

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Особенности движения частиц в электромагнитной волне

Б.М. Болотовский, А.В. Серов

Рассматривается поведение заряженной частицы в поле монохроматической электромагнитной волны. Движение частицы определяется не только полем волны, но и начальными условиями. Траектории частиц вычисляются как с помощью точного решения, так и по теории возмущений, причем параметром разложения является величина $\eta = eE/(mc\omega)$ — отношение энергии, которая может быть передана частице полем E на длине волны, к энергии покоя частицы. Рассмотрены два типа электромагнитных волн: однородные волны (у которых амплитуда не зависит от координат) и неоднородные волны (у которых амплитуда зависит от координат). Исследовано движение частиц для двух различных начальных условий: частица в начальный момент либо находится в покое, либо движется с заданной скоростью. Показано, что в поле волны имеет место не только колебательное движение заряженной частицы, но и систематический дрейф. В неоднородной волне, кроме того, на частицу действуют пондеромоторные силы, вызывающие ее ускорение.

PACS numbers: 03.50. + p, 41.60.Cr, 41.75. – i

Содержание

1. Введение (667).
2. Точное решение (668).
3. Приближенные методы (671).
4. Движение в плоской волне (672).
5. Неоднородные электромагнитные волны (675).
6. Движение в поперечно-электрическом поле (676).
7. Заключение (678).

Список литературы (678).

1. Введение

Взаимодействие различных электромагнитных полей с заряженными частицами лежит в основе многих физических явлений. Движение частиц в статических полях достаточно хорошо изучено и излагается практически в каждом руководстве по электродинамике. Задачи о движении частиц в переменных полях занимают в учебной литературе гораздо меньше места, хотя представляют не меньший интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Особый интерес представляет задача о движении заряженной частицы в поле электромагнитной волны и ее приложения к физике ускорителей, к теории лазеров на свободных электронах и к ряду других областей.

Б.М. Болотовский, А.В. Серов. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (095) 132-62-35; 334-07-87. Факс (095) 135-85-33
E-mail: bolot@lpi.ru; serov@x4u.lebedev.ru

Статья поступила 23 октября 2002 г.,
после доработки 26 марта 2003 г.

Задача о движении электрона в поле плоской электромагнитной волны имеет аналитическое решение. В 1935 г. Д.М. Волковым было получено строгое решение уравнения Дирака для движения электрона в поле плоской электромагнитной волны [1]. Классический аналог этого решения приведен в книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица *Теория поля* [2]. В то же время некоторые особенности поведения заряженных частиц в поле электромагнитной волны недостаточно отражены в литературе. Кроме того, решения из [1, 2] неприменимы, если рассматривается задача о движении заряженной частицы в поле неоднородной волны, такой, например, как поле, образованное двумя плоскими волнами, распространяющимися под углом друг к другу, или же поле собственной волны в волноводе. Причина заключается в том, что уравнение движения частицы в поле волны является нелинейным. Поэтому если внешнее поле, действующее на частицу, представляет собой сумму нескольких плоских волн, то решение уравнения движения не может быть представлено как сумма решений, полученных для каждой из волн в отдельности. В этом случае применение приближенных методов, таких, как теория возмущений, является вполне оправданным. Отметим здесь, что применение теории возмущений может оказаться полезным даже для случая одной частицы в поле одной плоской волны.

Некоторые качественные особенности движения частицы в поле волны являются достаточно известными [2]. Например, в поле волны, поляризованной по кругу, частица движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна направлению распространения волны. В поле однородной линейно поляризованной волны заряд движется по 8-образной кривой. Продольная ось этой восьмерки направлена вдоль вектора напряженности электрического поля волны, а поперечная — вдоль

направления распространения волны. В направлении электрического поля частица колеблется с частотой волны ω , а в направлении распространения — с двойной частотой 2ω .

Такое поведение частиц можно понять на основе простых качественных соображений. Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, у которой электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{H} описываются соответственно выражениями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (1)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 — амплитуды электрического и магнитного полей, \mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота волны. В такой волне векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} образуют правую тройку. Пусть в поле рассматриваемой плоской волны находится заряженная частица. Величину заряда обозначим через e . Уравнение движения этой частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (2)$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m\mathbf{v}\gamma, \quad (3)$$

m — масса покоя частицы, \mathbf{v} — ее скорость, $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ — приведенная энергия.

Введем декартову прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось x была направлена по электрическому полю \mathbf{E} , ось y — по магнитному полю \mathbf{H} , ось z — по волновому вектору \mathbf{k} . В этой системе уравнение движения можно расписать по компонентам:

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x - \frac{e}{c}v_zH_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = \frac{e}{c}v_xH_y. \quad (4)$$

Из этой системы, в частности, видно, что проекция импульса частицы на вектор магнитного поля есть величина постоянная. Предположим, что в начальный момент времени частица покоится в начале системы координат. Из уравнений (4) следует, что траектория частицы лежит в плоскости, содержащей векторы \mathbf{E} и \mathbf{k} . Рассмотрим сначала уравнение для проекции импульса на направление вектора электрического поля. Правая часть этого уравнения меняется с частотой волны ω . Поэтому величина p_x меняется с той же частотой. Если, как мы предположили, заряд первоначально покоился, то и скорость его будет меняться с частотой ω .

Рассмотрим теперь уравнение для p_z . Правая часть этого уравнения представляет собой произведение двух функций, каждая из которых меняется с частотой волны. Таким образом, правая часть уравнения для p_z содержит периодическую функцию с частотой 2ω . Поэтому компонента p_z также содержит слагаемое, которое меняется с частотой 2ω . Нетрудно видеть, что в этом случае частица описывает в плоскости xz кривую, напоминающую восьмерку.

Следует иметь в виду, что решения уравнений для p_x , p_y и p_z могут содержать и постоянные члены, не зависящие от времени, что соответствует систематическому перемещению частицы (дрейфу) в поле плоской электромагнитной волны. Решения, приведенные в [2] (см. задачи к параграфу 48), получены для системы отсчета, в которой частица в среднем покоится. При этом вопрос о дрейфе частицы как бы снимается,

поскольку параметры дрейфа становятся параметрами, определяющими движение системы отсчета. Однако в ряде случаев физический интерес представляет движение частиц в лабораторной системе координат. В этих случаях параметры, определяющие дрейф, входят явным образом в выражения для траектории частицы. Ниже будет рассматриваться движение частицы под действием поля волны именно в лабораторной системе отсчета. Разумеется, траектория частицы в поле волны определяется начальными условиями, т.е. положением и скоростью частицы, а также значением фазы волны в той точке, где находится частица в начальный момент времени. Например, если частица инжектируется в поле волны, то необходимо задать координаты точки инжекции, начальную скорость частицы и начальную фазу волны в точке инжекции. В дальнейшем мы рассмотрим эту задачу при различных начальных условиях.

Как было показано в работе [4], где рассматривался случай движения под действием только переменного электрического поля, частица наряду с колебаниями совершает дрейф, скорость и направление которого зависят от начальных условий. В работе [4] не учитывалось воздействие магнитного поля волны, что является оправданным для случая, когда скорость частицы мала по сравнению со скоростью света. Ниже мы рассмотрим особенности движения в поле электромагнитной волны с учетом магнитного поля. При этом будет показано, что систематический дрейф в направлении электрического поля сохраняется, и к нему добавляется также систематический дрейф в направлении распространения волны. Причем дрейф в направлении вектора напряженности электрического поля волны качественно отличается от дрейфа в направлении распространения волны.

Поле плоской электромагнитной волны обладает тем свойством, что в любой точке плоскости, перпендикулярной волновому вектору, поле имеет одно и то же значение. Поэтому такую волну называют иногда плоской однородной электромагнитной волной. Величина поля в такой волне определяется только фазой $\varphi = kz - \omega t$ (напомним, что мы рассматриваем волну, распространяющуюся вдоль оси z) и не зависит от поперечных координат x и y . В том случае, когда возникает зависимость величины поля от x и y , появляются дополнительные систематические силы, действующие на частицу. Ниже эти силы будут также рассмотрены на нескольких простых примерах.

