

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Целочисленный квантовый эффект Холла и сопряжённые с ним явления

В.Т. Долгополов

Дан обзор экспериментальных и теоретических работ по исследованию целочисленного квантового эффекта Холла и других транспортных явлений, реализуемых в двумерном электронном газе, помещённом в квантующее магнитное поле. Особое внимание уделено первичным экспериментальным данным и анализу соответствия экспериментальных результатов теоретическим, а также рассмотрению теоретических предсказаний с точки зрения возможности их экспериментальной проверки. Среди экспериментов последних лет выделены те, которые ставят нерешённые вопросы. Сформулирован перечень возможных направлений для дальнейших исследований.

PACS numbers: 71.30.+h, 73.40.Qv, 73.43.-f

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402a.0113

Содержание

1. Введение (113).
 2. Предмет открытия (113).
 3. Идеальная электронная система в квантующем магнитном поле (114).
3.1. Энергетический спектр. 3.2. Случай $V(x) = 0$. Условие квантования. 3.3. Однородное электрическое поле. 3.4. Образец, ограниченный бесконечно высоким вертикальным потенциальным барьером. 3.5. Сжимаемые и несжимаемые полосы на краю идеального двумерного электронного газа. 3.6. Перенос заряда под уровнем химического потенциала. 3.7. Минимальная ширина плато.
 4. Электронная система в хаотическом потенциале (119).
4.1. Два предельных вида случайного потенциала. 4.2. Плотность состояний в короткодействующем потенциале. 4.3. Всплывание протяжённых состояний в короткодействующем потенциале. 4.4. Двухпараметрический скейлинг. 4.5. Плавный потенциал. 4.6. Экранирование хаотического потенциала.
 5. Эффекты, обусловленные межэлектронным взаимодействием (126).
5.1. Отрицательная термодинамическая плотность состояний. 5.2. Спиновая щель. Скирмионы. 5.3. Кулоновская щель. 5.4. Полосковые фазы.
 6. Целочисленный квантовый эффект Холла в экзотических двумерных электронных системах (131).
6.1. Графен. 6.2. Двумерный полуметалл. 6.3. Квантовый холловский спиновый изолятор.
 7. Заключение (134).
- Список литературы (135).

1. Введение

Открытый в 1980 г. К. фон Клитцингом [1] квантовый эффект Холла до сих пор остаётся объектом экспериментальных исследований и стимулирует работу теоретиков. История изучения этого эффекта сложилась так, что в среднем каждые пять лет происходило либо радикальное экспериментальное продвижение, либо появление новых теоретических идей. Затухающий со временем интерес к квантовому эффекту Холла вновь возрастал, и нет оснований полагать, что этот квазипериодический процесс уже закончился.

Целочисленный квантовый эффект Холла за солидный период, прошедший со времени его открытия, не только стал предметом текущей обзорной литературы (см., например, [2–6]), но и вошёл в учебники [7–10]. В связи с этим невольно возникает вопрос: нужен ли ещё один обзор на данную тему?

Мотивацией для написания настоящего обзора послужило то обстоятельство, что учебная литература, вообще говоря, отражает в большей степени теоретические аспекты, чем реальную экспериментальную ситуацию. В случае с квантовым эффектом Холла дело доходит до курьёза: построенные теории настолько привлекательны, что в учебниках излагаются как реальные даже те предсказания, которые в принципе не могут быть проверены экспериментально. Автор настоящего обзора ставил перед собой цель, во-первых, как можно более широко и подробно представить первичные экспериментальные данные и, во-вторых, специально отметить те теоретические построения, которые приводят к ненаблюдаемым предсказаниям.

2. Предмет открытия

Первое наблюдение квантового эффекта Холла [1] было проведено на кремниевой полевой структуре, устройство которой описано во множестве книг (см., например, [11]). Для нас здесь пока не важны ни детали устройства, ни электронный спектр полупроводника. Существенно

В.Т. Долгополов. Институт физики твёрдого тела РАН,
ул. Академика Осипяна 2, 142432 Черноголовка,
Московская область, Российская Федерация
E-mail: dolgop@issp.ac.ru

Статья поступила 9 сентября 2013 г.,
после доработки 11 октября 2013 г.

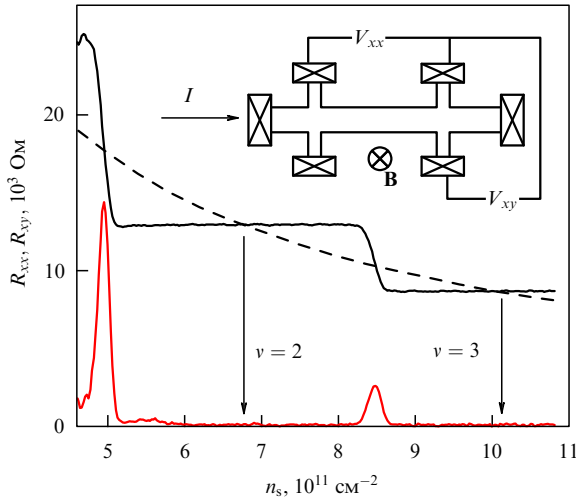


Рис. 1. Зависимость холловской (R_{xy}) и диагональной (R_{xx}) компонент тензора магнетосопротивления от концентрации двумерного электронного газа в образце на основе кремниевого полевого транзистора Si-MOSFET(100) (MOSFET — Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor), $B = 14$ Тл, $T = 30$ мК. На вставке схематически изображён образец и показаны измеряемые потенциалы.

только то, что у границы раздела полупроводника (Si(100)) и диэлектрика (SiO₂) реализован двумерный электронный газ (two dimensional electron gas — 2DEG). Слово "двумерный" означает, что электроны могут свободно двигаться только в плоскости, а в направлении, перпендикулярном границе раздела, их движение квантовано, причём все электроны находятся на нижнем квантовом уровне. Электронная система имеет вид холловского мостика, оснащённого омическими контактами для пропускания измерительного тока I и потенциальными контактами для измерения напряжений V_{xx} и V_{xy} (см. вставку на рис. 1). Наиболее существенным является то, что в кремниевых полевых структурах можно плавно изменять электронную концентрацию и контролировать её с точностью до 1 %.

На рисунке 1 приведены результаты эксперимента, полученные при более низкой, чем в работе [1], температуре (30 мК) на кремниевой полевой структуре, аналогичной использовавшейся в [1], однако обладавшей более высоким качеством. Как видно из рисунка, в магнитном поле, перпендикулярном плоскости двумерного электронного газа, обе компоненты тензора магнетосопротивления, $R_{xx} = V_{xx}/I$ и $R_{xy} = V_{xy}/I$, ведут себя весьма необычно. Действительно, в идеальном образце в однородном электрическом поле E все электроны дрейфуют в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям, со скоростью cE/B , поэтому в такой системе ожидается, что $R_{xx}(n_s) = 0$, $R_{xy} = B/n_s e c$, где n_s — электронная плотность, e — заряд электрона, c — скорость света в вакууме. Ожидаемая зависимость для R_{xy} показана на рис. 1 штриховой кривой.

В действительности холловская компонента тензора сопротивления демонстрирует не гладкую, а ступенчатую зависимость с широкими плато и резкими переходами между ними. На плато диссипативная компонента тензора магнетосопротивления близка к нулю, но в переходной области конечна. Уже в первых прецизионных измерениях было установлено, что сопротивление в центре плато определяется соотношением

$$R_{xy}^v = \frac{h}{e^2 \nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

с точностью не хуже шести значащих цифр. Более того, холловское сопротивление на плато не зависело от качества и размеров образца, а также от положения потенциальных контактов.

Таким образом, открытие целочисленного квантового эффекта Холла явилось открытием физической реализации числа — комбинации мировых констант h/e^2 . В настоящее время эта комбинация известна с точностью, лучшей, чем 11 знаков, и величина холловского сопротивления на плато принята в качестве эталона сопротивления.

Поскольку в чистой электронной системе появление плато на зависимости $R_{xy}(n_s)$ невозможно, приходится связать наблюдаемый эффект с хаотическим потенциалом, в котором находится электронная система. С другой стороны, поразительная точность реализации изменений мировых констант в "грязных" системах не является случайной, а должна быть связана с каким-то фундаментальным принципом. Поиск этого принципа представляет собой одну из основных задач физики целочисленного квантового эффекта Холла. Другой важной задачей является определение физических параметров, ограничивающих точность воспроизведения холловского сопротивления на плато в различных образцах. Если первая задача хотя бы частично решена [12], то вторая пока остаётся нерешённой.

3. Идеальная электронная система в квантующем магнитном поле

3.1. Энергетический спектр

Задача о спектре электронного газа в квантующем магнитном поле рассмотрена во многих учебниках (см., например, [13]), поэтому здесь мы ограничимся её кратким изложением. Будем полагать, что электронный газ расположен в плоскости (xy), а магнитное поле H направлено вдоль оси z . Для удобства дальнейших рассуждений введём статический электрический потенциал, зависящий только от одной координаты, $V(x)$. В калибровке Ландау векторный потенциал имеет вид $\mathbf{A} = (0, xH, 0)$. Через \mathbf{A} выражаются магнитное поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ и кинетическая часть гамильтониана $\hat{H} = (\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2/2m$, где $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, m — эффективная масса электрона. Таким образом, уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\left[p_x^2 + \left(p_y - x \frac{eB}{c} \right)^2 + 2mV(x) \right] \psi(x, y) = 2m\varepsilon \psi(x, y). \quad (2)$$

Решение уравнения (2) удобно искать в виде плоской волны вдоль оси y , т.е. в виде экспоненты, $\exp(iky)$, умноженной на некоторую функцию, зависящую только от x . Подстановкой решения такого вида уравнение (2) сводится к одномерному уравнению Шрёдингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 + V(x) \right] \psi(x) = \varepsilon \psi(x), \quad (3)$$

где $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота, $x_0 = kl^2 = k\hbar c/(eB)$ — координата ведущего центра, l — магнитная длина.

Уравнение (3) отвечает дискретному набору квантовых уровней при каждом значении k . Число различных k , приходящихся на единицу площади, находится следующим образом. Выделим прямоугольник со сторонами L_x и L_y . Координата ведущего центра лежит в

интервале $0 < x_0 < L_x$. Следовательно, $0 < k < L_x/l^2$. Одновременно необходимо удовлетворить циклическим граничным условиям по оси y : $k_i = 2\pi i/L_y$, где i — целое число. Отсюда $\Delta k = 2\pi/L_y$ и для искомой величины получаем $n_0 = 1/2\pi l^2$.

Классификация квантовых состояний с помощью квазинепрерывного набора волновых векторов k_y справедлива для произвольного одномерного потенциала $V(x)$. Ниже мы рассмотрим три наиболее важных с экспериментальной точки зрения потенциала.

3.2. Случай $V(x) = 0$. Условие квантования

Как следует из уравнения (3), при $V(x) = 0$ электрон движется в параболической потенциальной яме и набор его энергетических уровней определяется условием

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad (4)$$

а набор волновых функций соответствует собственным функциям гармонического осциллятора. Каждый из уровней расщеплён на два спиновых подуровня с энергиями, в простейшем случае определяемыми соотношением $\pm \mu_B g B$, где μ_B — магнетон Бора, g — фактор Ланде.

Электронная плотность в двумерных электронных системах с хорошей точностью задана компенсирующим зарядом. Поэтому химический потенциал не является фиксированным, а изменяется пилообразно, как показано на рис. 2. Скачки химического потенциала возникают при условии $n_s = N n_0$, где $N = 1, 2, \dots$, т.е. при целочисленных факторах заполнения $v = N$. Именно это условие, задающее периодичность в обратном магнитном поле $1/B$, определяет период любых квантовых осцилляций и примерно соответствует середине холловского плато (см. рис. 1).

3.3. Однородное электрическое поле

Электрический потенциал в однородном электрическом поле имеет вид $V(x) = -eEx$. Добавление к параболическому потенциалу линейного члена оставляет потенциал параболическим, сдвигается только центр параболы, т.е. в (3) x_0 заменяется величиной $x_1 = x_0 + x_E$, где $x_E = eE/(m\omega_c^2)$. Набор квантовых уровней по-прежнему

описывается соотношением (4), но вся лестница уровней сдвигается по энергии на величину $-eE(x_0 + x_E/2)$. Отсюда возникают два следствия. Во-первых, идеальная электронная система способна экранировать длинно-периодические потенциалы даже при целочисленном заполнении $v = N$. Экранирование оказывается своеобразным: изменение плотности электронов определяется второй производной от потенциала по координате. Во-вторых, каждый из электронов в однородном электрическом поле приобретает групповую скорость, перпендикулярную направлениям электрического и магнитного полей,

$$v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_y} = l^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_0} = \frac{cE}{B}, \quad (5)$$

и при целочисленном заполнении $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = N n_0 e v / E = N e^2 / h$. Холловское сопротивление изменяется монотонно с изменением концентрации электронов, принимая квантованные значения при целочисленном заполнении, как показано на рис. 1 штриховой кривой.

3.4. Образец, ограниченный бесконечно высоким вертикальным потенциальным барьером

Рассмотрим теперь двумерный электронный газ, занимающий полуплоскость $x > 0$, ограниченную бесконечно высоким потенциальным барьером при $x = 0$ (рис. 3). На вставке рис. 3 изображена эффективная потенциальная яма, входящая в уравнение (3). Яма образована частью магнитной параболы и обрезающей её вертикальной потенциальной стенкой. Результирующая яма сильнее, чем исходная парабола, ограничивает движение электронов, поэтому квантовые уровни в ней выше определяемых выражением (4). Более того, уровни становятся неэквидистантными по энергии.

Поведение энергий двух нижних квантовых уровней при изменении положения ведущего центра качественно отображено на рис. 3. Начиная с расстояний порядка магнитной длины приближение ведущего центра к вертикальному барьеру приводит к резкому увеличению энергии каждого из уровней по сравнению с энергией в глубине двумерной электронной системы. Ведущий центр, как показано на рис. 3, может располагаться вне

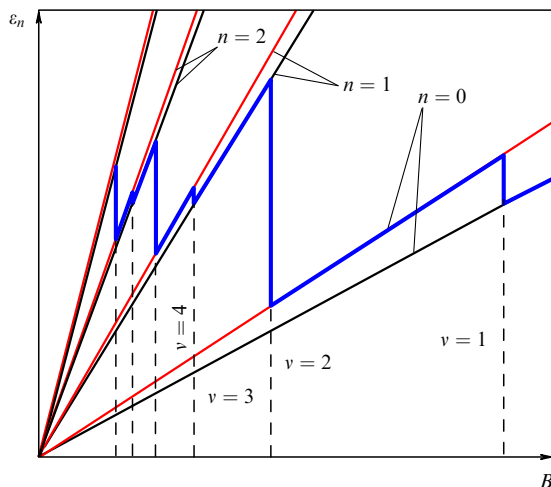


Рис. 2. Энергетические уровни (с учётом спинного расщепления) электронной системы в однородном квантующем магнитном поле. Жирная линия показывает зависимость химического потенциала системы от магнитного поля; $v = n_s/n_0$ — фактор заполнения.

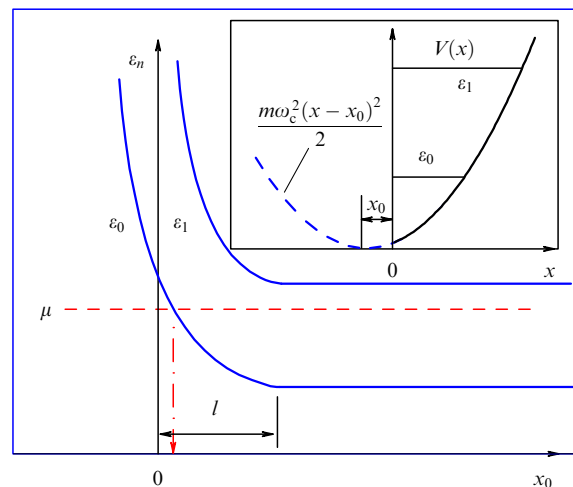


Рис. 3. Схематическое изображение зависимости энергий ε_0 и ε_1 двух нижних квантовых уровней от координаты ведущего центра x_0 . Вертикальной штрихпунктирной стрелкой отмечено положение краевого канала на оси абсцисс. На вставке показана эффективная потенциальная яма для электрона.

полуплоскости $x > 0$, однако соответствующая ему волновая функция электрона ограничена пределами этой полуплоскости.

В пространственно ограниченной идеальной двумерной электронной системе имеется конечная, хотя и малая, плотность состояний в каждой из энергетических щелей, возникающая вследствие загиба вверх квантовых уровней. В результате химический потенциал может зафиксироваться при любой энергии, превышающей энергию нижнего квантового уровня в глубине (рис. 3). Зависимость энергии от координаты ведущего центра означает её зависимость от k_y и наличие у электрона групповой скорости v в y -направлении. Значит, вдоль края течёт бездиссипативный электрический ток. Вычислим его величину для случая, представленного на рис. 3:

$$\begin{aligned} I_{\text{left}} &= \frac{e}{2\pi} \int_{k_y(\text{left})}^{\infty} v dk_y = \frac{e}{2\pi\hbar} \int_{k_y(\text{left})}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_y} dk_y = \\ &= \frac{e}{\hbar} \int_{\mu}^{\varepsilon_0} d\varepsilon = \frac{e}{\hbar} (\varepsilon_0 - \mu_{\text{left}}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если электронная система имеет вид полоски, то по её правой стороне будет протекать ток противоположного направления. Полный ток через сечение полоски

$$I = \frac{e}{\hbar} (\mu_{\text{right}} - \mu_{\text{left}}). \quad (7)$$

До тех пор пока электронная система находится в состоянии равновесия, $\mu_{\text{right}} = \mu_{\text{left}} = \mu$. Токи, протекающие по разным сторонам образца, взаимно компенсируются. По краю протекает только бездиссипативный диамагнитный ток. При отсутствии равновесия $\mu_{\text{right}} - \mu_{\text{left}} = eV$ и выражение (7), обобщённое для случая нескольких квантовых уровней под уровнем химического потенциала, совпадает с выражением (1).

В идеальном образце дополнительный заряд, необходимый для поддержания разности химических потенциалов, может быть помещён только на край полоски, поэтому холловское электрическое поле и вызванный им холловский ток неизбежно будут неоднородными [14]. Тем не менее полный ток, согласно уравнению (7), совершенно не зависит от распределения поля в глубине образца, что легко получить из (6), если под ε_0 понимать минимальную энергию соответствующего квантового уровня в полоске.

