

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА

О.О. Коротченков, А.О. Подолян



ФІЗИКА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Київ 2025

Коротченков О.О., Подолян А.О. Фізика в інформаційних технологіях

Навчальний посібник для студентів факультету інформаційних технологій

Рецензенти: О. А. Єщенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

С. В. Кондратенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету

(протокол № від травня 2025 р.)

Передмова

Фізика загалом охоплює широке коло питань, з атомних до галактичних масштабів, від діючих електричних схем до аеродинаміки. Вивчення цього курсу з основ векторного опису законів механіки, електро-магнітних явищ та квантової механіки, а також фізичних основ передачі та аналізу інформаційних сигналів сприятиме успішній підготовці висококваліфікованих фахівців, здатних до розв'язання складних задач у сфері інформаційних технологій, проведення системних фундаментальних досліджень та здійснення експериментальних розробок для інформатизації суспільства.

ЗМІСТ

1. Передмова	2
2. Векторний опис руху	5
<i>Кінематика</i>	5
<i>Динаміка</i>	8
<i>Практичні завдання</i>	11
3. Фундаментальні взаємодії у Всесвіті. Природа сил.	13
4. Закони збереження	18
<i>Вектор імпульсу та моменту імпульсу частинки</i>	18
<i>Кінетична енергія частинки</i>	20
<i>Консервативні та неконсервативні сили</i>	22
<i>Потенціальна енергія частинки. Закон збереження механічної енергії</i>	24
<i>Зв'язок між потенціальною енергією та силою</i>	26
<i>Практичні завдання</i>	28
5. Закони електрики та магнетизму	30
<i>Закон Кулона. Вектор напруженості електростатичного поля.</i>	30
<i>Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування</i>	31
<i>Потенціальний характер електростатичного поля.</i>	35
<i>Провідники в електричному полі. Електростатичний захист</i>	37
<i>Основні закони електромагнетизму</i>	40
<i>Закон електромагнітної індукції Фарадея. Вихрове електричне поле</i>	44
<i>Рівняння Максвелла</i>	46
<i>Електромагнітні хвилі як наслідок рівнянь Максвелла</i>	49
<i>Практичні завдання</i>	55
6. Основи квантової механіки	58

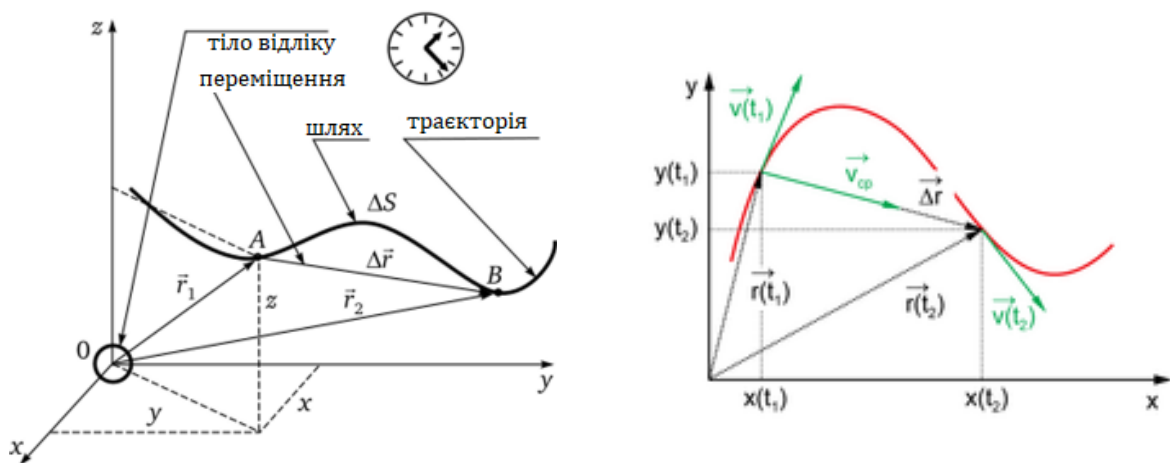
<i>Хвильові властивості мікрочастинок. Спін</i>	58
<i>Рівняння Шредінгера. Хвильова функція та її властивості</i>	63
<i>Практичні завдання</i>	65
7. Фізичні основи передачі інформації в електричних колах	70
<i>Струм та напруга як електричні сигнали</i>	70
<i>Закон Ома для неоднорідної ділянки та замкненого кола</i>	80
<i>Правила Кірхгофа</i>	81
<i>Особливості передачі змінних сигналів в електричних колах</i>	86
<i>Практичні завдання</i>	93
8. Фізичні основи передачі інформації в оптичних волокнах	97
<i>Ефект повного внутрішнього відбиття світла</i>	99
<i>Волоконно-оптичний зв'язок</i>	101
9. Фізичні основи квантової інформації	102
<i>Сплутані стани</i>	105
<i>Квантовий біт</i>	109
Література	112

1. Векторний опис руху

Кінематика

Кінема́тика – розділ механіки, що описує рух матеріальних тіл без урахування їхньої маси, сил, які діють на них і причин виникнення руху.

Ми обмежимося розглядом руху **матеріальної точки** як такого тіла, розмірами якого можна знехтувати. Вся маса сконцентрована в одній точці.

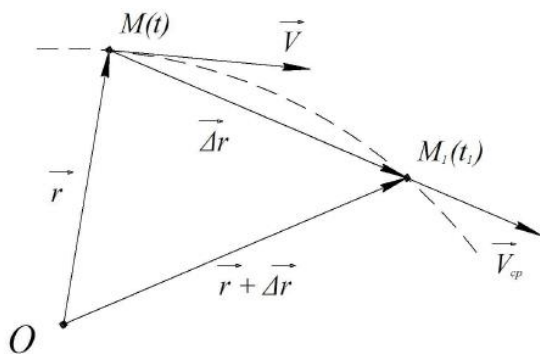


Положення **точкового тіла** в момент часу t задаємо радіус-вектором $\vec{r}(t)$ чи його координатами $x(t), y(t), z(t)$. Співвідношення між векторним ($\vec{r} = \vec{r}(t)$) та координатним ($x = x(t), y = y(t), z = z(t)$) способами задання руху тіла має вигляд

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні орти декартової системи координат, причому

$$|\vec{r}(t)| = r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$



На цьому рисунку точки M і M_1 із радіус-векторами \vec{r} і $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ задають положення рухомого тіла в моменти часу t і $t + \Delta t$. $\Delta\vec{r}$ – **вектор переміщення** тіла за проміжок часу Δt .

Вектором **середньої швидкості** тіла називають відношення цього переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt , за який це переміщення відбулось

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Напрямок вектору \vec{V}_{cp} збігається з напрямком вектору переміщення тіла $\Delta\vec{r}$.

Вектором **миттєвої швидкості** тіла (або вектором швидкості в даний момент часу) називають границю відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, коли проміжок часу Δt прямує до нуля, тобто

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Вектор миттєвої швидкості напрямлений уздовж дотичної (в бік руху тіла) у кожній точці траєкторії його руху.

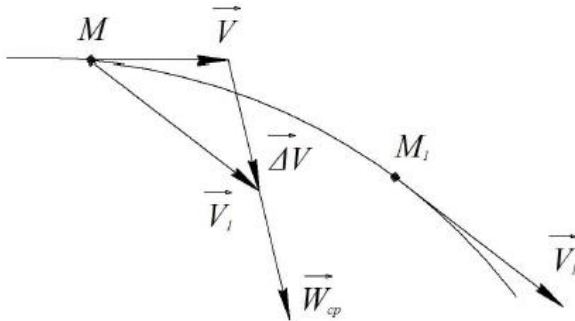
Таким чином, **вектор миттєвої швидкості** тіла **дорівнює першій похідній за часом від його радіус-вектору**.

Диференціюючи вираз $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, одержимо

$$\vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k},$$

звідки числове значення (**модуль**) **вектора швидкості** визначається таким чином

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}.$$



Знов, нехай точки M і M_1 задають положення рухомого тіла в моменти часу t і $t + \Delta t$. Вектори швидкості тіла у точках M і M_1 – відповідно \vec{V} і \vec{V}_1 . Приріст вектора швидкості за цей проміжок часу Δt складає $\Delta \vec{V}$ (див. Рис.). Вектором **середнього прискорення** тіла називають відношення цього приросту $\Delta \vec{V}$ до проміжку часу Δt , за який цей приріст відбувся

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}.$$

Вектором **миттєвого прискорення** тіла (або вектором прискорення в даний момент часу) називають границю відношення $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$, коли проміжок часу Δt прямує до нуля, тобто

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Напрямок вектору миттєвого прискорення \vec{a} співпадає з напрямком вектору $\Delta \vec{V}$, тобто вектор \vec{a} напрямлений в бік угнутості траєкторії руху тіла.

Таким чином, **вектор миттєвого прискорення тіла дорівнює першій похідній за часом від його швидкості, або другій похідній за часом від радіус-вектору.**

Двічі диференціюючи вираз $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, одержимо

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{k},$$

звідки числове значення (**модуль**) **вектора прискорення** тіла визначається таким чином

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z(t)}{dt^2}\right)^2}.$$

Отримані вирази визначають величину вектора прискорення при координатному способі задання руху тіла.

Динаміка

Динаміка –розділ механіки, що описує рух матеріальних тіл під дією прикладених сил з урахуванням властивостей мас.У динаміці розглядають дві основні задачі. Перша або **пряма задача** полягає у тому, щоб за заданими масою і законом руху тіла визначити силу або рівнодійну системи сил, під дією якої цей рух відбувається.

Друга або **обернена задача** динаміки – за заданими силами, прикладеними до тіла, масою і початковими умовами руху визначити закон руху, який цими обставинами обумовлюється.

Основою динаміки є закони, сформульовані І. Ньютоном для матеріальної точки.

Перший законНьютона(закон інерції): Ізольована матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

Отже, з цього закону випливає, що самовільно матеріальна точка не може змінити стан свого руху чи спокою. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки як результат її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного і прямолінійного, виникає прискорення.

Відмінність від нуля прискорення матеріальної точки свідчить про вплив інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризується в класичній механіці поняттям **сили**.

Другий (основний) **закон** динаміки: Прискорення вільної матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і напрямлене вздовж вектора сили

Якщо силу або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити \vec{F} , а масу матеріальної точки – m , то другий закон набуває вигляду:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Основу механічних взаємодій становлять гравітаційні і електромагнітні сили – сили ваги, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища.

Загалом, сили є функціями часу, координат і швидкості, $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V})$. Але природа багатьох сил допускає, що вони можуть бути функціями від окремих кінематичних параметрів.

Наприклад, сила гравітаційної взаємодії за законом всесвітнього тяжіння є:

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

де m_1 і m_2 – маси тіл; γ – гравітаційна стала, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – відносна відстань між тілами із радіус-векторами \vec{r}_1 і \vec{r}_2 .

Сила опору руху тіла в середовищі (тертя) є функцією швидкості \vec{V} :

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha \vec{V},$$

де α – коефіцієнт тертя, який загалом залежить від форми тіла і властивостей середовища. Зі збільшенням швидкості сила опору може стати пропорційною квадрату й кубу швидкості.

Маса тіла – це фізична величина, що є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла. Під інертними властивостями розуміють опір тіла у відповідь на зміну вектора швидкості, під гравітаційними – притягання тіл залежно від їх взаємного положення.

Спираючись на другий закон Ньютона, та сама сила \vec{F} , діючи на тіла з різною масою m_1 і m_2 , викликає різні прискорення \vec{a}_1 і \vec{a}_2 , причому

$$m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2 = \vec{F},$$

Звідки, обравши одну масу за еталон (наприклад, $m_2 = m_2^i$), можна визначити іншу інертну масу:

$$m_1^i = m_2^i \frac{\vec{a}_2}{\vec{a}_1}.$$

Спираючись на закон всесвітнього тяжіння, гравітаційна маса $m^g = \frac{P}{g}$, де P – вага тіла; g – прискорення вільного падіння. Отже, обравши одну з мас за еталон одиниці маси (наприклад, $m_2 = m_2^g$) і визначивши зважуванням на терезах вагу P_1 і P_2 тіл з різною масою m_1^g і m_2^g , можна визначити іншу гравітаційну масу:

$$m_1^g = \frac{P_1}{g}, \quad m_2^g = \frac{P_2}{g} \rightarrow m_1^g = m_2^g \frac{P_1}{P_2}.$$

Дослідами Б. Бесселя встановлено тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до десятого порядку мализни.

Скориставшись виразом для прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, отримаємо більш загальне формулювання другого закону Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ – кількість руху тіла (матеріальної точки) як добуток маси на вектор швидкості.

Третій закон Ньютона: Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла. Іншою мовою, дія дорівнює протидії.

Практичні завдання

1. Автомобіль рухався наступним чином: половину шляху він пройшов зі швидкістю $V_1 = 80$ км/год, а частину шляху, яка залишилася, він половину часу рухався зі швидкістю $V_2 = 70$ км/год, а другу половину часу зі швидкістю $V_3 = 60$ км/год. Знайдіть середню швидкість \bar{V} автомобіля.

Розв'язок.

Нехай першу половину шляху, $S/2$, автомобіль пройшов за час t_1 , а другу половину – за час t_2 . Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{S}{2} = V_1 t_1 \\ \frac{S}{2} = V_2 \frac{t_2}{2} + V_3 \frac{t_2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{S}{2V_1} \\ t_2 = \frac{S}{V_2 + V_3} \end{cases}$$

$$\text{Середня швидкість } \langle V \rangle = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{1}{\frac{1}{2V_1} + \frac{1}{V_2 + V_3}} = \frac{2V_1(V_2 + V_3)}{2V_1 + V_2 + V_3}$$

$$\langle V \rangle = \frac{2 \cdot 80(70 + 60)}{2 \cdot 80 + 70 + 60} \approx 71,7 \frac{\text{км}}{\text{год}} \approx 19,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

2. Частинка рухається в площині xu зі швидкістю $\vec{V} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, де \vec{i} і \vec{j} – орти осей x і y , a і b – сталі. В початковий момент частинка знаходилась в точці $x = y = 0$. Знайдіть рівняння траєкторії $y(x)$.

Розв'язок.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = a \rightarrow x = at + C = at$$

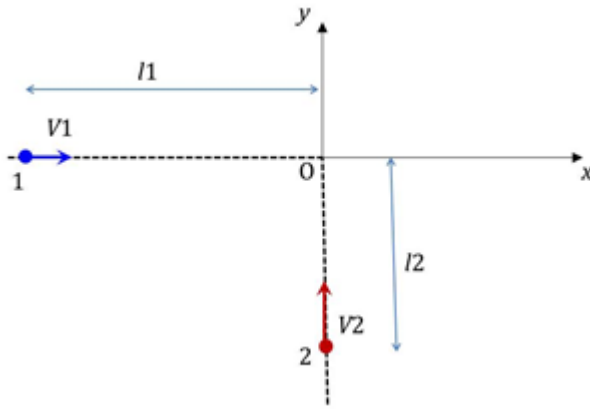
$$V_y = \frac{dy}{dt} = bx \rightarrow dy = bx dt = bat dt \rightarrow y = ab \frac{t^2}{2} + C' = ab \frac{t^2}{2}$$

$$\text{Остаточно: } y = \frac{b}{2a} x^2$$

3. Радіус-вектор матеріальної точки змінюється за законом $\vec{r}(t) = (1 + t^2)\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Знайти:

- а) шлях S , який проходить точка за третю секунду;
- б) кут α між векторами \vec{V} і \vec{a} у момент часу $t = 3$ с;
- в) середню швидкість $\langle V \rangle$ за перші десять секунд руху.



4. Дві частинки 1 і 2 рухаються зі сталими швидкостями V_1 і V_2 уздовж двох взаємно перпендикулярних прямих до точки перетину прямих О. В момент часу $t = 0$ частинки знаходились на відстанях l_1 і l_2 від точки О. Який момент часу t_{min} відстань між частинками буде найменшим? Яка ця відстань?

Відповідь:
$$l_{min} = \frac{|l_1 V_2 - l_2 V_1|}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

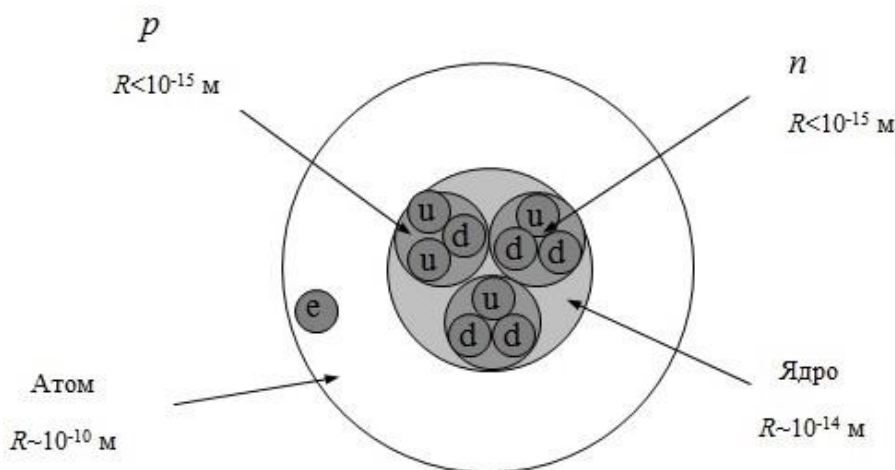
5. Частинка рухається зі швидкістю $\vec{V} = \vec{V}_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$ уздовж осі x . Знайдіть а) рівняння руху $x = x(t)$; б) Момент часу t , коли частинка буде на відстані $l = 10$ см від початку координат; в) залежність пройденого шляху від часу $S = S(t)$.

