

М.О. Боровий

О.Я. Оліх

Збірник задач з електрики та магнетизму.

Для студентів природничих факультетів.

Частина 1. Електростатика та закони постійного струму

1.1. Основні формули

Закон Кулона:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21}, \quad (\text{I.1})$$

де \vec{F}_{12} – сила електричної взаємодії, з якою точковий заряд q_2 діє на точковий заряд q_1 ; \vec{r}_{21} – вектор, який спрямовано від заряду q_2 до заряду q_1 ; ϵ – діелектрична проникність середовища, у якому знаходяться заряди; ϵ_0 – діелектрична стала. Модуль сили Кулона дорівнює

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \quad (\text{I.2})$$

Напруженість електричного поля (\vec{E}) визначається силою, що діє з боку поля на одиничний позитивний заряд. Тоді сила, що діє на точковий заряд q' , розміщений в у деякій точці електричного поля

$$\vec{F} = q' \vec{E}, \quad (\text{I.3})$$

Напруженість електричного поля, що створюється точковим зарядом q

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (\text{I.4})$$

де \vec{r} спрямовано від заряду до тієї точки поля, де визначається величина напруженості.

Потенціал електричного поля (ϕ) визначається роботою, яку виконують сили електричного поля при перенесенні одиничного позитивного заряду із даної точки поля на нескінченність ($A_{1\infty}$)

$$\phi = \frac{A_{1\infty}}{q} \quad (\text{I.5})$$

Потенціал електричного поля, що створюється точковим зарядом q у точці r

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (\text{I.6})$$

Принцип суперпозиції електричних полів: напруженість електричного поля, яке створюється системою зарядів у даній точці простору, визначається векторною сумою напруженостей електричних полів окремих зарядів у цій точці

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (\text{I.7})$$

Принцип суперпозиції справедливий і для потенціалів електричного поля:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i, \quad (\text{I.8})$$

де φ – потенціал поля, що створюється системою зарядів у деякій точці простору, φ_i – потенціал поля у даній точці, що створюється i -тим зарядом окремо.

Теорема Остроградського-Гауса (для вакууму): потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню не залежить від розмірів та форми поверхні і визначається алгебраїчною сумою електричних зарядів, які охоплюються цією поверхнею :

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (\text{I.9})$$

Зв'язок між потенціалом та напруженістю електростатичного поля:

а) у загальному випадку:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (\text{I.10a})$$

$$\text{у прямокутній системі координат } \vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right), \quad (\text{I.10б})$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти;

б) у випадку однорідного поля:

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d, \quad (\text{I.10в})$$

де d – відстань вздовж силової лінії поля між точками, потенціали яких дорівнюють φ_1 та φ_2 .

Електричний диполь - система двох точкових зарядів, однакових за величиною та протилежних за знаком, які знаходяться на відстані l один від одного. Така система характеризується **дипольним моментом**:

$$\vec{p} = q \vec{l}, \quad (\text{I.11})$$

де \vec{l} спрямовано від від'ємного заряду до додатного. На відстанях r від диполя за умови $r \gg l$ напруженість E_d та потенціал φ_d електричного поля описуються виразами:

$$E_d = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{p r}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{p r \cos \theta}{r^3}, \quad (\text{I.12})$$

$$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (\text{I.13})$$

де \vec{r} спрямований від диполя, θ – кут між векторами \vec{r} та \vec{l} .

Робота сил поля по переміщенню заряду q з точки поля з потенціалом φ_1 у точку поля з потенціалом φ_2 :

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \quad (\text{I.14})$$

де $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів.

Ємність відокремленого провідника:

$$C = q/\varphi, \quad (\text{I.15})$$

де φ – потенціал провідника, q – його заряд.

Ємність системи двох провідників, заряд q яких однаковий за величиною та протилежний за знаком

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (\text{I.16})$$

де $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – різниця потенціалів між провідниками.

Ємність плоского конденсатора:

$$C = \epsilon \epsilon_0 d/S, \quad (\text{I.17})$$

де d – відстань між пластинами конденсатора, S – площа кожної з пластин, ϵ – діелектрична проникність речовини, що заповнює простір між обкладинками конденсатора.

Ємність циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 L}{\ln(R/r)}, \quad (\text{I.18})$$

де R та r – радіуси зовнішнього і внутрішнього коаксіальних циліндрів відповідно, L – довжина кожного з них.

Ємність сферичного конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 Rr}{R-r}, \quad (\text{I.19})$$

де R та r – радіуси зовнішньої і внутрішньої сфер відповідно.

Ємність системи конденсаторів:

а) при послідовному з'єднанні:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}, \quad (\text{I.20a})$$

а) при паралельному з'єднанні:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (\text{I.20б})$$

де N – кількість конденсаторів, C_i – ємність i -го конденсатора.

Енергія взаємодії системи зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad (\text{I.21})$$

де q_i – величина i -го заряду, φ_i – потенціал поля, що створюється всіма зарядами (окрім i -го) у

точці розташування i -го заряду.

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}, \quad (\text{I.22})$$

де C – ємність конденсатора, q – заряд кожної з його обкладинок, U – різниця потенціалів між обкладинками.

Об'ємна густина енергії електричного поля:

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (\text{I.23})$$

Сила струму через деяку поверхню:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (\text{I.24})$$

де dq – заряд, що проходить через таку поверхню за час dt . Напрямок струму визначається напрямом руху позитивних зарядів.

Густина струму:

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (\text{I.25})$$

де dS – площа деякого поперечного перерізу, dI – сила струму через переріз dS .

Зв'язок між густиною струму та середньою швидкістю \vec{V} упорядкованого руху носіїв струму:

$$\vec{j} = qn\vec{V}. \quad (\text{I.26})$$

де q – заряд частинки, n – концентрація носіїв струму.

Закон Ома:

а) для однорідної ділянки кола:

$$I = U/R, \quad (\text{I.27a})$$

де U – різниця потенціалів на кінцях ділянки, R – електричний опір ділянки;

б) для ділянки кола, що містить джерело струму:

$$I = \frac{U \pm e}{R}, \quad (\text{I.27б})$$

де e – ЕРС джерела струму, R – повний електричний опір ділянки;

в) для замкнутого кола:

$$I = e/(R + r), \quad (\text{I.27в})$$

де R – електричний опір зовнішньої частини кола (зовнішній опір), r – електричний опір джерела струму (внутрішній опір);

г) у диференційній формі:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (\text{I.27г})$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля у даній точці провідника, ρ – питомий опір, $\sigma = \rho^{-1}$ – питома провідність.

Електричний опір однорідного провідника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (\text{I.28})$$

де l та S – довжина і площа поперечного перерізу провідника відповідно.

Залежність питомого опору металів від температури:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (\text{I.29})$$

де ρ_0 – питомий опір при $t_0 = 0^\circ\text{C}$, α – температурний коефіцієнт опору.

Електричний опір системи провідників:

а) при послідовному з'єднанні:

$$R = \sum_{i=1}^N R_i; \quad (\text{I.30a})$$

а) при паралельному з'єднанні:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}, \quad (\text{I.30б})$$

де N – кількість провідників, R_i – опір i -го провідника.

Робота електричного струму визначається роботою сил електричного поля по перенесенню вільних електричних зарядів у провіднику і дорівнює

$$dA = I^2 R dt, \quad (\text{I.31})$$

де dt – час проходження електричного струму з силою I через провідник з опором R .

Закон Джоуля-Ленця:

$$dW = dA, \quad (\text{I.32})$$

кількість теплоти dW , що виділяється у провіднику при проходженні електричного струму, дорівнює роботі електричного струму.

Потужність струму

$$N = \frac{dA}{dt} = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R} \quad (\text{I.33})$$

Правила Кірхгофа:

а) **перше правило** – алгебраїчна сума сил струмів у вузлі дорівнює нулеві:

$$\sum_i (\pm I_i) = 0. \quad (\text{I.34})$$

б) **друге правило** – у будь-якому замкнутому контурі алгебраїчна сума падінь напруг на окремих ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі діючих у цьому контурі ЕРС:

$$\sum_i (\pm I_i R_i) = \sum_j (\pm \varepsilon_j), \quad (I.35)$$

де I_i – сила струму, що проходить по i -й ділянці контуру, R_i – опір цієї ділянки, ε_j – ЕРС, що діє на j -ділянці контуру.

При розрахунках за допомогою правил Кірхгофа зручно діяти у наступній послідовності:

1) вказати сили струмів на кожній ділянці кола, враховуючи, що при розгалуженні величина сили струму змінюється. Напрями струмів можна вибирати довільно; якщо наприкінці розв'язку буде отримано від'ємне значення сили струму, то це свідчитиме лише про те, що дійсний напрямок струму на такій ділянці кола є протилежним до вказаного на початку розв'язку;

2) для вузлів схеми записати рівняння згідно з першим правилом Кірхгофа (1.34). При цьому струми, які входять у вузол, вважати додатніми, а ті, що виходять з вузла – від'ємними;

3) вибрати у колі різні замкнені контури і для них записати рівняння, що відповідають другому правилу Кірхгофа (1.35). У підсумку кількість рівнянь утвореної системи (разом з рівняннями (1.34)) повинна дорівнювати кількості невідомих величин. При записі для замкненого контуру рівняння (1.35) необхідно спочатку вибрати (довільним чином) напрямок обходу контуру, після чого а) додатніми вважати сили струмів на тих ділянках контуру, на яких напрямки цих струмів збігаються з напрямом обходу контуру; б) додатними вважати ЕРС тих джерел, які б створювали струми, спрямовані у напрямку обходу контуру;

4) розв'язати отриману систему рівнянь.

Перший закон електролізу (I закон Фарадея) визначає масу речовини (m), яка виділяється на електроді при електролізі:

$$m = Kq = KIt, \quad (I.36)$$

де t – час електролізу, K – електрохімічний еквівалент речовини, q – заряд, що пройшов через електроліт, I – сила струму в електроліті.

Другий закон електролізу (II закон Фарадея) визначає електрохімічний еквівалент речовини:

$$K = \frac{1}{f} \frac{M}{Z}, \quad (I.37)$$

де M – молярна маса речовини, Z – валентність речовини, f – стала Фарадея.

1.2. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. У вершинах правильного трикутника зі стороною $a = 10$ см, знаходяться заряди $q_1 = 10$ мкКл, $q_2 = 20$ мкКл і $q_3 = 30$ мкКл. Визначити силу F , що діє на заряд Q_1 , з боку двох інших зарядів.

$a = 0.1$ м	Розв'язок:
$q_1 = 10^{-5}$ Кл	
$q_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл	
$q_3 = 3 \cdot 10^{-5}$ Кл	
$F - ?$	Знайдемо напруженість електричного поля, що створюється зарядами q_2 і q_3 у місці розташування заряду q_1 . Згідно з (1.4) напруженість

E_2 поля, яке створюється зарядом q_2 у вершині трикутника, де знаходиться q_1 :

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad (1)$$

а величина напруженості E_3 поля заряду Q_3 в цій же точці:

$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a^2}. \quad (2)$$

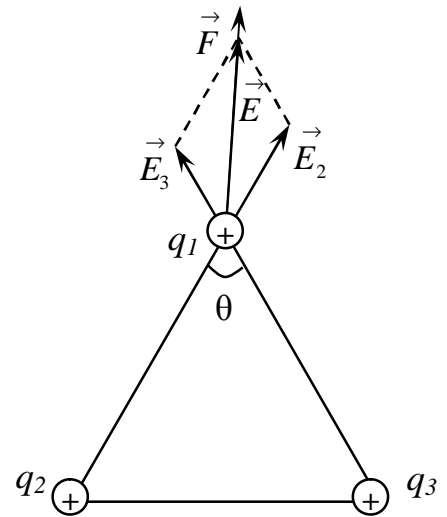


Рис.1.1

Так як заряди Q_2 і Q_3 додатні, то вектор \vec{E}_2 спрямований вздовж сторони q_2q_1 трикутника $q_1q_2q_3$ від заряду q_2 , а вектор \vec{E}_3 – вздовж сторони q_3q_1 від заряду q_3 – див. рис.1.1.

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів загальна напруженість \vec{E} у місці розташування заряду q_1 може бути знайдена як векторна сума \vec{E}_2 та \vec{E}_3 :

$$\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_3. \quad (3)$$

Згідно з теоремою косинусів для модуля вектора \vec{E} отримуємо:

$$E^2 = E_3^2 + E_2^2 + 2E_3E_2 \cos \theta, \quad (4)$$

де θ – кут між сторонами q_2q_1 та q_3q_1 ; так як трикутник правильний, то $\theta = 60^\circ$, $\cos 60^\circ = 1/2$.

Підставляючи (1) і (2) до (4) отримуємо:

$$E^2 = \left(\frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right)^2 + \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right)^2 + 2 \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta, \quad (5)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{q_3^2 + q_2^2 + 2q_3q_2 \cos \theta},$$

Тоді сила, що діє на заряд q_1 :

$$F = q_1 E,$$

$$F = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + 2q_2 q_3 \cos \theta}. \quad (6)$$

Так як заряд q_1 додатний, то ця сила спрямована у той же бік, що і \vec{E} (див. рисунок).

Перевіримо розмірність сили (6):

$$[F] = \frac{Кл}{Ф / м \cdot м^2} \sqrt{Кл^2} = \frac{Кл^2}{м} \frac{В}{Кл} = \frac{Кл \cdot В}{м} = \frac{Дж}{м} = \frac{Н \cdot м}{м} = Н$$

Користуючись формулою (6), отримаємо:

$$F = \frac{10^{-5}}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} (0.1)^2} \sqrt{(2 \cdot 10^{-5})^2 + (3 \cdot 10^{-5})^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{2}} \approx 392 (Н)$$

Приклад 2. Дві металеві кулі радіусами $R_1 = 5$ см і $R_2 = 10$ см мають заряди $Q_1 = 40$ нКл і $Q_2 = -20$ нКл, відповідно. Знайти енергію W , яка виділиться при розряді, якщо кулі з'єднати провідником. Відстань між кульками настільки велика, що їх взаємодію можна не враховувати.

$R_1 = 0.05$ м
$R_2 = 0.1$ м
$Q_1 = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл
$Q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$ Кл
$W - ?$

Розв'язок:

Потенціал Φ на поверхні кульки радіусом R , заряд якої дорівнює Q , дорівнює:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}. \quad (1)$$



Рис.1.2

Тому потенціали Φ_1 та Φ_2 поверхонь першої та другої кульок до з'єднання

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1}, \quad (2)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}. \quad (3)$$

Згідно з умовою задач кульки не взаємодіють одна з одною, тому енергія системи до їх з'єднання може бути записана у вигляді:

$$W_1 = \frac{1}{2} (Q_1 \Phi_1 + Q_2 \Phi_2),$$

або, враховуючи (2) і (3):

$$W_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2^2}{R_2} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right). \quad (4)$$

Після з'єднання металевих кульок провідником їх потенціали стають однаковими, отже мають змінитися заряди кульок. Якщо позначити ці нові заряди q_1 і q_2 , то їх потенціали ϕ_1 і ϕ_2 , будуть, згідно з (1), дорівнювати:

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad \Phi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (5)$$

Одночасно

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad (6)$$

таким чином

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

Отже, нові заряди кульок зв'язані між собою співвідношенням

$$q_1 = q_2 \frac{R_1}{R_2}. \quad (7)$$

Крім того, згідно з законом збереження електричного заряду має виконуватись рівність

$$Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2. \quad (8)$$

Підставивши (7) у (8), отримаємо:

$$Q_1 + Q_2 = q_2 \frac{R_1}{R_2} + q_2 = q_2 \frac{R_1 + R_2}{R_2},$$

$$q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2), \quad (9)$$

$$q_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2) \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2). \quad (10)$$

Енергія системи, яка складається з двох кульок, після їх з'єднання дорівнює:

$$W_2 = \frac{1}{2} (q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2). \quad (11)$$

З урахуванням формул (5), (9) і (10) вираз для W_2 набуде вигляду:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + q_2 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2} \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{R_1^2}{R_1(R_1 + R_2)^2} (Q_1 + Q_2)^2 + \frac{R_2^2}{R_2(R_1 + R_2)^2} (Q_1 + Q_2)^2 \right) = \\ &= \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right) = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Енергія ΔW , яка виділиться при розряді, дорівнює зменшенню енергії системи кульок:

$$\begin{aligned}
W &= W_1 - W_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right) - \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} - \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{R_1 + R_2} \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2(R_1 + R_2)Q_1^2 + R_1(R_1 + R_2)Q_2^2 - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)R_1R_2}{R_1R_2(R_1 + R_2)} \right) = \\
&= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2^2Q_1^2 + R_1^2Q_2^2 - 2R_1R_2Q_1Q_2}{R_1R_2(R_1 + R_2)} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(R_2Q_1 - R_1Q_2)^2}{R_1R_2(R_1 + R_2)} \\
W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(R_2Q_1 - R_1Q_2)^2}{R_1R_2(R_1 + R_2)} \quad (13)
\end{aligned}$$

Перевіримо розмірність величини, яка описується виразом (13):

$$[W] = \frac{1}{\Phi \cdot \text{м}^{-1}} \frac{(\text{м} \cdot \text{Кл})^2}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}^2}{\Phi} = \text{Кл}^2 \frac{\text{В}}{\text{Кл}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

Використовуючи формулу (13), знаходимо:

$$W = \frac{[0.1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} - 0.05 \cdot (-2 \cdot 10^{-8})]^2}{8 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot (0.05 + 0.1)} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}$$

Приклад 3. Точкові заряди $Q_1=2 \text{ мкКл}$, $Q_2=-10 \text{ мкКл}$ та $Q_3=5 \text{ мкКл}$ розташовані вздовж однієї прямої на однакових відстанях $a=10 \text{ см}$ один від одного. Яку роботу A потрібно виконати, щоб перенести заряд Q_1 у точку, розташовану в центрі відрізка, який з'єднує заряди Q_2 та Q_3 ?

