

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФЕРМИ-ДИРАКА ПОЛУЦЕЛЫХ И ЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ

© 2016 г. *О.Н. Королева^{1,2}, А.В. Мажукин^{1,2}, В.И. Мажукин^{1,2}, П.В. Бреславский¹*

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва vim@modhef.ru

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-11-00032).

Получены непрерывные аналитические выражения в удобной для вычислений форме, аппроксимирующие интегралы Ферми-Дирака порядков $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ и $7/2$ с приемлемой точностью ($1 \div 4$)% в широком диапазоне вырождения. Для аппроксимации использовался подход на основе метода наименьших квадратов. Выдвигаемые требования к приближениям интегралов, диапазонам изменения порядка j и приведенного уровня Ферми η рассматриваются с точки зрения использования интегралов Ферми-Дирака для определения свойств металлов и полупроводников.

Ключевые слова: интегралы Ферми-Дирака, аналитическая аппроксимация.

ANALYTICAL APPROXIMATION OF THE FERMI-DIRAC INTEGRALS OF HALF-INTEGER AND INTEGER ORDERS

O.N. Koroleva^{1,2}, A.V. Mazhukin^{1,2}, V.I. Mazhukin^{1,2}, P.V. Breslavskiy¹

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow

vim@modhef.ru

² National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow

We obtain continuous analytical expressions approximating the Fermi-Dirac integrals of orders $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2$ in a convenient form for calculation with reasonable accuracy ($1 \div 4$)% in a wide range of the degeneration in this paper. An approach based on the least square method for approximation was used. The demands to the approximation of integrals, to the range of variation of order j and to the definitional domain are considered in terms of the use of Fermi-Dirac integrals to determine the properties of metals and semiconductors.

Key words: Fermi-Dirac integrals, analytical approximation.

1. Введение

Интегралы Ферми-Дирака (Ф-Д) нашли широкое применение в области статистической физики [1]. Их применение также широко известно в физике конденсированных сред [2], в частности, в моделировании свойств и процессов в металлах и полупроводниках [3]. Начало использования интегралов Ф-Д было положено в 20-е годы XX века в классических статьях Паули [4] и Зоммерфельда [5], в которых впервые для описания вырожденного электронного газа металлов использовалось семейство функций, получивших название интегралов Ферми-Дирака. В настоящее время способы вычисления

интегралов Ферми-Дирака различного порядка и их использование по-прежнему актуальны и находят широкое применение.

Интеграл Ферми-Дирака определяется [4] как

$$F_j(\eta_c) = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{1 + \exp(\varepsilon - \eta)} d\varepsilon, \quad (1)$$

где j – порядок (индекс) интеграла, $\varepsilon = (E - E_C) / (k_B T)$ – приведенная энергия электрона (расстояние до дна зоны проводимости), $\eta = (E_F - E_C) / (k_B T)$ – приведенный уровень Ферми для электронов, E_C – энергетический уровень дна зоны проводимости.

В вычислительной практике используется другая форма интеграла Ферми-Дирака [6, 7]

$$\mathcal{F}_j(\eta) = \frac{F_j(\eta)}{\Gamma(j+1)} = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{1 + \exp(\varepsilon - \eta)} d\varepsilon, \quad (2)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Интеграл (2) обладает рядом преимуществ перед интегралом (1), [6, 7], а именно:

1. Функции \mathcal{F}_j существуют для отрицательных целых порядков в отличие от F_j .
2. Упрощается поиск значений интегралов с полуцелыми порядками j , а также интерполяция аргументов η при использовании \mathcal{F}_j . Соотношение между функцией и ее производной также упрощается, тем самым облегчается интерполяция рядами Тейлора

$$\mathcal{F}_j'(\eta) = \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}_j(\eta) = \mathcal{F}_{j-1}(\eta). \quad (3)$$

3. В невырожденных пределах $\eta \ll 0$, все члены семейства $\mathcal{F}_j(\eta)$ сводятся к $\mathcal{F}(\eta) \rightarrow e^\eta$ независимо от порядка j .

