**Київський національний університет**

**імені Тараса Шевченка**

**Боровий М.О., Оліх О.Я., Цареградська Т.Л.,**

**Овсієнко І.В., Подолян А.О., Козаченко В.В.**

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ.**

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ.**

**Частина 3. Оптика, елементи квантової механіки, атомної та ядерної фізики.**

**Навчальний посібник**

**Київ**

**2022**

**ББК**

**К**

***Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету***

***Київського національного університету імені Тараса Шевченка***

***(протокол № від р.)***

***Рецензенти****:*

д-р фіз.-мат. наук, проф. Гололобов Ю.П.

д-р фіз.-мат. наук, проф. Зеленський С.Є.

**Боровий М.О., Оліх О.Я., Подолян А.О.,**

**Овсієнко І.В., Цареградська Т.Л., Козаченко В.В.,**

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ. ЗБІРНИК ЗАДАЧ.** Частина 3. **Оптика, елементи квантової механіки, атомної та ядерної фізики.**

Навчальний посібник. – К.: 2022. – с.

*За структурою та змістом збірник задач відповідає програмі курсу фізики хімічних факультетів закладів вищої освіти України. В посібнику викладено теоретичні відомості, основні методи розв’язання задач з курсу фізики та завдання для самостійної роботи.*

*Для студентів закладів вищої освіти України.*

ББК

ISBN

**Зміст**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1. ОПТИКА | 4 |
|  | * 1. Теоретичні відомості |  |
|  | * 1. Приклади розв’язку задач |  |
|  | Задачі для самостійного розв’язку |  |
|  | | |
|  | 2. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ | 4 |
|  | * 1. Теоретичні відомості |  |
|  | * 1. Приклади розв’язку задач |  |
|  | * 1. Задачі для самостійного розв’язку |  |
|  | | |
|  | 3. ЕЛЕМЕНТИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ | 4 |
|  | * 1. Теоретичні відомості |  |
|  | * 1. Приклади розв’язку задач |  |
|  | * 1. Задачі для самостійного розв’язку |  |
|  | Відповіді до задач |  |
|  | Додатки |  |
|  | Література |  |

**1. ОПТИКА**

**1.1. Теоретичні відомості**

**Оптика** – це розділ фізики, який вивчає властивості та фізичну природу світла, а також його взаємодію з речовиною. Вчення про світло можна розділити на три частини:

* геометрична або променева оптика, яка базується на уявленнях про світлові промені;
* хвильова оптика, що вивчає прояви хвильових властивостей світла;
* квантова оптика, предметом дослідження якої є явища, насамперед взаємодії світла з речовиною, де спостерігається прояв корпускулярних властивостей світла.

Видиме світло – це електромагнітні хвилі з довжиною хвилі, яка приблизно знаходиться у діапазоні 400÷760 нм. При розповсюдженні такої хвилі у середовищі її швидкість υ зменшується порівняно з випадком поширення у вакуумі внаслідок взаємодії із зарядженими частинками (насамперед, електронами), які це середовище утворюють. Відношення швидкості світла у вакуумі *с* до υ визначає **абсолютний показник заломлення** середовища *n*:

. (1.1)

Величина абсолютного показника заломлення визначає так звану оптичну густину середовища.

В оптично однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно. У зв’язку з цим використовується поняття світлового променя – геометричної лінії вздовж якої поширюється світло. Зауважимо, що закон прямолінійного світла порушується, а поняття променя втрачає зміст у випадку, коли, наприклад, світло проходить через отвір, розмір якого спів розмірний з довжиною хвилі, біля краю екрану тощо.

При падінні променя на границю розділу двох середовищ, світло, у загальному випадку, частково відбивається, частково заломлюється. При цьому падаючий, відбитий та заломлений промені, а також перпендикуляр до границі розділу, знаходяться у одній площині, кут відвивання дорівнює куту падіння *і*, а для кута заломлення *r* виконується співвідношення

, (1.2)

де *n*1 та *n*2 – абсолютні показники заломлення середовищ, де поширюється падаючий та заломлений промені, відповідно; *n*21 – відносний показник заломлення. Вираз (1.2) визначає **закон заломлення світла** або **закон Снеліуса**.

Оптична сила тонкої лінзи, розташованої в однорідному середовищі

, (1.3)

де *F* – фокусна відстань лінзи, *n*1 і *n*2 – показники заломлення середовища і матеріалу лінзи, відповідно; *R*1 і *R*2 – радіуси кривизни поверхонь, що обмежують лінзу.

Формула тонкої лінзи

, (1.4)

де *а*1 та *а*2 – відстані предмета та його зображення від лінзи. Відстані, які відраховуються від лінзи вздовж напрямку ходу світлового променя вважаються додатними, а ті, що відраховуються проти ходу – від’ємними. Це ж правило застосовується і до визначення знаків *R*1 та *R*2 у попередній формулі.

Поперечне лінійне збільшення

, (1.5)

де *y*1 – висота предмету, *y*2 – висота зображення.

**Світловий потік** Ф – це енергія, яка переноситься світловими хвилями через дану площу за одиницю часу:

. (1.6)

**Сила світла** визначається величиною світлового потоку, що припадає на одиницю просторового кута

. (1.7)

**Освітленість** характеризується світловим потоком, що припадає на одиницю площі

. (1.8)

Освітленість на відстані *r* від точкового джерела світла силою *І* описується виразом

, (1.8)

де α – кут падіння променів.

**Світимість** *R* визначається світловим потоком, що випромінюється одиницею площі тіла

. (1.9)

Якщо світимість тіла обумовлена лише його освітленістю, то

, (1.10)

де ρ – коефіцієнт відбивання світла тілом.

**Яскравість** тіла, яке світиться

, (1.11)

де θ – кут між напрямком спостереження і нормаллю до елементу поверхні *dS*.

Якщо тіло випромінює по закону Ламберта (тобто яскравість не залежить від напрямку), то

. (1.12)

Одиниці світлових величин узагальнені у Додатку 2.

**Оптична довжина** обчислюється за допомогою наступного виразу

, (1.13)

де *l* – геометрична довжина шляху, що проходить промінь у середовищі з показником заломлення *n*.

**Оптична різниця ходу** двох променів

. (1.14)

Взаємозв’язок **різниці фаз** і оптичної різниці ходу:

, (1.15)

де λ – довжина світлової хвилі.

Інтенсивність світла називають величину, яка дорівнює середньому значенню квадрата напруженості електричного поля електромагнітної хвилі. Закон **фотометричного додавання** передбачає, що в місцях накладання декількох електромагнітних хвиль загальна інтенсивність визначається сумою інтенсивностей окремих світлових променів. Явище відхилення від закону фотометричного додавання називається **інтерференцією**. Для спостереження цього явища необхідно, щоб хвилі, які накладаються, були когерентними, а саме, мали однакову частоту та незмінну в часу різницю початкових фаз.

**Умова максимуму інтерференційної** картини при накладанні двох когерентних хвиль

. (1.16)

Умова **мінімуму** **інтерференційної** картини при накладанні двох когерентних хвиль

. (1.17)

Оптична різниця ходу світлових хвиль, яка виникає при відбиванні у вакуум (повітря) монохроматичного світла від тонкої плівки

, (1.18)

де *d* – товщина плівки, *n* – її абсолютний показник заломлення, *і* та *r* – кути падіння та заломлення, доданок λ/2 враховує появу додаткової різниці ходу при відбитті від більш оптично густого середовища. У випадку, коли плівка знаходиться на поверхні середовища з більшим абсолютним показником заломлення, ніж у неї, цей доданок відсутній.

Інтерференційну картину у вигляді темних та світлих кілець (при монохроматичному освітленні) можна спостерігати, розташувавши плоско-опуклу лінзу на скляній пластинці. Інтерференція спостерігається як у відбитому світлі, так і в тому, що пройшло, причому для цих двох випадків світлі та темні кільця міняються місцями. Така інтерференційна картина називається **кільця Ньютона**. Радіус *k*-го темного кільця Ньютона у відбитому світлі може бути обчислений за допомогою співвідношення

; (1.19а)

тоді як для світлого справедливим є

, (1.19б)

де R – радіус кривизни сферичної поверхні лінзи.

**Дифракцією** називається відхилення світла від прямолінійного поширення, яке не зводиться до відбивання та заломлення.

Умова мінімуму та максимуму при **дифракції на одній щілині** при нормальному падінні світла

, (1.20а)

, (1.20б)

де φmin та φmax – кути відхилення променів, які відповідають мінімуму та максимуму інтенсивності, *b* – ширина щілини.

**Дифракційна гратка** – це оптичний пристрій, який складається з великої кількості непрозорих (штрихів, щілин тощо) та прозорих областей, розташованих періодично. При нормальному падінні на дифракційну гратку світла з довжиною хвилі λ максимуми інтенсивності спостерігаються в напрямах, які складають з нормаллю до гратки кут φ

, (1.21)

де *d* – стала гратки (сумарна ширина прозорої та непрозорої областей); ціле число *k* ще називають порядком спектра.

Дифракційна гратка здатна виконувати роль дисперсійного елемента, тобто пристрою, що розділяє в просторі хвилі з різної довжиною. При цьому для роздільної здатності дифракційної гратки є справедливим співвідношення:

, (1.22)

де Δλ – найменша різниця хвиль двох сусідніх спектральних ліній (λ і λ+Δλ), які ще можливо бачити окремо в *k*-му спектрі, отриманому за допомогою дифракційної гратки із загальною кількістю щілин *N*.

Так як довжина електромагнітних хвиль рентгенівського діапазону співрозмірна з параметром гратки кристалів, то останні можуть відігравати роль дифракційної гратки. У цьому випадку застосовують **формулу Вульфа-Бреггів**

, (1.23)

де θ – кут ковзання (кут між напрямом паралельного пучка рентгенівського випромінення, що падає на кристал, і атомною площиною в кристалі), який відповідає дифракційному максимуму; *d* – міжплощинна відстань.

Якщо напрям вектора напруженості електричного поля світлової хвилі (т.з. світлового вектора) змінюється хаотично, то таке світло називається неполяризованим або природнім. У випадку, якщо вектор напруженості весь час перебуває у одній площині, то світло називається плоско (або лінійно) поляризованим, а сама площина – площиною поляризації. Напрям світлового вектора описує коло у випадку циркулярно поляризованого світла. Циркулярно та плоскополяризоване світло є частковими випадками еліптичнополяризованиго світла. Прилади, які дозволяють отримувати плоскополяризоване світло, називаються поляризаторами. Інша назва поляризатора – ніколь; це узагальнююче іменування пов’язано з тим, що одним з найбільш популярних поляризуючи пристроїв є призма Ніколя, дія якої ґрунтується на використанні явищ подвійного променезаломлення та повного внутрішнього відбивання.

При падінні на поляризатор природнього світла, на його виході отримується плоскополяризоване світло вдвічі меншої інтенсивності. Інтенсивність світла на виході поляризатора при падінні плоскополяризованого світла описується законом Малюса:

, (1.24)

де *І*0 – інтенсивність падаючого плоскополяризованого світла, *І* – інтенсивність світла після поляризатора, α – кут між напрямами поляризації падаючого світла і площиною пропускання поляризатора. У системі, яка складається з двох поляризаторів, вихідний нерідко називають аналізатором.

Якщо коливання вектора напруженості мають переважаючий напрямок, проте спостерігаються і в інших, то говорять про частково поляризоване світло. **Ступінь поляризації** світла описується виразом

, (1.25)

де *I*max та *I*min – максимальна і мінімальна, відповідно, інтенсивності світла, які пропускається поляризатором.

**Закон Брюстера**

, (1.26)

де *і*Б – кут падіння, при якому відбитий від межі поділу двох діелектриків промінь повністю поляризований. Якщо кут падіння на задовольняє умові (1.26), то і відбитий, і заломлений промені будуть частково поляризованими. Зокрема, для відбитого світла справедливі формули Френеля:

, (1.27)

де  і  – інтенсивності падаючого світла, у якого коливання світлового вектора перпендикулярні та паралельні площині падіння, відповідно;  і  – те саме для відбитого світла; *і* та *r* – кути падіння та заломлення.

Для природнього світла інтенсивністю *І*0: .

Якщо при проходженні плоскополяризованого світла через середовище відбувається обертання площини поляризації, то середовище називається активним. Кут повороту в твердих тілах та розчинах описується виразами (1.28а) та (1.28б):

, (1.28а)

де *d* – довжина шляху, пройденого світлом в оптично активному середовищі, яке характеризується сталою обертання α

, (1.28б)

де [α] – питома стала обертання, *С* – масова концентрація оптично активної речовини в розчині.

Спектральною випромінювальною здатністю тіла *Erad,*λ називають енергію, яка випромінюється з одиниці поверхні тіла за одиницю часу, причому довжини електромагнітних хвиль знаходяться в інтервалі довжин хвиль [λ, λ + dλ]. Аналогічну величину, пов’язану з випромінюванням у частотному інтервалі [ω, ω + dω] також називають спектральною випромінювальною здатністю, але позначають *Erad,*ω.

. (1.29)

Враховуючи, що ω = 2π*c*/λ, то λ*d*ω = ω*d*λ. Інтегральна випромінювальна здатність *Erad* визначається енергією, що випромінюється одиницею поверхні тіла за одиницю часу:

. (1.30)

Поглинальна здатність визначається відношенням поглинутої енергії, до падаючої. Тіло, для якого поглинальна здатність рівна одиниці, називається **абсолютно чорним**. Для такого тіла спектральні випромінювальні здатності описуються **формулою Планка**:

, (1.31а)

. (1.31б)

**Закон Стефана-Больцмана**:

, (1.32а)

де *Erad* – інтегральна випромінювальна здатність теплового випромінення абсолютно чорного тіла температурою *Т*, σ – стала Стефана-Больцмана.

Тіло, для якого поглинальна здатність не залежить від температури та частоти падаючого світла, а за величиною менше одиниці, називається сірим. Для такого тіла

, (1.32б)

де β – коефіцієнт чорноти.

**Закон зміщення Віна**:

, (1.33)

де λm – довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної залежності енергії теплового випромінення абсолютно чорного тіла температурою *Т*, *b*W – стала Віна.

**Енергія фотона**

, (1.34)

де *h* – стала Планка, ν – частота фотона.

**Імпульс** **фотона**

. (1.35)

**Формула Ейнштейна для фотоефекта**:

, (1.36)

де ν – частота світла, падаючого на поверхню металу; *А* – робота виходу електрону з металу, *Ek,*max ‑ максимальна кінетична енергія фотоелектронів, які вилітають з металу.

**Формула Комптона**:

, (1.37)

де Δλ – зміна довжини хвилі фотону при його комптонівському розсіянні на частинці масою *m*, λ1 і λ2 – довжини хвилі до та після, відповідно, розсіяння на кут θ.

**1.2. Приклади розв’язку задач**

**Задача О.1.** *Точкове джерело світла S знаходиться на відстані a = 15 см від розсіючої лінзи з фокусною відстанню F = 10 см на її головній оптичний вісі. По інший бік лінзи на відстані b = 5 см від неї розташовано плоске дзеркало. Знайти відстань L між джерелом і його уявним зображенням у дзеркалі.*

***Розв’язок:***

Рис.1.1

Спочатку знайдемо, де буде знаходитися зображення S1 джерела світла S, утворене розсіючою лінзою. Для цього скористаємося формулою тонкої лінзи, яка у випадку розсіючої лінзи матиме вигляд:

, (1)

де *а* та *d* – відстані від лінзи до джерела світла і його зображення, *F* – фокусна відстань лінзи. Виразивши з (1) *d*, отримуємо

. (2)

Те, що значення *d* від’ємне свідчить, що зображення S1 знаходиться з того ж боку від лінзи, що і джерело S. Побудувавши хід променів в даній оптичній системі (рис.1.1) ми можемо в цьому пересвідчитися.

Отже, уявне зображення S1, утворене лінзою, знаходиться на відстані

 (3)

від дзеркала. Відповідно, уявне зображення S2, утворене у дзеркалі, знаходиться на відстані *d*1 з іншого боку дзеркала. Таким чином, відстань між S i S2 (як видно з рисунку)

.

**Задача О.2**. *Обчислити зміщення променя, що пройшов крізь скляну плоскопаралельну пластинку товщиною d = 2 см, якщо кут падіння променя* α*= 60˚.*



Рис.1.2

***Розв’язок:***

При падінні світла з повітря на скляну пластинку закон заломлення матиме вигляд:

, (1)

де α – кут падіння, β – кут заломлення, *n* – абсолютний показник заломлення скла (*n* = 1,5) – у формулі (1) враховано, що абсолютний показник заломлення повітря дорівнює одиниці.

Нехай кут під яким світло виходить з пластини ‑ α/. Тоді для заломлення світла на протилежній грані пластини, при виході з неї, можна записати:

. (2)

Порівнявши вирази (1) і (2) бачимо, що має бути α = α/, тобто кути під якими промінь світла падає на плоскопаралельну пластину і виходить з неї, однакові. Отже, після проходження пластини промінь буде йти паралельно своєму руху до зустрічі перетину з пластиною (див. рис.1.2) змістившись на відстань x. Як видно з рисунка, *x* може бути знайдена з прямокутного трикутника СBD:

. (3)

В свою чергу СВ = ЕВ - ЕС, а для EC и CB справедливі є рівності:

,

,

де *d* – товщина пластини. Отже,

,

. (4)

З формули (1) випливає:

. (5)

Так як , а , то з урахуванням (5) отримуємо:

 (6)

Підставивши (6) в (4) знаходимо:



**Задача О.3**. *У центрі квадратної кімнати площею S = 25 м2 висить лампа. На висоті h від підлоги повинна знаходитись лампа, щоб освітленість у кутах кімнати була найбільшою?*

***Розв’язок:***



Рис.1.3

Лампу можна розглядати як точкове джерело світла. Освітленість *Е*, що створюється точковим джерелом світла силою *І* на елементі площі, який розташований на відстані *r*, описується формулою:

, (1)

де α – кут падіння променів. Як видно з рис.1.3, *r* та cos α пов’язані зі стороною квадратної кімнати *d* і висотою знаходження лампи *h* наступними співвідношеннями:

 (2)

де  – половина діагоналі підлоги. Підставляючи (2) в (1), отримуємо:

. (3)

Для знаходження максимуму освітленості знайдемо похідну  і прирівняємо її до нуля:

 (4)

З рівняння (4) знаходимо висоту на якій потрібно розташувати лампу, щоб досягти максимальної освітленості в кутах кімнати:

.

Так як площа S квадратної кімнати і її сторона d пов’язані співвідношенням , то остаточно отримуємо

.

**Задача О.4.** *Два когерентні джерела світла віддалені від екрану на відстань L = 2 м. Відстань між ними складає d = 2 мм. Знайти довжину хвилі* λ*, що випромінюється джерелами, якщо відстань на екрані між третім і п'ятим мінімумами інтерференційної картини дорівнює Δх3,5=1,2 см.*



Рис.1.4

***Розв’язок:***

Різниця ходу Δ світлових хвиль, що поширюються від двох когерентних джерел *S*1 та *S*2 у точці екрану з координатою *х*:

, (1)

де зміст *r*1 та *r*2 зрозумілий з рис.1.4. З рисунку також видно, що , . Таким чином

.

Водночас . Так як , то  і отже

,

тобто

. (2)

Мінімуми інтерференційної картини спостерігаються в тих областях екрану, для яких

, (3)

де *k* = 0, ±1, ±2… визначає порядок мінімуму, λ – довжина хвилі, що випромінюється джерелами.

Нехай *k*1-му мінімуму відповідає координата на екрані *х*k1 , а k2-му мінімуму – *х*k2. Тоді, враховуючи (2) і (3),

 (4)

Віднімаючи від другого рівняння системи (4) перше, отримаємо

. (5)

Так як  – відстань між *k*1-м та *k*2-м мінімумами, то

,

звідки

.

**Задача О.5**. *Визначити найменшу товщину мильної плівки dmin, якщо у відбитому світлі вона здається зеленою (*λ *= 500 нм). Кут* α *між нормаллю і променем зору дорівнює 35°. Вважати, що показник заломлення плівки n = 1,4. Який колір буде у плівки, якщо її спостерігати під кутом* α1*= 0°, тобто при нормальному промені зору?*

***Розв’язок:***

При падіння світла на плівку внаслідок відбивання від її верхньої та нижньої границь утворюються дві когеренні хвилі. Колір плівки визначається тим, для якої з довжин хвиль виконується умова максимуму інтерференції. Таким чином, використовуючи вирази (1.16) та (1.18), отримуємо:

, (1)

де *d* – товщина плівка, *k* – ціле число. Найменша товщина плівки *d* = *d*min відповідає випадку *k* = 1:

, (2)

звідки

.

Щоб відповісти на друге запитання, необхідно використовуючи вираз (2) визначити довжину хвилі, яка відповідатиме максимуму інтерференці під кутом α1:

.

Отже, у випадку нормального спостереження око побачить плівку, забарвлену в жовто-зелений колір.

**Задача О.6**. *Поверхні скляного клина утворюють між собою кут* α*= 0,1′. Клин освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі* λ *= 5⋅10-7 м, яке падає нормально до його поверхні. Знайти лінійну b відстань між сусідніми інтерференційними смугами, вважаючи що абсолютний показник заломлення скла n = 1,5.*



Рис.1.5

***Розв’язок:***

У цьому випадку когерентні хвилі з’являються внаслідок відбиття променів від обох поверхонь клину. Внаслідок мализни кута, можна вважати, що всі промені поширюються перпендикулярно до обох поверхонь клину. При обчисленні різниці ходу необхідно врахувати, що при відбитті від границі повітря-скло промінь отримує додаткову різницю ходу λ/2, тоді як у випадку границі скло-повітря друге середовище є менш оптично густим і додаткова різниця ходу для відбитого променя відсутня. Крім того, промені відбиті від нижньої границі клину (див. Рис.1.5) проходять надлишковий шлях, довжина якого залежить від товщини клина, що, в свою чергу, змінюється при русі вздовж нього. Таким чином, різниця ходу для інтерферуючих променів

, (1)

де *d* – товщина клину у даній точці.

Нехай у точках С1 і С2 знаходяться дві сусідні світлі смуги. Тоді різниці ходу Δ1 і Δ2 для променів, які виходять з клину у цих точках мають виконуватися умови

 (2)

де *d*1 та *d*2 – товщина клина в місцях розташування точок С1 та С2, відповідно; *k* – ціле число. Віднімаючи почленно ці дві рівності, отримаємо

,

звідки

. (3)

Як видно з рисунка, відстань між цими точками

, (4)

де кут α виражається в радіанах.

Беручи до уваги вирази (3) та (4) остаточно запишемо

.

**Задача О.7**. *Знайти фокусну відстань F плоско-опуклої лінзи, яка використовується у приладі для спостереження кілець Ньютона, якщо радіус третього світлого кільця дорівнює r3 = 1,1⋅10-3 м. Вважати, що показник заломлення матеріалу лінзи n = 1,6, довжина хвилі освітлення* λ*= 5,89⋅10-7 м, а спостереження проводяться у відбитому світлі.*

***Розв’язок:***

При спостереженні кілець Ньютона у відбитому світлі в точці С (рис. 1.6) інтерферують між собою промінь, який відбився від внутрішньої поверхні лінзи, та промінь, який повернувся в т.С пройшовши відстань СD = *d* вниз і потім відбився від зовнішньої поверхні плоско-паралельної пластинки в точці D. Оптична різниця ходу  інтерферуючих променів буде дорівнювати:

. (1)

Формула (1) записана у припущенні, що між лінзою та пластинкою знаходиться повітря, для якого показник середовища *nпов* ≈ 1; другий доданок враховує додаткову різницю ходу, що виникає при відбиванні променя від пластинки. Місця розташування повітряного проміжку однакової товщини є колами з центром у точці дотику лінзи і пластинки, а отже інтерференційна картина має вигляд концентричних кілець.



Рис.1.6

Виразимо величину *d* через радіус інтерференційного кільця *r* та радіус кривизни лінзи *R*. Для цього розглянемо прямокутний трикутник ОАС – див.Рис.1.6. Згідно з теоремою Піфігора OC2 = ΑC2+ OΑ2. З рисунка видно, що OC = OB = *R*, AС = *r*, OA = OB – AB, AB = CD = *d*. Таким чином

.

Взявши до уваги, що , з останнього виразу отримаємо

. (2)

Отже, для оптичної різниці ходу променів, які інтерферують на відстані *r* від точки дотику лінзи і пластинки, наближено виконується наступна рівність:

. (3)

Для утворення світлого кільця необхідно, щоб у місці його розташування виконувалась умова

, (4)

де *k* – ціле число, що нумеруватиме кільця. Прирівнюючи вирази (3) та (4) маємо

, (5)

де *rk* – радіус *k*-го світлого кільця. Формула (5) дозволяє оцінити радіус кривизни лінзи опуклої поверхні лінзи:

. (5)

Як відомо, фокусна відстань лінзи з поверхнями, які мають радіуси кривизни *R* та *R*0 у випадку, коли вона знаходиться у повітрі визначається співвідношенням

 (5)

Для плоскої поверхні *R*0 = ∞ і тому остаточно отримуємо

.

**Задача О.8.** *Диференційна гратка містить N1= 800 штрихів на 1 мм. На неї нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі* λ*= 0,585 мкм. Визначити, як зміниться кут дифракції для спектра другого порядку, якщо взяти гратку з N2= 500 штрихами на одному міліметрі.*

***Розв’язок:***

Кут φ відхилення променів, що відповідає максимуму при дифракції на гратці нормально падаючого світла довжиною λ визначається з умови:



Рис.1.7

, (1)

де *d* – період гратки, *k* = 0, ±1, ±2… ‑ порядок спектру. Якщо на довжині *L* гратки вкладається *N* штрихів, то період цієї гратки:

. (2)

Виражаючи з (1) sin φ і підставляючи у (2) отримаємо:

. (3)

Таким чином, кут спостереження максимуму при дифракції на першій гратці

,

тоді як для другої

.

При заміні гратки кут зміниться на величину:

.

Отже, якщо взяти іншу гратку, то кут дифракції для спектру другого порядку зменшиться приблизно на 33.6˚.

**Задача О.9.** *Кут α між площинами пропускання поляризаторів дорівнює 50˚. Природнє світло, проходить крізь таку систему послаблюється в k = 5 разів. Нехтуючи втратами світла при відбитті, визначити коефіцієнт поглинання* χ *світла в поляризаторах.*

***Розв’язок*:**

Природнє світло, що падає на перший поляризатор N1, розщеплюється внаслідок подвійного променезаломлення на два промені: звичайний і незвичайний. Обидва промені однакові за інтенсивністю та повністю поляризовані. Площина коливань світлового вектора незвичайного променя (е) лежить у площині малюнка (площині головного перерізу поляризатора). Площина коливань для звичайного променя (о) перпендикулярна площині малюнка. Звичайний промінь повністю поглинається поляризатором. Незвичайний промінь проходить через поляризатор змінюючи свою інтенсивність внаслідок поглинання, таким чином:

, (1)



Рис.1.8

де *I*0 – інтенсивність природного світла, що падає на оптичну систему, *I*1 – інтенсивність світла, що пройшло перший поляризатор, χ – коефіцієнт поглинання світла поляризатором.

