При малих відхиленнях суми сил, прикладених до матеріальної точки, $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$, може бути подана як деяка сила $\vec{F} = -k\vec{r}$ з тим більшою точністю, чим менше відхилення \vec{r} . Формула цієї сили подібна формулі пружної сили¹. Тому можна очікувати, що закон руху матеріальної точки в цій задачі буде такий самий, як закон руху бруска під дією пружної сили в попередній задачі, тобто гармонічним. З іншого боку, цей рух обмежений зв'язком, що задається умовою $l = \text{const}$, тобто матеріальна

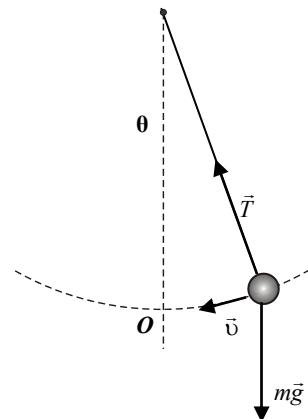


Рис. 3.22. До задачі про малі коливання математичного маятника

¹ Таку силу називають *квазіпружною*.

точка в розглядуваній задачі рухається по дузі кола радіуса l , подібно до руху малого тіла, що починає ковзати з вершини гладенької сфери, розглянутого раніше. З огляду на це, спроектуємо рівняння (3.44) на напрямки дотичної та нормальні до траєкторії, що задані одиничними векторами \vec{t} та \vec{n} :

$$ma_t = -mg \sin \theta, \quad (3.45a)$$

$$ma_n = mg \cos \theta - T, \quad (3.45b)$$

де θ – центральний кут між поточним напрямком вектора нормалі \vec{n} і напрямком вектора \vec{g} . Ураховуючи, що $a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}$, а $s = l\theta$, рівняння (3.45a) можна переписати у вигляді $l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$. Оскільки за малих кутів відхилення $\sin \theta \approx \theta$, то остаточно маємо рівняння руху математичного маятника

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.46)$$

де введено позначення $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Рівняння (3.46) збігається за формою з рівнянням коливань (3.39). Отже, загальним розв'язком рівняння (3.46) є $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, який після врахування початкових умов $\theta(0) = \theta_0$ та $\dot{\theta}(0) = 0$ дає шуканий закон руху маятника

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).$$

Таким чином, за малих відхилень математичний маятник здійснює гармонічні коливання з власною частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, якій відповідає період коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3.47)$$

що не залежить від маси матеріальної точки і тим більший, чим більша довжина підвісу та чим менше прискорення вільного падіння в місці розташування маятника. Зокрема, при прямуванні g до нуля, наприклад в умовах невагомості на космічній станції, період коливань прямує до нескінченності, тобто коливання не спостерігаються, оскільки відсутні сили, здатні повернути матеріальну точку до положення рівноваги, яке також стає невизначеним.

Формула (3.47) має різноманітні застосування, серед яких зазначимо визначення прискорення вільного падіння g у заданій ділянці простору поблизу поверхні Землі за вимірюваним періодом коливань (гравіметрія). Періодичний рух математичного маятника (його ще називають гравітаційним) може бути використаний для вимірювання часу (великі баштові годинники та настінні годинники).

Гравітаційні маятники, які застосовують на практиці, часто не задовольняють означення математичного маятника як матеріальної точки, оскільки підвішене тіло має розміри, які не можна вважати малими порівняно з відстанню від його центра ваги до точки підвісу. Унаслідок цього рух підвішеного тіла не можна вважати поступальним і користуватися рівнянням динаміки матеріальної точки. У цьому випадку необхідно враховувати також обертальний рух підвішеного тіла, яке зазвичай розглядають як абсолютно тверде тіло, і тому застосовують до нього рівняння динаміки абсолютно твердого тіла (див. розд. 6). Такі маятники, на відміну від математичних, називають *фізичними*. Період їх малих коливань описується формулою, подібною до формул (3.47), але геометричну довжину підвісу l у ній замінюють так званою *зведенюю довжиною* підвісу $l_{\text{зв}}$, яка завжди більша за відстань від точки закріплення підвісу до центра мас підвішеного тіла. Тому період коливань фізичного маятника буде завжди більшим за період математичного маятника, усю масу якого зосереджено в центрі мас фізичного маятника. Це пов'язано з тим, що за однакової повної механічної енергії маятника кінетична енергія фізичного маятника розподіляється між поступальними та обертальними степенями вільності підвішеного тіла. Отже, швидкість центра мас фізичного маятника буде завжди меншою від швидкості центра мас відповідного математичного маятника.

Зазначимо, що вираз для періоду (3.47) справедливий лише при малих коливаннях. При зростанні амплітуди коливань період коливань збільшується відповідно до формули

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right], \quad (3.48)$$

яка переходить у формулу (3.47) за $\theta_0 \rightarrow 0$. Це збільшення дуже повільне: похибка формули (3.47) порівняно із формулою (3.48) не перевищує 0,05 % за амплітуди коливань $\theta_0 \approx 5^\circ$ і сягає 1 % за

амплітуди коливань $\theta_0 \approx 23^\circ$, тому формула (3.47) має широке практичне застосування.

Зауважимо, що рівняння малих коливань математичного маятника можна отримати різними шляхами і записувати його в різних змінних. Наприклад, до рівняння коливань (3.39) можна прийти проектуванням рівняння руху (3.44) на осі прямокутної декартової системи координат із початком у точці рівноваги O з віссю OX , спрямованою горизонтально, і віссю OY , спрямованою вертикально вгору:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \sin \theta, \\ m\ddot{y} &= -mg + T \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.49)$$

За малих відхилень $\sin \theta \approx 0$, $\cos \theta \approx 1$, а вертикальною складовою прискорення \ddot{y} поблизу положення рівноваги можна знехтувати порівняно з величиною прискорення вільного падіння g . Тоді з другого рівняння системи (3.49) випливає, що $T \approx mg$, і після підстановки в перше рівняння системи (3.49) маємо $m\ddot{x} = -mg\theta$. Оскільки $\theta \approx x/l$, то остаточно одержимо $\ddot{x} = -g(x/l)$ або $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, що збігається з виразом (3.44).

Рух системи зв'язаних тіл. Знайти прискорення системи трьох зв'язаних між собою брусків з масами m_1 , m_2 , m_3 , що ковзають по горизонтальній поверхні під дією сили \vec{F}_0 (рис. 3.23) з коефіцієнтами тертя k_1 , k_2 , k_3 , відповідно, і сили натягу ниток між ними. Нитки вважати невагомими та нерозтяжними.

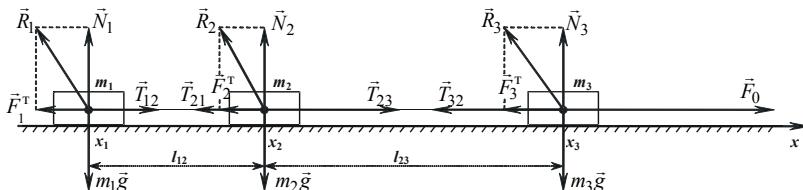


Рис. 3.23. Рух декількох зв'язаних тіл

Розв'язання. У задачах динаміки, де розглядається рух декількох тіл, складають рівняння руху для кожного тіла, а також записують співвідношення, що випливають з наявності зв'язків.

Рівняння руху брусків такі:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{T}_{12}, \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{T}_{21} + \vec{T}_{23}, \\ m_3 \vec{a}_3 &= m_3 \vec{g} + \vec{R}_3 + \vec{T}_{32} + \vec{F}_0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Підставимо у векторні рівняння (3.50) сили реакції з боку горизонтальної поверхні \vec{R}_i у вигляді суми їх тангенціальних складових сил тертя ковзання $\vec{F}_i^T = -k_i N_i \frac{\vec{v}_i}{|v_i|}$ і нормальних складових \vec{N}_i :

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 - k_1 |\vec{N}_1| \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} + \vec{T}_{12}, \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 - k_2 |\vec{N}_2| \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} + \vec{T}_{21} + \vec{T}_{23}, \\ m_3 \vec{a}_3 &= m_3 \vec{g} + \vec{N}_3 - k_3 |\vec{N}_3| \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|} + \vec{T}_{32} + \vec{F}_0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Уведемо для зручності декартову систему координат, вісь OX якої спрямуємо вздовж вектора \vec{F}_0 , а вісь OY – угору по нормальні до горизонтальної площини. Спроектуємо векторні рівняння (3.51) на осі OX та OY обраної системи координат:

$$m_1 \ddot{x}_1 = T_{12} - k_1 N_1, \quad (3.52a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T_{21} + T_{23} - k_2 N_2, \quad (3.52a)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -T_{32} - k_3 N_3 + F_0;$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + N_1,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + N_2, \quad (3.52b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 = -m_3 g + N_3.$$

Наявність горизонтальної поверхні унеможливлює рух брусків у вертикальному напрямку: $y_1 = \text{const}$, $y_2 = \text{const}$, $y_3 = \text{const}$, що означає рівність нулю вертикальних складових векторів швидкості \dot{y} та прискорення \ddot{y} . Отже, вектори прискорення всіх трьох брусків лежать у горизонтальній площині.

Нерозтяжність ниток означає, що відстані між центрами брусків у процесі руху залишаються незмінними, $l_{12} = \text{const}$ та

$l_{23} = \text{const}$. Положення центрів брусків на горизонтальній поверхні визначається координатами x_1 , $x_2 = x_1 + l_{12}$, $x_3 = x_2 + l_{23}$, звідки після подвійного диференціювання випливає, що $\ddot{x}_3 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$, тобто всі бруски рухаються з одинаковим прискоренням a у горизонтальному напрямку.

З урахуванням вищезазначеного можна переписати рівняння (3.52a) та (3.52б) таким чином:

$$\begin{aligned} m_1 a &= T_{12} - k_1 N_1, \\ m_2 a &= -T_{21} + T_{23} - k_2 N_2, \end{aligned} \quad (3.53a)$$

$$\begin{aligned} m_3 a &= -T_{32} - k_3 N_3 + F_0; \\ 0 &= -m_1 g + N_1, \\ 0 &= -m_2 g + N_2, \\ 0 &= -m_3 g + N_3. \end{aligned} \quad (3.53b)$$

Додамо ліві й праві частини перших трьох рівнянь і підставимо в отримане рівняння величини нормальних складових сили реакції, знайдені з останніх трьох рівнянь:

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = T_{12} - T_{21} + T_{23} - T_{32} - k_1 m_1 g - k_2 m_2 g - k_3 m_3 g + F_0.$$

За третім законом Ньютона сили, з якими бруски діють один на один через невагомі нитки, однакові за модулем і протилежно напрямлені, тобто $T_{12} - T_{21} = 0$, $T_{23} - T_{32} = 0$. Отже, шукане прискорення дорівнює

$$a = (F_0 - k_1 m_1 g - k_2 m_2 g - k_3 m_3 g) / (m_1 + m_2 + m_3). \quad (3.54)$$

Сили натягу ниток легко знаходимо із перших двох рівнянь системи (3.53a).

Твердження про те, що сили, прикладені до двох сусідніх брусків, з боку невагомої нитки однакові, є настільки відомим і часто використовуваним, що сприймається багатьма як деяка аксіома. Корисно з'ясувати, на чому воно ґрунтуються. Для цього перепишемо рівняння руху другого бруска (друге рівняння із (3.53a)) у вигляді

$$T_{23} - T_{21} = m_2 a - k_2 N_2 \quad (3.55)$$

Для того, щоб $T_{23} = T_{21}$, необхідно, щоб права частина рівняння (3.55) під час руху дорівнювала нулю. Це завжди буде виконуватись за $m_2 = 0$ і $N_2 = 0$, що відповідає заміні другого бруска

невагомою ниткою ($m_2 = 0$), яка з'єднує перший і третій бруски й не торкається горизонтальної поверхні ($N_2 = 0$). Якщо б нитки, що з'єднують бруски, у нашій задачі не були невагомими, а кожна мала б масу m , то сили натягу на їх кінцях відрізнялися б на величину ma .

Контрольні запитання та вправи

3.1. Іноді закон інерції формулюють так: тіло рухається прямолінійно і рівномірно, якщо на нього не діють інші тіла або їх дії взаємно компенсуються. Чи варто тут згадувати про взаємну компенсацію дій?

3.2. Чи можна вважати, що 1-й закон Ньютона є наслідком 2-го закону Ньютона?

3.3. Чи можна для обчислення сили притягання між двома тілами, які не можна вважати матеріальними точками, застосовувати формулу (3.5), якщо до неї замість r підставляти відстань між центрами мас цих тіл?

3.4. Чому машиніст для зрушення потяга з місця спочатку подає локомотив трохи назад і після того як декілька перших вагонів зрушили з місця, починає рух уперед, поступово збільшуючи швидкість.

3.5. У кожному з двох однакових човнів знаходиться матрос, який підтягує човен до берега за допомогою мотузка із силою 50 Н. Який із човнів рухається з більшим прискоренням, якщо один мотузок прив'язано до стовпа, а за кінець іншого мотузка із силою 50 Н тягне людина, що стоїть на березі. Маси матросів однакові.

3.6. Невеликому тілу, розташованому на внутрішній поверхні гладенької сфери радіуса r в її найнижчій точці, надають невеликого поштовху. Описати подальший рух тіла і порівняти його з рухом тіла в задачі про ковзання тіла з вершини гладенької сфери.

3.7. Найбільша досягнута дальність стрільби з гармати 130 км, причому снаряд випускається під кутом $52-55^\circ$ до горизонту, а не 45° , що відповідає максимальній дальності без урахування опору повітря, чому?

3.8. Знайти безкоординатним методом прискорення \vec{a} бруска, що починає ковзати з похилої площини, вектор нормалі до якої \vec{n} . Коефіцієнт тертя ковзання k , вектор прискорення вільного падіння \vec{g} .

РОЗДІЛ 4

Рух відносно неінерціальних систем відліку

Інерціальні системи відліку (ICB) досить зручні для розв'язання різноманітних задач механіки. Їх перевага перед іншими системами відліку полягає насамперед у тому, що перебіг усіх механічних явищ у них одинаковий. Проте далеко не всі системи відліку, відносно яких доводиться розглядати рух, інерціальні. Найпоширеніша система відліку, пов'язана з поверхнею Землі може вважатись інерціальною лише наближено. Ще більш далекими від інерціальних, але практично дуже важливими є системи відліку, пов'язані з транспортними засобами: кораблями, ракетами, літаками тощо. Із попереднього розділу випливає, що основне рівняння динаміки матеріальної точки, за допомогою якого можна розв'язувати надзвичайно широке коло задач динаміки в ICB, не залишається незмінним при переході до неінерціальної системи відліку (HCB), унаслідок того, що прискорення відносно HCB не збігається з прискоренням відносно ICB. Отже, щоб з'ясувати як перетворюється основне рівняння динаміки при переході від ICB до HCB насамперед треба знайти зв'язок між векторами прискорень частинки відносно ICB та HCB.

4.1. Зв'язок між векторами швидкості і прискорення відносно ICB та HCB

Вважатимемо, що всі припущення за яких розглядався перехід від однієї ICB до іншої (підрозд. 3.5), а саме: незмінність довжин просторових відрізків ($\Delta l' = \Delta l$), плину часу ($\Delta t' = \Delta t$), маси ($m' = m$) і взаємодії з іншими тілами та полями ($\vec{F}' = \vec{F}$) залишаються в силі і при переході від деякої ICB K до HCB K' .

Нехай система K' рухається довільно відносно системи K , тобто прискорено переміщується й обертається навколо деякої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Для наочності будемо вважати, що ICB – це коперникова система відліку, початок якої O лежить у центрі Сонця, а HCB – система відліку, пов'язана із Землею, що обертається навколо своєї осі та переміщується як ціле відносно Сонця (рис. 4.1), причому початок її O' лежить у центрі Землі.

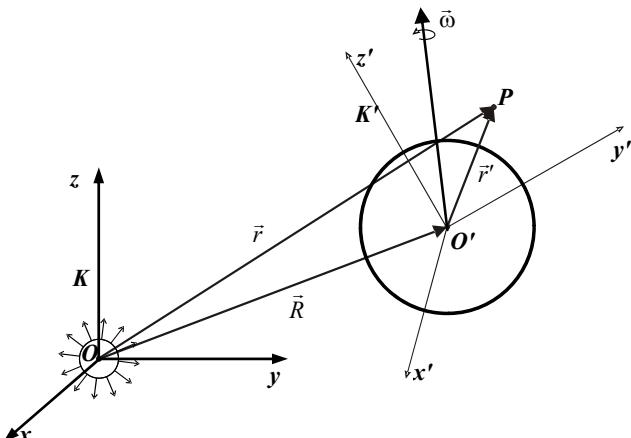


Рис. 4.1. Визначення положення частинки відносно ICB K та HCB K'

Опишемо рух однієї й тієї самої частинки P у системах відліку K та K' . Положення частинки P у HCB визначається радіус-вектором \vec{r}' , а в ICB – радіус-вектором \vec{r} . Положення початку O' системи K' відносно початку O системи K визначається радіус-вектором \vec{R} . Очевидний зв'язок між цими векторами дає формула

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'. \quad (4.1)$$

Швидкість частинки P відносно ICB K знайдемо як похідну від радіус-вектора за часом t :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (4.2)$$

Розглянемо детально обчислення похідних у правій частині (4.2). Радіус-вектор \vec{R} можна подати у вигляді

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad (4.3)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти декартової системи координат, жорстко зв'язаної з системою відліку K . Тоді швидкість початку O' відносно початку O відповідно до відомих правил диференціювання суми та добутку матиме вигляд

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{X}\vec{i} + \vec{Y}\vec{j} + \vec{Z}\vec{k}) = \dot{\vec{X}}\vec{i} + \dot{\vec{Y}}\vec{j} + \dot{\vec{Z}}\vec{k} + X \frac{d\vec{i}}{dt} + Y \frac{d\vec{j}}{dt} + Z \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (4.4)$$

Останні три доданки в цьому виразі дорівнюють нулю, оскільки дорівнюють нулю похідні за часом від ортів, напрямки яких не змінні відносно системи K . Отже,

$$\vec{V} = \dot{\vec{X}}\vec{i} + \dot{\vec{Y}}\vec{j} + \dot{\vec{Z}}\vec{k}. \quad (4.5)$$

Радіус-вектор \vec{r}' можна розкласти по ортах $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ декартової системи координат жорстко зв'язаної з системою K' :

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \quad (4.6)$$

Похідна від \vec{r}' за часом t дорівнює

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}. \quad (4.7)$$

Оскільки $\Delta t' = \Delta t$, то в перших трьох доданках (4.7) замінимо dt на dt' , і позначимо їх суму як \vec{v}' :

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt'} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt'} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt'} \vec{k}'. \quad (4.8)$$

Бачимо, що всі величини в правій частині (4.8) визначені винятково відносно системи відліку K' і вектор \vec{v}' є, таким чином, вектором швидкості частинки P відносно НСВ K' .

Похідні від ортів $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ взяті за часом t , у правій частині формулі (4.7) у загальному випадку не дорівнюють нулю, оскільки ці орти, на відміну від ортів $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, при обертанні системи K' змінюють свою орієнтацію відносно системи K . Виходячи із тих самих міркувань, що й при отриманні другого доданка у формулі (2.40), для цих похідних можна записати вирази:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{i}'], \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{j}'], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{k}']. \quad (4.9)$$

Підставляючи (4.8) і (4.9) до (4.7) і використовуючи розподільчу властивість векторного добутку, отримаємо

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}'] + \vec{v}' . \quad (4.10)$$

Таким чином, швидкості \vec{v} і \vec{v}' частинки P відносно системи K та відносно системи K' пов'язані співвідношенням

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}'] + \vec{v}' . \quad (4.11)$$

Вектор \vec{v} називають *абсолютною* швидкістю частинки P , вектор \vec{v}' – її *відносною* швидкістю, а вектор $\vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}']$ – її *переносною* швидкістю. Диференціюванням вектора абсолютної швидкості \vec{v} за часом t отримаємо вектор абсолютноого прискорення \vec{a} частинки P відносно ICB K , поданий через величини, що описують рух частинки відносно системи K' та рух самої системи K' відносно системи K :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \right] + \frac{d\vec{v}'}{dt} . \quad (4.12)$$

Похідна за часом t від вектора \vec{v}' , заданого в системі K' , обчислюється аналогічно похідній від вектора \vec{r}' (див. (4.10)):

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + \vec{a}' , \quad (4.13)$$

де $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$ – прискорення частинки P відносно HCB K' .

Ураховуючи (4.10) і (4.13), із (4.12) можна отримати шуканий зв'язок між вектором прискорення частинки P відносно HCB \vec{a}' та її вектором прискорення \vec{a} відносно ICB:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} - \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right] - \left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \right] - 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] , \quad (4.14)$$

де через \vec{A} позначене прискорення початку O' відносно початку O , $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$.

Видно, що при переході від ICB до HCB, прискорення частинки, як і очікувалось, не залишається інваріантним, а змінюється залежно від характеру руху HCB: $\vec{a}' = \vec{a}$ лише за $\vec{\omega} \rightarrow 0$ та $\vec{A} \rightarrow 0$, що відповідає переходу до ICB. У загальному випадку у правій частині (4.14), окрім \vec{a} , маємо ще чотири доданки. Суму перших трьох із них називають *переносним прискоренням*. Переносне прискорення

обумовлене рухом НСВ відносно ICB і може спостерігатись навіть для частинок, які перебувають у спокої відносно НСВ ($\vec{r}' = \text{const}$). Кожний із трьох доданків переносного прискорення дістав спеціальну назву. Так зване *поступальне* прискорення $-\vec{A}$ дорівнює прискоренню початку відрізу НСВ відносно ICB, узятому зі знаком мінус. Його назва пов'язана з тим, що при суто поступальному русі НСВ (коли $\vec{\omega} = 0$) лише цей доданок дає внесок у переносне прискорення.

Дотичне прискорення $-\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right]$ дістало таку назву тому, що

воно напрямлене вздовж дотичної до траекторії, яку частинка описує в ICB, і виникає лише тоді, коли відбувається прискорене обертання системи K' . Дотичне прискорення дорівнює дотичній (тangenціальній) складовій прискорення частинки при її русі по коловій траєкторії, узятій зі знаком мінус (див. формулу (2.23а) у підрозд. 2.1.5). Нарешті, *відцентрове прискорення* $-\left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \right]$, яке напрямлене від осі обертання і дорівнює нормальній складовій прискорення частинки відносно ICB, узятій зі знаком мінус. Четвертий доданок $-2[\vec{\omega} \times \vec{v}']$ – це так зване *коріолісове прискорення* (прискорення Коріоліса). Коріолісове прискорення з'являється лише тоді, коли частинка рухається відносно НСВ ($\vec{v}' \neq 0$), яка обертається, і лише тоді, коли вектори \vec{v}' і $\vec{\omega}$ неколінеарні.

4.2. Основне рівняння динаміки частинки в НСВ

Помножимо рівність (4.14) на масу частинки m і врахуємо, що перший доданок $m\vec{a}$ у правій частині отриманого виразу відповідно до другого закону Ньютона можна замінити на $\vec{F}_{\text{вз}}$. Після елементарних перетворень дістанемо

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{вз}} - m\vec{A} - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right] - m\left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \right] - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}'] \quad (4.15)$$

Отже, маємо основне рівняння динаміки частинки в НСВ, яке дозволяє знайти її прискорення \vec{a}' відносно НСВ, якщо відомі

сили взаємодії $\vec{F}_{\text{вз}}$, прикладені до частинки, а також відомий характер руху НСВ відносно довільної ICB. Доцільно надати цьому рівнянню вигляду, подібного до рівняння другого закону Ньютона в ICB. Тоді можна буде до задач про рух частинки відносно НСВ застосувати ті самі підходи, що й в ICB. Для цього будемо записувати основне рівняння динаміки частинки в НСВ у вигляді

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{вз}} + \vec{F}_{\text{ін}}, \quad (4.16)$$

де для зручності введено так звані *сили інерції* $\vec{F}_{\text{ін}}$:

$$\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{A} - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}']] - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}'], \quad (4.17)$$

серед яких розрізняють *поступальну силу інерції* $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{пост}} = -m\vec{A}$, пов'язану з поступальним прискоренням, *відцентрову силу інерції* $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{відц}} = -m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]$, обумовлену існуванням відцентрового прискорення, та *силу Коріоліса* $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{Кор}} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}']$. Сила інерції $-m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right]$, зумовлена дотичним прискоренням, спеціальної назви не дістала.

Зазначимо, що величини (модулі) усіх сил інерції за способом їх уведення пропорційні масі частинки, до якої вони прикладені, і величинам (модулям) відповідних прискорень, зумовлених прискоренням НСВ відносно ICB, а їх напрямки збігаються з напрямками цих прискорень.

Із викладеного ясно, що виникнення сил інерції пов'язане з переходом від ICB до НСВ. Уведення цих сил дозволяє зберегти зручну форму запису рівняння руху частинки: у лівій частині стоїть добуток маси частинки на її прискорення відносно НСВ, а в правій частині – сума сил, прикладених до частинки, причому в НСВ поряд із силами взаємодії частинки з іншими матеріальними об'єктами слід врахувати і сили інерції. Для сил інерції неможливо вказати джерело у вигляді певного тіла, що діє на частинку, а отже, для сил інерції не можна вказати і сили протидії, про які йдеться в третьому законі Ньютона, а тому цей закон не застосовний до сил інерції. Це цілковито узгоджується із твердженням про те, що закони динаміки Ньютона справедливі лише в ICB.

Той факт, що сили інерції обумовлені характером руху системи відліку, добре видно в демонстраційному досліді з кулькою, яка скочується по похилій площині до центра горизонтального диска, що обертається (рис. 4.2). Слід, що його залишає на поверхні диска кулька, попередньо натерта крейдою, явно викривлений. З точки зору спостерігача, що обертається разом з диском (тобто разом із НСВ), викривлення траєкторії кульки відбувається під дією деякої сили, що перпендикулярна вектору її швидкості, у даному випадку сили Коріоліса $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{Кор}} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}']$, оскільки кулька має швидкість $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$. Для спостерігачів, що перебувають у лабораторії (тобто нерухомих відносно НСВ), таке твердження є дивним: вони бачать, що відносно лабораторії (НСВ) кулька рухається прямолінійно, а от поверхня диска "прокручується" під кулькою, вислизає з під неї, що й призводить до викривлення крейдяного сліду на поверхні диска.

Властивості сил інерції можуть бути продемонстровані в цілій низці дослідів. Розглянемо спочатку прояві відцентрової сили інерції у вищевказаному виразі для якої подамо вектор \vec{r}' як $\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$, де $\vec{r}'_{\parallel} \parallel \vec{\omega}$ і $\vec{r}'_{\perp} \perp \vec{\omega}$ (рис. 4.3). Оскільки $[\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\parallel}] = 0$, то

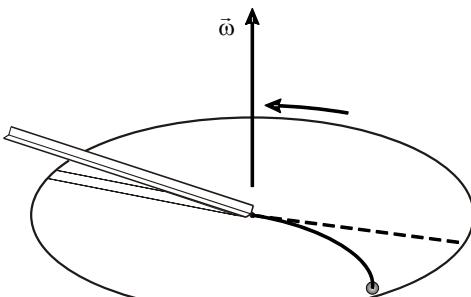


Рис. 4.2. До походження сил інерції

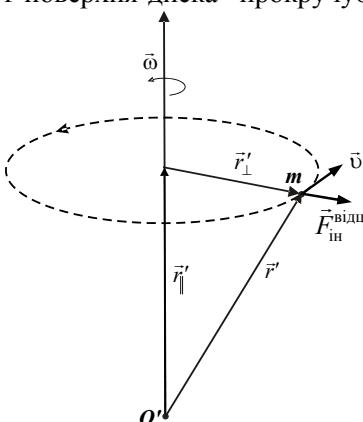


Рис. 4.3. До визначення напрямку відцентрової сили інерції

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{відц}} &= -m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp})]] = -m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\parallel}]] - m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\perp}]] = \\ &= -m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\perp}]] = -m\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_{\perp}) + m\vec{r}'_{\perp}\omega^2,\end{aligned}$$

а з урахуванням рівності $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\perp') = 0$, остаточно

$$\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}} = m\omega^2 \vec{r}_\perp'. \quad (4.18)$$

На рис. 4.4 показано три одинакові кульки, підвішені на різних відстанях від осі обертання диска, який репрезентує НСВ, під час його рівномірного обертання. Цей дослід показує, що відхилення кульок від вертикаль зростає як зі збільшенням кутової швидкості обертання диска, так і при віддаленні від осі обертання (зокрема кулька, підвішена на осі обертання, не відхиляється зовсім). Розглядаючи це відхилення в НСВ, яка обертається з диском, ми інтерпретуємо його як дію на кульку поряд із силами

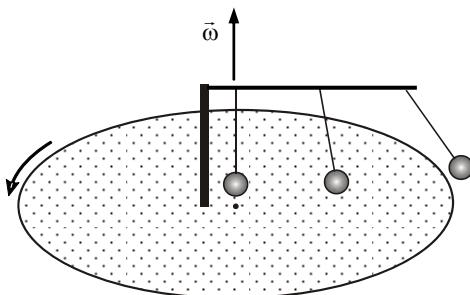


Рис. 4.4. До залежності відцентрової сили інерції від відстані до осі

ми взаємодії – силою $m\vec{g}$ та силою реакції нитки \vec{T} – також відцентрової сили інерції $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}}$. Ця інтерпретація настільки наочна і зрозуміла, що іноді складається помилкове враження про можливість пояснення ефектів такого типу лише в НСВ.

Щоб показати цілковиту рівноправність застосування ICB та HCB, розглянемо наведений дослід спочатку в НСВ, яка обертається разом з диском, а потім в лабораторній системі відліку, нерухомій відносно поверхні Землі, яку в цьому випадку з високою точністю можна прийняти за ICB.

1. Рівняння руху кульки в НСВ із початком на осі обертання диска відповідно до рис. 4.5 має вигляд

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}}, \quad (4.19)$$

де \vec{T} – сила реакції підвісу, а $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}}$ – відцентрова сила інерції.

Оскільки при рівномірному обертанні диска кулька залишається у спокої щодо нього, то $\vec{a}' = 0$ і з (4.19) маємо $\vec{T} = -m\vec{g} - \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}}$. Звідси одразу видно, що нитка відхиlena від вертикаль, оскільки вектор \vec{T} неколінеарний вектору \vec{g} уна-

лідок появи доданка $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{відц}}$. Щоб знайти кут відхилення нитки від вертикаль введемо для зручності декартову систему координат, жорстко зв'язану з диском, початок якої лежить на осі обертання, вісь OY якої напрямлена вздовж осі обертання вгору, а вісь OX – уздовж радіуса диска в напрямку кульки

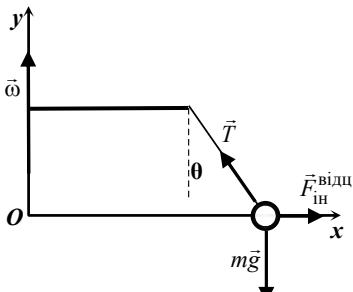


Рис. 4.5. До розрахунку кута відхилення θ

(рис. 4.5), і спроектуємо рівняння (4.19) на ці осі. З урахуванням умови $\ddot{a}' = 0$ отримаємо

$$0 = -T_x + m\omega^2 r'_\perp, \quad (4.20a)$$

$$0 = T_y - mg. \quad (4.20b)$$

Таким чином, горизонтальна складова сили натягу \vec{T} виникає внаслідок дії відцентрової сили інерції $m\omega^2 r'_\perp$. Тангенс кута відхилення підвісу від верикалі θ пропорційний квадрату кутової швидкості обертання диска ω і прямо пропорційний відстані кульки від осі обертання r'_\perp :

$$\tan \theta = \frac{T_x}{T_y} = \frac{m\omega^2 r'_\perp}{mg} = \frac{\omega^2 r'_\perp}{g}. \quad (4.21)$$

2. При розгляді цього самого досліду в ICB необхідно врахувати лише дві сили взаємодії $m\vec{g}$ та \vec{T} , що діють на кульку (рис. 4.5). Відповідно рівняння руху має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \quad (4.22)$$

На відміну від HCB, у ICB кулька не перебуває у спокої, а рівномірно рухається по відомій траекторії, а саме, по колу радіуса r'_\perp . Уведемо так звану супровідну систему координат x, y, z , яка рухається разом з кулькою. Нехай її осі OX та OZ збігаються з нормальню та дотичною до траєкторії, а вісь OY буде перпендикулярна до площини траєкторії і направлена вгору. Спроектуємо рівняння (4.21) на осі OX та OY :

$$m\vec{a}_x = T_x, \quad 0 = T_y - mg. \quad (4.23)$$

Підстановка в перше рівняння системи (4.23) замість \vec{a}_x величини нормальню складової прискорення $\omega^2 r$, дає систему рівнянь для визначення кута відхилення θ , що повністю збігається із системою (4.20), яка має розв'язок (4.21).

Таким чином, одну й ту саму задачу можна однаково успішно розглянути як у НСВ, так і в ICB, але в багатьох випадках розгляд у НСВ виявляється більш наочним.

На використанні сил інерції заснована дія багатьох технічних пристрій. На рис. 4.6 показано регулятор Ватта для обмеження кількості обертів у первих парових машинах. Він складається із двох симетрично розміщених відносно осі обертання тягарців з масами m , що закріплені на кінцях двох стрижнів, шарнірно з'єднаних між собою в точці A . Ці стрижні, у свою чергу, шарнірно з'єднані в точках B і C двома тягами BD і CE , а тяги приєднані через шарніри D і E до муфти M , що може ковзати по вертикальній осі. При зростанні швидкості обертання навколо вертикальної осі тягарці під дією відцентрової сили інерції $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{відц}}$ віддаляються від осі обертання. Це зумовлює ковзання вгору шарнірно з'єднаної з ними муфти, яка механічно сполучена з клапаном, що обмежує подачу пари.

Відцентрова сила інерції також широко використовується в насосах, центрифугах та сепараторах як у побуті (відцентровий водянний насос на присадибній ділянці, центрифуга в пральній машині, сепаратор, що розділяє молоко на жир та воду), так і в найсучасніших технологіях (розділення сумішей та біологічних речовин з різною густинною в біотехнології, розділення ізотопів на ультрацент-

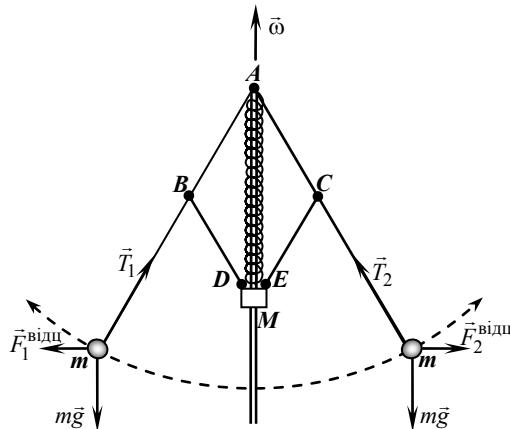


Рис. 4.6. Регулятор Ватта

рифугах в ядерній фізиці, створення штучної сили тяжіння в космічних дослідженнях тощо). На наступних рисунках показано досліди, які уточнюють принципи розділення рідин різної густини та твердих тіл різної густини, занурених у рідину за допомогою відцентрової сили інерції.

На рис. 4.7 зображене скляну посудину, в яку налито ртуть, а поверх ній – воду. Коли цю посудину обертають з достатньо великою кутовою швидкістю навколо вертикальної осі, то внаслідок дії відцентрової сили інерції ртуть відкидається до найбільш віддаленої від осі обертання ділянок стінки посудини, утворюючи дзеркальну смужку на бічній стінці посудини (рис. 4.7, а). На рис. 4.7, б показано розподіл рідин у перерізі посудини для обох випадків. Можна твердити, що цей розподіл так само як і орієнтація меж поділу ртуть–вода та вода–повітря визначається напрямком "сили тяжіння", причому у випадку нерухомої посудини це сила тяжіння $m\vec{g}$, яка існує біля поверхні Землі, а у випадку посудини, що обертається, роль "сили тяжіння" відіграє векторна сума сили $m\vec{g}$ та відцентрової сили інерції $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{відц}} = -m\omega^2\vec{r}$. Саме за рахунок обертання можливе існування штучної "сили тяжіння" на космічних станціях.

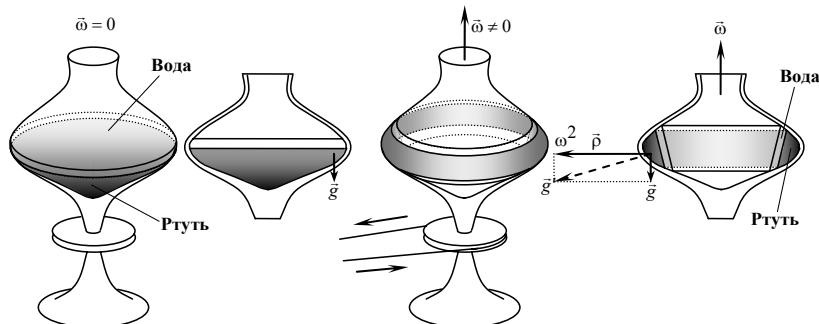


Рис. 4.7. Розподілення рідин різної густини під дією відцентрової сили

На рис. 4.8 наведено експеримент із закритою з обох кінців V-подібною трубкою, що наповнена водою. У ній містяться дві кульки: сталева та коркова. У нерухомій трубці (рис. 4.8, а) сталева кулька лежить на дні, а коркова кулька такого самого розміру плаває на поверхні води в одному із колін трубки. Якщо

трубці надати швидкого обертання навколо вертикальної осі (рис. 4.8, б), то за деякого значення кутової швидкості сталева та коркова кульки міняються місцями: коркова кулька 1 опиняється в нижній частині трубки разом з повітряним пухиром, а сталева кулька 2 – у верхній частині одного із колін!

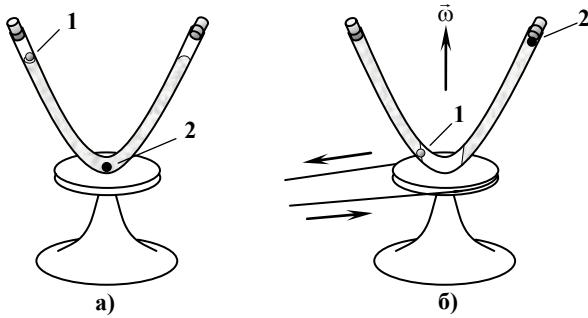


Рис. 4.8. Дослід з V-подібною трубкою

Нарешті, деформація пружних обручів під час їх швидкого обертання (рис. 4.9) демонструє руйнівну дію відцентрової сили інерції на різні маховики та ротори, а також пояснє походження фігури Землі, а саме, її сплюснутість в напрямку осі обертання. Муфточки M , до яких прикріплені обручі, можуть вільно ковзати вздовж вертикальної штанги, розміщеної на осі обертання.

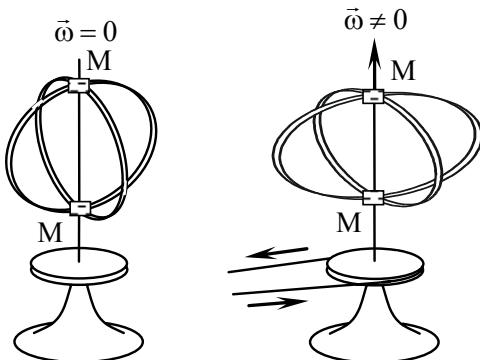


Рис. 4.9. Деформація обручів під дією відцентрової сили інерції

На рис. 4.10 показано вільно підвішений тягарець з масою m_1 , що відхиляється на кут θ від вертикалі під дією поступаль-

ної сили інерції $\vec{F}_1^{\text{ін}} = -m_1 \vec{a}$ при прискореному русі платформи, на якій його закріплено. Він являє собою найпростіший *акселерометр* – пристрій для вимірювання прискорення \vec{a} відносно ICB. Більш зручними є акселерометри, в яких про прискорення відносно ICB судять за величиною пружної деформації, як наприклад, акселерометр також зображений на рис. 4.10, який складається з тягарця масою m_2 , що може ковзати з мінімальним тертям у горизонтальному напрямку, та пружини, видовження якої $\Delta\ell$ пропорційне поступальній силі інерції $\vec{F}_2^{\text{ін}} = -m_2 \vec{a}$, що діє на цей тягарець. Акселерометри широко застосовуються в інерціальних системах навігації літаків, кораблів, ракет, про які йшлося в п. 2.1.4.

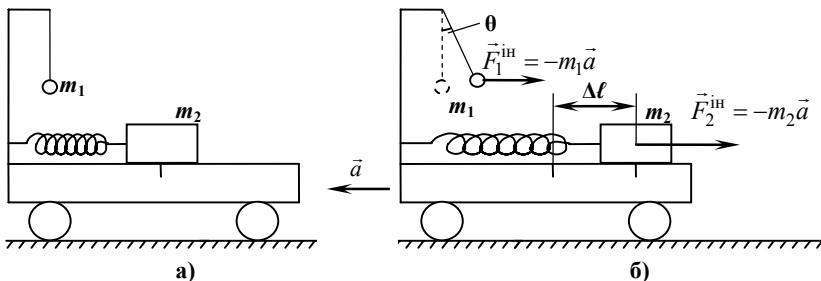


Рис. 4.10. До вимірювання прискорення платформи відносно ICB:
а) прискорення платформи $\vec{a}=0$; б) $\vec{a} \neq 0$

4.3. Рух частинки поблизу поверхні Землі

Введення сил інерції дозволяє також досить просто пояснити цілу низку ефектів і явищ, що спостерігаються на поверхні Землі та обумовлені її неінерціальністю як системи відліку, тлумачення яких щодо ICB дуже складне і не наочне. Дійсно, Земля рухається відносно Сонця по еліптичній орбіті, тобто непрямолінійно і нерівномірно, а також обертається навколо осі, що проходить через її центр, тобто поверхня Землі рухається прискорено відносно геліоцентричної системи відліку, яку в цьому випадку можна беззастережно вважати інерціальною.

4.3.1. Рівняння руху частинки поблизу поверхні Землі

Поблизу поверхні Землі до частинки **завжди** прикладені сили гравітаційного притягання з боку Землі \vec{F}_3 і Сонця \vec{F}_C , а також можуть бути прикладені інші сили взаємодії (сили тертя, опору середовища, взаємодії з іншими тілами тощо), суму яких ми позначимо як \vec{f} . Тоді рівняння руху частинки з масою m відносно поверхні Землі можна записати у вигляді

$$m\vec{a}' = \vec{F}_3 + \vec{F}_C + \vec{f} + \vec{F}_{in}, \quad (4.24)$$

причому

$$\vec{F}_{in} = -m\ddot{\vec{R}}_{C3} - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] - m\left[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}']\right] - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}'], \quad (4.25)$$

де $-m\ddot{\vec{R}}_{C3}$ – поступальна сила інерції, обумовлена рухом Землі навколо Сонця, \vec{R}_{C3} – радіус-вектор із початком у центрі Сонця і кінцем у центрі Землі, $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі, \vec{v}' – швидкість частинки відносно земної поверхні, \vec{r}' – радіус-вектор частинки, що визначає її положення відносно центра Землі, у який ми вміщуємо початок НСВ (рис. 4.11). З боку Сонця з масою M_C до частинки прикладена гравітаційна сила

$$\vec{F}_C = -G \frac{mM_C}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (4.26)$$

або, зважаючи, що $\vec{r} = \vec{R}_{C3} + \vec{r}'$,

$$\vec{F}_C = -G \frac{mM_C}{|\vec{R}_{C3} + \vec{r}'|^2} \frac{\vec{R}_{C3} + \vec{r}'}{|\vec{R}_{C3} + \vec{r}'|}. \quad (4.27)$$

Величина $|\vec{r}'|$ становить величину порядку середнього радіуса Землі $R_3 = 6370$ км, а відстань від Землі до Сонця становить $R_{C3} = 1,5 \cdot 10^8$ км. Отже, $|\vec{r}'| \ll |\vec{R}_{C3}|$ і можна з достатньою точністю вважати, що

$$\vec{F}_C = -G \frac{mM_C}{|\vec{R}_{C3}|^2} \frac{\vec{R}_{C3}}{|\vec{R}_{C3}|}. \quad (4.28)$$

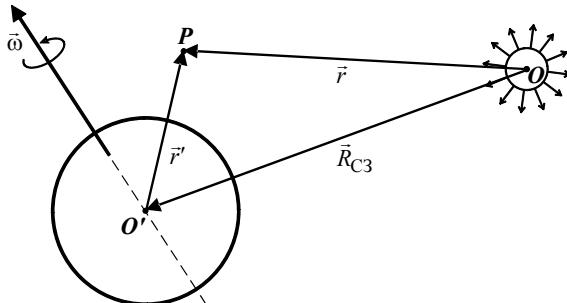


Рис. 4.11. До руху частинки поблизу поверхні Землі

З іншого боку, рівняння руху Землі під дією притягання Сонця, записане в геліоцентричній ICB, має вигляд

$$M_3 \ddot{\vec{R}}_{C3} = -G \frac{M_3 M_C}{|\vec{R}_{C3}|^2} \frac{\vec{R}_{C3}}{|\vec{R}_{C3}|}. \quad (4.29)$$

Із порівняння рівнянь (4.28) і (4.29) випливає рівність

$$\vec{F}_C = m \ddot{\vec{R}}_{C3}. \quad (4.30)$$

Після підстановки (4.30) у (4.24) з урахуванням (4.25) маємо

$$m\vec{a}' = \vec{F}_3 + m\ddot{\vec{R}}_{C3} + \vec{f} - m\ddot{\vec{R}}_{C3} - m \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' \right] - \\ - m \left[\vec{\omega} [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \right] - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}']. \quad (4.31)$$

У правій частині (4.31) другий і четвертий доданки в сумі дають нуль. П'ятим доданком можна знехтувати, оскільки нерівномірність обертання Землі дуже мала: спостереження, що проводяться з 1995 р. за допомогою атомних годинників, показали, що коливання тривалості земної доби не перевищують $3 \cdot 10^{-3}$ с за весь час спостережень. Отже, обертання Землі можна вважати рівномірним і покласти $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$.

Таким чином, отримане рівняння руху частинки поблизу поверхні Землі можна подати у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{F}_3 + \vec{f} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}]] - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}], \quad (4.32)$$

причому для спрощення записів випущено штрихи в позначеннях величин, визначених відносно поверхні Землі, тобто замість $\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}'$ надалі писатимемо $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$. Це не повинно викликати непорозумінь, оскільки всі рухи розглядаються відносно поверхні Землі, а штрихи будуть використовуватися лише в позначеннях величин, визначених відносно НСВ, що рухаються прискорено відносно Землі.

4.3.2. Сила тяжіння поблизу поверхні Землі

Сила, яка завжди прикладена до тіла, що перебуває поблизу поверхні Землі незалежно від того, рухається воно чи ні, називається силою тяжіння поблизу поверхні Землі:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = \vec{F}_3 - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \quad (4.33)$$

Оскільки сила гравітаційної взаємодії частинки із Землею \vec{F}_3 , яку в першому наближенні можна вважати кулею, залежить від r :

$$\vec{F}_3 = -G \frac{mM_3}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.34)$$

а $r = R_3 + h$, то сила тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$ залежить і від висоти h над поверхнею Землі. Однак, оскільки у переважній більшості практично важливих задач щодо руху тіл поблизу поверхні Землі висота h не перевищує декількох десятків кілометрів, то нею можна нехтувати порівняно із середнім радіусом Землі R_3 і вважати, що $r \approx R_3$. Тоді величину (модуль) сили гравітаційної взаємодії із Землею можна подати як

$$F_3 = G \frac{mM_3}{R_3^2}, \quad (4.35)$$

або

$$F_3 = mg_0, \quad \text{де } g_0 = G \frac{M_3}{R_3^2} = 9,83 \text{ м/с}^2. \quad (4.36)$$

Оскільки відцентрова сила інерції напрямлена перпендикулярно до осі обертання і в загальному випадку не збігається за напрямком із силою \vec{F}_3 (рис. 4.12), то сила $\vec{F}_{\text{тяж}}$ не напрямлена точно до центра Землі, однак кут $\alpha = \vec{F}_{\text{тяж}} \wedge \vec{F}_3$ дуже малий.

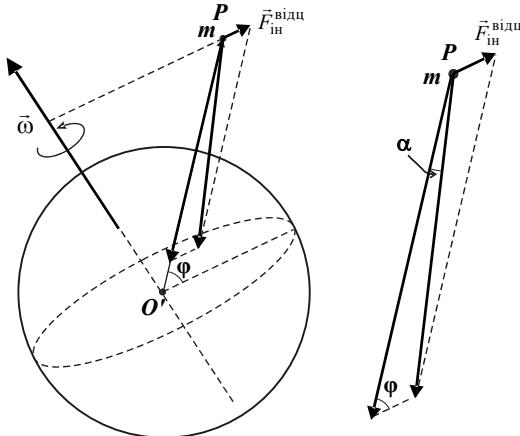


Рис. 4.12. До визначення модуля і напрямку сили тяжіння

Обчислимо модуль сили тяжіння $F_{\text{тяж}}$ та кут α . Модуль вектора $\vec{F}_{\text{тяж}}$ за означенням дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{тяж}} &= \sqrt{(\vec{F}_{\text{тяж}} \cdot \vec{F}_{\text{тяж}})} = \sqrt{(\vec{F}_3 + \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}})(\vec{F}_3 + \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}})} = \\ &= \sqrt{\left(\vec{F}_3^2 + (\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}})^2 + 2\vec{F}_3 \cdot \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}} \cos(\vec{F}_3 \wedge \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}}) \right)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Врахуємо, що $\cos(\vec{F}_3 \wedge \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{відц}}) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, де φ – географічна широта місцевості, а $F_{\text{ин}}^{\text{відц}} = m\omega^2 R_3 \cos\varphi$. Підставляючи ці вирази разом із виразом (4.36) для F_3 до рівняння (4.37), отримаємо остаточно

$$F_{\text{тяж}} = m\sqrt{g_0^2 + \omega^4 R_3^2 \cos^2\varphi - 2g_0\omega^2 R_3 \cos^2\varphi}. \quad (4.38)$$

Величину $\omega^2 R_3 \cos\varphi$ можна вважати малою порівняно з g_0 . Дійсно, Земля здійснює повний оберт відносно "нерухомих" зі-

рок за 86164 с, що відповідає кутовій швидкості $\omega = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$. Отже, максимальне значення відповідного відцентрового прискорення $\omega^2 R_3 = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, що на чотири порядки менше від g_0 . Тому, нехтуючи доданком з ω^4 і застосовуючи відому формулу $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, отримаємо

$$F_{\text{тяж}} = m(g_0 - R_3 \omega^2 \cos^2 \phi) \text{ або } F_{\text{тяж}} = mg, \quad (4.39)$$

де введено величину $g = g_0 - R_3 \omega^2 \cos^2 \phi$, яка називається *прискоренням вільного падіння*, а більш точно, *модулем вектора прискорення вільного падіння* поблизу поверхні Землі і яка чисельно дорівнює

$$g = (9,83 - 0,03 \cos^2 \phi) \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}. \quad (4.40)$$

Кут між напрямком $\vec{g} \parallel \vec{F}_{\text{тяж}}$ і напрямком $\vec{g}_0 \parallel \vec{F}_3$, тобто напрямком до центра Землі можна знайти за теоремою синусів:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{F_{\text{ін}}^{\text{відщ}}}{F_{\text{тяж}}} = \frac{m \omega^2 R_3 \cos \varphi}{mg}, \quad (4.41)$$

звідки

$$\alpha = \frac{\omega^2 R_3 \sin 2\varphi}{2g}. \quad (4.42)$$

Однак Земля насправді не має форму ідеальної кулі, вона подібна до кулі, що сплюснута в напрямку осі обертання. Ця сплюснутість спричинена відцентровою силою інерції (див. опис демонстраційного досліду, зображеного на рис. 4.10), яка змусила речовину в пластичному незатверділому стані на ранніх стадіях існування Землі прийняти форму *сфераоїда*, фігури близької до еліпсоїда обертання. Полярна вісь цього еліпсоїда (та, що проходить через полюси) на $1/300$ коротша за його екваторіальну вісь. У дійсності так звана *фігура Землі* ще складніша. Це призводить до того, що ефект зменшення прискорення вільного падіння g і сили тяжіння $F_{\text{тяж}}$ при переміщенні по поверхні Землі від полюса до екватора виявляється ще більш істотним.

У зв'язку з цим експериментальна залежність прискорення вільного падіння дещо відрізняється від залежності (4.40), отриманої нами без урахування відхилень фігури Землі від кулі:

$$g = \left(9,83 - 0,05 \cos^2 \varphi \right) \text{м} \cdot \text{с}^{-2}. \quad (4.43)$$

Зміна прискорення вільного падіння, а отже, сили тяжіння при переміщенні з полюсів на екватор становить близько 0,06 %. Максимальне відхилення напрямку виска від напрямку до центра Землі сягає 11 кутових мінút поблизу широти $\varphi = 45^\circ$.

Зміна сили тяжіння із широтою місцевості відбувається на результатах зважування тіл на пружинних терезах, оскільки нерухомі відносно поверхні Землі пружинні терези безпосередньо вимірюють суму всіх сил, прикладених до тіла (звичайно, окрім сили, прикладеної до тіла з боку самих терезів). Щоправда максимальна різниця результатів зважування одного й того самого тіла на полюсі й на екваторі становить всього 6 г на 1 кг. На практиці більш поширені терези з коромислом, зважування на яких зводиться до порівняння сил притягання до Землі двох тіл. Природно, що в цьому випадку результат не залежить від величини g у місці зважування.

Широтна залежність прискорення вільного падіння істотніше впливає на хід баштових та настінних годинників з гравітаційним маятником, період коливань якого визначається формулою

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (4.44)$$

де l – довжина маятника, а g – прискорення вільного падіння. При переміщенні з полюса на екватор такі годинники почнуть відставати на 3,5 хв за добу! У сучасних механічних годинниках використовується маятник Гюйгенса, період коливань якого визначається його моментом інерції та коефіцієнтом закручування підвісу і, звичайно, не залежить від g .

Зазначені "шкідливі" ефекти пов'язані зі зміною g при зважуванні на пружинних терезах або при застосуванні гравітаційних маятників у годинниках, мають корисне застосування в приладах, що називаються *гравіметрами*, за допомогою яких можна вимірювати прискорення вільного падіння в різних точках земної поверхні з високою точністю. Необхідність таких вимірювань обумовлена тим, що Земля не є однорідним тілом. Тому поряд з нормальню широтною зміною

прискорення вільного падіння, спостерігаються й аномалії сили тяжіння, величина яких сягає 0,05 % від g , що на порядок менше його нормальної зміни.

Існує спеціальна наука – гравіметрія, дані якої широко використовуються в геології для розвідки корисних копалин. В останні десятиріччя цінну інформацію про неоднорідність сили тяжіння поблизу поверхні Землі отримано шляхом точного вимірювання траєкторій низькоорбітальних штучних супутників Землі лазерними далекомірами, які забезпечують точність порядку 1 см.

4.4. Вага тіла, невагомість, перевантаження

Оскільки прискорення \vec{a} та швидкість \vec{v} тіла, що перебуває у спокої відносно поверхні Землі, дорівнюють нулю, то рівняння руху (4.33) набуває вигляду

$$0 = \vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{R}. \quad (4.45)$$

На підставі рівняння (4.45) можна сказати, що сила тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$, прикладена до тіла, урівноважується сумарною силою реакції \vec{R} зв'язків, що обмежують рух тіла (опори, підвіси тощо). За третім законом Ньютона тіло діє на зв'язок або на сукупність зв'язків з рівною за модулем, але протилежно напрямленою силою. Цю силу називають *вагою тіла*. Отже,

Вага тіла – це сила, з якою тіло діє на зв'язки.

Для тіла, що перебуває у спокої відносно поверхні Землі вага дорівнює сили тяжіння, оскільки за третім законом Ньютона $\vec{P} = -\vec{R}$, а відповідно до (4.45) $-\vec{R} = \vec{F}_{\text{тяж}}$. При цьому треба усвідомлювати, що **сила тяжіння прикладена до розглядуваного тіла, а вага тіла – це сила, прикладена з боку тіла до зв'язків** (до опор, підвісів тощо). Ця відмінність між силою тяжіння і вагою особливо яскраво виявляється у випадку, коли сам зв'язок разом із тілом рухається прискорено відносно Землі. Рівняння руху для цього випадку запишемо у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{R}, \quad (4.46)$$

де \vec{R} – реакція зв'язку, \vec{a} – прискорення тіла разом із зв'язком відносно Землі. При цьому в переважній більшості випадків силою Коріоліса можна знехтувати, оскільки навіть за швидкості тіла $v = 1000 \text{ м} \cdot \text{s}^{-1}$ її максимальне можливе значення не перевищує 0,1 % від величини сили тяжіння $F_{\text{тяж}}$.

Із рівняння (4.46) відповідно до означення отримуємо вагу тіла, що прискорено рухається разом зі зв'язком:

$$\vec{P} = -\vec{R} = -\left(m\vec{a} - \vec{F}_{\text{тяж}}\right) \text{ або } \vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}). \quad (4.47)$$

Остання формула визначає вагу тіла в загальному випадку. Видно, що вага тіла може змінюватись залежно від величини і напрямку прискорення \vec{a} . Якщо вага перевищує за модулем величину mg , яку можна назвати *нормальнюю вагою*, то кажуть, що існує *перевантаження*. Перевантаження вимірюють відношенням дійсної ваги до нормальної, тобто в одиницях g : наприклад, перевантаження 10 g вказує на те, що дійсна вага тіла більша за нормальну в 10 разів. Якщо ж $P = 0$, то кажуть, що тіло перебуває в стані *невагомості*.

Найпростіші і найбільш наочні приклади перевантажень та невагомості дають швидкісні ліфти (рис. 4.13). Коли ліфт перебуває у стані спокою або рухається рівномірно, то до пружини динамометра, прикріплена до стелі кабіни, з боку пробного тіла маси m прикладена сила $\vec{P} = m\vec{g}$. Коли ліфт рухається з прискоренням \vec{a} , напрямленим угору, то до пружини з боку тіла прикладена сила $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$, модуль якої $m(g + a) > mg$, тобто спостерігається перевантаження або зростання ваги тіла, що супроводжується збільшенням розтягу пружини. Коли ліфт рухається з прискоренням \vec{a} , напрямленим униз, то до пружини прикладена сила $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$, модуль якої $m(g - a) < mg$. Розтяг пружини при цьому менший від нормальногого (іноді кажуть про втрату ваги). І нарешті, при вільному падінні ліфта (що означає аварію), маємо $\vec{a} = \vec{g}$ і сила \vec{P} , з якою тіло діє на зв'язок (пружину) дорівнює нулю: для тіла виникає стан невагомості. У цьому прикладі перевантаження і невагомість виникають при

поступальному переміщенні зв'язку (підвісу) і можуть бути інтерпретовані як наслідок дії поступальної сили інерції. (Рекомендуємо читачу отримати самостійно наведені вище результати, розглянувши рух тіла масою m у НСВ, пов'язаній з ліфтом).

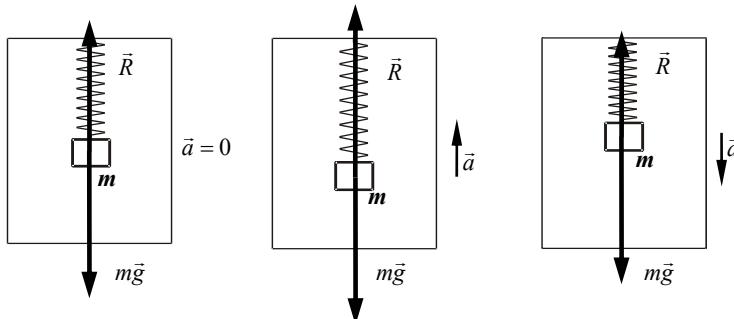


Рис. 4.13. До виникнення перевантаження в ліфті

Значні перевантаження можуть виникати і під час рівномірного руху по криволінійній траєкторії. Оцінимо вагу пілота і перевантаження при виконанні літаком так званої "мертвої" петлі (політ по коловій траєкторії, що лежить у вертикальній площині (рис. 4.14)) у різних точках траєкторії.

Для визначеності приймемо швидкість літака $v = 200 \text{ м/с}$, радіус петлі $r = 1000 \text{ м}$. Застосуємо означення ваги $\vec{P} = -\vec{R}$. Рівняння руху пілота в системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі, яку в цій задачі з хорошим наближенням можна вважати інерціальною, запишеться як

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}, \quad (4.48)$$

де m – маса пілота, а \vec{R} – сумарна сила реакції, прикладена до пілота з боку зв'язків (крісло, прив'язані ремені тощо).

Отже, знову маємо $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Оскільки літак рухається по колу рівномірно, то прискорення пілота має лише нормальну складову $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{n}$ і таким чином, $\vec{P} = m\left(\vec{g} - \frac{v^2}{r} \vec{n}\right)$. Унаслідок

зміни напрямку \vec{n} , вектор \vec{P} буде змінюватись як за напрямком, так і за модулем. Останній дорівнює

$$P = m \sqrt{(\vec{P} \cdot \vec{P})} = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 - 2 \frac{v^2}{r} g \cos \theta},$$

а косинус кута між напрямком вектора \vec{P} і напрямком вектора \vec{g} дорівнює

$$\cos(\vec{g} \wedge \vec{P}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{g}}{Pg} = \frac{g - \frac{v^2}{r} \cos \theta}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 - 2 \frac{v^2}{r} g \cos \theta}},$$

де $\theta = \vec{g} \wedge \vec{n}$ – кут між вектором \vec{n} нормальні до траєкторії та напрямком вектора \vec{g} .

У найвищій точці траєкторії A маємо кут $\theta = 0$ і відповідно $\cos(\vec{g} \wedge \vec{P}_A) = (g - v^2/r) / |g - v^2/r| = -1$, оскільки $v^2/r > g$, тобто вектори \vec{g} і \vec{P}_A антипаралельні. При цьому $P_A = m|v^2/r - g| \approx 3,18 mg$, тобто пілота притискає до крісла з потрійним перевантаженням, напрямленим протилежно напрямку нормального прискорення вільного падіння.

У найнижчій точці траєкторії B кут $\theta = \pi$, $\cos \theta = -1$ і відповідно $\cos(\vec{g} \wedge \vec{P}_B) = (g + v^2/r) / |g + v^2/r| = 1$, тобто напрямки векторів \vec{g} та \vec{P}_B збігаються і вага тут найбільша: пілота притискає до крісла із силою $P_B = m|v^2/r + g| \approx 5,1 mg$ (п'ятиразове перевантаження).

У точці C $\theta = \pi/2$, отже $P_C = m\sqrt{\left(v^2/r\right)^2 + g^2} = 4,2 mg$,
 а $\cos(\bar{g} \wedge \vec{P}_C) = g / |g + v^2/r|$.

Виникнення перевантажень можна пояснити і дією на пілота сил інерції, якщо, наприклад, обирати систему відліку, пов'язану з літаком, початок якої збігається із центром мас літака. Вона неінерціальна, оскільки рухається прискорено по криволінійній траєкторії (по колу). Якщо вона рухається поступально відносно ICB, то рівняння руху пілота в цій системі відліку має вигляд $m\ddot{a}' = m\bar{g} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{ін}}^{\text{пост}}$, де $\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{пост}} = -m\ddot{a}$ – поступальна сила інерції,

\ddot{a} – прискорення літака відносно ICB, $\ddot{a} = \frac{v^2}{r}\bar{n}$. Оскільки пілот не рухається відносно літака, то $\ddot{a}' = 0$. У результаті рівняння руху пілота набуває вигляду $0 = m\bar{g} + \vec{R} - m\ddot{a}$, тобто тотожного рівнянню (4.48) і, звичайно, має такі самі розв'язки. Отже, за такого вибору системи відліку можна сказати, що перевантаження викликане поступальною силою інерції.

Можна обрати іншу НСВ, наприклад, з початком у центрі колової траєкторії літака, яка обертається разом із радіус-вектором літака навколо осі, що проходить через цей початок перпендикулярно до площини траєкторії. Тоді можна інтерпретувати виникнення перевантаження як наслідок дії на пілота відцентрової сили інерції. Перевантаження, що виникають під час польоту літаків і ракет можуть призвести до виходу з ладу апаратури, до руйнування конструкцій літального апарату та до загибелі пілота. Негативний вплив перевантажень на організм пов'язаний не з недостатньою міцністю кістяка людини, як іноді помилково вважають, а з поведінкою рідин, що містяться в організмі. Наприклад, відтік крові, що виникає в напрямку перевантаження, призводить до крововиливів в одних органах та до недостатнього надходження крові до інших. Особливо небезпечні відтоки та притоки крові до голови, оскільки серце не здатне забезпечити нормальній тиск. Тому розміщення тіла пілота надзвукового літака або космічного корабля перпендикулярне очікуваному напрямку перевантаження значно підви-

щує здатність організму витримувати перевантаження. Для тренованих пілотів вважаються припустими короткочасні перевантаження порядку 6÷7g.

Цілком зрозуміло, що добираючи швидкість і кривину траєкторії літака можна досягти в ньому стану невагомості. У спеціально обладнаних літаках можна створити стан невагомості протягом декількох десятків секунд (рис. 4.15), але дотримання необхідних для цього швидкості та траєкторії польоту потребує неабиякої майстерності пілотів.

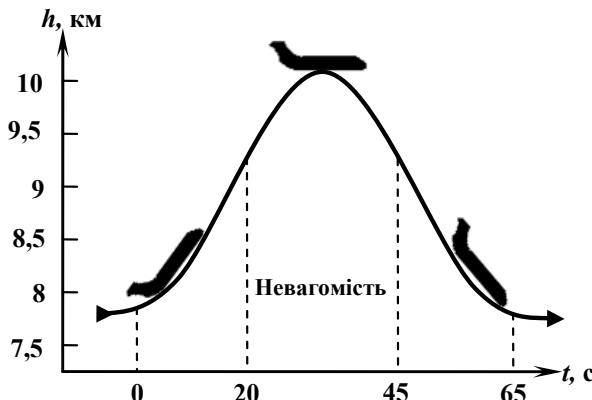


Рис. 4.15. До створення невагомості в літаку

4.5. Невагомість в орбітальній станції

На відміну від ліфта і літака, невагомість у космічних апаратах може існувати роками без спеціальних зусиль щодо її підтримання. Розглянемо найпростіший і практично важливий випадок невагомості в орбітальній станції, що рухається навколо Землі по коловій орбіті і постійно звернута до Землі одним боком (рис. 4.16). У цій задачі можна вважати систему відліку, яка рухається поступально, а її початок збігається із центром Землі, інерціальною, оскільки прискорення орбітальної станції відносно Землі набагато більше за прискорення центра Землі відносно

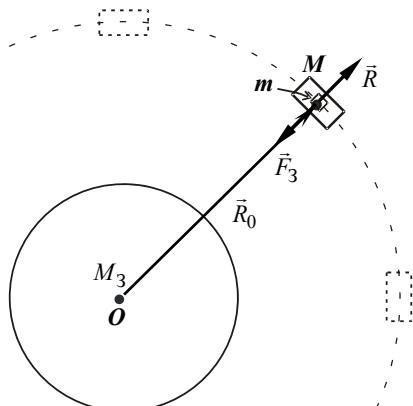


Рис. 4.16. До пояснення невагомості в орбітальній станції з точки зору ICB лі.

Останнє легко знайти з рівняння руху станції

$$M \ddot{\vec{R}}_0 = -\gamma \frac{MM_3}{R_0^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0}, \quad (4.50)$$

де M – маса орбітальної станції, до якої включено масу пробного тіла m , M_3 – маса Землі, \vec{R}_0 – радіус-вектор центра мас станції відносно центра Землі. Підстановка $\ddot{\vec{R}}_0$ з (4.50) замість $\ddot{\vec{a}}$ в (4.49) дає

$$-\gamma \frac{mM_3}{R_0^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0} = -\gamma \frac{mM_3}{R_0^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + \vec{R}, \quad (4.51)$$

звідки випливає, що $\vec{R} = 0$, тобто сила з якою станція діє на тіло дорівнює нулю. Оскільки за означенням $\vec{P} = -\vec{R}$, то можна зробити висновок, що усередині станції пробне тіло m перебуває в стані невагомості.

Зауважимо, що ми ніде не використали умову про рух станції по коловій орбіті. Отже, висновок щодо існування невагомості всередині космічного апарату, що рухається під дією сили всесвітнього тяжіння, застосовний до космічних апаратів, які рухаються по будь-яких траєкторіях, у гравітаційному полі, у тому числі й по незамкнених.

коперникової ICB. Рівняння руху маленького пробного тіла масою m , що перебуває у спокої всередині станції, має вигляд

$$m \ddot{\vec{a}} = \vec{F}_3 + \vec{R}, \quad (4.49)$$

де \vec{F}_3 – сила притягання до Землі, \vec{R} – можлива реакція з боку орбітальної станції. Прискорення $\ddot{\vec{a}}$ тіла m відносно ICB збігається з прискоренням орбітальної станції $\ddot{\vec{R}}_0$ відносно центра Землі

У популярній літературі побутує вульгаризоване "пояснення" стану невагомості в орбітальній станції, який виникає буцімто тому, що станція "постійно падає на Землю". Прибічники такого "пояснення" надають містичного змісту поняттю "падіння", оскільки в загальноприйнятому сенсі падіння тіла – це його наближення до поверхні Землі. Важко повірити, що орбітальна станція може десятки років падати на поверхню Землі з висоти 300 км. Відповідно до такого підходу невагомість у космічному апараті, якому ракетою-носієм надано швидкість, що перевищує другу космічну, і який далі рухається лише під дією поля тяжіння Землі, необмежено віддаляючись від неї, існує завдяки тому, що він також "падає" на Землю!

На підтвердження залежності введення сил інерції та їх класифікації винятково від вибору НСВ корисно розглянути питання про невагомість в орбітальній станції, використовуючи різні НСВ. Спочатку оберемо систему відліку з початком у центрі Землі. Ця система обертається з тією самою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, що й радіус-вектор орбітальної станції \vec{R}_0 навколо осі, що проходить через цей початок перпендикулярно до площини траєкторії (рис. 4.17, a). Будемо називати її НСВ-1. Рівняння руху пробного тіла m у НСВ-1 має вигляд

$$m\vec{a}' = \vec{F}_3 + \vec{R} - m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}_0]], \quad (4.52)$$

До нього крім двох сил взаємодії входить також відцентрова сила інерції, у виразі для якої замість радіус-вектора тіла \vec{r} підставлено практично рівний йому радіус-вектор станції \vec{R}_0 . Для нерухомого відносно НСВ-1 тіла m рівняння (4.52) набуває вигляду

$$0 = -\gamma \frac{mM_3}{R_0^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + \vec{R} + m\omega^2 \vec{R}_0, \quad (4.53)$$

де також спрощено вираз для відцентрової сили інерції. Оскільки орбітальна станція рівномірно рухається по колу, рівняння її руху (4.50) можна подати у вигляді

$$M \frac{V^2}{R_0} \vec{n} = -\gamma \frac{MM_3}{R_0^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0}. \quad (4.54)$$

Після підстановки $V = \omega R_0$ і $\vec{n} = -\frac{\vec{R}_0}{R_0}$ до (4.54) та скорочення M отримаємо

$$\omega^2 \vec{R}_0 = \gamma \frac{M_3}{R_0^2} \frac{\vec{R}_0}{R_0}. \quad (4.55)$$

Порівнюючи між собою вирази (4.53) і (4.55), пересвідчуємось, що знову $\vec{R} = 0$ і, таким чином, тіло m перебуває у стані невагомості, виникнення якого тепер можна пояснити як наслідок компенсації гравітаційного притягання відцентровою силою інерції.

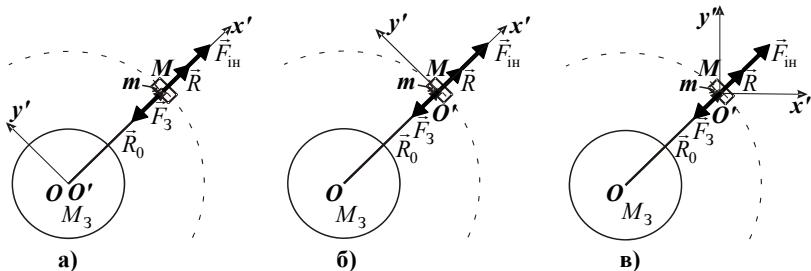


Рис. 4.17. До пояснення невагомості
в орбітальній станції з точки зору різних НСВ

У НСВ-2 на рис. 4.17, б, початок відліку якої збігається з центром мас орбітальної станції, що рухається поступально (осі зв'язаної з НСВ-2 декартової системи координат направлені на "нерухомі" зірки, рівняння руху тіла m , що перебуває у спокої відносно станції, матиме вигляд

$$m\ddot{a}' = \vec{F}_3 + \vec{R} - m\ddot{\vec{R}}_0, \quad (4.56)$$

де останній доданок у правій частині є поступальною силою інерції. Підставивши в це рівняння $\ddot{a}' = 0$ і відомі з попереднього вирази для \vec{F}_3 та для $\ddot{\vec{R}}_0$ (4.50), отримаємо рівняння, що збігається з рівнянням (4.51), і отже, знову $\vec{R} = 0$. Таким чином, при розгляді в НСВ-2 виникнення стану невагомості можна інтерпретувати як наслідок компенсації сили тяжіння Землі поступальною силою інерції.

Нарешті, можна обрати НСВ-3 з початком відліку в центрі мас станції, але жорстко зв'язану з нею. Рівняння руху пробного тіла в цій системі відліку запишеться так:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_3 + \vec{R} - m\ddot{\vec{R}}_0 - m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']], \quad (4.57)$$

де до поступальної сили інерції порівняно з (4.55) додано відцентрову силу інерції $-m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]$, де \vec{r}' – радіус-вектор тіла в НСВ-3, тобто відносно центра мас станції. Ті самі міркування, що й у випадку НСВ-2, приводять нас до висновку, що $\vec{R} = -m[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]$ і повна невагомість існує лише за $\vec{r}' = 0$, тобто в центрі мас станції. В усіх інших точках повна компенсація дії гравітаційного поля Землі силами інерції не досягається, але величина залишкового прискорення дуже мала. Наприклад, на відстані 1 м від центра мас станції, яка за 90 хв здійснює один оберт навколо Землі й один оберт навколо осі, що проходить через її центр мас, максимальна величина прискорення відцентрової сили інерції становить лише $4 \cdot 10^{-8} \text{ м} \cdot \text{s}^{-2}$, що на вісім порядків менше від нормальної величини прискорення вільного падіння! У зв'язку із цим кажуть, що в орбітальній станції існує *мікрогравітація*. Вплив мікрогравітації на деякі процеси досліджується у спеціальних експериментах на борту орбітальних станцій, але нею у більшості випадків можна знехтувати і вважати, що в усьому об'ємі станції існує стан невагомості. Не слід думати, що мікрогравітація властива лише НСВ-3: при розгляді явища невагомості в інших НСВ та в ICB не взято до уваги деякі деталі, унаслідок чого мікрогравітація не була нами помічена. Читач може сам переглянути наші міркування і викладки щодо ICB, НСВ-1 та НСВ-2 та внести до них відповідні корективи, щоб отримати таку саму величину мікрогравітації, як і для НСВ-3.

Видно, що спосіб виключення сили притягання \vec{F}_3 з боку Землі у випадках НСВ-2 і НСВ-3 повністю аналогічний способу виключення сили притягання до Сонця \vec{F}_C із рівняння руху частинки поблизу поверхні Землі (підрозд. 4.3). У зв'язку із цим можна сказати, що всі тіла на поверхні Землі, які рухаються разом з нею, перебувають у стані невагомості щодо поля тяжіння Сонця.

Іноді кажуть про "втрату" ваги тіла, зануреного у воду, і навіть про можливість створення "штучної невагомості" в басейні з водою, наприклад, для тренування космонавтів. Те саме мають на увазі при внесенні поправок на зменшення ваги тіл за рахунок сили Архімеда з боку повітря при точному зважуванні. Такі вислови у світлі вищевикладеного некоректні, оскільки в усіх цих прикладах вага тіла залишається незмінною й дорівнює mg , а відбувається лише її перерозподіл між різними зв'язками, скажімо, між водою чи повітрям, що створюють силу Архімеда, і шалькою терезів чи пружиною динамометра. Штучна "невагомість" при зануренні тіла в басейн немає нічого спільногого зі справжньою невагомістю, яка на поверхні Землі може бути досягнута лише при немислимому збільшенні її швидкості обертання навколо своєї осі (можливі наслідки цього описані лише письменниками-фантастами минулого).

Щодо "штучної сили тяжіння", то вона успішно створюється в земних умовах у різного типу центрифугах, наприклад, для тренування пілотів і космонавтів. У космічній станції штучну силу тяжіння також можна створити наданням її обертання з достатньою кутовою швидкістю навколо осі, що проходить через її центр мас. Один із популярних проектів показано на рис. 4.18.

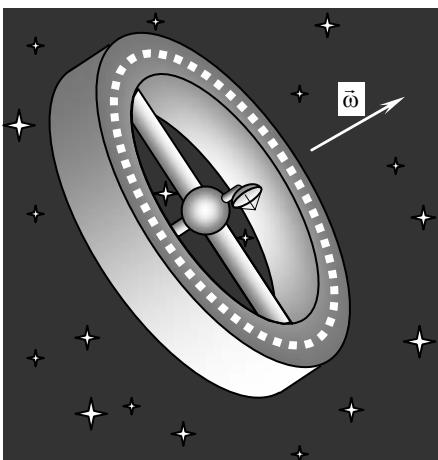


Рис. 4.18. До створення штучної сили тяжіння в космічній станції

4.6. Ефекти сили Коріоліса

Розглянемо деякі найбільш відомі й наочні ефекти, спричинені силою Коріоліса, що виникає під час руху частинки віднос-

но земної поверхні й якою ми до цього часу нехтували у зв'язку з її малою величиною порівняно з іншими силами.

Відхилення падаючих тіл на схід. Нехай невелике тіло, що перебуває поблизу поверхні Землі, починає вільно падати з нульовою початковою швидкістю. Рівнянням руху такого тіла (без урахування опору повітря) є

$$m\ddot{a} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}] \quad (4.58)$$

з початковими умовами $\vec{r}(0) = 0$; $\vec{v}(0) = 0$. Отже, поряд із силою $m\vec{g}$, яка спричинює падіння тіла, до нього також прикладена і сила Коріоліса, яка залежить від його швидкості \vec{v} і спрямована на схід. Це призводить до відхилення падаючого тіла на схід від точки на земній поверхні, на яку вказує висок, закріплений у точці, з якої починає рух тіло (рис. 4.19).

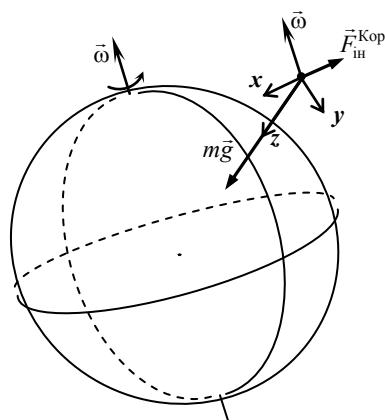


Рис. 4.19. Відхилення падаючих тіл на схід

Оскільки сила Коріоліса залежить від широти ϕ , $F_{ih}^{Kop} = 2m\omega u \cos\phi$, то ефект буде максимальним на екваторі і зникатиме на полюсах. Однак і на екваторі відхилення невеликі, при падінні тіла з висоти 100 м відхилення досягає лише 22 мм. На широті Києва ($\phi = 51^\circ$) таке відхилення становить близько

14 мм. Величину цього відхилення можна розрахувати, розв'язуючи рівняння (4.58), яке перепишемо для зручності у вигляді

$$\ddot{a} = \vec{g} - 2[\vec{\omega} \times \vec{v}], \quad (4.58a)$$

методом послідовних наближень. Цей метод широко застосовується для розв'язання багатьох задач класичної та квантової механіки. Коріолісове прискорення можна вважати малим збуренням порівняно з прискоренням вільного падіння. Спочатку знехтуємо цим малим збуренням (вважатимемо, що коріолісове прискорення дорівнює нулю) і запишемо рівняння руху в так званому нульовому наближенні:

$$\vec{a}_{(0)} = \vec{g}, \quad (4.59)$$

яке дає з урахуванням початкових умов швидкість частинки $\vec{v}_{(0)} = gt$ та її радіус-вектор $\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2}$ у нульовому наближенні.

Знайдену в нульовому наближенні швидкість $\vec{v}_{(0)}$ підставимо у вихідне рівняння (4.58а) й отримаємо рівняння для відшукання прискорення в *першому наближенні*

$$\vec{a}_{(1)} = \vec{g} - 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{(0)}]. \quad (4.60)$$

Підставляючи в це рівняння $\vec{v}_{(0)}$, отримаємо

$$\vec{a}_{(1)} = \vec{g} - 2[\vec{\omega} \times \vec{g}]t. \quad (4.61)$$

З останнього рівняння можна дістати швидкість у першому наближенні

$$\vec{v}_{(1)} = \vec{g}t - [\vec{\omega} \times \vec{g}]t^2, \quad (4.62)$$

а потім і радіус-вектор у першому наближенні:

$$\vec{r}_{(1)} = \frac{\vec{g}t}{2} - \frac{[\vec{\omega} \times \vec{g}]t^2}{3}. \quad (4.63)$$

Отже, ефект сили Коріоліса з'являється вже в першому наближенні. Бачимо, що другий доданок у правій частині (4.63) дає очікуване відхилення частинки на схід. Уведемо декартову систему координат (рис. 4.17). Тоді векторний добуток у (4.63) можна обчислити так:

$$[\vec{\omega} \times \vec{g}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega \cos \varphi & -\omega \sin \varphi \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = -\vec{i} \omega g \cos \varphi.$$

Таким чином, отримано зміщення на схід на величину

$$x = \frac{t^3}{3} \omega g \cos \varphi. \quad (4.64)$$

Під час розв'язування рівнянь методом послідовних наближень корисно знайти розв'язок в наступному наближенні для того, щоб перевірити, чи не дасть наступне наближення істотну поправку до ефектів, що з'явилися в попередньому наближенні.

Рівняння другого наближення отримуємо підстановкою величин, знайдених у першому наближенні (у нашому випадку лише $\vec{v}_{(1)}$), у вихідне рівняння (4.58а):

$$\vec{a}_{(2)} = \vec{g} - 2[\vec{\omega} \times \vec{g}]t + 2[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{g}]]t^2. \quad (4.65)$$

Інтегруванням останнього рівняння знаходимо швидкість у другому наближенні

$$\vec{v}_{(2)} = \vec{g}t - [\vec{\omega} \times \vec{g}]t^2 + \frac{2}{3}[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{g}]]t^3, \quad (4.66)$$

а також радіус-вектор у другому наближенні

$$\vec{r}_{(2)} = \frac{\vec{g}t^2}{2} - \frac{1}{3}[\vec{\omega} \times \vec{g}]t^3 + \frac{1}{6}[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{g}]]t^4. \quad (4.67)$$

Поправка другого наближення до радіус-вектора \vec{r} , що дается третім доданком правої частини (4.67), описує відхилення вздовж осі OY , тобто в напрямку екватора і, таким чином, не впливає на величину відхилення на схід, знайдену в першому наближенні. Його величина $y = \frac{1}{6}t^4\omega^2 g \sin 2\varphi$ максимальна на

широті $\varphi = 45^\circ$, а на полюсах і на екваторі дорівнює нулю. Відхилення в бік екватора (на південь у північній півкулі і на північ у південній) набагато менше за відхилення на схід.

Для того, щоб переконатися в доцільності запровадження ICB, на прикладі цієї задачі, а також з метою перевірки отриманого результату, пропонуємо читачеві показати існування ефекту відхилення на схід тіл, що падають біля поверхні Землі, розглядаючи задачу в ICB, з початком у центрі Землі та оцінити його величину. Якщо отриманий в ICB результат відрізнятиметься від (4.64), то не слід поспішати із висновками, а краще повернутися до цього питання після ознайомлення з результатами розд. 8.

Маятник Фуко. Відхилення падаючих тіл на схід, що дово-дить неінерціальність системи відліку, пов'язаної з поверхнею Землі, досить важко виміряти. Дуже переконливо й наочно факт обертання Землі відносно ICB показує дослід, який здійснив Ж. Фуко в 1850 р. Ідею Фуко можна пояснити простим демонстраційним дослідом з математичним маятником (невелика металева кулька підвішена на тонкій нитці), точка підвісу якого обертається разом із горизонтальним диском, що модельює обер-

тання Землі (рис. 4.20, а). Спостерігач бачить, що коливання маятника відбуваються у площині, положення якої залишається незмінним щодо лабораторного стола і стін лабораторії, тобто відносно земної поверхні, яку в умовах цього досліду можна вважати інерціальною системою відліку, оскільки кутова швидкість обертання Землі більш як на п'ять порядків менша від обраної кутової швидкості обертання диска. Однак відносно диска (для спостерігача, який перебуває на ньому) площа коливань маятника повертається з кутовою швидкістю, що дорівнює кутовій швидкості обертання диска відносно ICB.

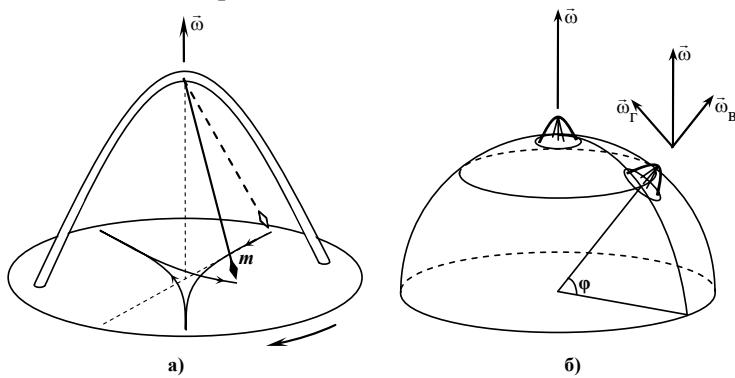


Рис. 4.20. Досліди з маятником Фуко

Таким чином, з точки зору спостерігача, що перебуває в ICB, поведінка маятника цілком зрозуміла: на кульку маятника діють лише дві сили – сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу нитки \vec{T} . Площа коливань визначається початковими умовами, її положення не змінюється в процесі руху, а диск "прокручується" під маятником. Однак при спостереженні руху величезного маятника з довжиною підвісу 67 м, підвішеного Фуко під куполом величичної будівлі Пантеону в Парижі, площа його коливань повертається щодо стін буквально на очах, а відвідувачам здається, що на маятник діє якась таємнича сила в бічному напрямку. Ще важче спостерігачу, який перебуває всередині будівлі, уявити, що вона обертається разом із ділянкою поверхні Землі відносно якоїсь невидимої інерціальної системи відліку!

Розглянемо це питання більш докладно. Спочатку уявімо, що дослід відбувається на Північному полюсі (рис. 4.20, б). Якщо

дивитись із геліоцентричної ICB, то все буде відбуватись так само, як і в демонстраційному досліді з диском: земна куля обертається під маятником, що зберігає незмінну відносно геліоцентричної ICB площину коливань. Рівняння руху маятника в HCB, зв'язаній з поверхнею Землі має вигляд

$$m\ddot{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}] . \quad (4.68)$$

Знову вважатимемо силу Коріоліса малим збуренням порівняно із силою тяжіння $m\vec{g}$ та силою натягу нитки \vec{T} . Відповідне рівняння нульового наближення, в якому знахтувано силою Коріоліса, повністю збігається з рівнянням (3.44) руху математичного маятника, наведеним у розд. 3. Його розв'язок, звичайно, не дає ніякого повороту площини коливань відносно поверхні Землі.

Таким чином, при розгляді руху маятника на полюсі ефект повороту його площини коливань має бути повністю віднесений на рахунок дії сили Коріоліса $\vec{F}_{ih} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}]$ перпендикулярно вектору швидкості \vec{v} і вектору кутової швидкості Землі $\vec{\omega}$, який колінеарний вектору \vec{g} , тобто в горизонтальному напрямку. У фазі коливань (рис. 4.21) сила Коріоліса напрямлена перпендикулярно площині рисунка до читача. Напрямок її не змінюється протягом половини періоду коливань від одного максимального відхилення до іншого, що зумовлює викривлення траєкторії маятника відносно поверхні Землі підібно до того, як викривляється слід від кульки, що скочувались в центр диска, що обертається (див. рис. 4.3). Після проходження точки повороту в наступному півперіоді внаслідок зміни напрямку вектора швидкості \vec{v} на протилежний напрямок сили Коріоліса також змінюється на протилежний, що призводить до подальшого повороту площини коливань.

На рис. 4.22 показано проекції траєкторії маятника Фуко на горизонтальну поверхню за різних початкових умов. У випадку рис. 4.22, а маятник було відхилено і відпущене в точці A з ну-

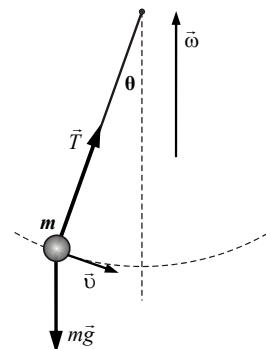


Рис. 4.21. До визначення напрямку сили Коріоліса, що діє на маятник на Північному полюсі

льовою швидкістю ($\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = 0$). У випадку рис. 4.22, б маятнику, що перебував у положенні рівноваги O , надали поштовху ($\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$). В обох випадках маятник замість того, щоб прямувати до точки повороту A' , потрапляє в точку B , що сприймається спостерігачем на поверхні Землі, як поворот площини коливань. Ясно, що повний оберт на кут 2π площини коливань маятника, який розташований на полюсі, відбувається за добу, тобто за час $T_0 = 86164$ с.

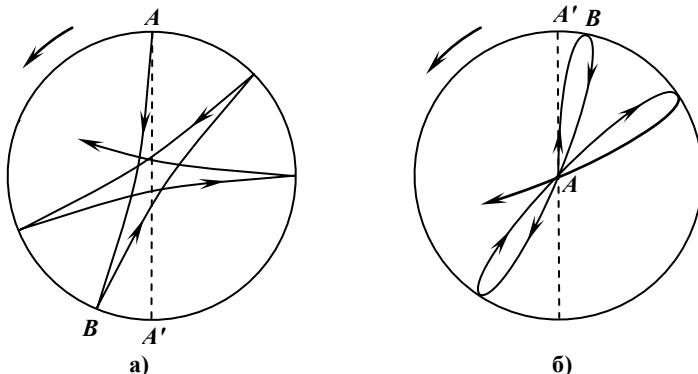


Рис. 4.22. Проекції траєкторії маятника Фуко за різних початкових умов

Зауважимо, що в обох випадках рух описується одним і тим самим рівнянням, а суттєва відмінність траєкторії обумовлена лише різними початковими умовами. Це ще раз демонструє важливість урахування початкових умов у задачах механіки.

Розглянемо тепер характер руху маятника в деякій довільній точці земної поверхні, що лежить на широті φ (рис. 4.20, б). Вектор кутової швидкості обертання Землі можна розкласти в цій точці на вертикальну складову $\vec{\omega}_v$, напрямлену в північній півкулі протилежно до \vec{g} , і горизонтальну складову $\vec{\omega}_r$ (рис. 4.20, б). Горизонтальну складову, у свою чергу, можна розкласти на дві складові $\vec{\omega}_{\parallel}$ і $\vec{\omega}_{\perp}$, паралельну та перпендикулярну до площини коливань маятника, яка визначається векторами $\vec{\omega}_v$ та \vec{v} : $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}$ (рис. 4.23). Таким чином, вектор кутової швидкості обертання Землі в даній точці земної поверхні можна подати у вигляді суми трьох складових:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_B + \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp}, \quad (4.68)$$

Тоді силу Коріоліса, що збурює рух маятника (див. рівняння (4.65)), можна подати у вигляді трьох доданків:

$$\vec{F}_{\text{ін}}^{\text{Кор}} = -2m[\vec{\omega}_B \times \vec{v}] - 2m[\vec{\omega}_{\perp} \times \vec{v}] - 2m[\vec{\omega}_{\parallel} \times \vec{v}]. \quad (4.69)$$

Бачимо, що дія складової $-2m[\vec{\omega}_B \times \vec{v}]$ у нашому випадку повністю тотожна дії сили $-2m[\vec{\omega} \times \vec{v}]$ на маятник, що розміщений на полюсі, і вона буде призводити до систематичного повороту площини коливань маятника з кутовою швидкістю $\omega_B = \omega \sin \varphi$, де φ – широта місцевості.

Складова сили $-2m[\vec{\omega}_{\perp} \times \vec{v}]$ направлена вздовж лінії підвісу, тому її дія зводиться до зміни натягу нитки в процесі руху і не може вплинути на положення площини коливань. Нарешті, складова $-2m[\vec{\omega}_{\parallel} \times \vec{v}]$ хоча й направлена перпендикулярно до площини коливань, але, оскільки вона двічі за півперіод змінює свій напрямок на протилежний, то вона не може спричинити монотонний поворот площини коливань маятника. Якби діяла лише ця сила, то вона викликала б невеликі відхилення маятника від плоскої траєкторії (рис. 4.24). Таким чином, поворот площини коливань відбувається винятково за рахунок вертикальної складової кутової швидкості Землі $\vec{\omega}_B$.

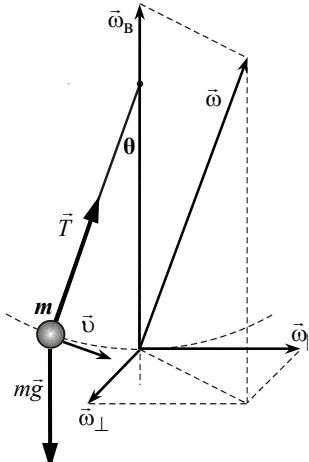


Рис. 4.23. До визначення трьох складових сили Коріоліса, що діє на маятник Фуко в довільній точці земної поверхні

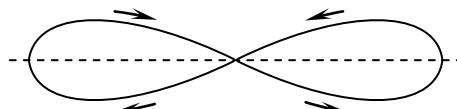


Рис. 4.24. Відхилення маятника Фуко від плоскої траєкторії за рахунок складової сили Коріоліса $-2m[\vec{\omega}_{\parallel} \times \vec{v}]$

Отже, для періоду T_φ повного оберту площини коливань маятника Фуко на широті φ маємо

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{T_0}{\sin \varphi}. \quad (4.70)$$

Принагідно зауважимо, що пояснення руху маятника Фуко в довільній точці земної поверхні (не на полюсі) щодо ICB, тобто без зачленення сили Коріоліса, драматично втрачає наочність і призводить до значних труднощів при спробах кількісного опису його руху.

Геофізичні ефекти. Давно помічено, що правий берег річок північної півкулі, що течуть у меридіональному напрямку, зазвичай більш круті і підмиті, а лівий більш пологий і низький. Зокрема, це Дніпро, Десна, Сіверський Донець, на правих крутих берегах яких стоять міста Київ, Канів, Чернігів, Новгород-Сіверський, Ізюм, Слав'яносербськ. У південній півкулі наспаки, більш круті й підмиті ліві береги, а більш пологі – праві. Це явище пояснюється дією сили Коріоліса, яка в північній півкулі притискає воду до правого берега й підмиває його незалежно від того, на північ чи на південь тече річка (рис. 4.25). У південній півкулі маємо зворотну картину.

