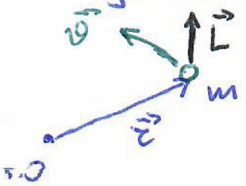
Момент імпульсу

Згадаємо, що при вільному русі частинки вже $[\vec r, \vec v] = const$



момент імпульсу частинки

$$\vec L = m[\vec r, \vec v] = [\vec r, \vec p] \quad \perp \vec r, \perp \vec v$$

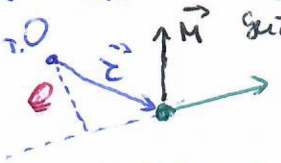
$$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec r, \vec p] = \underbrace{\left[\frac{d\vec r}{dt}, \vec p\right]}_{=0,\ \vec v \uparrow\uparrow \vec p} + \left[\vec r, \frac{d\vec p}{dt}\right] = [\vec r, \vec F] \qquad \frac{dL_x}{dt} = M_x \ \ldots$$

$\vec M = [\vec r, \vec F]$ – момент сили $\quad |\vec M| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot l$, $\quad l = r \cdot \sin\alpha$ – плече сили.

р-ня моментів $\quad \frac{d\vec L}{dt} = \vec M \quad$ M – сума моментів усіх сил.

$d\vec L = \vec M dt \qquad \Delta \vec L = \int_{t_1}^{t_2} \vec M dt$

якщо $\vec F$ проходить через т.О – $M = 0$



момент імпульсу частинки зберігається, якщо сумарний момент усіх сил, прикладених до частинки, дорівнює нулю.

Система частинок

$$\vec L = \sum_{i=1}^{N} \vec L_i \qquad \frac{d\vec L}{dt} = \sum \frac{dL_i}{dt} = \sum \vec M_i, \quad \vec M_i = [\vec r_i, \vec F_i]$$ – момент сил до i-ої частинки

$$\frac{d\vec L}{dt} = \sum M_i^{вн} + \sum M_i^{зовн} \qquad M_i^{вн} = [\vec r_i, \vec F_i^{вн}], \quad M_i^{зовн} = [\vec r_i, \vec F_i^{зовн}]$$

$$\sum M_i^{вн} = \sum_{i=1}^{N} [\vec r_i, \vec F_i^{вн}] = \sum_i \sum_{k \ne i} [\vec r_i, \vec F_{ik}] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \ne k}} [\vec r_i, \vec F_{ik}] + \frac{1}{2} \sum [\vec r_i, \vec F_{ik}] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum [\vec r_i, \vec F_{ik}] + \frac{1}{2} \sum [\vec r_k, \vec F_{ki}] \overset{III\ з.Н}{=} \frac{1}{2} \sum [\vec r_i, \vec F_{ik}] - \frac{1}{2} \sum [\vec r_k, \vec F_{ik}] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \ne k}} [(\vec r_i - \vec r_k), \vec F_{ik}] = \frac{1}{2} [\vec r_{ik}, \vec F_{ik}] = 0$$

якщо сили центральні $\vec r_{ik} \parallel \vec F_{ik}$

з нецентральних актуальною у класс. мех. є лише сила Лоренца, але вона набуває помітної величини лише для заряджн. част. при велик. v.

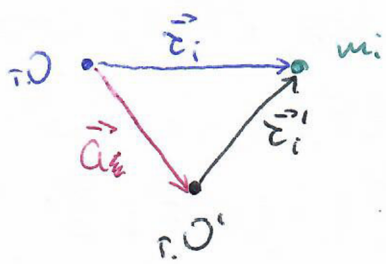
$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec M^{зовн} = \sum_i \vec M_i^{зовн}$$

момент імп. S частинок зберігається, якщо сумарний момент зовн. сил, прикладених до S дорівнює нулю.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{зовн} \qquad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{зовн} \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{зовн}$$

якщо S замкнена $\quad \vec F_i^{зовн} = 0 \quad \vec M_i^{зовн} = 0 \quad \vec L = \sum L_i(t) = const$

Власний момент імпульсу D частинок



М.І. за означенням залежить від вибору точки (~~С.В~~), відносно якої визначається

відн. т.О $\quad \vec L = \sum [\vec r_i, \vec p_i]$

т.О' $\quad \vec L' = \sum [\vec r_i', \vec p_i]$

$\vec r_i = \vec r_i' + \vec a \qquad \vec L = \sum [(\vec r_i' + \vec a), \vec p_i] =$

$= \sum [\vec r_i', \vec p_i] + \sum [\vec a, \vec p_i] = \vec L' + [a, \sum \vec p_i] = \vec L' + [\vec a, \vec P]$

$\vec L$ та $\vec L'$ визначені в одній С.В відносно різних точок відрізняються на $[\vec a, \vec P]$

При $\vec P = 0$ (СЦМ!) $\vec L = \vec L'$

тобто у СЦМ момент імпульсу не залежить від вибору точки
наз. власний момент імпульсу системи частинок

$\vec M^{зовн} = \vec M'^{зовн} + [\vec a, \vec F^{зовн}]$, $\quad \vec F^{зовн} = \sum \vec F_i^{зовн}$

тобто при $\vec F^{зовн} = 0$ момент не залежить від точки.... використовується при розв'язку задач

з умови $\sum F_i^{зовн} = 0$ не випливає $\vec M^{зовн} = 0$!

Зв'язок між власним МІ та М.І в довільній ІС.В

$\vec L_c$ — власний М.І., так як він не залежить від точки в ЦМ. Визначемо його відносно центру мас. частинок.