$Q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ $Q_2 = -10^{-5} \text{ Кл}$ $Q_3 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ $a = 0.1 \text{ м}$
$A - ?$

Розв'язок:
Для відшукування роботи знайдемо енергію системи у початковому (W_1) та кінцевому (W_2)

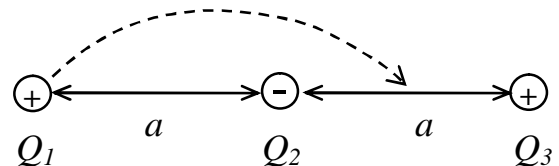


Рис.1.3

станах. Зокрема

$$W_1 = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{13} + W_{21} + W_{23} + W_{31} + W_{32}), \quad (1)$$

де W_{ij} – енергія взаємодії i -го та j -го зарядів. Множник «1/2» враховує, що енергія взаємодії i -го та j -го зарядів у сумі (1) враховується двічі. Оскільки

$$W_{ij} = Q_i \phi_j, \quad (2)$$

де ϕ_j – потенціал електричного поля, яке створюється зарядом Q_j у точці, де знаходиться заряд Q_i , маємо:

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1Q_2}{a} + \frac{Q_1Q_3}{2a} + \frac{Q_2Q_1}{a} + \frac{Q_2Q_3}{a} + \frac{Q_3Q_1}{2a} + \frac{Q_3Q_2}{a} \right),$$

або

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{a} + \frac{Q_1 Q_3}{2a} + \frac{Q_2 Q_3}{a} \right). \quad (3)$$

Після перенесення заряду Q_1 використовуючи аналогічні міркування отримуємо

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{a/2} + \frac{Q_1 Q_3}{a} + \frac{Q_2 Q_3}{a/2} \right). \quad (4)$$

Тоді робота може бути визначена як різниця цих енергій:

$$A = W_1 - W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{Q_1 Q_2}{a} - \frac{Q_1 Q_3}{2a} - \frac{Q_2 Q_3}{a} \right).$$

Остаточно маємо

$$A = W_1 - W_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3 + Q_1 Q_3 / 2). \quad (5)$$

Використовуючи формулу (5), знаходимо:

$$A = -\frac{1}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.1} (2 \cdot 10^{-6} \cdot (-10^{-5}) + (-10^{-5}) \cdot 5 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} / 2) \approx 5.9 \text{ (Дж)}.$$

Приклад 4. Дві довгі прямі паралельні нитки знаходяться на відстані $d=5$ см одна від одної. На нитках рівномірно розподілені заряди з лінійними густинами $\tau_1 = -5$ нКл/см і $\tau_2 = 10$ нКл/см. Визначити напруженість E електричного поля в точці, віддаленій від першої нитки на відстань $r_1 = 3$ см і від другої на відстань $r_2 = 4$ см.

$d = 0.05$ м
$\tau_1 = -5 \cdot 10^{-10}$ Кл/м
$\tau_2 = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл/м
$r_1 = 0.03$ м
$r_2 = 0.04$ м
$E - ?$

Розв'язок:

Спочатку знайдемо напруженість електричного поля \vec{E}_0 , яке створює одна довга пряма нитка, по якій рівномірно розподілено заряд з лінійною густиною τ , в точці А, віддаленій від нитки на відстань r (див рис.1.4). Для цього скористаємося

теоремою Остроградського-Гаусса і побудуємо поверхню, що проходить через т. А у вигляді циліндру висотою h і радіусом r , вісь якого співпадає з ниткою. Враховуючи симетрію задачі можна сказати, що вектор напруженості буде спрямований вздовж радіуса циліндру (при додатному заряду нитки від неї, при від'ємному – до неї), причому в усіх точках бокової поверхні циліндра він буде однаковий за модулем. Тоді вираз (І.9) перетворюється на наступний:

$$\oint_S \vec{E}_0 d\vec{S} = E_0 \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \tau h, \quad (1)$$

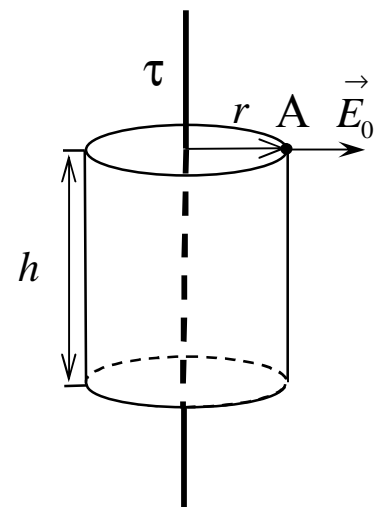


Рис.1.4

де $(2\pi rh)$ – площа бокової поверхні циліндра, (τh) – заряд тієї частини нитки, що знаходиться всередині циліндру; у формулі (1) враховано, що потік вектора напруженості через основи циліндра дорівнює нулеві, так як там вектори \vec{E}_0 та $d\vec{S}$ взаємоперпендикулярні. Звідси випливає, що

$$E_0 = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}. \quad (2)$$

Перевіримо розмірність отриманого виразу:

$$[E] = \frac{Kл/м}{м \cdot \Phi/м} = \frac{Kл}{\Phi \cdot м} = В/м.$$

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів, напруженість E у вказаній точці:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (3)$$

де \vec{E}_1 та \vec{E}_2 – вектори напруженості електричних полів, що створюються першою та другою нитками у цій точці відповідно. Згідно з (2):

$$E_1 = \frac{|\tau_1|}{2\pi\epsilon_0 r_1}; \quad E_2 = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0 r_2} \quad (4)$$

На рис. 1.5 при проведенні векторів \vec{E}_1 та \vec{E}_2 враховано знаки зарядів ниток, а саме те, що нитка 1 заряджена негативно, а нитка 2 – позитивно.

Запишемо теорему косинусів:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \theta \quad (5)$$

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta \quad (6)$$

З рівнянь (5) та (6) остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2} \\ E^2 &= \left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\left(\frac{\tau_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{r_2} \right)^2 + \frac{\tau_1 \tau_2}{r_1 r_2} \left(\frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} \right) \right] \\ E &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{\tau_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{r_2} \right)^2 + \frac{\tau_1 \tau_2}{r_1 r_2} \left(\frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} \right)} \quad (7) \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (7), знаходимо:

$$E \approx 5.4 \cdot 10^2 \text{ (В/м)}$$

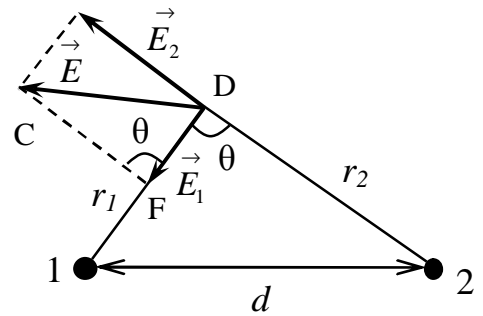


Рис.1.5

Приклад 5. Двом концентричним тонким металевим сферам радіусами $R_1=10$ см та $R_2=20$ см надано електричні заряди $Q_1=3$ мкКл та $Q_2=-12$ мкКл відповідно. Якими виразами описуються напруженість та потенціал електричного поля в областях простору 1) $r < R_1$; 2) $R_1 \leq r \leq R_2$; 3) $r > R_2$ (де r – відстань від центра сфер)? Визначити заряд q_1 внутрішньої сфери після її заземлення.

$R_1 = 0.1$ м
$R_2 = 0.2$ м
$Q_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл
$Q_2 = -12 \cdot 10^{-6}$ Кл
$q_1 - ?$

Розв'язок:

Розглянемо тонку металеву сферу радіусом R , якій надано заряд Q – див. рис. 1.6. Проведемо всередині цієї сфери додаткову концентричну сферу радіусом

$r < R$. Оскільки заряд всередині додаткової сфери відсутній, то, за теоремою Остроградського-Гауса, потік вектора \vec{E} через її поверхню дорівнює нулю. Очевидно, що це можливо, якщо у кожній точці поверхні додаткової сфери $\vec{E} = 0$. Враховуючи, що радіус r був вибраний довільно ($r < R$), можна стверджувати: напруженість електричного поля у будь-якій точці всередині зарядженої порожньої сфери дорівнює нулю.

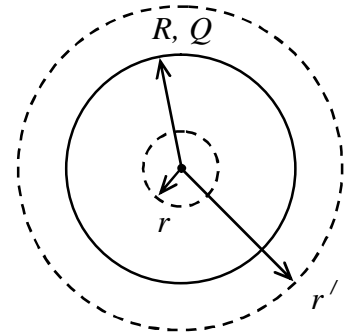


Рис.1.6

Якщо провести додаткову концентричну сферу радіусом $r' \geq R$, то враховуючи симетрію задачі можна сказати, що у всіх точках поверхні цієї сфери вектор \vec{E} буде спрямований вздовж її радіуса і буде однаковим за модулем. Тоді вираз (І.9) має бути записаний у вигляді:

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r'^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (1)$$

Таким чином, узагальнюючи можемо сказати, що напруженість електричного поля, яке створюється тонкою металевую однорідно зарядженою сферою на відстані r від її центру описується виразом

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases} \quad (2)$$

Як видно з формули (2), в даному випадку напруженість електричного поля залежить лише від відстані до центра сфери. Тому в цьому випадку вираз (І.10а) можна записати у вигляді $E = d\phi/dr$. Припустивши, що на нескінченності потенціал рівний нулеві, після інтегрування отримаємо:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, & 0 \leq r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases}. \quad (3)$$

Скористаємось отриманими результатами для розв'язку задачі. Згідно з принципом суперпозиції електричних полів (I.7) та (I.8):

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_1(r) + \vec{E}_2(r), \quad (4)$$

$$\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r), \quad (5)$$

де $\vec{E}_1(r)$ та $\varphi_1(r)$ і $\vec{E}_2(r)$ та $\varphi_2(r)$ - напруженість та потенціал електричного поля, яке створюється

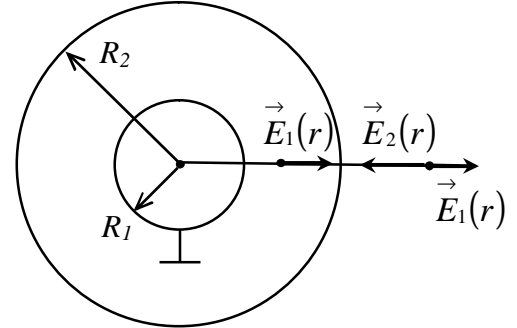


Рис.1.7

кожною зі сфер. Використавши вирази (2) та (3) і врахувавши знаки зарядів сфер отримаємо:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 - Q_2|}{r^2}, & r \geq R_2 \end{cases}. \quad (6)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{|Q_2|}{R_2} \right) & 0 \leq r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r} - \frac{|Q_2|}{R_2} \right) & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 - |Q_2|}{r} \right) & r \geq R_2 \end{cases}. \quad (7)$$

Якщо внутрішню сферу заземлити, то її потенціал має бути рівним нулеві. Для цього необхідно, щоб змінився її заряд таким чином, щоб $\varphi(r = R_1) = 0$ при незмінності заряду зовнішньої сфери. Величину q_1 нового заряду внутрішньої сфери знайдемо використовуючи вираз (7):

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{|Q_2|}{R_2} \right),$$

тобто

$$q_1 = |Q_2| R_1 / R_2. \quad (8)$$

Використовуючи формулу (8), знаходимо:

$$q_1 = 0.1 \cdot 12 \cdot 10^{-6} / 0.2 = 6 \cdot 10^{-6} \quad (Кл).$$

Приклад 6. Однорідно заряджена з об'ємною густиною заряду $(+\rho)$ куля радіусом R_1 містить сферичну порожнину радіусом R_2 ($R_1 > R_2$). Відстань між центрами сфери та порожнини дорівнює a . Чому дорівнює напруженість електричного поля E у порожнині?

Розв'язок:

Для розв'язку такого типу задач порожнину зручно розглядати як результат накладання двох рівномірно заряджених сфер з однаковими за величиною, але протилежними за знаком густинами зарядів (відповідно $(+\rho)$ та $(-\rho)$). Тобто, сферу з порожниною можна вважати системою, яка складається зі сфери радіусом R_1 , яка однорідно заряджена позитивним зарядом з густиною $(+\rho)$ та сфери радіусом R_2 , що також рівномірно заряджена, але негативним зарядом з густиною $(-\rho)$.

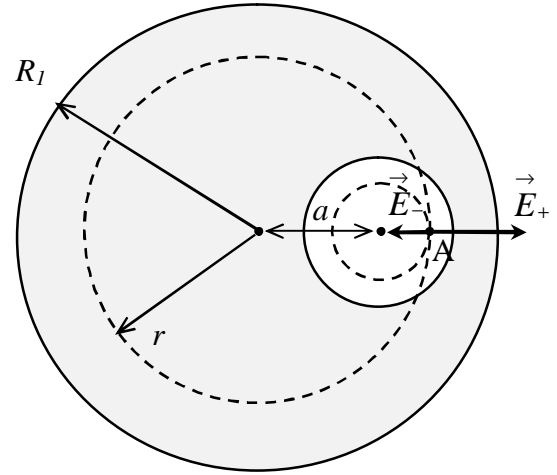


Рис.1.8

Виберемо на прямій, яка з'єднує центри сфери та порожнини довільну точку А всередині порожнини. Нехай вона знаходиться на відстані r від центра сфери. Виконаємо додаткову побудову: проведемо сферу радіусом r , концентричну сфері радіусом R_1 та сферу радіусом $(r-a)$, центр якої співпадає з центром порожнини. За теоремою Остроградського-Гауса потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню визначається тільки тим зарядом, який цією поверхнею охоплюється. Отже, напруженість E_A у т. А буде визначатися, з одного боку, напруженістю електричного поля E_+ на поверхні сфери радіусом r і об'ємною густиною заряду всередині сфери $(+\rho)$, а з іншого – напруженістю електричного поля E_- на поверхні сфери радіусом $(r-a)$ і об'ємною густиною заряду $(-\rho)$. Як видно з рис. 1.8, напруженості полів цих сфер у т. А спрямовані у різні боки, тому

$$E_A = E_+ - E_- . \quad (1)$$

Використавши міркування, подібні тим, що наведені у Прикладі 5, можемо записати:

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_+}{r^2} \\ E_- &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_-|}{(r-a)^2} , \end{aligned} \quad (2)$$

де Q_+ та Q_- - заряди всередині сфер, так як вони заряджені рівномірно, то

$$Q_+ = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$|Q_-| = \frac{4}{3}\pi (r-a)^3 \rho$$
(3)

Таким чином,

$$E_A = \frac{\rho}{3\epsilon_0} [r - (r-a)] = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}.$$
(4)

Виявляється, що напруженість E_A не залежить від положення т. А всередині порожнини і визначається лише відстанню між центрами сфери та порожнини. Таким чином, електричне поле у порожнині є однорідним і визначається формулою (4).

Приклад 7. Тонка прямолінійна дротина довжиною $2a$ рівномірно заряджена зарядом з лінійною густиною λ . До середини дротини проведено перпендикуляр. Знайти напруженість E_A та потенціал j_A електричного поля у точці А, розташованій на відстані b від дротини (вздовж перпендикуляра).

Розв'язок:

Виберемо систему координат таким чином, щоб її початок знаходився в основі перпендикуляру, вісь X була спрямована вздовж дротини, а вісь Y вздовж перпендикуляру - див. рис. 1.9. Розділимо дротину на елементарні відрізки довжиною dx . Заряд такого елементарного відрізка $dq = \lambda dx$, у т. А він створює електричне поле, напруженість якого, згідно з виразом (I.6), визначається виразом

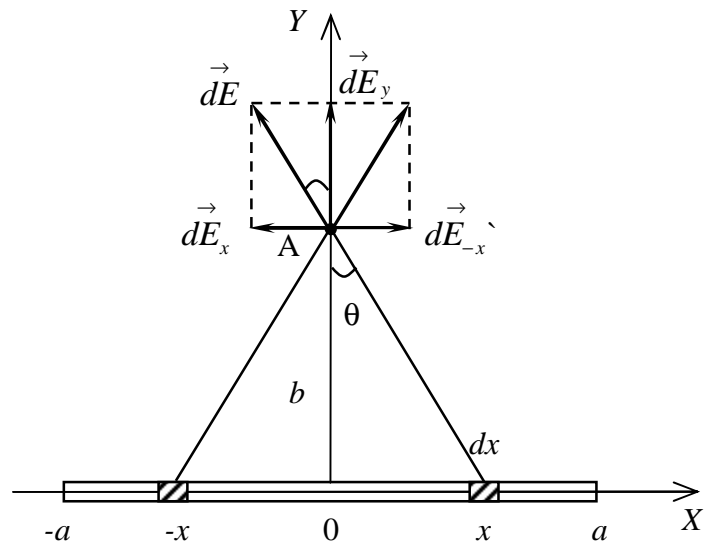


Рис.1.9

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + b^2}},$$
(1)

де $\sqrt{x^2 + b^2}$ - відстань від т. А до елементарного відрізка, положення якого характеризується координатою x . Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів (I.8), потенціал результуючого поля, яке створюється всіма елементарними відрізкамі в т. А можна визначити шляхом інтегрування:

$$\varphi_A = \int d\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

З математичного аналізу значення такого інтегралу відомо:

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + b^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right|. \quad (2)$$

При обчисленні напруженості електричного поля також будемо використовувати принцип суперпозиції (І.7). Але при цьому варто врахувати, що завдяки симетрії задачі для кожного елементарного відрізка, розташованого при додатніх значеннях x можна знайти відрізок з іншого боку від початку координат на такій же відстані від нього; цей відрізок буде створювати в т. А електричне поле, складова напруженості паралельна дротині якого буде компенсувати цю складову поля, утвореного першим елементарним відрізком. Тобто, достатньо враховувати лише складову dE_y напруженості електричного поля заряду dq :

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + b^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}, \quad (3)$$

$$E_A = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \Big|_{-a}^a = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$E_A = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Приклад 8. У простір між обкладинками плоского незарядженого конденсатора введено тонку металеву пластину такої ж площі, яка має заряд $+Q$. Пластина розташована паралельно до обкладинок на відстанях a та b від них ($b > a$). Обкладинки з'єднують провідником. Які електричні заряди q_1 та q_2 встановляться на обкладинках?

Розв'язок:

Напруженість електричного поля E , яке створюється пластиною по обидва боки від неї:

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \quad (1)$$

де S – площа пластини. Нехай потенціал електричного поля біля поверхні пластини дорівнює φ_0 , а в точках, де розташовані обкладинки А та В – відповідно φ_A та φ_B . При перенесенні

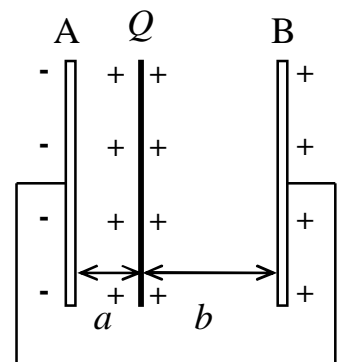


Рис.1.10

силами електричного поля одиничного позитивного заряду з поверхні зарядженої пластини до обкладинки В буде виконано роботу $(\varphi_0 - \varphi_B) = Eb$, а при перенесенні такого ж заряду до пластини А – відповідно $(\varphi_0 - \varphi_A) = Ea$. Тому між обкладинками А та В існує різниця

потенціалів

$$\varphi_A - \varphi_B = E(b-a) = Q(b-a)/2\varepsilon_0 S, \quad (2)$$

причому якщо $b > a$, то $\varphi_A > \varphi_B$. При з'єднанні обкладинок виникне рух вільних носіїв заряду, на обкладинці А буде накопичуватись негативний, а на обкладинці В – позитивний заряди. Зрозуміло, що за абсолютною величиною ці заряди будуть однаковими, тобто $|q_1| = |q_2| = q$. Рух вільних зарядів припиниться у той момент, коли потенціали поверхонь А та В зрівняються.