Відповідь: а) $x(t) = V_0 t \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$, б) 1, 9 та 11 с, в) $S(t) = \frac{V_0 \tau}{2} \left\{1 + \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2\right\}$

3. Фундаментальні взаємодії у Всесвіті.

Природа сил.

Усі тіла складаються з атомів, причому існує чотири стани існування речовини – твердий, рідкий, газоподібний та плазма. Знайдено також проміжні стани речовини, зокрема, аморфні тіла, рідкі кристали тощо. Сам атом, як складова речовини, має внутрішню будову і є подільним на менші структурні частини, як зображено на рис. Однак, виникає питання, яким чином однойменно заряджені протони (p на рис.) та нейтрони (n на рис.) утримуються в ядрі, незважаючи на електростатичне відштовхування протонів.



До початку 20-го століття вважалося, що всі відомі до того моменту сили зводяться до двох фундаментальних взаємодій: електромагнітної і гравітаційної.

У 1930 роки з'ясувалося, що атоми містять всередині себе ядра, які у свою чергу складаються з нуклонів (протонів та нейтронів). Зрозуміло, що ні електромагнітні, ні гравітаційні взаємодії не можуть пояснити, що утримує нуклони в ядрі. Було постульовано існування нової фундаментальної взаємодії: сильної взаємодії. Проте надалі виявилось, що і вона здатна пояснити не всі явища в мікросвіті, зокрема, не було зрозуміло, що примушує розпадатися вільний

нейтрон. Так було постульовано існування слабкої взаємодії, і, як виявилось, цього достатньо для опису всіх взаємодій, що дотепер спостерігалися в мікросвіті.

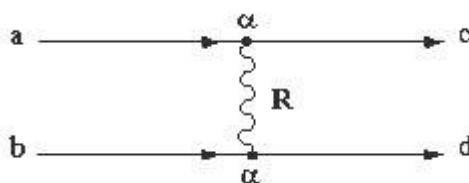
Станом на сьогодні величезне різноманіття фізичних явищ визначається лише **чотирма типами фундаментальних взаємодій**:

- електромагнітним,
- слабким,
- сильним,
- гравітаційним.

У квантовій теорії мікросвіту взаємодія описується в термінах обміну специфічними частинками, асоційованими з даним типом взаємодії.

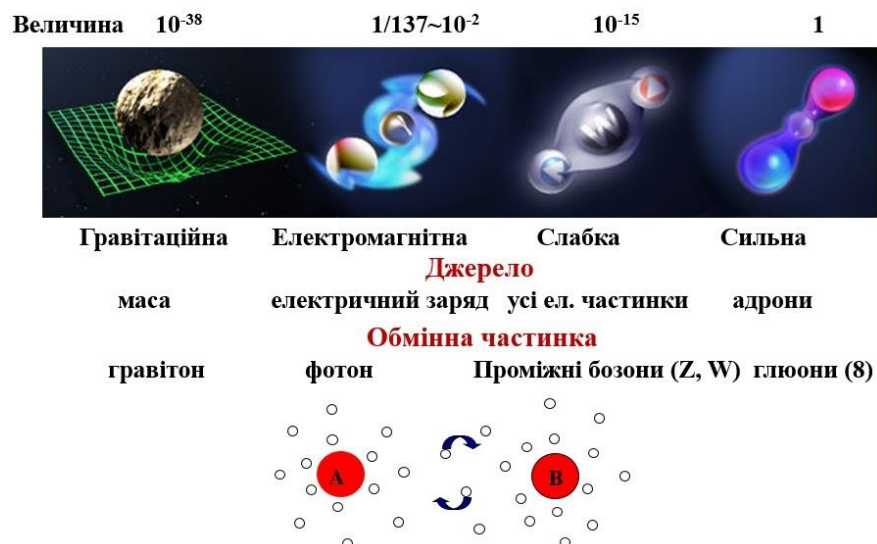
Для наочного уявлення взаємодії частинок американський фізик Р. Фейнман запропонував використовувати діаграми, які отримали його ім'я. Діаграми Фейнмана описують будь-який процес взаємодії при зіткненні двох частинок. Кожна частинка, яка бере участь в процесі, на діаграмі Фейнмана зображується лінією. Вільний лівий або правий кінець лінії позначає знаходження частинки відповідно в початковому або кінцевому стані. Внутрішні лінії на діаграмах (тобто лінії, що не мають вільних кінців) відповідають так званим віртуальним частинкам. Це частинки, що народжуються і поглинаються в процесі взаємодії. Їх не можна зареєструвати, на відміну від реальних частинок. Взаємодія частинок на діаграмі зображується вузлами (або вершинами).

Процес $a + b \rightarrow c + d$ у вигляді діаграми Фейнмана ілюстровано на рис., де R позначає віртуальну частинку, якою обмінюються частинки a й b при взаємодії.



Інтенсивність взаємодії характеризують так званою сталою взаємодії, що визначає ймовірність процесів, обумовлених даним типом взаємодії. Відношення значень констант дає відносну інтенсивність відповідних взаємодій, що дозволяє порівняти їх. У табл. представлено основні характеристики різних типів взаємодій.

Взаємодія	Джерело	Обмінна частинка	Константа взаємодії		Радіус дії L , м	Час життя τ , с
			Вираз	Числове значення при $m = m_p$		
Гравітаційна	Маса	Гравітон	$\alpha_g = \frac{Gm^2}{\hbar c}$	$0,6 \cdot 10^{-38}$	∞	0
Слабка	Усі ел. частинки	Проміжні бозони	$\alpha_w = \frac{g_F^2 m^2 c}{\hbar^3}$	10^{-15}	10^{-19}	10^{-8}
Електромагнітна	Електричний заряд	Фотон	$\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c}$	$1/137 \sim 10^{-2}$	∞	10^{-16}
Сильна	Адрони	Глюони	$\alpha_s = \frac{a}{\ln \frac{m}{m_p}}$	1	10^{-15}	10^{-23}



Стандартна модель частинок

Ця модель описує електромагнітну, слабку і сильну взаємодію всіх елементарних частинок.

Стандартна модель включає наступні положення:

- Вся речовина складається з 12 фундаментальних частинок-ферміонів: 6 лептонів і 6 кварків.
- Кварки приймають участь в сильних, слабких і електромагнітних взаємодіях;
- заряджені лептони (електрон, мюон, тау-лептон) – в слабких і електромагнітних взаємодіях;
- нейтрино – тільки в слабких взаємодіях.

Частинками-носіями взаємодій є:

- 8 глюонів для сильної взаємодії;
- 3 важких каліброваних бозона (W^+ , W^- , Z^0) для слабкої взаємодії;
- один фотон для електромагнітної взаємодії.

Фундаментальні частинки:

Кварки	u up	c charm	t top	γ фотон
	d down	s strange	b beauty	g глюон
	ν_e електронне	ν_μ мюонне	ν_τ тау	Z Z-бозон
	e електрон	μ мюон	τ таон	W W- бозон
	Ферміони			Бозони

Адрони (приймають участь у сильній взаємодії) поділяються на дві основні групи відповідно до їх кваркового складу:

Баріони складаються з трьох кварків трьох кольорів, утворюючи так звану безбарвну комбінацію.

Саме з баріонів побудовано переважна частина спостережуваної нами речовини – це нуклони (**протони** та **нейтрони**), що складають ядро атома.

Мезони складаються з одного кварка і одного антикварка.

4. Закони збереження

Закони збереження в фізиці є фундаментальними принципами, які описують, як певні величини залишаються незмінними в замкнених системах. Основні закони збереження включають: Закон збереження енергії, Закон збереження імпульсу, Закон збереження моменту імпульсу.

Вектор імпульсу та моменту імпульсу частинки

Нехай система складається з двох тіл. Тоді з третього закону Ньютона сила, яка діє з боку першого тіла на друге (\vec{F}_{21}), і сила, яка діє з боку другого тіла на перше (\vec{F}_{12}), дорівнюють одна одній і напрямлені в протилежні боки, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Нехай також на тіла 1 і 2 діють зовнішні сили відповідно \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Запишемо другий закон Ньютона для кожного з тіл

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2,$$

де $\vec{p} = m\vec{V}$ – кількість руху або імпульс тіла. Складемо ці два рівняння:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_2.$$

Оскільки $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, швидкість зміни сумарного імпульсу $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ системи двох тіл дорівнює рівнодіючий зовнішніх сил, що діють на тіла системи:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Якщо ж система замкнута (зовнішні сили відсутні),

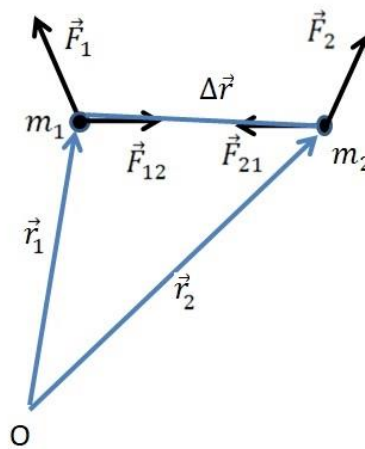
$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$$

Таким чином, імпульс замкнутої системи тіл зберігається (**закон збереження імпульсу**).

Моментом імпульсу \vec{L} частинки відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r} частинки, проведеного з точки O , на імпульс цієї частинки \vec{p} :

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

Розглянемо систему двох взаємодіючих частинок масою m_1 і m_2 , на які діють також зовнішні сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .



Запишемо другий закон Ньютона для кожного з тіл

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2.$$

Помножимо векторно зліва перше рівняння на \vec{r}_1 , а друге – на \vec{r}_2 :

$$m_1 \left[\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right] = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1],$$

$$m_2 \left[\vec{r}_2 \times \frac{d\vec{v}_2}{dt} \right] = [\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2].$$

Доведемо, що

$$\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{v}],$$

Розглянувши похідну від $[\vec{r} \times \vec{v}]$:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{v} \times \vec{v}] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right],$$

оскільки $[\vec{v} \times \vec{v}] = 0$. Тоді:

$$m_1 \frac{d}{dt} [\vec{r}_1 \times \vec{v}_1] = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1],$$

$$m_2 \frac{d}{dt} [\vec{r}_2 \times \vec{v}_2] = [\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2].$$

Складемо ці два рівняння і врахуємо, що $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1] + \frac{d}{dt} [\vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2] &= \frac{d}{dt} [\vec{r}_1 \times \vec{p}_1] + \frac{d}{dt} [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2] = \frac{d}{dt} ([\vec{r}_1 \times \vec{p}_1] + \\ &[\vec{r}_2 \times \vec{p}_2]) = -[\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21}] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \\ &\vec{F}_{21}] + [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2], \end{aligned}$$

де враховано, що вектори $\Delta \vec{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ та \vec{F}_{21} колінеарні (див. Рис.) і $[(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{21}] = 0$. Таким чином:

$$\frac{d}{dt} ([\vec{r}_1 \times \vec{p}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{p}_2]) = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2].$$

Векторний добуток $[\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$ називають моментом сили відносно нерухомої точки О. Остаточно одержимо:

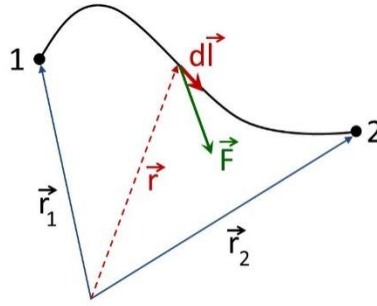
$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{M}_1^{\text{зовн}} + \vec{M}_2^{\text{зовн}}.$$

Бачимо, що швидкість зміни моменту імпульсу дорівнює векторній сумі моментів всіх зовнішніх сил.

Якщо ж сума моментів зовнішніх сил дорівнює 0, $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \text{const}$ і момент імпульсу системи тіл зберігається (**закон збереження моменту імпульсу**).

Кінетична енергія частинки

Одним з основних понять механіки є кінетична енергія та її зв'язок з механічною роботою. Розглянемо роботу сили $\vec{F}(\vec{r})$, яка діє на частинку маси m при її переміщенні із точки 1 до точки 2 по довільній траєкторії:



Виразимо елементарну роботу δA , що виконує сила $\vec{F}(\vec{r})$ на переміщенні $d\vec{r}$, настільки малому, що в його межах сила залишається незмінною:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l}$$

Скориставшись виразом $\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$ для другого закону Ньютона та врахувавши, що $d\vec{l} = \vec{V} dt$, де \vec{V} – швидкість частинки в межах $d\vec{r}$, отримаємо:

$$\delta A = m \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{V} dt = m \vec{V} d\vec{V}$$

Доведемо, що $\vec{V} d\vec{V} = V dV$. Для цього продиференціюємо вираз $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$:

$$d(V^2) = 2V dV = d(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = 2V_x dV_x + 2V_y dV_y + 2V_z dV_z$$

Звідси маємо:

$$V dV = V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z$$

З іншого боку:

$$\vec{V} d\vec{V} = V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z$$

Оскільки праві частини останніх двох рівнянь однакові, то й ліві також рівні, тобто

$$\vec{V} d\vec{V} = V dV$$

Повернемося до виразу для роботи:

$$\delta A = m\vec{V}d\vec{V} = mVdV = \frac{m}{2}d(V^2)$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо роботу сили на всьому шляху 1→2:

$$A = \int_1^2 \frac{m}{2}d(V^2) = \int_1^2 d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \left(\frac{mV^2}{2}\right)_2 - \left(\frac{mV^2}{2}\right)_1$$

Бачимо, що роботу на шляху 1→2 можна подати у вигляді зміни величини $E_k = \frac{mV^2}{2}$ на цьому шляху 12:

$$A = (E_k)_2 - (E_k)_1$$

Врахувавши вираз для імпульсу тіла $p = mV$, величину E_k можна також виразити як

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

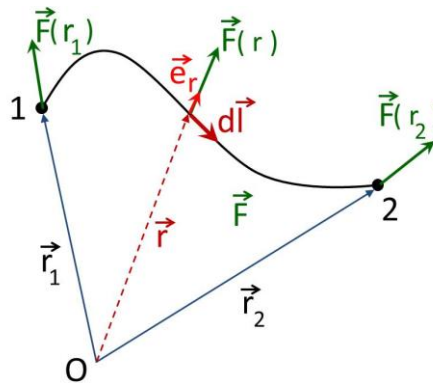
Цю величину називають **кінетичною енергією** частинки. Бачимо, що робота, здійснювана при переміщенні тіла із точки 1 до точки 2 по довільній траєкторії, дорівнює різниці кінетичних енергій частинки в цих точках. Це твердження часто формулюють як **теорему про кінетичну енергію**: робота сили при переміщенні частинки дорівнює приросту кінетичної енергії цієї частинки.

Консервативні та неконсервативні сили

Усі сили, що зустрічаються в макроскопічній механіці, поділяють на консервативні й неконсервативні. У ряді випадків робота, виконана силою \vec{F} , не залежить від форми траєкторії, по якій рухається тіло, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла. Сили, робота яких на шляху між двома точками залежить не від форми траєкторії, по якій рухається тіло, а тільки від положення цих точок, називаються **консервативними**. Якщо ж робота сили залежить від форми траєкторії, то силу називають **неконсервативною**.

Прикладами консервативних сил є сила тяжіння, сила пружності, сила електричної взаємодії між зарядами.

Консервативною є, зокрема, так звана **центрально́на сила**. Центральною називається така сила, напрям дії якої весь час проходить через одну й ту саму точку О ("силовий центр"), а величина залежить тільки від відстані до неї, $\vec{F} = \vec{F}(r)$:



Подамо таку силу вигляді:

$$\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r$$

де \vec{e}_r – одиничний вектор, напрямлений уздовж радіус-вектора \vec{r} частинки, $F_r(r)$ – проекція сили на напрям радіус-вектора \vec{r} , r – відстань від частинки до силового центру О. Тоді

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 F_r(r) \vec{e}_r d\vec{l} = \int_1^2 F_r(r) dl \cos \theta$$

де θ – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{e}_r . З геометрії Рис. випливає, що величина $dl \cos \theta = dr$ із dr – зміна відстані від частинки до силового центра. Отже,

$$A = \int_1^2 F_r(r) dr$$

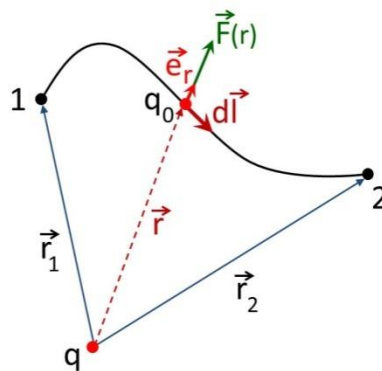
У цьому виразі присутній не радіус-вектор частинки \vec{r} , що визначає її положення на траєкторії, а лише його модуль r як відстань до силового центра. Це означає, що робота центральної сили не залежить від траєкторії руху частинки, а сама сила є консервативною.

Серед усіх *неконсервативних сил* вирізняють так звані гіроскопічні та дисипативні сили. Гіроскопічними називають сили, що весь час спрямовані перпендикулярно до напрямку руху тіла, на яке діють. Через цегіроскопічні сили взагалі не виконують роботи, оскільки скалярний добуток $\vec{F}d\vec{r}$ у виразі для роботи δA дорівнює нулю при $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Такими, зокрема, є коріолісова сила інерції і сила, що діє на рухомий заряд у магнітному полі (сила Лоренца).

До дисипативних сил відносяться різноманітні сили тертя та опору. Характерною властивістю таких сил є те, що вони завжди спрямовані протилежно до відносних швидкостей взаємодіючих тіл.