Плоскополяризований промінь інтенсивністю *I*1, який падає на другий поляризатор N2, також розщеплюється на звичайний і незвичайний проміні різної інтенсивності. Звичайний промінь повністю поглинається поляризатором. Врахувавши поглинання світла в поляризаторі та користуючись законом Малюса для інтенсивності *I*2 променя, який виходить з N2, можемо записати:

. (2)

Підставляючи (1) в (2) отримуємо:

. (3)

Виражаючи з формули (3) χ та враховуючи, що згідно умови задачі , остаточно маємо:

.

**Задача О.10.** *Частково поляризоване світло проходить крізь ніколь. При повороті ніколя на кут* α*= 60° від положення, при якому інтенсивність світла, яке пройшло є максимальним, ця інтенсивність зменшується в* η*= 2 рази. Нехтуючи поглинанням і відбиванням світла ніколем, визначити: а) відношення інтенсивностей Ip лінійно поляризованої складової та I0 природньої склодової світла на вході в ніколь; б) ступінь поляризації P вхідного пучка.*

***Розв’язок:***

Частково поляризоване світло можна уявити як суміш природнього та плоско поляризованого. Після проходження такою сумішшю поляризатора найбільша інтенсивність буде спостерігатися у випадку, коли площина пропускання ніколя збігається з площиною поляризації лінійно поляризованої складової, а отже вона проходитиме повністю. Щодо природньої складової, то при будь-якому положенні ніколя її внесок у вихідне світло буде дорівнюватиме половині *I*0. Таким чином, при першому положенні ніколя, сумарна максимальна інтенсивність вихідного світла *I*1 може бути записана наступним чином:

. (1)

При повороті ніколя на кут α внесок плоскополяризованої складової у загальну вихідну інтенсивність *І*2 можна обчислити використовуючи закон Малюса. Тобто:

. (2)

Оскільки згідно з умовою задачі *I*1 / *I*2 = η, то, використовуючи дві попередні рівності, отримуємо

.

Перетворивши останній вираз матимемо

.

Ступінь поляризації можна знайти за допомогою формули:

, (3)

де *I*max та *I*min – максимальна і мінімальна, відповідно, інтенсивності світла, які пропускається поляризатором. В нашому випадку *I*max = *I*1, а *I*min спостерігається, коли лінійно поляризована складова повністю затримується нікелем, тобто *I*min = 0,5 *Ι*0. Таким чином

,

.

**Задача О.11**. *Пластинку кварцу товщиною d = 2 мм помістили між паралельними ніколями, за рахунок чого площина поляризації монохроматичного світла повернулася на кут* φ*= 53°. Якої найменшої товщини dmin потрібно взяти кварцову пластинку, щоб поле зору поляриметра стало повністю темним?*

***Розв’язок:***

Кут повороту площини поляризації монохроматичного світла при проходженні через оптично активну речовину (в даному випадку кварц) описується формулою:

, (1)

де α – стала обертання речовини, *d* – шлях, що пройшло світло. Тобто, якщо у світла, яке пройшло через пластину товщиною *d* площина поляризації повернулась на кут φ, то стала обертання для цього матеріалу:

. (2)

Щоб поле зору поляриметра було абсолютно темним необхідно, щоб напрям поляризації світла, яке падає на аналізатор і напрям площини пропускання аналізатора були перпендикулярні. Тобто, мінімальний кут, на який пластина має повернути площину поляризації світла φmin= 90˚. Використовуючи вираз (1), можемо записати:

,

,

або, враховуючи (2),

.

**Задача О.12.** *Як і в скільки разів зміниться потік випромінення абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінення зміститься з червоної границі видимого спектра (*λ*m1= 780 нм) до фіолетової (*λ*m2= 390 нм)?*

***Розв’язок:***

Згідно із законом Стефана-Больцмана потік випромінення абсолютно чорного тіла описується виразом:

, (1)

де σ – стала Стефана-Больцмана, *S* та *T* – площа та термодинамічна температура поверхні тіла, відповідно.

З іншого боку, довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінення визначається законом зміщення Віна:

, (2)

де *b*W – стала Віна. Якщо з формули (2) виразити Т та підставити в (1), отримаємо:

. (3)

Тобто, для потоку випромінення в першому і другому випадках можемо записати:

 (4)

Поділивши друге рівняння системи (4) на перше, отримуємо:

.

Тобто, потік випромінення збільшиться в 16 разів.

**Задача О.13.** *Чорний тонкостінний куб зі стороною а = 10 см заповнений водою, нагрітою до температури t1 = 50°С. За який час температура куба зменшиться до температури t2 = 10°С, якщо він знаходиться в середині замкнутої чорної площини, температура стінок якої підтримується рівною t0 = 0°С.*

***Розв’язок:***

Зміна температури куба визначається а) втратами енергії внаслідок власного теплового випроміненням; б) поглинанням електромагнітних хвиль, які випромінюються оточуючою площиною. Перша величина залежить від поточної температури куба і змінюється з часом. Друга величина збігається з потоком, який би випромінював куб у випадку, коли його температура була б рівною температурі площини і залишається постійною при охолодженні. Таким чином, кількість теплоти *dQ*, яку втрачає куб за нескінченно малий проміжок часу *dt* можна записати у вигляді

, (1)

де *Т* – поточна температура куба, 6*а*2 – площа поверхні куба.

З іншого боку, *dQ* пов’язана зі зміною температури куба *dT* наступним співвідношенням:

, (2)

де ρm – густина води, *a*3 – об’єм куба, *СП* – питома теплоємність води. Прирівнюючи праві частини (1) та (2) отримуємо рівняння теплового балансу охолодження куба протягом *dt*:

. (3)

Розділяючи змінні та переходячи до скінченних інтервалів отримуємо

,

. (4)

Враховуючи, що значення інтегралу



отримуємо



.

**Задача О.14**. *Знайти довжину хвилі фотона* λph*, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона з кінетичною енергією Ek,*e*= 0,3 МеВ.*

***Розв’язок:***

Задана в умові величина кінетичної енергії електрона співрозмірна з величиною його енергії спокою (0,511 МеВ). А отже, при записі його імпульсу необхідно використовувати релятивістські вирази. Зокрема, зв’язок імпульсу електрона *р*е та його повної енергії *Е*е можна записати, використовуючи релятивістський інваріант:

, (1)

де *m*0 – маса спокою електрона, *с* – швидкість світла у вакуумі. Водночас

. (2)

Підставляючи вираз (2) в (1) отримуємо

. (3)

Водночас, для фотона

. (4)

Так як згідно з умовою задачі *p*ph = *p*e, остаточно отримуємо

. (5)

**Задача О.15.** *Червона границя фотоефекту для цинку* λ0*= 310 нм Визначити максимальну кінетичну енергію Ek,max фотоелектронів в електрон-вольтах, якщо на цинк падає світло з довжиною хвилі* λ*= 200 нм.*

***Розв’язок:***

Згідно з формулою Ейнштейна для фотоефекту:

, (1)

де ε – енергія фотона, який падає на поверхню металу; *А* – робота виходу електрона для цього металу; *Ek*,max ‑ максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Для фотону енергія ε зв'язана з довжиною хвилі λ співвідношенням:

, (2)

де *h* – стала Планка; с – швидкість світла у вакуумі.

В свою чергу, червона границя фотоефекту λ0 пов'язана з роботою виходу електрона:

. (3)

Підставивши у вираз (1) виражене з (3) значення роботи виходу, а також враховуючи (2), отримуємо:

,

звідки

. (5)

Перевіримо, чи має формула (5) розмірність енергії:

.

Використовуючи формулу (5), знаходимо:

.

Враховуючи, що 1 еВ = 1,6·10-19 Дж знаходимо

.

**Задача О.16.** *Внаслідок ефекту Комптона, фотон розсіявся на вільному електроні на кут* θ *=*π*/2. Визначити імпульс p, який отримав електрон, якщо енергія фотону до розсіяння була* ε1*= 1,02 МеВ.*

***Розв’язок:***

Згідно з законом збереження імпульсу:

, (1)

де  та  – імпульси фотону до і після розсіяння, відповідно;  – імпульс переданий електрону. З рис.1.9 видно, що, відповідно до теореми косинусів:

, (2)



Рис.1.9

де θ – кут, на який розсіявся фотон.

Для фотону його імпульс *p*ph і довжина хвилі λph пов'язані між собою співвідношенням:

, (3)

де *h* – стала Планка. Таким чином:

, (4)

де λ1 і λ2 – довжини хвилі фотона до та після розсіяння, відповідно.

Згідно з формулою Комптона:

, (5)

де *m*0 – маса спокою електрону, *с* – швидкість світла у вакуумі. Енергія фотону до розсіяння ε1 пов'язана з λ1 наступним чином:

. (6)

Виражаючи із співвідношення (6) λ1 та підставляючи в (5), маємо:

;

звідки:

. (7)

Підставляючи (7) в (4) і враховуючи (6), отримуємо:

. (8)

Підставляючи (8) в (2) матимемо:





. (9)

Перевіримо, чи має формула (9) розмірність імпульсу:



Користуючись формулою (9) знаходимо:



**1.3. Задачі для самостійного розв’язку**

***Геометрична оптика***

1. Побудувати хід променів – рис.1.10.



Рис.1.10

1. Вздовж головної оптичної осі збирної лінзи розташовано тонкий прямий предмет, обидва кінці якого знаходяться від лінзи на відстанях більше фокусної. Об'єкт, встановлений біля одного кінця предмету, зображується із збільшенням *k*1, а об’єкт, встановлений біля другого – зі збільшенням *k*2. Знайти, з яким збільшенням *k* зображується предмет.
2. Розсіююча та збирна лінзи з фокусними відстанями *F*1 і *F*2, відповідно, розташовані на відстані *b* одна від одної. На відстані *d* від розсіючої лінзи на головній оптичній вісі знаходиться точкове джерело світла. Знайти відстань *a* між джерелом та його дійсним зображенням.
3. Предмет знаходиться на відстані *a* від екрану. Між ними розміщують збирну лінзу, яка дає на екрані чітке зображення предмету при двох положеннях. Знайти відношення розмірів зображень *n*, якщо відстань між положеннями лінз дорівнює *b*.
4. Два точкових джерела світла розташовані на відстані *b* один від одного. Між ними на відстані *d* від одного з них розміщена збирна лінза. При цьому зображення обох джерел виявилися в одній точці. Знайти фокусну відстань *F* лінзи.
5. Визначити коефіцієнт заломлення *n* речовини лінзи, якщо радіуси кривизни її поверхонь становлять *R* = 50 см, а оптична сила – *D* = 2 дптр.
6. Яка товщина *d* скляної плоскопаралельної пластинки, якщо точку на задній поверхні пластинки спостерігач бачить на відстані *l* = 5 см від передньої поверхні? Показник заломлення скла *n* = 1,6. Промінь зору перпендикулярний до поверхні пластинки. Для малих кутів tg α ≈ sin α ≈α.
7. На дні посудини, наповненою водою до висоти *h*, знаходиться точкове джерело світла. На поверхні води плаває круглий диск причому його центр знаходиться над джерелом світла. При якому мінімальному радіусі диска жоден промінь не вийде через поверхню води? Показник заломлення води *n*.
8. Промінь світла падає у воду зі скла. За якого найменшого кута падіння α0 буде спостерігатися повне відбиття? Абсолютний показник заломлення скла 1,5, води – 1,33.
9. На яку відстань *l* зміститься промінь світла, який поширюється у склі з показником заломлення *n*, якщо на його шляху перебуває плоскопаралельна щілина шириною *d*, заповнена повітрям? Кут падіння променя на щілину дорівнює α. Повного відбивання не відбувається.
10. У центрі круглого столу діаметром *D* = 1,2 м стоїть настільна лампа з однією електричною лампочкою, розташованою на висоті *h*1= 40 см над поверхнею столу. Над центром столу на висоті *h*2= 2 м від його поверхні висить люстра з чотирьох таких самих лампочок. Яка з освітленостей більша *Е*1, коли горить лише настільна лампа, або *Е*2, коли увімкнена люстра?
11. Лампа, в якій джерелом світла виступає розжарена кулька діаметром *d* = 3 мм, випромінює світло силою *I* = 85 кд. Знайти яскравість лампи *В*, якщо сферична колба лампи виготовлена: а) з прозорого скла; б) з матового скла. Діаметр колби *D* = 6 см.
12. На аркуш білого паперу площею *S* = 600 см2 перпендикулярно до поверхні падає світловий потік Ф = 120 лм. Знайти освітленість *Е*, світимість *R* і яскравість *B* аркуша, якщо коефіцієнт відбивання ρ = 0,75.
13. При фотографуванні предмет освітлюється електричною лампою, розташованою від нього на відстані *r*1= 2 м. В скільки разів потрібно збільшити час експозиції, якщо цю ж лампу відсунути на відстань *r*2= 3 м від предмета?

***Хвильова оптика***

1. Чому дорівнює амплітуда *Е* результуючої хвилі, що утворюється при накладанні *N* некогерентних коливань з однаковими напрямом зміщень та амплітудою *Е*0?
2. Дві світлові хвилі створюють у певній точці простору коливання однакового напряму, що описуються функціями *E*0 cos (ωt) та *E*0 cos ((ω+Δω)t), де Δω = 0,628 рад/с. Як буде змінюватись інтенсивність світла *І* в цій точці?
3. Дві електромагнітні хвилі з довжиною λ інтерферують у вакуумі. Чому дорівнює їхня різниця фаз Δφ, якщо різниця ходу Δ складає а) 0; б) 0,2 λ; в) 0,5 λ; г) λ; д) 1,2λ?
4. Різниця фаз Δφ двох інтерферуючих хвиль дорівнює а) 0; б) 60°; в) π/2; г) π; д) 2π; е) 540°. Чому в цьому випадку дорівнює відношення різниці ходу до довжини кожної з хвиль?
5. Оптична різниця ходу інтерферуючих променів Δ = 2,5 мкм. Знайдіть всі довжини хвиль видимого діапазону, для яких у такому випадку виконується умова а) максимуму інтерференції; б) мінімуму інтерференції.
6. На шляху променя світла, який розповсюджується у воді (*nв* = 1,33), перпендикулярно до нього розташували скляну пластинку (*nс* = 1,5) товщиною *d* = 1 мм. На скільки при цьому зміниться оптична довжина шляху?
7. Від двох когерентних джерел, що випромінюють світло з довжиною хвилі λ, промені потрапляють на екран. На екрані спостерігається інтерференційна картина. Коли на шляху одного з променів перпендикулярно до нього помістили мильну плівку з показником заломлення *n*, інтерференційна картина змінилася на протилежну. При якій найменшій товщині плівки *d*min це можливо?
8. Відстань *L* від щілин до екрану у досліді Юнга дорівнює 1 м. Визначити відстань *d* між щілинами, якщо на відрізку довжиною *l* = 1 см вкладається *N* = 10 темних інтерференційних смуг. Довжина хвилі λ = 0,7 мкм.
9. Два когерентні джерела світла S1 і S2, що випромінюють світло з довжиною хвилі λ = 500 нм розташовані на відстані *d* = 2 мм одне від одного (рис.1.11). Паралельно лінії, яка сполучає джерела, розміщено екран на віддалі *L* = 2 м від них. Що спостерігатиметься в точці А екрану: світло чи темрява?



Рис.1.11

1. Відстані від скляної (*n* = 1,5) біпризми Френеля з кутом заломлення θ =20′ до вузької щілини та екрана дорівнюють *а* = 0,25 м та *b*= 1 м, відповідно. Знайти довжину хвилі світла, при освітленні яким на екрані з’являються інтерференційної смуги шириною Δ*х* = 5,5⋅10-4 м.
2. На поверхні калюжі знаходиться плівка гасу. На плівку під кутом *і* = 60° падає паралельний пучок білого світла. При спостереженні у відбитому світлі плівка має зелений колір (λ = 0,52 мкм). Визначити мінімально можливу товщину плівки *d*min. Вважати, що показник заломлення гасу *n* = 1,4 і це більше, ніж показник заломлення води.
3. На скляну пластину нанесено тонкий шар прозорої речовини з показником заломлення *n* = 1,3. Пластина освітлюється паралельним пучком монохроматичного світла з довжиною хвилі λ = 640 нм, який падає на пластину нормально. Яку мінімальну товщину *d*min повинен мати шар, щоб відбитий пучок мав найменшу яскравість? Вважати, що показник заломлення скла *nс* = 1,5.
4. Пучок білого світла нормально падає на скляну пластинку товщиною якої *d* = 4⋅10-7 м. Показник заломлення скла *n* =1,5. Які довжини хвиль з видимого спектра будуть підсилюватися у відбитому світлі?
5. Між скляною пластинкою і розташованою на ній плоско-опуклою лінзою, знаходиться рідина. Знайти показник заломлення рідини, якщо радіус *r*3 третього темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі з довжиною хвилі λ = 0,6 мкм дорівнює 0,82 мм. Радіус кривизни лінзи *R* = 0,5 м.
6. Відстань темними кільцями Ньютона з номерами *k*1 = 4 та *k*2 = 25 дорівнює Δ*x* = 9 мм. Радіус кривизни лінзи *R* = 15 м. Знайти довжину хвилі падаючого нормально на прилад світла. Спостереження проводять у відбитому світлі.
7. Прилад для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі λ = 6⋅10-7 м, яке падає нормально до поверхні. Знайти товщину повітряного прошарку між лінзою та пластинкою у тому місці, де у відбитому світлі спостерігається темне кільце з номером *k* = 4.
8. Кільця Ньютона спостерігаються у відбитому світлі з довжиною хвилі λ = 589 нм. У певній точці товщина повітряного прошарку між опуклою поверхнею лінзи та плоскою пластинкою *d* = 1,767 мкм. Cвітле чи темне кільце проходить крізь цю точку?
9. На тонкий скляний клин нормально падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі λ. Відстань між сусідніми темними інтерференційними смугами у відбитому світлі дорівнює *b*. Визначити кут α між поверхнями клина, вважаючи, що показник заломлення скла, з якого виготовлений клин, дорівнює *n*.
10. Мильна плівка розташована вертикально і утворює клин через стікання рідини. Інтерференційну картину спостерігають перпендикулярно до поверхні плівки у відбитому світлі з довжиною λ = 5,46⋅10-7 м. Відстань між *k* = 5 смугами дорівнює *d* = 2⋅10-2 м. Показник заломлення мильної плівки *n* = 1,33. Знайти кут клина в секундах.
11. Якою має бути ширина щілини *b*, щоб перший дифракційний максимум спостерігався під кутом α = 90°, якщо освітлення проводиться: а) червоним світлом (λ1= 760 нм); б) синім світлом (λ2= 440 нм)?
12. Монохроматичне світло (λ = 0,64 мкм) нормально падає на щілину шириною *b* = 0,2 мм. Визначити розмір центральної світлої смуги в кутових одиницях. Вважати, що світла смуги обмежена мінімумами дифракційної картини.
13. На ширині шілини вкладається η = 6 довжин хвиль падаючого нормально світла. Під яким кутом буде спостерігатися третій дифракційний мінімум світла?
14. На дифракційну гратку у напрямі нормалі до її поверхні падає монохроматичне світло. Період гратки *d* = 2 мкм. Визначити найбільший порядок дифракційного максимуму, який може спостерігатися на цій гратці, для червоного (λ1= 0,7 мкм) та фіолетового (λ2= 0,41 мкм) світла.
15. При нормальному освітленні дифракційної гратки максимуму другого порядку для лінії λ1 = 0,65 мкм відповідає кут φ1 = 45º. Знайти кут φ2, що відповідає максимуму третього порядку для лінії λ2 = 0,50 мкм.
16. На дифракційну гратку падає нормально паралельний пучок білого світла. Спектри третього і четвертого порядку частково накладаються один на одного. На яку довжину хвилі λ0 в спектрі четвертого порядку накладається червона границя (λ = 780 нм) спектра третього порядку?
17. Чи можуть перекриватися спектри першого та другого порядків дифракційної гратки при освітленні її видимим світлом (λф = 400 нм та λчер = 760 нм)?
18. Скільки рисок має дифракційна гратка на *D* = 1 мм довжини, якщо зелена лінія ртуті (λ = 0,5461 мкм) у спектрі першого порядку спостерігають під кутом φ = 19°8'?
19. Дифракційна гратка, що має *N* = 500 штрихів на *D* = 1 мм, освітлюється фіолетовим світлом (λ = 0,4 мкм). Визначити кутову Δφ відстань між максимумами першого порядку.
20. На якій відстані від дифракційної гратки треба розташувати екран, щоб відстань між невідхиленим зображенням і спектром четвертого порядку (*k* = 4) дорівнювала *l* = 5⋅10-2 м для світла з довжиною хвилі λ = 5⋅10-7 м? Постійна дифракційної гратки дорівнює *d* = 2⋅10-5 м.
21. На дифракційну гратку, яка містить *N* = 600 рисок на міліметрі, падає нормально біле світло. Отриманий спектр проектується розташованою поблизу гратки лінзою на екран. Визначити довжину *l* спектру першого порядку на екрані, якщо відстань від лінзи до екрана *L* = 1,2 м. Границі видимого спектру λчер= 780 нм, λф = 400 нм.
22. Яку найменшу кількість *N*min рисок повинна містити дифракційна гратка, щоб у спектрі другого порядку можна було окремо побачити дві жовті лінії натрію з довжинами хвиль λ1= 589,0 нм і λ2= 589,6 нм? Яка довжина *l* такої гратки, якщо постійна гратки *d* = 5 мкм?
23. Дифракційна гратка с постійною *d*= 3 мкм має *N*= 1000 штрихів. Визначте найбільшу роздільну здатність гратки для лінії натрія з довжиною λ = 589,6 нм.
24. Пучок рентгенівських променів з довжиною хвилі λ падає під кутом ковзання α0 = 60° на лінійно розташовані центри розсіяння. Відстань між сусідніми центрами *а*. Знайти кути ковзання α, які відповідають всім дифракційним максимумам, якщо λ = 0,4 *a*.
25. Вузький пучок рентгенівських променів падає під кутом ковзання θ = 60° на грань монокристала NaCl, густина якого ρm = 2,16 г/см3. При дзеркальному відбиванні від цієї грані спостерігається максимум другого порядку. Вважаючи, що кристал має гранецентровану кубічну гратку, визначити довжину хвилі випромінення λ.
26. Найменший кут зору, при якому око бачить окремо два штрихи, дорівнює θ = 1′. Яку найменшу відстань розрізняє око на віддалі найкращого зору *L* = 0,25 м?
27. Пучок природнього світла падає на поліровану поверхню скляної пластини з показником заломлення *n*2, яка занурена у рідину. Відбитий від пластини пучок світла утворює кут φ з падаючим пучком. Визначити показник заломлення *n*1 рідини, якщо відбите світло максимально поляризоване.
28. Промінь світла падає з повітря на поверхню рідини під кутом α = 60°. Знайти кут заломлення β променя, якщо відбитий промінь максимально поляризований.
29. Під яким кутом до горизонту β повинно знаходитись Сонце, щоб його промені, відбиті від поверхні моря, були б повністю поляризовані? Вважати, що абсолютний показник заломлення морської води *n* = 1.33.
30. Знайти коефіцієнт відбиття ρ природного світла, яке падає на скло під кутом повної поляризації. Знайти ступень поляризації *P* променів, що пройшли в скло. Показник заломлення скла дорівнює *n* = 1,54.
31. Кут між площинами поляризації двох поляроїдів α = 70°. Як зміниться інтенсивність світла, що проходить через них, якщо цей кут зменшити у *k* = 5 разів.
32. Чому дорівнює кут φ між головними площинами поляризатора та аналізатора, якщо інтенсивність природного світла, яке пройшло крізь систему зменшилася у *k* = 4 рази? Поглинанням світла знехтувати.
33. Трубка довжиною *l* = 0,1 м заповнена водним розчином цукру та розташована між поляризатором і аналізатором. Щоб досягти повного затемнення світла після аналізатора, треба повернути його відносно аналізатора на кут φ = 60°. Вважаючи коефіцієнт питомого обертання світла рівним α = 66,7°г дм-1 см-3, визначити концентрацію цукру *С* в розчині.
34. При проходженні світла крізь шар товщиною *d*1 =10 см розчину цукру з концентрацією *С*1 = 10% площина поляризації світла повернулася на кут φ1 = 16º30'. В іншому розчині цукру при проходженні відстані *d*2 = 25 см площина поляризації повернулась на кут φ2 = 33º. Чому дорівнює концентрація *C*2 другого розчину?