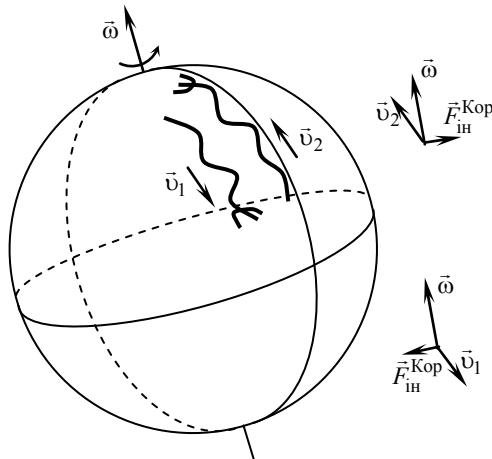


Рис. 4.25. До пояснення підмивання правих берегів річок, що течуть у меридіональному напрямку в північній півкулі

Аналогічно можна пояснити постійні напрямки пасатних вітрів у тропіках: північно-східний у північній і південно-східний у південній півкулях, оскільки рух потоків більш прохолодного повітря, що "стікається" з полярних областей до екватора, викривляється силою Коріоліса (рис. 4.26).

Циклони та антициклони являють собою величезні атмосферні вихорі, які добре видно на знімках з метеосупутників. У північній півкулі в циклонах вітри дмуть завжди проти ходу годинникової стрілки, а в антици克лонах – навпаки. Це пов'язано з тим, що в циклонах маси повітря рухаються з периферії до центральної області зниженого тиску, а в антициклонах, – навпаки. В обох випадках радіальний рух повітря викривляється силою Коріоліса (рис. 4.26). У південній півкулі напрямки зачручування вихорів у циклонах та антициклонах протилежні відповідним напрямкам у північній півкулі.

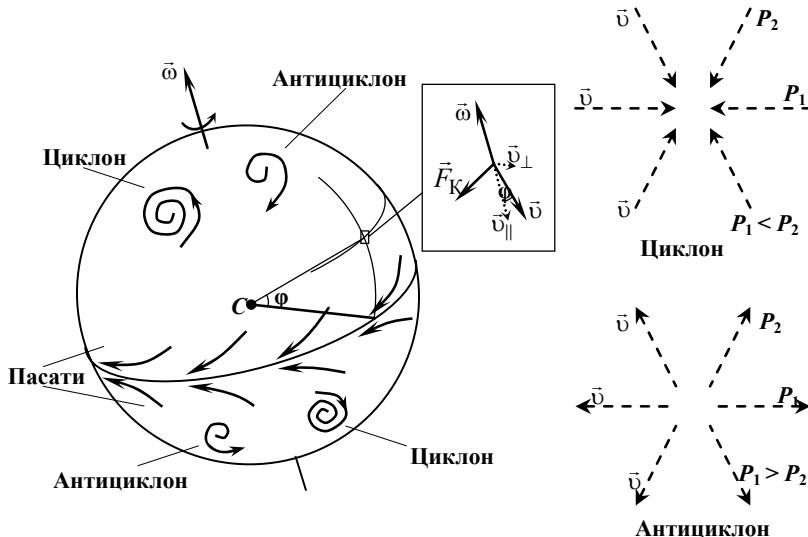


Рис. 4.26. Геофізичні ефекти сили Коріоліса

Зрозуміло, що ефекти сили Коріоліса слід брати до уваги також у випадках, коли рухи відбуваються з великими швидкостями і йдеться про великі відстані, наприклад, при стрільбі з далекобійних гармат, запусках балістичних ракет тощо.

Контрольні запитання та вправи

4.1. В якому напрямку буде відхилятися від вертикалі полум'я свічки у закритому вагоні швидкісного поїзда, який розганяється до швидкості 500 км/год, щодо напрямку його руху?

4.2. У фантастичному романі Ж. Верна сміливці подорожують на Місяць у снаряді, який вистрілюється зі ствола гармати довжиною близько 300 м. Вважаючи, що прискорення снаряда у стволі було сталим, оцінити шанси екіпажу залишились живим.

4.3. Пояснити існування мікрогравітації в орбітальній станції, що рухається по коловій орбіті як це описано в підрозд. 4.5, з точки зору ICB, HCB-1 та HCB-2 і порівняти її величину зі знайденою для HCB-3.

4.4. Ротор сучасної лабораторної ультрацентрифуги здійснює 100 тис. об./хв і створює відцентрове прискорення 10^6 g. Оцінити діаметр ротора.

4.5. На борту орбітальної станції запалюють свічку. Чи буде вона горіти так само, як на Землі?

4.6. Скільки обертів на хвилину має здійснювати космічна станція (рис. 4.18) для створення на її периферії штучної сили тяжіння такої самої величини, як і на поверхні Землі? Діаметр станції прийняти рівним 100 м.

4.7. Кільце з тонкого канату, що має радіус r і масу m обертається навколо свого центра, причому кожна його точка має швидкість v . Обчислити силу натягу канату.

4.8. З яким креном (кутом між площиною крила та горизонтом) літак може летіти по колу радіуса 1,5 км в горизонтальній площині зі швидкістю 320 км/год?

4.9. Який напрямок стрільби доцільно обирати при пристрілці снайперської гвинтівки в районі Києва ($N50^\circ$, $E30^\circ$) з огляду на виплив сили Коріоліса: північ, схід, південь, захід? Оцінити максимально можливе зумовлене нею відхилення кулі, випущеної горизонтально зі швидкістю 900 м/с на відстані 1000 м.

4.10. Обрахувати відхилення на схід тіла, що вільно падає біля поверхні Землі, розглядаючи задачу в ICB із початком у центрі Землі, та порівняти результат зі знайденим у підрозд. 4.5 (формула (4.64)).

4.11. Балістичну ракету запускають з Північного полюса на Південний полюс у площині нульового (Грінвіцького) меридіана. Чи буде траєкторія польоту ракети плоскою? Чи збігатиметься вона із площиною Грінвіцького меридіана? Якщо ні, то на яких широтах відхилення буде максимальним і мінімальним?

РОЗДІЛ 5

Закони збереження

Три закони динаміки частинки – три закони Ньютона, розглянуті в попередньому розділі, дають можливість розв'язати значну кількість практично важливих задач. Однак для їх успішного застосування необхідно знати сили, прикладені до частинки в кожний момент часу, що не завжди можливо. На точність результату відшукання як швидкості частинки, так і її радіус-вектора також суттєво впливає точність відомих початкових умов.

Ситуація принципово ускладнюється, якщо йдеться про опис механічного руху значної кількості частинок, які утворюють систему частинок, що взаємодіють між собою. Механічний стан системи частинок вважатимемо заданим, якщо відомі положення і швидкості всіх частинок системи в деякий момент часу. Іншими словами, механічний стан системи, що складається із n частинок, визначається у будь-який момент часу t сукупністю величин $\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t)$, де індекс i змінюється від 1 до n . Якщо механічний стан системи відомий у деякий початковий момент часу ($t = 0$), тобто відомі початкові умови $\vec{r}_i(0), \vec{v}_i(0)$, то величини $\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t)$ можна знайти із n рівнянь руху, записаних для кожної частинки окремо:

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

Таким чином, у загальному випадку необхідно розв'язувати $3n$ скалярних рівнянь з урахуванням $6n$ початкових умов. У цьому випадку:

- а) сила, що діє на кожну частинку системи в кожний момент часу зазвичай невідома;
- б) неточність у початкових умовах окремої частинки може радикально змінити рух цієї частинки, а тому й інших частинок;
- в) за значної кількості частинок (напр., молекул газу в деякому макроскопічному об'ємі) розв'язання величезної кількості рівнянь стає нездоланою перешкодою навіть для сучасних комп'ютерів.

І нарешті, можливо найбільш суттєве: якби навіть вдалося обчислити радіус-вектори (координати) усіх частинок системи та їх швидкості в будь-який момент часу, то це була б сукупність характеристик поведінки окремих частинок, а не системи в цілому.

Розглянемо простий приклад. Нехай є дві посудини, кожна з яких містить 1 моль деякого газу. Якщо навіть уявити, що нам вдається розрахувати траєкторії і швидкості всіх молекул (а їх кількість у кожній посудині дорівнює числу Авогадро $N_A = 6,022 \times 10^{23}$), то зробити якесь порівняння механічного стану цих двох систем частинок на підставі колосальних масивів даних практично неможливо. Цілком очевидно, що додавання однієї, десяти чи навіть тисячі молекул до будь-якої із вищезгаданих систем частинок не вплине суттєво на її макроскопічну поведінку.

Отже, постає завдання знайти такі величини, які б характеризували механічний стан системи в цілому через характеристики механічного стану її частинок і при цьому не залежали б у явному вигляді від механічного стану кожної окремої частинки.

Наш план буде такий. Спочатку знайдемо величини, які є функціями механічного стану частинки, але залишаються незмінними (сталими) у процесі **вільного** руху частинки, тобто такого, коли відсутня її взаємодія з іншими матеріальними об'єктами. Про такі величини кажуть, що вони зберігаються.

На другому етапі з'ясуємо, унаслідок чого можуть змінюватися знайдені на першому етапі величини, що зберігалися для вільної частинки, у випадку, коли частинка вже не є вільною, а взаємодіє з іншими матеріальними об'єктами, і за яких умов ці величини залишатимуться незмінними.

На третьому етапі розглянемо систему частинок, що не взаємодіють ані між собою, ані з іншими матеріальними об'єктами. Таку систему можна розглядати як сукупність вільних частинок.

Побудуємо суми знайдених на першому етапі величин, які залишаються незмінними в процесі вільного руху однієї частинки, для всіх частинок системи. Очевидно, що такі суми також залишатимуться незмінними в процесі руху вільних частинок цієї сукупності. При цьому кожна із цих сум буде функцією величин, які характеризують механічний стан частинок системи, а саме, їх радіус-векторів і векторів швидкості.

На четвертому етапі знайдемо умови зміни та збереження сум згаданих величин, побудованих на третьому етапі, які були незмінними для вільних частинок, а також з'ясуємо, за яких умов ці суми можуть залишатися незмінними і для частинок, які вже не є вільними, а взаємодіють між собою та з іншими матеріальними об'єктами.

5.1. Імпульс, момент імпульсу, кінетична енергія частинки

Розглянемо спочатку рух вільної частинки з масою m . Її механічний стан визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і швидкістю $\vec{v} = \text{const}$. Можна вказати деякі величини, які є функціями змінних, що визначають механічний стан частинки, але залишаються незмінними або, як кажуть, зберігаються в процесі її руху. Такими величинами є сама швидкість \vec{v} та її степені $(\vec{v})^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, $(\vec{v})^3 = v^2 \vec{v}$, $(\vec{v})^4 = (v^2)^2$... Ясно, що всі степені вище другого можна подати через добутки вектора \vec{v} і скаляра v^2 , тому надалі розглядатимемо лише вектор \vec{v} та скаляр v^2 . Радіус-вектор \vec{r} вільної частинки, на відміну від швидкості, сам по собі не залишається незмінним, але залишається незмінною його проекція r_p на перпендикуляр, опущений з початку O на прямолінійну траєкторію частинки (рис. 5.1), $r_p = r \cdot \sin(\vec{r} \wedge \vec{v})$. Зрозуміло, що зберігатиметься і добуток проекції r_p на модуль швидкості v , тобто величина $r v \sin(\vec{r} \wedge \vec{v})$. Проте вона є не що інше як модуль векторного добутку векторів \vec{r} та \vec{v} , тобто $r v \sin(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \|\vec{r} \times \vec{v}\|$. Звідси випливає, що векторний добуток $[\vec{r} \times \vec{v}] = \text{const}$, оскільки при вільному русі частинки вектор \vec{r} завжди лежить у площині, що проходить через початок відліку O , і прямував уздовж якої рухається частинка.

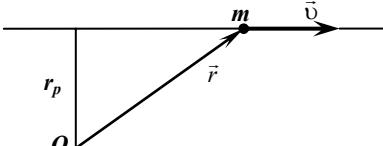


Рис. 5.1. Рух вільної частинки

Таким чином, існують три суттєво різні величини, які залишаються сталими при вільному русі будь-якої частинки: \vec{v} , v^2 та $[\vec{r} \times \vec{v}]$. У підрозд. 3.2 було показано, що інерційні властивості частинки визначаються величиною її маси m , яка також є стаю величиною, але може бути різною для різних частинок. Тому при вільному русі частинки також будуть зберігатися добутки знайдених трьох величин на масу m , а також на будь-які сталі числові коефіцієнти. Виходячи з цих міркувань, можна побудувати три величини, які залишаються незмінними при русі вільної частинки, а саме:

- векторну величину $\vec{p} = m\vec{v}$, яку називають *імпульсом* частинки;
- векторну величину $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m[\vec{r} \times \vec{v}]$, яку називають *моментом імпульсу* частинки;
- скалярну величину $T = \frac{mv^2}{2}$, яка називається *кінетичною енергією* частинки.

Напрямок вектора імпульсу частинки \vec{p} збігається з напрямком її швидкості \vec{v} . Напрямок моменту імпульсу \vec{L} перпендикулярний як до вектора швидкості частинки \vec{v} або її імпульсу \vec{p} , так і до її радіус-вектора \vec{r} , причому вектори \vec{r} , \vec{p} (або \vec{v}) і вектор \vec{L} утворюють праву трійку векторів (рис. 5.2).

Таким чином, **імпульс, момент імпульсу та кінетична енергія вільної частинки завжди зберігаються**.

З'ясуємо за яких умов і за рахунок чого можуть змінюватися з часом імпульс, момент імпульсу та кінетична енергія частинки, що взаємодіє з іншими матеріальними об'єктами. Для відшукання умов зміни з часом деякої величини та умов її збереження необхідно дослідити похідну за часом від цієї величини.

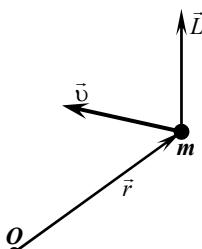


Рис. 5.2. Вектор моменту імпульсу частинки

Умови зміни та збереження імпульсу частинки. Похідною від імпульсу за часом є

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5.2)$$

або з урахуванням другого закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (5.3)$$

де \vec{F} – сума всіх сил, що прикладені до частинки. Отже, **імпульс частинки змінюється під дією прикладеної до неї сили**, причому елементарний приріст імпульсу $d\vec{p}$ збігається з напрямком цієї сили, а його величина пропорційна величині сили та проміжку часу, протягом якого частинка набуває цього приросту:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (5.4)$$

Рівняння (5.4) дає можливість за відомою залежністю сили \vec{F} від часу обчислювати зміну імпульсу $\Delta\vec{p}$ за певний проміжок часу:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad (5.5)$$

Із рівняння (5.3) випливає умова збереження імпульсу частинки: **імпульс частинки зберігається, якщо сума всіх прикладених до неї сил дорівнює нулю.**

Зауважимо, що імпульс вільної частинки зберігається **безумовно** (без будь-яких умов), оскільки за означенням на вільну частинку не діють ніякі сили.

Умови зміни та збереження моменту імпульсу частинки. Похідною від моменту імпульсу за часом є

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right], \quad (5.6)$$

або з урахуванням другого закону Ньютона у формі (5.3) і рівності нулю векторного добутку $\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] = 0$ унаслідок колінеарності векторів-спів множників одержимо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (5.7)$$

Величину

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (5.8)$$

називають *моментом сили* \vec{F} . Таким чином, **момент імпульсу частинки змінюється під дією моменту прикладеної до неї сили**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (5.9)$$

причому елементарний приріст вектора моменту імпульсу частинки $d\vec{L}$ збігається за напрямком з напрямком вектора моменту сили, а його величина пропорційна величині моменту цієї сили та проміжку часу, протягом якого частинка набуває цього приросту

$$d\vec{L} = \vec{M} dt. \quad (5.10)$$

Рівняння (5.9) іноді називають *рівнянням моментів*. Зауважимо, що коли до частинки одночасно прикладені декілька сил, то під \vec{M} у правій частині рівняння моментів (5.9) слід розуміти суму моментів усіх сил, що прикладені до частинки. Рівняння (5.9) дає можливість за відомою залежністю моменту сили \vec{M} від часу обчислювати зміну моменту імпульсу $\Delta\vec{L}$ за певний проміжок часу:

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t) dt. \quad (5.11)$$

Із рівняння моментів (5.9) випливає умова збереження моменту імпульсу частинки: **момент імпульсу частинки зберігається, якщо сумарний момент усіх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю**. Зауважимо, що **момент імпульсу вільної частинки зберігається безумовно**, оскільки за означенням на вільну частинку не діють ніякі сили, отже, сумарний момент сил завжди дорівнює нулю.

Вектор моменту сили \vec{F} за означенням напрямлений перпендикулярно до цієї сили та до радіус-вектора частинки. Його модуль дорівнює $M = rF \sin(\vec{r} \wedge \vec{F})$. Іноді модуль вектора моменту сили записують у вигляді $M = Fl$, де введено величину $l = r \sin(\vec{r} \wedge \vec{F})$, яку називають *плечем сили* \vec{F} відносно точки O . Як видно з рис. 5.3, плечем сили l є найкоротша відстань від точки O , відносно якої визначається момент сили \vec{F} , до лінії дії сили \vec{F} . Якщо лі-

нія дії сили \vec{F} проходить через точку O , то $\vec{F} \parallel \vec{r}$, звідки випливає, що $M = 0$ незалежно від величини модуля сили \vec{F} .

Умови зміни та збереження кінетичної енергії частинки. Похідною від кінетичної енергії за часом є

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m(\vec{v}\vec{v})}{2} \right) = \\ &= \frac{m}{2} \frac{d(\vec{v}\vec{v})}{dt} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} + \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}\end{aligned}\quad (5.12)$$

або з урахуванням другого закону Ньютона

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = N, \quad (5.13a)$$

де введено скалярну величину

$$N = \vec{F} \vec{v}, \quad (5.14)$$

яку називають *потужністю сили* \vec{F} .

Таким чином, **кінетична енергія частинки змінюється, якщо сумарна потужність прикладених до неї сил відмінна від нуля**. Із рівняння (5.13a) випливає умова збереження кінетичної енергії частинки: **кінетична енергія частинки зберігається, якщо сумарна потужність усіх прикладених до частинки сил дорівнює нулю**.

Кінетична енергія вільної частинки зберігається безумовно, оскільки за означенням на вільну частинку не діють ніякі сили, а отже, потужність у правій частині рівняння (5.13a) завжди дорівнює нулю. Тому кажуть не про умову, а про **закон збереження кінетичної енергії вільної частинки**: **кінетична енергія вільної частинки зберігається**.

Елементарним приростом кінетичної енергії dT частинки за проміжок часу dt є

$$dT = N dt. \quad (5.15)$$

Рис. 5.3. Вектор моменту сили

Величину

$$\delta A = Ndt \quad (5.16)$$

називають *елементарною роботою*. Ясно, що розмірність роботи збігається з розмірністю енергії. У системі СІ одиницею роботи є *джоуль* (Дж), $1 \text{ Дж} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, а одиницею потужності – *ват* (Вт), $1 \text{ Вт} = \text{Дж} \cdot \text{с}^{-1}$.

Оскільки $Ndt = \vec{F} \vec{v} dt = \vec{F} d\vec{r}$, то можна записати

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \quad (5.17)$$

Елементарну роботу у вигляді (5.17) називають *елементарною роботою сили* \vec{F} на *елементарному переміщенні* $d\vec{r}$. Рівняння (5.15) можна переписати так:

$$dT = \delta A. \quad (5.18)$$

Отже, **кінетична енергія частинки змінюється за рахунок сумарної роботи прикладених до неї сил.**

5.2. Робота та потенціальна енергія

Як видно з (5.17), елементарна робота є алгебраїчною величиною, тобто вона може бути як додатною, так і від'ємною залежно від кута між напрямком вектора переміщення $d\vec{r}$ (або, що те саме, вектора швидкості \vec{v}) та напрямком сили \vec{F} . Елементарну роботу, що є скалярним добутком сили на елементарне переміщення, можна подати в декількох еквівалентних формах:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cdot \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r}) = F_{dr} dr = F dr_F, \quad (5.19)$$

де $F = |\vec{F}|$, $F_{dr} = F \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r})$ – проекція сили \vec{F} на напрямок переміщення $d\vec{r}$, $dr_F = dr \cdot \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r})$ – проекція переміщення $d\vec{r}$ на напрямок сили \vec{F} .

Робота A_{12} сили \vec{F} на деякій ділянці траєкторії частинки, під час її переміщення з точки 1 у точку 2, є сумою елементарних робіт при елементарних переміщеннях уздовж траєкторії, яка виражається визначенням інтегралом

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_{dr} dr = \int_1^2 F_{dr}(s) ds , \quad (5.20)$$

де $F_{dr}(s)$ – проекція сили на переміщення в точці траєкторії s , а ds – елементарний шлях уздовж траєкторії. Такому інтегруванню можна дати геометричну інтерпретацію (рис. 5.4) у вигляді графіка $F_{dr}(s)$). Елементарна робота дорівнює площині між кривою та віссю абсцис на ділянці від s до $s+ds$, узятій зі знаком "+", якщо крива проходить у верхній півплощині, і зі знаком "-", якщо крива проходить у нижній півплощині.

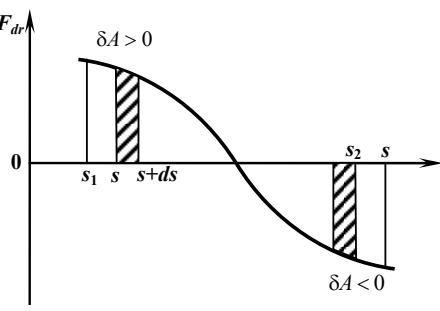


Рис. 5.4. До обчислення роботи сили

Якщо до частинки прикладені декілька сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots \vec{F}_n$, результуюча яких $\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i$, $i = \overline{1, n}$, то робота цієї результуючої сили на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт, здійснюваних кожною із сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots \vec{F}_n$:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) d\vec{r} = \\ &= \int_1^2 \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_1^2 \vec{F}_n d\vec{r} = A_1 + A_2 + \dots + A_n \end{aligned}$$

або

$$A = \sum_i^n A_i, \quad i = \overline{1, n} . \quad (5.21)$$

Зрозуміло, що потужність так само, як і робота може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю, і за наявності декількох

сил обчислюється як сума потужностей: $N = \sum_i^n N_i$, $i = \overline{1, n}$.

Рівняння (5.15) дає можливість за відомою залежністю потужності від часу обчислювати зміну кінетичної енергії за певний проміжок часу

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt . \quad (5.22)$$

Розглянемо приклади обчислення роботи.

Приклад 1. Обчислити мінімальну роботу з перетягування по горизонтальній підлозі блока живлення лазера з одного кутка лабораторного приміщення, що має форму квадрата зі стороною 10 м, у протилежний куток. Маса блока $m = 100$ кг, коефіцієнт сухого тертя $k = 0,2$.

Розв'язання: роботу будемо шукати за формулою (5.20)

$$A_{12} = \int_1^2 F_{dr} ds . \text{ Оскільки сила тертя дорівнює } \vec{F}_{\text{тер}}^{\text{ков}} = -kN \frac{\vec{v}}{v} , \text{ а}$$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} ,$ то її проекція $F_{dr}^{\text{тер}}$ на $d\vec{r}$ завжди буде від'ємна,

$F_{dr}^{\text{тер}} = -kN .$ Тоді

$$A_{12} = \int_1^2 (-kN) ds = - \int_1^2 kmg ds = -kmg \int_1^2 ds = -kmg s_{12}$$

з урахуванням, що $N = mg .$ Бачимо, що робота сили тертя ковзання завжди від'ємна і за абсолютною величиною прямо пропорційна довжині пройденого тілом шляху. Для того, щоб переміщення тіла відбувалося зі сталою за модулем швидкістю $v = \text{const} ,$ який відповідає кінетична енергія $T = mv^2/2 ,$ що також має бути сталою, слід компенсувати втрату кінетичної енергії тіла T за рахунок від'ємної роботи сили тертя такою ж за величиною додатною роботою. Якщо блок живлення перетягають люди, то це робота прикладених до блока сил з боку людей. Для мінімізації цієї роботи необхідно мінімізувати шлях: тягти блок із кутка в куток по діагоналі квадрата. Тоді

$$A_{12} = 0,2 \cdot 100 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 10 \cdot \sqrt{2} \text{ м} = 2746 \text{ Дж.}$$

Якщо, наприклад, перетягування здійснити за 15 с, то середня потужність становитиме $\langle N \rangle = 183$ Вт.

Приклад 2. Нехай частинка масою m_1 переміщується з точки 1 у точку 2 по деякій траєкторії $\vec{r} = \vec{r}(t)$ неподалік від частинки масою m_2 , з якою збігається початок відліку O . Обчислити роботу гравітаційної сили $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, що прикладена до частинки m_1 з боку частинки m_2 , при такому її переміщенні.

Розв'язання: на підставі (5.20) запишемо

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = - \int_1^2 \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = - G m_1 m_2 \int_1^2 \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = - G m_1 m_2 \int_1^2 \frac{r dr}{r^3} = \\ &= - G m_1 m_2 \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = - G m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_2} - \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

При обчисленні інтеграла (5.23) було використано корисну рівність $\vec{r} d\vec{r} = r dr$ ¹

Зауважимо, що обчислена робота A_{12} (прикл. 2) залежить лише від положення початкової та кінцевої точок траєкторії, а не від самої форми траєкторії. Цей факт зумовлений спеціальними властивостями сили гравітаційної взаємодії. Зазначимо, що не всі сили мають такі властивості. Обчислена нами робота може бути як додатною, так і від'ємною: якщо $r_1 > r_2$, то $A_{12} > 0$, а якщо $r_1 < r_2$, то $A_{12} < 0$.

У літературі можна зустріти вирази: "робота сил поля" (коли $A_{12} > 0$) або "робота проти сил поля" (коли $A_{12} < 0$). Також використовують вирази: "робота сили \vec{F} на деякому шляху", якщо $A_{12} > 0$, або "робота проти сили \vec{F} на деякому шляху", якщо $A_{12} < 0$. У прикл. 1 при переміщенні тіла виконувалась робота проти сили тертя ковзання.

¹ Дійсно, $d(r^2) = d(\vec{r} \cdot \vec{r})$, звідки $2rdr = d\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot d\vec{r} = 2\vec{r}d\vec{r}$, тобто $\vec{r}d\vec{r} = rdr$.

5.2.1. Потенціальна енергія частинки

Відповідно до сучасних уявлень взаємодія між частинками (тілами) здійснюються через силові поля. Якщо до частинки в деякій ділянці простору прикладена сила, яка закономірно змінюється від однієї точки цієї ділянки до іншої, то кажуть, що в цій ділянці простору існує *силове поле* або *поле сили*. Серед відомих силових полів можна вказати поле тяжіння Землі, електростатичне поле електричного заряду, магнітне поле постійного магніту тощо. Силове поле є полем вектора сили, тобто належить до векторних полів. Його можна описати шляхом зазначення вектора сили \vec{F} у кожній точці поля: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ або $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$. Якщо сила, прикладена до частинки в кожній точці силового поля, не залежить від часу, то таке поле називають *стационарним*.

Розглянуті вище приклади показують, що існують випадки, коли робота сили з переміщення тіла залежить від траєкторії (прикл. 1), і випадки, коли згадана робота не залежить від форми траєкторії, оскільки визначається лише положенням початкової і кінцевої точок траєкторії (прикл. 2). Дослідимо більш докладно властивості силового поля, у якому робота з переміщення частинки не залежить від форми траєкторії.

**Стационарне силове поле, в якому робота сили поля при переміщенні частинки між двома довільними точками поля не залежить від форми траєкторії частинки, що проходить через ці точки, а залежить лише від положення цих точок, називається-
ся *потенціальним*, а сила, прикладена до частинки з боку такого поля, називається *консервативною*.**

Покажемо, що робота консервативних сил при переміщенні частинки по довільній замкненій траєкторії (по замкненому контурі) дорівнює нулю. На замкненому контурі обрано точки 1 і 2, які поділяють його на дві ділянки a та b . (рис. 5.5). Тоді роботу A^O з переміщення частинки по цьому замкненому контуру, наприклад, із точки 1 у точку 2 можна подати у вигляді суми робіт на згаданих ділянках контуру a і b :

$$A^O = A_{12}^a + A_{21}^b. \quad (5.24)$$

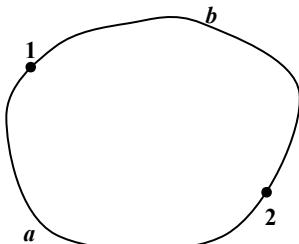


Рис. 5.5. До обчислення роботи в потенціальному полі

При зміні напрямку руху на протилежний робота змінює знак:

$$A_{21}^b = -A_{12}^b. \quad (5.25)$$

За означенням потенціального поля робота при переміщенні частинки із точки 1 у точку 2 по траєкторіях, одна з яких є ділянкою a , а друга – ділянкою b замкненого контуру, однакова:

$$A_{12}^a = A_{12}^b. \quad (5.26)$$

Підставляючи до (5.24) спочатку (5.25), а потім (5.26), одержимо

$$A^O = A_{12}^a - A_{12}^b = A_{12}^a - A_{12}^a = 0. \quad (5.27)$$

Легко довести й обернене твердження: якщо робота сил деякого поля при переміщенні частинки по довільній замкненій траєкторії дорівнює нулю, то робота цих сил з переміщення частинки між двома довільними точками поля не залежить від форми траєкторії.

Таким чином, рівність нулю роботи сил поля з переміщення частинки по довільному замкненому контуру є необхідною й достатньою умовою незалежності роботи з переміщення частинки між двома довільними точками поля від форми траєкторії. Отже, цю властивість також можна покласти в основу означення потенціального поля.

Стаціонарне силове поле, в якому робота сили поля при переміщенні частинки по замкненому контуру дорівнює нулю, називається потенціальним.

Розглянемо роботу A_{PO} з переміщення частинки із довільної точки P потенціального поля в деяку фіксовану точку O . Ця робота залежить лише від положення точки P , яке можна характеризувати її радіус-вектором \vec{r}_P або її координатами. Отже, робота A_{PO} є функцією радіус-вектора \vec{r}_P або координат точки P . Позначимо цю функцію як $U(\vec{r}_P)$. Тоді можна записати

$$U(\vec{r}_P) = A_{PO} = \int_P^O \vec{F} d\vec{r}, \quad (5.28)$$

де інтеграл береться вздовж ділянки траєкторії, обмеженої точками P та O . Величина $U(\vec{r}_P)$ має розмірність енергії. Її називають *потенціальною енергією* частинки в даному потенціальному полі. Зі способу введення функції $U(\vec{r}_P)$ видно, що її значення залежать від вибору точки O . Покажемо, що за допомогою функції $U(\vec{r}_P)$ можна знайти роботу з переміщення частинки із точки поля 1 у точку поля 2 (рис. 5.6).

Оберемо траєкторію, що з'єднує точки 1 і 2 та проходить через точку O . Тоді роботу A_{12} з переміщення частинки із точки поля 1 у точку поля 2 можна подати у вигляді суми роботи A_{10} з переміщення частинки із точки 1 у точку O та роботи A_{02} з переміщення частинки із точки O у точку 2:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2), \quad (5.29)$$

тобто

$$A_{12} = U_1 - U_2 \quad \text{або} \quad A_{12} = -(U_2 - U_1), \quad (5.30)$$

де позначено $U_1 = U(\vec{r}_1)$, $U_2 = U(\vec{r}_2)$.

Отже, роботу з переміщення частинки в потенціальному полі можна подати як приріст потенціальної енергії $\Delta U = U_2 - U_1$, взятий зі знаком "мінус":

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\Delta U, \quad (5.31)$$

а на елементарному переміщенні $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = -dU. \quad (5.32)$$

Хоча значення функцій U_1 та U_2 і залежать від вибору точки O , їх різниця, що дорівнює роботі з переміщення частинки із точки 1 у точку 2, не залежить від вибору точки O . Іншими словами, частинці, розташованій у точці O , може бути приписане довільне значення потенціальної енергії.

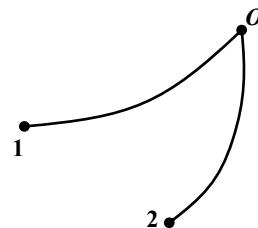


Рис. 5.6. До обчислення роботи з переміщення частинки в потенціальному полі

До класу потенціальних належать так звані *центральні* силові поля, у яких силу, що діє на частинку, можна подати загальною формулою

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.33)$$

де $f(r)$ – деяка скалярна функція, що залежить лише від відстані $r = |\vec{r}|$, до деякої точки, що називається *силовим центром*, а $\frac{\vec{r}}{r}$ – одиничний вектор співнапрямлений з радіус-вектором \vec{r} частинки, початок якого лежить у силовому центрі. Модуль сили в такому полі залежить лише від відстані r до силового центра (*центра поля*), тобто має однакову величину в усіх точках, що лежать на сфері радіуса r , а лінія дії сили завжди проходить через центр поля.

Робота сил центрального поля з переміщення частинки з однієї точки поля в іншу дорівнює

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} f(r) dr. \quad (5.34)$$

Порівнюючи (5.33) із формулами сил, наведеними в розд. 3, можна побачити, що до класу центральних належать сила всесвітнього тяжіння, кулонівська сила, квазіпружна сила. У цьому можна переконатися, наприклад, для гравітаційного поля, розглядаючи одну із частинок як центр силового поля і помістивши в нього початок відліку.

Із вищепереліченого випливає послідовність дій з відшукання функції потенціальної енергії потенціального силового поля за відомою формулою сили, що прикладена до частинки з боку цього поля: спочатку необхідно обчислити роботу сил поля з переміщення частинки між двома довільними точками поля, а потім подати її у вигляді приросту деякої функції положення точки (функції радіус-вектора або координат), узятого зі знаком мінус. Ця функція і буде функцією потенціальної енергії цього поля.

Приклад. Обчислення потенціальної енергії частинки в полі точкової маси або електричного заряду.

Розв'язання. Силу гравітаційної або кулонівської взаємодії між двома частинками можна подати у загальному вигляді

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{де } \alpha = \begin{cases} -Gm_1m_2 & \text{для гравітаційного поля,} \\ kq_1q_2 & \text{для кулонівського поля.} \end{cases} \quad (5.35)$$

Робота з переміщенням частинки в такому силовому полі вже була обчислена вище (див. формулу (5.23)). Її можна подати так:

$$A_{12} = -\alpha \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\left(\frac{\alpha}{r_2} - \frac{\alpha}{r_1} \right) = -[U(r_2) - U(r_1)], \quad (5.36)$$

звідки знаходимо вираз для потенціальної енергії частинки в такому полі:

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}. \quad (5.37)$$

Відповідно, для гравітаційного поля маємо

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (5.38)$$

а для кулонівського

$$U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (5.39)$$

Зауважимо, що скалярне поле потенціальної енергії, що існує навколо точкової маси або точкового заряду (5.38), (5.39), має центральну симетрію, тобто потенціальна енергія залежить лише від модуля відстані до силового центра, як і має бути для центрального поля. Відповідні графіки подано на рис. 5.7.

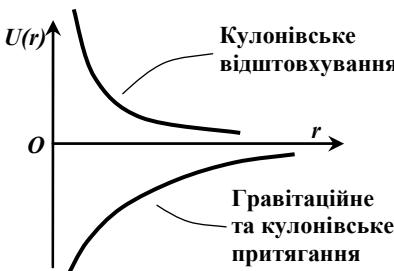


Рис. 5.7. Залежність потенціальної енергії від відстані до силового центра

Еквіпотенціальні поверхні. Геометричне місце точок, у яких потенціальна енергія частинки однакова, утворює в просторі поверхню, яку називають *поверхнею однакового потенціалу*, або *еквіпотенціальною поверхнею* (від лат. *aequius* – одинаковий, рівний). Рівняння еквіпотенціальної поверхні $U(x, y, z) = \text{const.}$

Очевидно, що робота з переміщенням частинки по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю. Уявлення про форму еквіпотенціальних поверхонь дають їх перерізи, що зображають набір еквіпотенціальних поверхонь для різних значень U , які зазвичай відрізняються на постійну величину. Для центральних полів еквіпотенціальні поверхні являють собою концентричні сфери.

5.2.2. Зв'язок між потенціальною енергією та силою

Знайдемо зв'язок між функцією потенціальної енергії частинки в деякому силовому полі та консервативною силою, що прикладена до частинки з боку цього поля. Скористаємося виразом (5.32), який зв'язує елементарний приріст dU потенціальної енергії $U(x, y, z)$ з елементарною роботою δA консервативної сили $\vec{F}(x, y, z)$ на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ поблизу точки поля з координатами x, y, z , і запишемо

$$\vec{F}d\vec{r} = -dU. \quad (5.40)$$

Елементарний приріст функції трьох змінних x, y, z $U(x, y, z)$ з точністю до нескінченно малих порядку можна подати її повним диференціалом:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (5.41)$$

де dx, dy, dz – нескінченно малі незалежні один від одного приrosti координат, а $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ – так звані частинні похідні функції $U(x, y, z)$, обчислені в точці поля з координатами x, y, z . Наприклад, частинну похідну $\frac{\partial U}{\partial x}$ функції $U(x, y, z)$ у точці поля з координатами x_0, y_0, z_0 обчислюють так: беруть похідну $\frac{d}{dx}U(x, y, z)$, вважаючи дві інші змінні y, z сталими величинами

ми, і в отриманий вираз підставляють $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Ліву частину (5.41) можна подати як

$$\vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (5.42)$$

Отже, після підстановки (5.41) та (5.42) у (5.40) одержимо рівність

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right). \quad (5.43)$$

Із порівняння коефіцієнтів при однакових приростах незалежних змінних у лівій та правій частинах цієї рівності дістанемо зв'язок між компонентами вектора сили \vec{F} , прикладеної до частинки з боку потенціального поля в точці простору з координатами x, y, z , і частинними похідними від функції потенціальної енергії $U(x, y, z)$ частинки, обчисленими в цій точці:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.44)$$

Сам вектор сили \vec{F} дорівнює

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right), \quad (5.45)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти декартової системи координат. Рівність (5.45) встановлює відповідність між множиною значень скалярної величини – потенціальної енергії частинки в околі точки з координатами x, y, z у деякому потенціальному полі $U(x, y, z)$ і значенням векторної величини – сили $\vec{F}(x, y, z)$, що прикладена до частинки в цій точці простору, тобто встановлює зв'язок між скалярним полем потенціальної енергії $U(x, y, z)$ і векторним полем сили $\vec{F}(x, y, z)$.

Рівність (5.45) часто записують більш компактно у вигляді

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad (5.46)$$

де використано позначення *оператора*¹ набла $\vec{\nabla}$ (значок ∇ читається "набла"):

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (5.47)$$

Оператор $\vec{\nabla}$ формально можна розглядати як вектор, компонентами якого є оператори частинних похідних за декартовими координатами, а його дію на скалярну функцію – як множення цього вектора на скаляр. У цьому і лише в цьому випадку його називають *оператором градієнта* і часто позначають як grad , тобто запис $\vec{\nabla}U$ тотожний запису $\text{grad}U$. Отже, рівність (5.46) можна також записати у вигляді

$$\vec{F} = -\text{grad}U. \quad (5.48)$$

Результатом дії оператора градієнта на поле деякої скалярної величини є вектор, який називають *градієнтом* цієї величини. Можна показати, що **градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання величини скалярного поля**.

Отже, до частинки, що перебуває в потенціальному полі, з боку цього поля прикладена сила, яка дорівнює градієнту потенціальної енергії частинки в точці її розташування, узятому зі знаком мінус. Іншими словами, напрямок цієї сили збігається з напрямком найшвидшого спадання потенціальної енергії.

5.2.3. Повна механічна енергія частинки

Сили, прикладені до частинки, у загальному випадку завжди можна розділити на *консервативні*, або *потенціальні*, і *неконсервативні*, або *сторонні*. Відповідно до (5.18) та (5.21) сумарна робота цих сил змінює кінетичну енергію частинки:

¹ Термін *оператор* означає сукупність правил, за якими виконують якусь *операцію* у широкому розумінні слова, напр., операцію встановлення відповідності між елементами двох множин, і є синонімом термінів "відображення", "функція". Оператор можна розглядати як алгоритм, послідовність математичних операцій, які дають можливість встановити бажану відповідність між елементами двох множин. У нашому випадку дія оператора $\vec{\nabla}$ зводиться до такої послідовності операцій: 1) визначення частинних похідних від $U(x,y,z)$; 2) множення кожної з них на відповідний орт; 3) сумування цих добутків; 4) множення отриманого таким чином вектора на -1 .

$$dT = \delta A^{\text{конс}} + \delta A^{\text{стор}} . \quad (5.49)$$

Оскільки, $\delta A^{\text{конс}} = -dU$, то

$$dT + dU = \delta A^{\text{стор}} \quad (5.50)$$

або

$$d(T + U) = \delta A^{\text{стор}} . \quad (5.51)$$

Величина $E = T + U$, сума кінетичної та потенціальної енергії частинки, називається *повною механічною енергією частинки*:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}) . \quad (5.52)$$

З означення (5.52) видно, що повна механічна енергія частинки є функцією механічного стану частинки.

Умови зміни та збереження повної механічної енергії частинки. Відповідно до рівняння (5.51) приріст повної механічної енергії частинки на елементарному переміщенні дорівнює елементарній сумарній роботі всіх сторонніх сил:

$$dE = \delta A^{\text{стор}} , \quad (5.53)$$

а на скінченному переміщенні

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{стор}} , \quad (5.54)$$

де $A_{12}^{\text{стор}}$ – сумарна робота всіх сторонніх сил на шляху між точками 1 та 2.

Оскільки

$$\delta A^{\text{стор}} = N^{\text{стор}} dt , \quad (5.55)$$

то повна механічна енергія частинки E змінюється, якщо сумарна потужність сторонніх сил $N^{\text{стор}}$, прикладених до частинки, у кожний момент часу відмінна від нуля. Якщо $N^{\text{стор}} > 0$, то повна механічна енергія частинки E зростає, а якщо $N^{\text{стор}} < 0$, то зменшується. Відповідно, приріст повної механічної енергії частинки на деякому шляху дорівнює алгебраїчній сумі робіт $A^{\text{стор}}$ всіх сторонніх сил, що діють на частинку на цьому шляху: при $A^{\text{стор}} > 0$ повна механічна енергія зростає, а при $A^{\text{стор}} < 0$ зменшується.

Із рівнянь (5.53) та (5.55) випливає умова збереження повної механічної енергії частинки: **повна механічна енергія частинки зберігається, якщо сумарна потужність, а отже, і робота всіх сторонніх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю.**

За відсутності сторонніх сил їх потужність завжди дорівнює нулю. Тоді справедливий закон збереження повної механічної енергії частинки: **повна механічна енергія частинки, на яку не діють сторонні сили, зберігається, тобто**

$$T + U = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}) = \text{const}. \quad (5.56)$$

5.2.4. Одновимірний рух частинки в потенціальному полі

У демонстраційному досліді частинка (невелика сталева кулька) рухається по плоскій траєкторії, що лежить у вертикальній площині і проходить на різній висоті h над поверхнею демонстраційного стола (котиться вздовж напрямної, виготовленої з кутника, рис. 5.8). Потенціальна енергія кульки в однорідному полі сили тяжіння $U(x) = mgh(x)$, де $h(x)$ – висота кульки над поверхнею стола в точці з координатою x , яка відлічується вздовж поверхні стола від початку напрямної, де її висота максимальна. На напрямній є неглибокий мінімум на відстані порядку 1 м від початку (на рис. 5.8 обрано різний масштаб по горизонталі та по вертикалі: $h_{\max} \approx 0,4$ м, $x_{\max} \approx 4$ м).

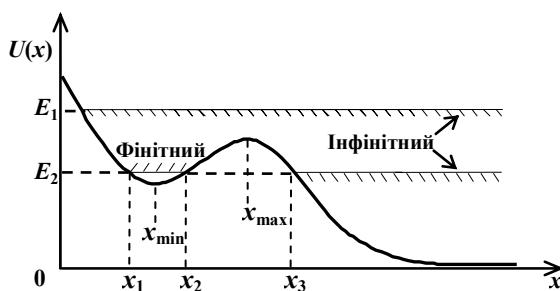


Рис. 5.8. До одновимірного руху частинки

Повна механічна енергія кульки має вигляд

$$E = T(x) + U(x). \quad (5.57)$$

Якщо помістити кульку на напрямній на деякій висоті h_1 , більшій за висоту максимуму між точками x_2 та x_3 , і відпустити без надання їй початкової швидкості, то її повна механічна енергія E_1 буде повністю визначатися її початковою потенціальною енергією $U = mgh_1$. Під дією консервативної сили тяжіння кулька почне рухатись і її кінетична енергія зростатиме за рахунок роботи цієї сили, а потенціальна енергія спадатиме. Оскільки опір руху кульки при її коченні дуже малий (т.зв. коефіцієнт тертя кочення набагато менший від коефіцієнта тертя ковзання), а опір повітря за малих швидкостей також незначний, то на невеликих проміжках часу можна вважати, що повна механічна енергія кульки зберігається, $E = \text{const}$. Тому після проходження мінімуму між точками x_1 та x_2 потенціальна енергія частинки починає зростати, а кінетична – зменшуватись і, відповідно, зменшуватись швидкість. Після проходження максимуму між точками x_2 та x_3 потенціальна енергія частинки знову зменшується, а кінетична зростає, оскільки повна енергія частинки залишається сталою. Рух кульки можливий лише на тих ділянках, де кінетична енергія додатна, тобто за $E \geq U(x)$. Ділянки, де $E < U(x)$, недосяжні для механічного руху. У зв'язку із цим одновимірний рух може бути *інфінітним*, коли частинка прямує до нескінченності (у нашому випадку кулька може котитися по поверхні стола в напрямку необмеженого збільшення x), або *фінітним*, коли частинка не виходить за межі деякої ділянки між $x_1 > -\infty$ та $x_2 < \infty$, де виконується умова $E \geq U(x)$. Для ходу потенціальної енергії $U(x)$, зображеного на рис. 5.8, фінітний рух може здійснюватись поблизу мінімуму потенціальної енергії між точками x_2 та x_3 для значень повної механічної енергії E_2 , які більші за величину потенціальної енергії $U(x_{\min})$ у мінімумі за x_{\min} , $x_2 > x_{\min} > x_1$, але менші від величини потенціальної енергії $U(x_{\max})$ у максимумі за x_{\max} , $x_3 > x_{\max} > x_2$,

$U(x_{\max}) > E_2 > U(x_{\min})$. За таких енергій E_2 частинка рухається лише вперед-назад в околі згаданого мінімуму потенціальної енергії, але не здатна подолати так званий *потенціальний бар'єр*, утворений максимумом потенціальної енергії $U(x_{\max})$, і перейти на ділянку, де можливий інфінітний рух (рис. 5.8).

Описаний дослід демонстраційний і покликаний показати на якісному рівні основні властивості одновимірного руху частинки. Якби кулька не котилася по напрямній, а ковзала по ній, то її повну механічну енергію можна було б подати як

$$E = \frac{m\upsilon^2(x)}{2} + mgh(x), \quad (5.58)$$

звідки видно, що швидкість кульки υ зменшується при збільшенні висоти h , що можна спостерігати, коли кулька долає потенціальний бар'єр. Оскільки $\upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, а напрямна має невеликі нахили (на рис. 5.8 обрано різний масштаб по горизонталі та по вертикалі!), то можна вважати, що $\dot{x}^2 \gg \dot{y}^2$, унаслідок чого $\upsilon^2 \approx \dot{x}^2$. Тоді замість (5.57) можна записати

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \quad (5.59)$$

Рівняння (5.59) описує *одновимірний рух* частинки, при якому механічний стан частинки визначається лише однією змінною (координатою) x , що залежить від часу.

Зауважимо, що при чистому коченні однорідної кулі масою m зі швидкістю υ її кінетичну енергію можна подати як суму кінетичної енергії її поступального руху зі швидкістю υ та кінетичної енергії її обертального руху з кутовою швидкістю $\omega = \upsilon / r$, де r – радіус кульки. Розрахунок показує (впр. 6.5, розд. 6), що кінетична енергія однорідної кулі, яка котиться зі швидкістю υ , становить $0,9m\upsilon^2$, а не $0,5m\upsilon^2$, як це спостерігається у випадку, коли вона ковзає з тією самою швидкістю без обертання, але залишається пропорційною добутку маси на квадрат швидкості. Це означає, що в нашому досліді рух кульки при коченні якісно залишається таким самим, як і при ковзанні, але відбувається дещо повільніше, що для демонстраційного досліду навіть становить певну перевагу.

Розглянемо приклад руху частинки в однорідному полі сили тяжіння по замкненому контуру. На рис. 5.9, *a* схематично зображене атракціон, який іноді називають "американські гірки". Нехай з вершини вежі висотою h починає рухатись по рейках, що утворюють замкнений шлях 123451, візок (схематично зображений як прямий паралелепіпед). На рис. 5.9, *b* показано профіль шляху візка. На ділянці шляху 1–4 потенціальна енергія візка зменшується, а кінетична збільшується за рахунок роботи консервативної сили тяжіння. На горизонтальній ділянці 4–5 візок рухається за інерцією. За відсутності дисипативних сил візок мав би досягнути точки 5 і почати підйом по похилій ділянці 5–1, на якій виконується робота проти консервативної сили тяжіння, унаслідок чого зменшується кінетична енергія візка, а натомість зростає його потенціальна енергія, яка на вершині вежі досягає свого початкового значення. Якщо б сили опору були відсутні, то візок міг би рухатись по замкненому рейковому шляху як завгодно довго, але в дійсності на кожній ділянці траекторії візок виконує роботу проти дисипативних сил (опір повітря, тертя кочення та ін.). Окрім того, на горизонтальній ділянці шляху 4–5 візок спеціально гальмують до повної зупинки, щоб у точці 5 приєднати до нього трос, за допомогою якого здійснюють підйом візка на вершину вежі. При цьому до візка з боку троса прикладена стороння сила натягу, яка виконує роботу як проти консервативної сили тяжіння, так і дисипативних сил тертя. Отже, рух частинки (візка) у потенціальному полі по замкненому контуру за наявності дисипативних сил можливий лише за рахунок сторонніх сил, які компенсують втрати кінетичної енергії частинки на роботу проти дисипативних сил. На рис. 5.9, *a* жирною лінією відмічено ділянку шляху 1–5, на якій візок рухається за рахунок роботи консервативної сили $A^{\text{конс}}$, яка була виконана при зміні висоти від h до 0, а штрих-пунктирною лінією відмічено ділянку 5–1, на якій візок рухається винятково за рахунок роботи зовнішньої сторонньої недисипативної сили $A^{\text{стор,недис}}$. При цьому від'ємна робота дисипативних сил виконується на будь-якій ділянці шляху.

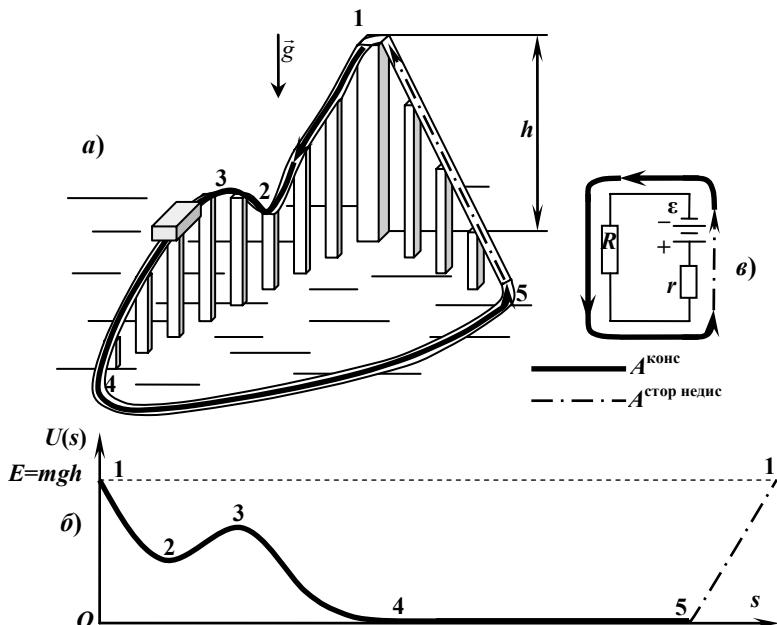


Рис. 5.9. До руху частинки по замкненому контуру в полі консервативної сили

Аналогічно відбувається рух електричного заряду по замкненому провідному контуру, що містить джерело електрорушійної сили (е.р.с.) E з внутрішнім електричним опором r та зовнішню щодо джерела е.р.с. ділянку контуру з електричним опором R (рис. 5.9, в). У зовнішній ділянці контуру рух електричного заряду, наприклад електрона, відбувається за рахунок роботи консервативних сил з боку потенціального електричного поля, яке створюється в цій ділянці додатно та від'ємно зарядженими полюсами джерела е.р.с. Для перенесення електрона від додатно зарядженого полюса до від'ємно зарядженого полюса джерела е.р.с. усередині самого джерела необхідні сторонні (неконсервативні) сили, які виконуватимуть роботу проти сил потенціально-го електричного поля. Походження цих сил може бути різним: найчастіше це сили з боку вихрового електричного (непотенціального) поля, яке виникає в електрогенераторах при змінах магнітного поля (електромагнітна індукція), або так звані "хімічні" сили в гальванічних елементах та акумуляторах. Робота дисипа-

тивних сил при переміщенні заряду вздовж контуру призводить до нагрівання відповідних ділянок кола, пропорційного їх опору. Для чіткого розуміння природи е.р.с., яку означають як фізичну величину, що в замкненому провідному контурі дорівнює роботі сторонніх сил з переміщення одиничного електричного заряду вздовж усього контуру, уявимо, що джерело е.р.с. подібне до плоского конденсатора і складається з двох великих плоских обкладинок, з розмірами порядку розмірів стін аудиторії та з такою ж відстанню між ними. Нехай ми перебуваємо між цими обкладинками і маємо задачу переносити на обкладинку "—" негативні заряди, що прибувають на обкладинку "+" після їх переміщення по зовнішній ділянці контуру під дією консервативної сили з боку електростатичного потенціального поля. Загалом можна переносити ці заряди в руках, навантажувати їх на візок і перетягувати його до обкладинки "—" тощо. Останній спосіб дуже подібний до методу піднімання візка на вершину вежі у прикладі з американськими гірками: заряди переміщаються від "+" до "—" за рахунок роботи сторонніх сил (нашої мускульної сили, прикладеної до навантаженого негативними зарядами візка), яка йде на збільшення потенціальної енергії цих зарядів і на виконання роботи проти дисипативних сил (напр., сил тертя, що діють на візок). Наявність останніх на електричній схемі (рис. 5.9, в) уособлює внутрішній опір r джерела е.р.с. Отже, немає принципової різниці між рухом візка по замкненій траєкторії в потенціальному полі сили тяжіння (рис. 5.9, а) і рухом електричного заряду по замкненому контуру (рис. 5.9, в). Саме механічна робота з перенесення електричних зарядів виступає як е.р.с. у високовольтних електростатичних *генераторах Van de Graafa та пелетронах* (Pelletron).

Зауважимо, що в електричному колі можна усунути дисипативні сили (електричний опір) і реалізувати тривале протікання струму по замкненому контуру, у якому відсутнє джерело е.р.с. Така можливість завдячує явищу надпровідності¹, а саме, зникненню електричного опору провідників при їх охолодженні до певної критичної температури. У фізичному експерименті широко використовують надпровідні соленоїди, які охолоджують нижче критичної температури, під'єднують джерела е.р.с., встановлюють у них

¹ Фізична природа надпровідності знаходить пояснення у квантовій механіці.

струм бажаної величини, замикають накоротко надпровідником і від'єднують від джерела е.р.с. Після цього струм може годинами і місяцями циркулювати по замкненому надпровідному колу, яке не містить ніяких джерел е.р.с.

5.3. Закони збереження для системи частинок

Розглянемо систему частинок, які не взаємодіють між собою, ані з іншими матеріальними об'єктами. Їх можна вважати вільними, а для вільних частинок, як було показано в підрозд. 5.1, залишаються сталими імпульси, моменти імпульсу та кінетичної енергії. Очевидно, що для такої системи вільних частинок суми імпульсів, моментів імпульсів та кінетичних енергій усіх частинок системи також будуть сталими величинами. Ці суми називають *імпульсом системи частинок*, *моментом імпульсу системи частинок* та *кінетичною енергією системи частинок*, відповідно.

Отже, **імпульс системи частинок**:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.60)$$

де $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ – імпульс i -ї частинки.

Момент імпульсу системи частинок:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.61)$$

де $\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]$ – момент імпульсу i -ї частинки.

Кінетична енергія системи частинок:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.62)$$

де $T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кінетична енергія i -ї частинки.

Уведені таким чином імпульс, момент імпульсу та кінетична енергія системи частинок, що характеризують механічний стан цієї системи, називають *адитивними* величинами, оскільки вони

є сумами імпульсів, моментів імпульсу та кінетичних енергій частинок системи.

Зрозуміло, що за наявності взаємодії між частинками системи, а також взаємодії частинок системи з іншими матеріальними об'єктами, що властиво переважній більшості реальних фізичних систем, імпульси, моменти імпульсу та кінетичні енергії частинок системи в загальному випадку будуть змінюватись. У наступних розділах будуть знайдені умови зміни та збереження введених нами адитивних величин, які характеризують механічний стан системи в цілому.

5.3.1. Умови зміни та закон збереження імпульсу системи частинок

Умови зміни та збереження імпульсу системи частинок будемо шукати так само, як і для однієї частинки. Візьмемо похідну за часом від імпульсу системи частинок і з урахуванням другого закону Ньютона отримаємо

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

або

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (5.63)$$

де $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, тобто імпульс системи частинок змінюється під дією сил, що діють на частинки системи. Проте в загальному випадку i -та частинка системи може взаємодіяти як з іншими частинками системи, так і з матеріальними об'єктами, що не належать до розглядуваної системи частинок. Відповідно, сили, що прикладені до частинок системи, можна поділити на так звані *внутрішні*, тобто сили взаємодії між частинками самої системи, і *зовнішні*, тобто сили взаємодії частинок системи з матеріальними об'єктами, що не належать до цієї системи. Наприклад, для i -ї частинки

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ВН}} + \vec{F}_i^{\text{ЗОВН}}, \quad (5.64)$$

де

$$\vec{F}_i^{\text{BH}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik}, \quad (5.65)$$

причому індекс k пробігає всі значення від 1 до n , за винятком $k = i$. Отже, (5.63) можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{BH}} + \vec{F}^{\text{зовн}}, \quad (5.66)$$

де

$$\vec{F}^{\text{BH}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{BH}}, \quad \vec{F}^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}}.$$

Покажемо, що сума всіх сил взаємодії між частинками \vec{F}^{BH} завжди дорівнює нулю. Після простих алгебраїчних перетворень маємо

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{BH}} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{BH}} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} = \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \vec{F}_{ki}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

причому після подання в (5.67) суми сил у вигляді двох однакових доданків індекси в другому доданку, за якими виконується сумування, було перепозначено таким чином: індекс i позначенено як k , а індекс k – як i . Зрозуміло, що таке перепозначення не впливає на величину другого доданка, оскільки обидва індекси, як і раніше, пробігають один й той самий ряд значень від 1 до n .

З іншого боку, відповідно до третього закону Ньютона сили, з якими діють одна на одну дві частинки i та k , однакові за модулем і протилежні за напрямком, тобто $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$, звідки ви-

пливає, що $\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ki} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik}$, їх остаточно отримаємо

$$\vec{F}^{\text{BH}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} + \left(-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} \right) = 0. \quad (5.68)$$

Виявляється, що **імпульс системи частинок змінюється лише під дією зовнішніх сил, прикладених до частинок системи:**

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}}. \quad (5.69)$$

Отже, умови зміни та збереження імпульсу системи частинок такі:

- імпульс системи частинок змінюється, якщо сума всіх зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, відмінна від нуля;
- імпульс системи частинок зберігається (залишається сталим), якщо сума всіх зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю.

Векторне рівняння (5.69) можна спроектувати на орти деякої системи координат. Тоді для кожної компоненти α (напр., $\alpha = x, y, z$) справедливе рівняння

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = F_\alpha^{\text{зовн}}, \quad (5.70)$$

звідки випливає, що **коли деяка компонента суми всіх зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю, то відповідна компонента вектора імпульсу системи частинок зберігається.**

Умова збереження імпульсу системи частинок, яка полягає у рівності нулю суми зовнішніх сил, прикладених до частинок, може бути задоволена або внаслідок взаємної компенсації зовнішніх сил, або, коли зовнішні сили взагалі відсутні, як це буває у випадку так званих **замкнених** (або ізольованих) систем частинок, що посідають особливе місце в механіці.

Систему частинок називають замкненою, якщо відсутня взаємодія частинок системи з матеріальними об'єктами, що не належать до цієї системи. Відсутність такої взаємодії вказує на те, що на частинки системи не діють зовнішні сили, $\vec{F}_i^{\text{зовн}} \equiv 0$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Це означає, що для замкненої системи частинок

сума зовнішніх сил у правій частині рівняння (5.69) **завжди і безумовно** дорівнює нулю: $\vec{F}^{\text{зовн}} \equiv 0$.

Закон збереження імпульсу системи частинок: імпульс замкненої системи частинок є сталою величиною:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i(t) = \text{const.} \quad (5.71)$$

Отриманий результат надзвичайно важливий і значною мірою неочевидний. Дійсно, важко собі уявити, що хоча імпульс $\vec{p}_i(t)$ кожної частинки замкненої системи змінюється із часом, а кількість частинок може бути настільки великою, що її саму важко уявити (згадаємо, напр., що 1 моль газу містить $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ молекул), сума їх імпульсів \vec{P} не залежить від часу! Але це дійсно так... До формул (5.69) – (5.71) можна прийти різними шляхами (впр. 5.4), але головним критерієм їх правильності є експеримент.

Зрозуміло, що замкнена система частинок є певною ідеалізацією, деяким граничним поняттям, оскільки повністю виключити взаємодію розглядуваної системи частинок з іншими матеріальними об'єктами у Всесвіті неможливо. Водночас існує багато випадків, коли систему частинок з дуже хорошим наближенням можна вважати замкненою.

Повернемось до рівняння (5.69). За формулою воно повністю збігається з рівнянням (5.3) для однієї частинки, яке фактично являє собою рівняння руху частинки під дією сили \vec{F} . Імпульс системи частинок \vec{P} можна подати у вигляді

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_C, \quad (5.72)$$

де $M = \sum_{i=1}^n m_i$ – маса системи частинок, а \vec{V}_C – деяка швидкість, яка характеризує рух системи як цілого, тобто як рух однієї частинки з масою M :

$$\vec{V}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (5.73)$$

Із (5.73) видно, що швидкість \vec{V}_C можна подати як похідну за часом від деякого радіус-вектора:

$$\vec{R}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (5.74)$$

Радіус-вектор \vec{R}_C визначає деяку точку простору C , що дісталася назву *центр мас*, або *центр інерції* системи частинок (рис. 5.10).

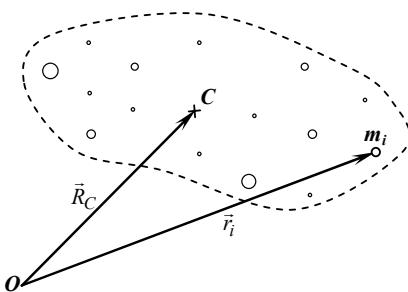


Рис. 5.10. Центр мас системи частинок

що в загальному випадку центр мас системи частинок не збігається з якоюсь конкретною частинкою.

Покажемо, що центр мас найпростішої системи, яка складається з двох частинок з масами m_1 і m_2 , лежить на відрізку прямої, що з'єднує ці частинки, у точці, відстані від якої до частинок обернено пропорційні їх масам. На рис. 5.11 зображено радіус-вектори \vec{r}_1 і \vec{r}_2 частинок m_1 і m_2 відносно початку O . Їх можна подати через радіус-вектор центра мас \vec{R}_C та радіус-вектори цих частинок $\tilde{\vec{r}}_1$ і $\tilde{\vec{r}}_2$, визначені відносно центра мас C : $\vec{r}_1 = \vec{R}_C + \tilde{\vec{r}}_1$ та $\vec{r}_2 = \vec{R}_C + \tilde{\vec{r}}_2$, звідки знаходимо $\tilde{\vec{r}}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_C$ та

Відповідно, швидкість \vec{V}_C називають *швидкістю центра мас системи частинок*.

Як видно із формули (5.74), положення центра мас залежить лише від взаємного розташування частинок системи та співвідношення їх мас. Зазначимо,

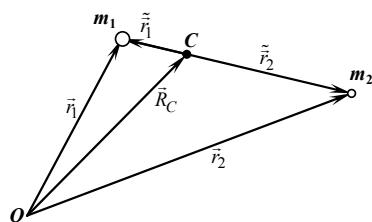


Рис. 5.11. До визначення центра мас системи двох частинок

$\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_C$. Після підстановки в останні дві рівності $\vec{R}_C = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2)$ і простих алгебраїчних перетворень знаходимо

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_C = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (5.75a)$$

і, аналогічно

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (5.75b)$$

Якщо позначити $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, то можна записати

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (5.76a)$$

і, аналогічно

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (5.76b)$$

де радіус-вектор \vec{r} має початок у точці розташування другої частинки, а кінець – у точці розташування першої частинки (рис. 5.11).

Оскільки вектори \vec{r}_1 і \vec{r}_2 колінеарні, то центр мас C дійсно лежить на відрізку прямої, що з'єднує ці частинки, а їх модулі обернено пропорційні масам відповідних частинок $\vec{r}_1 / \vec{r}_2 = m_2 / m_1$.

Із рівняння (5.72) випливає, що імпульс системи частинок дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра мас \bar{V}_C :

$$\vec{P} = M \bar{V}_C. \quad (5.77)$$

Якщо ж швидкість \bar{V}_C центра мас системи частинок дорівнює нулю, то імпульс системи частинок також дорівнюватиме нулю, і навпаки. Тому швидкість центра мас системи частинок приймають за швидкість руху системи частинок як цілого.

З урахуванням (5.77) рівняння (5.69) можна переписати у вигляді

$$M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}}, \quad (5.78)$$

де $\dot{\bar{V}}_C$ – прискорення центра мас системи частинок, а $\vec{F}^{\text{зовн}}$ – сума всіх зовнішніх сил, що діють на частинки системи. Рівняння (5.78) називають рівнянням руху центра мас системи частинок.

нок. Відповідно до цього рівняння **центр мас системи частинок рухається так, начебто в ньому зосереджена маса всієї системи і до нього прикладена сума всіх зовнішніх сил, що прикладені до частинок системи.** Прискорення центра мас не залежить від того, до яких конкретно частинок системи прикладені зовнішні сили: має значення лише їх векторна сума.

Формальна аналогія рівняння руху центра мас системи частинок і основного рівняння динаміки руху частинки має під собою спільний фізичний ґрунт. Наприклад, якщо $\vec{F}_{\text{зовн}} = 0$, то прискорення центра мас системи (прискорення системи як цілого) відсутнє, тобто швидкість центра мас (системи як цілого) $\vec{V}_C = \text{const}$. Зокрема, це справджується для замкненої системи частинок: центр мас замкненої системи частинок рухається рівномірно і прямолінійно, так само, як рухається вільна частинка. Згадаємо, що вільний рух частинки – це такий рух, при якому частинка не взаємодіє з іншими матеріальними об'єктами, а замкнена система частинок – це така, частинки якої не взаємодіють з матеріальними об'єктами, що лежать поза системою. З цієї точки зору рух системи частинок як цілого подібний до руху однієї частинки з масою, що дорівнює масі системи, під дією зовнішніх щодо системи сил.

У загальному випадку імпульс системи частинок змінюється при переході від однієї системи відліку до іншої. Нехай у деякій системі відліку K імпульс системи частинок $\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$. При переході до системи відліку K' , що рухається поступально відносно системи відліку K зі швидкістю \vec{V} , швидкість i -ї частинки в системі відліку K можна подати як $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$, а імпульс системи частинок, визначений у системі відліку K , відповідно як

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}'_i + \vec{V}) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n m_i \vec{V} = \vec{P}' + M \vec{V} \quad (5.79)$$

або з урахуванням (5.77):

$$M \vec{V}_C = \vec{P}' + M \vec{V}, \quad (5.80)$$

де \vec{P}' – імпульс системи частинок, визначений у системі відліку K' . Таким чином, під час такого переходу зміна імпульсу дорів-

нює добутку маси системи на відносну швидкість однієї системи відліку відносно іншої. Із рівності (5.80) видно, якщо $\vec{V} = \vec{V}_C$, то $\vec{P}' = 0$, тобто **імпульс системи частинок, визначений у системі відліку, у якій центр мас системи частинок перебуває у спокої, завжди дорівнює нулю**. Цей факт випливає й безпосередньо із формули (5.77), де треба покласти \vec{V}_C рівним нулю. Таку систему відліку називають *системою центра мас* (СЦМ). Зауважимо, що СЦМ для замкненої системи частинок завжди є інерціальною системою відліку, для незамкненої – у загальному випадку неінерціальною. **Система центра мас – це система відліку, у якій система частинок як ціле перебуває у спокої.** Таку систему відліку називають також *власною системою відліку* системи частинок. Рух частинок відносно СЦМ називають внутрішнім рухом системи частинок. Рух частинок системи відносно довільної системи відліку завжди можна розглядати як суперпозицію внутрішнього руху і руху системи як цілого, що відбувається зі швидкістю \vec{V}_C . Зокрема, імпульс системи частинок, визначений у деякій системі відліку K , можна подати у вигляді $\vec{P} = \vec{\tilde{P}} + M\vec{V}_C$, де $\vec{\tilde{P}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\tilde{v}}_i(t)$ – імпульс

системи частинок, пов'язаний з її внутрішнім рухом, а $\vec{\tilde{v}}_i(t)$ – швидкості частинок системи в СЦМ, а $M\vec{V}_C$ – імпульс системи частинок, пов'язаний з її рухом як цілого.

Як було зазначено, внесок внутрішнього руху в імпульс системи частинок завжди дорівнює нулю, $\vec{\tilde{P}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\tilde{v}}_i(t) = 0$. Із цього випливає, що імпульс системи не може бути змінений за рахунок внутрішніх рухів частинок або, що теж саме, за рахунок внутрішніх сил.

Відповідно до принципу відносності механіки, якщо імпульс системи частинок зберігається в одній ICB, то він буде зберігатися і в усіх інших ICB. Нехай в ICB K імпульс системи частинок зберігається, $\vec{P} = \text{const}$. Нехай ICB K' рухається відносно

системи K зі швидкістю $\vec{V} = \text{const}$. Тоді з рівняння (5.79) випливає, що $\vec{P}' = \text{const}$, оскільки $\vec{P} = \text{const}$ і $M\vec{V} = \text{const}$.

Зауважимо, що рівняння (5.69) і (5.78) можуть бути застосовані і в НСВ, але тоді прикладені до частинок сили інерції необхідно розглядати як зовнішні з огляду на те, що для сил інерції не можна вказати джерела всередині системи частинок, тобто **в НСВ не існує замкнених систем частинок**.

5.3.2. Рух тіла змінної маси

Існує багато випадків, коли маса тіла, що рухається, неперервно змінюється в процесі його руху. Маса більшості транспортних засобів зменшується під час руху за рахунок зменшення запасу палива, причому таке зменшення найбільш істотне для літаків і ракет. Зазвичай маса тіла, що рухається, зменшується за рахунок висипання чи витікання якихось речовин з борту транспортного засобу: наприклад, розсипання добрива чи розпилення хімікатів при сільськогосподарських роботах або виливання води при гасінні лісових пожеж з літаків та гелікоптерів. Проте маса так само може зростати, наприклад, при дозаправці літака під час польоту або при навантаженні платформи сипучим матеріалом під час її руху. У загальному випадку можливе одночасне від'єднання деякої маси та приєднання деякої іншої за величиною маси до тіла, що рухається. При цьому відносні швидкості мас, які приєднуються і від'єднуються від рухомого тіла можуть бути різними як за величиною, так і за напрямком. Наприклад, при насипанні піску з бункера на платформу, що рухається, і одночасному висипанні його через дірку у платформі напрямки руху маси, що приєднується, і маси, що від'єднується, перпендикулярні до напрямку руху тіла (платформи) (рис. 5.12). За нульової відносно тіла швидкості приєднання або від'єднання маси збільшується або зменшується маса тіла, але при цьому разом з цими масами тілу не передається і від нього не забирається імпульс. Під час польоту літака з повітряно-реактивним двигуном приєднання і від'єднання мас відбувається в напрямку, що колінеарний з рухом літака, і зі значними відносними (щодо літака) швидкостями, завдяки чому необхідно враховувати не лише збільшення або зменшення маси тіла (літака) при приєднанні й ві-

д'єднанні мас, але й набуття ним і втрату імпульсу, який переносяться масами, що приєднуються та від'єднуються.

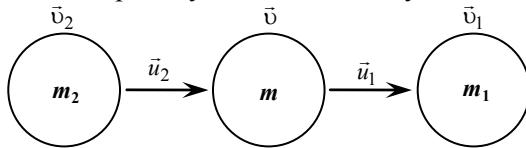


Рис. 5.12. До руху тіла змінної маси

Рівняння Мещерського. Розглянемо загальний випадок руху тіла змінної маси, коли відбувається одночасне приєднання й від'єднання мас з різними ненульовими швидкостями відносно тіла змінної маси (схематичне зображення на рис. 5.12). Рух тіла змінної маси можна розглядати як рух деякої системи частинок як цілого, що описується рівнянням (5.69):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн.}}$$

Обчислимо приріст імпульсу тіла $d\vec{P}$ за елементарний проміжок часу dt . Нехай у момент часу t імпульс тіла $\vec{P} = m(t)\vec{v}(t)$. У момент часу $t + dt$ маса тіла стане $m + dm$, а його швидкість відносно деякої ICB стане $\vec{v} + d\vec{v}$. Okрім цього, треба врахувати зміну імпульсу тіла за елементарний проміжок часу dt , пов'язану з набуттям і втратою імпульсу внаслідок від'єднання та приєднання елементарних мас dm_1 та dm_2 , відповідно, що мають швидкості \vec{v}_1 та \vec{v}_2 відносно ICB: $\vec{v}_1 dm_1 + \vec{v}_2 dm_2$. Таким чином, імпульс тіла в момент часу $t + dt$ буде

$$\vec{P}(t + dt) = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{v}_1 dm_1 + \vec{v}_2 dm_2. \quad (5.81)$$

Оскільки сума маси тіла $m(t)$, маси речовини, яка вже від'єдналася від тіла $m_1(t)$, і маси речовини, яка може приєднатися до тіла в майбутньому $m_2(t)$, у процесі руху зберігається, тобто $m(t) + m_1(t) + m_2(t) = \text{const}$, то існує зв'язок між елементарними приростами цих мас $dm + dm_1 + dm_2 = 0$, звідки знаходимо

$$dm = -dm_1 - dm_2. \quad (5.82)$$

Після підстановки (5.82) до (5.81) та елементарних перетворень, нехтуючи нескінченно малою другого порядку $dmd\vec{v}$, отримаємо

$$\vec{P}(t+dt) = (m - dm_1 - dm_2)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{v}_1 dm_1 + \vec{v}_2 dm_2 = \\ = m\vec{v} + md\vec{v} - dm_1(\vec{v} - \vec{v}_1) - dm_2(\vec{v} - \vec{v}_2). \quad (5.83)$$

Отже, шуканим приростом імпульсу тіла є

$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = m\vec{v} + md\vec{v} + dm_1(\vec{v} - \vec{v}_1) + dm_2(\vec{v} - \vec{v}_2) - m\vec{v} = \\ = md\vec{v} + dm_1(\vec{v} - \vec{v}_1) + dm_2(\vec{v} - \vec{v}_2). \quad (5.84)$$

Після підстановки знайденого приросту до (5.69) одержуємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_1}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_1) + \frac{dm_2}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_2) = \vec{F}^{\text{зовн}}, \quad (5.85)$$

де $(\vec{v}_1 - \vec{v})$ та $(\vec{v}_2 - \vec{v})$ є ніщо інше як швидкості елементарних мас dm_1 та dm_2 , **відносно тіла, що рухається зі швидкістю \vec{v}** , які позначимо як $\vec{u}_1 = (\vec{v}_1 - \vec{v})$ та $\vec{u}_2 = (\vec{v}_2 - \vec{v})$, відповідно.

Наприклад, у випадку літака з повітряно-реактивним двигуном, показаного на рис. 5.13, \vec{v} , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 – це, відповідно, швидкості літака, газів, які щойно від'єдналися від літака, і повітря, яке приєднається до літака, визначені відносно землі, \vec{u}_1 – швидкість витікання газів із сопла реактивного двигуна літака, а \vec{u}_2 – швидкість, з якою повітря набігає на вхідний отвір реактивного двигуна. Тоді (5.85) можна переписати так:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}} - \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 - \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2. \quad (5.86)$$

Це основне диференціальне рівняння поступального руху тіла змінної маси для випадку одночасного приєднання та від'єднання частинок. Його іноді називають *рівнянням Мещерського*. Величину

$$-\frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 - \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2 \quad (5.87)$$

називають *реактивною силою*.

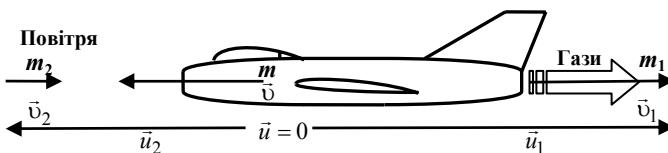


Рис. 5.13. До руху реактивного літака

Хоча рівняння (5.86) за формою збігається з основним рівнянням динаміки частинки (добуток маси тіла, рух якого розглядається, на його прискорення дорівнює сумі всіх сил, що діють на нього з реактивною силою включно), необхідно пам'ятати, що його ліва частина в загальному випадку не може бути подана, як похідна за часом від добутку маси тіла $m(t)$ на його швидкість

$\vec{v}(t)$, оскільки $m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} \neq \frac{d(m(t)\vec{v})}{dt}$, причому саме ця нерівність обумовлює наявність реактивної сили. Сама реактивна сила за своїм змістом є силою реакції, прикладеною до тіла з боку маси, що від'єднується від тіла або приєднується до нього з ненульовою швидкістю, звідки й походить назва сили.

За відсутності реактивної сили рівняння (5.86) набуває вигляду

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн.}}$$

Воно застосовне, наприклад, до руху платформи (рис. 5.14), з якої вільно (з нульовою початковою відносною швидкістю) висипається пісок, тобто $\vec{u}_1 = 0$ і

$$\frac{dm_2}{dt} = 0.$$

Якщо ж з неру-
хомого бункера на платфо-
рму, що рухається в гори-
зонтальному напрямку зі
швидкістю \vec{v} , насипається
пісок (рис. 5.14), тобто гори-
зонтальна складова його
швидкості відносно плат-
форми $\vec{u}_2 = -\vec{v}$, то виникає
реактивна сила, яка діє на
платформу в горизонталь-
ному напрямку, $\frac{dm_2}{dt}\vec{v}$, напрямлена протилежно швидкості плат-
форми \vec{v} , оскільки $\frac{dm_2}{dt} < 0$. Оскільки $dm_2 = -dm$, то рівняння
(5.86) набуває вигляду

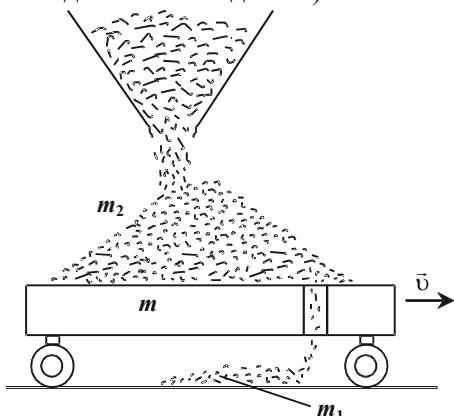


Рис. 5.14. До руху платформи змінної маси

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{гор}}^{\text{зовн}} - \frac{dm}{dt} \vec{v} \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}_{\text{гор}}^{\text{зовн}},$$

де $\vec{F}_{\text{гор}}^{\text{зовн}}$ – горизонтальна складова зовнішніх сил, що діють на платформу.

Як і очікувалось, внесення маси під знак похідної, що привело рівняння руху платформи до вигляду, який повністю ідентичний вигляду основного рівняння динаміки частинки, призвело до зникнення з цього рівняння реактивної сили в явному вигляді внаслідок її "приховування" в похідній $\frac{d(m\vec{v})}{dt}$.

Рівняння (5.86) можна застосувати до широкого кола практично важливих задач, серед яких рух літака з повітряно-реактивним двигуном та рух ракети у вільному просторі, які ми розглянемо далі.

Рух реактивного літака. Різноманітні повітряно-реактивні двигуни, якими оснащено реактивні літаки, тим чи іншим чином приєднують (засмоктують) атмосферне повітря і викидають (відокремлюють) продукти згоряння (рис. 5.13). При цьому можна вважати масу літака сталою, оскільки секундна витрата палива мала порівняно з повною масою літака, тобто $dm = -(dm_1 + dm_2) = 0$, звідки $dm_1 = -dm_2$. Підкреслимо, що завжди $dm_1 > 0$, оскільки маса викинутих газів може лише зростати. Тоді рівняння (5.86) набуває вигляду

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}} - \frac{dm_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \quad (5.88)$$

Для літака, що летить, сума зовнішніх сил $\vec{F}^{\text{зовн}} = m\vec{g} + \vec{R}$, де \vec{R} – сила реакції з боку повітря, яку можна подати як суму підйомної сили та сили лобового опору літака, $\vec{R} = \vec{F}^{\text{під}} + \vec{F}^{\text{лоб.оп.}}$.

Щодо реактивної сили $-\frac{dm_1}{dt} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$, то її величина і напрямок визначаються темпом відділення маси $\frac{dm_1}{dt}$ і величиною й напрямками векторів відносних швидкостей \vec{u}_1 та \vec{u}_2 . У переважній

більшості випадків обидва вектори \vec{u}_1 та \vec{u}_2 напрямлені протилежно вектору швидкості літака \vec{v} (рис. 5.13), причому реактивна сила напрямлена в напрямку руху літака тоді, коли $u_1 > u_2$, тобто швидкість витікання продуктів згоряння більша за швидкість потоку повітря відносно реактивного двигуна.

У турбореактивному двигуні (рис. 5.15, а) повітря надходить до двигуна через вхідний отвір 1 і його тиск підвищується компресором 2, вал якого обертається газовою турбіною 4, встановленою в потоці продуктів згоряння, які розширяються на виході камери згоряння 3 і викидаються з двигуна через сопло 5 зі швидкістю u_2 , яка перевищує швидкість u_1 .

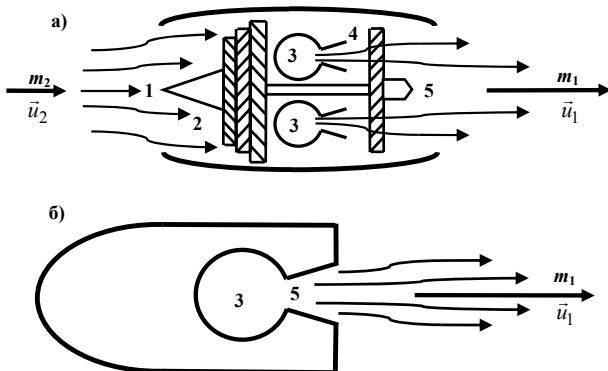


Рис. 5.15. Турбореактивний (а) і ракетний (б) двигуни

Реактивну силу, що виникає під час роботи реактивного або ракетного двигуна називають *силою тяги* і вимірюють у ньютонах або ж у кілограмах сили ($1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н}$), а для великих двигунів – у кілоньютонах або в тонах сили, відповідно. Слід підкреслити, що сила тяги є більш адекватною характеристикою реактивних двигунів, ніж потужність, якою прийнято характеризувати поршневі двигуни внутрішнього згоряння, парові турбіни, електродвигуни тощо. Це пов'язано з тим, що реактивний двигун фактично поєднує в собі функцію власне *двигуна* (електродвигун, парова машина або турбіна, двигун внутрішнього згоряння тощо), який перетворює енергію різних видів (електричну, теплову, хімічну тощо) на механічну енергію (роботу) і ру-

шія (рушійного пристрою, напр. ведучого колеса, гусениці, водяного чи повітряного гвинта (пропелера¹) тощо), який забезпечує перетворення механічної енергії двигуна на роботу з передування транспортного засобу. Так звану статичну силу тяги реактивного двигуна вимірюють на спеціальних вимірювальних стендах, де сила тяги двигуна врівноважується іншою відомою силою (напр., силою пружності динамометра). За таких умов двигун не рухається, і його потужність дорівнює нулю, незалежно від величини його сили тяги.

Натомість у літаках з таким рушієм як повітряний гвинт, двигун, що обертає його, завжди виконує роботу з обертання незалежно від того, рухається літак чи стоїть нерухомо на гальмах або на випробувальному стенді. За рахунок цієї роботи здійснюється прискорення деякої маси повітря, яка проходить через уявну трубу з діаметром, що дорівнює діаметру гвинта, тобто надання цій масі певної швидкості \bar{v} відносно гвинта, а отже, й імпульсу $\bar{p} = m\bar{v}$, унаслідок чого виникає сила тяги $\vec{F} = d\bar{p}/dt$, що визначається імпульсом, наданим потоку повітря за одиницю часу. Ця сила тягне (або штовхає) літальний апарат у напрямку, протилежному швидкості потоку повітря \bar{v} . Таким чином, дія рушійної установки, обладнаної повітряним гвинтом (пропелером), який обертається поршневим або газотурбінним двигуном, щодо механіки нічим не відрізняється від дії реактивного рушія: в обох випадках сила тяги, що рухає літальний апарат, виникає за рахунок прискорення потоку газів відносно літального апарату й являє собою силу реакції, яка передбачається третім законом Ньютона.

Слід зазначити, що одна й та сама сила тяги може виникнути при передачі повітряному потоку деякого імпульсу за одиницю часу $p = m\bar{v}$, але за різних співвідношень маси m і швидкості \bar{v} повітряного потоку прискорюваного пропелером. Оскільки робота, яку виконує повітряний гвинт за одиницю часу дорівнює енергії $m\bar{v}^2/2$, яка передається гвинтом повітряному потоку за одиницю часу, то витрати енергії для створення однієї й тієї са-

¹ Термін *propeller* походить від англ. *propeller* – рушій і в англ. мові застосовується до будь-яких рушіїв, а не лише до повітряних гвинтів (як напр., в укр. або рос. мовах).

мої сили тяги менші, коли більша маса повітря відкидається гвинтом з меншою швидкістю.

Розглянемо простий приклад. При відкиданні гвинтом за 1 с маси повітря 10 кг зі швидкістю $u = 100 \text{ м/с}$ повітряному потоку щосекунди передається імпульс $p = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, що відповідає силі тяги 1000 Н. Таку саму величину сили тяги можна забезпечити при відкиданні гвинтом за 1 с маси повітря 100 кг зі швидкістю $u = 10 \text{ м/с}$. Однак робота, що виконується гвинтом щосекунди, у першому випадку становить $1/2 \cdot 10 \cdot 100^2 = 50 \text{ кДж}$, а у другому – лише $1/2 \cdot 100 \cdot 10^2 = 5 \text{ кДж}$, тобто на порядок менше! Зрозуміло, що за однієї й тієї самої потужності двигуна його статична сила тяги буде тим більша, чим більша маса повітря, що відкидається гвинтом. Тому несучий гвинт гелікоптера, який має забезпечити силу тяги більшу за його вагу, має великий діаметр і порівняно повільно обертається, а діаметри гвинтів тяги літаків значно менші й обертаються зі значно більшою швидкістю.

Потужність, яку розвиває реактивний двигун залежить від його швидкості. Наприклад, двигуни одного з найбільших у світі пасажирських літаків Боїнг-747-200 у горизонтальному польоті на висоті 12,2 км з постійною швидкістю $v = 265 \text{ м/с}$ створюють силу тяги $F = 245 \text{ кН}$, що становить лише чверть від їх сумарної статичної сили тяги. Їх сумарна потужність при цьому становить 65000 кВт або 87000 к. с. Цієї потужності достатньо, щоб компенсувати втрати енергії літака на подолання сили опору повітря. Проте під час набору висоти та розгоні літака двигуни працюють з повною тягою, оскільки виконують додаткову роботу, яка йде на збільшення потенціальної енергії літака в полі тяжіння землі, а також на збільшення його кінетичної енергії.

Рух ракети. Розглянемо рух ракети у вільному просторі, тобто за відсутності зовнішніх сил обумовлених наявністю оточуючого середовища (напр., повітря) або силових полів. Оскільки рух ракети забезпечується викиданням у вільний простір робочого тіла (напр., газоподібних продуктів горіння ракетного палива) з деякою відносною швидкістю \vec{u}_1 (відокремлення маси)

(рис. 5.15, б), а приєднання маси до ракети відсутнє, то в рівнянні Мещерського (5.86) треба покласти $dm_2 = 0$ і врахувати, що $dm_1 = -dm$. Тоді рівняння руху ракети набуде вигляду

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u}, \quad (5.89)$$

де $dm < 0$, оскільки маса ракети зменшується внаслідок відділення від неї робочого тіла. Вектор прискорення, якого набуває ракета, напрямлений протилежно вектору відносної швидкості відділення робочого тіла \vec{u} .

Рівняння руху (5.89) можна записати у вигляді

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{u} \quad (5.90)$$

і проінтегрувати за початкових умов $\vec{v}(0) = 0$, $m(0) = m_0$, вважаючи швидкість витікання газів відносно ракети постійною, $u = \text{const}$:

$$\int_0^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{u} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}, \quad (5.91)$$

звідки

$$\vec{v} = -\vec{u} \ln \frac{m_0}{m}. \quad (5.92)$$

Рівність (5.92) можна спроектувати на напрямок швидкості \vec{v} , а потім переписати у формі

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{u}}. \quad (5.93)$$

Формулу (5.93) іноді називають *формулою Ціолковського*. Вона не містить часу, а поточна швидкість ракети v залежить лише від відношення початкової маси ракети m_0 до її поточної маси m та від швидкості випускання ракетою робочої речовини u . Темп випускання ракетою робочої речовини $-dm/dt$ і його часові варіації не впливають на кінцеву швидкість ракети. Суттєво, що відповідно до формули (5.92) **швидкість ракети v може істотно перевищувати швидкість витікання газів u** . Цей

результат є наслідком поступового, а не миттєвого відокремлення робочого тіла від ракети. На рис. 5.16 наведено графік залежності відношення v/u для ракети від параметра m_0/m , побудований за формулою (5.93). Там же для порівняння наведено графік такої ж залежності для випадку миттєвого викидання робочого тіла при пострілі з безвідкатної гармати.

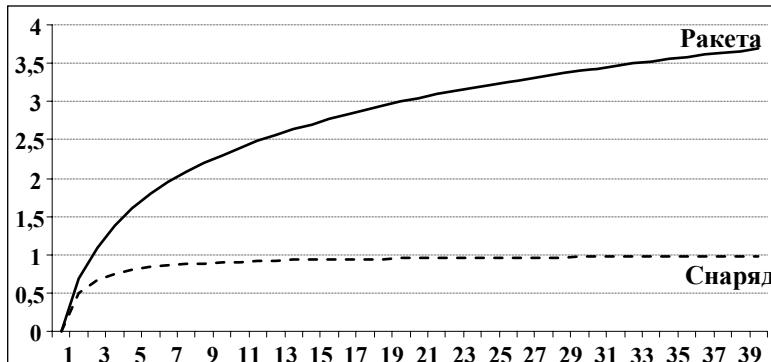


Рис. 5.16. До аналізу формули Ціолковського

Безвідкатна гармата являє собою трубу, відкриту з обох кінців, усередині якої біля одного з кінців розміщується снаряд з пороховим зарядом у своїй задній частині. При практично миттєвому згорянні порохового заряду продукти горіння викидаються з одного кінця труби, а снаряд проходить через всю трубу, яка задає напрямок його польоту. На відміну від звичайної гармати, канал ствола якої закритий з одного кінця, віддача, а отже, і так званий відкат гармати або лише її ствола, практично відсутні.

Якщо вся маса палива у вигляді газів від згоряння порохового заряду відокремлюється від снаряда миттєво зі швидкістю \bar{u} , то за законом збереження імпульсу $\vec{0} = m\vec{v} + (m_0 - m)(\bar{u} + \vec{v})$, де нуль-вектор у лівій частині означає початковий сумарний імпульс системи загальною масою m_0 , що складається із власне снаряду масою m та порохового заряду, розміщеного в його задній частині, які перебувають у спокії в трубі, а права частина є сумарним імпульсом системи після миттєвого згоряння порохового заряду, що складається з імпульсу снаряду $m\vec{v}$,

який набув швидкості \vec{v} відносно ICB, та імпульсу порохових газів з масою $m_0 - m$, які набули швидкості $\vec{u} + \vec{v}$ відносно ICB.

Отже, швидкість снаряду дорівнює

$$\vec{v} = -\vec{u} \left(1 - \frac{m}{m_0}\right). \quad (5.94)$$

Хоча, на перший погляд, із формулами (5.92) випливає можливість досягнення ракетою будь-якої бажаної швидкості, існують прийнятні два головних обмеження: одне, принципове, фізичне, пов'язане з існуванням граничної швидкості c руху матеріальних об'єктів; друге, технічне, яке полягає в тому, що кінцева маса ракети m після згоряння всього палива (витрати всієї робочої речовини) не може дорівнювати нулю.

Табл. 5.1 дає уявлення про те, як швидко зростає відношення m_0/m зі збільшенням швидкості v , якої досягла ракета (наведено безрозмірне відношення v/u). Оскільки навіть за найбільшої можливої для ракетних двигунів на хімічному паливі швидкості витікання газів $u \approx 4,5$ км/с для досягнення другої космічної швидкості 11,2 км/с необхідно забезпечити m_0/m , що дорівнює 12, а практично можна реалізувати ракету з відношенням m_0/m , що не перевищує 10, то вдаються до застосування багатоступеневих ракет. Багатоступенева ракета являє собою декілька ракет, з'єднаних між собою послідовно, таким чином, що вони утворюють єдину конструкцію. Кожний ступінь ракети, починаючи з самого потужного першого, після використання всього палива для прискорення наступних ступенів відокремлюється від них, і таким чином зменшує початкову масу ракетної системи, яка підлягає подальшому прискоренню.