Для физических приложений важны интегралы Ф-Д с целыми и полуцелыми индексами, как правило, невысокими $-1/2 \leq j \leq 7/2$ и $-1 \leq j \leq 3$ [8]. Интеграл (2), за исключением интеграла с порядком $j = 0$, не может быть вычислен аналитически. С этим связано многообразие методов приближенного вычисления и аппроксимации интегралов Ферми [7], среди которых: разложение в ряды [9-11], численные квадратуры [12,13], рекуррентные соотношения и интерполяция табличных значений [8, 14-17], кусочные многочлены и рациональные функции [18,19].

Методы численного решения интегралов Ф-Д, с последующей табуляцией результатов для порядков $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2$ в диапазонах изменения η , охватывающих области невырожденности и вырождения электронного газа, были представлены в [6, 14,15]. Однако в проблемах математического моделирования табличное представление интегралов Ф-Д является неудобным для использования. Желательно иметь некоторый экономичный алгоритм вычисления интегралов, базирующийся на использовании относительно простых аппроксимирующих функций.

С учетом того что требуется аппроксимировать функции на бесконечном интервале $-\infty < \eta < +\infty$, трудно указать такую аппроксимирующую функцию, которая могла бы удовлетворять сразу обеим асимптотикам. В результате исходный интервал $-\infty < \eta < +\infty$ приходится разбивать как минимум на два и в каждом подбирать свои наилучшие параметры. Поэтому для построения приемлемых аппроксимационных формул в области определения, разбитой на несколько интервалов, в каждом из них приходится для достижения требуемой точности варьировать количество слагаемых (обычно не превышающих 10).

Практически все предложенные до сих пор аппроксимации [9, 10, 18, 19] являлись набором формул, каждая из которых применялась в своем диапазоне значений η . Такие аппроксимации были лишь кусочно-гладкими и даже кусочно-непрерывными. Единообразный вид аппроксимирующих формул не удавалось подобрать, ибо качественное поведение функций Ферми-Дирака при разных значениях η сильно различается.

Целью данной работы является получение в форме, удобной для вычислений, непрерывных аналитических выражений, аппроксимирующих интегралы Ферми-Дирака порядков $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ и $7/2$ с приемлемой точностью в широком диапазоне вырождения. Выдвигаемые требования к приближениям интегралов, диапазонам изменения порядка j и приведенного уровня Ферми η рассматриваются с точки зрения использования интегралов Ферми-Дирака для определения свойств металлов и полупроводников.

2. Постановка и алгоритм решения задачи

Для получения непрерывных аналитических выражений для аппроксимации интегралов Ферми-Дирака использовался подход, состоящий из двух этапов.

На первом этапе все интегралы $\mathcal{F}_j(\eta)$ с индексами $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ и $7/2$ решались численно с применением техники, изложенной в [9, 14, 15], с шагом $\Delta\eta$. Результаты представлялись в виде таблиц значений

$$\varphi_{j,\ell} \approx \mathcal{F}_j(\eta_\ell), \quad \ell = 0, \dots, n-1 \quad (4)$$

для всех j . В виду громоздкости табличные значения интегралов Ферми-Дирака опущены. Близкие к используемым дискретные значения интегралов можно найти в [14, 15].

На втором этапе использовался метод наименьших квадратов, позволяющий на основе табличных значений формулировать аналитические выражения для аппроксимации интегралов Ферми-Дирака. Метод наименьших квадратов включает последовательность следующих операций: определения диапазона параметра вырождения η , выбора аппроксимирующей функции, выбора критерия аппроксимации.