***Квантова оптика***

1. Початкова температура абсолютно чорного тіла складає *Т* = 10000 К. Знайти на скільки відсотків зросте його енергетична світність при підвищенні температури на Δ*Т* = 10 К.
2. Абсолютно чорне тіло нагріли від кімнатної температури *t*1 = 20°С до *t*2 = 500°С. Як при цьому змінилася потужність випромінювання? На скільки змінилися довжина максимуму випромінювальної здатності?
3. Початкова температура теплового випромінювання *Т* = 2000 К. На скільки має змінитися ця температура, щоб найбільш ймовірна довжина хвилі у його спектрі збільшилась на Δλ = 260 нм?
4. Середня енергетична світність поверхні Землі *R* = 0,54 Дж/(см2·хв). Якою має бути температура *Τ* поверхні Землі, якщо вона випромінює як сіре тіло з коефіцієнтом чорноти β = 0,25?
5. Радіус Сонця дорівнює *r*C = 6,96⋅105 км; радіус орбіти Меркурія *R*Мк = 5,79⋅107 км, Марса ‑ *R*Мр = 2,28⋅108 км. Температура поверхні Сонця складає приблизно *Т*С = 6000 К. Використовуючи закони теплового випромінювання, оцінити середні температури планет.
6. Вважаючи Сонце абсолютно чорною кулею радіусом *r*C = 6,96⋅105 км, для якої максимум випромінювальної здатності припадає на довжину хвилі λm = 0,48 мкм, знайти масу, яка ним втрачається щосекунди внаслідок випроміненням. Оцінити час, за який маса Сонця зменшиться на η = 1%, якщо маса Сонця *m*C = 2⋅1030 кг.
7. Потік випромінювання абсолютно чорного тіла Ф = 10 кВт, максимум енергії випромінення припадає на довжину хвилі λm= 0,8 мкм. Визначити площу *S* випромінюючої поверхні.
8. Частота максимальної інтенсивності теплового випромінювання абсолютно чорного кубу об’ємом *V* = 105 см3 становить νm = 1.5⋅1014 Гц. До якої температури *Τ* нагрітий куб? Яка потужність *Ν* його теплового випромінювання.
9. Вольфрамова спіраль лампочки розжарювання має діаметр *d* = 0,3 мм та довжину *l* = 5 см. При ввімкненні лампочки у мережу з напругою *U* = 127 В через неї протікає струм силою *І*= 0,3 А. Знайти температуру спіралі, припускаючи, що вся спожита енергія йде на випромінювання. Спіраль вважати сірим тілом з коефіцієнтом чорноти β = 0,31.
10. В яких областях спектру розташовані довжини хвиль, які відповідають максимуму спектральної густини енергетичної світності, якщо джерелом світла є: а) спіраль лампи розжарювання (*Т* = 3000 К); б) поверхня Сонця (*Т* = 6000 К); в) атомна бомба, в якій в момент вибуху розвивається температура *Т* ≈ 107 К? Вважати всі вищеозначені тіла абсолютно чорними.
11. Оцініть положення максимуму випромінювальної здатності тіла людини.
12. Визначити енергію, що випромінюється крізь віконце печі впродовж часу *t* = 1 хв. Температура печі *Т* = 1500 К, площа віконця *S* = 10 см2. Вважати, що піч випромінює як абсолютне чорне тіло.
13. За допомогою формули Планка визначити, в скільки разів зростає інтенсивність випромінювання з довжиною хвилі λ = 0,6 мкм при збільшенні температури від *T*1 = 2000 K до *T*2 = 2300 K.
14. Яку потужність *N* потрібно підводити до металевої кульки радіусом *r* = 2 см, щоб підтримувати її температуру на Δ*T* = 27 К вище температури оточуючого середовища? Температура оточуючого середовища *Т* = 293 К. Вважати, що тепло втрачається тільки за рахунок випромінення, кульку розглядати як абсолютно чорне тіло.
15. Мідну кульку помістили у посудину зі стінками, температура яких притримується близькою до абсолютного нуля. Початкова температура кульки дорівнювала *Т*. За проміжок часу Δ*t* її температури знизилась в η разів. Визначте радіус кульки *r*.
16. При якому значенні швидкості електрону υ його імпульс дорівнюватиме імпульсу фотона з довжиною хвилі λ = 1 нм?
17. Людське око здатне сприймати світловий потік потужністю *N* = 2∙10-17 Вт. Знайти кількість фотонів *nph* з довжиною хвилі λ = 0,5 мкм, що потрапляють в око за час t = 1 с при вказаній потужності.
18. На пластину падає монохроматичне світло з частотою ν. Фотострум припиняється при затримуючий різниці потенціалів *U*. Визначити роботу виходу *А* електронів з поверхні пластини.
19. Визначити максимальну швидкість υmax фотоелектронів, що вибиваються з поверхні срібла: а) ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі λ1= 0,155 мкм; б) γ-випромінюванням з довжиною хвилі λ2=1 пм.
20. Фотони з енергією ε = 4 еВ падають на метал з роботою виходу *A* = 2,5 еВ. Визначте імпульс фотоелектрону *p*e.
21. При деякому максимальному значенні затримуючої різниці потенціалів фотострум з поверхні літію, який освітлюється електромагнітним випроміненням з довжиною хвилі λ0, припиняється. Змінивши довжину хвилі випромінення в γ = 1,5 рази, встановили, що для припинення фотоструму необхідно збільшити затримуючу різницю потенціалів в η = 2 рази. Визначити λ0.
22. На поверхню металу падає монохроматичне світло з довжиною хвилі λ. Червона границя фотоефекту дорівнює λ0. Яка частка енергії фотону δ витрачається на надання електронові кінетичної енергії?
23. Знайти роботу виходу з деякого металу, якщо при почерговому освітленні його поверхні електромагнітним випроміненням з довжинами хвиль λ1 = 0,35 мкм і λ2 = 0,54 мкм максимальні швидкості фотоелектронів відрізняються в η = 2 рази.
24. Чи придатний барій для використання в фотоелементах, призначених для реєстрації видимого світла?
25. Мідна кулька, віддалена від інших тіл, опромінюється електромагнітними хвилями з довжиною хвилі λ = 200 нм. До якого максимального потенціалу зарядиться кулька?
26. Рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі λ1 = 55,8 пм розсіюється під кутом θ = 60°. Визначте довжину хвилі λ2 розсіяного світла.
27. Визначити максимальну зміну довжини хвилі (Δλ)max при комптоновському розсіянні світла на вільних електронах і вільних протонах.
28. В результаті ефекту Комптона фотон при зіткненні був розсіяний на кут θ. Енергія розсіяного фотона ε2. Визначити енергію фотона ε1 до розсіяння.
29. Фотон з енергією ε1= 0,51 МеВ був розсіяний при ефекті Комптона на вільному електроні на кут θ = 180°. Визначити кінетичну енергію *Ek* електрона віддачі.
30. Фотон з енергією ε1, яка дорівнює енергії спокою електрону, розсіявся на вільному електроні на кут θ = 120˚. Визначити енергію ε2 розсіяного фотону та кінетичну енергію *Ek* електрону віддачі (в одиницях *m*0*c*2).
31. Визначити мінімальну довжину хвилі λmin гальмівного рентгенівського випромінення, якщо до рентгенівської трубки прикладена напруга *U* = 30 кВ.

**2. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ**

**2.1. Теоретичні відомості**

**Квантова механіка** є розділом фізики, який вивчає методи опису та властивості елементарних частинок, атомів і молекул. Квантово-механічний підхід успішно поширюється і на опис фізичних властивостей макросистем, наприклад, твердих тіл та рідин, які складаються з великої кількості окремих атомів чи молекул.

**Атомна фізика** – розділ фізики, в якому предметом дослідження є властивості окремих атомів та фізичні процеси на атомному рівні. Значна частина експериментальних даних, що використовувалися при формуванні принципів квантової механіки, була отримана саме при дослідженні будови та спектрів атомів. І навпаки, теоретичною основою сучасної атомної фізики є квантова механіка.

**Ядерна фізика** вивчає фізичні властивості атомних ядер, зокрема, процеси ядерних перетворень, як спонтанних, так і стимульованих взаємодією з зовнішніми частинками. Як і для атомної фізики, теоретичним апаратом ядерної фізики також є квантова механіка.

**Постулати Бора.** Історично першим кроком при побудові квантового опису властивостей атомів були *постулати Бора*(1913р.):

**1.** Зусіх колових орбіт, по яким може рухатися електрон навколо ядра, реалізуються тільки стаціонарні, рухаючись по яким електрон не випромінює електромагнітніхвилі. Момент імпульсу електрона на стаціонарній орбіті визначається квантовою умовою

. (2.1)

**2.** При переході електрона зі однієї стаціонарної орбіти, на якій його повна енергія *E*1, на іншу стаціонарну орбіту з енергією *E*2 випромінюється чи поглинається квант електромагнітного поля (фотон) з енергією:

. (2.2)

У виразах (2.1-2.2) *V*– лінійна швидкість електрона; *m*– маса електрона; *r*–  радіус колової орбіти; *n* = 1, 2, 3… – цілі числа; ν ‑ частота електромагнітної хвилі, *h* = 6,626⋅10-34 Дж⋅с – стала Планка,  = 1,055⋅10-34 Дж⋅с – зведена стала Планка.

У подальшому у роботахВ. Гайзенберга, Е. Шрьодінгера, М. Борна, П. Дірака, Л. де Бройля, Н. Бора (1925 – 1927р.) були сформульовані принципи нерелятивістської квантової механіки та побудовано її математичний апарат. В їх основі покладено **постулати квантової механіки**:

**1.** *Кожній фізичній величині f ставиться у відповідність певний математичний оператор* *.*

Сукупність значень  фізичної величини *f*, які можуть бути отримані при її вимірюваннях – *власні значення* оператора, які утворюють *спектр оператора*. Спектр оператора може бути як дискретним, так і неперервним. Нагадаємо, що математичний оператор визначає процедуру, за якою деяка функція φ передодиться в іншу функцію φ. Наприклад, оператор похідної  переводить функцію  у функцію  тощо.

**2.** *Стан квантової системи може бути описаний певною комплексною функцією координат та часу*  *– хвильовою функцією****.***

Вимірювання фізичної величини за допомогою приладу (математично – дія оператора  на хвильову функцію  квантової системи), в результаті якого фізична величина набуває певного значення *f*, можна описати операторним рівнянням:

. (2.3)

Вимірювання є *передбачуваним*, якщо в результаті його деяке власне значення *fn* спостерігається з достовірністю (імовірність *P*n = 1). Передбачуване вимірювання описується операторним рівнянням:

. (2.4)

Передбачуване вимірювання, яке з імовірністю *P*n = 1 дає значення *fn*, можливе лише тоді, коли мікросистема перебуває у стані з певною хвильовою функцією ψ*n* – власною функцією оператора, що відповідає власному значенню *fn*. Отже, кожний оператор  фізичної величини характеризується спектром оператора  та відповідаючою йому системою власних функцій .

**3.** *Принцип суперпозиції квантових станів. Якщо в результаті вимірювання фізичної величини f може спостерігатися будь-яке з власних значень**оператора цієї величини, кожне зі своєю ймовірністю, то хвильова функція квантової системи може бути представлена у вигляді лінійної комбінації власних функцій*  *оператора цієї величини*

, (2.5)

, *N*- кількість власних функцій оператора . Квадрат модуля  є *імовірністю*, *з якою експериментально спостерігається значення fn*: .

**4.** *Хвильова функція системи*  *може бути визначена як розв'язок рівнянням Шрьодінгера.*

**Рівняння Шрьодінгера** є рівнянням на відшукання функції у частинних похідних за часом та координатами і для частинкимасою *m*, яка рухається у силовому полі з потенціальною енергією , має вигляд:

, (2.6)

де  – оператор кінетичної енергії,  – оператор потенціальної енергії, Δ – оператор Лапласа (у декартовій системі координат ); *і*– уявна одиниця,.

Оператор повної енергії частинки (*оператор Гамільтона*):

. (2.7)

**Стаціонарне рівняння Шрьодінгера**. При русі частинки у стаціонарному полі (тобто, у випадку, коли просторовий розподіл потенціальної енергії частинки не змінюється з часом ) рівняння (2.6) набуває вигляду

, (2.8)

де  – координатна частина хвильової функції , *E* – повна енергія частинки; при цьому . Стаціонарне рівняння Шрьодінгера є операторним рівнянням на відшукання власних функції  та власних значень *E* оператора повної енергії частинки у стаціонарному полі:

. (2.9)

**Фізичний зміст хвильової функції.** Квадрат модуляфункції  дорівнює

, (2.10)

де *dP* – імовірність відшукання частинки в об’ємі *d*τ. Зокрема, у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) координати точок, що знаходяться у цьому об’ємі, задовольняють умовам *x* ÷ *x* + *dx*; *y* ÷ *y* + *dy*; *z* ÷ *z* + *dz*. При *d*τ = 1 квадрат модуля | ψ |2 = *dP*. Отже, квадрат модуля хвильової функціївизначає *імовірність знаходження частинки в одиничному об'ємі***,** тобто, *є густиною імовірності.*

**Нормування хвильової функції.** Відшукання частинки уфізично доступному об’ємі  є достовірною подією, імовірність якої дорівнює одиниці:

. (2.11а)

У ПДСК інтеграл набуде вигляду:

. (2.11б)

У рівняннях (2.11а, 2.11б) межі інтегрування визначаються діапазоном можливих значень проекцій радіус-вектора частинки. Для виконання умови (2.11а) хвилова функція повинна бути: 1) *однозначно визначеною*; 2) *неперервною* за змінними (*x*, *y*, *z*), причому похідні ∂ / ∂*x*, ∂ / ∂*y*, ∂/∂*z* також повинні бути неперервними; 3) *кінцевою* (у випадках, коли межі інтегрування в (2.11) змінюються від - ∞ до + ∞, умова кінцевості вимагає ψ (±∞) → 0).

Властивості **операторів** фізичних величин.

1. Оператори в квантовій механіці *лінійні*:

, (2.12)

де *С*1 та *С*2 – константи.

2*. Сумою* операторів  та  є оператор , дія якого на функцію ψ визначається як

. (2.13)

3. *Добутком* операторів  та  є оператор :

, (2.14)

тобто першим на функцію діє найближчий до неї оператор. Оператори *комутативні*, якщо порядок їх дії на функцію не впливає на кінцевий результат.

*Комутатором* операторів та  є оператор

. (2.15)

Умова комутативності операторів має вигляд:

. (2.16)

4. Кожному оператору  можна поставити у відповідність *комплексно-спряжений* оператор , якій діє на множину функцій , комплексно-спряжених з функціями :

. (2.17)

Важливо, що д*ля операторів фізичних величин спектр може бути тільки дійсним*: . Отже, в цьому випадку

. (2.18)

5. Оператор  називається *транспонованим* до оператора , якщо для будь яких функцій виконується рівність

. (2.19)

Інтегрування у (2.19) проводиться по об'єму τ. Враховуючи (2.18) та (2.19), можно зробити висновок, що для оператора *фізичної величини* комплексно-спряжений оператор збігається з транспонованими оператором:

. (2.20)

6. *Спряженим* називають оператор , транспонований до комплексно-спряженого

. (2.21)

Очевидно, для оператора *фізичної величини* спряжений операторзбігається з самим оператором

. (2.22)

Оператори, які мають вказану властивість (2.22), називають *самоспряженими* або *ермітовими.* Усі оператори фізичних величин є ермітовими.

**Середнє значення фізичної величини.** Якщо квантова система перебуває у стані з хвильовою функцією ψ, то середнє значення фізичної величини *f*, якій відповідає оператор , у стані з такою хвильовою функцією, дорівнює

. (2.23)

**Ортонормованість власних функцій операторів фізичних величин**. Нехай оператор фізичної величини  має спектр {*fn*} та систему власних функцій {ψ*n*}, причому кожному власному значенню *fn* відповідає *лише одна* власна функція ψ*n*, тобто, при *n* ≠ *m* виконується умова *fn* ≠ *fm*. Тоді система власних функцій {ψ*n*}є *ортонормованою*:

, (2.24)

величина δ*mn* називається  *символом Кронекера.* Інтеграл  називають *скалярним добутком* функцій ψ*n* та ψ*m*. Зауважимо, що можливы випадки, коли власному значенню *fn* відповідає *декілька власних функцій* ψ*n*1, ψ*n*2,… ψ*nk*. Такий спектр оператора називають *виродженим*, а число *k*  характеризує *кратність виродження.*

**Оператор похідної за часом** від фізичної величини *f* дорівнює

, (2.25)

 – оператор Гамільтона для квантової системи. Оператор похідної  визначає похідну від середнього значення фізичної величини: . Із співвідношення (2.25) випливає умова збереження: *середнє значення фізичної величини f не змінюється з часом, якщо оператор цієї величини: 1) явно не залежить від часу; 2) комутує з оператором Гамільтона відповідної квантової системи*.

**Явний вигляд операторів фізичних величин.** У класичній механіці рух макрочастинок описується такими фізичними величинами, як координата та час (та похідними від них кінематичними характеристиками – швидкість, прискорення), імпульс та момент імпульса, потенціальна та кінетична енергія тощо. Як зазначалося, при переході від класичної до квантової механіки кожній фізичній величині ставиться у відповідність певний математичний оператор. Але дуже важливо, *що співвідношення між фізичними величинами, які встановлені у класичній фізиці, зберігаються такими ж і між відповідними операторами у квантовій механіці (принцип відповідності).* Виходячи з цього принципу, встановлюють явний вигляд операторів фізичних величин.

*Оператори координати*  *та часу*  збігаються з класично визначеними координатою *x* та часом *t*, тобто дія цих операторів зводиться до множення на них хвильової функції.

*Оператор імпульса* частинки (квантовомеханічне представлення класичного імпульса ) має вигляд

, (2.26)

де - оператор (вектор) набла, явний вигляд якого залежить від системи координат.

У ПДСК оператор імпульса має вигляд

,

, , . (2.26а)

*Оператор момента імпульса* частинки (квантовомеханічне представлення класичного момента імпульса ). Замінюючи в останньому співвідношенні вектори на відповідні оператори, можна отримати:

;

 . (2.27)

Відповідно, оператори проекцій момента імпульса на координатні вісі:

 ,

, (2.28)

.

Оператор квадрата момента імпульса:

 (2.29)

**Власні значення та власні функції операторів** , , . Оператори квадрата момента імпульса та проєкції момента на вибрану вісь (як правило, розглядають вісь OZ) використовуються для опису станів електронів у полі атомного ядра. Операторні рівняння на відшукання власних значень та власних функцій цих операторів зручно записувати у *сферичній системі координат*. У цій системі положення точки *А* у просторі задається (рис. 2.1):

– відстанню *r* від центра сфери до точки на сфері, ;

– полярним кутом θ, відрахованим від полярної осі ;

– азимутальним кутом, відрахованим від площини нульового меридіану, .

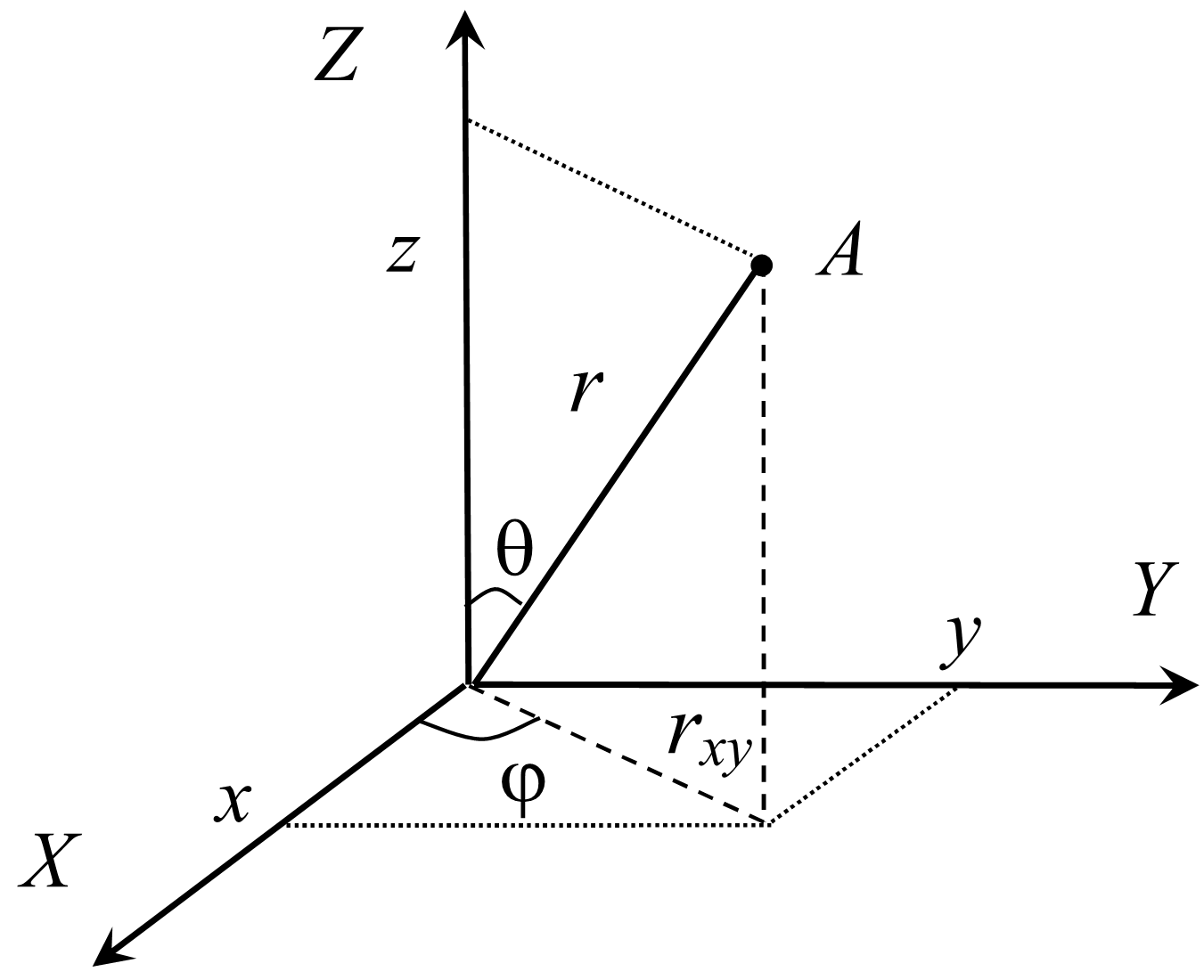


Рис. 2.1. Взаємозв’язок між координатами в сферичній та прямокутній декартовій системах координа

Зв'язок між координатами сферичної та прямокутної систем координат, як видно з рис. 2.1, задається співвідношеннями:

 (2.30)

**Оператор**  (2.29) у сферичній системі координат набуває вигляду:

. (2.31)

Рівняння на власні значення і власні функції записується у вигляді:

. (2.32)

Розв’язком операторного рівняння (2.32) є власні значення:

,

, (2.33)

де *l* = 0, 1, 2… – ряд цілих чисел. Параметр *l* має назву *орбітального (*або *азимутального)* квантового числа.

Власними функціями оператора  є *сферичні функції*:

(2.34)

де *ml* – *магнітне* *квантове число*, причому |*ml*| ≤ *l*. При даному *l* магнітне квантове число набуває наступних значень:

, (2.35)

тобто усього ( 2*l* + 1 ) можливих значень. Функції  називаються *приєднаними поліномами Лежандра*

. (2.36)

Функції  – *поліноми Лежандра*:

. (2.37)

**Оператор**  у сферичні системі координат має вигляд

 (2.38)

Розв’язком операторного рівняння є власні значення

, (2.39)

де *–*те саме магнітне квантове число. Власні функції:

. (2.40)

**Оператор** , як і оператор , має *неперервний* спектр, тобто проекція імпульса може набувати усіх можливих значень у діапазоні *.* Власна функція оператора

. (2.41)

**Спін.** Важлива особливість багатьох елементарних частинок (електронів, протонів, нейтронів тощо) полягає у тому, що вони мають *власний момент імпульса (власний механічний момент) або спін*, який є суто квантово-механічним параметром і не має класичного аналогу. Зокрема, некоректно пов’язувати спін з класичним обертанням частинки навколо власної осі.

Для операторів *квадрата власного момента імпульса*  та оператора *проєкції власного момента імпульса*  на вісь OZ *власні значення* визначаються подібно до (2.33) та (2.39):

,

, (2.42)

.

де *s – спінове квантове число*, яке, власне, і називають *спіном*; *ms* – квантове число, що визначає *проєкцію спіна* на вибрану вісь. Важливо, що для електронів, протонів та нейтронів спін . За загальним правилом (2.35):

. (2.43)

Очевидно, при  можливі тільки два значення , які визначають дві проєкції . Частинки з *напівцілим спіном* називають *ферміонами*, на вдміну від частинок з цілим спіном, які мають назву *бозонів* (наприклад, фотон, *s* = 1).

**Комутаційні співвідношення для операторів фізичних величин.** *Комутатори операторів* координати, імпульса, момента імпульса, квадрата момента імпульса дорівнюють:

 ;

 ,

 ;

, ,

, ; (2.44)

, , ;

.

Доведення деяких з наведених комутаційних співвідношень розлянуто у прикладах розв’язку задач (Α.12). Із співвідношень (2.44) випливає загальне правило обчислення виразів типу  та  (кожен з індексів *i*, *j*, *k* може набувати трьох значень *x*, *y*, *z*) : перехід від першого індекса *i* до другого *j*, а потім до *k* здійснюється *циклічно*, за обходом трикутника за годинниковою стрілкою:



Важливо, що комутативність опереторів визначається системами їх власних функцій. *Оператори комутують, якщо мають спільну систему власних функцій.*

**Співвідношення невизначеностей Гайзенберга**. Нехай в результаті великої кількості *N* *одночасних* вимірювань (гранично – нескінченно великої кількості) проекції імпульса частинки *px* та її координати *x* визначено середнє значення проекції імпульса < *px*>, середнє зачення координати < *x*>, а також *середньоквадратичні відхилення* результатів окремих вимірювання від середніх значень

, . *Невизначеностями*проекції імпульсу Δ*px* та координати частинки Δ*x* називають корені квадратні з відповідних *середньоквадратичних відхилень*: , . Очевидно, невизначеності Δ*px* та Δ*x* характеризують статистичні розкиди значень *px* та *x* при їхьому одночасному вимірюванні.

Співвідношення невизначеностей Гайзенбнрга стверджує, що добуток невизначеностей Δ*px* та Δ*x* за порядком величини визначається сталою Планка : Δ*px*⋅Δ*x ~*. Такі ж співвідношення справедливі і для *y*- та *z*-складових імпульса та координати. Тобто:

 (2.45)

Фізичний зміст співвідношень (2.45) полягає в наступному: при одночасному вимірюванні величин *px* та *x* чим з вищою точністю (меншим статистичним розкидом Δ*px*) вимірюється проекція імпульсу *px*, тим з меншою точністю (більшим статистичним розкидом Δ*x*) вимірюється координата *x*, і навпаки.

При вимірюванні енергії системи справедливо наступне співвідношення невизначеностей:

. (2.46)

Фізичний зміст (2.46): при зменшенні проміжку часу Δ*t* між послідовними вимірюваннями невизначеність енергії системи Δ*E* зростає, і навпаки. Невизначеність енергії при послідовних вимірюваннях 1 та 2 визначається як різниця значень енергії при цих вимірюваннях Δ*E* = | *E*2 -*E*1 |**.**

**Поняття про теорію збурень.** Важливо, щоточний розв’язок рівняння Шрьодінгера, на жаль, є можливим тільки для невеликлої кількості реальних фізичних систем. Але досить часто реальні системи мало відрізняються від ідеалізованих, для яких існує точний розв’язок рівняння Шрьодінгера. У таких випадках виконується *наближений розв’язок*, який зводиться до відшукання *поправок* до точного розв’язку відповідної ідеалізованої задачі. Нехай реальна фізична система описується стаціонарним рівнянням Шрьодінгера , для якого не існує точного розв’язку. Теорія збурень має застосування, якщо гамільтоніан реальної системи можна розділити на дві складові , де – гамільтоніан ідеалізованої системи, для якої є точний розв’язок,  – малий доданок, який називають *збуренням* (тобто ).У рівнянні Шрьодінгера для ідеалізованої системи  хвильові функції та енергії точно визначені. Тоді у рівнянні для реальної системи  відшукують не величини , а *поправки* до енергій та хвильових функцій :

 (2.47)

Величини – поправки *першого порядку* мализни, – поправки *другого порядку.* Зокрема, поправка до енергії в першому порядку дорівнює:

 . (2.48)

**Частинка у центрально-симетричному полі.** У наближенні центрально-симетричного стаціонарного поля вважається, що поле має *силовий центр*, а потенціальна енергія частинки *залежить тільки від відстані до силового центру*, тобто . Стаціонарне рівняння Шрьодінгенра (2.8) для сферично-симетричної задачі зручно розв'язувати у сферичній системі координат, у якій:

*– елемент площі*: ;

*– елементарний об'єм*:  (рис. 2.2).