Потенціальна енергія частинки. Закон збереження механічної енергії

Розглянемо роботу сили електричної взаємодії між зарядами, яка є одним з прикладів центральної сили. Нехай точковий заряд q_0 переміщується в електричному полі, створюваному іншим точковий зарядом q :



Скористаємось знайденим вище виразом для роботи центральної сили:

$$A = \int_1^2 F_r(r) dr$$

Де, за законом Кулона,

$$F_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}$$

Тоді

$$A = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Отриманий вираз свідчить, що роботу сили можна подати у вигляді спаду певної фізичної величини U :

$$A = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

Ця величина й називається **потенціальною енергією**. Таким чином, потенціальною енергією називається величина, спад якої при переміщенні частинки з однієї точки в іншу дорівнює роботі, що виконується консервативними силами, що діють на частинку при цьому переміщенні.

Видно також, що потенціальна енергія електростатичного поля сил ϵ :

$$U = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Узагальнюючи, можна сказати, що, якщо в кожній точці заданої області простору на тіло діє визначена сила, то в цій області існує силове поле. При цьому поля можуть утворюватися різними силами, але тільки для консервативних сил їх можна характеризувати не тільки силою, а й потенціальною енергією. Тому поля консервативних сил називаються **потенціальними полями**.

Робота консервативних сил, що формують потенціальне поле, по довільному замкнутому контуру L рівна нулю. Математично цей критерій потенціальності поля консервативних сил можна подати у вигляді:

$$A = \oint_L \delta A = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Кажуть, що **циркуляція** вектора консервативної сили \vec{F} по довільному замкненому контуру L **дорівнює нулю**.

Нарешті, ту саму роботу було обчислено, з одного боку, як

$$A = (E_k)_2 - (E_k)_1$$

А з іншого –

$$A = U_1 - U_2$$

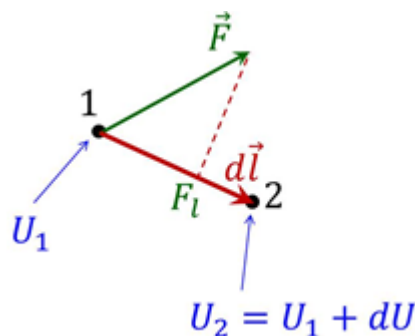
Звідси випливає, що

$$(E_k)_2 - (E_k)_1 = U_1 - U_2 \rightarrow (E_k)_1 + U_1 = (E_k)_2 + U_2$$

Тобто сума кінетичної та потенціальної енергії (або механічна енергія) для поля консервативних сил зберігається. Це твердження характеризує закон збереження механічної енергії. Якщо ж, крім консервативних сил, між тілами системи діє неконсервативна сила (наприклад, сила тертя), механічна енергія зменшується. У результаті дії сили тертя ковзання тіла нагріваються, тобто механічна енергія частково переходить у внутрішню енергію.

Зв'язок між потенціальною енергією та силою

Оскільки роботу консервативної сили можна знайти як безпосередньо через силу, так і через потенціальну енергію, між цими величинами існує певний зв'язок. Знайдемо його, розглянувши роботу δA довільної консервативної сили \vec{F} на невеликому переміщенні $d\vec{l}$:



З одного боку,

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l} = F_l dl$$

де F_l – проекція сили \vec{F} на напрямок переміщення $d\vec{l}$. З іншого боку,

$$\delta A = U_1 - U_2 = -dU$$

Порівняння цих двох виразів дає:

$$F_l dl = -dU$$

або

$$F_l = -\frac{dU}{dl}$$

Бачимо, що проекція консервативної сили на будь-який напрям дорівнює взятій з протилежним знаком похідній потенціальної енергії в цьому напрямі.

Останній вираз, поданий у загальному вигляді, дозволяє визначити й проекції сили \vec{F} на координатні осі x, y, z :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

При цьому елементарні переміщення вздовж координатних осей x, y, z є нескінченно малими приростами (диференціалами) координат – аргументів функції потенціальної енергії $U = U(x, y, z)$. Тому частинна похідна по кожному з напрямків x, y, z визначається за звичайними правилами диференціювання, коли дві інші координати при диференціюванні за третьою вважаються константами.

Тому вектор сили \vec{F} можна подати у такому вигляді:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

із ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатних осей x, y, z . Вираз у дужках часто зустрічається в математиці та фізиці і має свою назву й позначення. Він називається **градієнтом** і позначається символом \overrightarrow{grad} чи $\vec{\nabla}$. Тоді маємо:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Тобто, консервативна сила, що діє на частинку, дорівнює взятому з протилежним знаком градієнту потенціальної енергії цієї частинки.

Практичні завдання

1. Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув вперед гирю масою $m = 5$ кг, надавши їй відносно льоду швидкість $V = 2$ м/с. Визначити роботу A , яку виконав ковзаняр під час кидка, якщо його маса $M = 70$ кг. Тертям знехтувати.

Розв'язок.

За законом збереження енергії робота, виконана ковзанярем, дорівнює зміні енергії системи "ковзаняр-гиря", тобто сумі кінетичних енергій гирі і ковзаняра після кидка (оскільки в початковий момент часу кінетична енергія системи = 0):

$$A = \frac{mV^2}{2} + \frac{MU^2}{2}$$

Швидкість ковзаняра U після кидка знайдемо, скориставшись законом збереження імпульсу. Імпульс системи "ковзаняр-гиря" у початковий момент часу = 0 (тіла нерухомі). Після кидка імпульс цієї системи буде складатися з суми імпульсів гирі та ковзаняра, тому:

$$0 = mV - MU \rightarrow U = \frac{m}{M}V$$

$$\text{Тоді: } A = \frac{mV^2}{2} + \frac{M}{2} \frac{m^2}{M^2} V^2 = \frac{(M+m)m}{2M} V^2$$

$$A \approx 10,7 \text{ (Дж)}$$

2. Є два стаціонарних силових поля:

$$1) \vec{F} = ay\vec{i}$$

$$2) \vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j},$$

де \vec{i}, \vec{j} – орти осей x і y , a і b – сталі. З'ясуйте, чи є ці поля потенціальними.

Розв'язок.

У нашому випадку поле буде потенціальним, якщо його можна подати у вигляді:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$$

$$1): ay\vec{i} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$ay = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

З цього рівняння знайдемо $U = -axy + C$, але при цьому у виразі для сили повинна бути y -компонента, якої нема у виразі для сили $\vec{F} = ay\vec{i}$. Тому це поле не є потенціальним.

$$2): ax\vec{i} + by\vec{j} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\begin{cases} ax = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ by = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

$$\text{Розв'язок цієї системи: } U = -\frac{ax^2}{2} - \frac{ay^2}{2} + C$$

Таким чином, існує функція $U = -\frac{ax^2}{2} - \frac{ay^2}{2} + C$, така, що

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = ax\vec{i} + by\vec{j}$$

Тому поле такої сили є потенціальним.

3. Металевий ціпок довжиною $L = 1$ м та масою $m = 1$ кг лежить на столі так, що зі столу звисає $1/5$ його частина. До кінця цівки підвішують вантаж масою $m_0 = 100$ г, під дією якого ціпок починає ковзати. Знайти швидкість V цівки у момент часу, коли він відривається від краю стола. Коефіцієнт тертя між столом та цівкою $\mu = 0.1$. Відповідь: 3,1 м/с

4. Потенціальна енергія частинки в полі є $U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ ($a, b > 0$, r – відстань від центру поля). Знайдіть:

- значення r_0 , що відповідає рівноважному положенню частинки;
- максимальне значення сили притягування;
- побудуйте графіки $U(r)$ та проекції сили F_r на напрямки \vec{r} .

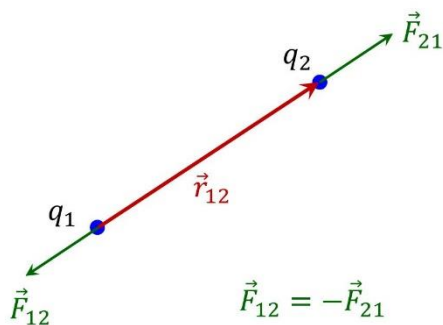
Відповідь: а) $r_0 = \frac{2a}{b}$ б) $F_{max} = -\frac{b^3}{27a^2}$

5. Потенціальна енергія частинки має вигляд $U = ax^3 + bx^2 + cz$. Вважаючи a, b, c сталими, визначити силу \vec{F} , що діє на частинку. Відповідь: $\vec{F} = -(3ax^2 + 2bx)\vec{i} - c\vec{k}$

5. Закон Кулона та магнетизму

Закон Кулона. Вектор напруженості електростатичного поля. Принцип суперпозиції полів

За законом Кулона два точкових заряди q_1 та q_2 діють один на одного з силою, яка обернено пропорційна квадрату відстані між ними і прямо пропорційна добутку їх зарядів. У векторному вигляді сила, що діє на другий заряд з боку першого, набуває вигляду:



$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – електрична стала.

Силову характеристикою електричного є вектор напруженості \vec{E} :

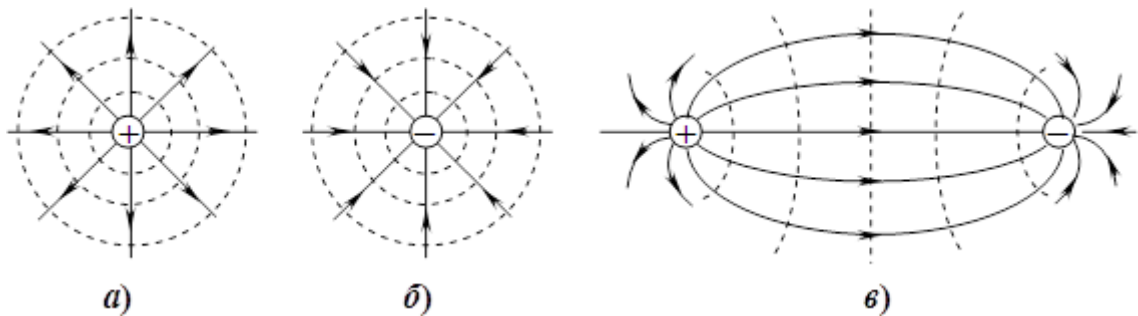
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

який за модулем і напрямом збігається із силою, що діє на одиничний позитивний заряд вміщений в дану точку поля. Із цієї формули також випливає, що сила, яка діє в полі на позитивний заряд, за напрямком є збіжною, а на негативний – антипаралельною з напрямком поля.

Скориставшись виразом для сили у законі Кулона та поділивши вектор сили, що діє на будь-який із зарядів на його величину, отримаємо вираз для **вектора напруженості поля точкового заряду** q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

З останньої формули випливає, що поле точкового заряду є центральним. Воно скрізь напрямлене радіально від заряду, якщо $q > 0$, і до заряду у протилежному випадку, коли $q < 0$:



З досліду випливає, що вектор напруженості електричного поля, створюваного системою зарядів, в будь-якій точці дорівнює сумі векторів напруженості полів, які створюються в цій точці кожним із зарядів системи окремо, за відсутності інших полів. Тоді для системи n зарядів:

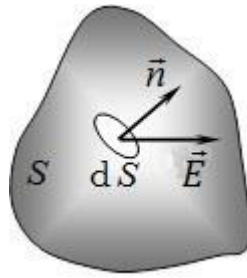
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Зокрема, для системи n точкових зарядів:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q}{r_i^3} \vec{r}_i$$

Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування для знаходження напруженості поля

Введемо поняття потоку N_E вектора \vec{E} скрізь певну поверхню S . Цей потік крізь поверхню S складається з елементарних потоків dN_E через усі її ділянки dS :



За означенням потоку $dN_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos \alpha$, де α – кут між вектором та зовнішньою нормаллю до ділянки dS (при цьому вектор $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$). Тоді потік крізь поверхню S є

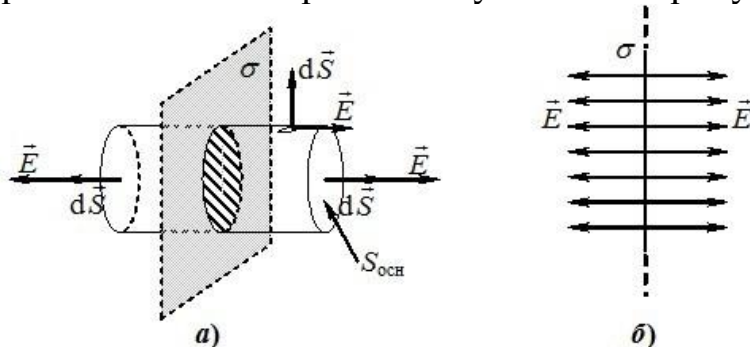
$$N_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

Іншою мовою інтеграл по заданій поверхні S від скалярного добутку вектора напруженості електричного поля \vec{E} на вектор елемента поверхні $d\vec{S}$ називається потоком напруженості крізь цю поверхню.

За **теоремою Гаусса** для електричного поля у вакуумі потік напруженості електричного поля крізь довільну замкнену поверхню дорівнює сумарному зарядові, що знаходиться всередині цієї поверхні ($\sum_i q_i$), діленому на ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

Застосування теореми Гаусса для знаходження напруженості поля проілюструємо на прикладі поля, створеного нескінченною плоскою поверхнею, зарядженою з поверхневою густиною заряду $\sigma = \text{const}$:



Для встановлення симетрії поля можна скористатися законом Кулона та принцип суперпозиції. Виявляється, що для нескінченної однорідно зарядженої площини вектор \vec{E} скрізь напрямлений перпендикулярно до неї в той чи інший бік залежно від знаку заряду (рисунок праворуч). Очевидно, що фізично еквівалентними є і всі точки площини, що створює поле. Тому не тільки напрям, а й модуль напруженості \vec{E} скрізь однаковий.

Завдяки високій симетрії поле площини теж легко розраховується за допомогою теореми Гаусса. Для цього оточимо частину площини якоюсь замкненою поверхнею, до прикладу, прямим циліндром із паралельними до площини і рівновіддаленими від неї основами (рисунок ліворуч).

У такому випадку вектори \vec{E} на основах циліндра мають однакову величину $E_n = \text{const}$, а на бічній поверхні поле є скрізь паралельним до неї і не створює потоку. За таких умов інтеграл потоку крізь увесь замкнений циліндр виражається як

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E_n S_{\text{осн}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma S_{\text{осн}}$$

Звідси відразу впливає, що

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Таким чином, заряджена з густиною $\sigma = \text{const}$ нескінченна площа створює по обидва боки однорідне електричне поле, що напрямлене від площини при $\sigma > 0$ і до неї при $\sigma < 0$. Лінії такого поля являють систему паралельних прямих, які розміщені на однаковій відстані один від одного.

Наведений вище вираз для теореми Гаусса в інтегральній формі є чинним і для заряджених тіл, тобто для полів створених неперервним розподілом заряду в заданому об'ємі. Але при уцьому величина $\sum_i q_i$ визначатиметься не додаванням зарядів, а інтегруванням заданої густини заряду по об'єму V_q , який займають заряди всередині

виділеної поверхні S . Але область інтегрування при цьому можна формально поширити на весь об'єм V , обмежений замкненою поверхнею S і тому:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Це рівняння є найбільш загальним інтегральним виразом теореми Гаусса.

З курсу вищої математики відомо, що поверхневий і об'ємний інтеграли можна пов'язати наступним чином:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$

для певного векторного тполя \vec{A} . Це – теорема Остроградського-Гаусса: потік векторного поля через замкнуту поверхню в напрямку зовнішньої одиничної нормалі дорівнює дивергенції даного поля, обчисленої по тілу, яке ця поверхня обмежує. В тривимірному декартовому просторі дивергенція визначається виразом:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Тоді

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \rho dV$$

Оскільки останнє рівняння справедливе для довільного об'єму V , можемо записати

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Це – вираз для теореми Гаусса в диференціальній формі. Згадавши, що $\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$ ($\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$ в середовищі з діелектричною проникністю ε), де \vec{D} – вектор зміщення, останній вираз можна подати у вигляді:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Потенціальний характер електростатичного поля. Зв'язок між напруженістю електростатичного поля та потенціалом. Циркуляція і ротор вектора напруженості електростатичного поля

Вище було показано, що центральна сила, зокрема й сила електростатичної взаємодії, є консервативною. При переміщенні точкового заряду q_0 із точки 1 з радіус-вектором \vec{r}_1 у точку 2 з радіус-вектором \vec{r}_2 в електричному полі, створюваному іншим точковий зарядом q , робота сил електростатичного поля є

$$A = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Цю роботу можна виразити через зміну потенціальної енергії заряду q_0 в полі:

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = U_1 - U_2$$

Яку також можна подати у вигляді:

$$U_1 - U_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$$

де

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

є потенціал поля, створеного точковим зарядом q . Попередній вираз для зміни потенціальної енергії $U_1 - U_2$ справедливий і для полів, створених не точковими зарядами. Але потенціал $\varphi(r)$ поля у цьому

випадку слід визначати більш складним чином, наприклад, з використанням принципу суперпозиції полів.

Скориставшись встановленим вище зв'язком сили та потенціальної енергії

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

та врахувавши співвідношення $\vec{F} = q_0\vec{E}$ та $U = q_0\varphi$ для сили, що діє на заряд q_0 , та потенціальної енергії цього заряду в полі із потенціалом φ , одержимо зв'язок між напруженістю та потенціалом електростатичного поля у вигляді:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Переписуючи розглянутий вище критерій потенціальності поля консервативних сил:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0$$

для електростатичного поля сил, отримаємо теорему про циркуляцію вектора \vec{E} :

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Отримане рівняння є одним з фундаментальних рівнянь електростатики. Воно відбиває той факт, що силові лінії електростатичного поля (лінії напруженості \vec{E}) є незамкненими – вони починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних зарядах.