2. Точное решение

Рассмотрим частицу с зарядом e во внешнем поле, которое описывается вектор-потенциалом \mathbf{A} . Пусть $p_{0\mu}$ — произвольный четырехмерный вектор,

$$p_{0\mu} = (p_{00}, p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}).$$

Компоненты этого вектора удовлетворяют соотношению

$$p_{00}^2 - p_{0x}^2 - p_{0y}^2 - p_{0z}^2 = m^2c^2.$$

Очевидно, в этом случае можно считать компоненты вектора $p_{0\mu}$ компонентами четырехмерного импульса частицы с массой m . При этом нулевая компонента пропорциональна энергии частицы. Иногда говорят, что вектор $p_{0\mu}$ задан на массовой поверхности. Решение уравнения (2) следующим образом выражается через

компоненты векторов $p_{0\mu}$ и A :

$$p_\mu = p_{0\mu} - \frac{e}{c} A_\mu + k_\mu \left(\frac{e}{c} \frac{pA}{kp} - \frac{e^2}{c^2} \frac{A^2}{2kp} \right), \quad (5)$$

где k_μ — четырехмерный вектор с компонентами $(\omega/c, k_x, k_y, k_z)$, а $A_\mu = (A_0, A_x, A_y, A_z)$. Предполагается, что компоненты A_μ вектор-потенциала \mathbf{A} зависят от аргумента

$$\varphi = k_\mu x_\mu = k_0 x_0 - k_x x - k_y y - k_z z.$$

Этот аргумент определяет значение фазы плоской волны. Фаза сохраняет постоянное значение на плоскости, перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Выражения pA и kp представляют собой скалярные произведения четырехмерных векторов:

$$pA = p_0 A_0 - p_x A_x - p_y A_y - p_z A_z,$$

$$kp = k_0 p_0 - k_x p_x - k_y p_y - k_z p_z.$$

В такой записи решение приведено в работе [3]. Формула (5) дает значение кинетического импульса частицы в поле A_μ . Компоненты вектора $p_{0\mu}$ можно рассматривать как некоторые константы, которые можно выбрать подходящим образом для того, чтобы удовлетворить начальным условиям. В то же время вектор $p_{0\mu}$ определяет значение импульса p_μ в те моменты времени, когда $A_\mu = 0$.

Выражения для решения (5) упрощаются в том случае, когда волна распространяется вдоль оси z , а вектор-потенциал \mathbf{A} имеет одну отличную от нуля составляющую A_x . В этом случае вектор электрического поля волны направлен по оси x , вектор магнитного поля волны — по оси y , и решение (5) принимает вид

$$p_x = p_{0x} - \frac{e}{c} A_x, \quad (6)$$

$$p_y = p_{0y}, \quad (7)$$

$$p_z = p_{0z} + k_z \left(-\frac{e}{c} \frac{cp_{0x}A_x}{\omega(p_{00} - p_{0z})} + \frac{e^2}{c^2} \frac{cA_x^2}{2\omega(p_{00} - p_{0z})} \right), \quad (8)$$

$$p_0 = p_{00} + k_0 \left(-\frac{e}{c} \frac{cp_{0x}A_x}{\omega(p_{00} - p_{0z})} - \frac{e^2}{c^2} \frac{cA_x^2}{2\omega(p_{00} - p_{0z})} \right). \quad (9)$$

Рассматривая решения для p_0 и p_z , видим, что разность между значениями p_0 и p_z есть постоянная величина:

$$p_0 - p_z = p_{00} - p_{0z} = \text{const}. \quad (10)$$

Формулы (6)–(10) позволяют сделать качественные заключения об особенностях движения заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны. Зададим вектор-потенциал в виде

$$\mathbf{A} = A_0 \cos \psi, \quad (11)$$

где

$$\psi = \frac{\omega}{c} z - \omega t + \varphi,$$

а вектор \mathbf{A} имеет составляющую только по оси x . При этом средние значения как электрического, так и магнитного поля равны нулю.

Рассмотрим, какой вид принимают решения (6)–(10) для случая, когда начальное значение импульса равно нулю. Пусть в начальный момент $t = 0$ частица покоится

в начале координат. Для этого случая, как следует из уравнения (6), нужно положить

$$p_{0x} = \frac{e}{c} A_x(x=0, t=0) = \frac{e}{c} A_0 \cos \varphi. \quad (12)$$

При этом выражение для p_x принимает вид

$$p_x = \frac{e}{c} A_0 (\cos \varphi - \cos \psi). \quad (13)$$

Из этой формулы видно, что в поле электромагнитной волны частица совершает систематический дрейф по направлению электрического поля (по оси x), причем среднее значение импульса частицы по оси x равно

$$\langle p_x \rangle = \frac{e}{c} A_0 \cos \varphi. \quad (14)$$

В зависимости от значения начальной фазы φ частица дрейфует в положительном или отрицательном направлении оси x . При $\varphi = \pi/2 + n\pi$ дрейф отсутствует, и частица колеблется относительно начального положения. Если начальное значение p_x отлично от нуля, то среднее значение $\langle p_x \rangle$ равно сумме начального значения и величины (14).

То обстоятельство, что среднее по времени значение поля равно нулю, а частица тем не менее совершает в таком поле систематический дрейф, не является очевидным. Некоторые авторы утверждали, что в таком поле частица колеблется вокруг фиксированной точки.

Как уже было отмечено, проекция импульса частицы на магнитное поле волны p_y не меняется.

Рассмотрим теперь выражение (8) для компоненты импульса частицы в направлении волнового вектора волны. Обращаясь к формуле (8), заметим, что знаменатели входящих в эту формулу дробей содержат множитель $(p_0 - p_z)$. Из формулы (10) следует, что эта величина является инвариантом, причем для выбранных нами начальных условий $p_0 - p_z = mc$. Поэтому мы можем переписать выражение для p_z в виде

$$p_z = p_{0z} + k_z \left(-\frac{ep_{0x}A_x(\psi)}{\omega mc} + \frac{e^2 A_x^2(\psi)}{2\omega mc^2} \right). \quad (15)$$

Из требования, чтобы компонента p_z в начальный момент обращалась в нуль, с учетом соотношения (11) получаем величину константы p_{0z} :

$$p_{0z} = \frac{1}{2} \frac{e^2 A_0^2 \cos^2 \varphi}{mc^3}. \quad (16)$$

С учетом этого равенства формула для p_z принимает вид

$$p_z = \frac{1}{2} \frac{e^2 A_0^2 \cos^2 \varphi}{mc^3} + \left(-\frac{e^2 A_0 \cos \varphi A_x(\psi)}{mc^3} + \frac{e^2 A_x^2(\psi)}{2mc^3} \right). \quad (17)$$

Первое слагаемое в выражении для p_z не зависит от времени. Слагаемые, заключенные в скобки, зависят от времени, причем среднее значение первого слагаемого в скобках равно нулю. Проводя усреднение, получаем выражение для среднего значения составляющей импульса частицы по оси z :

$$\langle p_z \rangle = \frac{e^2 A_0^2}{4mc^3} (\cos 2\varphi + 2). \quad (18)$$

Как видно из этой формулы, частица совершает систематический дрейф в направлении распространения волны.

Среднее значение импульса дрейфующей частицы зависит от начальной фазы φ .

Таким образом, частица в поле электромагнитной волны дрейфует в двух направлениях: в направлении электрического поля (т.е. по оси x) и в направлении волнового вектора волны (т.е. по оси z). При этом дрейф по оси x может происходить как в положительном, так и в отрицательном направлении в зависимости от начальной фазы, а дрейф по оси z всегда направлен в ту же сторону, что и волновой вектор (т.е. в направлении распространения волны). Знак скорости дрейфа по оси z всегда один и тот же, хотя величина скорости зависит от начальной фазы. Скорость дрейфа по оси x линейно зависит от амплитуды волны, а скорость дрейфа по оси z пропорциональна квадрату амплитуды.

Рассмотрим теперь формулу (9) для энергии частицы в поле волны. Напомним, что $p_0 = W/c$, где W — энергия частицы. В силу соотношения (10) величина p_0 для частицы в волне отличается от z -компоненты импульса p_z на постоянную величину. Из (8) и (9) видно, что каждая из величин p_0 и p_z представляет собой сумму трех слагаемых, первое из которых является постоянной величиной, другое пропорционально A_x , а третье пропорционально A_x^2 . Поскольку вектор-потенциал A_x изменяется с частотой ω , то член, пропорциональный A_x^2 , меняется с частотой 2ω . Но следует иметь в виду, что в формулах (6)–(9) аргументом функции A_x является параметр

$$\psi = \frac{\omega}{c} z - \omega t + \varphi,$$

где в свою очередь z является функцией времени: $z = z(t)$. Таким образом,

$$\psi = \frac{\omega}{c} z(t) - \omega t + \varphi,$$

где $z(t)$ определяет положение частицы в момент времени t .