При переході від прямокутної декартової до сферичної системи координат оператор Лапласа набуває вигляду

, (2.49)

Важлива особливість стаціонарного рівняння Шрьодінгера (2.8) з оператором Лапласа (2.49), яке описує рух частинки у центрально-симетричному полі, полягає у тому, що хвильову функцію частинки ψ ( *r*, θ, φ ) можна представити як *добуток*

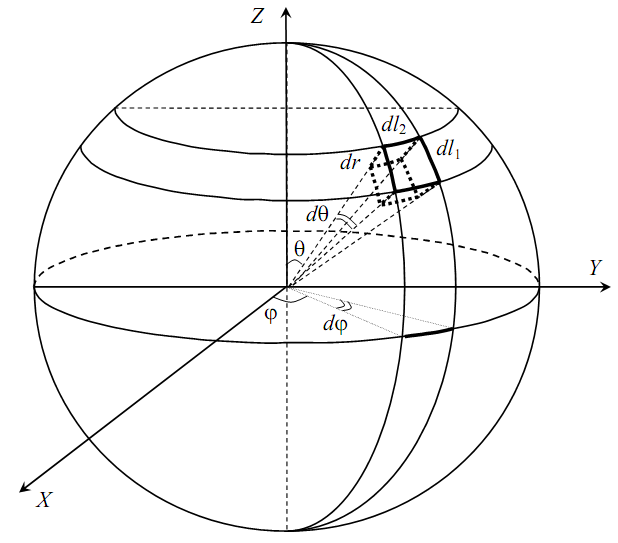


Рис. 2.2. Елемент об'єму в сферичній системі координат

*радіальної R ( r ) та кутової*  *частин:*

. (2.50)

У рівнянні (2.50)  *–*сферичні функції.

Радіальна частина хвильової функції *R ( r )* та повна енергія частинки *Е* визначаються як розв'язки рівняння:

,(2.51)

де *m*0 – маса частинки. Очевидно, кожному значенню орбітального квантового числа *l* відповідає певна енергія *Е* та відповідна власна функція *R ( r )*: *E* ≡ *E* ( *l* ); *R ( r ) ≡ Rl ( r )*. Стани з різними значеннями орбітального квантового числа прийнято позначати літерами:

Оскільки при даному *l* магнітне квантове число може приймати ( 2*l* + 1 ) значень (2.35), кожному з яких відповідає своя сферична функція, отже, і своя повна хвильова функція , то стан з певною енергією *E* ( *l* ) є *виродженим* за квантовим числом *ml з кратністю* ( 2*l* + 1 ).

**Воднеподібний іон**– система, щоскладається з електрона, який рухається у полі атомного ядра, утвореного *Z* протонами. Випадок *Z*= 1 відповідає **атому водню**. Потенціальна енергія електростатичної (кулонівської) взаємодії електрона з ядром дорівнює

. (2.52)

Рівняння (2.51) для радіальної частини хвильової функції у випадку воднеподібного іону набуде вигляду

. (2.53)

Радіальна частина хвильової функції, що є розв’язком рівняння (2.53), визначається виразом:

, (2.54)

де *n  – головне квантове число*, яке може набувати *нескінченного ряда* значень

. (2.55)

При визначенні квантового стану електрона у кулонівському полі *першим* задається саме *головне квантове число*. При вказаному головному квантовому числі орбітальне квантове число набуває значень

. (2.56)

Максимальне значення індекса *k*, за яким у (2.54) виконується підсумовування, дорівнює

. (2.57)

Енергія електрона у кулонівському полі набуває *дискретних значень*, які визначаються головним квантовим числом:

. (2.58)

Отже, стан електрона у полі *Z*-ядра задається хвильовою функцією, яка визначається трійкою *одноелектронних квантових чисел* *n*, *l*, *ml* :

. (2.59)

*Атомна орбіталь* – хвильова функція одноелектронного стану у центрально-симетричному полі, яка визначається трійкою одноелектронних квантових чисел *n*, *l*, *ml*.

Оскільки енергія електрона у кулонівському полі залежить тільки від головного квантового числа *E* ≡ *En*, то кожний рівень енергії є *виродженим* за квантовими числами *l*, *ml*. Кількість одноелектронних станів, які відповідають певному значенню *n*:

. (2.60)

З урахуванням двох можливих значень проекції власного механічного момента електрона (спіна) на вибрану вісь *NS* = 2 *Nn* = 2*n*2.

**Електронна оболонка –***сукупність одноелектронних станів з заданим значенням головного квантового числа n.* Електронні оболонки прийнято позначати великими латинськими літерами *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*. Можлива кількість станів у кожній оболонці приведена у таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Позначення оболонки | *K* | *L* | *M* | *N* | *O* | *P* |
| Головне квантове число (*n*) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Кількість станів (*NS*) | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | 72 |

**Електронна підоболонка –***сукупність одноелектронних станів з заданими значеннями квантових чисел l, ml.* Кожна підоболонка з урахуванням двох можливих проєкцій спіну містить 2 ( 2*l* + 1 ) одноелектронних (або *еквівалентних*) станів. *K*-оболонка, яка містить два *s*-стани (*n* = 1, *l* = 0), очевидно одночасно є і підоболонкою. *L*-оболонка містить *дві* підоболонки: 2*s*-підоболонку (*n* = 2, *l* = 0, 2 стани) та 2*p*-підоболонку (*n* = 2, *l* = 1, 6 станів); *М*-оболонка містить *три* підоболонки: 3*s* (*n* = 3, *l* = 0, 2 стани), 3*p* (*n* = 3, *l* = 1, 6 станів), 3*d* (*n* = 3, *l* = 2, 10 станів). *N*-оболонка містить *чотири* підоболонки:  4*s*, 4*p*, 4*d* та 4*f* (остання – *n* = 4, *l* = 3, 14 станів) тощо.

**Хвильова функція системи** невзаємодіючих **електронів**. Якщо є система *N* електронів, взаємодію між якими можна не враховувати, то хвильова функція такої системи  може бути представлена у визляді визначника (детермінанта) Слетера:

, (2.61)

де  – координати першого, другого електрона тощо;  - одночастинкові хвильові функції, які описують перебування першого електрона в одному з можливих  одночастинкових станів, відповідно  – описують перебування другого електрона тощо. Варто звернути увагу на те, що кожний стовпчик у детермінанаті (2.61) відповідає можливому розподілу одного одного електрона по усім одночастинковим станам, а кожний рядок – розподілу всіх *N-*електронів у *р*-му одночастинковому стан. Вигляд хвильової функції системи невзаємодіючих електронів (2.61) є наслідком загального *принципу тотожності нерозрізнених частинок*, згідно з яким *при перестановці місцями будь-якої пари нерозрізнених частинок знак хвильової функції системи, до якої належить вказана пара частинок, може або змінитися на протилежний – хвильва функція антисиметрична (система ферміонів), або залиишитися незмінним* – *хвильова функція симетрична (система бозонів)*. Оскільки електрони є ферміонами, то перестановці місцями частинок у детермінанті (2.61) відповідає перестановка місцями двох відповідних стовпчиків, що і забезпечує зміну знаку усього детермінанта.

**Принцип Паулі.** Якщо у системі є два або більше однакових одночастинкових стани, то у детермінанті (2.61) буде, відповідно, два або більше однакових рядка. У цьому випадку *детермінант дорівнює нулю*. Отже, *в одному і тому ж одночастинковому стані* ψ*p не може одночасно перебувати більше одного електрона*. Оскільки в центрально-симетричному полі воднеподібного іона стан електрона задається четвіркою одноелектронних квантових чисел *n*, *l*, *ml*, *m*s, то для такої системи *принцип Паулі* формулюється так: *в одноелектронному стані з заданою четвіркою одноелектронних квантових чисел n*, *l*, *ml*, *m*s *може перебувати тільки один електрон*.

**Стани електронів у багатоелектронному атомі**. Якщо атом містить *Z* електронів, то стаціонарне рівняння Шрьодінгера для системи таких електронів в електростатичному поля ядра має вигляд:

 (2.62)

де  та *Е* – хвильова функція та енергія системи електронів відповідно,  – радіс-вектори *j-*го та *k-*го електронів відносно ядра. Перші два доданки в дужках описують оператори кінетичної енергії електронів та їх потенціальної енергії в електростатичному полі ядра. Ці оператори відповідають сумі тих одноелектронних операторів, які входять у рівняння Шрьодінгера для воднеподібного іона. Однак, третій доданок суттєво інший – він враховує міжелектронну електростатичну взаємодію. За рахунок цієї взаємодії загальне електричне поле, у якому перебуває кожний електрон, *не є центрально-симетричним*, а хвильову функцію системи *не можна будувати у вигляді* (2.61) в силу існівання міжелектронної взаємодії. Таке ускладнення задачі не дозволяє виконати аналітичний розв’язок рівняння (2.62) вже починаючи з  (атом гелію). Важливо наголосити, що у гамільтоніан рівняння Шрьодінгера (2.62) не входить оператор спіна, отже, хвильова функція  не залежить від спінових змінних *s*, *ms*.

Для розв’язку рівняння (2.62) використовують *наближені методи*, зокрема, *метод самоузгодженого поля*. У спрощеній версії цього методу, яка отримала назву *методу Хартрі:*

*–* хвильова функція будується з *одноелектронних* хвильових функцій центрально-симетричного поля ;

– не враховується антисиметричність хвильової функції у (2.62), тобто  будується тільки як сумма добутків одноелектронних функцій  з усіма можливими перестановками електронів по одночастинковим станам.

Тому рівняння (2.62) зводиться до системи *Z* одночастинкових рівнянь

(2.63)

Важливу роль у рівняннях (2.63) відіграє доданок

, (2.64)

який визначає сумму середніх енегрій електростатичної взаємодії *j* -го  електрона з усіма іншими електронами атома. Величина  залежить тільки від положення *j* – го електрона . Рівняння (2.63) розв’язують *методом послідовних наближень*:

– на першому кроці задають хвильові функції *нульового наближення*  (наприклад, хвильові функції воднеподібного іона (2.34), (2.54)) і обчислюють середні енергії ;

– далі підставляють ,  у систему рівняннь (2.63) і знаходять енергії  та функції , які відповідають вже *першому наближенню*. На ціх функціях обчислюють середні енергії ;

– на другому кроці у систему (2.63) підставляють ,  і в результаті розв’язку визначають вже , ; знову обчислюють середні енергії, тепер це ;

– наведену процедуру визначення , ,  повторюють доти, доки відмінність між хвильвими функціями *m*-ї та (*m* + 1)-ітерації не стане меншою заданої величини.

Обчислені у такий спосіб одноелектронні хвильові функції  називають хвильовими функціями *самоузгодженого поля*, а величини - *енергіями самоузгодженого поля*. Важливо, що енергія , обчислена у такий спосіб, залежить тільки від координати *j-*електрона, тобто *можна вважати, що кожний електрон рухається у своєму центрально-симетричнимому полі*. Отже, при використанні наближення самоузгодженого поля стани електронів у багатоелектронному атомі можна описувати одночастинковими хвильвими функціями, які визначаються четвіркою квантових чисел *n*, *l*, *ml*, *m*s.

У *наближенні Хартрі-Фока* враховується антисиметрія повної хвильової функції системи електронів атома і така функція записується у вигляді детермінанта Слетера (2.61).

**Електронна коефігурація.** Можливість застосування одночастинкових квантових чисел *n*, *l*, *ml*, *m*s для опису станів електронів не тільки у воднеподібному іоні, але й в багатоелектронному атомі, дозволяє використовувати поняття *електронної конфігурації – розподілу електронів атома по електронним оболонкам та підоболонкам*  *.* Числа  – *фактична кількість електронів у кожній підоболонці атома того чи іншого хімічного елемента*. Прилади електронних конфігурацій деяких атомів наступні:

вуглець (C): ;

хлор (Cl): ;

титан (Ti): ;

йод (I): .

**Додавання орбітальних механічних моментів двох та більше електронів атома.** Розглянемо атом з двома електронами понад заповнених електронних оболонок. Нехай перший електрон перебуває у стані з орбітальним квантовим числом *l*1, а другий – у стані з *l*1. Тоді, згідно з (2.33) власне значення орбітального момента першого електрона , другого – . Важливо, що власне значення сумарного орбітального момента двох електронів визначається сумарним орбітальним числом *L*, яке набуває можливих значень:

. (2.65)

Тоді значення сумарного орбітального момента імпульса двох електронів:

. (2.66)

Кожному значенню  з ряда (2.65) відповідає сукупність значень сумарного магнітного квантового числа

, (2.67)

всього ( 2*L* + 1 ). Власне значення оператора проєкции сумарного орбітального момента імпульса на вісь *OZ*.

Власне значення оператора проєкции сумарного орбітального момента імпульса на вісь *OZ*

. (2.68)

Якщо в атомі *більше, ніж 2 електрони*, nо додавання орбітальних моментів окремих електронів здійснюється наступним чином: знаходять квантові числа *L*12, які відповідають сумі квантових чисел *l*1 та *l*2 першого та другого електронів; до них додається квантове число *l*3 третього електрона і будуються нові значення *L*123, що відповідають вже сумі трьох електронів, і так далі. Для усіх отриманих значень сумарних квантових чисел { *L*1…Z ≡ *L* } за формулою (2.66) визначаються значення орбітального момента імпульса атома.

**Додавання спінових механічних моментів двох та більше електронів атома.** Відшукання суми спінових механічних моментів двох електронів  здійснюється у такий же спосіб, як і відшукання суми орбітальних моментів. А саме, визначається сумарне спінове число

. (2.69)

Власне значення оператора спінового механічного момента  дорівнює:

. (2.70)

Оскільки для електрона , то для двох електронів можливі тільки значення *S* = 1, 0. Проєкції сумарного спіна двох електронів визначаються квантовим числом *MS*:

, (2.71)

тому при *S* = 1 маємо три значення *MS* = +1, 0, -1, а при *S* = 0 тільки *MS* = 0. Для багатоелектронного атома значення спінового квантового числа усіх електронів знаходиться спочатку для двох електронів (величина *S*12), потім додається квантове число *s*3 третього електрона, визначається *S*123 і далі до визначення сукупності квантових чисел { *S*1…Z ≡ *S* }. Усі можливі значення спінового механічного мjмента атома  обчислюються за формулою (2.70).

**Повний механічний момент електрона.** Стан електрона в атомі також характеризується *повним механічним моментом*, який є сумою орбітального та спінового механічних моментів . Очевидно, власне значення повного механічного момента дорівнює

, (2.72)

де *j* – квантове число повного механічного момента одного електрона, яке визначається додаванням квантових чисел *l* та *s*. Як і у випадках (2.65) та (2.69):

. (2.73)

Оскільки *s* = ½, маємо два можливих значення: *j* = *l*+ ½, *j* = *l*- ½.

**Повний механічний момент двох електронів.** При побудові повного механічного момента двох електронів існує дві граничні схеми додавання орбітальних моментів та спінів.

***LS –* зв’язок.** У цій схемі окремо будується повний орбітальний механічний момент двох електронів , власне значення якого  і можливі проекції . Квантові числа *L* та *ML* визначаються (2.65), (2.67). У такий же спосіб знаходять повний спіновий механічний момент двох електронів  з власним значенням  і проекцією ; квантові числа *S* та *MS* визначаються (2.69), (2.71). Тоді оператор повного механічного момента  має власні значення:

. (2.74)

Квантове число повного механічного момента, як і (2.65) та (2.69), дорівнює

. (2.75)

Якщо в атомі більше двох електронів, то за наведеною вище методикою для системи *Ζ* електронів будуються квантові числа *L* та *S*, за якими визначається квантове число *J*.

***j* – *j*-зв’язок.** У моделі *j* – *j*-зв’язку спочатку будуються повні механічні моменти кожного електрона: , , де , . Відтак, повний механічний момент двох електронів згідно з наведеними вище загальними правилами додавання моментів також набуває значення , але тепер

. (2.76)

Для багатоелектронного атома спочатку визначаються *j*12 двох електронів, далі до *j*12 додається *j*3 і знаходяться числа *j*123 системи трьох електронів і так далі, доки не буде визначено квантові числа { *j*1…Z ≡ *J* } системи усіх Z-електронів.

**Орбітальний магнітний момент електрона.** Наявність у електрона в атомі орбітального момента імпульса  визначає існування у нього ще й орбітального *магнітного* момента . Дійсно, орбітальний механічний момент  характеризує обертальний рух електрона навколо ядра. У свою чергу, такий обертальний рух зарядженої частинки породжує замкнений струм, що створює певний магнітний момент . Зв’язок між власними значеннями моментів  та  визначається *гіромагнітним відношенням* для орбітальних моментів електрона:

. (2.77)

Знак мінус у (2.77) відображує той факт, що завдяки від’ємному заряду електрона моменти  та  спрямовані *протилежно*. З (2.77) можна отримати значення магнітного орбітального момента електрона:

, (2.78)

де  = 5,788⋅10-5 еВ/Тл = 0,927·10-23 Дж/Тл – магнетон Бора для електрона. Проєкція  на вісь OZ :

. (2.79)

**Орбітальний магнітний момент атома.** Гіромагнітне відношення (2.77) для одного електрона буде справедливим і при порівнянні значень орбітального механічного момента  та магнітного орбітального момента  усіх Z-електронів атома:

. (2.80)

Отже, магнітний момент атома, зумовлений орбітальним рухом усіх електронів, дорівнює:

. (2.81)

Його проєкція на вісь OZ:

. (2.82)

**Спіновий магнітний момент електрона**. Як і випадку орбітальних моментів, існування у електрона спінового механічного момента імпульса  зумовлює наявність у нього спінового магнітного момента . Експериментально встановлено, що гіромагнітне відношення для спінових моментів електрона у *два рази перевищує* гіромагнітне відношення для орбітальних моментів:

. (2.83)

Отже,

. (2.84)

Проєкція  на вісь OZ :

. (2.85)

**Спіновий магнітний момент атома.** Гіромагнітне відношення (2.83) можна застосувати і для системи Z-електронів атома. Тоді

, (2.86)

де μ*S* – значення спінового магнітного момента усіх електронів атома, *MS* – значення спінового механічного момента всіх електронів атома. Отже,

, (2.87)

. (2.88)

**Терми.** Рівень енергії атома, який відповідає певним значенням квантових чисел L та S, називається термом. Терм позначають наступним чином:

. (2.89)

Величина 2*S* + 1 називається *мультиплетністю* терма. Для позначення термів використовують великі літери латинського алфавіту. Відповідні позначення наведено у табл. 2.1

Таблиця 2.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значення | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Позначення | *S* | *P* | *D* | *F* | *G* | *H* | *I* | *K* | *L* | *M* | *N* |

При заданих *L* та *S* квантові числа проєкцій моментів *ML*, *MS* набувають відповідно ( 2*L* + 1 ) та ( 2*S* + 1 ) можливих значень. Отже, терму 2*S*+ 1*LJ* усього відповідає ( 2*L* + 1 ) × ( 2*S* + 1 ) станів, які відрізняються значеннями *z*-компонентів орбітального та спінового механічних моментів. Внизу від символа *L* справа вказують усі можливі значення, яких набуває число *J* при заданих *L* таS*.* Оскільки *J* = *L* + *S*, *L* + *S* –1, | *L* – *S* |, то при *L* ≥ *S* можливі ( 2*S* + 1 ) значень *J*. Розглянемо, наприклад, терм 3*P*2, 1, 0, для якого *S* = 1, *L* = 1 *J* = 2, 1, 9. Фактично, в цьому випадку мультиплетність ( 2*S* + 1) визначає кількість компонентів терма з різними значеннями *J*. Хоча при *L* < *S* таких значень вже ( 2*L* + 1 ), назва «мультиплетність» зберігається саме за величиною 2*S* + 1. При 2*S* + 1 = 1, ( *S* = 0 ) терм називають *синглетним*; при 2*S* + 1 = 2, ( *S* = 0,5 ) – *дублетним*; при 2*S* + 1 = 3, ( *S* = 1 ), – *триплетним*; при 2*S* + 1 = 4, ( *S* = 1,5 ) – *квартетним* тощо.

**Електростатичне розщеплення.** У наближенні центрально-симетричного самоузгодженого поля енергія атома (енергія системи *Z*-електронів) повністю визначається заданою електронню конфігурацією  Тобто, *всі терми* даної електронної конфігурації мають *однакову енергію*. Однак, у наближенні центрально-симетричного поля при обчисленні самоузгоджених енергій  (2.64) частина електростатичної взаємодії електронів залишається неврахованою (так звана нецентральна частина електростатичної взаємодії). Якщо її врахувати, зокрема, у першому порядку теорії збурень, то різним термам 2*S*+ 1*LJ* заданої електронної конфігурації будуть відповідати різні енергії.Отже, *врахування електростатичної взаємодії електронів призводить до розщеплення єдиного рівня енергії заданої конфігурації на ряд дискретних рівнів, кожному з яких відповідає певний терм* 2*S*+ 1*LJ.* Енергія електростатичного розщеплення терма Δ*ΕLS* залежить квантових чисез *L* та *S*. Зокрема, основний терм конфігурації якісно визначається *правилом Гунда*: *найменшу енергію має терм з найбільшим можливим для даної конфігурації значенням S та найбільшим значенням L, можливим при даному S.*

Наприклад, якщо терми 1*P*1, 3*P*2,1, 0, 3*D*3, 2,1 належать одній конфігурації, то найменшу енергію має терм 3*D*3, 2,1. Важливо, що різним значенням *J* відповідає *одна і та ж* енергія терма. Тобто, з врахуванням електростатичного розщеплення кожний терм *вироджений* за квантовим числом *J*.

**Мультиплетне (спін-орбітальне) розщеплення.** З курсу електрики відомо, що існування електричного поля напруженістю  в нерухомій системі відліку призводить до появи магнітного поля з індукцією  у системі відліку, яка рухається з швидкістю  відносно нерухомої системи. Можна розглядати ядро атома як нерухому систему, а з електроном пов’язати систему відліку, що обертається навколо ядра з лінійною швидкістю . Величина такої швидкості визначається орбітальним моментом . Тоді у власній системі відліку електрона вже буде обертатися ядро і в результаті такого руху створюватиме магнітне поле з індукцією, яка описується оператором . Очевидно, . З цим магнітним полем буде взаємодіяти спіновий магнітний момент електрона ; енергія такої взаємодії визначається скалярним добутком . Оскільки , можна записати . *Взаємодія спінового магнітного момента електрона*  *з магнітним полем* *, яке створюється у системі відліку, пов’язаній з електроном, за рахунок його орбітального руху, називається спін-орбітальною взаємодією*. Оператор спін-орбітальної взаємоді для усіх електронів атома визначається сумою по всіх електронах:

, (2.90)

де  – стала спін-орбітальної взаємодії для атома.

З огляду на (2.90) спін-орбітальну взаємодію в атомі можна трактувати як *взаємодію двох магнітних моментів – власного* *, який* *, та орбітального* *, який, у свою чергу,* *.*

Спін-орбітальна взаємодія призводить до того, що *станам одного терма*  *з різними значеннями квантового числа*  *вже будуть відповідати різні енергії*. Енергія такого розщеплення

, (2.91)

 – стала спін-орбітального (або *мультиплетного* чи *тонкого*) розщеплення для атома. Компоненти терма з різними значеннями  називають *компонентами мультиплета*. Наприклад, для терма  компонентами мультиплета є терми , ,  , а для терма  відповдно , , . Отже, за рахунок спін-орбітальної взаємодії кожний терм розщеплюється на окремі компоненти мультиплета  з різними значеннями енергії.

Різниця енергії між компонентами мультиплета з сусідніми значеннями  та  визначається *правилом інтервалів* *:*

, (2.92)

тобто зростає при збільшенні числа . Наприклад, відстань по енергії ніж компонентами ,  у 2 рази більша, ніж між компонентами , . Для відшукання *основного компонента мультиплета* застосовується наступне *правило*:

– якщо  (*нормальні мультиплети*), *найменшу* енергію має компонент ;

– якщо  (*обернені мультиплети*), *найменшу* енергію має компонент .

У тому випадку, коли електрони належать одній підоболонці, тобто мають однакові квантові числа  і відрізняються тільки значеннями квантових чисел  (*еквівілентні* електрони), знак сталої залежить від *ступеня заповнення* підоболонки:

, якщо підоболонка заповнета *менше, ніж наполовину*, а саме, кількість електронів у підоболонці ;

, якщо підоболонка заповнета *більше, ніж наполовину*, . Якщо ,  підоболонка заповнена наполовину – спін-орбітальне розщеплення відсутнє.

**Умови застосування *LS –* та** **-зв’язку.** Вибір схеми додавання орбітального та спінового механічних моментів електронів при побудові повного механічного момента атома залежить від співвідношенням між енергіями електростатичного розщеплення  та спін-орбітального розщеплення :

а) **>>** – відстань по енергії між окремими термами заданої конфігурації набагато більша за відстань по енергії між компонентами мільтиплетів цих термів. У цьому випадку використовується схема  зв’язку;

б) << – відстань по енергії між окремими компонентами мультиплетів набагато більша за відстань по енергії між окремими термами, яким належать такі мультиплети. Це умова застосування  зв’язку. Оскільки , а , то  зв’язок, як правило, застосовується при описі термів атомів легких елементів (), а зв’язок – важких елементів (). Однак, умови застосування тієї чи іншої схеми залежать також від квантових чисел відповідної оболонки та ступеня збудження атома. В області  діє схема *проміжного зв’язку*, яка об’єднує елементи як , так і  зв’язку.