Як і для теореми Гаусса, теорему про циркуляцію вектора \vec{E} , записану у інтегральній формі, можна подати в диференціальному вигляді, скориставшись відомою з векторного аналізу теоремою. А саме, потік

вектора \vec{A} через довільну поверхню S , що спирається на контур L , за теоремою Стокса можна подати у так:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}$$

Згадаємо, що ротор довільного вектора \vec{A} є:

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} \vec{j} \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x A_y A_z \end{vmatrix}$$

Для електростатичного поля:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0$$

Оскільки рівняння справедливе для довільної поверхню S , можемо записати

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

Останній вираз є диференціальним записом умови потенціальності електростатичного поля.

Таким чином, замість закону Кулона та принципу суперпозиції в основу теорії електростатичного поля можна покласти диференціальні рівняння:

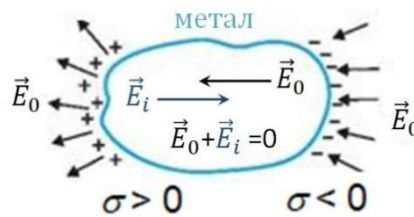
$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

Провідники в електричному полі. Електростатичний захист

Класичними провідниками є метали – речовини, в атомах яких валентні електрони слабо зв'язані з ядром. Тому при об'єднанні

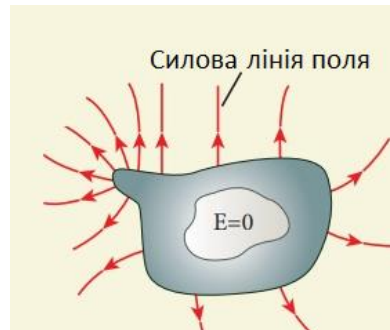
атомів у твердий метал валентні електрони взагалі вивільняються від “своїх” ядер і поведуться подібно до частинок газу в посудині, утворюючи “електронний газ”. Але при внесенні металу в електричне поле \vec{E}_0 вільні електрони, окрім хаотичного теплового руху, починають зміщуватися проти напрямку поля під дією сили $\vec{F} = -e\vec{E}_0$. Як наслідок, на поверхні зразка з одного боку з’являється некомпенсований негативний заряд $-q_i$, а з протилежного – такий самий позитивний заряд $+q_i$:



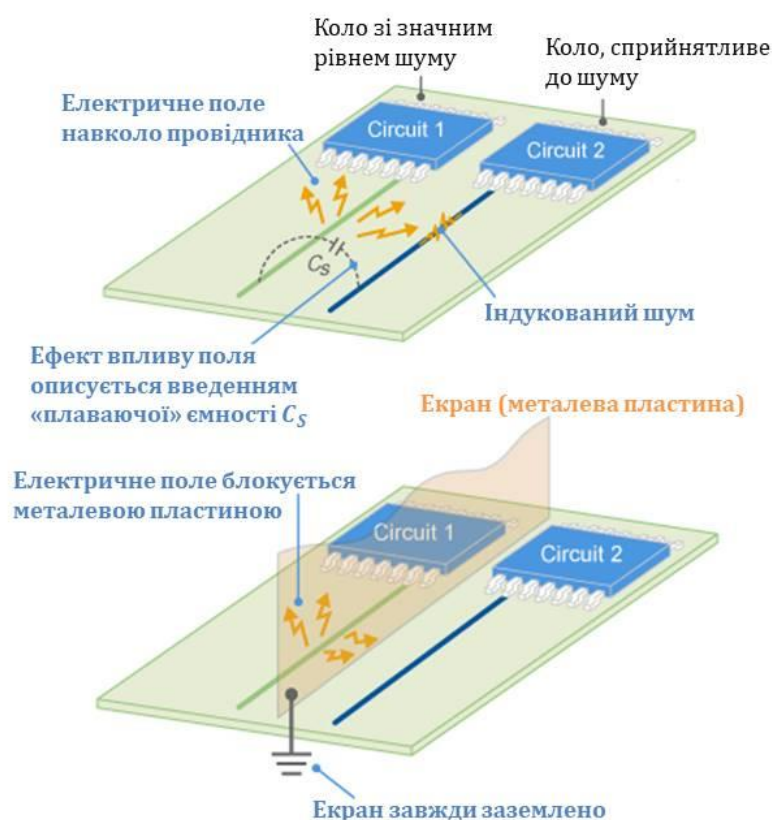
Індуковані заряди створюють у провіднику власне поле \vec{E}_i , яке напрямлене протилежно до зовнішнього поля \vec{E}_0 , що нагадує ситуацію в діелектриках. Але, коли в діелектрику на поверхню здатні виходити лише електрони молекул поверхневого шару, то в металі це можуть робити всі вільні електрони, кількість яких є сумірною із кількістю атомів у зразку. Тому можлива величина індукованих зарядів у провіднику по суті є нічим не обмеженою, і їхнє накопичення триває, доки напруженість внутрішнього поля не досягне величини $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$, а напруженість результуючого поля – значення $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_0 = 0$. Відтак переміщення електронів припиняється і в провіднику встановлюється такий рівноважний розподіл зарядів, при якому електричне поле існує тільки на поверхні провідника та поза ним. При цьому поле в кожній точці поверхні спрямоване по нормалі (див. рис.), бо інакше вільні заряди продовжували би рухатися по поверхні.

На тому факті, що всередині провідника напруженість електричного поля дорівнює нулю, ґрунтується електростатичний захист – захист від шкідливого впливу електричного поля як живих організмів, так і

електричних мереж різного типу, включаючи технічні пристрої передачі та збереження інформації. Щоб захистити чутливі до електричного поля прилади, їх розміщують всередині замкнутих металевих кожухів-екранів:



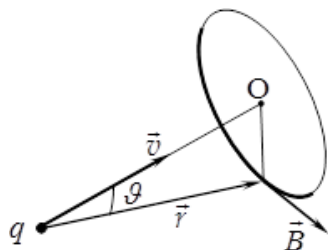
При цьому частіше екранують не прилади, а саме джерело електричного поля, від небажаного впливу якого необхідно захистити розташовані поблизу пристрої. Приклад екранування джерела потужного шуму за допомогою екрануючої металевої пластини:



Такі електростатичні екрани зменшують вплив на сприйнятливі до шуму кола, фактично закорочуючи шумові струми на землю. Тому потрібно використовувати заземлення (приєднання екрану до землі). У разі екранування високочастотних шумів не потрібно підключати екран до землі. Цілком достатньо заземлити корпус електричної схеми. Однак при цьому накладаються додаткові умови, що реалізуються застосуванням так званого електромагнітного екрану. Однак, цей випадок не аналізується в даному посібнику.

Основні закони електромагнетизму

Взаємодія між зарядами, що зумовлена їхнім рухом, називається магнітною і здійснюється через магнітне поле. Експериментальні дані свідчать, що **індукція \vec{B} магнітного поля точкового заряду q** , що рухається зі швидкістю \vec{v} (див. рис.), в будь-якій точці простору визначається формулою

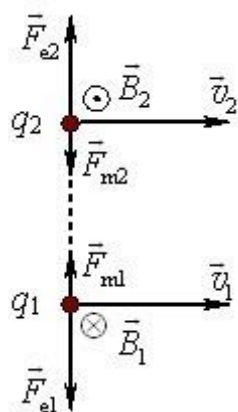


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнітна стала

За властивостями векторного добутку $[\vec{v}\vec{r}]$, вектор магнітної індукції \vec{B} напрямлений перпендикулярно до площини векторів \vec{v} і \vec{r} , як показано на рис. Зазначимо, що, якщо величина \vec{r} змінюється з часом, поле точкового заряду є нестационарним (залежним від часу), тобто $\vec{B} = \vec{B}(t)$.

Якщо ж в магнітному полі, створюваному зарядом q_2 , що рухається зі швидкістю \vec{v}_2 , рухається із швидкістю \vec{v}_1 заряд q_1 , на останній заряд діє **сила Лоренца** (\vec{F}_{m1}):

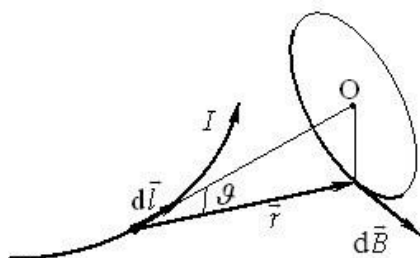


де

$$\vec{F}_{m1} = q_1 [\vec{v}_1 \vec{B}_2]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 [\vec{v}_2 \vec{r}]}{r^3}$$

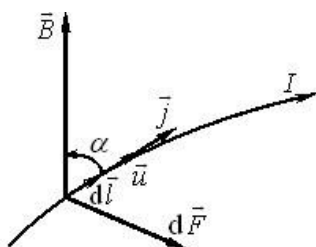
Індукцію магнітного поля провідника із струмом можна розрахувати на основі поданих співвідношень для поля точкового заряду та принципу суперпозиції. Індукція магнітного поля, створюваного елементарною ділянкою $d\vec{l}$ провідника із струмом I (див. рис.) є:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

закон Біо-Савара-Лапласа

Зрозуміло, що магнітне поле опосередковано діє на провідник із струмом, через носії струму. Сила, що діє в магнітному полі на провідник із струмом, називається **силою Ампера**. За цим законом силу, яка діє на елементарну ділянку $d\vec{l}$ провідника зі струмом I , що вміщено у магнітне поле з індукцією \vec{B} є:



$$d\vec{F} = [I d\vec{l}, \vec{B}]$$

Магнітне поле, як і електричне, зображують за допомогою ліній вектора \vec{B} або ліній магнітної індукції. Ці лінії відображають напрям і

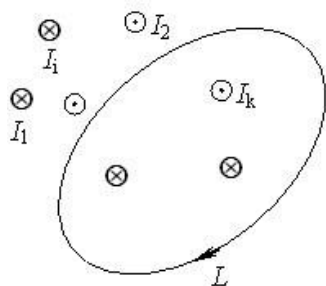
величину магнітного поля, але не є "силовими" лініями, бо безпосередньо не вказують напрямок дії магнітних сил.

Дослід свідчить, що лінії магнітного поля є завжди замкненими, тож кожна лінія, що входить всередину якоїсь замкненої поверхні, обов'язково дець виходить назовні. Згідно з геометричною інтерпретацією потоку, це означає, що потоки на вході та на виході замкненої поверхні завжди мають однакову величину і протилежний знак. Тому потік вектора індукції магнітного поля крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

У цьому полягає теорема Гаусса для магнітного поля. Вона відображає фундаментальний дослідний факт – відсутність у природі "магнітних зарядів", тобто особливих частинок, які би самі по собі мали здатність створювати магнітне поле подібну до здатності зарядів створювати електричне поле. Тому записане рівняння є одним з основних рівнянь електромагнітної теорії. Самі поля із замкненими лініями називаються **вихровими полями**. Тож магнітне поле є **вихровим силовим полем**.

Розглянемо тепер другу інтегральну характеристику магнітного поля – циркуляцію вектора \vec{B} , що можна визначити як



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$$

де $\sum_{k=1}^n I_k$ — алгебраїчна сума n струмів, які охоплені контуром інтегрування L . При цьому знак "+" мають струми, напрямки яких

пов'язані з обраним при інтегруванні напрямом обходу контуру правилом правого гвинта.

Якщо, у більш загальному випадку, струм розподілено із заданою густиною \vec{j} , то сумарний струм $\sum_{k=1}^n I_k$ визначиться формулою:

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Тоді отримаємо загальний вираз **теорема про циркуляцію магнітного поля** струмів у вакуумі:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

За цією теоремою циркуляція вектора індукції магнітного поля струмів у вакуумі по довільному замкненому контуру дорівнює сумарній силі струму, що охоплений цим контуром, помноженій на μ_0 .

Дві записані в інтегральній формі теореми про потів та циркуляцію вектора \vec{B} можна подати в інтегральній формі, цілком подібно тому, як це було зроблено для вектора \vec{E} :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Останнє рівняння можна звести до іншого вигляду, ввівши вектор напруженості магнітного поля \vec{H} співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

чи

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

в середовищі з магнітною проникністю μ .

Тоді

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$$

і в основу теорії електро-магніто-статичних явищ можна покласти систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{D} &= \rho \\ \text{rot}\vec{E} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{B} &= 0 \\ \text{rot}\vec{H} &= \vec{j}\end{aligned}$$

В інтегральному вигляді ця система набуває вигляду:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

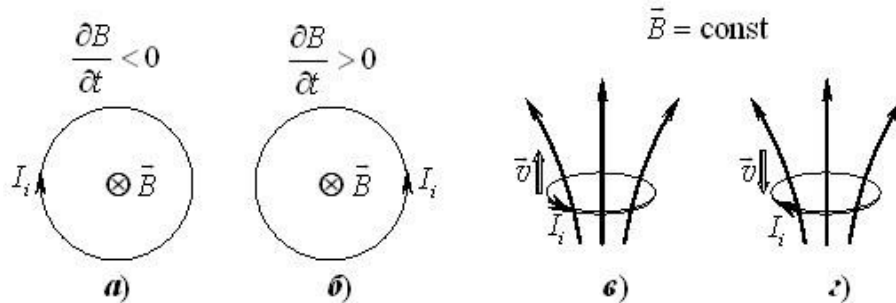
Закон електромагнітної індукції Фарадея. Вихрове електричне поле

Явище електромагнітної індукції полягає в тому, що при зміні магнітного потоку Φ крізь поверхню, обмежену провідним контуром, в ньому виникає електричний струм.

Цей закон електромагнітної індукції Фарадея доповнюється правилом Ленца, яке дозволяє визначити напрям індукційного струму I_i в кожному випадку. А саме, індукційний струм у контурі завжди має такий напрям, при якому перешкоджає причині, що його породжує.

Конкретно це означає, що магнітне поле \vec{B}_i , яке створюється індукційним струмом і завжди пов'язане з ним правилом правого гвинта, має бути напрямлене так, аби власним потоком послаблювати зміну потоку поля, яка викликає індукційний струм. Приміром, якщо нерухоме дротяне кільце знаходиться в однорідному нестационарному

магнітному полі $\vec{B}(t)$, що послаблюється з часом ($\frac{dB}{dt} < 0$), то потік крізь кільце спадає. Тоді поле індукційного струму \vec{B}_i має підживлювати поле \vec{B} й індукційний струм буде циркулювати за правим гвинтом відносно напрямку \vec{B} , як показано на рис.



Тоді електрорушійну силу індукції можна подати у вигляді:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Тим самим отримали Інтегральне формулювання закону електромагнітної індукції:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Роблячи подані вище перетворення, отримаємо диференціальне формулювання цього закону:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Коли контур, який знаходиться в стаціонарному магнітному полі $\vec{B} = \text{const}$, не рухається, то потік крізь нього не змінюється з часом, і електромагнітна індукція не спостерігається. Але щойно магнітне поле починає змінюватись, у контурі з'являється ЕРС \mathcal{E}_i та індукційний струм. Пояснити цей факт на основі взаємодії електронів з магнітним полем неможливо, бо через хаотичність теплового руху на носії в

нерухомому контурі ніяка результуюча магнітна сила не діє. Отже, стороння сила, що створює індукційний струм, має чисто електричне походження. А це означає, що в нерухомому контурі вміщеному у змінне магнітне поле з'являється електричне поле \vec{E}_B , яке й створює сторонню силу й обумовлює виникнення ЕРС.

Такого висновку дійшов Максвелл, який запропонував твердження, що **всяке нестаціонарне магнітне поле генерує у просторі відповідне вихрове електричне поле.**

Скористаємось поданим вище рівнянням для електрорушійної сили, змінивши порядок диференціювання та інтегрування::

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \oint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Звідки

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Бачимо, що циркуляція напруженості вихрового електричного поля по довільному контуру дорівнює взятому з протилежним знаком потокові швидкості зміни індукції магнітного поля через довільну поверхню, яка спирається на цей контур. Це твердження є **загальним виразом теореми про циркуляцію електричного поля.**

Рівняння Максвелла

Отримані вище вирази свідчать, що змінне магнітне поле генерує електричне поле згідно:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Природно припустити, що й змінне електричне поле створюватиме магнітне поле, що описується подібною формулою. Це припущення знаходить експериментальне підтвердження і тому до правої частини отриманого вище співвідношення

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{чи} \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Слід додати поверхневий інтеграл, що вміщує $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Виявляється, що

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \left(\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right)$$

Тим самим стверджується, що **магнітне поле створюється не лише струмами провідності \vec{j}** (тобто рухом заряджених частинок), **а й змінними електричними полями.**

Похідна $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ в останньому рівнянні має ту саму розмірність (А/м²), що й густина струму провідності \vec{j} . Тому, за аналогією до звичайного струму, її називають густиною **струму зміщення**. Зрозуміло, що струм зміщення є мірою швидкості зміни електричного поля і не пов'язаний із рухом зарядів, які є носіями звичайного струму.

Відкриття вихрового електричного поля та струму зміщення як джерела магнітного поля дозволило отримати у завершеному вигляді систему **рівнянь Максвелла**, що відбиває найбільш загальні властивості електромагнітного поля. Ці рівняння спираються на розглянуті вищетеореми про циркуляції та потоки електричного і магнітного полів і мають такий вигляд:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Перша пара рівнянь свідчить, що статичні електричні поля створюються зарядженими частинками і є потенціальними. Друга пара рівнянь засвідчує, що статичні магнітні поля створюються тільки струмами провідності (рухом зарядів) і є непотенціальними (вихровими).