Рассмотрим простейший частный случай, когда частица движется вдоль оси z с постоянной скоростью v . Если скорость v близка к скорости света c , то можно предположить, что волновое поле приводит к малым изменениям этой скорости. Тогда в грубом приближении можно считать, что скорость частицы в волне также близка к v , причем

$$z(t) = vt, \quad \psi = \frac{\omega}{c} vt - \omega t + \varphi = \omega t \left(\frac{v}{c} - 1 \right) + \varphi.$$

Из этого соотношения видно, что, хотя поле изменяется с частотой ω , поле, действующее на частицу, изменяется с частотой

$$\omega' = \omega(1 - \beta) = \frac{\omega}{2\gamma^2},$$

где $\beta = v/c$, а $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Поэтому в рассматриваемом случае (когда частица движется в направлении распространения волны) поле, действующее на частицу, меняется значительно медленнее, чем поле в фиксированной точке пространства. Следовательно, если временной период поля равен $T = 2\pi/\omega$, то переменная сила, действующая со стороны волны на частицу, имеет период, равный по порядку величины $T' = 4\pi\gamma^2/\omega$. Если скорость частицы направлена под углом θ к направлению распространения волны, то период переменной силы по

порядку величины равен

$$T' = \frac{2\pi}{\omega(1 - \beta \cos \theta)}.$$

Возвращаясь к формулам (8) и (9) для p_z и p_0 , мы видим, что в волне импульс и энергия частицы не изменяются монотонно, а колеблются вокруг некоторых определенных значений, которые получаются усреднением p_z и p_0 по времени. При этом на промежутке времени T' энергия частицы возрастает, а на следующем промежутке такого же порядка величины энергия убывает. Значения p_z и p_0 , относительно которых происходят колебания, зависят от фазы волны φ . Напомним, что, как видно из (11), φ есть фаза волны при $z = 0$, $t = 0$.

Тот факт, что энергия частицы в поле волны не растет монотонно, а поочередно то возрастает, то убывает, не исключает возможность ускорения частицы в поле волны. Необходимо для этого выбрать подходящий промежуток времени, в течение которого волна передает частице энергию.

Отметим, что исследованное нами точное решение, определяющее поведение частицы в поле плоской волны, получено без учета излучения частицы. В действительности, поскольку частица в поле волны движется неравномерно, она становится источником излучения, которое может быть интерпретировано как рассеяние излучения на частице. Рассмотрим некоторые свойства излучения заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны. Поле излучения определяется законом движения частицы по траектории. В [2] приведено параметрическое уравнение траектории в той системе координат, в которой частица в среднем покоится. В этой системе координат частица совершает периодическое движение по замкнутой 8-образной кривой. Кривая лежит в плоскости, в которой расположены вектор электрического поля и волновой вектор. Траектория симметрична, причем ось симметрии параллельна электрическому полю.

Из приведенных результатов можно сделать заключение о том, каковы свойства траектории частицы в лабораторной системе координат. Пусть система координат, в которой частица в среднем покоится, движется относительно лабораторной системы координат со скоростью v . Предположим, что наблюдатель, находящийся в лабораторной системе координат, измеряет по своим часам период обращения частицы и получает для этой величины значение T . В лабораторной системе траектория частицы уже не является замкнутой, а представляет некоторую кривую, периодическую в пространстве. Уравнение движения частицы в лабораторной системе имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, причем функция $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{r}(t + T) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}T. \quad (19)$$

Из этого соотношения следует, что скорость частицы в лабораторной системе координат есть периодическая функция времени с периодом T :

$$\mathbf{v}(t + T) = \frac{d\mathbf{r}(t + T)}{dt} = \mathbf{v}(t). \quad (20)$$

Эти два свойства траектории, выражаемые двумя последними соотношениями, позволяют определить некоторые характерные особенности излучения заряженной частицы, движущейся в поле плоской волны.

Если траектория заряженной частицы задана соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то излучение на частоте ω описывается фурье-компонентой $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$ вектор-потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]\} dt, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \quad k = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}; \quad (22)$$

\mathbf{n} — единичный вектор, направленный из области, где движется частица, в точку наблюдения \mathbf{r} . Предполагается, что наблюдатель находится достаточно далеко от области, в которой движется частица.

Разобьем интервал интегрирования на отрезки, равные по величине периоду T . Тогда интеграл по t может быть представлен в виде суммы интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt = \sum_n \int_{nT}^{(n+1)T} \dots dt, \quad (23)$$

где n пробегает все целые значения.

Рассмотрим один из членов этой суммы:

$$I_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]\} dt.$$

Из формул (19) и (20) следует, что

$$\mathbf{r}(t + nT) = \mathbf{r}(t) + n\mathbf{v}T, \quad \mathbf{v}(t + nT) = \mathbf{v}(t). \quad (24)$$

Поэтому выбранный интеграл простой заменой переменных может быть приведен к виду

$$I_n = \exp[in(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T] \int_0^T \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]\} dt.$$

Следовательно, интеграл, входящий в формулу (21), может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]\} dt = \\ & = \sum_n \exp[in(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T] \int_0^T \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]\} dt. \end{aligned} \quad (25)$$

В правой части этого равенства перед интегралом стоит сумма экспонент, которая может быть выражена через дельта-функции:

$$\sum_n \exp[in(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T] = \sum_s \delta[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T - 2\pi s], \quad (26)$$

где s — любое целое число.

Окончательно вектор-потенциал \mathbf{A} , описывающий излучение частицы в поле электромагнитной волны, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = & \frac{q}{2\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \sum_s \delta[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T - 2\pi s] \times \\ & \times \int_0^T \mathbf{v}(t) \exp\{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]\} dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Из формулы (27) следует, что излучаются только такие волны, для которых аргументы дельта-функций

обращаются в нуль, т.е.

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})T - 2\pi s = 0. \quad (28)$$

С учетом (22) это соотношение можно переписать в виде

$$\omega = \frac{(2\pi/T)s}{1 - (v/c) \cos \theta}, \quad (29)$$

где θ — угол между скоростью \mathbf{v} смещения частицы и направлением излучения \mathbf{n} .

Формула (29) — это типичная формула, описывающая частоту излучения движущегося осциллятора, у которого период колебания равен T , но колебание не является гармоническим. Поэтому в числителе формулы наряду с основной частотой $2\pi/T$ могут стоять и все кратные частоты. Знаменатель дает доплеровский сдвиг частоты. Интенсивность излучения зависит от значения интеграла по периоду, входящего в выражение (27).

В нашем рассмотрении мы не учитываем ни этого вторичного излучения, ни его обратное влияние на движение частицы. Эти вопросы рассмотрены как в классической, так и в квантовой теории [3].

3. Приближенные методы

Во многих случаях для описания движения частицы в поле волны удобно пользоваться теорией возмущений, разлагая искомые величины по степеням некоторого малого параметра. Такой метод может оказаться удобным даже для случая, когда имеется точное решение, например для случая движения частицы в поле плоской волны. Если же рассматривается движение частиц в поле, состоящем из нескольких плоских волн, например, в поле пространственно неоднородной волны, то для такого случая теория возмущений позволяет получить достаточно точную картину движения.

Ниже мы рассмотрим примеры применения теории возмущений. Прежде всего запишем уравнение движения (2) для частицы в поле волны, придав ему более удобную форму. Уравнение движения (2) неудобно в том отношении, что в левую его часть входит импульс частицы \mathbf{p} , а в правую — скорость \mathbf{v} . Это уравнение можно переписать таким образом, что обе его части будут содержать только скорость частицы \mathbf{v} . Для этого воспользуемся равенством, которое получается, если обе части уравнения (2) умножить на скорость частицы \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}. \quad (30)$$

С учетом этого равенства левая часть уравнения (3) может быть представлена в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\gamma \mathbf{v}}{dt} = m \left(\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{e}{mc^2} \mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v}) \right). \quad (31)$$

Подставив это выражение в формулу (2), найдем, что движение частицы в заданном электромагнитном поле описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{ \mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}\mathbf{H}] - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\mathbf{E}) \}, \quad (32)$$

где $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ и $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ — приведенные скорость (в единицах c) и энергия частицы (в единицах mc^2).