Диапазон параметра вырождения η в общем случае должен изменяться от невырожденных значений до сильного вырождения $-\infty < \eta < +\infty$. Однако решение конкретных задач не требует бесконечного интервала, причем каждая конкретная постановка характеризуется своими собственными ограничениями [9–12, 18, 19]. Для приемлемого по точности определения теплофизических характеристик металлов и полупроводников допускается ограничение по η в диапазоне $-10 \leq \eta \leq 10$.

К аппроксимирующим функциям предъявлялись следующие требования: правиль-

ное асимптотическое поведение в интервале аппроксимации; минимальная погрешность между исходной и аппроксимирующей функциями.

В соответствии с классическими представлениями [4] близкой к исходной функции по асимптотике является функция

$$\mathcal{F}_j(x) \approx f_j(x) = [\exp(P_m(x))]_j, \quad (5)$$

где

$$P_{j,m}(x) = \ln(\mathcal{F}_j(x)) = \left[\sum_{i=0}^m a_i x^i \right]_j \quad (6)$$

алгебраический многочлен степени m , в котором a_0, a_1, \dots, a_m – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ и $7/2$ – порядок интеграла Ферми-Дирака.

В качестве критерия, позволяющего получить наилучшее приближение функции $P_{j,m}(x)$, заданной таблично ее приближенными значениями, в соответствии с [20,21], используется критерий метода наименьших квадратов.

Используя таблицы (4), представим функции $\ln(\mathcal{F}_j(x))$ для каждого порядка j в табличном виде, при $x=\eta_\ell$, $-10 \leq \eta_\ell \leq 10$

$$y_{j,\ell} = \ln(\mathcal{F}_j(\eta_\ell)) = \ln(\varphi_{j,\ell}), \quad \ell = 0, \dots, n.$$

Согласно критерию метода наименьших квадратов, требуется найти такой многочлен $P_{j,m}(x)$ степени $m < n$, чтобы величина среднеквадратического отклонения $P_{j,m}(\eta_\ell)$ от значений функции $y_{j,0}, y_{j,1}, \dots, y_{j,n}$ была минимальной

$$\rho(P_{j,m}, y_j) = \left[\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n (P_m(\eta_\ell) - y_\ell)^2} \right]_j \rightarrow \min. \quad (7)$$

Функция, аппроксимирующая интеграл (2) порядка j , согласно (5), (6) будет иметь вид

$$\mathcal{F}_j(x) \approx f_j(x) = \exp(P_{j,m}(x)) = \left[\exp\left(\sum_{i=0}^m a_i x^i\right) \right]_j. \quad (8)$$

Оценка погрешности функции (8) вычисляется с помощью среднеквадратического отклонения от табличных значений (4)

$$\Phi_j(f_j, \varphi_j) = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n (f_j(\eta_\ell) - \varphi_{j,\ell})^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n (\exp(P_{j,m}(\eta_\ell)) - \mathcal{F}_j(\eta_\ell))^2}. \quad (9)$$

Кроме того использовались также следующие оценки [20]:

относительная погрешность

$$\delta_\ell(f_j(\eta_\ell)) = \frac{|f_j(\eta_\ell) - \mathcal{F}_j(\eta_\ell)|}{\mathcal{F}_j(\eta_\ell)} = \frac{|\exp(P_{j,m}(\eta_\ell)) - \mathcal{F}_j(\eta_\ell)|}{\mathcal{F}_j(\eta_\ell)}, \quad \ell = 0, \dots, n, \quad (10)$$

максимальная относительная погрешность на интервале η ,

$$\delta_{\max}(f_j) = \max \frac{|f_j(\eta_\ell) - \mathcal{F}_j(\eta_\ell)|}{\mathcal{F}_j(\eta_\ell)} = \max \frac{|\exp(P_{j,m}(\eta_\ell)) - \mathcal{F}_j(\eta_\ell)|}{\mathcal{F}_j(\eta_\ell)}. \quad (11)$$

Если требуемая относительная погрешность в какой-то области η не достигалась: $\delta_\ell(f_j(\eta_\ell)) \geq (1 \div 4)\%$, интеграл вычислялся с шагом, в несколько раз меньшим. Затем процедура построения аппроксимирующей функции повторялась.