$\vec a \to \vec R_c$

$\vec L = \vec L_c + \underbrace{[\vec R_c, \vec P]}_{\text{рух системи як цілого відносно}}$ - відн. т.О. довільної С.В

або $\quad r_i = R_c + r_{ic} \quad ; \quad \vec v_i = \vec V_c + \vec v_{i,c}$

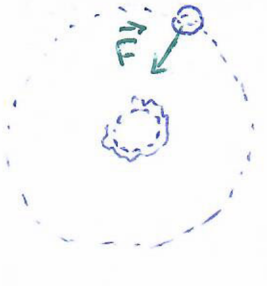
$\vec L = \sum m_i [\vec r_i, \vec v_i] = \sum m_i [(\vec R_c + \vec r_{i,c}), (\vec V_c + \vec v_{i,c})] = \sum m_i [\vec R_c, \vec V_c] +$

$+ \sum m_i [\vec R_c, \vec v_{i,c}] + \sum m_i [\vec r_{i,c}, \vec V_c] + \sum m_i [\vec r_{i,c}, \vec v_{i,c}] =$

$= [\vec R_c, \vec V_c] \sum m_i + \underbrace{[\vec R_c, \sum m_i \vec v_{i,c}]}_{=0} + \underbrace{[\sum m_i \vec r_{i,c}, V_c]}_{=0} + \sum [\vec r_{i,c}, m_i \vec v_{i,c}] =$

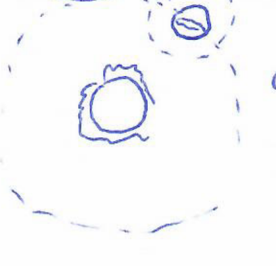
$= [\vec R_c, \vec P] + \vec L_c$

Пр 1 Венера рухається навколо Сонця. Відносно якої точки геліоцентричної системи відліку L буде зберігатись

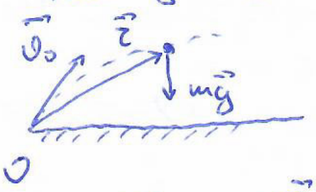


Сила на планету - сила тяжіння з боку Сонця, ~~її~~ момент тоді спрямована через центр, M відносно центра Сонця $= 0$, $L = const$

Пр.2 система Земля-Місяць - незамкнута, її імпульс весь час змінюється під дією Сонця але момент імпульсу відн. центра Сонця $= const$.



Пр.3 Камінь масою m кинули під кутом до горизонту з $\vec{v}_0$. Знехтувавши опором повітря, знайти $\vec{L}(t)$ відносно точки кидка.

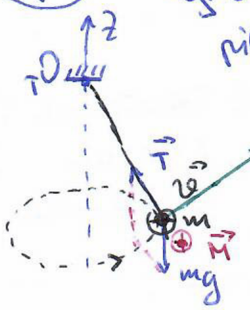


$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $\quad \vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$ $\quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$ $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}$ $\quad \vec{M} = [\vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}, m\vec{g}] = m[\vec{v}_0, \vec{g}]t$

$d\vec{L} = m[\vec{v}_0, \vec{g}]t\,dt \Rightarrow L(t) = m[\vec{v}_0, \vec{g}]t^2/2$ $\quad$ $\vec{L}$ весь час спрямований за площину рис.

Пр.4 Кулька масою m, підвішена на нитці, рівномірно рухається по горизонтальному колу.



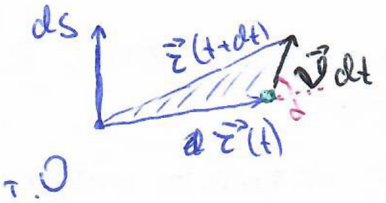
Сили — $m\vec{g}$, та $\vec{T}$

якщо розглядати т. O — залишається лише M_{mg}

$\vec{L}$ весь час змінюється (повертається) $|\vec{L}| = const$ ($v = const$,)

$L_z = const$, бо $\vec{M} \perp z$, ($M_z = 0$)

* одна матеріальна точка



За dt радіус-вектор отримує приріст $\vec{v}\,dt$, описуючи площу малого трикутника $dS = \frac{1}{2} r v dt \sin\alpha$

можна ввести вектор $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]dt$

$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$ — площа, що описується радіус-вектором в одиницю часу, секторіальна швидкість $\Rightarrow \vec{L} = 2m\dot{\vec{S}}$ $\quad$ при умов $m = const$ $\vec{L} \sim \dot{\vec{S}}$

* на частинку діє центральна сила, що проходить через т. O.

$\Rightarrow \vec{M} = 0$ $\quad \vec{L} = const$ $\quad \dot{\vec{S}} = const$ $\Rightarrow$ 1) так як $\vec{r} \perp \dot{\vec{S}}$, $\vec{v} \perp \dot{\vec{S}}$, то траєкторія плоска крива

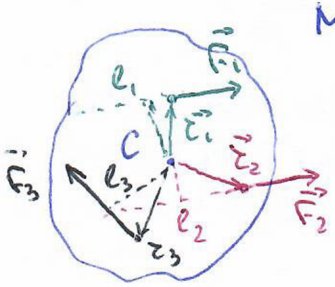
2) за однакові проміжки часу є описує однакові площі.

Рівняння руху АТТ.

Ми раніше вже показували, що ∀ рух можна представити як поступальний всього тіла зі швидкістю $\vec V$ якоїсь його точки (залежить від С.В) та обертання навколо осі, що проходить через цю точку з $\vec\omega$, яка не залежить від вибору С.В.