**Повний магнітний момент атома.** Співвідношення (2.80) та (2.86) встановлюють зв’язок між магнітним та механічним орбітальними моментами атома, а також магнітним та механічним спіновими моментами атома. Важливо, що знак мінус у цих співвідношеннях вказує на те, що механічний та магнітний моменти завжди спрямовані протилежно (якщо операторам  та  ставити у відповідність класичні вектори  та  – векторна модель атома). Тоді повний магнітний момент атома дорівнює:

.(2.93)

Або

 (2.94)

(враховано, що ). З (2.94) можна зробити висновок, що у векторній моделі атома повний магнітний момент атома  та повний механічний момент атома  *вже не будуть спрямовані у протилежні боки*, оскільки у (2.94) до повного механічного момента  ще й додаться повний спіновий механічний момент атома . Таким чином, у загальному випадку зв’язок між операторами  та  є більш складним, а саме

, (2.95)

де  - деякий оператор, який має вигляд:

, (2.96)

а його власні значення, відповідно, дорівнюють

. (2.97)

Величина  має назву *множника* . Тому власні значення магнітного момента атома та його проєкції на вибраний напрямок визначаються наступним чином:

, (2.98)

. (2.99)

Співвідношення показують, що повний магнітний момент атома та його проєкція визначаються не тільки квантовим числом повного механічного момента , а всією трійкою квантових чисел . Очевидно, наведені міркування справедливі у випадку -зв’язку.

**Атом у слабкому магнітному полі (ефект Зеємана).** Важливо нагадати, що для мультиплету  кожний компонент  є виродженим за квантовим числом , яке набуває  можливих значень:

. (2.100)

Тобто, при заданому значенні  усі стани з різними значеннями  мають *однакову енергію*. Нехай атом, що має повний магнітний момент , знаходиться у магітному полі з індукцією . Згідно з класичною електродинамікою, цей магнітний момент буде взаємодіяти з магнітним полем, причому енергія такої взаємодії =. Оскільки у квантовій механіці кожній фізичній величині ставиться у відповідність певний математичний оператор, то останнє рівняння можна записати як

. (2.101)

Магнітне поле можна вважати *слабким*, якщо енергія  набагато менша за енергію спін-орбітальної взаємодії . Це означає, що енергія взаємодії спінового магнітного момента атома  з його орбітальним магнітним моментом  (що, власне, і є спін-орбітальною взаємодією) *набагато більша* за енергію взаємодії кожного з моментів ,  із магнітним полем окремо. Тобто, магнітне поле *не розриває спін-орбітальну взаємодію* і магнітний момент атома характеризується саме величиною .

У такому наближенні значення енергії взаємодії атома зі слабким магнітним полем () можна розрахувати, користуючись формулою для поправки до енергії у першому порядку теорії збурень (2.48)

, (2.102)

де , - незбурені хвильоі функції *n*-го квантового стану. Оскільки до складу операторів ,  входять тільки чисельні значення відповідних величин, то замість операторів у рівняння (2.102) можна підставити саме ці величини і винести їх за знак інтеграла:

 (2.103)

У (2.103) враховано: 1) вираз (2.99) для *z*-проєкції повного магнітного момента атома; 2) з курсу електрики відомо, що величина  – частота ларморівської прецесії електрона в магнітному полі з індукцією ; 3) умову нормування хвильової функції . Тоді,

, (2.104)

де - єнергія *n*-го рівня за відсутності магнітного поля, - енернія цього ж рівня в магнітному полі. Остаточно,

. (2.105)

З формули (2.105) можна зробити важливий висновок: *магнітне поле знімає виродження за квантовим числом* *, тобто в магнітному полі компонент мультиплету*  *розщеплюється на систему*  *рівнів енергії, кожний з яких характеризується своїм значенням квантового числа* *.*

Нехай за відсутності магнітного поля при переході атома зі стаціонарного стану з енергією у стаціонарний стан з енергією  випромінюється фотон, енергія якого . Тоді, у магнітному полі з врахуванням розщеплення компонентів мультиплетів на окремі рівні (2.105) будуть випромінюватися фотони, енергії яких визначаються співідношенням:

. (2.106)

Або, частоти фотонів у магнітному полі:

. (2.107)

Розщеплення окремих спектральних ліній у магнітному полі на ряд близько розташованих спектральних компонентів отримало назву *ефекта Зеємана*. Формули (2.106) та (2.107) визначають усі енергії та частоти фотонів при заданих значеннях квантових чисел  та . Але фотони випромінюються тільки тоді, коли виконуються певні *правила відбору* для квантових чисел  та .

**Дипольні правила відбору**. Найбільш інтенсивним випромінюванням атома є *дипольне випромінювання* електромагнітних хвиль (фотонів), при якому змінюється дипольний момент електронної оболонки атома. Виділяють *точні* та *наближені* правила відбору, які визначають можливі зміни квантових чисел атома. Точні правила відбору є наслідком законів збереження. Зокрема, закон збереження повного момента імпульса  визначає дозволені зміни квантових чисел , :  та . Закон збереження парності стану дозволяє переходи тільки між станами *різної парності*. Якщо вказані точні правила відбору не задовільняються, імовірність відповідних переходів дорівнює нулю.

Якщо ж не враховувати спін-орбітальну взаємодію, при випромінюванні фотона можна розглядати можливі зміни орбітального механічного момента атома  та спінового механічного момента атома  окремо одне від одного. Так з’являються *наближені* правила відбору:  та , а також для спінового момента імпульса: , . Ці правила називають наближеними, оскільки спін-орбітальна взаємодія, величина якої , суттєво знижує імовірності таких переходів при зростанні порядкового номера атома. Крім того, при наявності спін-орбітальної взаємодії правило  може порушуватися і з’являтимуться слабкі *інтеркомбінаційні переходи* , імовірність яких нижча на декілька порядків за імовірність дозволених дипольних переходів.

Об’єднуючи точні і наближені правила відбору, можна записати:

; ; (2.108-1)

; ; (2.108-2)

; . (2.108-3)

**Нормальний (простий) ефект Зеємана.** Розглядають окремий випадок ефекта Зеємана, коли повний спін атома . За цієї умови, очевидно, , і тоді множник Ланде  (див. рівн. (2.75) та (2.97)). Оскільки , то також . Отже, формула (2.107) набуває вигляду

 (2.109)

Відповідно до правила відбору (2.108-2) різниця в дужках (2.109) може набувати тільки трьох значень: –1,0,+1. Тому вираз (2.109) можна записати у вигляді

. (2.110)

Таким чином, для атомів, які пербувають у стані , у слабкому магнітному полі спектральна лінія з частотою  супроводжується двома додатковими лініями, які відрізняються за частотою від на  та . Саме таке явище отримало назву *нормального (простого) ефекта Зеємана*. Якщо кількість спектральних компонентів у слабкому магнітному полі більше трьох, то явище називають *аномальним (складним) ефектом Зеємана*. Відзначимо, що за певних значень квантових чисел  нормальний ефект Зеємана може спостерігатися і за умови  (див. задачу А.17) .

**Атом у сильному магнітному полі.** Магнітне поле вважається *сильним*, якщо енергії взаємодії магнітних моментів ,  з таким полем ( та  відповдно) більші за спін-орбітальну взаємодію . У цьому випадку спін-орбітальна взаємодія «розривається» і з зовнішнім магнітним полем окремо взаємодіє кожний з моментів , . Отже, необхідно визначити суму двох поправок до енергії атомного рівня в сильному магнітному полі, зумовлених кожною з вказаних взаємодій. Враховуючи (2.82) та (2.102), можна записати:

 (2.111)

Аналогічно:

 (2.112)

тут враховано співвідношення (2.83).

Остаточно, енергія -рівня в сильному магнітному полі дорівнює

. (2.113)

Тоді, частоти фотонів у сильному магнітному полі:

. (2.114)

Важиво, що в цьому випадку окремо застосовуються правила відбору (2.108-2) та (2.108-3) для квантових чисел  та . Отже, можна зробити висновок, що при розгляді радіаційних переходів у сильному магнітному до уваги приймаються тількі квантові числа  та , оскільки компоненти мультиплетів з різними значеннями  мають однакову енергію.

Експериментально встановлено, що умова руйнування спін-орбітального зв’язку () для більшості оптичних спектральних ліній атомів починає виконуватися при  *Тл*.

**2.2. Приклади розв’язку задач**

**Задача A.1**. *Отримати вирази для визначення радіусів борівських орбіт та енергій стаціонарних станів електрона для воднеподібного іона. Визначити відношення радіусів перших чотирьох борівських орбіт. Обчислити радіус першої борівської орбіти та енергію першого стаціонарного стану для атома водню.*

***Розв’язок*:**

Згідно з теорією Бора для воднеподібного іона рух електрона по стаціонарній орбіті розглядається як класичний обертальний рух з доцентровим прискоренням під дією сили електростатичної взаємодії з атомним ядром. За другим законом Ньютона:

 (1)

Відповідно до першого постулата Бора момент імпульса електрона на стаціонарній орбіті кратний зведеній сталій Планка (2.1):

. (2)

В рівняннях (1), (2): *Z* - порядковий номер елемента; *V* - швидкість електрона, *r* - радіус орбіти, *e* - заряд електрона, *m* - маса електрона, *n* - номер орбіти (головне квантове число), стала *k* у СІ дорівнює ; 

Виключаючи з (2) швидкість *V = nh/mr* та підставляючи цей вираз у рівняння (1), отримаємо:

 (3)

Відношення радіусів орбіт:

 (4)

Повна механічна енергія електрона на *n*-й орбіті є сумою його кінетичної та потенціальної енергій:

. (5)

Підставимо в (5) отримане значення *r* (3) та величину *mV*2 з рівняння (1):

 (6)

Виконаємо обчислення для атома водню () за формулами (3) та (6). Радіус першої орбіти:

(*м*) =

=  *нм* = 0,53 Å

Енергія електрона в першому стаціонарному стані:



Оскільки 1 еВ = ()Дж,

то –13,6 еВ.

Самостіно переконайтесь у вірності вказаних розмірностей.

**Задача А.2**. *Атомарний водень збуджується потоком електронів з кінетичною енергією  еВ. Спектральні лінії з якою довжиною хвилі будуть спостерігатися у спектрі водню за таких умов?*

**Розв’язок:**

Важливо, що кінетична енергія електронів пучка менша за повну енергію електрона в основному стаціонарному стані ( еВ > 13,0 еВ). Це означає, що іонізація атома за законом збереження енергії неможлива, а відбуватися будуть лише процеси збудження електронів у стани . Розглянемо спочатку випадок, коли при непружному співударі з атомом кінетична енергія електрона, що налітає, повністю витрачається на збудження атама. Нехай  – енергія найвищого збудженого стану. За законом збереження енергії :

 (еВ) (1)

Тобто, електрон може перейти у збуджений стан, який також є зв’язаним (про що свідчить знак мінус у повної енегрії електрона), причому величина енергії такого стану не може бути за модулем більшою за 0,6 еВ. Знаючи енергію (1), можна визначити головне квантове число  цього збудженого стану:



Оскільки квантове число  може набувати тільки цілих значень, то можливими будуть збудження у стан . Очевидно, кінетичної енергії  буде цілком достатньо і для збудження атома водню у стани  та :

 (еВ),

(еВ)(еВ);

 (еВ),

(еВ)(еВ).

Таким чином, при взаємодії атомів водню з пучком електронів, які мають кінетичну енергію  еВ, електрони в атомах будуть збуджуватися у другий, третій та четвертий стаціонарні стани. При переході атомів із збуджених станів можливими будуть наступні спектральні переходи: , ,  (серія Лаймана); ,  (серія Бальмера);  (лінія серії Пашена). Для визначення довжин хвиль спектральних ліній, які випромінюються, скористаємося відомою формулою для спектральних серій у спектрі водню:

 (2)

У рівнянні (2)  *м*-1 – стала Рідберга для водня, головні квантові числа початкового збудженого стану та кінцевого стану електрона відповідно. Тоді, для трьох ліній серії Бальмера:

 нм;

 нм;

 нм.

Дві лінії серії Бальмера:

 нм;

 нм.

Одна лінія серії Пашена:

 нм.

**Задача А.3**. *Довести самоспряженість оператора* .

***Розв’язок***:

За визначенням, в одномірному випадку оператор  називається самоспряженим, якщо виконується умова , де  та  ‑ довільні функції. Спробуємо довести такі співвідношення, використовуючи явний вигляд операторів, що розглядаються. А саме, враховуючи, що , маємо:

 .

Беручи до уваги що  та застосувавши формулу інтегрування частинами отримаємо



Так як на нескінченності хвильові функції прямують до нуля, то нульовим буде і перший доданок останньої суми. Якщо згадати, що , то остаточно матимемо

.

Таким чином,

.

Що і треба було довести.

**Задача А.4*.*** *Знайти наступні комутатори*: а) ; б) .

***Розв’язок*:**

Побудуємо спочатку явний вигляд операторів компонентів моменту імпульса  та . У класичній фізиці вектор момента імпульса  задається співвідношенням , тобто компоненти вектора момента імпульса пов’язані з компонентами радіус-вектора та вектора імпульса наступним чином:

.

Відповідно,



а) Отже, умова набуває вигляду



Скористаємось комутативними співвідношеннями між операторами компонентів радіус-вектора та вектора імпульса, а саме

 тобто 

Отже, перший та другий доданок суми можна замінити наступним чином:



Враховуючи, що , остаточно отримуємо

.

б) В цьому випадку:



Так як

, тобто ,

Тоді, підставляючи ці рівності у другий, третій та четвертий доданки відповідно, отримуємо



тобто



**Задача  А.5.** *Знайти власне значення оператора , що належить власній функції* .

***Розв’язок*:**

Нагадаємо, що у випадку, коли  та λ є, відповідно, власною функцією та власним значенням оператора , має виконуватися рівність

.

Подіємо оператором  на функцію :

.

Порівнюючи отриману формулу з попередньою можемо зробити висновок, що шукане власне значення .

**Задача А.6.** *Потік моноенергетичних електронів падає нормально на діафрагму з вузькою щілиною шириною  мкм. Знайти швидкість електронів, якщо на екрані, який знаходиться від щілини на відстані см, ширина центрального дифракційного максимуму  мм.*

***Розв’язок*:**

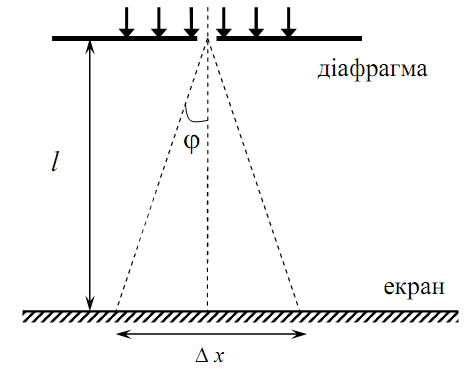


Рис. 2.3

З курсу оптики відомо, що границі центрального дифракцій-ного максимуму при дифракції Фраунгофера на одній щілині спостерігаються під кутом ϕ, для якого

, (1)

де кут φ відраховується від нормалі до діафрагми, а λ – довжина хвилі падаючого опромінення. Так як в даному випадку , то можна записати

. (2)

Для потоку електронів, використовуючи співвідношення де Бройля, можна записати

, (3)

де *р* – імпульс електрона. У випадку, коли швидкість частинок набагато менша за швидкість світла імпульс

, (4)

де *m* – маса електрона, υ – його швидкість. Підставляючи вирази (3), (4) у формулу (1) отримуємо

,

звідки остаточно виражаємо

. (5)

Враховуючи, що *Дж**с*, *м*, *м*, *кг*, *м*, то обчислення, проведені за формулою (5), дозволяють записати *м/с*. Отримане значення свідчить на користь можливості використання виразу класичного виразу для імпульса (4).

**Задача А.7.** *Переконайтесь, що вимірювання координати х частинки за допомогою мікроскопа (див. рисунок) призводить до такої невизначеності її імпульсу , що . Зважте, що роздільна здатність мікроскопу , де λ ‑ довжина хвилі світла, яке використовується.*

***Розв’язок*:**

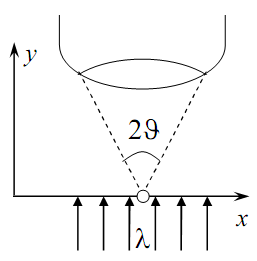


Рис. 2.4

Для частинки невизначеність її координати, яка вимірюється за допомогою мікроскопа, визначається роздільною здатністю прилада, тобто

. (1)

Водночас, якщо для освітлення використовується світло з довжиною хвилі λ, то імпульс налітаючих фотонів має лише компонент, спрямований паралельно осі *у*, величина якого

, (2)

де  ‑ енергія фотона. Для того, щоб після розсіяння на частинці фотон потрапив у об’єктив мікроскопа, необхідно щоб напрям його імпульса знаходився у конусі з кутом при вершині . Якщо припустити, що після розсіяння компонент імпульса  не змінюється, то це означає, що

,

або

. (3)

Водночас, компонент  з’явився у фотона в результаті взаємодії з частинкою, що означає зміну компонента імпульса частинки на таку ж величину. Так як невідомий точний напрямок поширення фотону, то можемо стверджувати, що невизначеність імпульса частинки

. (4)

У виразі (4) враховано, що кут ϑ малий і тому . Об’єднуючи вирази (1) та (4) отримуємо:

.

**Задача А.8.** *Знайти власні значення енергії та хвильову функцію частинки масою m, потенціальна енергія якої описується виразом*

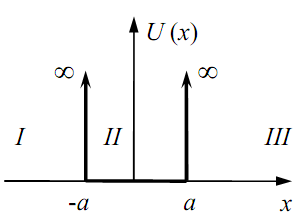


Рис. 2.5



*(задача про частинку, яка знаходиться в нескінченно глибокій одномірній прямокутній потенціальній ямі шириною 2a).*

***Розв’язок*:**

Для знаходження хвильової функції ψ та власного значення енергії *Е* частинки масою *m*, яка знаходиться у потенціальному полі , необхідно розв’язати рівняння Шрьодінгера, яке у стаціонарному одномірному випадку має вигляд

. (1)

Вигляд залежності потенціальної енергії від координати наведено на рисунку. Розіб’ємо весь простір на три області залежно від величини потенціальної енергії: область *І*, де , ; область *ІІ*, де ,  та область *ІІІ*, де , ; та запишемо рівняння Шрьодінгера для кожної області окремо:

 (2)

Так як хвильова функція та її перша і друга похідні мають бути обмеженими, а також обмеженим є значення повної енергії частинки, то єдино можливим розв’язком рівняння Шрьодінгера за межами інтервалу  (в *І* та *ІІІ* областях) є нульове значення хвильової функції у цих точках простору, тобто

. (3)

Якщо поглянути на цю ситуацію з іншої точки зору, то відповідно до класичних уявлень, частинка з кінцевим значенням повної енергією не може перебувати в області простору, де її потенційна енергія прямує до нескінченності. У квантовій механіці це твердження замінюється вимогою перетворення у нуль густини ймовірності  (а отже, і самої функції ) в тих точках, де .

Рівняння Шрьодінгера для хвильової функції у області *ІІ* перепишемо у вигляді

, (4)

де для скорочення введено позначення . Рівняння (4) нелінійне однорідне диференційне рівняння, його загальний розв’язок має вигляд

, (5)

де *А* та *В* – константи. Так як хвильова функція має бути неперервною, то необхідно, щоб в точках  значення функцій з сусідніх областей були однакові, тобто

 (6)

Використовуючи отримані розв’язки (3) та (5), система рівнянь (6) може бути переписана у вигляді

 (7)

Очевидно, що система (7) має розв’язок лише в тому випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів (*А* або *В*) дорівнює нулеві. Звичайно, з математичної точки зору цілком прийнятним є і варіант, коли одночасно і , і . Але в цьому випадку, як видно з рівнянь (3) та (5),  при будь-яких значеннях *х*, тобто ймовірність знайти частинку є нульовою у всіх точках простору, а це є неприйнятним з фізичної точки зору. Таким чином, розв’язки розбиваються на два класи.

1. , , , причому в цьому випадку

,

а отже

,  (непарне ціле число).

2. , , , причому в цьому випадку

,

а отже

,  (парне ціле число).

В останньому випадку до ряду парних чисел не включено 0, бо тоді , а такий розв’язок, як зазначалося вище, не має фізичного змісту.

Узагальнюючи отримані результати, запишемо

 (8)

Крім того,

,

що дає змогу визначити можливі значення енергії

 (9)

Тобто енергетичний спектр частинки у даному випадку дискретний, величина повної енергії частинки залежить від квантового числа *n*. Для знаходження коефіцієнтів *А* та *В* скористаємось умовою нормування хвильової функції, яка у одномірному випадку має вигляд

. (10)

Розглянемо для визначеності випадок, коли . Тоді



Тобто, . Цілком аналогічно можна отримати, що . Таким чином, остаточний вигляд шуканої хвильової функції наступний

 (11)

Для прикладу розглянемо декілька хвильових функцій, які описують можливі стани частинки у заданому потенціальному полі і відповідають початковим значенням квантового числа *n*.

. Користуючись виразами (11) та (9), можемо сказати, що даний стан частинки описується хвильовою функцією



а енергія частинки при цьому дорівнює . Це найменше можливе значення енергії, тобто стан при  є основним.

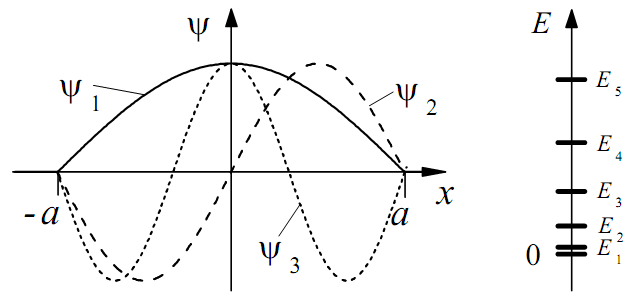
. В цьому випадку енергія частинки , а хвильова функція



. Для цього стану: ,

Вигляд декількох хвильових функцій та частини енергетичного спектру частинки у нескінченно глибокій потенціальній ямі наведено на рис.2.6.

Рис. 2.6



**Задача А.9.** *Знайти власні значення енергії Е та хвильову функцію ψ частинки масою m, потенціальна енергія якої описується виразом*

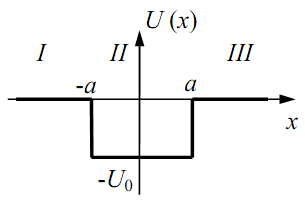


Рис. 2.7



*(задача про частинку в потенціальній ямі скінченної глибини). Розглянути випадок, коли .*

***Розв’язок*:**

Як і в попередній задачі, розіб’ємо весь простір на три області залежно від величини потенціальної енергії: область *І*, де , ; область *ІІ*, де ,  та область *ІІІ*, де , ; і запишемо рівняння Шрьодінгера для кожної області окремо:

 (1)

Якщо врахувати умову , то систему (1) можна переписати наступним чином:

 (2)

Ввівши позначення

 (3)

остаточно сукупність рівнянь Шрьодінгера можна записати у вигляді

 (2а)

Зауважимо, що коефіцієнти β та *k* є дійсними. Розв’язки диференційних рівнянь (2а) мають вигляд:

 (4)

де *Аі* та *Ві* () – константи, які спробуємо надалі визначити.

Оскільки хвильова функція має бути обмеженою при будь-яких значеннях аргументу, то щоб не допустити необмеженого зростання функції  при  та функції  при  необхідно покласти  та  відповідно.

Зазначимо, що так як залежність  є симетричною функцією відносно початку координат, то цілком очікуваним є те, що і густина ймовірності знаходження частинки в різних точках простору також має мати таку саму симетрію. Це, в свою чергу, означає, що повинна виконуватись рівність , тобто мають бути рівними квадрати модулів хвильових функцій в областях *І* та *ІІІ* для точок, однаково віддалених від початку координат. А це можливо лише у випадку, коли

. (5)

Тобто, якщо припустити, що *В*1 та *А*3 дійсні, то вони мають бути пов’язані між собою наступним чином:

 або . (5а)

Хвильова функція, як і її перша похідна має бути неперервною. Тому необхідно, щоб виконувались умови

 (6)

або, використовуючи (4), їх можна переписати у вигляді

 (6а)

Більш зручно провести аналіз системи рівнянь (6а), якщо провести її певне перетворення. Для цього додамо перше та третє рівняння і віднімемо від другого четверте; крім того віднімемо від третього рівняння перше та додамо між собою друге та четверте. В результаті отримаємо наступну систему

 (6б)

Врахуємо, що всі чотири коефіцієнти (*А*2, *А*3, *В*1 та *В*2) одночасно не можуть бути рівними нулеві (бо в цьому випадку нульовою є ймовірність знайти частинку у будь-якій точці простору), а також, що одночасно з системою (6б) має виконуватись і умова (5а). У зв’язку з цим розв’язки розпадаються на два класи.

1. Якщо , то з двох останніх рівнянь системи (6б) випливає, що , а з двох перших – що  і що має виконуватись умова

. (7)

Останнє співвідношення можна отримати, якщо поділити друге рівняння системи (6б) на перше.

2. Якщо , то з двох перших рівнянь системи (6б) випливає, що , а з двох останніх –  і що має виконуватись умова

 (8)

Зазначимо, що умови (7) та (8) одночасно не можуть виконуватись, так як в цьому випадку мала б мати місце також і рівність , що неможливо через те що і *k*, і β дійсні. Врахувавши явний вигляд цих коефіцієнтів (3), можемо остаточно зробити висновки, що стани, в яких може знаходитися частинка розділяються на два наступні класи.