3. Результаты аппроксимации

С использованием алгоритма (4)-(11) было выполнено приближение интегралов Ферми-Дирака порядков $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2$ едиными выражениями для каждого порядка в диапазоне $-10 \leq \eta \leq 10$. Экспоненциальные приближения интегралов были сделаны с показателями $P_{j,m}(x)$ для $m = 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$$\mathcal{F}_j(x) \approx f_j(x) = \exp(P_{j,m}(x)) = \left[\exp\left(\sum_{i=0}^m a_i x^i\right) \right]_j. \quad (12)$$

Коэффициенты полиномов a_i ($i=0, \dots, m$) в показателях экспонент аппроксимирующих функций (12) представлены в табл.1.

В графическом отображении аппроксимирующие функции интегралов Ферми-Дирака для целых и полуцелых порядков, представлены на рис.1 и 2 соответственно.

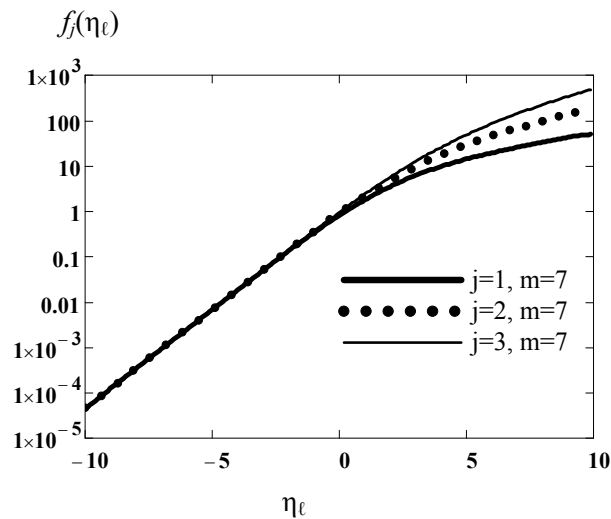


Рис.1. Аппроксимирующие функции интегралов Ферми-Дирака целых порядков.

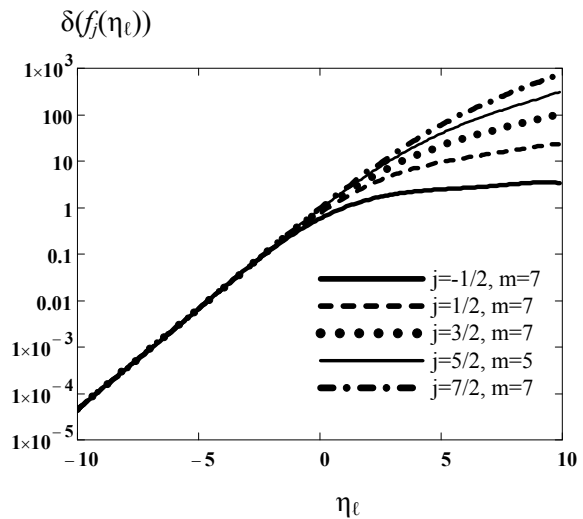


Рис.2. Аппроксимирующие функции интегралов Ферми-Дирака полуцелых порядков.

Таблица 1. Коэффициенты a_i ($i=0, \dots, m$) показателя экспоненты $\mathcal{F}_j(x) \approx f_j(x) = \left[\exp \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \right]_j$.