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F^{зовн} = \sum_i \vec F_i^{зовн} \qquad \frac{dL_c}{dt} = \vec M_c^{зовн} = \sum \vec M_{i,c}^{зовн}$$ ← розглядаємо СЦМ

$$M\frac{d\vec V_c}{dt} = \vec F^{зовн}$$

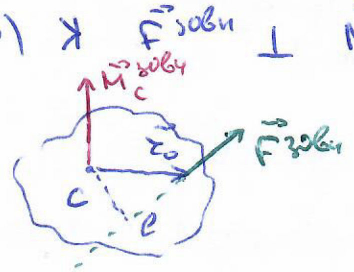


Два векторні р-ня відповідають 6 скалярним => можна знайти 6 ступенів вільності (якими можуть бути 3 поступальних, V_{ci}, 3 обертальних ω_i)

описує поступальний рух   обертальний

а) якщо переміщувати $\vec F_i$ вздовж напрямків їхньої дії, то не зміниться ні $\vec F^{зовн}$ то $\vec M_c^{зовн}$ (плечі сталі)

б) К $\vec F^{зовн} \perp \vec M_c^{зовн}$



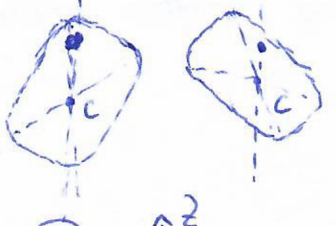
Тоді завжди можна знайти такий $\vec r_0 \perp \vec M_c^{зовн}$, що $\vec M_c^{зовн} = [\vec r_0, \vec F^{зовн}]$

∀ вектор, кінець якого лежить на лінії дії сили $\vec F$

$\to l = M_c^{зовн}/F_c^{зовн}$

=> систему сил за умови $\vec M_c^{зовн} \perp \vec F^{зовн}$ можна замінити рівнодійною (прикладена до ∀ точки Т.Т, що лежить на прямій, яка проходить на відстані до центра мас у площині, де знаходиться С і яка ⊥ $\vec M_c^{зовн}$)

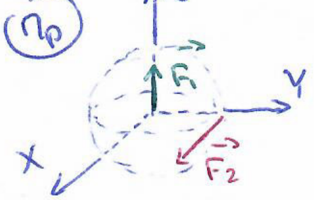
Пр. 1 Тіло в однорідному полі сили тяжіння



$$\vec M^{тяж} = \sum[\vec r_i, m_i\vec g] = [(\sum \vec r_i m_i), \vec g] =$$
$$= \cancel{[\vec P, \vec g]} = [M\vec R_c, \vec g] = [\vec R_c, M\vec g] = [\vec R_c, \vec F^{тяж}]$$

тобто $\vec M^{тяж} \perp \vec F^{тяж}$ і можна ввести рівнодійну силу $M\vec g$, лінія дії якої збігається з вертикаллю і проходить через С.

Пр



- рівнодійну ввести не можна: причиною $\vec M_c^{зовн}$ є $\vec F_2$, тобто $\vec M_c^{зовн} \uparrow\downarrow Oz$, а $\vec F^{зовн} = \vec F_1 + \vec F_2$ $\not\uparrow\downarrow Oz$

Якщо деформаціями не можна знехтувати, то поняття рівнодійної втрачає сенс.

Умови рівноваги

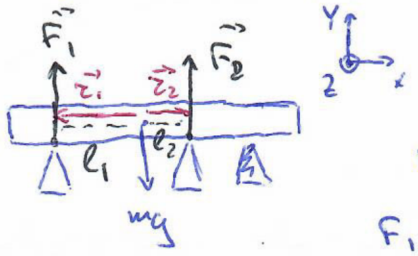
$\frac{d\vec P}{dt}=0$ $\frac{d\vec L}{dt}=0$

$$\vec F^{зовн} = \sum \vec F_i^{зовн} = 0 \qquad M^{зовн} = \sum M_i^{зовн} = 0$$

загалом ці умови допускають рівномірний рух центра мас і рівномірне обертання навколо осі, що проходить через ^

+ $\vec V_c(0)=0$, $\vec\omega(0)=0$

Якщо $\vec F^{зовн}=0$, то точку відносно якої визначають момент, можна обирати довільно



$m\vec g+\vec F_1+\vec F_2=0$ $[\vec r_1,\vec F_1]+[\vec r_2,\vec F_2]=0$ ← відн. центра мас

OY: $-mg+F_1+F_2=0$ OZ: $-l_1F_1+l_2F_2=0$

$F_1=\frac{l_2}{l_1}F_2$ $F_2+\frac{l_2}{l_1}F_2=mg$ $F_2=\frac{l_1}{l_1+l_2}mg$ $F_1=\frac{l_2}{l_1+l_2}mg$

Якщо моменти відносно прикладення сили F_1:

$$-l_1mg+(l_1+l_2)F_2=0 \Rightarrow F_2=\frac{l_1}{l_1+l_2}mg$$

Зв'язок між власним моментом імпульсу і вектором кутової швидкості

Розглядаємо АТТ як сукупність мат. точок з Δm_i

$$\vec L_c = \sum_{i=1}^{N}[\vec r_{i,c}, \Delta m_i \vec v_{i,c}] = \sum [\vec r_{i,c}, \Delta m_i[\vec\omega,\vec r_{i,c}]] =$$

$\vec v_{i,c}=[\vec\omega,\vec r_{i,c}]$

$$=\sum \Delta m_i[\vec r_{i,c}[\vec\omega,\vec r_{i,c}]] = \sum\Delta m_i(\vec\omega r_{i,c}^2-\vec r_{i,c}(\vec r_{i,c}\cdot\vec\omega))$$