З іншого боку, якщо на обкладинках А та В з'явилися індуковані заряди величиною $(-q)$ та $(+q)$, то всередині такого конденсатора завдяки цим зарядам виникне електричне поле напруженістю

$$E' = \frac{q}{\varepsilon_0 S}, \quad (3)$$

а напруга на конденсаторі U буде дорівнювати

$$U = E(a+b) = q(a+b)/\varepsilon_0 S. \quad (4)$$

Оскільки результуюча різниця потенціалів між обкладинками має бути рівною нулеві, то

$$\varphi_A - \varphi_B = U. \quad (5)$$

Підставляючи (2) та (4) в (5) отримаємо

$$Q(b-a)/2\varepsilon_0 S = q(a+b)/\varepsilon_0 S, \\ q = \frac{Q(b-a)}{2(a+b)}. \quad (6)$$

Приклад 9. Між пластинами зарядженого конденсатора розташована слюдяна пластинка з діелектричною проникністю $\varepsilon = 6$. Визначити, який тиск діє, на неї якщо напруженість електричного поля всередині конденсатора $E = 1000$ кВ/м.

$\varepsilon = 6$ $E = 10^6$ В/м <p style="text-align: center;">р - ?</p>	<p>Розв'язок:</p> <p>Напруженість E_0 електричного поля, що створюється зарядженою площиною поблизу її поверхні, описується формулою:</p>
---	--

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (1)$$

де σ – поверхнева густина заряду на площині. Формула (1) записана за умови, що пластинка знаходиться в середовищі, для якого діелектрична проникність дорівнює одиниці (вакуум, повітря).

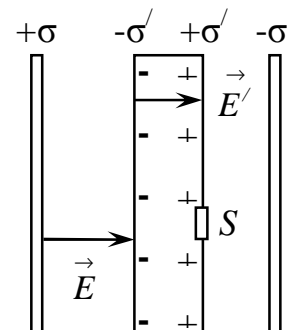


Рис.1.11

Конденсатор складається з двох різнойменно заряджених пластин (обкладинок), напруженість електричного поля E всередині нього згідно з принципом суперпозиції

електричних полів буде дорівнювати сумі напруженостей полів, що створюються кожною обкладинкою окремо, тобто:

$$E = 2E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2)$$

При внесенні діелектричної пластинки в електричне поле вона поляризується – на її поверхні з'являються зв'язані заряди. Знайдемо поверхневу густину заряду σ' , який з'явиться на слюдяній пластинці при внесенні її в конденсатор. Для цього використаємо той факт, що, з одного боку, напруженість поля E' всередині пластинки має бути в ϵ разів менша ніж у порожньому конденсаторі, а з іншого E' дорівнює різниці напруженостей, що створюються обкладинками конденсатора і зарядами на поверхнях діелектрика, тобто:

$$E' = \frac{E}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

З врахуванням (2) з формули (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\epsilon} &= E - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \\ \frac{\sigma'}{\epsilon_0} &= E - \frac{E}{\epsilon} = \frac{E}{\epsilon}(\epsilon - 1) \\ \sigma' &= \frac{\epsilon_0 E(\epsilon - 1)}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо невеликий елемент на поверхні пластинки площею S . Його заряд

$$q' = \sigma' S. \quad (5)$$

На заряд q' діють сили з боку обкладинок конденсатора і з боку протилежної грані пластинки. З врахуванням напрямків сил, вираз для загальної сили F , що діє на заряд q' має вигляд:

$$F = q' \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + q' \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - q' \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}. \quad (6)$$

Підставляючи (2), (4) та (5) до (6), маємо:

$$\begin{aligned} F &= \sigma' S \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \sigma' S \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E(\epsilon - 1)}{\epsilon} SE - \left(\frac{\epsilon_0 E(\epsilon - 1)}{\epsilon} \right)^2 S \frac{1}{2\epsilon_0} = S\epsilon_0 E^2 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} - \frac{(\epsilon - 1)^2}{2\epsilon^2} \right) = \\ &= S\epsilon_0 E^2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon} \right) = S\epsilon_0 E^2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{(2\epsilon - \epsilon + 1)}{2\epsilon} = \frac{S\epsilon_0 E^2 (\epsilon - 1)(\epsilon + 1)}{2\epsilon^2} = \frac{S\epsilon_0 E^2 (\epsilon^2 - 1)}{2\epsilon^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Тоді тиск на пластину:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\epsilon_0 E^2 (\epsilon^2 - 1)}{2\epsilon^2} \quad (8)$$

Перевіримо розмірність:

$$[p] = \Phi \cdot \text{м}^{-1} \cdot (B \cdot \text{м}^{-1})^2 = \Phi \cdot B^2 \cdot \text{м}^{-3} = \text{м}^{-2} \kappa \varepsilon^{-1} \text{с}^4 A^2 (\text{м}^2 \kappa \varepsilon \cdot \text{с}^{-3} A^{-1})^2 \cdot \text{м}^{-3} = \\ = \kappa \varepsilon \cdot \text{м}^{-1} \text{с}^{-2} = \kappa \varepsilon \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-2} = H \cdot \text{м}^{-2} = \text{Па}$$

Використовуючи формулу (8), знаходимо:

$$p = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (10^6)^2 (6^2 - 1)}{2 \cdot 6^2} \approx 4.3 \text{ (Па)}$$

Приклад 10. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 2$ мм, різниця потенціалів $U = 600$ В. Заряд кожної пластини $q = 40$ нКл. Визначити енергію W поля конденсатора і силу F взаємного притягання пластин.

$d = 0.002$ м
$U = 600$ В
$q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл
$W - ?$
$F - ?$

Розв'язок:

Енергія зарядженого конденсатора описується виразом

$$W = \frac{qU}{2}, \quad (1)$$

тобто

$$W = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)}.$$

Одна з обкладинок конденсатора перебуває в електричному полі іншої, тому для сили взаємного притягання справедливо

$$F = qE_0,$$

де E_0 – напруженість електричного поля, яке створюється однією з пластин, вона пов'язана з повною напруженістю електричного поля в конденсаторі співвідношенням

$$E_0 = E/2. \quad (3)$$

Електричне поле у плоскому конденсаторі однорідне, тому

$$E = U/d. \quad (4)$$

Таким чином

$$F = \frac{qU}{2d} = 0.006 \text{ (Н)}. \quad (5)$$

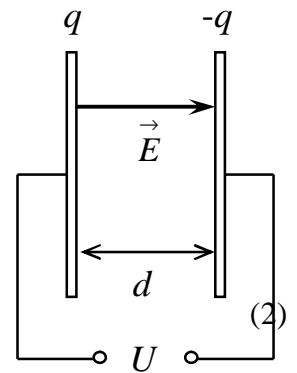


Рис.1.12

Приклад 11. Два конденсатори ємністю $C_1 = 5$ мкФ та $C_2 = 8$ мкФ з'єднані послідовно і приєднані до батареї з ЕРС $\varepsilon = 80$ В. Знайти заряди Q_1 і Q_2 кожного з конденсаторів і різниці потенціалів U_1 і U_2 між їх обкладинками.

$C_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф
$C_2 = 8 \cdot 10^{-6}$ Ф
$\varepsilon = 80$ В
$Q_1 - ?, Q_2 - ?$
$U_1 - ?, U_2 - ?$

Розв'язок:

Позначимо потенціал обкладинки конденсатора C_1 , з'єднаної з мінусом джерела живлення (ліва обкладинка), як ϕ_I , потенціал

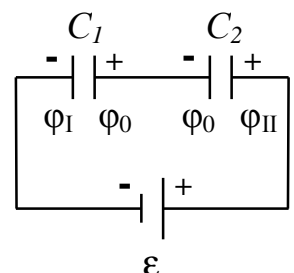


Рис.1.13

обкладинки конденсатора C_2 , з'єднаної з плюсом джерела живлення (права обкладинка), як φ_{II} , а потенціали інших обкладинок конденсатора (внутрішні обкладинки) – φ_0 (потенціали однакові, так як обкладинки з'єднані між собою) – див. рис. 1.13.

Нехай ліва обкладинка отримала від батареї заряд $(-Q)$, а права $(+Q)$. Тоді внутрішні обкладинки, з'єднані між собою провідником, будуть знаходитися у зовнішньому електричному полі, створеному різнойменними зарядами лівої та правої обкладинок. У такій системі буде відбуватися електростатична індукція, в наслідок якої на лівій та правій внутрішніх обкладинках виникатимуть різнойменні, але рівні за модулем індуковані заряди. Перерозподіл зарядів у системі завершиться тоді, коли величина внутрішніх зарядів за модулем зрівняється з величиною зовнішніх зарядів лівої та правої обкладинок. Таким чином, при послідовному з'єднанні конденсаторів зовнішні заряди подаються тільки на крайні праву та ліву обкладинки, заряд решти обкладинок індукований, тобто у сумі дорівнює нулю. Тому заряди конденсаторів однакові і дорівнюють заряду усієї системи: $Q_1 = Q_2 = Q$.

За визначенням:

$$\varphi_0 - \varphi_I = U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad (1)$$

$$\varphi_{II} - \varphi_0 = U_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad (2)$$

де U_1 і U_2 – напруги на конденсаторах C_1 і C_2 , відповідно.

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} (\varphi_0 - \varphi_I) + (\varphi_{II} - \varphi_0) &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}, \\ \varphi_{II} - \varphi_I &= Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Враховуючи, що $\varphi_{II} - \varphi_I = \varepsilon$, остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = Q \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}, \\ Q &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Перевіримо розмірність:

$$[Q] = \frac{\Phi \cdot \Phi}{\Phi + \Phi} \cdot B = \Phi \cdot B = Кл$$

Підставивши (4) в (1) та (2) знаходимо різницю потенціалів між обкладинками конденсаторів:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \epsilon, \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \epsilon. \quad (6)$$

Використовуючи формули (4), (5), (6) знаходимо:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6}} \cdot 80 \approx 2.46 \cdot 10^{-4} \quad (Кл)$$

$$U_1 = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6}} \cdot 80 \approx 49.2 \quad (В)$$

$$U_2 = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6}} \cdot 80 \approx 30.8 \quad (В)$$

Приклад 12. Сила струму у провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 \sin \omega t$. Знайти заряд q , що перетинає переріз провідника за час t , який дорівнює половині періоду T , якщо амплітуда сили струму $I_0 = 10 \text{ А}$, циклічна частота $\omega = 50 \pi \text{ с}^{-1}$.

$\begin{array}{l} I = I_0 \sin \omega t \\ t = T/2 \\ I_0 = 10 \text{ А} \\ \omega = 50 \pi \text{ с}^{-1} \\ \hline q - ? \end{array}$	<p>Розв'язок:</p> <p>Сила струму I та заряд dq, що пройшов за час dt через переріз провідника, зв'язані між собою співвідношенням:</p> $I = \frac{dq}{dt} \quad (1)$
---	---

Отже, заряд q , що пройшов за час t , можна визначити за формулою:

$$q = \int_0^t I dt. \quad (2)$$

За умовою задачі сила струму у провіднику змінюється за законом $I = I_0 \sin \omega t$. Підставивши цей вираз у формулу (2), знаходимо:

$$q = \int_0^t I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^t = \frac{I_0}{\omega} (1 - \cos \omega t). \quad (3)$$

Період T і циклічна частота ω зв'язані між собою співвідношенням $T = 2\pi/\omega$; за умовою $t = T/2$, тому:

$$Q = \frac{I_0}{\omega} \left[1 - \cos \left(\omega \frac{T}{2} \right) \right] = \frac{I_0}{\omega} \left[1 - \cos \left(\omega \frac{\pi}{\omega} \right) \right] = \frac{I_0}{\omega} (1 - \cos \pi) = \frac{2I_0}{\omega}. \quad (4)$$

Користуючись формулою (4) знаходимо:

$$Q = \frac{2 \cdot 10}{50 \cdot 3.14} \approx 0.13 \quad (Кл).$$

Приклад 13. За час $\Delta t = 5$ с сила струму через резистор опором $R = 20$ Ом лінійно збільшилась від нуля до величини $I_m = 15$ А. Яка кількість теплоти W виділилась у резисторі за цей час?

$R = 20$ Ом
$\Delta t = 5$ с
$I_m = 15$ А
$W - ?$

Розв'язок:

Згідно з законом Джоуля-Ленца (І.31, І.32):

$$dW = I^2 R dt, \quad (1)$$

де dW – кількість теплоти, що виділилась у провіднику з опором R за час dt ; I – сила струму в провіднику – величина, яка у загальному випадку залежить від часу. Якщо сила струму зростає лінійно, то:

$$I(t) = at + b, \quad (2)$$

де a та b – сталі коефіцієнти. Згідно з умовою задачі

$$I(t = 0) = 0 = b \quad (3)$$

$$I(t = \Delta t) = I_m = a\Delta t + b,$$

тому

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= I_m / \Delta t. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином, з врахуванням виразів (2) та (4) формула (1) набуде вигляду:

$$dW = \left(\frac{I_m}{\Delta t} t \right)^2 R dt. \quad (5)$$

Тоді кількість теплоти W , що виділась у провіднику за час Δt :

$$W = \int_0^{\Delta t} \frac{I_m^2}{\Delta t^2} R t^2 dt = \frac{I_m^2}{\Delta t^2} R \int_0^{\Delta t} t^2 dt = \frac{I_m^2}{\Delta t^2} R \frac{1}{3} \Delta t^3 = \frac{1}{3} I_m^2 R \Delta t. \quad (6)$$

Користуючись формулою (4), знаходимо:

$$W = \frac{1}{3} (15)^2 \cdot 20 \cdot 5 = 7500 \text{ (Дж)}.$$

Приклад 14. Акумулятор з ЕРС $\varepsilon = 12$ В заряджається від мережі постійного струму з напругою $U = 15$ В. Визначити напругу U_i на клеммах акумулятора. Розглянути випадки, коли опір з'єднання між акумулятором і мережею дорівнює нулеві і коли цей опір дорівнює внутрішньому опору акумулятора $r = 10$ Ом.

$\varepsilon = 12$ В
$U = 15$ В
$r = 10$ Ом
$U_i - ?$

Розв'язок:

Запишемо закон Ома для ділянки кола, що містить ЕРС:

$$I(R + r) = U - \varepsilon, \quad (1)$$

де I – сила струму у колі, U – напруга на кінцях ділянки кола, що

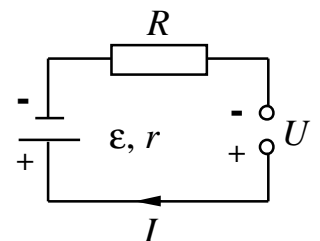


Рис.1.14

містить ЕРС; значення ЕРС ϵ взято зі знаком "-" тому, що акумулятор ввімкнений у режимі зарядки, тобто напрямки струмів, які створюються зовнішнім джерелом та акумулятором, протилежні; r – внутрішній опір акумулятора, R – опір зовнішньої ділянки кола (опір з'єднання).

Напругу на клеммах акумулятора U_i можна знайти як різницю між напругою в мережі та падінням напруги на зовнішній ділянці кола:

$$U_i = U - IR. \quad (2)$$

Підставивши (1) до (2), знаходимо:

$$U_i = U - \frac{U - \epsilon}{R + r} R = \frac{UR + Ur - UR + \epsilon R}{R + r} = \frac{Ur + \epsilon R}{R + r}. \quad (3)$$

У випадку, коли $R = 0$

$$U_i = U = 15 \text{ (В)};$$

коли ж $R = r$:

$$U_i = \frac{U + \epsilon}{2} = 13.5 \text{ (В)}.$$

Приклад 15. Три резистори з опорами $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$ і $R_3 = 2 \text{ Ом}$, а також джерело живлення $\epsilon_1 = 2.2 \text{ В}$ з'єднані, як показано на рис.1.15. Знайти ЕРС ϵ джерела, яке необхідно увімкнути у коло між точками А та В так, щоб через провідник опором R_3 проходив струм силою $I_3 = 1 \text{ А}$ у напрямку, що вказаний стрілкою. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

$R_1 = 6 \text{ Ом}$	Розв'язок:
$R_2 = 3 \text{ Ом}$	Розташуємо джерело з ЕРС
$R_3 = 2 \text{ Ом}$	ϵ між точками А та В і
$\epsilon_1 = 2.2 \text{ В}$	використаємо правила Кірхгофа.
$I_3 = 1 \text{ А}$	Позначимо струми, що проходять
$\epsilon - ?$	через R_1 та R_2 , як I_1 та I_2

відповідно, спрямувавши їх так, як показано на рис. 1.15.

Згідно з першим правилом Кірхгофа для вузла a :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (1)$$

Запишемо друге правило Кірхгофа для замкнених контурів ade та $bcda$, вибираючи напрямок обходу за годинниковою стрілкою:

$$efad: \quad I_3 R_3 - I_2 R_2 = \epsilon, \quad (2)$$

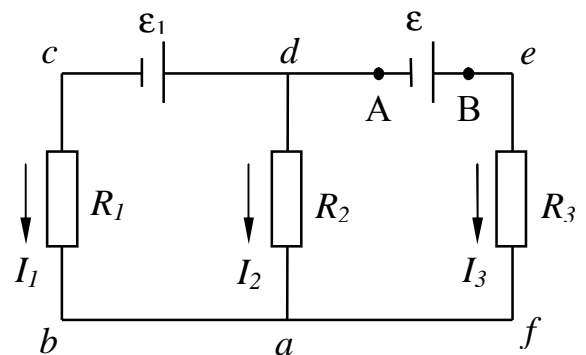


Рис.1.15

$$dabc: \quad I_2 R_2 - I_1 R_1 = \varepsilon_1. \quad (3)$$

Перед доданками $I_2 R_2$ у рівнянні (2) та $I_1 R_1$ у рівнянні (3) стоїть знак мінус тому, що вибрані напрями обходу контурів не співпадають з напрямками струмів I_2 та I_1 відповідно.

Із системи рівнянь (1)-(3) знайдемо ε . Для цього виразимо I_1 з (1) та підставимо до (3):

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_2 - I_3, \\ I_2 R_2 + (I_2 + I_3) R_1 &= \varepsilon_1, \\ I_2 (R_2 + R_1) + I_3 R_1 &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

звідси:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 - I_3 R_1}{R_1 + R_2}. \quad (4)$$

Підставимо (4) до (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= I_3 R_3 - R_2 \frac{(\varepsilon_1 - I_3 R_1)}{(R_1 + R_2)} = \frac{I_3 R_1 R_3 + I_3 R_3 R_2 - R_2 \varepsilon_1 + I_3 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ \varepsilon &= \frac{I_3 (R_1 R_3 + R_3 R_2 + R_1 R_2) - R_2 \varepsilon_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Користуючись формулою (5) знаходимо:

$$\varepsilon = \{1 \cdot (6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3) - 3 \cdot 2.2\} / (6 + 3) \approx 3.3 \quad (B).$$

1.3. Задачі для самостійного розв'язку

I.1. Дві однакові кульки масою m підвішені в одній точці на нитках довжиною l кожна. Кут між нитками дорівнює 2α . Визначити заряд кожної з кульок, вважаючи, що вони однакові.