Векторное уравнение (32) равносильно трем уравнениям для трех проекций вектора β :

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{E_x + \beta_y H_z - \beta_z H_y - \beta_x (\beta_x E_x + \beta_y E_y + \beta_z E_z)\}, \quad (33)$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{E_y + \beta_z H_x - \beta_x H_z - \beta_y (\beta_x E_x + \beta_y E_y + \beta_z E_z)\}, \quad (34)$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{E_z + \beta_x H_y - \beta_y H_x - \beta_z (\beta_x E_x + \beta_y E_y + \beta_z E_z)\}. \quad (35)$$

Отметим, что уравнения (2), (3), (30)–(35) описывают движение заряженной частицы в произвольном электромагнитном поле. Ниже мы будем применять эти уравнения для случая, когда действующее на заряд поле является полем электромагнитной волны.

Решение системы уравнений (33)–(35) можно искать методом последовательных приближений. Пусть относительная скорость частицы в начальный момент времени равна β_0 . Для нерелятивистских частиц величина β_0 много меньше единицы, а для релятивистских частиц близка к единице. В большинстве практических случаев частицы под действием поля волны приобретают скорость, величина которой много меньше скорости света. Относительная величина этой скорости по порядку величины равна

$$\eta = \frac{v_{\sim}}{c} = \beta_{\sim} = \frac{eE}{mc\omega}.$$

Для электрона $\eta \simeq E\lambda \times 10^{-4}$ Э.с.м. Видно, что в широкой области значений поля E и длин волн λ параметр η существенно меньше единицы. Используя η как параметр малости, представим скорости и смещения частиц в виде рядов:

$$\begin{aligned} \beta_x &= \beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} + \dots, & \beta_y &= \beta_y^{(0)} + \beta_y^{(1)} + \dots, \\ \beta_z &= \beta_z^{(0)} + \beta_z^{(1)} + \dots, \\ x &= x^{(0)} + x^{(1)} + \dots, & y &= y^{(0)} + y^{(1)} + \dots, \\ z &= z^{(0)} + z^{(1)} + \dots, \end{aligned}$$

где $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}$ и $\beta_x^{(0)}, \beta_y^{(0)}, \beta_z^{(0)}$ — значения координат и скоростей в начальный момент времени.

Параметр малости η имеет простой физический смысл. Действительно, этот параметр можно записать в виде $\eta = eE\lambda/(2\pi mc^2)$. Выражение в числителе определяет по порядку величины энергию, которую частица может набрать на длине волны λ . В знаменателе стоит энергия покоя частицы. Следовательно, малость параметра η означает, что приращение энергии на длине волны мало по сравнению с энергией покоя частицы.

4. Движение в плоской волне

Рассмотрим движение заряженной частицы в поле плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси z . Будем, как и ранее, считать, что электрическое поле направлено вдоль оси x , магнитное — вдоль оси y , а волновой вектор электромагнитной волны — вдоль оси z . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ частица находится в точке $x = y = z = 0$ и имеет нулевую начальную скорость. В данном случае $\gamma = 1$. Поля в однородной

плоской волне описываются выражениями

$$E_x = E \sin(\omega t - kz + \varphi), \quad H_y = H \sin(\omega t - kz + \varphi), \quad (36)$$

где φ — фаза поля в начальный момент.

Подставим выражение для E_x в правую часть уравнения (33). При этих условиях получаем, что в первом приближении движение вдоль оси x описывается уравнением

$$\frac{d\beta_x^{(1)}}{dt} = \frac{e}{mc} E_x. \quad (37)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\beta_x^{(1)} = -\left(\frac{eE}{mc\omega}\right) \cos(\omega t - kz + \varphi) + C, \quad (38)$$

где постоянная C определяется из начальных условий. С учетом начальных условий получаем

$$\beta_x^{(1)} = -\left(\frac{eE}{mc\omega}\right) [\cos(\omega t - kz + \varphi) - \cos \varphi]. \quad (39)$$

Видно, что второе слагаемое в квадратных скобках не зависит от времени. Это указывает на то, что частица не только колеблется с частотой поля, но и совершает систематическое направленное движение (дрейфует) вдоль вектора электрического поля волны. В общем случае скорость дрейфа зависит от фазы поля в начальный момент времени. Если обозначить через v_{xd} скорость дрейфа, то из формулы (39) следует, что

$$\beta_{xd} = \left(\frac{eE}{mc\omega}\right) \cos \varphi. \quad (40)$$

Видно, что систематическое движение отсутствует только при $\cos \varphi = 0$, т.е. только при определенных значениях начальной фазы. Для всех остальных значений φ скорость дрейфа не равна нулю, и частица, которая в начальный момент не двигалась, систематически перемещается параллельно направлению электрического поля волны. Очевидно, что в зависимости от значения начальной фазы φ дрейф осуществляется либо в положительном, либо в отрицательном направлении оси x . Если в поле волны имеется источник, непрерывно генерирующий заряженные частицы, и все значения начальной фазы равновероятны, то скорость дрейфа, усредненная по φ , равна нулю. При этом имеются две группы частиц, дрейфующих в противоположные стороны.

Для описания движения частицы относительно оси z подставим скорость (39) во второй член в правой части уравнения (35). Остальные члены в правой части уравнения (35) либо равны нулю, либо имеют более высокий порядок малости:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_z}{dt} &= \frac{e}{mc} \left\{ -\frac{1}{\omega} \left(\frac{eE}{mc}\right) [\cos(\omega t - kz + \varphi) - \cos \varphi] \right\} \times \\ &\times E \sin(\omega t - kz + \varphi). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь учтено, что в плоской волне $E = H$. После интегрирования и учета начальных условий получаем соотношение для скорости частицы по оси z

$$\begin{aligned} \beta_z &= \frac{1}{4} \left(\frac{eE}{mc\omega}\right)^2 [\cos 2(\omega t - kz + \varphi) - \\ &- 4 \cos \varphi \cos(\omega t - kz + \varphi) + 2 + \cos 2\varphi]. \end{aligned} \quad (42)$$

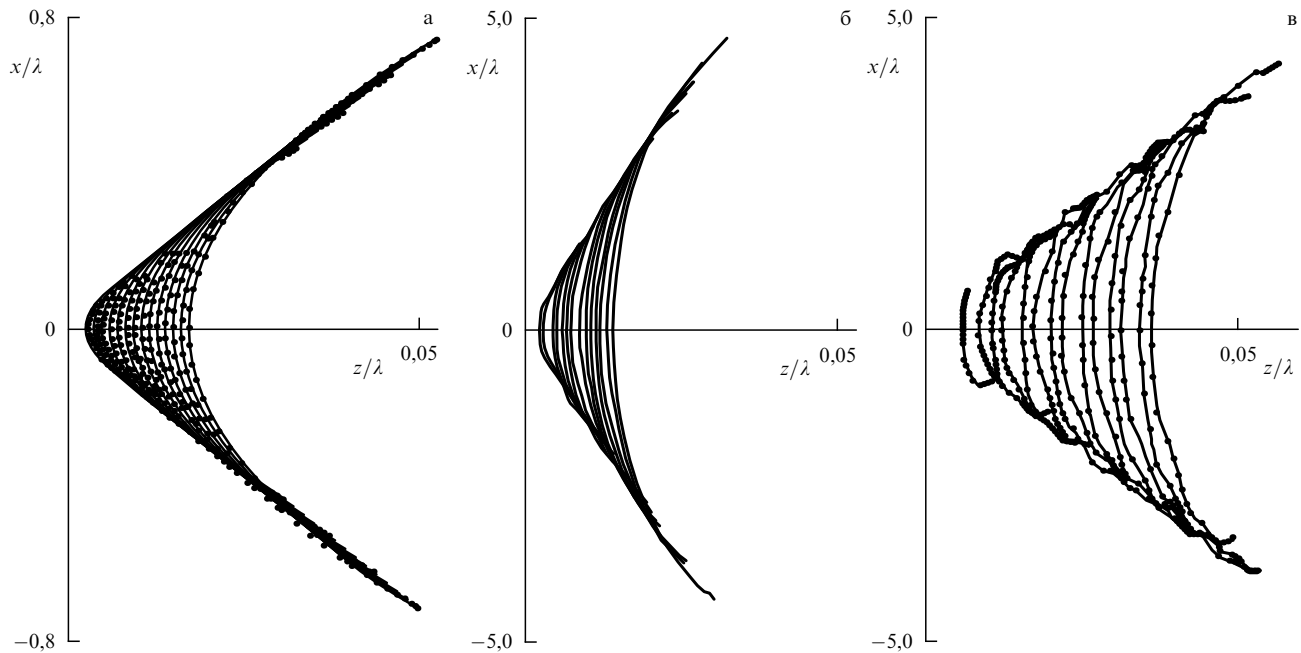


Рис. 1. Расположение заряженных частиц, инжектированных в поле плоской линейно поляризованной электромагнитной волны. Частицы начинают движение в начале координат с нулевой начальной скоростью. Интервал между началом движения двух последующих частиц равен 0,01 от периода волны: (а) $\eta = 0,1$; (б) $\eta = 1$; (в) $\eta = 2$.