У випадку нестатичних, змінних у часі, полів із загальної системи фундаментальних рівнянь випливає, що джерелом якогось одного поля є не лише заряди або струми, а й інше поле. Тож нестаціонарні електричне і магнітне поля є органічно взаємопов'язані, так що змінне електричне поле породжує магнітне, яке, в свою чергу, породжує електричне тощо. При цьому, як буде показано в наступному пункті, із рівнянь Максвелла випливає, що цей процес має хвильовий характер і поширюється у просторі зі швидкістю світла. Тим самим Максвелл теоретично передбачив існування електромагнітних хвиль та електромагнітну природу світла, що згодом було підтверджено експериментально.

Наведені фундаментальні рівняння Максвелла мають бути доповнені так званими *матеріальними рівняннями*— співвідношеннями, що відбивають зв'язки між різними електричними та магнітними характеристиками поля в речовині, а також закон Ома:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Де σ – питома електропровідність речовини.

Розглянуті інтегральні рівняння Максвелла встановлюють зв'язок між джерелами і характеристиками електромагнітного поля, відбиваючи його властивості не в кожній точці простору, а лише інтегрально – на заданому контурі L або поверхні S .

Використавши знов розглянуті вище математичні перетворення, відразу отримаємо рівняння Максвелла в диференціальній формі, які встановлюють зв'язок між джерелами та характеристиками поля локально, тобто в кожній точці простору чи речовини:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Цю систему фундаментальних рівнянь також доповнюють записаними вище матеріальними рівняннями.

Електромагнітні хвилі як наслідок рівнянь Максвелла

Розглянемо однорідне діелектричне середовище. Для нього $\sigma = 0$ (при цьому $\vec{j} = \sigma \vec{E} = 0$) і $\rho = 0$ ($\text{div} \vec{D} = 0$). Використаємо рівняння Максвелла в диференціальній формі, взявши ротор від лівої і правої частини фундаментальних рівнянь:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{H})$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{E})$$

З курсу вищої математики відомо, що для певного векторного поля \vec{A}

$$\text{rot rot } \vec{A} = \nabla \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

У цьому співвідношенні Δ є векторним оператором Лапласа, що діє на векторне поле \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} = \left\{ \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right\}$$

Врахуємо, що $\text{div } \vec{E} = 0$ і $\text{div } \vec{H} = 0$ (з останньої пари фундаментальних рівнянь Максвелла у нашому випадку діелектричного середовища). Тоді:

$$\nabla \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{H})$$

$$\nabla \text{div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E})$$

Підставимо замість $\text{rot } \vec{H}$ і $\text{rot } \vec{E}$ у правій частині цих рівнянь їх вирази з першої пари фундаментальних рівнянь Максвелла:

$$-\Delta \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{H}) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\Delta \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E}) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Таким чином, окремо для векторів \vec{E} і \vec{H} отримали однакові рівняння, які за своїм виглядом є рівняннями хвилі:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

У загальному рівнянні, що описує поширення хвиль певних зміщень \vec{u} ,

$$\Delta \vec{u} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0,$$

величина v є швидкістю поширення хвилі. Тоді для швидкості поширення електромагнітної хвилі одержимо:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

Бачимо, що швидкість поширення світла в вакуумі ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) можна подати у вигляді

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Підстановка значень ε_0 і μ_0 дає відоме значення швидкості світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. При цьому швидкість світла у середовищі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

де $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показник заломлення середовища.

Проаналізуємо співвідношення між компонентами електричного та магнітного полів. Для цього розглянемо електромагнітну хвилю, що поширюється в напрямку x . Тоді \vec{E} і \vec{H} залежать лише від x і перше рівняння системи рівнянь Максвелла можна подати у вигляді:

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

x –проекція:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (1a)$$

y –проекція:

$$-\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2a)$$

z –проекція:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3a)$$

Аналогічно з другого рівняння системи рівнянь Максвелла отримаємо:

x –проекція:

$$0 = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (1b)$$

y –проекція:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2b)$$

z –проекція:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (3b)$$

Крім того, з рівнянь $\text{div}\vec{E} = 0$ і $\text{div}\vec{H} = 0$ знайдемо:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (c)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (d)$$

З рівнянь (1b) та (c) випливає, що $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ та $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, тобто E_x не залежить від x і t . Аналогічно, з рівнянь (1a) та (d) випливає, що H_x не залежить від x і t . Це означає, що E_x та H_x можуть бути лише сталими і не пов'язані з електромагнітною хвилею. Як наслідок, вектори \vec{E} і \vec{H} перпендикулярні до напрямку поширення хвилі і тому **електромагнітна хвиля є поперечною**.

З рівнянь (2) і (3), що залишились, сформуємо дві пари:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}$$

Приходимо до висновку, що попарно зв'язані компоненти полів E_y та H_z , а також E_z та H_y . Іншою мовою, збуджене електричне поле E_y створює магнітне H_z і навпаки.

Продиференціюємо по x перше рівняння:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

і підставимо замість $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ її значення із другого рівняння:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (*)$$

Тепер продиференціюємо по x друг рівняння:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

Підставимо замість $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ її значення із першого рівняння:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \quad (**)$$

Шукаємо розв'язки рівнянь (*) та (**) у вигляді монохроматичної хвилі з частотою ω , коливання векторів електричного та магнітного поля в якій відбувається за законом косинуса:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

де E_m і H_m – амплітуди коливання проекцій E_y та H_z векторів електричного та магнітного поля, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число для хвилі із довжиною λ , а φ – зсув фаз між коливаннями.

Підстановка шуканих розв'язків у початкові рівняння $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$ та $\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$ дає:

$$kE_m \sin(\omega t - kx) = \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Для виконання цих рівностей слід, щоб $\varphi = 0$, тобто коливання E_y та H_z відбувались в одній фазі (були синфазні). Крім того, повинна виконуватись умова:

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m$$

$$kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m$$

Перемноживши ліву на праву та праву на ліву частини цих рівнянь, отримаємо:

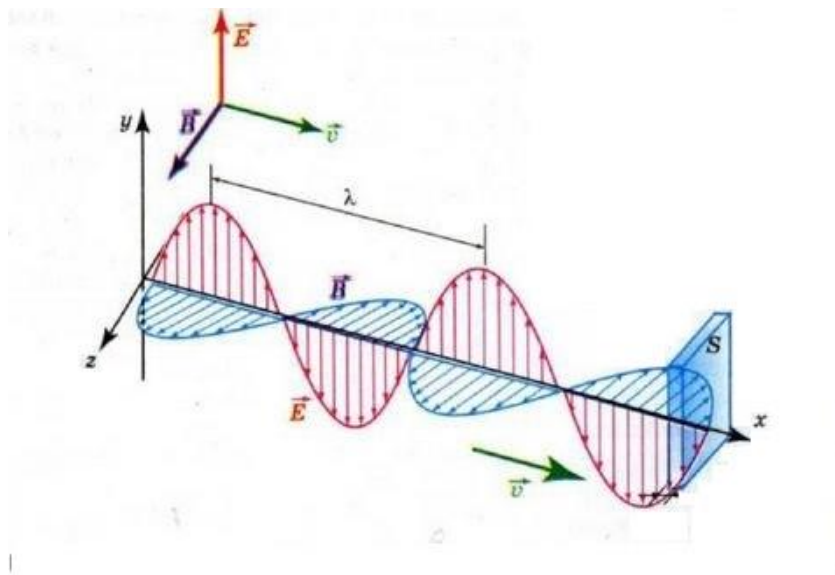
$$kE_m \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m = kH_m \mu\mu_0\omega H_m$$

звідки одержимо співвідношення між амплітудами електричного й магнітного поля в електромагнітній хвилі:

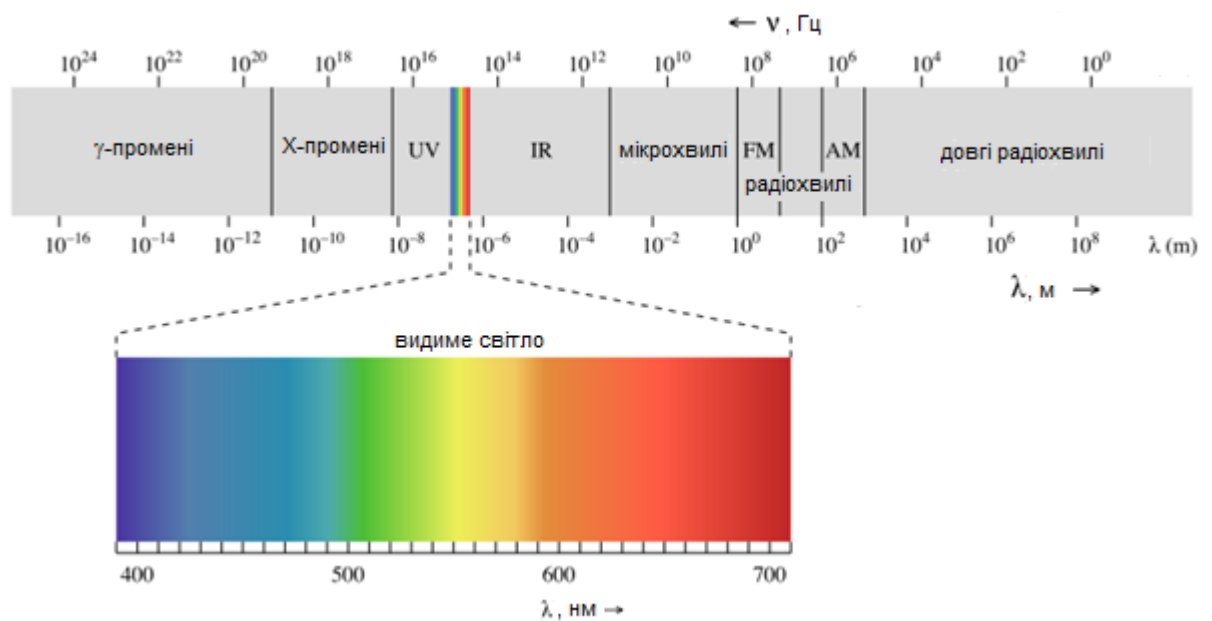
$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Зрозуміло, що використання іншої пари рівнянь, $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$ та $\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$, веде до аналогічних фізичних висновків для повернутих на 90° компонент полів.

Нижче наведемо схематично орієнтацію векторів напруженості електричного та магнітного поля, які перпендикулярні один до одного та перпендикулярні до напрямку поширення хвилі (електромагнітні хвилі є поперечними):



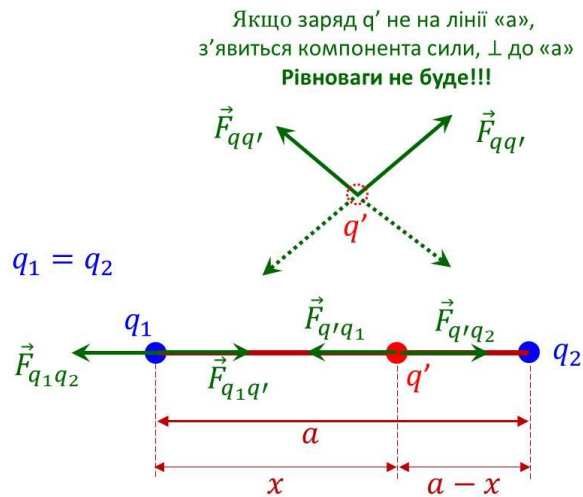
Шкала електромагнітних хвиль виглядає таким чином:



Практичні завдання

1. Два точкових заряди однакової величини q знаходяться на відстані a один від одного. Де слід розмістити точковий заряд q' , щоб система знаходилась в рівновазі? Знайти величину q' .

Розв'язок.



Тому заряд q' протилежного знаку слід розмістити посередині відрізка a . Рівновага буде при сил, що діють на заряд q' (можна пересвідчитись, що при цьому і сили, діючі на заряди $q_1 = q_2 = q$, рівні):

$$F_{q'q_1} = F_{q'q_2}$$

$$\frac{q'q_1}{x^2} = \frac{q'q_2}{(a-x)^2} \text{ при } q_1 = q_2$$

$$x = a - x$$

Звідси $x = a/2$, тобто заряд q' слід розмістити про центру між зарядами q . Для знаходження величини q' прирівнюємо сили, що діють на заряд $q_1 = q$:

$$F_{q_1q_2} = F_{q_1q'}$$

$$\frac{q^2}{a^2} = \frac{qq'}{(a/2)^2}$$

$$q' = -\frac{q}{4}$$

2. Металева сфера радіусу R заряджена однорідно з поверхневою густиною σ . Знайдіть потенціал і напруженість електричного поля в центрі сфери.

Розв'язок.

Користуємось принципом суперпозиції. Внаслідок сферичної симетрії задачі:

$$\vec{E}_0 = \sum \vec{E}_i = 0$$

$$\varphi_0 = \sum \varphi_i = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \sum dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma S_{\text{сфери}}}{4\pi\epsilon_0 R} =$$

$$= \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

3. Металевій кулі радіусу $R = 40$ мм надано заряд $q = 2$ мкКл, що однорідно розподілений в об'ємі кулі. Знайдіть потенціал і напруженість електричного поля в центрі кулі.

Відповідь: $\vec{E}_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$

4. Дріт нескінченної довжини заряджено з лінійною густиною λ . Використавши теорему Гаусса, знайдіть напруженість електричного поля залежно від відстані r від дроту.

Відповідь: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

5. Два заряди, $+q$ і $-q$, знаходяться в точках з координатами $(a/2, 0, 0)$ і $(-a/2, 0, 0)$ відповідно. Яку роботу виконають сили поля, створюваного цими зарядами, при перенесенні заряду q' з початку координат на нескінченність? Як зміниться відповідь, якщо обидва заряди $= +q$?

Відповідь: $A = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 a}$

6. Основи квантової механіки

Співвідношення Ейнштейна для фотонів. Гіпотеза де-Бройля. Хвильові властивості мікрочастинок. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Спін

На межі XIX і XX сторіччя при вивченні фізичних явищ атомного масштабу з'ясувалося, що стара, класична фізика, принципово не може бути застосована до процесів, що відбуваються на такому рівні. Виявилось, що процеси випромінювання й поглинання електромагнітних хвиль, будова атомів та молекул, властивості мікрочастинок тощо знаходяться у протиріччі з класичними уявленнями про будову речовини. Так виникла новагалузь фізики –квантова механіка. Одними з її творців були Альберт Ейнштейн та Макс Планк.

Згадані протиріччя проявились у декількох відомих експериментах. Зокрема, хвильова природа світла надійно підтверджувалася дослідженнями інтерференції та дифракції світла. Однак, дослідження характеристик теплового випромінювання тіл та ряду особливостей фотоефекту спонукало припустити, що світло випромінюється, поглинається та поширюється певними порціями енергії, які назвали **квантами**. Тим самим світло виявило не тільки хвильові, а й корпускулярні властивості (чи властивості частинки). Ці частинки називають **фотонами**.

Як і будь-яка інша частинка фотони характеризуються енергією та імпульсом. Енергія квантів світла E пов'язана з його частотою ν (чи круговою частотою $\omega = 2\pi\nu$) (формула Планка):

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

де $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ ($\hbar = h/2\pi \approx 1,054 \cdot 10^{-34}$) Дж·с – стала Планка.

Скориставшись взаємозв'язком маси та енергії ($E = mc^2$) та формулою Планка, отримаємо масу фотона m_ϕ :

$$m_\phi = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}$$

Де враховано співвідношення $\lambda\nu = c$ із λ – довжина світлової хвилі.

Наприклад, для зеленого світла із $\lambda = 500$ нм,

$$m_\phi \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 4 \cdot 10^{-36} \frac{\text{кг м}^2 \text{с}^2}{\text{м}^2 \text{с}^2} = 4 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$$

Бачимо, що маса зеленого фотона значно менша за масу електрона ($m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг). Оцінки показують, що умова $m_\phi \approx m_e$ виконується для жорсткого рентгенівського випромінювання.

Відомо, що маса мікрочастинки залежить від її швидкості як

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

де m_0 – маса спокою. Оскільки для фотона $v = c$, знаменник останнього виразу обертається в нуль. Тому він зберігає фізичний зміст, якщо маса спокою фотона $m_{\phi 0} = 0$. Кажуть, що фотон може існувати лише у русі зі швидкістю світла.

Знайдемо імпульс фотона:

$$p = m_\phi c = \frac{h\nu}{c^2} c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k$$

де k – хвильове число.

Отже, для світла властивий **корпускулярно-хвильовий дуалізм**: в одних явищах проявляється хвильова природа світла і світло поводить себе як електромагнітна хвиля, а в інших явищах – як потік фотонів. Зв'язок між цими властивостями можна подати у вигляді:

$$E = h\nu$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

які називають **співвідношеннями Ейнштейна для фотонів**. Ліва частина співвідношень характеризує корпускулярні властивості частинки, енергію E та імпульс p . Права – хвильові властивості (частоту ν та хвильове число k чи довжину хвилі λ):



Французський фізик де Бройль узагальнив ці співвідношення на частинки, маса спокою яких не дорівнює нулю. Наприклад, рухомому електрону з енергією E та імпульсом p співставна хвиля певної довжини та частоти:

$$\nu = \frac{E}{h}$$

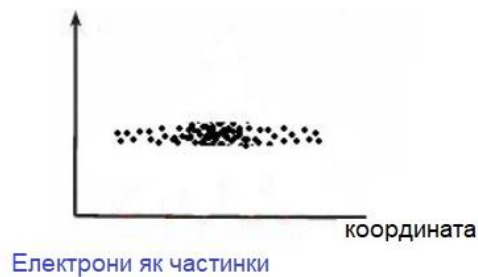
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v}$$

Для прикладу знайдемо довжину хвилі електрона, що прискорився в полі з різницею потенціалів $\Delta\varphi = 10$ В. Маємо:

$$\frac{m_e v^2}{2} = e \Delta\varphi \rightarrow v = \sqrt{\frac{2e \Delta\varphi}{m_e}} \approx 2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{10^{-30} \text{ кг} \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ м} \approx 3 \text{ \AA}$$

Це значення, $\lambda \approx 3\text{\AA}$, відповідає довжині рентгенівської хвилі.