I.2. Дві маленькі однакові кульки з однаковими зарядами знаходяться на відстані r одна від одної і притягуються з силою F_1 . Після того, як кульки доторкнули одна до одної, а потім розвели на таку ж саму відстань, вони почали відштовхуватись з силою F_2 . Визначити початкові заряди кульок.

I.3. У центр квадрату, у кожній вершині якого розташовані однакові заряди $q = 2$ мкКл, вносять ще один заряд. Якою повинна бути величина цього заряду, щоб система знаходилась у стані рівноваги? Чи буде ця рівновага стійкою?

I.4. Два точкових заряди q_1 та $(-q_2)$ знаходяться на відстані d один від одного. Визначити напруженість \vec{E} та потенціал ϕ електричного поля, що створюється цими зарядами у точці, розташованій на відстані r_1 від заряду q_1 та на відстані r_2 від заряду $(-q_2)$.

I.5. Два точкові заряди $+Q$ та $(-q)$ знаходяться у повітрі на відстані d один від одного. Побудувати графіки залежності значень напруженості і потенціалу електричного поля, що

створюється цими зарядами, від відстані вздовж прямої, яка їх з'єднує.

I.6. Електрон, який має швидкість V , влітає в однорідне електричне поле з напруженістю E , причому вектори \vec{V} та \vec{E} паралельні. Через який час швидкість електрону стане рівною нулеві? Чому дорівнює різниця потенціалів між точками, де електрон влітає у поле і де його швидкість стане нульовою?

I.7. Електрон з початковою швидкістю V_0 влетів в однорідне електричне поле напруженістю E . Вектор початкової швидкості перпендикулярний лініям напруженості електричного поля. Визначити швидкість електрона через час t після початку руху в електричному полі.

I.8. У вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $a = 2$ см, знаходяться заряди $q_1 = 1$ нКл, $q_2 = 2$ нКл та $q_3 = 3$ нКл. Визначити роботу A по переміщенню заряду q_3 до середини протилежної сторони трикутника (рис.1.16).

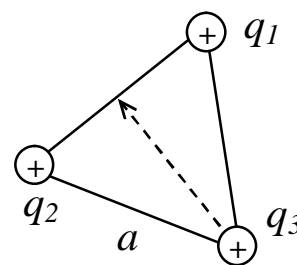


Рис.1.16

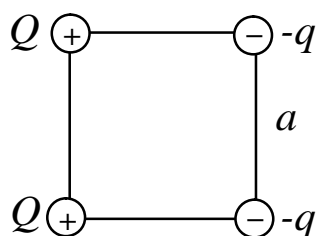


Рис.1.17

I.9. У двох вершинах квадрата знаходяться заряди величиною $+Q$, а в двох інших – величиною $(-q)$. Чому дорівнює потенціальна енергія системи зарядів, якщо сторона квадрата a (рис.1.17).

I.10. Два точкових додатніх заряди Q та q масами M та m відповідно знаходяться на відстані R . Заряди починають рухатись назустріч один одному зі швидкостями V та U . До якої мінімальної відстані вони наблизяться?

I.11. Який буде потенціал краплі, що утворилась в результаті злиття $N = 10$ однакових кулеподібних крапель, кожна з яких заряджена до потенціалу $\phi = 2$ В.

I.12. Електричне поле утворюється диполем з дипольним моментом $p = 200$ пКл·м. Визначити різницю потенціалів $\Delta\phi$ між двома точками, розташованими на осі диполя на відстані $r = 40$ см від його центра симетрично відносно нього.

I.13. Знайти силу взаємодії двох диполів з дипольними моментами p_1 та p_2 , які знаходяться на відстані r , якщо вектори \vec{p}_1 та \vec{p}_2 спрямовані вздовж прямої, яка їх з'єднує.

I.14. Знайти напруженість електричного поля, що створюється нескінченно довгим циліндром радіусом R на відстані r від його осі, якщо циліндр заряджено: а) лише на поверхні з лінійною густиною заряду λ ; б) по всьому об'єму з об'ємною густиною заряду ρ .

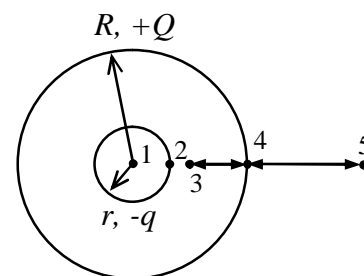


Рис.1.18

I.15. Всередині порожньої металевої сфери радіусом R знаходиться порожня металева сфера радіусом r (рис. 1.18).

Заряд зовнішньої сфери дорівнює $+Q$, внутрішньої – $(-q)$. Знайти напруженість і потенціал поля в точках 1, 2, 3, 4 та 5.

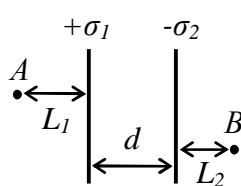


Рис.1.19

I.16. Дві паралельні заряджені площини з густинами заряду $+\sigma_1$ і $-\sigma_2$ знаходяться на відстані d одна від одної. Вважаючи, що відстані L_1 і L_2 відомі (рис. 1.19), знайти напруженість поля в точках А і В, а також різницю потенціалів між ними.

I.17. Дві паралельні незаряджені пластини площею S кожна розташовані на відстані d одна від одної. Між пластинами вносять заряджену площину такої ж площі, так що вона знаходиться на відстані L від лівої пластини (рис. 1.20). Заряд площини $+q$. Незаряджені пластини замикають між собою. Знайти силу, що діє на заряджену пластину.

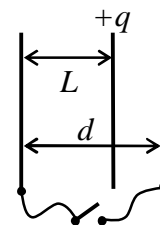


Рис.1.120

I.18. Сфера радіусом r знаходиться всередині сфери радіусом R таким чином, що їх центри співпадають. Заряд внутрішньої сфери q , зовнішньої – Q . На скільки зміниться потенціал кожної зі сфер, якщо внутрішню заземлити.

I.19. До нескінченної рівномірно зарядженої вертикальної площини підвішено на нитці однойменно заряджену кульку масою $m = 50$ мг і зарядом $q = 0.6$ нКл. Сила натягу нитки, на якій висить кулька, $F = 0.7$ мН. Знайти поверхневу густину заряду σ на площині.

I.20. Дві однакові заряджені кульки підвішено в одній точці на нитках однакової довжини, які при цьому розійшлися на деякий кут. Кульки занурюють у масло. Яка густина масла ρ_0 , якщо кут розходження ниток після занурення залишається незмінним? Густина матеріалу кульок $\rho = 1.5 \cdot 10^3$ кг/м³, діелектрична проникність масла $\epsilon = 2.2$.

I.21. Простір між обкладинками плоского конденсатора заповнено двома шарами діелектрика: скла товщиною $d_1 = 0.2$ см і парафіну товщиною $d_2 = 0.3$ см. Різниця потенціалів між обкладинками $U = 300$ В. Визначити напруженість поля і падіння напруги у кожному з шарів. Діелектричні проникності скла і парафіну $\epsilon_1 = 7$ і $\epsilon_2 = 2$ відповідно.

I.22. У випадку, коли простір між обкладинками плоского конденсатора заповнений повітрям, напруженість електричного поля між обкладинками дорівнює E_0 . Знайти напруженість електричного поля у кожній точці простору між обкладинками, якщо половину простору заповнили однорідним діелектриком з відносною діелектричною проникністю ϵ як показано на рис. 1.21 за умови, що при введенні діелектрика а) напруга між обкладинками не змінювалась; б) заряди на обкладинках залишалися постійними.

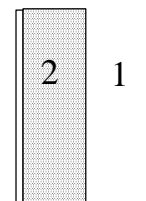


Рис.1.21

I.23. Простір між обкладинками плоского конденсатора, розташованими на відстані $d = 2$ мм, заповнений діелектриком. Різниця потенціалів між обкладинками $U_1 = 0.6$ кВ. Якщо, відключивши джерело струму, витягнути діелектрик із конденсатора, то різниця потенціалів на

пластинах конденсатора зросте до $U_2 = 1.8$ кВ. Знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів σ на діелектрику і відносну діелектричну проникність ϵ діелектрика.

I.24. Площа кожної з обкладинок плоского конденсатора дорівнює S , відстань між ними D . У конденсатор паралельно обкладинкам вводять пластину з діелектрика товщиною d , яка має відносну діелектричну проникність ϵ . Знайти ємність створеної системи, коли: а) пластину введена повністю; б) на половину висоти конденсатора.

I.25. Конденсатор ємністю C заряджено до напруги U . До нього підключають незаряджений конденсатор ємністю C_1 (рис. 1.22). Визначити заряд q , який пройшов по провідникам після замикання ключа. Яка кількість тепла W при цьому виділилась?

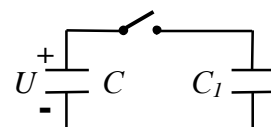


Рис.1.22

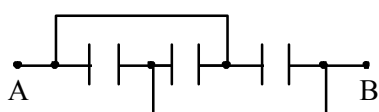


Рис.1.23

I.26. Три однакові конденсатори ємністю C кожен з'єднані так, як показано на схемі (рис. 1.23). Знайти ємність системи між точками А і В.

I.27. Однакові пластини площею S кожна розташовані на відстані d одна від одної і з'єднані так, як показано на схемах (рис. 1.24). Знайти ємність створених систем (між точками А та В).

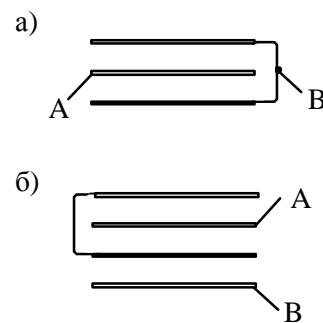


Рис.1.24

I.28. Обкладки конденсатора з невідомою ємністю, зарядженого до напруги U_1 , з'єднують з обкладками конденсатора ємністю C_2 , зарядженого до напруги U_2 . Визначити невідому ємність, якщо напруга на конденсаторах після з'єднання дорівнює U . Розглянути наступні випадки: а) конденсатори з'єднують одноіменними обкладками; б) різноіменними.

I.29. На рис. 1.25 наведена схема, яка складається з двох конденсаторів ємностями C_1 і C_2 та двох джерел струму з ЕРС ϵ_1 і ϵ_2 . Знайти різницю потенціалів між точками А і В.

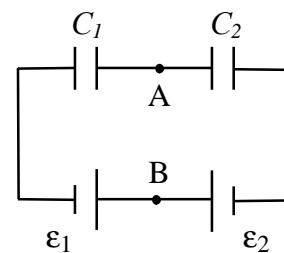


Рис.1.25

I.30. Радіус внутрішньої обкладинки повітряного циліндричного конденсатора $r = 1.5$ см, радіус зовнішньої – $R = 3.5$ см. До конденсатора прикладена напруга $U = 2300$ В. Визначити, яку швидкість V отримає

електрон під дією електричного поля в цього конденсаторі, якщо він переміститься з точки, розташованої на відстані $x_1 = 2.5$ см від осі циліндра у точку, віддалену від осі на відстань $x_2 = 2$ см.

I.31. У простір між двома паралельними пластинами, різниця потенціалів між якими $U = 8$ кВ, паралельно пластинам влітає електрон і вилітає з нього за час $t = 10^{-9}$ с. На яку відстань x від початкового напрямку руху відхилиться електрон за цей час, якщо відстань між пластинами $d = 4$ см?

I.32. Струм з якою максимальною густиною j може проходити по мідному провіднику, якщо падіння напруги не повинно перевищувати $U = 0.01$ В на кожний метр довжини провідника. Яка втрата потужності P струму на довжині $L = 1$ км такого провідника? Площа поперечного перерізу провідника $S = 25$ мм², питомий опір міді $\rho = 1.71 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

I.33. Визначити повний опір кола (рис. 1.26), якщо величини R_1, R_2, R_3, R_4 та r відомі.

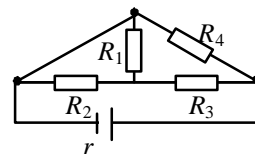


Рис.1.26

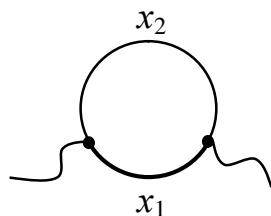


Рис.1.27

I.34. З шматка дроту загальним опором R зроблено кільце. Де треба приєднати провідники, які підводять струм (рис. 1.27), щоб опір кільця дорівнював $r = 0.1 R$.

I.35. Котушка з мідного дроту має опір $R = 10.8$ Ом. Маса мідного дроту $m = 3.41$ кг. Якою є довжина l та діаметру d дроту, намотаного на котушку? Питомий опір міді $\rho = 1.71 \cdot 10^{-8}$ Ом м, густина міді $\mu = 8.6 \cdot 10^3$ кг/м³.

I.36. При температурі $t_1 = 20^\circ\text{C}$ опір електролампи з вольфрамовою ниткою дорівнює $R_1 = 300$ Ом, а в розжареному стані – $R_2 = 2400$ Ом. Визначити температуру розжарення лампи t_2 , якщо температурний коефіцієнт опору для вольфраму $\alpha = 4.2 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹.

I.37. Коло з трьох послідовних джерел з ЕРС $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ та ε_3 та внутрішніми опорами r_1, r_2 та r_3 , відповідно, закорочене – див. рис. 1.28. Яку напругу покаже вольтметр, підключений до джерела ε_2 ?

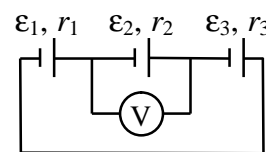


Рис.1.28

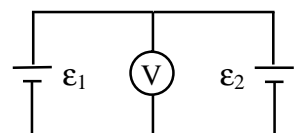


Рис.1.29

I.38. Два джерела з ЕРС ε_1 та ε_2 з'єднані паралельно – рис. 1.29. Внутрішні опори джерел однакові. Визначити різницю потенціалів між затискачами елементів.

I.39. У випадку, коли зовнішній опір $R_1 = 8$ Ом, сила струму у колі, яке складається з цього опора та джерела струму, дорівнює $I_1 = 0.8$ А; коли опір $R_2 = 15$ Ом – сила струму $I_2 = 0.5$ А. Визначити силу струму короткого замикання I_0 джерела.

I.40. ЕРС акумулятора автомобіля $\varepsilon = 12$ В. При силі струму в $I = 3$ А його ККД $\eta = 0.8$. Визначити внутрішній опір r акумулятора.

I.41. Електрочайник містить у нагрівнику дві секції. При вмиканні першої секції вода закипає за час t_1 , при вмиканні другої – за час t_2 . Через який час закипить вода, якщо включити секції а) паралельно; б) послідовно.

I.42. Знайти потужність N , яка виділяється у зовнішньому колі, що складається з двох однакових резисторів. Відомо, що ця потужність однакова як при послідовному, так і при паралельному з'єднанні резисторів. ЕРС джерела струму дорівнює ε , внутрішній опір r .

I.43. Електровоз рухається зі швидкістю V і тягне потяг масою m . При цьому він споживає струм силою I з кола з вихідною напругою U . Визначити ККД електровозу, якщо коефіцієнт тертя під час руху потягу дорівнює μ .

I.44. При увімкненні електродвигуна до мережі з напругою U він споживає струм силою I . Знайти потужність, яка споживається двигуном та його ККД, якщо опір обмотки двигуна R .

I.45. За час $t = 8$ с при рівномірно зростаючій силі струму у провіднику з опором $R = 8$ Ом виділилася кількість теплоти $W = 500$ Дж. Визначити заряд q , який пройшов через провідник за цей час, якщо сила струму у початковий момент часу дорівнювала нулеві.

I.46. Дана схема – рис. 1.30. Величини опорів R_1, R_2, R_3 , ЕРС одного з джерел ε_1 та сила струму I_3 , що проходить через опір R_3 , відомі. Знайти величину ЕРС другого джерела ε_2 .

Внутрішніми опорами джерел знехтувати.

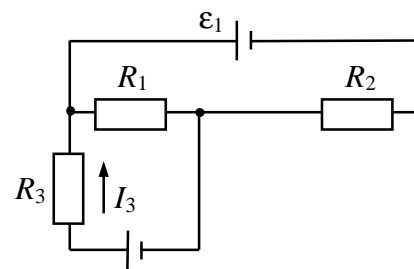


Рис.1.30

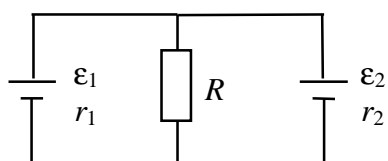


Рис.1.31

I.47. Два джерела з ЕРС ε_1 та ε_2 , внутрішніми опорами r_1 і r_2 з'єднані за схемою, що зображена на рис. 1.31. Знайти струм, що проходить через резистор з опором R .

I.48. Визначити падіння напруги на резисторах з опорами $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, які увімкнені, як показано на рис.1.32. ЕРС джерел $\varepsilon_1 = 10$ В та $\varepsilon_2 = 4$ В.

Опорами джерел струму знехтувати.

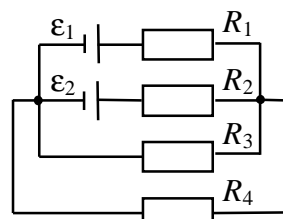


Рис.1.32

I.49. Два елементи з ЕРС ε_1 і ε_2 та внутрішніми опорами r_1 і r_2 увімкнено до схеми, яка зображена на рис. 1.33. Опір резисторів R, R_1 та R_2 та ємність конденсатора C відомі. Знайти заряд на конденсаторі.

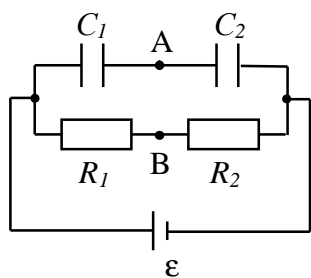


Рис.1.34

I.50. Джерело струму з ЕРС ε , два опори R_1 та R_2 і два конденсатори C_1 та C_2 з'єднані так, як показано на рис. 1.34. Визначити різницю потенціалів між точками А та В. Внутрішнім опором джерела знехтувати.

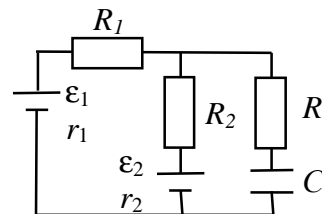


Рис.1.33

I.51. Визначити силу струму, який проходить через кожен з елементів схеми, зображеної на рис. 1.35, та

напругу на затискачах реостату R , якщо $\varepsilon_1 = 12$ В, $r_1 = 1$ Ом, $\varepsilon_2 = 6$ В, $r_2 = 1.5$ Ом, $R = 20$ Ом.