$[\vec a[\vec b,\vec c]]=\vec b(\vec a\cdot\vec c)-\vec c(\vec a\cdot\vec b)$

$$L_{c,x}=\sum_i\Delta m_i(\omega_x(x_{i,c}^2+y_{i,c}^2+z_{i,c}^2)-x_{i,c}(x_{ic}\omega_x+y_{ic}\omega_y+z_{ic}\omega_z))=$$

$$=\sum_i\Delta m_i(\omega_x x_{i,c}^2+\omega_x y_{i,c}^2+\omega_x z_{i,c}^2-x_{ic}^2\omega_x-x_{ic}y_{ic}\omega_y-x_{ic}z_{ic}\omega_z)=$$

$$=\omega_x\sum_i\Delta m_i(y_{i,c}^2+z_{ic}^2)-\omega_y\sum_i\Delta m_i x_{ic}y_{ic}-\omega_z\sum\Delta m_i x_{ic}z_{ic}$$

$$L_{c,y}=-\omega_x\sum\Delta m_i y_{ic}x_{ic}+\omega_y\sum\Delta m_i(x_{ic}^2+z_{ic}^2)-\omega_z\sum\Delta m_i y_{ic}z_{ic}$$

$$L_{c,z}=-\omega_x\sum\Delta m_i z_{ic}x_{ic}-\omega_y\sum\Delta m_i z_{ic}y_{ic}+\omega_z\sum\Delta m_i(x_{ic}^2+y_{ic}^2)$$

або

$$L_{x,c}=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z$$
$$L_{y,c}=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z \qquad L_{ic}=\sum_j I_{ij}\omega_j$$
$$L_{z,c}=I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z \qquad \vec L_c=\hat I\vec\omega$$

$I_{\alpha\beta}$ - компоненти тензора інерції, залежать від розподілу мас в АТТ.

$$\begin{pmatrix} L_{x,c}\\ L_{y,c}\\ L_{z,c}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}.$$

I_{ii} – діагональні (осьові) компоненти тензора інерції ТТ або осьові моменти інерції

В кожній системі координат інерційні властивості х-тся 9 числами

Загалом густина тіла може бути не постійною

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho\,(r^2\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta)\,dV \qquad \rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V},\ \Delta m_i = \rho(x,y,z)dV$$

Символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$

В ПДСК

$$I_{xx} = \cancel{\quad}\,x^2\cdot\int_V \rho(x,y,z)\,(y^2+z^2)\,dV \qquad I_{xy} = -\int_V \rho(x,y,z)\cdot x\cdot y\,dx\,dy\,dz$$

$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ – симетричний тензор другого рангу => 6 незалежних компонент

У в випадку можна вибрати таку орієнтацію координатних осей, що недіагональні $=0$ (до вектора теж завжди можна вибрати таку СК, щоб ненульова лише 1 комп)

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz}\end{pmatrix}$$
– приведення тензора до головних осей

$I_{xx}=I_1$, $I_{yy}=I_2$, $I_{zz}=I_3$ – головні моменти інерції

У головній системі координат тензора інерції

$$L_{x,c} = I_1\omega_x \qquad L_{y,c} = I_2\omega_y \qquad L_{z,c} = I_3\omega_z$$

рівняння динаміки обертального руху

$$I_1\frac{d\omega_x}{dt} = M^{зовн}_{x,c} \qquad I_2\frac{d\omega_y}{dt} = M^{зовн}_{y,c} \qquad I_3\frac{d\omega_z}{dt} = M^{зовн}_{z,c}$$

міри інертності тіла щодо обертання навколо відповідної головної осі

Якщо є довільна СК, то визначенню підлягають
- 3 головні моменти інерції
- 3 кути між трьома головними осями інерції та трьома осями СК

} 6 незал. компонент тензора інерції

Властивості

1) $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$
2) $I_{xx}+I_{yy}+I_{zz} = const$ при поворотах ПДСК (інваріант)
3) $I_1 = \sum_i \Delta m_i(y_{i,c}^2 + z_{i,c}^2) \geq 0$, $I_2 \geq 0$, $I_3 \geq 0$

$$I_1 + I_2 = \sum \Delta m_i (y_{ic}^2 + z_{ic}^2) + \sum \Delta m_i (x_{ic}^2 + z_{ic}^2) = \sum \Delta m_i (x_{ic}^2 + y_{ic}^2 + 2z_{ic}^2) \geq$$
$$\geq I_3 = \sum \Delta m_i (x_{ic}^2 + y_{ic}^2)$$

сума $\forall$ двох головних компонент не менша за третій

4) $I'_{\alpha'\beta'} = \sum\limits_{\alpha,\beta} \alpha_{\alpha'\alpha}\, \alpha_{\beta'\beta}\, I_{\alpha\beta}$ - закон перетворення для вектора $x_i' = \sum \alpha_{ij} x_j$

$$\alpha_{ij} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ - поворот на φ навколо осі z

а) $I_1 \neq I_2 = I_3 \neq I_1$ - несиметрична дзига

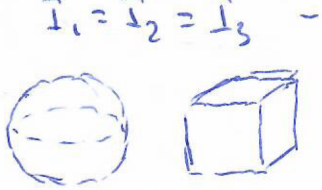
низькосиметричні тіла (елементи симетрії - площини, повороти на π...) починаючи с паралепіпеда 

б) $I_1 = I_2 \neq I_3$ - симетрична дзига ← ротатор

система мат. точок, що розташовані на одній прямій  $x_i = y_i = 0$ $I_1 = I_2 = \sum \Delta m_i z_i^2$ $I_3 = 0$