Згадаємо, що за міркуваннями класичної механіки рух електрона в напрямку x можна описати такими рівняннями:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}$$

Знаючи діючу силу F_x , з цих рівнянь можна визначити зміну координати Δx та імпульсу Δp_x за час Δt .

Зовсім інша справа з визначенням координати та імпульсу частинки, а також і з самими рівняннями руху, з точки зору квантової механіки. Оскільки переміщення частинки слід пов'язати з хвильовим процесом, рівняння її руху характеризуватиме умови поширення відповідної хвилі де Бройля. При цьому координата частинки стає не точно визначеною, оскільки хвиля є протяжним об'єктом.

Аналізуючи можливості вимірювання координати й імпульсу мікрочастинок, Вернер Гейзенберг дійшов до висновку, що неможливо одночасно і до того ж точно виміряти їх координату й

імпульс. Чисельно таке обмеження виражає співвідношення невизначеностей такого вигляду:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

З цього співвідношення випливає, що чим точніше ми спробуємо визначити координату частинки, тим з меншою точністю зможемо охарактеризувати її імпульс:

Співвідношення невизначеностей можна подати у дещо іншому вигляді:

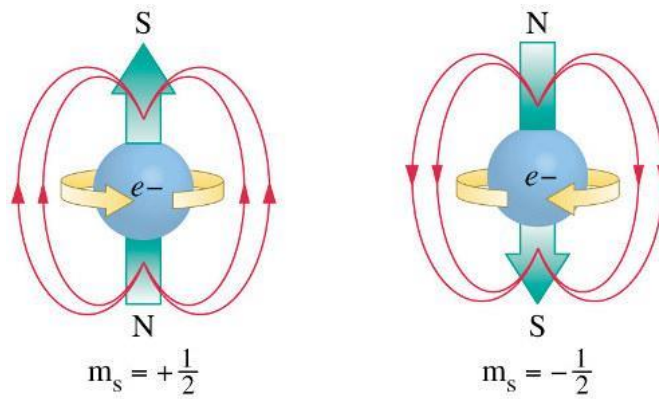
$$\Delta x \cdot \Delta p_x = (v_x \Delta t)(m \Delta v_x) = \Delta \left(\frac{mv_x^2}{2} \right) \Delta t = \Delta E_k \Delta t \geq \hbar$$

Остання нерівність застосовна не лише для кінетичної енергії E_k , а і для повної енергії частинки:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Бачимо, що невизначеності енергії частинки і часу її життя в даному енергетичному стані пов'язані між собою співвідношенням, аналогічним до Δx та Δp_x .

Нарешті, з дослідів випливає, що, крім маси і заряду, електрон повинен також мати власний момент кількості руху. Гіпотеза про існування цього моменту була вперше висунута в Гаудсмітом і Уленбеком. Передбачалося, що власний момент кількості руху виникає внаслідок обертання електрона навколо власної осі. Тому він одержав назву **спіну** (від англійського spin – обертання). Проте таке уявлення протирічить положенню про невизначеність координати та імпульсу електрона. За сучасними явленнями, наявність спіну є первинною невід'ємною властивістю електрона (й інших мікрочастинок), подібно до маси і заряду, що не зводиться до чогось простішого.



Рівняння Шредінгера. Хвильова функція та її властивості

Як зазначалося, рівняння руху мікрочастинки слід пов'язати з хвильовим процесом, що відповідає поширенню хвилі де Бройля. Використаємо загальне рівняння для певного хвильового процесу, що описується функцією $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\Delta\varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

Для монохроматичної хвилі розв'язок можна шукати у вигляді:

$$\varphi(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \psi(\vec{r})$$

Підставимо цей вираз у рівняння для хвилі:

$$e^{-i\omega t} \Delta\psi(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{v^2} e^{-i\omega t} \psi(\vec{r}) = 0,$$

звідки

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(\vec{r}) = 0,$$

Врахуємо, що $\lambda v = v$, звідки $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi(\vec{r}) = 0$$

Підставимо у цей вираз довжину хвилі де Бройля $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$:

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{p^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r}) = 0$$

Та врахуємо закон збереження енергії:

$$\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = E = \text{const} \quad \rightarrow \quad \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\vec{r})]$$

Тоді

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\vec{r})]\psi(\vec{r}) = 0$$

або

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Це рівняння отримало назву **рівняння Шредінгера**.

Таким чином, стан частинки у квантовій механіці визначається хвильовою функцією, що є функцією координат і часу (ψ -функція). Квадрат модуля ψ -функції для точки, помножений на елемент об'єму, що включає цю частинку, $|\psi|^2 dV$, визначає ймовірність знаходження частинки в цьому об'ємі. Тому квадрат модуля ψ -функції визначає густину ймовірності (тобто визначає густину величини в такому ж розумінні, як густина енергії, густина заряду тощо). **Фізичний зміст**має не сама ψ -функція, а квадрат її модуля, який визначає ймовірність перебування частинки в даній точці простору. Іншоюомовою, ця величина визначає інтенсивність хвиль де Бройля.

З фізичних міркувань, на ψ – функцію накладаються певні обмеження: вона має бути однозначною, неперервною і мати неперервну похідну. Хвильова функція також має задовольняти умову, яка називається умовою нормування ймовірностей:

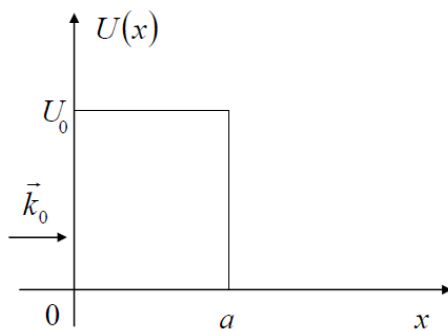
$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx dy dz = 1.$$

Це інтеграл по безмежному нескінченному простору. Умова нормування ймовірностей означає, що перебування частинки десь у просторі є достовірною подією, і її ймовірність дорівнює 1.

Практичні завдання

1. Розглянути рух частинки в полі, де її потенціальна енергія $U(x)$ має форму прямокутного бар'єра. Визначити коефіцієнти відбивання і прозорості вказаного бар'єра.

Розв'язок:



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Власні функції $\psi(x)$ є розв'язками рівняння Шредінгера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Розіб'ємо весь проміжок x на три гілки із -функціями:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x < 0 \\ \psi_2(x), & 0 \leq x \leq a \\ \psi_3(x), & x > a \end{cases}$$

із рівняннями Шредінгера для $\psi_{1,2,3}$:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{1,3}}{dx^2} &= -k_0^2 \psi_{1,3} \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} &= -k^2 \psi_2 \end{aligned}$$

$$\text{де } k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, k = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}.$$

Загальні розв'язки рівнянь Шредінгера для $\psi_{1,2,3}$ визначаються виразами:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A_1 e^{ik_0 x} + A_2 e^{-ik_0 x} \\ \psi_2(x) = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} \\ \psi_3(x) = C_1 e^{ik_0 x} + C_2 e^{-ik_0 x} \end{cases}$$

У виразі для $\psi_1 A_1 e^{ik_0 x}$ описує падаючі частинки, а вираз $A_2 e^{-ik_0 x}$ – відбиті. Отже, $\psi_1 = \psi_{\text{пад}} + \psi_{\text{відб}}$ із $\psi_{\text{пад}} = A_1 e^{ik_0 x}$, $\psi_{\text{відб}} = A_2 e^{-ik_0 x}$. У третій області не може бути частинок, які б рухалися у зворотному напрямку, тому слід покласти $C_2 = 0$. Вираз $C_1 e^{ik_0 x}$ описує частинки, що пройшли потенціальний бар'єр, тобто $\psi_3 = \psi_{\text{пр}} = C_1 e^{ik_0 x}$. Введемо тепер коефіцієнти відбивання R і прозорості T бар'єра:

$$R = \frac{j_{\text{відб}}}{j_{\text{пад}}}, \quad T = \frac{j_{\text{пр}}}{j_{\text{пад}}}$$

де $j_{\text{пад}}, j_{\text{відб}}, j_{\text{пр}}$ – величини густин потоків відповідно падаючих частинок, відбитих частинок і частинок, що пройшли бар'єр. Густина потоку можна виразити через хвильову функцію як $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$. Підставляючи відповідні $j_{\text{пад}}, j_{\text{відб}}, j_{\text{пр}}$ ψ -функції, одержимо:

$$j_{\text{пад}} = \frac{\hbar k_0}{m} |A_1|^2, \quad j_{\text{відб}} = \frac{\hbar k_0}{m} |A_2|^2, \quad j_{\text{пр}} = \frac{\hbar k_0}{m} |C_1|^2$$

$$\text{Тоді } R = \frac{j_{\text{відб}}}{j_{\text{пад}}} = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2, \quad T = \frac{j_{\text{пр}}}{j_{\text{пад}}} = \left| \frac{C_1}{A_1} \right|^2$$

Використаємо тепер умови неперервності хвильової функції $\psi(x)$ та її похідної $\psi'(x)$ в точках $x = 0$ і $x = a$:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = \psi_2(0) &\Rightarrow A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) &\Rightarrow k_0(A_1 - A_2) = k(B_1 - B_2) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) &\Rightarrow B_1 e^{ika} + B_2 e^{-ika} = C_1 e^{ik_0 a} \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) &\Rightarrow k(B_1 e^{ika} - B_2 e^{-ika}) = k_0 C_1 e^{ik_0 a} \end{aligned}$$

Отримали систему 4-х лінійних рівнянь для 5-ти невідомих A_1, A_2, B_1, B_2 та C_1 . Але для визначення коефіцієнтів відбивання R і прозорості T бар'єра нам потрібно знати лише відношення $\frac{A_2}{A_1}$ та $\frac{C_1}{A_1}$. Поділивши рівняння останньої системи на A_1 , одержимо 4-ри рівняння для 4-х невідомих $\frac{A_2}{A_1} = A, \frac{B_1}{A_1} = B, \frac{B_2}{A_1} = b, \frac{C_1}{A_1} = C, R = |A|^2, T = |C|^2$:

$$\begin{aligned} 1 + A &= B + b \\ \gamma(1 - A) &= B - b \\ B e^{ika} + b e^{-ika} &= C e^{ik_0 a} \\ \frac{1}{\gamma} (B e^{ika} - b e^{-ika}) &= C e^{ik_0 a} \end{aligned}$$

де $\gamma = k_0/k$. Виразимо B і b через A з перших двох рівнянь цієї системи

$$B = \frac{A(1 - \gamma) + 1 + \gamma}{2}, \quad b = \frac{A(1 + \gamma) + 1 - \gamma}{2}$$

і підставимо ці вирази в останні два рівняння системи, одержавши рівняння для визначення A :

$$\begin{aligned} & A[(1 - \gamma)e^{ika} + (1 + \gamma)e^{-ika}] + (1 + \gamma)e^{ika} + (1 - \gamma)e^{-ika} = \\ & = \frac{1}{\gamma} \{A[(1 - \gamma)e^{ika} - (1 + \gamma)e^{-ika}] + (1 + \gamma)e^{ika} - (1 - \gamma)e^{-ika}\} \end{aligned}$$

З цього виразу:

$$A = \frac{i(\gamma^2 - 1) \sin(ka)}{2\gamma \cos(ka) - i(\gamma^2 + 1) \sin(ka)}$$

і

$$C = \frac{e^{-ik_0 a}}{\cos(ka) - \frac{i}{2} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin(ka)}$$

Щоб обчислити квадрати модулів цих виразів, зручно перш за все розглянути випадок, коли $E > U_0$, і, отже, величина $k = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$ є дійсною. Тоді:

$$R = \frac{(\gamma^2 - 1)^2 \sin^2(ka)}{4\gamma^2 + (\gamma^2 - 1) \sin^2(ka)}$$

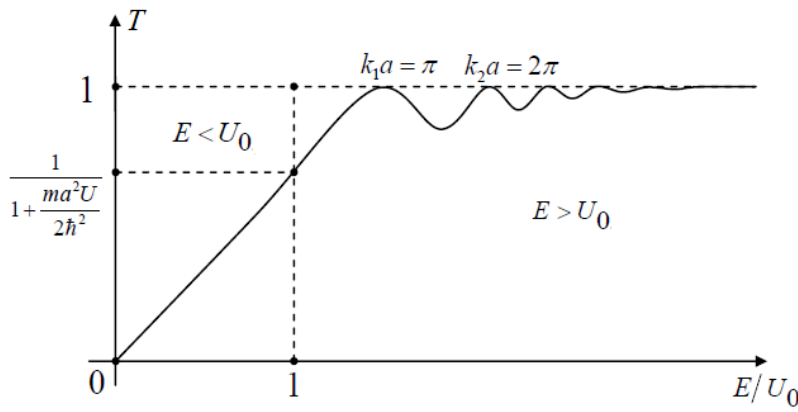
$$T = \frac{4\gamma^2}{4\gamma^2 + (\gamma^2 - 1)^2 \sin^2(ka)}$$

Легко бачити, що $R + T = 1$, що випливає із збереження числа частинок: $j_{\text{пад}} = j_{\text{відб}} + j_{\text{пр}}$. Оскільки $\gamma^2 = \frac{k_0^2}{k^2} = \frac{E}{E - U_0} i \gamma^2 - 1 = \frac{U_0}{E - U_0}$, остаточні вирази для R і T набувають вигляду:

$$R = \frac{\sin^2(ka)}{\sin^2(ka) + 4 \frac{E(E - U_0)}{U_0^2}}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{U_0^2}{4E(E - U_0)} \sin^2(ka)}$$

Відзначимо, що у випадку класичної частинки при $E > U_0$ має бути $R = 0$ (а, отже, $T = 1$) – тобто всі частинки “пролітають” над бар’єром. Для квантової частинки, якщо $k \neq n \frac{\pi}{a}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), коефіцієнт відбивання $R \neq 0$. Це явище має назву надбар’єрного відбивання. Лише при $k = n \frac{\pi}{a}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) реалізуються значення $R = 0, T = 1$ (своєрідна “резонансна прозорість” бар’єру):



Залежність коефіцієнта прозорості T від енергії E для прямокутного бар'єра висотою U_0 і шириною a .

Перейдемо тепер до більш цікавого випадку $0 < E < U_0$. У цьому випадку

$$k = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}} = ik'$$

де $k' = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$ – дійсна величина. Тоді ($\text{sh } x = -i \sin(ix)$):

$$\sin(ka) = \sin(ik'a) = -\frac{1}{i} \text{sh}(k'a) = i \text{sh}(k'a)$$

і, отже, аналітичне продовження виразів для R і T під бар'єр приводить до виразів:

$$R = \frac{\text{sh}^2(k'a)}{\text{sh}^2(k'a) + 4 \frac{E(E - U_0)}{U_0^2}}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{U_0^2}{4E(E - U_0)} \text{sh}^2(k'a)}$$

Для класичної частинки при $E < U_0$ коефіцієнт прозорості $T = 0$ (відповідно, $R = 1$), оскільки кінетична енергія $T = E - U_0$ не може бути від'ємною. Отже, для квантової частинки при $E < U_0$ коефіцієнт прозорості $T \neq 0$, що принципово відрізняється від класичного випадку – це суттєво квантовий ефект, що назветься “тунельним ефектом”.

Розглянемо граничні випадки, що впливають із останніх виразів для R і T :

а) при $E \rightarrow 0$ маємо: $R \rightarrow 1, T \rightarrow 0$;

б) при $E \rightarrow U_0$, розкривши невизначеність типу $\frac{0}{0}$, одержимо

$$R \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2}{ma^2 U_0}}, \quad T \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{ma^2 U_0}{2\hbar^2}};$$

в) при $E \rightarrow \infty$ маємо: $R \rightarrow 0, T \rightarrow 1$.

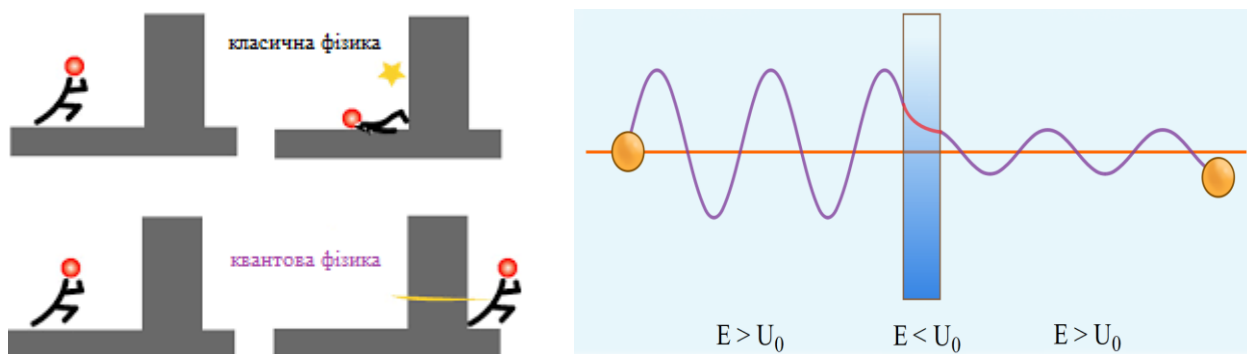
На попередньому рисунку зображено графік залежності коефіцієнта прозорості T від енергії E . Зазначимо, що спектр резонансних значень енергії (при $E > U_0$) має таку ж структуру (лише зсунуті на величину U_0), як і для енергій стаціонарних станів частинки у безмежно глибокій потенціальній ямі (див. задачу 2 нижче):

$$k_n a = \pi n \quad \Rightarrow \quad E_n = U_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

У цьому випадку на ширині бар'єру a відкладається ціле число півхвиль де Бройля: $a = n \frac{\lambda}{2}$. У випадку бар'єра значної ширини і висоти, коли $k'a \gg 1$, $\text{sh}(k'a) = \frac{e^{k'a}}{2} \gg 1$ і вираз для T можна подати у вигляді:

$$T \approx T_0 e^{-2k'a} = T_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} a\right)$$

Проходження скрізь бар'єр з класичної і квантової точки зору можна подати так:



2. Знайдіть власні значення енергії E та власні функції ψ мікрочастинки в одномірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною a .