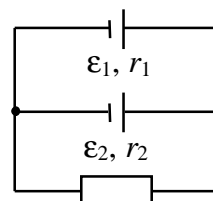


Рис.1.35

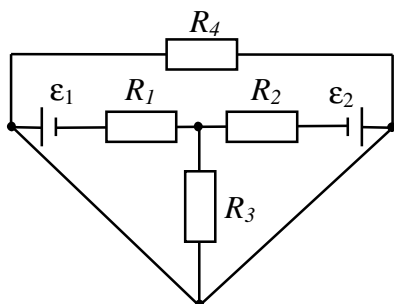


Рис.1.36

I.52. В електричне коло (рис. 1.36) увімкнено чотири опори ($R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10^3$ Ом) і два джерела ЕРС ($\varepsilon_1 = 1.5$ В та $\varepsilon_2 = 1.8$ В). Визначити силу струму, що проходить через кожен з

опорів. Внутрішніми опорами джерел знехтувати.

I.53. За який час τ при електролізі мідного купоросу маса мідної пластинки (катода) збільшиться на $\Delta m = 99$ мг? Площа пластинки $S = 25$ см², густина струму $j = 200$ А/м². Знайти товщину d шару міді, що утворився на пластинці, якщо густина міді $\rho = 8.6 \cdot 10^3$ кг/м³.

I.54. Дві електролітичні ванни з розчинами AgNO_3 і CuSO_4 з'єднані послідовно. Яка маса m_2 міді виділиться за час, протягом якого виділилася маса срібла $m_1 = 180$ мг?

I.55. Яку енергію W потрібно затратити, щоб при електролізі розчину AgNO_3 виділилася маса срібла $m = 500$ мг? Різниця потенціалів на електродах $U = 4$ В.

Частина 2. Магнетизм. Закони змінного струму

2.1. Основні формули

Індукція магнітного поля визначається максимальною силою, з якою однорідне магнітне поле діє на прямолінійний провідник одиничної довжини, сила електричного струму в якому одинична.

Закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (\text{II.1})$$

де $d\vec{B}$ – вектор індукції магнітної поля, яке створюється елементом провідника довжиною dl у точці, положення якої відносно такого елемента задається вектором \vec{r} ; напрямок вектора $d\vec{l}$ визначається напрямом струму, I – сила струму у провіднику, μ_0 - магнітна стала.

Індукція магнітного поля, що створюється зарядом q , який рухається зі швидкістю \vec{V}

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{V}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (\text{II.2})$$

де вектор \vec{r} задає положення точки поля відносно заряду.

Принцип суперпозиції магнітних полів: індукція магнітного поля, яке створюється системою струмів у даній точці простору, визначається векторною сумою індукцій магнітних полів окремих струмів у цій точці:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (\text{II.3})$$

Індукція магнітного поля у центрі кругового витка радіусом R , по якому проходить струм силою I :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (\text{II.4})$$

Індукція магнітного поля, яке створюється нескінченним прямолінійним провідником:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}, \quad (\text{II.5})$$

де r_0 – довжина перпендикуляра з точки, де визначається магнітна індукція, до провідника.

Магнітне поле всередині соленоїда

$$B = \mu \mu_0 n_l I, \quad (\text{II.6})$$

де n_l – число витків соленоїда на одиницю довжини, μ – відносна магнітна проникність речовини, що заповнює соленоїд.

Сила Ампера:

$$\vec{F}_A = I \int_L [\vec{dl}, \vec{B}], \quad (\text{II.7a})$$

де \vec{F}_A – сила, що діє на провідник зі струмом з боку магнітного поля, I – сила струму у провіднику, L – довжина провідника, \vec{B} – вектор індукції магнітного поля; інтегрування відбувається вздовж провідника. У випадку, коли магнітне поле однорідне, а провідник прямолінійний, вираз (II.7a) спрощується:

$$\vec{F}_A = I [\vec{L}, \vec{B}], \quad (\text{II.7б})$$

Сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q [\vec{V}, \vec{B}], \quad (\text{II.8})$$

де \vec{F}_L – сила, що діє з боку магнітного поля на заряд, який рухається, \vec{V} – швидкість заряду)

Різниця потенціалів при ефекті Хола:

$$U_H = R_H B j a, \quad (\text{II.9})$$

де R_H – стала Хола, B – індукція вертикального магнітного поля, j – густина струму, який проходить в горизонтальному напрямі; a – ширина зразка; U_H – напруга, що виникає між гранями прямокутного зразка, нормаль до яких спрямована перпендикулярно як напрямку струму, так і напрямку індукції магнітного поля.

Стала Хола для напівпровідників:

$$R_H = \frac{3\pi}{8en_q}, \quad (\text{II.10})$$

де n_q – концентрація вільних носіїв заряду, e – елементарний заряд.

Магнітний момент плоского контуру зі струмом

$$\vec{p}_m = I S \vec{n}, \quad (\text{II.11})$$

де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до площини контуру, I – сила струму у контурі, S – площа контуру, напрямок \vec{n} визначається правилом правого гвинта.

Момент сил, що діють на контур зі струмом в однорідному магнітному полі:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}] \quad (\text{II.12})$$

Енергія взаємодії магнітного моменту з магнітним полем

$$W_m = - \vec{p}_m \vec{B}. \quad (\text{II.13})$$

Зв'язок між індукцією \vec{B} та напруженістю \vec{H} магнітного поля в ізотропному магнетика:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (\text{II.14})$$

Вектор намагніченості однорідного ізотропного магнетика:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_{m,i}, \quad (\text{II.15})$$

де $\vec{p}_{m,i}$ – магнітний момент i -ого молекулярного струму, який знаходиться в елементі об'єму ΔV .

Зв'язок між намагніченістю магнетика та напруженістю магнітного поля у ньому

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (\text{II.16})$$

де χ – магнітна сприйнятливість.

Магнітна сприйнятливість однорідного парамагнетика за умов не надто низької температури та не надто сильного магнітного поля ($p_m B / kT \ll 1$):

$$\chi = \frac{\mu_0 n_m p_m^2}{3 kT}, \quad (\text{II.17})$$

де n_m – концентрація молекул, кожна з яких має магнітний момент p_m , T – абсолютна температура, k – стала Больцмана.

Зв'язок між відносною магнітною проникністю та магнітною сприйнятливістю χ

$$\mu = 1 + \chi. \quad (\text{II.18})$$

Магнітний потік через елементарну поверхню dS :

$$\Phi = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha, \quad (\text{II.19})$$

де α – кут між нормаллю до поверхні та напрямком вектора індукції магнітного поля.

Закон електромагнітної індукції:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{II.20})$$

де ε_i – ЕРС індукції у контурі, $d\Phi$ – зміна магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром, за час dt .

Робота з переміщення провідника у магнітному полі:

$$\Delta A = I \Delta \Phi . \quad (\text{II.21})$$

де I – сила струму у провіднику; $\Delta \Phi$ – величина магнітного потоку через поверхню, яку описує провідник при механічному русі.

Повний магнітний потік (потокозчеплення) у випадку N витків, які щільно прилягають один до одного

$$\Psi = N \Phi , \quad (\text{II.22})$$

де Φ – магнітний потік через один виток.

Індуктивність контуру:

$$L = \Psi / I , \quad (\text{II.23})$$

де Ψ – повний магнітний потік через поверхню, обмежену контуром; магнітний потік Ψ створюється магнітним полем струму силою I , що проходить у контурі.

Індуктивність соленоїду:

$$L = \mu \mu_0 n_l^2 \Delta V , \quad (\text{II.24})$$

де n_l – кількість витків на одиницю довжини соленоїду, ΔV – об'єм соленоїду.

ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} , \quad (\text{II.25})$$

де $\frac{dI}{dt}$ - швидкість зміни сили струму у контурі з індуктивністю L .

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w_B = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} . \quad (\text{II.26})$$

Енергія магнітного поля, яке створюється контуром з індуктивністю L при проходженні струму силою I

$$W_B = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{II.27})$$

Формула Томсона

$$\nu_0 = (2\pi\sqrt{LC})^{-1} , \quad (\text{II.28})$$

де ν_0 – частота власних електромагнітних коливань у контурі, який складається з ідеальних соленоїда індуктивністю L та конденсатора ємністю C .

При проходженні **змінного струму**, сила якого змінюється за законом $I = I_0 \sin \omega t$:

– коливання напруги на **активному опорі** R відбувається за законом $U = U_0 \sin \omega t$, тобто кут зсуву фаз між коливаннями сили струму та напруги $\varphi = 0$;

- коливання напруги на **конденсаторі** ємністю C відбувається за законом $U = U_0 \sin(\omega t - \pi/2)$, кут зсуву фаз між коливаннями напруги та сили струму $\varphi = -\pi/2$; **ємнісний опір** $X_C = 1/\omega C$;
- коливання напруги на котушці **індуктивності** L відбувається за законом $U = U_0 \sin(\omega t + \pi/2)$, кут зсуву фаз між коливаннями напруги та сили струму $\varphi = \pi/2$; **індуктивний опір** $X_L = \omega L$; ω – циклічна частота струму.

При **послідовному з'єднанні** опору R , індуктивності L , ємності C електричний опір такої ділянки:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (\text{II.29})$$

Кут зсуву фаз між коливаннями напруги на кінцях ділянки та коливаннями сили струму:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (\text{II.30})$$

Ефективні (діючі) значення сили струму I_d та напруги U_d :

$$I_d = I_0/\sqrt{2}, \quad U_d = U_0/\sqrt{2}. \quad (\text{II.31})$$

Середня потужність змінного струму:

$$N = I_d U_d \cos \varphi = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi. \quad (\text{II.32})$$

Величину $\cos \varphi$ називають **коефіцієнтом потужності**.

Для аналізу кіл змінного струму дуже зручним є **метод комплексних амплітуд**. В рамках цього методу струм та напруга у колі представляються у вигляді комплексних чисел:

$$\underline{I} = I_0 e^{i\omega t}, \quad \underline{U} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (\text{II.33})$$

де I_0 та U_0 – амплітудні значення сили струму та напруги відповідно, i – уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$. Крім того, у вигляді комплексних чисел записуються опори елементів кола. Зокрема, **комплексний опір резистора R**

$$\underline{Z}_R = R, \quad (\text{II.34a})$$

комплексний опір конденсатора C

$$\underline{Z}_C = (i\omega C)^{-1}, \quad (\text{II.34б})$$

комплексний опір котушки індуктивності L

$$\underline{Z}_L = i\omega L. \quad (\text{II.34в})$$

Отже, комплексний опір резистора є дійсною величиною, а комплексні опори конденсатора та соленоїда – величини уявні. Повний комплексний опір \underline{Z} кола змінного струму можна знайти, використовуючи правила відшукування опорів при паралельному та послідовному опорів у колах постійного струму (І.30а-б) та правилами (ІІ.34а-в). Уявна частина $Im(\underline{Z})$ повного комплексного опору кола дорівнює реактивному опору кола, а дійсна частина $Re(\underline{Z})$ – активному опору. Крім того

$$I_0 = \frac{U_0}{|\underline{Z}|}, \quad (ІІ.35)$$

де $|\underline{Z}|$ – модуль повного комплексного опору, $|\underline{Z}| = \sqrt{Re(\underline{Z})^2 + Im(\underline{Z})^2}$,

$$tg \varphi = Im(\underline{Z}) / Re(\underline{Z}). \quad (ІІ.36)$$

Вирази (ІІ.31-32) справедливі і для окремих ділянок кола, якщо вважати, що \underline{Z} – повний комплексний опір саме цих ділянок.

Резонанс в колі змінного струму спостерігається у тому випадку, коли

$$Im(\underline{Z}) = 0. \quad (ІІ.37)$$

2.2. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. Прямий провідник довжиною $L = 90$ см зігнуто у вигляді рівностороннього трикутника і розташовано у вакуумі. Якою повинна бути сила струму у провіднику, щоб індукція магнітного поля у точці, де перетинаються висоти утвореного трикутника, становила $B = 1.24 \cdot 10^{-6}$ Тл?

$L = 0.9$ м $B = 1.24 \cdot 10^{-6}$ Тл $I - ?$	<p>Розв'язок:</p> <p>Для розв'язку задачі спочатку знайдемо індукцію магнітного поля B_0, що створюється прямолінійним провідником довжиною L_0, у довільній точці А (I – сила струму у провіднику, d – відстань від провідника до точки А) – див. рис. 2.1. Для цього розіб'ємо провідник на нескінченно малі елементи довжиною dl. Згідно з (ІІ.1) індукція магнітного поля \vec{dB}_l, яке створюється елементом струму $I dl$ у точці А, визначається виразом:</p>
---	---

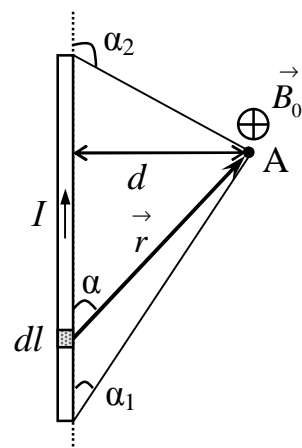


Рис.2.1

$$\vec{dB}_l = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, r]}{r^3}, \quad (1)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений від dl до точки А; напрямок вектора \vec{dl} визначається напрямом струму у провіднику. Згідно з принципом суперпозиції магнітних полів:

$$\vec{B}_0 = \int_{L_0} \vec{dB}_l, \quad (2)$$

де інтегрування відбувається по всій довжині провідника. Так як вектори індукції магнітних полів, які створюються у т. А усіма елементами dl , які складають провідник, спрямовані паралельно (перпендикулярно до площини рисунку), то у виразі (2) векторну суму можна замінити скалярною:

$$B_0 = \int_{L_0} dB_l. \quad (3)$$

З іншого боку, виходячи з формули (1), для модуля вектора \vec{dB}_l можна записати:

$$dB_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha, \quad (4)$$

де α – кут між векторами \vec{dl} та \vec{r} . З рис. 2.1 видно, що:

$$r = \frac{d}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

Одночасно, зв'язок між довжиною елемента провідника dl та кутом α має вигляд:

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}. \quad (6)$$

Підставляючи (5) та (6) до (4), отримуємо:

$$dB_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\alpha}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \sin \alpha d\alpha. \quad (7)$$

Підставивши (7) у (3) та провівши інтегрування по всім кутам α , які відповідають різним елементам провідника, отримаємо:

$$B_0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (8)$$

де значення кутів α_1 та α_2 зрозуміла з рис. 2.1.

Повертаючись безпосередньо до задачі та знову використовуючи принцип суперпозиції, можемо сказати, що індукція магнітного поля \vec{B} у точці, де перетинаються висоти трикутника:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3, \quad (9)$$

де \vec{B}_1 , \vec{B}_2 та \vec{B}_3 – індукції магнітних полів, які утворюються струмами, що проходять по сторонам трикутника. У точці перетину висот усі ці вектори спрямовані вздовж однієї прямої, перпендикулярної до площини трикутника (на рис. 2.2 трикутник розташований у площині рисунка і якщо струм тече за годинниковою стрілкою, то \vec{B}_1 , \vec{B}_2 та \vec{B}_3 спрямовані від спостерігача). Крім того, з міркувань симетрії випливає, що модулі цих векторів однакові $B_1 = B_2 = B_3$. Усе це дозволяє векторну суму (9) переписати у скалярному вигляді:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 3B_1. \quad (10)$$

Для знаходження величини B_1 використаємо формулу (8). Якщо довжина усього провідника дорівнює L , то довжина однієї сторони дорівнює $L_0 = L/3$. Точка, де розглядається величина індукція, знаходиться симетрично по відношенню до кінців провідника (до сторін трикутника), тобто $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, отже $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$. Так як трикутник рівносторонній, то кути у ньому дорівнюють 60° а висоти є бісектрисами і тому $\alpha_1 = 30^\circ$. З рис.2.2 видно, що відстань від сторони трикутника до точки перетину висот $d = \frac{L_0}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{L}{6} \operatorname{tg} \alpha_1$. Врахувавши все це, для B_1 отримуємо:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{6}{L \operatorname{tg} \alpha_1} (\cos \alpha_1 - (-\cos \alpha_1)) = \frac{3\mu_0 I \cos \alpha_1}{L\pi \operatorname{tg} \alpha_1}, \quad (11)$$

Таким чином

$$B = \frac{9\mu_0 I \cos \alpha_1}{L\pi \operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (12)$$

З (12) можна знайти силу струму I :

$$I = \frac{BL\pi \operatorname{tg} \alpha_1}{9\mu_0 \cos \alpha_1}. \quad (13)$$

Перевіримо розмірність:

$$[I] = \frac{Tл \cdot м}{Гн \cdot м^{-1}} = \frac{\kappa\mathcal{Z} \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}}{м^2 \cdot \kappa\mathcal{Z} \cdot c^{-2} \cdot A^{-2}} м^2 = A$$

Використовуючи формулу (13), знаходимо:

$$I = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} \cdot 0.9 \cdot 3.14 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{9 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7} \cdot \cos 30^\circ} \approx 0.21 (A)$$

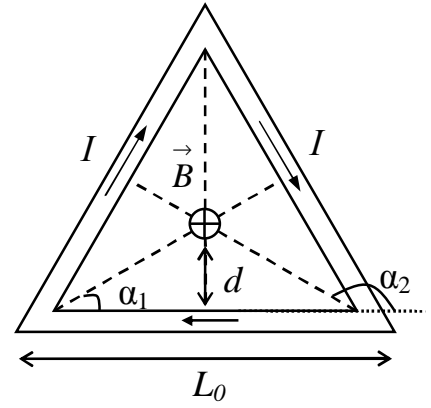


Рис.2.2

Приклад 2. Як треба розташувати прямолінійний мідний провідник радіусом $r = 1$ мм в однорідному горизонтальному магнітному полі ($B = 0.04$ Тл) і якої сили струм пропустити через нього, щоб провідник перебував у стані рівноваги?