a_i ($i=0, \dots, m$)	Порядок интегралов Ферми-Дирака j		
	$-1/2$	$1/2$	1
a_0	-0.547817220021095	-0.275999786315927	-0.207827331088279
a_1	0.62180892681873	0.798663570658078	0.831283483122959
a_2	-0.0751504337606216	-0.0510854399040039	-0.0451239253185932
a_3	-0.0016030745760407	$-3.8884943669144 \times 10^{-3}$	$-3.38318007690 \times 10^{-3}$
a_4	$6.71653533828143 \times 10^{-4}$	$3.06243290502822 \times 10^{-4}$	$2.828994181929 \times 10^{-4}$
a_5	$1.78158795239303 \times 10^{-5}$	$4.25600395211334 \times 10^{-5}$	$3.494589935874 \times 10^{-5}$
a_6	$-3.0796549243596 \times 10^{-6}$	$-1.09132901271 \times 10^{-6}$	$-1.15443768474 \times 10^{-6}$
a_7	$-7.70854081325175 \times 10^{-8}$	$-1.7735539872507 \times 10^{-7}$	$-1.46571706647 \times 10^{-7}$
	$3/2$	2	$5/2$
a_0	-0.1486593579599	-0.105264307459	-0.0768619544439613
a_1	0.8719917921548592	0.9036830992850	0.919228896777874
a_2	$-3.77026823061 \times 10^{-2}$	$-3.12387208 \times 10^{-2}$	-0.0250502936462509
a_3	$-3.43676637225 \times 10^{-3}$	$-3.34505872 \times 10^{-3}$	$-2.3148638563603 \times 10^{-3}$
a_4	$1.956898356657 \times 10^{-4}$	$1.235519859 \times 10^{-4}$	$4.63301130675965 \times 10^{-5}$
a_5	$3.427979450715 \times 10^{-5}$	$3.199669205 \times 10^{-5}$	$1.02281466571666 \times 10^{-5}$
a_6	$-7.40518675978 \times 10^{-7}$	$-4.05448029 \times 10^{-7}$	
a_7	$-1.41636342802 \times 10^{-7}$	$-1.29768277 \times 10^{-7}$	
	3	$7/2$	
a_0	-0.050898937014924	-0.034692642459137	
a_1	0.947159393500044	0.961597271258725	
a_2	$-2.08140384458 \times 10^{-2}$	$-1.669792028063 \times 10^{-2}$	
a_3	$-2.89194285420 \times 10^{-3}$	$-2.593622326081 \times 10^{-3}$	
a_4	$1.812925912814 \times 10^{-5}$	$-1.80158070437 \times 10^{-5}$	
a_5	$2.471580355196 \times 10^{-5}$	$2.05290664912 \times 10^{-5}$	
a_6	$6.265497388018 \times 10^{-8}$	$2.11752277872 \times 10^{-7}$	
a_7	$-9.50514690624 \times 10^{-8}$	$-7.59153817940 \times 10^{-8}$	

С учетом погрешности аппроксимации интегралов Ферми-Дирака в пределах 4% показатель степени экспоненты $P_{j,m}(x)$ имеет восемь слагаемых ($m=7$) для порядков $j=-1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 3, 7/2$. Для порядка $j=5/2$ полином показателя имеет шесть слагаемых ($m=5$). Увеличение степени m полинома показателя способствует уменьшению погрешности аппроксимации, но соответственно увеличивает объем вычислений. На рис.3 и 4 показаны погрешности (10) для целых и полуцелых порядков.

Рис.3 показывает, что уровень погрешности аппроксимации интегралов порядков $j=2,3$ не превышает полутора процентов ($\delta_{\max}(f_j) \leq 1.5\%$) внутри интервала аппроксимации $-10 \leq \eta \leq 10$. Интегралы этих порядков приближаются аналитическими выражениями с полиномами степени $m=7$ в показателе экспоненты. Для интеграла порядка $j=1$ достижение такого уровня погрешности аппроксимации требует увеличения степени по-

казателя экспоненты до $m=8$. Аппроксимация экспонентой с полиномом степени $m=7$ в показателе для интеграла этого порядка имеет погрешность $\delta_{\max}(f_j) \leq 3\%$.