Відповідь: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right)$

3. В момент часу $t = 0$ вільна частинка описується функцією $\psi(x, 0) = A \exp\left(ik_0 x - \frac{x^2}{2a^2}\right)$, де k_0 та a – відомі сталі. Знайдіть A та область локалізації частинки.

Відповідь: $A^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}$ область локалізації $\sim a$

8. Фізичні основи передачі інформації в електричних колах

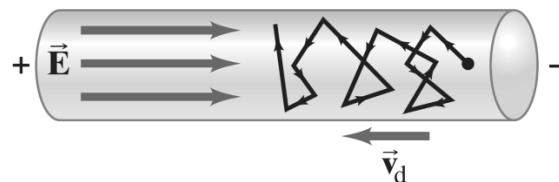
Струм та напруга як електричні сигнали

В сучасних системах збору і обробки інформації інформаційні пакети передаються і обробляються у вигляді електричних сигналів. Різноманітні електронні пристрої систем обробки інформації з'єднані між собою провідниками і утворюють електричні кола різного ступеня розгалуження. В даному розділі будуть розглянуті фізичні основи передачі електричних сигналів в розгалужених електричних колах сталого та змінного сигналів, утворених активними та реактивними опорами. Дані знання можуть стати підґрунтям для подальшого вивчення принципів функціонування спеціалізованих електронних систем обробки інформації та їх електричного узгодження між собою.

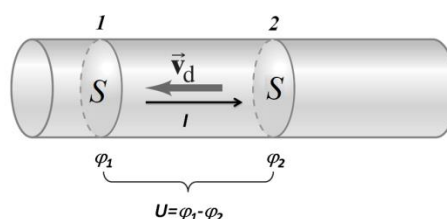
Під електричними сигналами будемо розуміти або електричний струм, який протікає через певний елемент електричного кола, або напругу, яка виникає між певними точками електричного кола. Спираючись на фізичні закони при подальшому розгляді будуть встановлені зв'язки між напругою та струмом на певних елементах електричного кола.

Електричні струми можуть існувати лише в провідниках. В *металічних провідниках*, які є найбільш важливими з точки зору їх практичного застосування, зовнішні електрони або електрони провідності, не зв'язані з конкретними атомами металу і можуть вільно переміщуватись в провіднику. Така поведінка електронів зовнішніх оболонок атомів знаходить своє пояснення лише в квантовій механіці. Концентрація електронів провідності в металах дуже висока і складає 10^{28} - 10^{29} м⁻³. За відсутності зовнішнього електричного поля електрони провідності здійснюють хаотичний тепловий рух в усіх

напрямках всередині металічного провідника і їх середня швидкість дорівнює нулеві. Будемо розглядати тонкі однорідні металічні провідники циліндричної форми. Саме такої форми провідники часто використовуються для передачі електричних сигналів в електричному колі. Якщо між двома поперечними перерізами провідника створити різницю потенціалів, то всередині провідника виникає електричне поле з напруженістю \vec{E} . Під дією електричного поля на хаотичний тепловий рух електронів провідності накладається направлений дрейфовий рух зі швидкістю \vec{v}_d в напрямку, протилежному до силових ліній поля. Такий направлений рух електронів провідності в провіднику під дією електричного поля називають *електричним струмом*.



Оскільки хаотичний тепловий рух не дає внеску в електричний струм, можна застосувати спрощені уявлення, коли під дією електричного поля всі електрони провідності рухаються з однаковою швидкістю \vec{v}_d проти силових ліній електричного поля. Найбільш простим випадком протікання електричного струму є *сталій електричний струм*, який викликано незмінним в часі електричним полем або іншими словами незмінною в часі різницею потенціалів міжлюбими поперечними перерізами провідника. Очевидно, що в цьому випадку швидкість дрейфу електронів провідності \vec{v}_d також буде залишатись незмінною. Це в свою чергу означає, що кількість електронів, яка перетинає за одиницю часу довільний поперечний переріз провідника (наприклад перерізи 1 або 2) буде однаковою.



В якості кількісної характеристики електричного струму в провіднику вибирають *силу струму* I . Якщо довільний поперечний переріз провідника за малий проміжок часу Δt перетинає сумарний заряд ΔQ , тоді згідно з визначенням, сила електричного струму дорівнює

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Одиниця виміру струму (кулон за секунду) називається ампером (А). Історично склалось так, що за напрямок електричного струму в провіднику приймають напрямок перетину поперечного перерізу провідника додатнім зарядом. Отже в металічному провіднику напрямок дрейфової швидкості негативно заряджених електронів \vec{v}_d буде протилежним до напрямку електричного струму I (як зображено на рисунку вище).

Розподіл електричного струму в провіднику визначається вектором *густини електричного струму* \vec{j} . Модуль цього вектора чисельно дорівнює відношенню сили струму dI через елементарну площадку, розташовану в даній точці перпендикулярно напрямку руху носіїв, до її площі dS_\perp : $|\vec{j}| = dI/dS_\perp$. За напрямок вектора \vec{j} приймають напрямок швидкості дрейфу додатньо заряджених носіїв струму. Густина струму вимірюється в А/м². Очевидно, що для електронів провідності в металах вектори \vec{j} та \vec{v}_d направлені протилежно. За відомою густиною струму можна визначити силу струму через поверхневий інтеграл по поперечному перерізу провідника

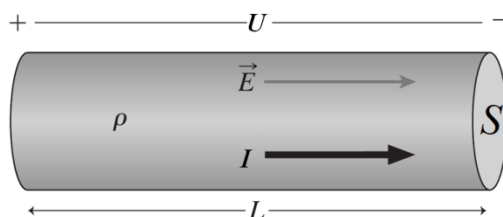
$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Експериментально було встановлено, що у випадку, коли на однорідній ділянці провідника, обмеженій двома поперечними перерізами 1 і 2 (див. рисунок вище), на електрони діє лише електричне поле, якому відповідає різниця потенціалів $U = \varphi_1 - \varphi_2$, тоді

лінійна залежність сили струму I в провіднику від різниці потенціалів U визначається законом Ома для однорідної ділянки кола

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

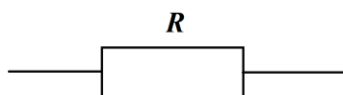
Величина R , яку називають *електричним опором ділянки кола*, вимірюється в В/А або Ом. Електричний опір R буде залежати як від форми провідника, так і від властивостей матеріалу, з якого виготовлено провідник. Провідні властивості матеріалу, з якого виготовлено провідник, описують величиною *питомого опору* ρ (не плутати з об'ємною густиною заряду!) з одиницею виміру Ом·м. Для міді (гарний металічний провідник) $\rho \approx 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Для порівняння питома провідність слюди (типовий діелектрик) буде на десятки порядків величини більшою $\rho \approx 10^{13}$ Ом·м. Для однорідного провідника у вигляді прямого циліндра довжиною L , площею поперечного перерізу S і виготовленого з матеріалу з питомим опором ρ



величина струму I буде пов'язана з різницею потенціалів U законом Ома для однорідної ділянки кола, якщо опір R такого провідника буде визначатись виразом

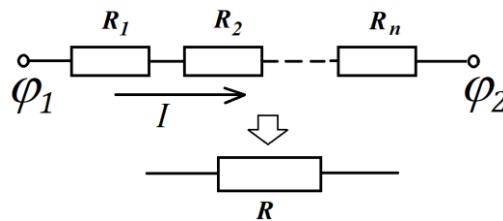
$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Для схематичного зображення електричних кіл вводяться спеціальні схематичні позначення для елементів. Згідно з прийнятими домовленостями провідник з опором R схематично позначається наступним чином



Для функціонування різноманітних електричних схем виготовляються спеціалізовані провідники із заданим опором. Такі провідники називають *резисторами*. В подальшому довільний провідник з опором R можна також називати резистором.

На практиці часто зустрічається *послідовне* або *паралельне* з'єднання резисторів із заданими опорами. Якщо між кінцями ланцюга, який складається з послідовно з'єднаних резисторів,



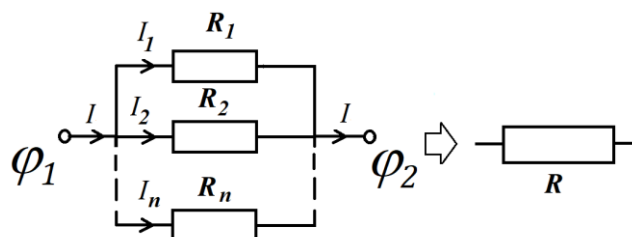
створити різницю потенціалів $U = \varphi_1 - \varphi_2$, тоді очевидно, що через кожен з резисторів буде протікати однаковий струм I . Застосовуючи для кожного з резисторів закон Ома для однорідної ділянки кола, можна визначити різницю потенціалів на кінцях кожного з резисторів U_1, U_2, \dots, U_n . Різниця потенціалів на кінцях ланцюга очевидно дорівнює сумі різниці потенціалів на кожному з резисторів

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

Отже для виконання закону Ома ми можемо замінити систему послідовно з'єднаних резисторів одним еквівалентним резистором, опір якого визначається *правилом послідовного з'єднання*

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Для системи паралельно з'єднаних резисторів різниця потенціалів $U = \varphi_1 - \varphi_2$ буде однаковою на виводах кожного резистора.



Застосовуючи для кожного з резисторів закон Ома для однорідної ділянки кола, можна визначити струми, які протікають через резистори I_1, I_2, \dots, I_n . Результируюча сила струму I , який протікає між точками з потенціалами φ_1 та φ_2 , дорівнює сумі силі струмів через кожен з резисторів, оскільки в точках з'єднання резисторів не може накопичуватись заряд за умови незмінності їх потенціалів

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

Отже для виконання закону Ома ми можемо замінити систему паралельно з'єднаних резисторів одним еквівалентним резистором, опір якого визначається *правилом паралельного з'єднання*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Під час дрейфу у металічному провіднику електрони зазнають розсіювання на атомах металу в результаті чого зростає енергія теплового руху атомів. Отже при протіканні електричного струму відбувається нагрівання провідника. Згідно з визначенням різниці потенціалів між кінцями провідника добуток $eU = e(\varphi_1 - \varphi_2)$ (e -заряд електрона) дорівнює роботі сил електричного поля по переміщенню електрона вздовж провідника. Однак за умов сталого електричного струму дрейфова швидкість електронів, а отже і кінетична енергія їх впорядкованого руху, залишаються незмінними. Це означає, що робота сил електричного поля по переміщенню електронів вздовж провідника йде на збільшення енергії теплового руху, тобто на нагрівання провідника.

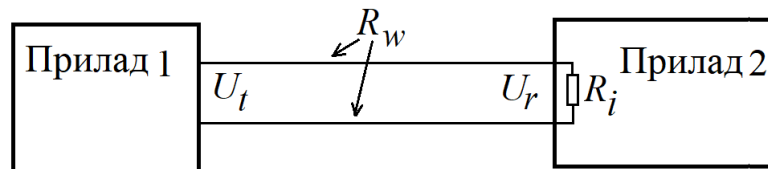
Згідно з визначенням сили струму величина $I\Delta t$ дорівнює сумарному заряду, який за малий час Δt перетинає довільно обраний поперечний переріз провідника. Отже можна собі уявляти, що за малий час Δt між двома довільно обраними поперечними перерізами провідника (наприклад 1 і 2 на рисунку вище) переміщується заряд $I\Delta t$. Тоді робота, яку виконують за час Δt сили електричного поля по

переміщенню заряду $I\Delta t$ вздовж провідника, дорівнює $\Delta A = UI\Delta t$. За умови сталого струму ця робота йде на нагрівання провідника. Якщо опір провідника R , тоді скориставшись законом Ома для однорідної ділянки кола отримаємо для кількості теплоти ΔQ , яка виділяється за малий час Δt в провіднику

$$\Delta Q = \Delta A = UI\Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t$$

Вираз, що визначає кількість теплоти, яка виділяється в провіднику зі струмом, отримав назву *закон Джоуля-Ленца*.

Втрати енергії на нагрівання провідників потрібно завжди враховувати при передачі електричних сигналів вздовж провідників, які з'єднують прилади, оскільки на практиці такі з'єднання виконуються провідниками з ненульовим опором. Наприклад у нас є два прилади, з'єднані між собою провідниками однакової довжини, а отже і однакового опору.



В деякий момент часу на виході приладу 1 встановлюється сигнал напруги величиною U_t . Цей сигнал повинен бути зареєстрованим приладом 2. Часто вхідний опір приладу (позначено резистором R_i) має доволі невелике значення. Оскільки сигнал передається по провідникам з опором R_w , відбувається втрата енергії на нагрівання цих провідників і величина напруги U_r , яка зареєструється приладом 2 буде меншою, ніж на виході приладу 1. Скориставшись законом Ома для однорідної ділянки кола та правилом послідовного з'єднання провідників, розрахуємо це значення

$$U_r = \frac{U_t}{R_w + R_w + R_i} R_i$$

Отже при достатньо довгій з'єднувальній лінії (велике значення R_w) може скластись ситуація, коли величина напруги на вході приймаючого приладу буде малою. Це потрібно завжди враховувати і для мінімізації втрат вибирати провідники з'єднувальної лінії з малим опором та якомога меншої довжини. Ось чому для мінімізації теплових втрат провідники лінії, вздовж якої передається електроенергія, виготовляють з більш вартісної міді, а не зі сталі. За однакової довжини і площі поперечного перерізу опір мідного провідника буде в ≥ 5 разів меншим, за опір сталевого провідника. Отже при передачі однакового струму згідно із законом Джоуля-Ленца втрати енергії на нагрівання сталевих провідників будуть приблизно в 25 разів більшими.

Як вже зазначалось, у випадку сталого електричного струму величина електричного поля \vec{E} всередині провідника та різниця потенціалів U на його кінцях повинні залишатись сталими в часі. З іншого боку з рівняння Максвелла

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

з урахуванням матеріального рівняння

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

випливає, що для сталого струму (сталого електричного поля \vec{E}) величина заряду q в довільному об'ємі V всередині провідника

$$q = \int_V \rho dV$$

також повинна залишатись сталою в часі (для однорідного провідника доводиться, що $q = 0$). Виберемо замкнену поверхню S , яка охоплює об'єм V всередині провідника. Згідно з визначенням густини струму потік крізь замкнену поверхню $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ визначає заряд, який виходить за одиницю часу з об'єму V , охопленого замкненою поверхнею S . В

силу справедливості закону збереження заряду цей інтеграл повинен дорівнювати зменшенню за одиницю часу заряду всередині об'єму V

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

Дане співвідношення, яке є математичним записом закону збереження заряду, називають *рівнянням нерозривності*. Для сталого електричного струму величина заряду q в довільному об'ємі V всередині провідника не змінюється з часом і з рівняння нерозривності ми отримуємо

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

Якщо по аналогії з силовими лініями електричного поля та лініями індукції магнітного поля ввести поняття *ліній струму* (вектор \vec{j} направлений по дотичній до ліній струму), тоді рівність нулю потоку вектора густини струму крізь довільну замкнену поверхню всередині провідника означає, що *лінії струму є замкненими*. Оскільки вектор \vec{j} визначає траєкторії дрейфу електронів провідності при протіканні струму, тоді сталі електричні струми в провідниках створюються рухом електронів вздовж замкнених траєкторій. Іншими словами, сталі електричні струми можливі лише в замкнених електричних колах.

Оскільки зі сталим струмом пов'язане стале магнітне поле \vec{B} , тоді з рівняння Максвелла, яке описує закон електромагнітної індукції

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

безпосередньо впливає, що циркуляція вектора напруженості електричного поля (так само, як і циркуляція вектора напруженості електростатичного поля нерухомих зарядів) в замкненому провіднику зі сталим струмом дорівнює нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Таким чином, по аналогії з роботою сил електростатичного поля вздовж замкненого шляху, робота сил електричного поля по переміщенню зарядів вздовж замкненого провідника зі сталим струмом дорівнює нулю. Отже втрати енергії впорядкованого руху електронів на нагрівання провідника неможливо компенсувати лише роботою електричних сил на всьому замкненому шляху руху електронів. Для підтримання в провіднику постійного струму необхідне постійне джерело електричної енергії. Поширеними типами джерел є електричні батареї та електричні генератори. Вони називаються *джерелами електрорушійної сили*, або скорочено джерелами ЕРС. В цих джерелах електрична енергія отримується шляхом перетворення з інших форм енергії. У батареях використовується хімічна енергія, а в електричних генераторах - механічна енергія. Для позначення як джерела ЕРС, так і величини ЕРС, будемо використовувати символ \mathcal{E} . Якщо при проходженні джерела ЕРС заряд Δq отримує енергію ΔW , тоді за визначенням величина ЕРС такого джерела

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta W}{\Delta q}$$

Величина \mathcal{E} чисельно дорівнює роботі, яка виконується джерелом ЕРС над одиничним додатнім зарядом. Як і різниця потенціалів величина ЕРС вимірюється в вольтах (В). При схематичному зображенні електричного кола джерело ЕРС позначається спеціальним символом.