Появляется новая возможность для интерпретации целочисленного квантового эффекта Холла с привлечением бездиссипативного краевого тока, переносимого одним или несколькими одномерными краевыми каналами, каждый из которых несёт ток $I_n = \mu_n e/h$. Подобное рассмотрение, впервые предложенное в работе [15], получило широкое распространение благодаря применению техники Ландауэра для целочисленного квантового эффекта Холла [16] (рис. 4). Для наглядности краевые каналы изображают как линии пересечения уровня химического потенциала с изогнутым энергетическим уровнем на плоскости, задающей положение ведущего центра. Специально отметим, что в случае достаточно крутой стенки (например, вертикальной) определённое так изображение краевого канала может находиться вне пределов образца.

Ещё один вопрос, относящийся к краевым каналам в идеальном образце, был решён экспериментально. Этот вопрос связан с диссипацией энергии. Действительно, наличие тока при конечной разности химических потенциалов $\Delta\mu$ приводит к диссипации мощности $(n/h)(\Delta\mu)^2$.

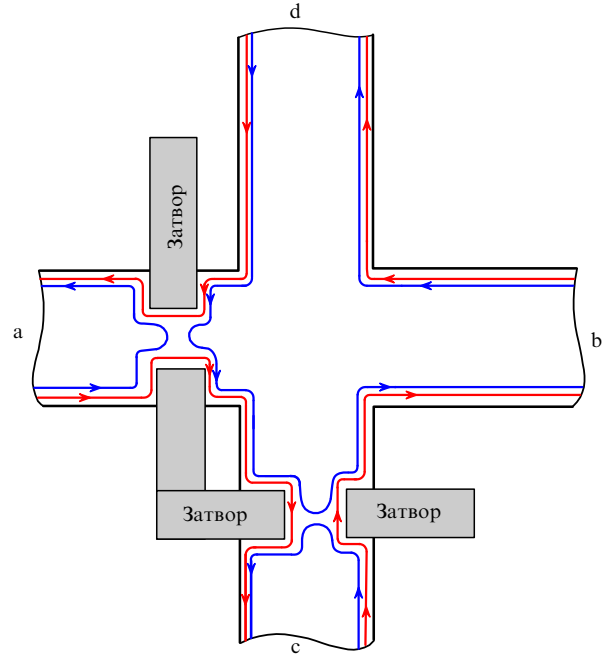


Рис. 4. Одна из геометрий образца, в которой формализм Ландауэра–Бюттикера удобен для расчёта. Потенциальные контакты a, b, c, d имеют различные значения химических потенциалов. Значения затворных напряжений выбраны так, чтобы один из краевых каналов связывал соседние контакты, а второй имел регулируемый коэффициент прохождения в каждом из узких мест. Задание коэффициентов прохождения и химических потенциалов двух из четырёх контактов позволяет рассчитать все токи и химические потенциалы двух других контактов.

Для обнаружения области, в которой происходит диссипация, были проведены эксперименты [17] по визуализации горячего пятна на холловском мостике. Обнаружено, что диссипация происходит в углу мостика (позднее было показано [18], что диссипация имеет место в двух углах, расположенных по диагонали), причём угол изменяется при смене направления магнитного поля (рис. 5). Угол выбирается из условия, что групповая скорость электронов, выходящих из контакта, направлена вдоль контакта так, что химические потенциалы электронов в краевом канале и контакте совпадают вдоль линии движения электронов.

3.5. Сжимаемые и несжимаемые полоски на краю идеального двумерного электронного газа

В этом разделе мы рассмотрим идеальный двумерный электронный газ, пространственно ограниченный плавным потенциалом. Слово "плавный" означает, что на масштабе магнитной длины энергия электронов изменяется на величину, малую по сравнению с циклотронной энергией. Часто потенциалы в реальных полупроводниковых двумерных системах относятся именно к этому типу.

Прежде всего определимся с терминологией. Кроме обычной одночастичной плотности состояний $\partial n/\partial \varepsilon$, можно ввести термодинамическую плотность состояний $\partial n_s/\partial \mu$, пропорциональную (см., например, [19]) сжимаемости электронной системы. Термодинамическая плотность зависит от температуры и может отличаться от нуля там, где одночастичная плотность состояний точно равна нулю. Если химический потенциал, как на рис. 3, расположен между квантовыми уровнями, то термодинамическая плотность состояний при нулевой тем-

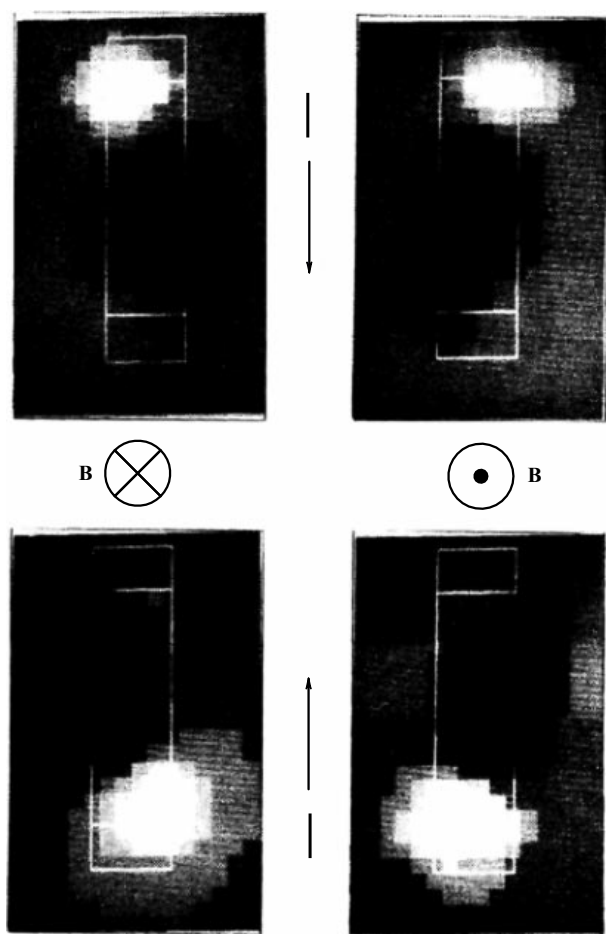


Рис. 5. Визуализация горячего пятна в холловском мостике в условиях квантового эффекта Холла. Светлыми линиями показаны границы двумерного электронного газа и токовых контактов. (Данные работы [17].)

температуре близка к нулю и электронная система несжимаема.

Рассмотрим сначала поведение дна электронной подзоны в отсутствие магнитного поля (рис. 6а). В этом случае дно зоны проводимости под уровнем химического потенциала повторяет профиль экранированного потенциала, а при параболическом законе дисперсии — и профиль электронной плотности с точностью до численного коэффициента. Последнее утверждение следует из того факта, что $\partial n / \partial \varepsilon = \partial n_s / \partial \mu_0 = \text{const}$.

Теперь обратимся к случаю квантующего магнитного поля. Координатная зависимость профиля дна зоны проводимости не может сохраниться неизменной при наложении квантующего магнитного поля [20]. Действительно, плотность электронов на каждом из квантовых уровней остаётся постоянной до тех пор, пока квантовый уровень находится ниже уровня химического потенциала. При сохранении неизменного профиля дна зоны проводимости возникли бы некомпенсированные электрические заряды и электрические поля, что энергетически невыгодно.

Реальный профиль дна зоны проводимости в зависимости от координаты ведущего центра показан на рис. 6б для двух целиком заполненных в объёме уровней Ландау. Как уже сказано, основным условием, определяющим электронную плотность, является условие электронейтральности, поэтому в общих чертах график электронной плотности как функции координаты в квантующем магнитном поле должен повторять график для нулевого поля. В точке пересечения дна зоны с химическим потенциалом электронная плотность равняется нулю и постепенно возрастает по мере движения вправо по координате до тех пор, пока не достигнет уровня n_0 . В области возрастания электронной плотности нижний уровень Ландау "приколот" к химическому потенциалу, поскольку мы полагаем поведение плотности состояний в идеальной системе δ -образным, т.е. подобным поведению дельта-функции. Эту область называют сжимаемой полоской (compressible liquid). Правее располагается

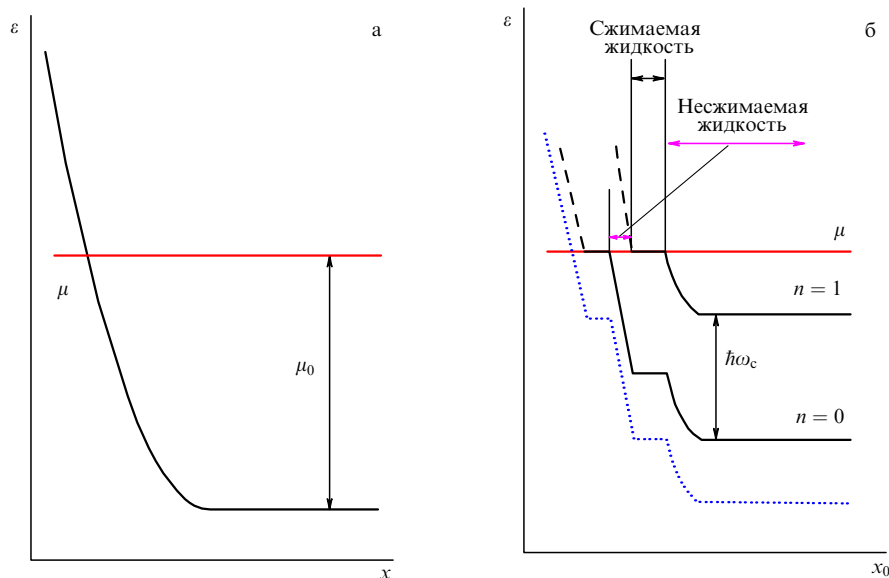


Рис. 6. (а) Зависимость энергии дна зоны проводимости от координаты в случае плавного потенциала в отсутствие магнитного поля; μ_0 — уровень химического потенциала, отсчитанный от дна зоны. (б) Зависимость энергии двух целиком заполненных в объёме уровней Ландау от координаты. Сплошные линии соответствуют той части квантового уровня, которая целиком или частично заполнена, штриховыми линиями обозначены незаполненные части квантовых уровней. Пунктирная линия показывает поведение дна электронной подзоны.

полоска несжимаемой электронной жидкости. В ней химический потенциал пересекает спектральную щель между уровнями Ландау, а дно зоны проводимости опускается на величину $\hbar\omega_c$. Концентрация электронов фиксирована на уровне n_0 , следовательно, нарушено условие электронейтральности. Потом всё повторяется: следующий уровень Ландау становится приколотым к химическому потенциалу и электронная плотность возрастает до тех пор, пока не сравняется с $2n_0$ и т.д.

Легко оценить ширину полоски несжимаемой электронной жидкости. Эта полоска представляет собой одномерный заряженный объект с избыточной плотностью заряда

$$e\delta n = e(n(x) - n_0) = e \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0),$$

где $n(x)$ — электронная концентрация в отсутствие магнитного поля, n_0 — фиксированная плотность электронов в пределах полоски. Электрическое поле, созданное в плоскости, оценивается как $(ea/\epsilon_L)(\partial n/\partial x)|_{x=x_0}$, где a — ширина полоски, ϵ_L — диэлектрическая проницаемость полупроводника. Ширина полоски определяется из условия, что перепад электрического потенциала равен циклотронной энергии:

$$a^2 \approx \hbar\omega_c \epsilon_L \left(e^2 \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Характерная ширина полосок несжимаемой электронной жидкости в реальных образцах составляет 100 нм, а полоски сжимаемой жидкости на порядок шире. В ряде экспериментов система полосок была визуализирована (см., например, [21]). На гладком краю электронные краевые состояния значительно отличаются от ожидаемых в случае резкой границы. Тем не менее одномерный характер движения электронов сохраняется и формула (7), так же как и техника Бюттикера [16], остаётся справедливой.

3.6. Перенос заряда

под уровнем химического потенциала

В физике нормальных металлов мы привыкли к тому, что линейные транспортные свойства вырожденной электронной системы могут быть выражены через малые

возмущения функции распределения в окрестности химического потенциала (см., например, [22]). В идеальной двумерной электронной системе в квантующем магнитном поле перенос заряда на уровне химического потенциала возможен только вдоль края, однако это обстоятельство не запрещает бездиссипативный перенос заряда между краями электронной системы под уровнем химического потенциала. Впервые внимание на это обстоятельство было обращено в работе [12].

Эксперимент может быть осуществлён на структуре, показанной на рис. 7а. Двумерный электронный газ имеет форму кольца (геометрия Корбино), внутренний и внешний радиусы которого находятся в контакте с областями нормального металла (не показанными на рисунке). Внутри кольца помещён длинный тонкий соленоид, поток магнитной индукции в котором можно управлять. К металлическим контактам параллельно подключены конденсатор (C_0) и вольтметр (V_1), а вся структура находится в квантующем магнитном поле.

Изменение потока магнитной индукции $\Delta\Phi$ в тонком длинном соленоиде приводит к изменению азимутальной компоненты векторного потенциала на радиусе r на величину $\Delta\Phi/(2\pi r)$. Фаза волновой функции при обходе кольца по азимуту изменится на $e\Delta\Phi/(ch)$. При

$$\Delta\Phi = \frac{ch}{e} \quad (9)$$

набранная фаза равна 2π вне зависимости от радиуса, поэтому электронная система переходит сама в себя. При этом с одного края в электронную систему вносится, а с другого из неё выносится один электрон на каждом из квантовых уровней, в чём легко убедиться, если исходить из квантованного значения холловской проводимости. Заряд ΔQ , пересекающий радиус r , не зависит от радиуса:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{ve^2}{h} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dt E(r) 2\pi r = \\ &= -\frac{ve^2}{hc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dt \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial t} = \frac{\Delta\Phi e}{ch} ve. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку изменение потока $\Delta\Phi$ ничем не ограничено, таким образом можно перенести с одного края на другой

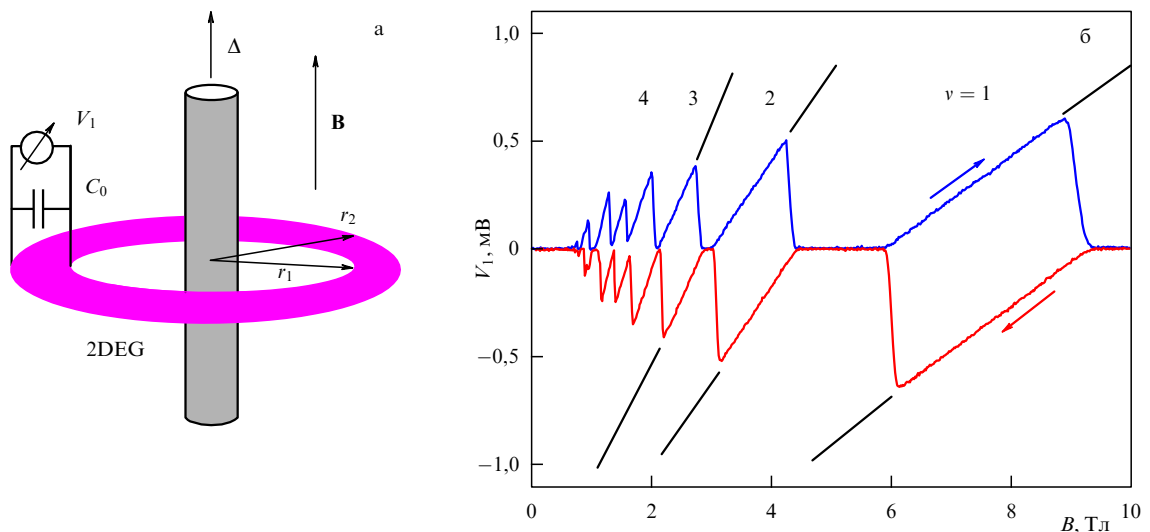


Рис. 7. (а) Схема мысленного эксперимента по наблюдению переноса заряда под уровнем химического потенциала. (б) Результат реального эксперимента. $T = 30$ мК, $C_0 = 0,65$ мкФ, $2r_1 = 2,02$ мм, $2r_2 = 3,9$ мм. Прямыми отрезками показаны ожидаемые наклоны.

под уровнем химического потенциала произвольное число электронов.

Переходя к реальному эксперименту [23], прежде всего отметим, что длинный тонкий соленоид, в сущности, вовсе не нужен, поскольку можно изменять магнитное поле B . При этом число входящих в двумерную систему электронов уже не будет равняться числу электронов, уходящих из неё в противоположный контакт. Как показано в [23], если исходный фактор заполнения является целочисленным, т.е. $n_s = \nu n_0(B)$ (где $\nu = 1, 2, \dots$), то заполнение будет оставаться целочисленным и после изменения магнитного поля. Измеряемое вольтметром напряжение в этом случае

$$V_1 = \Delta B \frac{\pi}{2} (r_1^2 + r_2^2) \frac{\sigma_{xy}}{cC_0}. \quad (11)$$

Результат эксперимента при увеличении и уменьшении магнитного поля показан на рис. 76. Как видно, наблюдаются квантованные значения холловской проводимости, хотя точность квантования ($\approx 1\%$) не сопоставима с точностью квантования холловского сопротивления. Прямые линии, соответствующие зависимости (11), ограничены областью пробоя, связанной с обратным туннелированием электронов из контакта в объём [23]. Особо отметим, что число электронов, перенесённых с одного края на другой в реальном эксперименте, действительно превысило исходное число электронов в двумерном слое.

3.7. Минимальная ширина плато

Если бы параметром, задаваемым извне, являлась электронная плотность, то наблюдать целочисленный квантовый эффект Холла в идеальной (однородной и без рассеяния) электронной системе было бы невозможно: диссипативная компонента тензора сопротивления равнялась бы нулю, а плато на холловской компоненте стянулось бы в точку. В действительности мы управляем либо магнитным полем, либо затворным напряжением полевого транзистора.

Рассмотрим в качестве примера трёхэлектродную систему [24], изображённую на вставке к рис. 8. Кроме затвора, отделённого от двумерной электронной системы блокирующим барьером, трёхэлектродная система содержит третий электрод (back electrode), туннельно связанный с двумерным электронным газом, имеющим поэтому то же самое значение электрохимического потенциала. Число электронов двумерной электронной системы не фиксированно, поскольку она может обмениваться электронами с третьим электродом, а электронейтральность требует равенства суммарного заряда электронов двумерного газа и третьего электрода положительному заряду на затворе.