$r = 10^{-3}$ м	Розв'язок:
$B = 0.04$ Тл	
$I - ?$	На прямолінійний провідник довжиною L , по якому тече струм силою I , в однорідному магнітному полі діє сила Ампера:

$$\vec{F}_A = I [\vec{L}, \vec{B}], \quad (1)$$

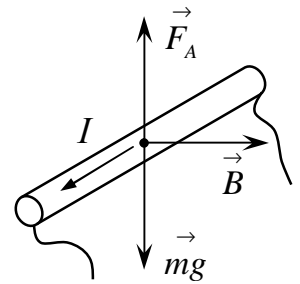


Рис.2.3

напрямок вектора \vec{L} визначається напрямом струму, \vec{B} – вектор індукції магнітного поля. Як видно з формули (1), сила F_A спрямована перпендикулярно як до напрямку струму, так і до вектора \vec{B} . Так як за умовою поле горизонтальне, то для того, щоб провідник знаходився у рівновазі, необхідно його також розташувати горизонтально – інакше, якщо кут між провідником і вертикальною лінією відрізняється від прямого, буде існувати горизонтальна складова сили Ампера, що призведе до руху провідника. Крім того, провідник повинен бути розташований відносно напрямку магнітного поля таким чином, щоб сила Ампера зрівноважувала дію сили тяжіння, тобто, щоб сила F_A була спрямована вертикально вгору і за модулем:

$$F_A = mg, \quad (2)$$

де m – маса провідника, g – прискорення вільного падіння. У випадку, коли напрямок струму у провіднику і вектор індукції магнітного поля взаємно перпендикулярні, (1) можна записати у вигляді:

$$F_A = I L B. \quad (3)$$

З іншого боку, маса провідника:

$$m = \Delta V \rho, \quad (4)$$

де ρ – густина речовини, з якої виготовлений провідник (для міді $\rho = 8.9 \cdot 10^3$ кг/м³); ΔV – об'єм провідника, $\Delta V = L S$, де S – площа поперечного перерізу ($S = \pi r^2$ для провідника радіусом r).

Таким чином:

$$m = \pi r^2 L \rho. \quad (6)$$

Підставляючи (3) та (6) у (2), отримуємо:

$$I L B = \pi r^2 L \rho g,$$

звідки:

$$I = \frac{\pi r^2 \rho g}{B}. \quad (7)$$

Використовуючи формулу (7) знаходимо:

$$I = \frac{3.14 \cdot 10^{-6} \cdot 8.9 \cdot 10^3 \cdot 9.81}{0.04} \approx 6.86 \text{ (A)}.$$

Отже, провідник потрібно розмістити горизонтально, перпендикулярно вектору індукції магнітного поля і пропустити через нього струм $I \approx 6.86 \text{ A}$.

Приклад 3. Протон пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 300 \text{ В}$ і влетів в однорідне магнітне поле ($B = 20 \text{ мТл}$) під кутом $\alpha = 30^\circ$ до ліній магнітної індукції. Визначити крок h і радіус R гвинтової лінії, яку буде описувати протон,

$U = 300 \text{ В}$	рухаючись у магнітному полі.
$B = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$	
$\alpha = 30^\circ$	
$h - ?$	
$R - ?$	Розв'язок:
	Якщо заряджена частинка
	проходить різницю потенціалів U , то
	при цьому сили електричного поля

виконують роботу A :

$$A = qU, \quad (1)$$

де q – заряд частинки. Ця робота витрачається на зміну кінетичної енергії частинки і тому:

$$A = qU = \frac{mV^2}{2}, \quad (2)$$

де m – маса частинки, V – її кінцева швидкість (якщо початкова швидкість $V_0 = 0$). Для протона $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $m = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. З формули (2) випливає, що швидкість протона у момент часу, коли він влетів в магнітне поле:

$$V = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \quad (3)$$

На заряджену частинку, що рухається зі швидкістю V у магнітному полі з індукцією B , діє сила Лоренца:

$$F_L = qV B \sin \alpha, \quad (4)$$

де α – кут між векторами швидкості та індукції магнітного поля. Сила Лоренца спрямована перпендикулярно до швидкості частинки, отже, така сила надає частинці нормального прискорення. В результаті цього частинка буде рухатися по колу у площині, перпендикулярній до вектора магнітної індукції. Згідно з другим законом Ньютона:

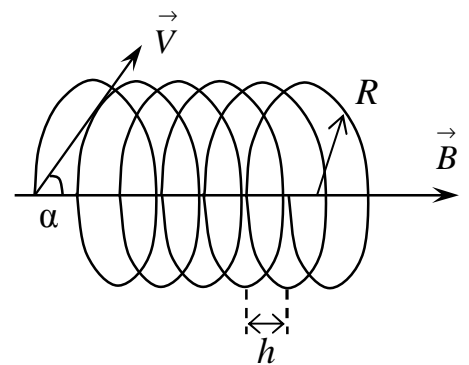


Рис.2.4

$$F_L = m a_n, \quad (5)$$

де a_n – нормальне прискорення. Величина a_n залежить від складової швидкості, яка перпендикулярна до \vec{B} , а саме, $V_{\perp} = (V \sin \alpha)$, та від радіуса кола R :

$$a_n = \frac{(V \sin \alpha)^2}{R}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) та (4) у (5), отримуємо:

$$qVB \sin \alpha = m \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{R}$$

$$R = \frac{mV \sin \alpha}{qB}. \quad (7)$$

З врахуванням (3), остаточно маємо:

$$R = \frac{m \sin \alpha}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2mU}{q}} \frac{\sin \alpha}{B}. \quad (8)$$

Крок гвинтової лінії можна знайти як відстань, яку проходить протон вздовж напрямку індукції магнітного поля протягом часу, за який він здійснює один оберт у площині, перпендикулярній до \vec{B} :

$$h = TV \cos \alpha, \quad (9)$$

де $(V \cos \alpha)$ – складова швидкості, що паралельна до \vec{B} ; T – період обертання:

$$T = \frac{2\pi R}{V \sin \alpha},$$

або, використовуючи (7):

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (10)$$

З урахуванням останнього виразу для h можемо записати:

$$h = \frac{2\pi m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} \cos \alpha = \frac{2\pi \cos \alpha}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}. \quad (11)$$

Користуючись формулами (8) та (11), знаходимо:

$$R = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{2 \cdot 1.675 \cdot 10^{-27} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}}} \sin 30^\circ \approx 6.3 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}$$

$$h = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{2 \cdot 1.675 \cdot 10^{-27} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}}} \approx 0.68 \text{ (м)}$$

Приклад 4. Плоский контур, в якому протікає струм силою $I = 5 \text{ А}$, вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0.4 \text{ Тл}$. Площина контуру $S = 200 \text{ см}^2$. Підтримуючи струм у контурі сталим, його повернули відносно осі, що лежить у площині контуру, на кут $\alpha = 40^\circ$. Визначити роботу A , яку було при цьому виконано.

$I = 5 \text{ А}$	Розв'язок:
$B = 0.4 \text{ Тл}$	Потенціальна енергія контуру зі струмом
$S = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$	у магнітному полі з індукцією B :
$\alpha = 40^\circ$	$W_p = -p_m B \cos \alpha,$ (1)
$A - ?$	

де p_m – магнітний момент контуру, $p_m = I S$;

α – кут між нормаллю до площини контуру і вектором магнітної індукції. Так як контур вільно встановився у магнітному полі, то

такому стану повинен відповідати мінімум енергії системи. Як видно з формули (1), енергія є мінімальною у випадку, коли $\cos \alpha = 1$, тобто, якщо $\alpha = 0$. Таким чином, можна зробити висновок, що у початковому положенні потенціальна енергія системи "контур зі струмом – магнітне поле":

$$W_{p1} = -I S B. \quad (2)$$

Так як контур було повернуто на кут α відносно осі, що лежить в площині контуру, то у кінцевому положенні

$$W_{p2} = -I S B \cos \alpha. \quad (3)$$

Робота, яку виконали зовнішні сили, призвела до збільшення потенціальної енергії системи:

$$\begin{aligned} A &= W_{p2} - W_{p1} \\ A &= I S B (1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Перевіримо розмірність:

$$[A] = A \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = A \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^2 = \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} = \text{м} \cdot \text{Н} = \text{Дж}.$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо:

$$A = 5 \cdot 0.4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} (1 - \cos 40^\circ) \approx 9.4 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)}$$

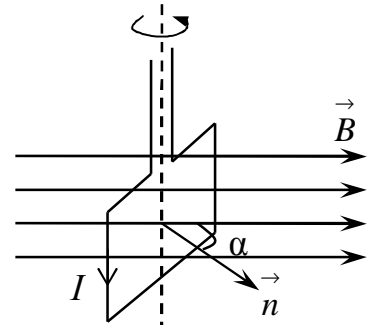


Рис.2.5

Приклад 5. Плоску рамку, яку виготовлено з одного витка металевого дроту з опором $R = 10^{-3} \text{ Ом}$ та площею поперечного перерізу $S = 1 \text{ см}^2$, розміщено в однорідному магнітному полі. Напрямок силових ліній поля перпендикулярний до площини рамки. Індукція магнітного поля змінюється рівномірно на $\Delta B = 0.01 \text{ Вб/м}^2$ за час $\Delta t = 1 \text{ с}$. Яка кількість теплоти W_Q виділяється у рамці за цей час. Залежністю опору рамки від температури можна знехтувати.

$R = 10^{-3} \text{ Ом}$ $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ $\Delta B = 10^{-2} \text{ Вб/м}^2$ $\Delta t = 1 \text{ с}$	$W_Q - ?$
--	-----------

Розв'язок:

Тепло у рамці виділяється в результаті протікання електричного струму; поява останнього викликана, у свою чергу, зміною магнітного потоку, що пронизує рамку, при зміні індукції магнітного поля.

Згідно з законом електромагнітної індукції Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

де ε_i – ЕРС індукції. У випадку однорідного магнітного поля через виток площею S проходить магнітний потік:

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (2)$$

де B – індукція магнітного поля, α – кут між нормаллю до площини витка та силовими лініями магнітного поля. Згідно з умовою задачі $\alpha = 0$, тобто $\cos \alpha = 1$. Оскільки площа рамки не змінюється, то:

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial(BS)}{\partial t} = -S \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3)$$

У випадку рівномірної зміни величини індукції останню формулу можна переписати у вигляді

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial(BS)}{\partial t} = -S \frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (4)$$

З іншого боку, згідно з законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad (5)$$

де I – сила струму у рамці, R – її опір. За умовою задачі індукція змінюється рівномірно, тобто сила струму залишається постійною. У цьому випадку кількість теплоти, що виділилася у рамці за проміжок часу Δt , описується законом Джоуля-Ленца:

$$W = I^2 R \Delta t. \quad (6)$$

Підставляючи (4) у (5), а (5) у (6), отримуємо:

$$W = \left(\frac{S \Delta B}{R \Delta t} \right)^2 R \Delta t = \frac{S^2 \Delta B^2}{R \Delta t}. \quad (7)$$

Користуючись формулою (7), знаходимо:

$$W = \frac{(10^{-4})^2 \cdot (10^{-2})^2}{10^{-3} \cdot 1} = 10^{-9} \text{ (Дж)}.$$

Приклад 6. По двом паралельним нескінченно довгим металевим рейкам може ковзати без тертя провідна перемичка масою $m=50 \text{ г}$ і довжиною $L=20 \text{ см}$. Система знаходиться в

однорідному магнітному полі з індукцією $B=1$ Тл. Лінії індукції перпендикулярні до площини, в якій розташовані рейки. Перпендикулярно до перемички прикладають силу $F=3$ Н. З якою швидкістю $V(t)$ та прискоренням $a(t)$ буде рухатись перемичка, якщо рейки з'єднати через:

а) резистор з опором $R=10$ Ом; б) конденсатор ємністю $C=5$ мкФ. Вважати, що електричний опір у перемички відсутній.

$m = 0.05$ кг
 $L = 0.2$ м
 $B = 1$ Тл
 $F = 3$ Н
 $R = 10$ Ом
 $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф

$V(t)$ - ?

$a(t)$ - ?

Розв'язок:

Випадок а. За нескінченно малий проміжок часу dt перемичка пройде шлях $dx = Vdt$, за рахунок чого площа замкнутого контуру (див. рис. 2.6) збільшиться на величину

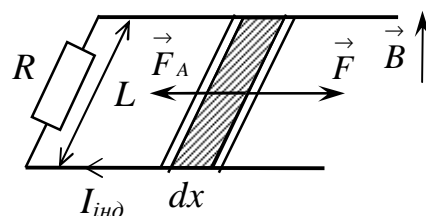


Рис.2.6

$$dS = Ldx = LVdt . \quad (1)$$

Зміна площі контуру буде супроводжуватися зміною магнітного потоку через поверхню, обмежену утвореним контуром:

$$d\Phi = BdS = BLVdt . \quad (2)$$

Тоді, згідно з (II.20), у контурі буде виникати ЕРС індукції:

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = BLV . \quad (3)$$

В результаті явища електромагнітної індукції у контурі виникає індукційний струм I_{ind} , спрямований таким чином, щоб магнітний потік, який створюється цим струмом через поверхню контуру, протидієв зміні зовнішнього магнітного потоку (правило Ленця). Легко переконатися, що в даному випадку індукційний струм спрямований за годинниковою стрілкою. Згідно з законом Ома

$$I_{ind} = \varepsilon_i / R = BLV / R . \quad (4)$$

Але в цьому випадку на перемичку діятиме сила Ампера \vec{F}_A , яка спрямована проти сили \vec{F} і чисельно дорівнює

$$F_A = I_{ind} BL . \quad (5)$$

У виразі (4) враховано, що напрями індукції магнітного поля та індукційного струму взаємоперпендикулярні.

При зростанні сили струму F_A також буде збільшуватись доти, токи не зрівноважить зовнішню силу F . З цього моменту часу рух перемички стане рівномірним (з $a = 0$), а його швидкість можна знайти з умови

$$F_A = I_{ind} BL = F . \quad (6)$$

Використовуючи рівняння (4) та (6) остаточно отримуємо:

$$(BLV/R)BL = F$$

$$V = FR/B^2L^2. \quad (6)$$

Перевіримо розмірність:

$$[V] = \frac{H \cdot Ом}{Тл^2 \cdot м^2} = \frac{H \cdot Ом \cdot A^2 \cdot м^2}{H^2 \cdot м^2} = \frac{Джс}{с \cdot H} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^2}{с^2 \cdot с \cdot кг \cdot м} = м/с.$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо:

$$V = \frac{3 \cdot 10}{1^2 \cdot (0.2)^2} = 750 (м/с).$$

Випадок б. Як і у попередньому випадку ЕРС індукції буде описуватись виразом (3). Рівняння руху перемички матиме вигляд

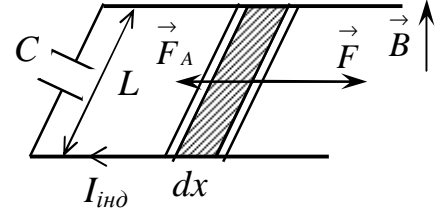


Рис.2.7

$$ma = F - F_A = F - I_{ind}LB. \quad (7)$$

Відмінність цієї задачі від попередньої полягає у тому, що необхідно врахувати зарядження конденсатора під час руху перемички. Зокрема, у кожний момент часу напруга U_C на конденсаторі дорівнює ЕРС індукції $U_C = \varepsilon_i$, тобто

$$\frac{q(t)}{C} = BVL, \quad (8)$$

де q – заряд на конденсаторі. Продиференціюємо рівняння (8) по часу:

$$\frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = BL \frac{dV}{dt}. \quad (9)$$

Враховуючи, що сила струму $I = \frac{dq}{dt}$, а прискорення $a = \frac{dV}{dt}$, матимемо:

$$\frac{I}{C} = BL a. \quad (10)$$

Підставляючи вираз (10) в (7) та виражаючи a остаточно отримаємо

$$ma = F - B^2L^2Ca$$

$$a = \frac{F}{m + B^2L^2C}. \quad (11)$$

Тобто, в цьому випадку рух перемички буде рівноприскореним, прискорення описуватиметься виразом (11), а залежність швидкості від часу виражається лінійною залежністю $V(t) = at$ (за умови, що в початковий момент часу перемичка нерухома).

У формулі (11) достатньо тільки з'ясувати якою є розмірність величини B^2L^2C :

$$[B^2L^2C] = Тл^2 \cdot м^2 \cdot \Phi = \frac{H^2}{A^2 \cdot м^2} \cdot м^2 \cdot \frac{Кл}{В} = \frac{H^2}{A^2} \cdot \frac{Кл^2}{Джс} = \frac{H^2 \cdot с^2}{Джс} = H \cdot \frac{с^2}{м} = кг.$$

Використовуючи формулу (11), знаходимо:

$$a = \frac{3}{0.05 + 1^2 \cdot (0.2)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \approx 60 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Приклад 7. Соленоїд має довжину $l = 0.6 \text{ м}$ і поперечний переріз площею $S = 10 \text{ см}^2$. При деякій силі струму, що протікає в обмотці, у соленоїді створюється магнітний потік $\Phi = 0.1 \text{ мВб}$. Чому дорівнює енергія W магнітного поля соленоїда? Осердя виготовлене з немагнітного матеріалу, а магнітне поле в усьому об'ємі соленоїду однорідне.

$l = 0.6 \text{ м}$ $S = 10^{-3} \text{ м}^2$ $\Phi = 10^{-4} \text{ Вб}$ <hr style="width: 100%;"/> $W - ?$	Розв'язок: Енергія магнітного поля соленоїда може бути розрахована за формулою: <div style="text-align: right;"> $W = \frac{1}{2} L I^2, \quad (1)$ </div>
---	--

де I – сила струму у соленоїді, L – індуктивність соленоїда:

$$L = \mu \mu_0 N^2 \frac{S}{l}, \quad (2)$$

де μ – магнітна проникність осердя; для немагнітного матеріалу $\mu = 1$; N – кількість витків, S та l – площа поперечного перерізу та довжина соленоїда відповідно. Одночасно:

$$L = \frac{N\Phi}{I}, \quad (3)$$

де Φ – магнітний потік у соленоїді.

Значення сили струму I з рівняння (3) підставимо у (1) та, враховуючи співвідношення (2), отримуємо:

$$I = \frac{N\Phi}{L}$$

$$W = \frac{1}{2} L \frac{N^2 \Phi^2}{L^2} = \frac{N^2 \Phi^2}{2L} = \frac{N^2 \Phi^2}{2\mu \mu_0} \frac{l}{N^2 S} = \frac{\Phi^2 l}{2\mu \mu_0 S}. \quad (4)$$

Перевіримо розмірність:

$$[W] = \frac{B\bar{\sigma}^2 \cdot m}{\Gamma_H \cdot m^{-1} \cdot m^2} = \frac{B\bar{\sigma}^2}{\Gamma_H} = \frac{(m^2 \cdot \kappa\epsilon \cdot c^{-2} \cdot A^{-1})^2}{m^2 \cdot \kappa\epsilon \cdot c^{-2} \cdot A^{-2}} = \kappa\epsilon \cdot m^2 \cdot c^{-2} = \text{Дж}$$

Користуючись формулою (4), знаходимо:

$$W = \frac{(10^{-4})^2 \cdot 0.6}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} \approx 2.4 \text{ (Дж)}$$

Приклад 8. Джерело струму замкнули на котушку опором $R = 10 \text{ Ом}$ та індуктивністю $L = 0.2 \text{ Гн}$. Через який час сила струму у колі досягне 50% від максимального значення?