Таблиця 5.1
Зростання відношення початкової маси ракети до її поточної маси m_0/m
зі збільшенням швидкості ракети, якої може досягти ракета

| v/u | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,4 | 0,7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|
| m_0/m | 1,001 | 1,010 | 1,105 | 1,492 | 2,014 | 2,718 | 7,389 | 20,08 | 54,60 | 148,4 | 403,4 | 1097 | 2981 | 8103 | 22026 |

5.4. Умови зміни та закон збереження моменту імпульсу системи частинок

Для з'ясування умов зміни та збереження моменту імпульсу системи частинок знайдемо похідну за часом від моменту імпульсу системи частинок

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i, \quad (5.95)$$

де $\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$ – момент сил, що прикладені до i -ї частинки. Якщо ці сили поділити на внутрішні й зовнішні (див. вираз (5.64)). Отже, праву частину рівняння (5.95) можна подати у вигляді суми моментів внутрішніх і зовнішніх сил, прикладених до частинок системи:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{вн}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{зовн}}. \quad (5.96)$$

Якщо між частинками системи діють центральні сили¹, то їх сумарний момент завжди дорівнює нулю. Покажемо це, застосувавши прийом, аналогічний використаному при обчисленні суми внутрішніх сил у п. 5.2.1 (формула (5.67), а саме, подамо суму моментів внутрішніх сил у вигляді двох одинакових доданків, перепозначимо (поміняємо місцями) індекси сумування, а потім застосуємо третій закон Ньютона:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{вн}} &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{вн}}] = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ki}] = \end{aligned}$$

¹ Серед сил взаємодії, актуальних у класичній механіці, розглянутих у виразі (3.3) нецентральною є лише сила Лоренца, для якої не виконується третій закон Ньютона, але вона діє лише на заряджені частинки і набуває помітної величини за швидкостей руху, які не можна вважати малими порівняно зі швидкістю світла.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,i=1 \\ i \neq k}}^n [\vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}] - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,i=1 \\ i \neq k}}^n [\vec{r}_k \times \vec{F}_{ik}] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n [\vec{r}_{ik} \times \vec{F}_{ik}] = 0.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Безумовна рівність нулю сумарного моменту внутрішніх центральних сил, забезпечується рівністю нулю кожного з векторних добутків $[\vec{r}_{ik} \times \vec{F}_{ik}]$, оскільки центральна сила діє вздовж прямої, яка проходить через частинки, $\vec{r}_{ik} \parallel \vec{F}_{ik}$.

Отже, **момент імпульсу системи частинок змінюється під дією сумарного моменту зовнішніх сил, прикладених до частинок системи:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{зовн}}, \tag{5.98}$$

де $\vec{M}^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{зовн}}$ – сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи.

Таким чином, можна вказати умови зміни та збереження момента імпульсу системи частинок:

- **момент імпульсу системи частинок змінюється, якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, відмінний від нуля;**

- **момент імпульсу системи частинок зберігається (залишається сталим), якщо сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, прикладених до частинок системи дорівнює нулю.**

Рівняння (5.98) можна спроектувати на орти деякої системи координат. Тоді для кожної компоненти α ($\alpha = x, y, z$) буде справедливим рівняння

$$\frac{dL_\alpha}{dt} = M_\alpha^{\text{зовн}}, \quad (5.99)$$

звідки випливає, якщо деяка компонента сумарного моменту зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю, то відповідна компонента моменту вектора імпульсу системи частинок зберігається.

Якщо система частинок замкнена, то сумарний момент зовнішніх сил у правій частині рівняння (5.98) завжди і безумовно дорівнює нулю, оскільки для кожної частинки $\vec{F}_i^{\text{зовн}} \equiv 0$, а отже, і $\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] \equiv 0$. Для замкненої системи частинок справедливий закон збереження моменту імпульсу системи частинок: **момент імпульсу замкненої системи частинок є сталою величиною**:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i(t) = \text{const}. \quad (5.100)$$

Отже, у замкненій системі частинок можливий лише такий рух частинок, при якому сума їх моментів імпульсу залишається сталою, хоча моменти імпульсу окремих частинок системи можуть змінюватися в процесі руху.

Демонстраційний дослід. Дві однакові муфточки можуть ковзати вздовж легкого напрямного стрижня з упорами на кінцях, який розміщено горизонтально з можливістю обертання навколо вертикальної осі, що проходить через його середину (рис. 5.17). Спочатку муфточки розміщують поблизу осі обертання і зв'язують ниткою. Після розкручування стрижня з муфточками шляхом прикладання до нього сили в го-

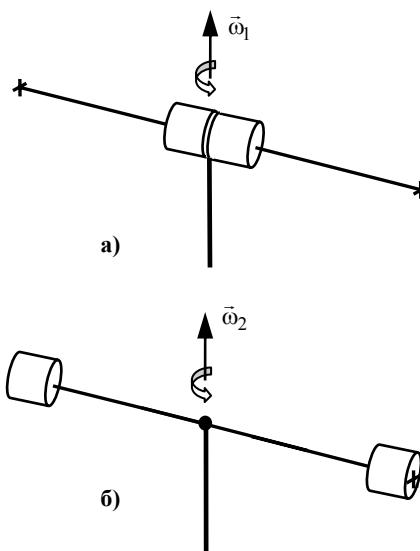


Рис. 5.17. До закону збереження моменту імпульсу

ризонтальній площині (тобто створення моменту зовнішніх сил паралельного осі обертання) система продовжує обертатися з деякою сталою кутовою швидкістю. Потім нитку перепалюють, муфточки розлітаються до упорів на кінцях стрижня, а кутова швидкість обертання різко зменшується.

Пояснення. Вважатимемо, що маса стрижня набагато менша від маси муфточок. Тоді момент імпульсу системи після надання їй обертання визначається лише рухом муфточок: $\vec{L} = m_1[\vec{r}_1 \times \vec{v}_1] + m_2[\vec{r}_2 \times \vec{v}_2]$ або, оскільки $m_2 = m_1 = m$, $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1 = \vec{r}$, $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$, то $\vec{L} = 2m[\vec{r} \times \vec{v}]$. Цей момент напрямлений уздовж осі обертання системи. Проекція моментів, прикладених до муфточок з боку стрижня зовнішніх сил на напрямок осі обертання дорівнює нулю. Отже, величина проекції моменту імпульсу системи двох муфточок на напрямок осі обертання також є сталою величиною, $L = 2mr\omega$. Після перепалювання нитки маємо $L' = 2mr'\omega'$, але, оскільки перепалювання нитки не створює моменту зовнішніх сил, то проекція моменту імпульсу на напрямок осі обертання залишається сталою, $L' = L$. Враховуючи, що $\omega = r\omega$ і $\omega' = r'\omega'$, маємо $r^2\omega = (r')^2\omega'$. Оскільки $r' > r$, то $\omega' < \omega$.

5.4.1. Власний момент імпульсу системи частинок

Момент імпульсу частинки за означенням залежить від вибіру точки, відносно якої його визначають. Те саме стосується і моменту імпульсу системи частинок, оскільки він є сумою моментів імпульсів окремих частинок. Нехай момент імпульсу системи частинок, визначений відносно деякої точки O , є

$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$, а момент імпульсу тієї ж системи частинок, визначений відносно деякої точки O' , є $\vec{L}' = \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \times \vec{p}_i]$. Оскільки

$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{a}$, де \vec{a} – радіус-вектор точки O' відносно точки O (рис. 5.18), то момент імпульсу \vec{L} можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n [(\vec{r}'_i + \vec{a}) \times \vec{p}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}'_i \times \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^n [\vec{a} \times \vec{p}_i] = \vec{L}' + \left[\vec{a} \times \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right]\end{aligned}\quad (5.101)$$

або

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{a} \times \vec{P}]. \quad (5.102)$$

Таким чином, моменти імпульсу \vec{L} та \vec{L}' , визначені в **одній і тій самій** системі відліку відносно **різних** точок, відрізняються

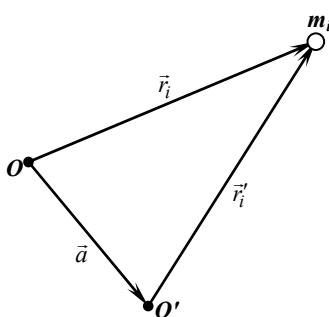


Рис. 5.18. До визначення власного моменту імпульсу системи частинок

на величину $[\vec{a} \times \vec{P}]$, де \vec{P} – імпульс системи частинок. Якщо в якісь системі відліку $\vec{P} = 0$, тоді завжди $\vec{L} = \vec{L}'$, тобто момент імпульсу системи частинок не залежить від вибору точки, відносно якої його визначають. Як відомо, повний імпульс системи частинок \vec{P} **завжди дорівнює нулю в СЦМ**, відносно якої система частинок у цілому пе-ребуває у спокої. Отже, у СЦМ **момент імпульсу системи частинок не залежить від вибору точки, відносно якої його визначають.** Момент імпульсу, визначений у СЦМ називають **власним моментом імпульсу системи частинок** $\vec{\tilde{L}}$.

Момент сили також залежить від того, відносно якої точки його визначають. Діючи так само, як це було зроблено для вектора моменту імпульсу системи частинок, можна показати (впр. 5.6), що зв'язок між сумарними моментами $\vec{M}^{\text{зовн}}$ та $\vec{M}'^{\text{зовн}}$ зовнішніх сил, прикладених до частинок системи і визначених відносно різних точок O та O' , виражається формулою

$$\vec{M}^{\text{зовн}} = \vec{M}'^{\text{зовн}} + [\vec{a} \times \vec{F}^{\text{зовн}}], \quad (5.103)$$

де $\vec{F}^{\text{зовн}}$ – результуюча зовнішніх сил, прикладених до частинок системи. Якщо $\vec{F}^{\text{зовн}} = 0$, то сумарний момент зовнішніх сил не залежить від вибору точки, відносно якої його визначають. Ця властивість моменту сил широко застосовується при розв'язанні практичних задач, оскільки дає можливість зручно обирати точки прикладання зовнішніх сил.

Підкреслимо, що з умови $\vec{F}^{\text{зовн}} = 0$ (рівність нулю результуючої зовнішніх сил, прикладених до частинок системи) не випливає рівність нулю сумарного моменту $\vec{M}^{\text{зовн}}$ цих самих зовнішніх сил.

5.4.2. Зв'язок між повним моментом імпульсу системи частинок та її власним моментом імпульсу

Нехай \vec{L} – момент імпульсу системи частинок, визначений відносно деякої точки O довільної системи відліку K . Оскільки власний момент імпульсу \vec{L} не залежить від вибору точки \tilde{O} в СЦМ, відносно якої його визначають, останню можна обрати в центрі мас системи частинок – точці C . Тоді шляхом заміни у формулі (5.102) радіус-вектора \vec{a} на \vec{R}_C одразу отримуємо зв'язок між \vec{L} та \tilde{L} у вигляді

$$\vec{L} = \tilde{L} + [\vec{R}_C \times \vec{P}]. \quad (5.104)$$

Отже, момент імпульсу системи частинок \vec{L} , визначений у деякій системі відліку K , можна подати як суму її власного момента імпульсу \tilde{L} і момента імпульсу $[\vec{R}_C \times \vec{P}]$, пов'язаного з рухом системи частинок як цілого відносно цієї системи відліку. Зрозуміло, що при переході від однієї системи відліку до іншої або при зміні положення точки, відносно якої визначено момент імпульсу системи частинок \vec{L} , останній змінюється лише за рахунок доданка $[\vec{R}_C \times \vec{P}]$, пов'язаного з рухом системи частинок як цілого за незмінного власного момента імпульсу \tilde{L} .

5.4.3. Рівняння моментів у СЦМ

Рівняння моментів у СЦМ має такі самі вигляд, як і в ICB:

$$\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \tilde{\vec{M}}^{\text{зовн}},$$

але, оскільки центр мас системи частинок у загальному випадку може рухатись прискорено, то до зовнішніх сил, що впливають на сумарний момент зовнішніх сил, слід додати сили інерції, тобто записати

$$\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \sum_{i=1}^n [\tilde{\vec{r}}_i \times \vec{F}_i^{\text{в3}}] + \sum_{i=1}^n [\tilde{\vec{r}}_i \times \vec{F}_i^{\text{ін}}]. \quad (5.105)$$

Оскільки СЦМ за означенням не обертається, то під час її прискореного руху можливе виникнення лише поступальних сил інерції, що діють на кожну частинку системи:

$$\vec{F}_i^{\text{ін}} = -m_i \ddot{\vec{R}}_C, \quad (5.106)$$

де $\ddot{\vec{R}}_C$ – прискорення центра мас відносно ICB. Тоді сумарний момент сил інерції відносно центра інерції C дорівнюватиме

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{M}}^{\text{ін}} &= \sum_{i=1}^n [\tilde{\vec{r}}_i \times (-m_i \ddot{\vec{R}}_C)] = - \left[\sum_{i=1}^n m_i \tilde{\vec{r}}_i \times \ddot{\vec{R}}_C \right] = \\ &= M \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \tilde{\vec{r}}_i \times \ddot{\vec{R}}_C \right] = M[\tilde{\vec{R}}_C \times \ddot{\vec{R}}_C] \equiv 0, \end{aligned} \quad (5.107)$$

де враховано, що радіус-вектор центра мас, визначений відносно центра мас, $\tilde{\vec{R}}_C \equiv 0$. Отже,

$$\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \tilde{\vec{M}}_C^{\text{в3}}, \quad (5.108)$$

тобто власний момент імпульсу системи частинок змінюється лише під дією сумарного моменту всіх зовнішніх сил взаємодії, прикладених до частинок системи.

5.5. Умови зміни та збереження енергії системи частинок

Дослідимо зміну з часом кінетичної енергії системи частинок, означену формулою (5.62). Елементарний приріст кінетичної енергії системи за елементарний проміжок часу dt дорівнює

$$dT_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^n dT_i = \sum_{i=1}^n \delta A_i. \quad (5.109)$$

Розділимо спочатку сили, що прикладені до кожної (i -ї) частинки системи на внутрішні та зовнішні $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{вн}} + \vec{F}_i^{\text{зовн}}$, а внутрішні сили $\vec{F}_i^{\text{вн}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik}$ розділимо на консервативні та неконсервативні (сторонні), тобто $\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} + \vec{F}_{ik}^{\text{неконс}}$. Тоді приріст кінетичної енергії системи частинок можна подати як суму елементарних робіт зазначених груп сил:

$$dT_{\text{сист}} = \delta A_{\text{сист}}^{\text{вн.конс}} + A_{\text{сист}}^{\text{вн.неконс}} + A_{\text{сист}}^{\text{зовн}}. \quad (5.110)$$

Розглянемо послідовно кожен доданок правої частини (5.110). Робота внутрішніх консервативних сил є

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{сист}}^{\text{вн.конс}} &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} \cdot d\vec{r}_i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} \cdot d\vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \vec{F}_{ki}^{\text{конс}} \cdot d\vec{r}_k \quad (5.111) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \vec{F}_{ik}^{\text{конс}} \cdot d\vec{r}_{ik}, \end{aligned}$$

де було використано відомий штучний прийом подання суми у вигляді півсум, переставлено індекси в другій півсумі, застосо-

вано третій закон Ньютона $\vec{F}_{ik}^{\text{конс}} = -\vec{F}_{ki}^{\text{конс}}$ і введено позначення $\vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$. Кожен доданок $\vec{F}_{ik}^{\text{конс}} d\vec{r}_{ik}$ у (5.111) можна розглядати як елементарну роботу з переміщення i -ї частинки в потенціальному полі, що створює k -та частинка, і його можна подати як зміну потенціальної енергії i -ї частинки в потенціальному полі k -ї частинки:

$$\vec{F}_{ik}^{\text{конс}} d\vec{r}_{ik} = \delta A_{ik}^{\text{конс}} = -dU_{ik}. \quad (5.112)$$

Тоді сумарну елементарну роботу внутрішніх консервативних сил можна подати так:

$$\delta A_{\text{сист}}^{\text{вн.конс}} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n U_{ik} = -d \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n U_{ik} \right) = -dU_{\text{сист}}, \quad (5.113)$$

де через $U_{ik}(\vec{r}_{ik})$ позначено потенціальні енергії так званих парних взаємодій частинок системи між собою і введено позначення

$$U_{\text{сист}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n U_{ik}. \quad (5.114)$$

Величина $U_{\text{сист}}$ називається *внутрішньою*, або *власною потенціальною енергією* системи частинок.

Наведене представлення $U_{\text{сист}}$ широко вживане, але не єдино можливе. Внутрішню потенціальну енергію системи частинок можна подати, наприклад, у вигляді суми потенціальних енергій усіх і кожної частинки системи в потенціальному полі всіх інших частинок. Покажемо це на прикладі системи із 3 частинок, для якої:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^3 U_{ik} &= \frac{1}{2}(U_{12} + U_{13} + U_{21} + U_{23} + U_{31} + U_{32}) = \\ &= \frac{1}{2}(U_{12} + U_{13}) + \frac{1}{2}(U_{21} + U_{23}) + \frac{1}{2}(U_{31} + U_{32}) = \\ &= \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{1}{2}U_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 U_i, \end{aligned}$$

де через U_i позначено потенціальну енергію i -ї частинки в потенціальному полі всіх інших частинок. Останній вираз легко узагальнюється на систему, що містить n частинок:

$$U_{\text{сист}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n U_i, \quad \text{де} \quad U_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n U_k. \quad (5.115)$$

Із вищевикладеного випливає, що **внутрішня потенціальна енергія системи частинок залежить винятково від їх взаємного розташування** або, як іноді кажуть, від **конфігурації** системи частинок, причому кожній конфігурації відповідає певне значення внутрішньої потенціальної енергії $U_{\text{сист}}$, яка є функцією положення всіх частинок системи $U_{\text{сист}} = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n)$. Це добре видно з її подання у формі суми потенціальних енергій парних взаємодій частинок (формула (5.114)), де кожний доданок є функцією взаємного розташування двох частинок системи $U_{ik} = U(\vec{r}_{ik})$. Робота всіх внутрішніх консервативних сил при зміні конфігурації системи частинок дорівнює зумовленому цією зміною приросту власної потенціальної енергії системи частинок, узятому зі знаком мінус:

$$A^{\text{вн.конс}} = -(U_{\text{сист}2} - U_{\text{сист}1}), \quad (5.116)$$

де енергія $U_{\text{сист}1}$ відповідає початковій, а енергія $U_{\text{сист}2}$ – кінцевій конфігурації системи частинок.

Перепишемо (5.110) з урахуванням (5.113):

$$dT_{\text{сист}} = -dU_{\text{сист}} + \delta A^{\text{вн.неконс}} + \delta A^{\text{зовн}}, \quad (5.117)$$

або

$$d(T_{\text{сист}} + U_{\text{сист}}) = \delta A^{\text{вн.неконс}} + \delta A^{\text{зовн}}. \quad (5.118)$$

Величину

$$E_{\text{сист}} = T_{\text{сист}} + U_{\text{сист}} \quad (5.119)$$

називають **повною механічною енергією системи частинок**. Повна механічна енергія системи частинок є функцією механічного стану системи частинок, оскільки в кожний момент часу вона залежить від положень і швидкостей всіх частинок системи¹:

¹ Саме тому поняття повної механічної енергії системи частинок відіграє винятково важливу роль як у класичній, так і квантовій механіці.

$$E_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n U_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (5.120)$$

а швидкість, з якою відбувається зміна повної енергії, визначається сумарною потужністю, тобто сумаю потужностей цих сил:

$$\frac{dE}{dt} = N^{\text{вн.неконс}} + N^{\text{зовн}}. \quad (5.121)$$

Ці два останні рівняння виражають собою умову зміни повної механічної енергії системи частинок: **повна механічна енергія системи частинок може змінюватись лише за рахунок роботи (або потужності) внутрішніх сторонніх (неконсервативних) і зовнішніх сил.**

Із рівностей (5.120) і (5.121) випливає також і умова збереження повної механічної енергії системи частинок: **повна механічна енергія системи частинок зберігається, якщо сумарна робота (або потужність) зовнішніх сил та внутрішніх сторонніх (неконсервативних) сил дорівнює нулю.**

Для замкненої системи частинок зовнішні сили відсутні, отже, $\delta A^{\text{зовн}} = 0$ і її повна механічна енергія може змінюватися лише за рахунок роботи внутрішніх неконсервативних (сторонніх) сил:

$$dE_{\text{сист}} = \delta A^{\text{вн.неконс}}. \quad (5.122)$$

За наявності внутрішніх неконсервативних (сторонніх) сил повна механічна енергія замкненої системи частинок може зменшуватися, збільшуватися або залишатися постійною залежно від знака сумарної роботи всіх внутрішніх неконсервативних сил. Наприклад, під час руху ракети в пустоті повна механічна енергія замкненої системи ракета–викинуті гази зростає за рахунок перетворення при згорянні палива так званої хімічної енергії на теплову з подальшим перетворенням теплової енергії на кінетичну енергію продуктів згоряння, коли вони прискорюються при витіканні через сопло з камери згоряння, і на роботу з прискоренням ракети. Іншим прикладом може бути зростання повної механічної енергії осколків снаряду після його вибуху.

Серед внутрішніх неконсервативних сил можна виділити так звані дисипативні сили, наприклад, сили тертя, потужність яких і

відповідно робота $\delta A^{\text{вн.дис}}$ завжди від'ємні¹. Будь-яку дисипативну силу можна подати у вигляді $\vec{F}^{\text{дис}} = -k(v)\vec{v}$, причому коефіцієнт $k(v)$ є додатно визначеною величиною, $k(v) > 0$. Тоді потужність дисипативної сили: $N = \vec{F}^{\text{дис}}\vec{v} = -k(v)\vec{v}\vec{v} = -k(v)v^2 < 0$. Внутрішні дисипативні сили для будь-якої пари частинок замкненої системи частинок відповідно до третього закону Ньютона рівні за модулем і протилежно напрямлені: $\vec{F}_{ki}^{\text{дис}} = -\vec{F}_{ik}^{\text{дис}}$. Їх сумарна потужність завжди від'ємна:

$$N^{\text{вн.дис}} = \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik}^{\text{вн.дис}}\vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik}^{\text{вн.дис}}(\vec{v}_i - \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik}^{\text{вн.дис}}\vec{v}_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n k(v_{ik})\vec{v}_{ik}\vec{v}_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n k(v_{ik})v_{ik}^2 < 0. \quad (5.123)$$

Рівність (5.122) можна подати у вигляді

$$dE_{\text{сист}} = \delta A^{\text{вн.дис}} + \delta A^{\text{вн.стор}}, \quad (5.124)$$

де $\delta A^{\text{вн.дис}}$ – робота внутрішніх дисипативних сил, а $\delta A^{\text{вн.стор}}$ – робота всіх інших внутрішніх сторонніх сил. Із (5.124) випливає умова збереження повної механічної енергії замкненої системи частинок: **повна механічна енергія замкненої системи частинок зберігається, якщо втрати енергії на роботу проти внутрішніх дисипативних сил компенсиуються роботою інших внутрішніх сторонніх сил.**

За наявності в замкненій системі частинок лише внутрішніх дисипативних сил її повна механічна енергія може тільки зменшуватися з часом, оскільки

$$\frac{dE}{dt} = N^{\text{вн.дис}} < 0. \quad (5.125)$$

Для замкненої системи частинок, у якій відсутні сторонні сили, справджується закон збереження повної механічної енергії замкненої системи частинок: **повна механічна енергія замкненої системи**

¹ Зменшення кінетичної енергії руху тіла свого часу трактувалося як її "зникнення". Латиною *dicipatio* – дисипація, звідки і походить термін "дисипативний".

ми частинок, між якими діють лише консервативні сили, зберігається. Таку систему частинок називають **консервативною**¹. Тоді закон збереження повної механічної енергії замкненої системи частинок можна сформулювати так: **повна механічна енергія замкненої консервативної системи частинок зберігається.**

Для консервативної системи частинок справедливі рівності:

$$E_{\text{сист}} = T_{\text{сист}}(t) + U_{\text{сист}}(t) = \text{const}, \quad (5.126)$$

які свідчать про те, що в такій системі з часом може змінюватись як кінетична, так і потенціальна енергія системи частинок, але лише так, щоб їх сума залишалася сталою, тобто завжди $dT_{\text{сист}} = -dU_{\text{сист}}$. Більше того, можуть змінюватись швидкості і положення всіх частинок системи, тобто її механічний стан, але лише так, щоб її повна механічна енергія залишалася сталою:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2(t)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n U_{ij}(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)) = \text{const}. \quad (5.127)$$

Поняття замкненої консервативної системи в механіці є певною ідеалізацією, оскільки під час механічного руху макроскопічних тіл завжди наявні **сторонні дисипативні сили тертя (опору), які можна істотно зменшити, але не усунути повністю.**

Дуже гарним наближенням до замкненої консервативної системи є Сонячна система, яка існує декілька мільярдів років, а рух планет у ній відбувається без помітних змін.

Зазначимо, що зменшення механічної енергії системи частинок не означає зникнення енергії взагалі, а лише її перехід в інші види енергії, тобто універсальний закон збереження енергії при цьому не порушується – при зменшенні повної механічної енергії замкненої системи частинок завжди виникає еквівалентна кількість енергії інших видів: теплової, променистої тощо. Наприклад, прискорений відносний рух заряджених частинок призводить до збудження електромагнітних хвиль, унаслідок чого кінетична енергія руху заряджених частинок переходить в енергію електромагнітного поля. При гальмуванні транспортних засобів кінетична енергія переходить у теплову завдяки від'ємній

¹ Від лат. *conservo* – зберігаю. Звідси походять і назви сил: консервативні – це ті, за наявності яких енергія зберігається, а неконсервативні – це ті, за наявності яких енергія не зберігається.

роботі дисипативних сил тертя або опору. Те саме відбувається у вимірювальних приладах, що мають рухомі елементи (стрілку, рамку тощо): при гасінні небажаних коливань цих елементів за допомогою різного роду демпферів, які переводять кінетичну енергію рухомого елементу в тепло за рахунок дисипативних сил внутрішнього тертя в повітрі або рідині. При ударі двох більярдних куль частина їх кінетичної енергії переходить у тепло (іде на їх нагрівання), а деяка мала частина переходить в енергію акустичних хвиль, завдяки чому ми чуємо звук удару.

Зауважимо, що **повна механічна енергія системи** $E_{\text{система}}$ у загальному випадку не є адитивною величиною, на відміну, наприклад, від кінетичної енергії. Адитивність E спостерігається лише для систем частинок, що не взаємодіють між собою. Наприклад, якщо енергія двох систем 1 і 2, що не взаємодіють між собою, E_1 та E_2 , то повна механічна енергія системи, що складається із цих двох систем, які ми тепер розглядаємо як підсистеми, становитиме $E_{1+2} = E_1 + E_2$. Проте, якщо підсистеми 1 і 2 (тобто частинки, що належать до цих підсистем) взаємодіють між собою, то адитивність повних енергій порушується, оскільки повну енергію системи можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} E_{1+2} &= T + U = T_1 + T_2 + U = \\ &= T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + U_{12} = E_1 + E_2 + U_{12}, \end{aligned} \quad (5.128)$$

де доданок U_{12} являє собою потенціальну енергію взаємодії частинок підсистеми 1 з частинками підсистеми 2. У загальному випадку N підсистем

$$E = \sum_{k=1}^N E_k + U_{\text{взаємодії}}, \quad (5.129)$$

де $U_{\text{взаємодії}}$ – енергія взаємодії підсистем між собою. Отже, повна механічна енергія не є адитивною величиною внаслідок неадитивності потенціальної енергії.

5.5.1. Енергія незамкненої системи частинок

Реалізувати замкнену систему макроскопічних тіл у земних умовах неможливо, оскільки неможливо ізолювати її від гравітаційного поля Землі. Тому велике практичне значення має розгляд

повної механічної енергії незамкненої системи частинок. Обмежимось важливим випадком незамкненої системи частинок, між якими поряд з внутрішніми консервативними діють внутрішні дисипативні сили. Швидкість зміни повної механічної енергії такої системи частинок визначається потужністю внутрішніх дисипативних і зовнішніх сил, прикладених до частинок системи:

$$\frac{dE}{dt} = N^{\text{вн.дис}} + N^{\text{зовн.}}. \quad (5.130)$$

Із рівняння (5.130) випливає, що повна механічна енергія такої системи частинок зберігається, якщо сумарна потужність внутрішніх дисипативних і зовнішніх сил, прикладених до частинок системи, дорівнює нулю. При цьому втрати енергії системою внаслідок дії внутрішніх дисипативних сил компенсуються за рахунок дії зовнішніх сил. Наприклад, вільні коливання гравітаційного маятника припиняються через деякий час унаслідок опору повітря, але, якщо втрати його енергії поновлювати за рахунок роботи зовнішніх сил (напр., періодичного підштовхування), то коливання триватимуть так довго, як довго триватиме підштовхування. Саме завдяки цьому підтримується тривалий рух багатьох пристрій і механізмів, наприклад, механічних та електромеханічних годинників, незаважаючи на існування дисипативних сил тертя (опору).

Розглянемо тепер випадок руху незамкненої системи частинок за відсутності внутрішніх дисипативних сил. Зовнішні сили, прикладені до кожної (i -ї) частинки, поділимо на консервативні та неконсервативні:

$$\vec{F}_i^{\text{зовн.}} = \vec{F}_i^{\text{конс}} + \vec{F}_i^{\text{неконс}}. \quad (5.131)$$

За означенням консервативної сили

$$\vec{F}_i^{\text{конс}} = -\text{grad}_i U', \quad (5.132)$$

де

$$U'(x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \dots, \\ \dots, x_i(t), y_i(t), z_i(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t), t)$$

– функція потенціальної енергії поля зовнішніх потенціальних сил, що в загальному випадку може залежати від часу як в явному вигляді, так і неявно через координати частинок, які залежать від часу, а нижній індекс i біля значка оператора градієнта означає, що градієнт обчислюється в місці розташування i -ї частинки.

Обчислимо сумарну потужність зовнішніх сил:

$$\begin{aligned}
 N^{\text{зовн}} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}} \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i (-\text{grad}_i U' + \vec{F}_i^{\text{неконс}}) = \\
 &= -\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i \vec{i} + \dot{y}_i \vec{j} + \dot{z}_i \vec{k}) \left(\frac{\partial U'}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial U'}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial U'}{\partial z_i} \vec{k} \right) + \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{F}_i^{\text{неконс}} = \\
 &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U'}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right) + \sum_{i=1}^n \dot{v}_i \vec{F}_i^{\text{неконс}} = \\
 &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U'}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right) - \frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial U'}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{F}_i^{\text{неконс}} = \\
 &= -\frac{dU'}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{F}_i^{\text{неконс}}. \tag{5.133}
 \end{aligned}$$

При спрощенні правої частини цього виразу до неї було додано вираз $-\frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial U'}{\partial t}$, тобто рівний нулю, після чого введено позначення так званої *повної похідної* від функції U' за часом:

$$\frac{dU'}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U'}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right), \tag{5.134}$$

яка фактично є відношенням лінійної частини елементарного приросту функції dU' за елементарний проміжок часу dt до величини цього проміжку. У цей пріоріст дає внесок як явна залежність потенціальної енергії U' від часу t , так і її зміна за рахунок зміни конфігурації системи при переміщеннях частинок у зовнішньому потенціальному полі. Тепер рівняння (5.134) можна записати так:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dU'}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{F}_i^{\text{неконс}}, \tag{5.135}$$

або

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial t} + N^{\text{зовн.неконс}}, \tag{5.136}$$

де введено позначення

$$E' = T + U + U', \tag{5.137}$$

а $N^{\text{зовн.неконс}}$ означає потужність зовнішніх неконсервативних сил, $N^{\text{зовн.неконс}} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \vec{F}_i^{\text{неконс}}$.

Величину E' називають *повною механічною енергією системи частинок у зовнішньому потенціальному полі*. Вона складається з кінетичної енергії T , внутрішньої потенціальної енергії U та потенціальної енергії системи частинок у зовнішньому потенціальному полі U' .

Із рівняння (5.136) випливає, що повна механічна енергія системи частинок у зовнішньому потенціальному полі U' зберігається, якщо зовнішнє потенціальне поле стаціонарне, тобто не залежить в явному вигляді від часу, $\frac{\partial U'}{\partial t} = 0$, а потужність зовнішніх неконсервативних сил дорівнює нулю, $N^{\text{зовн.неконс}} = 0$.

Потужність зовнішніх неконсервативних сил дорівнює нулю у двох випадках: коли ці сили відсутні, $\vec{F}_i^{\text{неконс}} \equiv 0$ або, коли для цих сил завжди $\vec{v}_i \perp \vec{F}_i^{\text{неконс}}$. Останній випадок справедливий для так званих сил *нульової потужності* або, як їх ще називають, *гіроскопічних сил*¹. Прикладом такої сили може бути сила Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ або сила Коріоліса $\vec{F}_K = -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}]$, оскільки в обох випадках $\vec{F} \perp \vec{v}$.

У загальному випадку, коли до частинок системи прикладені поряд із зовнішніми неконсервативними і внутрішні неконсервативні сили, а якщо рух розглядається відносно НСВ, то і сили інерції, які, як зазначалось, необхідно розглядати як зовнішні, то умова зміни повної механічної енергії системи частинок в НСВ набирає вигляду

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{dU'}{dt} + N^{\text{вн.неконс}} + N^{\text{зовн.неконс}} + N^{\text{iн}}, \quad (5.138)$$

де $N^{\text{iн}}$ – потужність сил інерції.

Повну механічну енергію системи частинок можна подати у вигляді

¹ Щодо походження такої назви див. підрозд. 6.7.

$$E' = \tilde{E} + \frac{MV_C^2}{2} + U', \quad (5.139)$$

тобто як суму внутрішньої (власної) енергії системи частинок $\tilde{E} = \tilde{T} + \tilde{U}$, яка складається з внутрішньої (власної) кінетичної енергії системи частинок $\tilde{T} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \tilde{v}_i^2}{2}$, що визначається швидкостями руху частинок відносно центра мас, та її внутрішньої (власної) потенціальної енергії $\tilde{U} \equiv U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n U_{ij}$, що визначається взаємним розташуванням частинок системи, та повної механічної енергії руху системи частинок як цілого, яка складається з кінетичної енергії поступального руху системи частинок $\frac{MV_C^2}{2}$ як цілого та її потенціальної енергії U' у зовнішньому потенціальному полі.

Політ футбольного м'яча у зовнішньому потенціальному полі сили тяжіння можемо розглядати як рух системи частинок, що складається з оболонки м'яча та молекул газу всередині неї. Якщо нас цікавить лише рух м'яча як цілого, то цілком достатньо розглядати лише повну механічну енергію руху системи частинок як цілого, тобто частинки з масою $M = m_{\text{обол}} + m_{\text{газ}}$, що рухається зі швидкістю V_C і має потенціальну енергію Mgh , тобто енергію $E_{\text{поступ}} = \frac{MV_C^2}{2} + Mgh$. Якщо удар по м'ячу був "кручений", то енергія пов'язана з обертовим рухом оболонки навколо осі, що проходить через центр мас м'яча, належить до внутрішньої енергії системи частинок разом з внутрішньою енергією газу, що заповнює оболонку.

Таким чином, подання повної механічної енергії системи частинок у вигляді (5.139) дозволяє перекинуті надійний місток між оповитим певною таємницею поняттям "внутрішньої енергії", широко вживаним у молекулярній фізиці, і механічними величинами.

5.6. Застосування законів збереження

5.6.1. Одновимірний фінітний рух

При одновимірному русі механічний стан частинки визначається лише однією змінною (координатою), що залежить від часу. Основні риси одновимірного руху обговорювались у п. 5.2.4, зокрема можливість фінітного руху, коли частинка рухається в обмеженій області $x_2 > x > x_1$ (рис. 5.8). Покажемо, що одновимірний фінітний рух частинки в потенціальному полі за відсутності дисипативних сил завжди періодичний. Із виразу для повної механічної енергії частинки (5.59), яка за вказаних умов зберігається, можна визначити її швидкість залежно від x (впр. 5.7):

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (5.140)$$

Із (5.140) знаходимо

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}, \quad (5.141)$$

звідки інтегруванням лівої частини від t_1 до t_2 , а правої – від x_1 до x_2 знаходимо проміжок часу $t_{12} = t_2 - t_1$, за який частинка переміщується від x_1 до x_2 :

$$t_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (5.142)$$

Зрозуміло, що $t_{21} = t_{12}$, а повний період, за який частинка пройде від x_1 до x_2 і повернеться назад становить $T = t_{12} + t_{21} = 2t_{12}$.

Отже, одновимірний фінітний рух завжди буде періодичним з періодом

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}, \quad (5.143)$$

що залежить від маси m частинки та від величини ділянки $[x_1, x_2]$, якою обмежено фінітний рух. Остання залежить від повної енергії частинки E та вигляду функції $U(x)$.

5.6.2. Коливання частинки поблизу мінімуму потенціальної енергії

Розглянемо так звані малі коливання частинки при фінітному русі частинки поблизу мінімуму потенціальної енергії. Розвинемо в ряд Тейлора функцію потенціальної енергії $U(x)$ поблизу точки її мінімуму x_0 :

$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots \quad (5.144)$$

Оскільки $\frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0$, то першим відмінним від нуля доданком у

правій частині (5.144) буде доданок, квадратичний за зміщенням $(x - x_0)$ з мінімуму потенціальної енергії (з положення рівноваги). Вважаючи коливання малими, нехтуємо всіма доданками більш високих степенів і вираз (5.144) набуває вигляду

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2. \quad (5.145)$$

На рис. 5.19 суцільними кривими подано графіки функції потенціальної енергії $U(x)$ та відповідної до неї сили $F(x)$, а штриховими лініями – їх апроксимації в наближенні малих коливань. Відповідно, за малих коливань для потенціальної енергії $U(x)$ маємо параболу з вершиною в точці мінімуму, а для сили $F(x)$ – пряму, що перетинає вісь абсцис у точці мінімуму (у положенні рівноваги). Перенесемо для зручності початок відліку в точку x_0 мінімуму функції $U(x)$. Тоді в точці мінімуму $x_0 = 0$ і (5.145) можна переписати у вигляді

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=0} \cdot x^2 = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.146)$$

де введено позначення $k = \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=0}$ і покладено $U(0) = 0$, тобто потенціальна енергія відраховується від її значення в мінімумі.

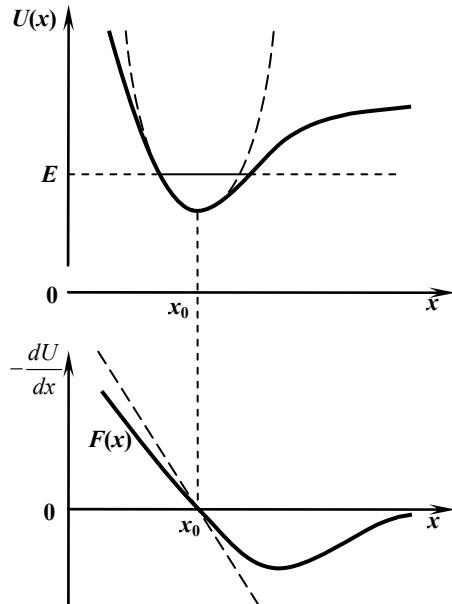


Рис. 5.19. До малих коливань частинки поблизу мінімуму потенціальної енергії

Отже, за малих зміщень від положення рівноваги (мінімуму потенціальної енергії) потенціальна енергія частинки залежить від зміщення квадратично:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.147)$$

а сила, що прикладена до частинки, дорівнює

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -kx, \quad (5.148)$$

тобто залежить від зміщення лінійно.

Таким чином, рух частинки поблизу мінімуму потенціальної енергії є рухом під дією квазіпружної сили, який (див. розд. 3) є гармонічним рухом. Період такого руху можна знайти безпосередньо із загального виразу для періоду фінітного руху (5.143):

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{kx^2}{2})}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \frac{kx^2}{2E} = \sin^2 z \\ x \sqrt{\frac{k}{2E}} = \sin z \\ dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos z dz \end{array} \right| = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos z dz}{\sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \sin^2 z}} = \quad (5.149) \\
 &= 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz = 2\pi\sqrt{m/k}.
 \end{aligned}$$

Знайдений вираз для періоду малих коливань узгоджується з виразом для циклічної частоти малих коливань частинки під дією квазіпружної сили $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, який отримано в розд. 3 розв'язуванням відповідного рівняння руху (див. формулу (3.43)). У наближенні малих коливань поблизу положення рівноваги їх період не залежить від амплітуди коливання. Застосовуючи цю формулу, треба завжди пам'ятати, що вона справедлива лише для цього наближення.

Наближення малих коливань частинки поблизу положення рівноваги, якому відповідає гармонічний рух $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ (завдяки цьому його іноді називають гармонічним наближенням) відіграє важливу роль у механіці та фізиці, оскільки величезна кількість фізичних систем має положення рівноваги в мінімумі потенціальної енергії, яку поблизу мінімуму завжди можна апроксимувати параболою.

Добираючи спеціальну форму $U(x)$, можна отримати так звані *ізохронні коливання* поблизу мінімуму потенціальної енергії, тобто такі, період яких не залежить від величини відхилення.

5.6.3. Стационарна течія ідеальної рідини

Застосуємо рівняння (5.136) до розгляду ламінарної стационарної течії ідеальної рідини в полі сили тяжіння Землі. Виділимо в рідині трубку току, як показано на рис. 5.20, а в ній деякий об'єм рідини, що міститься між двома поперечними перерізами, площи яких s_1 та s_2 у положенні 1 (заштриховано з нахилом вправо). Нехай за деякий проміжок часу Δt маса рідини, що містилась у цьому об'ємі, переміщується вдовж трубки току в положення 2 (заштриховано з нахилом вліво). Зовнішнє однорідне поле тяжіння стационарне,

а отже, $\frac{\partial U'}{\partial t} = 0$. Рідина ідеальна, тобто: 1) у ній відсутні внутрішні дисипативні сили (сили внутрішнього тертя, які обумовлюють в'язкість); 2) вона нестислива, тобто відстань між її частинками не змінюється, а отже, не змінюється і її внутрішня потенціальна енергія, $U = \text{const}$. У цьому випадку рівняння (5.136) для розглядуваної кількості рідини набуває вигляду

$$\frac{dT + U + U'}{dt} = N^{\text{зовн.неконс.}}. \quad (5.150)$$

Зміну повної механічної енергії в полі сили тяжіння розглядуваної кількості рідини за проміжок часу Δt можна подати у вигляді

$$\Delta E' = E'_2 - E'_1 = A_{12}, \quad (5.151)$$

де E'_1 та E'_2 – повні механічні енергії розглядуваної кількості рідини в положеннях 1 та 2, відповідно; A_{12} – робота зовнішніх

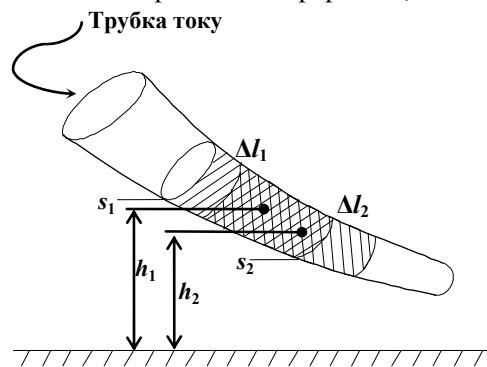


Рис. 5. 20. Стационарна течія ідеальної рідини

неконсервативних сил з переміщення цієї кількості рідини із положення 1 у положення 2. Із рис. 5.20 видно, що цю зміну енергії можна знайти як різницю енергій e_2 та e_1 малих об'ємів рідини $s_2\Delta l_2$ та $s_1\Delta l_1$, оскільки ділянка трубки току, заштрихована перехресно, спільна для обох положень. Переміщення розглядуваної кількості рідини вздовж трубки току відбувається під дією сторонніх сил гідростатичного тиску, причому робота тих з них, що діють на бокові стінки трубки току, дорівнює нулю, оскільки ці сили перпендикулярні напрямку переміщення рідини в трубці току. Таким чином,

$$\Delta E' = e_2 - e_1 = p_1 s_1 \Delta l_1 - p_2 s_2 \Delta l_2. \quad (5.152)$$

Отже, з урахуванням умови неперервності течії рідини, що не стискається, $s_1\Delta l_1 = s_2\Delta l_2 = \Delta V$, можна записати

$$\left[\frac{(\Delta V \rho) v_2^2}{2} + (\Delta V \rho) g h_2 \right] - \left[\frac{(\Delta V \rho) v_1^2}{2} + (\Delta V \rho) g h_1 \right] =, \quad (5.153)$$

$$= (p_1 - p_2) \Delta V$$

або остаточно:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1. \quad (5.154)$$

Отже, для будь-якого якого перерізу трубки току

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (5.155)$$

Це рівняння називається *рівнянням Бернуллі*.

5.6.4. Зіткнення частинок

Застосуємо закони збереження до задачі про зіткнення частинок. Під зіткненням двох частинок розуміють такий процес, що відбувається унаслідок їхньої взаємодії за відсутності впливу інших матеріальних об'єктів, результатом якого є зміна механічного стану цих частинок, зокрема їх швидкостей порівняно з їх початковими швидкостями, які вони мали до зіткнення.

Нехай дві частинки з масами m_1 і m_2 , які спочатку перебувають на великій відстані одна від одної (рис. 5.21), мають шви-

дкості \vec{v}_1 та \vec{v}_2 , відповідно. Під великою відстанню ми розуміємо таку, коли взаємодія між частинками настільки мала, що нею можна нехтувати і рух частинок вважати вільним, а отже, прямолінійним і рівномірним. При цьому повна механічна енергія системи частинок визначається винятково їх кінетичними енергіями. При зменшенні відстані між частинками їх взаємодія зростає, а також зростає сила, що прикладена до кожної із частинок з боку іншої частинки, внаслідок чого виникає прискорення кожної частинки, тобто вектори швидкостей змінюються за модулем та напрямком. Залежно від того, які сили діють між частинками – відштовхування чи притягання, траєкторії частинок на ділянці простору, де відстань між ними мінімальна, проходять по-різному, як схематично зображенено на рис. 5.21 (відповідно, (а) і (б)). Якщо спостерігати процес зіткнення з великої відстані, то ця різниця непомітна і створюється враження, начебто частинки, що вдарились одна об одну, розлітаються зі швидкостями \vec{v}'_1 та \vec{v}'_2 . Зауважимо, що зіткнення частинок не обов'язково означає їх безпосередній контакт, як це відбувається, наприклад, при зіткненні більядрних куль або інших макроскопічних об'єктів. У таких випадках ідеється про так звану *контактну* взаємодію тіл, яка на мікроскопічному рівні здебільшого зводиться до електромагнітної. Задача про зіткнення (розсіяння) частинок полягає у відшуканні швидкостей частинок \vec{v}'_1 та \vec{v}'_2 після зіткнення, тобто після того, як частинки знову розійдуться на значну відстань, на якій взаємодією між ними можна знову нехтувати і їх швидкості усталяться.

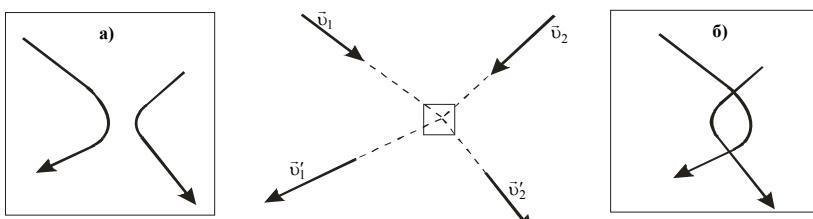


Рис. 5.21. Зіткнення (розсіяння)частинок

Для замкненої системи частинок завжди і, зокрема, при зіткненні двох частинок виконуються закони збереження імпульсу

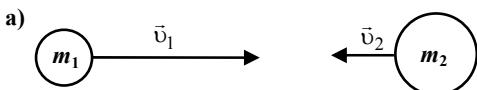
та збереження моменту імпульсу (тут і надалі штрихами позначено величини після зіткнення):

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2, \quad (5.156)$$

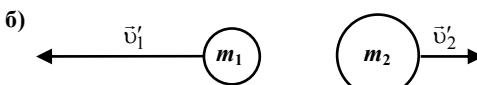
$$[\vec{r}_1 \times \vec{p}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2] = [\vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1] + [\vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2]. \quad (5.157)$$

Щодо повної механічної енергії системи E , то при зіткненні частинок вона зберігається не завжди. Розрізняють *абсолютно пружні зіткнення*, за яких повна механічна енергія E зберігається, тобто повна механічна енергія системи після зіткнення E' дорівнює повній механічній енергії цієї системи до зіткнення, $E' = E$, та *непружні зіткнення*, при яких повна механічна енергія не зберігається, $E' \neq E$, здебільше зменшується $E' < E$. Причинами такого зменшення можуть бути, наприклад, збільшення внутрішньої енергії частинок у процесі зіткнення або перетворення механічної енергії на інші види енергії, наприклад, на енергію електромагнітного поля при зіткненні заряджених частинок.

Лобові зіткнення частинок. Найпростішим випадком зіткнень двох частинок є так звані *лобові зіткнення*, коли траекторії обох



частинок до і після зіткнення лежать на одній прямій (рис. 5.22, а і б).



Розглянемо спочатку граничний випадок непруженого лобового зіткнення, так зване **абсолютно непружне** лобове

зіткнення. Для його демонстрації використовують дві пластилінові попередньо підігріті кулі, підвішені на довгих нитках так, щоб їх центри були розташовані на однаковій висоті. Одну із куль відхиляють від положення рівноваги (рис. 5.23, а) і відпускають. Після зіткнення кулі злипаються і далі рухаються разом (рис. 5.23, б)). Скористаємося законом збереження імпульсу

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}', \quad (5.158)$$

де враховано, що за означенням абсолютно непруженого зіткнення обидві частинки після зіткнення рухаються разом, тобто з однаковою швидкістю \vec{v}' , яку знаходимо із (5.158):

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.159)$$

Знайдена швидкість \vec{v}' дорівнює швидкості центра мас системи \vec{V}_C , яка для замкненої системи частинок залишається сталою. Отже, внутрішній механічний рух системи частинок внаслідок абсолютно непружного зіткнення припиняється.

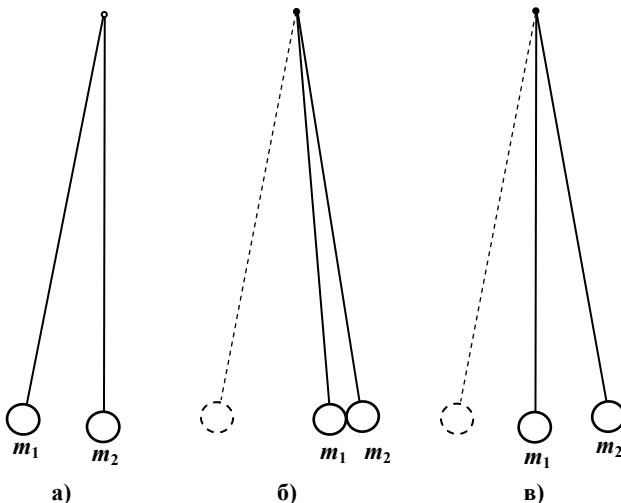


Рис. 5.23. Демонстраційний дослід з абсолютно непружного та абсолютно пружного зіткнення куль

Повні механічні енергії системи двох частинок до і після зіткнення дорівнюють, відповідно:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad (5.160)$$

та

$$\begin{aligned} E' &= \frac{(m_1 + m_2)(\vec{v}')^2}{2} = \frac{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

Втрата (зменшення) повної механічної енергії системи частинок при абсолютно непружному зіткненні набуває вигляду

$$\begin{aligned}\Delta E = E - E' &= \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= \frac{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2) - m_1^2 v_1^2 - m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= \frac{m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (5.162)\end{aligned}$$

Ця втрата повної механічної енергії пропорційна квадрату відносної швидкості частинок $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ і дорівнює початковій власній кінетичній енергії системи частинок до зіткнення (впр. 5.8).

При лобовому абсолютно непружному зіткненні частинок з однаковими масами $m_1 = m_2 = m$, що рухаються назустріч одна одній з однаковими за модулем швидкостями $v_1 = v_2 = v$, втрата повної механічної енергії становить

$$\Delta E = \frac{m^2 (2v)^2}{2 \cdot 2m} = mv^2, \quad (5.163)$$

тобто вона дорівнює початковій повній механічній енергії системи частинок, унаслідок чого рух частинок припиняється повністю, що цілком узгоджується з експериментом.

Для випадку **абсолютно пружного лобового зіткнення** виконуються як закон збереження імпульсу, так і закон збереження енергії:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2, \quad (5.164)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2}. \quad (5.165)$$

Перепишемо рівняння (5.164) і (5.165) у вигляді

$$m_1 (\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2), \quad (5.166)$$

$$m_1 (v'_1^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v'_2^2). \quad (5.167)$$

Рівняння (5.167) можна подати як

$$m_1 (\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) (\vec{v}'_1 + \vec{v}_1) = m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) (\vec{v}_2 + \vec{v}'_2) \quad (5.168)$$

і з урахуванням рівності (5.166) далі спростити до вигляду

$$\vec{v}'_1 + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'_2. \quad (5.169)$$

Таким чином, задача звелається до системи двох простих лінійних рівнянь (5.164) і (5.169) з двома невідомими \vec{v}'_1 та \vec{v}'_2 . Із рівняння (5.169) знаходимо

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (5.170)$$

і після підстановки (5.170) до рівняння (5.164) отримуємо

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2, \quad (5.171)$$

звідки визначаємо швидкість \vec{v}'_1 :

$$\vec{v}'_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2) \vec{v}_1}{m_1 + m_2} = -\vec{v}_1 + 2 \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.172)$$

Підстановка \vec{v}'_1 з (5.172) до (5.170) дає \vec{v}'_2 :

$$\vec{v}'_2 = -\vec{v}_2 + 2 \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.173)$$

Зауважимо, що \vec{v}'_1 та \vec{v}'_2 з урахуванням (5.172) і (5.173) можуть бути записані у вигляді $\vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 + 2\vec{V}_C$ та $\vec{v}'_2 = -\vec{v}_2 + 2\vec{V}_C$.

Розглянемо важливі частинні випадки.

1. Нехай маси частинок однакові, $m_1 = m_2$. Тоді маємо $\vec{v}'_1 = -\vec{v}_2$ і $\vec{v}'_2 = -\vec{v}_1$, тобто при абсолютно пружному лобовому ударі частинки з однаковими масами обмінюються швидкостями. Цей факт відомий гравцям у більярд: після лобового зіткнення більярдної кулі, що рухалася, з кулею, що перебувала у стані спокою на більярдному столі, куля, що рухалася, зупиняється, натомість куля, що була нерухомою, починає рух у тому самому напрямку і з тією самою швидкістю, що й перша куля до зіткнення.

У демонстраційному досліді дві однакові більярдні кулі підвішують на довгих нитках, потім одну з них відхиляють на невеликий кут α (рис. 5.23, а) і відпускають без надання їй початкової швидкості. Після лобового зіткнення ця куля зупиняється, причому нитка, на якій вона висить, спрямована строго по вертикалі. Натомість друга куля набуває швидкості і відхиляється на той самий кут α , на який було відхилено першу кулю (рис. 5.23, в). Потім друга куля повертається до положення рівноваги, стикається з першою кулею і зупиняється, а перша куля відхиляється майже на той самий кут α , після чого процес бага-

торазово повторюється¹. Через деякий час стає помітним поступове зменшення максимального кута відхилення аж до повного припинення руху обох куль.

2. Якщо легка частинка m_1 налітає зі швидкістю \vec{v}_1 на нерухому набагато важчу частинку m_2 ($m_1 \ll m_2$, $\vec{v}_2 = 0$), то у граничному випадку $m_1/m_2 \rightarrow 0$ маємо

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \lim_{m_1/m_2 \rightarrow 0} \left(-\vec{v}_1 + 2 \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) = -\vec{v}_1 + \\ &+ 2\vec{v}_1 \lim_{m_1/m_2 \rightarrow 0} \left(\frac{m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} \right) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_1 \cdot 0 = -\vec{v}_1\end{aligned}\quad (5.174)$$

та аналогічно

$$\vec{v}'_2 = \lim_{m_1/m_2 \rightarrow 0} \left(0 + 2 \frac{m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} \vec{v}_1 \right) = 2 \cdot 0 \cdot \vec{v}_2 = 0,\quad (5.175)$$

тобто важка частинка m_2 залишається нерухомою, а легка частинка m_1 "відбивається" від неї: напрямок її швидкості змінюється на протилежний, а модуль зберігається. Це відповідає поширеному на практиці випадку абсолютно пружного зіткнення легкого тіла з масивною нерухомою стінкою, підлогою тощо. Закон збереження імпульсу (5.164) при цьому має вигляд $m_1 \vec{v}_1 = -m_1 \vec{v}_1 + \vec{p}'_2$, з якого знаходимо приріст імпульсу частинки m_1 : $\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = -m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1 = -2m_1 \vec{v}_1$. Цей додатковий імпульс $-2m_1 \vec{v}_1$ частинка m_1 отримує від масивної нерухомої перешкоди (частинки) m_2 .

3. Якщо ж, навпаки, на нерухому легку частинку m_2 ($\vec{v}_2 = 0$) налітає зі швидкістю \vec{v}_1 важка частинка m_1 , причому $m_1 \gg m_2$, то у граничному випадку $m_2/m_1 \rightarrow 0$:

¹ Сильне враження справляє перехоплення демонстратором однієї з куль, коли вона досягає найбільшого відхилення: друга куля продовжує висіти нерухомо. Коли демонстратор відпускає затриману відхилену кулю процес поновлюється.

$$\vec{v}'_1 = \lim_{m_2/m_1 \rightarrow 0} \left(-\vec{v}_1 + 2 \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \right) = -\vec{v}_1 +$$

$$+ 2\vec{v}_1 \lim_{m_2/m_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + m_2/m_1} \right) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_1 = \vec{v}_1$$
(5.176)

та аналогічно

$$\vec{v}'_2 = \lim_{m_2/m_1 \rightarrow 0} \left(0 + 2 \frac{1}{1 + m_2/m_1} \vec{v}_1 \right) = 2\vec{v}_1,$$
(5.177)

тобто важка частинка m_1 продовжує рух з початковою швидкістю \vec{v}_1 , а легка частинка m_2 "відскакує" від неї з відносною швидкістю \vec{v}_1 , і набуває швидкості $\vec{v} = 2\vec{v}_1$.

Нелобові зіткнення частинок. **Діаграми імпульсів.** Розглянемо тепер більш складний випадок нелобових зіткнень, коли до зіткнення частинки рухаються по траєкторіях, що не лежать на одній прямій. На підставі закону збереження імпульсу для замкненої системи двох частинок (5.156) можна побудувати векторну діаграму (рис. 5.24), відповідно до якої сума векторів імпульсів частинок як до зіткнення $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, так і після зіткнення $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ дорівнює вектору імпульсу системи \vec{P} (вектор \overline{AB}). Вектори \vec{p}'_1 та \vec{p}'_2 лежать в одній площині з вектором \vec{P}

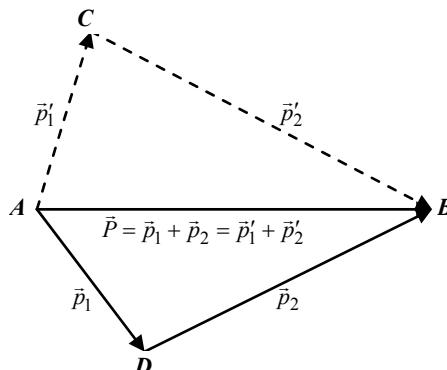


Рис. 5.24. До побудови векторних діаграм

(ΔABD). Так само в одній площині з вектором \vec{P} лежать і вектори \vec{p}_1 та \vec{p}_2 (ΔABD). Ці дві площини перетинаються по лінії AB . Оскільки нас цікавлять вектори \vec{p}_1 та \vec{p}_2 , то надалі будемо зображати лише діаграму імпульсів ABC .

Обмежимось випадком абсолютно пружних зіткнень. При цьому точка C так само, як і точка D (рис. 5.24), не може бути

віддалена як завгодно далеко від точок A і B , оскільки максимальна абсолютно величина векторів імпульсів частинок обмежена законом збереження енергії (5.165), який можна подати у вигляді

$$E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'_1^2}{2m_1} + \frac{p'_2^2}{2m_2} = E'. \quad (5.178)$$

Для кількісного уточнення цього обмеження подамо швидкості частинок відносно деякої ICB, яку будемо називати надалі *лабораторною*, як суму швидкості центра мас \vec{V}_C системи частинок відносно цієї ICB та швидкостей частинок відносно СЦМ:

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}_1, \quad \vec{v}_2 = \vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}_2, \quad \vec{v}'_1 = \vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}'_1, \quad \vec{v}'_2 = \vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}'_2, \quad (5.179)$$

яке відповідає аналогічному співвідношенню для радіус-векторів частинок (див. рис. 5.11)

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_C + \tilde{\vec{r}}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_C + \tilde{\vec{r}}_2, \quad \vec{r}'_1 = \vec{R}_C + \tilde{\vec{r}}'_1, \quad \vec{r}'_2 = \vec{R}_C + \tilde{\vec{r}}'_2, \quad (5.180)$$

де величини, визначені відносно СЦМ, позначено знаком тильда "˜".

Як було показано (див. приклад і формули (5.76а) та (5.76б)),

$$\tilde{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \text{ і } \tilde{\vec{r}}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \text{ де } M = m_1 + m_2, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

$$\text{Аналогічно, } \tilde{\vec{r}}'_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}' \text{ і } \tilde{\vec{r}}'_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}'.$$

Отже, для швидкостей частинок відносно СЦМ до і після зіткнення можна записати

$$\tilde{\vec{v}}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}, \quad \tilde{\vec{v}}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}, \quad \tilde{\vec{v}}'_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}', \quad \tilde{\vec{v}}'_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}', \quad (5.181)$$

де \vec{v} – вектор відносної швидкості частинок до зіткнення, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, а \vec{v}' – вектор відносної швидкості частинок після зіткнення.

У розглядуваній задачі закони збереження імпульсу та енергії замкненої системи двох частинок у СЦМ мають вигляд

$$\tilde{\vec{p}}_1 + \tilde{\vec{p}}_2 = \tilde{\vec{p}}'_1 + \tilde{\vec{p}}'_2 = 0 \quad (5.182)$$

та

$$\tilde{E} = \frac{m_1 \tilde{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \tilde{v}'_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{v}'_2^2}{2} = \tilde{E}'. \quad (5.183)$$

Обчислимо \tilde{E} та \tilde{E}' , використовуючи швидкості з (5.181):

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{M} \vec{v} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(-\frac{m_1}{M} \vec{v} \right)^2 = \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{M^2} v^2 + \\ &+ \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{M^2} v^2 = \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{M^2} v^2 = \frac{m_1 m_2}{2M^2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{\mu v^2}{2}\end{aligned}\quad (5.184)$$

та аналогічно

$$\tilde{E}' = \frac{\mu v'_2}{2}, \quad (5.185)$$

де введено так звану зведену масу двох частинок m_1 та m_2 :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.186)$$

Оскільки $\tilde{E}' = \tilde{E}$, то $v' = v$, тобто відносні швидкості частинок до і після зіткнення однакові за модулем¹. Це означає, що вектор відносної швидкості частинок після зіткнення можна подати в СЦМ у вигляді $\vec{v}' = v \vec{n}_0$, де \vec{n}_0 – одиничний вектор, напрямок якого наразі невідомий, тобто результатом зіткнення в СЦМ є поворот вектора відносної швидкості. На цій підставі і з урахуванням (5.179) та (5.181) можна записати

$$\vec{v}'_1 = \vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}'_1 = \frac{\vec{P}}{M} + \frac{m_2}{M} v \vec{n}_0, \quad (5.187)$$

або

$$\vec{v}'_1 = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} + \frac{m_2}{M} v \vec{n}_0 \quad (5.188)$$

та аналогічно

$$\vec{v}'_2 = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} - \frac{m_1}{M} v \vec{n}_0. \quad (5.189)$$

Помножимо рівняння (5.188) і (5.189) на m_1 і m_2 , відповідно:

$$m_1 \vec{v}'_1 = m_1 \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} + \frac{m_1 m_2}{M} v \vec{n}_0, \quad (5.190)$$

¹ Зауважимо, що відносні швидкості частинок не залежать від вибору системи відліку, зокрема вони однакові і в лабораторній системі відліку і в СЦМ: тому ми їх записуємо без знака тильда ("~").

$$m_2 \vec{v}'_2 = m_2 \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} - \frac{m_2 m_1}{M} \upsilon \vec{n}_0, \quad (5.191)$$

звідки отримаємо вирази для імпульсів частинок після зіткнення

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + \mu \upsilon \vec{n}_0, \quad (5.192)$$

$$\vec{p}'_2 = \frac{m_2}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - \mu \upsilon \vec{n}_0, \quad (5.193)$$

Отриманий результат можна уточнити за допомогою відповідної векторної діаграми імпульсів. Для цього на діаграмі імпульсів ABC з рис. 5.24, відтворений на рис. 5.25, знайдемо точку O , яка ділить вектор \overrightarrow{AB} у відношенні m_1/m_2 . Тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, де $\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ і $\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$, а геометричним місцем кінців можливих векторів \vec{p}'_1 , що мають початок у точці O , є коло, описане кінцем вектора $\mu \upsilon \vec{n}_0$, початок якого лежить у точці O . На рис. 5.25 показано одне з можливих положень вектора $\mu \upsilon \vec{n}_0$, кінець якого лежить у точці C на згаданому колі. Вектори $\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} + \mu \upsilon \vec{n}_0 = \vec{p}'_1$ та $\overrightarrow{CB} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} - \mu \upsilon \vec{n}_0 = \vec{p}'_2$ репрезентують, відповідно, імпульси частинок m_1 та m_2 після зіткнення, визначені в лабораторній системі відліку.

Визначимо радіус кола, на якому лежать кінці векторів \vec{p}'_1 та початки векторів \vec{p}'_2 . Із виразу (5.175) знайдемо відносну швидкість $\upsilon = \sqrt{2\tilde{E}/\mu}$ і, помноживши її на μ , отримаємо радіус

$$\mu \upsilon = \sqrt{2\mu \tilde{E}}, \quad (5.193)$$

який залежить від повної механічної енергії системи частинок. Його величина є кількісною мірою обмеження, яке накладає закон збереження енергії на допустимі величини імпульсів частинок після зіткнення. За заданих m_1 , m_2 , \vec{v}_1 і \vec{v}_2 радіус кола та його положення відносно точок A і B залишаються незмінними, а точка C може займати будь-яке положення на цьому колі. Цим, власне, і вичерпуються відомості про рух частинок після зіткнення, які мо-

жна отримати з одних лише законів збереження імпульсу та енергії. Щодо напрямку вектора \vec{n}_0 , то він залежить як від закону взаємодії частинок, так і від взаємного розташування їх початкових (до зіткнення) прямолінійних траєкторій. Попри невизначеність напрямку вектора \vec{n}_0 векторні діаграми імпульсів дозволяють дослідити загальні важливі властивості зіткнень.

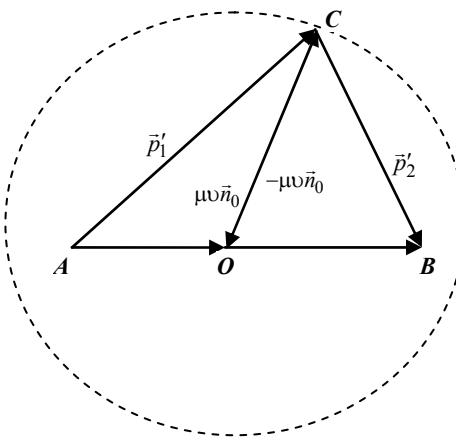


Рис. 5.25. Діаграма імпульсів

Розглянемо поширеній випадок, коли одна із частинок, наприклад, друга (m_2), до зіткнення нерухома. Повний імпульс системи частинок дорівнює імпульсу першої частинки \vec{p}_1 ¹. Тоді вектор $\overrightarrow{OB} = \frac{m_2 m_1}{M} \vec{v}_1 = \mu \vec{v}_1 = \mu \vec{v}$, оскільки в цьому випадку вектор відносної швидкості до зіткнення збігається з вектором швидкості першої частинки $\vec{v} = \vec{v}_1$. Тобто $|\overrightarrow{OB}| = \mu v = |\overrightarrow{OC}|$ і, таким чином, точка B також лежить на колі з радіусом μv і центром у точці O (рис. 5.26, а).

¹ Відповідним вибором системи відліку до цього випадку можна звести будь-яку задачу про зіткнення двох частинок.

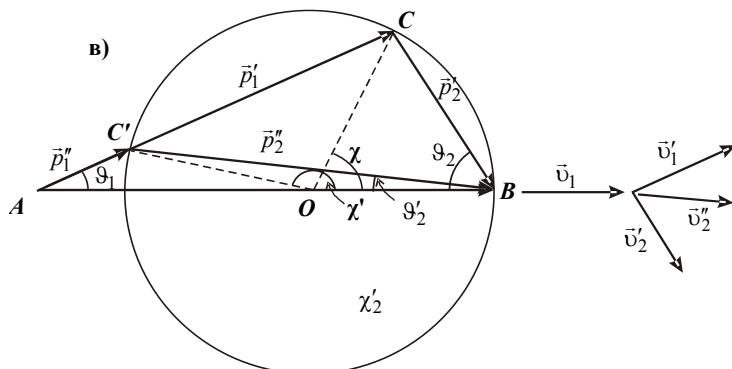
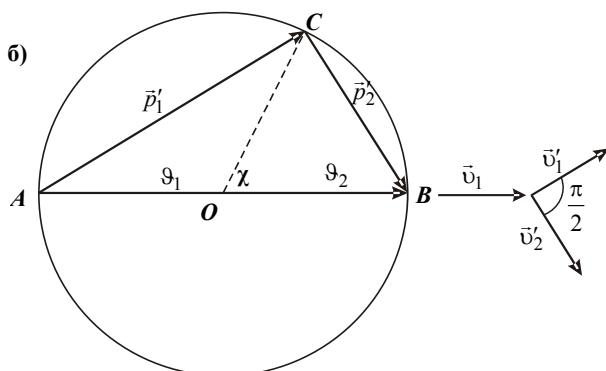
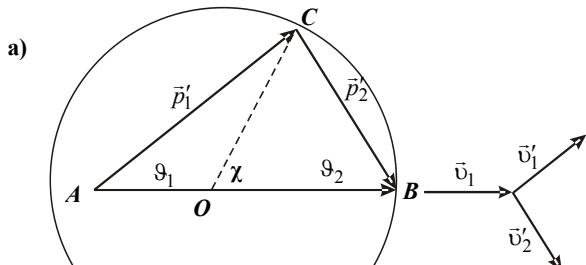


Рис. 5.26. Діаграми імпульсів для різних співвідношень мас частинок

Частинка з масою m_1 після зіткнення відхиляється від початкового напрямку на кут ϑ_1 . Друга частинка з масою m_2 після

зіткнення рухається в напрямку, що утворює кут ϑ_2 з початковим напрямком руху першої частинки. Ці кути називають *кутами розсіяння* першої та другої частинок у лабораторній системі відліку. Кут χ називають *кутом розсіяння в СЦМ*: саме на цей кут повертається вектор відносної швидкості частинок унаслідок зіткнення. Зв'язок між кутом розсіяння в СЦМ χ і кутами розсіяння частинок у лабораторній системі відліку можна знайти з рис. 5.26, а. Наприклад, для кута ϑ_1 :

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \chi}. \quad (5.194)$$

Із діаграми розсіяння для частинок однакової маси $m_2 = m_1$ (рис. 5.26, б) безпосередньо випливає, що після зіткнення частинки завжди будуть рухатись у взаємно перпендикулярних напрямках, оскільки вписаний кут $\angle ACB$, що спирається на діаметр кола, завжди прямий, то $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$. Із діаграми розсіяння для випадку, коли важча частинка m_1 налітає на частинку меншої маси m_2 , яка перебуває у спокої (рис. 5.26, в), видно, що одному й тому самому куту розсіяння ϑ_1 першої частинки в загальному випадку можуть відповідати два різних кути розсіяння в СЦМ, χ та χ' відповідно різного положення точок C та C' . Цим двом кутам, χ і χ' , відповідають два різних кути розсіяння другої частинки ϑ_2 та ϑ'_2 у лабораторній системі відліку і, відповідно, – два різні вектори імпульсу \vec{p}'_2 та \vec{p}''_2 . Максимальний кут розсіяння ϑ_1 частинки m_1 досягається, коли відрізок \overline{AC} направлений по дотичній до кола (точки C і C' збігаються). При цьому трикутник ΔACO стає прямокутним, оскільки сторона \overline{OC} є радіусом кола, що перпендикулярний до дотичної \overline{AC} . Тоді для максимального кута розсіяння ϑ_1 маємо

$$\sin \vartheta_{\max} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AO}} = \frac{\mu v}{\frac{m_1}{m_1} m_1 v} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.195)$$

Використовуючи векторні діаграми, зручно аналізувати обмін енергією між частинками під час зіткнення. Як приклад обчислимо енергію, яку дістане після зіткнення частинка m_2 , що перебувала у спокої. Її зручно подати у вигляді

$$E'_2 = \frac{(p'_2)^2}{2m_2}. \quad (5.196)$$

На підставі (5.193) одержимо

$$\begin{aligned} (p'_2)^2 &= \left(\frac{m_2}{M} \vec{p}_1 - \mu v \vec{n}_0 \right) \left(\frac{m_2}{M} \vec{p}_1 - \mu v \vec{n}_0 \right) = \\ &= \frac{m_2^2}{M^2} p_1^2 + (\mu v)^2 - 2\mu v \frac{m_2}{M} \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_0 = \\ &= \frac{m_2^2}{M^2} p_1^2 + \mu^2 v^2 - 2\mu v \frac{m_2}{M} p_1 \cos(\vec{p}_1 \wedge \vec{n}_0) = \\ &= \frac{m_2^2}{M^2} m_1^2 v^2 + \frac{m_1^2 m_2^2}{M^2} v^2 - 2 \frac{m_1 m_2}{M} \frac{m_2}{M} m_1 v^2 \cos \chi = \\ &= 2 \frac{m_1^2 m_2^2}{M^2} v^2 (1 - \cos \chi) = 4 \frac{m_1^2 m_2^2}{M^2} v^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Отже,

$$E'_2 = 2 \frac{m_1^2 m_2}{M^2} v^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}. \quad (5.198)$$

Бачимо, що максимальна енергія, яка може бути передана частинці m_2 , що перебувала у спокої, буде досягатися при лобово-му зіткненні ($\chi = \pi$) частинок однакової маси $m_1 = m_2$, тобто

$$E'_{2\max} = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.199)$$

При цьому частинка m_1 , що налітає на нерухому частинку m_2 , після зіткнення зупиняється, а частинка m_2 набуває імпульсу і кінетичної енергії першої частинки. Цей результат повністю узгоджується як з отриманим безпосередньо для лобового зіткнення, так і з експериментом.

Контрольні запитання та вправи

5.1. Довести твердження: якщо робота сил деякого поля з переміщення частинки по довільній замкненій траєкторії дорівнює нулю, то робота цих сил з переміщення частинки між двома довільними точками поля не залежить від форми траєкторії.

5.2. Обчислити потенціальну енергію частинки:

а) у полі квазіпружної сили $\vec{F} = -k\vec{r}$;

б) в однорідному полі сили тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$.

5.3. Побудувати перерізи еквіпотенціальних поверхонь для полів $U(r) = \alpha / r$, $U(r) = \alpha / r^2$ та $U(r) = \alpha r^2$.

5.4. Отримати умови зміни та збереження імпульсу системи частинок (формули (5.69) – (5.71)), виходячи із системи рівнянь руху, записаних для кожної частинки системи, їх значення імпульсу системи частинок (5.60).

Вказівка: Застосувати третій закон Ньютона для сили взаємодії між частинками системи.

5.5. Показати, що питомий імпульс є відношенням імпульсу, що надається щосекунди робочому тілу, до щосекундної витрати робочого тіла.

5.6. Довести, що зв'язок між сумарними моментами $\vec{M}^{зовн}$ і $\vec{M}'^{зовн}$ зовнішніх сил, прикладених до частинок системи і визначеними відносно різних точок O та O' , виражається формулою $\vec{M}^{зовн} = \vec{M}'^{зовн} + [\vec{a} \times \vec{F}^{зовн}]$, де \vec{a} – радіус-вектор точки O' відносно точки O (рис. 5.18).

5.7. Із закону збереження енергії при одновимірному русі частинки у формі (5.59) знайти швидкість частинки залежно від її координати.

5.8. Показати, що втрата повної механічної енергії системи двох частинок при їх лобовому абсолютно непружному зіткненні дорівнює власній кінетичній енергії системи до зіткнення.

5.9. Чи може повна механічна енергія замкненої системи двох частинок зростати після їх зіткнення, $E' > E$? Якщо може, то за рахунок якої енергії?

5.10. Чому для уповільнення нейtronів у ядерних реакторах використовують воду, важку воду, графіт, берилій та інші речовини, що містять легкі ядра?

5.11. Обчислити максимальний кут розсіяння α -частинки на протоні.

РОЗДІЛ 6

Динаміка твердого тіла

6.1. Рівняння руху абсолютно твердого тіла

Як уже було сказано в п. 1.2.1, абсолютно тверде тіло можна означити як систему частинок нерухомих одна щодо одної в процесі руху цієї системи. Отже, для твердого тіла як для будь-якої системи частинок справедливі рівняння руху системи як цілого під дією зовнішніх сил

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}}, \quad \text{де } \vec{F}^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}} \quad (6.1)$$

та рівняння моментів, записане в системі центра мас

$$\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \tilde{\vec{M}}_C^{\text{зовн}}, \quad \text{де } \tilde{\vec{M}}_C^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \tilde{\vec{M}}_i^{\text{зовн}}. \quad (6.2)$$

Якщо відомо систему зовнішніх сил $\vec{F}_i^{\text{зовн}}$, прикладених до абсолютно твердого тіла, тобто задано самі сили і точки твердого тіла, до яких вони прикладені (на рис. 6.1 зображене приклад системи сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, прикладених до точок тіла, положення яких визначено радіус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ відносно центра мас тіла C), а також початкові умови, то за допомогою цих двох векторних рівнянь можна знайти радіус-вектори і швидкості всіх то-

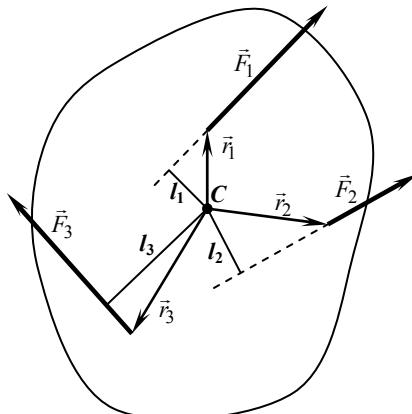


Рис. 6.1. Система сил, прикладених до абсолютно твердого тіла

чок твердого тіла, тобто його механічний стан у деякий момент часу, а отже, і закон його руху, і таким чином розв'язати основну задачу динаміки.

Дійсно, два векторних рівняння (6.1) і (6.2) еквівалентні шести скалярним рівнянням для проекцій, що відповідає шести степеням вільності абсолютно твердого тіла, серед яких є три поступальних і три обертальних. При цьому рівняння (6.1) описує поступальний рух абсолютно твердого тіла. Його можна подати у вигляді рівняння руху центра мас абсолютно твердого тіла:

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}}, \quad (6.3)$$

яке дозволяє знайти швидкість і положення центра мас абсолютно твердого тіла.

Рівняння моментів (6.2) описує обертальний рух абсолютно твердого тіла. За його допомогою можна знайти вектор кутової швидкості та кут повороту абсолютно твердого тіла відносно якось початкового положення.

Розглянемо особливості застосування рівнянь (6.1) або (6.3) та (6.2) до такого частинного випадку системи частинок, як абсолютно тверде тіло.

1. Якщо переміщувати вектори сил \vec{F}_i вздовж напрямків дії цих сил (рис. 6.1, штрихові лінії), то не зміниться ні їх результуюча $\vec{F}^{\text{зовн}}$, ні їх сумарний момент відносно центра мас $\tilde{M}_C^{\text{зовн}}$, оскільки незмінними залишаються момент кожної із сил унаслідок незмінності плеча l_i кожної сили \vec{F}_i . Тому при розгляді руху абсолютно твердого тіла можна переносити точки прикладання сил, що діють на абсолютно тверде тіло, вздовж напрямків їх дії.

2. У випадках, коли сумарний момент усіх сил, прикладених до абсолютно твердого тіла $\tilde{M}_C^{\text{зовн}}$, виявляється перпендикулярним до їх результуючої (їх векторної суми $\vec{F}^{\text{зовн}}$), тобто $\tilde{M}_C^{\text{зовн}} \perp \vec{F}^{\text{зовн}}$, дію всіх цих сил можна замінити дією **однієї рівнодійної** сили, яка справлятиме на тіло таку саму дію.

Нехай для деякої системи сил $\vec{F}^{\text{зовн}}$, прикладених до абсолютно твердого тіла, $\tilde{M}_C^{\text{зовн}} \perp \vec{F}^{\text{зовн}}$. Тоді для пари векторів $\tilde{M}_C^{\text{зовн}}$ і $\vec{F}^{\text{зовн}}$ завжди можна знайти такий вектор $\vec{r}_0 \perp \tilde{M}_C^{\text{зовн}}$, що $\tilde{M}_C^{\text{зовн}} = [\vec{r}_0 \times \vec{F}^{\text{зовн}}]$. Цю умову задовольняє будь-який вектор \vec{r}_0 , кінець якого лежить на лінії дії сили $\vec{F}^{\text{зовн}}$ (рис. 6.2): для всіх таких векторів \vec{r}_0 плече сили $l = M_C^{\text{зовн}} / F_C^{\text{зовн}}$ буде однаковим.

Отже, **систему сил, прикладених до окремих точок абсолютно твердого тіла, за**

умови $\tilde{M}_C^{\text{зовн}} \perp \vec{F}^{\text{зовн}}$ можна замінити рівнодійною силою, що дорівнює результуточій сили $\vec{F}^{\text{зовн}}$. Рівнодійна сила при цьому може бути прикладена до будь-якої точки твердого тіла, що лежить на прямій, яка проходить на відстані $l = M_C^{\text{зовн}} / F_C^{\text{зовн}}$ від центра мас тіла C у площині, в якій лежить центр мас тіла C і яка перпендикулярна моменту зовнішніх сил $\tilde{M}_C^{\text{зовн}}$.

Приклад 1. Для абсолютно твердого тіла, що перебуває в однорідному полі сили тяжіння, завжди можна вказати рівнодійну силу, прикладених до нього з боку поля. Дійсно, сумарний момент сил тяжіння, прикладених до частинок тіла, обчислений відносно довільної точки O , можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{\text{тяж}} &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \vec{g}] = \left[\left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} \right] = \\ &= [M \vec{R}_C \times \vec{g}] = [\vec{R}_C \times M \vec{g}] = [\vec{R}_C \times \vec{F}^{\text{тяж}}], \end{aligned} \quad (6.4)$$

тобто сумарний момент сил тяжіння $\tilde{M}^{\text{тяж}}$ завжди перпендикулярний сумі сил тяжіння $\vec{F}^{\text{тяж}}$ і можна ввести рівнодійну силу $\vec{F}^{\text{тяж}} = M \vec{g}$, лінія дії якої збігається з місцевою вертикальлю і проходить через центр мас твердого тіла C . Тому центр мас тіла, що пе-

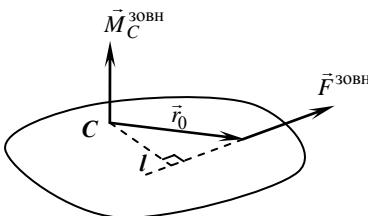


Рис. 6.2. До поняття рівнодійної сили

ребуває в однорідному полі сили тяжіння, іноді називають *центром ваги тіла*.

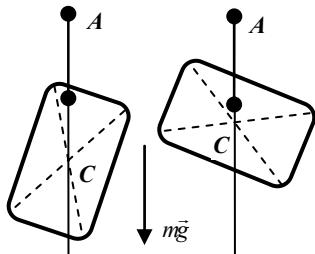


Рис. 6.3. До відшукання центра мас тіла підвішене в однорідному полі сили тяжіння тверде тіло залишається нерухомим, завжди проходить через центр мас цього тіла (рис. 6.3).

Приклад 2. На рис. 6.4 показано систему сил, прикладених до кулі, для яких не можна вказати рівнодійну, оскільки момент сил $\tilde{M}_C^{\text{зовн}}$ створюється лише силою \vec{F}_1 і отже, напрямлений уздовж осі OZ , а результуюча сила \vec{F}_1 та \vec{F}_2 аж ніяк не ортогональна до осі OZ , оскільки сила \vec{F}_1 направлена паралельно осі OZ .

Зазвичай поняття рівнодійної сили застосовне лише до абсолютно твердих тіл. Якщо деформаціями тіла занехтувати не можна, то поняття рівнодійної сили втрачає сенс.

Сумарний момент сил тяжіння $\vec{M}^{\text{тяж}} = 0$, якщо $\vec{R}_C \parallel M\vec{g} = 0$, тобто, коли точка O лежить на вертикальній прямій, що проходить через центр мас тіла C . Саме тому пряма, уздовж якої розтягуються нитка, на якій вільно

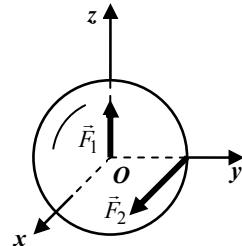


Рис. 6.4 Система сил, що не має рівнодійної

6.2. Умови рівноваги абсолютно твердого тіла

Як відомо, для абсолютно твердого тіла, що перебуває в рівновазі (тобто не рухається) виконуються умови:

$$\vec{F}^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}} = 0, \quad (6.5)$$

$$\vec{M}^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{зовн}} = 0. \quad (6.6)$$

Ці умови необхідні, але недостатні, щоб тіло перебувало в рівновазі, оскільки вони припускають рівномірний рух центра мас і рівномірне обертання тіла навколо осі, що проходить через його центр мас. Їх треба доповнити відповідними початковими умовами $\vec{V}_C(0) = 0$, $\vec{\omega}(0) = 0$. Корисно також пам'ятати, що коли $\vec{F}^{\text{зовн}} = 0$, то точку, відносно якої визначають сумарний момент сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, можна обирати довільно, керуючись міркуваннями зручності.

Розглянемо класичний приклад визначення умов рівноваги однорідної балки, що спирається на дві опори. Ця задача дуже важлива для практики, наприклад, при визначенні сил, що будуть прикладені з боку балки до опор, на які вона спирається (це може бути міст). Для системи сил, зображененої на рис. 6.5, можна записати

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad (6.7)$$

$$[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = 0, \quad (6.8)$$

де m – маса балки, \vec{F}_1 і \vec{F}_2 – сили реакції, що діють на балку з боку опор, \vec{r}_1 та \vec{r}_2 – радіус-вектори точок прикладання цих сил, визначені відносно центра мас балки. Проектуванням цих векторних рівнянь, відповідно, на напрямки осі OZ та осі OY дістанемо

$$\begin{cases} F_1 + F_2 - mg = 0 \\ l_1 F_1 - l_2 F_2 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} F_1 + F_2 = mg \\ l_1 F_1 = l_2 F_2, \end{cases} \quad (6.9)$$

де позначено $l_1 = r_1 F_1 \sin(\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1)$, $l_2 = r_2 F_2 \sin(\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2)$. Із системи (6.9) двох лінійних рівнянь з двома невідомими знаходимо

$$F_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} mg \text{ та } F_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg, \quad (6.10)$$

тобто навантаження на опори розподіляється нерівномірно: воно більше для опори, яка розміщена близче до центра мас балки.

Як було зазначено, сумарний момент сил можна визначити і відносно іншої точки, зокрема, відносно точки прикладання однієї із сил, наприклад, сили \vec{F}_1 . Тоді відповідне скалярне рівняння моментів набуває вигляду $l_1 mg - (l_1 + l_2)F_2 = 0$, звідки

можна визначити модуль сили F_2 . Для відшукання модуля сили F_1 можна записати рівняння моментів відносно точки прикладання сили \vec{F}_2 : $(l_1 + l_2)F_1 - l_2 mg = 0$.

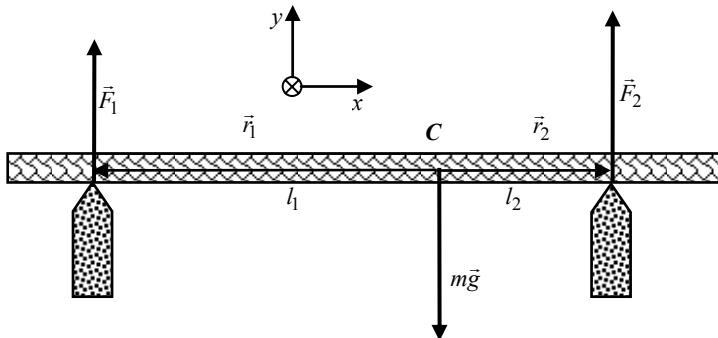


Рис. 6.5. До визначення умов рівноваги балки

Якщо виявиться, що для підтримання балки двох опор замало (величина однієї або обох знайдених сил перевищує припустиму для опори величину), то балку можна підперти третьою опорою. Однак, на відміну від попереднього випадку, розрахувати сили, що прикладені до трьох опор, розглядаючи балку як абсолютно тверде тіло, у цьому випадку неможливо, оскільки прийдемо до системи двох рівнянь з трьома невідомими, наприклад:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + F_3 = mg \\ l_1 F_1 + l_3 F_3 = l_2 F_2 \end{cases} \quad (6.11)$$

Таку задачу можна розв'язати методами технічної дисципліни, яка називається "Опір матеріалів", при врахуванні механічних напруг і деформацій, що виникають у твердому тілі, відносно характеру яких роблять певні більш або менш обґрунтовані припущення¹.

¹ Всесвітньо визнаним авторитетом у цій галузі був проф. С. Тимошенко (1878–1972), який працював в Україні, Росії та США.

6.3. Зв'язок між власним моментом імпульсу і вектором кутової швидкості абсолютно твердого тіла, тензор інерції

При обчисленні власного моменту імпульсу абсолютно твердого тіла будемо розглядати його як сукупність малих елементів, кожен із яких можна вважати матеріальною точкою, що має масу Δm_i , а його положення відносно центра мас тіла визначається радіус-вектором \vec{r}_i ¹. При цьому $\sum_{i=1}^n \Delta m_i = M$, де M – маса абсолютно твердого тіла. Тоді за означенням

$$\tilde{\vec{L}} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times (\Delta m_i \dot{\vec{r}}_i)].$$

Виконаємо деякі алгебраїчні перетворення в правій частині останньої рівності використовуючи зв'язок між векторами лінійної та кутової швидкостей $\dot{\vec{r}}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$ і відому формулу векторної алгебри $[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times (\Delta m_i \dot{\vec{r}}_i)] = \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})], \\ \tilde{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Із векторного рівняння (6.12) можна отримати три рівняння для проекцій вектора власного моменту імпульсу на осі деякої декартової системи координат. Для компоненти \tilde{L}_x маємо

¹ Надалі не будемо спеціально позначати величини визначені в СЦМ знаком "тильда", за винятком тих випадків, коли це необхідно, щоб відрізити їх від величин, визначених в інших системах відліку.

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_x &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\omega_x r_i^2 - x_i(x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] = \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\omega_x(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i^2 \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] = \\
&= \omega_x \sum_{i=1}^n \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i z_i. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Аналогічно обчислюються компоненти \tilde{L}_y та \tilde{L}_z .

Отже, компоненти вектора власного моменту імпульсу абсолютно твердого тіла можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_x &= \omega_x \sum_{i=1}^n \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i z_i, \\
\tilde{L}_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i x_i + \omega_y \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i z_i, \quad (6.14) \\
\tilde{L}_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i x_i - \omega_y \sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i y_i + \omega_z \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2).
\end{aligned}$$

Формули (6.14) встановлюють лінійний зв'язок між трьома компонентами $\tilde{L}_x, \tilde{L}_y, \tilde{L}_z$ вектора моменту імпульсу абсолютно твердого тіла та трьома компонентами $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора його кутової швидкості. Їх можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\
\tilde{L}_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\
\tilde{L}_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \quad (6.15)
\end{aligned}$$

Упорядкований набір із дев'яти величин $I_{\alpha\beta}$, що залежать лише від розподілу мас в абсолютно твердому тілі, визначає в обраній системі координат так званий *тензор інерції* абсолютно твердого тіла. Величини $I_{\alpha\beta}$ називають *компонентами тензора інерції*. Їх зручно записувати у вигляді матриці 3×3 :

$$\begin{aligned}
[I_{\alpha\beta}] &= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i x_i & \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i x_i & -\sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i y_i & \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}, \quad (6.16)
\end{aligned}$$

де компоненти I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} називають *осьовими*, або *діагональними*, а решту – *неосьовими*, або *недіагональними* компонентами тензора інерції твердого тіла або, відповідно, *осьовими* та *неосьовими моментами інерції* твердого тіла.

У загальному випадку тверде тіло може бути неоднорідним, тобто його густина може змінюватись від точки до точки, $\rho = \rho(x, y, z)$. Тоді при обчисленні компонент тензора інерції необхідно від сумування перейти до інтегрування по всьому об'єму абсолютно твердого тіла. Загальну формулу для обчислення компонент тензора інерції можна подати в такому компактному вигляді:

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho \left(r^2 \delta_{\alpha,\beta} - r_\alpha r_\beta \right) dV, \quad (6.17)$$

де $\rho = \rho(x, y, z)$ – густина тіла, \vec{r} – радіус-вектор, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, причому координаті x відповідає 1, координаті y відповідає 2, координаті z відповідає 3; r_α та r_β – відповідні координати радіус-вектора \vec{r} ; $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера, що набуває значення 1 при $\alpha = \beta$ та 0 при $\alpha \neq \beta$.