На рисунке 8 показана найденная экспериментально в квантующем магнитном поле зависимость электронной плотности двумерного электронного газа от затворного напряжения, которая заметно отличается от линейной, наблюдающейся в нулевом магнитном поле. На экспериментальной зависимости просматривается слабо выраженное плато при единичном факторе заполнения и чётко выраженное плато при факторе заполнения, равном двум. Появление этих плато обусловлено отсутствием состояний в щели между квантовыми уровнями идеальной электронной системы. До тех пор пока уровень химического потенциала пересекает щель, электроны, компенсирующие изменение положительного заряда на затворе, переносятся на третий электрод. Соответственно, ширина плато выражается как

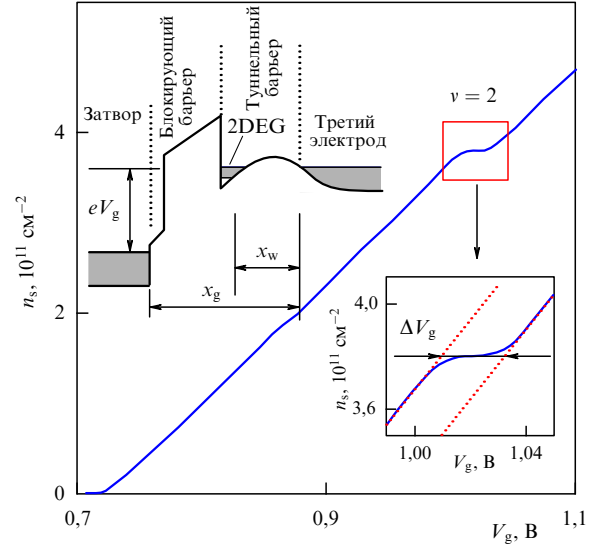


Рис. 8. Зависимость плотности двумерного электронного газа от напряжения на затворе в трёхэлектродной структуре, изображённой на вставке в левом верхнем углу рисунка, при $B = 16$ Тл, $T = 30$ мК.

$$\Delta V_g = \frac{x_g}{x_w} \frac{\Delta\mu(\nu)}{e}, \quad (12)$$

где $\Delta\mu$ — скачок химического потенциала при соответствующем факторе заполнения (см. рис. 2). В двухэлектродной системе с хорошей точностью можно считать, что третий электрод удалён на бесконечность ($x_g, x_w \rightarrow \infty$) и ширина плато по затворному напряжению равна скачку химического потенциала, делённому на заряд электрона. Это и есть минимальная ширина плато.

Не представляет труда вычислить минимальную ширину плато в той же модели для случая развёртки магнитного поля:

$$\Delta B(\nu) = \frac{\hbar c \epsilon_L}{2e^2 \nu (x_g - x_w)} \frac{\Delta\mu(\nu)}{e}. \quad (13)$$

4. Электронная система в хаотическом потенциале

4.1. Два предельных вида случайного потенциала

Экспериментальные подтверждения выводов, относящихся к идеальной электронной системе, справедливы настолько, насколько в конкретном эксперименте допустимо пренебречь существованием случайного потенциала в реальных образцах. С другой стороны, как упоминалось в разделе 3, наличие случайного потенциала не только не препятствует реализации целочисленного квантового эффекта Холла (до тех пор пока характерное время рассеяния электронов τ велико, $\omega_c \tau \gg 1$), но и играет определяющую роль в формировании широкого квантового плато.

Характерный пространственный масштаб, с которым следует сравнивать масштаб изменения случайного потенциала, определяется магнитной длиной l , а характерная энергия — это циклотронная энергия. Поэтому возможны два предельных вида случайного потенциала: короткодействующий, если изменение потенциальной энергии электрона на магнитной длине сравнимо с циклотронной энергией или превышает её, и плавный в противном случае. В первых экспериментах (см., напри-

мер, рис. 1) исследуемые структуры имели короткодействующий случайный потенциал, созданный близко расположенными к двумерным электронам примесями и шероховатостями поверхности. Позднее были созданы структуры с плавным потенциалом. Оказалось, что целочисленный квантовый эффект Холла исключительно устойчив к виду случайного потенциала.

4.2. Плотность состояний в короткодействующем потенциале

Рассмотрим в качестве примера влияние небольшого числа короткодействующих примесей на энергетический спектр двумерных электронов в окрестности нижнего уровня Ландау. Плотность примесей n_i считаем малой по сравнению с плотностью электронов n_s . Радиус действия примеси полагаем равным $b \ll l$, а её потенциал — равным u . Появление примесей приводит к двум эффектам [25]: во-первых, от квантового уровня отщепляются локализованные состояния, во-вторых, неотщеплённые состояния размываются в полосу. Полная плотность отщеплённых и неотщеплённых состояний по-прежнему равна $(2\pi l^2)^{-1}$.

Максимальную энергию для отщепления локализованного состояния легко оценить в первом порядке теории возмущений:

$$\Delta = u \frac{b^2}{l^2}. \quad (14)$$

Возникнут также локализованные состояния с меньшей энергией отщепления вплоть до границы с делокализованными состояниями на энергетическом уровне, отстоящем от квантового уровня идеальной системы на величину [25] порядка

$$\delta = \Delta \left(\frac{b}{l} \right)^{1/(\pi l^2 n_i)} \ll \Delta. \quad (15)$$

Интересно отметить, что введение единственной примеси с малым конечным радиусом локализует все электроны двумерной системы, хотя сдвиг по энергии быстро уменьшается по мере удаления электрона от примеси.

В пределе δ -образного примесного потенциала каждая примесь отщепляет всего одно состояние квантового уровня. Такие примеси с хаотическим распределением по

плоскости используются в численном моделировании случайного короткодействующего потенциала. Предполагается, что потенциал имеет вид белого шума с коррелятором

$$\langle V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}') \rangle = V_0^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (16)$$

Здесь угловые скобки означают пространственное усреднение. Система δ -образных примесей при сравнительно небольшой их концентрации, $n_i < (2\pi l^2)^{-1}$, в принципе не способна моделировать такой потенциал, поскольку $(2\pi l^2)^{-1} - n_i$ одноэлектронных состояний могут быть представлены в виде линейной комбинации исходных волновых функций таким образом, что на каждой примеси будет находиться узел волновой функции. Соответственно, в середине каждого квантового уровня останется δ -образный пик плотности состояний. Для моделирования потенциала с коррелятором (16) достаточной является концентрация примесей, в 40 раз превышающая число состояний на одном квантовом уровне [26].

Предполагая набор короткодействующих примесей электронейтральным (т.е. с равным числом примесей для $u < 0$ и $u > 0$) и распределённым по u , получим широко известную, представленную в учебниках, картину плотности состояний, показанную на рис. 9а. В случае потенциала с коррелятором (16) на каждом из квантовых уровней останется только одно протяжённое состояние.

Если уровень химического потенциала расположен в полосе локализованных состояний (рис. 9а), то диссипативная компонента проводимости имеет активационный характер, сменяющийся по мере удаления от середины квантового уровня прыжковым с переменной длиной прыжка. Если химический потенциал расположен в полосе делокализованных состояний, то диссипативная компонента проводимости имеет типичные металлические значения. Поэтому изменение положения химического потенциала в широких пределах приводит к цепочке переходов металл–диэлектрик.

Ширина и положение полосы делокализованных состояний могут быть определены, например, с помощью измерений энергии активации (рис. 9б). Из приведённых на рисунке данных сразу же следует, что хаотический потенциал в исследованном образце не симметричен и полоса делокализованных состояний не соответствует половинному заполнению квантового уровня.

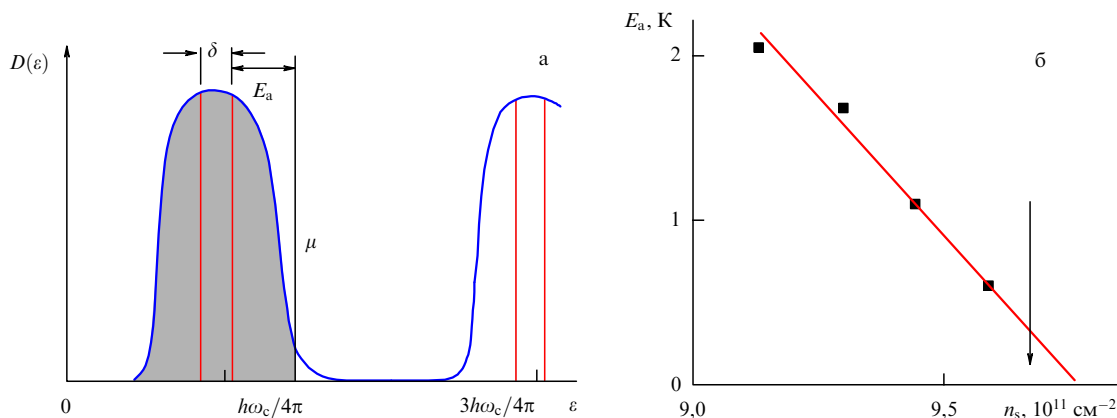


Рис. 9. Схематическое изображение зависимости плотности состояний D от энергии ε в квантующем магнитном поле в электронной системе с короткодействующим хаотическим потенциалом. E_a — энергия активации, δ — ширина полосы делокализованных состояний. (б) Зависимость энергии активации от электронной плотности для образца GaAs/AlGaAs, помещённого в нормальное магнитное поле величиной 16 Тл [27]. Стрелкой отмечена электронная плотность, соответствующая заполнению 2,5 квантовых уровней.

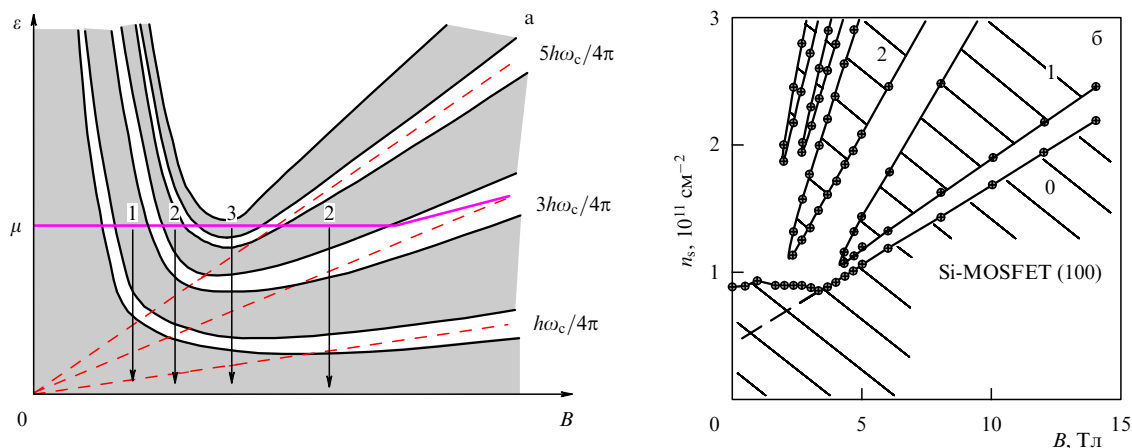


Рис. 10. (а) Схема, иллюстрирующая всплытие делокализованных состояний трёх нижних квантовых уровней. (б) Фазовая диаграмма на плоскости (B, n_s) , полученная экспериментально для электронного газа в Si-MOSFET (100) при $T = 30$ мК. Цифры 0, 1 и 2 указывают число протяжённых состояний под уровнем Ферми, если этот уровень расположен в пределах соответствующей заштрихованной области.

Наличие широкой полосы локализованных состояний (щели подвижности) использовано в работе [12] для доказательства связи квантования холловской проводимости в системе, характеризующейся беспорядком с калибровочной инвариантностью, следующим образом. Поскольку адиабатическое изменение потока через тонкий соленоид (рис. 7а) не может вызвать рождение делокализованных электрон-дырочных пар, изменение потока магнитной индукции на величину, заданную соотношением (9), должно привести, так же как и в идеальном случае, к переносу между краями целого (или равного нулю) числа электронов.

4.3. Всплытие протяжённых состояний в короткодействующем потенциале

Идея о том, что в слабых магнитных полях протяжённые состояния будут смещаться вверх по энергии, уходя на бесконечность по мере уменьшения поля [28], основывается на следующем из скейлинговой гипотезы [29] предсказании, в соответствии с которым в нулевом магнитном поле даже слабо разупорядоченная двумерная система невзаимодействующих электронов при нулевой температуре должна быть изолятором вне зависимости от электронной плотности. С другой стороны, согласно [30] делокализованные состояния имеют топологическую защищённость и не могут исчезнуть при уменьшении магнитного поля. Возникает картина, схематично изображённая на рис. 10а, где светлые полосы соответствуют протяжённым состояниям, а тёмные — локализованным. В проводимости σ_{xy} ожидается появление плато, положение центров которых на рис. 10а отмечено стрелками, а числа у стрелок показывают величину холловской проводимости в относительных единицах. В слабых магнитных полях, $\omega_c \tau < 1$, порядок следования плато обратный по отношению к таковому в сильном квантовом поле.

Красота представленной картины породила серию попыток обнаружить всплытие делокализованных состояний экспериментально (см., например, [31–34]). Твёрдо установлено, что протяжённые состояния не следуют за той линией на плоскости (B, n_s) , по которой должен двигаться максимум плотности состояний в идеальном образце. Это утверждение иллюстрирует рис. 10б. Хорошо видно, что протяжённые состояния не опускаются ниже некоторой границы, на которой имеются осцилляции, и сливаются по мере приближения

к $B = 0$ в металлическое состояние, типичное для большой электронной плотности. Исчезновение полос локализованных состояний в слабом магнитном поле не позволило наблюдать дополнительные плато холловской проводимости. В нескольких работах (см., например, [32]) наблюдалось слабое увеличение электронной концентрации, отвечающей максимуму σ_{xy} , по мере уменьшения магнитного поля, однако осталось невыясненным, не связано ли это наблюдение с осцилляцией границы между металлической и диэлектрической фазами.

В сущности, отсутствие ярко выраженных эффектов, связанных со всплытием делокализованных состояний, не является удивительным. Действительно, наличие хаотического потенциала приводит при малой плотности электронов к локализации носителей тока и андерсоновскому переходу металл–диэлектрик при некоторой критической концентрации электронов. В области металлической проводимости имеется связанная с интерференцией электронов температурозависящая поправка, уменьшающая контактанс на величину порядка $(e^2/h) |\ln T|$. Предполагается, что при стремлении температуры к нулю поправка достигнет масштаба исходного контактанса двумерной электронной системы и электроны при такой температуре локализуются. Типичный безразмерный контактанс электронной системы среднего качества достигает в металлическом состоянии величины ~ 100 , поэтому для локализации требуется температура $\sim \exp(-100)$ и линейный размер системы $\sim \exp 100$. Ни одно из этих условий не осуществимо, поэтому в реальной ситуации всё, на что можно рассчитывать, — это слабый логарифмический сдвиг точки андерсоновского перехода вверх по электронной плотности. Другими словами, в реальных условиях нет сколь угодно широкой области для наблюдения всплытия состояний.

Другой проблемой является исчезновение в слабых полях полос локализованных состояний, которое обнаружено практически во всех экспериментальных работах, но пока никак не комментируется теорией¹.

¹ Недавно появились численные симуляции, возможно, указывающие на совершенно противоположное поведение квантовых уровней при ослаблении магнитного поля — антилевитацию (см. [36]). Экспериментально никаких проявлений антилевитации пока не обнаружено.

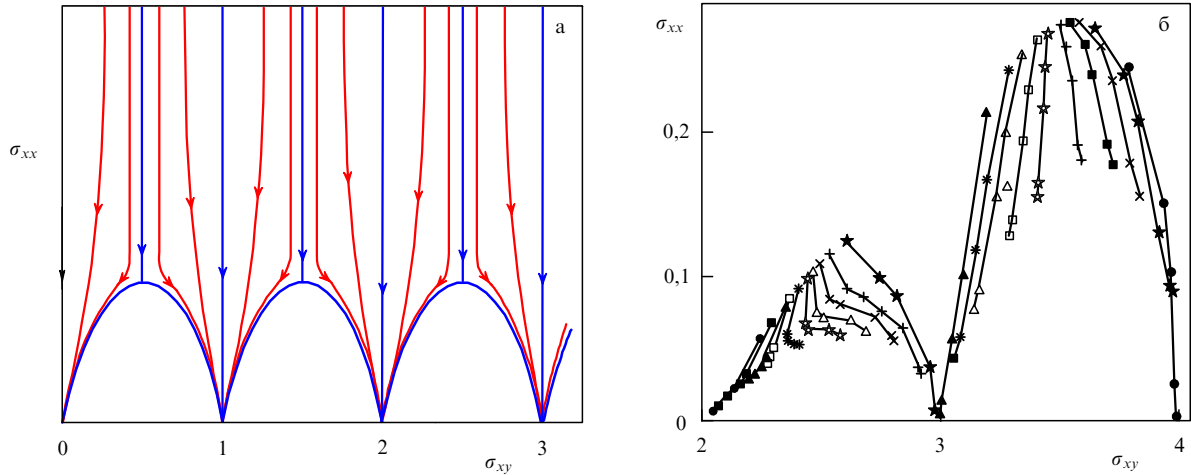


Рис. 11. Ожидаемая диаграмма линий потока на плоскости $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$. (б) Экспериментально полученная диаграмма линий потока для двумерного электронного газа в Si-MOSFET(100), $n_s = 4,2 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$. (Из работы [39].)

4.4. Двухпараметрический скейлинг

Как мы обсуждали в разделе 4.3, в бесконечной электронной системе при наличии короткодействующих рассеивателей часть электронов локализована. Естественно поставить вопрос о том, как будут вести себя безразмерные кондактансы σ_{xx} и σ_{xy} в образцах конечных размеров. Этот вопрос рассмотрен в рамках гипотезы масштабного преобразования (скейлинговой гипотезы). Предполагается, что состояние системы однозначно определяется двумя компонентами тензора кондактанса, σ_{xx} и σ_{xy} , поэтому изменение этих компонент при изменении размера электронной системы задано самими компонентами кондактанса [35, 37, 38]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \ln L} = \beta_{xx}(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}), \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \ln L} = \beta_{xy}(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}). \quad (17)$$

В случае хаотического короткодействующего потенциала с коррелятором (16) в области $\sigma_{xx} > 1$ получены [38] следующие выражения для функций β_{xx} и β_{xy} :

$$\begin{aligned} \beta_{xx} &= -\frac{1}{2\pi^2 \sigma_{xx}} - D \sigma_{xx} \exp(-2\pi \sigma_{xx}) \cos(2\pi \sigma_{xy}), \\ \beta_{xy} &= -D \sigma_{xx} \exp(-2\pi \sigma_{xx}) \sin(2\pi \sigma_{xy}), \end{aligned} \quad (18)$$

где D — неизвестная константа.