Из этого уравнения следует, что так же, как и при движении относительно оси x , частица систематически перемещается вдоль оси z . Усредняя уравнение (42) по периоду поля, получим выражение для скорости дрейфа частицы

$$\beta_{zd} = \frac{1}{4} \left(\frac{eE}{mc\omega} \right)^2 [2 + \cos 2\varphi]. \quad (43)$$

Скорость дрейфа имеет второй порядок малости и изменяется от

$$\beta_{zd} = \frac{1}{4} \left(\frac{eE}{mc\omega} \right)^2$$

для частиц, появившихся в волне при фазах $\varphi = (\pi/2) \pm \pi n$, до

$$\beta_{zd} = \frac{3}{4} \left(\frac{eE}{mc\omega} \right)^2$$

для частиц, появившихся в волне при фазах $\varphi = \pm \pi n$. Но, в отличие от движения вдоль оси x , составляющая дрейфовой скорости второго порядка малости для всех частиц имеет один знак, т.е. при всех значениях начальной фазы происходит смещение частиц в одном направлении — в направлении распространения волны.

Таким образом, если начальная скорость частицы равна нулю, то при взаимодействии с плоской электромагнитной волной частица не только колеблется, но и совершает систематический дрейф вдоль электрического поля и в направлении распространения волны. Величина дрейфовой скорости как в направлении электрического поля, так и по направлению распространения зависит от значения начальной фазы. Скорость в направлении магнитного поля остается равной нулю.

Формулы (40) и (43) дают такие же значения для скорости дрейфа, как и формулы (14) и (18), полученные из точного решения. Однако следует иметь в виду, что

формулы (40) и (43), полученные по теории возмущений, справедливы лишь в том случае, если они описывают малые добавки к начальным скоростям.

Распределение заряженных частиц в поле волны было исследовано с помощью численного решения уравнений движения [5]. Результаты расчетов представлены на рис. 1. В расчете было принято, что в начале координат расположен источник, который испускает частицы, имеющие пренебрежимо малую скорость. Можно сказать, что в начале координат возникают частицы с нулевой скоростью. Эти частицы приходят в движение под действием электрического поля волны, а на движущиеся частицы воздействует и магнитное поле волны. Движение частиц определяется как величиной полей, так и значением начальной фазы, т.е. моментом времени, когда частица была запущена в волну.

При расчете период волны был разделен на сто частей, и через каждую сотую долю периода стартовала очередная частица. Рисунки показывают распределение частиц, инжектированных на протяжении семи периодов. Считалось, что волна распространяется в направлении оси z , а электрическое поле направлено по оси x . На рисунке показаны пространственные распределения частиц, по осям откладывались относительные значения смещений x/λ и z/λ , где λ — длина волны, в которой движется частица. Графики соответствуют разным значениям параметра $\eta = eE\lambda/(2\pi mc^2)$. Значению $\eta = 0,1$ отвечает рис. 1а, значению $\eta = 1,0$ — рис. 1б, значению $\eta = 2,0$ — рис. 1в.

Случай $\eta = 0,1$ может быть аналитически рассчитан с помощью изложенного выше метода последовательных приближений. Рисунки показывают, что по мере роста параметра η (т.е. по мере увеличения напряженности поля волны) возрастает роль дрейфа в направлении распространения волны. Действительно, как видно из рис. 1а, при $\eta = 0,1$ движение частиц происходит в

основном по нормали к направлению распространения волны (на рис. 1а масштабы по осям x и z различаются в 16 раз); на рис. 1б дрейф по оси z становится сравнимым с дрейфом по оси x , а на рис. 1в дрейф по оси z еще более заметен.

Рассмотрим влияние начальной скорости на динамику частицы в поле плоской электромагнитной волны. Пусть в начальный момент времени частица имеет скорость $\beta_x = \beta_{0x}$, направленную вдоль электрического поля волны, и скорость $\beta_y = \beta_{0y}$, совпадающую по направлению с вектором магнитного поля волны. При данных условиях $\gamma = (1 - \beta_{0x}^2 - \beta_{0y}^2)^{-1/2}$. Уравнения, описывающие движение частицы вдоль всех осей, имеют вид

$$\frac{d\beta_x^{(1)}}{dt} = \frac{e}{m\gamma c} \{ (1 - \beta_{0x}^2) E_x \}, \quad (44)$$

$$\frac{d\beta_y^{(1)}}{dt} = \frac{e}{m\gamma c} \{ -\beta_{0y}\beta_{0x} E_x \}, \quad (45)$$

$$\frac{d\beta_z^{(1)}}{dt} = \frac{e}{m\gamma c} \{ \beta_{0x} H_y \}. \quad (46)$$

Подставим выражение для E_x в правые части уравнений. После интегрирования и учета начальных условий с точностью до членов первого порядка получаем выражения для скоростей частиц

$$\begin{aligned} \beta_x &= \beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} = \beta_{0x} - (1 - \beta_{0x}^2) \left(\frac{eE}{m\gamma c\omega} \right) \times \\ &\times [\cos(\omega t - kz + \varphi) - \cos \varphi], \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \beta_y &= \beta_y^{(0)} + \beta_y^{(1)} = \beta_{0y} + \beta_{0y}\beta_{0x} \left(\frac{eE}{m\gamma c\omega} \right) \times \\ &\times [\cos(\omega t - kz + \varphi) - \cos \varphi], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \beta_z &= \beta_z^{(0)} + \beta_z^{(1)} = -\beta_{0x} \left(\frac{eE}{m\gamma c\omega} \right) \times \\ &\times [\cos(\omega t - kz + \varphi) - \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (49)$$

Усредняя уравнения (47)–(49) по периоду поля, получим выражения для дрейфовых скоростей частицы относительно осей x , y и z

$$\beta_{xd} = (1 - \beta_{0x}^2) \left(\frac{eE}{m\gamma c\omega} \right) \cos \varphi, \quad (50)$$

$$\beta_{yd} = -\beta_{0y}\beta_{0x} \left(\frac{eE}{m\gamma c\omega} \right) \cos \varphi, \quad (51)$$

$$\beta_{zd} = \beta_{0x} \left(\frac{eE}{m\gamma c\omega} \right) \cos \varphi. \quad (52)$$

Уравнения показывают, что начальная скорость частицы существенно меняет характер ее движения в плоской электромагнитной волне. Во-первых, изменение скорости частицы вдоль направления волнового вектора является величиной не второго, а первого порядка по η . Во-вторых, скорость меняется только с частотой волны ω , и нет членов с двойной частотой 2ω , как в случае движения первоначально неподвижной частицы. И в-третьих, возникает модуляция скорости по направлению магнитного поля волны, т.е. по направлению, вдоль которого не действует сила Лоренца.

Выше были рассмотрены два случая. В первом из них в начальный момент времени частица была неподвижна,

а во втором имела начальную скорость, перпендикулярную направлению распространения волны. Если начальная скорость параллельна волновому вектору, целесообразно перейти в систему координат, где частица покоится. При этом амплитуды полей и частота волны изменятся в соответствии с преобразованиями Лоренца и задача сведется к определению движения заряда с нулевой начальной скоростью.

Если полученные выше результаты приближенных вычислений для случая движения частицы в плоской волне можно было сравнивать с точным решением, то для движения частицы в поле стоячей волны точное решение отсутствует. Ниже мы рассмотрим этот случай с помощью теории возмущений.