Поняття тензора складніше за поняття вектора, але, спираючись на наші знання про вектори, можна скласти правильне уявлення про тензори на прикладі тензора інерції, який виник при

обчисленні власного моменту імпульсу абсолютно твердого тіла. Підкреслимо, що **тензор так само, як і вектор є так званим геометричним об'єктом**, тобто таким, що існує незалежно від того, чи запропоновано якусь координатну систему (шляхом побудови відповідного векторного базису), чи ні. Якщо ж систему координат задано, то можуть бути обчислені компоненти тензора в цій системі координат. Компоненти тензора, обчислені в різних системах координат, у загальному випадку будуть різними, хоча сам тензор при цьому не змінюється. Ця властивість тензора цілком тотожна властивості одного й того самого вектора мати різні координати в різних координатних системах, тобто різні величини проекцій на вектори базисів (див. п. 2.1.2). Там же пояснено, як обрати таку систему координат (базисних векторів), за якої всі проекції деякого вектора, окрім однієї, перетворяться на нуль: для цього достатньо спрямувати паралельно вектору одну із координатних осей. Компоненти тензора інерції не змінюються при перестановці індексів $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ і, відповідно, матриця (6.16) симетрична відносно головної діагоналі. Це зменшує кількість незалежних компонент тензора інерції з дев'яти до шести. Такі тензори називаються *симетричними*. Відповідним вибором орієнтації всіх трьох осей системи координат можна всі недіагональні компоненти симетричного тензора другого рангу¹, яким є тензор інерції, одночасно перетворити на нуль. Система координат, у якій матриця компонент симетричного тензора другого рангу набуває діагонального вигляду, називається *головною*, або *власною*, системою координат цього тензора. У головній системі матриця (6.16) набуває вигляду

¹ Ранг тензора визначається числом r , яке задає кількість n компонент тензора в тривимірному просторі за формулою $n = 3^r$. Тоді за $r=0$ маємо тензор нульового рангу, відомий як скаляр, що визначається одним числом ($n=1$), яке не залежить від вибору системи координат (є інваріантом). За $r=1$ маємо тензор першого рангу, відомий як вектор, що визначається трьома числами ($n=3$) (координатами, компонентами, проекціями вектора), кожне з яких може змінюватись при зміні орієнтації системи координат, але сума їх квадратів (квадрат довжини вектора) є інваріантом, при цьому можна знайти три такі різні системи координат, у кожній з яких лише одна компонента відмінна від нуля. За $r=2$ маємо тензор другого рангу, що визначається дев'ятьма числами ($n=9$) (координатами, компонентами тензора).

$$[I_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

де I_1, I_2, I_3 – так звані *головні моменти інерції* абсолютно твердого тіла, які визначають інерційні властивості абсолютно твердого тіла щодо обертання навколо осей, що збігаються з головними осями тензора інерції. Дійсно, у головній системі координат тензора інерції система рівнянь (6.15) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\tilde{L}_x &= I_1 \omega_x \\ \tilde{L}_y &= I_2 \omega_y \\ \tilde{L}_z &= I_3 \omega_z,\end{aligned}\quad (6.19)$$

а рівняння динаміки обертельного руху, записане в проекціях на осі головної системи координат

$$\begin{aligned}I_1 \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x \\ I_2 \frac{d\omega_y}{dt} &= M_y \\ I_3 \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z.\end{aligned}\quad (6.20)$$

Отже, кожна компонента кутового прискорення $\dot{\omega}_\alpha$ визначається як відповідною компонентою моменту зовнішніх сил M_α , так і відповідним головним моментом інерції абсолютно твердого тіла I_α , причому, чим більший головний момент інерції, тим менше кутове прискорення за незмінної компоненти моменту зовнішніх сил M_α . Таким чином, головний момент інерції в рівнянні $I_\alpha \dot{\omega}_\alpha = M_\alpha$ відіграє ту саму роль, що й маса тіла m у рівнянні динаміки поступального руху $ma_\alpha = F_\alpha$, тобто він є мірою інертності тіла щодо обертання навколо відповідної головної осі.

На підставі вищевикладеного можна дати таке означення: **тензором інерції називається тензорна фізична величина, що характеризує інерційні властивості твердого тіла щодо обертання, і яка в кожній системі координат визначається дев'ять-**

ма скалярними величинами (компонентами тензора інерції або моментами інерції твердого тіла), які залежать від розподілу мас у твердому тілі і в кожній декартовій системі координат визначаються формулою

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho(r^2 \delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta) dV.$$

Формули (6.15) можна подати в компактному координатному вигляді

$$\tilde{L}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (6.21)$$

або в більш компактному і загальному, так званому *безкоординатному* вигляді

$$\tilde{\vec{L}} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}, \quad \text{де } \hat{I} \text{ -- тензор інерції.} \quad (6.22)$$

Відповідно до останнього рівняння \hat{I} можна розглядати як оператор, який ставить у відповідність вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла вектор власного моменту імпульсу тіла. Такий запис дуже зручний, оскільки він не потребує вказівки на ту чи іншу систему координат. Із цього погляду він повністю аналогічний запису рівнянь у векторній формі, який ми використовували в попередніх розділах. Зауважимо, що так звана *тензорна розмірність* лівої і правої частин рівняння (6.22) однакова: і в лівій, і в правій частинах маємо тензори одного й того самого рангу – першого, тобто вектори, оскільки, як зазначалось, результатом дії оператора \hat{I} , що є тензором другого рангу, на вектор є вектор.

Найбільш загальне *безкоординатне* означення тензора інерції можна сформулювати так: **тензором інерції твердого тіла називається тензорна фізична величина, що характеризує інерційні властивості твердого тіла щодо обертання і визначається трьома скалярними величинами – головними моментами інерції твердого тіла, які є мірою інертності твердого тіла щодо обертання навколо трьох взаємно ортогональних головних осей інерції, причому і головні моменти інерції, і орієнтація відповідних головних осей інерції відносно твердого тіла залежать виключно від розподілу мас у твердому тілі.**

Величини головних моментів інерції і напрямки головних осей інерції відносно твердого тіла можуть бути визначені екс-

периментально або розрахунковим шляхом. У загальному випадку визначенням підлягають 6 скалярних величин: 3 головні моменти інерції, 3 кути між трьома головними осями інерції та трьома осями системи координат пов'язаної із характерними напрямками у твердому тілі, що повністю узгоджується з існуванням 6 незалежних компонент тензора інерції.

6.4. Основні властивості тензора інерції та обчислення його компонент

Окрім встановленої в підрозд. 6.3 внутрішньої симетрії $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ тензор інерції володіє й іншими важливими властивостями. Зокрема, сума діагональних компонент тензора інерції залишається незмінною при поворотах декартової системи координат, тобто являє собою інваріант; подібно до того, як інваріантом є сума квадратів компонент вектора.

Із явного вигляду головних моментів інерції абсолютно твердого тіла

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2), \\ I_3 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (6.23)$$

можна зробити очевидний висновок, що всі вони додатно визначені, $I_1, I_2, I_3 \geq 0$, і жоден головний момент інерції не може бути більшим за суму двох інших головних моментів інерції. Наприклад,

$$I_1 + I_2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) + \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) = \\ = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2 + 2z_i^2) \geq I_3 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (6.24)$$

Зважаючи на різноманітність твердих тіл за формою та розподілом маси (густини), тензори інерції, що характеризують їх інерційні властивості щодо обертання, можна поділити на три групи:

1. Якщо всі три головні моменти інерції абсолютно твердого тіла різні, тобто $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$, тоді кажуть, що тіло за своїми інерційними властивостями щодо обертання являє собою *несиметричну дзигу*;

2. Якщо два із трьох головних моментів інерції абсолютно твердого тіла однакові, наприклад, $I_1 = I_2 \neq I_3$, то кажуть, що таке тіло за своїми інерційними властивостями щодо обертання являє собою *симетричну дзигу*;

3. Якщо всі три головні моменти інерції абсолютно твердого тіла однакові, $I_1 = I_2 = I_3$, то таке тіло за своїми інерційними властивостями щодо обертання являє собою *сферичну дзигу*.

Співвідношення між головними моментами інерції однорідного абсолютно твердого тіла тісно пов'язані з його симетрією (рис. 6.6).

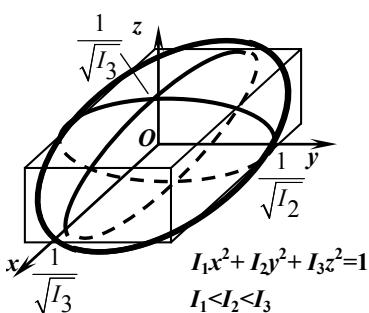
Наочним прикладом сферичної дзиги може бути власне сфера (сферична оболонка), звідки й походить сама назва. Властивостями сферичної дзиги володіють будь-які тіла, які мають сферичну (або центральну) симетрію: суцільна однорідна куля ($\rho = \text{const}$), а також будь-яке тіло зі сферично-симетричним розподілом густини $\rho = \rho(r)$ (густина залежить лише від відстані до центра сфери), оскільки їх можна подати як суперпозицію концентричних сферичних оболонок. Менш очевидним є той факт, що властивості сферичної дзиги мають однорідний куб (рис. 6.6, в) і тетраедр, оскільки в силу їх симетрії для кожного з них можна вказати три еквівалентні взаємно перпендикулярні осі, моменти інерції відносно яких однакові.

Прикладом симетричної дзиги може бути добре відома всім з дитинства іграшка – дитяча дзига, яка має осьову (аксіальну) зовнішню симетрію й аксіально-симетричний розподіл густини.

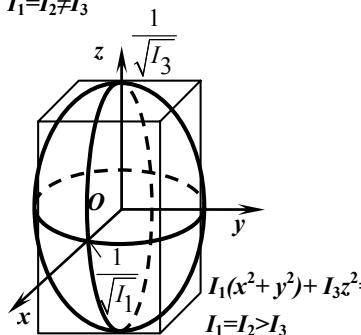
Властивості симетричної дзиги мають всі однорідні геометричні тіла обертання: круглий циліндр, прямий круговий конус, еліпсоїд обертання тощо. Можна також показати, що будь яке однорідне тіло, яке має одну вісь симетрії вище третього порядку

ку¹ є симетричною дзигою. Прикладом може бути однорідна пряма призма з квадратною основою (рис. 6.6, а).

а) $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$



б) $I_1 = I_2 \neq I_3 \neq I_1$



в) $I_1 = I_2 = I_3 = I$

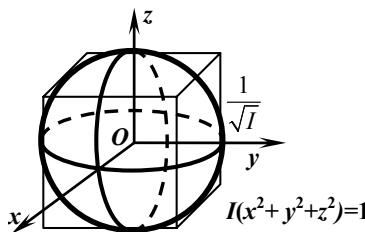


Рис. 6.6. Зв'язок між симетрією
абсолютно твердого тіла та тензором інерції

Важливим частинним випадком симетричної дзиги є *ротатор* – система матеріальних точок, що лежать на одній прямій, відстань між якими не змінюється в процесі руху (можна вважати, що ці точки з'єднані нерозтяжним і невагомим стрижнем). За прийнятої нами вибору системи координат для всіх частинок ротатора

$x_i = y_i = 0$, отже, $I_1 = I_2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i^2$, $I_3 = 0$. Модель ротатора, що

складається з двох матеріальних точок, широко застосовується у фізиці при описі руху двохатомних молекул.

¹ Порядком осі симетрії називають число n , яке показує, за якого найменшого кута повороту $\Delta\phi = 2\pi/n$ навколо цієї осі, геометрична фігура суміщається сама із собою.

Нарешті, усі низькосиметричні однорідні тіла, елементами симетрії яких є лише площини симетрії та осі поворотів на кут π , за яких тіло суміщається саме із собою, мають властивості асиметричної дзиги. Прикладом є звичайна цеглина, що являє собою прямий однорідний паралелепіпед (рис. 6.6, а). Переважна більшість оточуючих нас предметів за своїми інерційними властивостями щодо обертання є асиметричними дзигами.

Тіло людини також має три різні за величиною головні моменти інерції (йдеться про манекени або про випадки, коли при виконанні різних вправ у гімнастиці, стрибках у воду, фігурному катанні тощо спортсмен фіксує і підтримує незмінною протягом певного часу конфігурацію свого тіла, яке можна вважати твердим). Спортсмени, танцюристи, артисти цирку часто використовують зміну моменту інерції власного тіла для уповільнення або прискорення обертання, зазвичай широко розкидаючи руки або притискаючи їх до тулуза. Це добре видно в демонстраційних дослідах з лавою Жуковського (рис. 6.7). Оскільки величина моменту імпульсу $L = L_z$, напрямленого вздовж осі обертання залишається незмінною, то зміна моменту інерції від I_1 до I_2 призводить до зміни кутової швидкості обертання від ω_1 до ω_2 , оскільки $L = I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = \text{const}$. Причому, якщо $I_1 > I_2$, то $\omega_1 < \omega_2$.

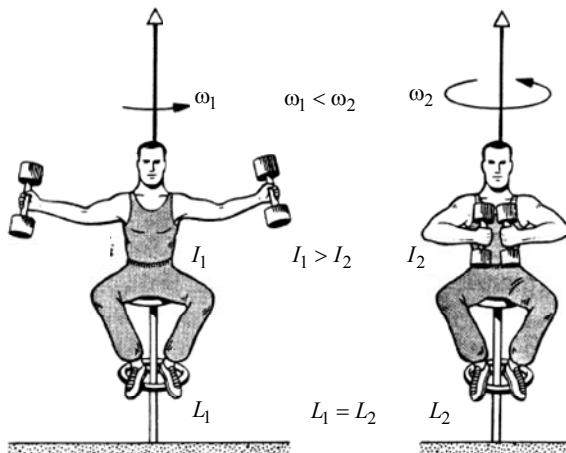


Рис. 6.7. Демонстраційний дослід з лавою Жуковського

Розглянемо поширений випадок розташування частинок твердого тіла в одній площині. Якщо обрати декартову прямокутну систему координат, щоб вісь OZ була перпендикулярна до цієї площини, то для всіх частинок $z_i = 0$. Тоді нерівність (6.24) переходить у рівність

$$I_1 + I_2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_3, \quad (6.25)$$

тобто сума двох головних моментів інерції відносно осей, що лежать у площині тіла, дорівнює моменту інерції відносно осі, перпендикулярної до вищезгаданої площини, $I_1 + I_2 = I_3$.

Обчислення компонент тензора інерції. Розглянемо процедуру обчислення компонент тензора інерції на простому прикладі однорідного прямого паралелепіпеда зі сторонами a, b, c і густинною $\rho = \text{const}$. Із міркувань симетрії оберемо прямокутну декартову систему координат з початком у центрі паралелепіпеда (у точці перетину його просторових діагоналей) і з осями, спрямованими вздовж осей симетрії паралелепіпеда, як це показано на рис. 6.8. Можна очікувати, що така система координат буде власною (головною) системою координат тензора інерції паралелепіпеда.

Це підтверджується прямим обчисленням недіагональних компонент тензора інерції за формулою (6.22). Наприклад,

$$I_{xy} = - \int_V \rho xy dV = -\rho \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-b/2}^{b/2} y dy \int_{-c/2}^{c/2} dz = 0, \quad (6.26)$$

оскільки визначені інтеграли від непарних функцій на симетричних межах завжди дорівнюють нулю:

$$\int_{-a/2}^{a/2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-a/2}^{a/2} = 0. \quad (6.27)$$

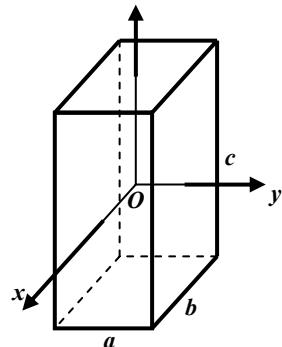


Рис. 6.8. Для обчислення компонент тензора інерції прямого однорідного паралелепіпеда

Залишається обчислити три діагональних (головних) моменти інерції. Наприклад, момент інерції відносно осі OX :

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_{xx} &= \int_V \rho(y^2 + z^2) dV = \rho \left[\int_V y^2 dV + \int_V z^2 dV \right] = \\
 &= \rho \left[\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-c/2}^{c/2} dz + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz \right] = \\
 &= \rho \left[x \Big|_{-a/2}^{a/2} \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} z \Big|_{-c/2}^{c/2} + x \Big|_{-a/2}^{a/2} y \Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{z^3}{3} \Big|_{-c/2}^{c/2} \right] = \\
 &= \rho \left[a \frac{b^3}{3 \cdot 4} c + ab \frac{c^3}{3 \cdot 4} \right] = \rho abc \frac{1}{12} [b^2 + c^2] = \frac{1}{12} \rho V [b^2 + c^2].
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Аналогічно обчислюються і моменти інерції відносно $I_2 = I_{yy}$ та $I_3 = I_{zz}$. Остаточно маємо три головні моменти інерції однорідного прямого паралелепіпеда:

$$I_1 = \frac{1}{12} M [b^2 + c^2], \quad I_2 = \frac{1}{12} M [a^2 + c^2], \quad I_3 = \frac{1}{12} M [a^2 + b^2]. \tag{6.29}$$

Якщо $a > b > c$, то $I_3 > I_2 > I_1$, тобто однорідний прямий паралелепіпед за інерційними властивостями щодо обертання являє собою асиметричну дзигу, як це показано на рис. 6.6, а.

Якщо $c \neq b = a$, то маємо пряму призму з квадратною основою, для якої

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} M [a^2 + c^2], \quad I_3 = \frac{1}{12} M [a^2 + b^2], \tag{6.30}$$

тобто така призма являє собою симетричну дзигу. За $a = b = c$ маємо куб, для якого всі три головні моменти інерції одинакові:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{6} Ma^2, \tag{6.31}$$

а за своїми інерційними властивостями щодо обертання він являє собою сферичну дзигу. Будь-яке тіло, яке має так само як і куб три взаємно перпендикулярні осі симетрії четвертого порядку, є сферичною дзигою.

Із виразів (6.30) можна отримати корисну формулу для головного моменту інерції однорідного тонкого стрижня довжиною $l \gg a, b$

відносно осі, що перпендикулярна стрижню. Зважаючи, що $l = c$, і нехтуючи величинами a^2 та b^2 порівняно з c^2 , одержимо

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} Ml^2, \quad I_3 = 0. \quad (6.32)$$

Таким чином, для тонкого стрижня $I_1 = I_2$, $I_3 = 0$, тобто він має властивості ротатора.

Еліпсоїд інерції. Якщо наочним геометричним образом вектора є напрямлений відрізок (стрілка) певної довжини, то для уточнення тензора інерції (його зовнішньої симетрії) використовують геометричну побудову, яку називають *еліпсоїдом інерції*. Рівняння еліпсоїда інерції у власній системі координат тензора інерції має вигляд

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1. \quad (6.33)$$

Його можна переписати у вигляді

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_3}}\right)^2} = 1, \quad (6.34)$$

звідки видно, що довжина півосей еліпсоїда інерції обернено пропорційна кореню квадратному з відповідних числових значень головних моментів інерції¹. На рис. 6.6 зображено прямий однорідний паралелепіпед, пряму призму з квадратною основою та куб, для яких вище було розраховано головні моменти інерції, разом із відповідними еліпсоїдами інерції. Можна помітити, що еліпсоїди інерції певною мірою передають співвідношення розмірів цих однорідних тіл. Наприклад, найдовший стороні прямого паралелепіпеда відповідає найдовша піввісь еліпсоїда інерції, а найкоротший стороні – найкоротша піввісь еліпсоїда інерції. Еліпсоїд інерції можна розглядати як однорідне тверде тіло, інерційні властивості якого ідентичні інерційним властивостям розглядуваного твердого тіла. **Оскільки еліпсоїд інерції нерухомий відносно тіла, то аналіз руху тіла можна звести до аналізу руху його**

¹ Оскільки йдеться про геометричну побудову, то розмірність головних моментів інерції до уваги не береться.

еліпсоїда інерції й абстрагуватися, таким чином, від конкретної форми твердого тіла.

Наприклад, напрямок вектора моменту імпульсу абсолютно твердого тіла при обертанні навколо довільної осі, що проходить через його центр мас, можна знайти за допомогою методу, який запропонував Л. Пуансо: будують площину дотичну до поверхні еліпсоїда інерції в точці її перетину з віссю обертання (вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$) і з центра еліпсоїда опускають на неї перпендикуляр, напрямок якого вказує на напрямок вектора моменту імпульсу \vec{L} (рис. 6.9).

Момент інерції абсолютно твердого тіла відносно будь-якої осі, що проходить через центр його мас, можна знайти за довжиною відрізка OD , що з'єднує центр еліпсоїда інерції O з точкою D , у якій ця вісь перетинає поверхню еліпсоїда інерції (рис. 6.9). Для цього треба розглянути переріз еліпсоїда інерції, який містить відрізок OD та одну з головних осей еліпсоїда інерції. Нехай, наприклад, це буде одна із головних осей інерції, що перетинає поверхню еліпсоїда інерції в точці A і момент інерції відносно якої є I_1 . Тоді момент інерції I_{OD} відносно осі OD можна визначити за формулою $I_{OD} = I_1(OA / OD)^2$.

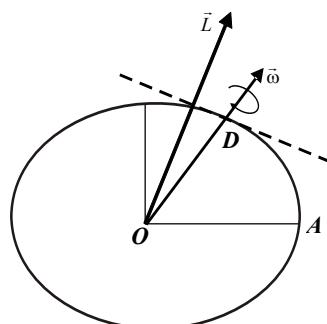


Рис. 6.9. Побудова Пуансо

6.5. Кінетична енергія абсолютно твердого тіла

Кінетичну енергію абсолютно твердого тіла як і будь-якої системи частинок можна подати у вигляді суми кінетичної енергії руху системи як цілого та власної кінетичної енергії \tilde{T} :

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \tilde{T}. \quad (6.35)$$

Обчислимо власну кінетичну енергію абсолютно твердого тіла:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i ([\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \cdot \vec{v}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times \vec{v}_i]) = \frac{\vec{\omega}}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i].\end{aligned}$$

При перетвореннях правої частини здійснено циклічну перестановку в мішаному векторному добутку. Оскільки в отриманому виразі сума є власним моментом імпульсу $\tilde{\vec{L}}$, то маємо

$$\tilde{T} = \frac{\vec{\omega} \cdot \tilde{\vec{L}}}{2}. \quad (6.36)$$

Формула (6.36) для власної кінетичної енергії \tilde{T} після підстановки в неї виразу (6.22) для власного моменту імпульсу абсолютно твердого тіла $\tilde{\vec{L}}$ набуває вигляду

$$\tilde{T} = \frac{\vec{\omega} \cdot \hat{I} \cdot \vec{\omega}}{2}. \quad (6.37)$$

Власну кінетичну енергію абсолютно твердого тіла (6.36) також можна подати в декартових координатах як

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha L_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \omega_\alpha I_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad (6.38)$$

або

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta. \quad (6.39)$$

У головній системі координат тензора інерції

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_x^2 + I_2 \omega_y^2 + I_3 \omega_z^2). \quad (6.40)$$

Із цієї формули видно, що кінетична енергія, пов'язана з обертанням твердого тіла навколо будь-якої головної осі тензора інерції, пропорційна відповідному головному моменту інерції і квадрату кутової швидкості обертання навколо цієї осі. Для тіла, що є сферичною дзигою, кінетична енергія обертання навколо осі, що проходить через центр мас, дорівнює

$$\tilde{T} = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (6.41)$$

де I – головний момент інерції тіла, ω^2 – квадрат кутової швидкості.

Для симетричної дзиги кінетична енергія обертання навколо осі, що проходить через центр мас, така:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}I_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_z^2 \quad (6.42)$$

і, зокрема, для частинного випадку ротатора:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}I_1(\omega_x^2 + \omega_y^2). \quad (6.43)$$

Вираз для кінетичної енергії абсолютно твердого тіла (6.35) у загальному випадку можна подати у вигляді суми шести доданків, три перших з яких відповідають трьом поступальним степеням вільності, а три останніх – трьом обертальним степеням вільності:

$$T = \frac{1}{2}MV_x^2 + \frac{1}{2}MV_y^2 + \frac{1}{2}MV_z^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_z^2 \quad (6.44)$$

Для частинного випадку жорсткого ротатора маємо лише п'ять степенів вільності (три поступальних і два обертальних) і, відповідно, на один доданок менше у формулі (6.44).

6.6. Динаміка обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Важливим частинним випадком динаміки твердого тіла є його обертання навколо нерухомої осі. Оскільки єдиною характеристикою такого руху є вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, який направлений уздовж осі обертання, спочатку вважатимемо, що вісь обертання проходить через центр мас твердого тіла C (рис. 6.10). Оберемо систему координат, одна з осей якої, наприклад, OZ співнапрямлена з вектором $\vec{\omega}$. За такого вибору системи координат $\omega_x = \omega_y = 0$, а проекція $\omega_z = \omega$ повністю визначає проекцію вектора моменту імпульсу \tilde{L}_z (див. третє з рівнянь (6.15)):

$$\tilde{L}_z = I_{zz}\omega_z. \quad (6.45)$$

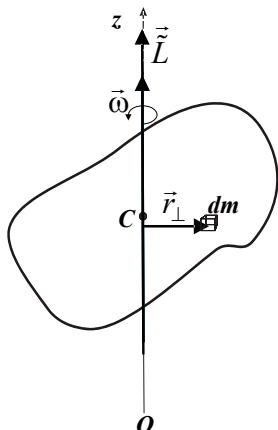


Рис. 6.10. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Скалярну величину I_{zz} у випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі називають *моментом інерції (тіла) відносно осі*. Момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас твердого тіла C , позначимо через I_C , тобто у нашому випадку $I_{zz} = I_C$:

$$\tilde{L}_z = I_C \omega. \quad (6.46)$$

Проекція рівняння моментів (6.2) на вісь OZ має вигляд

$$\frac{d\tilde{L}_z}{dt} = M_z, \quad (6.47)$$

де M_z – проекція сумарного моменту сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, на вісь обертання. Її називають *моментом сил відносно осі обертання*. Після підстановки (6.46) до (6.47) одержимо основне рівняння динаміки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = M_z, \quad \text{або} \quad I_C \dot{\phi} = M_z. \quad (6.48)$$

Із цього рівняння видно, що момент інерції твердого тіла відносно осі повністю визначає інерційні властивості твердого тіла щодо обертання навколо цієї осі. Рівняння (6.48) за формулою подібне до основного рівняння динаміки матеріальної точки, де інерційні властивості визначаються масою, яка є коефіцієнтом при прискоренні.

Бачимо, що за прийнятого нами вибору системи координат момент інерції відносно осі обертання можна знайти за формuloю

$$I_C = I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV, \quad (6.49)$$

яку можна подати в безкоординатному вигляді

$$I_C = \int_V \rho r_\perp^2 dV, \quad (6.50)$$

де введено позначення $r_\perp^2 = (x^2 + y^2)$ – відстань від точки твердого тіла до осі обертання.

Таким чином, момент інерції твердого тіла відносно деякої осі визначається розподілом мас у твердому тілі відносно цієї осі. Зрозуміло, що **моменти інерції одного й того самого твердого тіла, визначені відносно різних осей, будуть у загальному випадку різні**.

Обертання твердого тіла не завжди відбувається навколо осі, яка проходить через його центр мас. Більше того, на практиці у багатьох випадках здійснення саме такого обертання становить складну технічну задачу. У випадку, коли вісь обертання не проходить через центр мас твердого тіла, можна скористатися загальним рівнянням моментів (5.95), визначених відносно точ-

ки, що лежить на цій осі обертання $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{зовн}}$, у якому відповідно до рівняння (5.102) момент імпульсу можна подати як $\vec{L} = \tilde{\vec{L}} + [\vec{R}_C \times \vec{P}]$, а момент зовнішніх сил відповідно до рівняння (5.104) як

$$\vec{M}^{\text{зовн}} = \tilde{\vec{M}}^{\text{зовн}} + [\vec{R}_C \times \vec{F}^{\text{зовн}}]. \quad (6.51)$$

Тепер розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомої осі $O'A'$, яка паралельна деякій осі, що проходить через центр мас тіла, і розташована на відстані d від неї (рис. 6.11). Тоді

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \tilde{\vec{L}} + [\vec{R}_C \times \vec{P}] = \tilde{\vec{L}} + M[\vec{R}_C \times \dot{\vec{R}}_C] = \tilde{\vec{L}} + M[\vec{R}_C \times [\vec{\omega} \times \vec{R}_C]] \\ &= \tilde{\vec{L}} + M[\vec{R}_C \times [\vec{\omega} \times \vec{R}_C]] = \tilde{\vec{L}} + M[\vec{\omega} R_C^2 - \vec{R}_C (\vec{R}_C \cdot \vec{\omega})]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Проекцією цього вектора на напрямок осі обертання $O'A'$ (на вісь OZ') є

$$\begin{aligned} L_{O'A'} &= L_z = \tilde{L}_z + M[\omega R_C^2 - Z_C (Z_C \cdot \omega)] = \\ &= \tilde{L}_z + M\omega(R_C^2 - Z_C^2) = I_C\omega + Md^2\omega = (I_C + Md^2)\omega. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Останній вираз зручно подати у вигляді

$$L_{O'A'} = I_{O'A'}\omega, \quad (6.54)$$

де введено момент інерції тіла відносно осі $O'A'$:

$$I_{O'A'} = I_C + Md^2. \quad (6.55)$$

Формула (6.55) репрезентує дуже корисну в практичних застосуваннях теорему Гюйгенса–Штейнера: **момент інерції твердого тіла відносно довільної осі є сумою моменту інерції тіла**

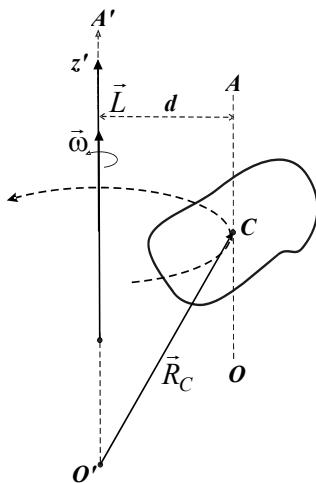


Рис. 6.11. До теореми Гюйгенса–Штейнера

відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані між цими осями.

Тепер для обертання твердого тіла навколо осі $O'A'$ можна записати

$$I_{O'A'} \frac{d\omega}{dt} = M_{O'A'}, \quad (6.56)$$

де $M_{O'A'}$ – момент сил відносно осі обертання $O'A'$.

Оси вільного обертання твердого тіла. Віссю вільного обертання твердого тіла, або вільною віссю, називають таку вісь, навколо якої можливе вільне (тобто без прикладання зовнішніх сил) обертання твердого тіла, при якому напрямок осі залишається незмінним. Покажемо, що вільні осі обертання проходять через центр мас тіла, а напрямки вільних осей обертання збігаються з напрямками головних осей тензора інерції. Нехай деяке тверде тіло обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, напрямок AA' якої в просторі фіксований підшипниками A та A' (рис. 6.12), причому центр мас тіла C не лежить на осі обертання. Рівняння руху такого тіла можна записати у вигляді $m\ddot{\vec{R}}_C = \vec{F}^{\text{зовн}}$,

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{зовн}}$, де $\vec{M}^{\text{зовн}}$ подано формулою (6.51). Необхідними умовами вільного обертання є $\vec{F}^{\text{зовн}} = 0$ та $\vec{M}^{\text{зовн}} = 0$. У

нашому прикладі $\vec{F}^{\text{зовн}} = m\vec{g} + \vec{R}$, де \vec{R} – результуюча сил реакції, що діє на тіло через вісь з боку підшипників і прикладені до неї в точках A і A' . Сила тяжіння $m\vec{g}$ компенсується вертикальною складовою сил реакції $\vec{R}_{\text{верт}}$. Тоді

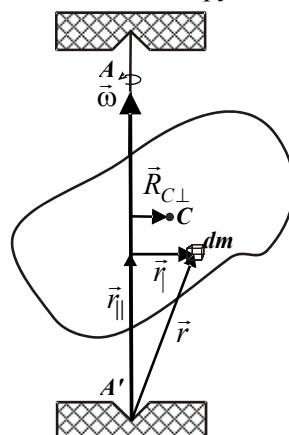


Рис. 6.12. Для відшукання вільних осей обертання

рівняння руху центра мас можна записати у вигляді $\ddot{m\vec{R}_C} = \ddot{\vec{R}}_{\text{топ}}$. Оскільки при обертанні навколо нерухомої осі в загальному випадку всі точки твердого тіла, що не лежать на осі обертання, рухаються по колу, то по колу рухається й центр мас тіла, причому його лінійне прискорення дорівнює $\ddot{\vec{R}}_C = -\omega^2 \vec{R}_{C\perp}$, де $\vec{R}_{C\perp}$ – вектор, початок якого лежить на осі обертання AA' , а кінець – у центрі мас тіла C . Тоді рівняння руху центра мас набуває вигляду $-m\omega^2 \vec{R}_{C\perp} = \ddot{\vec{R}}_{\text{топ}}$, звідки випливає, що $\ddot{\vec{R}}_{\text{топ}} = 0$, а отже, і $\vec{F}^{\text{зовн}} = 0$ тоді і лише тоді, коли $\vec{R}_{C\perp} = 0$, тобто центр мас твердого тіла лежить на осі обертання, або, іншими словами, вісь обертання проходить через центр мас твердого тіла.

Якщо центр мас твердого тіла лежить на осі обертання $\vec{R}_{C\perp} = 0$, то другий доданок у правій частині виразу для моменту зовнішніх сил (6.51) дорівнює нулю. Отже, тепер достатньо встановити, за яких умов дорівнює нулю сумарний момент зовнішніх сил, визначений у системі центра мас тіла, $\tilde{\vec{M}}^{\text{зовн}}$. Цей момент зовнішніх сил є сумаю моментів зовнішніх сил $d\vec{F}^{\text{зовн}} = -dm\omega^2 \vec{r}_{\perp}$, прикладених до кожного елементарного об'єму тіла, що має масу dm і його положення визначається радіус-вектором \vec{r} (рис. 6.12):

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{M}}^{\text{зовн}} &= \int [\vec{r} \times d\vec{F}^{\text{зовн}}] = \int [\vec{r} \times (-dm\omega^2 \vec{r}_{\perp})] = \\ &= -\omega^2 \int [(\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times \vec{r}_{\perp}] dm = -\omega^2 \int [\vec{r}_{\perp} \times \vec{r}_{\parallel}] dm,\end{aligned}\quad (6.57)$$

де інтегрування здійснюється за об'ємом тіла, $dm = \rho(x, y, z) dV$.

Уведемо декартову систему координат з початком O на осі обертання і віссю $OZ \parallel AA'$. Тоді маємо $\vec{r}_{\parallel} = \{0, 0, z\}$ і

$\vec{r}_{\perp} = \{x, y, 0\}$ та

$$\tilde{\vec{M}}^{\text{зовн}} = \omega^2 \int \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} dm = \vec{i} \omega^2 \int yz dm + \vec{j} \omega^2 \int xz dm. \quad (6.58)$$

Два доданки у правій частині рівності (6.58) містять вирази для неосьових моментів інерції $I_{yz} = \int yz dm$ та $I_{xz} = \int xz dm$, які, як відомо, дорівнюють нулю, якщо головні осі тензора інерції твердого тіла збігаються з осями декартової системи координат, у якій їх визначено. Отже, $\tilde{M}_{\text{зовн}}^{\text{30ВН}} = 0$ тоді, коли обертання твердого тіла відбувається навколо однієї з головних осей тензора інерції.

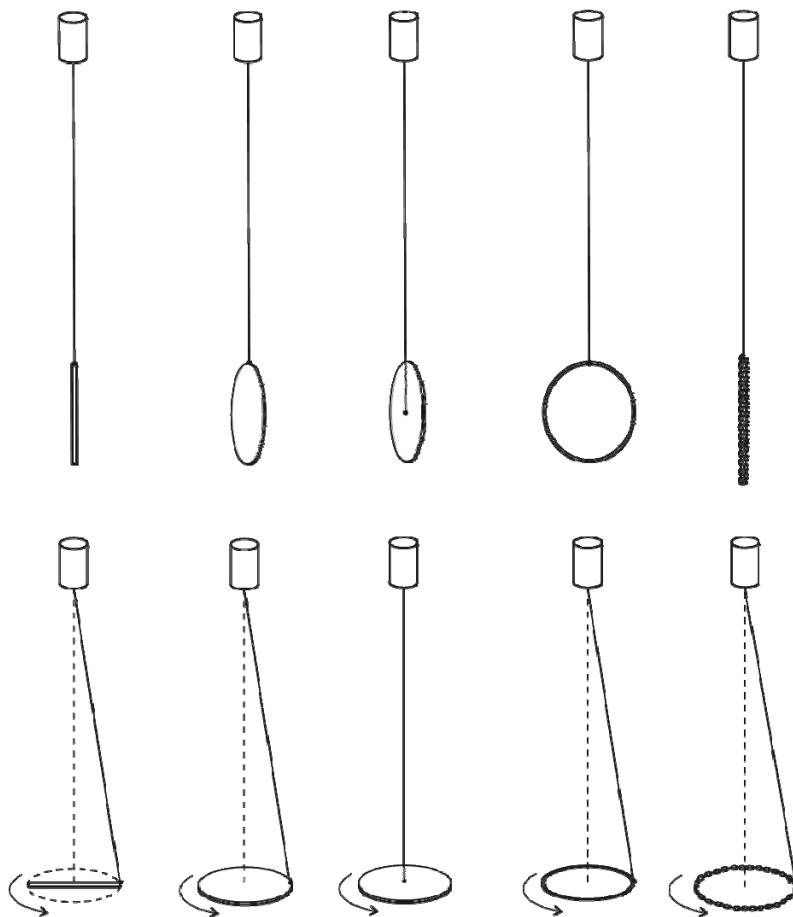


Рис. 6.13. Вільне обертання тіл різної форми

Таким чином, висловлене нами твердження доведено. Воно підтверджується ефектними демонстраційними дослідами (рис. 6.13), у яких тіла різної форми підвішують на нитці, верхній кінець якої прив'язано до вертикально розміщеної осі електродвигуна. Коли ця вісь не обертається, тіла перебувають у положенні рівноваги: лінія підвісу проходить через центр мас тіла, а орієнтація встановлюється така, щоб сумарний момент сил, прикладених до тіла, дорівнював нулю.

Зокрема, сталевий стрижень, на одному з кінців якого закріплено нитку, займає вертикальне положення; плоский круглий алюмінієвий диск і тонке жорстке кільце підвішені в точках на краю, розміщені у вертикальній площині; диск, підвішений за центр, перебуває у стані байдужої рівноваги, а замкнений тонкий ланцюжок складається вдвоє і звисає у вертикальному напрямку. Коли вісь електродвигуна починає обертатися, вона створює механічний обертовальний момент, що закручує нитку підвісу, а через цю нитку цей момент передається підвішенному на ній тілу й примушує його обертатися навколо вертикальної осі. При цьому центр мас тіла залишається на вертикалі, що проходить через точку закріплення нитки на осі електродвигуна, а при зростанні кутової швидкості тіло змінює свою просторову орієнтацію таким чином, щоб вісь обертання збігалася з головною віссю його тензора інерції, відносно якої момент інерції найбільший. При цьому сталевий стрижень, алюмінієві диски і тонке кільце обертаються в горизонтальній площині, а замкнений ланцюжок утворює кільце, яке також обертається в горизонтальній площині подібно до тонкого жорсткого кільця. Вісь обертання при цьому перпендикулярна площинам обертання цих тіл і завжди проходить через їх центр мас. Щодо нитки підвісу, то вона описує конус, вершина якого збігається з точкою її закріплення на осі електродвигуна, а в основі лежить колова траекторія, по якій рухається точка, у якій нитка прикріплена до тіла. Для диска, підвішеного за центр, ця траекторія стягується в точку.

6.7. Динаміка плоского руху твердого тіла

Кожна точка твердого тіла під час плоского руху (див. розд. 2) рухається у площині, паралельній деякій нерухомій площині, що перпендикулярна вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$. При цьому його центр мас як і будь-яка його точка рухається по плоскій траекторії, площаина якої перпендикулярна вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Отже, динаміку плоского руху твердого тіла можна описати рівнянням руху його центра мас:

$$m\ddot{\vec{R}}_C = \vec{F}^{\text{зовн}} \quad (6.59)$$

та рівнянням обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини траекторії:

$$I_C \ddot{\phi} = \tilde{M}_z^{\text{зовн}}. \quad (6.60)$$

При цьому слід пам'ятати (див. п. 5.4.3), що при обчисленні моменту сил $\tilde{M}_z^{\text{зовн}}$ необхідно брати до уваги лише сили взаємодії.

Приклад. Знайдемо прискорення круглого циліндра, що починає скочуватись без ковзання з похилої площини (рис. 6.14), де R_0 – радіус циліндра, m – маса, а I_C – момент інерції відносно осі. До циліндра прикладені дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ у центрі

мас C і сила реакції з боку похилої площини \vec{R} у точці контакту K .

Рівняння руху центра мас циліндра має вигляд

$$m\ddot{\vec{R}}_C = m\vec{g} + \vec{R}. \quad (6.61)$$

Силу реакції \vec{R} можна подати як суму її нормальню та тангенціально складових:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{3\text{ч}}, \quad (6.62)$$

де $\vec{F}_{3\text{ч}}$ – тангенціальна складова, яку називають *силою*

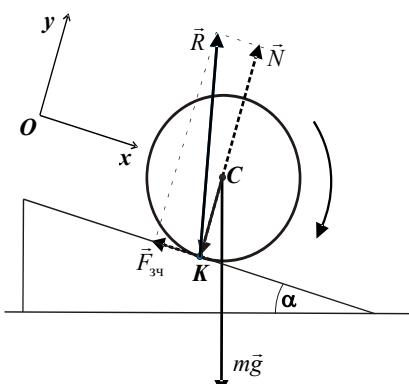


Рис. 6.14. Скочування циліндра з похилої площини

зчеплення поверхні циліндра з похилою площину, а \vec{N} – нормальна складова, яку іноді називають *нормальною силою реакції*. Сумарний момент сил, визначений відносно центра мас, \vec{M}_C :

$$\vec{M}_C = [\vec{R}_{CK} \times \vec{F}_{3q}], \quad (6.63)$$

де \vec{R}_{CK} – радіус-вектор, початок якого лежить у центрі мас, а кінець – у точці дотику K . Оскільки лінії дії сили тяжіння $m\vec{g}$ і нормальної складової \vec{N} сили реакції опори проходять через точку C , то їх момент відносно точки C дорівнює нулю.

Отже, рівняння обертального руху циліндра можна записати так:

$$I_C \ddot{\beta} = [\vec{R}_{CK} \times \vec{F}_{3q}], \quad (6.64)$$

де I_C – момент інерції циліндра відносно його осі, $\ddot{\beta}$ – кутове прискорення циліндра.

Запровадимо прямокутну декартову систему координат, вісь OX якої напрямлена вздовж похилої площини, а вісь $OY \parallel \vec{N}$. Після проектування рівнянь руху циліндра на осі цієї системи координат дістанемо

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_C &= mg \sin \alpha - F_{3q}, \\ m\ddot{Y}_C &= -mg \cos \alpha + N, \\ I_C \ddot{\beta} &= R_{CK} \cdot F_{3q}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

До системи рівнянь (6.65) необхідно додати умову наявності зв'язку (похилої площини), яка обмежує рух, $\dot{Y}_C = 0$, з якої випливає, що $\dot{Y}_C = 0$ і $\ddot{Y}_C = 0$, а також умову чистого кочення, відповідно до якої швидкість точок циліндра, що дотикаються до похилої площини, відносно цієї площини дорівнює нулю (див. формулу (2.54) у розд. 2):

$$\vec{V}_C = -[\vec{\omega} \times \vec{R}_{CK}]. \quad (6.66)$$

З урахуванням цих умов, а також того, що $R_{CK} = R_0$, для відшукання прискорення циліндра $a = \ddot{X}_C$ маємо систему із чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned} (1) \quad m\ddot{X}_C &= mg \sin \alpha - F_{3q}; \\ (2) \quad 0 &= -mg \cos \alpha + N; \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$(3) \quad I_C \beta = R_{CK} \cdot F_{3\text{ч}};$$

$$(4) \quad a = \beta R_0,$$

яка містить чотири невідомих: два прискорення a та β і дві компоненти сили реакції: $F_{3\text{ч}}$ та N . Якщо в рівняння (1) підставити $F_{3\text{ч}}$ із рівняння (3) та β із рівняння (4), отримаємо рівняння, з якого знайдемо прискорення a :

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I_C}{R_0^2}}. \quad (6.68)$$

Корисно порівняти прискорення, з яким скочується циліндр по похилій площині, з прискоренням, з яким він ковзає по цій самій площині (якщо його, напр., поставити на основу і надати похилій площині достатнього нахилу, $\operatorname{tg} \alpha > k$) (див. формулу (3.29) у підрозд. 3.6). Прискорення при поступальному русі тіла по похилій площині $a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$ не залежить від маси тіла, але залежить від величини сили тертя ковзання через коефіцієнт тертя ковзання k . Водночас прискорення, з яким скочується циліндр, не залежить від величини сили зчеплення (вона лише має бути ненульовою, щоб створити момент відносно осі і спричинити обертальний рух циліндра), але залежить від маси циліндра і від його моменту інерції, причому збільшення моменту інерції зменшує прискорення. Для аналізу зручно подати це прискорення у вигляді

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{mR_0^2}}. \quad (6.69)$$

Із цієї формулі видно, що прискорення a залежить лише від кута нахилу площини α і відношення моменту інерції циліндра I_C до величини mR_0^2 . Остання являє собою момент інерції тонкостінного циліндра, маса якого m зосереджена в тонкому циліндричному шарі на відстані R_0 від осі. Це максимально можливий момент інерції для циліндра: для всіх інших циліндрів $I_C < mR_0^2$. Отже, прискорення, з яким скочується циліндр, не

може бути меншим від $\frac{1}{2}g \sin \alpha$. З іншого боку, воно не може бути більшим за $g \sin \alpha$. Зокрема, для однорідного циліндра $I_C = \frac{1}{2}mR_0^2$, а прискорення, з яким він скочується, $\frac{2}{3}g \sin \alpha$.

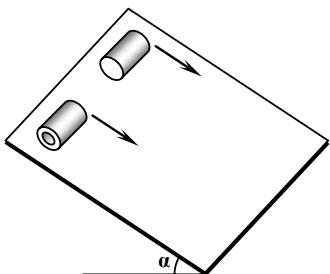


Рис. 6.15. Скочування двох циліндрів з похилої площини

Це підтверджується демонстраційним дослідом, у якому два циліндири, що мають однакові зовнішні розміри та однакові маси, починають скочуватись по похилій площині. Єдина відмінність між циліндрами полягає в тому, один із них суцільний, виготовлений із дерева, а другий, виготовлений з алюмінію, має циліндричну порожнину, тому його маса зосереджена на його периферії (рис. 6.15).

Зауважимо, що нормальнна складова сили реакції N однакова при скочуванні й при ковзанні циліндра, $N = mg \cos \alpha$. Цього не можна сказати про тангенціальну складову сили реакції, якою у випадку ковзання тіла по похилій площині є сила тертя ковзання, модуль якої $F_t^{\text{ковз}} = kN$, а при скочуванні циліндра силою зчеплення $\vec{F}_{\text{зч}}$ фактично є сила тертя спокою, оскільки точки циліндра по лінії контакту (точка K на рис. 6.14 є її проекцією) не ковзають по похилій площині, а нерухомі відносно неї. Модуль цієї сили можна знайти із рівняння (1) після підстановки в нього прискорення a з (6.69):

$$F_{\text{зч}} = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR_0^2}{I_C}}. \quad (6.70)$$

Оскільки сила тертя спокою не може перевищувати максимальне значення, що дорівнює силі тертя ковзання $F_{\text{зч}} < kN$, то з

урахуванням рівностей (6.70) і рівняння (2) системи (6.67) цю умову можна записати так:

$$\frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR_0^2}{I_C}} \leq kmg \cos \alpha,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \alpha \leq k \left(1 + \frac{mR_0^2}{I_C}\right), \quad (6.71)$$

тобто чисте кочення циліндра може відбуватися лише за кутів нахилу площини, менших від деякого певного значення. За перевищення цього значення циліндр здійснюватиме плоский рух із ковзанням: обертання циліндра відбувається під дією моменту сили тертя ковзання $kmg \cos \alpha$, а центр мас циліндра рухатиметься з прискоренням $a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$, тобто так само, як і брусою, ковзання якого по похилій площині було розглянуто в підрозд. 3.6.

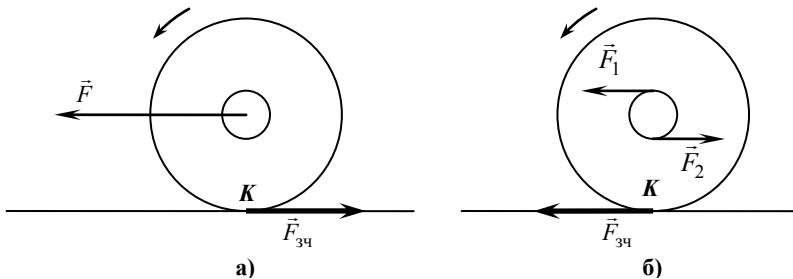


Рис. 6.16. До визначення напрямку сили зчеплення

Практично важливими випадками плоского руху є рух коліс транспортних засобів. Варто вказати на певні особливості цих рухів. Колесо воза або автомобільного причепа обертається за рахунок того, що при переміщенні його осі під дією прикладеної до неї сили \vec{F} (рис. 6.16, a), унаслідок взаємодії ободу колеса в точці K його контакту з поверхнею, на яку спирається колесо, виникає момент \vec{M} сили зчеплення (тертя) \vec{F}_{3q} відносно осі, $\vec{M} = [\vec{R}_0 \times \vec{F}_{3q}]$, де \vec{R}_0 – радіус-вектор, проведений від осі обертання колеса до точки K . Сила \vec{F}_{3q} у цьому випадку

напрямлена **протилежно** напрямку руху осі колеса. Це можна пояснити таким чином. Нехай колесо, що може вільно обертатися навколо осі, спочатку рухається поступально поблизу опорної поверхні з деякою швидкістю \vec{V}_O , напрямленою на рис. 6.16, а ліворуч. У момент дотику до опорної поверхні швидкість нижньої точки K колеса $\vec{v}_K = \vec{V}_O$. Унаслідок цього виникає сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{т}}^{\text{ковз}} = -kN \frac{\vec{v}_K}{v_K}$, прикладена до

колеса в точці K , напрямлена протилежно напрямку руху осі колеса \vec{V}_O . Момент цієї сили \vec{M} спричиняє обертання колеса, унаслідок чого зменшуються швидкість нижньої точки K колеса відносно поверхні, \vec{v}_K , оскільки тепер вона, як було показано в п. 2.2.5 (формула (2.53)), є сумою швидкості поступального руху осі колеса \vec{V}_O і лінійної швидкості, яку має нижня точка ободу внаслідок обертання колеса навколо осі $\vec{v}_K = \vec{V}_O + [\vec{\omega} \times \vec{R}_0]$. У результаті через деякий час швидкість \vec{v}_K зменшується до нуля і колесо переходить у режим чистого кочення, при якому виконується умова $\vec{V}_O = -[\vec{\omega} \times \vec{R}_0]$. При цьому ковзання припиняється, модуль сили тертя, яка відтепер є силою тертя спокою (силою зчеплення) \vec{F}_{3q} , стає меншим від модуля сили ковзання, але її напрямок залишається незмінним і **протилежним** напрямку поступального руху осі обертання.

За вищеведеним сценарієм відбувається розкручування колеса літака під час його приземлення. У момент дотику колеса літака до поверхні бетону можна спостерігати інтенсивне утворення диму в точці контакту з бетоном, яке триває доти, поки відбувається ковзання, а отже, на колесо діє дисипативна сила тертя ковзання. Після переходу колеса в режим кочення утворення диму припиняється.

У випадку ведучих коліс, наприклад, автомобіля або велосипеда (рис. 6.16, б), колесо здійснює обертальний рух за рахунок сумарного моменту пари сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , $\vec{M} = [\vec{r}_{01} \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_{02} \times \vec{F}_2]$, де $\vec{r}_{01}, \vec{r}_{02}$ – радіус-вектори, проведені від осі обертання колеса

до точок прикладання пари сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 . У цьому випадку сила, яка рухає колесо (а разом з ним і транспортний засіб) у горизонтальному напрямку, виникає внаслідок взаємодії обода колеса з поверхнею, на яку спирається колесо – це сила зчеплення (тертя) $\vec{F}_{3\text{ч}}$. Напрямок цієї сили можна встановити з таких міркувань. Уявимо, що спочатку колесо обертається у вказаному на рис. 6.16, б напрямку, але контакту з опорною поверхнею немає. При цьому вектор швидкості \vec{v}_K нижньої, найближчої до опорної поверхні, точки K обода колеса, направлений праворуч. Після приведення колеса в контакт з поверхнею виникає сила тертя ковзання, прикладена до обода колеса в точці контакту K , яка, як завжди, направлена протилежно вектору швидкості \vec{v}_K , з якою нижня точка обода колеса рухається відносно поверхні, тобто ліворуч на рис. 6.16. Ця сила є єдиною силою, що спричинює прискорення колеса в горизонтальному напрямку (ліворуч на рис. 6.16). Виникнення швидкості осі колеса в зазначеному напрямку зменшує відносну швидкість точки K обода \vec{v}_K , оскільки тепер вона (див. п. 2.2.5, формула (2.53)) є сумаю швидкості поступального руху осі колеса \vec{V}_O і лінійної швидкості, яку має нижня точка K обода внаслідок обертання колеса навколо осі $\vec{v}_K = \vec{V}_O + [\vec{\omega} \times \vec{R}_0]$, де \vec{R}_0 – радіус-вектор, проведений від осі обертання колеса до точки контакту K його обода з поверхнею. У результаті через деякий час швидкість \vec{v}_K зменшується до нуля і колесо переходить у режим чистого кочення, при якому виконується умова $\vec{V}_O = -[\vec{\omega} \times \vec{R}_0]$. При цьому ковзання припиняється, модуль сили тертя, яка відтепер є силою тертя спокою (силою зчеплення) $\vec{F}_{3\text{ч}}$, стає меншим від модуля сили ковзання, але її напрямок залишається незмінним і **збігається** з напрямком поступального руху осі обертання. Підкреслимо, що в режимі чистого кочення сила тертя спокою (сила зчеплення) $\vec{F}_{3\text{ч}}$ завжди є недисипативною силою¹, оскільки її

¹ Це твердження справедливе для моделі абсолютно твердого тіла. При чистому коченні реальних тіл відбуваються втрати механічної енергії за рахунок непружніх деформацій колеса та опорної поверхні, а також за рахунок утворення і розривів молекулярних зв'язків при коченні.

потужність $N = \vec{F}_{3\text{q}} \cdot \vec{v}_K$ дорівнює нулю внаслідок того, що при чистому коченні $\vec{v}_K = 0$.

Існують випадки, коли неможливо наперед встановити напрямок сили тертя (зчеплення) $\vec{F}_{3\text{q}}$ при його чистому коченні по деякій поверхні з простих міркувань, як це було зроблено вище. Прикладом може бути рух ведучого колеса автомобіля, який витягують зі снігу чи з піску за допомогою троса. При цьому одночасно відмінні від нуля як прикладені до осі колеса сила \vec{F} , так і момент пари сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 з боку двигуна (рис. 6.17). Тоді для визначення $\vec{F}_{3\text{q}}$ необхідно розв'язати повну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\vec{R}}_C = \sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн}}, \\ I_C \ddot{\vec{\beta}} = \left| \sum_i \vec{M}_i^{\text{зовн}} \right|_z \frac{\ddot{\vec{\beta}}}{|\ddot{\vec{\beta}}|}, \\ \ddot{\vec{R}}_C = -[\ddot{\vec{\beta}} \times \vec{R}_K], \end{array} \right. \quad (6.72)$$

де \vec{R}_K – радіус-вектор, початок якого лежить на осі обертання, а кінець – у точці контакту K ; $\vec{F}_i^{\text{зовн}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} + \vec{F}_{3\text{q}}$ і

$$\sum_i \vec{M}_i^{\text{зовн}} = [\vec{r}_{01} \times \vec{F}] + [\vec{r}_{02} \times \vec{F}] + [\vec{R}_0 \times \vec{F}_{3\text{q}}].$$

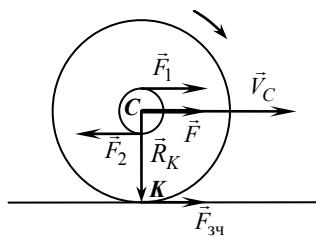


Рис. 6.17. До визначення напрямку сили зчеплення

Дуже повчальним щодо визначення напрямку сили тертя зчеплення є плоский рух котушки, з якої розмотується нитка (див. впр. 6.6).

6.8. Рух гіроскопів та гіроскопічні сили

6.8.1. Рух гіроскопів

Гіроскопом називають масивне аксіально симетричне тіло (симетричну дзигу), що обертається з великою кутовою швидкістю навколо своєї осі симетрії. Прикладом гіроскопа є дитяча дзига. Якщо намагатися поставити її вертикально без обертання, то вона відразу впаде. Якщо ж їй надати швидкого обертання навколо осі симетрії й так обережно поставити на горизонтальну поверхню, щоб напрямок її осі був близьким до вертикалі, то вона здатна тривалий час зберігати цей напрямок. При цьому можна помітити, що вісь дзиги описує конус навколо вертикалі, причому дзига не падає навіть за значного відхилення від вертикалі, якщо кутова швидкість ω її обертання навколо власної осі симетрії достатньо велика. Це явище називають *прецесією* осі гіроскопа. Чим більша швидкість ω , тим менша кутова швидкість прецесії Ω , з якою вісь дзиги описує конус навколо вертикалі. Швидкість ω поступово зменшується внаслідок втрати енергії за рахунок роботи дисипативних сил тертя в точці опори та опору повітря: при цьому збільшується Ω і кут відхилення від вертикалі і дзига врешті-решт падає.

Змушена прецесія гіроскопа. На рис. 6.18 схематично показано гіроскоп, що здійснює описаний вище прецесійний рух. Для пояснення його особливостей запишемо рівняння руху

$$m\ddot{\vec{R}}_C = m\vec{g} + \vec{R} \quad (6.73)$$

та

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{зовн.}} \quad (6.74)$$

Оскільки $\omega \gg \Omega$, то з хорошим наближенням можна вважати, що момент імпульсу гіроскопа відносно точки опори O $\vec{L} = \vec{L}_\omega + [\vec{R}_C \times \vec{P}] = \vec{L}_\omega + \vec{L}_\Omega$ повністю визначається його власним моментом імпульсу \vec{L}_ω обертання навколо осі симетрії, що проходить через центр мас C . Дійсно, модуль власного моменту імпуль-

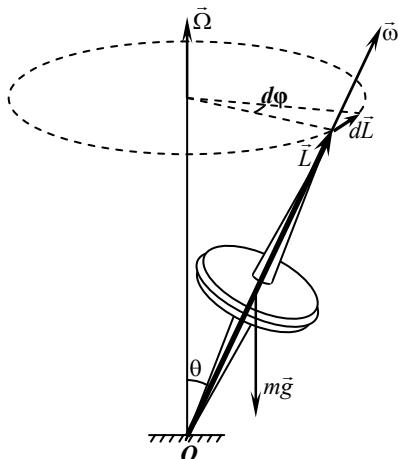


Рис. 6.18. Змушена прецесія гіроскопа

величини власного моменту буде $L_\omega = m r_C^2 \omega$. Оскільки величини r_C і R_C мають один порядок (на практиці завжди $R_C < r_C$), а ω перевищує Ω на декілька порядків, то можна вважати, що $\vec{L}_\omega \gg \vec{L}_\Omega$, тобто $\vec{L} \approx \vec{L}_\omega$. Через те, що постійний за модулем вектор моменту імпульсу \vec{L} обертається з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ навколо вертикальної осі, похідна від нього за часом є

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}]. \quad (6.75)$$

Момент зовнішніх сил відносно точки O створюється лише силою тяжіння, яку в однорідному полі можна вважати прикладеною до центра мас гіроскопа C :

$$\vec{M}^{\text{зовн}} = [\vec{R}_C \times \vec{mg}]. \quad (6.76)$$

Отже,

$$[\vec{\Omega} \times \vec{L}] = [\vec{R}_C \times \vec{mg}]. \quad (6.77)$$

З урахуванням того, що $\vec{L} = I\vec{\omega}$, можна записати

$$\Omega I \omega \cdot \sin \theta = l mg \cdot \sin \theta, \quad (6.78)$$

де l – відстань від точки O до центра мас гіроскопа, звідки знаходимо кутову швидкість прецесії

су $L_\omega = I\omega$, а модуль "орбітального" моменту імпульсу \vec{L}_Ω , пов'язаного з рухом гіроскопа як цілого, що визначається рухом точки його центра мас C по колу радіуса R_C унаслідок прецесії, є $mR_C^2\Omega$. Осьовий момент I симетричної дзиги не може перевищувати величину mr_C^2 , де r_C – радіус дзиги (уся маса дзиги має бути розміщена в тонкому кільці радіуса r_C). Тоді верхньою оцінкою

$$\Omega = \frac{lmg}{I\omega}. \quad (6.79)$$

Таким чином, кутова швидкість прецесії гіроскопа не залежить від кута нахилу його осі, а лише від кутової швидкості його обертання навколо осі симетрії, причому відповідно до спостережень чим більше ω , тим менше Ω . Для виникнення розглянутої прецесії необхідна наявність моменту зовнішніх сил, тому таку прецесію називають *змушеною*.

Якщо невелику дзигу розкрутити й обережно поставити на лист картону або фанери, а потім підкинути її вгору, то в польоті дзига зберігає напрямок осі обертання (рис. 6.19), тобто змушена прецесія відсутня, оскільки на дзигу діє лише однорідна сила тяжіння, яка, як відомо, не створює момент сили. Проте детальний аналіз показує, що за певних початкових умов і для вільного гіроскопа може спостерігатися прецесія його осі.

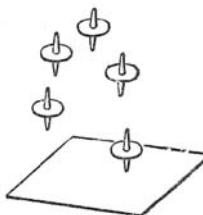


Рис. 6.19. До поведінки гіроскопа за відсутності моменту зовнішніх сил

Регулярна прецесія гіроскопа. Розглянемо рух вільного гіроскопа, на який не діють зовнішні сили. Як і для будь-якої замкненої системи частинок, для такого гіроскопа виконуються закони збереження імпульсу \vec{P} , моменту імпульсу \vec{L} та кінетичної енергії T . Нас не цікавить тривіальний прямолінійний і рівномірний рух гіроскопа як цілого, тому будемо розглядати лише обертовий рух у системі його центра мас¹. У той час коли напрямок і величина вектора власного моменту імпульсу вільного гіроскопа не змінюються, $\vec{L} = \text{const}$, на напрямок осі гіроскопа закони збереження ніяких обмежень не накладають. Тому в загальному випадку напрямок осі гіроскопа не збігається з напрямком вектора момента імпульсу \vec{L} . Оберемо систему координат з початком у центрі мас гіроскопа так, щоб вісь OZ була паралельною осі гіроскопа, а вісь OX лежала у площині, в якій

¹ Цей розгляд повністю застосовний і до гіроскопа, що рухається в однорідному полі тяжіння.

лежать вектор \vec{L} і вісь гіроскопа (рис. 6.20). Тоді вісь OY буде перпендикулярна до цієї площини і направлена до читача. За такого вибору системи координат $L_y = I_2 \omega_y = 0$, звідки $\omega_y = 0$.

Таким чином, напрямки \vec{L} , $\vec{\omega}$ і вісь гіроскопа в кожний момент часу лежать в одній площині. Звідси випливає, що швидкості всіх точок осі гіроскопа $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ у кожний момент часу перпендикулярні згаданій площині, а тому і сама вісь гіроскопа обертається навколо направлена вектора \vec{L} та описує при цьому коловий конус (рис. 6.20). Це явище називається *регулярною прецесією* гіроскопа. При цьому і кутова швидкість прецесії Ω , і кутова швидкість обертання гіроскопа навколо своєї осі симетрії (напрямку OZ) ω_z сталі. Це можна показати з таких міркувань. Запишемо вирази для кінетичної енергії та квадрата вектора моменту імпульсу гіроскопа:

$$T = \frac{L_x^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_3} = \text{const}, \quad (6.80)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_z^2 = \text{const}. \quad (6.81)$$

З урахуванням (6.81) вираз (6.80) можна подати як

$$T = \frac{L^2}{2I_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L_z^2 = \text{const}, \quad (6.82)$$

звідки випливає, оскільки $L^2 = \text{const}$, то і $L_z^2 = \text{const}$, тоді і $\omega_z = \text{const}$.

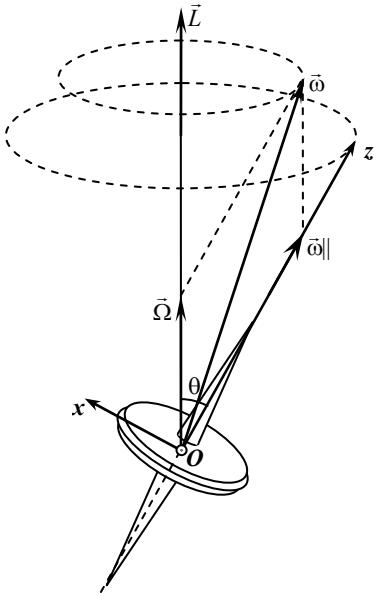


Рис. 6.20. Регулярна прецесія вільного гіроскопа

Отже, у процесі руху вільного гіроскопа залишається сталим як кут θ між віссю симетрії гіроскопа і незмінним у просторі напрямком вектора \vec{L} , так і кут між віссю симетрії гіроскопа і вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$. Тоді з виразу (6.81) випливає, що і $\omega_x = \text{const}$. Із рис. 6.20 видно, що вектор $\vec{\omega}$ можна подати у вигляді суми двох складових: паралельної осі гіроскопа (напрямку OZ) і паралельної вектору \vec{L} , $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\Omega}$. Перша з них, $\vec{\omega}_{\parallel}$, не приводить ні до якого переміщення осі симетрії гіроскопа, а друга, $\vec{\Omega}$, є кутовою швидкістю обертання вектора $\vec{\omega}_{\parallel}$, а разом з ним і осі гіроскопа та вектора $\vec{\omega}$ навколо незмінного напрямку вектора \vec{L} . Із рис. 6.20 випливає, що ортогональна проекція Ω_x вектора $\vec{\Omega}$ на вісь OX є

$$\Omega \sin \theta = \omega_x. \quad (6.83)$$

З іншого боку,

$$\omega_x = \frac{L_x}{I_1} = \frac{L \sin \theta}{I_1}. \quad (6.84)$$

Із порівняння (6.83) та (6.84) отримаємо

$$\Omega = \frac{L}{I_1}. \quad (6.85)$$

Таким чином, при регулярній прецесії гіроскопа навколо незмінного в просторі напрямку вектора моменту імпульсу \vec{L} рівномірно обертається з кутовою швидкістю Ω вісь самого гіроскопа, а разом з нею і вектор кутової швидкості гіроскопа $\vec{\omega}$, які в кожний момент часу лежать в одній площині, що проходить через вектор \vec{L} . При цьому сам гіроскоп рівномірно обертається навколо своєї осі симетрії з кутовою швидкістю ω_z , яка є ортогональною проекцією вектора кутової швидкості гіроскопа $\vec{\omega}$ на вісь його симетрії і її величина визначається формулою

$$\omega_z = \frac{L_z}{I_3} = \frac{L \cos \theta}{I_3}. \quad (6.86)$$

Кутова швидкість Ω прецесії, як видно з (6.85), тим менша, чим менша складова ω_x вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$. При наближенні напрямку вектора $\vec{\omega}$ до напрямку осі гіроскопа

$\omega_x \rightarrow 0$, а період регулярної прецесії прямує до нескінченості. Унаслідок цього прецесію спостерігати неможливо. Дійсно, вісь гіроскопа є головною віссю інерції, отже, навколо неї можливе вільне обертання. Зрозуміло також, що прецесія неможлива у випадку сферичної дзиги, оскільки для неї будь-яка вісь, що проходить через центр мас є віссю вільного обертання.

Оскільки Земля сплюснута в напрямку полярної осі, то вона є симетричною, а не сферичною дзигою, хоча різниця між її головними моментами інерції дуже мала: $(I_1 - I_2) / I_1 = -0,0033$. Моменти зовнішніх сил, що діють на Землю, насамперед з боку Місяця та Сонця, настільки малі, що її обертання можна розглядати в першому наближенні як вільне, з періодом регулярної прецесії земної осі порядку року. При цьому точка виходу осі обертання Землі на її поверхню не віддаляється від Північного полюса більше як на 5 м. Цю прецесію при вільному русі Землі не слід плутати з дуже повільною (період 26 тис. років) змушеною прецесією осі обертання Землі навколо нормалі до площини її орбіти, що відбувається під дією моментів сил притягання з боку Місяця та Сонця.

Гіроскоп у кардановому підвісі. Рух гіроскопа зручно вивчати, якщо закріпити його вісь у так званому кардановому підвісі, що надає можливість як для обертання тіла гіроскопа (*ротора*) навколо цієї осі, так і довільних поворотів самої осі навколо

центрата мас гіроскопа. На рис. 6.21 показано гіроскоп, ротор якого являє собою масивний диск, а вісь симетрії AA' проходить через підшипники A та A' , закріплени у внутрішньому кільці карданового підвісу, яке, у свою чергу, має можливість обертатися навколо осі BB' , що проходить через підшипники B та B' , закріплени в зовнішньому кільці карданового підвісу. При цьому напрямки осей AA' та BB' взаємно перпендикулярні. Зовнішнє кільце має можливість обертатися навколо осі DD' , яка

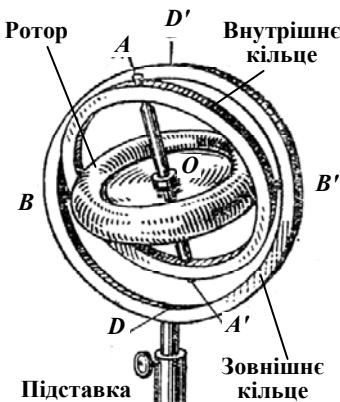


Рис. 6.21. Гіроскоп у кардановому підвісі

проходить через підшипники, встановлені на підставці гіроскопа, причому її напрямок перпендикулярний напрямку осі BB' . Усі три осі AA' , BB' і DD' перетинаються в точці O , де лежить центр мас гіроскопа C . При розгляді обертального руху ротора цю точку можна вважати нерухомою. При такому закріпленні ротор і кільця будуть завжди перебувати у рівновазі, оскільки рівнодійна однорідної сили тяжіння прикладена до центра мас – точки перетину осей і, таким чином, сумарний момент сил відносно цієї точки дорівнює нулю. Тертя в підшипниках, що підтримують ротор і кільця, намагаються зробити якомога меншим. Такий гіроскоп можна з дуже хорошим наближенням вважати вільним.

Коли ротор не обертається навколо своєї осі симетрії, то можна, прикладаючи невелике зусилля до будь-якого з кілець, примусити його разом з кільцями обертатися навколо довільної осі. Зокрема, якщо вдарити невеликою паличкою по осі ротора поблизу одного з його підшипників, то вона починає швидко обертатися разом з внутрішнім кільцем. Якщо ж повільно (без значних прискорень) переміщувати підставку гіроскопа в просторі, змінюючи орієнтацію осі DD' , то разом з нею буде змінюватись і орієнтація осі ротора AA' . Це можливо тому, що повністю усунути тертя в підшипниках карданового підвісу не вдається.

Ситуація кардинально змінюється, якщо надати ротору швидкого обертання навколо його осі симетрії: власне, лише внаслідок цього ротор стає гіроскопом, оскільки відтепер він має значний момент імпульсу $\vec{L} = I\vec{\omega}$, спрямований уздовж його осі симетрії. Тепер зміна орієнтації підставки, а разом з нею й орієнтації осі DD' , при будь-яких її поворотах і переміщеннях не призводить до зміни орієнтації осі симетрії гіроскопа AA' . Її напрямок одразу після розкручування гіроскопа визначається постійним за величиною і напрямком вектором моменту імпульсу $\vec{L} = \text{const}$, оскільки при розміщенні гіроскопа в кардановому підвісі сумарний момент зовнішніх сил дорівнює нулю, $\vec{M}^{\text{зовн}} = 0$. Подібне спостерігалося в досліді з підкидання дзиги, коли вона перебувала у вільному польоті (рис. 6.19).

Удар тією самою паличкою по осі ротора, що швидко обертається, не викликає жодних видимих наслідків: напрямок осі ро-

тора залишається незмінним. Цю відмінність поведінки ротора, що обертається, від ротора, що не обертається, можна легко зрозуміти. В обох випадках ротору при ударі надається деякий імпульс $d\vec{p}$, унаслідок чого виникає приріст моменту імпульсу $d\vec{L} = [\vec{r} \times d\vec{p}]$, де \vec{r} – радіус-вектор точки, у якій завдано удару, визначений відносно центра мас ротора. Оскільки момент імпульсу ротора, що не обертається, до удару дорівнює нулю, $\vec{L} = 0$, то виникнення приросту моменту імпульсу $d\vec{L}$ приводить до повороту ротора навколо осі, що перпендикулярна осі симетрії ротора і паралельної $d\vec{L}$, з подальшим обертанням за інерцією з кутовою швидкістю порядку 1 об./с, яке і спостерігаємо. Той самий приріст моменту імпульсу $d\vec{L} = [\vec{r} \times d\vec{p}]$ у випадку розкрученого до великої кутової швидкості ротора (десятки обертів на секунду) є лише дуже малим додатком до його великого моменту імпульсу $\vec{L} = I\vec{\omega}$, унаслідок чого кут, на який відхилився вісь ротора від свого початкового напрямку, тобто кут α між векторами \vec{L} та $\vec{L} + d\vec{L}$ дуже малий $\alpha \approx \frac{dL}{L}$ і непомітний в умовах нашого досліду.

Властивість вільного гіроскопа зберігати початковий напрямок осі обертання знаходить різноманітні технічні застосування в системах наведення торпед, ракет тощо. З гіроскопом у кардановому підвісі зручно вивчати явище змушеної прецесії. Якщо розмістити вісь ротора горизонтально і надати йому швидкого обертання, а потім натиснути на внутрішнє кільце карданова підвісу, наприклад донизу, то ротор замість того, щоб обертатися навколо горизонтальної осі, почне повертатися разом із зовнішнім кільцем навколо вертикальної осі. Якщо в тому самому місці внутрішнього кільця натиснути на нього вгору, то знову почнеться обертання осі ротора навколо вертикальної осі, але тепер у протилежний бік. Можна помітити, що обертання осі ротора виникає одразу після натискання і миттєво зникає після його припинення: відсутня будь-яка інерційність.

Якщо на внутрішнє кільце карданова підвісу покласти зверху невеличку сталеву кульку (на пластиліні), то кільце трошки нахилившись, починає рівномірно обертатися разом із ротором гіроскопа і зовнішнім кільцем навколо вертикальної осі DD' : ми маємо змушену прецесію гіроскопа під дією моменту сили тяжіння, яка діє на кульку, у повній відповідності з розглянутою вище наближеною теорією прецесійного руху дзиги. Дійсно, з рівняння моментів (6.74) добре видно, що зникнення моменту зовнішніх сил одразу призводить до виконання умови збереження вектора моменту імпульсу \vec{L} : вісь гіроскопа залишається в тому положенні, у якому вона була на момент зникнення моменту зовнішніх сил (згадаємо підкидання дзиги!). Інше корисне пояснення такої, на перший погляд, незвичної поведінки гіроскопа можна зробити на підставі рівняння (6.79), з якого випливає, що моменту сили, прикладеному до гіроскопа, прямо пропорційна кутова **швидкість** прецесії Ω , а **не** кутове **прискорення**. Отже, зникнення моменту сили тяжіння ($I\ddot{\theta} = 0$) призводить до миттевого припинення прецесії ($\Omega = 0$).

Зауважимо, що детальний розгляд руху гіроскопа за наявності моменту сили тяжіння показує, що крім змушеної прецесії відбувається так звана *нутація* осі гіроскопа, тобто періодичні зміни кута θ між віссю гіроскопа і віссю прецесії. Зі збільшенням початкової кутової швидкості гіроскопа (дзиги) амплітуда нутації швидко зменшується, а частота збільшується. На практиці нутація швидко загасає внаслідок дисипативних сил тертя в підшипниках гіроскопа (в опорі дзиги), і вона стає непомітною. Тому здається, що вісь гіроскопа (дзиги) здійснює рівномірну прецесію навколо вертикальної осі, і таку прецесію, зовні подібну до регулярної, називають *псевдорегулярною*. В наближеній теорії нутація відсутня, що призводить до парадоксального висновку про те, що вісь дзиги, якщо її вивільнити, буцімто зразу починає прецесійний рух у напрямку, *перпендикулярному* силі тяжіння. Насправді, прецесія виникає не одразу, тобто вісь починає рух зі стану спокою без нескінченно великих прискорень: вивільнений гіроскоп (дзига) починає опускатися під дією сили тяжіння і, набуваючи швидкості, починає прецесійний рух.

6.8.2. Гіроскопічні сили

Наявність прискорення частинки відносно деякої ICB свідчить про те, що на цю частинку діє якась сила, яка спричинює це прискорення, і її напрямок відповідно до другого закону Ньютона збігається з напрямком спостережуваного прискорення. Аналогічно, обертання осі гіроскопа свідчить про те, що на такий гіроскоп діють якісь сили, момент яких збігається з напрямком повороту осі гіроскопа, а точніше, з напрямком повороту його вектора моменту імпульсу \vec{L} , як випливає з рівняння моментів (6.2).

Розглянемо поворот осі гіроскопа, схематично зображеного на рис. 6.22. Вісь обертання ротора гіроскопа AA' лежить у горизонтальній площині й може обертатися навколо нерухомої вертикальної осі OO' при повороті рамки-паралелограма. Цю рамку можна повернути навколо вертикальної осі OO' , прикладавши до неї силу $\vec{F}^{\text{зовн}}$ у горизонтальній площині. Разом із рамкою навколо вертикальної осі OO' повертається вісь гіроскопа AA' , а разом з нею, залишаючись у горизонтальній площині, і вектор моменту імпульсу гіроскопа $\vec{L} = I\vec{\omega}$. При цьому за елементарний проміжок часу dt виникає приріст вектора моменту імпульсу гіроскопа $d\vec{L}$, який відповідно до рівняння моментів (6.2) можна подати у вигляді $d\vec{L} = \vec{M}dt$, де \vec{M} – відповідний момент пари сил \vec{F} , прикладених до осі гіроскопа AA' , $\vec{M} = 2[\vec{l} \times \vec{F}]$, де \vec{l} – радіус-вектор з початком у центрі мас ротора, кінець якого вказує точку прикладення до осі гіроскопа сили \vec{F} з боку рамки.

Таким чином, горизонтальний приріст вектора моменту імпульсу гіроскопа $d\vec{L}$ може виникнути лише за рахунок співнапрямленого з ним моменту сил \vec{M} , що також лежить у горизонтальній площині. Цей момент сил \vec{M} може виникнути лише за рахунок пари сил \vec{F} , прикладених до осі гіроскопа AA' у вертикальному напрямку з боку рамки (рис. 6.22). За третім законом Ньютона до рамки з боку осі гіроскопа прикладені сили реакції \vec{F}' , які

створюють момент \vec{M}' відносно центра мас ротора, $\vec{M}' = 2[\vec{l} \times \vec{F}']$. Цей момент напрямлено протилежно моменту \vec{M} , тобто $\vec{M}' = -\vec{M}$. Бачимо, що момент сил \vec{M} спричинив би поворот осі ротора AA' у вертикальній площині, але цього не відбувається завдяки наявності моменту \vec{M}' сил \vec{F}' . Ці сили \vec{F}' , що прикладені до осі гіроскопа з боку рамки і виникають при спробі змінити напрямок осі обертання гіроскопа, називають *гіроскопічними силами*, а їх момент – *гіроскопічним моментом* (рис. 6.22). Зауважимо, що в розглянутому прикладі гіроскоп не здатний протидіяти зміні напрямку його осі обертання.

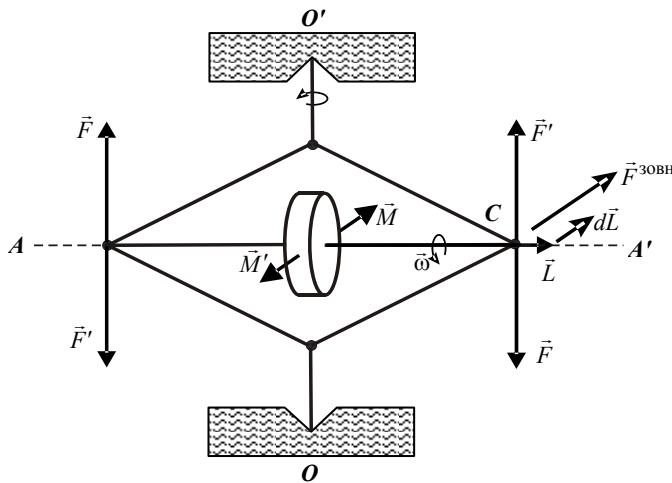


Рис. 6.22. До пояснення виникнення гіроскопічних сил

Виникнення гіроскопічних сил при спробі змінити напрямок осі обертання гіроскопа називають *гіроскопічним ефектом*. Гіроскопічний ефект спостерігається при поворотах різних машин і механізмів, що містять частини, які швидко обертаються: вали двигунів, трансмісій, ротори електродвигунів, турбін тощо. Найбільше він виявляється у транспортних засобах, які можуть мати значну кутову швидкість при поворотах: підшипники валу турбіни на кораблі або газової турбіни і компресора в турбореактивному двигуні літака зазнають значних навантажень при маневрах.

Гіроскопічні сили і гіроскопічний момент безпосередньо відчутні, якщо тримати в руках вісь тіла, що швидко обертається, наприклад, велосипедне колесо (розд. 5, досліди з лавою Жуковського). Під час спроби змінити напрямок осі обертання вісь тіла буквально вириватиметься з рук у напрямку, що перпендикулярний бажаному напрямку повороту. Для того щоб утримати вісь в руках і здійснити свій намір, необхідно прикласти до неї значне зусилля, причому тим більше, чим більша швидкість, з якою здійснюється поворот. Неготовність до повороту в неочікуваному "перпендикулярному" напрямку осі обертання ручного інструменту типу "болгарки", ручних шліфувальних машин, дрілів тощо може спричинити тяжкі травми.

Розглянемо дію гіроскопічного моменту на гіроскоп, вісь обертання якого AA' має можливість обертатися навколо горизонтальної осі OO' разом з рамкою-паралелограмом, яка, у свою чергу, має можливість обертатися навколо вертикальної осі разом з U-подібною підставкою (рис. 6.23).

Почнемо обертати підставку з кутовою швидкістю ω' навколо вертикальної осі. При цьому, як і в попередньому випадку, за елементарний проміжок часу dt виникне приріст вектора моменту імпульсу гіроскопа $d\vec{L}_1$, що лежить у горизонтальній площині й направлений за площину рисунка. Такий приріст через рівняння моментів пов'язаний з моментом сил \vec{M}_1 , що співна-прямлений з вектором $d\vec{L}_1$ і зумовлений дією на вісь гіроскопа AA' пари сил \vec{F} з боку рамки-паралелограма. За третім законом Ньютона з боку осі гіроскопа на рамку-паралелограм діють гіроскопічні сили \vec{F}' , що створюють гіроскопічний момент \vec{M}'_1 (на рисунку не показаний), під дією якого, на відміну від попереднього випадку, рамка почне повернутися навколо горизонтальної осі OO' , а разом з нею й вісь гіроскопа AA' , унаслідок чого вектор \vec{L} набуде елементарного приросту $d\vec{L}_2$, спрямованого вгору. Виникнення цього приросту $d\vec{L}_2$ завдячує існуванню відповідного моменту сил \vec{M}_2 , також направленого вгору, що вини-

кає внаслідок дії сил, прикладених до осі гіроскопа AA' з боку рамки-паралелограма (не показані на рисунку). У результаті вектор \vec{L} , а разом з ним і вісь гіроскопа OO' , наблизятимуться до напрямку вектора $\vec{\omega}'$, тобто до напрямку вектора кутової швидкості обертання підставки.

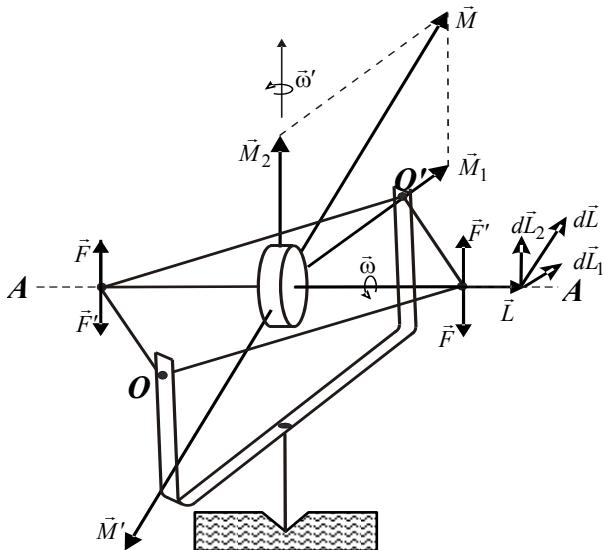


Рис. 6.23. Гіроскопічний ефект у двостепеневому гіроскопі

Зазначимо, що хоча ми й розглянули ланцюжок послідовних процесів, кожен з яких є наслідком попереднього, починаючи з обертання підставки навколо вертикальної осі й закінчуючи виникненням приросту моменту імпульсу $d\vec{L}_2$, але насправді всі ці процеси відбуваються одночасно, у результаті чого момент імпульсу гіроскопа \vec{L} за елементарний проміжок часу dt набуває приросту $d\vec{L} = d\vec{L}_1 + d\vec{L}_2$. З іншого боку, відповідно до рівняння моментів $d\vec{L} = \vec{M}dt$, де $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$. При цьому на рамку, яка підтримує вісь гіроскопа, діє гіроскопічний момент \vec{M}' , причому $\vec{M}' = -\vec{M} = -(\vec{M}_1 + \vec{M}_2)$ (рис. 6.23). Отже, гіроскопічний мо-

мент \vec{M}' можна подати у вигляді двох складових $\vec{M}'_1 = -\vec{M}_1$ та $\vec{M}'_2 = -\vec{M}_2$. Перша з них викликає поворот рамки навколо горизонтальної осі OO' , а друга, на відміну від попереднього випадку, протидіє повороту навколо вертикальної осі всієї системи разом з U-подібною підставкою.

Гіроскопічний ефект лежить в основі дії різноманітних пристрій, у яких використовують гіроскопи, серед яких гірокомпаси, гіростабілізовані платформи на кораблях, ракетах, космічних об'єктах, гіроскопічні стабілізатори напрямків прицілювання різноманітної зброї та зображень у фотоапаратах, гіроскопічні заспокоювачі качки на морських суднах тощо.

Дія гірокомпаса, запропонованого Фуко, ґрунтується на розглянутій властивості осі двостепеневого гіроскопа при обертанні U-подібної підставки займати колінеарне до осі обертання підставки положення. Якщо такою підставкою є поверхня Землі, то вісь такого гіроскопа буде встановлюватись в одній площині з віссю обертання Землі, тобто у площині меридіана, що дає можливість визначати напрямок на географічний, а не магнітний полюс Землі.

Дія гіростабілізаторів здебільшого ґрунтується на властивості триступеневого гіроскопа зберігати незмінним напрямок своєї осі обертання. При цьому можуть використовуватись як безпосередньо гіроскопічні моменти важкого масивного гіроскопа, як наприклад, у деяких заспокоювачах качки, так і порівняно невеликий гіроскоп як датчик напрямку, гіроскопічні моменти якого використовують для керування силовими пристроями, що забезпечують стабілізацію орієнтації масивної платформи або якогось пристрою в просторі.

Контрольні запитання та вправи

- 6.1. Чи є поняття "результатуоча сила" і "рівнодійна сила" тотожними?
- 6.2. Від яких величин залежить модуль кутового прискорення тіла?
- 6.3. Чи можуть бути розбіжними напрямки векторів кутової швидкості і моменту імпульсу тіла, що обертається?
- 6.4. Домогосподарки відрізняють варене яйце від сирого раптово надаючи яйцю, що лежить на горизонталь-

ній поверхні, обертання навколо вертикальної осі. При цьому варене яйце обертається довший час, а обертання сирого яйця припиняється через кілька обертів. Пояснити, на чому ґрунтуються цей метод. Запропонувати контрольні експерименти для перевірки свого пояснення.

6.5. Показати, що кінетична енергія однорідної кулі, яка котиться зі швидкістю \mathbf{v} становить $0,9mv^2$, а не $0,5mv^2$, як це спостерігається у випадку, коли вона ковзає з тією самою швидкістю без обертання.

6.6. У демонстраційному досліді використовується важка котушка з намотаним на неї дротом, що лежить на шорсткій поверхні лабораторного столу. Маса котушки разом з дротом m , її осьовий момент інерції I , зовнішній радіус R , радіус зовнішнього шару намотаного дроту r . Коли експериментатор тягне за вільний кінець дроту, котушка котиться по поверхні стола, причому напрямок її руху залежить від кута α між напрямком натягнутої ділянки дроту і поверхнею стола. Описати можливі рухи котушки залежно від кута α і вказати напрямок сили зчеплення з поверхнею стола під час цих рухів. Чи можна в цьому досліді визначити коефіцієнт тертя ковзання k між котушкою та поверхнею стола?

6.7. Чому про змущену прецесію гіроскопа (дзиги) кажуть, що вона безінерційна? Які експерименти, що доводять це твердження, можна запропонувати?

РОЗДІЛ 7

Закон всесвітнього тяжіння

7.1. Закони Кеплера та закон всесвітнього тяжіння

Закон всесвітнього тяжіння вперше сформулював І. Ньютона у 1687 р. у своїй роботі "Математичні принципи натуральної філософії". Сучасне формулювання цього закону таке: **дії матеріальні точки притягують одну одну вздовж прямої, що їх з'єднує, із силою, величина якої прямо пропорційна добутку їх мас та обернено пропорційна квадрату відстані між ними:**

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (7.1)$$

де m_1 і m_2 – *гравітаційні маси* матеріальних точок, що взаємодіють; r – відстань між частинками, G – *гравітаційна стала*. При формулуванні цього закону Ньютон спирається на вже встановлені ним три закони динаміки і на відомі на той час закони руху планет навколо Сонця, які відкрив німецький астроном і математик Й. Кеплер на підставі аналізу результатів спостережень за рухом планет, отриманих данським астрономом Т. Браге. Видимий рух планет по небосхилу серед нерухомих одна відносно одної зірок надзвичайно складний¹. На рис. 7.1 з оригінальної роботи Кеплера показано траєкторію планети Марс протягом декількох періодів її руху

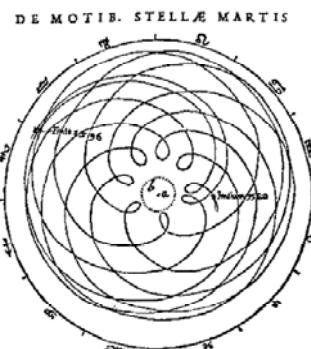


Рис. 7.1. Видимий рух планети
Марс по небосхилу

¹ Цьому факту завдячує саме слово *планета*: про небесне світило, що безладно рухається по небосхилу греки казали як про αστρον πλαυητης – зірку, що блукає.

навколо Сонця. Підсумком його багаторічної праці стали три твердження, опубліковані в 1609–1618 р. і відомі нині як **з а к о н и К е п л е р а**:

1. Усі планети рухаються по еліпсах, в одному із фокусів яких розташоване Сонце (рис. 7.2).

2. Радіус-вектор, що з'єднує Сонце з планетою, за однакові проміжки часу "замітає" однакові площини (рис. 7.3).

3. Відношення кубу довжини великої півосі a еліптичної орбіти планети до квадрата періоду її обертання T навколо Сонця є однаковим для всіх планет:

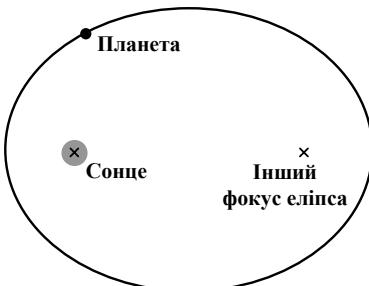


Рис. 7.2. До першого закону Кеплера

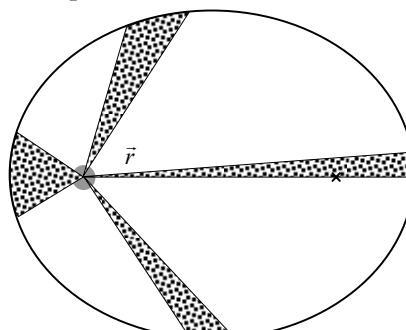


Рис. 7.3. До другого закону Кеплера

по колу прискорення планети має величину $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, де \vec{r} – радіус-вектор планети відносно центра Сонця, $\omega = 2\pi/T$, де T – період обертання планети. Отже,

$$\vec{a} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \vec{r}. \quad (7.3)$$

За другим законом динаміки Ньютона таке прискорення планети виникає внаслідок того, що до неї прикладена сила, яка дорівнює добутку її маси m на це прискорення:

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 m}{T^2} \vec{r}. \quad (7.4)$$

Узявши до уваги третій закон Кеплера, який для колових орбіт ($a = r$) набуває вигляду $r^3/T^2 = K$, де сталу K у правій частині, називають сталою Кеплера, вираз для сили (7.4) можна переписати у вигляді

$$\vec{F} = -K \frac{4\pi^2 m}{r^3} \vec{r}. \quad (7.5)$$

Таким чином, на підставі другого закону Ньютона і третього закону Кеплера можна зробити надзвичайно важливий висновок: сила, прикладена до планети з боку Сонця, **обернено пропорційна квадрату відстані** від планети до Сонця. Зазначимо, що такий кількісний висновок неможливий на підставі загальних міркувань: не досить самих законів Кеплера – необхідно використати і другий закон динаміки¹. Вважаючи, що всі тіла мають масу, і спираючись на третій закон Ньютона, можна припустити, що сила притягання між планетою і Сонцем взаємна, і її величина пропорційна не лише масі планети, рух якої розглядається, але й масі Сонця M_C , яка буде однаковою при розгляді руху будь-якої планети навколо Сонця². Тоді рівняння (7.5) можна переписати у вигляді

$$\vec{F} = -k \frac{4\pi^2 m M_C}{r^3} \vec{r}, \quad (7.6)$$

де введено коефіцієнт k через співвідношення $K = k M_C$. Остаточно формулу сили, що діє на планету з боку Сонця, можна подати у вигляді

$$\vec{F} = -G \frac{m M_C}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (7.7)$$

що є векторною формою запису закону (7.1), де $G = 4\pi^2 k$. Цю формулу отримано для руху небесних тіл. Однак з давніх-давен відоме явище вільного падіння всіх без винятку тіл на поверхню Землі. Г. Галілей експериментально показав, що при усуненні

¹ До Ньютона висувалися гіпотези щодо зростання сили тяжіння між небесними тілами при зменшенні відстані між ними, зокрема: Кеплер припускає, що ця сила обернено пропорційна відстані від планети до Сонця, а Ньютон зазначав, що правильність залежності сили тяжіння від відстані деякі вчені констатували раніше.

² Сталі Кеплера для систем супутників планет Марса, Юпітера, Сатурна відрізняються відсталою Кеплера для Сонця і пропорційні масам відповідних планет.

опору повітря¹ всі тіла незалежно від їх складу, форми та інших властивостей падають по вертикалі з прискоренням $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. За другим законом Ньютона це прискорення обумовлено силою притягання з боку Землі. Відповідно до третього закону Ньютона тіло з такою самою силою притягує Землю.

Силу гравітаційного притягання \vec{F}_{12} , що діє на матеріальну точку з масою m_1 з боку матеріальної точки з масою m_2 можна подати у вигляді

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}, \quad (7.8)$$

де \vec{r}_{12} – радіус-вектор, початок якого збігається з m_1 , а кінець – з m_2 , а силу \vec{F}_{21} , що діє на матеріальну точку з масою m_2 з боку матеріальної точки з масою m_1 можна подати у вигляді

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|}, \quad (7.9)$$

де \vec{r}_{21} – радіус-вектор, початок якого збігається з m_2 , а кінець – з m_1 . Оскільки $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$, то $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, що й очікувалось за третім законом Ньютона.