$R = 10 \text{ Ом}$ $L = 0.2 \text{ Гн}$ $K = 0.5$	
$t_0 - ?$	

Розв'язок:

Згідно з другим правилом Кірхгофа для кола, яке складається з котушки з індуктивністю L і опором R та джерела струму з ЕРС ε можна записати:

$$IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

де I – сила струму в колі, $\left(-L \frac{dI}{dt}\right)$ – ЕРС самоіндукції, яка виникає у котушці. Тобто, для знаходження закону зміни сили струму у колі нам необхідно розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R}.$$

де I_0 – стала, яку можна визначити з початкових умов. Так як при $t = 0$, $I = 0$, то $I_0 + \frac{\varepsilon}{R} = 0$, отже

$$I_0 = -\frac{\varepsilon}{R}. \text{ Таким чином:}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/L}). \quad (2)$$

Як видно з формули (2), максимальне значення, якого може досягти сила струму, $I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R}$. Тоді для моменту часу t_0 , у який сила струму досягне значення $I = KI_{\max} = K \frac{\varepsilon}{R}$, з рівняння (2) отримуємо:

$$\begin{aligned} K \frac{\varepsilon}{R} &= \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt_0/L}) \\ K &= 1 - e^{-Rt_0/L} \\ t_0 &= \frac{L}{R} \ln \left(\frac{1}{1-K} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Користуючись формулою (3), знаходимо

$$t_0 = \frac{0.2}{10} \ln \left(\frac{1}{1-0.5} \right) \approx 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ (с)}.$$

Приклад 9. Коливальний контур, який складається з котушки індуктивності і конденсатора ємністю $C = 1 \text{ нФ}$, має власну частоту коливань $\nu = 5 \text{ МГц}$. Визначити максимальну силу струму I_{\max} у котушці, якщо енергія контуру $W = 0.5 \text{ мкДж}$.

$C = 10^{-9} \text{ Ф}$ $\nu = 5 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ $W = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$ $I_{\max} - ?$
--

Розв'язок:

Період власних електромагнітних коливань T у контурі, який складається з конденсатора ємністю C і котушки з індуктивністю L , визначається за формулою Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (1)$$

Оскільки $\nu = T^{-1}$, то

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

Тобто, знаючи ємність конденсатора і частоту власних коливань у контурі, ми можемо знайти індуктивність котушки

$$L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C}. \quad (3)$$

Енергія магнітного поля котушки зі струмом силою I :

$$W_B = \frac{L I^2}{2}. \quad (4)$$

Енергія контуру W складається з енергії електричного поля конденсатора W_E та енергії магнітного поля котушки W_B :

$$W = W_E + W_B. \quad (5)$$

При електромагнітних коливаннях відбуваються взаємні перетворення енергії електричного та магнітного полів. Якщо сила струму у котушці максимальна, то максимального значення $W_{B\max}$ набуває і енергія котушки. Оскільки ж енергія всього контуру залишається сталою, то в цей момент енергія конденсатора є мінімальною, тобто конденсатор розряджений і $W_E = 0$. Тоді

$$W = W_{B\max},$$

або, враховуючи (4),

$$W = \frac{1}{2} L I_{\max}^2, \quad (6)$$

де I_{\max} – максимальне значення сили струму в котушці.

З рівнянь (6) та (3) отримуємо:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2W}{L}} = \sqrt{2W \cdot 4\pi^2\nu^2 C} = 2\pi\nu\sqrt{2WC}. \quad (7)$$

Перевіримо розмірність:

$$[I_{\max}] = \text{Гц} \sqrt{\text{Дж} \cdot \text{Ф}} = \text{с}^{-1} (\text{м}^2 \text{кг} \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1} \text{с}^4 \text{А}^2)^{1/2} = \text{с}^{-1} (\text{с}^2 \text{А}^2)^{1/2} = \text{с}^{-1} \text{с} \text{А} = \text{А}.$$

Використовуючи формулу (7), знаходимо:

$$I_{\max} = 2 \cdot 3.14 \cdot 5 \cdot 10^6 \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-9}} \approx 1 (\text{А}).$$

Приклад 10. Котушка з індуктивністю $L = 10$ мГн та резистор з'єднані паралельно та увімкнені у коло змінного струму з частотою $\nu = 60$ Гц. Знайти величину опору резистора R , якщо відомо, що зсув фаз між напругою і струмом у колі $\varphi = 30^\circ$.

$L = 10^{-5}$ Гн $\nu = 60$ Гц $\varphi = 30^\circ$
$R - ?$

Розв'язок:
Для комплексного опору \underline{Z} паралельно з'єднаних котушки і резистора справедливе співвідношення

$$\underline{Z}^{-1} = \underline{Z}_R^{-1} + \underline{Z}_L^{-1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{i\omega L + R}{iR\omega L} = \frac{\omega L - iR}{R\omega L}, \quad (1)$$

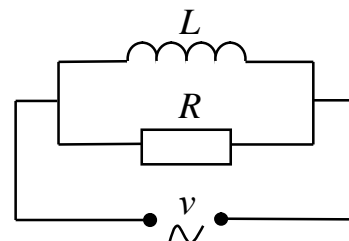


Рис.2.8

де \underline{Z}_R та \underline{Z}_L – комплексні опори резистора і котушки, ω – циклічна частота струму, $\omega = 2\pi\nu$.

Тобто

$$\underline{Z} = \frac{R\omega L}{\omega L - iR} = \frac{R\omega L(\omega L + iR)}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}. \quad (2)$$

Тангенс кута зсуву фаз між напругою і силою струму у колі дорівнює відношенню уявної та дійсної частин \underline{Z} :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Im}(\underline{Z}) / \operatorname{Re}(\underline{Z}). \quad (3)$$

В нашому випадку:

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}) = \frac{R^2 \omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}, \quad \operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{R \omega^2 L^2}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}. \quad (4)$$

З рівнянь (3) та (4) остаточно маємо:

$$\operatorname{tg} \varphi = R / \omega L$$

$$R = \omega L \operatorname{tg} \varphi = 2\pi\nu L \operatorname{tg} \varphi. \quad (5)$$

Користуючись формулою (5), отримуємо

$$R = 2 \cdot 3.14 \cdot 60 \cdot 10^{-5} \operatorname{tg} 30^\circ \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ (Ом)}.$$

Приклад 11. Знайти зсув фаз φ між напругою і силою струму у колі, що складається з послідовно з'єднаних резистора з опором $R = 10$ Ом, котушки з індуктивністю $L = 15$ мГн та конденсатора ємністю $C = 2.5$ мФ. Знайти потужність N , яка виділяється у колі, якщо амплітуда напруги $U_0 = 100$ В, частота струму $\nu = 50$ Гц.

$R = 10$ Ом $L = 1.5 \cdot 10^{-2}$ Гн $C = 2.5 \cdot 10^{-3}$ Ф $U_0 = 100$ В $\nu = 50$ Гц
$\varphi - ?$ $N - ?$

Розв'язок:
Для розв'язку цієї задачі скористаємося методом комплексних амплітуд. Так як всі елементи кола з'єднані послідовно, то загальний комплексний опір

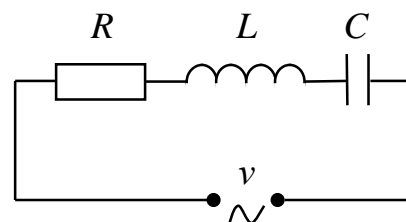


Рис.2.9

кола Z дорівнює:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (1)$$

де Z_R , Z_L та Z_C – комплексні опори резистора, котушки і конденсатора відповідно; ω – циклічна частота струму, $\omega = 2\pi \nu$.

Зсув фаз між напругою і струмом визначається відношенням уявної частини комплексного опору до дійсної частини:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)} = \frac{(\omega L - \omega^{-1}C^{-1})}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} = \frac{4\pi^2 \nu^2 LC - 1}{2\pi \nu RC}. \quad (2)$$

Потужність, яка виділяється в колі:

$$N = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi, \quad (3)$$

де I_0 і U_0 – амплітудні значення сили струму і напруги у колі. У свою чергу, I_0 дорівнює відношенню U_0 до модуля комплексного опору:

$$I_0 = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0 \omega C}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}. \quad (4)$$

Підставляючи вираз (4) у формулу (3) і враховуючи, що $\cos \varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-1/2}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \frac{U_0 \omega C}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} U_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{2} U_0^2 \frac{\omega C}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \frac{R \omega C}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} = \frac{U_0^2 R \omega^2 C^2}{2((R \omega C)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2)} \\ N &= \frac{2\pi^2 U_0^2 R \nu^2 C^2}{((2\pi \nu RC)^2 + (4\pi^2 \nu^2 LC - 1)^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Використовуючи формули (2) і (5) знаходимо

$$\varphi \approx 19^\circ, \quad N \approx 447 \text{ Вт}.$$

2.3. Задачі для самостійного розв'язку

П.1. Два паралельних нескінченно довгих провідники, по яким в одному напрямку проходять струми силою I , розташовані у вакуумі на відстані d один від одного. Визначити індукцію магнітного поля, яке створюється цими провідниками в точці, розташованій на відстані r_1 від

одного провідника і на відстані r_2 від іншого.

П.2. Визначити силу взаємодії, яка припадає на одиницю довжини кожного з двох паралельних нескінченних провідників, що знаходяться у вакуумі на відстані d один від одного. По провідникам течуть струми силою I_1 та I_2 . Притягуються провідники чи відштовхуються?

П.3. По провіднику, вигнутому у вигляді кола, тече струм. Напруженість магнітного поля у центрі кола $H_1 = 50$ А/м. Не змінюючи сили струму в провіднику, йому надали форму квадрата. Визначити напруженість H_2 магнітного поля в точці перетину діагоналей цього квадрата.

П.4. По двом нескінченним прямолінійним провідникам, розташованим вертикально на відстані $d = 15$ см один від одного, протікають в одному напрямку струми силами $I_1 = 4$ А та $I_2 = 6$ А. Визначити положення точок, в яких індукція магнітного поля дорівнює нулеві.

П.5. У вакуумі знаходяться квадратна дротяна рамка і довгий прямий провідник. Вони розташовані в одній площині, дві сторони рамки паралельні провіднику. По рамці і провіднику протікають струми з однаковою силою I . Визначити силу F , що діє на рамку, якщо найближча до провідника сторона рамки знаходиться від нього на відстані, що дорівнює довжині цієї сторони. Визначити, в яких випадках рамка буде притягуватися до провідника, а в яких відштовхуватися.

П.6. Струм силою $I = 50$ А тече по нескінченно довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайти напруженість H магнітного поля у точці, розташованій на бісектрисі цього кута на відстані $b = 20$ см від його вершини.

П.7. Два нескінченні прямі провідники схрещені під прямим кутом. По провідникам течуть струми силою I_1 та I_2 . Відстань між провідниками дорівнює d . Визначити індукцію B магнітного поля, яке створюється цими струмами, у точці, розташованій на середині спільного перпендикуляра до провідників.

П.8. Горизонтальні рейки прокладені на відстані l одна від одної. На них лежить стрижень, перпендикулярний до рейок. Якою має бути індукція вертикального магнітного поля, щоб стрижень почав рухатися? По стрижню проходить струм силою I , коефіцієнт тертя між стрижнем і рейками k_T , маса стрижня m .

П.9. З тонкого металевго дроту виготовлено кільце діаметром d . Сила струму у дротині I . Площина кільця перпендикулярна до силових ліній магнітного поля, індукція якого дорівнює B . Визначити силу, яка діє на кільце. Як вона спрямована?

П.10. Два провідника у формі кіл з майже однаковими діаметрами розташовані у взаємно перпендикулярних площинах – рис. 2.10. Як будуть поводити себе провідники, якщо через них пропустити струми силами I_1 та I_2 ?

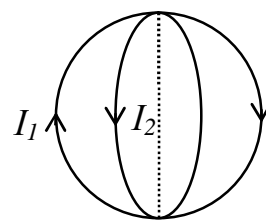


Рис.2.10

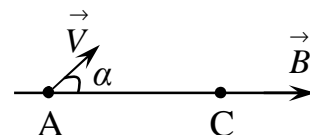
П.11. Металевий дріт зігнуто довільним чином у площині, що

перпендикулярна вектору індукції магнітного поля. По провіднику тече струм. Довести, що сила, яка діє на провідник, не залежить від його форми.

П.12. Циклотрон повинен прискорювати протони до енергії W . Яким повинен бути радіус циклотрону, якщо індукція магнітного поля в ньому дорівнює B . Релятивістські ефекти не враховувати.

П.13. Протон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів U , влетів в магнітне поле перпендикулярно лініям індукції і описав дугу радіусом R . Визначити частоту обертання протона в магнітному полі та індукцію магнітного поля.

П.14. Електрон влітає в однорідне магнітне поле. У точці A (рис. 2.11) він має швидкість V , яка утворює з лініями індукції кут α .



При якому значенні індукції магнітного поля електрон потрапить у точку C , якщо відстань $AC = L$.

Рис.2.11

П.15. Протон і α -частинка, прискорені однаковою різницею потенціалів, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більше радіуса кривизни R_2 траєкторії α -частинки?

П.16. Електрон потрапляє в однорідне магнітне поле ($B = 200$ мТл) перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Визначити силу еквівалентного колового струму, що створюється рухом електрона в магнітному полі.

П.17. Електрон зі швидкістю V влітає в область однорідного магнітного поля з індукцією B . Напрямок швидкості перпендикулярний до ліній магнітної індукції. Визначити максимальну глибину h проникнення електрону в область магнітного поля, якщо границя цієї області прямолінійна і в момент, коли електрон потрапляє у магнітне поле, його швидкість спрямована під кутом α до границі.

П.18. Тонку пластину з кремнію шириною $b = 2$ см помістили перпендикулярно лініям індукції однорідного магнітного поля ($B = 0.5$ Тл). При густині струму $j = 2$ мкА/мм², спрямованого вздовж пластини, холівська різниця потенціалів виявилась рівною $U_H = 2.8$ В. Визначити концентрацію носіїв струму n_q .

П.19. Рухливість електронів і дірок в кремнію дорівнюють $\mu_n = 1.5 \cdot 10^3$ см²/(В·с), $\mu_p = 5 \cdot 10^2$ см²/(В·с), відповідно. Обчислити постійну Хола R_H , якщо питомий опір кремнію $\rho = 6.2 \cdot 10^2$ Ом·м.

П.20. Магнітний момент молекули кисню $p_m = 2.8 \mu_B$ (μ_B – магнетон Бора). Визначити молярну парамагнітну сприйнятливість χ_m газоподібного кисню.

П.21. Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого залежить від відстані r до осі соленоїда за законом $\chi = \alpha r^2$, де α – стала. На осі соленоїда

індукція магнітного поля дорівнює B_0 . Знайти залежність намагніченості J від r .

П.22. У кільце, яке з'єднане з балістичним гальванометром, ввели прямий магніт. При цьому по кільцю пройшов заряд $q = 50$ мкКл. Визначити зміну магнітного потоку крізь кільце $\Delta\Phi$, якщо опір гальванометра $R = 10$ Ом.

П.23. В однорідному магнітному полі з індукцією B розташовано плоский замкнутий виток, площа якого дорівнює S , а опір – R . Площина витка перпендикулярна лініям магнітної індукції. Виток замкнуто на гальванометр. Виток повертають таким чином, що через гальванометр проходить заряд q . На який кут повернуто виток?

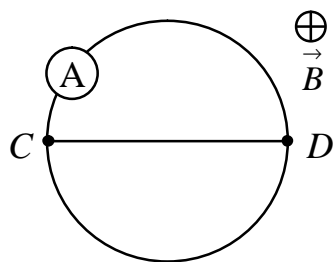


Рис.2.12

П.24. Яку силу струму покаже амперметр (рис. 2.12), якщо індукція перпендикулярного до площини малюнка однорідного магнітного поля за час Δt рівномірно зміниться на ΔB . Точки С та D діаметральні. Контур виготовлено з дроту, опір одиниці довжини якого ρ_l , діаметр кільця дорівнює d .

П.25. Соленоїд містить N витків дроту, які щільно прилягають один до одного. При проходженні в обмотці струму силою I в соленоїді виникає магнітний потік Φ . Визначити індуктивність соленоїда.

П.26. В однорідне магнітне поле з індукцією B рівномірно зі швидкістю V вносять квадратний контур, в який увімкнено джерело струму з ЕРС ε та внутрішнім опором r (рис. 2.13). Сторона квадрата дорівнює L . Знайти зміну корисної потужності в контурі при внесенні його в магнітне поле, якщо опір контуру дорівнює R .

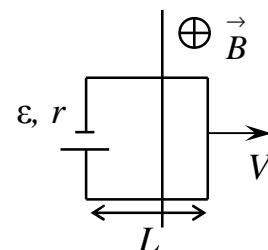


Рис.2.13

П.27. З якою кутовою швидкістю потрібно обертати прямий провідник довжиною L навколо одного з його кінців у площині, перпендикулярній лініям індукції однорідного магнітного поля, щоб у провіднику індукувалася ЕРС ε . Індукція магнітного поля дорівнює B .

П.28. Рамка, що складається з $N = 1000$ витків площею $S = 100$ см² кожний, рівномірно обертається з частотою $\nu = 10$ с⁻¹ у магнітному полі з індукцією $B = 15$ мТл. Вісь обертання перпендикулярна лініям індукції і лежить у площині рамки. Визначити максимальну ЕРС індукції ε_{\max} , яка виникає в рамці.

П.29. По провіднику, зігнутому і вигляді кільця радіусом $R = 20$ см, що містить $N = 500$ витків, тече струм силою $I = 1$ А. Визначити об'ємну густину w_B енергії магнітного полі в центрі кільця, якщо вважати, що кільце розташоване у вакуумі.

П.30. Плоска дротяна рамка, яка має опір R і площу S , обертається зі сталою швидкістю в однорідному магнітному полі з індукцією B . Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції. Який заряд пройде по рамці за час, поки кут між нормаллю

до рамки і лініями індукції зміниться від α_1 до α_2 .

П.31. Котушка, яку намотано на немагнітний циліндричний каркас, складається з N_1 витків і має індуктивність L_1 . Щоб збільшити індуктивність котушки до L_2 , обмотку зняли і замінили іншою, з більш тонкого дроту. Скільки витків виявилось у другій обмотці, якщо довжина котушки не змінилася?

П.32. В електричному колі, яке містить резистор опором $R = 20$ Ом і котушку з індуктивністю $L = 0.06$ Гн, тече струм силою $I_0 = 20$ А. Визначити силу струму I в колі через час $\Delta t = 0.2$ мс після його розімкнення.

П.33. Котушку з дуже малим активним опором та індуктивністю $L = 3$ Гн вмикають у коло, яке містить джерело струму з ЕРС $\mathcal{E} = 1.5$ В. Через який час t струм у котушці буде дорівнювати $I = 50$ А, якщо внутрішнім опором джерела можна знехтувати?