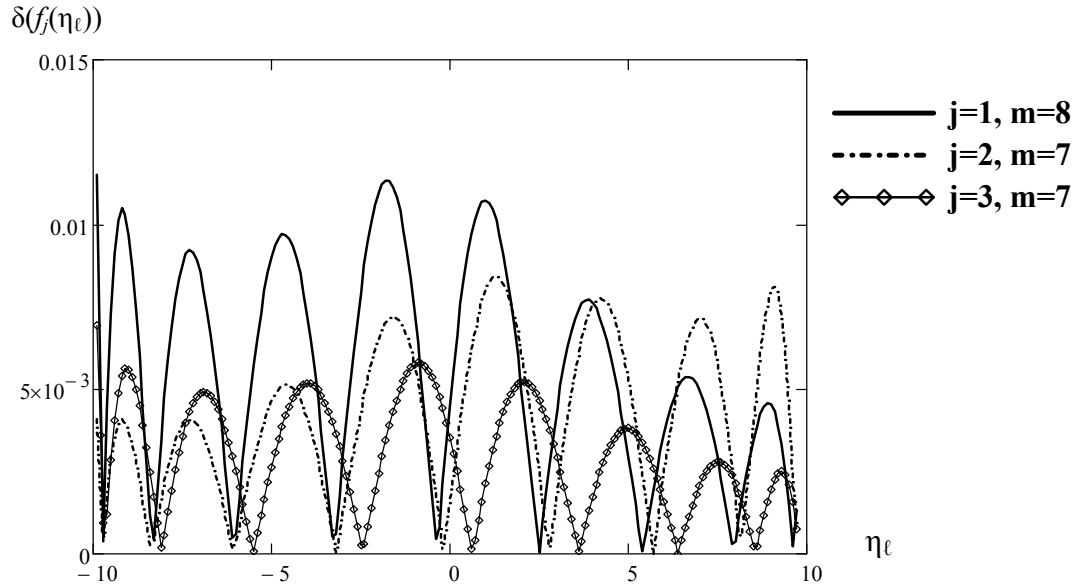


Рис.3. Относительная погрешность на интервале $\delta(f_j(\eta_\ell))$ аппроксимирующих функций (целые порядки).

На рис.4 показаны погрешности аппроксимации интегралов Ферми-Дирака полуцелых порядков. Наибольшую погрешность внутри интервала аппроксимации ($\delta_{\max}(f_j) \approx 4\%$) имеет приближающая функция (степень показателя экспоненты $m=7$) интеграла порядка $j=-1/2$. На конце интервала аппроксимации при $\eta \approx 10$ погрешность аппроксимации увеличивается до 4.5%. Для всех остальных полуцелых порядков погрешность аппроксимации не превышает $\delta_{\max}(f_j) \leq 3\%$ ($j=1/2, 3/2, 5/2, 7/2$).