Ньютон висунув та обґрунтував припущення, що сили, які діють між небесними тілами, і сили, які зумовлюють падіння тіл на поверхню Землі, мають спільну природу. Для цього він порівняв величини прискорення Місяця відносно Землі та прискорення вільного падіння тіл поблизу поверхні Землі. На рис. 7.4 схематично зображено падіння яблука на поверхню Землі² та Місяць, що рухається навколо Землі по коловій орбіті з радіусом R_{3M} . Відповідно до другого закону динаміки Ньютона

¹ Галілей використовував вертикально розміщену трубку, з якої викачане повітря. Усередині такої трубки різні тіла, надані самі собі біля верхнього кінця трубки, надалі рухалися разом, зокрема, важка свинцева кулька і легенька пір'їнка долали відстань від верхнього до нижнього кінця трубки за один і той самий час.

² Ньютон згадував, що думка порівняти величини прискорення Місяця відносно Землі та прискорення вільного падіння тіл на поверхню Землі, виникла у нього при спостереженні падіння яблук у саду.

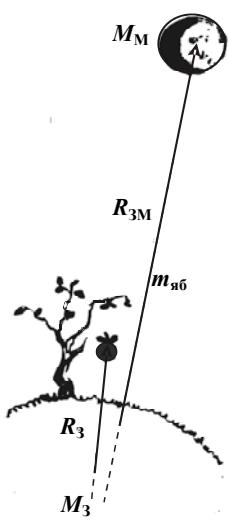


Рис. 7.4. Місяць і яблуко в полі тяжіння Землі

добуток маси тіла на його прискорення дорівнює силі, що діє на тіло. Отже, для Місяця можна записати

$$M_M a_M = G \frac{M_M M_3}{R_{3M}^2}, \quad (7.10)$$

де M_M та M_3 – маси Місяця та Землі, відповідно, а R_{3M} – відстань між їх центрами.

Якщо припустити, що сила, яка прикладена до яблука з боку Землі і спричинює прискорення його вільного падіння на Землю, має таку саму природу, що й сила, прикладена до Місяця з боку Землі, спричинює його рух по коловій орбіті, то для яблука можна записати

$$m_{яб} a_{яб} = G \frac{m_{яб} M_3}{R_3^2}, \quad (7.11)$$

де $m_{яб}$ і $a_{яб}$ – маса і прискорення яблука, а R_3 – радіус Землі, якому з великою точністю дорівнює відстань між яблуком і центром Землі. Із рівностей (7.10) та (7.11) випливає просте співвідношення між прискореннями яблука та Місяця:

$$\frac{a_{яб}}{a_M} = \left(\frac{R_3}{R_{3M}} \right)^2, \quad (7.12)$$

яке можна перевірити на підставі даних спостережень за рухом Місяця та відомою величиною прискорення вільного падіння яблука $a_{яб} = g = 9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Період обертання Місяця становить $T_M = 27,32$ доби, а радіус його орбіти – $R_{3M} = 384$ тис. км. Величину доцентрової складової прискорення Місяця a_M можна обчислити за формулою (7.3):

$$a_M = \frac{4\pi^2}{T_M^2} R_{3M} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Тоді відношення прискорень, яких набуває яблуко та Місяць унаслідок притягання з боку Землі, становитиме

$$a_{\text{яб}} / a_{\text{М}} = (9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}) / (2,72 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}) \approx 3,6 \cdot 10^3 = 60^2.$$

Водночас відношення відстаней від центра Землі до центра яблука і до центра Місяця становить

$$R_{\text{ЗМ}} / R_3 = (384 \cdot 10^3 \text{ км}) / (6,36 \cdot 10^3 \text{ км}) = 60,38.$$

Таким чином, виявляється, що рівність (7.12) виконується з точністю $\sim 1\%$, що є вагомим аргументом на користь зробленого припущення про однакову природу сил тяжіння між небесними тілами та силою тяжіння на поверхні Землі. Саме це дає підстави називати закон тяжіння (7.1) всесвітнім або універсальним¹, оскільки він справедливий для всіх без винятку тіл у Всесвіті.

Підкреслимо, що гравітаційні маси m_1 та m_2 , які фігурують у формулі закону всесвітнього тяжіння (7.1), є мірою гравітаційних властивостей тіл, тобто їх здатності притягуватись незалежно від інших їхніх фізичних властивостей. Гравітаційна стала G у формулі (7.1) не може бути визначена з астрономічних спостережень, оскільки для її визначення необхідно знати гравітаційні маси цих тіл та величину сили, з якою вони притягаються одне до одного. Уперше силу гравітаційної взаємодії вимірював Г. Кавендіш (1798) саме у зв'язку з вимірюванням гравітаційної сталі G . Кавендішу вдалося за допомогою винайдених ним крутильних терезів безпосередньо виміряти надзвичайно малу силу гравітаційного притягання між двома свинцевими кулями. Той факт, що всі тіла незалежно від будь-яких їхніх властивостей, у тому числі, незалежно від величини їх інертної маси, падають біля поверхні Землі з однаковим прискоренням, дає можливість припустити, що гравітаційна маса пропорційна інертній. З одного боку, на підставі другого закону Ньютона для тіла, що вільно падає біля поверхні Землі, можна записати

$$m_{\text{ін}} a = G \frac{m_{\text{тр}} M_3}{R_3^2}, \quad (7.13)$$

¹ Термін *універсальний* походить від лат. *universalis* – всеосяжний, загальний, який, у свою чергу, походить від лат. *universum* – загальне, Всесвіт.

а з іншого, відомо, що для всіх тіл $a = g$. Тоді виявляється, що

$$m_{\text{ін}} = G \frac{M_3}{g R_3^2} m_{\text{рп}} \text{ або } m_{\text{ін}} = k m_{\text{рп}}, \text{ тобто інертна маса пропорційна}$$

gravітаційній, і навпаки. Цей факт суто експериментальний. Він дозволяє обрати коефіцієнт пропорційності $k = 1$ і вважати інертну та gravітаційну маси рівними одна одній, для їх вимірювання використовувати один і той самий еталон, та встановлювати одну й ту саму одиницю вимірювання, а саме, *кілограм*.

Оскільки одиницею gravітаційної маси є кілограм, а одиниці сили було встановлено раніше на підставі формули другого закону Ньютона, то gravітаційна стала G виявляється розмірною величиною: її розмірність випливає із формули закону всесвітнього тяжіння (7.1). Сучасне значення gravітаційної сталої $G = (6,6742 \pm 0,0010) \times 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$. Треба сказати, що точність вимірювання G не набагато зросла з часів Кавендіша, оскільки при зовнішній простоті постановки експерименту дуже складно усунути всі фактори, які можуть вносити похибку в обчислену величину G .

7.2. Рух частинки в полі центральної сили

7.2.1. Рух частинки в полі довільної центральної сили

Сила gravітаційної взаємодії двох частинок (матеріальних точок) направлена вздовж прямої, яка проходить через ці частинки, тобто є центральною силою. З'ясуємо загальні властивості руху частинки в довільному полі центральної сили, яку відповідно до (5.33) можна подати загальною формулою

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

де $f(r)$ – деяка скалярна функція, що залежить лише від відстані $r = |\vec{r}|$ до точки, що називається *силовим центром*, або *центром поля*.

Оскільки момент центральної сили $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ відносно центра силового поля завжди дорівнює нулю:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times (f(r) \frac{\vec{r}}{r})] = \frac{f(r)}{r} [\vec{r} \times \vec{r}] = 0, \quad (7.14)$$

то момент імпульсу частинки в полі центральної сили, визначений відносно центра поля, зберігається,

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = \text{const}.$$

Також у полі центральної сили, що є консервативною, зберігається повна механічна енергія частинки (п. 5.2.3):

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \text{const}$$

Оскільки напрямок вектора \vec{L} незмінний у просторі, а радіус-вектор частинки \vec{r} і вектор її імпульсу \vec{p} , а отже, і вектор швидкості, перпендикулярні до \vec{L} , то траєкторія частинки повністю лежить в одній площині, перпендикулярній до вектора \vec{L} . Рівнянням цієї площини є $(\vec{L} \cdot \vec{r}) = 0$, тобто вона проходить через центр поля (силовий центр).

Оберемо напрямок осі OZ декартової системи координат уздовж вектора \vec{L} . Тоді відмінною від нуля буде лише проекція вектора \vec{L} на цю вісь, $L_z = L$. Траєкторія частинки за такого вибору системи координат повністю лежить у площині XOY . У координатному записі маємо такі вирази для величини моменту імпульсу та для повної механічної енергії частинки:

$$\begin{cases} L = m(x\dot{y} - y\dot{x}), \\ E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r). \end{cases} \quad (7.15)$$

Оскільки силове поле центральне, тобто і сила, і потенціальна енергія залежать лише від відстані до силового центра, то зручно у площині траєкторії ввести полярну систему координат з початком у силовому центрі O . Якщо полярну вісь полярної системи координат спрямувати вздовж осі OX декартової системи координат, то між x, y та r, ϕ існуватиме зв'язок

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi.\end{aligned}\quad (7.16)$$

Відповідно,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}.\end{aligned}\quad (7.17)$$

Тоді (7.15) набуде вигляду

$$\begin{cases}L = m[r \cos \varphi \cdot (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) - r \sin \varphi \cdot (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})] \\ E = \frac{1}{2}m[(\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})^2] + U(r),\end{cases}(7.18)$$

і після нескладних алгебраїчних перетворень остаточно маємо

$$\begin{cases}L = mr^2 \dot{\varphi}, \\ E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r).\end{cases}\quad (7.19)$$

Із виразу для модуля моменту імпульсу L у (7.19) випливає, що секторіальна швидкість частинки, тобто відношення площини $d\sigma = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$, яку "замітає" радіус-вектор частинки за елементарний проміжок часу dt , до величини цього проміжку є сталою величиною:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2 d\varphi\right) = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (7.20)$$

Це твердження становить зміст другого закону Кеплера, який він встановив з аналізу спостережень за рухом планети Марс по еліптичній орбіті навколо Сонця в центральному гравітаційному полі останнього, функція потенціальної енергії для якого становить $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ (див. формули (5.37), (5.38) і рис. 7.3).

Із виразу для моменту імпульсу L у (7.19) також випливає, що знак кутової швидкості, з якою повертається радіус-вектор частинки, стаєй, оскільки

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \quad (7.22)$$

де всі величини у правій частині додатно визначені.

За допомогою рівності (7.22) можна виключити $\dot{\varphi}$ із виразу для повної енергії частинки E в (7.19) і подати останню у вигляді

$$E = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] + U(r) = \\ = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad (7.23)$$

де введено так звану *ефективну потенціальну енергію*

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (7.24)$$

Таким чином, вираз для повної енергії частинки в центральному полі має такий самий вигляд, як і для повної енергії частинки при одновимірному русі (див. формулу (5.56)), де потенціальну енергію $U(r)$ замінено на потенціальну енергію $U_{\text{eff}}(r)$.

Отже, рух частинки в радіальному напрямку можна розглядати як одновимірний рух у полі з ефективною потенціальною енергією $U_{\text{eff}}(r)$. Швидкість такого руху становить

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}})}, \quad (7.25)$$

і вона обертається на нуль за умови

$$E = U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (7.26)$$

На відміну від випадку одновимірного руху (п. 5.2.4), частинка при цьому не зупиняється, оскільки завжди існує азимутальна складова швидкості $r\dot{\phi}$. Тому радіальний рух частинки в центральному полі називають *квазіодновимірним*.

Рівняння траєкторії частинки в полярних координатах можна знайти із рівності (7.22), виключивши з неї час. Для цього перепишемо її у вигляді

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt, \quad (7.27)$$

і після підстановки dt , знайденого із рівності (7.25)

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}})}}, \quad (7.28)$$

отримаємо зв'язок між диференціалами $d\varphi$ та dr :

$$d\varphi = \pm \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{еф}}(r)]}}. \quad (7.29)$$

Для відшукання зв'язку між полярним кутом φ і полярним радіусом r треба взяти невизначені інтеграли від лівої та правої частин рівняння (7.29):

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{L}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{еф}}(r)]}} + \varphi_0, \quad (7.30)$$

де через φ_0 позначено сталу інтегрування.

Таким чином, отримано рівняння траєкторії в явному вигляді $\varphi = \varphi(r)$, який залежить від конкретного виразу для потенціальної енергії $U(r)$. Зрозуміло, що за наявності залежності $\varphi = \varphi(r)$ можна знайти й обернену залежність $r = r(\varphi)$.

Як і при істинному одновимірному русі, квазіодновимірний рух можливий лише за таких r , коли $E - U_{\text{еф}} \geq 0$. При цьому він може бути як інфінітним, якщо область можливих значень r обмежена лише знизу, $r \geq r_{\min}$, так і фінітним, якщо $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$. Характер руху і розміри області, у якій він можливий, визначаються конкретним виглядом потенціальної енергії $U(r)$ і повною механічною енергією частинки.

На рис. 7.5 наведено приклади руху частинки в полі з потенціальною енергією $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ за різних значень α та n . У випадку $\alpha > 0$, що відповідає відштовхуванню частинки від силового центра, функція $U_{\text{еф}}(r)$ залишається додатною за будь-яких n (рис. 7.5, а, б). За $n > 0$ (рис. 7.5, а) при зростанні r вона асимптотично спадає від нескінченно великих значень до нуля. Рух частинки може бути лише інфінітним: за $E > 0$ частинка з

некінченності наближається до силового центра на деяку мінімальну відстань r_{\min} , яку можна знайти з рівняння (7.26), і потім віддаляється на нескінченність. На рис. 7.5, а штриховою показано область у площині траєкторії, недосяжну для частинки. Такий рух частинки називають *розсіянням* (див. п. 5.6.4, рис. 5.21, а) на силовому центрі. За $\alpha > 0$, $n > 0$ (рис. 7.5, б) рух частинки може бути лише фінітним: при зростанні r функція $U_{\text{еф}}(r)$ спочатку спадає до деякого мінімального, але додатного значення, а потім починає зростати, прямуючи на нескінченність. Частинка може рухатись лише там, де $E > U_{\text{еф}}(r)$, тобто в незаштрихованій кільцевій області $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$.

У випадку $\alpha < 0$, що відповідає притяганню частинки до силового центра, функція $U_{\text{еф}}(r)$ може мати як додатні, так і від'ємні значення. Фінітний рух можливий як за додатної, так і за від'ємної повної енергії частинки E , а інфінітний – лише за $E > 0$. На рис. 7.5, в показано загальний вигляд функції $U_{\text{еф}}(r)$ за $2 > n > 0$. За додатних значень повної енергії E_1 маємо інфінітний рух: частинка з нескінченності наближається до силового центра, її шлях викривається таким чином, що вона огибає силовий центр, наближаючись до нього на деяку відстань $r_{1\min}$ і знову віддаляється на нескінченність (див. п. 5.6.4, рис. 5.21, б). За від'ємних значень повної енергії $E_2 > U_{\text{еф}}(r)$ відбувається фінітний рух у кільцевій області $r_{2\max} \geq r \geq r_{2\min}$ (на рисунку не показана). За $\alpha < 0$, $n = 2$ функція $U_{\text{еф}}(r) < 0$ і є квадратичною гіперболою, яка при зростанні r асимптотично прямує до нуля. Як і в попередньому випадку за $E_1 > 0$ можливий інфінітний рух частинки і, зокрема, можливе падіння частинки на силовий центр. За $E_2 < 0$ рух буде фінітний, причому також можливе падіння частинки на силовий центр за умови $|\alpha| \geq L^2 / 2m$, яка випливає з умови $E \geq U_{\text{еф}}(r)$.

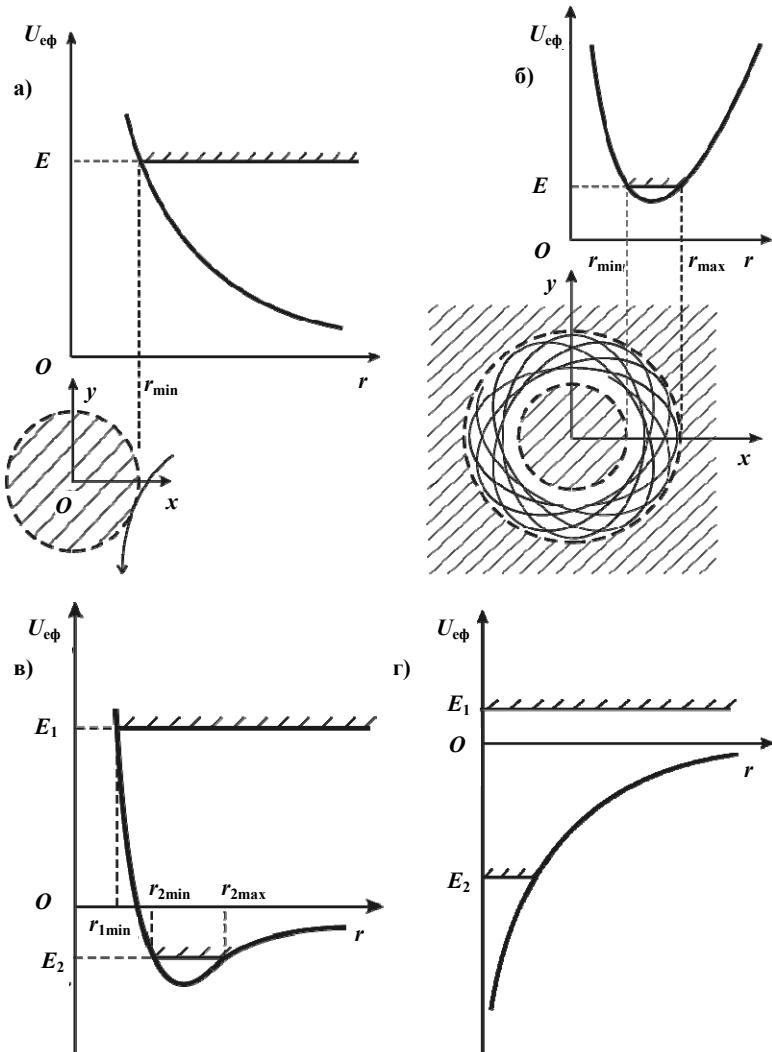


Рис. 7.5. Рух частинки в центральному полі $U(r) = \alpha / r^n$

за різних значеннях α та n :

а) $\alpha > 0, n > 0$; **б)** $\alpha > 0, n < 0$; **в)** $\alpha < 0, 2 > n > 0$; **г)** $\alpha < 0, n = 2$

Зазначимо, що навіть при фінітному русі, коли траєкторія частинки повністю лежить у кільцевій області $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$, вона в

загальному випадку незамкнена. Умову замкненості можна отримати з таких міркувань. Одновимірний радіальний фінітний рух частинки періодичний. Цей період дорівнює проміжку часу, за який частинка, починаючи рухатись від внутрішньої межі, доступної для руху області r_{\min} , досягає зовнішньої межі цієї області r_{\max} , а потім повертається назад до внутрішньої межі r_{\min} . За цей час радіус-вектор частинки повернеться на кут

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{L}{2mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eф}}(r)]}}. \quad (7.31)$$

Після n періодів радіального руху частинки від r_{\min} до r_{\max} і назад радіус-вектор частинки повернеться на кут $n\Delta\varphi$. Якщо $n\Delta\varphi = m2\pi$, то після n періодів радіального руху частинки від r_{\min} до r_{\max} і назад і здійснення m повних обертів радіус-вектора частинки (тобто при зміні азимутального кута φ на $2\pi m$) частинка приайде в ту саму точку простору і траєкторія замкнеться.

Відомо лише два центральних поля, в яких траєкторії фінітних рухів частинки замкнені: поля, в яких потенціальна енергія частинки обернено пропорційна відстані від силового центра, $U(r) \sim r^{-1}$ і поля, в яких потенціальна енергія частинки прямо пропорційна квадрату відстані від силового центра $U(r) \sim r^{-2}$. До першого типу належать гравітаційне поле точкової маси і електростатичне поле точкового заряду, а до другого – поле квазіпружної сили.

7.2.2. Рух частинки в полі центральної сили, обернено пропорційної квадрату відстані до силового центра

Дослідимо тепер рух частинки в полі з $U(r) = \frac{\alpha}{r}$, зокрема знайдемо явний вигляд можливих траєкторій, спираючись на результат, отриманий для довільного центрального поля, а саме,

на рівняння траєкторії частинки в полярних координатах (7.30) з ефективною потенціальною енергією

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad (7.32)$$

записане у вигляді

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (7.33)$$

Обчислимо інтеграл у правій частині (7.33):

$$\begin{aligned} \varphi &= \pm \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} = \left| y = \frac{1}{r}, dy = -\frac{dr}{r^2} \right| = \mp \frac{L}{2m} \int \frac{dy}{\sqrt{E - \alpha y - \frac{L^2}{2m} y^2}} = \\ &= \mp \frac{L}{2m} \int \frac{dy}{\sqrt{E - \left(\frac{L}{\sqrt{2m}} y + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2m}{L^2}} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{2L^2}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{L}{\sqrt{2m}} y + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2m}{L^2}} = z \\ dy = \frac{\sqrt{2m}}{L} dz \end{array} \right| = \quad (7.34) \\ &= \mp \frac{L}{2m} \int \frac{\frac{\sqrt{2m}}{L} dz}{\sqrt{E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2} - z^2}} = \mp \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \mp \arccos \frac{z}{a}. \end{aligned}$$

При обчисленні інтеграла (7.34) було зроблено заміни змінних

$$y = \frac{1}{r} \text{ та } z = \frac{L}{\sqrt{2m}} y + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2m}{L^2}}, \text{ а також позначено}$$

$$a^2 = E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}.$$

Отже, рівняння (7.33) можна подати у вигляді

$$\theta = \mp \arccos \frac{z}{a}, \quad (7.35)$$

де позначено $\theta = \varphi - \varphi_0$, тобто перенесено початок відліку полярного кута.

Знайдемо косинус від обох частин рівності (7.35):

$$\frac{z}{a} = \cos \theta. \quad (7.36)$$

Після підстановки виразів для z , y і a до рівняння (7.36) одержимо зв'язок між кутом θ і полярним радіусом r :

$$\frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2m}{L^2}} = \sqrt{E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}} \cos \theta. \quad (7.37)$$

Для зведення (7.37) до вигляду $r = r(\theta)$ виконаємо ряд перетворень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{\alpha^2 m^2}{L^4}} \cos \theta - \frac{\alpha m}{L^2} = \frac{|\alpha|m}{L^2} \left(\mp 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m}} \cos \theta \right) = \\ &= \frac{1}{p} (\mp 1 + e \cos \theta), \end{aligned}$$

де введено позначення

$$\frac{|\alpha|m}{L^2} = \frac{1}{p} \quad (7.38)$$

та

$$\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m}} = e. \quad (7.39)$$

Остаточно маємо рівняння траєкторії в полярних координатах

$$r = \frac{p}{\mp 1 + e \cos \theta}. \quad (7.40)$$

Рівняння (7.40) відоме з аналітичної геометрії як рівняння конічних перерізів, яке пов'язує *фокальний радіус-вектор* r з полярним кутом θ . Залежно від значень *фокального параметра* p та *експансиситету* e це рівняння може визначати еліпс ($e < 1$), параболу ($e = 1$) або гіперболу ($e > 1$).

У випадку притягання частинки до силового центра ($\alpha < 0$) у рівнянні (7.40) необхідно брати знак "+":

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (7.41)$$

а у випадку відштовхування частинки від силового центра ($\alpha > 0$), необхідно брати знак "-":

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \theta}. \quad (7.42)$$

Аналіз різних випадків руху частинки відповідно до (7.41) і (7.42) подано на рис. 7.6, у верхній частині якого наведено графіки залежності ефективної потенціальної енергії $U_{\text{еф}}$ від відстані до силового центра r , а нижче при збереженні одного й того ж масштабу по осі абсцис зображені траєкторії частинок за різних значень їх повної енергії E як для випадку притягання ($\alpha < 0$), так і для випадку відштовхування ($\alpha > 0$). Там же показано додаткові побудови і наведено параметри, які використовуються для опису кривих другого порядку (асимптої, півосі, директриси тощо).

За $E > 0$ завжди матимемо інфінітний рух по гіперболічних траєкторіях, оскільки $e > 1$. У випадку притягання ($\alpha < 0$) рівняння (7.41) описує ліву вітку гіперболи. Полярний кут при цьому змінюється в межах $-\pi + \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ (від однієї асимптої до іншої).

Рух частинки, що проходить біля силового центра, викривляється, і вона обходить силовий центр, наближаючись до нього за $\theta = 0$ на мінімальну відстань $r_{\min}^- = \frac{p}{1+e}$. Права гілка гіперболи відповідає випадку відштовхування ($\alpha > 0$), а отже, описується рівнянням (7.42), з якого видно, що за $\theta = 0$ мінімальна відстань $r_{\min}^+ = \frac{p}{1-e}$: траєкторія частинки при наближенні до силового центра викривляється, і вона, не доходячи до силового центра, повертає назад. У декартових координатах обидві гілки гіперболи описуються рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, при цьому $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$. Мінімальна відстань між гілками гіперболи становить $2a$. Асимптої гіперболи проходять по діагоналях прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$.

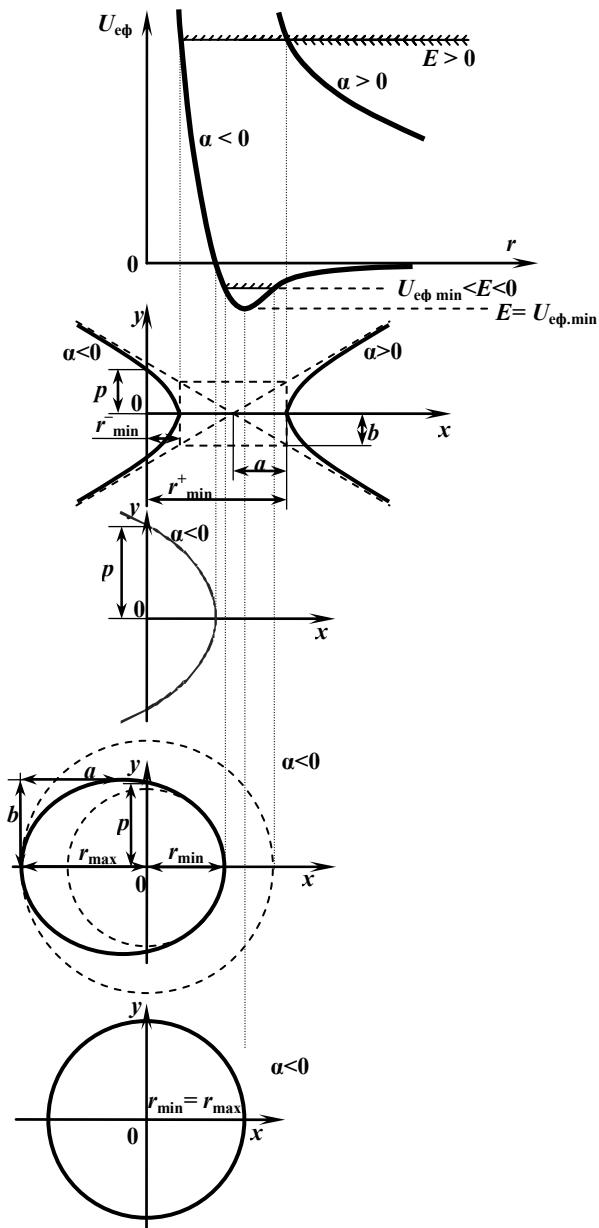


Рис. 7.6. Траєкторії частинки в полі $U(r) = \alpha / r$

За $E = 0$ маємо інфінітний рух по параболічних траєкторіях, оскільки $e = 1$. Оскільки цей випадок реалізується лише для сили притягання, то траєкторія має такий самий вигляд, як ліва гілка гіперболи, яку ми вже розглянули. Мінімальна відстань до силового центра при цьому $r_{\min}^- = \frac{p}{2}$. Рівняння параболи в декартових координатах матиме такий вигляд: $y^2 = 2px$.

Фінітний рух можливий лише за $E < 0$, що, у свою чергу, можливо лише у випадку притягання ($\alpha < 0$). Якщо $U_{\text{еф min}} < E < 0$, то $0 < e < 1$ і рух частинки відбувається по еліптичній траєкторії, причому один із фокусів еліпса збігається з центром поля (зауважимо, що у випадку притягання фокуси гіперболічних та параболічних траєкторій також збігаються з центром силового поля). Мінімальна відстань до силового центра $r_{\min}^- = \frac{p}{1+e}$, а максимальна $r_{\max}^- = \frac{p}{1-e}$. Рівняння еліпса в декартових координатах має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а ексцентриситет дорівнює $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$. Еліптична траєкторія повністю вписана в прямокутник, утворений осями еліпса $2a$ і $2b$. При зменшенні повної енергії частинки E і наближенні її до $U_{\text{еф min}}$ ексцентриситет зменшується і за $E = U_{\text{еф min}}$ сягає нульового значення. При цьому відношення довжин великої і малої півосей еліпса пряме до одиниці, а еліпс перетворюється на коло.

По замкнених еліптичних траєкторіях під дією гравітаційних сил притягання рухаються планети Сонячної системи, їх природні та штучні супутники, астероїди та періодичні комети, а також подвійні зірки, зірки навколо центра галактик тощо. По замкнених еліптичних траєкторіях рухаються заряджені частинки: наприклад, у планетарній моделі атома розглядається рух електрона по замкненій еліптичній орбіті навколо позитивно зарядженого ядра.

По незамкнених гіперболічних траєкторіях рухаються, наприклад, неперіодичні комети, які з великою швидкістю і відповідно енергією входять в межі Сонячної системи і, облетівши Сонце, назавжди залишають її. По незамкнених гіперболічних траєкторіях рухаються також позитивно заряджені α -частинки при бомбардуванні позитивно заряджених ядер атомів у класичному досліді Резерфорда.

Розглянемо практично важливий приклад руху тіла в гравітаційному полі Землі, якому надано початкову швидкість v_0 у горизонтальному напрямку відносно поверхні Землі¹ (рис. 7.7). Від величини цієї початкової швидкості залежить повна механічна енергія тіла E , величина якої за інших однакових умов визначає вигляд траєкторії частинки. Якщо тіло відпустити з нульовою початковою швидкістю, то воно під дією сили тяжіння буде рухатись до центра силового поля (центра Землі) по прямій. При цьому повна механічна енергія тіла мінімальна і дорівнює його потенціальній енергії в полі тяжіння Землі, оскільки кінетична енергія тіла в початковий момент дорівнює нулю.

За малих значень швидкості v_0 тіло рухатиметься по еліптичній траєкторії до зустрічі з поверхнею Землі. На рис. 7.7 штриховою лінією показано можливу еліптичну траєкторію тіла, якби маса Землі була зосереджена в її центрі, з яким практично збігається один із фокусів цієї траєкторії. На малих ділянках поблизу апогею² еліптичну траєкторію можна апроксимувати параболою, що, власне, і робиться при розв'язанні шкільних задач про рух тіл в однорідному полі сили тяжіння поблизу поверхні Землі.

При збільшенні початкової швидкості v_0 зростатиме кінетична енергія тіла і відповідно повна механічна енергія E та момент імпульсу L , що призведе до збільшення розмірів еліпса, причому швидше буде зростати мала піввісь. Нарешті настане момент коли мала і велика осі еліпса стануть однаковими, тобто

¹ Знехтуємо наявністю атмосфери й обумовленими нею дисипативними силами опору. Нам зручно і звичноЕ розглядати рух тіла в полі тяжіння Землі, хоча цей розгляд можна провести і для будь-якого небесного тіла, позбавленого атмосфери, напр., Місяця.

² Апогеєм називається найбільша віддалена від центра Землі точка орбіти. Найближча до центра Землі точка орбіти називається перигеєм.

еліпс перетвориться на коло, а тіло – на штучний супутник Землі. Значення швидкості v_0 , за якої це відбудеться, можна знайти з рівняння руху тіла

$$m\ddot{\vec{r}} = -G \frac{mM_3}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \text{ де } M_3 \text{ – маса Землі.} \quad (7.43)$$

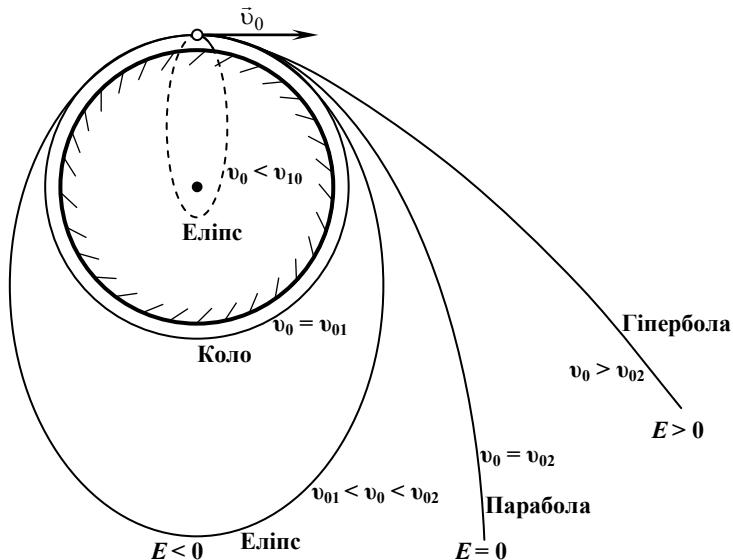


Рис. 7.7. Траєкторії тіла в полі тяжіння Землі залежно від величини початкової горизонтальної швидкості v_0

Початковою висотою тіла над поверхнею Землі порівняно з її радіусом R_3 можна знехтувати. Тоді в знаменнику правої частини можна замінити r на R_3 . Оскільки орбіта колова, то прискорення тіла має лише нормальну складову $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R_3} \vec{n}$. Спроектувавши векторне рівняння руху тіла на внутрішню нормальну до траєкторії \vec{n} отримаємо

$$m \frac{v^2}{R_3} = G \frac{mM_3}{R_3^2}, \quad (7.44)$$

звідки дістанемо величину *першої космічної швидкості* – мінімальної швидкості, за якої тіло стає штучним супутником Землі:

$$v_{01} = \sqrt{G \frac{M_3}{R_3}}, \quad (7.45)$$

зокрема, біля поверхні Землі за $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$, $M_3 = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, $R_3 = 6,378 \cdot 10^6 \text{ м}$ для першої космічної швидкості маємо $v_{01} = 7,9 \text{ км/с}$.

При подальшому збільшенні початкової швидкості v_0 коло знову переходить в еліпс, один із фокусів якого залишається в центрі Землі, а інший віддаляється від нього зі збільшенням початкової швидкості v_0 , а разом з нею і повної механічної енергії E , яка залишається від'ємною. При наближенні E до нуля другий фокус еліпса прямує до нескінченності і за $E = 0$ еліпс "роздирається", у результаті чого траєкторія стає незамкненою, а саме, параболою, яка за $E > 0$ переходить у гіперболу.

Перехід від замкненої до незамкнених траєкторій відбувається при *другій космічній швидкості* v_{02} , за якої тіло, як іноді кажуть, назавжди залишить поле тяжіння Землі, тобто його відстань від центра Землі надалі буде лише зростати з часом. Величину швидкості v_{02} можна знайти з умови $E = T + U = 0$, записаної у вигляді

$$\frac{mv_{02}^2}{2} - G \frac{mM_3}{R_3} = 0. \quad (7.46)$$

Отже,

$$v_{02} = \sqrt{2G \frac{M_3}{R_3}}. \quad (7.47)$$

Чисельне значення другої космічної швидкості на рівні поверхні Землі становить $v_{02} = 11,2 \text{ км/с}$.

Різні небесні тіла мають різні перші й другі космічні швидкості. З огляду на можливість старту космічного апарат з поверхні небесного тіла з метою його подальшого повернення на Землю найбільший інтерес являють другі космічні швидкості, або швидкості звільнення (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

**Друга космічна швидкість (швидкість звільнення)
на поверхні деяких небесних тіл**

| Небесне тіло | Маса (у M_3) | Друга космічна швидкість, км/с | Небесне тіло | Маса (у M_3) | Друга космічна швидкість, км/с |
|-------------------------|--------------------------------------|---|-------------------------|--------------------------------------|---|
| Меркурій | 0,055 | 4,3 | Сатурн | 95,3 | 36,0 |
| Венера | 0,82 | 10,22 | Уран | 14,5 | 22,0 |
| Земля | 1 | 11,2 | Нептун | 17,5 | 24,0 |
| Марс | 0,108 | 5,0 | Місяць | 0,0123 | 2,4 |
| Юпітер | 318,3 | 61,0 | Сонце | 333000 | 617,7 |

Видно, що найпростішим є старт з поверхні Місяця, що й було неодноразово здійснено як безпілотними, так і пілотованими космічними апаратами. Мало шансів вирватися з обіймів Сатурна та Юпітера й абсолютно ніяких шансів повернутися з подорожі на Сонце (з цілого ряду причин).

7.2.3. Рух частинки по еліптичних траєкторіях

Розглянемо більш детально рух частинок по еліптичних траєкторіях (рис. 7.8). З аналітичної геометрії відомо, що зв'язок між параметрами a і b рівняння еліпса в прямокутних декартових координатах $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і параметрами p та e рівняння еліпса

в полярних координатах $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ дається формулами:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (7.48)$$

або оберненими до них

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

Для руху по еліптичних траєкторіях із формули (7.38) одержимо вираз для полярного параметра

$$p = \frac{L^2}{|\alpha|m}, \quad (7.49)$$

а у формулі для ексцентризитету (7.39) зробимо заміну $E = -|E|$, оскільки для фінітного руху повна енергія $E < 0$:

$$e = \sqrt{1 - \frac{2m|E|L^2}{\alpha^2 m}}. \quad (7.50)$$

Тоді, використавши (7.21), знаходимо

$$a = \frac{\frac{L^2}{|\alpha|m}}{\frac{2m|E|L^2}{\alpha^2 m}} = \frac{|\alpha|}{2|E|}, \quad (7.51)$$

$$b = \frac{\frac{L^2}{|\alpha|m}}{\sqrt{\frac{2m|E|L^2}{\alpha^2 m}}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (7.52)$$

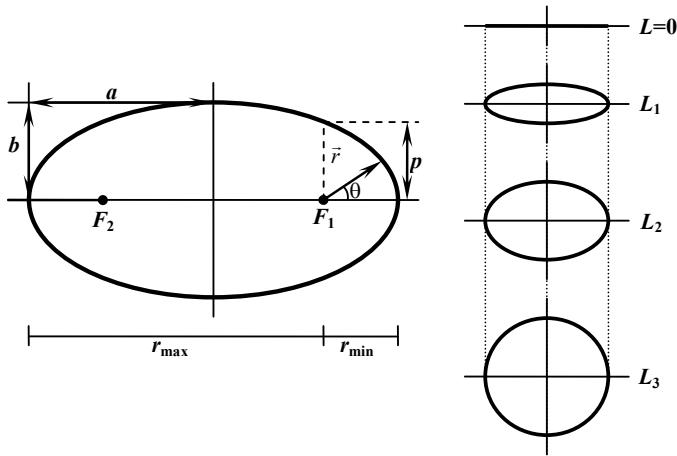


Рис. 7.8. Еліптичні траєкторії

Звернемо увагу на те, що довжина великої півосі a еліптичної траєкторії (7.51) **залежить лише від повної енергії частинки E** і зовсім **не залежить від моменту імпульсу L** , у той час як довжина малої півосі b (7.52) **прямо пропорційна L** . Коли еліпс

вироджується у відрізок прямої довжиною $2a$ (при цьому маємо одновимірний періодичний рух коливального характеру), то $L = 0$. При незмінній повній енергії E частинки довжина малої півосі b зростає зі збільшенням L , поки не досягне свого максимального значення – незмінної довжини великої півосі a , яка визначається лише повною енергією частинки. Ця особливість руху частинки по еліптичній траєкторії відігравала важливу роль у розвитку планетарної моделі атома, відповідно до якої негативно заряджений електрон під дією кулонівської сили рухається по замкненій орбіті навколо позитивно зарядженого ядра. Модель Бора–Зоммерфельда дозволила пояснити існування станів атомів з майже однаковою повною енергією E , але з різною величиною моменту імпульсу L , оскільки рух електрона відбувається в цій моделі не по колових, а по еліптичним орбітах з однаковою величиною піввіссю, але різним ексцентриситетом.

Знайдемо період руху частинки по еліптичній орбіті. Скористаємося формулою (7.20), що виражає другий закон Кеплера, справедливою для будь-якого центрального поля, запишемо її у вигляді

$$d\sigma = \frac{L}{2m} dt \quad (7.53)$$

і проінтегруємо ліву й праву частини в межах, що відповідають одному обороту по орбіті. Оскільки за один період T фокальний радіус "замітає" всю площину еліпса S , то

$$\int_0^S d\sigma = \frac{L}{2m} \int_0^T dt, \quad (7.54)$$

звідки

$$S = \frac{L}{2m} T. \quad (7.55)$$

Після підстановки до (7.55) площині еліпса $S = \pi ab$ та виразу для b із (7.52) отримаємо вираз для періоду T :

$$T = \frac{2m\pi ab}{L} = \frac{2m\pi a}{L} \frac{\sqrt{2m|E|}}{\sqrt{|E|}} = \frac{\sqrt{2m}\pi a}{\sqrt{|E|}}. \quad (7.56)$$

Піднесемо останню рівність до квадрата і виконаємо перетворення в її правій частині:

$$T^2 = \frac{2m\pi^2 a^2}{|E|} = \frac{4m\pi^2 a^2}{|\alpha|} \cdot \frac{|\alpha|}{2|E|} = \frac{4\pi^2 m a^3}{|\alpha|}, \quad (7.57)$$

звідки випливає третій закон Кеплера для еліптичних орбіт:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|\alpha|}. \quad (7.58)$$

7.2.4. Задача двох тіл

Під задачею двох тіл зазвичай розуміють задачу про рух замкненої системи двох частинок, що взаємодіють між собою. Розглянемо рух двох частинок з масами m_1 та m_2 , між якими відбувається центральна взаємодія, величина якої залежить лише від відстані між частинками.

Відомо, що замкнена система частинок як ціле рухається прямолінійно і рівномірно, тобто $\vec{V}_C = \text{const}$. Тому розглянемо лише внутрішній рух системи частинок, тобто її рух у СЦМ. Рівняння руху частинок у СЦМ такі:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad \text{та} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}, \quad (7.59)$$

де радіус-вектори визначають положення частинок відносно центра мас. Віднімаючи від першого рівняння друге, одержимо

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} - \vec{F}_{21} \quad (7.60)$$

і з урахуванням третього закону Ньютона $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ отримаємо

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 2\vec{F}_{12}. \quad (7.61)$$

Радіус-вектори частинок можуть бути подані як

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \text{та} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad (7.62)$$

де $M = m_1 + m_2$, а $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – вектор, початок якого збігається з частинкою 2, а кінець – з частинкою 1 (див. формулі (5.76а) і (5.76б)). Після підстановки виразів (7.60) у (7.59) отримаємо

$$m_1 \frac{m_2}{M} \ddot{\vec{r}} + m_2 \frac{m_1}{M} \ddot{\vec{r}} = 2\vec{F}_{12}, \quad (7.63)$$

або

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}, \quad (7.64)$$

де μ – зведенна маса частинок m_1 та m_2 (див. формулу (5.186)).

Таким чином, задачу про рух двох взаємодіючих частинок зведено до задачі про рух однієї допоміжної уявної частинки зі зведенюю масою μ під дією сили, яка прикладена до першої частинки з боку другої¹. Після визначення закону руху уявної допоміжної частинки, тобто радіус-вектора $\vec{r}(t)$ із рівняння (7.62) можна за допомогою формул (7.60) знайти закон руху кожної реальної частинки.

За відсутності дисипативних сил до задачі двох тіл можна застосувати і закони збереження. У замкненій системі частинок зберігаються повна механічна енергія та момент імпульсу, які для двох частинок мають вигляд

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) \text{ та } \vec{L} = m_1 [\vec{r}_1 \times \vec{v}_1] + m_2 [\vec{r}_2 \times \vec{v}_2]. \quad (7.65)$$

Після підстановки у вирази для енергії та моменту імпульсу виразів для радіус-векторів частинок із формул (7.60) можна дістати

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) \quad \text{та} \quad \vec{L} = \mu [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}]. \quad (7.66)$$

Отже, знову рух двох частинок зведено до руху однієї уявної допоміжної частинки з масою μ із тією самою потенціальною енергією $U(r)$, яку має перша частинка в полі другої.

Таким чином, для визначення законів руху (траєкторій) реальних частинок з масами m_1 та m_2 достатньо будь-яким способом знайти закон руху (траєкторію) уявної частинки зі зведенюю масою μ . Якщо йдеться про центральну взаємодію, то можна

¹ Формально можна вважати, що ця допоміжна частинка з масою μ рухається під дією сили, прикладеної з боку частинки 2 до частинки 1, яка тепер є центром силового поля. Треба чітко усвідомлювати, що ні зведенна маса μ , яка є просто зручним позначенням, ні сама уявна допоміжна частинка не мають ніякого глибокого фізичного змісту.

скористатися, наприклад, уже отриманими результатами для руху частинки в полі центральної сили.

Продемонструємо застосування розглянутого підходу до задачі про рух частинок, що взаємодіють із силою, обернено пропорційною квадрату відстані між ними, обмежившись замкненими (еліптичними) траєкторіями. Уявна частинка з масою μ рухається по еліптичній траєкторії, рівняння якої має вигляд (7.41) з полярним параметром p і з ексцентриситетом e , що визначаються, відповідно, формулами

$$p = \frac{L^2}{|\alpha|\mu}, \quad (7.67)$$

та

$$e = \sqrt{1 - \frac{2m|E|L^2}{\alpha^2\mu}}. \quad (7.68)$$

Тоді рівняння трасекторії першої частинки матиме вигляд

$$r_1 = \frac{m_2}{M} \cdot \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (7.69)$$

а другої

$$r_2 = \frac{m_1}{M} \cdot \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \pi)}. \quad (7.70)$$

На рис. 7.9 наведено приклади руху по замкнених еліптичних орбітах двох частинок з масами m_1 і m_2 для різних співвідношень цих мас. У першому прикладі маси частинок різні, але мають один порядок, $m_2 = 3m_1$. Уявна допоміжна частинка зі зведенюю масою μ рухається по великому еліпсу (штрихова лінія) навколо силового центра. Її радіус-вектор \vec{r} . Реальні частинки рухаються по еліпсах, один із фокусів кожного з яких лежить у центрі мас, причому в процесі руху частинки перебувають на протилежних кінцях відрізка, що проходить через центр мас, на обернено пропорційних їх масам відстанях. Усі еліпси подібні: вони мають одинаковий ексцентриситет. Довжина відповідних піввосей траєкторій реальних частинок обернено пропорційна їх масам. У другому прикладі $m_2 \gg m_1$. Легка частинка рухається

практично по тій самій траєкторії, що й допоміжна частинка зі зведеню масою μ . Еліпс, по якому рухається масивна частинка, настільки малий, що можна вважати цю частинку нерухомою і такою, що розташована в центрі поля. Цей приклад може бути ілюстрацією до руху будь-якої планети навколо Сонця. Навіть маса Юпітера, наймасивнішої планети Сонячної системи, на три порядки менша від маси Сонця. Тому центр мас системи Юпітер–Сонце лежить хоча й не в центрі Сонця, але всередині його об'єму. Для багатьох задач можна вважати, що планети обертаються навколо нерухомого Сонця. Проте, якщо йдеться про точні розрахунки їх орбіт, то необхідно враховувати як рух Сонця, так і збурення їх траєкторій з боку інших планет.

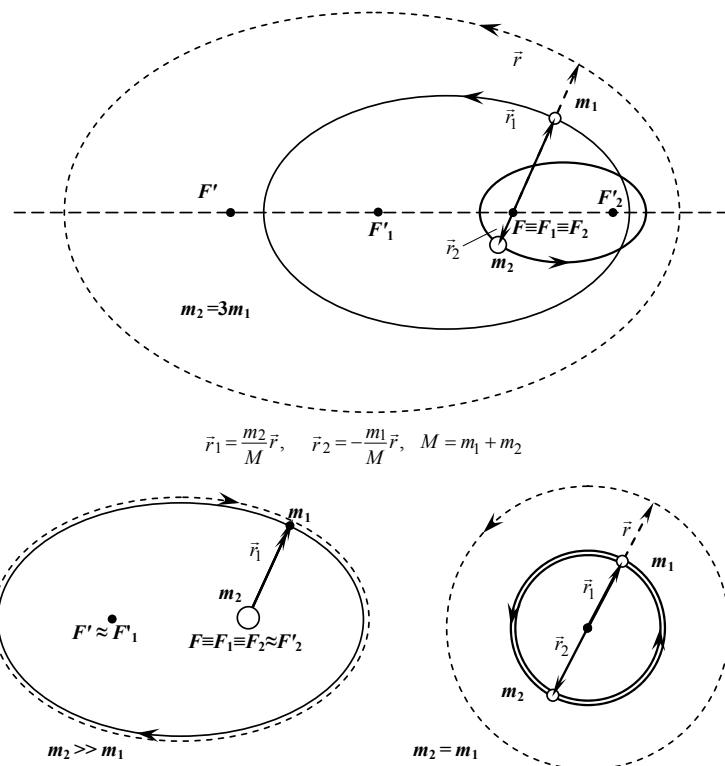


Рис. 7.9. До задачі двох тіл

Інший приклад руху за $m_2 \gg m_1$ дає атомна фізика: у планетарній моделі атома водню негативно заряджений електрон рухається навколо позитивно зарядженого протона, що має масу в 1826 разів більшу за масу електрона. Нарешті, в останньому прикладі на рис. 7.9 дві частинки, що мають однакові маси, $m_2 = m_1$, рухаються по близьких до колових орбітах навколо спільного центра мас. Це відбувається в атомі позитронію, формально роль ядра в якому за аналогією з протоном в атомі водню відіграє позитивно заряджений позитрон, маса якого дорівнює масі електрона, а також у системах фізичних подвійних зірок приблизно однакової маси.

Контрольні запитання та вправи

7.1. Чи є закони Кеплера руху планет Сонячної системи точними? Якщо ні, то пояснити, які саме не є точними і чому.

7.2. Іноді можна зустріти твердження, що при відшуканні сили гравітаційної взаємодії між двома точками, які не можна вважати матеріальними точками, можна використовувати формулу (7.1), якщо під r розуміти відстань між центрами мас цих тіл. Пояснити хибність цього твердження. Вказати правильний шлях відшукання згаданої сили.

7.3. При розв'язуванні задачі про рух тіла, кинутого поблизу поверхні Землі під кутом горизонту, за відсутності опору повітря отримують параболічну траекторію. Чи є цей результат точним? Якщо ні, то чому?

РОЗДІЛ 8

Коливання і хвилі

Серед різноманітних форм механічного руху особливе місце посідає коливальний рух, що характеризується регулярною повторюваністю (періодичністю) механічного стану частинки або системи частинок, причому напрямки швидкостей частинок протягом періоду коливань двічі змінюються на протилежний. Спорідненим з коливальним рухом є хвильовий рух, який можна розглядати як процес поширення коливань у просторі.

Важливість вивчення коливань і хвиль обумовлена тим, що ці форми руху властиві як речовині, так і полю, а тому вони універсальні й відіграють виняткове значення у фізиці. Поряд з такими механічними коливаннями, як коливання різного роду маєтників, деталей машин і конструкцій (вібрації), відомі також коливання заряду, струму та напруги в електричних колах і пов'язані з ними коливання векторів електричного та магнітного полів. Поряд з механічними хвилями в різних середовищах, таких як звукові, сейсмічні, хвилі на поверхні рідини тощо відомі також електромагнітні хвилі (радіохвилі, світло, рентгенівське та гамма-випромінення), плазмові хвилі, хвилі де Бройля властиві мікрочастинкам, гравітаційні хвилі, існування яких передбачає теорія, та ін. Існує ряд загальних властивостей і рис, притаманних усім коливальним і хвильовим рухам, незалежно від фізичної природи об'єктів, які беруть участь у цих рухах. У цьому розділі загальні властивості коливальних і хвильових рухів розглядаються на прикладах механічних коливань і хвиль.

8.1. Механічні коливання

У попередніх розділах було розглянуто низку прикладів коливального руху частинки, зокрема, коливання тіла масою m під дією пружини з коефіцієнтом жорсткості k , коливальний рух

математичного маятника в полі сили тяжіння (підрозд. 3.6), коливання частинки поблизу мінімуму потенціальної енергії (п. 5.6.2) тощо. В усіх цих прикладах коливання починались після виведення коливальної системи тим чи іншим способом з положення рівноваги (наданням початкового відхилення, поштовху або відхилення і поштовху водночас). Після цього система не зазнавала ніяких подальших зовнішніх втручань. Коливання, які відбуваються без зовнішніх втручань, тобто вільно, називаються *вільними*, або *власними* коливаннями.

8.1.1. Вільні коливання за відсутності дисипативних сил

У попередніх розділах ми розглядали лише вільні коливання під дією консервативної сили за відсутності сторонніх, зокрема, дисипативних сил. Було з'ясовано, що у випадку, коли сила прикладена до частинки пропорційна величині зміщення частинки з положення рівноваги, то це зміщення залежить від часу за гармонічним законом. При цьому потенціальна енергія коливальної системи або, як ще часто кажуть, *осцилятора*, квадратично залежить від величини зміщення.

Також було показано, що поблизу мінімуму потенціальної енергії $U(x)$ коливальної системи завжди можна обмежитись настільки малими відхиленнями x від положення рівноваги за $x = 0$, щоб у розвиненні функції $U(x)$ у степеневий ряд за степенями x можна було б знаходити доданками степенів вище другого, тобто подати потенціальну енергію як $U(x) = kx^2/2$ (п. 5.6.2). При цьому сила, що прикладена до частинки, лінійна за зміщенням, $F = -kx$, і спрямована до положення рівноваги.

У всіх розглянутих нами раніше випадках малих коливань під дією консервативної сили (див. підрозд. 3.6) рівняння руху можна звести до рівняння, яке подібне рівнянню (3.37) для коливального руху бруска по гладенькій горизонтальній площині під дією квазіпружної сили з боку пружини, а саме, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Загальним розв'язком цього рівняння є гармонічна функція часу $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

За відсутності дисипативних сил, повна механічна енергія E осцилятора залишається сталою, і її можна подати у вигляді суми кінетичної T та потенціальної U енергій, $E = T(t) + U(t)$.

Для згаданого випадку бруска $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$. Похідною за часом від зміщення $x(t)$ є $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Після підстановки $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ у вираз для повної енергії маємо

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (8.1)$$

Таким чином, повна механічна енергія осцилятора прямо пропорційна квадрату амплітуди, а за незмінної амплітуди також прямо пропорційна квадрату частоти. Зауважимо, що хоча миттєві значення потенціальної та кінетичної енергії осцилятора в загальному випадку різні, їх середні значення за період однакові й дорівнюють $E/2$.

У випадку руху бруска змінна x була декартовою координатою зміщення (відхилення) бруска від положення рівноваги. Однак у випадку математичного маятника (див. підрозд. 3.6), відхилення підвішеного тіла від положення рівноваги ми характеризували кутом θ відхилення підвісу від вертикалі й одержали рівняння (3.46), подібне до рівняння (3.37). Рівняння (3.46) можна заміною змінної $s = l\theta$ перетворити на рівняння $\ddot{s} = \omega_0^2 s = 0$, де s – параметр траєкторії, який є довжиною дуги траєкторії підвішеного тіла, відліченою від положення рівноваги за $\theta = 0$. Знак s збігається зі знаком θ . У свою чергу, враховуючи, що довжину дуги кола s при малих відхиленнях маятника можна наблизено замінити модулем радіус-вектора зміщення \vec{r} (рис. 3.22), і використовуючи прямокутну декартову систему координат з початком у точці рівноваги O з віссю OX , спрямованою горизонтально, і віссю OY , спрямованою вертикально вгору, та умову мализни відхилення $x \ll y$, можна отримати

$$s \approx r = \left(x^2 + y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx x \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} \right) \approx x.$$

Це означає, що рівняння малих коливань математичного маятника можна подати в такому самому вигляді, як рівняння (3.37) малих коливань бруска під дією пружної сили $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, де x – горизонтальна координата матеріальної точки. Отже, усі розглянуті рівняння малих коливань можна подати узагальненим рівнянням

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (8.2)$$

де під узагальненою координатою q треба розуміти будь-яку змінну, що характеризує механічний стан коливальної системи (x, θ, s або будь-яку іншу). Рівняння коливань (8.2) застосовне до всіх осциляторів, зокрема до механічних коливальних систем, у яких здійснюється поступальний рух та/або обертальний рух, наприклад, до коливань крутального маятника, фізичного маятника, перекочування циліндра по внутрішній поверхні більшого циліндра тощо. Зрозуміло, що для кожного осцилятора фізичний зміст узагальненої координати q буде різний: механічний стан осциляторів, які здійснюють обертальний рух, наприклад, крутального маятника, зручніше описувати кутом повороту φ . Для будь-якого виду руху (поступального чи обертального) тіла, що здійснює малі коливання поблизу положення рівноваги під дією лише консервативних сил, рівняння руху можна подати загальним рівнянням

$$\mu \ddot{q} = -kq, \quad (8.3)$$

де під μ треба розуміти величину, що характеризує інерційні властивості тіла: масу m тіла, якщо воно здійснює коливальний рух поступально, або момент інерції I тіла відносно осі обертання, якщо воно здійснює коливальний рух при обертанні, а k – коефіцієнт пропорційності, відповідно, у формулі сили або у формулі моменту сили, що пропорційні відхиленню тіла від положення рівноваги. Рівняння руху (8.3) можна звести до вигляду (8.2), у якому

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (8.4)$$

Загальним розв'язком рівняння (8.2) є

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (8.5)$$

де $q(t)$ – відхилення від положення рівноваги в момент часу t ; A – амплітуда коливань; ω_0 – циклічна частота власних коливань осцилятора, а φ – початкова фаза коливань. Повну механічну енергію E осцилятора можна подати у вигляді

$$E = T + U = \frac{\mu \dot{q}^2}{2} + \frac{\kappa q^2}{2}. \quad (8.6)$$

Таким чином, частоту власних коливань осцилятора ω_0 можна визначити за формулою (8.4) або з рівняння динаміки у формі (8.3), або з виразу для його повної енергії E у формі (8.6). За відсутності сторонніх сил, зокрема дисипативних, повна механічна енергія E осцилятора зберігається.

8.1.2. Згасання вільних коливань

Наявність дисипативних сил призводить до зменшення повної механічної енергії осцилятора (8.1), а отже, і до зменшення амплітуди коливань (іх згасання). Важливим випадком є коливання за наявності дисипативної сили, величина якої пропорційна швидкості, $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. Така формула справедлива, коли опір спричинюється рухом тіл відносно газу або рідини з невеликими швидкостями. Прикладом можуть бути сила опору повітря, що призводить до згасання вільних коливань гравітаційного маятника, сили рідинного тертя в усіх коливальних системах, де для зменшення тертя між поверхнями, що рухаються одна відносно одної, використовують змащування тощо.

Для наочності повернемось до руху бруска під дією пружної сили (підрозд. 3.6). Гладенька поверхня, рух по якій відбувається без тертя, є ідеалізацією. На практиці для зменшення тертя між бруском і горизонтальною поверхнею можна використати мастило, замінивши, таким чином, сухе тертя на рідинне. Отже, тепер до правої частини рівняння руху бруска (3.36) необхідно додати силу опору $\vec{F}_{\text{оп}} = -\alpha \vec{v}$ як з боку шару мастила, так і з боку повітря:

$$m\ddot{a} = m\ddot{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{оп}} + \vec{F}_{\text{пр}}. \quad (8.7)$$

Після підстановки формул сил до рівняння руху бруска (8.7) і проектування його на вісь OX (рис. 3.21) воно набуває вигляду

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - kx. \quad (8.8)$$

Поділимо ліву й праву частини рівняння (8.8) на m і напишемо його у вигляді

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \text{ а } 2\beta = \frac{\alpha}{m} = \gamma. \quad (8.9)$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі ста-лими коефіцієнтами відоме як *рівняння коливань за наявності тертя*, або *рівняння коливань, що згасають*. Відповідно до загальної методики розв'язання таких рівнянь будемо шукати його загальний розв'язок у вигляді

$$x(t) = A e^{\lambda t}, \quad (8.10)$$

де A і λ – деякі сталі коефіцієнти, що підлягають визначенню таким чином, щоб функція $x(t)$ у вигляді (8.10) задовольняла рівняння (8.9) та початкові умови.

Для визначення λ підставимо (8.10) до (8.9) й отримаємо рівняння $\lambda^2 A e^{\lambda t} + 2\beta\lambda A e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} = 0$, яке можна переписати у вигляді $A e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$. Тривіальним розв'язком цього рівняння є $A = 0$, що відповідає нульовому зміщенню, яке не залежить від часу. Нас цікавлять розв'язки, які відповідають ненульовим зміщенням x , тобто $A \neq 0$. У цьому випадку вираз у дужках має дорівнювати нулю, звідки випливає *характеристичне рівняння* для визначення λ :

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (8.11)$$

Якщо будь-який корінь характеристичного рівняння λ підставити у вираз (8.10), то отримаємо один із розв'язків диференційного рівняння (8.9). Оскільки характеристичне рівняння (8.10) має два корені

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{та} \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (8.12)$$

то для одержання загального повного розв'язку лінійного диференційного рівняння (8.9) треба взяти суму розв'язків, що відповідають обом кореням характеристичного рівняння:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (8.13)$$

де A_1 та A_2 – сталі інтегрування, які підлягають визначеню з початкових умов.

Розглянемо спочатку випадок **слабкого згасання коливань**, коли $\beta < \omega_0$. Тоді $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ і добування квадратного кореня із цього виразу можна здійснити таким чином:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \beta^2)} = \sqrt{(-1)} \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

де $i = \sqrt{(-1)}$. Отже, корені характеристичного рівняння для випадку слабкого згасання можна записати у вигляді

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega_\beta \quad \text{та} \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega_\beta, \quad (8.14)$$

де введено позначення

$$\omega_\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (8.15)$$

Загальний повний розв'язок рівняння (8.9) у цьому випадку навбуває вигляду

$$x = A_1 e^{(-\beta+i\omega_\beta)t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega_\beta)t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{+i\omega_\beta t} + A_2 e^{-i\omega_\beta t}). \quad (8.16)$$

Оскільки розв'язок рівняння (8.9), а саме, зміщення з положення рівноваги $x(t)$, має бути дійсною величиною, то необхідно цього вимагати і від розв'язку у формі (8.16). Величина x дійсна, якщо вона задовольняє умову $x = x^*$, де зірочка "*" означає комплексно спряжену величину¹.

З умови дійсності розв'язку (8.16) випливає рівність

$$A_1 e^{+i\omega_\beta t} + A_2 e^{-i\omega_\beta t} = A_1^* e^{-i\omega_\beta t} + A_2^* e^{+i\omega_\beta t},$$

яка може виконуватись для довільних ω_β і t тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при однакових експонентах в її лівій і правій частинах рівні між собою: $A_1 = A_2^*$ і $A_2 = A_1^*$, тобто величини A_1 і A_2 комплексно спряжені. Нехай $A_1 = \frac{a_0}{2} e^{i\varphi}$, тоді $A_2 = \frac{a_0}{2} e^{-i\varphi}$. Це дає можливість подати розв'язок (8.16) у вигляді

¹ Нагадаємо, що будь-яке комплексне число z можна подати у вигляді $z = a + ib$ або $z = |z| e^{i\varphi}$, де $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $\varphi = \arctg(b/a)$. Комплексно спряженим до нього числом є $z^* = a - ib$ або $z^* = |z| e^{-i\varphi}$.

$$A_1 x = e^{-\beta t} \left(\frac{a_0}{2} e^{+i(\omega_\beta t + \varphi)} + \frac{a_0}{2} e^{-i(\omega_\beta t + \varphi)} \right)$$

або, після винесення за дужки a_0 і застосування відомої формулі $\frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos \varphi$, як

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_\beta t + \varphi). \quad (8.17)$$

Формулу (8.17) можна подати у вигляді

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_\beta t + \varphi), \quad (8.18)$$

де $A(t) = a_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда коливань, що експоненціально зменшується з часом.

На рис. 8.1, а наведено графік залежності відхилення x від часу t для коливань, що згасають завдяки наявності дисипативної сили, яка пропорційна швидкості (напр., рідинне або в'язке тертя; формула (8.17)), відповідно до якого амплітуда коливань зменшується за експоненціальним законом спочатку швидко, а

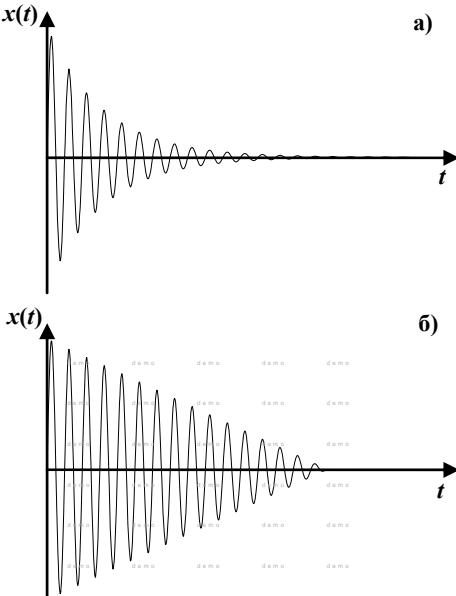


Рис. 8.1. Згасання коливань:
а) рідинне тертя; б) сухе тертя

а) потім все повільніше й повільніше, асимптотично прямуючи до нуля.

Простою кількісною мірою швидкості згасання може бути коефіцієнт β у показнику експоненти. Більш вживаною і наочною характеристикою швидкості згасання коливань є час згасання, або час релаксації, $\tau = 1/\beta$, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e^{-1} разів. Тоді формулу залежності амплітуди від часу можна подати у вигляді

$$A(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.19)$$

Швидкість згасання можна охарактеризувати і відношенням двох послідовних максимальних зміщень одного знака (амплітуд), часовий проміжок між якими $T_\beta = 2\pi/\omega_\beta$:

$$d = \frac{A(t)}{A(t + T_\beta)} = \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T_\beta)}} = e^{-\beta T_\beta}. \quad (8.20)$$

Величину d називають *декрементом згасання*, а її натуральний логарифм $\lambda = \ln d = -\beta T_\beta$ – *логарифмічним декрементом згасання*. Ці безрозмірні величини використовують переважно в техніці та в теорії коливань. При значному згасанні їх можна визначити безпосередньо за формулою (8.20) із порівняння амплітуд двох послідовних коливань. При малому згасанні доцільніше порахувати кількість коливань N_τ , що здійснює осцилятор за час релаксації τ , і скористатися формулою $\lambda = 1/N_\tau$, яка безпосередньо випливає з означень часу згасання та логарифмічного декремента згасання.

Згасання коливань можна також характеризувати втратою повної енергії коливальної системи. Після підстановки до (8.1) амплітуди $A(t) = a_0 e^{-\beta t}$ із рівняння (8.18) отримаємо залежність повної енергії згасаючого осцилятора від часу:

$$E(t) = \frac{kA^2(t)}{2} = \frac{ka_0^2}{2} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (8.21)$$

де $E_0 = E(0)$ – початкове значення повної енергії осцилятора.

Розглянемо втрати повної енергії осцилятора при слабкому згасанні ($\beta < \omega_0$). Втрата енергії за період T_β становить

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(t) - E(t + T_\beta) = E_0 e^{-2\beta t} - E_0 e^{-2\beta(t+T_\beta)} = \\ &= E_0 e^{-2\beta t} (1 - e^{-2\beta T_\beta}) \approx E_0 e^{-2\beta t} (1 - 1 + 2\beta T_\beta) = \\ &= E_0 e^{-2\beta t} 2\beta T_\beta = E(t) 2\beta T_\beta. \end{aligned} \quad (8.22)$$

При перетворенні правої частини (8.22) було враховано, що $2\beta T_\beta \ll 1$. Оскільки більш зручними для аналізу є не абсолютні,

а відносні величини, знайдемо відносну зміну енергії коливань за період коливань

$$\frac{\Delta E}{E(t)} = 2\beta T_\beta = 2\beta \frac{2\pi}{\omega_\beta} \approx \gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\gamma}{v_0}. \quad (8.23)$$

При перетвореннях правої частини (8.23) ми вважали, що $\omega_\beta \approx \omega_0$, оскільки $\beta \ll \omega_0$, і використали рівності $2\beta = \gamma$ і $\omega_0 = 2\pi v_0$.

Таким чином, відносна зміна повної енергії коливань за період коливань чисельно дорівнює відношенню сталої згасання γ до частоти власних коливань v_0 :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\gamma}{v_0}. \quad (8.24)$$

При малому згасанні ця величина завжди набагато менша від одиниці, що створює певні незручності для розрахунків. Тому на практиці застосовують обернену величину, яку називають *добротністю* Q коливальної системи. Вона визначається як відношення повної енергії коливальної системи E до втрати енергії за період коливань ΔE , помножене на 2π :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \quad (8.25)$$

Із порівняння виразів (8.25) і (8.24) випливає, що добротність Q чисельно дорівнює відношенню циклічної частоти ω_0 до сталої згасання $\gamma = 2\beta$:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad \text{або} \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (8.26)$$

Добротність також можна подати у вигляді (див. впр. 8.4)

$$Q = \frac{1}{2} \omega_0 \tau. \quad (8.27)$$

Із виразів (8.26) і (8.27) випливає, що високу добротність Q простіше забезпечити за високих частот коливань.

Камертони, які використовуються для настроювання музичних інструментів і в лекційних демонстраціях, мають добротність порядку 10^3 за власних частот, що не перевищують 1 кГц. Добротність механічних коливальних систем може досягати ве-

личин $10^4 - 10^6$ (при власних коливаннях пластинок п'езокварцу з частотами порядку десятків кілогерців у електронних годинниках і сотень мегагерців у генераторах тактової частоти комп'ютерів тощо). Добротність молекулярних і атомних стандартів частоти (годинників) може перевищувати 10^{11} за частоту, що сягають $10^{15} \text{ Гц} = 10^{12} \text{ кГц} = 10^9 \text{ МГц} = 10^6 \text{ ГГц} = 10^3 \text{ ТГц}$.

На практиці добротність Q визначають не безпосередньо за означенням (8.25), оскільки вимірюти енергію E і втрату енергії за період коливань ΔE дуже складно, а через кількість коливань N_τ , що здійснює осцилятор за час згасання τ :

$$Q = \pi N_\tau. \quad (8.28)$$

Згасання коливань за наявності лише дисипативної сили сухого тертя, модуль якої не залежить від швидкості, на відміну від попереднього випадку, відбувається за лінійним законом (рис. 8.1, б), причому внаслідок існування явища застою (див. п. 3.3.3) після припинення коливань відбувається залишкове відхилення від положення рівноваги. У нашому прикладі руху бруска по горизонтальній поверхні під дією пружної сили такий хід згасання спостерігається, коли між бруском і горизонтальною поверхнею, по якій він рухається, немає мастила (рідини).

Нагадаємо, що всі попередні формули, починаючи з (8.14), отримано для випадку, коли $\beta < \omega_0$, оскільки лише за цієї умови можливі коливання. Дійсно, при зростанні константи згасання частота коливань $\omega_\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ зменшуватиметься і за $\beta \rightarrow \omega_0$ прямуватиме до нуля, а період коливань T_β при цьому буде збільшуватись і прямувати до нескінченності, що вказує на перехід від періодичного коливального до неперіодичного, або *аперіодичного* руху.

Розглянемо аперіодичний рух, що відповідає розв'язку (8.13) рівняння (8.9) при **сильному згасанні коливань**, коли $\beta > \omega_0$. За такої умови обидва корені характеристичного рівняння (8.12) будуть від'ємними, $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$, оскільки завжди $|\beta| > \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Отже, при сильному згасанні загальний розв'язок (8.13) рівняння (8.9) можна подати у вигляді

$$x(t) = A_1 e^{-|\lambda_1|t} + A_2 e^{-|\lambda_2|t}. \quad (8.29)$$

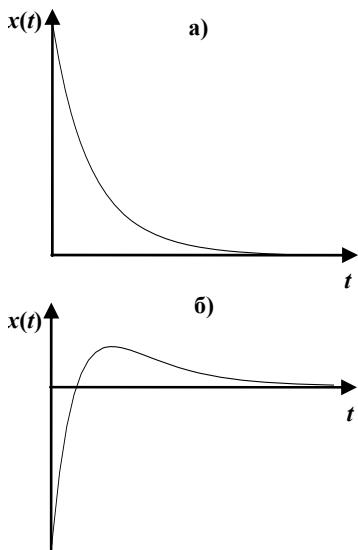


Рис. 8.2. Аперіодичні рухи

Сталі інтегрування A_1 та A_2 можна визначити з початкових умов $x(0) = x_0$ і $\dot{x}(0) = v_{x0}$. У будь-якому випадку за великих t зміщення експоненціально наближається до нуля, але залежно від початкових умов усі можливі аперіодичні рухи можна поділити на два типи: а) зміщення не змінює знак; б) зміщення змінює знак. Перший із них реалізується, коли обидві сталі інтегрування A_1 та A_2 мають одинаковий знак, $A_1 \cdot A_2 > 0$, наприклад, коли $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ (рис. 8.2, а), або A_1 та A_2 мають різні знаки, $A_1 \cdot A_2 < 0$ (рис. 8.2, б).

В аперіодичному режимі коливальна система не може більше одного разу проходити через стан рівноваги. Дослідження аперіодичних режимів рухів дуже важливе для багатьох явищ і технічних пристройів, зокрема для вимірювальних систем типу точних терезів, стрілочних приладів (галіванометрів, компасів тощо). У вимірювальних приладах зазвичай намагаються реалізувати аперіодичний режим з найменшим часом встановлення рівноваги. Для цього часто штучно створюють сили опору, що залежать від швидкості, наприклад, рухомий елемент багатьох компасів (напр., морських, військових, туристських) розміщено в об'ємі, заповненому рідинами (спирт, глицерин, гас, олія тощо).

8.1.3. Змущені коливання

Оскільки дисипативні сили завжди існують, то повна механічна енергія коливальної системи, а отже, і амплітуда вільних коливань, завжди буде зменшуватись. У багатьох випадках, наприклад, у годинниках є необхідність підтримання сталої амплітуди коливань

протягом тривалого часу. Для цього необхідно компенсувати від'ємну роботу дисипативних сил додатною роботою сторонніх сил (див. п. 5.5.1). Одним із найпростіших способів підтримання незмінними амплітуди та енергії коливань є періодичне прикладання до тіла, що здійснює коливальний рух, зовнішньої сили, напрямок якої збігається з напрямком руху тіла в даний момент часу. Така сила виконує додатну роботу, і тим самим збільшує повну механічну енергію коливальної системи. Прикладом, відомим з дитинства, є колиска або гойдалка, які для підтримання сталої амплітуди коливань необхідно періодично й обов'язково "у такт" підштовхувати. Коливання такого типу називають *змушеними*.

Розглянемо змушені коливання під дією зовнішньої (щодо коливальної системи) періодичної змушувальної сили, використовуючи для наочності коливальну систему, що складається з бруска та пружини (рис. 3.21). Рівняння руху бруска під дією пружної сили за наявності сили опору, що залежить від швидкості, і зовнішньої періодичної сили $F(t+T)=F(t)$ має вигляд

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + F(t). \quad (8.30)$$

Нехай зовнішня періодична сила $F(t)$ змінюється за гармонічним законом, $F = F_0 \cos \omega t$, тоді

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad \text{де } f_0 = \frac{F_0}{m}. \quad (8.31)$$

Може виникнути запитання: чи є сенс розглядати змушені коливання під дією сили, що змінюється із часом за гармонічним законом, який доволі складно забезпечити на практиці? Відповідь полягає в тому, що будь-яку періодичну силу $F(t+T)=F(t)$, яка має неперервну похідну, можна подати у вигляді тригонометричного ряду Фур'є:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

тобто як суму гармонічних складових. Оскільки рівняння руху (8.30) лінійне, то сума будь-яких його розв'язків також є розв'язком цього рівняння.

Отже, для відшукання зміщення $x(t)$ під дією сили $F(t)$ достатньо спочатку знайти відгук $x_n(t)$ коливальної системи на ко-

жну гармоніку $a_n \cos(n\omega t + \phi_n)$ змушувальної сили $F(t)$, а потім знайти суму цих відгуків. Тому задача відшукання саме гармонічних розв'язків рівняння змушених коливань є актуальною.

Диференціальне рівняння (8.30) називається *неоднорідним*, оскільки має ненульову праву частину, на відміну від однорідного рівняння (8.8). Відповідно до загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сумаю загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок (8.14) однорідного рівняння (8.8) нам уже відомий. Для відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння (8.31) спочатку знайдемо частинний розв'язок допоміжного неоднорідного рівняння

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}. \quad (8.32)$$

Праву частину рівняння (8.32) можна подати як $f_0 e^{i\omega t} = f_0 \cos \omega t + i f_0 \sin \omega t$, а його частинний розв'язок, як $z = x + iy$, дійсна частина x якого буде частинним розв'язком рівняння (8.31).

Розв'язок рівняння (8.32) шукаємо у вигляді $z = b e^{i\omega t}$. Після його підстановки до (8.32) отримаємо рівняння для визначення b :

$$-\omega^2 b + 2i\beta\omega b + \omega_0^2 b = f_0, \quad (8.33)$$

звідки

$$b = \frac{f_0}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2}. \quad (8.34)$$

Тоді частинним розв'язком допоміжного неоднорідного рівняння (8.32) буде

$$z(t) = b e^{i\omega t} = \frac{f_0}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2} e^{i\omega t}. \quad (8.35)$$

Відокремимо дійсну частину виразу (8.35), яка являє собою шуканий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.31). Для цього зручно скористатися поданням комплексної величини b у вигляді $b = |b| e^{i\delta}$ і записати $z(t)$ з (8.35) як

$$z(t) = |b| e^{i\delta} e^{i\omega t} = |b| e^{i(\omega t + \delta)} = |b| [\cos(\omega t + \delta) + i \sin(\omega t + \delta)] = |b| \cos(\omega t + \delta) + i |b| \sin(\omega t + \delta) = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z).$$

Отже, дійсною частиною розв'язку $z(t)$ є $x(t) = |b| \cos(\omega t + \delta)$, де

$$\begin{aligned} |b| &= \sqrt{b \cdot b^*} = \sqrt{\frac{f_0}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2} \cdot \frac{f_0}{-\omega^2 - 2i\beta\omega + \omega_0^2}} = \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \end{aligned}$$

а шуканим частинним розв'язком неоднорідного рівняння (8.31) є

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \delta), \quad (8.36)$$

де фазовий зсув δ визначається відношенням уявної $\operatorname{Im}(b)$ і дійсної $\operatorname{Re}(b)$ частин комплексної амплітуди b . Дійсно, $b = |b| e^{i\delta} = |b| \cos \delta + i |b| \sin \delta = \operatorname{Re}(b) + i \operatorname{Im}(b)$. Для відшукання $\operatorname{Im}(b)$ та $\operatorname{Re}(b)$ перетворимо праву частину виразу b з (8.34) таким чином:

$$\begin{aligned} b &= \frac{f_0}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} = \\ &= f_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} - if_0 \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \\ &= \operatorname{Re}(b) + i \operatorname{Im}(b). \end{aligned}$$

Отже, $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$, звідки отримаємо

$$\delta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8.37)$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння змушених коливань матиме вигляд

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \delta) + a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_\beta t + \varphi), \quad (8.38)$$

де перший доданок описує змущені коливання під дією періодичної гармонічної сили $F = F_0 \cos \omega t$, а другий доданок – вільні коливання, що згасають.

У стаціонарному режимі змущених коливань необхідно розглядати лише перший доданок, оскільки другий доданок при $t >> \tau$ спадає до нуля.

На рис. 8.3 показано встановлення змущених коливань після прикладання змушувальної сили в момент часу $t = 0$. Після припинення дії змушувальної сили коливання стають вільними і згасають так, як показано на рис. 8.1, a.

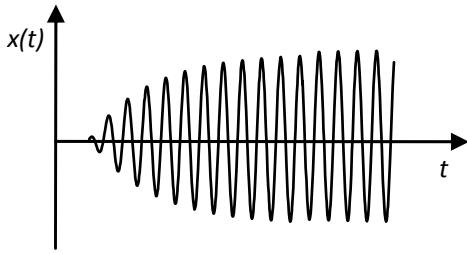


Рис. 8.3. Установлення змущених коливань

Надалі розглянемо лише стаціонарні змущені коливання

$$x(t) = b(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega)), \quad (8.39)$$

амплітуда яких дорівнює

$$b(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (8.40)$$

а фазовий зсув $\delta(\omega)$ описується виразом (8.37).

8.1.4. Явище резонансу

Явище резонансу полягає в різкому збільшенні амплітуди змущених коливань механізмів, мостів, інших будівельних конструкцій при наближенні частоти змушувальної сили до деякої цілком визначеній для певної коливальної системи *резонансної частоти*.

Дослідимо залежність амплітуди $b(\omega)$ змущених коливань від частоти змушувальної сили. Із виразу (8.40) видно, що коли $\omega \rightarrow 0$, то $b(\omega) \rightarrow b(0) = \frac{F_0}{m\omega_0} = \frac{F_0}{k}$, тобто зміщення $x = \frac{F_0}{k}$ під дією сили F_0 постійної величини стало і пропорційне цій силі.

Коли $\omega \rightarrow \infty$, то $b(\omega) \rightarrow 0$, тобто амплітуда коливань зменшується внаслідок інерції тіла, що здійснює коливальний рух.

Із виразу (8.40) також видно, що амплітуда $b(\omega)$ буде максимальною, коли знаменник буде мінімальним. Для відшукання екстремуму знаменника слід прирівняти до нуля похідну за частотою ω від підкореневого виразу знаменника:

$$\begin{aligned} 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 4\beta^2 2\omega &= \\ = -4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2 \omega &= \\ = -\omega[4(\omega_0^2 - \omega^2) - 8\beta^2] &= 0. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Останнє рівняння має три корені. Один із них, $\omega_1 = 0$, відповідає видовженню пружини під дією сталої сили. Із двох інших, $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, фізичний зміст має лише корінь зі знаком "+", який визначає *резонансну частоту* коливальної системи:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (8.42)$$

при наближенні до якої спостерігається збільшення амплітуди змушених коливань, а за $\omega = \omega_{\text{рез}}$ досягає максимального значення. Резонансна частота завжди менша від частоти власних коливань ω_0 і тим більше відрізняється від останньої, чим більше згасання β . Зазначимо, якщо частота змушених коливань збігається з власною частотою, $\omega = \omega_0$, то максимальне відхилення від положення рівноваги в Q разів більше за відхилення при $\omega = 0$:

$$b(\omega) = \frac{F_0}{m \cdot 2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{2\beta m \omega_0^2} = \frac{F_0}{2\beta m} \frac{k}{\omega_0} = \frac{F_0}{k} Q. \quad (8.43)$$

Для узагальненого аналізу частотних залежностей амплітуди і фази змушених коливань зручно подати їх залежно від частоти ω , вимірюної в одиницях власної частоти ω_0 , тобто від безрозмірної величини ω / ω_0 . Для цього відповідним чином перетворимо вираз (8.36):

$$b(\omega / \omega_0) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \\ = \frac{F_0}{\omega_0^2 m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{4\beta^2}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

i, враховуючи, що $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, остаточно отримаємо

$$b(\omega / \omega_0) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{4\beta^2}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (8.44)$$

Аналогічно для фазового зсуву δ із (8.37) одержимо

$$\delta(\omega / \omega_0) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2\beta}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \right\}. \quad (8.45)$$

На рис. 8.4, a наведено графіки залежності амплітуди змушених коливань $b(\omega)$ від частоти¹ за різних сталих згасання $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0,1\omega_0$, $\beta_3 = 0,25\omega_0$, $\beta_4 = 0,5\omega_0$, $\beta_5 = \omega_0$, $\beta_6 = 5\omega_0$, $\beta_7 = 10\omega_0$. Усі амплітуди нормовано на величину відхилення за нульової частоти $b(0) = F_0 / k$, яке не залежить від величини згасання. За відсутності згасання $\beta_1 = 0$ амплітуда змушених коливань при наближенні частоти ω до власної частоти ω_0 прямувала б до нескінченості. За наявності згасання ($\beta > 0$) усі графіки для змушених коливань лежать під кривою $\beta_1 = 0$. При збільшенні згасання максимальні значення амплітуди за $\omega = \omega_{\text{рез}}$ зменшуються, а самі максимуми зсуваються в бік менших частот відповідно до (8.42).

¹ Такі залежності називають *амплітудночастотними характеристиками коливальної системи*.

За критичного $\beta_{\text{кр}} = \omega_0$ максимум амплітуди досягає точки з координатами $(0,1)$. При подальшому збільшенні згасання $\beta > \beta_{\text{кр}}$ амплітуда коливань при збільшенні частоти на інтервалі $[0, \infty]$ лише монотонно спадає.

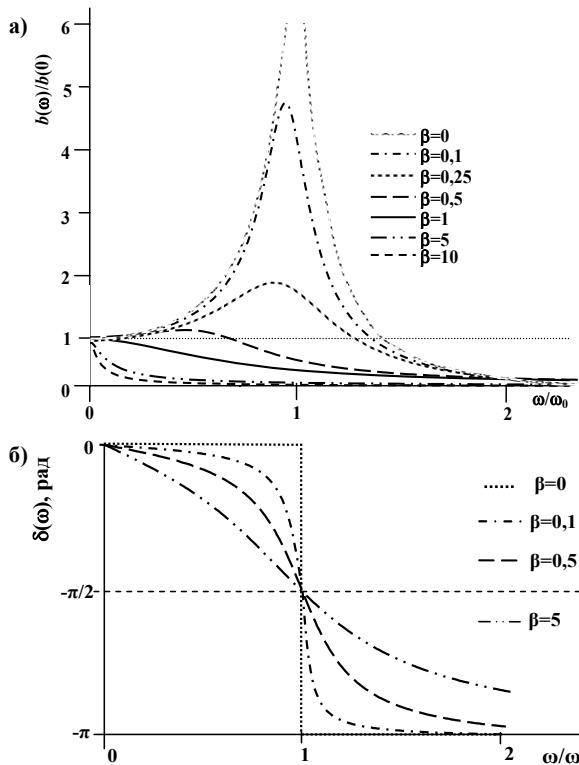


Рис. 8.24. Залежність нормованої амплітуди $b(\omega) / b(0)$ і фазового зсуву δ між відхиленням $x(t)$ і змушувальною силою $F(t)$ від нормованої частоти ω / ω_0

На рис. 8.4, б наведено графіки залежності фазового зсуву $\delta(\omega)$ між відхиленням $x(t) = b \cos(\omega t + \delta(\omega))$ і змушувальною гармоніч-

ною силою $F(t) = F_0 \cos \omega t$ від нормованої частоти останньої¹ ω / ω_0 за декількох сталах згасання: $\beta_2 = 0,1\omega_0$, $\beta_3 = 0,25\omega_0$, $\beta_4 = 0,5\omega_0$, $\beta_5 = \omega_0$, $\beta_6 = 5\omega_0$. Зауважимо такі особливості поведінки $\delta(\omega)$:

1) змущені коливання завжди відстають за фазою від коливань змушувальної сили, причому це відставання зростає із частотою: фазовий зсув за $\omega = 0$ дорівнює нулю, а потім монотонно зменшується, асимптотично прямуючи до $-\pi$;

2) фазовий зсув $\delta(\omega)$ за $\omega = \omega_0$ для будь-яких величин згасання дорівнює $-\pi/2$.

Відставання за фазою змущених коливань від коливань змушувальної сили зумовлене інерційністю відгуку коливальної системи на зовнішнє збурення. За малих порівняно з власною частотою коливальної системи частотах змушувальної сили $\omega / \omega_0 \ll 1$ швидкість і прискорення маси, що здійснює коливальний рух, будуть малими. Тому в рівнянні руху (8.30) можна знехтувати доданками $m\ddot{x}$ та $-\alpha\dot{x}$, унаслідок чого маємо $x(t) = F(t) / k$, тобто зміщення бруска не залежить від його маси, а пропорційне змушувальній силі й змінюється у фазі з нею. За $\omega \rightarrow 0$ приходимо до вже згаданого статичного випадку, який описується законом Гука. За великих порівняно з власною частотою коливальної системи частот змушувальної сили, тобто за $\omega / \omega_0 \gg 1$ протягом половини періоду коливань, коли маса під дією змушувальної сили рухається в одному напрямку, вона не встигає ні набрати значної швидкості, ні зміститись на значну величину з положення рівноваги, оскільки період коливань $T = 2\pi/\omega$ дуже короткий. Тому сила опору $-\alpha\dot{x}$, що залежить від швидкості, і пружна сила, що залежить від зміщення $-kx$, залишаються малими. Отже, ними можна знехтувати у рівнянні руху (8.30) і вважати, що прискорення виникає лише завдяки дії змушувальної сили:

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (8.46)$$

¹ Такі залежності називають фазово-частотними характеристиками коливальної системи.

Двократним інтегруванням рівняння (8.46) можна знайти закон руху бруска:

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t = \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t - \pi) = \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \delta), \quad (8.47)$$

звідки видно, що зміщення запізнюються за фазою на π ($\delta = -\pi$) щодо змушувальної сили.

У резонансному режимі, коли змущені коливання відбуваються з частотою, близькою до власної частоти коливальної системи, $\omega \approx \omega_0$, у рівнянні руху (8.31) суму двох доданків \ddot{x} та $\omega_0^2 x$ можна вважати рівною нулю, оскільки будь-яка гармонічна функція $x(t) = b \cos(\omega_0 t + \delta)$ є розв'язком рівняння власних коливань $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. З урахуванням цього факту із рівняння (8.31) випливає, що $2\beta \dot{x} = (F_0/m) \cos \omega_0 t$, звідки шляхом інтегрування отримуємо вираз для зміщення

$$\begin{aligned} x(t) &= (F_0/2\beta m \omega_0) \sin \omega_0 t = (F_0/2\beta m \omega_0) \cos(\omega_0 t - \pi/2) = \\ &= Q(F_0/k) \cos(\omega_0 t - \pi/2). \end{aligned}$$

Таким чином, у резонансі амплітуда зміщення в Q разів більша за амплітуду при $\omega \rightarrow 0$ і зміщення запізнюються за фазою щодо змушувальної сили на $\pi/2$ ($\delta = -\pi/2$). Це означає, що: 1) під час резонансу швидкості будуть великими, тобто значними будуть дисипативні сили опору, що залежать від швидкості $-\alpha \dot{x}$, а отже, і втрати енергії коливальної системи; 2) швидкість при резонансі змінюється синфазно із зовнішньою змушувальною силою, а отже, її потужність максимальна, що забезпечує ефективну передачу енергії до коливальної системи.

Обчислимо роботу зовнішньої змушувальної сили за період коливань системи:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T F(t) \dot{x}(t) dt = \int_0^T F_0 \cos \omega t [-\omega b(\omega) \sin(\omega t + \delta(\omega))] dt = \\ &= -F_0 \omega b(\omega) \int_0^T \cos \omega t \cdot \sin(\omega t + \delta(\omega)) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} F_0 \omega b(\omega) \int_0^T [\sin(2\omega t + \delta(\omega)) - \sin(-\delta(\omega))] dt = \\
&= -\frac{1}{2} F_0 \omega b(\omega) \left[-\frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t + \delta(\omega)) \right]_0^T - \frac{1}{2} F_0 \omega b(\omega) \sin \delta(\omega) T.
\end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$A = -\pi F_0 b(\omega) \sin \delta(\omega). \quad (8.48)$$

Із (8.48) видно, що робота зовнішньої сили не залежить від частоти і завжди додатна, $A > 0$, оскільки завжди $\delta(\omega) < 0$. Вона прямо пропорційна амплітуді зовнішньої сили F_0 та амплітуді змушених коливань $b(\omega)$ і критично залежить від фазового зсуву $\delta(\omega)$. Ефективність передачі енергії до коливальної системи тим вища, чим ближчий фазовий зсув $\delta(\omega)$ до $-\pi/2$, що спостерігається на частоті власних коливань системи ω_0 . За малих і великих (порівняно із частотою власних коливань) частот зовнішньої сили $\sin \delta(\omega)$ прямує до нуля, а разом з нею і робота, оскільки $F_0 = \text{const}$ за постановкою задачі, а амплітуда змушених коливань за частот віддалених від власної мала. В умовах резонансу робота зовнішньої сили за період має вигляд

$$A = -\pi F_0 \frac{F_0}{k} Q \sin(-\pi/2) = \pi \frac{F_0^2}{k} Q = \frac{F_0^2 T}{4\beta m} = \Delta E. \quad (8.49)$$

Ця робота завжди прямо пропорційна квадрату амплітуди змушувальної сили F_0 . Також вона прямо пропорційна добробутності Q (обернено пропорційна сталій згасання). Вона дорівнює втратам за період ΔE повної енергії коливальної системи у стаціонарному режимі змушених коливань. Порівнюючи ΔE з повною енергією коливальної системи

$$E = \frac{k b_0^2}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{F_0}{k} Q \right)^2 = \frac{F_0^2}{2k} Q^2, \quad (8.50)$$

переконуємось, що отриманий результат цілком узгоджується з уведенім означенням добробутності (8.25).

Для практичних цілей аналізу поведінки коливальної системи на ділянці частот ω поблизу власної частоти ω_0 формулу (8.40)

можна значно спростити. Дійсно, підкореневий вираз можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 &= (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \approx \\ &\approx (\omega_0 - \omega)^2 (2\omega_0)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2 = 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2. \end{aligned}$$

Після підстановки цього наближеного виразу до (8.40) отримаємо

$$\begin{aligned} b(\omega) &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2}} = \\ &= \frac{F_0}{2\omega_0 m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} = \frac{F_0}{\frac{2\beta}{\omega_0} m} \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

Отже, поблизу власної частоти амплітуду коливань можна описати простою формулою

$$b(\omega) = \frac{F_0}{k} Q \cdot \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}}. \quad (8.51)$$

На рис. 8.5 показано апроксимацію графіка залежності $b(\omega)$ (8.40) за $\beta = 0,05$ наближеним графіком (8.51). Функцію частоти $L(\omega)$, яка є другим множником у формулі (8.51):

$$L(\omega) = \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\beta}\right)^2 + 1}}, \quad (8.52)$$

називають *лоренцевою функцією*, а її графік – *лоренцевим контуром*, або *лоренціаном*. Вона широко використовується в багатьох розділах фізики в різних формах запису. Свого максимального значення, що дорівнює 1, вона сягає за $\omega = \omega_0$, а за $|\omega - \omega_0| = \beta$ функція Лоренца набуває значень $L(\beta) = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$. Оскільки енергія коливань пропорційна квадрату їх амплітуди, то можна стверджувати, що за частот $\omega = \omega_0 \pm \beta$ енергія коливальної системи вдвічі менша від енергії на резонансній частоті. Величину $\Delta\omega = 2\beta$ приймають за *шириною лоренцевого контуру*, а величину $\Delta\omega / 2 = \beta$ називають його *півшириною*. Ширина лоренцевого контуру $\Delta\omega$ встановлює межі інтервалу частот поблизу частоти

резонансу, у якому коливальна система ефективно відгукується на дію зовнішньої гармонічної змушувальної сили.