Решения системы уравнений (17), (18), исключив из них параметр L , удобно изобразить в виде линий потока на плоскости $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ (рис. 11а). Прежде всего обсудим формальные следствия уравнений (18). При больших значениях σ_{xx} холловская компонента кондактанса не перенормируется и все линии потока в этой области параллельны оси ординат. Существенные отклонения от такого поведения наступают при $\sigma_{xx} \approx 1$. Линии потока, отвечающие целым значениям σ_{xy} , и в этой области остаются вертикальными, доходя до нулевого значения σ_{xx} , а при полуцелых величинах холловского кондактанса они опускаются по вертикали до некоторого значения σ_{xx}^c , при достижении которого β_{xx} обращается в нуль. При прочих значениях холловского кондактанса линии потока по мере уменьшения диссипативной компоненты кондактанса стремятся попасть в одну из точек $(i, 0)$, где i — целое число. В каждой из критических точек $(i + 1/2, \sigma_{xx}^0)$ линии потока расходятся в разные стороны, асимптотически приближаясь к некоторой предельной кривой (жирная дугообразная кривая на рис. 11а). Под-

черкнём, что представленная картина частично основывается на экстраполяции строгого решения (18) в область, в которой это решение несправедливо.

Теоретическое рассмотрение [35, 37, 38] и все приведённые выше выражения относятся к газу невзаимодействующих, поляризованных по спину электронов. Возникает естественный вопрос: почему вообще при больших диссипативных кондактансах ожидается изменение кондактанса с изменением размера и почему соответствующая поправка к σ_{xx} отрицательна и пропорциональна $\ln L$? Ответ звучит несколько парадоксально: поправка связана со слабой локализацией. Основной, часто легко интерпретируемый "на пальцах", слаболокализационный член, как известно, подавляется при введении слабого магнитного поля, нормального плоскости двумерного газа. Этот член связан с интерференцией электронных волн, возвращающихся в результате многократного рассеяния в исходную точку по петлевой траектории. Кроме этой простейшей траектории можно указать и другие, например, имеющие форму восьмёрки траектории, гораздо более устойчивые к подавлению магнитным полем.

В реальных двумерных электронных системах невозможно пренебречь электрон-электронным взаимодействием. В этом случае [40] двухпараметрический скейлинг сохраняется при видоизменении функций β_{xx} и β_{xy} :

$$\begin{aligned} \beta_{xx} &= -\frac{1}{\pi} - D_1 \sigma_{xx}^2 \exp(-2\pi \sigma_{xx}) \cos(2\pi \sigma_{xy}), \\ \beta_{xy} &= -D_1 \sigma_{xx}^2 \exp(-2\pi \sigma_{xx}) \sin(2\pi \sigma_{xy}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $D_1 = 64\pi/e \approx 74,0$. Все вышеприведённые рассуждения, включая относящиеся к логарифмической поправке к σ_{xx} при больших диссипативных кондактансах и структуре потоковых линий, остаются справедливыми для уравнений (19).

Выбор линии потоковой диаграммы в эксперименте может быть осуществлён подбором трёх параметров: электронной плотности n_s , магнитного поля B и амплитуды хаотического потенциала V_0 (или τ). Создаётся впечатление, что можно исходить из любой точки плоскости $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. С этой целью зафиксировав электронную концентрацию и для начала ограничимся случаем $\omega_c \tau \leq 1$. Классические выражения для компонент проводимости ограничивают

нас при этом верхней четвертью окружности,

$$(\sigma_{xy}^0)^2 + \left(\sigma_{xx}^0 - \frac{\sigma_0}{2}\right)^2 = \frac{(\sigma_0)^2}{4}, \quad (20)$$

где σ_0 — значение проводимости в нулевом магнитном поле, $\sigma_0 \geq \sigma_{xx}^0 \geq \sigma_0/2$, $0 \leq \sigma_{xy}^0 \leq \sigma_0/2$. По причинам, обсуждавшимся выше (см. также разделы 4.2, 4.3), выбор больших начальных значений σ_{xx}^0 не приведёт к сколько-нибудь значительному продвижению вниз по линии потока, поэтому в данных условиях вначале доступна весьма ограниченная часть плоскости, $\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0 \leq 2, 3$.

В обратном предельном случае, $\omega_c \tau \gg 1$, начальный выбор точки плоскости $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ определяется границей применимости самосогласованного борновского приближения, при котором исходная область определяется соотношениями

$$[\sigma_{xx}^0]_{\max} = \frac{2e^2}{\pi h} \left(i + \frac{1}{2}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \sigma_{xy}^0 \leq \sigma_0. \quad (21)$$

В эксперименте исследуется не зависимость от размера, а зависимость от температуры. Предполагается, что размер интерференционной области задаётся длиной сбега фазы $L_\phi(T)$ или линейным размером области электрон-электронного взаимодействия L_{ee} . Макроскопический образец имеет гораздо большие размеры, и кондактанс автоматически усредняется по многим образцам с размером $L(T)$. Оба характерных размера имеют степенную зависимость от температуры. Диаграммы линий потока представлены в ряде публикаций (см., например, [3, 39, 41–43]).

Пример построенной экспериментально потоковой диаграммы приведён на рис. 11б. Каждая из линий диаграммы соответствует фиксированному фактору заполнения при постоянной электронной плотности, что означает фиксированность n_ξ и B . Хаотический потенциал также предполагается независимым от температуры в интервале от 0,3 К до 1,2 К, где проводились измерения. Основной вывод из эксперимента состоит в качественном соответствии найденных потоковых диаграмм теоретическим предсказаниям: прежде всего действительно наблюдается движение линий потока сверху вниз, часть потоковых линий направлена в точки $(i + 1/2, 0)$, прослеживается предельная колоколообразная кривая, вдоль которой экспериментальные точки приближаются к оси абсцисс, наконец, на каждой из колоколообразных кривых можно обнаружить точку, разделяющую потоки вправо и влево.

Есть и заметные отличия от предсказаний теории. Прежде всего, это неуниверсальность вертикального размера колоколообразных кривых как на одном образце, так и при переходе от образца к образцу, а также неожиданные искривления линий потока вблизи полуполных значений холловского кондактанса и отсутствие симметрии относительно полуполных σ_{xy} . Последнее сильно изменяется от образца к образцу и в принципе может быть связано с асимметрией хаотического потенциала.

Единственным очевидным исключением из общего ряда результатов экспериментальных работ являются результаты работы [44], в которой обнаружено почти полное совпадение колоколообразных кривых для двух интервалов по σ_{xy} : (0,1) и (1,2). На основе результатов [44] в дальнейших теоретических построениях принято и использовано [45], что граничная колоколообразная кривая является полуокружностью, хотя по оригиналь-

ным данным точки при понижении температуры не приближаются к полуокружности, а удаляются от неё.

По-видимому, результат работы [44] следует рассматривать как случайный, поскольку во всех экспериментах, где наблюдалось резкое возрастание ρ_{xx} на каком-либо плато ρ_{xy} [46–48], обнаруженные колоколообразные кривые имели вид полуокружностей, радиус которых был не универсальным, а зависел от номера плато. На случайный характер обнаружения полуокружности указывают и результаты недавних симуляций [49].

Использован и другой способ обработки экспериментальных результатов, позволяющий оценить степень применимости выводов скейлинговой теории к реальной ситуации в исследуемых двумерных электронных системах. Этот способ основан на ряде предположений, а именно:

1) как и в теории, хаотический потенциал имеет вид белого шума;

2) в образце бесконечных размеров при нулевой температуре, в отличие от того, что изображено на рис. 9, на каждом из квантовых уровней имеется только одно делокализованное состояние при энергии ε_i ;

3) область измерений выбрана таким образом, что линии тока прилегают к колоколообразной кривой;

4) измерения проводятся в той области, где плотность состояний можно считать постоянной.

Производятся измерения одной из компонент кондактанса², например σ_{xx} , для идентичных образцов различного размера L при такой низкой температуре, при которой температурная зависимость кондактанса становится насыщенной [50]. В соответствии с приведённым выше предположением 3, σ_{xx} является функцией только одной переменной — отношения L/ξ , где $\xi \propto |\varepsilon - \varepsilon_i|^{-\nu}$ — длина локализации электрона с энергией ε . Измеряется также зависимость ширины пика диссипативной компоненты кондактанса на фиксированной высоте $\Delta B(L)$. С учётом предположения 4 $\Delta B \propto L^{-1/\nu}$.

Наиболее убедительные и, по мнению авторов, наиболее точные результаты получены в работе [50], где реализована описанная выше программа. Пример расположения экспериментальных точек из этой работы приведён на рис. 12а. Если использовать только экспериментальные точки, то в качестве подгоночной кривой можно провести с отсечкой на оси ординат множество различных линий, простейшей из которых является показанная на рис. 12а прямая. Авторы работы [50] при анализе своих результатов негласно добавили, в соответствии с приведённым выше предположением 2, к экспериментальным точкам точку (0,0) и в качестве оптимальной подгонки использовали кривую (штриховая кривая на рис. 12а), соответствующую $\nu = 2,3 \pm 0,1$. Последнее значение прекрасно согласовывалось с существовавшей на момент публикации эксперимента теорией [52] и результатами численного моделирования [53]. Однако теория не относилась к короткодействующему потенциалу, а численное моделирование позднее [54] было поправлено так, что в пределах указанной точности экспериментальные результаты уже не совпадали с теоретическими.

Аналогичные измерения характерной ширины пика σ_{xx} или крутизны наклона ρ_{xy} на переходе между плато в зависимости от температуры выполнены во многих экспериментальных работах (детальное описание экспериментов см. в [55]). Интерпретация таких измерений

² При обработке эксперимента часто пользуются компонентами тензора сопротивления.

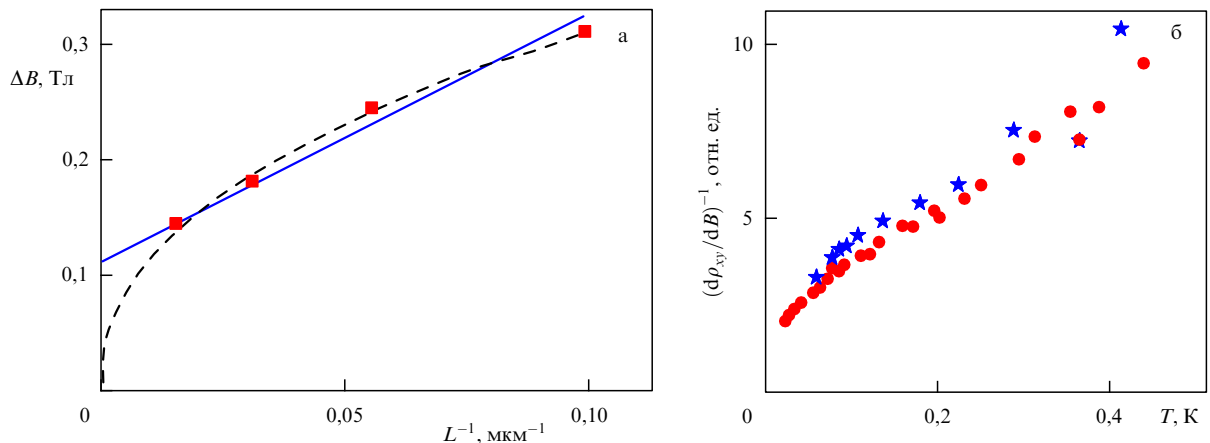


Рис. 12. (а) Зависимость ширины пика от размера образца для перехода 2–3 (переход между плато холловского сопротивления с соответствующими номерами). (Из работы [50].) (б) Зависимость величины, обратной наклону холловского сопротивления, $(d\rho_{xy}/dB)^{-1}$ на переходе 1–2, от температуры для двумерного электронного газа в сильноразупорядоченной гетероструктуре GaAs/AlGaAs. (По данным работы [51].)

дополнительно осложнена тем, что сама зависимость от температуры длины L_T , играющей роль размера образца, известна только предположительно. Тем не менее доступные экспериментальные данные говорят скорее о наличии полосы делокализованных состояний в исследуемых образцах (рис. 12б). Этот вывод поддерживается и результатами измерения ширины пика диссипативного контактанса в зависимости от частоты [56].

Как мы видим, многие предсказания теории либо вообще не подтверждаются экспериментом, либо подтверждаются только на качественном уровне. Тем не менее как из теории, так и из эксперимента, несомненно, следует, что в квантующем магнитном поле при наличии короткодействующего хаотического потенциала в результате интерференционных эффектов и межэлектронного взаимодействия электроны локализируются на масштабах, значительно превышающих магнитную длину (до $10^4 l$ в экспериментах [50]), причём размер области локализации резко возрастает при приближении энергии электрона к энергии делокализованных состояний.

4.5. Плавный потенциал

В плавном потенциале движение каждого электрона можно рассматривать как движение его ведущего центра вдоль линии эквипотенциала. (Это утверждение следует из того факта, что сила Лоренца не производит работы.) В симметричном плавном потенциале (рис. 13а) имеются набор минимумов и максимумов, разделённых седловыми точками. Эквипотенциалы, проходящие через седловые точки, образуют сетку, ячейки которой определяют пространственный масштаб потенциала и задают бесконечный кластер. Все остальные эквипотенциалы, окружающие минимумы или максимумы, являются замкнутыми и соответствуют локализованным электронам.

В фиксированном магнитном поле по мере увеличения концентрации электронов сначала заполняются минимумы потенциала и уровень химического потенциала располагается в полосе локализованных состояний, затем химический потенциал пересекает уровень энергии бесконечного кластера и вновь переходит в полосу локализованных состояний, траектории которых окружают максимумы потенциала.

Причина, приводящая к появлению квантованных значений холловского контактанса, выяснена в работе [57]. В электрическом поле, параллельном плоскости,

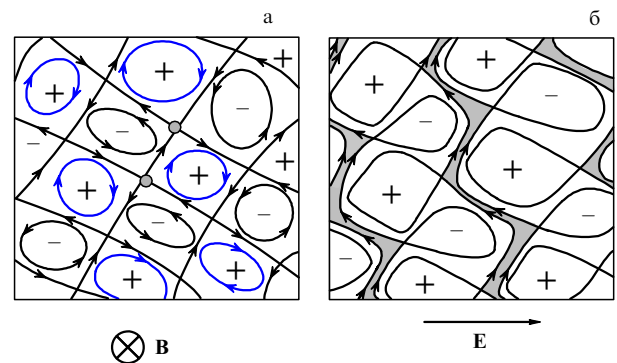


Рис. 13. (а) Схематическое изображение плавного хаотического потенциала в отсутствие внешнего электрического поля. Знаками + и – обозначены соответственно максимумы и минимумы потенциала. Стрелками показано движение ведущего центра. (б) Картина плавного потенциала при наличии электрического поля. Тёмным цветом выделены области протяжённых состояний, переносящие ток.

картина эквипотенциальных линий существенно изменяется (рис. 13б), поскольку между седловыми точками появляется разность энергий $\Delta W = e\mathbf{E}\mathbf{R}$, где \mathbf{R} — радиус-вектор, соединяющий соседние седловые точки. Возникают полосы протяжённых состояний (тёмные области на рис. 13б), направленные в среднем нормально электрическому полю. В соответствии с рассмотрением, проведённым в разделе 3.4, по полосе протяжённых состояний, если они заполнены, переносится ток $\Delta I = \Delta W(e/h)$. Суммируя все токи в пределах единичной длины и по всем заполненным квантовым уровням, получим выражение $\sigma_{xy} = ve^2/h$, где, как и в уравнении (1), v — число заполненных квантовых уровней.

Рассматриваемая модель обладает очевидным недостатком: переходная область между плато зависит от величины электрического поля. Кроме того, использование локального соотношения между током и электрическим полем возможно только при размерах, существенно превышающих размер перколяционной сетки.

4.6. Экранирование хаотического потенциала

Обсуждавшиеся в разделах 4.1–4.4 хаотические потенциалы, вообще говоря, не совпадают с затравочным потенциалом, существовавшим в отсутствие двумерного электронного газа. В длинноволновом пределе ($q \rightarrow 0$)

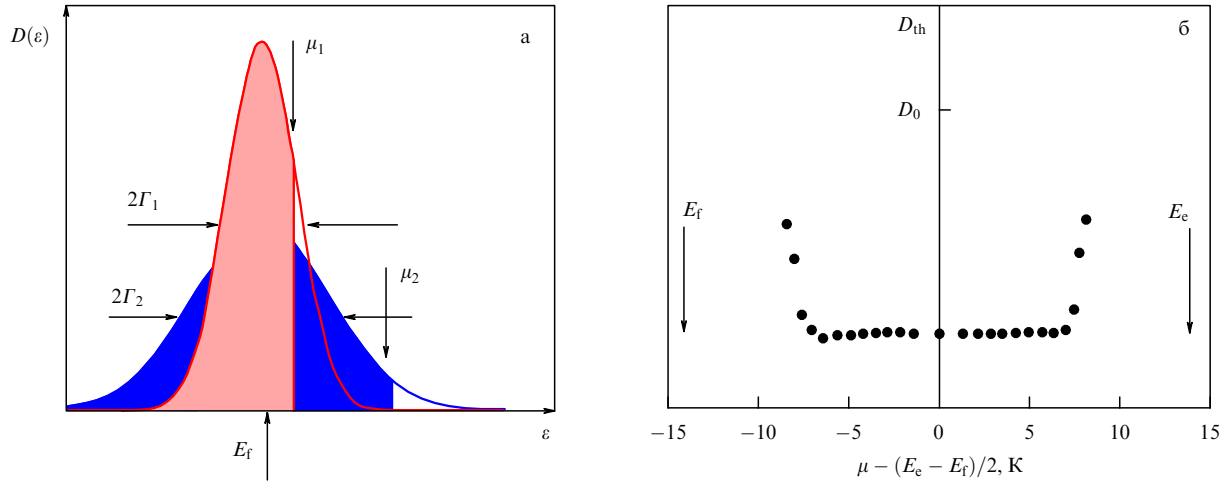


Рис. 14. (а) Иллюстрация решения системы (23) для двух значений химического потенциала, μ_1 и μ_2 , $\mu_2 > \mu_1$, $D(\varepsilon) = (\partial n / \partial \varepsilon)_\mu$ — одночастичная плотность состояний. (б) Термодинамическая плотность состояний D_{th} как функция энергии по измерениям энергии активации на Si-MOSFET (100) в окрестности фактора заполнения $\nu = 8$ при $B = 6,7$ Тл, D_0 — термодинамическая плотность состояний в нулевом магнитном поле (по результатам работы [61]).

линейное экранирование электронной системой определяется эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon(q) = \epsilon_L \left(1 + \frac{q_s}{q} \right), \quad (22)$$

где q_s — обратный радиус экранирования,

$$q_s = 2\pi e^2 \frac{\partial n_s}{\partial \mu} \frac{1}{\epsilon_L},$$

$D_{th} = \partial n_s / \partial \mu$ — термодинамическая плотность состояний, а химический потенциал μ отсчитывается от дна двумерной подзоны.