Можливі значення енергії в першому класі є коренями рівняння

, (7а)

кожному значенню енергії відповідає парна хвильова функція

 (9)

Можливі значення енергії другого класу розв’язків є коренями рівняння

, (8а)

кожному значенню енергії відповідає непарна хвильова функція

 (10)

Зв’язок між константами *В*1 та *А*2 (*В*2) можна знайти, використавши умову нормування хвильової функції:

. (11)

**Задача А.10.** *Залежність потенціальної енергії частинки масою m від координати описується виразом* . Частинка рухається з області *від’ємних значень координати в бік її зростання з енергією . Знайти коефіцієнт прозорості даного потенціального бар’єру D.*

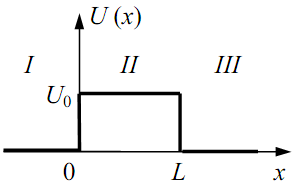


Рис. 2.8

***Розв’язок*:**

Вигляд залежності потенціальної енергії від координати наведено на рисунку. Розіб’ємо весь простір на три області, які відрізняються величиною потенціальної енергії: область *І*, де , ; область *ІІ*, де ,  та область *ІІІ*, де , ; і запишемо рівняння Шрьодінгера для кожної області окремо:

 (1)

Введемо позначення

. (2)

Зазначимо, що так як , то і *k*, і γ є дійсними. Тепер систему рівнянь (1) можна записати у вигляді

 (1а)

Її розв’язок має вигляд:

 (3)

де *Аі* та *Ві* () – нормувальні коефіцієнти. Фактично, перший доданок у формулах для  та  описує плоску хвилю, яка поширюється у бік зменшення координати *х*, а другий – хвилю, що поширюється у протилежному напрямі. Так як за умовою задачі частинка рухається і бік зростання координати, то можемо покласти , . Згідно з класичними уявленнями частинка не може перебувати у області, де її повна енергія менша потенціальної (область  в нашому випадку). Щоб це врахувати забезпечимо зменшення хвильової функції  (а отже, і густини імовірності знаходження частинки) при віддалені від точки з координатою  ‑ точки з максимальним значенням абсциси, куди може потрапити частинка відповідно до класичних уявлень. Для цього покладемо .[[1]](#footnote-1) З врахуванням цього систему (3) можна переписати у вигляді

 (3а)

Для забезпечення неперервності хвильової функції необхідно, щоб

 (4)

Підставивши в (4) вирази (3а) отримуємо

 (5)

Коефіцієнт прозорості бар’єру може бути визначений як відношення ймовірностей перебування частинки за бар’єром та перед ним, тобто

. (6)

Враховуючи вирази (3а) та (5), можемо остаточно записати





**Задача А.11.** *Для 1s-електрона в атомі водню визначити:*

*а) середнє значення його відстані від ядра ;*

*б) найбільшу імовірну відстань від ядра rім та імовірність Р знаходження електрону в області .*

***Розв’язок:***

**а)** Середнє значення фізичної величини *F* у стані, який описується хвильовою функцією ψ, знаходиться за допомогою формули (2.23)

,

де  ‑ оператор фізичної величини. Оператор відстані , стан 1*s*-електронf в атомі водню описується функцією  (де *А* – нормувальний коефіцієнт,  ‑ константа), тому

. (1)

У формулі (1) враховано, що у сферичній системі координат . Перед тим, як проводити обчислення за формулою (1), знайдемо коефіцієнт *А* , використовуючи умову нормування:

. (2)

Таким чином



Для знаходження останнього інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами та скористаємось тим, що

:



Перший доданок у дужках, який складається з двох множників, рівний нулеві і на верхній і на нижній границі: на верхній через те, що другий множник значно швидше спадає, ніж перший зростає; а на нижній – бо перший множник нуль, а другий обмежений (одиниця). Крім того, , тому



Таким чином,

. (3)

Скористаємось тепер безпосередньо виразом (1) для знаходження  (під час інтегрування застосовуватимуться ті ж самі прийоми, що описані вище):







. (4)

**б)** Для знаходження найбільш імовірної відстані необхідно знайти, при яких значеннях *r* функція, що визначає імовірність , набуває максимального значення, тобто обчислити, при яких *r* функція . Врахувавши явний вигляд  можемо записати:

 ,

,

тобто

. (5)

З рівності (5) видно, що  при 1) ; 2) ; 3) . Можна переконатися, що перші два корені відповідають мінімуму функції ω, а третій – максимуму. Тобто

. (6)

Імовірність *Р* знаходження електрона в області  може бути обчислена наступним чином:



**Задача А.12**. *Знайти всі можливі терми електронної конфігурації , яка відповідає одному із збуджених станів атома кремнію .*

***Розв’язок***:

Відзначимо, що в основному стані будь-якого з атомів періодичної таблиці подібна електронна конфігурація не існує. Вона може утворитися в результаті взаємодії атома з бомбардуючою частинкою чи при поглинанні фотона достатньої енергії, коли один з -електронів переходить у збуджений незаповнений -стан. Оскільки електронні оболонки  та  повністю заповнені (конфігурація неона), задача полягає у відшуканні термів двоелектронної конфігурації . Для вказаної конфігурації головне квантове число електронів однакове, але вони відрізняються знеченнями орбітального квантового числа – для -електронів , а для -електронів . Тому електрони є нееквівалентними і для них за принципом Паулі (див. стор. 76) немає обмежень за можливими комбінаціями квантових чисел .

Знайдемо квантові числа орбітального момента атома. Згідно з формулою (2.65)

.

Отже, можливі терми *F, D, P* (див. табл. 2.1). Далі визначимо спінове число атома, використовуючи (2.69):



Йому відповідає мультиплетність . Тому з урахуванням спіна маємо терми . Для кожного з них визначимо квантове число  повного механічного момента атома.

 Число  набуває значень, які можна знайти використовуючи формулу (2.75):

. Тобто, маємо мультиплет .

 . Терм .

 . Мультиплет .

 . Терм .

 . Мультиплет .

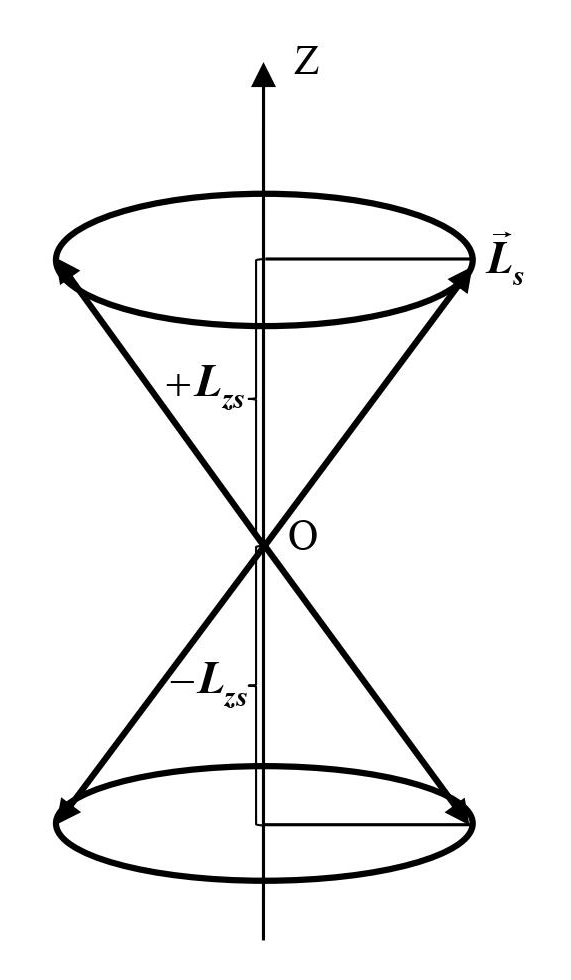
 . Терм .

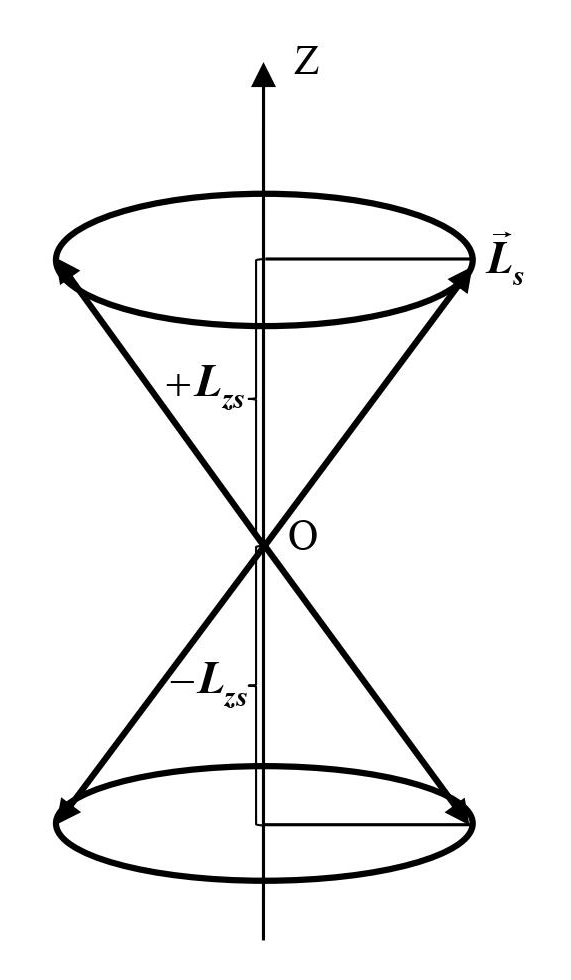
**Задача А.13**. *Знайти всі можливі терми електронної конфігурації атома арсена  ().*

***Розв’язок*:**

Електронна конфігурація атома арсена містить конфігурацію повністю заповнених оболонок аргона (, а також заповнені електронні підоболонки та . Незаповненою залишається підоболонка, в якій розподілені три з шести можливих *р*-електронів.

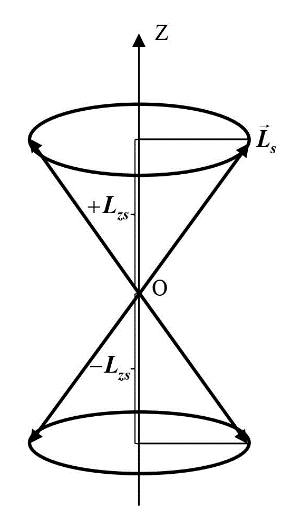
Необхідно відзначити, що у порівнянні з попередньою задачею три електрони у 4*р*-підоболнці еквівалентні, тобто, згідно з принципом Паулі мають відрізнятися тільки значеннями квантових чисел  (числа  однакові). *р*-станам () відповідають , а для кожного з електронів можливими є проєкції спіна . Отже, всього існує 6 незалежних одноелектронних станів: , . По цим станам необхідно розподілити три електрони так, щоб у кожному розподілі електрони мали різні значення . Кількість незалежних розподілів -частинок по -станам дорівнює  Нагадаємо, що у векторній моделі атома механічні моменти  можна представляти як вектори , для яких вказано значення модулів та проєкцій на вибрану вісь. За таких умов можливі напрямки векторів  утворюють конуси з вершиною в точці О, з висотами  та довжинами твірних ліній  відповідно – див. рис. 2.3 для момента . Знайдемо можливі розподіли (). Як прийнято, стан з проєкцією  будемо позначати стрілкою , а стан  відповідно .



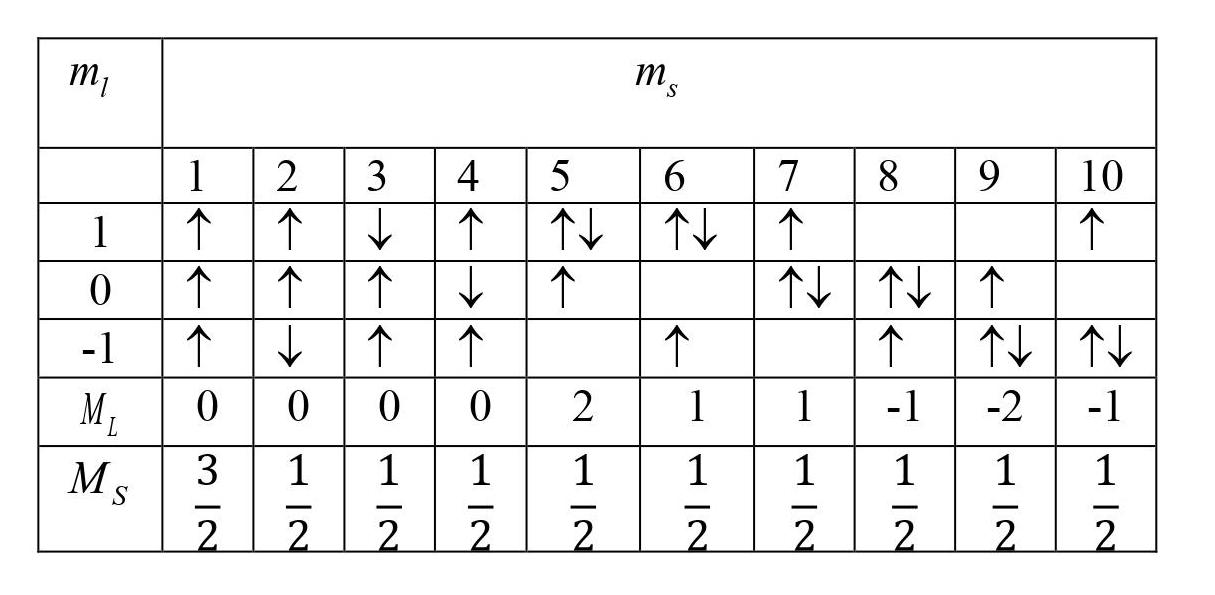


Для зручності побудуємо таблиці, по коміркам яких будемо розподіляти 3 електрони. У табл. 2.2 наведено 10 можливих варіантів розподілів 3-х електронів за станами зі значеннями (відповідні рядки таблиці) та різними комбінаціями проєкцій спіна на вісь OZ (10 вертикальних стовпчиків). В останньому та передостанньому рядках обчислено значення квантових чисел  та . Як видно, вказані розподіли забезпечують додатні значення сумарних проєкцій .

Рис.2.9. Векторна модель 

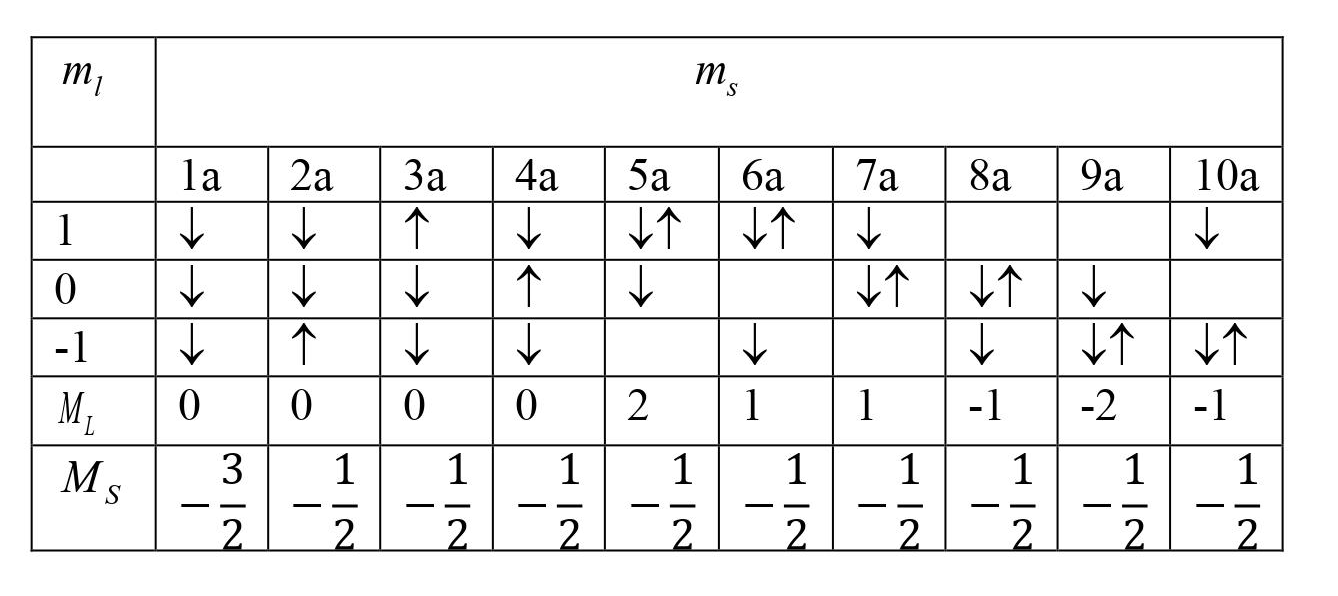


Таблиця 2.2



У табл. 2.3 знаки проєкцій спінів змінено на протилежні і утворено ще 10 розподілів, яким відповідають від’ємні значення .

Таблиця 2.3



1) Випишемо значення (табл. 2.2): . Очевидно, такі проєкції відповідають терму зі спіном  . При цьому . Таким чином, вказані розподіли електронів вказують на терм .

2) Розглянемо значення  із стовпчиків 4,5,6,8,9 (табл. 2.2): . Усім цим значенням відповідає . Аналогічний набір  наведено у стовпчиках 4а, 5а, 6а, 8а ,9а, але для них . Отже, маємо , , тобто терм .

3) Залишилися розподіли 3,7, 0, для яких , . У стовпчиках 3а,7а,10а також розподіли з , але . Таким чином, присутній терм , , а саме . Отже, електронній конфігурації атома арсену відповідають терми , , .

На завершення розв’язку відзначимо, що таблиця 2.3 фактично повторює розподіли табл. 2.2. Відмінність тільку у тому, що цим розподілам відповідають від’ємні значення проєкції . Тому при розв’язку подібних задач можна обмежитися побудовою таблиці типу табл. 2.2, розуміючи, що інша половина можливих розполів електронів буде відрізнятися тільки знаком проєкції .

**Задача А.14**. Знайти основний терм електронної конфігурації атомів :

1)  ();

2)  ().

***Розв’язок.*** 1. *Атом кремнію*. Його електронна конфігурація складається з повністю заповнених електронних оболонок  та  (конфігурація неона) та зовнішньої електронної оболонки , в якій -підоболонка заповнена повністю, а -підоболонка містить тільки 2 електрони. Тому задача зводиться до визначення основного терму конфігурації . Оскільки два *р*-електрони еквівалентні ( однакові), для розв’язку задачі будемо розглядати значення квантових чисел . Як відзначалося, можливі значення  та . Два *р*-електрони необхідно розподілити по цим квантовим станам так, щоб виконувалося правило Гунда (див. стор. 88). Основному терму має відповідати конфігурація з максимальним спіном . Очевидно, максимальне значення спіна для двох електронів , тобто проекції  мають бути одного знаку (обидві стрілки або вгору, або вниз). А як далі треба розподілити 2 електрони по станам , щоб виконувалася друга частина правила Гунда – при максимальному  було максимальним квантове число ? Оскільки квантові числа проєкції повного орбітального момента  набувають значень , то для необхідного максимального  у наборі можливих значень  має міститися майбільше можливе число . Таке число можна отримати, розмістивши 2 електрони в комірки , , або в комірки , . І в тому, і в іншому випадках ,  – див. табл. 2.4. У цій таблиці такий

Таблиця 2.4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | -1 |
|  |  |  |  |

розподіл електронів показано парою стрілок вгору або парою стрілок вниз (позначений пунктиром прямокутник). Таким чином, мінімальну енергію буде мати терм , , тобто, . Для цього терма число  = 2,1,0, отже, маємо мультиплет з трьома компонентами . Оскільки для атома кремнію -оболонка заповнена менш, ніж наполовину (нормальний мультиплет), мінімальну енергію буде мати компонент  = 0 (див. правило стор. 88). Отже, основним термом електронної конфігурації атома кремнію є .

2. *Атом кобальту*. Електронна конфігурація cкладається з повністю заповнених електронних оболонок  та  (конфігурація неона) та електронної оболонки , в якій - та -підоболонки заповнені повністю, а -підоболонка містить 7 з 10 можливих електронів. Оскільки -підоболонка також повністю заповнена, фактично необхідно визначити основний конфігурації .

Як і для атома хлора, побудуємо таблицю значень квантових чисел , врахувавши, що для -станів  (табл. 2.5). Спочатку розподілимо сім -електронів по станам так, щоб досягти максимального спіна системи. Очевидно, необхідно щоб 5 електронів мали однакове значення проєкції  (всі  або всі ). Два -електрони, що залишилися, повинні бути розподілені в комірки, в яких вже пребувають -електрони, але для виконання принципу Паулі їх проєкції  мають відрізнятися від проєкцій спінів тих електронів, що вже займають комірки. Тому повинна реалізовуватися така конфігурація: для трьох електронів проєкції , для чотирьох попарно  та  (або, навпаки, 3 електрони , чотири попарно  та ):

Таблиця 2.5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
|  |  |  |  |  |  |
| або | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |

Пари проєкцій  та в сумі дають нульову проєкцію спіна, тому проєкція повного спіна . Оскільки, , максимальний повний спін дорівнює .

Далі необхідно забезпечити такий розподіл електронів конфігурації за станами , щоб досягалося максимальне значення числа , відповідно, максимально можливою була величина . Для цього достатньо розподілити  електрони у стани , або . Тоді , що визначає . Таким чином, згідно з правилом Гунда основним термом електронної конфігурації  є мультиплет  (враховано, що ). Оскільки -підоболонка заповнена більш ніж наполовину (обернений мультиплет), за умови врахування спін-орбітальної взаємодії мінімальну енергію буде мати компонент мультиплета , тобто терм .

**Задача А.15.** Визначити можливі значення магнітного момента атома в стані  . Якими будуть значення проєкцій магнітного момента на вісь OZ у стані з найбільшим квантовим числом ?

***Розв’язок.*** Згідно з формулою 2.98 значення магнітного момента атома  визначаються: 1) магнетоном Бора для електрона ; 2) множником Ланде  (формула 2.97); 3) квантовим числом повного механічного момента . Для обчислення величин 2) та 3) необхідно визначити квантові числа . Очевидно, для терма  вказані квантові числа набувають значень: ; мультиплетність ; число  набуває значень (див. формула 2.75) . Обчислимо значення множника Ланде для трьох наборів квантових чисел , а саме, .

Відповідно, за формулою (2.97) отримаємо







Далі за формулою (2.98) визначимо абсолютні значення магнітних моментів атома, які відповідають вказаним вище наборам квантових чисел:







У стані з найбільшим значенням квантового числа  квантові числа  набувають значень  . Для визначення абсолютних значень проєкції  скористаємося формулою (2.99):





**Задача А.16.** Визначити, на які компоненти розщеплюється жовтий дублет натрію у слабкому та сильному магнітному полі. Довжина хвилі високоенергетичниного компонента (ВК)  Å, низькоенергетичного (НК)  Å.

***Розв’язок*.** Вказані спектральні лінії випромініються в результаті дипольних переходів 3*s-*електрона атома Na із збудженого 3*р*-стану, якому відповідають спектральні терми  () та  (), в основний 3*s*-стан – терм  (). Тобто, ВК відповідає перехід  – , а НК – перехід  – . Очевидно, такі переходи задовільняють дипольним правилам відбору (2.108-1) – (2.108-3).

**Слабке магнітне поле.** Як зазначалося вище, у слабкому магнітному полі знімається виродження по квантовому числу , тобто рівень енергії з квантовим числом  розпадається на систему окремих енергетичних рівнів (хоча і близьких за енергією), кожному з яких відповідає своє значення  (формула 2.105). При цьому спін-орбітальна взаємодія не розривається, тобто зі слабким магнітним полем взаємодіятиме повний магнітний момент атома . Визначимо для кожного з термів , ,  значення множника Ланде  (див. задача 15), можливі значення квантових чисел  (2.100), а також обчислимо добутки . Заповнемо таблицю 2.6. Для зручності значення  представлено як . Самостійно отримайте числа, наведені у таблиці 2.6.

На рис. 2.3 наведено компоненти мультиплетів, тобто окремі рівні з різними значеннями , на які розщепилися терми ,

Таблиця 2.6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Терм |  |  |  |
| () |  |  |  |
| (), |  |  |  |
| () |  |  |  |

`

, . Розглянемо ВК, тобто переходи між компонентами  терма (чотири компоненти ) та  терма (два компоненти ). Дозволеними за правилами відбору будуть тільки ті переходи, для яких ;  (2.108-1). Очевидно, таких переходів буде шість:

. На рис. 2.3 вони позначені стрілками з дрібними штрихами. Відповідно, різниці добутків  для них набувають значень:

,

або .

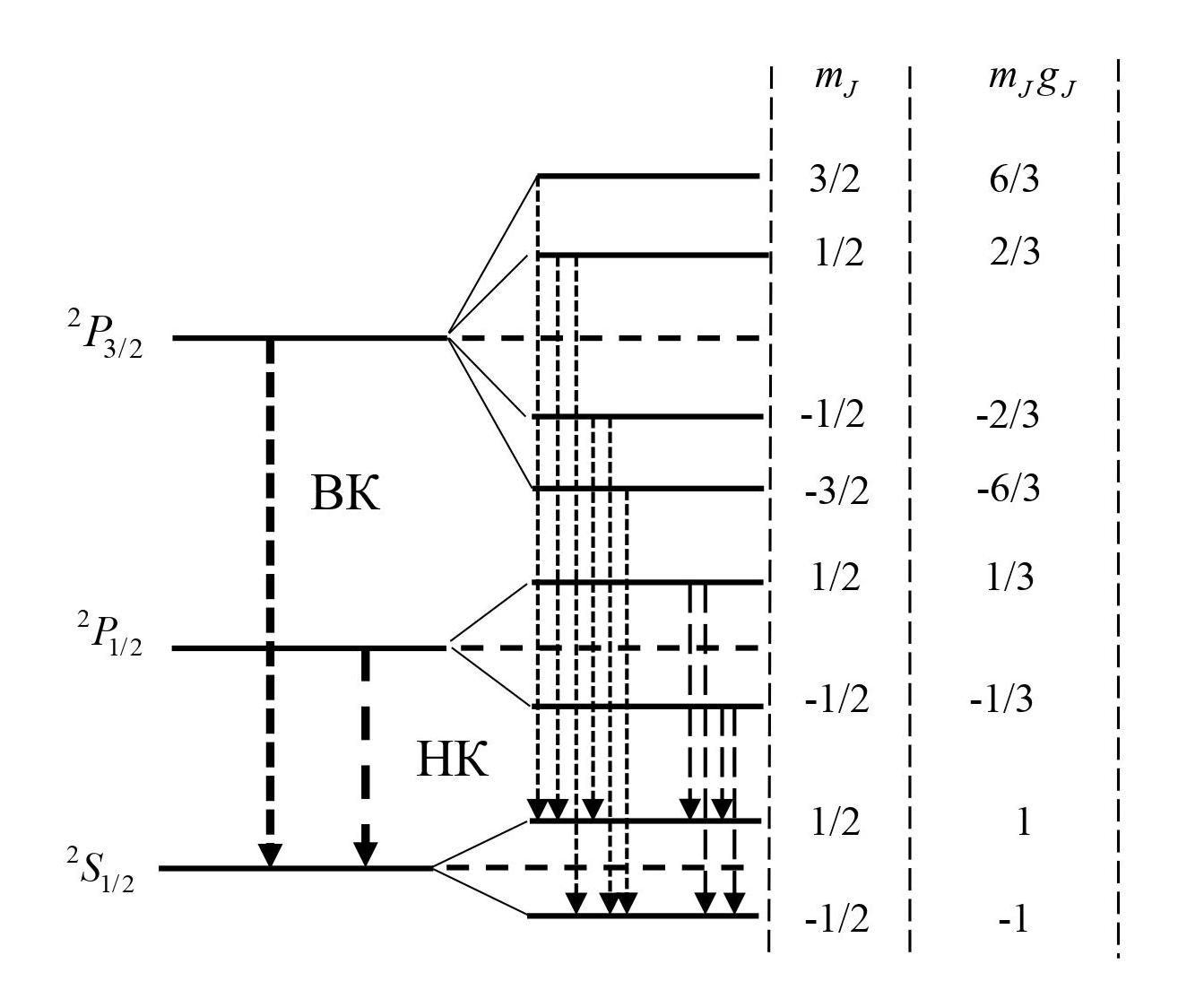






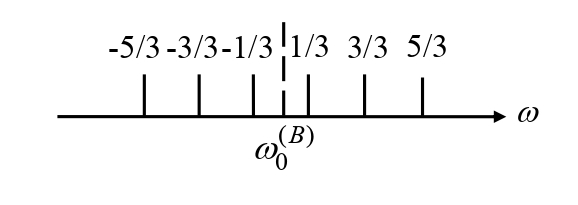


Рис. 2.10. Схема розщеплення жовтого дублета Na у слабкому магнітному полі

Тоді за формулою (2.107) набір частот ВК можно представити наступним чином



Отже, штрих-діаграма спектра ВК Na у слабкому магнітному полі має вигляд:

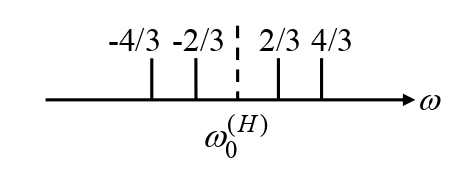


Аналогічно, для НК маємо чотири переходи: , які на рис. 2.3 позначені лініями з більш довгими штрихами. Для них різниці добутків , або

 . Отже, частоти НК дорівнюють



Відповідна штрих-діаграма НК:



Розрахунок частот і довжин хвиль ВК та НК компонентів виконайте самостійно, вважаючи, що індукція слабкого магнітного поля складає  *Тл.*

**Сильне магнітне поле.** На відміну від слабкого поля у сильному магнітному полі взаємодія орбітального магнітного момента атома  зі спіновим моментом  менша за взаємодію кожного з цих моментів із зовнішнім магнітним полем. Тобто, спін-орбітальна взаємодія розривається і тому необхідно розглядати окремо взаємодію кожного момента  з полем . У цьому випадку терм з квантовими числами  буде розщеплюватися на ряд окремих близьких рівнів, енергії яких визначаються квантовими числами  (формула 2.113). Оскільки в такій задачі спін-орбітальна взаємодія не враховується, терми  не відрізняються за енергією, тобто можна розглядати єдиний терм . Аналогічно . Для терма   квантові числа  набувають значень ; . Отже, терм  розщеплюється на шість рівнів. Терм   характеризується значеннями  та , тобто розщеплюється на два рівні. Можливі переходи між рівнями  та  термів визначаються правилами відбору  (2.108-2) та  (2.108-3). Тобто, за квантовим числом  дозволено переходи , а за квантовим числом : . Таким чином, правила відбору дозволяють існування шести переходів, квантові числа яких наведено у таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| Номер переходу | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Але частота фотонів, які випромінюються, згідно з формулою (2.114), визначається різницями  та . Перша з цих різниць набуває можливих значень (1,0,-1), а друга дорівнює нулю. Тому переходи 1 та 2, 3 та 4, 5 та 6 будуть попарно мати однакові частоти. Остаточно, частоти ліній, які спостерігаються експериментально, визначаються виразом



Таким чином, у магнітному полі жовтий дублет натрію спочатку розщеплюється на шість ВК та чотири НК (слабке поле, аномальний ефект Зеємана), а при подальшому зростанні індукції поля, починаючи з 2.2 – 2,4 Тл, перетворюється на три спектральні лінії (ефект Пашена-Бака). Розрахунок частот і довжин хвиль двох додаткових спектральних компонентів виконайте самостійно для випадку, коли індукція сильного магнітного поля складає 3 *Тл.*

**Задача А.17.** Визначити, який – нормальний чи аномальний, ефект Зеємана спостерігається у слабкому магнітному полі для спектральної лінії ?