Із викладеного випливає, що величини, які характеризують згасання коливальної системи, можна знайти безпосередньо з аналізу залежності амплітуди коливань від частоти змушувальної сили: достатньо визначити резонансну частоту, а також частоту, за якої амплітуда коливань становить $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ від максимальної, та обчислити півширину $\Delta\omega / 2$ як модуль їх різниці. Тоді коефіцієнт згасання β дорівнюватиме півширині, $\beta = \Delta\omega / 2$, стала згасання γ – ширині лоренцевого контуру, $\gamma = \Delta\omega$, час згасання τ є величиною, оберненою до півширини, $\tau = 2/\Delta\omega$, а добротність Q обернено пропорційна до ширини лоренцевого контуру відповідно до формули

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (8.53)$$

що випливає із виразу для добротності (8.26).

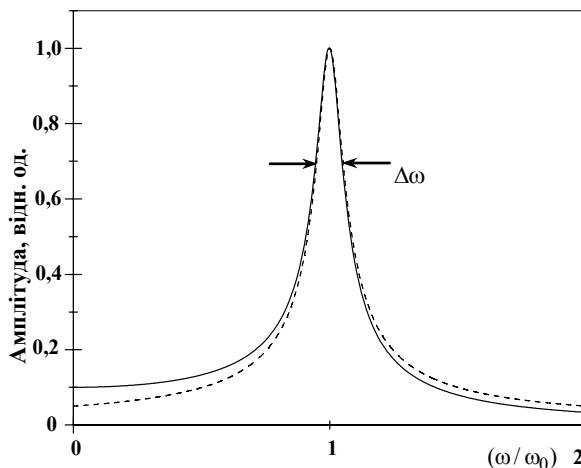


Рис. 8.5. Графік $b_0(\omega / \omega_0)$ (суцільна лінія) і лоренціан (штрихова лінія).

Ширина лоренціана $\Delta\omega$ показана стрілочками

8.1.5. Параметричні коливання

Підтримання сталої амплітуди коливань коливальної системи може бути здійснене також шляхом періодичної зміни принаймні одного із її параметрів, що визначають власну частоту (період власних коливань). Знову звернемось до прикладу гойдалки. Розгойдування і підтримання сталої амплітуди коливань дитячої гойдалки зазвичай здійснюють дорослі шляхом її періодичного підштовхування. Водночас самі дорослі здатні самостійно розгойдуватись до значної амплітуди і підтримувати її протягом тривалого часу без прикладання до гойдалки зовнішньої змушувальної сили (рис. 8.6). Для цього особа, що розгойдується, періодично присідає в моменти найбільшого відхилення гойдалки і швидко підводиться при проходженні положення рівноваги. При цьому на величину Δl змінюється положення центра мас тіла C , що коливається, а отже, і зведена довжина $l = OC$ гравітаційного маятника, яким можна вважати гойдалку. Саме ця величина визначає частоту власних коливань маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

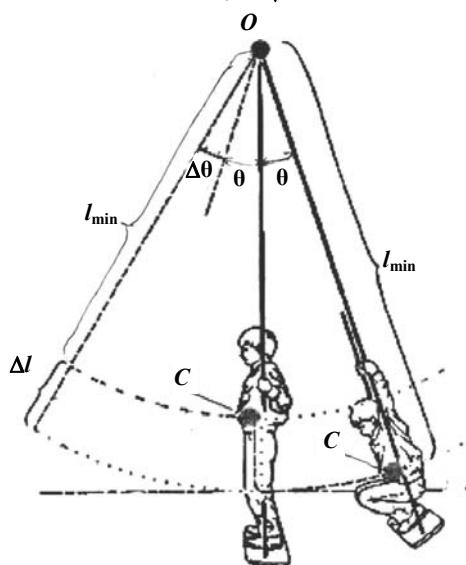


Рис. 8.6. Самостійне розгойдування гойдалки

Очевидно, що частота зміни параметра l має бути вдвічі більша за частоту власних коливань маятника, на відміну від частоти зовнішньої змушувальної сили при змущених коливаннях, розглянутих вище. Для підтримання сталої амплітуди робота, що виконується стороною силою при змінах параметра l , має бути достатньою для компенсації втрат енергії маятника за період. Якщо ця робота перевищує втрати, то повна енергія коливальної системи й амплітуда коливань будуть зростати, поки баланс втрат і наданої ззовні енергії не встановиться на новому рівні. Такий спосіб підтримання та/або збудження коливань називають *параметричним*, самі коливання, підтримувані таким способом, *параметричними коливаннями*, а стрімке зростання амплітуди при наближенні частоти зміни параметра до певного значення, характерного для коливальної системи, називають *параметричним резонансом*. Зауважимо, що **для успішного розгойдування таким способом необхідно спочатку вивести гойдалку із положення рівноваги**.

Для лекційної демонстрації параметричного резонансу використовують модель математичного маятника у вигляді маленької сталевої кульки масою m , підвішеної на нитці, що перекинута через горизонтально розміщений стрижень діаметром порядку 2 мм, який визначає точку підвішування маятника O (рис. 8.7, *a*). Це дає можливість неперервним чином змінювати довжину l маятника в процесі його коливань.

Розглянемо особливості руху маятника сталої і змінної довжини. Нехай спочатку маятник перебуває у спокої. Тоді нитка підвісу паралельна вектору прискорення вільного падіння \vec{g} . Якщо за сталої довжини маятника l вивести його з положення рівноваги, то кулька буде рухатись по дузі радіуса l із центром у точці підвісу O . При цьому сила натягу нитки \vec{T} , прикладена до кульки з боку підвісу, буде завжди перпендикулярно до вектора її швидкості \vec{v} , унаслідок чого потужність і робота цієї сили завжди дорівнюють нулю. За відсутності дисипативних сил повна механічна енергія маятника зберігається і коливання маятника могли б відбуватися нескінченно довго. Однак наявність дисипативних сил спричинює поступове згасання коливань вільного маятника. Амплітуду коливань маятника за-

наявності дисипативних сил можна підтримувати незмінною або навіть збільшувати за рахунок роботи зовнішніх сторонніх сил. Для маятника сталої довжини це може бути деяка стороння сила $\vec{F}^{\text{зовн.неконс}}$, прикладена до кульки так, щоб її проекція на вектор швидкості кульки \vec{v} була додатною.

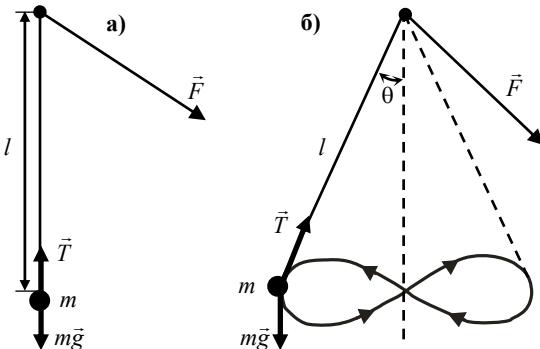


Рис. 8.7. Параметричне збудження коливань математичного маятника

Тепер розглянемо рух маятника змінної довжини l . Якщо ж без виведення маятника з положення рівноваги почати періодично змінювати його довжину l шляхом переміщення вільного кінця нитки, перекинutoї через стрижень у точці підвісу O , то кулька буде переміщуватись лише у вертикальному напрямку (рис. 8.7, а). На відміну від попереднього випадку, сила натягу \vec{T} , прикладена до кульки, тепер виконуватиме роботу, оскільки вона буде завжди колінеарною до швидкості \vec{v} . Але відхилення маятника від вертикалі (напрямку \vec{g}) за рахунок цієї роботи виникнути не може, оскільки вертикаль є віссю симетрії задачі.

Відхилення маятника від вертикалі може бути досягнуто лише за рахунок попереднього надання кульці імпульсу, що має горизонтальну компоненту. При цьому виникнуть малі коливання маятника і тепер при періодичній зміні його довжини l шляхом переміщення вільного кінця нитки, перекинutoї через стрижень так, щоб при проходженні положення рівноваги довжина підвісу l зменшувалась, а поблизу точок максимального відхилення – збільшувалась (рис. 8.7, б). Тоді робота сили \vec{T} на ділянках траскто-

рії, де $(\vec{T} \cdot \vec{v}) > 0$, зокрема, при проходженні положення рівноваги, буде додатною, а на ділянках траєкторії, де $(\vec{T} \cdot \vec{v}) < 0$, тобто поблизу точок максимального відхилення, – від'ємною. Якщо сумарна робота цієї сили за період коливань перевищує втрати енергії за рахунок від'ємної роботи дисипативних сил, то енергія маятника, а разом з нею й амплітуда коливань, будуть зростати. Стационарні коливання сталої амплітуди встановляться тоді, коли втрати енергії за рахунок від'ємної роботи дисипативних сил протягом періоду коливань будуть компенсуватися надходженням енергії до коливальної системи за рахунок роботи зовнішньої сили \vec{F} , прикладеної до вільного кінця нитки підвіси.

Оцінимо величину роботи зовнішньої сили \vec{F} коливань маятника з не малими, але й не дуже великими амплітудами, за яких період коливань має вигляд

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right], \quad (8.54)$$

як випливає із формулі (3.48) при врахуванні першого залежного від амплітуди доданка. Відповідна частота коливань при цьому буде

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right] = \omega_0 \left[1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right]. \quad (8.55)$$

Важатимемо, що згасання невелике, і коливання відбуваються за гармонічним законом

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_n t + \varphi). \quad (8.56)$$

При найбільшому відхиленні маятника θ_0 модуль сили натягу нитки дорівнює

$$T_1 = mg \cos \theta_0. \quad (8.57)$$

При швидкому збільшенні довжини підвісу l у цьому крайньому положенні на величину Δl зовнішня сила $F = T_1$ виконує від'ємну роботу

$$A_l = -mg \cos \theta_0 \Delta l \approx -mg \Delta l \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2} + \frac{\theta_0^4}{24} \right). \quad (8.58)$$

У момент проходження положення рівноваги $\theta = 0$ сила натягу нитки становить

$$T_2 = mg + m \frac{v_0^2}{l} = mg + m \frac{\theta_0^2 \omega_n^2 l^2}{l} = mg + m\theta_0^2 \omega_n^2 l. \quad (8.59)$$

При швидкому зменшенні довжини підвісу l у момент проходження положення рівноваги на величину Δl зовнішня сила $F = T_2$ виконує додатну роботу

$$\begin{aligned} A_2 &= m(g + \theta_0^2 \omega_n^2 l) \Delta l = m \left\{ g + \theta_0^2 \omega_0^2 \left[1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right]^2 l \right\} \Delta l \approx \\ &\approx m \left\{ g + \theta_0^2 g \left[1 - 2 \frac{\theta_0^2}{16} \right] \right\} \Delta l = mg \left(1 + \theta_0^2 - \frac{\theta_0^4}{8} \right) \Delta l. \end{aligned} \quad (8.60)$$

При одержанні останнього виразу враховано, що $\omega_0^2 l = g$, і захтувано доданками порядку вище θ_0^4 .

Таким чином, сумарна робота зовнішньої сили за період додатна

$$\begin{aligned} A &= 2(A_2 - A_1) = mg \Delta l \left(1 + \theta_0^2 - \frac{\theta_0^4}{8} \right) - \left[-mg \Delta l \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2} + \frac{\theta_0^4}{24} \right) \right] = \\ &= mg \Delta l \left(1 + \theta_0^2 - \frac{\theta_0^4}{8} - 1 + \frac{\theta_0^2}{2} - \frac{\theta_0^4}{24} \right) = mg \Delta l \left(\frac{3\theta_0^2}{2} - \frac{3\theta_0^4 + \theta_0^4}{24} \right) = \\ &= mg \Delta l \left(\frac{3\theta_0^2}{2} - \frac{\theta_0^4}{6} \right) = mg 3\theta_0^2 \Delta l \left(1 - \frac{\theta_0^2}{9} \right). \end{aligned} \quad (8.61)$$

Отже, за малих відхилень, коли робота зовнішньої сили більша за роботу дисипативної сили опору повітря, амплітуда коливань буде зростати, поки не буде досягнуто балансу між додатною роботою зовнішньої сили і дисипативної сили опору повітря.

Робота дисипативної сили опору повітря $\vec{F}_{\text{оп}} = -\alpha \vec{v}$ за період коливань від'ємна:

$$A_{\text{оп}} = \int_0^T \vec{F}_{\text{оп}} \vec{v} dt = \int_0^T (-\alpha \vec{v}) \vec{v} dt = -\gamma \int_0^T v^2 dt = -\alpha \int_0^T (\dot{\theta} l)^2 dt \\ = -\alpha \omega_n^2 \theta_0^2 l^2 \int_0^T \sin^2(\omega_n t) dt = -\alpha \omega_n^2 \theta_0^2 l^2 \frac{T}{2} \approx -\alpha \theta_0^2 g l \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \frac{T_0}{2}. \quad (8.62)$$

Таким чином, умова збереження енергії при параметричних коливаннях математичного маятника має вигляд

$$3mg\theta_0^2 \Delta l \left(1 - \frac{\theta_0^2}{9} \right) - \alpha \theta_0^2 g l \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \frac{T_0}{2} = 0. \quad (8.63)$$

Із цієї умови можна знайти вираз для амплітуди стаціонарних параметричних коливань. Після скорочення на $g\theta_0^2$ і ділення правої і лівої частини (8.63) на ml отримаємо

$$3 \frac{\Delta l}{l} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{9} \right) - \frac{\alpha}{m} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \frac{T_0}{2} = 0. \quad (8.64)$$

З урахуванням $\frac{\alpha}{m} = 2\beta$ (див. вираз (8.9)) і після введення позначення $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ для глибини модуляції параметра l одержимо

$$3\varepsilon \left(1 - \frac{\theta_0^2}{9} \right) - \beta T_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) = 0. \quad (8.65)$$

Оскільки $\beta T_0 = \frac{\pi}{Q}$ (див. (8.26)), то

$$3\varepsilon \left(1 - \frac{\theta_0^2}{9} \right) - \frac{\pi}{Q} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) = 0, \quad (8.66)$$

звідки

$$\theta_0^2 = 9 \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{\pi}{\varepsilon Q}}{1 - \frac{3}{16} \frac{\pi}{\varepsilon Q}}. \quad (8.67)$$

Щоб існували дійсні значення θ_0 , величина θ_0^2 має бути додатною. При збільшенні глибини модуляції ε у виразі (8.67) стає додатним спочатку знаменник, а потім і чисельник. Останнє відбувається за умови

$$\varepsilon Q \geq \frac{\pi}{3}. \quad (8.68)$$

Отже, для параметричного підсилення коливань необхідно, щоб глибина модуляції ε перевищила деяке порогове значення, яке приблизно дорівнює оберненій величині добутності Q коливальної системи

$$\varepsilon \geq \frac{\pi}{3Q} \approx \frac{1}{Q}, \quad (8.69)$$

Підкреслимо, що хоча проведений аналіз поведінки коливальної системи при періодичній зміні її параметра фізично правильно пояснює основні риси явища параметричного збудження коливань, отримані нами кількісні оцінки справедливі лише в межах зроблених наближень. Суттєвим є той факт, що розглядалися коливання з "не дуже великими, але й не малими амплітудами". Зокрема, за "дуже великих" амплітуд ($\theta_0 > 1$) не можна користуватись формулою (8.69), яка випливає із рівності (8.67), отриманої із виразу (8.63) у наближенні $\theta_0 \ll 1$. З іншого боку, наш аналіз балансу повної механічної енергії стосується коливань маятника, які не малі, у тому сенсі, що вони вже не гармонічні, а їх період уже залежить від амплітуди.

Зауважимо, що параметричне збудження коливань є суттєво нелінійним ефектом, на відміну від збудження малих коливань шляхом прикладання періодичної змушувальної сили без зміни параметрів коливальної системи. У вищевказаному аналізі нелінійність описують малі доданки, пропорційні θ_0^2 .

Можливість параметричного збудження коливань і параметричного резонансу також можна показати, виходячи з рівняння руху найпростішої коливальної системі без згасання і без зовнішньої періодичної змушувальної сили:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0, \quad (8.70)$$

де залежність параметра $\omega_0^2(t)$ від часу існує внаслідок явної залежності від часу одного або декількох параметрів, що визначають період власних коливань осцилятора: l – довжини математичного маятника, k – коефіцієнта пружності пружини, I – моменту інерції для фізичного маятника тощо. На відміну від рівняння вільних гармонічних коливань вигляду (3.37) і (8.3), які є рівняннями зі сталими коефіцієнтами, коефіцієнт при x у рівнянні (8.70) залежить від t . Отже, це рівняння описує нелінійний процес. Відшукання розв'язків нелінійних диференційних рівнянь доволі складне і зазвичай здійснюється наближеними методами (дод. 3).

У табл. 8.1 наведено для порівняння умови збудження змушених і параметричних коливань та відповідних резонансів.

Таблиця 8.1
Порівняння умов збудження змушених і параметричних коливань

| Змушенні коливання | Параметричні коливання |
|---|---|
| Збудження і підтримання коливань здійснюється прикладанням до тіла, що може коливатися, періодичної змушувальної сили без зміни параметрів коливальної системи. | Збудження і підтримання коливань здійснюється шляхом періодичної зміни параметрів коливальної системи. |
| Збудження коливань можливе за початкових умов $q(0) = 0$ і $\dot{q}(0) = 0$, тобто, коли тіло перебуває в положенні рівноваги. | Збудження коливань неможливе за початкової умови $q(0) = 0$. Натомість потрібне деяке початкове відхилення від положенні рівноваги $q(0) \neq 0$. |
| Резонанс виникає на частоті поблизу ω_0 . | Резонанс виникає на частотах поблизу $2\omega/n$, де n – натуральне число. |
| Резонанс виникає за як завгодно малої амплітуди зовнішнього збурення. | Резонанс виникає лише за амплітуди збурення, що більша за деяку порогову величину, тим більшу, чим менша добротність коливальної системи. |
| Резонансна частота при збільшенні згасання зменшується. | Інтервал частот, у якому можливе резонансне збудження, при збільшенні згасання залишається центрованим поблизу $2\omega/n$, але звужується. |

Автоколивання. Далеко не всі незгасаючі коливання можуть вважатися змушеними або параметричними. Наприклад,

якщо вітер розгойдує дерева, то коливається їх листя та розгойдаються гілки. При цьому не обов'язково, щоб вітер був по-ривчастий: розгойдування й коливання відбувається й за постійної швидкості вітру. Коливання такого самого типу можна спостерігати і в стаціонарному потоці води: гілки, що торкаються поверхні води або визирають з неї, можуть здійснювати доволі регулярні коливання протягом тривалого часу. Такі коливання, що відбуваються без видимого зовнішнього періодичного втручання, є прикладом так званих *автоколивань*, а такі системи (автоколивання), називають *автоколивальними системами*. У наведених прикладах компенсація неминучих втрат механічної енергії елементу, що коливається, на роботу проти дисипативних сил відбувається за рахунок енергії потоку повітря або води, який сам може бути стаціонарним. Можливість виникнення та підтримання стаціонарного режиму автоколивань обумовлена нелінійністю автоколивальних систем.

8.2. Математичний опис (кінематика) гармонічних коливань

Часто виникають задачі відшукання закону руху матеріальної точки, що бере участь одночасно в декількох коливальних рухах. Як і для будь-якого складного руху розв'язання такої задачі зводиться до додавання радіус-векторів відповідних зміщень цієї точки. Розглянемо найбільш поширені прості випадки.

8.2.1. Додавання двох гармонічних коливань однакових напрямків і частот

Спочатку розглянемо зміщення точки, що бере участь у двох коливаннях однакової частоти, при яких зміщення відбуваються вздовж одного напрямку. Проекціями цих зміщень на напрямок осі Ox , направленої вздовж цього напрямку, є

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ та } x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (8.70)$$

Проекція сумарного зміщення має вигляд

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) . \quad (8.71)$$

Для його відшукання використовують так званий метод векторних діаграм. Він ґрунтється на тому, що кожне зміщення виду $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$ можна розглядати як проекцію на вісь Ox деякого вектора \vec{a} сталої довжини a , що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо свого початку, який збігається з початком O декартової системи координат (рис. 8.8). При цьому в кожний момент часу t вектор \vec{a} утворює з віссю Ox кут $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$, що дорівнює фазі коливання. Отже, його проекцією на вісь Ox є $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$, де φ_0 – початкова фаза (фаза за $t = 0$). Якщо зміщення $x_1(t)$ та $x_2(t)$ зіставити відповідно з векторами \vec{a}_1 та \vec{a}_2 , що обертаються навколо початку O з однаковою кутовою швидкістю ω , то сумарний вектор

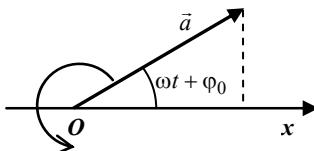


Рис. 8.8. До методу векторних діаграм

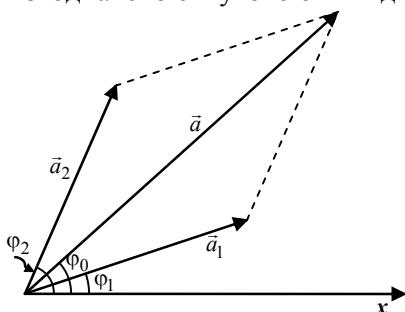


Рис. 8.9. Векторна діаграма додавання двох коливань

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ буде обертатися з тією самою кутовою швидкістю ω , а взаємне розташування цих трьох векторів залишатиметься незмінним, тобто таким, яким воно було в початковий момент часу $t = 0$ (рис. 8.9).

Знайдемо модуль вектора \vec{a} :

$$\begin{aligned} a &= |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)} = \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Оскільки, кут між векторами \vec{a}_1 та \vec{a}_2 дорівнює $\varphi_2 - \varphi_1$, то достаточно для модуля вектора \vec{a} маємо

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (8.73)$$

а його проекцією на вісь Ox буде

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi_0), \quad (8.74)$$

де початкову фазу ϕ_0 можна знайти зі співвідношення

$$\operatorname{tg}\phi_0 = \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2}, \quad (8.75)$$

що безпосередньо випливає із рис. 8.9.

Отже, сумарне зміщення дорівнює

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi_0), \quad (8.76)$$

де амплітуда a і початкова фаза ϕ_0 задані співвідношеннями (8.73) та (8.75), відповідно.

Оскільки енергія коливань E пропорційна квадрату їх амплітуди a^2 , то енергія результуючого коливання в загальному випадку не дорівнює сумі енергій коливань, які додаються, $E \neq E_1 + E_2$. Дійсно, $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \neq a_1^2 + a_2^2$, за винятком випадку, коли різниця фаз коливань $\phi_2 - \phi_1 = \pm\pi/2$.

8.2.2. Додавання двох гармонічних коливань однакових напрямків і близьких частот

Розглянемо додавання двох коливань однакових напрямків і різних, але близьких частот ω_1 і ω_2 , тобто таких, що $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1, \omega_2$. Обмежимось простим випадком однакових амплітуд $a_2 = a_1 = a$. Оскільки частоти коливань різні, то завжди можна так обрати початок відліку часу, щоб початкові фази обох коливань дорівнювали нулю. Тоді сумарне зміщення дорівнюватиме

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t = \\ &= 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \end{aligned} \quad (8.77)$$

Їого можна подати у вигляді

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t), \quad (8.78)$$

де $A(t) = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Залежність зміщення $x(t)$ від часу, що відповідає формулі (8.78) зображенено на рис. 8.10. Її можна розглядати як зміщення при коливаннях з частотою ω (з періодом $T = 2\pi / \omega$), амплітуда яких повільно змінюється з періодом $T_6 = 2\pi / \Delta\omega$, який називають *періодом биття* за назвою самого явища періодичної зміни амплітуди результуючого коливання при додаванні двох гармонічних коливань близьких частот.

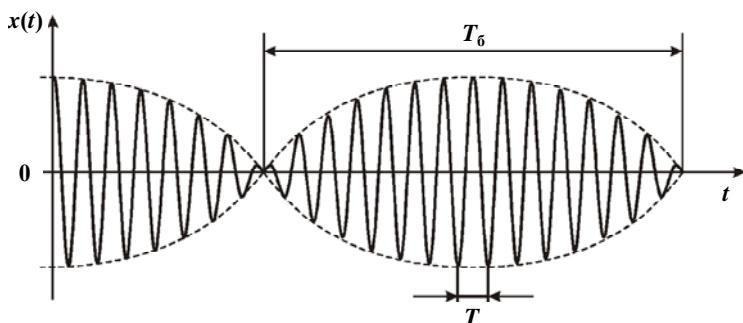


Рис. 8.10. Биття коливань близьких за значеннями частот

Зауважимо, що величину $A(t)$ у виразі (8.78) не можна розглядати як залежність від часу амплітуду результуючого коливання з частотою ω , оскільки амплітуда коливань за означенням має бути додатно визначеною величиною. У випадку биття коливань близьких частот амплітудою є величина $|2a \cos(\Delta\omega t / 2)|$, період якої $T_6 = 2\pi / \Delta\omega$ удвічі менший за період величини $A(t) = 2a \cos(\Delta\omega t / 2)$.

Виникнення биття можна пояснити тим, що різниця фаз коливань із частотами ω_1 і ω_2 періодично змінюється із часом: коли їх фази майже збігаються ($\Delta\omega t \approx 2\pi n$, де n – ціле число), то амплітуда коливань досягає максимуму, а коли стають протилежними ($\Delta\omega t \approx \pi(2n+1)$), то амплітуда коливань стає мінімальною. Точний збіг є рідкісною подією, оскільки він можливий лише при виконанні умови $n\omega_1 = m\omega_2$, де n і m – натуральні числа. У переважній більшості випадків відношення частот

ω_1 / ω_2 є ірраціональним числом. Тому відхилення $x(t)$ (8.77), (8.78) не будуть періодичними, оскільки не можна вказати такий проміжок часу $T_{\text{повт}}$ через який вони точно повторяться. Саме тому явище биття характеризують періодом биття T_b , який є періодом повторення обвідної $|2a \cos(\Delta\omega t / 2)|$ суми коливань, а не періодом функції $x(t)$.

Явище биття давно відоме з акустики. Для його демонстрації в лекційному експерименті використовують два гучномовці, на які подаються електричні гармонічні сигнали з настільки близькими частотами ω_1 і ω_2 , щоб відповідні звукові коливання кожне окремо не сприймалися як звуки різного тону (висоти). При поступовому наближенні однієї частоти до іншої стають помітними періодичні зміни інтенсивності звучання при незмінній частоті (висоті тону), період яких може сягати декількох секунд. У такий спосіб при налаштуванні музичних інструментів порівнюють звучання інструменту зі звучанням еталона звукових коливань певної частоти (камертона). При цьому може досягатись абсолютна точність порядку 0,1 Гц. Явище биття широко використовується при порівнянні частот електричних та електромагнітних коливань.

8.2.3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Якщо матеріальна точка має два ступені вільності, то її положення в будь-який момент часу визначається двома координатами. Якщо кожна із цих координат змінюється за гармонічним законом, то матеріальна точка здійснюватиме складний рух, траекторія якого визначатиметься співвідношенням амплітуд, частот та початкових фаз обох коливань.

Розглянемо рух частинки, яка бере участь одночасно у двох коливальних гармонічних рухах однієї частоти вздовж взаємно перпендикулярних напрямків відносно спільногого положення рівноваги. Оберемо декартову прямокутну систему координат з початком у положенні рівноваги й осями Ox та Oy , спрямо-

ваними вздовж напрямків коливань. Тоді координати частинки можна записати у вигляді

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y(t) = b \cos(\omega t + \varphi_y), \quad (8.79)$$

де амплітуди a та b і початкові фази коливань φ_x та φ_y визначаються початковими умовами. Оберемо початок відліку так, щоб початкова фаза коливання вздовж x дорівнювала нулю, $\varphi_x = 0$. Тоді різниця фаз між коливаннями вздовж напрямків x та y буде $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \varphi_y$, а вирази для зміщень можна переписати так:

$$x(t) = a \cos(\omega t), \quad (8.80a)$$

$$y(t) = b \cos(\omega t + \Delta\varphi). \quad (8.80b)$$

Ця система рівнянь задає рівняння траєкторії частинки в параметричному вигляді. Для того, щоб отримати явний вигляд траєкторії частинки необхідно виключити параметр t . Для цього поділимо перше й друге рівняння на відповідні амплітуди a та b і в правій частині другого рівняння перетворимо косинус суми аргументів за формулою $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$:

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega t), \quad (8.81a)$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t) \cos \Delta\varphi - \sin(\omega t) \sin \Delta\varphi. \quad (8.81b)$$

Після підстановки до другого рівняння (8.81b) виразів для $\cos(\omega t)$ і $\sin(\omega t)$, які випливають з першого рівняння (8.81a), отримаємо

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \Delta\varphi. \quad (8.82)$$

Після відокремлення квадратного кореня маємо

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \Delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \Delta\varphi. \quad (8.83)$$

Піднесення обох частин рівняння до квадрата дає

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \Delta\varphi - 2 \frac{xy}{ab} \cos \Delta\varphi = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2 \Delta\varphi, \quad (8.84)$$

звідки одержуємо рівняння траєкторії в декартових координатах

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi, \quad (8.85)$$

відоме з аналітичної геометрії як рівняння еліпса, довільно орієнтованого довільно відносно координатних осей.

Орієнтація еліпса відносно осей Ox та Oy , його ексцентриситет і напрямок руху точки по траєкторії залежать від різниці фаз $\Delta\varphi$ (рис. 8.11). За різниці фаз $\Delta\varphi = 0$ рівняння (8.85) набуває вигляду

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0, \text{ звідки випливає } y = \frac{b}{a}x, \text{ тобто рівняння прямої,}$$

що проходить у першій і третій чвертях системи координат. Точка рухається вздовж відрізка цієї прямої, що є діагоналлю прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$, яка з'єднує правий верхній і лівий нижній його кути. При цьому її зміщення відносно початку координат змінюється за законом $r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t$. За різниці фаз $\Delta\varphi = 3\pi/2$ рівняння (8.85) набуває вигляду

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0, \text{ звідки випливає рівняння прямої } y = -\frac{b}{a}x.$$

В інтервалі різниць фаз $\pi > \Delta\varphi > 0$ рух точки відбувається за годинниковою стрілкою, причому при наближенні до меж цього інтервалу еліптичність траєкторії зменшується. Після переходу через значення $\Delta\varphi = \pi$, за якого еліпс вироджується у відрізок прямої, еліптичність знову зростає, але напрямок руху точки по еліпсу змінюється на протилежний і тепер відбувається проти годинникової стрілки в інтервалі $2\pi > \Delta\varphi > \pi$. За $\Delta\varphi = 3\pi/2$ траєкторія являє собою еліпс, велика і мала осі якого збігаються з координатними осями, а точка рухається проти годинникової стрілки.

Еліпси за $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ і при $b \rightarrow a$ переходят у кола. Із цього випливає, що рівномірний рух точки по колу радіуса $R = a = b$ можна завжди подати як суму двох взаємно перпендикулярних коливань $x(t) = R \cos \omega t$ і $y(t) = \pm R \sin \omega t$, де знак "+" відповідає руху проти годинникової стрілки, а знак "-" – руху за годинниковою стрілкою.

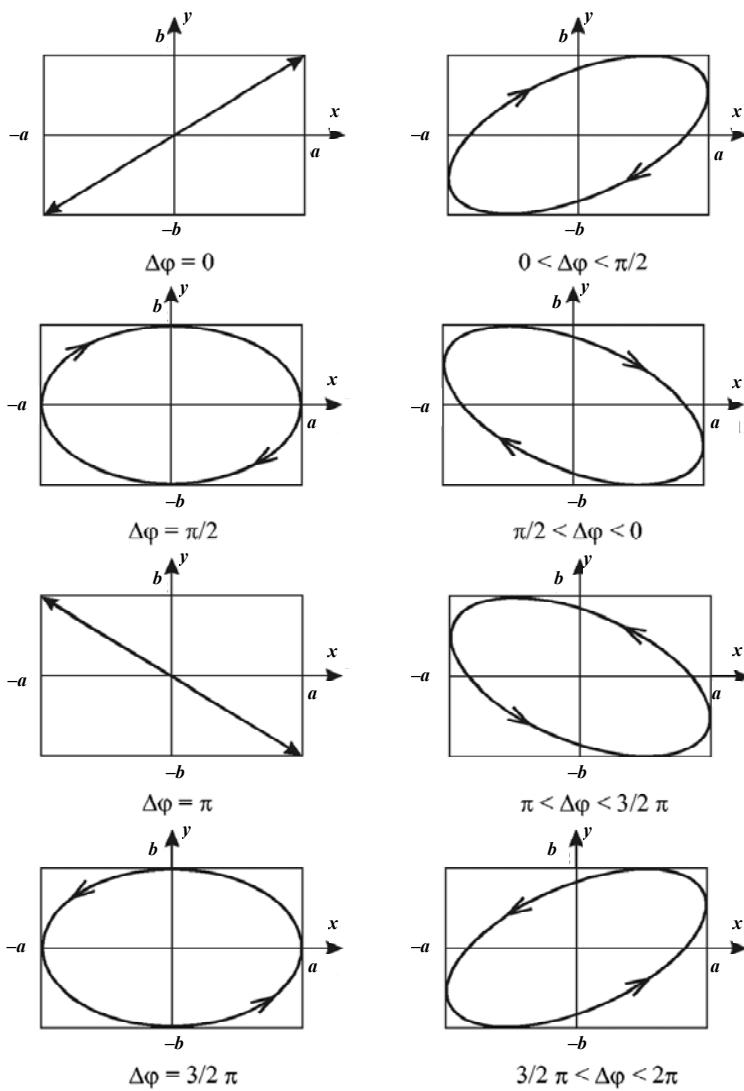


Рис. 8.11. Траєкторія руху точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з амплітудами a і b , за різних значень різниці фаз $\Delta\varphi$

Справедливе й обернене твердження: гармонічний коливальний одновимірний лінійний рух частинки в певному напрямку з циклічною частотою ω можна подати як суперпозицію двох рівномірних рухів по колах, що відбуваються з кутовою швидкістю ω . Наприклад, коливання математичного маятника в деякій площині з циклічною частотою ω_0 та максимальним відхиленням підвісу від вертикаль на кут θ_0 можна подати як суперпозицію двох рівномірних колових рухів цього маятника¹, відхиленого на той самий кут θ_0 , у взаємно протилежних напрямках з однаковими за модулем кутовими швидкостями ω_+ та ω_- .

Легко збагнути, якщо кутові швидкості цих колових рухів ω_+ та ω_- будуть різні, наприклад, $\omega_+ > \omega_-$, то площа коливань математичного маятника буде повертатися з кутовою швидкістю $(\omega_+ - \omega_-)/2$. Такий підхід можна застосувати до пояснення дослідів з маятником Фуко (див. рис. 4.20, підрозд. 4.5). Коли платформа нерухома, то положення площини коливань маятника як відносно ICB (поверхні Землі), так і відносно платформи залишається незмінним. Це відповідає випадку, коли кутові швидкості колових рухів однакові як відносно ICB, так і відносно платформи: $\omega_+ = \omega_- = \omega_0$. Нехай платформа рівномірно обертається проти годинникової стрілки відносно ICB з кутовою швидкістю ω . Кутові швидкості колових рухів маятника відносно ICB не залежать від руху платформи, отже, в ICB, як і раніше, маємо $\omega_+ = \omega_- = \omega_0$. Однак у системі відліку, пов'язаній із платформою, ця рівність порушується, оскільки $\omega'_+ = \omega_0 + \omega$, $\omega'_- = \omega_0 - \omega$, де ω'_+ , ω'_- – кутові швидкості колових рухів відносно платформи. Отже, площа коливань маятника буде рівномірно повертатися відносно платформи з кутовою швидкістю $(\omega'_+ - \omega'_-)/2 = \omega$.

Фігури Ліссажу. Якщо коливання вздовж взаємно перпендикулярних напрямків відбуваються з різними, але кратними частота-

¹ Маятник, у якому підвішене в полі тяжіння тіло рухається по коловій траекторії, називають *конічним маятником*, оскільки підвіс описує конус з вершиною в точці закріплення підвісу. Рух як конічного, так і математичного маятника є частинним випадком руху так званого *сферичного маятника*.

ми, $n\omega_1 = m\omega_2$, де n, m – цілі числа, то траєкторії руху являють собою замкнені криві, що називаються *фігурами Ліссажу*. На рис. 8.12 показано фігури Ліссажу для декількох значень співвідношень частот n/m за початкової різниці фаз обох коливань, що дорівнює нулю. Із цих фігур можна визначити відношення частот, як відношення кількостей точок дотику фігури Ліссажу до сторін 2a і 2b прямокутника, у який вписані фігури. Цей прийом часто використовують для порівняння частот електричних сигналів за допомогою електронного осцилографа. Для цього один сигнал по дають на канал горизонтального відхилення, а другий на канал вертикального відхилення. Якщо частоти порівнюваних сигналів кратні, то на екрані спостерігаємо нерухомі фігури Ліссажу. Їх форма змінюється залежно від початкової різниці фаз, що добре видно на прикладі фігури Ліссажу з $n=1, m=1$ (рис. 8.11). Якщо ж частоти ω_1 і ω_2 дещо відрізняються від тих, що задовольняють умову $n\omega_1 = m\omega_2$, на величини $\delta\omega_1$ та $\delta\omega_2$, відповідно, то фігура поступово змінює свій вигляд відповідно до зміни додаткової різниці фаз $(n\delta\omega_1 - m\delta\omega_2)t$, яка залежить від часу.

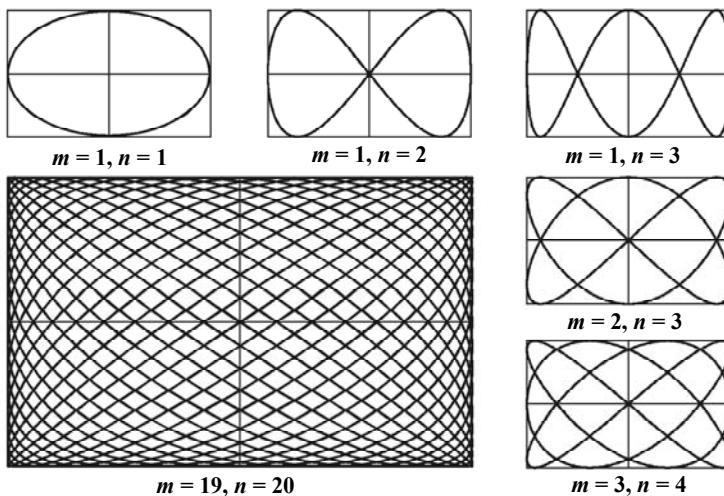


Рис. 8.12. Фігури Ліссажу

Наприклад, фігура Ліссажу з $n=1$, $m=1$ послідовно й неперервно проходить усі стадії, показані на рис. 8.11, і проміжні між ними. Швидкість цих змін тим більша, чим більша швидкість зміни додаткової фази. Траєкторії при цьому не замкнені й заповнюють увесь прямокутник $2a \times 2b$.

8.3. Пружні хвилі

Коливання, що виникли в певній ділянці середовища (твердого, рідкого чи газоподібного) або як коливання принаймні однієї його частинки, унаслідок взаємодії між частинками цього середовища можуть поширюватись від частинки до частинки. Процес поширення коливань у середовищі називається *хвильовим процесом*, або *хвилею*. Частинки середовища, у якому поширюється хвіля, не залучаються до однонапрямленого руху, а лише здійснюють коливання поблизу своїх рівноважних положень. Залежно від напрямку коливань частинок щодо напрямку поширення хвилі розрізняють *поздовжні* та *поперечні* хвилі.

Розглянемо просту модель поширення поздовжніх та поперечних хвиль у кубічній гратці, утвореній частинками, між якими діють пружні сили¹ (рис. 8.13). На рисунку рис. 8.13, *a* показано лише одну площину незбуреної гратки, яка лежить у площині рисунка. Кожному горизонтальному і вертикальному ряду частинок у площині рисунка відповідає площа, перпендикулярна площині рисунка, у якій частинки також розміщені у вузлах квадратної сітки. Зміщення одного вертикального ряду частинок на рисунку відповідає зміщення частинок відповідної вертикальної площини в об'ємі гратки. Таке зміщення призводить до деформації пружинок, присedнаних до частинок цього ряду (площини), унаслідок чого виникають сили, що намагаються повернути частинки цього ряду (площини) до положення рівноваги, яке ці частинки проходять за інерцією і, таким чином, виникають коливання частинок поблизу положення рівноваги.

¹ Така модель певною мірою відображає поширення хвиль у кристалах, де атоми можуть здійснювати коливання поблизу положень рівноваги у вузлах кристалічної гратки, які відповідають мінімуму потенціальної енергії.

Наприклад, при наданні частинкам, що належать деякій вертикальній площині гратки, зміщення в горизонтальному напрямку частинки в сусідніх вертикальних площинах гратки також зазнаватимуть зміщення в горизонтальному напрямку внаслідок наявності взаємодії з частинками першої вертикальної площини (через деформовані пружинки). У результаті частинки в сусідніх вертикальних площинах також починають здійснювати коливання в горизонтальному напрямку.

Таким чином, збурення, обумовлене початковим виведенням із положення рівноваги в горизонтальному напрямку частинок однієї вертикальної площини, спричинює зачутчення до коливального процесу частинок у наступних вертикальних площинах. На рис. 8.13, б показано вигляд збуреної таким чином ділянки гратки в деякий момент часу. Відбувається періодична зміна відстаней між частинками в горизонтальному напрямку, зумовлена коливаннями частинок поблизу положень рівноваги. Ділянки стиснення і розтягу гратки переміщуються в горизонтальному напрямку. Про таїй процес поширення коливань частинок гратки кажуть, як про поширення **поздовжньої пружної хвилі**, оскільки коливання частинок відбуваються вздовж напрямку поширення ділянок стиснення і розтягу гратки, тобто напрямку поширення хвилі (у горизонтальному напрямку).

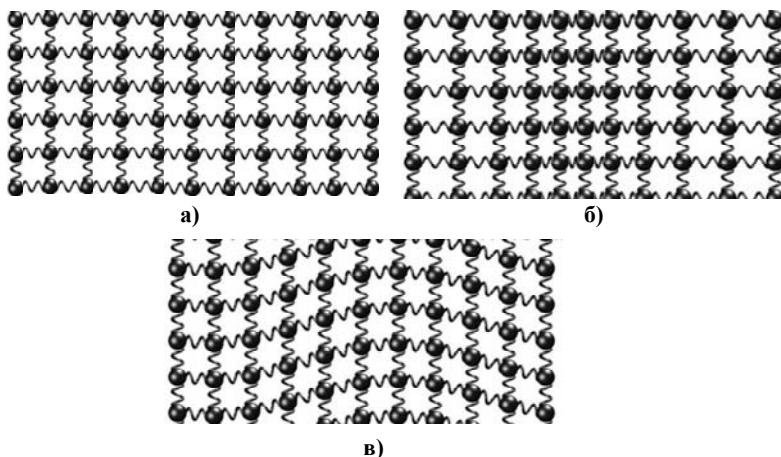


Рис. 8.13. До поширення пружних хвиль у гратці, утвореній частинками, між якими діють пружні сили

Аналогічно, при наданні частинкам, що належать до деякої вертикальної площини ґратки, зміщення у вертикальному напрямку частинки у сусідніх вертикальних площинах ґратки також зазнають зміщення у вертикальному напрямку внаслідок наявності взаємодії з частинками першої вертикальної площини (рис. 8.13, в). У результаті частинки в сусідніх вертикальних площинах також починають здійснювати коливання у вертикальному напрямку. Це збурення поширюється в горизонтальному напрямку, причому відбувається періодична зміна величини і знака зміщення у вертикальному, поперечному щодо горизонтального напрямку. Такий процес поширення коливань частинок ґратки називають поширенням **поперечної пружної хвилі**.

Поверхню, що розмежовує область середовища, яка вже залучена до хвильового процесу, від області середовища, у якій коливання ще не виникли, називають *фронтом хвилі*, або *хвильовим фронтом*, а геометричне місце точок (поверхню), де частинки коливаються в однаковій фазі – *хвильовою поверхнею*.

За формулою хвильової поверхні розрізняють *плоскі* та *сферичні* хвилі, які є найбільш поширеними моделями хвильових процесів. У розглянутому вище прикладі хвильовими поверхнями є площини, у яких зміщення частинок однакові (однакова деформація пружинок) і перпендикулярні до напрямку поширення хвилі, тобто вертикальні площини. Такі хвилі називають *плоскими*. Відстань між сусідніми хвильовими поверхнями, на яких коливання відбуваються синфазно, називається *довжиною хвилі*.

8.3.1. Рівняння хвилі

Рівнянням хвилі називають закон руху частинки середовища, що бере участь у хвильовому русі:

$$\vec{\zeta} = \vec{\zeta}(\vec{r}, t) \quad \text{або} \quad \vec{\zeta} = \vec{\zeta}(x, y, z, t), \quad (8.86)$$

де $\vec{\zeta}$ – вектор зміщення частинки від рівноважного положення, яке визначається радіус-вектором \vec{r} або координатами x, y, z .

Розглянемо плоску хвилю, у якій вектор зміщення частинки змінюється за гармонічним законом. Оберемо систему координат, у якій напрямок осі Oz збігається з напрямком поширення

хвилі. Хвильова поверхня при цьому перпендикулярна до осі Oz . Оскільки за означенням коливання всіх частинок на хвильовій поверхні відбуваються в одній фазі, то зміщення частинок залежатимуть лише від z та t :

$$\vec{\zeta} = \vec{\zeta}(z, t). \quad (8.87)$$

Коливання частинок, рівноважні положення яких лежать у площині $z = 0$, відбуваються за законом

$$\vec{\zeta}(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (8.88)$$

У довільній точці з координатою z коливання частинок будуть відставати за фазою від коливань у площині $z = 0$. Це відставання за фазою визначається часом поширення коливань (коливального збурення середовища) з точки $z = 0$ до точки z , яке відбувається за проміжок часу $\tau = z / v$, де v – швидкість поширення коливань.

Таким чином, закон руху частинки середовища в довільній точці з координатою z має вигляд

$$\vec{\zeta}(z, t) = a \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right]. \quad (8.89)$$

Надалі рівняння плоскої гармонічної хвилі будемо записувати у вигляді

$$\zeta(z, t) = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha\right], \quad (8.90)$$

де $\zeta(z, t)$ – модуль вектора зміщення частинок середовища, a – амплітуда хвилі, а вираз у квадратних дужках – фаза хвилі, яка за $t = 0$ дорівнює початковій фазі α .

Простежимо за переміщенням у просторі зміщення ζ , яке відповідає певному фіксованому значенню фази¹:

$$\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \alpha = \text{const}. \quad (8.91)$$

Із рівності (8.91) випливає, що при зростанні часу t координата z також зростає, тобто це значення фази (а разом з ним і відповідне значення зміщення) переміщуються в додатному напрямку осі Oz . Миттєву швидкість цього переміщення, яку називають

¹ На практиці зручно спостерігати за максимальним або мінімальним зміщенням.

фазовою швидкістю хвилі, або швидкістю хвилі, можна знайти диференціюванням рівності (8.91), яке дає $dt - \frac{dz}{v} = 0$, звідки

$$v = \frac{dz}{dt}. \quad (8.92)$$

Для плоскої гармонічної хвилі, що поширюється в протилежному напрямку, маємо рівняння

$$\zeta(z, t) = a \cos\left[\omega(t - \frac{z}{v}) + \alpha\right]. \quad (8.93)$$

Якщо в рівнянні (8.90) зафіксуємо певне значення координати $z = z_0 = \text{const}$, то воно перейде в рівняння коливань частинки навколо положення рівноваги в точці z_0 :

$$\zeta(z_0, t) = a \cos\left[\omega(t - \frac{z_0}{v}) + \alpha\right] = a \cos(\omega t - \frac{z_0}{v} + \alpha) \quad (8.94)$$

з початковою фазою $-\frac{z_0}{v} + \alpha$.

На рис. 8.14 зображеного графік залежності зміщення частинки ζ від часу t відповідно до виразу (8.94), яка являє собою гармонічну періодичну функцію часу з періодом T :

$$\zeta(z_0, t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{z_0}{v} + \alpha\right). \quad (8.95)$$

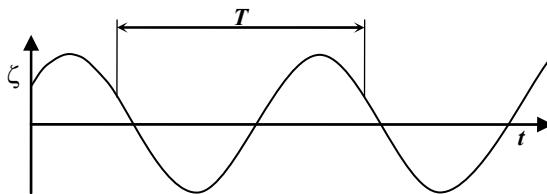


Рис. 8.14. Залежність зміщення ζ від часу t при $z = z_0$

Якщо ми зафіксуємо певне значення часу $t = t_0$, то з рівняння (8.90) отримаємо просторовий розподіл (миттєву фотографію) зміщення частинок у плоскій хвилі в один і той самий момент часу $t = t_0$:

$$\begin{aligned}\zeta(z, t_0) &= a \cos\left[\omega(t_0 - \frac{z}{v}) + \alpha\right] = a \cos(\omega t_0 + \alpha - \omega \frac{z}{v}) = \\ &= a \cos\left(\omega t_0 + \alpha - \frac{2\pi}{T} \frac{z}{v}\right),\end{aligned}$$

або остаточно

$$\zeta(z, t_0) = a \cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda} z + \omega t_0 + \alpha\right). \quad (8.96)$$

Графік цієї залежності наведено на рис. 8.15. Вона являє собою гармонічну періодичну функцію координати z з просторовим періодом $\lambda = vT$, який називають *довжиною хвилі* і який дорівнює відстані, яку проходить хвиля (її хвильова поверхня) за час, що дорівнює одному періоду коливань частинок середовища.

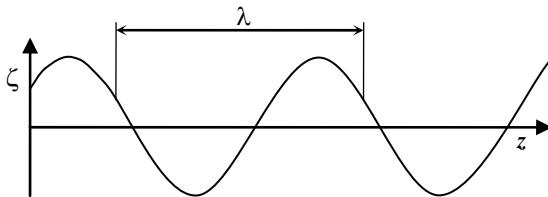


Рис. 8.15. Залежність зміщення ζ від координати z при $t = t_0$

Залежність зміщення від координати (рис. 8.15) можна спостерігати в лекційній демонстрації поширення поперечних коливань уздовж горизонтально натягнутого гумового шнуря довжиною порядку 10–15 м, один кінець якого закріплюють нерухомо, а другий починають періодично коливати у вертикальній площині.

Рівнянню плоскої гармонічної хвилі (8.90) можна надати симетричного вигляду щодо змінних t та z , увівши так зване *хвильове число* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\zeta(z, t) = a \cos(\omega t - kz + \alpha). \quad (8.97)$$

Із порівняння правих частин виразів (8.90) і (8.97) видно, що $k = \omega / v$, звідки випливає важливе співвідношення

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (8.98)$$

8.3.2. Хвильове рівняння

Як було зазначено, закон коливального руху частинки є розв'язком відповідного рівняння руху: наприклад, закон коливального руху невеликого тіла під дією пружної сили $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ є розв'язком рівняння коливань $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, яке отримано з відповідного рівняння руху тіла, що коливається.

Аналогічно, так зване *хвильове рівняння*, розв'язком якого є закон руху частинки, що бере участь у хвильовому русі, у формі $\zeta = \bar{\zeta}(\vec{r}, t)$ або $\zeta = \bar{\zeta}(x, y, z, t)$, також можна отримати з основного рівняння динаміки частинки, застосованого до малого об'єму пружного середовища, яке розглядають як суцільне¹.

Отримаємо вигляд хвильового рівняння, відштовхуючись від рівняння гармонічної плоскої хвилі у формі (8.90), яке запишемо у загальному вигляді, а саме:

$$\zeta(z, t) = \zeta\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (8.99)$$

У цій формі збережено спеціальний вигляд аргументу функції ζ змінних z і t , який описує поширення збурення в середовищі. Дійсно, відповідно до (8.99) будь-яке зміщення ζ певної величини, яке відповідає певному значенню аргументу $(t - z/v) = \text{const}$, поширюється із часом у напрямку осі Oz .

Знайдемо другі похідні від функції $\zeta(t - z/v)$ за змінними z та t . Перша похідна за z :

$$\frac{\partial \zeta(t - z/v)}{\partial z} = \frac{\partial \zeta(t - z/v)}{\partial(t - z/v)} \times \frac{\partial(t - z/v)}{\partial z} = \frac{\partial \zeta(t - z/v)}{\partial(t - z/v)} \times \left(-\frac{1}{v}\right). \quad (8.100)$$

Друга похідна за z :

¹ Ця задача доволі складна, оскільки потребує знання сил, що виникають унаслідок неоднорідної деформації пружного середовища при проходженні крізь нього хвилі. Детальний послідовний аналіз виникнення та поширення пружних хвиль зазвичай здійснюється у *механіці суцільних середовищ*.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{v} \frac{\partial \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)} \right] = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)} = \\
&= -\frac{1}{v} \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2} \times \frac{\partial(t-z/v)}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2} \times \left(-\frac{1}{v}\right) = \quad (8.101) \\
&= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2}.
\end{aligned}$$

Перша похідна за t :

$$\frac{\partial \zeta(t-z/v)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)} \times \frac{\partial(t-z/v)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)}. \quad (8.102)$$

Друга похідна за t :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)} \right] = \\
&= \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2} \times \frac{\partial(t-z/v)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2}. \quad (8.103)
\end{aligned}$$

Остаточно другі похідні від функції $\zeta(t-z/v)$ за змінними z і t мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2} \text{ та } \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial(t-z/v)^2}. \quad (8.104)$$

Із цих порівнянь випливає, що функція $\zeta(t-z/v)$ має задовільнити рівняння

$$\frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta(t-z/v)}{\partial t^2}, \quad (8.105)$$

яке називають *хвильовим рівнянням* і зазвичай записують у вигляді

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (8.106)$$

Підстановкою функції (8.99) до рівняння (8.106) можна перевіритися, що вона дійсно є розв'язком цього рівняння. Прямою підстановкою можна перевіритися, що функція

$$\zeta(z, t) = \zeta(t + \frac{z}{v}) \quad (8.107)$$

також є розв'язком рівняння (8.106), яка описує хвилю, що поширюється у від'ємному напрямку осі Oz . Оскільки рівняння (8.107) лінійне, то його загальним розв'язком буде лінійна комбінація функцій (8.99) і (8.107), коефіцієнти якої можуть бути визначені з початкових та граничних умов:

$$\zeta(z, t) = A_1 \zeta(t - \frac{z}{v}) + A_2 \zeta(t + \frac{z}{v}). \quad (8.108)$$

Цей висновок можна проілюструвати демонстраційним експериментом з гумовим шнуром, добре натягнутим у горизонтальному напрямку між двома нерухомими точками закріплення (рис. 8.16, а). Після різкого удару палицею посередині шнура від місця удару (рис. 8.16, б) уздовж шнура в протилежних напрямках побіжать з однаковою швидкістю два одинакових імпульси у вигляді западин (рис. 8.16, в) у повній відповідності до рівняння (8.108). Пояснимо утворення цих біжуучих імпульсних збурень. У місці удару виникає локальне відхилення серединної ділянки шнура, яка отримала імпульс від палиці. Під дією пружних сил з боку сусідніх ділянок вона повертається в початкове положення, а сусідні ділянки натомість відхиляться в протилежному напрямку, який збігається з початковим напрямком руху серединної ділянки разом з палицею.

Зрозуміло, що будь-які функції, що мають аргумент, який можна звести до вигляду $t - \frac{z}{v}$, зокрема, плоскі гармонічні хвилі

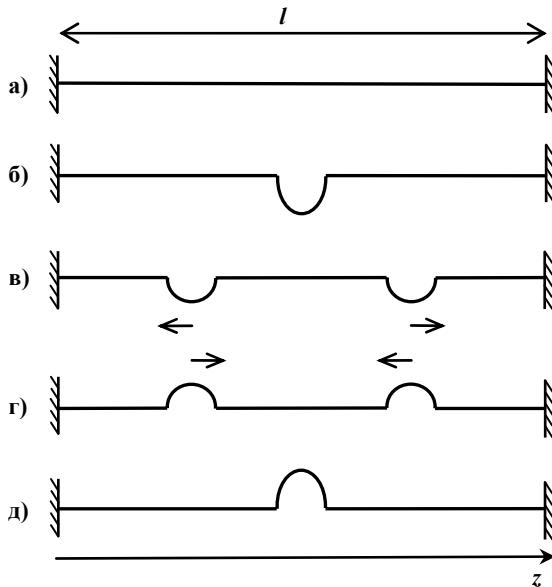
$$\zeta(z, t) = a_0 \cos(\omega t - kz + \alpha) \quad (8.109)$$

будуть задовольняти рівняння (8.106):

Рівняння плоскої гармонічної хвилі (8.109) можна записати у так званому безкоординатному вигляді

$$\zeta(\vec{r}, t) = a_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (8.110)$$

де введено *хвильовий вектор* \vec{k} , що визначає напрямок поширення плоскої хвилі та перпендикулярний до хвильової поверхні, $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$.



**Рис. 8.16. Поширення імпульсного збурення
вздовж натягнутого шнура
(пояснення до випадків (г–д) див. у п. 8.2.5)**

З умови $\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha = \text{const}$ можна отримати рівняння для геометричного місця точок простору, у яких коливання мають однакову фазу, у вигляді $\vec{k}\vec{r} = \text{const} + \omega t$ або

$$(\vec{n} \cdot \vec{r}) = \text{const} + \frac{\omega}{k} t, \quad (8.111)$$

що відповідає відомому з аналітичної геометрії рівнянню площини $(\vec{n} \cdot \vec{r}) = l$, яка перпендикулярна одиничному вектору нормалі \vec{n} і розташована на відстані l від початку O вектора \vec{r} . У випадку рівняння (8.111) ця відстань зростає із часом.

На рис. 8.17 показано два положення хвильового поверхні плоскої хвилі, що поширюється в напрямку нормалі до хвильового фронту $\vec{n} = \vec{k}/k$, у моменти часу t та $t + \Delta t$. Швидкість переміщення хвильової поверхні (поверхні, що відповідає певному значенню фази), як випливає із рівності $l = \text{const} + \frac{\omega}{k} t$, дорівнює

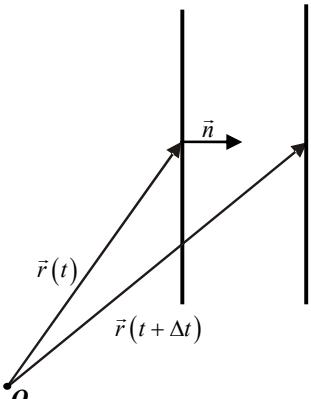


Рис. 8.17. Хвильові поверхні плоскої хвилі

будуть $\{k_x, k_y, k_z\}$ і рівняння (8.111) можна записати у вигляді

$$\zeta(\vec{r}, t) = a_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (8.113)$$

Шляхом обчислення і порівняння других похідних за координатами x, y, z і за часом t від зміщення (8.113), що аналогічне вже виконаному раніше для зміщення (8.99), можна отримати хвильове рівняння для довільного напрямку поширення плоскої хвилі у вигляді

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (8.114)$$

Його часто записують у вигляді

$$\Delta \zeta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0, \quad (8.115)$$

де символом Δ позначено *оператор Лапласа*, який у декартових прямокутних координатах має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.116)$$

Хвильове рівняння є одним із основних рівнянь фізики, що описує поширення хвиль різної фізичної природи. Замість просторового зміщення частинки ζ у цьому рівнянні може стояти

$$v_\phi = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (8.112)$$

Її називають *фазовою швидкістю*. Бачимо, що при виборі декартової системи координат з віссю Oz , направленою вздовж хвильового вектора \vec{k} , рівняння (8.112) переходить у рівняння (8.97), оскільки за такого вибору системи координат координатами вектора \vec{k} будуть $\{0, 0, k\}$ і скалярний добуток $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$. За довільного вибору декартової системи координат координатами вектора \vec{k}

будуть $\{k_x, k_y, k_z\}$ і рівняння (8.111) можна записати у вигляді

$$\zeta(\vec{r}, t) = a_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (8.113)$$

Шляхом обчислення і порівняння других похідних за коор-

динатами x, y, z і за часом t від зміщення (8.113), що аналогі-

чне вже виконаному раніше для зміщення (8.99), можна отри-

мати хвильове рівняння для довільного напрямку поширення

плоскої хвилі у вигляді

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (8.114)$$

Його часто записують у вигляді

$$\Delta \zeta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0, \quad (8.115)$$

де символом Δ позначено *оператор Лапласа*, який у декартових прямокутних координатах має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.116)$$

Хвильове рівняння є одним із основних рівнянь фізики, що описує поширення хвиль різної фізичної природи. Замість просторового зміщення частинки ζ у цьому рівнянні може стояти

тиск, густина, електрична поляризація або намагніченість одиниці об'єму речовини, вектор напруженості електричного поля, вектор магнітної індукції та багато інших фізичних величин.

8.3.3. Швидкість поширення пружних хвиль

Швидкість поширення хвилі v є однією з її найважливіших характеристик. Для її визначення можна використати рівняння хвилі у вигляді (8.106). Якщо нам пощастиТЬ знайти коефіцієнт пропорційності між другою похідною коливального зміщення $\zeta(z,t)$ за часом t та його другою похідною за координатою z , то він і буде швидкістю поширення хвилі v . Застосуємо цей підхід до ряду простих випадків поширення пружних хвиль, доступних для відтворення в лекційних демонстраціях та у фізичному практикумі.

Швидкість поширення хвилі поперечних коливань натягнутого шнуря (струни). На рис. 8.18 показано залежність зміщення ζ малої порівняно з довжиною хвилі елементарної ділянки шнуря з довжиною dl і масою dm від координати z . Рівняння руху такої ділянки, до якої

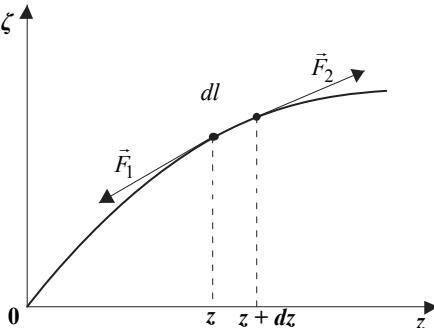


Рис. 8.18. Сили, що прикладені до елементарної ділянки шнуря dl

прикладені сили натягу \vec{F}_1 та \vec{F}_2 з боку сусідніх ділянок шнуря є:

$$dm \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (8.117)$$

Спроектуємо рівняння (8.117) на напрямок $\vec{\zeta}$:

$$dm \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F_{1\zeta} + F_{2\zeta}. \quad (8.118)$$

За малих коливань (відхилень) силу натягу шнуря можна вважати сталою на всій його довжині, і різниця модулів її проекцій на

напрямок зміщення визначатиметься різницею значень похідних $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ у точках $z + dz$ та z :

$$\begin{aligned} F_{1\zeta} + F_{2\zeta} &= F \left. \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|_{z+dz} - F \left. \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|_z = F \left(\left. \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|_{z+dz} - \left. \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|_z \right) = \\ &= F \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dz = F \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} dz. \end{aligned} \quad (8.119)$$

Після підстановки (8.119) до (8.118) і заміни dm на $\rho_l dx$, де ρ_l – лінійна густина шнура, одержимо рівняння

$$\rho_l dz \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} dz, \quad (8.120)$$

яке зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} dz. \quad (8.121)$$

Порівняння (8.121) з (8.106) дає вираз для швидкості хвилі поперечних коливань уздовж натягнутого шнура

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}. \quad (8.122)$$

Ця формула має широке застосування, зокрема до коливань струн музичних інструментів, у яких струни виготовляють з різною лінійною густинорою, а при налаштуванні інструменту змінюють їх натяг.

Швидкість поширення поперечної пружної хвилі. Аналогічно описаному вище демонстраційному експерименту з ударним збудженням імпульсного збурення, що поширюється вздовж натягнутого шнура, можна збудити поперечні хвилі у стрижні з пружного матеріалу, якщо вдарити по ньому в середній частині невеликим молотком. При цьому серединна ділянка стрижня, якій передано імпульс від молотка, буде рухатись у напрямку, перпендикулярному до осі стрижня відносно сусідніх ділянок, тобто на межі із сусідніми ділянками виникнуть дотичні механічні напруження, величини яких будуть пропорційні пружним деформаціям зсуви сусідніх ділянок. Під дією цих напружень серединна ділян-

ка стрижня почне повертатися до свого початкового положення, а сусідні ділянки рухатись у протилежному напрямку, започатковуючи два імпульсні збурення поперечного зсуву частинок стрижня, що поширюються вздовж стрижня в різні боки від місця удару. При цьому в стрижні будуть поширюватись ділянки деформації зсуву, подібні до показаних на рис. 8.13, в.

Мірою деформації зсуву є відношення дотичного зміщення верхньої грані A куба τ під дією прикладеної до цієї грані дотичної сили F_τ до початкової довжини його ребра l , $\gamma = \tau / l$ (рис. 8.19). Деформація зсуву τ / l є безрозмірною величиною, яку можна характеризувати також кутом θ (рис. 8.19), оскільки $\operatorname{tg} \theta = \tau / l = \gamma$. Дотичне напруження σ_τ є відношенням модуля

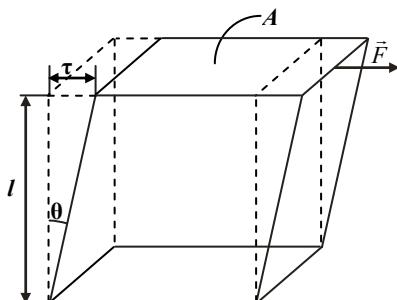


Рис. 8.19. Деформація зсуву

сили F_τ дотичної до площині S_A грані A , $\sigma_\tau = F_\tau / S_A$. За малих пружних деформацій величина пружної деформації зсуву γ пропорційна величині дотично-го напруження σ_τ :

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F_\tau}{S_A} = \frac{\sigma_\tau}{G}, \quad (8.123)$$

де G – модуль зсуву. Він має розмірність тиску і в системі СІ вимірюється в гігапаскалях¹.

Розглянемо рух елементарної ділянки стрижня довжиною dl з масою dm , обмеженої перерізами при z та $z + dz$, $\Delta z \ll \lambda$. На неї діють сили $\vec{F}_{1\tau}$ та $\vec{F}_{2\tau}$, прикладені дотично до перерізів при z та $z + dz$, відповідно, і мають взаємно протилежні напрямки (рис. 8.19). Рівняння руху цієї ділянки має вигляд

$$dm \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = \vec{F}_{1\tau} + \vec{F}_{2\tau}. \quad (8.124)$$

Спроектуємо його на напрямок $\vec{\zeta}$:

$$dm \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F_{1\zeta} + F_{2\zeta}. \quad (8.125)$$

¹ 1 гігапаскаль (ГПа) = 10^9 Па, 1 паскаль (Па) $\equiv 1 \text{Н}/\text{м}^2$.

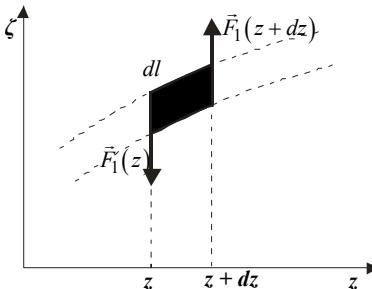


Рис. 8.20. Деформація зсуву на елементарній ділянці стрижня dl

У пружній хвилі деформація зсуву неоднорідна (різні значення $\gamma(z)$ за різних z). Унаслідок цього дотичні напруження $\sigma_\tau = G\gamma$ у перерізах за z та $z + dz$ різні. Отже, праву частину (8.125) можна перетворити таким чином:

$$\begin{aligned} F_{1\zeta} + F_{2\zeta} &= -\sigma_{\tau 1}S + \sigma_{\tau 2}S = \sigma_{\tau 2}(z + dz)S - \sigma_{\tau 1}(z)S = \\ &= [G\gamma(z + dz) - G\gamma(z)]S = G\left(\frac{d\zeta}{dz}\Big|_{z+dz} - \frac{d\zeta}{dz}\Big|_z\right)S = \quad (8.126) \\ &= G \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)dzS = G \frac{d^2\zeta}{dz^2}Sdz. \end{aligned}$$

Оскільки ζ залежить не лише від z , але й від t , то щойно отриманий результат доцільно записати через частинну похідну за змінною z :

$$F_{1\zeta} + F_{2\zeta} = G \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} Sdz. \quad (8.127)$$

Рівняння руху (8.125) після підстановки до нього (8.127) та заміни dm на ρSdz , де ρ – об'ємна густина, S – площа поперечного перерізу стрижня, можна переписати як

$$\rho Sdz \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = G \frac{d^2 \zeta}{\partial z^2} Sdz, \quad (8.128)$$

і після скорочення на об'єм елементарної ділянки Sdz привести до вигляду

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial^2 t} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial^2 z}. \quad (8.129)$$

Із порівняння (8.129) та (8.106) знаходимо вираз для швидкості v_T поширення поперечної хвилі у стрижні:

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (8.130)$$

Ця формула справедлива і для поширення поперечної пружної хвилі в необмеженому ізотропному однорідному суцільному твердому середовищі.

Швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в тонкому стрижні. Таку хвилю можна збудити, прикладаючи періодичну силу до торця стрижня або вдаривши по ньому в поздовжньому напрямку. При цьому в стрижні поширюватимуться ділянки деформації розтягу та стиску подібні до зображених на рис. 8.13, б. Деформацію розтягу стрижня з початковою довжиною l характеризують відносним видовженням $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$. За малих пружних деформацій відносне видовження ϵ пропорційне механічному напруження σ , яке визначається як величина сили F , що припадає

на одиницю площини S поперечного перерізу стрижня, $\sigma = \frac{F}{S}$, і

може бути подане як $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$, де E – модуль Юнга. Оскільки відносне видовження ϵ безрозмірною величиною, то модуль Юнга має таку саму розмірність, як і механічне напруження σ , тобто розмірність тиску, і вимірюється в гігапаскалях (ГПа).

Відомо, що під час розтягування стрижень видовжується, і його переріз зменшується, а при стискуванні – збільшується. Отже, у процесі поширення ділянок деформації розтягу та стиску вдовж стрижня його товщина на ділянках розтягу буде зменшуватись, і при цьому малі об'єми стрижня, що не лежать на осі, будуть рухатись до осі стрижня; на ділянках стиснення товщина стрижня буде збільшуватись, і при цьому малі об'єми стрижня, що не лежать на осі, будуть рухатись від осі стрижня. У результаті проходження такої хвилі вздовж стрижня додатково до деформації розтягу–стиску буде виникати деформація зсуву і, відповідно, тангенціальна складова механічного напруження, що

сильно ускладнить нашу задачу. Якщо поперечний розмір стрижня набагато менший від довжини поздовжньої пружної хвилі¹, то зміщення периферійних ділянок стрижня в радіальному напрямку відбувається за набагато менший від періоду хвилі час і не впливає на величину відносного видовження ε .

Розглянемо рух малої порівняно з довжиною хвилі ділянки круглого стрижня довжиною dl з масою dm , обмеженої перерізами при z і $z + dz$, причому $\Delta z \ll \lambda$, у момент проходження поздовжньої хвилі, коли ця ділянка розтягнута ($\varepsilon > 0$). У пружній хвилі деформація розтягу неоднорідна, тобто за різних z маємо різні значення $\varepsilon > 0$. Унаслідок цього напруження σ (його нормальні щодо площини перерізу компоненти) у перерізах при z і $z + dz$, які обмежують обрану ділянку, хоча й додатні (знак σ завжди збігається зі знаком ε , $\sigma = \varepsilon E$!), але мають різну абсолютну величину². Відповідно, сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , прикладені до перерізів при z і $z + dz$, мають взаємно протилежні напрямки (рис. 8.21).

Запишемо рівняння руху малої ділянки стрижня

$$m \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (8.130)$$

і спроектуємо його на напрямок Oz :

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F_{1z} + F_{2z}. \quad (8.131)$$

Сили в правій частині (8.131) можна подати через механічні напруження:

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S\sigma(z + \Delta z) - S\sigma(z). \quad (8.132)$$

¹ У практикумі з механіки вимірюють швидкість поширення поздовжніх звукових хвиль у круглих сталевих стрижнях діаметром 1 см на частоті 5000 Гц. Оскільки швидкість поздовжньої хвилі в сталі становить близько 5000 м/с, то її довжина – $\lambda = 1$ м, що набагато більше за товщину стрижня.

² Усі ці міркування застосовані до стиснутої ділянки стрижня з тією різницею, що під час стискування $\varepsilon < 0$, $\sigma < 0$.

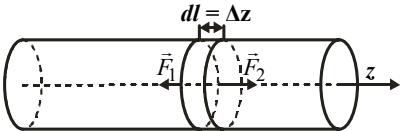


Рис. 8.21. Сили, що прикладені до малої ділянки стрижня dl

Перетворення правої частини (8.132) за допомогою формули кінцевих приrostів Лагранжа дає

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S \frac{d\sigma}{dz} \Delta z. \quad (8.133)$$

Після підстановки $\sigma = \varepsilon E$ і $m = \rho S \Delta z$ та скорочення на об'єм елементарної ділянки $S \Delta z$ рівняння (8.133) набуває вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = E \frac{d\varepsilon}{dz}, \quad (8.134)$$

звідки видно, що результуюча сила, прикладена до елементарної ділянки довжиною Δz , зумовлена неоднорідністю відносного видовження ε на довжині цієї ділянки.

Покажемо, що відносне видовження ε елементарної ділянки довжиною $dl = \Delta z$ можна подати як $\varepsilon = d\zeta/dz$. Для цього розглянемо більш детально розтягування цієї ділянки стрижня, яка до початку деформації мала форму циліндра із площею основи S і довжиною $dl = \Delta z$ (рис. 8.22). При проходженні поздовжньої хвилі в додатному напрямку осі Oz зміщення лівої і правої основ цього циліндра будуть різними.

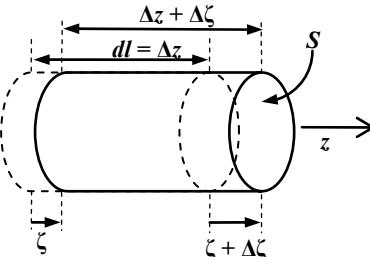


Рис. 8.22. До обчислення ε при проходженні поздовжньої хвилі

Нехай у деякий момент часу зміщення лівої основи циліндра від її рівноважного положення становить ζ , а правої – $\zeta + \Delta\zeta$, причому $\zeta, \Delta\zeta > 0$. Це означає, що розглядувана елементарна ділянка зазнала зміщення на величину $\zeta + \Delta\zeta / 2 \approx \zeta$ у додатному напрямку осі Oz і розтягу (видовження) на величину $\zeta + \Delta\zeta - \zeta = \Delta\zeta$ у тому самому напрямку. Отже, відносне видовження цієї ділянки становить величину $\varepsilon = \Delta\zeta / \Delta z$. Перехід до граници за $\Delta z \rightarrow 0$ дає шукане значення $\varepsilon = d\zeta/dz$, яке дозволяє подати рівняння руху (8.134) у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = E \frac{d^2 \zeta}{dz^2}. \quad (8.135)$$

Оскільки зміщення ζ залежить не лише від координати z , але й від часу t , використаємо в правій частині цього рівняння позначення частинної похідної за координатою z , а також поділимо його ліву і праву частини на ρ :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}. \quad (8.136)$$

Із порівняння рівняння (8.136) із хвильовим рівнянням (8.107) знаходимо вираз для швидкості поширення поздовжньої пружної хвилі в тонкому стрижні

$$v_L^{ct} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (8.137)$$

яка залежить лише від модуля Юнга, E , та об'ємної густини матеріалу стрижня ρ .

Із наведених вище причин швидкість поздовжніх пружних хвиль, що можуть поширюватись уздовж товстого стрижня, а також у необмеженому ізотропному твердому тілі v_L , відрізняється від швидкості v_L^{ct} і становить

$$v_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad (8.138)$$

де $\nu = E / (2G - 1)$ – коефіцієнт Пуассона, що враховує зв'язок між поперечною та поздовжньою деформаціями, яким знехтували при одержанні формули (8.137).

Корисно порівняти швидкості поздовжніх і поперечних хвиль у необмеженому ізотропному твердому тілі. Використовуючи вищезгаданий зв'язок між модулями G та E , через коефіцієнт Пуассона ν формулу (8.130) швидкості поперечних хвиль можна переписати у вигляді

$$v_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (8.139)$$

Таким чином, у твердому ізотропному суцільному середовищі швидкість поздовжніх пружних хвиль завжди більша за швидкість поперечних пружних хвиль, причому звичайно викону-

ється співвідношення $v_L > \sqrt{2} \cdot v_T$. Це підтверджується наведеними в табл. 8.2 даними вимірювань для ряду речовин швидкостей поширення поздовжніх v_L і поперечних v_T пружних (звукових¹) хвиль у необмеженому об'ємі та швидкості поширення v_L^{ct} поздовжніх пружних хвиль, що поширяються вздовж тонкого стрижня, причому завжди $v_L^{\text{ct}} < v_L$. Також експериментальні дані підтверджують, що швидкість звуку більша для пружних речовин з меншою густиноро. Наприклад, швидкість звуку в такому пружному матеріалі, як сталь ($E = 210 \text{ ГПа}$, $G = 81 \text{ ГПа}$) за її густини $\rho = 7,8 \text{ г}/\text{см}^3$ у 2-3 рази перевищує швидкість звуку у пластичному свинці ($E = 18 \text{ ГПа}$, $G = 7 \text{ ГПа}$) із густиноро $\rho = 11,3 \text{ г}/\text{см}^3$.

Таблиця 8.2
Швидкості поширення пружних хвиль у твердих тілах

| Речовина | v_L , м/с | v_T , м/с | v_L^{ct} , м/с |
|-----------------|-------------|-------------|-------------------------|
| Кварц плавлений | 5960 | 3762 | 5760 |
| Скло | 5640 | 3280 | 5170 |
| Залізо | 5850 | 3200 | 5150 |
| Свинець | 2100 | 1700 | 1270 |
| Сталь | 6000 | 3200 | 5160 |

Досі ми розглядали лише ізотропні тверді пружні середовища, у яких у будь-якому напрямку можливе поширення поздовжньої та поперечної хвиль, які мають різні швидкості. У твер-

¹ Поширення звуку в деякому середовищі обумовлене поширенням пружних хвиль у цьому середовищі і швидкість звуку збігається зі швидкістю поширення пружних хвиль. Частоти звукових коливань, які сприймає людина органами слуху, лежать у діапазоні від 16 Гц до 20 000 Гц. Фізичне поняття звуку стосується всіх можливих пружних хвиль із частотами як меншими від 16 Гц (*інфразвук*), так і більшими за 20 000 Гц: *ультразвук* до 10^8 Гц і *гіперзвук* (до 10^9 Гц у газах і до 10^{13} Гц у твердих тілах). Частота пружних хвиль обмежена тим, що в твердих тілах довжина пружної хвилі не може бути меншою за подвоєну відстані між молекулами чи атомами, а в газах – за довжину вільного пробігу молекул.

дому анізотропному середовищі, наприклад, у монокристалі в загальному випадку в кожному напрямку можуть поширюватись три пружні хвилі з різними фазовими швидкостями, які визначаються відповідними комбінаціями модулів пружності, причому вектори коливань у них взаємно перпендикулярні. У загальному випадку ці хвилі чисто поперечні або чисто поздовжні. Поширення чисто поперечних і чисто поздовжніх хвиль можливе лише в певних напрямках достатньо високої симетрії. Анізотропне кристалічне середовище можна змоделювати просторовою граткою (рис. 8.12, а), у якій жорсткість пружинок, розміщених у горизонтальному та вертикальному у площині рисунка та в перпендикулярному до площини рисунка напрямках, різна, і тому у цих напрямках рівноважні відстані між сусідніми кульками будуть різними. У кожному із цих трьох напрямків може поширюватись одна поздовжня пружна хвиля з найбільшою швидкістю і дві поперечні хвилі з меншими, але різними швидкостями. Наприклад, в анізотропному кристалі кварцу в напрямку, перпендикулярному до його головної осі симетрії, можуть поширюватись три звукові хвилі: поздовжня зі швидкістю 5600 м/с і дві поперечні зі швидкостями 5050 м/с та 3500 м/с. Поперечні хвилі додатково характеризують *поляризацією*. Поляризація поперечних хвиль може бути лінійною, еліптичною і коловою (циркулярною) відповідно до вигляду траекторії, яку описує проекція кінця вектора зміщення на площину, перпендикулярну напрямку поширення хвилі (рис. 8.12). Різні типи поляризації поперечних хвиль можна спостерігати в описаному вище демонстраційному досліді з гумовим шнуром з одним закріпленим кінцем. Якщо змушувати вільний кінець шнура здійснювати коливальний рух у вертикальній площині, отримаємо вертикальну лінійну поляризацію, якщо в горизонтальній площині, то горизонтальну лінійну поляризацію. Якщо ж переміщувати вільний кінець шнура по колу, площа на якого перпендикулярна напрямку натягу шнура, то можна збудити поперечні хвилі правої чи лівої колової поляризації залежно від напрямку обертання.

Швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль у рідинах і газах. Оскільки при зсуві одного шару рідини або газу від-

носно іншого (деформація зсуву) не виникають пружні сили (модуль зсуву $G = 0$), то в них не можуть поширюватись поперечні пружні хвилі. Отже, у рідинах і газах можуть існувати лише поздовжні пружні хвилі. Їх швидкість обчислюється так само, як і швидкість поздовжніх хвиль у тонкому стрижні, але замість нього слід розглядати довгий прямий циліндричний канал, заповнений газом або рідиною. За допомогою поршня, який вміщено в такий канал, можна створювати біля його поверхні ділянки стиснення і розрідження, які будуть поширюватись уздовж каналу, причому на поперечний переріз каналу не накладається ніяких обмежень подібних до тих, що існують для твердого стрижня.

Рівняння другого закону Ньютона для деякого виділеного циліндричного елементарного об'єму газу з масою m у каналі матиме такий самий вигляд, як і рівняння руху елементарної ділянки стрижня при поздовжніх коливаннях (8.130). Його проекцією на напрямок Oz є

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = F_{1z} + F_{2z}. \quad (8.140)$$

Сума сил, прикладених до елементарного об'єму $V = Sdz$, у перерізах 1 і 2 дорівнює

$$F_{1z} + F_{2z} = Sp(z + dz) - Sp(z) = S \frac{dp}{dz} dz, \quad (8.141)$$

де p – тиск газу, що залежить від z . При малих змінах тиску Δp їх можна вважати пропорційними відносному видовженню

розглядуваного елементарного об'єму газу $\frac{\Delta \zeta}{\Delta z}$:

$$\Delta p = -E' \frac{\Delta \zeta}{\Delta z}, \quad (8.142)$$

де E' – коефіцієнт пропорційності, цілком аналогічний модулю Юнга в задачі про поширення поздовжніх пружних хвиль у тонкому стрижні, а знак мінус вказує, що тиск при видовженні елементарного об'єму газу зменшується. Після тотожних перетворень правої частин (8.142) одержимо

$$\Delta p = -E' \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = -E' \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} \frac{\Delta S}{\Delta S} = -E' \frac{\Delta V}{V}. \quad (8.143)$$

Перехід до границі за $\Delta V \rightarrow 0$ дає

$$E' = -V \frac{dp}{dV}. \quad (8.144)$$

Таким чином, величина E' , яка визначає швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль у газах і рідинах, є нічим іншим як модулем всебічного стискування

$$K = -V \frac{dp}{dV}. \quad (8.145)$$

Отже, швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль у газах і рідинах можна знайти за формулою

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (8.146)$$

де K – модуль всебічного стиснення газу або рідини.

Таблиця 8.3

Швидкості поширення пружних хвиль у рідинах

| Рідина за 20 °C | v, м/с |
|-----------------|--------|
| Вода | 1490 |
| Етанол | 1180 |
| Ртуть | 1453 |
| Гліцерин | 1923 |

Застосування формул (8.146) для газів має певну специфіку. Оскільки тиск деякого об'єму газу залежить від його температури, то модуль всебічного стиснення залежить від швидкості зміни об'єму газу. Відомо, що при швидкому стискуванні газ нагрівається. Коли ж стискування відбувається дуже повільно, то за рахунок теплообміну з оточуючими тілами чи середовищем температура розглядуваного об'єму газу близька до температури оточення. Якщо остання постійна, то і температура газу залишається постійною. Такий процес зміни об'єму за постійної температури називається *ізотермічним*. При швидкій зміні об'єму теплообмін не встигає відбутися, отже, щойно стиснутий газ має температуру, яка вища за температуру оточення і, відповідно, більший тиск, ніж той, який

врешті-решт встановиться після спадання температури розглядуваного об'єму газу до температури оточення. Процес зміни об'єму газу, який відбувається без теплообміну з оточенням, називається *адіабатичним*¹. Отже, слід розрізняти ізотермічний та адіабатичний модулі всебічного стиснення речовини K_{i3} та K_{ad} . Для їх обчислення необхідно знайти похідні $\frac{dp}{dV}$ для ізотермічного та адіабатичного процесів.

Для ідеального газу

$$pV = \frac{m}{M} RT , \quad (8.147)$$

де R – універсальна газова стала, m – маса газу, M – молярна маса². Оскільки ізотермічний процес відбувається за постійної температури, то диференціювання виразу $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$ за $T = \text{const}$ дає

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_{T=\text{const}} = -\frac{m}{M} \frac{RT}{V^2} = -\frac{p}{V} . \quad (8.148)$$

Отже, $K_{i3} = P$, а відповідна швидкість поширення хвиль

$$v_{i3} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} . \quad (8.149)$$

При поширенні пружних хвиль у газах процеси стискування і розрідження можна вважати ізотермічними лише за дуже низьких частот. Зазвичай для звукових і більш високих частот процес поширення хвиль відбувається адіабатично, тобто температури у ділянках стиснення і розрідження не встигають вирівнятись, оскільки протягом половини періоду коливань тепло з щойно нагрітих стиснутих ділянок не встигає перейти до охолоджених (розріджених). Для ідеального газу адіабатичний процес описується рівнянням $pV^\gamma = \text{const}$, з якого випливає вираз для похідної від тиску за об'ємом:

¹ Наведені міркування застосовані і до процесів розширення газу, яке призводить до його охолодження.

² Молярна маса – це маса 1 моля речовини, виражена у г/моль.

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_{\text{ад}} = -\gamma \frac{p}{V}, \quad (8.150)$$

де γ – показник адіабати, $\gamma = C_P / C_V$, де C_P і C_V – теплоємності за постійних тиску та об'єму, відповідно.

Отже, $K_{\text{ад}} = \gamma P$, а відповідна швидкість поширення пружних хвиль

$$v_{\text{ад}} = \sqrt{\frac{K_{\text{ад}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}. \quad (8.151)$$

Густину ідеального газу можна подати через його молярну масу M . Використовуючи означення об'ємної густини та рівняння стану (8.147), одержимо

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} \quad (8.152)$$

і після підстановки до (8.151) остаточно маємо

$$v_{\text{ад}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (8.153)$$

звідки випливає, що швидкість поширення пружних хвиль у газах збільшується з підвищеннем температури і тим більша, чим менша молярна (або чисельно рівна їй молекулярна) маса газу. Останнє підтверджується наведеними в табл. 8.4 даними про швидкість звуку v , виміряну в різних газах за нормальному тиску та температури 0 °C разом із молекулярною масою цих газів та показником адіабати γ .

Таблиця 8.4
Швидкості поширення пружних хвиль у газах

| Газ | v , м/с | M | γ |
|---------|-----------|-----|----------|
| Кисень | 316 | 32 | 1,4 |
| Повітря | 331 | 29* | 1,4 |
| Азот | 334 | 28 | 1,4 |
| Метан | 430 | 16 | 1,3 |
| Гелій | 965 | 4 | 1,7 |
| Водень | 1284 | 2 | 1,4 |

* середня молекулярна маса.

Швидкість $v_{\text{ад}}$ називають *лапласовою*, на відміну від так званої *ньютонової* швидкості $v_{\text{в}}$. Порівняння формул для швидкості поширення пружних хвиль у твердих тілах і рідинах свідчить про те, що швидкість хвиль у будь-якій речовині тим більша, чим більший модуль пружності, що характеризує пружну деформацію, яку спричинює проходження хвилі, і чим менша її об'ємна густина (табл. 8.2–8.4). При цьому швидкість звуку в газах менша ніж у рідинах, а в рідинах зазвичай менша, ніж у твердих тілах.

Групова швидкість. Якщо збурення є суперпозицією деякої групи плоских гармонічних хвиль з близькими за значеннями частотами (т. зв. *хвильовий пакет*), то вводять так звану *групову швидкість* поширення цієї групи, яка є *швидкістю поширення обвідної* цієї групи. Прикладом хвильового пакета може бути імпульсне збурення при ударному збудженні хвиль у пружному середовищі. На рис. 8.23 показано приклад миттєвого розподілу відхилення залежно від координати z при поширенні групи хвиль.

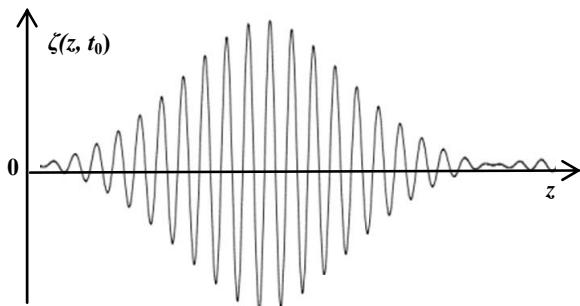


Рис. 8.23. Хвильовий пакет

Для найпростішого хвильового пакета (групи хвиль), що складається із двох гармонічних хвиль (рис. 8.24) з близькими частотами ω_1 та ω_2 ($\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$), що поширюються в одному напрямку, наприклад, уздовж осі Oz , маємо

$$A(z, t) = A_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 z). \quad (8.154)$$

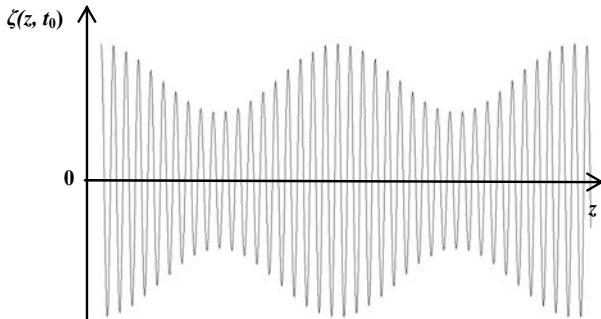


Рис. 8.24. Група із двох хвиль

Вважатимемо, що $A_{01} = A_{02} = A_0$, тоді

$$\begin{aligned}
 \zeta(z, t) &= \\
 &= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 z + \omega_2 t - k_2 z}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 z - \omega_2 t + k_2 z}{2}\right) = \\
 &= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 z - \omega_2 t + k_2 z}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 z + \omega_2 t - k_2 z}{2}\right) = \\
 &= 2A_0 \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t - \frac{(k_1 - k_2)}{2}z\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t - \frac{(k_1 + k_2)}{2}z\right) = \\
 &= 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos(\omega t - kz) = A'_0(t, z) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z), \quad (8.155)
 \end{aligned}$$

де введено середні значення частоти та хвильового вектора, $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ та $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$. Порівняння отриманого в (8.155) виразу із формулою (8.97) дозволяє розглядати цей хвильовий пакет як біжучу хвиллю з деякою середньою частотою $\bar{\omega}$ і середнім хвильовим вектором \bar{k} , "амплітуда"¹ якої, що визначає форму обвідної,

¹ Лапки " " нагадують про те, що хоча вираз (8.155) за формою збігається з виразом для плоскої гармонічної хвилі, а величину $A'_0(t, z)$ формально можна розглядати як амплітуду цієї хвилі, ця величина не є амплітудою, яка за означенням завжди додатно визначена.

$$A'_0(t, z) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right), \quad (8.156)$$

залежить від часу та координат, причому у формі гармонічної біжучої хвилі з частотою $\frac{\Delta\omega}{2}$ і хвильовим вектором $\frac{\Delta k}{2}$. Швидкість поширення цієї обвідної приймають за швидкість хвильового пакета (групи хвиль) з двох хвиль, яку називають *груповою швидкістю* $v_{\text{гр}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ або, враховуючи близькість частот хвиль, що утворюють групу,

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (8.157)$$

Для хвильового пакета на рис. 8.24 за групову швидкість приймають швидкість поширення максимуму обвідної.

Якщо фазові швидкості всіх гармонічних хвиль, що утворюють хвильовий пакет, однакові, тобто, коли $\omega_1 = v_{\phi}k_1$,

$\omega_2 = v_{\phi}k_2$, $\omega_3 = v_{\phi}k_3$..., то групова швидкість $v_{\text{гр}}$ збігається із фазовою швидкістю

v_{ϕ} гармонічних складових, а його форма (форма обвідної) не змінюється в процесі поширення. Рівність фазових швидкостей вказує на лінійний зв'язок між ω і k для хвиль різних частот (довжин хвиль), що можуть поширюватись у середовищі. Виявляється, що це можливо лише в ідеалізованій моделі суцільного (неперервного) середовища.

У дійсності речовина має дискретну атомно-молекулярну структуру, тому лінійний зв'язок між ω і k існує лише для малих частот і хвильових чисел, тобто в так званому довгохвильовому наближенні, коли довжина хвилі набагато більша за характерний параметр дискретності речовини, а поза межами цього наближення стає нелінійним (рис. 8.25). Наприклад, для кристалів довжина

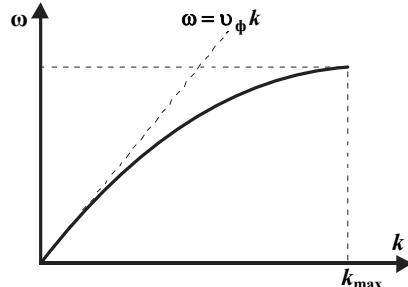


Рис. 8.25. До дисперсії хвиль

пружної хвилі має бути набагато більшою за період кристалічної гратки. Як було зазначено, найменша довжина хвилі, що може існувати в кристалі, дорівнює подвоєному періоду гратки: сусідні атоми при цьому коливаються в протифазі (див. рис. 8.12).

Усі виконані вище розрахунки швидкості поширення пружних хвиль здійснені в довгохвильовому наближенні, і тому розраховані швидкості поширення не залежать від довжини хвилі¹. Теоретичне та експериментальне дослідження впливу дискретного характеру середовища на швидкість поширення хвиль на моделі однакових точкових мас, зв'язаних між собою невагомими пружними нитками² (пружинками), дає результат, подібний до наведеного на рис. 8.25.

Явище залежності фазових швидкостей хвиль від їх частот (довжин хвиль) називають *дисперсією хвиль у середовищі*, або *дисперсією середовища* щодо хвиль, які в ньому поширюються. Із

графіка на рис. 8.25 випливає, що і фазова $v_\phi = \frac{\omega}{k}$, і групова

$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ швидкості хвиль за малих k не залежать від частоти,

причому $v_{\text{гр}} = v_\phi$. При збільшенні k фазова швидкість, що визначається відношенням ординати до абсциси, починає зменшуватись і сягає свого мінімального значення за гранично можливою значенням k_{\max} , яке визначається найменшою можливою в дискретному середовищі довжиною хвилі λ_{\min} , на яку має припада-

ти не менше двох мас, що коливаються, $k_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}}$. Така пове-

дінка фазової швидкості називається *нормальнюю дисперсією*. При нормальній дисперсії групова швидкість, яка чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої залежності $\omega(k)$, також зменшується, прямуючи до нуля за $k \rightarrow k_{\max}$, тобто групо-

¹ Виняток становлять гази, де при окремому розгляді випадків ізотермічного (дуже низькі частоти – дуже довгі хвилі) та адіабатичного (більш високі частоти) процесів поширення пружної хвилі знайдено різні швидкості, $v_{\text{iз}} \neq v_{\text{ад}}$.