Из уравнения (22) можно заключить, что если плотность состояний на уровне химического потенциала равна нулю, то в условиях квантового эффекта Холла при нулевой температуре плавные потенциалы с небольшой амплитудой вообще не будут видоизменяться при появлении двумерного электронного газа. Этот вывод неверен [58]. Действительно, электрическое поле сдвигает положение минимума магнитной параболы (см. раздел 3.1). Следовательно, вторая производная от потенциала по координате определяет изменение электронной плотности, что и приводит к своеобразному экранированию потенциала.

При конечной температуре на верхнем квантовом уровне появляются занятые электронные состояния, а на нижнем — соответственно, пустые. Число и первых, и последних зависит как от температуры, так и от положения химического потенциала, поэтому термодинамическая плотность состояний оказывается конечной даже там, где изначально она была нулевой. Появляется дополнительное температурно-зависящее экранирование.

Особенно интересен и практически важен случай нелинейного экранирования, при котором характерная амплитуда плавного хаотического потенциала является сравнимой с энергетической щелью между соседними квантовыми уровнями или даже превышает её [59]. Начнём с потенциала, имеющего относительно небольшую амплитуду, $|U| \leq E_e - E_f$, где E_e и E_f — соответственно энергии пустого и заполненного соседних квантовых уровней в электронной системе без беспорядка. Термодинамическая плотность состояний, определённая

на пространственном масштабе, существенно превышающем характерный масштаб хаотического потенциала, является функцией ширины квантового уровня. Последняя зависит от экранирования и, следовательно, от термодинамической плотности состояний. Для нахождения этих величин следует решить систему уравнений [60]:

$$D_{th} = D_{th}(\Gamma, \mu), \quad \Gamma = \Gamma \left(\Sigma_q \frac{U_q}{\epsilon_q} \right), \quad (23)$$

где D_{th} — термодинамическая плотность состояний, Γ — ширина квантового уровня, ϵ_q — диэлектрическая проницаемость.

Результат решения качественно показан на рис. 14а. При удалении химического потенциала от середины уровня E_f ширина квантового уровня Γ возрастает пропорционально $|E_f - \mu|$. Уже в первых экспериментах [61, 62] эта зависимость проявила себя (рис. 14б) как исчезновение влияния положения химического потенциала на величину измеренной термодинамической плотности состояний в окрестности целочисленного фактора заполнения. Следует отметить, что при обработке результатов этих экспериментов термодинамическая плотность состояний была заменена величиной $\partial E_a / \partial n_s$, что допустимо, только если граница между локализованными и делокализованными состояниями сама не зависит от ширины квантового уровня. Более детальные измерения термодинамической плотности состояний с помощью экспериментальной техники, обсуждаемой в разделе 5, и сравнение экспериментальных и теоретических результатов проведены в [60].

Теперь перейдём к рассмотрению случая, в котором амплитуда плавного потенциала значительно превышает энергетическую щель. Будем предполагать полное отсутствие короткодействующих компонент потенциала, так что без плавного потенциала электронный спектр представлял бы собой набор δ -функций. В областях целочисленного заполнения, как обсуждалось выше, экранирование затравочного потенциала электронной системой будет слабым и им можно пренебречь. Однако там, где квантовый уровень доходит до химического потенциала (в областях частичного заполнения), электроны или дырки полностью экранируют все градиенты

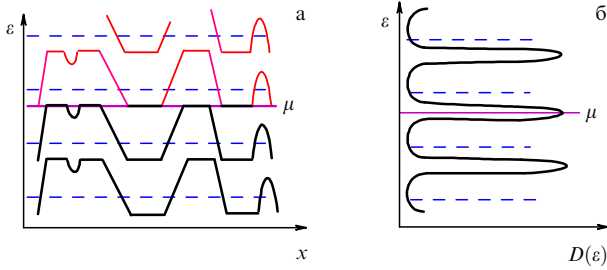


Рис. 15. (а) Схема пространственного поведения квантовых уровней в хаотическом потенциале большой амплитуды. Штриховые горизонтальные линии указывают энергии квантовых уровней в идеальной (без хаотического потенциала) электронной системе. Жирные линии соответствуют частично или целиком заполненным квантовым уровням. (б) Одночастичная плотность состояний, соответствующая рис. а.

потенциала и квантовый уровень становится плоским. Пространственное поведение электронного спектра в этом случае качественно демонстрирует рис. 15а, а одночастичная плотность состояний показана на рис. 15б. Максимумы одночастичной плотности состояний больше не совпадают с ожидаемым положением для идеальной электронной системы и, являясь привязанными к уровню химического потенциала, движутся вместе с ним [63].

Прямого экспериментального доказательства предложенной картины до сих пор не получено, но есть косвенные свидетельства [64] её справедливости.

5. Эффекты, обусловленные межэлектронным взаимодействием

5.1. Отрицательная термодинамическая плотность состояний

Гораздо большие возможности для исследования термодинамической плотности состояний предоставляют трёхэлектродные системы, такие, например, как изображённая на вставке рис. 8. Кроме затвора и двумерного электронного газа такие системы содержат металлический встроенный электрод (back electrode), электрохимический потенциал которого совпадает с электрохимическим потенциалом двумерных электронов (рис. 16).

Пусть на единицу площади затвора такой трёхэлектродной системы, изначально находившейся в равновесном состоянии, добавлен положительный заряд ΔQ . Дополнительный заряд $\Delta Q_{2\text{DEG}}$, появившийся в двумерном электронном газе, находится из решения стандартной задачи электростатики:

$$\Delta Q_{2\text{DEG}} = - \frac{\Delta Q}{1 + (D_{\text{th}} x_w 4\pi e^2 / \epsilon_L)^{-1}}, \quad (24)$$

где ϵ_L — статическая диэлектрическая проницаемость.

Если термодинамическая плотность состояний положительна и конечна, то двумерный электронный газ не полностью экранирует нормальную компоненту электрического поля ($\Delta Q_{2\text{DEG}} < \Delta Q$) и электрическое поле проникает сквозь него (рис. 16а). При нулевой термодинамической плотности состояний $\Delta Q_{2\text{DEG}} = 0$ (рис. 16б), а при бесконечно большой величине D_{th} осуществляется полное экранирование (рис. 16в).

Все три случая представлены на рис. 17а. В нулевом магнитном поле ёмкость трёхэлектродной системы

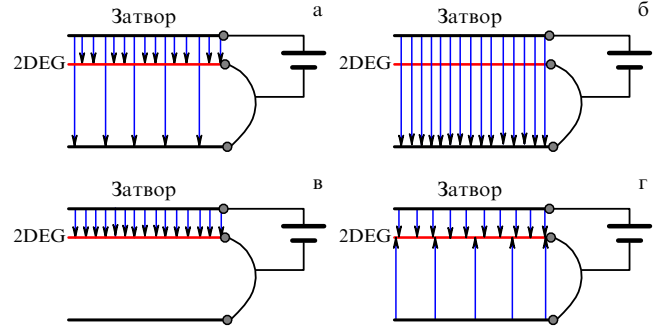


Рис. 16. Распределение дополнительного электрического поля в трёхэлектродной системе при добавлении положительного заряда ΔQ на затвор. (а) Конечная термодинамическая плотность состояний в двумерной электронной системе. Электрическое поле у затвора E превышает поле E_p , проникшее через двумерный электронный газ (2DEG). (б) Нулевая термодинамическая плотность состояний, $E = E_p$. (в) Бесконечно большая термодинамическая плотность состояний, $E_p = 0$. (г) Отрицательная термодинамическая плотность состояний, E_p направлено противоположно E .

меньше геометрической ёмкости, определяемой расстоянием от затвора до двумерного электронного газа. В квантующем магнитном поле в максимумах плотности состояний ёмкость совпадает с геометрической, а в самых глубоких минимумах убывает до значений, определяемых расстоянием между затвором и встроенным электродом.

При внимательном рассмотрении рис. 17а можно заметить, что в некоторых областях измеренная ёмкость превышает геометрическую. Более ярко этот эффект выражен на рис. 17б, взятом из работы [66], в которой проведены измерения производной от проникающего через двумерный слой электрического поля по электрическому полю в промежутке между затвором и электронным газом. Обнаружено, что эти поля противоположно направлены, так же как показано на рис. 16г. Результаты этих и аналогичных [67] экспериментов должны быть интерпретированы как обнаружение отрицательной термодинамической плотности состояний, зависящей от фактора заполнения.

Сразу же возникает вопрос: как электронная система с отрицательной термодинамической плотностью состояний, т.е. с отрицательной сжимаемостью, может быть устойчивой? Ответ состоит в том, что рассматриваемая электронная система не замкнута — она взаимодействует с компенсирующим зарядом, электрическое поле которого и обеспечивает стабильность.

Нет никаких сомнений в том, что отрицательная термодинамическая плотность состояний обусловлена взаимодействием между электронами. Основной вклад вносит обменное взаимодействие. Действительно [68], в системе, полностью поляризованной по спину, обменная энергия на нижнем квантовом уровне, приходящаяся на один электрон, имеет масштаб, определяемый средним расстоянием между электронами.

Изменение химического потенциала складывается из изменения энергии невзаимодействующих частиц (близкого к нулю в максимуме плотности состояний) и отрицательной энергии взаимодействия. Поэтому термодинамическую плотность состояний можно оценить, учитывая электрон-дырочную симметрию, как

$$\left(\frac{\partial n_s}{\partial \mu} \right)^{-1} = - \frac{e^2}{\epsilon_L} v^{1/2} (1 - v)^{1/2}. \quad (25)$$

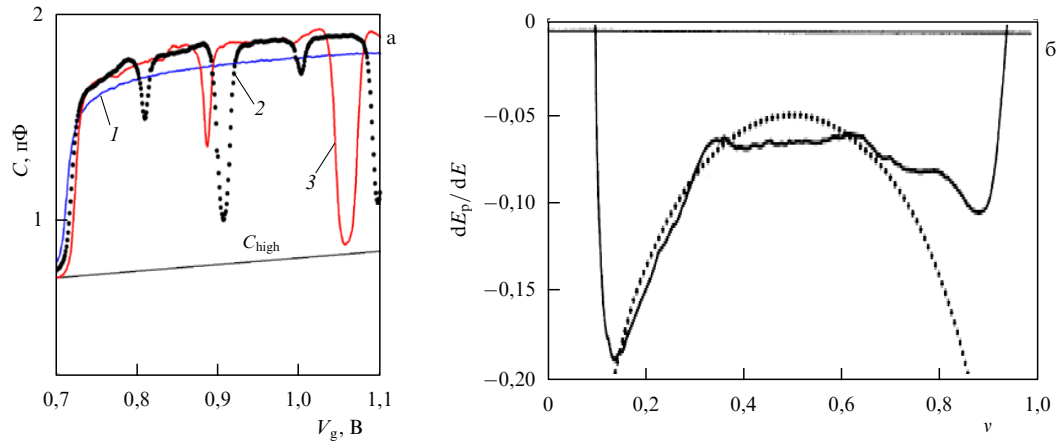


Рис. 17. (а) Ёмкость трёхэлектродной структуры (см. вставку рис. 8) в зависимости от напряжения на затворе в магнитных полях $B = 0$ (кривая 1), $B = 5$ Тл (кривая 2) и $B = 9$ Тл (кривая 3). Температура $T = 30$ мК. Прямая показывает высокочастотный предел ёмкости C_{high} . (б) Производная от проникающего через двумерный слой электрического поля по электрическому полю в промежутке между затвором и электронным газом в зависимости от фактора заполнения, $B = 7,5$ Тл, $T = 1,2$ К. Пунктирной кривой показан результат расчёта согласно [65]. (По данным работы [66].)

Качественно уравнение (25) вполне согласуется с результатами, приведёнными на рис. 17б. Количественное согласие [65] достигнуто с помощью полуэмпирического выражения [69] для энергии взаимодействия. Соответствующая кривая (пунктирная кривая на рис. 17б) очень хорошо согласуется с экспериментальными результатами при факторах заполнения, меньших 0,5. Последнее не очень удивительно, поскольку обнаружено, что при более высоких факторах заполнения спиновая поляризация не является полной (см., например, [70]).

5.2. Спиновая щель. Скримионы

Наиболее удобным объектом для изучения энергетической щели, связанной с изменением направления проекции спина электрона на магнитное поле, оказались гетеропереходы и квантовые ямы GaAs/AlGaAs. На их основе созданы высокосоввершенные структуры, имеющие простой энергетический спектр и слабое спин-орбитальное взаимодействие. Уже первые эксперименты по измерению энергии активации при факторе заполнения $\nu = 1$ (рис. 18а) продемонстрировали, что наблюдаемая энергетическая щель существенно превышает величину $\mu_B g B$ с g -фактором, типичным для объёмного материала.

Подобный результат является вполне ожидаемым, поскольку переворот спина связан с изменением обменной энергии, значительно превышающим зеемановскую энергию [72, 73]. Действительно, при термическом возбуждении возникают пары, состоящие из электрона с отрицательной проекцией магнитного момента на внешнее магнитное поле и пустого места на исходно заполненном квантовом уровне. Такие образования способны переносить ток только в том случае, если электрон с перевёрнутой проекцией спина и пустое место движутся независимо, т.е. находятся на большом, в пределах бесконечного, расстоянии друг от друга. Пара электрон–пустое место (см. раздел 3.1) имеет бесконечно большой импульс, поэтому ожидаемое значение энергии активации при факторе заполнения $\nu = 1$

$$\Delta E_a = \frac{1}{2} \mu_B |g| B + \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{e^2}{\epsilon_L l}. \quad (26)$$

Согласно (26), ожидаемая спиновая энергетическая щель при факторе заполнения $\nu = 1$ в магнитном поле величиной 8 Тл составляет $\Delta E_s = 2E_a \approx 190$ К, что значительно превышает измеренные значения.

Аналогичные данные получены и другими методами. Например, на рис. 18б представлены результаты измерения скачка химического потенциала с помощью магнитоёмкостных методов. Хотя результаты, представленные на рис. 18а и б, численно несколько расходятся, по масштабу энергетической щели и по виду её функциональной зависимости от магнитного поля они совпадают.

Из рисунка 18б можно сделать ещё один важный вывод. Поскольку прямая, проведённая по точкам, на вставке этого рисунка с хорошей точностью соответствует циклотронной массе, можно утверждать, что обменный вклад в спиновое расщепление при факторе заполнения $\nu = 2$ отсутствует. Последнее неудивительно, поскольку соответствующий вклад пропорционален отношению [11]

$$\frac{n_{\uparrow} - n_{\downarrow}}{n_{\uparrow} + n_{\downarrow}}, \quad (27)$$

где n_{\uparrow} и n_{\downarrow} отвечают заполнению двух спиновых подуровней одного уровня Ландау.

Таким образом, экспериментально несомненно установлено, что вследствие электрон-электронного взаимодействия спиновые энергетические щели сильно увеличены по отношению к зеемановскому расщеплению. В соответствии с теоретическими ожиданиями обменное увеличение спиновой спектральной щели зависит от фактора заполнения: оно является максимальным при нечётных факторах и исчезает при чётных.

Общую благополучную картину омрачают два обстоятельства. Во-первых, это противоречащая теоретическим ожиданиям функциональная зависимость спинового расщепления от магнитного поля на нечётных факторах заполнения. Она оказалась гораздо ближе к прямо пропорциональной, чем к корневой. Небольшое отклонение от пропорциональности было обнаружено только в [74]. Во-вторых, расщепление по сравнению с ожидаемым было слишком малым.

Возникло желание объяснить "неправильную" функциональную зависимость влиянием случайных факторов

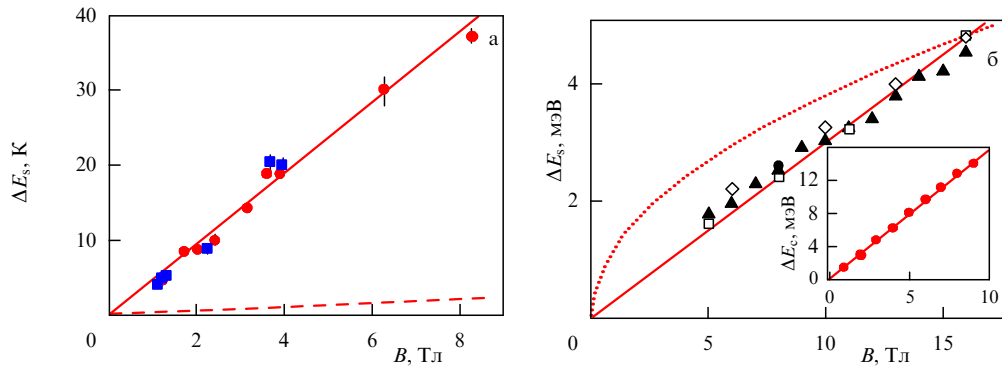


Рис. 18. (а) Спиновая энергетическая щель, определённая по энергии активации. Кружки соответствуют $\nu = 1$, квадраты — $\nu = 3$. Штриховой линией показано зеемановское расщепление. (По данным работы [71].) (б) Скачок химического потенциала при $\nu = 1$, измеренный магнитоёмкостными методами; $T = 30$ мК. На вставке показаны аналогичные измерения для циклотронной щели. Пунктирная кривая соответствует зависимости $\Delta E_s \propto B^{1/2}$. (По результатам работы [24].)

[75]. Таких факторов действительно достаточно: остающийся в двумерной электронной системе хаотический потенциал; конечная ширина электронной волновой функции в направлении, нормальном интерфейсу; неоднородность электронной концентрации. Настораживает, однако, воспроизводимость прямо пропорциональной зависимости на различных образцах и при разных методах измерения. Возможно, важным неучтённым в теории фактором является то обстоятельство, что в магнитных полях, где проводятся измерения, обменная энергия идеальной системы равна циклотронной энергии или даже превышает её.

Формально уравнение (26) предсказывает существование конечной энергетической щели при факторе заполнения $\nu = 1$ даже тогда, когда фактор Ланде $g = 0$. При таком условии полная спиновая поляризация неосуществима и переносящими электрический ток возмущениями не могут быть рассмотренные выше пары из электрона с перевёрнутой проекцией спина и пустого места. Соответствующая теоретическая задача рассмотрена в работе [76], где показано, что в этом случае при конечной температуре рождаются токопереносящие пары спиновых структур (одна из которых схематически изображена на рис. 19а), известных как скирмион и антискирмион. Следует иметь в виду, что хотя изображение на рис. 19а выглядит похожим на решёточную модель, спиновая структура реализуется в электронной жидкости и имеет увеличенную (в скирмионе) или уменьшенную (в антискирмионе) электронную плотность, так что каждая из этих структур переносит единичный электрический заряд.