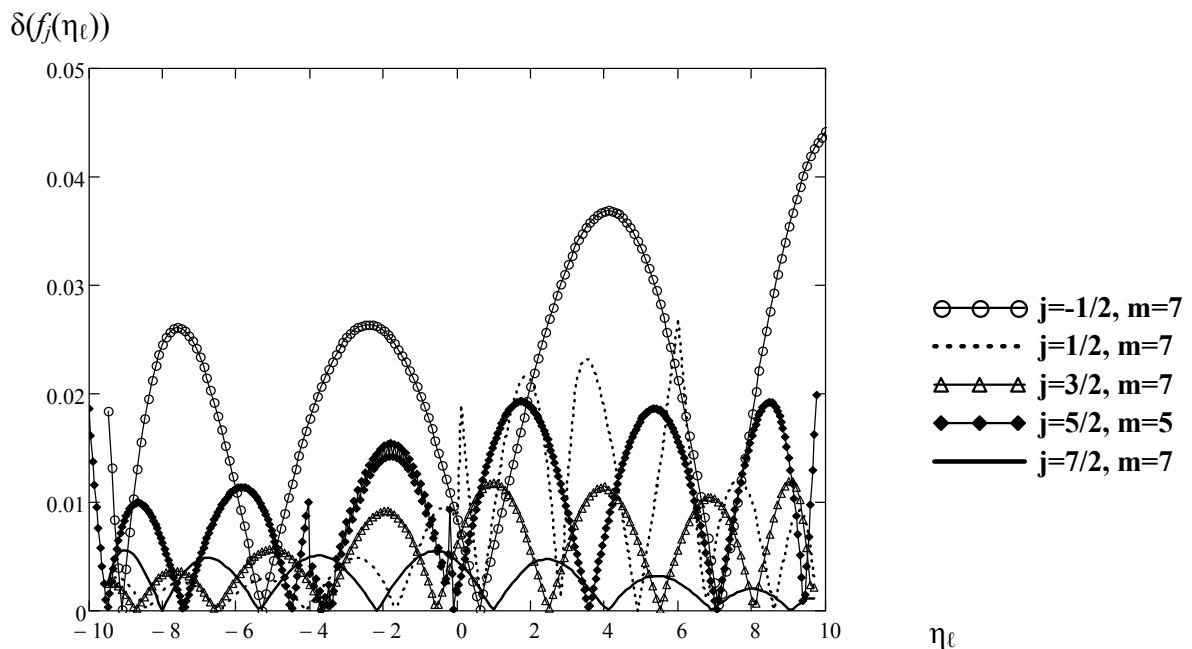


Рис.4. Относительная погрешность на интервале $\delta(f_j(\eta_\ell))$ аппроксимирующих функций (полуцелые порядки).

Как для целых, так и для полуцелых порядков (рис.3,4) уровень относительной погрешности, не превышающий 4%, сохраняется только внутри интервала аппроксимации, за рамками же этого интервала погрешность начинает резко увеличиваться, поэтому экстраполяция с использованием полученных аппроксимирующих функций приводит к большим ошибкам [21]. В случае необходимости приближения интегралов в более широком диапазоне изменения аргумента необходимо использовать изложенный подход аппроксимирования на измененном интервале.

4. Заключение

В данной работе для интегралов Ферми-Дирака порядков $j = -1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ и $7/2$ были получены непрерывные аналитические выражения, единые для каждого порядка в широком диапазоне вырождения $-10 \leq \eta \leq 10$. Для аппроксимации использовался подход на основе метода наименьших квадратов. Аппроксимирующие функции имеют правильное асимптотическое поведение в интервале аппроксимации, погрешность аппроксимации внутри которого не превышает $(1 \div 4)\%$. Экспоненциальная форма представления аппроксимирующих функций с алгебраическим многочленом в показателе степени позволяет найти разумный компромисс между точностью аппроксимации и простотой вычислений. Увеличение слагаемых в показателе экспоненты позволяет уменьшить погрешность, как показано в табл.1. Единые для всей области определения непрерывные аналитические выражения упрощают расчет свойств металлов и полупроводников и дальнейшее их использование в математических моделях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ч. Куммель. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978, 791 с.;
Charles Kittel. Introduction to Solid State Physics. 8 edition. – Wiley, 2004, 704 p.
2. Дж. Займан. Принципы теории твердого тела. 2-е изд. – М.: Мир, 1974, 478 с.;
J.M. Ziman. Principles of the Theory of Solid. 2 edition. – Cambridge University Press, 1979, 452 p.
3. О. Маделунг. Теория твердого тела. – М.: Наука, 1980, 418 с;
O. Madelung. Introduction to Solid-State Theory (Springer Series in Solid-State Sciences). – Springer; 1978, 491 p.
4. *W. Pauli. Über Gasentartung und Paramagnetismus // Zeitschrift für Physik, 1927, v 41, p.81-102.*
5. *A. Sommerfeld. Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik // Zeitschrift für Physik, 1928, v.47, p.1–3.*
6. *R.B. Dingle. The Fermi-Dirac integrals $\mathfrak{F}_p(\eta) = (p!)^{-1} \int_0^\infty \varepsilon^p (e^{\varepsilon-\eta} + 1)^{-1} d\varepsilon$ // Applied Scientific Research, 1957, v.6, p.225-239.*
7. *J.S. Blakemore. Approximations for Fermi-Dirac integrals, especially the function $\mathfrak{F}_{1/2}(\eta)$, used to describe electron density in a semiconductor // Solid-State Electronics, 1982, v 25, № 11, p.1067-1076.*
8. *Henry van Driel. Kinetics of high-density plasmas generated in Si by 1.06-and 0.53-pm picosecond laser pulses // Phys. Rev. B, 1987, v.35, 8166.*
9. *P. Van Halen and D.L. Pulfrey. Accurate, short series approximations to Fermi-Dirac integrals of order $-1/2, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$, and $7/2$ // Journal of Applied Physics, 1985, v.57, p.5271-5274.*
10. *F.G. Lether. Variable precision algorithm for the numerical computation of the Fermi-Dirac function $F_j(x)$ of order $j = -3/2$ // J. Sci. Comput, 2001, v.16, p.69–79.*
11. *T.M. Garoni, N.E. Frankel, and M.L. Glasser. Complete asymptotic expansions of the Fermi-Dirac integrals $\mathcal{F}_p(\eta) = 1/\Gamma(p+1) \int_0^\infty \varepsilon^p / (1 + e^{\varepsilon-\eta}) d\varepsilon$ // J. Math. Phys., 2001, v.42, №4, p.1860-1868.*