Пусть стоячая волна образуется при сложении двух одинаковых волн, распространяющихся навстречу друг другу. Электрическое и магнитное поля первой волны обозначим соответственно $E^{(1)}$ и $H^{(1)}$, при этом электрическое поле $E^{(1)}$ направлено по оси x , магнитное поле $H^{(1)}$ — по оси y , и волна распространяется в положительном направлении оси z . Поля второй волны обозначим соответственно $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$, причем, как и у первой волны, электрическое поле направлено по оси x , а магнитное — по оси y . Но вторая волна распространяется в отрицательном направлении оси z . Суммарное поле представляет собой стоячую волну и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} E_x &= E^{(1)} + E^{(2)} = E \sin(\omega t - kz + \varphi) + \\ &+ E \sin(\omega t + kz + \varphi) = 2E \sin(\omega t + \varphi) \cos kz, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} H_y &= H^{(1)} + H^{(2)} = H \sin(\omega t - kz + \varphi) - \\ &- H \sin(\omega t + kz + \varphi) = -2H \cos(\omega t + \varphi) \sin kz. \end{aligned}$$

Для простоты рассматривается случай, когда в начале координат (при $z = 0$) фазы волн совпадают. Подставим выражение для E в уравнение (37). Как и ранее, будем искать решение, удовлетворяющее начальному условию $\beta_x = 0$ при $t = 0$. Решение имеет вид

$$\beta_x = \left(\frac{2eE}{mc\omega} \right) [\cos \varphi - \cos(\omega t + \varphi)] \cos kz. \quad (54)$$

Из решения видно, что в поле стоячей волны, как и в поле бегущей волны, частица совершает систематический дрейф в направлении электрического поля (вдоль оси x). Но, в отличие от случая бегущей волны, скорость дрейфа зависит не только от фазы волны, но и от значения координаты z . Если в начальный момент частица находится в точке, расположенной на расстоянии $\lambda/4$ от начала координат (т.е. в узле стоячей волны), то скорость дрейфа этой частицы равна нулю. Частицы, расположенные на расстояниях, кратных $\lambda/2$, от этой точки, также имеют нулевую дрейфовую скорость.

Чтобы описать движение частицы относительно оси z , подставим скорость (54) во второй член в правой части уравнения (35). Мы получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_z}{dt} &= \frac{e}{mc} \beta_x H_y = -\frac{1}{2\omega} \left(\frac{2eE}{mc} \right)^2 \times \\ &\times [\cos \varphi \cos(\omega t + \varphi) - \cos^2(\omega t + \varphi)] \sin 2kz. \end{aligned} \quad (55)$$

Это уравнение можно усреднить по времени, и мы получим среднее по времени значение ускорения

частицы в точке z :

$$\left\langle \frac{d\beta_z}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\omega} \left(\frac{eE}{mc} \right)^2 \sin 2kz. \quad (56)$$

Из этого соотношения видно, что в поле стоячей волны на частицу действует систематическая сила, направленная по оси z . Если представить эту силу как градиент потенциала Φ :

$$\langle F_z \rangle = mc \left\langle \frac{d\beta_z}{dt} \right\rangle = -\text{grad } \Phi, \quad (57)$$

то потенциал можно записать в виде

$$\Phi = \frac{e^2 E^2}{m\omega^2} \cos^2 kz. \quad (58)$$

Эта сила направлена в сторону уменьшения амплитуды электрического поля стоячей волны. Таким образом, частицы группируются в узлах электрического поля. Такое поведение является характерным для частиц в высокочастотном электромагнитном поле, если плотность энергии электромагнитного поля неоднородна в пространстве. Возникающую при движении в таком поле силу иногда называют силой Гапонова–Миллера [6]. Ниже будет рассмотрен еще один пример возникновения этой силы (в бегущей неоднородной волне).

5. Неоднородные электромагнитные волны

До сих пор мы описывали движение частиц в поле плоской линейно поляризованной волны. Простейшие неоднородные волны образуются в пространстве при сложении полей двух плоских линейно поляризованных волн одной частоты, распространяющихся под углом друг к другу.

Получим выражения, описывающие эти электромагнитные поля. Вначале рассмотрим волны, электрические поля которых направлены вдоль оси x , а магнитные поля и волновые векторы лежат в плоскости yz . Будем полагать, что направления распространения обеих плоских волн составляют с осью z угол α (рис. 2а). Поля первой плоской волны описываются выражениями

$$\begin{aligned} E_x^{(1)} &= E \sin(\omega t + \varphi - yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ H_y^{(1)} &= E \cos \alpha \sin(\omega t + \varphi - yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ H_z^{(1)} &= -E \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi - yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \end{aligned} \quad (59)$$

а второй — выражениями

$$\begin{aligned} E_x^{(2)} &= E \sin(\omega t + \varphi + yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ H_y^{(2)} &= E \cos \alpha \sin(\omega t + \varphi + yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ H_z^{(2)} &= E \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi + yk \sin \alpha - zk \cos \alpha). \end{aligned} \quad (60)$$

Составляющие полей E_y, E_z и H_x равны нулю. Поле, формируемое при сложении таких волн, описывается выражениями

$$\begin{aligned} E_x^{(1+2)} &= 2E \cos(yk \sin \alpha) \sin(\omega t + \varphi - zk \cos \alpha), \\ H_y^{(1+2)} &= 2E \cos \alpha \cos(yk \sin \alpha) \sin(\omega t + \varphi - zk \cos \alpha), \\ H_z^{(1+2)} &= 2E \sin \alpha \sin(yk \sin \alpha) \cos(\omega t + \varphi - zk \cos \alpha). \end{aligned} \quad (61)$$

Формулы (61) описывают волну, распространяющуюся вдоль оси z . Например, в выражение для $E_x^{(1+2)}$ входит множитель $\sin(\omega t + \varphi - zk \cos \alpha)$, характерный для бегущей волны. Амплитуда этой волны равна

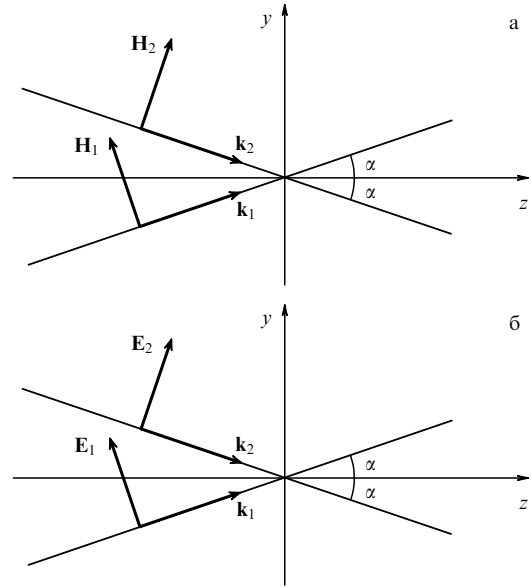


Рис. 2. Расположение волновых векторов для двух плоских волн, образующих одну неоднородную волну. Волновые векторы расположены в плоскости yz симметрично относительно оси z . В случае (а) электрическое поле перпендикулярно плоскости yz , в случае (б) магнитное поле перпендикулярно плоскости yz .

$2E \cos(yk \sin \alpha)$, т.е. зависит от координаты y , поперечной по отношению к направлению распространения. То же самое можно сказать и об остальных компонентах волны, описываемых формулами (61). Зависимость амплитуды от координаты y означает, что волна (61) является неоднородной.

Поскольку электрическое поле пропорционально $\cos(yk \sin \alpha)$, то в точках, удовлетворяющих условию

$$yk \sin \alpha = \pi \left(\frac{1}{2} + n \right), \quad (62)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, электрическое поле волны равно нулю. Последнее соотношение является уравнением плоскостей нулевого электрического поля. Эти плоскости параллельны плоскости xz и расположены на расстояниях

$$y = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

от нее. Обозначим через a расстояние между двумя соседними плоскостями. Тогда $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ можно представить соответственно в виде

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2a}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}.$$

Подставляя эти выражения в (61), получим окончательные выражения для электромагнитного поля

$$\begin{aligned} E_x &= 2E \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \sin(\omega t + \varphi - zk_z), \\ H_y &= 2E \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2} \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \sin(\omega t + \varphi - zk_z), \\ H_z &= 2E \left(\frac{\lambda}{2a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right) \cos(\omega t + \varphi - zk_z), \\ E_y &= E_z = H_x = 0, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\omega = 2\pi c/\lambda$, λ — длина волны, $k_z = k \cos \alpha = k[1 - (\lambda/(2a))^2]^{1/2}$, $k = 2\pi/\lambda$.