Энергия активации пары скирмион–антискирмион вдвое меньше, чем заданная уравнением (26) при нулевом факторе Ланде. Пространственный размер скирмиона при увеличении g -фактора уменьшается, а энергия активации возрастает при увеличении фактора Ланде вплоть до его некоторого критического значения g_c , при превышении которого скирмионы не существуют.

Прямого доказательства существования скирмионов в условиях квантового эффекта Холла пока не получено. Наиболее убедительные косвенные свидетельства приведены в работах [77, 78], в которых исследован ядерный магнитный резонанс на ядрах ^{71}Ga , встроенных в барьер из $\text{Al}_{0.1}\text{Ga}_{0.9}\text{As}$, ограничивающий квантовую яму GaAs с высокоподвижным электронным газом. Измеряли изменение частоты ядерного магнитного резонанса, обусловленное влиянием спинов электронной системы, — сдвиг

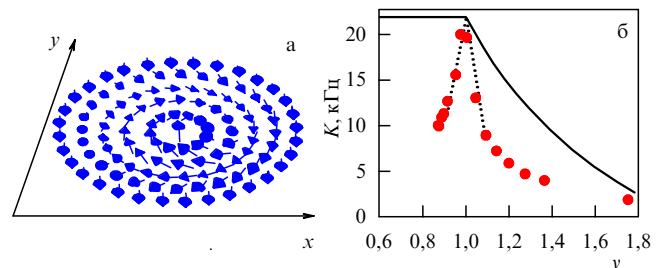


Рис. 19. (а) Схематическое изображение спинового солитона — скирмиона. (б) Сдвиг Найта как функция фактора заполнения (электронная плотность фиксирована, изменяется магнитное поле при условии насыщения температурной зависимости). Сплошная кривая соответствует невзаимодействующим электронам. Пунктирная кривая отвечает скирмионам (антискирмионам), содержащим 3,6 электронов с перевёрнутым спином. (По данным работы [77].)

Найта (Knight shift) — в зависимости от фактора заполнения в окрестности $\nu = 1$. Величина сдвига K определяется степенью поляризации электронной системы (рис. 19б), равной единице при целочисленном заполнении и быстро спадающей в обе стороны от величины, соответствующей целочисленному заполнению. Подгонка (пунктирная кривая на рис. 19б) теоретической зависимости к экспериментальным данным показывает, что каждый электрон с перевёрнутым спином переворачивает спин ещё у трёх электронов, что может быть интерпретировано как появление скирмионов малого размера, возможно, выстроенных в решётку [79].

5.3. Кулоновская щель

Уже на ранней стадии исследований туннелирования в двумерную электронную систему при измерениях на образцах далеко не рекордно высокого качества было обнаружено [80, 81], что введение квантующего магнитного поля уменьшает вероятность туннелирования. При этом туннелирование в двумерный электронный газ осуществлялось из трёхмерного электрода и эффект исчезал при повышении температуры.

Более яркий результат получен в работах [82, 83], где исследовано туннелирование между двумя идентичными квантовыми ямами, в каждой из которых находился высокоподвижный двумерный электронный газ. Ямы разделял туннельно проницаемый барьер, ширина которого на разных образцах варьировалась в довольно больших пределах, от 175 до 340 Å.

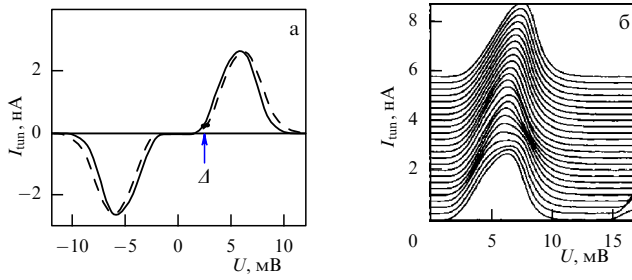


Рис. 20. (а) Туннельный ток I_{tun} в зависимости от напряжения между квантовыми ямами, $B = 8$ Тл, $T = 0,6$ К. Сплошная кривая соответствует образцу с шириной барьера 175 Å, штриховая — 340 Å. Во втором случае значения тока для удобства сравнения увеличены в 3,6 раза. (Данные работы [83].) (б) Серия кривых, отвечающая интервалу магнитных полей от 8 Тл до 13 Тл. Для наглядности кривые сдвинуты по вертикали. (По результатам работы [82].)

Часть полученных экспериментальных кривых показана на рис. 20. Как и положено, туннельный ток антисимметричен в зависимости от напряжения U между квантовыми ямами (рис. 20а). Неожиданным является то, что туннельный ток сильно подавлен в некотором интервале $|U| < \Delta$ вблизи нулевого напряжения. Как видно из рис. 20б, ширина этого интервала возрастает при увеличении магнитного поля. Эффект наблюдается при факторах заполнения, как больших, так и меньших единицы, однако полностью исчезает при повышении температуры или в нулевом магнитном поле.

Во всех работах [80–84] подавление туннельного тока слабо и плавно зависело от фактора заполнения. Наиболее вероятной причиной подавления туннельного тока является электростатическое взаимодействие. Действительно, процесс рассасывания заряда в электронной системе в квантующем магнитном поле является медленным и во время туннелирования им можно пренебречь. Как удаление электрона из электронейтрального слоя, так и внедрение электрона в изначально электронейтральный слой требуют дополнительной энергии, задающей масштаб Δ .

Подавление туннельного тока может быть интерпретировано как появление кулоновской щели (иногда называемой псевдощелью) в туннельной плотности состояний. Слабая зависимость от фактора заполнения означает, что щель привязана к уровню химического потенциала и сдвигается вместе с ним. Теоретически кулоновская щель в условиях квантового эффекта Холла в широком диапазоне факторов заполнения, отвечающих металлической проводимости, рассмотрена в большом числе публикаций (см., например, [85–87]). Продемонстрирована возможность существования экспоненциально малой туннельной плотности состояний в интервале энергий Δ , который, однако, значительно превосходит наблюдаемый в эксперименте. Наиболее адекватное теоретическое описание результатов работ [80, 81] дано в статье [88].

Исключительно информативен рис. 21, на котором, в частности, прекрасно видны кулоновская щель, а также увеличение спиновой щели в окрестности нечётных факторов заполнения и осцилляции спинового расщепления. Из рисунка 21 можно извлечь и уникальную, пока не нашедшую теоретического объяснения информацию: на пустых и целиком заполненных квантовых уровнях обнаруживаются реплики кулоновской щели, ожидавшейся только на ферми-уровне.

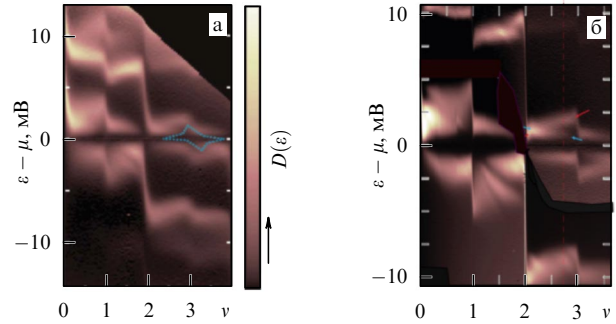


Рис. 21. Туннельная плотность состояний в зависимости от энергии, отсчитанной от уровня химического потенциала, и фактора заполнения на двух образцах различного качества в магнитном поле (а) $B = 4$ Тл, (б) $B = 6$ Тл. (Данные работ [89, 90].)

Кулоновская щель иного происхождения обнаружена в работах [91, 92] при исследовании трёхэлектродной системы, подобной системе, изображённой на вставке рис. 8. Одна из пар исходных экспериментальных кривых, обрабатывавшихся в [91, 92], приведена на рис. 22а. Следует обратить внимание на действительную компоненту тока через структуру, зависящую как от величины ёмкости, так и от туннельного сопротивления. Заметная действительная часть имеется согласно работам [80–83], при всех исследованных факторах заполнения, но в окрестности фактора заполнения $\nu = 1$, в той области, где образец находится в диэлектрическом состоянии, она увеличена. Действительная компонента тока имеет двугорбый вид, что связано с провалом в ёмкости. Эффект имеет сильную зависимость от фактора заполнения, и при других целочисленных факторах заполнения он не обнаружен.

По двум известным компонентам тока через структуру можно вычислить как туннельный ток, так и падение напряжения на туннельном барьере. Соответствующая зависимость приведена на рис. 22б. Как видно, эта зависимость оказалась близкой к параболической.

Согласно теории [93, 94] туннельная плотность состояний $D(\varepsilon)$ при рассматриваемых условиях имеет вид

$$D(\varepsilon) = D_m + \alpha|\varepsilon - \mu|, \quad (28)$$

что приводит к следующей зависимости туннельного тока от напряжения:

$$I_{\text{tun}} = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} D_m D(\varepsilon) [f(\varepsilon - eV_{\text{tun}}, T) - f(\varepsilon, T)] d\varepsilon. \quad (29)$$

Здесь D_m — плотность состояний в электроде из трёхмерного металла, $f(\varepsilon, T)$ — функция распределения Ферми–Дирака. Подгонка выражений (28), (29) при $D_m = \text{const}$ с использованием одного подгоночного параметра, $D_m \alpha \gamma$, показанная на рис. 22б сплошной кривой, хорошо описывает экспериментальные результаты.

5.4. Полосковые фазы

Ещё один эффект, обусловленный взаимодействием между электронами, обнаружен в двумерных электронных структурах рекордно высокого качества с подвижностью около $10^7 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. В таких структурах обнаружено необычное поведение R_{xx} в окрестности своих максимумов при факторах заполнения $\nu = M + 1/2 \geq 5/2$. Пример экспериментальной записи из работы [95] при-

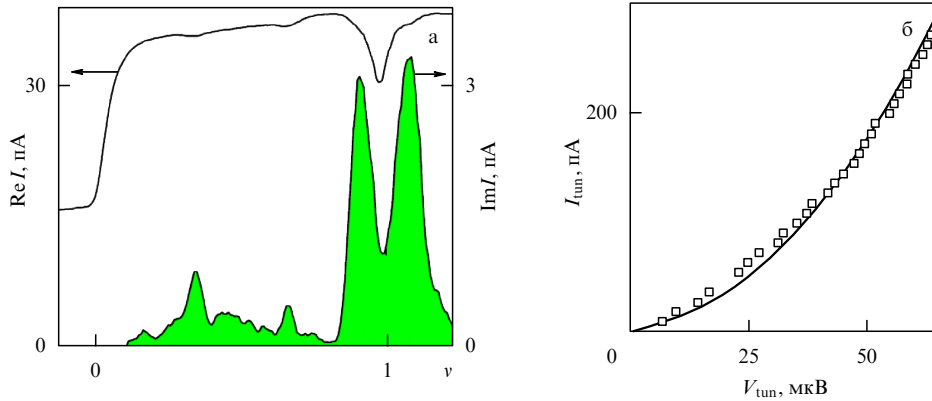


Рис. 22. (а) Действительная и мнимая компоненты тока в трёхэлектродной структуре, подобной показанной на рис. 8, в зависимости от фактора заполнения при $T = 30$ мК, $B = 14$ Тл, $U = 4,2$ мВ, $\omega/2\pi = 73$ Гц. (б) Экспериментальные значения (квадраты) и подгонка (сплошная кривая) формул (28), (29) вольт-амперной зависимости при $B = 13$ Тл и $T = 60$ мК. (Данные работы [92].)

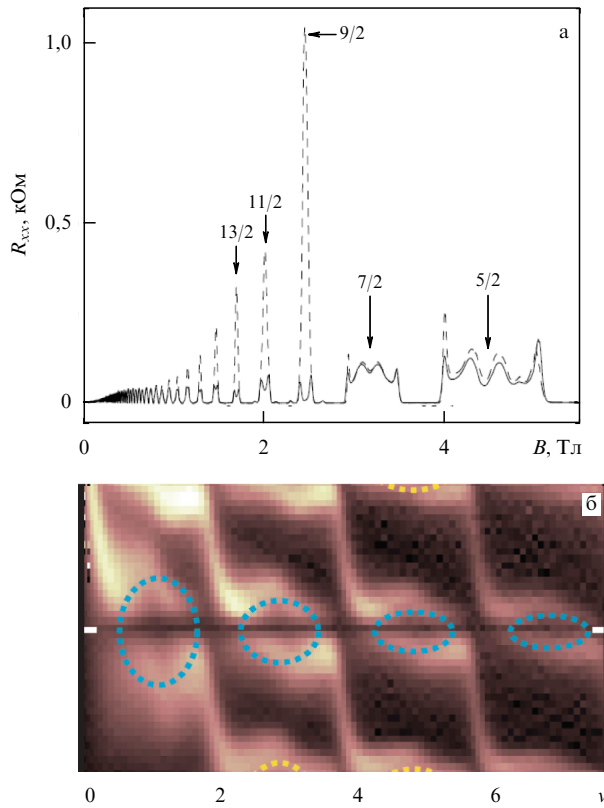


Рис. 23. (а) Зависимость сопротивления от магнитного поля на гетероструктуре с подвижностью $9 \times 10^6 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$ при температуре 25 мК. На двух записях (сплошная и штриховая кривые) направления тока взаимно перпендикулярны. (По данным работы [95].) (б) Туннельная плотность состояний в поле $B = 2$ Тл. При всех исследованных факторах заполнения хорошо видна кулоновская щель на уровне химического потенциала. (Данные работы [90].)

ведён на рис. 23а. Как видно из рисунка, при низких температурах, $T \leq 150$ мК, в максимумах диссипативного сопротивления наблюдаются либо сложная структура, либо возрастающий с понижением температуры пик сопротивления. Результат при факторах заполнения выше $7/2$ зависит от направления тока: при токе, направленном вдоль кристаллографического направления $[110]$, сопротивление относительно невелико (≈ 50 Ом), а при смене направления тока на перпендикулярное наблю-

дается гораздо более высокий пик сопротивления (≈ 1000 Ом). Особенности диссипативного сопротивления не сопровождаются появлением дополнительных плато на холловской компоненте. Аналогичная структура наблюдается и в окрестности максимумов R_{xx} при факторах заполнения $5/2$ и $7/2$, однако в этом случае анизотропия диссипативной компоненты сопротивления отсутствует.

Теоретические соображения, объясняющие обнаруженный эффект, появились даже раньше (см. [96, 97]), чем был выполнен эксперимент. При $M \gg 1$ однородная система с полуцелым фактором заполнения $\nu = M + 1/2$ оказывается энергетически невыгодной, поэтому верхний из заполненных квантовых уровней на одной части плоскости образца приобретает фактор заполнения $\nu = M + 1$, а на другой — $\nu = M$. Форма и размеры областей с различными факторами заполнения определяются конкуренцией между обменным взаимодействием, понижающим энергию основного состояния электронной системы при появлении целочисленного заполнения, и кулоновской энергией. При среднем факторе заполнения $\nu = M + 1/2$ оптимальной конфигурацией в приближении Хартри–Фока оказывается система параллельных полос с характерной шириной порядка циклотронного радиуса. Электронная система спонтанно теряет симметрию с образованием волны зарядовой плотности. Однако если фактор заполнения близок не к полуцелому, а скорее к целому значению, то возможно появление изотропной неоднородной фазы из отдельных островков, образующих нечто вроде кристалла. Наконец, в окрестности целочисленного заполнения теоретически ожидается возникновение вигнеровского кристалла, т.е. спонтанное появление сильной модуляции электронной плотности с максимумами, образующими правильную (предположительно треугольную) решётку, и близкой к единице вероятностью обнаружить один электрон в окрестности каждого максимума.

Подобная картина согласуется с анизотропией диссипативной компоненты тензора сопротивления. Любопытно отметить, что в рамках такой картины предсказывается также существование кулоновской щели в случае тунnelирования на уровень химического потенциала при больших факторах заполнения. Щель имеет обменное происхождение, и при полуцелом заполнении она равна

$$\Delta E_g = \frac{r_s \hbar \omega_c}{\sqrt{2\pi}} \ln \left(1 + \frac{0,3}{r_s} \right) + \hbar \omega_c \frac{\ln(M r_s)}{2M + 1}. \quad (30)$$

При фиксированном факторе заполнения второй член в правой части (30) пропорционален магнитному полю. Щель хорошо выражена в туннельных спектрах работы [90] (рис. 23б), хотя полевые зависимости туннельной щели пока изучены недостаточно.

Приближение Хартри–Фока даёт лишь грубое описание ситуации. В ряде работ [98–101] пространственное распределение областей с разными факторами заполнения рассмотрено в терминах, традиционно используемых для описания жидких кристаллов, и при выходе за рамки приближения Хартри–Фока обнаружено ещё большее изобилие реализуемых фаз. Например, рассмотренная выше структура из сонаправленных полосок может рассматриваться как смектик, а если полоски не строго параллельны и при сохранении преимущественного направления в полосковой структуре присутствует беспорядок, то такая фаза соответствует нематике. Возможен разрыв полосок с образованием полоскового кристалла (stripe crystal) и т.д.

Одна из версий фазовой диаграммы, предложенная в работе [96], приведена на рис. 24а. По мере понижения температуры обычная изотропная жидкость в зависимости от фактора заполнения заменяется либо полосками нематика, либо гексатиком (фазой, промежуточной между кристаллом из островков и неупорядоченным расположением тех же островков). Дальнейшее понижение температуры приводит к образованию или вигнеровского, или полоскового кристалла, и только в окрестности полувещного фактора заполнения сохраняется нематик.

К сожалению, экспериментальные возможности исследования полосковых фаз сильно ограничены. Пока нет методов, позволяющих детально исследовать пространственную структуру фаз. Основная информация получена при изучении анизотропии электросопротивления. При этом обнаружено (рис. 24б), что появление компоненты магнитного поля, параллельной преимущественно начальной ориентации полосок, изменяет анизотропию, т.е. изменяет их ориентацию. Введение компоненты магнитного поля в направлении, перпендикулярном ориентации полосок, стабилизирует исходную анизотропию. Наконец, при факторах заполнения $5/2$ и $7/2$, наклонная магнитное поле, можно добиться появления анизотропии [102]. Пропускание постоянного тока

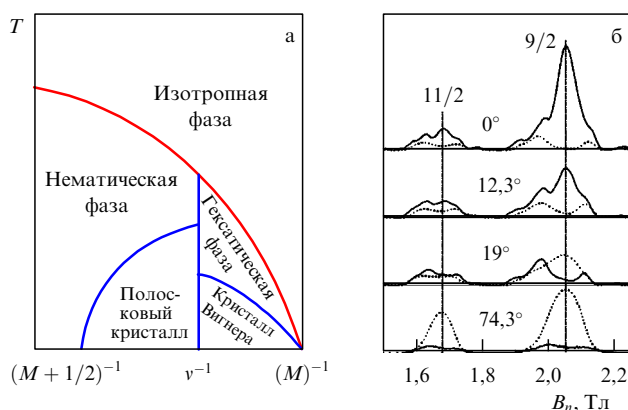


Рис. 24. (а) Фазовая диаграмма для основного состояния полосковых фаз при конечной температуре. (По результатам работы [96].) (б) Влияние наклона магнитного поля на диссипативную компоненту сопротивления R_{dis} . Магнитное поле наклоняется от нормали в направлении, параллельном изначальной ориентации полосок. Пунктирная кривая соответствует току вдоль оси [110], а сплошная кривая — току в перпендикулярном направлении. (Данные работы [102].)