² Хорошим наближенням до такої ідеалізованої моделі може бути тонка рибальська волосиня, на якій періодично розміщено маленькі свинцеві грузила.

ва швидкість завжди буде менша від фазової $v_{\text{гр}} \leq v_{\phi}$. При цьому синусоїда під обвідною хвильового пакета буде його випереджати, а форма обвідної буде змінюватись і пакет розпліватиметься в просторі, оскільки фазові швидкості гармонічних хвиль, що його утворюють, різні внаслідок дисперсії.

Дисперсія характерна для всіх типів хвиль і для всіх речовин, зокрема для світлових (електромагнітних) хвиль у прозорих середовищах¹. Тому дисперсійне розширення світлових імпульсів в оптоволоконних лініях зв'язку є одним із факторів, які обмежують швидкість і дальність передачі інформації, оскільки два послідовні імпульси на значному шляху можуть розширитись настільки, що сприйматимутися як один, у результаті чого інформацію буде втрачено. За певних умов може існувати й аномальна дисперсія, коли фазова швидкість хвиль зростає при збільшенні частоти, а залежність $\omega(k)$ при збільшенні k стає надлінійною. При цьому групова швидкість перевищує фазову швидкість і швидко зростає зі збільшенням k , що призводить до такого істотного спотворення імпульсу, що саме поняття групової швидкості втрачає сенс. Аномальна дисперсія спостерігається при поширенні світла в поглинюючих середовищах і відіграє значну роль в оптиці.

8.3.4. Енергія, що переноситься пружними хвилями

Пружні хвилі, зокрема звукові, переносять енергію. У демонстраційному досліді з двома камертонами, налаштованими на одну й ту саму частоту, удар по одному з них викликає звучання іншого. При цьому частина енергії, наданої першому камертону, перетворюється на енергію звукових хвиль у вигляді ділянок підвищеного і зниженого тиску, які поширяються в повітрі і досягають другого камертону, викликаючи його змушені коливання. Аналогічно переносять енергію пружні хвилі, що поширяються у твердих тілах. Енергія, що переноситься пружними хвилями може бути дуже значною, про що свідчать різноманітні технічні застосування ультразвуку, наприклад, для зварювання металів.

¹Дисперсія відсутня при поширенні електромагнітних хвиль у вакуумі, тобто в просторі, вільному від речовини.

Середовище (тіло), у якому поширюється пружна хвиля, має додаткову (порівняно з незбуреним середовищем) внутрішню енергію, яка поширюється в напрямку поширення хвилі. Це додаткове збільшення внутрішньої енергії відбувається за рахунок додатної роботи зовнішніх сил, прикладених до частинок середовища в деякій його ділянці, яка править за джерело хвиль. Найчастіше збудження пружних хвиль здійснюється на межі середовища, але за певних умов їх можна збудити в будь-якій ділянці середовища.

Підкреслимо, що перенесення енергії хвилею не супроводжується перенесенням частинок речовини, як це спостерігається при перенесенні енергії потоком частинок, потоком рідини чи газу: при поширенні хвилі частинки середовища лише здійснюють коливання поблизу положень рівноваги, а перенесення енергії в просторі відбувається шляхом її передачі сусіднім частинкам завдяки наявності взаємодії з ними.

Кількість енергії, що переноситься через деяку поверхню за одиницю часу, називають *потоком енергії* через цю поверхню. Середнє за часом значення потоку енергії через деяку поверхню має вигляд

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}, \quad (8.158)$$

де ΔE – енергія, перенесена через цю поверхню за проміжок часу Δt . Потік енергії має розмірність потужності, $[\Phi] = \text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Вт}$.

У загальному випадку енергія, що переноситься хвилею, розподілена в просторі неоднорідно. Тому для опису перенесення енергії в певній ділянці простору в певному напрямку вводять *густину потоку енергії*, яка є відношенням потоку енергії $\Delta\Phi$ через площину, розміщену перпендикулярно до напрямку поширення енергії до площині цієї площини ΔS :

$$J = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (8.159)$$

Густина потоку енергії має розмірність $[J] = \text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, тобто її можна тлумачити як поверхневу густину потужності. Її можна виразити через об'ємну густину енергії хвилі w_E :

$$w_E = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{dE}{dV} \quad (8.160)$$

та швидкість перенесення енергії v . За проміжок часу Δt через площину ΔS , розміщену перпендикулярно до вектора \vec{v} , що визначає напрямок і швидкість поширення енергії, передноситься кількість енергії $\Delta E = w_E \Delta V = w_E \Delta S v \Delta t$ (рис. 8.26). Отже,

$$J = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} = \frac{w_E \Delta S v \Delta t}{\Delta t \Delta S} = w_E v. \quad (8.161)$$

Для розрахунків зручно користуватись вектором густини потоку енергії¹,

$$\vec{J} = w_E \vec{v}, \quad (8.162)$$

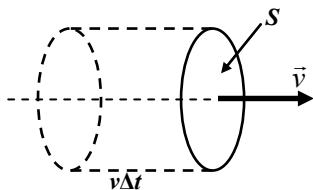


Рис. 8.26. До обчислення густини потоку енергії деформації

модуль якого дорівнює густині потоку енергії, а напрямок збігається з напрямком поширення енергії. За його допомогою зручно розраховувати потік енергії через поверхню. Елементарну ділянку поверхні можна вважати плоскою і характеризувати її

площою dS та вектором нормалі \vec{n} . Потік енергії через цю ділянку створюватиме лише нормальну до неї складову вектора \vec{J} , $J_n = \vec{J} \cdot \vec{n} = J \cos(\vec{J} \wedge \vec{n})$.

Отже,

$$d\Phi = J_n dS = J \cos(\vec{J} \wedge \vec{n}) dS = \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{J} \cdot d\vec{S}, \text{ де } d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS. \quad (8.163)$$

Тоді потік енергії через довільну поверхню S можна обчислити як інтеграл по поверхні S :

$$\Phi = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (8.164)$$

Щоб скористатися формулою (8.164) необхідно знати об'ємну густину енергії хвилі w_{xv} . Для її відшукання обчислимо повну механічну енергію dE деякого фізично малого об'єму твердого

¹ Цей вектор для пружних хвиль називають *вектором Умова* (1874). Пізніше за подібним вектором для електромагнітних хвиль закріпилася назва *вектор Пойнтінга* (1884).

тіла dV , що бере участь у коливальному русі при поширенні пружної хвилі. Під фізично малим об'ємом розуміємо об'єм, малий порівняно з довжиною хвилі, але такий, розміри якого настільки перевищують відстані між атомами чи молекулами середовища, що його можна вважати суцільним. За відсутності пружної хвилі будь-який фізично малий об'єм твердого тіла як ціле перебуває в стані рівноваги. Це означає, що сума сил і моментів сил, прикладених до деякого виділеного об'єму, дорівнює нулю. Кінетична енергія dT руху такого об'єму як цілого дорівнює нулю, а його потенціальну енергію в незбуреному тілі можна прийняти за нуль. При проходженні пружної хвилі малі об'єми середовища здійснюють коливальний рух поблизу положень рівноваги. Зміна положень атомів (молекул) при деформації тіла призводить до виникнення в тілі внутрішніх сил (внутрішніх механічних напруг), що намагаються повернути тіло до положення рівноваги. Такі сили будуть прикладені і до фізично малого об'єму твердого тіла dV , причому можна вважати, що ці сили прикладені до поверхні цього об'єму, оскільки ефективно взаємодіють лише сусідні атоми або молекули.

Кінетична енергія зазначеного об'єму має вигляд

$$dT = \rho dV \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2, \quad (8.165)$$

а відповідна об'ємна густина кінетичної енергії хвилі

$$w_T = \frac{dT}{dV} d = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2. \quad (8.166)$$

Потенціальна енергія dU фізично малого об'єму середовища dV є енергією пружної деформації цього об'єму. Для визначенності розглянемо деформацію розтягу при поширенні поздовжньої пружної хвилі у твердому тілі. Обчислимо роботу з розтягання елементарного об'єму тіла, який до початку деформації мав форму циліндра з площею основи S і висотою (довжиною) Δz . При проходженні поздовжньої хвилі в додатному напрямку осі Oz зміщення лівої і правої основ цього циліндра будуть різними. Нехай у деякий момент часу зміщення лівої основи від її рівноважного положення становить ζ , а правої – $\zeta + \Delta \zeta$, при-

чому $\zeta + \Delta\zeta > 0$. Це означає, що розглядуваний циліндричний об'єм зазнав зміщення на величину $(\zeta + \Delta\zeta)/2 \approx \zeta$ у додатному напрямку осі Oz і розтягу (видовження) на величину $\zeta + \Delta\zeta - \zeta = \Delta\zeta$ у тому самому напрямку. Відносне видовження цього циліндричного об'єму становить величину $\varepsilon = \Delta\zeta / \Delta z$. Елементарна робота зі збільшення довжини цього об'єму від Δz до $\Delta z + \Delta\zeta$ під дією прикладеної до межі об'єму в напрямку ζ сили \vec{F} (рис. 8.22) становить

$$\delta A = F d\zeta, \quad (8.167)$$

де F – модуль цієї сили, $d\zeta$ – елементарне переміщення правої основи циліндра, до якої прикладена сила \vec{F} . Величину F можна виразити через механічну напругу σ , що виникає при деформації, $F = \sigma S$, де S – площа основи циліндра, до якої прикладена сила \vec{F} . У межах пружних деформацій механічна напруга σ пропорційна відносному видовженню: $\sigma = \varepsilon E$, де E – модуль Юнга. Отже,

$$F = \varepsilon E S. \quad (8.168)$$

Елементарне переміщення $d\zeta$, що відповідає певному значенню відносного видовження

$$\varepsilon = \frac{\Delta\zeta}{\Delta z}, \quad (8.169)$$

спричинює елементарний приріст цього видовження

$$d\varepsilon = d\left(\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}\right) = \frac{d(\Delta\zeta)}{\Delta z} = \frac{d\zeta}{\Delta z}, \quad (8.170)$$

звідки

$$d\zeta = \Delta z d\varepsilon. \quad (8.171)$$

Після підстановки (8.168) і (8.171) до (8.167) одержимо

$$\delta A = \varepsilon E S \Delta z d\varepsilon. \quad (8.172)$$

Робота, яку треба виконати, щоб відносне видовження розглядуваного елементарного об'єму тіла змінилося від 0 до ε , становить

$$A_\varepsilon = EV \int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V. \quad (8.173)$$

Ця робота дорівнює потенціальній енергії пружної деформації розглядуваного елементарного об'єму тіла, $U = \frac{1}{2}E\varepsilon^2V$, де $V = S\Delta z$. Отже, об'ємна густина потенціальної енергії пружної деформації буде

$$w_U = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2. \quad (8.174)$$

У виразі для відносного видовження (8.169) можна зробити граничний перехід

$$\varepsilon = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = \frac{d\zeta}{dz}. \quad (8.175)$$

Тоді (8.174) набуває вигляду

$$w_U = \frac{E}{2} \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2. \quad (8.176)$$

Таким чином, об'ємну густину повної механічної енергії E середовища, у якому поширюється пружна хвиля, можна записати як

$$w_E = w_T + w_U = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2, \quad (8.177)$$

де замість позначення $\frac{d\zeta}{dz}$ у виразі для густини потенціальної енергії використано позначення частинної похідної $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$, оскільки ζ залежить не лише від координати z , але й від часу t .

Перенесення енергії плоскою гармонічною хвилею. Розглянемо перенесення енергії плоскою гармонічною хвилею. Об'ємна густина повної механічної енергії гармонічної хвилі вигляду (8.110) відповідно до (8.177) становить

$$w_E = \rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha), \quad (8.178)$$

де було використано вираз $\partial\zeta/\partial t = -\omega a \sin(\omega t - kz + \alpha)$ для коливальної швидкості. Праву частину (8.178) перетворимо за допомогою тотожності $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)]$:

$$w_E = \frac{\rho}{2} a^2 \omega^2 (1 - \cos(2\omega t - 2kz + 2\alpha)). \quad (8.179)$$

Структура останнього виразу дає підстави казати про поширення у середовищі хвилі об'ємної густини енергії з максимальним значенням (амплітудою) $\rho a^2 \omega^2 / 2$ та зі швидкістю, що збігається зі швидкістю поширення пружної хвилі v , але з удвічі меншими просторовими і часовими періодами. На рис. 8.27 схематично показано миттєвий розподіл об'ємної густини енергії біжучої хвилі (8.179) за деякого фіксованого t . Цей розподіл з часом переміщується вздовж напрямку Oz зі швидкістю v . Тобто в кожній площині $z = \text{const}$, що перпендикулярна до осі Oz , об'ємна густина енергії хвилі буде періодично змінюватись від нуля до максимального значення $w_{E\max} = \rho a^2 \omega^2$. При цьому середня за часом об'ємна густина повної механічної енергії середовища, у якому поширюється пружна хвиля з амплітудою a і частотою ω , дорівнює

$$\langle w_E \rangle = \frac{\rho}{2} a^2 \omega^2, \quad (8.180)$$

оскільки середнє значення за період косинуса у квадратних дужках у формулі (8.179) дорівнює нулю. Для опису перенесення енергії хвилею зручніше використовувати усереднене за часом (середнє за період $T = 2\pi/\omega$) значення густини потоку енергії $\langle J \rangle$, яке іноді називають *інтенсивністю* біжучої хвилі I_{xb} :

$$I_{\text{xb}} = \langle J_{\text{xb}} \rangle = \langle w_E \rangle v = \frac{\rho}{2} a^2 \omega^2 v. \quad (8.181)$$

Середньому значенню густини потоку енергії $\langle J_{\text{xb}} \rangle$ можна поставити у відповідність середній вектор густини потоку енергії,

$$\langle \vec{J}_{\text{xb}} \rangle = \frac{\rho}{2} a^2 \omega^2 \vec{v}. \quad (8.182)$$

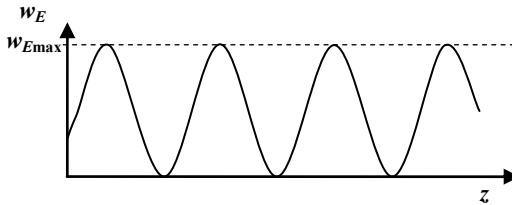


Рис. 8.27. Миттєвий розподіл густини енергії в біжучій хвилі

Інтенсивність біжучої хвилі I , як і її енергія, пропорційна квадрату її амплітуди та квадрату частоти. Якщо в середовищі, де поширюється хвиля, відсутня дисипація енергії, то інтенсивність плоскої хвилі, а разом з нею й амплітуда, залишаються незмінними. Якщо ж хвильовий фронт неплоский, то навіть за відсутності дисипації енергії амплітуда хвилі буде змінюватись.

Перенесення енергії сферичною хвилею. Розглянемо ізотропне однорідне середовище, усередині якого відбувається збурення, наприклад шляхом періодичного створення стиснення і розрідження поблизу деякої сферичної поверхні. Таке збурення можна створити, періодично змінюючи тиск усередині еластичної сферичної оболонки¹. Хвильовий фронт збуреної таким чином хвилі поблизу поверхні сферичної оболонки матиме форму сфери, центр якої збігається із центром сферичної оболонки. Оскільки середовище ізотропне і однорідне, то форма хвильового фронту залишатиметься сферичною як завгодно далеко від поверхні сферичної оболонки. Рівняння такої хвилі, яку називають *сферичною* за формуєю її хвильового фронту (сфера) та *роздільною* за напрямком її поширення (роздігається від центра хвильового фронту) можна подати виглядом

$$\xi(r, t) = A_l \left(t - \frac{r}{v} \right). \quad (8.183)$$

Оберемо в середовищі довільну сферичну поверхню S з радіусом r , центр якої збігається із центром хвильового фронту. Нехай середній вектор густини потоку енергії в довільній точці

¹ Прикладом такої оболонки може бути святкова гумова кулька сферичної форми, наповнена повітрям або іншим газом.

цієї поверхні є $\langle \vec{J}_r \rangle$, тоді потік енергії через цю поверхню відповідно до (8.164) матиме вигляд

$$\Phi = \int_S \langle \vec{J}_r \rangle \cdot d\vec{S} = \int_S \langle J_r \rangle \vec{n} \cdot d\vec{S} = \langle J_r \rangle \int_S dS = \langle J_r \rangle 4\pi r^2, \quad (8.184)$$

звідки

$$\langle J_r \rangle = \frac{\Phi}{4\pi r^2}. \quad (8.185)$$

За відсутності дисипації енергії в середовищі при незмінній потужності джерела хвиль потік енергії через будь-яку замкнену сферичну поверхню, центр якої збігається із центром сферичної хвилі, буде однаковим, $\Phi = \text{const}$. Тоді із виразу (8.185) випливає, що середня густина потоку енергії в довільній точці простору обернено пропорційна квадрату відстані r від центра хвилі до цієї точки. Оскільки середня густини потоку енергії пропорційна амплітуді хвилі, то остання має зменшуватись обернено пропорційно r від центра хвилі. Отже, для розбіжної сферичної хвилі

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} A_1(t - \frac{r}{v}). \quad (8.186)$$

Аналогічно, для збіжної сферичної хвилі (яка збігається до центра хвилі) залежність зміщення від часу та відстані до центра хвилі матиме вигляд

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} A_2(t + \frac{r}{v}). \quad (8.187)$$

Рівняння розбіжної (8.186) і збіжної (8.187) сферичних хвиль є розв'язками хвильового рівняння (8.116). Для задач із центральною симетрією зручніше використовувати сферичні координати r, ψ і θ . Для випадку ізотропного середовища та ізотропного випромінювача всі напрямки від і до центра симетрії еквівалентні, а єдиною змінною залишається r . Відповідне хвильове рівняння матиме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\xi) = 0, \quad (8.188)$$

а його загальний розв'язок

$$\xi(r,t) = \frac{A_1(t - \frac{r}{v})}{r} + \frac{A_2(t + \frac{r}{v})}{r}. \quad (8.189)$$

Для гармонічних сферичних хвиль

$$\xi(r,t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t \pm kr + \alpha), \quad (8.190)$$

де k – модуль хвильового вектора, r – відстань до центра сферичної хвильової поверхні, a – амплітуда сферичної хвилі за $r=1$, причому знак "–" відповідає розбіжній хвилі, а знак "+" – збіжній.

Енергія групи хвиль. Оскільки густота потужності хвилі пропорційна квадрату її амплітуди, то для групи із двох хвиль маємо

$$4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) = 4A_0^2[1 + \cos(\Delta\omega t - \Delta kz)], \quad (8.191)$$

тобто, на відміну від монохроматичної хвилі, де густота потужності рівномірно розподілена в просторі, густота потужності групи із двох хвиль утворює максимуми, що переміщуються в просторі з груповою швидкістю $v_{\text{тр}} = \frac{d\omega}{dk}$. Тому іноді кажуть, що **групова швидкість є швидкістю перенесення енергії групою хвиль.**

8.3.5. Стоячі хвилі

Хвильовим процесам властиве **явище інтерференції** – взаємне підсилення хвиль в одних точках простору і послаблення в інших залежно від співвідношення між фазами цих хвиль. Явище інтерференції можна спостерігати при просторовому накладанні найменні двох хвиль. Якщо різниці фаз цих хвиль у кожній точці простору залишаються незмінними, то виникає стаціонарний просторовий розподіл амплітуди коливань величини ζ_{Σ} , яка є сумою миттєвих значень величин ζ_1 та ζ_2 у хвильах, що накладаються: наприклад, для двох хвиль $\zeta_{\Sigma}(\vec{r},t) = \zeta_1(\vec{r},t) + \zeta_2(\vec{r},t)$. За певних умов можуть виникати специфічні стаціонарні розподіли амплітуди відомі як **стоячі хвилі**.

Стоячі хвилі можна розглядати як результат інтерференції двох біжучих хвиль, що поширяються одна назустріч одній, з

однаковими амплітудами і частотами (для поперечних хвиль ще і з **однаковою** поляризацією). Зазвичай стоячі хвилі утворюються при інтерференції біжучої хвилі, що поширюється до межі поділу двох середовищ, із хвилею, відбитою від цієї межі.

Розглянемо гармонічну хвиллю, що поширюється в додатному напрямку осі z із початковою фазою $\alpha = 0$:

$$\zeta_1 = a \cos(\omega t - kz) . \quad (8.192)$$

Хвilia, що поширюється у від'ємному напрямку осі z (відбита хвilia), у випадку повного відбиття описується виразом

$$\zeta_2 = a \cos(\omega t + kz) . \quad (8.193)$$

Унаслідок інтерференції цих двох хвиль у середовищі утворюється стояча хвilia:

$$\begin{aligned} \zeta_{\Sigma}(z, t) &= \zeta_1 + \zeta_2 = a \cos(\omega t - kz) + a \cos(\omega t + kz) = \\ &= 2a \cos kz \cos \omega t = 2a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \cos \omega t = A(z) \cos \omega t \end{aligned} \quad (8.194)$$

Хоча сумарне зміщення $\zeta_{\Sigma}(z, t)$ у (8.194) як і зміщення $\zeta(z, t)$ у рівнянні біжучої хвилі (8.97) є функцією від часу t і координати z , вираз (8.194) **не є рівнянням біжучої хвилі**, оскільки він не є функцією від аргументу виду $\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = \omega t - kz$, який забезпечує поширення коливального зміщення в просторі. Натомість час t і координата z входять до рівняння (8.194) нарізно.

Такий просторовий розподiл коливань частинок середовища є стацiонарним i дiстав назву стоячої хвилi.

Рівняння (8.194) за формулою збiгається з рiвнянням (8.5) гармонiчних коливань iз циклiчною частотою ω , де замiст сталаi амплiтуди A стоїть величина $A(z) = 2a \cos(kz) = 2a \cos(2\pi z / \lambda)$, що залежить лише вiд координати z , яку iнодi невдало називають "амплiтудою стоячої хвилi", хоча амплiтуда за означенням має бути додатно визначеною величиною. Насправдi, **амплiтудою стоячої хвилi** є додатно визначена величина

$$|A(z)| = |2a \cos(kz)| = |2a \cos(2\pi z / \lambda)| \quad (8.195)$$

з удвiчi меншим перiодом $\lambda / 2$.

З аналізу виразу (8.195) можна зробити висновок, що в точках, де

$$\frac{2\pi}{\lambda}z = \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.196)$$

амплітуда коливань у стоячій хвилі максимальна і дорівнює $2a$. Ці точки називаються **пучностями** стоячої хвилі. У точках, де

$$\frac{2\pi}{\lambda}z = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.197)$$

амплітуда стоячої хвилі дорівнює 0. Ці точки називаються **вузлами** стоячої хвилі. Із рівнянь (8.196) та (8.197) видно, що відстань між сусідніми вузлами та сусідніми пучностями становить $\lambda/2$, а відстань між сусідніми пучністю та вузлом – $\lambda/4$, тобто чверть довжини хвилі.

Поряд зі стаціонарним розподілом амплітуди коливань при виникненні стоячої хвилі встановлюються стаціонарні розподіли деформації середовища та швидкості коливального руху його частинок. Нехай для визначеності зміщення ζ_1 і ζ_2 у рівнянні (8.194) колінеарні напрямку поширення хвилі (осі Oz) (поздовжня хвilia). Якщо взяти похідні за z та t від виразу для $\zeta_{\Sigma}(z, t)$ із рівняння (8.194), то можна знайти просторові розподіли величини деформації середовища ε і швидкості коливального руху частинок ζ , відповідно:

$$\varepsilon = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -k2a \sin kz \cos \omega t, \quad (8.198)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega 2a \cos kz \sin \omega t. \quad (8.199)$$

Рівняння (8.198) описує стоячу хвилю деформації, а рівняння (8.199) – стоячу хвилю швидкості. Із цих рівнянь видно, що вузли і пучністі швидкості частинок збігаються з вузлами та пучностями зміщення, а вузли і пучністі деформації перебувають у протифазі (відрізняються за фазою на π) із вузлами та пучностями зміщення. Зауважимо, що все викладене вище повністю застосовне як для поздовжніх, так і поперечних хвиль.

Стоячі хвилі утворюються при вільних коливаннях стрижнів, струн, стовпів газу в трубах тощо. Спостереження і досліди сві-

дчать, що у жорстко закріплених точках стрижнів і струн завжди утворюються вузли зміщення (пучності деформації). Прикладами можуть бути поперечні коливання пружної дошки або балки, кінці якої спираються на нерухомі опори, а також струн різноманітних музичних інструментів. Натомість на вільних кінцях стрижнів, що коливаються, спостерігається пучності зміщення (вузли деформації). Прикладами можуть бути поперечні коливання пружної дошки-трампліну, який використовують для стрибків у воду, або коливання кінців камертонів. Звучання органних труб та інших духових інструментів завдячує виникненню в них вільних коливань стовпів повітря (стоячих хвиль) на певних частотах.

Таким чином, стоячі хвилі як стаціонарний просторовий розподіл вузлів і пучностей коливань в обмеженій довжиною l ділянці середовища можуть існувати лише за умови, що на цій ділянці вкладається ціле число інтервалів (відстаней) між сусідніми вузлами і пучностями, тобто $\frac{\lambda}{4}$:

$$l = (m + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (8.200a)$$

або

$$(m + 1)\lambda = 4l, \text{ де } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.200b)$$

З умови (8.200b) випливає, що найбільша можлива довжина біжучих хвиль, які, поширюючись у протилежних напрямках, здатні в результаті додавання амплітуд створити стоячу хвиллю, відповідає значенню $m = 0$ і становить $\lambda_{\max} = 4l$. З іншого боку, з умови (8.200a) випливає, що за заданої величини λ довжина m не може бути меншою за $\lambda_{\min} = 4l$.

За парних $m = 2n$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, умови (8.200a) і (8.200b) набирають вигляду

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{4}, \quad (8.201a)$$

або

$$(2n + 1)\lambda_n = 4l \quad (8.201b)$$

а за непарних $m = 2n + 1$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, вигляду

$$l = (n+1) \frac{\lambda_n}{2} \quad (8.202a)$$

або

$$(n+1)\lambda_n = 2l. \quad (8.202b)$$

Відповідні можливі розподіли максимальних відхилень $\zeta_{\max}(z)$ від рівноважного положення $\zeta = 0$ при різних z у стоячих хвильях за різних граничних умов для так званого основного тону за $n = 0$ і двох перших обертонів за $n = 1$ та $n = 2$ наведені на рис. 8.28. Також там наведені їх частоти v_n , обчислені за формулою $v_n = \omega / \lambda_n$, де ω – швидкість біжучих хвиль, а λ обчислюється за формулами $\lambda_n = 4l / (2n+1)$ та $\lambda_n = 2l / (n+1)$, які прямо випливають із (8.201) та (8.202).

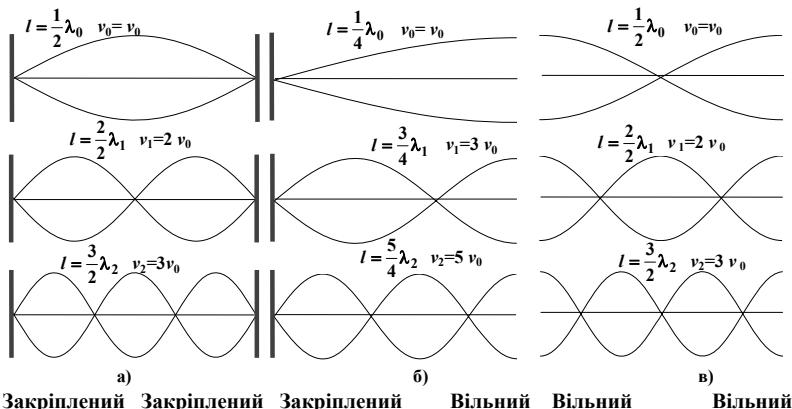


Рис. 8.28. Стоячі хвилі з різних граничних умов
(криві показують максимальні відхилення $\zeta(0)$ від рівноважного положення
(горизонтальна лінія) для основного тону і двох перших обертонів)

Відстань по вертикалі між горизонтальною прямою $\zeta = 0$ і відповідною кривою дорівнює амплітуді коливань. Умова (8.201) відповідає випадку, коли граничні умови на обмеженій довжиною l ділянці середовища різні, і на одній межі маємо пучність, а на іншій – вузол (рис. 8.28, б). Умова (8.202) відповідає випадку, коли граничні умови на обмеженій довжиною l ділянці

середовища однакові й на обох межах маємо пучності (рис. 8.28, *в*) або вузли (рис. 8.28, *а*).

Зауважимо, що вирази (8.200б) і (8.201б) краще відбивають фізичну суть умови (8.200), оскільки визначають мінімальний шлях, необхідний для того, щоб між біжучими хвилями, що поширяються у протилежних напрямках, виникла різниця фаз, яка точно дорівнює 2π . Цим самим забезпечується повна відтворюваність просторового розподілу амплітуди коливань після кожного проходження зазначеного мінімального шляху, а отже, і його стаціонарність.

Розподіл вузлів і пучностей коливань у стоячій хвилі в переважній більшості випадків, наприклад, поздовжніх стоячих хвиль у газах або твердих тілах, безпосередньо оком спостерігати неможливо. Для уточнення процесу виникнення і встановлення стоячих хвиль ми знову звернемось до лекційної демонстрації поперечних коливань горизонтально натягнутого гумового шнуря, один кінець якого закріплено нерухомо, а другий починають періодично коливати у вертикальній площині. Одразу після початку коливань синусоїдальне збурення починає поширюватись уздовж шнуря і протягом дуже короткого часу можна одночасно спостерігати ділянку, де шнур уже здійснює коливання, і незбурену прямолінійну ділянку. У момент досягнення збуренням точки закріплення на всій довжині шнуря можна бачити синусоїдальне відхилення. У наступний момент можна помітити поширення коливального збурення у зворотному напрямку. Воно накладається на хвилю, яка поширяється від джерела коливань до закріпленого кінця шнуря.

Добираючи частоту коливань незакріпленого кінця шнуря і його натяг, можна досягти такого стану, коли замість видимого переміщення вздовж шнуря синусоїдального розподілу відхилень ділянок шнуря будь-який рух уздовж шнуря ділянок з максимальними та мінімальними відхиленнями припиниться, і ці ділянки надалі стоятимуть на місці. У такому випадку кажуть про виникнення *стоячої хвилі*. На рис. 8.29 наведено три послідовні конфігурації шнуря протягом половини періоду коливань: за $t = 0$, $T/4$, $T/2$. Кожна ділянка шнуря здійснює періодичний рух зі сталою амплітудою залежною від її положен-

ня, причому у вузлах амплітуда коливань дорівнює нулю, а у пучностях вона максимальна.

Для пояснення переходу від біжучої хвилі, у якій ділянки максимальних і мінімальних (нульових) відхилень переміщуються вздовж шнура, до стоячої хвилі, уявимо, що шнур нескінченно довгий. Тоді, якщо вважати шнур абсолютно пружним і знехтувати втратами механічної енергії на роботу проти дисипативних сил опору, робота, яку виконує змушувальна періодична сила, прикладена до незакріпленого кінця шнура, буде йти на збільшення енергії шнура за рахунок залучення до коливального процесу нових ділянок шнура. При цьому фронт хвилі, який в одномірному випадку вироджується в точку на межі між збуреними і незбуреними частинами шнура, може поширюватись як завгодно довго і далеко. Із цих міркувань наявність точки закріплення шнура видається суттєвою для виникнення стоячої хвилі.

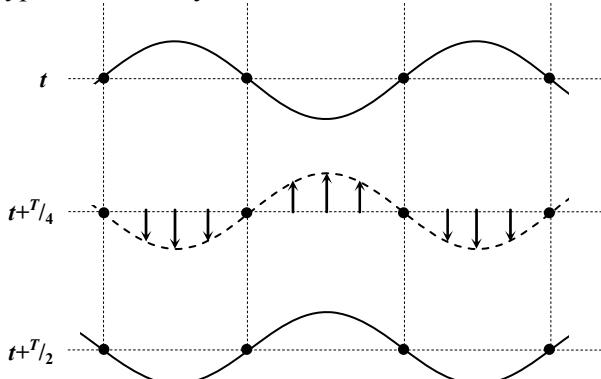


Рис. 8.29. Різні фази стоячої хвилі

Повернемось до рис. 8.16, де показано, як після удару палицею посередині шнура (рис. 8.16, *б*) утворюються два імпульси попере-чного відхилення, що поширяються від середини шнура у взаємно протилежних напрямках до закріплених кінців шнура (рис. 8.16, *в*) і після їх досягнення перетворюються на подібні імпульси проти-лежної полярності (рис. 8.16, *г*), які поширяються назустріч один одному з тією самою швидкістю, що й раніше. Імпульси розми-нутися посередині шнура, не змінюючи швидкості, неначе "не по-мічаючи" один одного: лише відхилення шнура у місці їх зустрічі

буде приблизно вдвічі більше, ніж у кожному окремому імпульсі (рис. 8.16, *д*). По досягненні кінців шнура вони знову змінять полярність на протилежну і при зустрічі посередині шнура на короткий час відтворять початковий імпульс, показаний на рис. 8.16, *б*. Це відбудеться після того, як кожний імпульс пройде шлях, що дорівнює подвоєній довжині шнура $2l$ за час $T_{\text{повт}} = 2l / v$, який є періодом повторення цього процесу. Унаслідок дисипації механічної енергії цей процес поступово припиниться. Із цього досліду можна зробити такі висновки:

1) спостерігається своєрідне відбиття імпульсу в точках закріплення на кінцях шнура, при якому зміщення елементарних ділянок шнура по досягненню точки закріплення змінюють знак на протилежний;

2) імпульси поширяються вздовж шнура незалежно один від одного;

3) ті ділянки шнура, яких одночасно досягають імпульси з протилежними напрямками елементарних зміщень, залишаються нерухомими внаслідок їх додавання;

4) імпульси (відхилення), що виникають при додаванні біжучих назустріч один одному імпульсів стоять на місці і змінюють свій знак двічі за період.

Оскільки ці імпульси можна розглядати як хвильові пакети гармонічних хвиль різних частот, то можна стверджувати, що при утворенні стоячих хвиль унаслідок накладання двох гармонічних біжучих хвиль, які поширяються у взаємно протилежних напрямках:

1) для поперечних зміщень (відхилень) елементарних ділянок шнура в біжучій гармонічній хвилі відбувається таке саме відбиття, як і для імпульсного збурення;

2) біжучі хвилі, що поширяються назустріч одна одній, незалежні й не збурюють одна одну;

3) зміщення частинок, викликані проходженням хвиль, додаються у кожній точці простору як вектори, результуючий розподіл зміщень залишається нерухомим і змінює свій знак на протилежний двічі за період.

Останні дві властивості свідчать про те, що для векторних полів зміщень, які виникають при проходженні пружних хвиль у

деякій точці середовища, відбувається їх суперпозиція (накладання), тобто вектор результуючого зміщення дорівнює $\vec{\zeta}_{\Sigma}(z,t) = \vec{\zeta}_1(z,t) + \vec{\zeta}_2(z,t)$, де $\vec{\zeta}_1(z,t)$ і $\vec{\zeta}_2(z,t)$ – вектори зміщень, які виникають при проходженні кожної хвилі окремо. Оскільки в розглядуваному випадку зміщення в обох хвильях відбуваються паралельно одному напрямку, то достатньо брати суму їх проекцій на цей напрямок, як це було зроблено на початку цього підрозділу (див. формулу (8.194)).

На рис. 8.30 показано схему лабораторної установки для вимірювання швидкості звуку в повітрі. Поблизу відкритого кінця трубки 1 розміщено невеличкий гучномовець 2, плоска мембрana якого створює поздовжні поздовжні звукові хвилі певної частоти v . Висоту l повітряного стовпа в трубці 1 можна змінювати за рахунок зміни в ній рівня води шляхом переміщення у вертикальному напрямку сполученої з нею гнучкою трубкою посудини 3. Виникнення стоячих звукових хвиль при ввімкненому гучномовці можна пояснити накладанням біжучої від гучномовця в напрямку поверхні води звукової хвилі та звукової хвилі відбитої від поверхні води, що поширюється у зворотному напрямку. Зрозуміло, що зміщення і швидкість впорядкованого поздовжнього коливального руху молекул повітря¹ біля поверхні води дорівнюють нулю. Це означає, що біля поверхні води розташовані вузли розподілів зміщення і швидкостей, а також пучність розподілу деформацій. На відкритому кінці трубки поздовжній коливальний рух молекул нічим не обмежений, а до того ж мембрana гучномовця періодично надає імпульс молекулам повітря, що спричиняє їх упорядкований поздовжній коливальний рух.

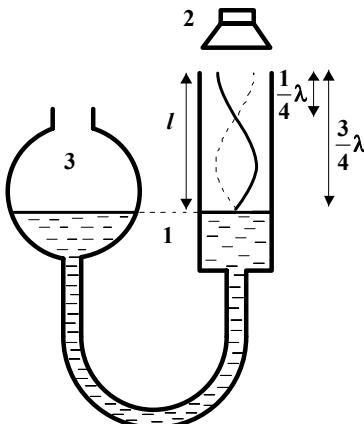


Рис. 8.30. Стояча хвиля в повітряному стовпі

¹ Це не стосується хаотичного теплового руху молекул.

Отже, тут треба очікувати пучність розподілів зміщень і швидкостей.

При утворенні стоячої хвилі в трубці пучність завжди буде на відкритому кінці трубки, а вузол – біля поверхні води. Після досягнення резонансу, що відповідає максимуму сили звуку за деякої висоти повітряного стовпа, яка пов'язана з довжиною хвилі співвідношенням (8.208), можна змінювати висоту l до досягнення наступного резонансу. Різниця висот Δl , що відповідає двом сусіднім резонансам, дорівнює $\lambda/2$. За відомою довжиною хвилі і частотою легко знаходимо швидкість звуку. Висота повітряного стовпа $l = 3\lambda/4$ на рис. 8.30 відповідає першому обертону його власних коливань.

Розподіл, що відповідає основному тону, встановлюється при поперечних коливаннях кожної із симетричних гілок U-подібного камертона. На кожній гілці камертона вкладається чверть довжини хвилі, причому пучності розташовані на вільних кінцях гілок, а вузол трохи нижче точки їх з'єднання.

На відміну від біжучої хвилі, стояча хвиля не переносить енергію, оскільки її можна розглядати як суперпозицію двох біжучих хвиль, які переносять енергію у двох протилежних напрямках. Існує лише локальний рух енергії в обмежених сусідніми вузлами ділянках, пов'язаний із переходом кінетичної енергії в потенціальну, і навпаки¹.

Відповідно до (8.166) та (8.176) густина кінетичної енергії w_T пропорційна квадрату швидкості $\dot{\zeta}$, а густина потенціальної енергії w_U – квадрату деформації ε . Після підстановки до (8.166) швидкості з (8.199) та до (8.176) деформації ε з (8.198) отримаємо

$$w_T \simeq \cos^2 k z \cdot \sin^2 \omega t, \quad (8.203)$$

$$w_U \simeq \sin^2 k z \cdot \cos^2 \omega t. \quad (8.204)$$

Без обмеження загальності міркувань, а винятково для наочності, розглянемо цей локальний рух енергії на прикладі стоячої хвилі поперечних коливань струни із закріпленими кінцями. На

¹ У двовимірному випадку треба розглядати лінії вузлів, у тривимірному – вузлові поверхні.

рис. 8.31, а показано розподіл відхилення струни на ділянці між двома вузлами стоячої хвилі $\zeta(z, 0) = 0$ у деякий момент часу $t = 0$, коли всі ділянки струни проходять через положення рівноваги, і розподіл $\zeta(z, T/4)$, що відповідає максимально можливому відхиленню кожної ділянки струни в момент часу $t = T/4$. На рис. 8.31, б наведено розподіли густини кінетичної енергії $w_T(z, 0)$ та $w_T(z, T/4)$, а на рис. 8.31, в – розподіли густини потенціальної енергії $w_U(z, 0)$ та $w_U(z, T/4)$. За $t = 0$ швидкість кожної ділянки струни максимально можлива, а деформація на всіх ділянках дорівнює нулю. Відповідно, $w_U(z, 0) = 0$ для всіх ділянок струни, а $w_T(z, 0)$ має максимум за умови $\cos^2 kz = 1$ у місці розташування пучності посередині між вузлами. За чверть періоду в момент часу $t = T/4$ відхилення кожної ділянки струни та її деформація стають максимально можливими, а швидкість усіх ділянок рівною нулю. Відповідно, $w_T(z, T/4) = 0$ для всіх ділянок струни, а $w_U(z)$ має максимум за умови $\sin^2 kz = 1$, тобто в місцях розташування вузлів.

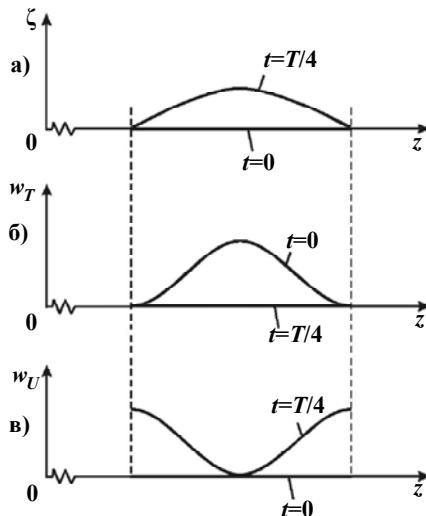


Рис. 8.31. До розподілу енергії у стоячій хвилі

Таким чином, двічі за період повна енергія стоячої хвилі то повністю перетворюється на кінетичну енергію, зосереджену переважно біля пучностей стоячої хвилі (де розташовані пучності швидкості), то повністю перетворюється на потенціальну енергію, зосереджену переважно біля вузлів стоячої хвилі (де розташовані пучності деформації). При цьому відбувається пе-ретікання енергії від кожної пучності до сусідніх вузлів, і навпаки. Потік енергії через вузли при цьому відсутній¹. Це дає можливість подати енергію стоячої хвилі як суму енергій E_n , що припадають на кожну пучність. Оскільки ці енергії E_n однакові, то повна механічна енергія E стоячої хвилі, яка має n пучностей, буде $E = nE_n$. Енергію E_n можна розглядати як енергію деякого осцилятора, для якого $E_n = T + U$.

Отже, повна механічна енергія середовища, у якому існують стоячі хвилі, може бути представлена як suma енергій гармонічних осциляторів. Такий підхід часто застосовують у фізиці при обчисленні густини енергії різних хвиль – як пружних, так і електромагнітних. Зокрема, його використав М. Планк при обґрунтуванні існування квантів світла в 1900 р.

Наведені міркування і формули справедливі також і для стоячих хвиль коливань струн, стрижнів, газу в трубці із закритими кінцями та подібних лінійних систем. Вони також справедливі з відповідними узагальненнями й у дво- та три-вимірних випадках. Двовимірні стоячі хвилі існують, наприклад, при коливаннях пружних мембрани. У цьому випадку ліній вузлів, на яких амплітуда коливань дорівнює нулю, можуть бути візуалізовані за допомогою дрібненького сухого піску, який спочатку рівномірно розсипають на горизонтально розміщений мембрани. Цей пісок поступово струшується з ділянок, де амплітуда коливань значна і накопичується на лініях вузлів, утворюючи *фігури Хладні*, вигляд яких залежить від форми мембрани, співвідношення її розмірів та довжин стоячих хвиль, які можуть у ній існувати (рис. 8.32).

¹ Середній за часом потік енергії через будь-який переріз $z = \text{const}$ дорівнює нулю.

Звернемо увагу на ще одну особливість стоячих хвиль, значення якої виходить за межі механіки і навіть, класичної фізики в цілому. У класичній фізиці, зокрема, у класичній механіці всі величини вважаються іманентно неперервними, серед них і частота v або циклічна частота ω . Зокрема неперервною величиною є частота біжучих хвиль. Водночас стаціонарний розподіл амплітуди коливань струни дає приклад, коли спектр можливих частот біжучих хвиль, які утворюють цей розподіл у вигляді стоячої хвилі, стає дискретним. Умову існування стоячих хвиль (8.200) можна подати формулою

$$L = N\lambda, \quad (8.205)$$

де N – натуральне число ($N = 1, 2, 3, \dots$), яка розкриває її фізичний зміст: у стаціонарному випадку періодичного руху біжучої хвилі по замкненому контуру на довжині цього контуру L має вкладатися ціле число N довжин хвиль λ . Наприклад, у випадку струни з обома закріпленими кінцями повний обхід контуру означає поширення біжучої хвилі від одного кінця до другого та її повернення у вихідну точку, у результаті чого повний пройдений хвилею шлях становить $L = 2l$. Цю умову можна узагальнити на будь-який контур, наприклад, прямокутної або квадратної форми.

У квантовій механіці навпаки, дискретність значень фізичних величин є радше правилом, а не винятком, принаймні для систем, рух яких обмежений у просторі. Наприклад, атом водню може перебувати в різних стаціонарних станах з різною енергією. Відповідно до планетарної моделі Бора цим станам відповідають стаціонарні орбіти електрона з дискретним набором радіусів. Ця дискретність не знаходила пояснень у класичній механіці. У 1924 р. Л. де Бройль висунув гіпотезу, згідно з якою частинки речовини мають виявляти хвильові властивості подібно до того, як світло поряд із хвильовими властивостями виявляє корпускулярні властивості. Довжина хвилі де Бройля для частинки речовини $\lambda_{\text{деб}} = h / p$, де h – стала Планка, а p – імпульс частинки. За де Бройлем на довжині орбіти електрона L в атомі Бора вклада-

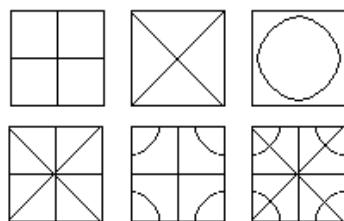


Рис. 8.32. Фігури Хладні

ється ціле число довжин хвиль де Бройля для електрона $L = N\lambda_{\text{дебр}}$. Ця гіпотеза може розглядатися як місток між неперевністю фізичних величин і процесів класичної фізики та дискретністю квантової механіки, поштовхом до створення якої вона стала: у 1926 р. Е. Шредінгер опублікував своє знамените *хвильове рівняння*, за яким частинки описувались *хвильовою функцією*.

8.3.6. Ефект Допплера для звукових хвиль

Хрестоматійним прикладом прояву ефекту Допплера є зміна висоти тону звукового сигналу, що подає локомотив, який на великій швидкості рухається повз спостерігача, що стоїть біля колії. Якщо спостерігач сам перебуває в поїзді, що рухається повз локомотив, який стоїть на станції і подає звуковий сигнал, то ефект буде той самий. Цікавим є поширеній випадок, коли протяжні звукові сигнали одночасно подають локомотиви двох зустрічних поїздів. Тоді пасажир, що перебуває в одному з них, чує виразну зміну висоти тону звукового сигналу зустрічного локомотива за незмінної частоти сигналу свого локомотива.

На якісному рівні походження ефекту Допплера можна зrozуміти, спостерігаючи поширення хвиль на поверхні рідини. На рис. 8.33 зображене поширення хвиль на поверхні води від джерела, що рухається зі швидкістю \vec{v}_D відносно води, яка менша за швидкість поширення хвиль на поверхні води¹. Бачимо, що довжина хвиль, яка визначається як відстань між двома гребенями хвиль, які поширюються в напрямку руху джерела, зменшується, а в протилежному напрямку – збільшується. Частота коливань частинок у фіксованій точці середовища $v = \nu / \lambda$, де λ – довжина

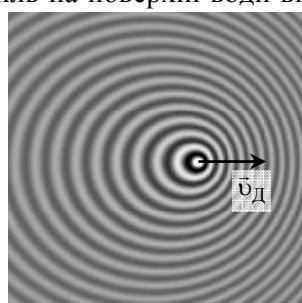


Рис. 8.33. Хвилі на поверхні води від рухомого джерела

¹ Таку дуже наочну картину можна спостерігати на поверхні води при періодичних коливаннях поплавка у вертикальному напрямку, коли вода повільно тече справа наліво повз нерухомий поплавок зі швидкістю $-\vec{v}_D$.

хвиль, що приходять у цю точку, а v – модуль швидкості поширення хвиль, який в однорідному ізотропному середовищі одинакова для всіх ділянок середовища і напрямків поширення хвиль. Отже, частота коливань у точці середовища, до якої джерело хвиль наближається, буде більшою, а в точці, від якої воно віддаляється, меншою.

Розглянемо кількісну зміну частоти у випадку, коли приймач коливається нерухомий відносно середовища, а джерело рухається в напрямку приймача зі швидкістю v_d , проекцією якої на напрямок $Oz \parallel v_d$ є v_d . Для уточнення наших міркувань вважатимемо, що джерело випускає імпульси із частотою v_0 , тобто з періодом $T_0 = 1/v_0$. Тоді, якщо джерело, перебуваючи в точці з координатою z_0 , випустило імпульс, то за час T_0 до моменту випускання наступного імпульсу джерело досягне точки з координатою $z_1 = z_0 + v_d T_0$, а випущений ним у точці з координатою z_0 імпульс досягне точки з координатою $z_2 = z_0 + v T_0$ (рис. 8.34). Отже, відстань у просторі між імпульсами, випущеними джерелом у точках із координатами z_0 та z_1 становитиме

$$z_2 - z_1 = (v - v_d)T_0. Ця відстань є не чим іншим, як довжиною хвилі λ' , що приходить до нерухомого приймача.$$

Отже, частота, яку сприйматиме приймач (кількість імпульсів за одиницю часу) буде

$$v = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_d)T_0}, \quad (8.206)$$

тобто більша за частоту v_0 , яку сприймав би приймач при нерухому джерелі.

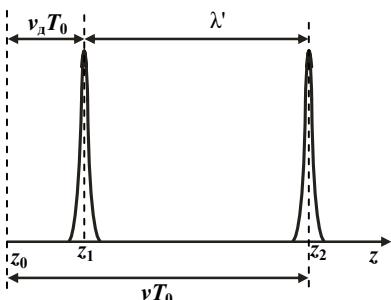


Рис. 8.34. Хвилі від рухомого джерела дисперсії хвиль

Якщо приймач також рухається назустріч джерелу зі швидкістю \vec{v}_n відносно середовища, то швидкість \vec{u} гребінки імпульсів, створених рухомим джерелом, відносно приймача буде $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_n$, а її модуль $u = \sqrt{v^2 + v_n^2 - 2vv_n \cos(\vec{v} \wedge \vec{v}_n)} = v + v_n$.

Отже, кількість імпульсів, які досягнуть приймача за одиницю часу становитиме

$$v = \frac{u}{\lambda'} = \frac{v + v_n}{(v - v_d)T_0} = v_0 \frac{v + v_n}{v - v_d}. \quad (8.207)$$

Таким чином, частота звуку, яку сприймає приймач, при одновчасному русі приймача звуку і джерела звуку відносно середовища дорівнюватиме

$$v = v_0 \frac{v + v_n}{v - v_d} = v_0 \frac{1 + \frac{v_n}{v}}{1 - \frac{v_d}{v}}, \quad (8.208)$$

де v , v_n та v_d – проекції векторів відповідних швидкостей на напрямок вектора швидкості поширення хвиль у середовищі \vec{v} .

Це означає, що зміна частоти буде тим менша, чим більші кути утворюють вектори \vec{v}_n і \vec{v}_d , перпендикулярні вектору \vec{v} . Зокрема, якщо вектори \vec{v}_n і \vec{v}_d перпендикулярні вектору \vec{v} , то ефект Допплера (зміна частоти) відсутній.

Застосуємо формулу (8.208) до аналізу зміни висоти звукових сигналів локомотивів зустрічних поїздів, що рухаються з однаковими швидкостями. Для частоти звуку локомотива зустрічного поїзда, що наближається, дістанемо

$$v = v_0 \frac{v - (-v_n)}{v - (v_d)} = v_0 \frac{v + v_n}{v - v_d}, \quad (8.209)$$

тобто частота зростає. Коли локомотив зустрічного поїзда почне віддалятися, то з урахуванням зміни знаків проекцій v_n та v_d на напрямок поширення звуку отримаємо

$$v = v_0 \frac{v - (v_n)}{v - (-v_d)} = v_0 \frac{v - v_n}{v + v_d},$$

тобто частота зменшується. При обчисленні частоти звукового сигналу локомотива поїзда, яку сприймає приймач (спостерігач), що перебуває в цьому поїзді, необхідно врахувати, що проекції швидкостей v_p та v_d на напрямок швидкості поширення хвиль у середовищі \bar{v} будуть завжди однаковими, $v_p = v_d$, оскільки джерело (локомотив) рухається разом зі спостерігачем. Тоді

$$v = v_0 \frac{v - v_d}{v - v_d} = v_0 , \quad (8.210)$$

тобто частота сигналу "свого" локомотива завжди залишається незмінною.

Контрольні запитання та вправи

8.1. Показати, що максимальна потенціальна енергія осцилятора прямо пропорційна квадрату амплітуди коливань, а його максимальна кінетична енергія пропорційна квадрату частоти коливань.

8.2. Показати, що повна механічна енергія осцилятора, рух якого описується рівнянням (8.2), може бути подана формулою (8.6).

8.3. Показати, що логарифмічний декремент згасання може бути знайдений за формулою $\lambda = 1/N_\tau$, N_τ – кількість коливань, що здійснює осцилятор за час, за який амплітуда коливань зменшується в e разів.

8.4. Довести рівність (8.27).

8.5. Довести рівність (8.28).

8.6. За яких граничних умов і, відповідно, при яких знаках сталих інтегрування A_1 та A_2 і при якому співвідношенні між їх модулями реалізуються рухи, що опisуються кривим 1–4 на рис. 8.2?

8.7. За яких умов робота зовнішньої гармонічної змушувальної сили буде від'ємною?

8.8. Часто поряд з резонансом амплітуд, розглянутим вище, розглядають резонанс швидкостей та резонанс прискорень. Подати графіки залежності модулів швидкості і прискорення, а також їх фазового зсуву δ щодо зовнішньої гармонічної змушувальної сили, від частоти ω останньої. Вказати частоти, за яких відбуваються резонанси швидкості і прискорення. Дати фізичне тлумачення цим залежностям.

8.9. Власна частота коливань осцилятора дорівнює ω_0 . В якому діапазоні частот доцільно обирати частоту зовнішньої змушувальної сили для отримання резонансу змушених коливань? На яких частотах можна збудити параметричні коливання цього осцилятора? За рахунок чого збільшується енергія осцилятора при його параметричному збудженні?

8.10. Що спільног і відмінного в параметричних коливаннях і автоколиваннях?

8.11. Під час лекційної демонстрації лектор одночасно збуджує ударом коливання двох камертонів, власна частота коливань одного з яких становить 256 Гц, з метою визначити невідому власну частоту другого камертону. Присутні ясно чують биття із частотою 10 Гц. Студент з першої парті вигукує: "276 Гц!". Лектор нездадоволений. Чому?

8.12. Як змінні \vec{r} та t входять до рівнянь біжучої та стоячої хвилі? Що спільног і відмінного між цими рівняннями та рівнянням коливань?

8.13. Для поздовжньої акустичної хвилі, поширення якої описується рівнянням $\zeta(z,t) = a_0 \cos(\omega t - kz + \alpha)$, знайти залежності модуля максимальної швидкості коливального руху частинок середовища від частоти та фазової швидкості поширення хвилі.

8.14. Як вплине на густину потоку енергії, що переноситься хвилею, збільшення вдвічі амплітуди плоскої гармонічної хвилі?

8.15. Як вплине на густину потоку енергії, що переноситься плоскою гармонічною хвилею, збільшення вдвічі її частоти?

8.16. Плоска гармонічна хвилля переходить із середовища, в якому вона має швидкість v , частоту ν і довжину хвилі λ , у середовище, де її швидкість вдвічі більша. Які будуть частота і довжина цієї хвилі в другому середовищі?

8.17. Як залежить швидкість звуку в середовищі від густини останнього?

8.18. Як залежить швидкість звуку в середовищі від його пружності?

8.19. Яка тенденція зміни швидкості звуку залежно від агрегатного стану речовини (твердий, рідкий, газоподібний)?

8.20. Відомо, що, притиснувши вухо до рейки на залізниці, можна довідатись про наближення потягу значно

раніше, ніж стоячи і прислухаючись до шуму, що його створює потяг. Чому?

8.21. Яким чином здійснюють налаштування струн гітари або скрипки на певну частоту (висоту звуку)?

8.22. Два близнюки отримали в подарунок дві абсолютно ідентичні свистілки, кожна з яких являла собою трубку, один кінець якої відкритий, а в інший вставлено мундштук. Спочатку обидва хлопчики добували звук однакової висоти, який їхня старша сестра оцінила як ноту "ля" третьої октави (1760 Гц). Через деякий час один із близнюків навчився добувати зі своєї свистілки ноту "ля" другої октави (880 Гц). Як йому це вдалося? Оцінити приблизну довжину свистілок.

8.23. Досвідчений механік може здійснити швидку попередню перевірку достатності натягу спиць колеса велосипеда (мотоцикла, авто), стукаючи по ним гайковим ключем або молоточком. Натягнута спиця буде давати ясний чистий звук, а не натягнута – ні. Пояснити чому.

8.24. При якій найменшій довжині сталевого стрижня в ньому можна збудити поздовжні власні коливання із частотою 1 кГц? Швидкість поздовжніх звукових хвиль у сталі 6000 м/с.

8.25. З якою швидкістю v_d джерело звуку з власною частотою $v_0 = 440$ Гц (нота "ля" першої октави) має наблизатися до нерухомого спостерігача, щоб він сприймав звук як ноту "ля" другої октави (880 Гц)? Звук якої частоти буде сприймати спостерігач при віддаленні того самого джерела звуку зі знайденою швидкістю v_d ?

РОЗДІЛ 9

Основи спеціальної теорії відносності

9.1. Постулати Айнштайна¹ та перетворення Лоренца

У розд. 3 (підрозд. 3.5) було розглянуто принцип відносності механіки, який математично виражався перетвореннями Галілея для координат та часу. Нагадаємо, що відповідно до принципу відносності механіки в усіх інерціальних системах відліку перебіг усіх механічних явищ однаковий. Твердження про існування інерціальних систем відліку, принцип відносності механіки та принцип далекодії можна вважати постулатами або аксіомами², на які спирається основа Ньютонової механіки – три закони Ньютона. Власне перший закон Ньютона (закон інерції) є постулатом про існування інерціальних систем відліку, рівняння другого закону не змінюється при переході від однієї ІСВ до іншої, а принцип далекодії забезпечує виконання третього закона Ньютона. Виходячи із цих постулатів, можна сформулювати закони збереження і побудувати всю механіку Ньютона.

Кінець XIX ст. ознаменувався бурхливим розвитком електродинаміки, яка завдяки роботам Дж. Максвелла, Г. Лоренца та інших вчених стала аналогічною до механіки науковою, що спирається на невелику кількість вихідних рівнянь, які пов'язують між собою характеристики електромагнітного поля в кожній точці простору і в кожний момент часу. Ця система рівнянь, яку вста-

¹ Тут і далі замість традиційного написання прізвища *A. Ейнштейн* (див. Український правопис, 2007, § 95, п. 1) за наполяганням автора вжито написання *A. Айнштайн*, яке адекватно передає фонетику, прийняту в переважній більшості мов міжнародного спілкування фізиків.

² Зауважимо, що відповідний розділ в "Математичних принципах натуральної філософії" Ньютона має назву "Аксіоми або закони руху", а в європейських мовах три закони динаміки часто називають аксіомами Ньютона.

новив Максвелл, фактично являє собою рівняння руху електромагнітного поля. Одним із її найважливіших наслідків є існування електромагнітних хвиль.

Закономірно виникло запитання: чи поширюється принцип відносності механіки на немеханічні, електромагнітні явища? З аналізу відомих на той час фактів випливало важливість постановки такого запитання. Позитивна відповідь на нього вказувала б на можливе розрізнення ICB за допомогою електродинамічних дослідів і визначення, таким чином, абсолютної системи відліку за Ньютоном. Особливі надії при цьому покладалися на досліди з електромагнітними хвиллями, які на той час були найбільш вивченими в оптичному діапазоні. Водночас існували уявлення про те, що світло – це пружні хвилі, які поширяються в так званому світловому, або світлоносному ефірі, – гіпотетичному середовищі з доволі екзотичними властивостями. Цей ефір мав би заповнювати весь простір, де тільки може поширюватися світло, як вільний від речовини (вакуум), так і заповнений прозорою для світла речовиною (вода, скло тощо). Для того, щоб пружні хвилі у світовому ефірі поширювалися зі швидкістю світла величина якої $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{c}^{-1}$ на той час була надійно виміряна, цей ефір наділяли фантастично великою пружністю та надзвичайно малою густинною: про нього часто казали як про абсолютно пружний і невагомий. Дійсно, оскільки швидкість поперечних пружних хвиль $v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, де σ – модуль зсуву, а ρ – густина середовища, то для забезпечення $v = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{c}^{-1}$, необхідно мати відношення $\frac{\sigma}{\rho} \approx 10^{17} \text{ м}^2 \cdot \text{c}^{-2}$!

Нагадаємо, що швидкість, наприклад, поперечних пружних хвиль звукового діапазону в такому високопружному матеріалі, як сталь, з густинною порядку $9,8 \text{ кг}/\text{dm}^3$ становить величину порядку $5 \cdot 10^3 \text{ м} \cdot \text{c}^{-1}$, тобто для сталі $\frac{\sigma}{\rho} \approx 2,5 \cdot 10^7 \text{ м}^2 \cdot \text{c}^{-2}$. Отже, для досягнення $v = c$ пружне

середовище повинно мати відношення модуля зсуву до густини на 10 порядків більше, ніж для звичайних пружних матеріалів!

Однак із рівнянь електродинаміки випливало незалежність швидкості світла у вакуумі від вибору системи відліку, що пря-мо суперечило концепції ефіру, а з аналізу спостережень, наприклад, аберрації зірок (Дж. Бредлі, 1727) та експериментів щодо вимірювання швидкості світла в рухомих середовищах (Л. Фізо, 1851) і швидкості руху Землі відносно світлового ефіру (експеримент Майкельсона–Морлі, 1887) випливало наявність притаманних цій концепції внутрішніх суперечностей та неможливість пояснення за її допомогою результатів спостережень та експериментів з єдиної точки зору.

У 1905 р. А. Айнштайн опублікував дві статті, у яких було викладено основи теорії, що не потребувала наявності ефіру для пояснення доступних на той час даних спостережень та експериментів. Ця теорія, яка дісталася називу спеціальної теорії відносності (СТВ), мала на меті опис руху тіл зі швидкостями, близькими до швидкості світла, й обмежувалася розглядом перебігу механічних і оптических (електродинамічних) явищ в інерціальних системах відліку (ІСВ). В основі СТВ лежить ньютонівський постулат про існування ІСВ, до якого Айнштайн додав два постулати, відомі як постулати Айнштайна:

- 1) загальний принцип відносності;
- 2) принцип незалежності швидкості світла від швидкості руху джерела світла в усіх ІСВ.

Перший із цих постулатів можна розглядати як поширення принципу відносності на всі, а не лише на механічні явища. У часи Айнштайна крім механічних були відомі ще й електромагнітні явища. Тому цей постулат іноді називають принципом відносності електродинаміки, на відміну від принципу відносності механіки. Другий постулат еквівалентний твердженню про скінченну швидкість поширення світла й означає відмову від ньютонівського принципу далекодії.

Поставимо задачу знайти зв'язок між просторовими координатами та часом якої-небудь події у двох різних ІСВ, виходячи з постулатів Айнштайна. Модель нашої події така: нехай у деякій ІСВ K (для простоти в її початку) у момент часу $t = 0$ відбувається

спалах світла. У результаті від точки O поширюється сферична хвиля (рис. 9.1), фронт якої в декартовій системі координат з початком у точці O описується рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (9.1)$$

де c – швидкість світла в ICB K . Нехай у момент часу $t=0$ початок O системи відліку ICB K збігався з початком O' ICB K' (рис. 9.1). Відповідно до першого постулата Айнштайнa в ICB K' фронт хвилі, породженої спалахом світла, також має сферичну форму, а отже, рівняння фронту має такий самий вигляд, як і рівняння (9.1):

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (c')^2 (t')^2, \quad (9.2)$$

де всі величини визначено відносно ICB K' .

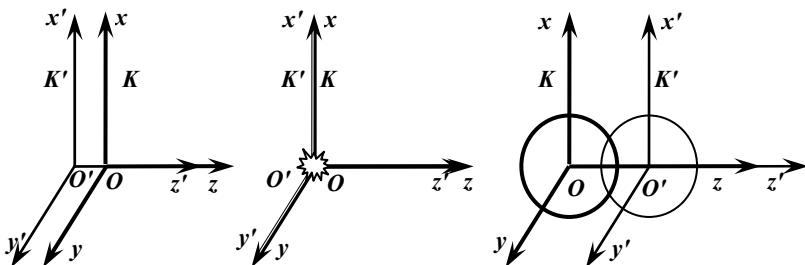


Рис. 9.1. До встановлення зв'язку
між координатами і часом події у двох ICB

Відповідно до другого постулата Айнштайнa покладемо в рівнянні (9.2), що $c' = c$, тоді маємо

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2. \quad (9.3)$$

Рівняння (9.1) та (9.3) можна подати у вигляді

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \text{та} \quad (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 (t')^2 = 0$$

або

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad (9.4)$$

та

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 + (x'_4)^2 = 0, \quad (9.5)$$

де позначено

$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ та $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$, $x'_4 = ict'$.

На підставі рівнянь (9.4) та (9.5) можна записати

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 (x'_i)^2. \quad (9.6)$$

Таким чином, перетворення координат x_i , яке відповідає постулатам Айнштайна і подане формулою (9.6), можна розглядати як ортогональне перетворення, що не змінює довжину відрізка в деякому 4-вимірному просторі¹. Це перетворення визначається деякою матрицею перетворення $[a_{lk}]$, яка лінійно пов'язує між собою координати x' та x :

$$x'_l = \sum_{l=1}^4 a_{lk} x_k. \quad (9.7)$$

Оберемо орієнтацію декартових систем координат XYZ та $X'Y'Z'$, пов'язаних із системами відліку K та K' , відповідно, так, щоб осі OZ та $O'Z'$ були паралельні вектору швидкості системи відліку K' відносно системи K , а осі OX та OY були паралельні осям $O'X'$ та $O'Y'$, відповідно (рис. 9.1). За такого вибору $x' = x$, $y' = y$ ($x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$) і матриця $[a_{lk}]$ набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}. \quad (9.8)$$

Елементи матриці (9.8) як будь-якої матриці ортогональних перетворень мають задовольняти відомі співвідношення:

$$a_{33}^2 + a_{34}^2 = a_{43}^2 + a_{44}^2 = a_{33}^2 + a_{44}^2 = a_{34}^2 + a_{43}^2 = 1 \quad (9.9)$$

та

$$a_{33}a_{34} + a_{43}a_{44} = a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} = 0. \quad (9.10)$$

¹ Чотиривимірний простір, у якому точка задається трьома просторовими дійсними координатами $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ й однією уявною часовою координатою $x_4 = ict$, називається *простором Мінковського*.

Із рівностей (9.9) і (9.10) можна знайти важливі співвідношення між елементами матриці (9.8). Наприклад,

$$a_{33}^2 = a_{44}^2, \text{ звідки } a_{44} = \pm a_{33}. \quad (9.11)$$

Для подальшого розгляду оберемо в останній рівності знак "+" (доцільність такого вибору обґрунтуюмо далі), тобто покладемо

$$a_{44} = +a_{33}, \quad (9.12)$$

і тоді

$$a_{43} = -a_{34}. \quad (9.13)$$

Введемо позначення

$$a_{33} = a_{44} = \alpha \quad (9.14)$$

та

$$a_{34} = i\alpha\beta. \quad (9.15)$$

Тоді матриця (9.8) набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & i\alpha\beta \\ 0 & 0 & -i\alpha\beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

Будь-яку подію, що відбулася в момент часу t у точці простору з координатами x, y, z , можна задати в просторі Мінковського з координатами x_1, x_2, x_3, x_4 . Зв'язок між координатами цієї події в інерціальних системах відліку K і K' має вигляд

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = \alpha x_3 + i\alpha\beta x_4, \quad x'_4 = -i\alpha\beta x_3 + \alpha x_4. \quad (9.17)$$

або

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \alpha z + i\alpha\beta ct, \quad ct' = -i\alpha\beta z + \alpha ct. \quad (9.18)$$

Отже, зв'язок між просторовими координатами і часом у системах відліку K і K' дається формулами:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad (9.19)$$

$$z' = \alpha(z - \beta ct), \quad (9.19)$$

$$t' = \alpha(t - \frac{\beta}{c}z). \quad (9.20)$$

Залишається визначити величини β та α . Знову скористаємося властивостями елементів матриці ортогонального перетво-

рення, наприклад, рівністю $a_{33}^2 + a_{34}^2 = 1$. Тоді $\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 = 1$, звідки знаходимо

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.21)$$

З аналізу розмірностей рівностей (9.19) і (9.20) випливає, що добуток βc має розмірність швидкості. Позначимо його $\beta c = V$,

де V – деяка швидкість. Тоді $\beta = \frac{V}{c}$ і рівності (9.19) та (9.20) набувають вигляду

$$z' = \frac{z - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.22)$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (9.23)$$

Який зміст має швидкість V у цих рівностях? Для того, щоб дати відповідь на це запитання, розглянемо випадок, коли швидкість $V \ll c$. Тоді отримаємо $z' = z - Vt$, $t' = t$, тобто перетворення Галілея, в яких швидкість V – це швидкість руху ICB K' відносно ICB K (див. підрозд. 3.5). Логічно є вимога, щоб отримані нами нові формули перетворень координат і часу за малих швидкостей неперервним чином переходили в перетворення Галілея, тобто і в перетвореннях (9.22) та (9.23) швидкість V – це швидкість руху ICB K' відносно системи ICB K .

Остаточно запишемо одержані на основі постулатів Айнштейна перетворення координат і часу деякої події при переході від ICB K до ICB K' , які є математичним виразом принципу відносності електродинаміки¹ та перетворення Галілея, що виражують принцип відносності механіки Ньютона:

¹ Ці перетворення вперше одержав Х. Лоренц у 1904 р. під час теоретичних та експериментальних досліджень поширення світла в рухомих середовищах. У тому ж році А. Пуанкарє надав їм сучасного вигляду і показав, що вони

| Перетворення Лоренца | Перетворення Галілея |
|--|------------------------------|
| $x' = x,$ | $x' = x,$ |
| $y' = y,$ | $y' = y,$ |
| $z' = \frac{z - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.22)$ | $z' = z - Vt, \quad (9.22a)$ |
| $t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.23)$ | $t' = t. \quad (9.23b)$ |

Зворотні перетворення координат і часу деякої події при переході від ICB K' до ICB K мають такий вигляд:

| Перетворення Лоренца | Перетворення Галілея |
|---|------------------------------|
| $x = x',$ | $x = x',$ |
| $y = y',$ | $y = y',$ |
| $z = \frac{z' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.24)$ | $z = z' + Vt, \quad (9.24a)$ |
| $t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}z'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.25)$ | $t = t'. \quad (9.25b)$ |

Формули зворотних перетворень подібні до формул прямих перетворень, але в них знак "–" перед швидкістю V змінено на знак "+", оскільки напрямок відносної швидкості системи K щодо системи K' протилежний напрямку відносної швидкості системи K' щодо системи K .

залишають незмінними рівняння електродинаміки Максвелла при переході від однієї ICB до іншої. Айнштайн спирається на ці перетворення при створенні СТВ.

Із порівняння перетворень Лоренца і перетворень Галілея випливає, що у СТВ час і просторові координати не є незалежними змінними.

Якщо раніше (напр., при розгляді інваріантності законів Ньютона щодо перетворень Галілея або при розгляді руху частинки відносно НСВ) ми могли вважати, що як $\Delta l' = \Delta l$, так і $\Delta t' = \Delta t$, то в СТВ незмінним є лише званий *інтервал* $\Delta S' = \Delta S_{12}$ – відстань між двома точками в 4-вимірному просторі Мінковського:

$$S_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (9.26)$$

квадрат якого може поданий як

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2, \quad (9.26a)$$

де l_{12} – просторовий інтервал (відстань між двома точками в 3-вимірному просторі, $l_{12} = \Delta l$), а t_{12} – часовий інтервал ($t_{12} = \Delta t$).

Корисно записати явний вигляд матриці перетворень Лоренца і порівняти її з матрицею, що описує перетворення Галілея.

$$L(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}. \quad (9.27)$$

Перетворення Лоренца характеризується одним параметром β який описує перетворення координат певної події в 4-вимірному просторі Мінковського при переході від однієї ІСВ до іншої.

Зауважимо, що матриця перетворень Галілея має вигляд

$$G(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -V \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.28)$$

тобто вона не має ніякої внутрішньої симетрії, а матриця перетворень Лоренца – *ермітова*, оскільки $a_{ji}^* = a_{ij}$.

Повернемось до того моменту, коли було взято знак "+" при встановленні співвідношення між елементами матриці a_{44} та a_{33} шляхом добування квадратного кореня. Якби було обрано знак "-", то неперервний перехід від перетворень Лоренца до перетворень Галілея шляхом спрямування відношення $\beta = \frac{V}{c}$ до нуля був би неможливий¹.

9.1.1. Наслідки перетворень Лоренца

Відмінність перетворень Лоренца від перетворень Галілея тягне за собою певні наслідки щодо кінематики руху зі швидкостями, які не можна вважати малими порівняно зі швидкістю світла, причому деякі з них настільки радикально відрізняються від наших уявлень про механічний рух, які склалися з досвіду спостережень рухів з малими швидкостями ($v \ll c$), що можуть здаватися такими, які суперечать "здоровому глузду".

Перед тим, як перейти до обговорення наслідків перетворень Лоренца варто наголосити, що останні безпосередньо випливають із трьох постулатів, які самі по собі не можна вважати такими, що виходять за межі наших уявлень про рух. Принаймні зміст цих постулатів не суперечить "здоровому глузду". Дійсно, перший із них – це постулат про існування інерціальних систем відліку як таких, до якого можна дійти логічними міркуваннями на основі узагальнення спостережень механічного руху зі швидкостями, набагато меншими від швидкості світла (див. підрозд. 3.1).

¹ Зауважимо, що вибір знака "-" відповідає т. зв. інверсії часу: за такого перетворення напрямок зміни часу змінюється на протилежний ($t' = -t$). Оскільки вектор швидкості за означенням $\vec{\omega} = d\vec{r}/dt$, а при інверсії часу знак знаменника змінюється на протилежний, то це зумовлює зміну напрямків руху всіх частинок на протилежні.

Другий постулат (відомий як перший постулат Айнштайна), як було зазначено, є поширенням принципу відносності на всі (а не лише на механічні) явища¹.

Третій постулат, на який спирається СТВ (другий постулат Айнштайна), також не сприймається як щось надзвичайне: якщо всі явища відбуваються однаково в усіх ICB, то можна припустити, що в усіх ICB швидкість світла однакова. Відповідний постулат механіки Ньютона – *принцип далекодії*, наслідком якого є третій закон динаміки Ньютона, більш незбагнений ніж *принцип близькодії* СТВ, оскільки відповідно до нього взаємодія передається миттєво на яку завгодно, навіть нескінченну відстань (тобто швидкість поширення взаємодії нескінчена).

Поняття одночасності. Спочатку розглянемо поняття одночасності двох подій. Якщо дві події відбуваються в одній і тій самій точці простору, в один і той самий момент часу, то спостерігач ці події вважає одночасними. Випадок, коли дві події відбуваються в різних точках простору, більш складний. Розглянемо його.

Наприклад, за розкладом Укрзалізниці відправлення потяга № 91 Київ–Львів (подія 1) і відправлення потяга № 6210 Харків–Маріуполь (подія 2) мають відбутися о 22:26, тобто одночасно (з точністю до хвилини). Як можна перевірити одночасність цих подій? Ця проблема вирішується просто: спостерігачі на вокзалах у Києві та Харкові при відправленні потягів, відповідно, на Львів та Маріуполь, дивляться на свої годинники. Якщо обидва спостерігачі бачать 22:26, то можна сказати, що ці поїзди відправились одночасно (з точністю до хвилини). Зрозуміло, що хід обох цих годинників має бути заздалегідь узгодженим між собою, тобто синхронізованим².

Узгодити хід годинників у різних точках простору можна досягти по-різному. Один із давно відомих і протягом тривалого часу широко використовуваних у морській навігації (принаймні до появи радіозв'язку) спосіб полягає у використанні дуже точ-

¹ На кінець XIX ст. усі відомі фізичні явища зводились до явищ механічних, електрических і магнітних, тобто до електромагнітних, як показав Максвелл, причому до останніх належали і всі оптичні явища.

² Прикметник *синхронізований* походить від грец. слова χρόνος (*хронос*), що означає час, і префікса συ- (*син-*), який означає узгодженість, спільність.

ного годинника (хронометра¹), покази якого спочатку встановлюють за еталонним годинником², розташованим у деякій точці простору *A*. Такий хронометр дає можливість визначати час у будь-якій іншій точці простору, у яку його перенесено, наприклад, у точці *B*. У нашому прикладі з відправленням потягів достатньо мати еталонний годинник, наприклад, у Києві, узгодити з ним хід хронометра, і перевезти його до Харкова, після чого можна починати перевірку одночасності відправлення згаданих потягів з Києва та Харкова. Єдина вимога, якої слід дотримуватись при перенесенні годинника із точки *A* в точку *B*: перенесення має бути повільним (зі швидкістю $v \ll c$).

Значного спрощення процедура синхронізації ходу годинників, розміщених у різних точках простору (земної поверхні), досягнуто спочатку з використанням електричних сигналів, що передавалися по дротах³, а потім і радіосигналів. На сьогодні ми свої годинники встановлюємо переважно за сигналами, які передаються по радіо. Проте такий спосіб, який за земних масштабів забезпечує точність синхронізації порядку 1 с, що достатньо для повсякденного життя людини, має один принциповий недолік: насправді сигнал приходить з точки *A* в точку *B* з деякою затримкою, яка дорівнює проміжку часу Δt_{AB} поширення сигналу від точки *A* до точки *B*, $\Delta t_{AB} = \frac{l_{AB}}{v_c}$, де l_{AB} – відстань від

точки *A* до точки *B*, а v_c – швидкість поширення сигналу. Для відстані $l_{AB} = 300$ км затримка радіосигналу становить лише 1 мс. Цей недолік можна повністю усунути, якщо застосувати

¹ Буквально "вимірювач часу".

² Зазвичай еталонні годинники використовувались в астрономічних обсерваторіях. Сучасні якісні наручні електронні або електромеханічні годинники з кварцовою стабілізацією за своюю точністю перевершують найдосконаліші зразки механічних хронометрів.

³ Практична потреба в таких системах виникла в загальноєвропейській залізничній мережі на поч. XX ст. Над ними працювали видатні вчені та інженери того часу. А. Айнштайн, що тоді обіймав посаду патентного експерта в патентному бюро (м. Берн, Швейцарія) мав можливість ознайомитись із заявками на відповідні патенти.

певну процедуру. Наприклад, у деякий момент часу t_A за годинником, розташованим у точці A , із точки A надсилаємо сигнал у точку B , звідки цей сигнал одразу перенаправляється у зворотному напрямку до точки A , якої він досягає в момент часу t'_A (знову за годинником, що розташований у точці A , (рис. 9.2)). Виміряний у точці A проміжок часу між моментами передачі та повернення сигналу в точку A : $t'_A - t_A = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA}$. Якщо швидкість поширення сигналу в напрямках "туди" і "назад" однакова, то однаковими будуть і проміжки часу, за які сигнал проходить шлях між точками A і B в обох напрямках, $\Delta t_{AB} = \Delta t_{BA}$. Тоді можна вважати, що в точці B цей сигнал побував у момент часу

$$t_B = \frac{t_A + t'_A}{2} \quad (9.29)$$

за годинником, розташованим у точці A . Залишається до ходу годинника, розміщеного в точці B , внести таку поправку, щоб зафік-

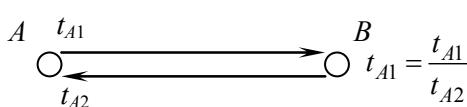


Рис. 9.2. До процедури синхронізації годинників

сований момент надходження сигналу в точці B відповідав часу t_B за годинником, розташованним у точці B . Підкреслимо, що встановлений

у такий спосіб час t_B не залежить від абсолютної швидкості поширення сигналу: єдине, що припускається, – це незалежність швидкості поширення сигналу від напрямку поширення (властивість, яку називають ізотропією). Дійсно, $t_B = t_A + \Delta t_{AB} = t_A + \frac{l_{AB}}{v} = t_A + \frac{t'_A - t_A}{2} = \frac{t_A + t'_A}{2}$, де для виключення швидкості v

було використано рівності $t'_A - t_A = 2\Delta t_{AB} = 2\frac{l_{AB}}{v}$.

Отже, для синхронізації годинників у різних точках простору можна використовувати сигнали з будь-якою швидкістю поширення: світлові, акустичні тощо аби тільки середовище, у якому поширюється сигнал, було нерухомим відносно ICB K .

Тепер розглянемо питання одночасності подій при їх спостереженні з різних систем відліку. Нехай маємо дві події A_1 та A_2 , координати яких у деякій системі відліку K є x_1, y_1, z_1, t_1 та x_2, y_2, z_2, t_2 , відповідно, тобто відстань між місцями цих подій $\Delta l = z_2 - z_1$, а проміжок часу між ними $\Delta t = t_2 - t_1$. Як ці події сприймаються в деякій іншій ICB K' ? Їх координати в системі ICB K' будуть x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 та x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 , відповідно. Очевидно, що за обраної нами орієнтації декартових систем координат XYZ і $X'Y'Z'$, відповідно, у системах відліку K і K' маємо $x' = x$ та $y' = y$. Отже, можна обмежитись лише розглядом петретворень координат z і t . Тоді в системі відліку K матимемо події $A_1(z_1, t_1)$ та $A_2(z_2, t_2)$, а в системі відліку ICB K' – події $A_1(z'_1, t'_1)$ та $A_2(z'_2, t'_2)$. Відповідно до (9.23) маємо

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2} z_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{V}{c^2} z_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{V}{c^2} (z_2 - z_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

або

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (9.30)$$

Отже, $\Delta t'$ може дорівнювати Δt , тобто події можуть бути одночасними в усіх ICB, тоді й лише тоді, коли вони відбуваються в одній і тій самій точці простору ($\Delta z = 0$). У загальному ж випадку залежно від Δz може бути як $\Delta t' > 0$, так і $\Delta t' < 0$, тобто можна вказати таку ICB K' , у якій подія A_2 відбудеться раніше події A_1 ! Однак такий парадокс можливий лише для подій, не пов'язаних причинно-наслідковим зв'язком¹.

¹ Це накладає суттєві обмеження на творчі задуми письменників-фантастів: напр., батьки не можуть народитися раніше за своїх дітей або людина не може спочатку померти, а потім народитися.

Пояснимо на простому прикладі, чому послідовність двох подій, одна з яких є причиною другої, а друга, відповідно, є наслідком першої, залишається незмінною в будь якій ICB. Іншими словами, для двох подій A_1 та A_2 , друга з яких є наслідком першої, завжди в (9.30) $\Delta t' > 0$. Нехай подія A_1 – це постріл з пістолета, а подія A_2 – це влучення кулі в мішень. В ICB K пістолет має просторову координату z_1 , а постріл відбувається в момент часу t_1 (рис. 9.3). Мішень має просторову координату z_2 , а куля влучає в неї в момент часу t_2 . Зрозуміло, що $z_2 - z_1 = v_k \Delta t$, де v_k – середня швидкість кулі відносно системи K , а $\Delta t = t_2 - t_1$. Оскільки $Vv_k < c^2$, тоді з (9.30) маємо

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} v_k \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{Vv_k}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 0. \quad (9.31)$$

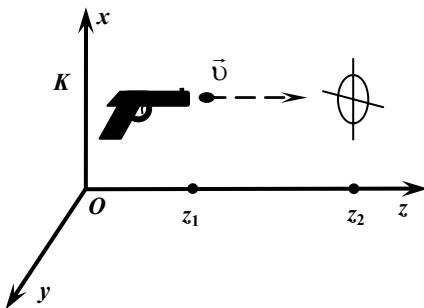


Рис. 9.3. До послідовності подій, пов'язаних причинно-наслідковим зв'язком

Скорочення просторових інтервалів. Тепер розглянемо довжину просторових інтервалів у різних ICB. Нехай деякий стрижень перебуває у спокії в ICB K' . Його довжину в цій системі можна подати у вигляді $l_0 = z'_2 - z'_1$, тобто як різницю координат кінця і початку стрижня (систему координат обрано так, щоб її вісь OZ була паралельна стрижню). Довжину стрижня в деякій

ICB K , відносно якої система відліку K' рухається зі швидкістю v у напрямку, паралельному стрижню, визначатимемо так само, як і в системі K' , тобто як різницю координат кінця і початку стрижня, визначених в один і той самий момент часу, $l = z_2 - z_1$ (рис. 9.4). Зв'язок між l і l_0 знайдемо, застосовуючи формулу (9.22) прямого перетворення для координати z :

$$l_0 = z'_2 - z'_1 = \frac{z_2 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{z_1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.32)$$

або

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (9.33)$$

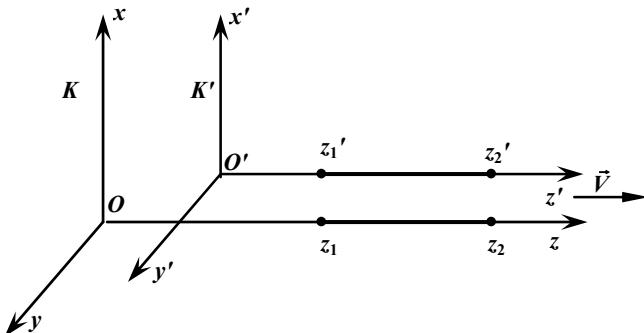


Рис. 9.4. До процедур визначення довжини стрижня

Таким чином, відповідно до формулі (9.33) довжина стрижня l у будь-якій ICB, що рухається відносно власної ICB, в якій цей стрижень перебуває у спокої, має власну довжину l_0 , є завжди меншою від власної довжини, $l < l_0$. Таке скорочення просторових відрізків називають скороченням Лоренца–Фітцджеральда. Відповідно, у стільки ж разів зменшаться всі повздовжні (уздовж напрямку руху) розміри тіла, що рухається. Підкреслимо, коли йдеться про скорочення розмірів тіла, то маємо на увазі, що вимірювання цих розмірів за прийнятою процедурою дасть саме такий результат. Питання про те, якою буде видима форма тіла, що рухається, потребує окремого розгляду, з

урахуванням різного запізнення світлових сигналів, що надходять до спостерігача від різних точок тіла і формують його видиме зображення. Зазначимо, що ефект скорочення повз涓ніх розмірів відносний: спостерігач, що перебуває в системі K' , вимірює таке саме (у $\sqrt{1-\beta^2}$ разів) скорочення довжини стрижня, нерухомого відносно ICB K .

Уповільнення часу. Із наведеного випливає, що лише події, які відбуваються в одній і тій самій точці простору, можуть бути одночасними в усіх ICB. Нехай у точці простору, що має просторову координату z'_0 , у деякій ICB K' відбувається процес A , який своїм початком має подію $A_1(z'_0, t'_1)$, а кінцем – подію $A_2(z'_0, t'_2)$. Тоді тривалістю процесу A в системі відліку K' будемо вважати часовий інтервал $\tau_0 = t'_2 - t'_1$.

У той самий спосіб визначимо тривалість процесу A в іншій ICB K , тобто знайдемо часовий інтервал $\tau = t_2 - t_1$ між подіями A_1 та A_2 у системі відліку K . Для визначення часу t у системі K за часом t' у системі K' використаємо формулу зворотного перетворення Лоренца (9.25) та отримаємо

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

або

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.34)$$

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

Таким чином, тривалість процесу A мінімальна в системі K' : в усіх інших ICB тривалість цього самого процесу більша. Тому іноді кажуть про збільшення інтервалів часу або про його

уповільнення. Дійсно, із тривалістю процесу A можна порівнювати тривалість інших процесів. Якщо процес A періодично повторюється, то його можна використовувати для вимірювання часу (як годинник). Проте так званий власний час τ_0 , виміряний у системі K' , завжди буде менший, ніж час τ , виміряний за допомогою того самого процесу в системі відліку, що рухається відносно системи K' . Зокрема, для годинника, вміщеного в системі K' у початку координат ($z' = 0$), безпосередньо із (9.23) випливає співвідношення

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9.35)$$

тобто рухомий годинник з погляду спостерігача, що перебуває в системі відліку K , відстає. Зрозуміло, що уповільнення часу відносне: для спостерігача, що перебуває в системі відліку K' , годинник, який перебуває у стані спокою відносно ICB K , буде відставати на таку саму величину.

Хоча розміри одних і тих самих тіл або тривалості одних і тих самих процесів (визначені в різних системах відліку) різні, не слід робити висновок, що деякі з них правильні, а деякі ні. Усі вони коректно визначені й однаково "правильні", тобто рівноправні, як рівноправні всі ICB. Труднощі в сприйнятті такої об'єктивної (незалежної від нас) реальності пов'язані винятково з нашим практичним повсякденним досвідом спостереження рухів з малими швидкостями ($v \ll c$), які цілком логічно дозволяють вважати поняття довжини та проміжків часу абсолютною, тобто такими, що не залежать від системи відліку. Насправді вони не є такими: абсолютною є поняття подій. Тут може бути доречною така аналогія: координати вершин трикутника на площині залежать від вибору системи координат, і тому вони не абсолютно, хоча сам трикутник як геометричний об'єкт є абсолютною поняттям.

Наслідки перетворень Лоренца неодноразово експериментально перевірені й надійно підтвердженні відомими дослідами та спостереженнями. Наприклад, як скорочення розмірів тіл у напрямку їх руху, так і уповільнення часу являють собою фізичну реальність, а не якісь ілюзії спостерігачів, про яких ми згадували винятково для того, щоб викласти суть справи більш наочно і зрозуміло.

Розглянемо лише один яскравий приклад застосування наслідків перетворень Лоренца, який став уже хрестоматійним: пояснення факту реєстрації поблизу земної поверхні мюонів – нестабільних частинок, які народжуються у верхніх шарах атмосфери Землі на висоті порядку 20–30 км при взаємодії космічного випромінювання з атмосферою (рис. 9.5). Проблема полягає в тому, що середній час життя мюонів, виміряний у лабораторії, становить $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ с і, на перший погляд, за цей час навіть якби мюони рухалися зі швидкістю світла c , вони змогли б пролетіти лише 600 м і не мали б ніяких шансів досягти земної поверхні. Проте зауважимо, що шлях 20÷30 км, який необхідно подолати мюону після народження виміряний у системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі. Мюон рухається відносно цієї системи відліку з великою швидкістю, яка близька до швидкості світла. Це означає, що система відліку, пов'язана з поверхнею Землі, рухається з такою самою швидкістю відносно системи відліку, у якій мюон перебуває у спокої.

Отже, тривалість життя мюона (проміжок часу між подіями його народження та розпаду) у системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі, необхідно визначати за формулою $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ і за достатньо великих швидкостей руху мюона $\tau \gg \tau_0$, і тому добуток $V_\mu \cdot \tau = l > 20 \div 30$ км ! Таким чином, ми пояснили спостережуваний факт уповільненням часу в системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі, порівняно з власною системою відліку мюона. Можна пояснити той самий дослідний факт і скороченням просторових інтервалів. Дійсно, нехай у системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі, відстань l_0 від місця народження мюонів до поверхні Землі дорівнює 30 км . Довжина цього са-

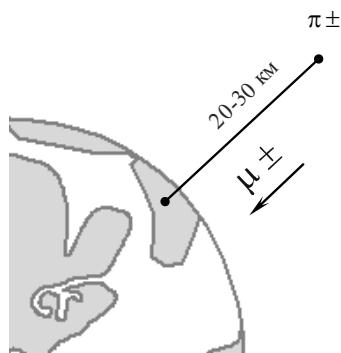


Рис. 9.5. Реєстрація мюонів на поверхні Землі

мого просторового відрізка від місця народження мюонів до поверхні Землі, визначена у власній системі відліку мюона (там, де його час життя τ_0 максимальний, $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ с) дорівнює $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. За деяких достатньо великих швидкостей руху мюона ця довжина шляху l може стати достатньо малою, для того, щоб мюон подолав її за час $2 \cdot 10^{-6}$ с.

На перший погляд пояснення одного й того самого експериментального факту двома різними способами, один раз уповільненням часу, а другий раз – скороченням просторових інтервалів, може здатися дивним. Проте, якщо пригадати, що ці два наслідки перетворень Лоренца, як і самі перетворення Лоренца випливають з інваріантності інтервалу між двома подіями (народженням мюона та його реєстрацією) при переході від однієї ICB K до іншої ICB K' , а саме, $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = inv$, то причин для здивування немає. Наприклад, якщо при переході від однієї ICB до іншої зростає t_{12} , то автоматично має зменшуватись величина l_{12} , і навпаки. Для двох розглянутих вище крайніх випадків маємо: 1) у власній системі відліку мюона, відносно якої він не рухається, $S_{12}^2 = c^2 (\tau_{12})_0^2 - (l_{12})_0^2 (1 - \beta^2)$; 2) у системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі, $S_{12}^2 = c^2 (\tau_{12})_0^2 (1 - \beta^2)^{-1} - (l_{12})_0^2$, де $(\tau_{12})_0$ – проміжок часу між народженням мюона та його реєстрацією, визначений у власній системі відліку мюона, $(l_{12})_0$ – відстань від точки народження мюона до точки його реєстрації, визначена у системі відліку, пов'язаній з поверхнею Землі, а β входить відносна швидкість цих двох систем відліку.