Выражения (63) описывают поперечно-электрическую волну, поскольку ее поле имеет равную нулю продольную составляющую электрического поля E_z , а магнитное поле кроме поперечной имеет и продольную составляющую H_z . Магнитное поле волны нигде не обращается в нуль. Волна распространяется в направлении z с фазовой скоростью

$$v_{ph} = \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/(2a))^2}}. \quad (64)$$

Как видно из формулы (64), фазовая скорость суммарной волны в направлении оси z превышает скорость света. Электрическое поле этой волны имеет только одну составляющую E_x , перпендикулярную направлению распространения, а распределение поля неоднородно вдоль оси y и имеет форму стоячей волны. Между двумя соседними плоскостями, на которых электрическое поле равно нулю, рассматриваемое поле совпадает с полем TE -волны в плоском волноводе.

Поперечно-магнитная волна формируется в случае, когда в свободном пространстве распространяются две плоские однородные электромагнитные волны, у которых совпадают направления магнитных полей (рис. 2б). Пусть поля этих волн описываются выражениями

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= E \cos \alpha \sin(\omega t + \varphi - yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ E_z^{(1)} &= -E \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi - yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ H_x^{(1)} &= E \sin(\omega t + \varphi - yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} E_y^{(2)} &= E \cos \alpha \sin(\omega t + \varphi + yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ E_z^{(2)} &= E \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi + yk \sin \alpha - zk \cos \alpha), \\ H_x^{(2)} &= E \sin(\omega t + \varphi + yk \sin \alpha - zk \cos \alpha). \end{aligned} \quad (66)$$

Тогда для суммарного поля получим

$$\begin{aligned} E_y &= 2E \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t + \varphi - zk_z), \\ E_z &= 2E \left(\frac{\lambda}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t + \varphi - zk_z), \\ H_x &= 2E \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t + \varphi - zk_z), \\ E_x &= H_y = H_z = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Из последних выражений видно, что волна наряду с поперечной составляющей электрического поля имеет и продольную составляющую поля E_z . Поперечно-магнитная волна (67) так же, как и поперечно-электрическая (63), неоднородна в направлении оси y , но, в отличие от нее, имеет плоскости нулевого магнитного (а не электрического) поля. Для обоих типов волн расстояние между двумя плоскостями нулевого поля равно a , т.е. пространственный период поперечной неоднородности зависит от длины волны λ и направления распространения плоских однородных волн, т.е. от угла α .

6. Движение в поперечно-электрическом поле

Рассмотрим особенности в динамике частиц, появляющиеся при движении в неоднородной волне. Для этого

получим соотношения, описывающие движение частиц в поперечно-электрической волне, поля которой определяются выражениями (63). Следует отметить, что эта волна неоднородна только в одном из поперечных направлений, а именно вдоль оси y , и однородна вдоль оси x .

Будем считать, что частица в начальный момент покоится. Тогда $\gamma = 1$, и в первом приближении движение частицы вдоль оси x описывается уравнением

$$\frac{d\beta_x^{(1)}}{dt} = \frac{e}{mc} E_x. \quad (68)$$

После интегрирования и учета начальных условий имеем

$$\beta_x^{(1)} = -\frac{2eE}{mc\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) [\cos(\omega t + \varphi - k_z z) - \cos \varphi]. \quad (69)$$

Подставляя это выражение в (34) и (35), получим уравнения, описывающие движение в направлении неоднородности волны (ось y):

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_y^{(2)}}{dt} &= \frac{e}{mc} (-\beta_x H_z) = \frac{\lambda}{2a\omega} \left(\frac{2eE}{mc}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \times \\ &\times [\cos(\omega t + \varphi - k_z z) - \cos \varphi] \cos(\omega t + \varphi - k_z z), \end{aligned} \quad (70)$$

и в направлении распространения волны (ось z):

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_z^{(2)}}{dt} &= \frac{e}{mc} (\beta_x H_y) = -\frac{\chi}{\omega} \left(\frac{2eE}{mc}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \times \\ &\times [\cos(\omega t + \varphi - k_z z) - \cos \varphi] \sin(\omega t + \varphi - k_z z), \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\chi = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.$$

Поскольку уравнения (70) и (71) содержат в левых частях ускорения, то правые части пропорциональны соответствующим силам. Из уравнений следует, что силы, действующие на частицу по оси y и по оси z , существенно различаются. Сила вдоль направления распространения волны (уравнение (71)) периодична и при усреднении по времени зануляется. Сила, действующая вдоль оси y , имеет постоянную составляющую. Усредняя по времени уравнение (70), получаем

$$\left\langle \frac{d\beta_y^{(2)}}{dt} \right\rangle = \frac{\lambda}{a\omega} \left(\frac{eE}{mc}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right). \quad (72)$$

Отсюда следует, что на частицу действует сила, направленная по оси y , и среднее значение этой силы не равно нулю.

Как показано в работе [6], на частицу, расположенную в неоднородном высокочастотном поле

$$E(x, y, z) \exp(i\omega t),$$

действует сила, пропорциональная градиенту от квадрата электрического поля в данной точке,

$$\mathbf{F} = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \text{grad} |E(x, y, z)|^2. \quad (73)$$

Силу F_y , вызванную неоднородностью поля, учитывая направление ее действия, иногда называют градиентной силой или силой Гапонова – Миллера. В нашем случае ускорение $d\beta_y/dt$ также вызвано некоторой силой F_y , среднее значение которой можно определить из (72):

$$F_y = mc \left\langle \frac{d\beta_y^{(2)}}{dt} \right\rangle = \frac{\lambda}{a\omega} \left(\frac{e^2 E^2}{mc} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right) = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \frac{\partial \langle E_x^2 \rangle}{\partial y}. \quad (74)$$

Нетрудно видеть, что сила F_y , определяемая формулой (74), совпадает с градиентной силой, определяемой формулой (73).

После интегрирования уравнений (70) и (71) и учета начальных условий получаем выражение для скорости частицы вдоль осей y и z (напомним, что в рассматриваемом случае электрическое поле волны направлено по оси x):

$$\beta_y^{(2)} = \frac{\lambda}{2a} \left(\frac{eE}{mc\omega} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right) \times \\ \times [2\omega t + \sin 2(\omega t + \varphi - k_z z) - 4 \cos \varphi \sin (\omega t + \varphi - k_z z) + \sin 2\varphi], \quad (75)$$

$$\beta_z^{(2)} = \chi \left(\frac{eE}{mc\omega} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi y}{a} \right) [\cos 2(\omega t + \varphi - k_z z) - 4 \cos \varphi \cos (\omega t + \varphi - k_z z) + 2 + \cos 2\varphi]. \quad (76)$$

В формуле (75), определяющей скорость частицы по оси y , имеется слагаемое, линейно зависящее от времени. Оно описывает ускорение частицы под действием градиентной силы (74). В формулах (75) и (76) значения координаты y , входящие в аргумент синуса и косинуса, следует считать близкими к начальному значению y_0 . В действительности при движении частицы значение y меняется, а с ним изменяется значение градиентной силы. Поэтому в формуле (75) выражение для члена, линейного по времени, справедливо в том случае, если координата y при движении частицы меняется на величину, малую по сравнению с a . Из формулы (75) следует, что движение по оси y характеризуется не только ускорением, но и дрейфом. Скорость дрейфа равна

$$\beta_{yd} = \frac{\lambda}{2a} \left(\frac{eE}{mc\omega} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right) \sin 2\varphi. \quad (77)$$

Как видно из формулы (76), в направлении оси z , т.е. в направлении волнового вектора, также имеет место дрейф. Из выражений (75) и (76) видно, что при a , стремящемся к бесконечности, скорость частицы в направлении y стремится к нулю, а скорость вдоль оси z стремится к скорости частицы в однородной волне. Из соотношений (75) и (76) следует, что в неоднородной волне скорость дрейфа зависит не только от начальной фазы волны, но и от начальных координат частиц. Причем так же, как и при движении в однородной волне, частицы дрейфуют вдоль оси y как в положительном, так и в отрицательном направлениях, а вдоль оси z дрейф происходит только в положительном направлении, т.е. только в направлении распространения волны.

Отметим, что в направлении распространения волны происходит именно дрейф, а не движение под действием некой усредненной силы. Как следует из уравнения (71), усредненная сила вдоль оси z во втором порядке малости равна нулю. Напомним, что в начальный момент времени частица покоилась.