порядка 1 мкА также может влиять на анизотропию и границы устойчивости различных фаз [103].

В смектической фазе протекание тока должно вызывать движение волны зарядовой плотности в направлении, перпендикулярном направлению полосок, и приводить к нестационарным эффектам. Возможно, именно движение волны зарядовой плотности наблюдалось в работе [104], хотя надёжной связи обнаруженного в этой работе шума с движением полосковой фазы не получено.

6. Целочисленный квантовый эффект Холла в экзотических двумерных электронных системах

6.1. Графен

Наиболее известным и популярным из экзотических двумерных электронных систем, несомненно, является недавно введённый в исследовательскую практику графен [105]. Этот материал представляет собой монослой графита (рис. 25а) с кристаллической решёткой, которая может быть представлена в виде двух треугольных подрешёток. В свободном состоянии монослой сворачивается в свиток, поэтому его укладывают на диэлектрическую подложку (например, SiO_2), что позволяет сделать на основе графена полевой транзистор и управлять плотностью электронов в монослое. Большинство экспериментов выполнено на графене с подложкой из окисленного кремния.

Первоначально особое внимание к графену было вызвано его электронным спектром, имеющим вид двух соприкасающихся конусов (рис. 25б). Для нас будет важным, что спектр сильно отличается от квадратичного и, следовательно, квантовые уровни в магнитном поле, в отличие от (4), не эквидистантны. Другая отличительная черта электронного спектра графена обусловлена наличием двух эквивалентных кристаллических подрешёток. При фиксированном направлении импульса волновая функция электрона может быть представлена в виде линейной комбинации волновых функций, относящихся к одной из подрешёток. Подобная ситуация обычно описывается с помощью дополнительного квантового числа (псевдоспина σ).

У графена на границе первой зоны Бриллюэна есть два набора точек, в которых $\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$. В схеме расширенных зон можно говорить о двух долинах с законом дисперсии, соответствующим энергетическому спектру, схематично представленному на рис. 25б.

В случае непараболического электронного спектра для нахождения симметрии квантовых уровней в магнитном поле удобно исходить из квазиклассического условия квантования Бора–Зоммерфельда, которое требует [22], чтобы квантование площади электронной орбиты в импульсном пространстве удовлетворяло соотношению

$$S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h e B}{c}. \quad (31)$$

Применив (31) к электронному спектру графена $\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm c^* |\mathbf{p}|$, получим

$$\varepsilon_n = \pm \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h e B c^{*2}}{\pi c} \right]^{1/2}. \quad (32)$$

Здесь знаку плюс отвечают электронные квантовые уровни, а знаку минус — дырочные. Соответствующий спектр показан в левой части рис. 26а. Так выглядит

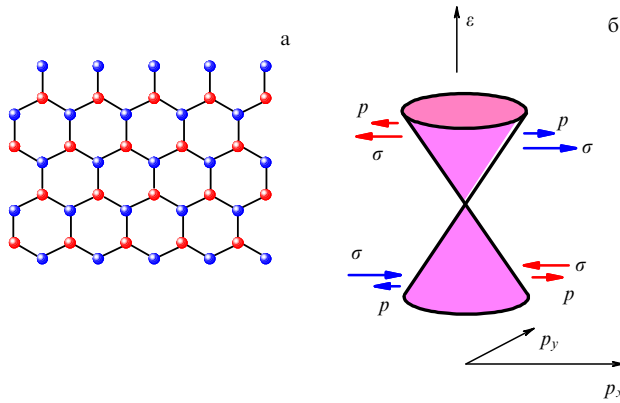


Рис. 25. (В цвете онлайн.) (а) Схема кристаллической решётки графена. Разным цветом показаны две эквивалентные треугольные подрешётки. (б) Энергетический спектр графена (одна из двух долин); σ — проекция псевдospина.

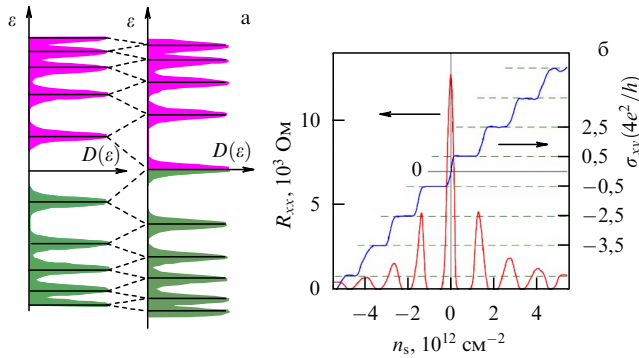


Рис. 26. (В цвете онлайн.) (а) Схематическое изображение плотности состояний в зависимости от энергии (в левой части рисунка — в соответствии с уравнением (32), в правой — в соответствии с (33). Электронные и дырочные квантовые уровни показаны разными цветами. (б) Экспериментальные результаты для холловской компоненты кондактанса и диссипативной компоненты тензора магнетосопротивления в графене при $B = 14$ Тл и $T = 4$ К. (По результатам работы [106].)

спектр при пренебрежении долинным и спиновым расщеплениями. Однако в графене долинное расщепление сравнимо с циклотронным (см., например, [107]) и спектр (32) имеет вид

$$\varepsilon_n = \pm \left[\left(n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar e B c^*}{\pi c} \right]^{1/2}, \quad (33)$$

соответствующий правой части рис. 26а. Квантовые уровни четырёхкратно вырождены (дважды по спиновому индексу и дважды по долинному). Каждый из них составлен из двух соседних уровней Ландау. Один из квантовых уровней, отвечающий нулевой энергии, составлен из квантового подуровня для электронов и такого же подуровня для дырок. Поэтому условие квантования принимает вид

$$n_s = \pm 4n_0 \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (34)$$

Как видно из рис. 26б, экспериментальные кривые согласуются с уравнением (34).

Учёт спинового расщепления уровней, которым мы до сих пор пренебрегали, способен заметно изменить

зависимости холловской и диссипативной проводимостей вблизи точки нулевой плотности носителей тока. В окрестности этой точки появляется дополнительное плато $\sigma_{xy} = 0$ при конечном значении диссипативного кондактанса [108]. Ещё одна специфическая особенность электронного спектра графена в квантующем магнитном поле — большой энергетический интервал между квантовыми уровнями с минимальными номерами — использована в работе [109], в которой наблюдался целочисленный квантовый эффект Холла при комнатной температуре ($T = 300$ К) в магнитном поле величины 29 Тл.

6.2. Двумерный полуметалл

Этот раздел и раздел 6.3 основываются на результатах исследований электронного газа в квантовых ямах одного типа (HgTe в HgCdTe с ориентацией поверхности (013)), но с различной шириной. Мы начнём с рассмотрения широких квантовых ям, шириной 18–21 нм (рис. 27а). Электронный спектр в такой квантовой яме имеет типичный полуметаллический характер³, что для направления $[0\bar{3}1]$ схематически показано на рис. 27в. Имеется электронный минимум в центре двумерной зоны Бриллюэна (обусловленный минимумом первой зоны ($\hbar 1$) тяжёлых дырок в точке Γ) и два дырочных максимума (связанные с максимумами второй зоны тяжёлых дырок ($\hbar 2$)), сдвинутых в k -пространстве вдоль оси $[0\bar{3}1]$ на расстояние порядка $0,3 \text{ нм}^{-1}$ относительно центра зоны Бриллюэна. Экспериментальные значения масс плотности состояний составляют $m_h \approx 0,15m_0$, $m_e \approx 0,025m_0$, где m_0 — масса свободного электрона [110, 111].

Как и в трёхмерных полуметаллах, существует область энергий Δ , в которой электронная и дырочная зоны перекрываются, и, до тех пор пока химический потенциал лежит в пределах этой области, в двумерной системе существуют как электроны, так и дырки. Их плотности уравниваются в точке зарядовой электронейтральности при концентрации $n_{e0} = p_{h0} \approx 5 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$. Энергия перекрытия и химический потенциал в точке электронейтральности определяются эффективными массами и концентрацией носителей заряда. Отсчитывая все энергии от дна зоны проводимости, получаем

$$n_{e0} = p_{h0} = \frac{\mu_0 g_{se} m_e}{2\pi \hbar^2} = \frac{(\Delta - \mu_0) g_{sh} g_{vh} m_h}{2\pi \hbar^2}, \quad (35)$$

где g_s и g_v — степени спинового и долинного вырождения соответственно. Подчеркнём, что затворное напряжение задаёт не значения концентраций электронов и дырок, а их разность, в то время как собственно значения концентраций, согласно уравнению (33), определяются электронным спектром.

В квантующем магнитном поле верхний из частично заполненных электронных квантовых уровней и нижний из частично заполненных дырочных в общем случае не совпадают по энергии. В состоянии равновесия такая ситуация невозможна, и происходит рекомбинация электронов и дырок до тех пор, пока по крайней мере один из частично заполненных квантовых уровней полностью не опустошится. Химический потенциал при этом осциллирует, становясь либо приколотым к частично заполнен-

³ Полуметаллический характер двумерного электронного спектра может быть реализован также в широких квантовых ямах из того же материала с ориентацией поверхности (112) или (100).

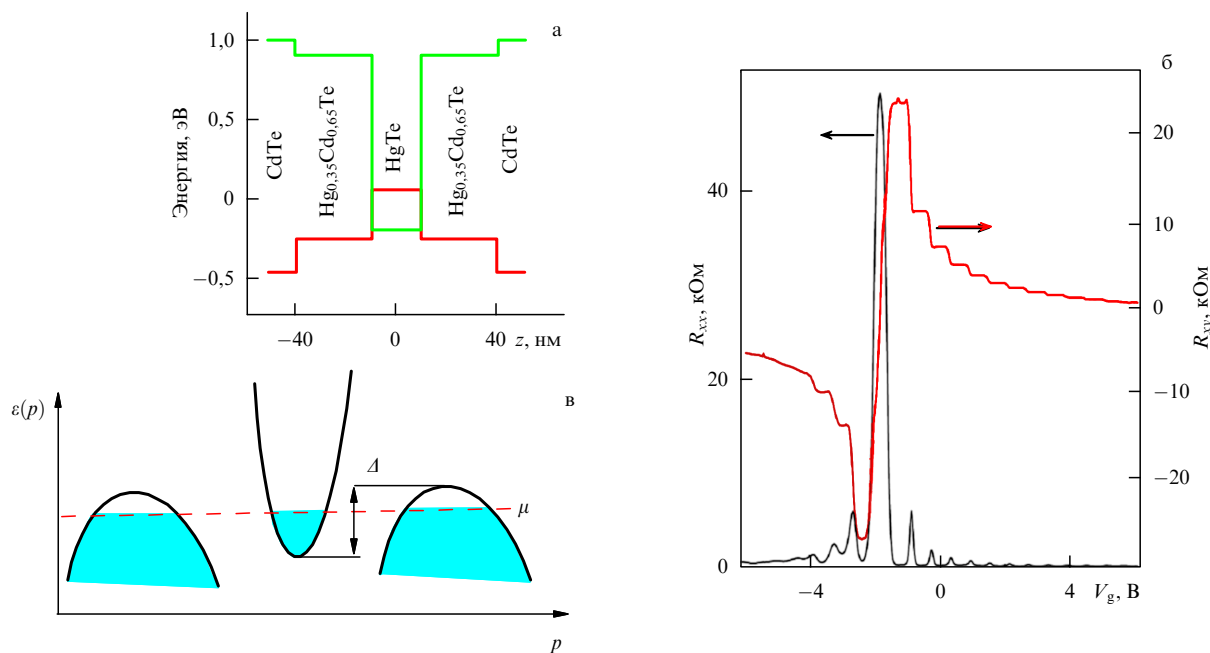


Рис. 27. (а) Зависимость дна зоны проводимости и потолка валентной зоны от глубины в широкой квантовой яме HgTe в HgCdTe. (б) Экспериментальные зависимости диссипативной и холловской компонент тензора магнетосопротивления от напряжения на затворе, при $B = 2$ Тл, $T = 0,19$ К. В нулевом магнитном поле точка зарядовой электронейтральности соответствует напряжению на затворе $V_g = -1,2$ В. (в) Схематическое изображение электронного спектра.

ному квантовому уровню, либо расположенным в середине между целиком заполненным и ближайшим пустым уровнями. Рекомбинация электронов и дырок не оказывает влияния на спектр, поскольку квантовая яма, по крайней мере в самом грубом приближении, является жёсткой [112]. Условия квантования для спектра с отсутствием вырождения схожи со справедливыми для графена:

$$n_s = \pm n_0 N. \quad (36)$$

Как видно из рис. 27б, условие (36) в полной мере подтверждается экспериментом, причём каждый из квантовых уровней оказывается невырожденным. Такая картина вполне согласуется с результатом расчёта электронного спектра [113], который оказывается сильно отличающимся от простых пересекающихся вееров Ландау и зависящим от величины магнитного поля. Сложный характер спектра обусловлен сильным спин-орбитальным взаимодействием в рассматриваемой системе. Однако все особенности спектра практически не проявляются на строящихся по результатам эксперимента веерных диаграммах, подобных изображённым на рис. 10б.

Несмотря на схожесть рис. 26б и 27б, между графеном и двумерным полуметаллом имеется существенное различие: в точке зарядовой электронейтральности графена (с точностью до спинового расщепления) уровень химического потенциала совпадает с квантовым уровнем, а в двумерном полуметалле он располагается в энергетической щели. Числа электронов и дырок в точке зарядовой электронейтральности не являются фиксированными и изменяются от значения, типичного для нулевого магнитного поля, до нуля в сильном поле. Поэтому в последнем случае $\rho_{xy} = 0$, а ρ_{xx} имеет активационный характер [114] с неожиданно малым значением активационной энергии, отражающим сложность электронного спектра [113].

6.3. Квантовый холловский спиновый изолятор

Теперь обратимся к рассмотрению свойств той же квантовой ямы, что и в разделе 6.2, но имеющей гораздо меньшую ширину. Уменьшение ширины квантовой ямы приводит сначала к исчезновению перекрытия зон тяжёлых дырок, а затем при критической ширине ямы в 6,3 нм — к пересечению зон e1 и h1 в точке Г зоны Бриллюэна. Пересечение зон обусловлено влиянием окружающего квантовую яму HgCdTe, в котором порядок следования атомных зон иной, чем в HgTe. Сама зона e1 содержит два спиновых состояния атомных s-орбиталей, в то время как зона h1 образована p-орбиталями с проекциями спина $\pm 3/2$.

Рассмотрим электронный спектр в некоторой окрестности точки Г при ширине ямы, близкой к критической. Вдали от края двумерной электронной системы спектр должен описываться гамильтонианом, в котором учтено смешивание зон e1 и h1 вследствие сильного спин-орбитального взаимодействия, обусловленного присутствием p-орбиталей. При критической ширине ямы электронный спектр подобен спектру графена, за исключением того что пересечение зон в случае рассматриваемого спектра происходит в точке Г, и поэтому он является однодолинным. При ширине квантовой ямы, как меньшей (неинвертированный спектр), так и большей (инвертированный спектр) критической, в сильно непараболическом спектре имеется энергетическая щель. В случае неинвертированного в точке Г спектра волновые функции в зоне проводимости построены из s-орбиталей, а в валентной зоне — из p-орбиталей и способ их построения не меняется с возрастанием величины волнового вектора. Напротив, при инвертированном в точке Г спектре волновые функции в зоне проводимости построены из p-орбиталей, а в валентной зоне — из s-орбиталей, причём способ их построения изменяется с возрастанием величины волнового вектора. Ясно, что, расположив уровень химического потенциала в пределах энергетической щели, в каждом из рассматриваемых

случаев мы будем иметь дело с изоляторами, однако эти изоляторы будут топологически неэквивалентными. Если первый из них (с неинвертированным спектром) хорошо нам известен как обычный двумерный изолятор, то свойства второго (двумерного топологического изолятора) следует обсудить подробно, поскольку он демонстрирует так называемый квантовый спиновый эффект Холла.

Квантовый спиновый эффект Холла состоит в существовании дискретного кондактанса, сопряжённого с появлением на боковых гранях спин-поляризованных электронов даже в отсутствие внешнего магнитного поля.

Перейдём к рассмотрению пространственно-ограниченного двумерного электронного газа. Пусть для определённости граница расположена при $x = 0$, так что газ занимает полупространство $x \geq 0$. При неинверсионном характере спектра нарушение трансляционной симметрии вдоль оси x само по себе не приводит к появлению дополнительных квантовых состояний в объёмной спектральной щели. Иначе дело обстоит в случае инверсного спектра. Отсутствие трансляционной симметрии приводит к необходимости изменить смешивание зон $e1$ и $h1$ у границы двумерного электронного газа. В результате на границе возникает одномерное бесщелевое состояние с волновой функцией, обращаемой в нуль при $x = 0$ и имеющей амплитуду, описываемую суммой двух экспонент, затухающих с возрастанием x на различных масштабах.

Подобное состояние может возникнуть только в окрестности точки Γ зоны Бриллюэна, в которой при $k = 0$ оно имеет четырёхкратное вырождение: двойное по проекции спина и двойное по комбинации атомных зон. Нас интересует зависимость энергии краевого состояния от компоненты импульса k_y , остающейся у границы хорошим квантовым числом.

Одномерный гамильтониан, описывающий искомую зависимость, имеет вид [115]

$$H_{\text{edge}} = Ak_y \sigma^z. \quad (37)$$

Для HgTe-квантовой ямы параметр $A = 0,36$ эВ нм, а скорость $v = A/\hbar = 5,5 \times 10^7$ см с^{-1} . Уже из формы гамильтониана видно, что групповая скорость электронов с положительной проекцией спина не зависит от их энергии и является противоположной по знаку групповой скорости электронов с противоположно направленной проекцией спина. Краевое состояние имеет одномерный графеноподобный спектр. Направление обхода границы образца (по часовой стрелке или против неё) регулируется параметрами исходного объёмного гамильтониана, а в уравнении (37) — знаком параметра A .

Таким образом, фиксируя уровень химического потенциала в щели объёмного спектра, мы пересечём его у каждого края двумя одномерными краевыми каналами, переносящими электроны во взаимно противоположных направлениях и со взаимно противоположными проекциями спина.