***Розв’язок.*** Перш за все, визначимо трійку квантових чисел  для початкового та кінцевого терма. 1) *Tерм*  . Згідно з таблицею 2.1 (стор. 86) літера  відповідає . Мультиплетність , отже  2) *Терм* . Очевидно,  Обчислимо значення множника Ланде для початкового та кінцевого термів:





Виявляється, що множники Ланде для початкового та кінцевого термів однакові. Тоді формулу (2.107) можна переписати так

,

в якій . Таким чином, частоти спектральних компонентів будуть визначатися тільки різницями . Для  , а для   . Згідно з правилом відбору (2.108-1) ; , тобто можливі тільки три значення різниці . Частоти компонентів будуть визначатися виразом

,

який збігається з формулою (2.110), що визначає частоти у випадку нормального ефекта Зеємана. Можна зробити висновок, що для спектральної лінії  у слабкому магнітному полі спостерігатиметься саме нормальний ефект Зеємана.

## 2.3. Задачі для самостійного розв’язку

**1.** Оцініть час, за який електрон, що рухається навколо протона в атомі водню по орбіті радіусом  *м*, мав би впасти на ядро, якби втрачав енергію за формулою класичної електродинаміки . Скільки повних обертів навколо ядра він встиг би виконати? (- повна енергія електрона, - швидкість світла у вакуумі, - доцентрове прискорення електрона).

**2.** Знайти комутатор операторів а)  та ; б)  та ; в)  та .

**3.** Знайти оператор, спряжений до добутка двох операторів .

**4.**Довести само спряженість оператора а) ; б) .

**5.**Відомо, що . Знайти комутатор.

**6.**Довести, що .

**7.**Довести наступні рівності: а) ; б) .

**8.**Знайти власне значення оператора , що належить власній функції :

а) ;

б) , де α ‑ стала.

**9.**Знайти власні функції та власні числа операторів:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

**10.**Знайти власні значення оператора імпульсу  та відповідні власні функції.

**11.**Побудувати оператор моменту імпульсу  у прямокутній декартовій системі координат.

**12.**Знайти комутатори наступних компонент моменту імпульсу:

а) ; б) ; в) .

**13.**Знайти правила комутації наступних операторів: а)  та ; б)  та ; в)  та .

**14.**Довести, що оператор квадрату моменту імпульсу  комутує з будь-якою компонентою оператора  в прямокутній декартовій системі координат.

**15.**Відомо, що власна функція одномірної системи у певному стані має вигляд , де *а* та *k*0 – відомі константи. Знайти величину константи *С*, а також середні значення координати , імпульсу  та квадрату відхилення координати  у цьому стані.

**16.**Визначити середнє значення фізичної величини, що описується оператором  в стані, який описується функцією  (*С* – невідома константа).

**17.**Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорюючу різницю потенціалів *U*. Знайти довжину хвилі де Бройля цього електрону у двох випадках: а) *U*=51 В; б) *U*=510 кВ.

**18.**Кінетична енергія протона *K* = 1 кеВ. Визначити додаткову енергію Δ*K*, яку необхідно йому надати, щоб його довжина хвилі де Бройля зменшилась в η разів.

**19.**Кінетична енергія *K* електрона дорівнює подвоєному значенню його енергії спокою. Визначити довжину хвилі λ де Бройля для такого електрона.

**20.**При якому значенні швидкості електрона його імпульс дорівнює імпульсу фотона з довжиною хвилі  нм?

**21.**Знайти довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона з кінетичною енергією  МеВ.

**22.**При аналізі розсіяння α-частинок (досліди Резерфорда) прицільні відстані приймалися порядку 0,1 нм. Хвильові властивості α-частинок при цьому не враховувались. Чи припустимо це, якщо енергія α-частинок приблизно дорівнювала 7,7 МеВ?

**23.**Частинка масою *m* рухається в потенціальному полі . Швидкість частинки в області *x*<0 дорівнює υ1. Знайти показник заломлення потенціального бар’єру, розташованого при *х*=0.

**24.**Розподіл молекул певного газу за модулем їх швидкості описується формулою Максвелла. Запишіть розподіл молекул за дебройлівськими довжинами хвиль та визначте найбільш імовірну довжину λім. При обчисленнях вважати, що температура газу дорівнює *Т*, маса однієї молекули ‑ *m*, їх концентрація – *n*.

**25.**На яку кінетичну енергію має бути розрахований прискорювач заряджених частинок масою *m*, щоб за допомогою потоку даних частинок можна було досліджувати структури з лінійними розмірами *l*? Провести розрахунки для випадку, коли частинками є електрони та протони, а фм.

**26.**Знайти кінетичну енергію електронів, що падають на діафрагму з двома вузькими щілинами, якщо на екрані, розташованому на відстані см від діафрагми, відстань між сусідніми максимумами мкм. Відстань між щілинами мкм.

**27.**Кінетична енергія електрона в атомі водню складає величину порядку еВ. Використовуючи співвідношення невизначеності, оцінити мінімальні лінійні розміри атому.

**28.**Визначити відносну невизначеність  імпульсу рухомої частинки, якщо припустити, що невизначеність її координати дорівнює довжині хвилі де Бройля.

**29.**Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію електрону, що рухається всередині сферичної області діаметром нм.

**30.**Атом випроменив фотон з довжиною хвилі мкм за час с. Оцінити невизначеність , з якою можна визначити координату фотону в напрямі його руху, а також відносну невизначеність його довжини хвилі.

**31.**Деяка система знаходиться у стаціонарному стані, який описується хвильовою функцією . Чи буде залежати від часу густина ймовірності знайти систему у точці з координатою *х*?

**32.**Знайти власні значення енергії та хвильову функцію вільної частинки.

**33.**Визначити густину ймовірності знайти частинку в точці з координатою *х*, якщо її хвильова функція а) ; б) , де *С* – стала.

**34.**Частинка, яка перебуває в нескінченно глибокій потенціальній ямі, знаходиться в основному стані. Яка ймовірність виявлення частинки: а) в середній третині ящика; б) в крайній третині ящика?

**35.**Частинка, яка перебуває в нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною  знаходиться у збудженому стані, який характеризується квантовим числом  Визначити, в яких точках інтервалу  густина ймовірності знаходження частинки має максимальне і мінімальне значення.

**36.**Електрон знаходиться в прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями нм, енергія електрона ‑ еВ. Визначіть номер  енергетичного рівня і модуль хвильового вектора  електрона.

**37.**Електрон знаходиться в нескінченно глибокій одномірній прямокутній потенціальній ямі шириною . В яких точках інтервалу  густина ймовірності знаходження електрона на другому та третьому енергетичному рівнях однакові? Розв’язок пояснити графічно.

**38.**Частинка в нескінченно глибокій прямокутній потенціальній ямі перебуває у стані, який характеризується квантовим числом  Яка ймовірність виявити частинку в крайній чверті ящика?

**39.**У скільки разів змінюється енергія частинки після її тунелювання через потенціальний бар’єр висотою *U* та шириною *l*?

**40.**Частинка масою *m* перебуває в основному стані у потенціальному полі , а її хвильова функція має вигляд: , де *A* – коефіцієнт нормування, α ‑ додатна стала. За допомогою рівняння Шрьодінгера знайти величину α та енергію частинки у цьому стані.

**41.**Електрон в атомі водню знаходиться в основному стані, що описується хвильовою функцією . За допомогою рівняння Шрьодінгера знайти енергію *E* електрона та величину  .

**42.**Визначити для -електрона в атомі водню середні значення його квадрата відстані від ядра  та квадрата середнього відхилення .

**43.**Знайти для - та -електронів в атомі водню а) найбільш ймовірну відстань від ядра; б) середнє квадратичне відхилення .

**44.**Знайти значення повного механічного момента атома, який перебуває у станах термів: а) ; б) ; в) . Відповідь представити в одиницях .

**45.** Побудувати можливі терми для конфігурацій нееквівалентних електронів: а) ; б) *n p* 1*f* 1; в) ; г) *n s*1 *p* 1*d*1.

**46.**Побудувати можливі терми для конфігурацій еквівалентних електронів: а) *n p* 2; б) *n d* 2.

**47.** Побудувати можливі терми для конфігурацій, які містять як еквівалентні, так і нееквівалентні електрони: а) ; б) .

**48.** Визначити терм, який відповідає максимальному орбітальному моменту атома, що перебуває у стані з мультиплетністю 3 та є виродженим за квантовим числом  з кратністю 5.

**49.** Атом знаходиться у стані,мультиплетністьякого 3, а повний механічний момент дорівнює . Яких значень може набувати квантове число *L*?

**50.**Знайти основний терм атома, у якого незаповнена підоболонка містить 7 електронів, що складає половину від максимально можливої кількості електронів у цій підоболонці.

**51.** Використовуючи правила Гунда, знайти основний терм атома, електронна конфігурація незаповненої підоболонки якого: а) ; б) *n**d* 2; в) *n**d* 6; г) *n**f* 10; д) *n f* 4.

**52.**Користуючись правилами Гунда, записати основний терм атома, єдина незаповнена підоболонка якого містить третину від можливого числа електронів, а спін *S* = 1.

**53.**Скориставшись правилами Гунда, знайти число електронів у єдиній незаповненій підоболонці атома, основний терм якого:

а) 3*F*2; б) ; в) .

**54.**Знайти магнітний момент  та можливі значення його проєкцій  атома, який перебуває у станах: а) ;  б) ; в) .

**55.**Визначити спіновий механічний момент атома в стані , якщо максимальне значення проекції магнітного момента при цьому дорівнює чотирьом магнетонам Бора.

**56.**Атом знаходиться у стані . На скільки компонентів розщепиться цей терм у слабкому магнітному полі? Як буде визначатися величина розщеплення  (різниця енергій сусідніх компонентів)?

**57.** Побудувати схему можливих оптичних переходів у слабкому магнітному полі для спектральних ліній: а) ; б) . Знайти величини , де  - частота компонента,  - частота лінії за відсутності магнітного поля,  - ларморівська частота.

**58.**Який ефект Зеємана – нормальній чи аномальний, спостерігається у слабкому магнітному полі для спектральних ліній: а) ; б) .

**3. ЕЛЕМЕНТИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ**

**3.1. Теоретичні відомості**

**Структура ядра**. Ядра атомів складаються з двох видів частинок- *протонів* (*p*) та *нейтронів* (*n*), які називають *нуклонами*. Маса протона mp=1,673∙10–27 кг=1836,153∙me, а маса нейтрона mn=1,675∙10−27 кг=1838,684∙me, де me=9,1∙10-31 кг- маса спокою електрона (*e-*).В *енергетичних одиницях* (добуток маси спокою частинки на квадрат швидкості світла) маси протона та нейтрона дорівнюють mp=938,272 *МеВ* та mn=939,565 *МеВ*, відповідно. Нарешті, в *атомних одиницях маси* (1 а.о.м.=1,660539∙10-27кг=931,50 *МеВ*) маси протона та нейтрона дорівнюють mp=1,007825 а.о.м. та mn=1,008665 а.о.м., відповідно. Вільний протон є стабільною частинкою (час життя не менш ніж 2,9∙1029 років) з додатнім зарядом +*e* і спіном *s*=1/2. Вільний нейтрон є нейтральною частинкою зі спіном *s*=1/2. Нейтрон- нестабільна частинка. Період напіврозпаду нейтрона складає приблизно 12 хвилин. Розпадається нейтрон з утворенням протона, електрона та антинейтрино ():

 (3.1)

*Зарядове число Z* визначає кількість протонів у ядрі та його повний заряд, який дорівнює +*Ze. Z* також визначає порядковий номер хімічного елемента з даним ядром в періодичній таблиці елементів Мєнделеева. *Z* називають також *атомним номером* ядра. *Масове число A* визначає кількість нуклонів (сумарне число протонів і нейтронів) у ядрі. Кількість нейтронів у ядрі *N=A-Z.* Масове число чисельно дорівнює *молярній масі*. Прийняте наступне позначення ядер атомів , де через *X* позначено хімічний символ елемента з даним ядром.

Ядра з однаковими *Z* та різними *A* називають *ізотопами****.*** Наприклад, оксиген має три стабільних ізотопи ,  та*.* Ядра з однаковим масовим числом *A* називають *ізобарами* (наприклад  та ). Ядра з однаковим числом нейтронів називають *ізотонами* (наприклад  та ). Ядра з однаковими *Z* та *A*, але різними періодами напіврозпаду, називають *ізомерами* (наприклад  має два ізомери з періодами напіврозпаду 18 хвилин та 4,4 години).

Більшість ядер можна вважати сферичними з радіусом

, (3.2)

де *R0=*1,23фм (1 фм= 1∙10-15 м- несистемна одиниця довжини в ядерній фізиці). Це означає, що об’єм сферичного ядра зростає пропорційно до *A.* Маса ядра також зростає пропорційно до *A.* Отже густина всіх ядер приблизно однакова.

**Енергія зв’язку ядра.** Енергія зв'язку визначається як різницясуми енергій спокою невзаємодіючих нуклонів, що входять до складу ядра, та енергії спокою ядра:

 (3.3)

Інколи зручніше оперувати не масами протонів  і ядер атомів, а масою  ізотопу гідрогену  та масою  атома з ядром , значення яких представлено в періодичній системі елементів. В цьому випадку нехтуючи енергією зв’язку електронів з ядром порівняно з енергією зв’язку нуклонів у ядрі можна записати

  (3.4)

Величину

 (3.5)

називають *дефектом маси ядра.*

В *крапельній моделі ядра* енергія зв’язку атомних ядер описується формулою Вайцзеккера

, (3.6)

де =15,78 *МеВ*, =17,8 *МеВ*, =0,71 *МеВ*, =23,7 *МеВ*. Значення коефіцієнту  залежить від складу ядра. Так = 0 для ядер з непарним *A*, = +34 *МеВ* для ядер з парними *A* і *Z* та = -34 *МеВ* для ядер з непарними *A* і *Z.*

**Радіоактивний розпад**. Існують стабільні та нестабільні атомні ядра. Нестабільні ядра зазнають спонтанного розпаду з вивільненням однієї або декількох частинок. Явище спонтанного розпаду нестабільних ядер називають *радіоактивністю*. Вихідне ядро називають *материнським*, а утворювані в результаті розпаду- *дочірніми*.

Радіоактивний розпад відбувається за умови вивільненням енергії. Тому маса материнського ядра перевищує суму мас продуктів розпаду.

*Природня радіоактивність* відбувається з ядрами, які існують в природніх умовах. Радіоактивність за участю ядер, отриманих в лабораторії, називають *штучною*. Принципової різниці між двома типами радіоактивності не існує.

Радіоактивний розпад ядра- спонтанний процес. Якщо через  позначити приріст числа ядер , які не розпались, тоді кількість ядер, які розпадаються за дуже малий проміжок часу , виражається як . Вона буде пропорційною кількості  існуючих ядер та проміжку часу :

, (3.7)

де - характерна для кожної радіоактивної речовини стала, яку називають *сталою розпаду*.

Після інтегрування отримаємо *основний закон радіоактивного розпаду*

, (3.8)

де - кількість ядер в момент , а - кількість ядер, які ще не зазнали розпаду в момент .

*Активність розпаду*- це кількість ядер, що розпадаються за одиницю часу, або швидкість розпаду ядер. З урахуванням (3.7) для активності розпаду отримаємо

 (3.9)

Одиницями вимірювання активності є *беккерель* (Бк) або *кюрі* (Кі). 1 Бк=1 розпад/с. 1 Кі=3,7·1010 Бк.

*Питома активність* - це активність одиниці маси радіоактивної речовини.

*Період напіврозпаду* - час, протягом якого розпадається половина від початкової кількості ядер:

 (3.10)

Логарифмуючи вираз (3.10) отримаємо зв'язок періоду напіврозпаду зі сталою розпаду

 (3.11)

**Види радіоактивного розпаду.** До процесів радіоактивного розпаду відносять: 1) *α*-розпад, 2) *β*-розпад, 3)γ-випромінювання ядер, 4) спонтанний поділ важких ядер, 5) протонна радіоактивність.

**α-розпад**. Радіоактивний розпад, який супроводжується радіоактивним випромінювання *α*-променів, що представляють собою потік ядер гелію . Схема розпаду:

, (3.12)

де через  позначено хімічний символ материнського ядра, а через - хімічний символ дочірнього ядра. *α*-розпад зазвичай супроводжується випромінюванням дочірнім ядром *γ*-променів. Прикладом *α*-розпаду є наступна реакція:

 (3.13)

Енергія спокою материнського ядра перевищує суму енергій спокою дочірнього ядра та *α*-частинки. Надлишок виділяється у вигляді кінетичної енергії, яка розподіляється між дочірнім ядром та *α*-частинкою в співвідношенні, обернено пропорційному їх масам. Материнське радіоактивне ядро випромінює декілька груп α-частинок внаслідок того, що дочірнє ядро виникає не тільки в основному, а і в декількох збуджених станах. Якщо дочірнє ядро народжується в одному із збуджених станів, то при переході в основний стан надлишок енергії виділяється шляхом випромінювання *γ*-квантів, протона, нейтрона, електрона або α-частинки. Енергія збудженого дочірнього ядра може бути передана одному з електронів *K-*, *L-* або *M-* оболонки атома (явище *внутрішньої конверсії*).

***β*-розпад.** Існує три різновиди -розпаду:

1. *Електронний* або -розпад супроводжується випромінюванням материнським ядром електрона  та антинейтрино 

 (3.14)

Якщо дочірнє ядро народжується в одному із збуджених станів, його перехід в основний стан супроводжується випромінюванням *γ*-квантів.

Прикладом *електронного* - розпаду може слугувати наступна реакція розпаду:



Енергія електронів, випромінюваних при -розпаді, припадає на деякий інтервал (*0*,*Emax*), де *Emax*- різниця енергії спокою материнського ядра та суми енергій спокою електрона і дочірнього ядра. Частина енергії припадає на антинейтрино.

2. *Позитронний* або - розпад супроводжується випромінюванням материнським ядром позитрона  та нейтрино 

 (3.15)

Прикладом позитронного *β+*- розпаду може слугувати наступна реакція розпаду:



Якщо дочірнє ядро народжується в одному із збуджених станів, його перехід в основний стан супроводжується випромінюванням γ-квантів

1. *Електронне захоплення* або *К-захоплення* полягає в захопленні ядром одного електрона *K*-оболонки (рідше електрона *L*- або *M-*оболонки) свого атома і супроводжується перетворенням одного з протонів ядра в нейтрон і випромінюванням ядром нейтрино 

 (3.16)

При утворенні дочірнього ядра в збудженому стані відбувається його перехід в більш низькі енергетичні стани з випромінюванням γ-квантів. Вакансія захопленого електрона у відповідній оболонці атома заповнюється електронами з більш віддалених оболонок, що супроводжується *характеристичним рентгенівським випромінюванням*. Прикладом електронного захоплення є наступна реакція



**Спонтанний поділ важких ядер** вперше спостерігався в 1940 році на прикладі поділу ядер урана на дві приблизно однакові частини. Пізніше було виявлено, що явище спонтанного поділу відбувається за участю і багатьох інших важких ядер. Якщо ж використовується зовнішнє збудження ядер нейтронами, протонами, дейтронами, *α*-частинками та *γ*-квантами, тоді такі реакції прийнято називати **вимушеним поділом важких ядер**. Прикладом може слугувати стимульована тепловими нейтронами реакція вимушеного поділу ядер урана



За характерними ознаками спонтанний поділ близький до вимушеного поділу. Реакції вимушеного поділу покладені в основу роботи *ядерного реактора*.

**Протонна радіоактивність** – це процес перетворення ядра, при якому ядро випромінює один або два протони. Цей вид радіоактивності вперше спостерігався дослідниками в 1963 році.

**Ядерні реакції.** *Ядерною реакцією* називають процес сильної взаємодії елементарної частинки або атомного ядра з ядром-мішенню, результатом якого є перетворення ядра (або ядер). Ядерні реакції відбуваються при зближенні реагуючих частинок на відстані, які дорівнюють за порядком величини радіусу дії ядерних сил і складають ~10-13 см.

Рівняння ядерної реакції записують або у повному вигляді

, (3.17)

або в скороченому вигляді

, (3.18)

де символом  позначено легку частинку, взаємодія якої з ядром супроводжується утворенням нової легкої частинки  і нового ядра .

Легкими частинками  і  можуть бути нейтрон (), протон (), дейтрон (), *α*-частинка () та *γ*-квант ().

*Енергія реакції* - це кількість енергії, яка виділяється під час ядерної реакції. Визначається через різницю енергій спокою вихідних та кінцевих ядер:

 (3.19)

Якщо ця різниця додатня величина, тоді енергія виділяється і реакція називається *екзотермічною.* Якщо ж різниця мас спокою від’ємна, тоді енергія поглинається і реакцію називають *ендотермічною.*

Мінімальна кінетична енергія налітаючої частинки, при якій стає можливою ядерна реакція, називається *порогом реакції* 

Поріг реакції  можна обчислити за формулою

 (3.20)

Якщо відома енергія реакції , тоді поріг реакції розраховується за формулою

 (3.21)

В нерелятивістському наближенні () вираз для розрахунку порогу реакції спрощується

 (3.22)

В ядерних реакціях завжди виконуються *закони збереження* числа нуклонів (що еквівалентно збереженню масового числа *A*) та електричного заряду.

Ядерні реакції, які викликаються не дуже швидкими частинками, відбуваються в два етапи з утворенням проміжного *компаунд-ядра П*

 (3.23)

У випадку, коли випущена ядром частинка тотожна захопленій, вищезазначений двоетапний процес називають *розсіюванням.* Якщо енергії частинок  і  співпадають, тоді розсіювання називають *пружним*, а інакше *непружним.* Лише коли частинки  і нетотожні відбувається ядерна реакція.

Ядерні реакції, які викликаються швидкими нуклонами та дейтронами, відбуваються без утворення проміжного ядра і називаються *прямими ядерними взаємодіями*. *Реакцією зриву* називають захоплення ядром-мішенню одного з нуклонів налітаючого дейтрона при нецентральному зіткненні. *Реакцією підхвату* називають захоплення налітаючим нуклоном одного з нуклонів ядра-мішені з утворенням дейтрона.

Імовірність ядерної взаємодії характеризують *ефективним перерізом реакції* . Зміст цього поняття полягає в тому, що коли налітаюча частинка потрапляє в межі кола з поперечним перерізом , центр якого співпадає з ядром, тоді вона достовірно викликає ядерну реакцію. За визначенням

, (3.24)

де - кількість налітаючих частинок, які потрапляють за одиницю часу на одиничну поверхню мішені перпендикулярно до неї (*інтенсивність падаючого потоку*), а - число ядерних реакцій, які відбуваються за одиницю часу в розрахунку на одне ядро мішені.

За рахунок ядерних реакцій за участі ядер атомів мішені інтенсивність падаючого потоку частинок зменшується зі зростанням глибини проникнення в мішень за законом

, (3.25)

де - інтенсивність падаючого потоку, - інтенсивність потоку на глибині , відрахованій від опромінюваної поверхні мішені. Ефективні перерізи ядерних реакцій виражають в спеціальних одиницях *барн*: 1 барн= 10-28 м2.