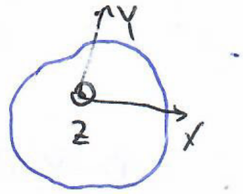
. дитяча дзига - $\forall$ тіло, що має вісь симетрії вище третього порядку

в) $I_1 = I_2 = I_3$ - сферична дзига



тетраедр

тіло зі сферично-симетричним розподілом щільності $\rho = \rho(r)$

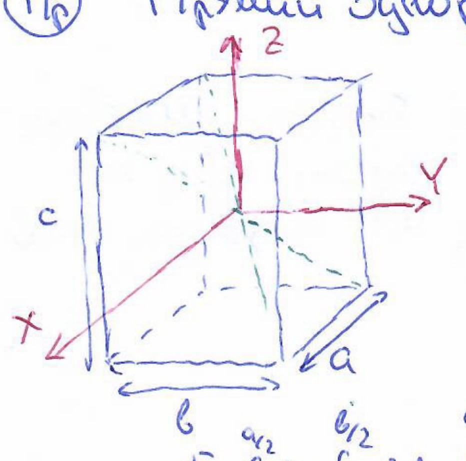
(Пр) 

· плоске тіло (всі частинки в одній площині)

$Oz \perp$ площині $z_i = 0$

$$I_1 + I_2 = \sum \Delta m_i y_{ic}^2 + \sum \Delta m_i x_i^2 = \sum \Delta m_i (x_{ic}^2 + y_{ic}^2) = I_3$$
$$I_1 + I_2 = I_3$$

(Пр) Прямий однорідний паралепіпед



$$I_{xy} = -\int\limits_V \rho xy\, dV = -\rho \int\limits_{-a/2}^{a/2} x\,dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} y\,dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz = 0$$

Вибрана система - головна система координат тензора інерції паралепіпеда

$$I_1 = I_{xx} = \int \rho (y^2 + z^2)\, dV = \rho \left[\int\limits_V y^2 dV + \int\limits_V z^2 dV \right] =$$
$$= \rho \left[\int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz + \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} z^2 dz \right] =$$

$$I_{xx} = \rho\left(x\Big|_{a/2}^{-a/2} \frac{y^3}{3}\Big|_{-b/2}^{b/2} z\Big|_{-c/2}^{c/2} + x\Big|_{-a/2}^{a/2} y\Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{z^3}{3}\Big|_{-c/2}^{c/2} \right) =$$

$$= \rho\left(a \cdot \frac{b^3}{3\cdot 4}\cdot c + a\cdot b\cdot \frac{c^3}{3\cdot 4}\right) = \underbrace{\rho\cdot \underbrace{a\cdot b\cdot c}_{V}}_{M} \frac{1}{12}(b^2+c^2) = \frac{1}{12} M (b^2+c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12} M (a^2+c^2) \quad , \quad I_3 = \frac{1}{12} M (a^2+b^2)$$

Змінюємо симетрію

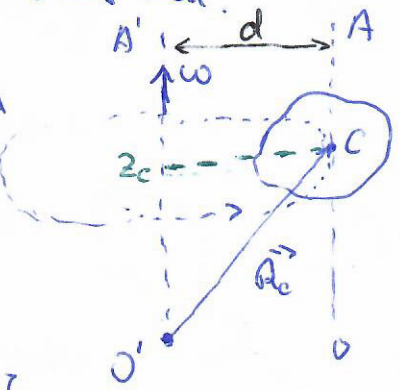
$a=b \qquad I_1 = I_2 = \frac{1}{12} M (a^2+c^2) \qquad I_3 = \frac{1}{6} Ma^2$

$a=b=c \qquad I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{6} Ma^2$

$c >> a, b$ – тонкий стержень $\qquad I_3 \approx 0 \qquad I_1 = I_2 = \frac{1}{12} Mc^2$

Зрозуміло, що моменти інерції ~~од~~ тіла визначені відносно різних осей відрізняються, а обертання не завжди відбувається навколо осі, яка проходить через його центр мас.

Загальне рівняння $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{зовн}$



$\vec{L} = \vec{L}_c + [\vec{R}_c, \vec{P}]$ $\qquad$ > O'A' ∥ OA на відстані d

$\vec{M}^{зовн} = \vec{M}_c^{зовн} + [\vec{R}_c, \vec{F}^{зовн}]$

$$\vec{L} = \vec{L}_c + [\vec{R}_c, M\vec{V}_c] = \vec{L}_c + [\vec{R}_c, M\frac{d\vec{R}_c}{dt}] =$$

$$= \vec{L}_c + M[\vec{R}_c, \frac{d\vec{R}_c}{dt}] = \vec{L}_c + M[\vec{R}_c, [\vec{\omega}, \vec{R}_c]] =$$

$$= \vec{L}_c + M(\vec{\omega} R_c^2 - \vec{R}_c(\vec{R}_c\cdot\vec{\omega})) \qquad \vec{R}_c\cdot\vec{\omega} = x_c\cdot 0 + y_c\cdot 0 + z_c\cdot\omega$$

$$L_{O'A'} = L_z = L_{z,c} + M(\omega R_c^2 - z_c(z_c\cdot\omega)) = \underbrace{L_{z,c}}_{I_c\omega} + M\omega(\underbrace{R_c^2 - z_c^2}_{d^2}) =$$

$$= I_c\cdot\omega + Md^2\cdot\omega$$

$L_z = \omega I_{O'A'} \Rightarrow \quad I_{O'A'} = I_c + Md^2$ – теор. Гюйгенса-Штейнера: момент інерції ТТ відносно довільної осі є сумою м. інер. тіла відносно паралельної осі, що проходить через ЦМ та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями

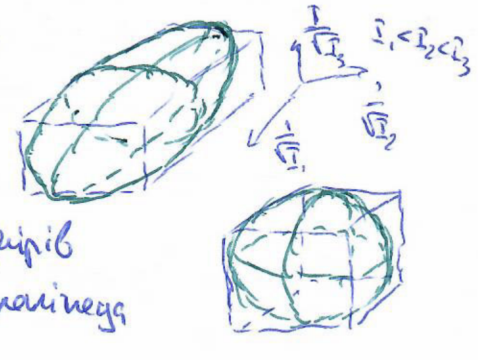
$$I_{O'A'} \frac{d\omega}{dt} = M_{O'A'}$$

Еліпсоїд інерції - наочний геом. образ тензора інерції, аналог стрілки для вектора

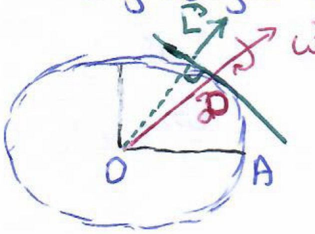
У власній СК тензора І

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$ - р-ня еліпсоїда

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_3}}\right)^2} = 1$$



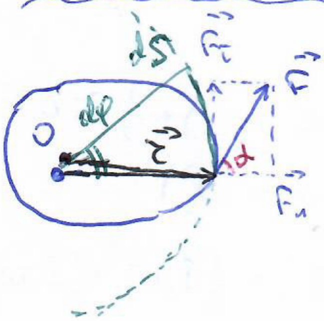
еліпсоїд І. певною мірою передає співвідн. розмірів однорідного тіла: напр. найдовшій стороні паралелепіпеда відповідає найдовша вісь



Побудови Пуансо:

- для знаходження напрямку $\vec{L}$ при обертанні навколо ∀ осі, що проходить через ц.м: будують площину — дотичну до поверхні в точці перетину з віссю, з центра еліпсоїда опускають перпендикуляр
- момент інерції відносно ∀ осі: розглядають переріз Е.І, який містить OD та одну з головних осей (∦ OA) тоді $I_{OD} = I_1\left(\frac{OA}{OD}\right)^2$, I_1 - головний момент

Робота зовнішніх сил при обертанні ТТ навколо нерухомої осі



Вісь O - ⊥ до рисунку

∦ $\vec{F}$ лежить у площині рис. (не має складової, що спричиняє рух вздовж осі)

$\vec{F} = \vec{F_n} + \vec{F_\tau}$

$\vec{F_n} \uparrow\uparrow \vec{r}$, зрівноважується реакцією опори

$\vec{F_\tau} \perp \vec{r}$ - переміщує точку прикладання сили по колу радіуса r

$\delta A = F_\tau dS = F \sin\alpha \cdot dS$, $dS = r d\varphi$

$\delta A = F r \sin\alpha \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi$ момент сили відносно осі обертання.

$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\varphi) d\varphi$ при $M_z = const$ $A = M_z \Delta\varphi$

якщо діє декілька сил $M_z = M_{z_1} + M_{z_2} + \ldots$

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega$$

робота дорівнює зміні кінетичної енергії.

Кінетична енергія при обертальному русі

При обертанні навколо нерухомої осі всі частинки тіла рухаються по колах, площини яких перпендикулярні осі обертання, швидкості залежать від відстані до осі

$$T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (\omega r_i)^2$$

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I_z$$ ← момент інерції відносно осі обертання

Більш загальний підхід

Раніше ми отримували $T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T_c$ ← власна кін. енергія

$$T_c = \sum_i \frac{\Delta m_i v_{i,c}^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i (\vec{v}_{i,c} \cdot \vec{v}_{i,c}) = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \left([\vec{\omega}, \vec{r}_{ic}] \cdot \vec{v}_{ic} \right) =$$ ← змішаний в-рний добуток, можна здійснювати перестановки

$$= \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \left([\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}], \vec{\omega} \right) = \frac{\vec{\omega}}{2} \sum \Delta m_i [\vec{r}_{i,c}, \vec{v}_{i,c}] = \frac{\vec{\omega}}{2} \sum [\vec{r}_{ic}, \vec{p}_{ic}]$$

$$T_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega}$$

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha L_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \sum_\beta I_{\alpha\beta} \omega_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta$$

У головній системі координат тензора інерції

$$T_c = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_x^2 + I_2 \omega_y^2 + I_3 \omega_z^2 \right)$$

сферична дзига оберт. навколо осі ~~через~~ ц.м через ц.м $T_c = \frac{1}{2} I \omega^2$

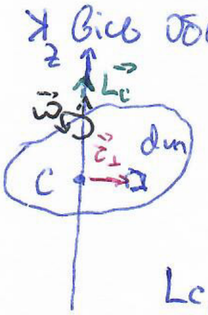
симетрична дзига $T_c = \frac{1}{2} I_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2$

ротатор $T_c = \frac{1}{2} I_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2)$

загальний випадок $T = \frac{1}{2} M V_{c,x}^2 + \frac{1}{2} M V_{c,y}^2 + \frac{1}{2} M V_{c,z}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2$

Динаміка обертання навколо нерухомої осі

Якщо вісь обертання проходить через ~~ц.м~~ центр мас, єдина характеристика руху – $\vec{\omega}$