Релятивістська¹ формула додавання швидкостей. Оскільки при переході від однієї ICB K до іншої ICB K' змінюються як просторові, так і часові інтервали, то слід розглянути зміну вектора швидкості частинки, визначеного в системі K при переході до системи K' . Будемо виходити з означень вектора швидкості:

¹ Релятивістський означає той, що стосується теорії відносності (від лат. *relative* –відносний).

| У системі K | У системі K' |
|---|--|
| $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, | $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$, |
| $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$. | $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $v'_z = \frac{dz'}{dt'}$, $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$. |

Знайдемо зі зворотних перетворень Лоренца у формі (9.24) і (9.25) зв'язок між диференціалами, що входять до формул швидкостей:

$$dx = dx', \quad dy = dy',$$

$$dz = \frac{dz' + Vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dz'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Їх підстановка до формул швидкостей та їх компонент дає

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt' + \frac{V}{c^2}dz'} = \frac{\frac{dx'}{dt'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dz'}{dt}} = \frac{v'_x\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_z}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_z}{c^2}}$$

та

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dz' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dz'} = \frac{v'_z + V}{1 + \frac{Vv'_z}{c^2}}.$$

Отже, компоненти векторів швидкостей частинки відносно ICB K та K' пов'язані між собою співвідношеннями:

$$v_x = \frac{v'_x\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_z}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_z}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z + V}{1 + \frac{Vv'_z}{c^2}}$$

або оберненими перетвореннями:

$$v'_x = \frac{v_x \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_z}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vv_z}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z - V}{1 - \frac{Vv_z}{c^2}}.$$

Таким чином, якщо система відліку K' рухається зі швидкістю $V = v_1$ відносно системи відліку K , а деяка точка рухається відносно системи відліку K' зі швидкістю $v'_z = v_2$, то вираз для швидкості цієї точки відносно системи відліку K матиме вигляд

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (9.36)$$

Цю формулу називають *релятивістською формuloю додавання швидкостей*. За малих швидкостей вона переходить у формулу додавання швидкостей, яка успішно використовується в ньютонівській механіці, $v_3 = v_1 + v_2$. Особливість релятивістської формулі полягає в тому, що при додаванні будь-яких швидкостей $v_1, v_2 < c$ швидкість v_3 не може перевищувати швидкість

світла c . Наприклад, якщо $v_1 = v_2 = \frac{c}{2}$, то $v_3 = \frac{4}{5}c < c$, а за

$v_1 = v_2 = c$ відносна швидкість $v_3 = c$.

Релятивістську формулу додавання швидкостей v_1 та v_2 можна отримати також шляхом множення двох матриць перетворень Лоренца (впр. 9.3), тобто $L(\beta_3) = L(\beta_2)L(\beta_1)$, де $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$, $\beta_3 = v_3/c$.

Ефект Допплера для електромагнітних хвиль. Електромагнітні хвилі, на відміну від пружних хвиль, розглянутих у підрозд. 8.2, можуть поширюватись у вільному від речовини просторі, який часто називають вакуумом¹, оскільки вони є збуреннями самого електромагнітного поля, а не збуреннями речовини.

¹ Іноді вживають термін *фізичний вакуум*, маючи на увазі, що в просторі завжди існують різноманітні поля принаймні в найнижчому (основному стані), наприклад електромагнітне поле.

Їх швидкість у вільному просторі дорівнює швидкості світла $c = 299\,792\,458$ м/с, яка є фундаментальною фізичною константою та єдиною фізичною сталою в основних рівняннях електродинаміки. Вона не залежить від системи відліку, тобто однаакова для будь-якого спостерігача незалежно від швидкості, з якою цей спостерігач рухається, і від напрямку руху¹. Усе це призводить до того, що ефект Допплера для електромагнітних хвиль має принципові відмінності від ефекту Допплера для пружних хвиль, розглянутого в п. 8.2.6.

Нехай у точку спостереження P надходить електромагнітна хвиля від джерела випромінювання S , яке рухається відносно точки спостереження P зі стороною швидкістю \vec{V} (рис. 9.6).

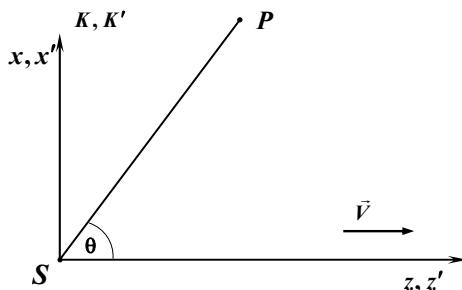


Рис. 9.6. До походження ефекту Допплера для електромагнітних хвиль

Рівняння напруженості електричного поля електромагнітної хвилі $\vec{E}(\vec{r}, t)$ у власній системі відліку K джерела S можна подати у вигляді

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}),$$

або

¹ Вільний від речовини простір є ізотропним і залишається таким для будь-якої системи відліку, в якій поширяється електромагнітна хвиля. Якщо ж є матеріальне (більш, точно, речовинне) середовище, то навіть, якщо воно само по собі ізотропне, то в задачі про поширення електромагнітних хвиль у такому середовищі, ізотропія спостерігатиметься лише в тій системі відліку, в якій це середовище перебуватиме у стані спокою. У системі відліку, відносно якої середовище рухається, виникає анізотропія щодо поширення електромагнітних хвиль, яка ускладнює пояснення ефекту Допплера при поширенні світла в речовині.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(2\pi v t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

де початкову фазу обрано такою, що дорівнює нулю. Оскільки відповідно до постулатів СТВ в усіх ICB перебіг фізичних явищ однаковий, то в будь-якій іншій ICB, зокрема у власній ICB спостерігача K' , рівняння напруженості електричного поля цієї самої електромагнітної хвилі матиме вигляд

$$\vec{E}(\vec{r}', t') = \vec{E}_0 \cos(2\pi v' t' - \vec{k}' \cdot \vec{r}').$$

Як нулі напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ та $\vec{E}(\vec{r}', t')$, так і їх максимальні відхилення від нуля, за відстанню між якими в часі й просторі можна визначати частоти v (v') та довжини хвиль λ (λ') у системах відліку K та K' , відповідно, визначаються винятково фазою хвилі. Це означає, що фаза хвилі має бути незмінною при переході від однієї ICB до іншої, тобто інваріантною щодо перетворень Лоренца (9.22а) – (9.25б):

$$2\pi v t - \vec{k} \cdot \vec{r} = 2\pi v' t' - \vec{k}' \cdot \vec{r}',$$

або

$$2\pi v t - k(\vec{n} \cdot \vec{r}) = 2\pi v' t' - k'(\vec{n}' \cdot \vec{r}),$$

або

$$\begin{aligned} 2\pi v t - 2\pi \frac{v}{c} (x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z) &= \\ &= 2\pi v' t' - 2\pi \frac{v'}{c} (x' \cos \theta'_{x'} + y' \cos \theta'_{y'} + z' \cos \theta'_{z'}), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} vt - \frac{v}{c} (x \cos \theta_x + y \cos \theta_y + z \cos \theta_z) &= \\ &= v' t' - \frac{v'}{c} (x' \cos \theta'_{x'} + y' \cos \theta'_{y'} + z' \cos \theta'_{z'}), \end{aligned}$$

де використано співвідношення $\vec{k} = k \frac{\vec{k}}{k} = k \vec{n} = 2\pi \frac{v}{c} \vec{n}$.

Оберемо так орієнтацію осей декартових систем координат XYZ та $X'Y'Z'$, пов'язаних із системами відліку K та K' , як це було зроблено при одерженні формул перетворень Лоренца у вигляді (9.22) – (9.25) (рис. 9.1). За такого вибору

$x' = x$, $y' = y$. У загальному випадку поширення електромагнітної хвилі в системі K , коли хвильовий вектор \vec{k} неколінеарний вектору відносної швидкості $\vec{V} \parallel OZ$ систем відліку K та K' , наприклад, коли вектор \vec{k} лежить у площині XZ , умова рівності фаз набуває вигляду

$$cvt - v(x \sin \theta_z + z \cos \theta_z) = cv't' - v'(x' \sin \theta'_{z'} + z' \cos \theta'_{z'}) .$$

Змінні t, z у лівій частині останньої рівності пов'язані зі змінними t', z' у її правій частині перетвореннями Лоренца (9.24a) – (9.24б). Отже, ліву частину цієї рівності можна перетворити так:

$$\begin{aligned} cvt - v(x \sin \theta_z + z \cos \theta_z) &= \\ &= cv \frac{t' + \frac{V}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}} - vx' \sin \theta_z - v \frac{z' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \theta_z = \\ &= v \frac{c - V \cos \theta_z}{\sqrt{1-\beta^2}} t' - vx' \sin \theta_z - v \frac{\cos \theta_z - \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} z', \quad \text{де } \beta = \frac{V}{c}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &v \frac{c - V \cos \theta_z}{\sqrt{1-\beta^2}} t' - vx' \sin \theta_z - v \frac{\cos \theta_z - \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} z' = \\ &= cv't' - v'x' \sin \theta'_{z'} - v'z' \cos \theta'_{z'}. \end{aligned}$$

Порівняння коефіцієнтів при незалежній змінній t' у правій та лівій частинах останньої рівності дає зв'язок між частотами електромагнітної хвилі v та v' у системах відліку K та K' :

$$cv' = v \frac{c - V \cos \theta_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

або

$$v' = v \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = v \frac{1 - \beta \cos \theta_z}{\sqrt{1-\beta^2}} . \quad (9.37a)$$

Порівняння коефіцієнтів при незалежній змінній z' у правій та лівій частинах тієї самої рівності дає зв'язок між кутами θ_z та $\theta'_{z'} \nu'$ у системах відліку K та K' :

$$v' \cos \theta'_{z'} = v \frac{\cos \theta_z - \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \cos \theta'_{z'} = \frac{v}{v'} \frac{\cos \theta_z - \frac{V}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

і після підстановки v'/v з (9.37) остаточно отримаємо¹

$$\cos \theta'_{z'} = \frac{\cos \theta_z - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_z} = \frac{\cos \theta_z - \beta}{1 - \beta \cos \theta_z}. \quad (9.38a)$$

Аналогічно, застосовуючи формули перетворення Лоренца (9.22a) – (9.23б) до змінних t', z' у правій частині умови рівності фаз хвилі, визначених у системах відліку K та K' , можна дістати вирази

$$v = v' \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \theta_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v' \frac{1 + \beta \cos \theta_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.37b)$$

та

$$\cos \theta'_{z'} = \frac{\cos \theta_z + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_z} = \frac{\cos \theta_z + \beta}{1 - \beta \cos \theta_z} \quad (9.38b)$$

Зауважимо, що зміна частоти для електромагнітних хвиль залежить лише від проекції V вектора відносної швидкості джерела і приймача на напрямок вектора \vec{k} , причому:

– якщо ця проекція **додатна** ($0 \leq \theta_z \leq \pi/2 \Rightarrow 1 \geq \cos \theta_z \geq 0$), то частота v' , яку сприймає приймач у точці P , **менша за частоту** v , яку випромінює джерело S ;

¹ Ця формула описує явище так званої *аберациї світла*, яке вперше спостерігав у 1727 р. англійським астрономом Дж. Бредлі (Bradley або, за застарілою транслітерацією – Брадлей) (див. Г.С. Ландсберг. Оптика).

– якщо ця проекція **від'ємна**

$$(\pi/2 \leq \theta_z \leq \pi \Rightarrow 0 \geq \cos \theta_z \geq -1),$$

то частота v' , яку сприймає приймач у точці P **менша за частоту** v , яку випромінює джерело S .

Це суттєво відрізняє ефект Допплера для електромагнітних хвиль від ефекту Допплера для пружних хвиль, при якому до формул (8.206) – (8.211) для частоти **входять окремо проекції швидкостей приймача** v_p і **джерела** v_d **відносно пружного середовища**. Розглянемо два граничних випадки спостереження ефекту Допплера для електромагнітних хвиль.

Поздовжній ефект Допплера. Із рівності (9.38) випливає, що за умови $\theta'_{z'} = 0$ також і $\theta_z = 0$. Тоді відносна швидкість джерела і приймача напрямлена вздовж лінії, що їх з'єднує, і, відповідно $\vec{V} \parallel \vec{k}$, формула (9.37a) набуває вигляду

$$v' = v \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = v \frac{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{(1-\beta)\sqrt{1+\beta}}} = v \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}.$$

Вона описує *поздовжній ефект Допплера*, який полягає в залежності частоти v' , яку сприймає приймач випромінювання в точці спостереження P , від відносної швидкості V зміни відстані між джерелом і приймачем випромінювання.

За малих швидкостей $V \ll c$ ($\beta \ll 1$) формула (9.37a) значно спрощується: $v' \approx v(1-\beta) = v(1-V/c)$ і набуває такого самого вигляду, як і формула ефекту Допплера для звукових хвиль, яку можна отримати із формул (8.208) (п. 8.2.6), і вона пов'язує частоту v' , яку реєструє рухомий приймач звукових хвиль, що віддаляється від джерела звукових хвиль із частотою v_0 нерухомого відносно пружного середовища (повітря), а саме $v' = v_0(1-v_p/v)$. Для звукових хвиль ця формула є точною. Частота звукових хвиль v' для цього випадку зменшується за лінійним законом при збільшенні швидкості приймача і стає рівною нулю за $v_p = v$. У випадку електромагнітних хвиль останнє неможливо. Ця принципова відмінність пов'язана з тим, що електромагнітні хвилі є збуреннями самого електромагнітного по-

ля, а не збуреннями якогось пружного середовища, наприклад, гіпотетичного ефіру, за допомогою якого чудово пояснювались оптичні явища доти, доки не постала електродинаміка Максвелла і була встановлена електромагнітна природа світла, яке поширюється в будь якій ICB зі скінченою швидкістю c .

Ефект Допплера для світлових хвиль уперше для визначення швидкості небесних тіл застосував Г. Фогель (1861), а його перше експериментальне кількісне підтвердження було отримане також з астрономічних вимірювань зсуву спектральних ліній у спектрах випромінювання, отриманих від "східного" та "західного" країв Сонця, яка відповідала лінійній швидкості точок на периферії сонячного диска $2,3 \text{ км/с}$, тоді як спостереження за переміщенням сонячних плям давало 2 км/с . У 20-х роках ХХ ст. доволі складні лабораторні досліди з рухомими випромінювачами світла (напр., атомами водню, що рухаються в катодних трубках зі швидкостями порядку $10^{-4} \text{--} 10^{-3} \text{ с}$) у напрямку приймача з високою точністю підтвердили передбачення теорії¹.

Поперечний ефект Допплера. Якщо спостерігати випромінювання рухомих джерел (напр., пучка атомів, що випромінюють світло) під прямим кутом $\theta'_z = \pm\pi/2 \Rightarrow \cos\theta'_z = 0$ щодо напрямку їх відносної швидкості, то з (9.38) випливає, що $\cos\theta_z = V/c$. Підстановка цього значення до (9.37) дає вираз

$$v' = v \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Отже, поперечний ефект Допплера полягає в зменшенні спостережуваної частоти v' електромагнітної хвилі, що надходить до приймача від джерела, що рухається в перпендикулярному напрямку спостереження і випромінює хвилі із частотою v відповідно до формули

$$v' = v \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (9.39)$$

¹ Докладно див. Ландсберг Г.С. Оптика.

яка за малих швидкостей $V \ll c$ ($\beta \ll 1$) переходить у наближену формулу $v' = v(1 - \beta^2/2)$.

Для звукових та інших пружних хвиль поперечний ефект Допплера принципово відсутній. Походження поперечного ефекту Допплера для електромагнітних хвиль можна пояснити уповільненням часу в системах відліку, що рухаються відносно власної системи відліку джерела електромагнітних хвиль згідно із формuloю (9.34). Експериментальне спостереження поперечного ефекту Допплера являє собою ще більш складну задачу, оскільки при досяжних у лабораторних експериментах швидкостях атомів-джерел світла відношення $\beta = V/c \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ поздовжній ефект є ефектом першого порядку за $\beta = V/c$ (пропорційним $\beta = V/c$), а поперечний ефект Допплера є ефектом другого порядку за $\beta = V/c$ (пропорційним $\beta^2 = (V/c)^2$). Тому поперечний ефект Допплера вперше спостерігався значно пізніше за поздовжній у 40-х роках минулого століття. Його іноді наводять як перше експериментальне підтвердження уповільнення часу¹.

Таким чином, з попереднього випливає, що пояснення ефекту Допплера для електромагнітних хвиль, який також називають релятивістським ефектом Допплера, спирається на класичний аналог зміни частоти при відносному русі джерела і приймача хвиль, відомого з акустики, та на наслідки СТВ, про що нагадує наявність параметра $\beta = V/c$ у всіх точних формулах, що описують як поздовжній, так і поперечний ефекти.

¹ Необхідно чітко усвідомлювати, що і уповільнення часу (зростання часових інтервалів), і скорочення просторових інтервалів є наслідками інваріантності інтервалу й не існують незалежно один від одного. Один і той самий експериментальний факт можна пояснити як уповільненням часу, так і скороченням просторових інтервалів. Прикладом може бути наведене вище пояснення факту реєстрації мюонів поблизу земної поверхні.

9.2. Взаємозв'язок імпульсу, маси та енергії у СТВ

Той факт, що формула перетворення швидкості при переході від однієї ICB K до іншої ICB K' у СТВ суттєво відрізняється від відповідної формули ньютонівської механіки, спонукає з'ясувати питання, як саме при такому переході перетворюються такі залежні від швидкості механічні величини ньютонівської механіки, як імпульс і кінетична енергія, які в ньютонівській механіці за певних умов у кожній ICB залишаються сталими (зберігаються) як для окремої частинки, так і для системи частинок.

Розглянемо абсолютно непружне лобове зіткнення двох однакових частинок у ICB K та ICB K' . Нехай відносно ICB K ці дві частинки рухаються з одинаковими за величиною, але протилежними за напрямками швидкостями ${}^K\vec{v}_1 = \vec{v}_0$ та ${}^K\vec{v}_2 = -\vec{v}_0$, паралельними осі OZ системи координат XYZ , початок якої нерухомий відносно ICB K (рис. 9.7, а). Тоді закон збереження імпульсу для системи цих двох частинок в ICB K можна подати як

$${}^K\vec{p}_1 + {}^K\vec{p}_2 = {}^K\vec{p}'_1 + {}^K\vec{p}'_2, \quad (9.40)$$

де ${}^K\vec{p}_1$, ${}^K\vec{p}_2$ – ньютонівські імпульси частинок у ICB K до зіткнення, а ${}^K\vec{p}'_1$, ${}^K\vec{p}'_2$ – ньютонівські імпульси частинок у ICB K після зіткнення. Оскільки в ICB K імпульс системи (9.40) дорівнює нулю як до зіткнення, так і після зіткнення

$$\begin{aligned} m{}^K\vec{v}_1 + m{}^K\vec{v}_2 &= m(\vec{v}_0 - \vec{v}_0) = 0, \\ m{}^K\vec{v}'_1 + m{}^K\vec{v}'_2 &= 2m{}^K\vec{v}' = 0, \end{aligned} \quad (9.41)$$

то в результаті абсолютно непружного зіткнення обидві частинки перебуватимуть у стані спокою відносно системи відліку K :

$${}^K\vec{v}'_1, {}^K\vec{v}'_2 = \vec{v}' = 0. \quad (9.42)$$

Той самий процес абсолютно непружного зіткнення двох частинок у ICB K' матиме такий вигляд: на першу частинку, що до зіткнення перебуває у спокої, ${}^{K'}\vec{v}_1 = 0$, налітає друга ча-

стинка, яка має швидкість ${}^K\vec{v}_2 = -2\vec{v}_0$ (рис. 9.7, б), а після зіткнення частинки рухаються разом. Отже, сумарний імпульс системи частинок, визначений в ICB K' , до зіткнення є $m{}^{K'}\vec{v}_1 + m{}^{K'}\vec{v}_2 = 0 + m(-2\vec{v}_0) = -2m\vec{v}_0$, а після зіткнення $-2m\vec{v}_0 = 2m{}^{K'}\vec{v}'$. Із закону збереження імпульсу випливає $-2m\vec{v}_0 = 2m{}^{K'}\vec{v}'$, звідки визначаємо вектор швидкості частинок після зіткнення ${}^{K'}\vec{v}' = -\vec{v}_0$.

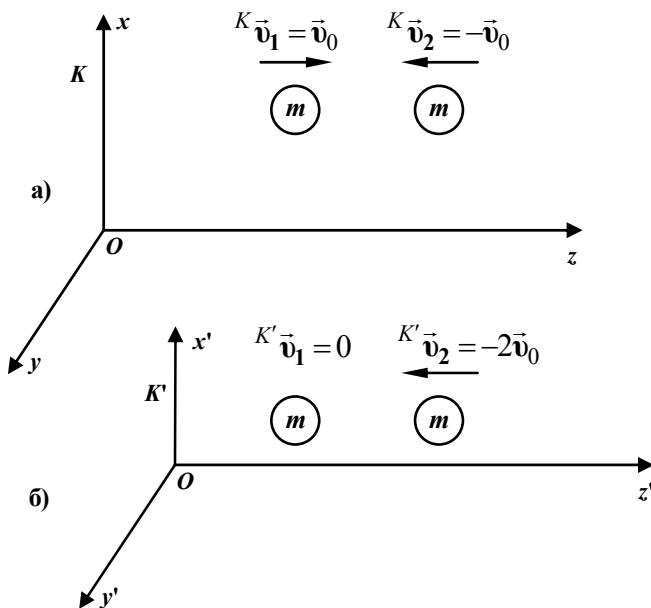


Рис. 9.7. Абсолютно непружене лобове зіткнення двох одинакових частинок у ICB K (а) та ICB K' (б)

Швидкості частинок у ICB K' можна також знайти, застосувавши релятивістську формулу перетворення швидкостей (9.36) до швидкостей частинок у системі відліку K , і отримати таким чином їх швидкості в ICB K' до зіткнення

$$\begin{aligned} {}^{K'}\vec{v}_1 &= \frac{{}^K\vec{v}_1 + \vec{V}}{1 + \frac{{}^K\vec{v}_1 \cdot \vec{V}}{c^2}} = \frac{-\vec{v}_0 - \vec{v}_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} = 0, \\ {}^{K'}\vec{v}_2 &= \frac{{}^K\vec{v}_2 + \vec{V}}{1 + \frac{{}^K\vec{v}_2 \cdot \vec{V}}{c^2}} = \frac{-\vec{v}_0 - \vec{v}_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{-2\vec{v}_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (9.43)$$

та після зіткнення

$${}^{K'}\vec{v}' = \frac{{}^K\vec{v} + \vec{V}}{1 + \frac{{}^K\vec{v} \cdot \vec{V}}{c^2}} = \frac{0 - \vec{v}_0}{1 + \frac{0 \cdot (-\vec{v}_0)}{c^2}} = -\vec{v}_0. \quad (9.44)$$

Якщо тепер знову використати ньютонівський вираз $\vec{p} = m\vec{v}$ для визначення імпульсів частинок у системі відліку K' до і після зіткнення через щойно знайдені їх швидкості (9.43) і (9.44), то отримаємо сумарний імпульс системи частинок до зіткнення у вигляді

$${}^{K'}\vec{p}_1 + {}^{K'}\vec{p}_2 = m{}^{K'}\vec{v}_1 + m{}^{K'}\vec{v}_2 = \frac{-2m\vec{v}_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}}, \quad (9.45)$$

а після зіткнення

$$2m{}^{K'}\vec{v}' = -2m\vec{v}_0. \quad (9.46)$$

Виявляється, що для ньютонівських імпульсів системи двох частинок, в які підставлено швидкості (9.43) і (9.44), знайдені із застосуванням релятивістського закону додавання швидкостей (9.36) закон збереження імпульсу не виконується, оскільки

$$\frac{-2m\vec{v}_0}{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} \neq -2m\vec{v}_0. \quad (9.47)$$

Таким чином, з одного боку, відповідно до принципу відносності механіки в обох розглядуваних ICB абсолютно непружне зіткнення відбувається відповідно до одних і тих самих законів, а з іншого, виявляється, що при застосуванні релятивістського закону додавання швидкостей цей принцип порушується. При цьому із формули (9.47) видно, що це порушення непомітне за

малих швидкостей відносного руху (частинок або систем відліку, що в нашому випадку фактично є одне й те саме).

Зауважимо, що нерівність (9.47) завдячує застосуванню різних формул для визначення швидкості другої частинки в системі відліку K' . Права частина нерівності (9.47) походить від швидкості другої частинки $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_0$, записаною нами на підставі класичної формули додавання швидкостей. Натомість ліва частина нерівності (9.47) походить від швидкості другої частинки, знайденої за релятивістською формулою перетворення швидкостей.

Отже, постає альтернатива: або при розгляді рухів з величими швидкостями відмовитися від застосування закону збереження імпульсу, який у механіці Ньютона, як і інші закони збереження, є надзвичайно продуктивним і зручним інструментом, або зробити спробу врятувати цей інструмент за рахунок такого удосконалення формули для імпульсу частинки, яке дозволило б використовувати її і за великих швидкостей¹. Виявляється, що введення так званого *релятивістського імпульсу* частинки

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.48)$$

дозволяє використовувати закон збереження імпульсу в його звичній формі за будь-яких швидкостей $v < c$. Переконаємося у цьому на прикладі розглядуваного абсолютно непружного зіткнення двох частинок.

Релятивістський закон збереження імпульсу в ICB K має вигляд

$$\frac{m^K \vec{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{(K \vec{v}_1)^2}{c^2}}} + \frac{m^K \vec{v}_2}{\sqrt{1 - \frac{(K \vec{v}_2)^2}{c^2}}} = \frac{2m^K \vec{v}'}{\sqrt{1 - \frac{(K \vec{v}')^2}{c^2}}} \quad (9.49)$$

або після підстановки до (9.49) $K \vec{v}_1 = \vec{v}_0$, $K \vec{v}_2 = -\vec{v}_0$:

¹ Аналогічна ситуація виникла при запису основного рівняння динаміки руху частинки відносно НСВ, коли звична форма рівняння другого закону Ньютона була збережена ціною введення до розгляду сил інерції (підрозд. 4.2).

$$\frac{m\vec{v}_0}{\sqrt{1-\frac{(\vec{v}_0)^2}{c^2}}} + \frac{m(-\vec{v}_0)}{\sqrt{1-\frac{(-\vec{v}_0)^2}{c^2}}} = \frac{m(\vec{v}_0 - \vec{v}_0)}{\sqrt{1-\frac{(\vec{v}_0)^2}{c^2}}} = 0 = \frac{2m^K \vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{({}^K \vec{v}')^2}{c^2}}}, \quad (9.50)$$

звідки ${}^K \vec{v}' = 0$, тобто обидві частинки перебуватимуть у спокої.

Релятивістський закон збереження імпульсу в ICB K' :

$$\frac{m^K' \vec{v}_1}{\sqrt{1-\frac{({}^K' \vec{v}_1)^2}{c^2}}} + \frac{m^K' \vec{v}_2}{\sqrt{1-\frac{({}^K' \vec{v}_2)^2}{c^2}}} = \frac{2m^K' \vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{({}^K' \vec{v}')^2}{c^2}}}. \quad (9.51)$$

Після підстановки до (9.51) ${}^K' \vec{v}_1 = 0$, ${}^K' \vec{v}_2 = -2\vec{v}_0$ одержимо

$$\frac{m \cdot 0}{\sqrt{1-\frac{0}{c^2}}} - \frac{2m\vec{v}_0}{\sqrt{1-\frac{(2\vec{v}_0)^2}{c^2}}} = 0 = \frac{2m^K' \vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{({}^K' \vec{v}')^2}{c^2}}}, \quad (9.52)$$

звідки випливає ${}^K' \vec{v}' = -\vec{v}_0$, що повністю узгоджується з величиною вектора швидкості частинок після зіткнення, отриманою вище безпосередньо із закону збереження імпульсу в ICB K' .

Розглядаючи у двох так само обраних ICB K та K' абсолютно пружне зіткнення двох частинок, можна дійти висновку, що вираз для кінетичної енергії частинки також має бути змінений, якщо розглядається рух зі швидкостями, які не можна вважати малими порівняно зі швидкістю світла.

Урешті-решт виявляється, що величини імпульсу й енергії частинки кожна окремо не залишаються незмінними при переході від однієї ICB до іншої так само, як просторовий відрізок і проміжок часу між двома подіями кожен окремо не залишаються незмінними при переході від однієї ICB до іншої. Натомість вони пов'язані співвідношенням

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \quad (9.53)$$

де

$$\vec{p} = \frac{\vec{v} E}{c^2}. \quad (9.54)$$

У цих виразах E – енергія, \vec{p} – імпульс, m – маса, \vec{v} – швидкість частинки, причому слід підкреслити, що маса m і швидкість \vec{v} частинки – це ті самі величини, з якими ми мали справу в ньютонівській механіці.

При переході від ICB K до ICB K' компоненти вектора імпульсу частинки \vec{p} та енергія частинки E перетворюються за формулами перетворень Лоренца, а саме:

| | |
|--|---|
| $p'_x = p_x,$ | $x' = x,$ |
| $p'_y = p_y,$ | $y' = y,$ |
| $p'_z = \frac{p_z - \frac{V}{c^2}E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.55)$ | $z' = \frac{z - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$ |
| $E' = \frac{E - Vp_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (9.56)$ | $t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$ |

тобто вони є компонентами деякого 4-вимірного вектора з компонентами $\left(p_x, p_y, p_z, i \frac{E}{c} \right)$ подібно до 4-вимірного вектора (x, y, z, ict) , який утворюють три компоненти радіус-вектора \vec{r} і час t . Для зручності порівняння перетворення компонент 4-вектора (x, y, z, ict) наведено вище поряд з перетвореннями компонент 4-вектора $\left(p_x, p_y, p_z, i \frac{E}{c} \right)$.

Аналогічно запису довжини 4-вектора (x, y, z, ict) у вигляді $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$ (див. (5.26а)), довжину 4-вектора $\left(p_x, p_y, p_z, i \frac{E}{c} \right)$ можна записати у вигляді $\frac{E^2}{c^2} - p^2$. Порівнюючи цей вираз із виразом (9.53), доходимо висновку, що ця дов-

жина дорівнює добутку квадрата маси на квадрат швидкості світла, тобто $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$. Оскільки квадрат довжини 4-вектора не змінюється (є інваріантним) при переході від однієї ICB до іншої, а швидкість світла c є інваріантом теорії, то і маса m також буде інваріантом СТВ, тобто вона не змінюється при переході від однієї ICB до іншої.

Зауважимо, що формули (9.53) і (9.54), які являють собою основні співвідношення СТВ для вільної частинки (системи частинок, тіла), не можуть бути безпосередньо "виведені" із формул ньютонівської механіки. Отримати їх можна різними шляхами: наприклад, піклуючись про виконання законів збереження імпульсу та енергії в різних СТВ або, сконструювавши 4-вектор $\left(p_x, p_y, p_z, i \frac{E}{c} \right)$. Зрештою, їх можна вгадати. Однак

наступним обов'язковим етапом має бути експериментальна перевірка цих співвідношень і наслідків із них. Тільки успішність такої перевірки може підтвердити їх справедливість.

При аналізі рівнянь (9.53) та (9.54) необхідно розглянути два принципово різні випадки: рух частинок зі швидкістю $v=c$ та рух частинок зі швидкістю $0 \leq v < c$. За $v=c$ із рівняння (9.54) маємо $pc=E$, а після підстановки в рівняння (9.53), отримуємо $m^2 c^4 = 0$. Таким чином, якщо частинка рухається зі швидкістю $v=c$, то її маса дорівнює нулю. Такі частинки називають *безмасовими*. Вони характеризуються своєю енергією E та імпульсом з модулем $p=\frac{E}{c}$. Справедливе й

обернене твердження: якщо $m=0$, то із рівнянь (9.53) та (9.54) з необхідністю випливає, що така частинка рухається зі швидкістю $v=c$ у будь-якій ICB. Тобто для безмасової частинки не можна знайти систему відліку, у якій вона перебуває у спокої. Прикладом безмасової частинки є фотон.

Частинки (тіла), які мають відмінну від нуля масу ($m \neq 0$), нехай навіть дуже малу, називають масивними. Вони не можуть рухатися зі швидкістю світла, оскільки при такому русі мали б

були нескінченими їх енергія та імпульс. Дійсно, підставляючи в рівняння (9.53) вираз для імпульсу із (9.54), дістанемо $E^2(1-\beta^2)=m^2c^4$, звідки

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (9.57)$$

де використано традиційне позначення $\beta = \frac{v}{c}$. Підставляючи (9.57) у (9.53), отримаємо вираз для імпульсу масивної частинки

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (9.58)$$

що збігається з виразом для імпульсу (9.48), який було введено раніше для "порятунку" закону збереження імпульсу при абсолютно непружному зіткненні двох частинок. Прикладами масивних частинок можуть бути електрони, нуклони (протони та нейтриони), а також атоми, іони, молекули та інші об'єкти, що складаються з електронів та нуклонів.

Із релятивістського виразу для повної енергії (9.57) масивної частинки (тіла) випливає надзвичайно важливий і кардинально відмінний від нерелятивістської механіки наслідок, який полягає в тому, що енергія частинки (тіла) не є нульовою навіть тоді, коли тіло перебуває у спокої, $\vec{v} = 0$ і, відповідно, $\vec{p} = 0$. Ця, так звана енергія спокою тіла, яку прийнято позначати як E_0 , пропорційна його масі

$$E_0 = mc^2. \quad (9.59)$$

Ця формула (А. Айнштайн, 1905) стала символом фізики ХХ ст. і найбільш вагомим та відомим практичним наслідком теорії відносності переважно завдяки ядерній енергетиці та ядерній зброї, хоча вона має універсальний характер і застосовна також до звичайної енергетики, заснованій на спалюванні вугілля чи газу, та вибухівки на кшталт динаміту чи тринітротолуолу.

Кінетичну енергію E_k можна знайти як різницю повної енергії E та енергії спокою E_0 :

$$E_k = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 = mc^2 \left[(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (9.60)$$

За малих швидкостей ($\beta = \frac{v}{c} \ll 1$) для кінетичної енергії частинки маємо

$$E_k = mc^2 \left[(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \approx mc^2 \left[(1 + \frac{1}{2}\beta^2) - 1 \right] = mc^2 \frac{v^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2}, \quad (9.61)$$

тобто вираз, добре відомий із ньютонівської механіки. Analogічно при граничному переході $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$ імпульс набуває вигляду $\vec{p} = m\vec{v}$ і, оскільки в ньютонівській механіці $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$, то можна зробити висновок, що маса тіла в механіці Ньютона і маса того самого тіла в СТВ – це одна й та сама величина.

Для уточнення формул (9.53) і (9.54) та поведінки величин, що входять до них, звернемось до графіків на рис. 9.8, які відображають залежність енергії E та швидкості v частинки від величини її імпульсу p . Для повноти картини там же показано і тривіальний графік $p = f(p)$, який являє собою пряму лінію, що проходить через початок координат.

Енергія частинки $E(p)$ відповідно до формули $E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ зростає зі збільшенням імпульсу, причому спочатку квадратично, $E \approx mc^2(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2}) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$, а за великих імпульсів p майже лінійно, $E \approx pc$. Пам'ятаючи про те, що в ньютонівській механіці енергія визначається з точністю до адитивної константи, можна зробити висновок, що ця квадратична ділянка завдячує ньютонівській формулі для кінетичної енергії, квадратичної за імпульсом $\frac{p^2}{2m}$, до якої додано сталу енергію спокою mc^2 . Область майже лінійного зростан-

ня енергії $E \approx pc$ є суто релятивістською¹: крива енергії масивної частинки $E(p)$ асимптотично наближається до прямої $E = pc$ (рис. 9.8, штрихова лінія), яка відповідає частинкам з нульовою масою, невідомим у ньютонівській механіці.

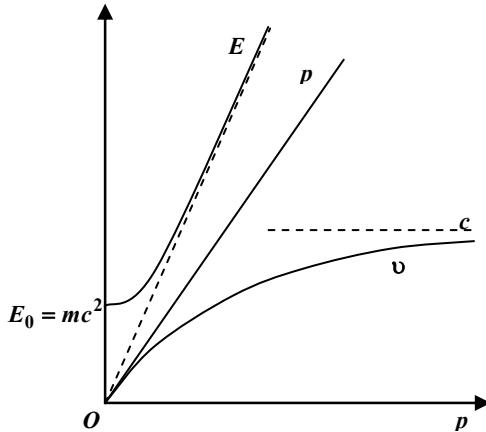


Рис. 9.8. Залежність енергії E та швидкості v частинки від величини її імпульсу p

Швидкість частинки v можна знайти безпосередньо із системи рівнянь (9.53) і (9.54):

$$v = \frac{pc}{E} = pc^2(p^2c^2 + m^2c^4)^{-\frac{1}{2}} = c \left(1 + \frac{m^2c^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.62)$$

За малих імпульсів p залежність (9.62) лінійна, тобто типова для ньютонівської механіки:

$$v \approx c \left(\frac{m^2c^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{p}{m},$$

а при збільшенні p вона стає сублінійною і за великих значень p асимптотично наближається до швидкості світла c . Швидкість безмасових частинок завжди дорівнює c . Добуток графіків

¹ Масивні частинки в цій області енергій та імпульсів називають *ультрарелятивістськими*.

$c = \text{const}$ і p дає залежність енергії безмасової частинки від імпульсу, зображену штриховою прямою.

Таким чином, за малих імпульсів p маємо нерелятивістську (ньютонівську) механіку з квадратичною залежністю енергії частинки від її імпульсу та з лінійним зв'язком між імпульсом і швидкістю. За великих імпульсів p масмо релятивістську механіку, у якій навпаки, спостерігається майже лінійна залежність енергії від імпульсу та нелінійний зв'язок між імпульсом і швидкістю.

У СТВ так само, як і в механіці Ньютона виконуються закони збереження енергії та імпульсу вільної частинки та замкненої системи частинок. Як і в ньютонівській механіці, у СТВ енергія та імпульс адитивні: повна енергія та імпульс системи, що складається з n вільних частинок, дорівнюють, відповідно

$$E = \sum_{i=1}^n E_i, \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (9.63)$$

У СТВ маса замкненої системи також зберігається, тобто не змінюється із часом, але, як буде показано далі, не має властивості адитивності.

Розглянемо систему, що складається із двох фотонів (безмасових частинок, маса кожної з яких $m = 0$), які розлітаються в протилежних напрямках і мають однакову енергію E . Сумарний імпульс такої системи дорівнює нулю, а її сумарна енергія (енергія спокою) дорівнює $2E$. Таким чином, маса системи двох фотонів, що розлітаються у двох прямо протилежних напрямках, відмінна від нуля й дорівнює $\frac{2E}{c^2}$, тобто адитивність маси не спостерігається. Отже, система двох фотонів матиме нульову масу лише тоді, коли вони рухаються в одному напрямку.

Можна узагальнити вищеприведене на систему, що складається із n вільних частинок. Маса такої системи визначається за формулою

$$m = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{c^2} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\vec{p}_i}{c} \right)^2}, \quad (9.64)$$

де $\sum_{i=1}^n E_i$ – сума енергій цих частинок, а $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ – векторна сума їх імпульсів.

Таким чином, маса системи вільних частинок суттєво залежить від характеру руху частинок, які до неї належать. Розміри такої системи можуть необмежено зростати із часом, оскільки рух таких частинок нічим не обмежений.

Розглянемо тепер масу системи частинок, розміри яких обмежені. Почнемо з атома водню, що складається з протона та електрона. Енергію спокою такого атома E_0 можна подати сумою чотирьох доданків:

$$E_0 = m_p c^2 + m_e c^2 + E_k + U, \quad (9.65)$$

де m_p і m_e – маси протона та електрона, відповідно; E_k та U – відповідно, кінетична та потенціальна енергії електрона в полі ядра¹. Отримаємо рівняння руху електрона по коловій орбіті під

дією кулонівської сили: $m_e \ddot{\vec{r}} = -k \frac{e^2}{r^2} \vec{r}$. Використовуючи відомий вираз для доцентрової компоненти прискорення, це рівняння можна переписати у вигляді $m_e \frac{v_e^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$, звідки

$$m_e v_e^2 = k \frac{e^2}{r}, \text{ тобто } 2E_k = -U, \text{ або } E_k + U = -E_k = -\frac{m_e v_e^2}{2}.$$

Отже, маса атома водню дорівнює

$$m_H = m_p + m_e - \frac{m_e v_e^2}{2c^2}, \quad (9.66)$$

тобто маса атома водню як замкненої системи, що складається з протона та електрона, не дорівнює сумі мас протона та електрона, а дещо менша цієї суми:

$$m_H < m_p + m_e, \quad (9.67)$$

причому це зменшення дорівнює

¹ Вважаємо ядро нерухомим, що є хорошим наближенням і не впливає на хід міркувань щодо маси атома водню.

$$\Delta m = m_p + m_e - m_H = \frac{m_e v_e^2}{2c^2}. \quad (9.68)$$

Його називають дефектом маси, і воно пов'язане з рухом частинок усередині системи. Можна зробити чисельну оцінку дефекту маси, використавши відоме співвідношення між швидкістю електрона на першій борівській орбіті та швидкістю світла $\frac{v_e}{c} \approx \frac{1}{137}$ (цю величину називають сталою тонкої структури). Дефект мас у цьому випадку становить приблизно $3 \cdot 10^{-5} m_e$ або $3 \cdot 10^{-7} (m_e + m_p)$, тобто порядку десятимільйонної частки маси атома водню.

Значно більший дефект маси спостерігається у випадку ядра важкого ізотопу водню – дейтрона, системи, що складається із протона та нейтрона:

$$m_d < m_p + m_n, \quad \Delta m = m_p + m_n - m_d \approx 10^{-3} (m_p + m_n).$$

Більша величина дефекту маси для дейтрона (приблизно 0,1 % суми мас протона та нейтрона) пояснюється тим, що енергія зв'язку цих нуклонів у ядрі значно більша, ніж енергія зв'язку електрона з ядром в атомі водню (основний внесок у притягання між нуклонами дає сильна взаємодія, яка на два порядки інтенсивніша за електромагнітну, причому на відстанях порядку 10^{-15} м , що значно менше від радіуса першої борівської орбіти в атомі водню (10^{-10} м)).

Розглянуті приклади дають підставу для парадоксального щодо повсякденного досвіду висновку, що сума мас черепків розбитого горщика не дорівнює масі цілого горщика. Рівність може бути досягнута з тим більшою точністю, чим менша енергія взаємодії цих черепків між собою у складі цілого горщика за його енергію спокою. Оскільки зазвичай ця умова безперечно виконується для всіх макроскопічних тіл у всіх явищах, у яких беруть участь ці тіла, то адитивність маси видається незаперечним фактом. Проте при переході до систем, у яких енергія зв'язку між її складовими становить помітну частку від суми енергій спокою їх складових, незаперечним експериментально підтвердженим фактом стає саме неадитивність маси.

Поява дефекту маси, наприклад, у процесі утворення дейт-рона, не може бути підставою для тверджень про "зникнення" маси або "перетворення маси на енергію" і навпаки, які начебто випливають із рівняння (9.59). Перетворення однієї фізичної величини на іншу незбагнене від самого початку, оскільки фізичні величини вводяться як кількісні характеристики властивостей матеріальних об'єктів. Тому твердження про перетворення однієї фізичної величини, яка має певну розмірність, на іншу фізичну величину з іншою розмірністю, еквівалентне абсурдному твердженню про перетворення однієї властивості матеріального об'єкту на його іншу властивість. Також нелогічним є твердження про те, що рівняння (9.59) означає "еквівалентність маси та енергії". Це рівняння означає не більше **ніж пропорційність маси та енергії спокою**¹. Якщо зберігається повна енергія системи, то з цього ще не випливає, що зберігається її маса, оскільки повна енергія частинки (тіла, системи) в загальному випадку є сумою енергії спокою та кінетичної енергії. Тому, коли в межах закону збереження енергії замкненої системи частинок змінюється кінетична енергія, то енергія спокою зазнає зміни з протилежним знаком, що тягне за собою зміну маси відповідно до рівняння (9.59).

Таким чином, якщо й можна казати про перетворення "чогось" на "щось" у результаті ядерних і хімічних реакцій (перетворень), то тільки про **перетворення енергії спокою на кінетичну енергію і навпаки, тобто енергії на енергію, а не на якусь іншу величину**.

Розглянемо декілька хрестоматійних прикладів, які ілюструють вищенаведене.

1. Нехай електрон з масою m_e і позитрон з масою $m_{\bar{e}}$, які на великій відстані один від одного мають відносну швидкість, близьку до нуля, починають зближуватись і анігілюють з утворенням

¹ Тут доцільно провести аналогію з поняттями інертної та гравітаційної маси, які пропорційні одна одній, але є мірою різних властивостей тіл. Ця пропорційність дає можливість порівнювати маси елементарних частинок, порівнюючи відповідні енергії спокою. Наприклад, кажуть, що маса електрона становить 0,511 MeV, маса протона 938,3 MeV, маса нейтрона 939,57 MeV тощо. Ними зручніше користуватися, аналізуючи реакції між частинками, оскільки закон збереження енергії виконується завжди.

ренням двох фотонів з енергією $h\nu$ кожен, що розлітається в протилежних напрямках. При цьому енергія спокою системи електрон–позитрон повністю переходить у кінетичну енергію продуктів реакції анігіляції – фотонів.

Зауважимо, що маса системи таких двох фотонів $\frac{2h\nu}{c^2}$ дорівнює масі системи "електрон–позитрон" $m = m_e + m_{\bar{e}}$, оскільки енергія системи $E = mc^2 = m_e c^2 + m_{\bar{e}} c^2 = 2h\nu$ залишається незмінною.

2. У термоядерній реакції перетворення чотирьох протонів p і двох електронів e на ядро атома гелію ${}^4\text{He}$ і два нейтрино ν : $2e + 4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2\nu + E_k$ енергія спокою шести частинок, що вступають в реакцію, становить $2 \cdot 0,51 + 4 \cdot 938,3 = 3754,22 \text{ MeV}$, а енергія спокою ядра атома гелію ${}^4\text{He}$ становить $3728,54 \text{ MeV}$. Енергія спокою зменшується при цьому на величину $\Delta E_0 = 25,67 \text{ MeV}$. Таким чином, відносне зменшення енергії спокою, а отже, і рівний йому відносний дефект маси $\Delta m/m$, становить величину порядку 1 % (приблизно $0,7 \cdot 10^{-2}$), тобто лише мала частина енергії спокою двох електронів та чотирьох протонів переходить у кінетичну енергію продуктів реакції.

3. В ядерній реакції поділу ядра ${}^{235}\text{U}$ після захоплення ним повільного нейтрона, яка відіграє основну роль у сучасній ядерній енергетиці, утворюються два ядра-осколки та 2 або 3 нейтрини, сумарна кінетична енергія яких $E_k \approx 200 \text{ MeV}$. У цьому випадку відносна частка енергії спокою, яка перетворилася на кінетичну енергію, становить $0,9 \cdot 10^{-3}$. Зрозуміло, що відносне зменшення маси продуктів реакції має таку саму величину. В ядерному реакторі кінетична енергія продуктів реакції переходить у тепло теплоносія, яке може бути використане для виконання механічної роботи і зрештою виробництва електроенергії.

4. Розглянемо приклади реакцій згоряння деяких типових речовин, які використовують як паливо: вуглецю, метану та водню. У табл. 9.1 наведено рівняння відповідних реакцій, сумарну

масу речовин m , що вступають в реакцію, їх сумарну енергію спокою E_0 (з розрахунку на 1 моль), кінетичну (теплову) енергію E_k , що виділяється при згорянні 1 моля палива, та відносну зміну маси речовини при згорянні $\Delta m/m$, яка чисельно дорівнює відношенню кінетичної енергії E_k до енергії спокою E_0 .

Таблиця 9.1
Характеристики типових реакцій згоряння

| Паливо | Реакція | m , г | E_0 , Дж | E_k , Дж | $\Delta m/m$ |
|---------|-----------------------------------|---------|----------------------|------------------|-----------------------|
| Вуглець | $C+O_2=CO_2$ | 44 | $3,96 \cdot 10^{15}$ | $393 \cdot 10^3$ | $0,99 \cdot 10^{-10}$ |
| Метан | $CH_4+2O_2 \rightarrow CO_2+H_2O$ | 48 | $4,32 \cdot 10^{15}$ | $802 \cdot 10^3$ | $1,86 \cdot 10^{-10}$ |
| Водень | $2H_2+O_2 \rightarrow 2H_2O$ | 34 | $3,06 \cdot 10^{15}$ | $484 \cdot 10^3$ | $1,58 \cdot 10^{-10}$ |

Таким чином, у хімічних реакціях відносна частка енергії спокою, яка перетворилася на кінетичну енергію, на 7÷8 порядків менша, ніж у ядерних і термоядерних реакціях, але в усіх випадках механізм вивільнення енергії одинаковий: у силу закону збереження енергії енергія спокою переходить у кінетичну енергію продуктів реакції (кінетична енергія включає кінетичну енергію масивних частинок та енергію квантів випромінювання – фотонів). При цьому сумарна маса продуктів реакції менша сумарної маси речовин, що вступають у реакцію.

Отже, зміна маси тіла пов'язана зі зміною його внутрішньої енергії. Маса тіла завжди змінюється за зміни його внутрішньої енергії. У попередніх прикладах внутрішня енергія тіл зменшувалась, і тому зменшувалась їх маса.

Наведемо тепер приклади збільшення маси тіл при збільшенні їх внутрішньої енергії. Почнемо із хімічних реакцій, які відбуваються з поглинанням тепла із зовнішнього середовища¹. Наприклад, утворення атомарного водню за реакцією $H_2 \rightarrow 2H$ потребує 436 кДж додаткової енергії, у результаті чого 2 молі атомарного водню мають на 436 кДж більше енергії, ніж 1 моль молекулярного водню, унаслідок чого відносне збільшення маси

¹ Такі реакції називають *ендотермічними*, на противагу *екзотермічним* реакціям, у результаті яких тепло виділяється в оточуюче середовище.

$\Delta m/m$ атомарного водню порівняно з масою молекулярного водню, з якого його утворено, становить $24,2 \cdot 10^{-9}$.

Внутрішня енергія змінюється також при фазових переходах речовини, наприклад, з одного агрегатного стану в інший. Наприклад, при повному перетворенні деякої кількості льоду на воду внутрішня енергія води зростає за рахунок так званої прихованої теплоти топлення, яка надходить з оточуючого середовища і, відповідно, зростає маса води, причому $\Delta m/m = 3,7 \cdot 10^{-12}$. І нарешті, внутрішня енергія тіла може бути змінена простим його нагріванням. Наприклад, якщо нагріти залізну праску на 200° , то відносне збільшення її маси становитиме $\Delta m/m = 10^{-12}$.

Співвідношення (9.53) і (9.54) разом із законами збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу успішно застосовуються під час аналізу руху та перетворень релятивістських частинок. Цьому сприяє той факт, що експериментально вимірюють імпульси та енергії частинок до і після акту взаємодії (зіткнення, розсіяння, розпад тощо), коли відстані між частинками достатньо великі, щоб можна було знехтувати взаємодією між ними та вважати їх вільними. У зв'язку із цим, а також з ряду інших причин (напр., хвильові властивості, невизначеність поняття траекторії, реакції між частинками), рівняння руху у вигляді другого закону Ньютона за участі його суттевого атрибута – сили, у цій ділянці практично не застосовуються. Водночас для інженерних розрахунків, наприклад, руху релятивістських заряджених частинок у прискорювачах, інженери успішно використовують звичні для них поняття.

Основою релятивістської динаміки частинки так само, як і динаміки Ньютона, є поняття імпульсу, зокрема, його зміна із часом, відповідно до рівняння

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (9.69)$$

де \vec{p} – релятивістський імпульс у формі (9.33), яка є прямим наслідком основних співвідношень (9.34) та (9.35). Зазначимо, що під дією постійної сили \vec{F} релятивістський імпульс, як і в ньютонівській механіці, лінійно зростає із часом, $\vec{p} = \vec{F}t$. При цьому також зростає енергія частинки:

$$E = \left(p^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(F^2 t^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{\frac{1}{2}},$$

причому спочатку квадратично із часом, $E \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2} \right)$,

точнісінько як це відбувається в механіці Ньютона, а за великих імпульсів p – майже лінійно, $E \approx pc = Ftc$. Отже, немає принципових обмежень на те, щоб надати частинці як завгодно великий імпульс – питання полягає лише в тому, чи маємо ми джерело енергії відповідної величини $E = pc$! Інша справа, що швидкість частинки спочатку зростатиме лінійно з імпульсом (а отже, у нашому випадку і лінійно з часом), а потім її зростання стане помітно уповільнюватись, і вона буде асимптотично наблизатися до швидкості світла c , ніколи її не досягаючи. Формально для цього був би потрібен нескінчений час і нескінчена енергія, яка фізично не може бути надана частинці. Тому, хоча велетенські машини, розміри яких сягають декількох кілометрів, а для своєї роботи вони потребують потужності, яку в середньому споживає велике місто, за звичкою продовжують називати прискорювачами, їх основне призначення полягає не в подальшому збільшенні швидкості заряджених частинок, яка при досягнутих рекордних енергіях частинок відрізняється від c менш ніж на $10^{-8}\%$, а винятково в наданні частинкам ще більшої енергії¹! Це, зокрема, підтверджується тим, що основною характеристикою прискорювачів, за якою їх порівнюють, є саме енергія прискорених частинок, у той час, як швидкість ніколи не згадується, оскільки нікого не цікавить.

Серед існуючих і споруджуваних прискорювачів найбільшу енергію ($14 \text{ TeV} = 14 \cdot 10^{12} \text{ eV}$) здатний надавати протонам Великий адронний колайдер (LAC – *Large Hadron Collider*) Європейського центру ядерних досліджень (ЦЕРН). Хоча максимальна швидкість прискорених ним протонів відрізняється від швидкості світла $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$ менш ніж на 1 м/с , за максимальною енергією прискорених частинок він драматично поступається високоенергетичним частинкам так званого космічного випромінювання, енергія яких сягає 10^{20} eV .

¹ Якщо звернутися до англійської мови, яка дуже толерантна до неологізмів і в якій словотворення дуже просте, то термін *accelerator* (прискорювач – той, що прискорює) доцільно було б замінити терміном *energizer* (той, що надає енергію).

Для зручності подальшого аналізу виразу (9.69) запишемо (9.58) у вигляді $\vec{p} = m\vec{v}\alpha$, де $\alpha = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Тоді з (9.69) отримаємо

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}}\alpha + m\vec{v}\dot{\alpha} = m\dot{\vec{v}}\alpha + m\vec{v} \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= m\alpha \vec{a} - m\vec{v} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2\vec{v}\dot{v}}{c^2} \right),$$

а в більш компактному записі

$$\vec{F} = m\alpha \vec{a} + m\alpha^3 \vec{v} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2}, \quad (9.70)$$

де $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – прискорення частинки, яке у загальному випадку релятивістської частинки більше не збігається за напрямком із силою $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Отже, маса для релятивістських частинок вже не може пра- вити за міру інертності, оскільки в загальному випадку прискорення, викликане силою, більше не збігається з напрямком цієї сили, а його величина різна для різних напрямків сили, тобто воно залежить не лише від величини, але й від напрямку сили.

Виявляється, що напрямок сили збігається з напрямком прискорення лише у двох спеціальних випадках, а саме: коли $\vec{F} \perp \vec{v}$ і коли $\vec{F} \parallel \vec{v}$. Якщо $\vec{F} \perp \vec{v}$, то проекція \vec{F} на \vec{v} відсутня, тобто відсутній другий доданок у правій частині (9.70) і

$$\vec{F} = m\alpha \vec{a}. \quad (9.71)$$

В іншому випадку, умову $\vec{F} \parallel \vec{v}$ можна задоволити лише за $\vec{a} \parallel \vec{v}$, тоді вираз (9.50) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\alpha(1 + m\alpha^2\beta^2)\vec{a} = m\alpha(1 + \frac{1}{1 - \beta^2}\beta^2)\vec{a} = \\ &= m\alpha(1 + \frac{1}{1 - \beta^2}\beta^2)\vec{a} = m\alpha^3\vec{a}, \end{aligned}$$

тобто

$$\vec{F} = m\alpha^3 \vec{a}. \quad (9.72)$$

Як би незвично не виглядали загальне рівняння (9.70) та його частинні випадки (9.71) і (9.72), вони неодноразово перевірені експериментально і в їх справедливості немає жодних сумнівів. Вони зручні при застосуванні до руху зарядженої частинки в магнітному та електричному полях, і ними широко користуються інженери, зокрема, при розрахунку прискорювачів заряджених частинок. При цьому використовують поняття *поперечної* та *поздовжньої* мас, відповідно, $m_{\perp} = \alpha m$ і $m_{\parallel} = \alpha^3 m$, які ще в 1899 р. запровадив Г. Лоренц, як коефіцієнти з розмірністю маси, що встановлюють пропорційність між векторами сили та прискорення при застосуванні другого закону Ньютона до двох розглянутих вище випадків, а саме: до руху частинки в магнітному полі \vec{B} під дією сили Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}] \perp \vec{v}$, якому відповідає формула (9.71), та в електричному полі \vec{E} під дією сили $\vec{F} = q\vec{E}$, причому обирають $\vec{E} \parallel \vec{v}$, щоб забезпечити $\vec{F} \parallel \vec{v}$ (9.72). Ця пропорційність не пряма, оскільки самі величини m_{\perp} і m_{\parallel} залежать від швидкості частинок.

Величину $m/\sqrt{1-\beta^2}$, яка збігається з величиною поперечної маси Лоренца, іноді називають релятивістською масою, або масою, що залежить від швидкості, і позначають у кращому випадку як m_p , а в гіршому й найбільш поширеному варіанті просто як m . Доцільність такого кроку часто обґрунтують тим, що наче б то зростання "релятивістської маси" частинки $m_p = m/\sqrt{1-\beta^2}$ при збільшенні її швидкості унеможливлює досягнення і перевищення нею швидкості світла c . Справжню масу при цьому називають масою спокою, і в зазначеному вище гіршому варіанті позначають її як m_0 . При використанні позначення m_p можна переписати формулу для імпульсу (9.48) у класичній (нерелятивістській) формі $\vec{p} = m_p \vec{v}$, а формулу (9.57) для енергії у вигляді $E = m_p c^2$, що само по собі не становить криміналу. Але, оскільки в ньютонівському виразі для

імпульсу $\vec{p} = m\vec{v}$ множник, що стоїть при швидкості, є інертною масою, то з'являється спокуса назвати множник m_p , що стоїть при швидкості в суттєво релятивістській (хоча і замаскований під класичний вираз) формулі для імпульсу $\vec{p} = m_p \vec{v}$, також інертною масою, але тепер вже релятивістською! Після такого неправомірного кроку всі наступні дії з величиною m_p , трактованою як "релятивістська інертна маса", будуть також неправомірними. Одним із них є відшукання (інертної) маси (прикм. "інертної" часто випускають) матеріального об'єкта через його повну енергію: $m_p = \frac{E}{c^2}$. Через цей "чорний хід" у безмасових

частинок (напр., у фотона) з'являється маса. Поки що інертна. Проте з ньютонівської механіки відома як інертна, так і гравітаційна маси, а також їх пропорційність одна одній і можливість запровадження для них однакових одиниць вимірювання. Тому наступним неправомірним кроком є ототожнення величини $\frac{E}{c^2}$, яка чисельно дорівнює m_p , із гравітаційною масою матеріального об'єкта. Таким чином, безмасова частинка (фотон) наділяється тепер ще й гравітаційною масою, яка також дорівнює $\frac{E}{c^2}$, і з'являється спокуса підставляти цю величину у формулу закону всесвітнього тяжіння Ньютона для визначення сили, що діє на фотон у гравітаційному полі масивного тіла. Проте розрахованій таким чином кут відхилення фотонів у гравітаційному полі Сонця виявляється вдвічі меншим, ніж спостережуваний експериментально. Ця серйозна розбіжність з експериментом не випадкова.

У теорії гравітації, яку часто називають загальною теорією відносності, можна отримати формулу сили, прикладеної до легкої масивної частинки, що має енергію E та швидкість \vec{v} (або навіть до безмасової частинки з енергією E), з боку гравітаційного поля тіла з великою масою M (напр., Землі, Сонця або іншої зірки)¹:

¹ Доволі складний вигляд цієї формули зумовлений тим, що в релятивістсько-му випадку гравітаційне поле визначається не однією скалярною величиною, а т. зв. тензором енергії-імпульсу, який має 10 незалежних компонент.

$$\vec{F} = -G \frac{ME}{c^2 r^2} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{v(\vec{v}\cdot\vec{r})}{c^2 r} \right]. \quad (9.73)$$

За малих (нерелятивістських) швидкостей $v \ll c$ для масивної частинки ця формула переходить у нерелятивістську формулу закону всесвітнього тяжіння Ньютона: $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, оскільки вираз у квадратних дужках прямує до одиниці, а $\frac{E}{c^2} \rightarrow \frac{E_0}{c^2} = m$. Однак за великих швидкостей, коли $\frac{v}{c} \sim 1$, маємо принципово новий випадок: та частина формулі (9.73), яку можна було б приймати за "гравітаційну масу", у ньютонівському сенсі виявляється залежною не лише від енергії частинки E , але й від взаємного розташування векторів \vec{r} та \vec{v} . Така "гравітаційна маса" дорівнює $\frac{E}{c^2}$, якщо $\vec{v} \parallel \vec{r}$, але за $\vec{v} \perp \vec{r}$ збільшується до $\frac{E}{c^2}(1 + \beta^2)$, зокрема, для фотона ($\beta = 1$) вона збільшується

вдвічі і становить $2 \frac{E}{c^2}$, чим, між іншим, пояснюється вищеприведена розбіжність між неправильним розрахунком та експериментом. Проте головний висновок полягає в тому, що поняття гравітаційної маси незастосовне до релятивістського тіла. Дійсно, видається дивним казати про гравітаційну масу фотона або навіть масивної частинки, що рухається зі швидкістю, близькою до швидкості світла, якщо така величина для частинки, що падає вертикально до земної поверхні, удвічі менша, ніж для тієї самої частинки, що рухається в горизонтальному напрямку.

Повернемось до так званої "релятивістської" маси m_p , яка начебто є мірою інертності тіла, і саме її зростання при зростанні швидкості тіла v унеможливлює досягнення тілом швидкості світла, навіть, якщо його прискорення визначається формuloю

$$a = \frac{F}{m_p}, \text{ яку можна переписати у вигляді}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F}{m} \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}. \quad (9.74)$$

Переконаємось, що це не так. Вважатимемо силу F сталою і проінтегруємо рівняння (9.69), щоб знайти час T , за який тіло від початкової швидкості $\upsilon = 0$ досягне швидкості світла та перевищить її. Після відокремлення змінних отримаємо

$$\int_0^c \frac{d\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1}{m} \int_0^T F dt. \quad (9.75)$$

Інтеграл у лівій частині (9.75) обчислимо, використовуючи відомі підстановки

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{d\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} &= \left| \begin{array}{l} \frac{\upsilon}{c} = \beta, \upsilon = \beta c \\ d\upsilon = cd\beta \end{array} \right| = c \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \left| \begin{array}{l} \beta = \sin \theta, d\beta = \cos \theta d\theta \\ \beta = 0 \rightarrow \theta = 0 \\ \beta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2 \end{array} \right| = \\ &= c \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = c \int_0^{\pi/2} d\theta = c \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Інтеграл у правій частині (9.75) дорівнює FT . Отже, для визначення T маємо рівняння $c \frac{\pi}{2} = \frac{F}{m} T$, звідки знайдемо $T = \frac{\pi m}{2F} c$.

Легко обчислити, що під дією сили, яка забезпечує стандартне прискорення вільного падіння $9,81 \text{ м/с}^2$, тіло досягне швидкості світла й перевищить її всього за півтора року (556 діб). При такому підході швидкість тіла зростає необмежено і лише в 1,5 раза повільніше, ніж при використанні в тому самому розрахунку звичайної маси m !

Отже, таємнича "релятивістська" маса при цьому нічим не краща за звичайну масу m . Комізм ситуації полягає в тому, що у випадку $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ сила взагалі не здатна виконувати роботу, а отже, збільшувати кінетичну енергію частинки, а разом з нею і її швидкість.

У циклічних прискорювачах заряджених частинок у магнітному полі до частинки прикладена сила $\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]$. При цьому сила з боку магнітного поля

\vec{B} не виконує жодної роботи зі збільшення енергії (швидкості частинки), оскільки вона перпендикулярна до вектора швидкості \vec{v} , а лише забезпечує рух частинки по замкненій коловій траекторії, а роботу зі збільшення енергії частинки виконує сила з боку електричного поля \vec{E} , яка співнапрямлена з вектором \vec{v} . У резонансних підсилювачах (напр., циклотронах) це періодично змінюване потенціальне електричне поле, а в бетатронах – вихрове електричне поле. Саме тому інженери при розрахунку прискорювачів заряджених частинок використовують поперечну масу Лоренца m_{\perp} для розрахунків радіуса орбіти частинки, а поздовжню m_{\parallel} – для розрахунку її тангенціального прискорення.

Основні властивості маси в механіці Ньютона та в СТВ подано в підсумковій табл. 9.2.

Таблиця 9.2
Властивості маси в механіці Ньютона та у СТВ

| Механіка Ньютона | СТВ |
|--|---|
| Маса є мірою кількості речовини. | Маса не є мірою кількості речовини. Немає принципової різниці між речовиною та випромінюванням. |
| Маса не змінюється при переході від однієї ІСВ до іншої. | Так само, як у механіці Ньютона. |
| Маса ізольованої системи тіл зберігається із часом. | Так само, як у механіці Ньютона, лише треба враховувати як речовину (напр., атоми), так і поле (напр., фотони). |
| Маса є адитивною величиною. | Маса не є адитивною величиною. Адитивність суттєво порушується, коли енергії частинок дуже великі. Тоді маса системи частинок визначається не стільки їх кількістю, скільки їх енергіями та взаємною орієнтацією імпульсів. |
| Маса є мірою інертності тіла. | Маса не є мірою інертності Для релятивістського тіла, взагалі, не існує єдиної міри інертності. |
| Маса тіла визначає його взаємодію з гравітаційним полем. | Маса релятивістського тіла не визначає його взаємодію з гравітаційним полем. Ця взаємодія визначається через тензор енергії-імпульсу тіла. |
| | Маса частинки є мірою енергії спокою частинки, $E_0 = mc^2$. |

Ефект Комптона¹. Як приклад застосування релятивістських формул для енергії та імпульсу розглянемо розсіяння фотонів на вільному електроні, що перебуває у стані спокою. Розсіяння є пружним, оскільки внутрішня енергія електрона після акту розсіювання електрона не змінюється.

Закон збереження енергії має вигляд

$$E_\gamma + E_e = E_{\gamma'} + E_{e'}, \quad (9.76)$$

де $E_\gamma = h\nu_\gamma$ та $E_{\gamma'} = h\nu'$ – енергії фотонів до і після розсіювання, а $E_e = m_e c^2$ та $E_{e'} = \sqrt{p_{e'}^2 c^2 + m_e^2 c^4}$ – енергії електрона, відповідно до і після розсіювання ($p_{e'}^2$ – квадрат вектора імпульсу електрона після розсіювання $\vec{p}_{e'}$).

Закон збереження імпульсу:

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_{e'}, \quad (9.77)$$

де \vec{p}_γ та $\vec{p}_{\gamma'}$ – вектори імпульсу фотонів до і після розсіювання. Відповідну діаграму імпульсів наведено на рис. 9.9.

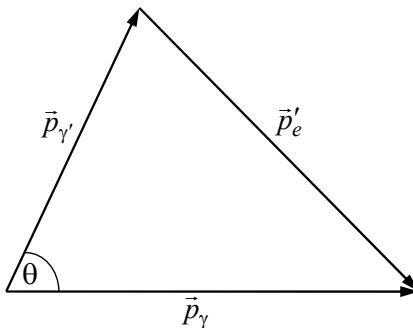


Рис. 9.9. Діаграма імпульсів до пояснення ефекту Комптона

Із закону збереження енергії у вигляді

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{p_{e'}^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

¹ Першим, хто передбачив і спостерігав у своїх експериментах з розсіяння рентгенівського випромінювання слабко зв'язаних валентних електронах атомів вуглецю в графіті, був американський фізик А. Комптон (Нобелівська премія, 1927).

отримаємо

$$p_{e'}^2 c^2 = (hv - hv' + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4,$$

причому

$$p_{e'}^2 c^2 = \frac{1}{c} \sqrt{(hv - hv' + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} > \frac{hv - hv'}{c}.$$

Оскільки із закону збереження імпульсу $\vec{p}_{e'} = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'}$, то

$$p_{e'}^2 = (\vec{p}_{e'} \cdot \vec{p}_{e'}) = (\vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'}) \cdot (\vec{p}_\gamma - \vec{p}_{\gamma'}) = p_\gamma^2 + p_{\gamma'}^2 - 2p_\gamma p_{\gamma'} \cos\theta$$

або

$$p_{e'}^2 c^2 = p_\gamma^2 c^2 + p_{\gamma'}^2 c^2 - 2c^2 p_\gamma p_{\gamma'} \cos\theta.$$

Оскільки $p_\gamma = hv/c$, $p_{\gamma'} = hv'/c$, то

$$\begin{aligned} p_{e'}^2 c^2 &= (hv)^2 + (hv')^2 - 2(hv)(hv') \cos\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow (hv - hv' + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 &= (hv)^2 + (hv')^2 - 2(hv)(hv') \cos\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow 2hvm_e c^2 - 2hv'm_e c^2 &= 2h^2 v v' (1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

Остаточно дістанемо зв'язок між частотами падаючого і розсіяного фотонів

$$\frac{c}{v'} - \frac{c}{v} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \quad (9.78)$$

або між їх довжинами хвиль:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta). \quad (9.79)$$

Величина

$$\Lambda = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ м}, \text{ або } 0,0024 \text{ нм} \quad (9.80)$$

називається **комптонівською довжиною хвилі** для електрона. Вона подана через світові константи і **не залежить від довжини хвилі падаючого випромінювання**. Саме тому ефект Комптона практично неможливо спостерігати у видимому діапазоні електромагнітних (світлових) хвиль, навіть на електронах, не кажучи про протони, нейтрони або атоми, для яких Λ на декількох порядків менше.

Контрольні запитання та вправи

9.1. Отримати релятивістську формулу додавання швидкостей шляхом множення двох матриць перетворень Лоренца

$$L(K_3 \rightarrow K_1) = L(K_2 \rightarrow K_3)L(K_1 \rightarrow K_2)$$

або $L(\beta_3) = L(\beta_2)L(\beta_1)$,

9.2. Побудувати і порівняти між собою графіки залежності $v' = f(v)$ частоти v' , що сприймається нерухомим приймачем, від швидкості переміщення джерела хвиль \mathcal{V} для звукових та електромагнітних хвиль при поздовжньому ефекті Допплера.

9.3. Розглядаючи абсолютно пружне зіткнення двох частинок у двох ICB K та K' , обраним таким самим чином, як і на рис. 9.6, показати, що класичний вираз для кінетичної енергії частинки також має бути змінений, як і класичний вираз для імпульсу частинки, якщо розглядається рух зі швидкостями, які не можна вважати малими порівняно зі швидкістю світла.

9.4. Знайти швидкість електрона, якої він набуває після переміщення в електронному потенціальному полі з однієї точки в іншу, різниця потенціалів між якими становить 10^6 В.

9.5. Пояснити, чому поперечний ефект Допплера відсутній для звукових хвиль.

9.6. Розрахувати час, необхідний для досягнення початково нерухомою масивною частинкою швидкості світла, якщо її прискорення стало і дорівнює $g = 9,8$ м/с².

9.7. Обчислити комптонівську довжину хвилі для протона.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Иродов И. Е.* Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – М.; СПб. : Физматлит, 2001.
2. *Федорченко А. М.* Теоретична фізика. Т. 1. Класична механіка і електродинаміка / А. М. Федорченко. – К. : Вища шк., 1993.
3. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 1. Механика, молекулярная физика / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1982.
4. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979.
5. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая шк., 1986.
6. *Ландау Л. Д.* Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1965.
7. *Киттель Ч.* Берклиевский курс физики. Т. 1. Механика / Ч. Киттель, В. Найт, М. Рудерман. – М. : Наука, 1983.
8. *Орир Дж.* Физика / Дж. Орир. М. : Мир., 1981. – Т. 1.
9. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : МГУ, 1978.
10. *Голдстейн Г.* Классическая механика / Г. Голдстейн. – М. : Наука, 1965.
11. *Стрелков С. П.* Механика / С. П. Стрелков. – М. : Наука, 1975.
12. *Окунь Л. Б.* Понятие массы (масса, энергия, относительность) / Л. Б. Окунь // Усп. физ. наук, 1989. – Т. 158. – Вып. 3. – С. 313–352.
13. *Физический энциклопедический словарь* / Гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Большая Рос. энцикл., 1998.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Відношення початкової маси ракети до її кінцевої маси m_0 / m залежно від її кількості ступенів

У табл. Д.1 наведено дані про деякі ракети, що працюють на рідкому паливі, починаючи від першої практично використовуваної німецької одноступеневої бойової ракети V-2, (Фау-2) із дальністю польоту 320 км і максимальною швидкістю 1,5 км/с, яка фактично стала відправною точкою для всіх наступних ракет-носіїв як американських, так і радянських, зокрема тих, якими було виведено на навколоземні орбіти перший штучний супутник Землі та першого космонавта Ю. Гагаріна. Із табл. Д.1 видно, що багатоступеневі ракети можуть забезпечити значне відношення m_0/m при помірних відношеннях для ракети кожного ступеня. Сучасні українські ракети-носії Циклон-2 і Зеніт-3SL використовуються для виведення на орбіту штучних супутників Землі. Ракета-носій Saturn 5-Apollo була використана для пілотованих польотів на Місяць, здійснених американськими астронавтами в 1969–1972 роках. Якщо ж розглядати ракетно-космічну систему Saturn 5-Apollo в цілому, то вона фактично являє собою п'ятиступеневу систему, і для неї $m_0/m = 295$, оскільки початкову масу 2950 т треба поділити на кінцеву масу $m = 10$ т так званого основного блоку, який повертається в атмосферу Землі. Поверхні Землі досягає лише командний відсік, маса якого становить 5,5 т.

Таблиця Д.1
Характеристика деяких ракетних систем

| Ракета (ракетна система) | Кількість ступенів | m, т | m_0, т | m_0/m |
|-------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|----------------------------|---------------------------|
| V-2 (Німеччина) | 1 | 3,07 | 12,4 | 4 |
| Циклон-2 (Україна) | 2 | 6,6 | 176 | 26,6 |
| 1-й ступінь | | 52,2 | 176 | 3,4 |
| 2-й ступінь | | 6,6 | 52,2 | 8 |
| Зеніт-3SL (Україна) | 3 | 6,1 | 355 | 58,2 |
| 1-й ступінь | | 140 | 355 | 2,5 |
| 2-й ступінь | | 14,4 | 113,3 | 8 |
| 3-й ступінь | | 6,1 | 22,6 | 3,7 |
| "Восток" (8K72) (CPCP) | 3 | 1,875 | 287 | 153 |
| Saturn 5 (США) | 3 | 63 | 2950 | 46,8 (295)* (536)** |
| 1-й ступінь | | 801 | 2149 | 2,7 |
| 2-й ступінь | | 226 | 670 | 3 |
| 3-й ступінь | | 63 | 185 | 2,9 |
| Основний блок* | | 10 | | |
| Командний відсік** | | 5,5 | | |

*Після польоту на Місяць повертається до Землі.

**Досягає поверхні Землі.

Додаток 2

Оцінка можливостей ракети, що працює на хімічному паливі

Спираючись на формулу (5.90) і залучивши елементарні відомості з молекулярної фізики, оцінимо можливості одноступеневої ракети на хімічному паливі, наприклад, для досягнення другої космічної швидкості $v = 11,2 \text{ км/с}$. За величину швидкості витікання продуктів згоряння u з камери згоряння у вакуум можна прийняти середньоквадратичну швидкість молекул (атомів) у камері згоряння, яку можна знайти із відомого співвідношення для середньої кінетичної енергії молекул

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \quad \text{де}$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – стала Больцмана, M – маса молекули (атома) продуктів згоряння, T – температура в камері згоряння.

Швидкість витікання $u = \sqrt{\frac{3kT}{M_{\text{ат}}m_{\text{ат}}}}$, де масу молекули M подано як добуток молярної маси $M_{\text{ат}}$ на атомну одиницю маси $m_{\text{ат}} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Таким чином, швидкість витікання тим більша, чим менша маса молекул (атомів) продуктів згоряння та вища температура в камері згоряння.

Отже, вигідно обирати такі пари паливо–окиснювач, які, з одного боку, вступаючи в реакцію можуть забезпечити високу температуру горіння, а з іншого, продукти реакції яких мають малу молярну масу. Щодо цього найбільш ефективними є пара зріджений водень–зріджений кисень, оскільки продукт їх реакції молекула H_2O має молярну масу 18 та зріджений водень–зріджений фтор, продуктом реакції яких є фторид водню HF з молярною масою $M_{\text{ат}} = 20$. За $T = 3500 \text{ К}$ (це дуже висока температура, але сучасні камери згоряння можуть її витримати) одержуємо для H_2O $u = 2203 \text{ м/с}$, а для HF – $u = 2090 \text{ м/с}$. За формулою (5.90) можна отримати відношення m_0/m , які дорівнюють, відповідно, 150 і 200, що виглядає не дуже обнадійливо.

Відомо, що у двигуні другого ступеня ракети Saturn 5 досягається швидкість витікання 4170 м/с. Така істотна розбіжність зумовлена прийнятою нами дуже спрощеною моделлю надзвичайно складних явищ, що відбуваються в ракетному двигуні. Однією із причин є те, що внаслідок дисоціації молекул води за таких високих температур середня молярна маса продуктів згоряння значно менша, ніж прийнята нами для H_2O . Швидкість витікання продуктів згоряння також суттєво залежить від конструкції сопла, у якому відбувається їх адіабатичне розширення і, відповідно, прискорення.

Ефективність палива для ракетних двигунів порівнюють за їх так званим питомим імпульсом, який є відношенням тяги ракетного двигуна до секундної витрати робочого тіла. Питомий імпульс має розмірність $н \cdot с \cdot кг^{-1}$, яку на практиці часто зводять до м/с, тобто до розмірності швидкості. Для ідеального ракетного двигуна, що працює у вакуумі, питомий імпульс чисельно дорівнює швидкості витікання робочого тіла із сопла двигуна. У табл. Д.2 наведено питомі імпульси для двох найпопулярніших двокомпонентних ракетних палив, що містять кисень, які використовують у ракетно-космічних системах сьогодні, а також палива на основі зріджених фтору і водню, яке може забезпечити найбільший питомий імпульс. Це пов'язано з можливістю отримати вищу температуру згоряння водню у фторі ніж у кисні, завдяки тому, що фтор є найагресивнішим окиснювачем. Окрім того, паливо фтор–водень потребує вдвічі меншого об'єму паливних баків, ніж паливо кисень–водень, завдяки майже вдвічі більшій густині, що дозволяє істотно зменшити масу ракети. Однак, якщо паливо кисень–водень найбільш екологічне серед усіх відомих типів палива, то паливо фтор–водень надзвичайно шкідливе для оточуючого середовища.

Найбільший питомий імпульс (10–210 км/с) можуть забезпечити так звані електричні ракетні двигуни, у яких робоче тіло набуває швидкості за рахунок енергії електромагнітного поля. Наприклад, в іонних ракетних двигунах робочим тілом є іони, що розганяються електричним полем до великих швидкостей. Такі двигуни здатні працювати лише поза межами атмосфери і розвивати невелику тягу, що не перевищує десятки ньютонів. На

сьогодні вони використовуються переважно в автоматичних космічних апаратах як двигуни систем орієнтації та корекції, оскільки можуть багаторазово вмикатися і працювати тривалий час завдяки малим витратам робочої речовини.

Таблиця Д.2
Питомі імпульси для двох двокомпонентних ракетних палив

| Оксинювач | Паливо | Густина палива*, кг/л | Температура в камері згоряння, К | Питомий імпульс у вакуумі, м/с |
|------------------|------------------|-----------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| Кисень зріджений | Водень зріджений | 0,32 | 3250 | 4207 |
| | Гас | 1 | 3755 | 3293 |
| Фтор зріджений | Водень зріджений | 0,62 | 4707 | 4414 |

* Ця величина розраховується як відношення сумарної маси компонентів ракетного палива (окиснювача та власне палива) до їх об'єму.

Додаток 3

Параметричний резонанс

Можливість параметричного збудження коливань і параметричного резонансу можна показати, виходячи із рівняння руху найпростішої коливної системі без згасання та зовнішньої періодичної змушувальної сили

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0, \quad (\text{ДЗ.1})$$

де залежність параметра $\omega_0^2(t)$ від часу існує внаслідок явної залежності від часу одного або декількох параметрів, що визначають період власних коливань осцилятора: довжини математичного маятника l , коефіцієнта пружності пружини k , моменту інерції I для фізичного маятника тощо.

Покажемо, що при періодичній зміні параметра ω_0 можливе експоненціальне зростання зміщення x . Розглянемо умови виникнення параметричного резонансу в простому випадку, коли функція $\omega_0^2(t)$ мало відрізняється від постійної величини ω_0^2 , яка є квадратом частоти власних коливань системи для певного рівноважного (початкового) значення параметра, що змінюється із часом, і є простою періодичною функцією

$$\omega_0^2(t) = \omega_0^2(1 + \varepsilon \cdot \cos \Omega t), \quad (\text{ДЗ.2})$$

де стала ε додатно визначена й набагато менша від одиниці, $1 \gg \varepsilon > 0$. Ураховуючи результат спостережень за параметричним розгойдуванням гойдалки (зміна параметра l двічі за період власних коливань $T = 2\pi / \omega_0$), покладемо $\Omega = 2\omega_0 + \delta\omega$, де $\delta\omega \ll \omega_0$. Тоді рівняння руху параметрично збуджуваного осцилятора набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + \varepsilon \cdot \cos(2\omega_0 + \delta\omega)t]x = 0. \quad (\text{ДЗ.3})$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$x(t) = a(t)\cos(\omega_0 + \delta\omega/2)t + b(t)\sin(\omega_0 + \delta\omega/2)t, \quad (\text{ДЗ.4})$$

де $a(t)$ і $b(t)$ – функції, що повільно змінюються із часом порівняно з множниками $\cos(\omega_0 + \delta\omega/2)t$ і $\sin(\omega_0 + \delta\omega/2)t$. Такий

вигляд розв'язку наближений і враховує лише члени першого порядку мализни за ε . Підставимо (Д3.4) у (Д3.3) і перетворимо добутки тригонометричних функцій на суми, наприклад:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 + \delta\omega / 2)t \cdot \cos(2\omega_0 + \delta\omega)t = \\ = \frac{1}{2}\cos(3\omega_0 + 3\delta\omega / 2)t + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 + \delta\omega / 2)t. \end{aligned} \quad (\text{Д3.5})$$

При цьому збережемо лише члени першого порядку за малим параметром $\delta\omega$, припускаючи, що $\dot{a}(t) \sim \delta\omega a(t)$ і $\dot{b}(t) \sim \delta\omega b(t)$, правильність якого підтверджується результатом, отриманим для резонансу, а також випустимо доданки із частотами $3(\omega_0 + \delta\omega / 2)$ як такі, що вищі ε за порядком мализни. У результаті таких спрощень отримаємо

$$\begin{aligned} -(2\dot{a} + b\delta\omega + b\varepsilon\omega_0 / 2)\omega_0 \sin[(\omega_0 + \delta\omega / 2)t] + \\ +(2\dot{b} - a\delta\omega + \varepsilon\omega_0 a / 2)\omega_0 \cos[(\omega_0 + \delta\omega / 2)t] = 0. \end{aligned} \quad (\text{Д3.6})$$

Ця рівність виконується для будь-якого моменту часу тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при синусі та косинусі одночасно дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} + b\delta\omega + \varepsilon\omega_0 b / 2 &= 0, \\ 2\dot{b} - a\delta\omega + \varepsilon\omega_0 a / 2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д3.6})$$

Розв'язок цієї системи двох лінійних диференційних рівнянь за загальними правилами шукаємо у вигляді $a = a_0 e^{\alpha t}$ та $b = b_0 e^{\alpha t}$. Після його підстановки до (Д3.6) одержимо систему для відшукання α :

$$\begin{aligned} \alpha a + (\delta\omega + \varepsilon\omega_0 / 2)b / 2 &= 0, \\ (\delta\omega - \varepsilon\omega_0 / 2)a / 2 - \alpha b &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д3.7})$$

Умовою сумісності системи двох алгебраїчних рівнянь (Д3.7) є рівність її визначника нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta\omega + \varepsilon\omega_0 / 2 \\ \delta\omega - \varepsilon\omega_0 / 2 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 - \frac{1}{4}[(\delta\omega)^2 - \left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\right)^2] = 0, \quad (\text{Д3.8})$$

звідки знаходимо

$$\alpha^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2} \right)^2 - (\delta\omega)^2 \right]. \quad (\text{Д3.9})$$

Оскільки розв'язок (Д3.4) має бути дійсним, дійсними мають бути й амплітуди $a(t)$ і $b(t)$ при синусі та косинусі. Отже, параметр α також має бути дійсним, тобто $\alpha^2 > 0$. Це можливо тоді, коли

$$-\frac{\varepsilon\omega_0}{2} < \delta\omega < \frac{\varepsilon\omega_0}{2}, \quad (\text{Д3.10})$$

тобто параметричний резонанс може існувати в деякому інтервалі поблизу частоти $2\omega_0$, ширина якого пропорційна величині ε , що визначає глибину параметричної модуляції. Параметричний резонанс спостерігається і на частотах зміни параметра коливної системи Ω , близьких до $2\omega_0 / n$, де n – будь-яке ціле число. Це відповідає досвіду: при розгойдуванні гойдалки можна присідати й один раз за період або за декілька періодів. Однак ширина резонансних ділянок частот при збільшенні n швидко зменшується як ε^n . Так само зменшуються й значення показника параметричного підсилення α .

Розгляд умов виникнення нестійкості коливної системи при періодичній зміні її параметра, що визначає власну частоту коливань, було здійснено для недисипативної системи. Із досвіду відомо, що параметричний резонанс спостерігається і за наявності дисипативних сил. Як було показано в п. 8.1.2, амплітуда коливань, що згасають внаслідок наявності сили опору, пропорційної швидкості, змінюється за законом $e^{-\beta t}$. Тому збільшення амплітуди коливань в умовах параметричного резонансу за наявності тертя відбувається за законом $e^{(\alpha-\beta)t}$, причому для зростання амплітуди коливань із часом необхідно, щоб показник степеня в експоненті був додатним, $\alpha - \beta > 0$, тобто показник підсилення був би більшим за показник згасання. Границя області нестійкості визначається рівністю $\alpha - \beta = 0$, яку з урахуванням (Д3.9) можна переписати у вигляді

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2} \right)^2 - (\delta\omega)^2 \right]} - \alpha = 0, \quad (\text{Д3.11})$$

звідки отримуємо

$$-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\right)^2 - 4\alpha^2} < \delta\omega < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\right)^2 - 4\alpha^2}. \quad (\text{ДЗ.12})$$

Як видно з (ДЗ.12), за наявності сил опору параметричний резонанс можливий не за як завгодно малої амплітуди ε , а лише, починаючи з її деякого мінімального (порогового) значення $\varepsilon_{\text{пор}}$, яке для збудження поблизу частоти $2\omega_0$ становить

$$\varepsilon_{\text{пор}} = \frac{4\alpha}{\omega_0}. \quad (\text{ДЗ.13})$$

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ПЕРЕДМОВА | 3 |
| ПОЗНАЧЕННЯ | 4 |
| РОЗДІЛ 1. Вступ до механіки | 5 |
| 1.1. Фізика – наука про загальні властивості матерії та її руху | 5 |
| 1.2. Механічний рух та поняття простору і часу | 10 |
| 1.2.1. Механічний рух | 10 |
| 1.2.2. Простір і час | 11 |
| 1.2.3. Системи відліку | 16 |
| Контрольні запитання та вправи | 18 |
| РОЗДІЛ 2. Опис механічного руху (кінематика) | 19 |
| 2.1. Кінематика точки | 19 |
| 2.1.1. Векторний спосіб | 20 |
| 2.1.2. Координатний спосіб | 21 |
| 2.1.3. Траєкторний спосіб | 23 |
| 2.1.4. Шлях, вектори переміщення, швидкості та прискорення | 24 |
| 2.1.5. Прискорення частинки, що рухається по криволінійній траєкторії | 30 |
| 2.2. Кінематика твердого тіла | 33 |
| 2.2.1. Поступальний рух та обертання навколо нерухомої осі | 33 |
| 2.2.2. Вектор нескінченно малого повороту і вектори кутової швидкості та кутового прискорення | 36 |
| 2.2.3. Зв'язок між лінійними та кутовими характеристиками обертового руху | 39 |
| 2.2.4. Формула додавання кутових швидкостей | 41 |
| 2.2.5. Рух абсолютно твердого тіла як суперпозиція поступального та обертового руху | 42 |
| 2.2.6. Степені вільності та зв'язки | 47 |
| Контрольні запитання та вправи | 51 |
| РОЗДІЛ 3. Закони Ньютона – основа класичної механіки | 53 |
| 3.1. Перший закон Ньютона та інерціальні системи відліку | 53 |
| 3.2. Сила та інертна маса: другий закон Ньютона | 57 |

| | |
|---|-----|
| 3.3. Фундаментальні взаємодії та сили актуальні в механіці | 62 |
| 3.3.1. Сили гравітаційної та електромагнітної взаємодії | 63 |
| 3.3.2. Формули сил, що виникають при механічному контакті тіл | 67 |
| 3.4. Третій закон Ньютона..... | 73 |
| 3.5. Принцип відносності механіки та межі застосування законів Ньютона | 76 |
| 3.6. Рівняння другого закону Ньютона – основне рівняння динаміки матеріальної точки в ICB | 79 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 103 |
| РОЗДІЛ 4. Рух відносно неінерціальних систем відліку..... | 104 |
| 4.1. Зв'язок між векторами швидкості і прискорення відносно ICB та HCB | 104 |
| 4.2. Основне рівняння динаміки частинки в HCB | 108 |
| 4.3. Рух частинки поблизу поверхні Землі..... | 116 |
| 4.3.1. Рівняння руху частинки поблизу поверхні Землі | 117 |
| 4.3.2. Сила тяжіння поблизу поверхні Землі | 119 |
| 4.4. Вага тіла, невагомість, перевантаження..... | 123 |
| 4.5. Невагомість в орбітальній станції | 128 |
| 4.6. Ефекти сили Коріоліса..... | 133 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 143 |
| РОЗДІЛ 5. Закони збереження..... | 144 |
| 5.1. Імпульс, момент імпульсу, кінетична енергія частинки | 146 |
| 5.2. Робота та потенціальна енергія..... | 151 |
| 5.2.1. Потенціальна енергія частинки | 155 |
| 5.2.2. Зв'язок між потенціальною енергією та силою | 160 |
| 5.2.3. Повна механічна енергія частинки | 162 |
| 5.2.4. Одновимірний рух частинки в потенціальному полі | 164 |
| 5.3. Закони збереження для системи частинок | 170 |
| 5.3.1. Умови зміни та закон збереження імпульсу системи частинок..... | 171 |
| 5.3.2. Рух тіла змінної маси | 179 |
| 5.4. Умови зміни та закон збереження моменту імпульсу системи частинок | 190 |
| 5.4.1. Власний момент імпульсу системи частинок | 193 |
| 5.4.2. Зв'язок між повним моментом імпульсу системи частинок та її власним моментом імпульсу | 195 |
| 5.4.3. Рівняння моментів у СЦМ | 196 |

| | |
|--|-----|
| 5.5. Умови зміни та збереження енергії системи частинок | 197 |
| 5.5.1. Енергія незамкненої системи частинок | 203 |
| 5.6. Застосування законів збереження..... | 208 |
| 5.6.1. Одновимірний фінітний рух | 208 |
| 5.6.2. Коливання частинки поблизу мінімуму потенціальної енергії..... | 209 |
| 5.6.3. Стационарна течія ідеальної рідини | 212 |
| 5.6.4. Зіткнення частинок..... | 213 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 228 |
| РОЗДІЛ 6. Динаміка твердого тіла | 229 |
| 6.1. Рівняння руху абсолютно твердого тіла | 229 |
| 6.2. Умови рівноваги абсолютно твердого тіла..... | 232 |
| 6.3. Зв'язок між власним моментом імпульсу і вектором кутової швидкості абсолютно твердого тіла, тензор інерції..... | 235 |
| 6.4. Основні властивості тензора інерції та обчислення його компонент | 241 |
| 6.5. Кінетична енергія абсолютно твердого тіла | 248 |
| 6.6. Динаміка обертання твердого тіла навколо нерухомої осі..... | 250 |
| 6.7. Динаміка плоского руху твердого тіла..... | 257 |
| 6.8. Рух гіроскопів та гіроскопічні сили..... | 265 |
| 6.8.1. Рух гіроскопів | 265 |
| 6.8.2. Гіроскопічні сили | 274 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 279 |
| РОЗДІЛ 7. Закон всесвітнього тяжіння | 280 |
| 7.1. Закони Кеплера та закон всесвітнього тяжіння | 280 |
| 7.2. Рух частинки в полі центральної сили | 286 |
| 7.2.1. Рух частинки в полі довільної центральної сили..... | 286 |
| 7.2.2. Рух частинки в полі центральної сили, обернено пропорційної квадрату відстані до силового центра | 293 |
| 7.2.3. Рух частинки по еліптичних траєкторіях | 302 |
| 7.2.4. Задача двох тіл | 305 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 309 |
| РОЗДІЛ 8. Коливання і хвилі | 310 |
| 8.1. Механічні коливання | 310 |
| 8.1.1. Вільні коливання за відсутності дисипативних сил | 311 |
| 8.1.2. Згасання вільних коливань | 314 |
| 8.1.3. Змущені коливання..... | 321 |

| | |
|---|------------|
| 8.1.4. Явище резонансу | 325 |
| 8.1.5. Параметричні коливання | 333 |
| 8.2. Математичний опис (кінематика) гармонічних коливань | 342 |
| 8.2.1. Додавання двох гармонічних коливань однакових напрямків і частот..... | 342 |
| 8.2.2. Додавання двох гармонічних коливань однакових напрямків і близьких частот | 344 |
| 8.2.3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань..... | 346 |
| 8.3. Пружні хвилі..... | 351 |
| 8.3.1. Рівняння хвилі..... | 354 |
| 8.3.2. Хвильове рівняння..... | 357 |
| 8.3.3. Швидкість поширення пружних хвиль..... | 362 |
| 8.3.4. Енергія, що переноситься пружними хвилями | 381 |
| 8.3.5. Стоячі хвилі | 390 |
| 8.3.6. Ефект Допплера для звукових хвиль | 402 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 406 |
| РОЗДІЛ 9. Основи спеціальної теорії відносності | 409 |
| 9.1. Постулати Айнштайна та перетворення Лоренца | 409 |
| 9.1.1. Наслідки перетворень Лоренца | 418 |
| 9.2. Взаємозв'язок імпульсу, маси та енергії у СТВ..... | 437 |
| <i>Контрольні запитання та вправи.....</i> | 464 |
| ЛІТЕРАТУРА | 465 |
| ДОДАТКИ | 466 |
| Додаток 1. Відношення m_0 / m залежно від кількості ступенів ракети..... | 466 |
| Додаток 2. Оцінка можливостей ракети на хімічному паливі | 468 |
| Додаток 3. Параметричний резонанс | 471 |

Навчальне видання

СЛОБОДЯНЮК Олександр Валентинович

МЕХАНІКА

Підручник

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Виконавець *Г. Пластуненко*



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 27,9. Наклад 200. Зам. № 215-7578.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № Фз7*.
Підписано до друку 25.04.16

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет",
01601, м. Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
 (044) 239 32 22; (044) 239 31 61; тел./факс (044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.kiev.ua
<http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02