12. *Bernard Pichon*. Numerical calculation of the generalized Fermi-Dirac integrals // *Computer Physics Communications*, 1989, v.55, p.127-136.
13. *W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery*. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3rd ed. – New York: Cambridge University Press, 2007, 762 p.
14. *J. McDougall and E.C. Stoner*. The computation of Fermi-Dirac functions // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1938, v.237, p.67-104.
15. *C. Beer, M.N. Chase and P.F. Choquard*. Extension of McDougall-Stoner tables of the Fermi-Dirac functions // *Helvetica Physica Acta*, 1955, v.28, p.529-542.
16. *Н.Н. Калиткин, Л.В. Кузьмина*. Интерполяционные формулы для функций Ферми-Дирака // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1975, т.15, № 3, с.768-771;
N.N. Kalitkin, L.V. Kuzmina. Interpoliatcionnye formuly dlia funktcii Fermi-Diraka // *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 1975, t.15, № 3, s.768-771.
17. *Н.Н. Калиткин, И.В. Ритус*. Гладкая аппроксимация функций Ферми-Дирака // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, т.26, № 3, с.461-465;
N.N. Kalitkin, I.V. Ritus. Smooth approximation of Fermi-Dirac functions // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, v.26, №2, p.87-89.
18. *D. Bednarczyk and J. Bednarczyk*. The approximation of the Fermi-Dirac integral $\mathfrak{F}_{1/2}(\eta)$ // *Physics Letters*, 1978, v.64A, №4.
19. *X. Aymerich-Humet, F. Serra-Mestres and J. Millan*. An analytical approximation for the Fermi-Dirac integral $F_{1/2}(\eta)$ // *Solid-St. Electron.* 1981, v.24, 981.
20. *А.А. Самарский, А.В. Гулин*. Численные методы. – М.: Физматлит, 1989, 432 с.;
A.A. Samarskii, A.V. Gulin. Chislennye metody. – М.: Fizmatlit, 1989, 432 s.
21. *Н.Н. Калиткин*. Численные методы. – Санкт-Петербург: БХВ, 2011, 592 с.;
N.N. Kalitkin. Chislennye metody. – St-Peterburg: BKHV, 2011, 592 s.

Поступила в редакцию 28.03.2016.