**3.2. Приклади розв’язку задач**

При розв’язку задач слід використовувати актуальні значення атомних мас ядер хімічних елементів, які можна знайти за посиланням

**https://www.nist.gov/pml/atomic-weights-and-isotopic-compositions-relative-atomic-masses**

**Задача 1.** Розрахувати енергію зв’язку нуклонів в ядрі.

***Розв’язок.*** До складу ядра входять два протона (*Z*=2) та два нейтрона (*A*-*Z*=2). Маса ядра  дорівнює *mя*(4,2)=4,002603 а.о.м. або 3728,425 МеВ. Враховуючи масу протона *mp*=938,272 МеВ та нейтрона *mn*=939,565 МеВ для енергії зв’язку отримаємо



В розрахунку на один нуклон енергія зв’язку ядра гелію  дорівнює 6,812 *МеВ*. Для порівняння, енергія зв’язку валентних електронів в атомах дорівнює приблизно 10 *еВ*.

**Задача 2**. Розрахувати енергію зв’язку нейтрона в ядрі .

***Розв’язок*.** Енергію зв’язку нейтрона дорівнює сумі енергій спокою ядра  (*mя*(3,2)=3,016030 а.о.м.)і нейтрона  (=1,008665 а.о.м.) мінус енергія спокою ядра  (*mя*(4,2)=4,002603 а.о.м.)



**Задача 3**. Оцінити розмір атомного ядра .

***Розв’язок.*** Скористаємось емпіричною залежністю радіуса ядра від числа нуклонів (3.2) і отримаємо



**Задача 4**. Оцінити густину ядерної матерії в ядрі 

***Розв’язок.*** Маса ядра  дорівнює 4,002603 а.о.м. або 4,002603∙1,660539∙10-27кг=6,646∙10-27кг. Вважаючи ядро сферичним для об’єму ядра отримуємо



Остаточно для густини ядерної матерії отримаємо



**Задача 5**. Скориставшись формулою Вайцзеккера розрахувати енергію відділення нейтрона з ядра .

***Розв’язок.*** Енергія відділення нейтрона з ядраіззарядовим *Z* та масовим *A* числами



Енергію спокою ядра ззарядовим *Z* та масовим *A* числами можна представити як



Після підстановки для енергії відділення нейтрона отримаємо



Скориставшись формулою Вайцзеккера розрахуємо енергію зв’язку ядра 



та енергію зв’язку ядра 



Остаточно для енергії відділення нейтрона від ядра  отримаємо



**Задача 6.**

У скільки разів число розпадів ядер радіоактивного йоду  протягом першої доби більше за число розпадів протягом другої доби? Період напіврозпаду ізотопу  дорівнює =193 години.

***Розв’язок.*** З урахуванням основного закону радіоактивного розпаду отримаємо, що наприкінці першої доби кількість нерозкладених ядер  буде дорівнювати , а наприкінці другої доби- . Таким чином, кількість розпадів ядер  протягом першої доби буде дорівнювати , а протягом другої доби- . Враховуючи зв’язок періоду напіврозпаду  зі сталою розпаду , отримаємо



**Задача 7.** Що більше- середній час життя радіоактивного ядра чи період напіврозпаду? У скільки разів?

***Розв’язок.*** Кількість ядер , які розпадаються за проміжок часу від до , визначається виразом



Приймаючи проміжок часу  дуже малим(), можна з високою точністю вважати, що  - це кількість ядер, час життя кожного з яких . Тоді  - це сума часів життя ядер, кількість яких дорівнює . Щоб знайти повну суму часів життя всіх  ядер, які існували до початку розпаду, потрібно підсумувати всі  для всіх можливих значень часів життя від  до . Ця сума виражається у вигляді інтегралу . Поділивши повну суму часів життя ядер на повну кількість  всіх ядер отримаємо згідно з визначенням *середній час життя*  радіоактивного ядра

.

Підставимо у вираз для середнього часу життя значення , яке визначається виразом (3.8), і отримаємо після інтегрування



З основного закону радіоактивного розпаду (3.8) випливає, що - це проміжок часу, протягом якого початкова концентрація ядер зменшується в *e*=2,71828 разів. З виразу (3.11) випливає, що період напіврозпаду  та середній час життя повязані співвідношенням



Отже середній час життя  радіоактивного ядра буде більшим за період напіврозпаду  в 1/*ln*2≈1,443 рази.

**Задача 8.** Чому дорівнює імовірність *P* того, що радіоактивний атом розпадеться за час *t*, який дорівнює середньому часу життяатома?

***Розв’язок.*** Згідно із законом радіоактивного розпаду кількість радіоактивних атомів, які не зазнали розпаду за час , буде дорівнювати , де - початкова кількість атомів, *e*=2,71828. Отже кількість атомів, що зазнала розпаду за час , дорівнює . Тоді імовірність *P* розпаду за час  знайдемо як  або 63,2%.

**Задача 9.** Активність та період напіврозпаду препарату  дорівнюють відповідно *I*= 2 мкКі та =14,5 діб. Яка маса даного препарату?

***Розв’язок.*** Активність препарату, що містить *N* ядер



Стала розпаду та період напіврозпаду  пов’язані співвідношенням



Кількість ядер у зразку масою *m* можна виразити через масове число *A*

*,*

де *Na*- стала Авогадро.

Отже для активності розпаду препарату отримаємо

.

Виразимо масу *m* і підставивши відомі величини отримаємо



**Задача 10.** Радіоактивний натрій  розпадається, випромінюючи -частинки. Період напіврозпаду натрію складає  = 14,8 год. Визначити кількість атомів, що розпалися за 10 годин в 10-6 кг радіоактивного препарату.

***Розв’язок.*** Число атомів, що розпалися за час *t* дорівнює

,

де – початкова кількість атомів;  – кількість атомів на момент *t.*

Вищенаведену формулу можна привести до вигляду

,

де  – стала розпаду.

Враховуючи, що , отримаємо



Оскільки в одному молі  міститься  атомів, то в даній масі препарату міститься атомів (*m –* маса радіоактивного препарату; *M* – молярна маса натрію ).

Остаточно одержимо  .

.

**Задача 11.** Активність *I* ізотопу вуглецю  в старовинних дерев’яних предметах складає 4/5 активності цього ізотопу у свіжозрубаних деревах. Період піврозпаду ізотопу  становить =5570 років. Визначити вік старовинних предметів.

***Розв’язок*.** За законом радіоактивного розпаду

,

тоді активність речовини дорівнює

,

де – початкова кількість атомів радіоактивної речовини; *N* – число радіоактивних атомів на момент часу *t*; – стала розпаду.

У початковий момент часу активність

,

тому ,

де , а – період піврозпаду.

Тоді  ,

де *t* – вік старовинних предметів.

Остаточно одержимо



**Задача 12.** Ідентифікувати частинку  та розрахувати енергію реакції  для ядерної реакції , де - це ядро 

***Розв’язок.*** Масові числа *А*=35 та *А*=32 належать ізотопам  та , відповідно. Скористаємося законами збереження числа нуклонів та електричного заряду. Позначивши для невідомої частинки - зарядове число, - масове число можна записати





Отже для невідомої частинки  і . Значить невідомою частинкою є протон *.*

Розрахуємо енергію реакції .

Маса ядра  *mя*(35,17)=34,968853 а.о.м., маса ядра   *mя*(32,16)=31,972072 а.о.м., маса протона *=*1,007825 а.о.м., маса *α*-частинки *mя*(4,2) = 4,002603 а.о.м.

Початкова маса взаємодіючих частинок

=34,968853 а.о.м.+1,007825 а.о.м.=35,976678 а.о.м.

Кінцева маса продуктів реакції

=31,972072 а.о.м.+4,002603 а.о.м.=35,974675 а.о.м.

Різниця мас

=35,976678 а.о.м.-35,974675 а.о.м.=0,002003 а.о.м.

Енергія реакції

 = 0,002003 а.о.м.×931,5 *МеВ*/а.о.м.=1,866 *МеВ*>0- реакція екзотермічна.

**Задача 13**. Знайти енергію ядерної реакції



вперше проведеної Кокрофтом і Уолтоном за участю штучно прискорених частинок. Якою буде дана реакція- екзотермічною, чи ендотермічною?

***Розв’язок.*** Маса протона *=*1,007825 а.о.м., маса ядра  *mя*(7,3)=7,016004 а.о.м., маса ядра  *mя*(4,2) =4,002603 а.о.м.

Початкова маса взаємодіючих частинок

=1,007825 а.о.м.+7,016004 а.о.м.=8,023829 а.о.м.

Кінцева маса продуктів реакції

=2×4,002603 а.о.м.=8,005206 а.о.м.

Різниця мас

=8,023829 а.о.м.-8,005206 а.о.м.=0,018623 а.о.м.

Енергія реакції

= 0,018623 а.о.м.×931,5 *МеВ*/а.о.м.=17,35 *МеВ*

Оскільки *Q*>0, то дана реакція екзотермічна.

**Задача 14.** Чи можливі такі ядерні реакції

1. ;

2. 

за участю *α*-частинок з кінетичною енергією *T*=10 МеВ?

***Розв’язок.*** Масові числа *А*=7, 10, 12 та 14 належать ізотопам , ,  та , відповідно. Маса α-частинки *mя*(4,2)=4,002603 а.о.м., маса нейтрона =1,008665 а.о.м., маса дейтрона =2,014102 а.о.м., маса ядра  *mя*(7,3)=7,016004 а.о.м., маса ядра  *mя*(10,5)*=*10,012939 а.о.м., маса ядра  *mя*(12,6)*=*12,000000 а.о.м., маса ядра  *mя*(14,7)*=*14,003074 а.о.м.

Розрахуємо енергії реакцій.

1. Початкова маса взаємодіючих частинок

=4,002603 а.о.м.+7,016004 а.о.м.=11,018607 а.о.м.

Кінцева маса продуктів реакції

= 10,012939 а.о.м.+1,008665 а.о.м.=11,021604 а.о.м.

Різниця мас

=11,018607 а.о.м.-11,021604 а.о.м.=-0,002997 а.о.м.

Енергія реакції

= -0,002997 а.о.м.×931,5 *МеВ*/а.о.м.=-2,792 *МеВ*

*МеВ* і , а отже порогова енергія реакції



Реакція можлива, оскільки *T*=10 *МеВ*>*Tпор.*

2.=4,002603 а.о.м.+12,000000 а.о.м.=16,002603 а.о.м.

= 14,003074 а.о.м.+2,014102 а.о.м.=16,017176 а.о.м.

=-0,014573 а.о.м.

= -0,014573 а.о.м.×931,5 *МеВ*/а.о.м.=-13,575 *МеВ*

*МеВ* і , а отже порогова енергія реакції



Оскільки *T*<*Tпор,* то реакція неможлива.

**Задача 15.** Яку мінімальну кінетичну енергію повинен мати нейтрон щоб відбулась ядерна реакція ?

***Розв’язок.*** Ядерна реакція може бути записана в розгорноту вигляді як



Маса нейтрона =1,008665 а.о.м., маса ядра  *mя*(16,8)=15,994915 а.о.м., маса ядра  *mя*(4,2)=4,002603 а.о.м., маса ядра  *mя*(13,6)=13,003354 а.о.м.

Початкова маса взаємодіючих частинок

=1,008665 а.о.м.+15,994915 а.о.м.=17,00358 а.о.м.

Кінцева маса продуктів реакції

=4,002603 а.о.м.+13,003354 а.о.м.=17,005957 а.о.м.

Різниця мас

=17,00358 а.о.м.- 17,005957 а.о.м.=-0,002377 а.о.м.

Енергія реакції

= -0,002377 а.о.м.×931,5 *МеВ*/а.о.м.=-2,214 *МеВ*- реакція ендотермічна.

Мінімальна кінетична енергія нейтрона, при якій можлива дана ядерна реакція, дорівнює порогу реакції. Оскільки  , тоді



**3.3. Задачі для самостійного розв’язку**

1. Визначити енергію зв’язку , що припадає на один нуклон, для ядра:

а) , б), в), г), д), є), ж), з). Побудувати графічну залежність *Eзв*(*A,Z*)/*A* від масового числа *A*.

2. Розрахувати енергію зв’язку нейтрона в ядрі.

3. Розрахувати енергію зв’язку нейтрона в ядрі .

4. Розрахувати енергію зв’язку нейтрона в ядрі .

5. Скориставшись формулою Вайцзеккера розрахувати енергію відділення нейтрона з ядра .

6. Сонце має масу  кг яка розподілена із середньою густиною  кг/м3. Яким був би діаметр Сонця, якби воно мало ту саму масу, але густину, рівну густині ядерної матерії?

7. Яка частина  атомів радіоактивної речовини залишиться не зазнавши розпаду за проміжок часу *t*, що дорівнює двом середнім часам життя  атома?

8. Яка частина  атомів радіоактивної речовини розпадеться за час *t*, що дорівнює п’яти періодам напіврозпаду ?

9. Чому дорівнює імовірність *P* того, що радіоактивний атом розпадеться за час *t*, який дорівнює періоду напіврозпаду атома?

10. Визначити енергію *W*, яка виділяється 1 мг препарату  за час, що дорівнює середньому часу життя, якщо в одному акті розпаду виділяється енергія 5,4 МеВ.

11. Скільки ядер урану  розпалося на протязі року, якщо початкова маса урану 1 г? Період напіврозпаду урану   років.

12. Період напіврозпаду радіоактивного фосфору  дорівнює =30 хвилин. Чому дорівнює постійна розпаду цього елемента?

13. Визначити період піврозпаду радону, якщо за 1 добу з 1 млн. атомів розпадається 175 000 атомів.

14. Для діагностики у кров людини ввели незначну кількість розчину, що містить  з активністю *I* = 2,0.10 Бк. Активність 1 см3 крові через *t* = 5 год становила  = 0,267 Бк/см3. Період напіврозпаду даного радіоізотопу становить  = 15 год. Знайти об’єм крові людини.

15. Питома активність препарату, що містить радіоактивний  і неактивний , становить  Бк/г. Період напіврозпаду  становить 71,3 доби. Знайти відношення маси активного кобальту в цьому препараті до маси препарату.

16. Радіоізотоп , період напіврозпаду якого = 14,3 доби, утворюється в ядерному реакторі зі швидкістю *q* = 2,7.109 ядер/с. Через який час *t* після початку утворення цього радіоізотопу його активність становитиме *I* = 1,0.109 Бк?

17. В 1 мл морської води міститься 10-15 г радону  (період напіврозпаду радону =3,825 діб). Яка кількість води має активність рівну *I*=10 мКі?

18. В скільки разів зменшиться кількість ядер радіоактивного цезію (період напіврозпаду 27 років) за 10 років?

19. В джерелі мінеральної води активність радону (період напіврозпаду радону =3,825 діб) становить 1000 Бк на 1 л. Яка кількість атомів радону потрапляє в організм людини зі склянкою води об’ємом 0,2 л?

20. Через який проміжок часу після радіоактивного зараження місцевості стронцієм (період напіврозпаду = 28 років) можна буде використовувати землі для вирощування різноманітних культур, якщо розрахунки показують, що кількість радіоактивного препарату повинна зменшитись в 100 разів?

21. В ампулі знаходиться радіоактивний йод  (період напіврозпаду =8,05 діб) активністю 100 мкКі. Чому буде дорівнювати активність препарату через добу?

22. Внаслідок радіоактивного розпаду  перетворюється в . Скільки *α*- та *β*-розпадів має місце в цьому випадку?

23. Внаслідок захоплення нейтрона ядром атома азоту  утворюється невідомий елемент і *α*-частинка. Написати реакцію і визначити утворений елемент.

24. З’ясувати якою буде реакція  ендотермічною чи екзотермічною?

25. Визначити пороги реакцій та .

26. Ідентифікувати частинку *X* та розрахувати енергію реакції *Q* для випадків:

а)  ;

б) ;

в) ;

г) ;

д).

27. Розрахувати енергії та пороги наступних реакцій:

а) ; б); в) ; г); д) .

## Відповіді до задач

**Оптика**

* 1. Див.рис.1.12.



Рис.1.12

* 1. .
  2. .
  3. .
  4. .
  5. .
  6. .
  7. .
  8. .
  9. .
  10. .
  11. а) ; б) .
  12. , , .
  13. В 2,25 рази.
  14. .
  15. , тобто інтенсивність буде пульсувати з періодом .
  16. ; а) 0; б) 72°; в) π; г) 2π; д) 432°.
  17. ; а) 0; б) 1/6; в) 0,25; г) 0,5; д) 1; е) 1,5.
  18. а) 625, 500 та 417 нм; б) 714, 556 та 455 нм.
  19. .
  20. .
  21. .
  22. Світло.
  23. .
  24. .
  25. .
  26. .
  27. .
  28. .
  29. .
  30. Темне.
  31. .
  32. .
  33. ; а) ; б) .
  34. .
  35. .
  36. , , .
  37. .
  38. .
  39. Ні.
  40. .
  41. .
  42. .
  43. .
  44. , .
  45. .
  46. ; α = 26°, 60°, 84°, 107°, 134°.
  47. .
  48. .
  49. .
  50. .
  51. .
  52. , .
  53. .
  54. .
  55. .
  56. .
  57. 
  58. ; .
  59. .
  60. .
  61. ; , .
  62. ; .
  63. .
  64. ; .
  65. .
  66. ; а)  (інфрачервона область); б)  (видима область); в)  (рентгенівські промені).
  67. 
  68. .
  69. .
  70. .
  71. .
  72. .
  73. .
  74. .
  75. а) ; б) .
  76. .
  77. .
  78. .
  79. .
  80. Так.
  81. .
  82. .
  83. ; , .
  84. .
  85. .
  86. , .
  87. 

**Елементи квантової механіки та атомної фізики**

**1.**(*c*. ).

**2.** а) -1; б) ; в) 0.

**3**. .

**5**. .

**8.**а) 1; б) .

**9.**а) ,  ‑ уявне б) ,  ‑ дійсне; в) ,  ‑ будь-яке; г) ,  ‑ ціле; д) , ,  ‑ ціле.

**10.**, де *рі*– дійсні, .

**11**. , , .

**12**. а) ; б) ; в) 0.

**13**. а) 0; б) ; в) .

**15**. , , , . **16.**.

**17**. а) м; б) м.

**18**. .

**19.**м.

**20**. м/с.

**21**. м.

**23**. .

**24**. , . **25**. , еВ, еВ.

**26**. еВ.

**27**. м.

**28**. .

**29**. еВ.

**30**. м, .

**31**. Ні.

**33**. а) ; б) .

**34**. а) 0,61; б) 0,195.

**35**. ; .

**36**. , м-1.

**37**. .

**38**. 0,25.

**39**. не змінюється.

**40**. , .

**41**. , .

**42** , .

**43**. а) , ; б) , .

**44.** а) ; б) ; в) .

**45.** а) , ; б) , , , ,; в) ,,,, , ; г) ,, , , ,.

**46.** а) , , ; б) , , , , .

**47.** а) ;б) три терми .

**48.** .

**49.** .

**50.** .

**51.**  а) ; б) ; в) ; г) .

**52.** .

**53.** а) *n**d* 2; б) ; в) .

**54.** а) , ; б) ; в) .

**55.** .

**56.** .

**57.** а) ;

б) .

**58.** а) норм.; б) аном.

**Елементи ядерної фізики**

**1.** а) 6,93 *МеВ*/ нуклон; б) 8,03 *МеВ*/ нуклон; в) 8,45 *МеВ*/ нуклон; г) 8,79 *МеВ/* нуклон; д) 8,76 *МеВ*/ нуклон; є) 8,39 *МеВ*/ нуклон; ж) 7,87 *МеВ*/ нуклон; з) 7,59 *МеВ*/ нуклон

**2.** 7,25 *МеВ*

**3.** 8,18 *МеВ*

**4.** 10,83 *МеВ*

**5.** 13,3 *МеВ*

**6.** ≈26,3 км

**7.** =*e-2*≈0,135

**8.** =0,9685

**9.** *Р*=0,5

**10.** *W≈*9,8 1018 *МеВ*

**11.** 

**12.** с-1

**13.** ≈3,3.105 с

**14.** = 6 л

**15.** 0,19%

**16.** = 9,5 діб

**17.** 300 м3

**18.**  зменшиться в 1,3 рази

**19.**  

**20.** 186 років

**21.** 92 мкКі

**22.** 8 *α*-розпадів і 6 *β*-розпадів

**23.** 

**24.** ендотермічна

**25.**  та 

**26.** а) нейтрон; б) протон; в) *α*-частинка; г) нейтрон; д) протон.

**27.** а) *Q*=+5,494 *МеВ*, екзотермічна; б) *Q*=+3,27 *МеВ*, екзотермічна; в) *Q*=-1,643 *МеВ* 1,88 *МеВ*; г) *Q*=+1,587 *МеВ*, екзотермічна; д) *Q*=-17,34 *МеВ* =34,68 *МеВ*.

**ДОДАТКИ**

## 1. ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ

|  |  |
| --- | --- |
| Швидкість світла у вакуумі  Елементарний заряд  Стала Стефана-Больцмана  Стала Віна  Стала Планка  Маса електрона  Маса протона | *с* = 299 792 458 м/с  *e* = 1,602⋅10-19 Кл  σ = 5,6703⋅10-8 Вт м-2К-4  *b*W = 2,898⋅10-3 м К.  *h* = 6.626 10−34 Дж c  1.054 10−34 Дж c |

## 2. ОДИНИЦІ СВІТЛОВИХ ВЕЛИЧИН

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Величина* | *Одиниця* | |
| *назва* | *позначення* |
| Сила світла | кандела | кд |
| Світловий потік | люмен | лм |
| Світлова енергія | люмен-секунда | лм⋅с |
| Освітленість | люкс | лк |
| Світимість | люмен на квадратний метр | лм/м2 |
| Яскравість | кандела на квадратний метр | кд/м2 |

## 3. РОБОТА ВИХОДУ ЕЛЕКТРОНУ З МЕТАЛІВ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Метал | *А*, еВ | Метал | *А*, еВ |
| Алюміній | 3,74 | Мідь | 4,47 |
| Барій | 2,29 | Натрій | 2,27 |
| Вольфрам | 4,50 | Нікель | 4,84 |
| Залізо | 4,36 | Срібло | 4,28 |
| Калій | 2,15 | Цезій | 1,89 |
| Літій | 2,39 | Цинк | 3,74 |

## 4. ХВИЛЬОВІ ФУНКЦІЇ ЕЛЕКТРОНА У КУЛОНІВСЬКОМ ПОЛІ ДЛЯ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Квантові числа | | |  |
| *n* | *l* | *ml* |
| 1 | 0 | 0 |  |
| 2 | 0 | 0 |  |
| 2 | 1 | 0 |  |
| 2 | 1 | +1 |  |
| 2 | 1 | -1 |  |
| 3 | 0 | 0 |  |
| 3 | 1 | 0 |  |
| 3 | 1 | +1 |  |
| 3 | 1 | -1 |  |
| 3 | 2 | 0 |  |
| 3 | 2 | +1 |  |
| 3 | 2 | -1 |  |
| 3 | 2 | +2 |  |
| 3 | 2 | -2 |  |

**ЛІТЕРАТУРА**

**Основна**

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учебное пособие. М., 1988.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М., 1985.
3. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике: Учебное пособие. – М., 1983.
4. Макара В.А., Оглобля В.І. Плющай І.В., Цареградська Т.Л. Навчальний посібник „Загальна фізика для біологів. Збірник задач”, ВПЦ "Київський університет", 2011.
5. Савченко Н.Е. Решение задач по физике. Справочное пособие. – Минск, 1988.
6. Ландау Л.Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М. : ГИФМЛ "Наука", 1963. – Т.3 – 704 с.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики / Д.И. Блохинцев – М. : ГРФМЛ "Наука", 1976. – 670 с.
8. Cавельев И.В. Основы теоретической физики / И.В. Савельев – М. : ГРФМЛ "Наука", 1977. – Т.2 – 352 с.
9. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Квантова механіка, термодинаміка і статистична фізика. Т.2./ Федорченко А. М. – Київ: Вища школа, 1993. – 378 с.
10. Вакарчук І.О. Квантова механіка / І.О. Вакарчук. – Львів: Вид-во ЛДУ, 1998. – 617 с.
11. Давыдов А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. – М.: ГРФМЛ "Наука", 1973. – 704 с.
12. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Ч.1./ Д.В. Сивухин . – М.: "Наука", 1984. – 416 с.
13. Шпольский Э.В. Атомная физика / Э.В.Шпольский – М.: "Наука", 1984. – Т. 1, 2.
14. Степанов Н.Ф. Квантовая механика и квантовая химия / Н.Ф. Степанов – М. Изд-во "Мир", 2001. – 519с.

**Додаткова**

1. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики / Макс Джеммер. ; пер. с англ. В.Н. Покровского, под ред. Л.И. Пономарева – М: ГРФМЛ "Наука", 1985.– 380 с.
2. Де Бройль Л. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация квантовой механики / Л. Де Бройль. – М.: "Мир", 1986. – 340с.
3. Алексеев И.С. Концепция дополнительности / И.С. Алексеев, М.А. – М. : Изд-во "Наука", 1978. – 276 с.
4. Блохинцев Д.И. Принципиальные вопросы квантовой механики / Д.И. Блохинцев – М. : ГРФМЛ "Наука", 1987. – 152 с.
5. Гольдин Л.Л. Квантовая физика. Вводный курс. / Л.Л. Гольдин, Г.И. Новикова – Ижевск : АНО ИКС, 2002. – 490 с.
6. Карлов Н.В. Начальные главы квантовой механики / Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 360 с.
7. Мартинсон Л.К. Квантовая физика / Л.К. Мартинсон, Е.В. Смирнов. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 496 с.
8. Барабанов А.Л. Квантовая механика / А.Л. Барабанов. – М. Изд-во МФТИ, 2005. – Ч. 1,2.

**Навчальне видання**

***Микола Олександрович Боровий***

***Олег Ярославович Оліх***

***Артем Олександрович Подолян***

***Ірина Володимирівна Овсієнко***

***Тетяна Леонідівна Цареградська***

***Віктор Васильович Козаченко***

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ.**

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ.**

**Частина ІІ1. Механіка.**

**Молекулярна фізика та термодинаміка.**

*Збірник задач*

*(українською мовою)*

*Друкується в авторській редакції*

Підписано до друку

Формат 60х84/16.Папір офсетний

Ум.-друк. арк. . Наклад 300 прим. Зам. №

1. Загалом, при більш строгому розв’язку прирівнювати до нуля можна лише коефіцієнт *А*3. Проте і в цьому випадку вираз для коефіцієнта прозорості бар’єру буде мати такий самий вигляд, як і в нашому. [↑](#footnote-ref-1)