Покажем, что на частицу, которая имеет в начальный момент некоторую скорость, в поперечно-электрической волне (63) будет действовать не равная нулю усредненная сила, направленная вдоль волнового вектора. Причем частица должна иметь составляющие начальной скорости как вдоль направления неоднородности волны (в нашем случае вдоль оси y), так и вдоль электрического поля волны (вдоль оси x).

Пусть в начальный момент времени частица имеет скорость $\beta_x = \beta_{0x}$, направленную вдоль электрического поля волны, и скорость $\beta_y = \beta_{0y}$, совпадающую по направлению с вектором магнитного поля волны. При этих условиях $\gamma = (1 - \beta_{0x}^2 - \beta_{0y}^2)^{-1/2}$. Уравнения первого порядка по η , описывающие движение частицы, имеют вид

$$\frac{d\beta_x^{(1)}}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{E_x + \beta_{0y} H_z - \beta_{0x}^2 E_x\}, \quad (78)$$

$$\frac{d\beta_y^{(1)}}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{-\beta_{0x} H_z - \beta_{0y} \beta_{0x} E_x\}, \quad (79)$$

$$\frac{d\beta_z^{(1)}}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{\beta_{0x} H_y\}. \quad (80)$$

Подставляя выражения для полей поперечно-электрической волны (63) в правые части уравнений (78) и (80), получим

$$\frac{d\beta_x^{(1)}}{dt} = \left(\frac{2eE}{mc\gamma} \right) \left\{ (1 - \beta_{0x}^2) \cos \Omega t \sin (\omega t + \varphi - k_z z) + \beta_{0y} \left(\frac{\lambda}{2a} \right) \sin \Omega t \cos (\omega t + \varphi - k_z z) \right\}, \quad (81)$$

$$\frac{d\beta_z^{(1)}}{dt} = \beta_{0x} \chi \left(\frac{2eE}{mc\gamma} \right) \cos \Omega t \sin (\omega t + \varphi - k_z z), \quad (82)$$

где $\Omega = \pi c \beta_{0y} / a$, при этом $y^{(0)} = c \beta_{0y} t$. После интегрирования и учета начальных условий имеем

$$\beta_x^{(1)} = - \left(\frac{2eE}{mc\gamma\omega} \right) \cos \Omega t [\cos (\omega t + \varphi - k_z z) - \cos \varphi] + \\ + \beta_{0x}^2 \left(\frac{2eE}{mc\gamma\omega} \right) \beta_{0y} \left(\frac{\lambda}{2a} \right) \times \\ \times \{ \cos \Omega t [\cos (\omega t + \varphi - k_z z) - \cos \varphi] + \\ + \sin \Omega t \sin (\omega t + \varphi - k_z z) \}, \quad (83)$$

$$\beta_z^{(1)} = -\beta_{0x} \chi \left(\frac{2eE}{mc\gamma\omega} \right) \{ \cos \Omega t [\cos (\omega t + \varphi - k_z z) - \cos \varphi] + \\ + \beta_{0y} \left(\frac{\lambda}{2a} \right) \sin \Omega t [\sin (\omega t + \varphi - k_z z) - \sin \varphi] \}. \quad (84)$$

Уравнение второго порядка по η , описывающее движение частицы вдоль волнового вектора, имеет вид

$$\frac{d\beta_z^{(2)}}{dt} = \frac{e}{mc\gamma} \{ \beta_x^{(1)} H_y - \beta_z^{(1)} \beta_{0x} E_x \}. \quad (85)$$

Подставим соотношения (83), (84) и (63) в уравнение (85). Усреднение полученного выражения по периоду поля даст величину среднего ускорения частицы относительно оси z . Если учесть, что электрическое поле E_x и магнитное поле H_y пропорциональны $\sin(\omega t + \varphi - k_z z)$, то при усреднении не равный нулю вклад дадут члены, пропорциональные $\sin^2(\omega t + \varphi - k_z z)$. Такие члены получатся при умножении выражения для H_y на последний член в (83) и выражения для E_x на последний член в (84). Усреднение дает для величины среднего ускорения частицы

$$\left\langle \frac{d\beta_z^{(2)}}{dt} \right\rangle = \frac{2c\pi\beta_{0y}\beta_{0x}^2\chi}{a} \left(\frac{eE}{mc\gamma\omega} \right)^2 \sin 2\Omega t. \quad (86)$$

Уравнение показывает, что пондеромоторная сила, действующая вдоль волнового вектора, пропорциональна начальной скорости частицы в направлении неоднородности поля волны β_{0y} и квадрату начальной скорости в направлении электрического поля волны β_{0x} . Поэтому в том случае, когда одна из компонент начальной скорости (либо β_{0x} , либо β_{0y}) равна нулю, во втором приближении сила также равна нулю. Пондеромоторная сила действует против направления распространения волны при движении заряженной частицы в область сильного поля и по направлению распространения волны при движении в область слабого поля. Сила действует только в неоднородной волне, поскольку ее величина обратно пропорциональна расстоянию a , которое характеризует пространственную неоднородность волны. Когда a стремится к бесконечности, сила стремится к нулю.

В том случае, когда начальная скорость частицы вдоль электрического поля волны равна нулю, усредненная сила вдоль направления распространения волны, тем не менее, существует, но имеет более высокий (четвертый) порядок малости [7]. Эта сила действует на частицу только при условии, что в начальный момент времени частица имеет скорость вдоль направления неоднородности волны (в нашем случае — вдоль оси y).

Усредненная пондеромоторная сила, пропорциональная E^2 , действующая в направлении распростране-

ния волны, возникает при пересечении волн, имеющих более сложное пространственное распределение электромагнитного поля, — волн, неоднородных в обоих поперечных направлениях [8]. В волнах такого типа сила также действует только на частицы, пересекающие волну, т.е. на частицы, имеющие начальную скорость, направленную перпендикулярно волновому вектору.

7. Заключение

В электромагнитной волне (1) поля E и H являются периодическими и знакопеременными, причем среднее значение электрического и магнитного полей равно нулю. Можно было бы предположить, что такие поля будут оказывать знакопеременное воздействие на заряженную частицу и среднее отклонение, вызванное этим воздействием, также равно нулю. Однако такое предположение оказывается неправильным. В частности, в поле плоской однородной электромагнитной волны частица совершает систематический дрейф по направлению электрического поля, а также дрейф по направлению распространения волны. В поле неоднородной волны возникают дополнительные силы, выталкивающие частицу из области сильного поля ("градиентные силы"), а также силы, действующие в направлении волнового вектора. Учет этих сил существенно влияет на траекторию частиц в электромагнитной волне.

Авторы благодарны А.И. Никишову и В.И. Ритусу за полезные советы и обсуждения.

Список литературы

1. Volkov D M Z. Phys. **94** 250 (1935); Волков Д М ЖЭТФ **7** 1286 (1937)
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М Теория поля (М.: Наука, 1973)
3. Ритус В И Труды ФИАН **111** 5 (1979)
4. Болотовский Б М, Серов А В УФН **164** 545 (1994)
5. Серов А В Краткие сообщения по физике (8) 26 (2002)
6. Гапонов А В, Миллер М А ЖЭТФ **34** 242 (1958)
7. Serov A V Laser Phys. **7** 1190 (1997); Серов А В Квант. электрон. **25** 197 (1998)
8. Серов А В ЖЭТФ **119** 27 (2001)

Motion of particles in an electromagnetic wave

B.M. Bolotovskii, A.V. Serov

*P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 132-62 35; 334-07 87. Fax (7-095) 135-85 33
E-mail: bolot@lpi.ru; serov@x4u.lebedev.ru*

The behaviour of a charged particle in the field of a monochromatic electromagnetic wave is considered. The motion of a particle is determined not only by the field of the wave but also by the initial conditions of the problem. The trajectories of particles are calculated both using exact solutions and employing perturbation theory in $\eta = eE/(mc\omega\gamma)$, the ratio of the energy the field transfers to a particle over a wavelength, to the particle's rest energy. Two kinds of electromagnetic waves, namely those with coordinate independent amplitudes (homogeneous waves) and with coordinate dependent amplitudes (inhomogeneous waves) are considered. The motion of particles that are either at rest or move with prescribed velocity initially, is investigated. It is shown that a charged particle not only performs an oscillatory motion but also executes systematic drift in the field of the wave. In an inhomogeneous wave, accelerating ponderomotive forces also act on a particle.

PACS numbers: **03.50.+p**, **41.60.Cr**, **41.75.-i**

Bibliography — 8 references

Received 23 October 2002, revised 26 March 2003