виберемо $OZ \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ $\quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega_z) = (0, 0, \omega)$

$$L_{c,z} = I_{zz} \omega_z$$ ← скаляр, момент інерції відносно осі. $I_{zz} = I_c$

$$L_{c,z} = I_c \omega$$

$\frac{dL_{c,z}}{dt} = M_z$ ← проекція сумарного моменту моменту сил відносно осі обертання

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = I_c \ddot{\varphi} = M_z$$

I_c визначає інерційні властивості

$I_c = I_{zz} = \int \rho (x^2+y^2) dV = \int \rho r_\perp^2 dV$ $\quad r_\perp^2 = (x^2+y^2)$ - відстань від точки ТТ до осі обертання

Загалом, якщо ТТ надати обертання, то напрям осі обертання у просторі буде змінюватися. (для втримування необх. сили)

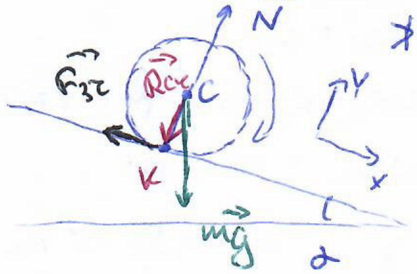
Вільна вісь - вісь, навколо якої можливе вільне (без прикладення зовнішніх сил) обертання ТТ, при якому напрямок осі залишається незмінним. Ці осі проходять через центр мас, а напрямки збігаються з напрямками головних осей тензора інерції - доведення Слободянюк, ст. 253 - 254

↖ при русі навколо них $\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Динаміка плоского руху

Під час такого руху $\forall$ точка (і ц.м. також) рухається у площині, паралельній деякій нерухомій площині, що $\perp \vec{\omega}$

$m\ddot{\vec{R}}_c = \vec{F}^{зовн}$ $\qquad I_c \ddot{\varphi} = \vec{M}_{c,z}^{зовн.}$



* циліндр скочується без ковзання

$m\ddot{\vec{R}}_c = m\vec{g} + \underbrace{\vec{N} + \vec{F}_{зч}}_{\vec{R}}$ ← сила зчеплення

$\vec{M}_{c_1} = [\vec{R}_{ck}, (m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{зч})] = [\vec{R}_{ck}, \vec{F}_{зч}]$

$I_c \beta = [\vec{R}_{ck}, \vec{F}_{зч}]$

$$\begin{cases} ma_{c,x} = mg\sin\alpha - F_{зч} \\ ma_{c,y} = -mg\cos\alpha + N \\ I_c\beta = R_{ck} \cdot F_{зч} \end{cases}$$

додаткові умови: $a_{c,y} = 0$

умова чистого кочення (шв-ть точок, що дотикається $= 0$)

$\vec{V}_c = -[\vec{\omega}, \vec{R}_{ck}]$

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - F_{зч} \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \\ I_c\beta = R_0 F_{зч} \\ a = \beta R_0 \end{cases}$$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I_c}{R_0^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{mR_0^2}}$$

при поступ. русі $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

не залежить від маси, залежить від μ

$$F_{зч} = \frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{mR_0^2}{I_c}}$$

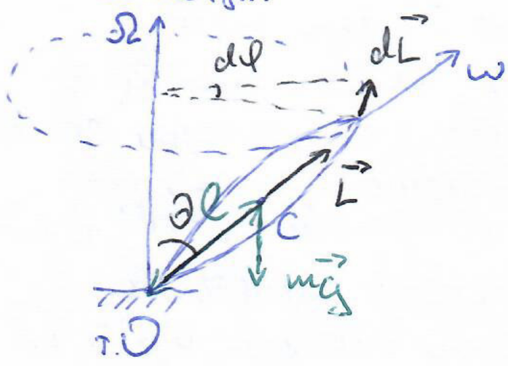
(ковзання $F_T = \mu N = \mu mg\cos\alpha$)

↑ це фактично тертя спокою, отже для чистого кочення потрібно

$F_{зч} < F_T$ $\qquad \frac{mg\sin\alpha}{1 + \frac{mR_0^2}{I}} \le \mu mg\cos\alpha$ $\qquad \boxed{tg\,\alpha \le \mu\left(1 + \frac{mR_0^2}{I}\right)}$

Динаміка гіроскопічного руху (рух тіла з однією закріпленою точкою)

Гіроскоп – симетрична дзига, що обертається навколо своєї осі симетрії



Вісь описує конус відносно вертикалі (прецесія), причому не падає навіть при достатньо великих відхиленнях

Чим більша ω => тим менша Ω

ω поступово зменшується (тертя в точці опори, повітря) => $\Omega \nearrow$, $\theta \nearrow$, падіння

$$m\ddot{\vec R}_c = m\vec g + \vec R \quad ; \quad \frac{d\vec L}{dt} = \vec M^{зовн.}$$

Відносно точки O $\quad \vec L = \vec L_c + [\vec R_c, \vec P] = \vec L_\omega + \vec L_\Omega$

$L_\omega = I\omega$, $\quad L_\Omega = mR_c^2\Omega \quad$ R_c – радіус кола, по якому рухається ц.м. т.С.