Если образец имеет прямоугольную форму и омические контакты, то ситуация ещё более напоминает таковую при целочисленном квантовом эффекте Холла. Пусть вначале имеется всего два контакта: исток и сток с различными химическими потенциалами. На каждой из сторон образца, соединяющих контакты, возникнет перенос заряда и спина. Однако уровни химического потенциала со спином "вверх" ("вниз") будут различными на разных сторонах, поэтому на краях возникнет

неравновесная спиновая заселённость, пропорциональная току. В то же время электрические токи, протекающие по разным сторонам образца, одинаковы по величине и сонаправлены. Двухконтактный кондактанс образца, вычисленный по Бюттикеру (см. раздел 3.4), равен $2e^2/h$.

Более интересна ситуация, в которой образец обладает также потенциальными контактами. В этом случае как двухконтактное сопротивление, так и разность потенциалов между контактами зависят от числа и расположения потенциальных контактов. Например, если с каждой стороны имеется только одна пара таких контактов, то измеренное между соседними контактами падение напряжения соответствует сопротивлению $h/2e^2$, а двухконтактное сопротивление между стоком и истоком равно $3h/2e^2$. Приведённые значения легко вычисляются также в формализме Бюттикера.

Ожидаемая картина краевых состояний имеет некоторое сходство с таковой в случае целочисленного квантового эффекта Холла, чем и обусловлено появление термина "квантовый холловский спиновый изолятор".

Необходимо отметить, что приведённые выше рассуждения справедливы только в отсутствие рассеяния назад, сопряжённого с переворотом спина. При низкой температуре и отсутствии магнитных примесей такие процессы предполагаются маловероятными.

В эксперименте [116] (рис. 28) действительно наблюдалось поведение сопротивления, похожее на предсказываемое (см. выше). При наличии двух потенциальных контактов с каждой стороны прямоугольного образца сопротивление между контактами одной стороны действительно составляло $h/2e^2$ независимо от ширины образца. Такое значение сопротивления наблюдалось только в квантовой яме с инвертированным спектром. Неожиданно оказалось, что для наблюдения нужны очень короткие образцы, длиной порядка 1 мкм. Почему между одномерными каналами идут частые процессы рассеяния, осталось неясным.

При наложении квантующего магнитного поля на двумерную электронную систему в состоянии квантового холловского спинового изолятора последнее должно разрушаться, поскольку исходная симметрия краевых каналов отличается от симметрии краевых каналов в состоянии целочисленного квантового эффекта Холла. Эксперимент [116] подтверждает этот вывод.

7. Заключение

Сформулируем нерешённые вопросы и определим возможные направления дальнейших исследований в области целочисленного квантового эффекта Холла.

1. Определение теоретического предела числа воспроизводимых знаков в квантовом эффекте Холла.
2. Разрешение противоречия между теорией и экспериментом, касающегося функциональной зависимости спиновой щели от магнитного поля при фиксированном факторе заполнения.
3. Объяснение существования реплик кулоновской щели на квантовых уровнях выше и ниже уровня химического потенциала.
4. Визуализация структуры полосковых фаз.
5. Исследование квантового эффекта Холла в экзотических двумерных электронных системах.

Безусловно, приведённый выше перечень отражает вкусы и интересы автора и не является универсальным. И всё же он может оказаться полезным как напоминание о неполноте наших знаний в этой области.

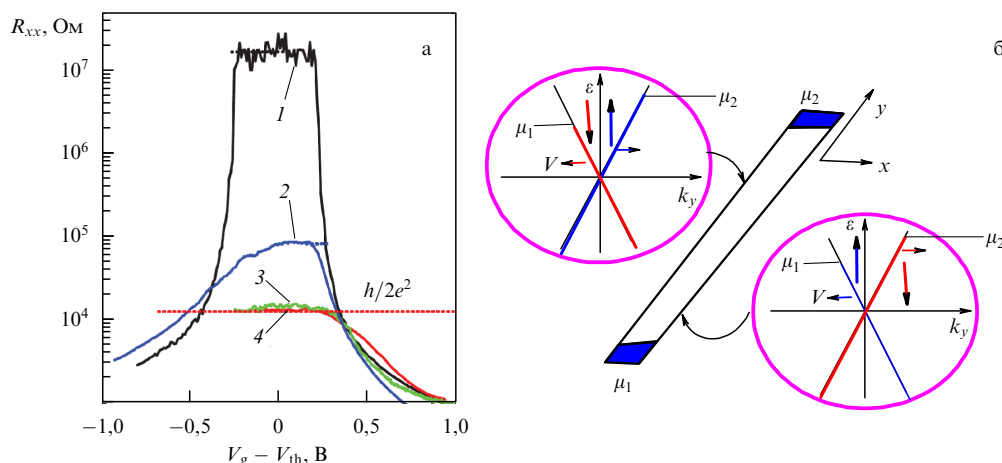


Рис. 28. (а) Результаты измерений из работы [116]: 1 — квантовая яма с неинвертированным спектром, 2–4 — квантовые ямы с инвертированным спектром. В случаях 1 и 2 длина образцов 20 мкм, а в случаях 3 и 4 длина образцов 1 мкм, но их ширина различается в два раза. $T = 30$ мК. (б) Схематическое изображение образца для двухконтактных измерений, $\mu_1 < \mu_2$. На вставках показаны спектры краевых каналов и их заполнение на противоположных краях образца; горизонтальные стрелки указывают направление скорости электронов, а вертикальные — z -проекции спина.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность за полезные обсуждения И.С. Бурмистрову, В.Ф. Гантмахеру, Э.В. Девятову, З.Д. Квону, В.С. Храпаю и А.А. Шашкину. Работа поддержана Российской академией наук, Министерством образования и науки РФ и Российским фондом фундаментальных исследований. Автор благодарен фонду Дмитрия Зимина "Династия" за предоставленную возможность прочесть лекцию по тематике обзора на Летней школе 2013 года "Актуальные проблемы физики конденсированного состояния (теория и эксперимент)".

Список литературы

1. Klitzing K v, Dorda G, Pepper M *Phys. Rev. Lett.* **45** 494 (1980)
2. Рашба Э И, Тимофеев В Б *ФТП* **20** 977 (1986) [Rashba E I, Timofeev V B *Sov. Phys. Semicond.* **20** 617 (1986)]
3. Huckestein B *Rev. Mod. Phys.* **67** 357 (1995)
4. Das Sarma S, Pinczuk A (Eds) *Perspectives in Quantum Hall Effects* (New York: Wiley, 1997)
5. Mohr P J, Taylor B N *Rev. Mod. Phys.* **72** 351 (2000)
6. Девятов Э В *УФН* **177** 207 (2007) [Devyatov E V *Phys. Usp.* **50** 197 (2007)]
7. Prange R E, Girvin S M (Eds) *The Quantum Hall Effect* (New York: Springer-Verlag, 1987)
8. Butcher P, March N H, Tosi M P (Eds) *Physics of Low-dimensional Semiconductor Structures* (New York: Plenum Press, 1993)
9. Демиковский В Я, Вугальтер Г А *Физика квантовых низкоразмерных структур* (М.: Логос, 2000)
10. Гантмахер В Ф *Электроны в неупорядоченных средах* (М.: Физматлит, 2005); Gantmakher V F *Electrons and Disorder in Solids* (Oxford: Clarendon Press, 2005)
11. Ando T, Fowler A B, Stern F *Rev. Mod. Phys.* **54** 437 (1982)
12. Laughlin R B *Phys. Rev. B* **23** 5633 (1981)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2002) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
14. Thouless D J *Phys. Rev. Lett.* **71** 1879 (1993)
15. Halperin B I *Phys. Rev. B* **25** 2185 (1982)
16. Büttiker M *Phys. Rev. B* **38** 9375 (1988)
17. Kent A J et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 1684 (1992)
18. Roshko S, Dietsche W, Challis L J *Phys. Rev. Lett.* **80** 3835 (1998)
19. Pines D, Nozières P *The Theory of Quantum Liquids* (New York: W.A. Benjamin, 1966)
20. Chklovskii D B, Shklovskii B I, Glazman L I *Phys. Rev. B* **46** 4026 (1992)
21. Wei Y Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **81** 1674 (1998)
22. Абрикосов А А *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987) [Abrikosov A A *Fundamentals of the Theory of Metals* (Amsterdam: North-Holland, 1988)]
23. Dolgoplov V T et al. *Phys. Rev. B* **46** 12560 (1992)
24. Dolgoplov V T et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 729 (1997)
25. Баскин Э М, Магарилл Л Н, Энтин М В *ЖЭТФ* **75** 723 (1978) [Baskin E M, Magarill L N, Entin M V *Sov. Phys. JETP* **48** 365 (1978)]
26. Ando T, Aoki H J. *Phys. Soc. Jpn.* **54** 2238 (1985)
27. Shashkin A A, Dolgoplov V T, Kravchenko G V *Phys. Rev. B* **49** 14486 (1994)
28. Khmel'nitskii D E *Phys. Lett. A* **106** 182 (1984)
29. Abrahams E et al. *Phys. Rev. Lett.* **42** 673 (1979)
30. Levine H, Libby S B, Pruisken A M M *Phys. Rev. Lett.* **51** 1915 (1983)
31. Shashkin A A, Kravchenko G V, Dolgoplov V T *Письма в ЖЭТФ* **58** 215 (1993) [*JETP Lett.* **58** 220 (1993)]
32. Gloszman I, Johnson C E, Jiang H W *Phys. Rev. Lett.* **74** 594 (1995)
33. Gusev G M et al. *Solid State Commun.* **100** 269 (1996)
34. Dultz S C, Jiang H W, Schaff W J *Phys. Rev. B* **58** R7532 (1998)
35. Хмельницкий Д Е *Письма в ЖЭТФ* **38** 454 (1983) [Khmel'nitskii D E *JETP Lett.* **38** 552 (1983)]
36. Wang C et al., arXiv:1307.7532
37. Pruisken A M M *Nucl. Phys. B* **235** 277 (1984)
38. Pruisken A M M *Phys. Rev. B* **32** 2636 (1985)
39. Dolgoplov V T et al. *ЖЭТФ* **99** 201 (1991) [*Sov. Phys. JETP* **72** 113 (1991)]
40. Pruisken A M M, Baranov M A *Europhys. Lett.* **31** 543 (1995)
41. Wei H P, Tsui D C, Pruisken A M M *Phys. Rev. B* **33** 1488 (1986)
42. Kawaji S, Wakabayashi J J. *Phys. Soc. Jpn.* **56** 21 (1987)
43. Wei H P et al., in *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics. Proc. of the Intern. Conf., Würzburg, Fed. Rep. of Germany, August 18–22, 1986* (Springer Series in Solid-State Sciences, No. 71, Ed. G Landwehr) (Berlin: Springer-Verlag, 1987) p. 11
44. Shahar D et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 479 (1997)
45. Dolan B P *Nucl. Phys. B* **554** 487 (1999); cond-mat/9809294
46. Kravchenko S V, Perenboom J A A J, Pudalov V M *Phys. Rev. B* **44** 13513 (1991)
47. Dolgoplov V T et al. *Письма в ЖЭТФ* **55** 701 (1992) [*JETP Lett.* **55** 733 (1992)]
48. Murzin S S et al. *Phys. Rev. B* **66** 233314 (2002)

49. Xue Y, Prodan E *Phys. Rev. B* **87** 115141 (2013)
50. Koch S et al. *Phys. Rev. B* **46** 1596 (1992)
51. Wei H P et al. *Phys. Rev. B* **45** 3926 (1992)
52. Мильников Г В, Соколов И М *Письма в ЖЭТФ* **48** 494 (1988) [Mil'nikov G V, Sokolov I M *JETP Lett.* **48** 536 (1988)]
53. Huckestein B, Kramer B *Phys. Rev. Lett.* **64** 1437 (1990)
54. Evers F, Mirlin A D *Rev. Mod. Phys.* **80** 1355 (2008)
55. Шашкин А А *УФН* **175** 139 (2005) [Shashkin A A *Phys. Usp.* **48** 129 (2005)]
56. Balaban N Q, Meirav U, Bar-Joseph I *Phys. Rev. Lett.* **81** 4967 (1998)
57. Iordansky S V *Solid State Commun.* **43** 1 (1982)
58. MacDonald A H, Rice T M, Brinkman W F *Phys. Rev. B* **28** 3648 (1983)
59. Шкловский Б И, Эфрос А Л *Письма в ЖЭТФ* **44** 520 (1986) [Shklovskii B I, Efros A L *JETP Lett.* **44** 669 (1986)]
60. Dolgoplov V T et al. *Phys. Low-Dimens. Struct.* (6) 1 (1996)
61. Гаврилов М Г, Кукушкин И В *Письма в ЖЭТФ* **43** 79 (1986) [Gavrilov M G, Kukushkin I V *JETP Lett.* **43** 103 (1986)]
62. Mosser V et al. *Solid State Commun.* **58** 5 (1986)
63. Кукушкин И В, Мешков С В, Тимофеев В Б *УФН* **155** 219 (1988) [Kukushkin I V, Meshkov S V, Timofeev V B *Sov. Phys. Usp.* **31** 511 (1988)]
64. Дорожкин С И, Дорохова М О *Письма в ЖЭТФ* **71** 606 (2000) [Dorozhkin S I, Dorokhova M O *JETP Lett.* **71** 417 (2000)]
65. Efros A L *Phys. Rev. B* **45** 11354 (1992)
66. Eisenstein J P, Pfeiffer L N, West K W *Phys. Rev. Lett.* **68** 674 (1992)
67. Kravchenko S V et al. *Phys. Rev. B* **42** 3741 (1990)
68. Efros A L *Solid State Commun.* **65** 1281 (1988)
69. Fano G, Ortolani F *Phys. Rev. B* **37** 8179 (1988)
70. Kukushkin I V, v. Klitzing K, Eberl K *Phys. Rev. Lett.* **82** 3665 (1999)
71. Usher A et al. *Phys. Rev. B* **41** 1129 (1990)
72. Бычков Ю А, Иорданский С В, Элиашберг Г М *Письма в ЖЭТФ* **33** 152 (1981) [Bychkov Yu A, Iordanskii S V, Eliashberg G M *JETP Lett.* **33** 143 (1981)]
73. Kallin C, Halperin B I *Phys. Rev. B* **30** 5655 (1984)
74. Khrapai V S et al. *Phys. Rev. B* **72** 035344 (2005)
75. Smith A P, MacDonald A H, Gumbs G *Phys. Rev. B* **45** 8829 (1992)
76. Sondhi S L et al. *Phys. Rev. B* **47** 16419 (1993)
77. Barrett S E et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 5112 (1995)
78. Khandelwal P et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 5353 (2001)
79. Brey L et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 2562 (1975)
80. Ashoori R C et al. *Phys. Rev. Lett.* **64** 681 (1990)
81. Ashoori R C et al. *Phys. Rev. B* **48** 4616 (1993)
82. Eisenstein J P, Pfeiffer L N, West K W *Phys. Rev. Lett.* **69** 3804 (1992)
83. Eisenstein J P, Pfeiffer L N, West K W *Phys. Rev. Lett.* **74** 1419 (1995)
84. Chan H B et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2867 (1997)
85. Hatsugai Y, Bares P-A, Wen X G *Phys. Rev. Lett.* **71** 424 (1993)
86. He S, Platzman P M, Halperin B I *Phys. Rev. Lett.* **71** 777 (1993)
87. Levitov L S, Shytov A V *Письма в ЖЭТФ* **66** 200 (1997) [*JETP Lett.* **66** 214 (1997)]
88. Aleiner I L, Baranger H U, Glazman L I *Phys. Rev. Lett.* **74** 3435 (1995)
89. Dial O E et al. *Nature* **448** 176 (2007)
90. Dial O E et al. *Nature* **464** 566 (2010)
91. Dolgoplov V T et al. *Phys. Rev. B* **51** 7958 (1995)
92. Deviatov E V et al. *Phys. Rev. B* **61** 2939 (2000)
93. Yang S-R E, MacDonald A H *Phys. Rev. Lett.* **70** 4110 (1993)
94. Pikus F G, Efros A L *Phys. Rev. B* **51** 16871 (1995)
95. Lilly M P et al. *Phys. Rev. Lett.* **82** 394 (1999)
96. Koulakov A A, Fogler M M, Shklovskii B I *Phys. Rev. Lett.* **76** 499 (1996)
97. Fogler M M, Koulakov A A, Shklovskii B I *Phys. Rev. B* **54** 1853 (1996)
98. Fradkin E, Kivelson S A *Phys. Rev. B* **59** 8065 (1999)
99. Fradkin E et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 1982 (2000)
100. MacDonald A H, Fisher M P A *Phys. Rev. B* **61** 5724 (2000)
101. Wexler C, Dorsey A T *Phys. Rev. B* **64** 115312 (2001)
102. Pan W et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 820 (1999); cond-mat/9903160
103. Göres J et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 246402 (2007)
104. Cooper K B et al. *Phys. Rev. Lett.* **90** 226803 (2003)
105. Novoselov K S et al. *Science* **306** 666 (2004)
106. Novoselov K S et al. *Nature* **438** 197 (2005)
107. Geim A K, Novoselov K S *Nature Mater.* **6** 183 (2007)
108. Abanin D A et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 196806 (2007)
109. Novoselov K S et al. *Science* **315** 1379 (2007)
110. Entin M V et al., arXiv:1302.4829
111. Козлов Д А и др. *Письма в ЖЭТФ* **93** 186 (2011) [Kozlov D A et al. *JETP Lett.* **93** 170 (2011)]
112. Dolgoplov V T et al. *Phys. Rev. B* **59** 13235 (1999)
113. Raichev O E et al. *Phys. Rev. B* **86** 155320 (2012)
114. Gusev G M et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 166401 (2010)
115. Qi X-L, Zhang S-C *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057 (2011)
116. König M et al. *Science* **318** 766 (2007)

Integer quantum Hall effect and related phenomena

V.T. Dolgoplov

*Institute of Solid State Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Akademika Osip'yana 2, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
E-mail: dolgop@issp.ac.ru*

Experimental and theoretical research into the integer Hall effects is reviewed, together with other transport phenomena in a two-dimensional electron gas in a quantizing magnetic field. Particular emphasis is placed on primary experimental data, on the comparison of experimental and theoretical results, and on the analysis of theoretical predictions from the point of view of their experimental verification. Among experiments of recent years, those that raised questions to be resolved are highlighted. Possible directions for further research are suggested.

PACS numbers: **71.30.+h**, **73.40.Qv**, **73.43.-f**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402a.0113

Bibliography — 116 references

Received 9 September 2013, revised 11 October 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (2) 113–136 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (2) (2014)