П.34. Коливальний контур складається з котушки індуктивності та двох паралельно з'єднаних конденсаторів ємністю C кожний. Після того, як ці конденсатори з'єднали послідовно, резонансна частота змінилась на $\Delta\nu$. Знайти індуктивність контуру.

П.35. Визначити відстань між пластинами площею S плоского повітряного конденсатора, якщо коливальний контур, який складається з цього конденсатора і котушки з індуктивністю L , резонує на довжині хвилі λ .

П.36. Конденсатор ємністю C і резистор з опором R увімкнені послідовно у коло змінного струму з частотою ν . Яку частину напруги U , прикладеної до кола, складають падіння напруги на конденсаторі U_C і на резисторі U_R ?

П.37. В коло змінного струму з частотою ν і амплітудою напруги U_0 послідовно з опором R вмикають по черзі котушку та конденсатор. У першому випадку на опорі розвивається теплова потужність N_1 , а в другому – N_2 . Визначити циклічну частоту коливань ω_0 у контурі.

П.38. Неонова лампа увімкнена в мережу змінного струму з ефективною напругою U_d і періодом T . Знайти проміжок часу Δt , в межах якого триває спалах лампи, та частоту спалахів ν . Напруга запалювання лампи дорівнює U_L і вона дорівнює напрузі гасіння.

П.39. Первинна обмотка понижуючого трансформатора з коефіцієнтом трансформації K увімкнена в мережу змінного струму з напругою U_1 . Опір вторинної обмотки дорівнює r , струм в ній – I . Знайти напругу U_2 на затискачах вторинної обмотки.

П.40. В кінці лінії змінного струму загальним опором R встановлено знижуючий трансформатор з коефіцієнтом трансформації K . Користувач споживає від трансформатора потужність N при силі струму рівній I . Визначити ККД трансформатора, якщо напруга на початку лінії U_1 , а втрати потужності мають місце тільки в первинній обмотці.

П.41. Знайти резонансну частоту для паралельного контуру, зображеного на рис. 2.14. Величини L , R та C вважати відомими.

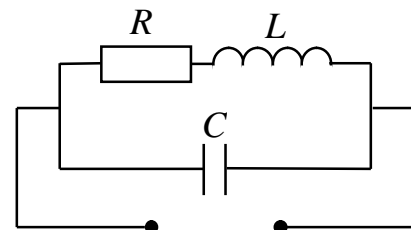


Рис.2.14

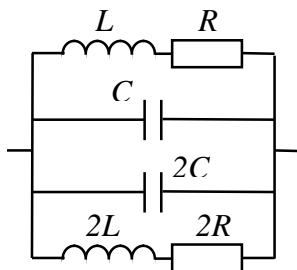


Рис.2.15

П.42. Знайти резонансну частоту для контуру, зображеного на рис. 2.15. Величини L , R і C вважати відомими.

П.43. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю ϵ . Коли цей конденсатор розмістити у колі змінного струму з частотою ν , зсув фаз між напругою і силою струму в конденсаторі дорівнюватиме ϕ . Визначити питомий опір діелектрика.

П.44. Соленоїд, що має індуктивність $L = 0.3$ Гн і опір $R = 10$ Ом, вмикається в коло змінного струму ($\nu = 50$ Гц) з ефективною напругою $U_d = 120$ В. Визначити амплітудне значення сили струму I_0 , зсув фаз ϕ між струмом і напругою в колі та потужність теплових втрат N .

П.45. Якщо через котушку проходить постійний струм силою I , то падіння напруги на ній складає U . При ввімкненні котушки у коло змінного струму з частотою ν амплітудні значення напруги та сили струму дорівнюють, відповідно, U_0 та I_0 . Визначити індуктивність котушки.

П.46. Амплітудне значення сумарної напруги на послідовно ввімкнених котушці та конденсаторі дорівнює U_{01} (рис. 2.16). Визначити зсув фаз між струмом і напругою у колі, якщо амплітудне значення напруги на опорі дорівнює U_{0R} .

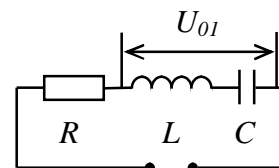


Рис.2.16

П.47. Як і які саме індуктивність L та ємність C потрібно приєднати до резистора опором $R = 20$ кОм, щоб струм через індуктивність I_L та ємність I_C був у 10 разів більше загального струму I_0 ? Частота змінного струму $\nu = 50$ Гц.

П.48. Котушка, повний опір якої $Z = 10$ Ом, а коефіцієнт потужності $\cos \phi_1 = 0.6$, підключена в коло змінного струму з частотою $\nu = 50$ Гц. Визначити ємність C конденсатора, який потрібно приєднати паралельно котушці для підвищення коефіцієнту потужності в колі до величини $\cos \phi_2 = 0.8$.

П.49. Коефіцієнт потужності в колі з послідовно з'єднаними конденсатором і активним опором дорівнює $\cos \phi = 0.6$. Визначити коефіцієнт потужності, якщо опір і конденсатор з'єднати паралельно.

П.50. Два конденсатори ємностями C_1 та C_2 увімкнені послідовно у коло змінного струму з амплітудним значенням напруги U_0 та частотою ν . Знайти амплітуди сили струму I_0 у колі та падіння напруги U_1 та U_2 на першому та другому конденсаторах.

Відповіді до задач

Електростатика та закони постійного струму.

- I.1.** $q = 2l \sin \alpha \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \tan \alpha}$. **I.2.** $q_{1,2} = r \left(\sqrt{F_2} \pm \sqrt{F_2 + F_1} \right) / (4\pi\epsilon_0)^{1/2}$. **I.3.** $q' = -q(2\sqrt{2} + 1)/4$, $q' \approx -1.91 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$. **I.4.** $E = \sqrt{q_1^2 r_2^4 + q_2^2 r_1^4 + q_1 q_2 r_1 r_2 (d^2 - r_1^2 - r_2^2)} / 4\pi\epsilon_0 r_1^2 r_2^2$, $\Phi = (q_1 r_2 - q_2 r_1) / 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2$.
- I.6.** $t = Vm/Ee$, $\Delta\Phi = mV^2/2e$. **I.7.** $V = \sqrt{V_0^2 + (eEt/m)^2}$. **I.8.** $A = q_3(q_1 + q_2)/(4\pi\epsilon_0 a)$, $A \approx 4 \text{ мкДж}$.
- I.9.** $W = (Q^2 + q^2 - Qq(2 + \sqrt{2})) / 4\pi\epsilon_0 a$. **I.10.** $X_{\min} = (Qq(M + m)) / (Qq(M + m) + 2\pi\epsilon_0 Mm(V + U)^2)$.
- I.11.** $\Phi_1 = N^{2/3}\Phi$, $\Phi_1 \approx 9.3 \text{ В}$. **I.12.** $\Delta\Phi = p/2\pi\epsilon_0 r^2$, $\Delta\Phi \approx 22.5 \text{ В}$. **I.13.** $F = 3p_1 p_2 / 2\pi\epsilon_0 r^4$.
- I.14.** а) $E = 0$, $r < R$; $E = \lambda r / 4\pi\epsilon_0$, $r \geq R$; б) $E = \rho r / 2\epsilon_0$, $r < R$; $E = R^2 \rho / 2\epsilon_0 r$, $r \geq R$.
- I.15.** $E_1 = 0$, $E_2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$, $E_3 = -q/\pi\epsilon_0 R^2$, $E_4 = (Q - q)/4\pi\epsilon_0 R^2$, $E_5 = (Q - q)/16\pi\epsilon_0 R^2$; $\Phi_1 = \Phi_2 = (Qr - qR)/4\pi\epsilon_0 rR$, $\Phi_3 = (Q - 2q)/4\pi\epsilon_0 R$, $\Phi_4 = (Q - q)/4\pi\epsilon_0 R$, $\Phi_5 = (Q - q)/8\pi\epsilon_0 R$.
- I.16.** $E_A = (\sigma_2 - \sigma_1)/2\epsilon_0$, $E_B = (\sigma_1 - \sigma_2)/2\epsilon_0$, $\Delta\Phi = [\sigma_1(d - h + L) + \sigma_2(d + h - L)]/2\epsilon_0$.
- I.17.** $F = q^2(d - 2L)/\epsilon_0 S d$. **I.18.** $\Delta\Phi_r = Q(R - r)/4\pi\epsilon_0 R^2$, $\Delta\Phi_R = -(Qr + qR)/4\pi\epsilon_0 R^2$.
- I.19.** $\sigma = 2\epsilon\epsilon_0 \sqrt{F^2 - m^2 g^2} / Q$, $\sigma \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2$. **I.20.** $\rho_0 = \rho(\epsilon - 1)/\epsilon$, $\rho_0 \approx 8.2 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$.
- I.21.** $E_1 = \epsilon_2 U / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)$, $E_1 \approx 2.4 \cdot 10^4 \text{ В/м}$, $U_1 = d_1 \epsilon_2 U / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)$, $U_1 = 48 \text{ В}$, $E_2 = \epsilon_1 U / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)$, $E_2 \approx 8.4 \cdot 10^4 \text{ В/м}$, $U_2 = d_2 \epsilon_1 U / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)$, $U_2 = 252 \text{ В}$.
- I.22.** а) $E_1 = 2\epsilon E_0 / (\epsilon + 1)$, $E_2 = 2E_0 / (\epsilon + 1)$; б) $E_1 = E_0$, $E_2 = E_0 / \epsilon$. **I.23.** $\sigma = \epsilon_0 (U_2 - U_1) / d$, $\sigma \approx 5.3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$, $\epsilon = U_2 / U_1$, $\epsilon = 3$. **I.24.** а) $C = \epsilon\epsilon_0 S / [\epsilon D + (1 - \epsilon)d]$; б) $C = \epsilon_0 S [d + \epsilon(2D - d)] / \{2D[d + \epsilon(D - d)]\}$. **I.25.** $q = CC_1 U / (C_1 + C)$, $W = U^2 C_1 C / 2(C_1 + C)$.
- I.26.** $C_{AB} = 3C$. **I.27.** а) $C = 2\epsilon_0 S / d$; б) $C = 3\epsilon_0 S / 2d$. **I.28.** а) $C_1 = C_2 (U - U_2) / (U_1 - U)$; б) $C_1 = C_2 (U + U_2) / (U_1 - U)$. **I.29.** $\Phi_B - \Phi_A = (\epsilon_2 C_2 + \epsilon_1 C_1) / (C_1 + C_2)$. **I.30.** $V \approx 1.5 \cdot 10^7 \text{ м/с}$, $V = \sqrt{2eU \ln(x_1/x_2) / m \ln(R/r)}$. **I.31.** $x = eUt^2/2md$, $x \approx 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. **I.32.** $j = U/\rho l$, $j \approx 5.8 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2$, $P = U^2 SL / \rho l^2$, $P \approx 146 \text{ Вт}$.
- I.33.** $R = r + R_4(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4)$. **I.34.** $x_1/x_2 = 0.11$.
- I.35.** $l = \sqrt{Rm/\rho\mu}$, $l \approx 502 \text{ м}$, $d = 2(\rho m / R\mu\pi^2)^{1/4}$, $d \approx 1 \text{ мм}$. **I.36.** $t_2 = (R_2 - R_1 + R_2 \alpha t_1) / \alpha R_1$, $t_2 \approx 2100 \text{ К}$. **I.37.** $U = [r_2(\epsilon_1 - \epsilon_3) + \epsilon_2(r_1 + r_3)] / (r_1 + r_2 + r_3)$. **I.38.** $U = (\epsilon_1 + \epsilon_2) / 2$.
- I.39.** $I_0 = I_1 I_2 (R_2 - R_1) / (I_2 R_2 - I_1 R_1)$, $I_0 \approx 2.55 \text{ А}$. **I.40.** $r = \epsilon(1 - \eta) / I$, $r = 0.8 \text{ Ом}$.
- I.41.** а) $t = t_1 t_2 / (t_1 + t_2)$; б) $t = t_1 + t_2$. **I.42.** $N = 2\epsilon/9r$. **I.43.** $\eta = \mu mg / UI$. **I.44.** $N = UI$,

$\eta = 1 - IR/U$. **I.45** $q = \sqrt{3Wt/4R}$, $q \approx 19.4$ Кл. **I.46.** $\varepsilon_2 = I_3 R_3 + (\varepsilon_1 + I_3 R_2) R_1 / (R_1 + R_2)$.
I.47. $I = (\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1) / (r_1 r_2 + R(r_1 + r_2))$. **I.48.** $U_1 = 6$ В, $U_2 = 0$ В, $U_3 = U_4 = 4$ В.
I.49. $q = C(\varepsilon_1(R_2 + r_2) + \varepsilon_2(R_1 + r_1)) / (R_1 + R_2 + r_1 + r_2)$. **I.50.** $\Delta\varphi = \varepsilon[R_1/(R_1 + R_2) - C_2/(C_1 + C_2)]$.
I.51. $I = (R_1 \varepsilon_2 + R_2 \varepsilon_1) / (R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)$, $I \approx 0.47$ А, $I_1 = (R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + R_2 \varepsilon_1) / (R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)$,
 $I_1 \approx 2.68$ А, $I_2 = (R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - R_1 \varepsilon_2) / (R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R)$, $I_2 \approx 2.20$ А, $U = RI$, $U \approx 9.3$ В.
I.52. $I_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ А, $I_2 = 7 \cdot 10^{-4}$ А, $I_3 = 1.1 \cdot 10^{-3}$ А, $I_4 = 0$. **I.53.** $\tau = \Delta m F Z / M j S$, $\tau \approx 10$ хв,
 $d = \Delta m / \rho S$, $d \approx 4.6$ мм. **I.54.** $m_2 = m_1 M_2 Z_1 / M_1 Z_2$, $m_2 \approx 5.3 \cdot 10^{-5}$ кг. **I.55.** $W = U m F Z / M$,
 $W \approx 1.8 \cdot 10^3$ Вм.

Магнетизм. Закони змінного струму.

II.1. $B = \mu_0 I \sqrt{2r_1^2 + 2r_2^2 - d^2} / 2\pi r_1 r_2$. **II.2.** $F = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi d$. **II.3.** $H_2 = 8\sqrt{2}H_1 / \pi^2$, $H_2 \approx 57.3$ А/м.
II.4. Вертикальна площина, розташована на відстані 0.6 см від провідника зі струмом I_1 .
II.5. $F = \mu_0 I^2 / 4\pi$. **II.6.** $H = (1 + \sqrt{2})I / 2\pi b$, $H \approx 96.1$ А/м. **II.7.** $B = \mu_0 \sqrt{I_1^2 + I_2^2} / \pi d$.
II.8. $B = \mu m g / Il$. **II.9.** $F = I l d$. **II.12.** $R = \sqrt{2m_p W} / eB$. **II.13.** $B = \sqrt{2mU / eR^2}$;
 $v = \sqrt{eU / 2\pi^2 R^2 m}$. **II.14.** $B = 2\pi m V n \cos \alpha / L e$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. **II.15.** $R_1 / R_2 \approx 0.71$.
II.16. $I = e^2 B / 2\pi m$, $I \approx 8.9 \cdot 10^{-10}$ А. **II.17.** $h = mV(1 - \sin \alpha) / eB$. **II.18.** $n_q = 3\pi B j b / 4U_H e$,
 $n_q \approx 5.3 \cdot 10^{16}$ м⁻³. **II.19.** $R_H = 3\pi \rho(\mu_n + \mu_p) / 8$, $R_H \approx 146$ м³/Кл. **II.20.** $\chi_m = 4.1 \cdot 10^{-8}$ м³/моль.
II.21. $J(r) = \alpha B_0 r^2 / \mu_0$. **II.22.** $\Delta\Phi = qR$, $\Delta\Phi = 5 \cdot 10^{-4}$ Вб. **II.23.** $\cos \alpha = 1 - qR / BS$.
II.24. $I = \Delta B d / 4\rho_l \Delta t$. **II.25.** $L = N\Phi / I$. **II.26.** $\Delta N = R V L B (V L B + 2\varepsilon) / (r + R)^2$. **II.27.** $\omega = 2\varepsilon / B L^2$.
II.28. $\varepsilon_{max} = 2\pi v B N S$, $\varepsilon_{max} \approx 9.4$ В. **II.29.** $w_B = \mu_0 I^2 N^2 / 8R^2$, $w_B \approx 0.98$ Дж/м³.
II.30. $q = BS(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) / R$. **II.31.** $N_2 = N_1 \sqrt{L_2 / L_1}$. **II.32.** $I = I_0 \exp(-R\Delta t / L)$, $I \approx 18.7$ А.
II.33. $t = I L / \varepsilon$, $t = 100$ с. **II.34.** $L = (8\pi^2 \Delta v^2 C)^{-1}$. **II.35.** $d = 4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 L S / \lambda^2$.
II.36. $U_C / U = (4\pi^2 v^2 C^2 R^2 + 1)^{-1/2}$, $U_R / U = 2\pi v C R / \sqrt{4\pi^2 v^2 C^2 R^2 + 1}$.
II.37. $\omega_0 = \sqrt[4]{N_1(U_0^2 - 2RN_2) / N_2(U_0^2 - 2RN_1)}$. **II.38.** $\Delta t = T[1 - \pi^{-1} \arcsin(U_L / \sqrt{2}U_d)] / 2$.
II.39. $U_2 = KU_1 - Ir$. **II.40.** $\eta = N K^2 / I(KU_1 - IR)$. **II.41.** $\omega = \sqrt{(L - R^2 C) / L^2 C}$.
II.42. $\omega = \sqrt{(L - 2R^2 C) / 2L^2 C}$. **II.43.** $\rho = \tan \varphi / 2\pi v \varepsilon \varepsilon_0$. **II.44.** $I_0 = \sqrt{2}U_d / \sqrt{R^2 + 4\pi^2 v^2 L^2}$, $I \approx 1.8$ А,
 $\tan \varphi = 2\pi v L / R$, $\varphi \approx 84^\circ$, $N = U_d^2 \cos \varphi / \sqrt{R^2 + 4\pi^2 v^2 L^2}$, $N \approx 16$ Вм.
II.45. $L = (2\pi v)^{-1} \sqrt{(U_0 / I_0)^2 - (U / I)^2}$. **II.46.** $\tan \varphi = U_{01} / U_{0R}$. **II.47.** паралельно. $L = R / 20\pi v$,

$L \approx 6.4 \Gamma_H$, $C = 5/\pi Rv$, $C \approx 6 \text{ мкФ}$. **II.48.** $C = 400 \text{ мкФ}$ аёо 111 мкФ . **II.49.** $\cos \varphi = 0.7$.

II.50. $I_0 = 2\pi v C_1 C_2 U_0 / (C_1 + C_2)$, $U_1 = C_2 U_0 / (C_1 + C_2)$, $U_2 = C_1 U_0 / (C_1 + C_2)$.