$I_{max} = m r_c^2$, $\quad r_c$ – радіус дзиги. $\quad L_{\omega, max} = m r_c^2 \omega$

r_c та R_c одного порядку (переважно $R_c < r_c$), $\quad \omega \gg \Omega \Rightarrow L_\omega \gg L_\Omega$

$$\vec L \approx \vec L_\omega$$

$dL = L\sin\theta \, d\varphi \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} L \sin\theta \qquad \frac{d\vec L}{dt} = [\vec\Omega, \vec L]$

момент сил відн. т.O $\quad \vec M^{зовн} = [\vec R_c, m\vec g]$

$$[\vec\Omega, \vec L] = [\vec R_c, m\vec g] \qquad \vec L = I\vec\omega$$

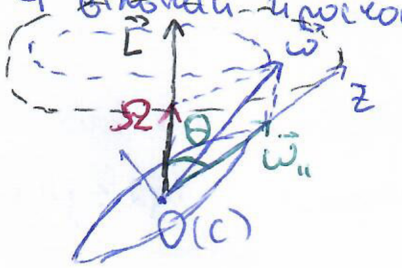
$$\Omega I \omega \sin\theta = \ell m g \sin\theta \qquad \Omega = \frac{\ell m g}{I\omega} \ - \neq f(\theta) \ - \text{можна визн. } g$$

це була змушена прецесія (для її виникнення необх. момент зовн. сил)

Регулярна прецесія гіроскопа

а) вільний гіроскоп => $\vec P = const \quad \vec L = const \quad T = const$

↑не означає, що напрямок осі гіроскопа постійний (збігається з $\vec L$)



Вибираємо СК: початок – центр мас

Oz ∥ осі гіроскопа

Ox ∈ площині {вісь, $\vec L$}

, $L_y = I_2 \omega_y = 0 \Rightarrow \omega_y = 0 \Rightarrow \vec L, \vec\omega$ та вісь в одній площині в кожен момент часу.

=> швидкості всіх точок $\vec v_c = [\vec\omega, \vec r_c] \perp$ площині, вісь гіроскопа описує конус навколо $\vec L$

Такий рух наз. регулярна прецесія.

$$L^2 = L_x^2 + L_z^2 = const$$

$$T = \frac{1}{2} I_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{3} I_3 \omega_z^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 =$$

$$= [L_x = I_1\omega_x,\ L_z = I_3\omega_z] = \frac{L_x^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_3} = const$$

$$L_x^2 = L^2 - L_z^2$$

$$T = \frac{L^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) = const, \text{ т.я. } L^2 = const,\ L_z^2 = const$$

$$\boxed{\omega_z = const}$$

$L_z = const \Rightarrow$ кут $\theta = const$ (між віссю симетрії та $\vec L$)

$\omega_z = const \Rightarrow \omega_x = const$ (бо $T = const$) $\Rightarrow$ кут $\widehat{\vec\omega, \text{вісь}} = const$

$\vec\omega = \underset{\parallel \vec L}{\vec\Omega} + \vec\omega_\parallel$ — ∥ вісі

$$\left.\begin{aligned} \Omega \sin\theta &= \omega_x \\ L_x &= I_1 \cdot \omega_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\Omega = \frac{L_x}{I\sin\theta} = \frac{L\sin\theta}{I_1\sin\theta} = \frac{L}{I_1} = \omega_y}$$

Тобто, при регулярній прецесії вісь гіроскопа рівномірно з Ω обертається навколо $\vec L$.

Сам гіроскоп обертається навколо своєї осі з $\omega_z = \frac{L_z}{I_3} = \frac{L\cos\theta}{I_3}$

якщо $\vec\omega$ за напрямом наближається до осі ($\omega_x \to 0$)

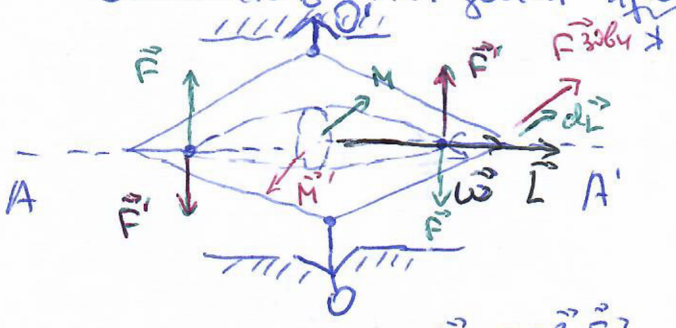
$\Omega \to 0$, період прецесії $\to \infty$

Якщо дзига сферична, то прецесія неможлива (т.я. $\forall$ вісь, що проходить через центр мас є віссю вільного обертання)

Земля сплюснута ($(I_1 - I_2)/I_3 = -0{,}0033$), є симетричною дзигою, якщо знехтувати моментами зовн. сил (Місяця, Сонця) $\Rightarrow$ обертання вільне, з періодом регулярної прецесії ~ року (точка виходу осі обертання Землі на поверхню не віддаляється від Північного полюса > 5 км)

Якщо не нехтувати силами притягання Місяця та Землі — вимушена прецесія осі обертання навколо нормалі до площини орбіти (період 26 000 років)

При спробі змінити напрямок осі обертання гіроскопа виникають так. звані гіроскопічні сили (гіроскопічний ефект)



AA' - вісь гіроскопа, яка може обертатися навколо OO' (вертикальна)

Прикладаємо $\vec{F}^{зовн}$ => повертаємо AA', повертається $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$d\vec{L} = \vec{M}dt$, $\vec{M}$ - момент пари сил $\vec{F}$ прикладених до осі гіроскопа з боку рамки

$\vec{M} = 2[\vec{l}, \vec{F}]$

$d\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{F}^{зовн} \uparrow\uparrow \vec{M} \Rightarrow \vec{F}$ - вертикальні (пара, бо нікуди не рухається)

за III з.Н до рамки з боку осі гіроскопа $\vec{F}'$, які утворюють $\vec{M}' = -\vec{M}$

⇓ зношення підшипників

"несподівана" поведінка "болгарки", ручних шліфувальних машин, дрель