Якщо додатній заряд Δq рухається від «-» до «+» джерела ЕРС, то джерелом виконуються додатня робота і заряд отримує енергію $\mathcal{E}\Delta q$. При русі в протилежному напрямку джерелом ЕРС виконується від'ємна робота і додатній заряд Δq втрачає енергію $\mathcal{E}\Delta q$. Оскільки

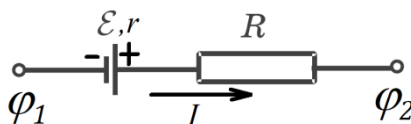
електрони- негативно заряджені частинки, то при русі від «-» до «+» джерела ЕРС вони будуть втрачати енергію, а при русі від «+» до «-» - отримувати.

Закон Ома для неоднорідної ділянки та замкнутого кола.

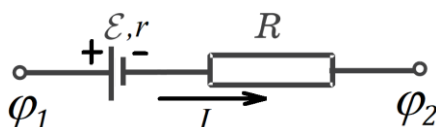
Законом Ома для однорідної ділянки кола стверджується, що добуток сили струму I на опір R провідника дорівнює різниці потенціалів $U = \varphi_1 - \varphi_2$ на кінцях ділянки

$$IR = U = \varphi_1 - \varphi_2$$

В той же час різниця потенціалів U на ділянці кола- це робота електричних сил по переміщенню одиничного додатнього заряду вздовж ділянки. *Неоднорідна ділянка кола* додатково містить джерело ЕРС і при переміщенні носіїв вздовж такої ділянки окрім електричних сил роботу також буде виконувати джерело ЕРС. Згідно з визначенням робота, яка виконується джерелом ЕРС при проходженні одиничного додатнього заряду від «-» до «+» джерела дорівнює величині ЕРС \mathcal{E} . Отже аби узагальнити закон Ома на випадок неоднорідної ділянки кола, що містить джерело ЕРС, потрібно в правій частині вищенаведеного виразу врахувати роботу, яка виконується джерелом ЕРС. Окрім того джерело ЕРС як правило має внутрішній опір r , який слід додати до опору провідника R в лівій частині вищенаведеного виразу. Якщо електричний струм на неоднорідній ділянці протікає від «-» до «+» джерела, тоді робота джерела буде дорівнювати $+\mathcal{E}$. Схематично така ділянка зображується наступним чином



Якщо ж електричний струм на ділянці протікає від «+» до «-» джерела, тоді робота джерела буде дорівнювати $-\mathcal{E}$. Схематично така ділянка зображується наступним чином



Отже узагальнений закон Ома для неоднорідної ділянки кола з урахуванням знаків роботи, яку виконує джерело ЕРС, та внутрішнього опору джерела набуває вигляду

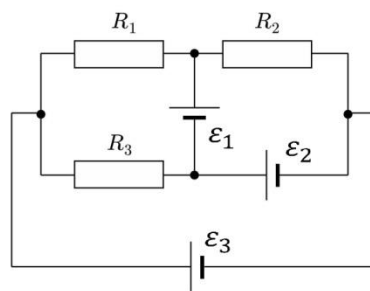
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}}{R + r}$$

Якщо кінці ділянки кола з'єднати між собою, тоді ми отримаємо замкнене електричне коло, робота електричних сил в якому дорівнює нулю. Закон Ома для замкнутого кола випливає безпосередньо із закону Ома для неоднорідної ділянки кола, якщо для з'єднаних між собою кінців ділянки кола покласти $\varphi_1 = \varphi_2$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

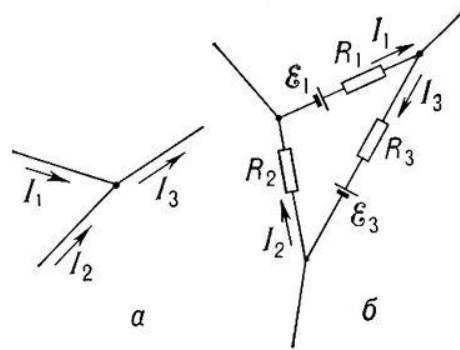
Правила Кірхгофа

На практиці часто зустрічаються складні розгалужені електричні кола, які неможливо звести до паралельного і послідовного з'єднання провідників з застосуванням правил паралельного та послідовного з'єднання резисторів. Приклад такого електричного кола наведено нижче



Для розрахунку таких кіл зручно використовувати *правила Кірхгофа*. Для формулювання цих правил потрібно спочатку дати визначення двом важливим поняттям- *вузол* та *контур*. Вузлом будемо називати любую точку електричного кола, в якій з'єднується три або більше провідників. Контуром будемо називати довільну замкнену ділянку електричного кола. На рисунку нижче наведено приклади одного із вузлів деякого складного розгалуженого електричного кола (випадок

а) та одного із контурів, який утворює замкнену ділянку деякого складного розгалуженого електричного кола (випадок б).



Перше правило Кірхгофа. Алгебраїчна сума всіх струмів, які сходяться у довільному вузлі повинна дорівнювати нулю

$$\sum_i I_i = 0$$

Для застосування цього правила у вищенаведеній формулі потрібно строго дотримуватись *правила знаків для струмів*. Струми, які втікають у вузол, підставляємо у вираз зі знаком «+», а струми, які витікають з вузла- зі знаком «-». З урахуванням правила знаків для струмів перше правило Кірхгофа для вузла, наведеного на рисунку вище (випадок а), запишеться у вигляді

$$\sum_i I_i = I_1 + I_2 - I_3$$

Перше правило Кірхгофа є наслідком того, що в будь якій точці електричного кола, включаючи вузли, не повинен накопичуватись електричний заряд.

Друге правило Кірхгофа. Сума змін потенціалів на всіх ділянках довільного контура електричного кола повинна дорівнювати нулю

$$\sum_i U_i = 0$$

Це правило є вираженням закону збереження енергії носія заряду при обході контура. Для застосування другого правила Кірхгофа потрібно вибрати напрямок обходу контура і врахувати, що в напрямку обходу контура потенціал на провіднику з опором зменшується, якщо напрямок струму і напрямок обходу контура співпадають, і зростає, якщо напрямок обходу контура і напрямок струму протилежні. Якщо окрім провідника контур містить джерела ЕРС, тоді при русі від «-» джерела до «+» в напрямку обходу контура потенціал зростає, а при русі від «+» джерела до «-» потенціал зменшується. Наведений на рисунку вище контур (випадок б) складається з трьох нерозгалужених ділянок, зміну потенціалів на яких позначимо U_1 , U_2 і U_3 . Друге правило Кірхгофа для такого контура записується наступним чином

$$\sum_i U_i = U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

Виберемо напрямок обходу контура за годинниковою стрілкою. Тоді застосовуючи для кожної ділянки контура закон Ома для неоднорідної ділянки кола, зміни потенціалів на кожній з трьох нерозгалужених ділянок контура можна записати як

$$U_1 = \varepsilon_1 - I_1 R_1$$

$$U_2 = -I_2 R_2$$

$$U_3 = -I_3 R_3 - \varepsilon_3$$

Якщо ж вибрати напрямок обходу контура проти годинникової стрілки, тоді перед кожним із доданків в правій частині вищенаведених виразів потрібно змінити знак на протилежний.

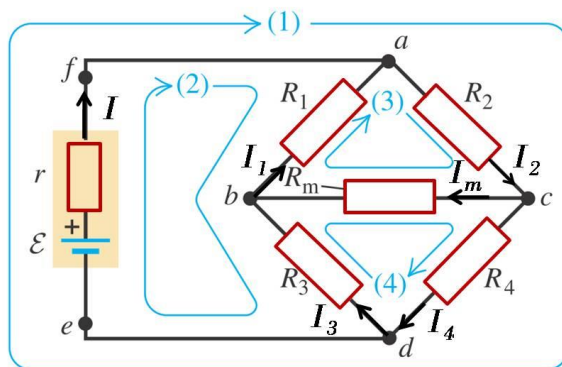
Застосовуючи правила Кірхгофа для електричного кола ми повинні отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих струмів. Як відомо з математики система рівнянь буде мати однозначний розв'язок за умови, якщо кількість рівнянь в системі дорівнює кількості невідомих струмів для кожної з нерозгалужених ділянок електричного кола. Кількість незалежних рівнянь, які ми отримуємо застосовуючи перше правило Кірхгофа буде на одиницю

меншим за кількість вузлів електричного кола. Інші рівняння отримуємо застосовуючи друге правило Кірхгофа.

Для отримання з правил Кірхгофа необхідної для розв'язку системи рівнянь потрібно дотримуватись наступного алгоритму:

- 1) Позначити і довільним чином вибрати напрямки струмів в кожній з нерозгалужених ділянок кола. Якщо після розв'язку рівнянь виявиться, що якийсь із струмів буде від'ємним, то це означатиме, що реальний напрямок струму буде протилежним до вибраного.
- 2) Записати систему рівнянь, які отримуємо з першого правила Кірхгофа для всіх (за виключенням одного) вузлів вибраного електричного кола.
- 3) Для доповнення системи рівнянь, вибрати у електричному колі незалежні контури у кількості, що дорівнює різниці між кількістю невідомих струмів і кількістю рівнянь, які вже отримали з першого правила Кірхгофа. Застосувати для кожного з вибраних контурів друге правило Кірхгофа.

Продемонструємо застосування правил Кірхгофа на прикладі розрахунку мостової схеми (місток Уїтстона), яка знаходить широке застосування в системах контролю та вимірювання.



Метою буде знаходження струму і різниці потенціалів на резисторі R_m для заданих значень резисторів R_1 , R_2 , R_3 і R_4 , що утворюють плечі містка. Через r позначено внутрішній опір джерела ЕРС. В даному електричному колі можна виділити чотири вузла a , b , c і

d. Отже шляхом застосування першого правила Кіргофа ми отримаємо три незалежних рівняння. Вибравши напрямки струмів у кожній гілці, запишемо рівняння на застосування першого правила Кіргофа для вузлів a , b , c .

$$\text{Вузол } a: \quad I + I_1 - I_2 = 0 \quad (\text{P1})$$

$$\text{Вузол } b: \quad I_m + I_3 - I_1 = 0 \quad (\text{P2})$$

$$\text{Вузол } c: \quad I_2 - I_m - I_4 = 0 \quad (\text{P3})$$

Оскільки кількість невідомих струмів в колі дорівнює шістьом, потрібно ще вибрати три контури і скласти три рівняння на застосування другого правила Кірхгофа. Можливі способи вибору контурів зображено на рисунку вище. Зупинимось на виборі контурів, позначених цифрами 1, 2 і 3 і запишемо для них рівняння на друге правило Кірхгофа.

$$\text{Контур 1:} \quad \varepsilon - Ir - I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0 \quad (\text{P4})$$

$$\text{Контур 2:} \quad \varepsilon - Ir + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0 \quad (\text{P5})$$

$$\text{Контур 3:} \quad -I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_m R_m = 0 \quad (\text{P6})$$

В якості здобуття практичних навичок пропонується самостійно знайти розв'язок даної системи рівнянь (P1- P4) відносно невідомого струму I_m . Шляхом аналізу знайденого розв'язку неважко дійти висновку, що струм в діагоналі містка $I_m = 0$ за умови

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

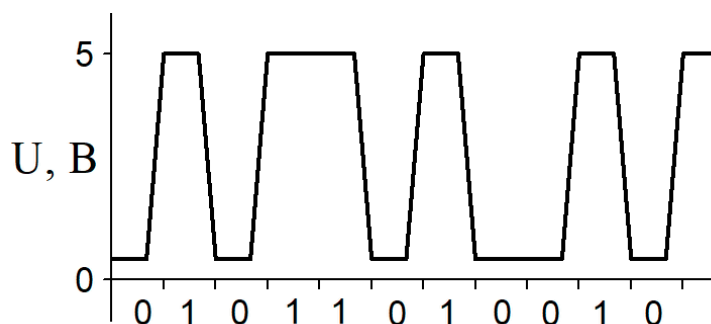
Застосування даної умови використовується для дуже точного визначення опору невідомого резистора. Для цього на місце резистора R_m вмикається чутливий амперметр. Якщо резистором з невідомим опором є R_4 , тоді за умови $R_1 = R_2$ можна довільним чином вибрати резистори R_1 і R_2 . Нарешті залишається точно підібрати величину опору резистора R_3 таким чином, аби амперметр, під'єднаний до точок b і c точно зафіксував нульовий струм. За цих умов опір невідомого резистора R_4 буде дорівнювати опору R_3 .

Отже, якщо ми маємо певне електричне коло, яке складається лише з провідників із певними значеннями електричного опору, тоді

зміна струму або різниці потенціалів в якомусь з провідників викличе перерозподіл струмів і різниць потенціалів в інших провідниках. Застосування закону Ома в різних формах, правил послідовного та паралельного з'єднання провідників, а також правил Кірхгофа дозволяє розрахувати величини струмів та різниць потенціалів для любого провідника такого кола.

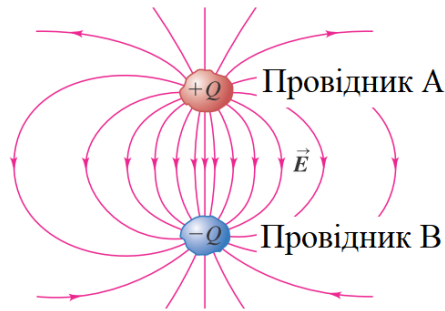
Особливості передачі змінних сигналів в електричних колах

Як правило в сучасних інформаційних системах сигнали передаються в цифровому форматі. Цифровий формат сигналу представляє собою певну послідовність чисел, записаних в двійниковій системі числення. Передача цифрових сигналів реалізується у вигляді послідовності електричних імпульсів з заданими значеннями напруги. Якщо величина напруги електричного імпульса дорівнює нулю, то такий імпульс передає цифровий «0». Якщо величина напруги електричного імпульса дорівнює ненульовому фіксованому значенню, то такий імпульс передає цифрову «1»



Часто трапляються ситуації, коли цифрові сигнали у формі послідовності імпульсів напруги передаються в електричних колах, які складаються не лише з провідників із заданими опорами. Додатково кола можуть включати електричні конденсатори. Такі конденсатори можуть проявлятися як паразитні елементи електричних кіл. При трансляції цифрових сигналів у вигляді електричних імпульсів наявність таких конденсаторів може суттєво впливати на передачу сигналів. Розглянемо найбільш поширені ситуації.

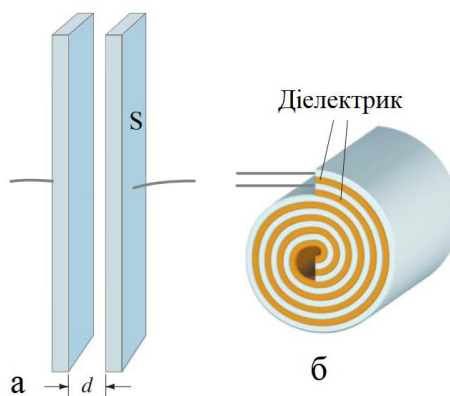
Нагадаємо, що електричний конденсатор представляє собою систему двох близько розташованих провідників



Така система накопичує електричний заряд, якщо між провідниками створити різницю потенціалів. Експериментально встановлено, для провідників незмінної форми та за умови незмінного просторового розташування один відносно одного, абсолютне значення накопиченого кожним з провідників заряду Q лінійно залежить від різниці потенціалів U між провідниками

$$Q = CU$$

Величина C коефіцієнта пропорційності називається *електричною ємністю конденсатора* і вимірюється в одиницях Кл/В або Фарад (Ф). Для збільшення ємності конденсатори виготовляють у вигляді паралельних близько розташованих провідників (пластин конденсатора)



Якщо пластини конденсатора є плоскими паралельними провідниками (випадок а), то конденсатор називають плоским. Ємність плоского конденсатора

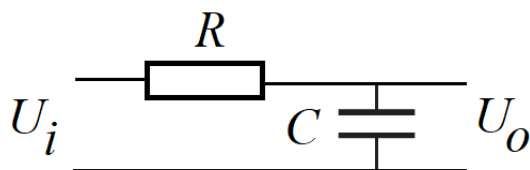
$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$$

де ε - діелектрична проникливість діелектричної речовини, яка заповнює простір між пластинами, ε_0 - діелектрична стала. Для збільшення ємності відстань між пластинами d потрібно зменшувати, а площу пластин S збільшувати. Для мінімізації геометричних розмірів конденсатор виготовляють у вигляді плоских паралельних пластин, скручених в рулон (випадок б).

На схемах конденсатор зображують наступним символом



Найбільш практично важливим елементом електричного кола є послідовне з'єднання резистора з конденсатором. Проаналізуємо електричну схему, в якій реалізується наступне з'єднання



Таку схему з'єднання називають *інтегруючим* RC-ланцюгом. Нехай в деякий момент часу $t = 0$ напруга на вході миттєво набуває значення U_i . Визначимо, яким чином буде змінюватись напруга U_o на виході ланцюга. Після появи на вході напруги конденсатор починає заряджатись. Струм зарядки протікає через резистор R . В будь який момент часу заряд пластин і різниця потенціалів між ними пов'язані через ємність. Знаходячи похідну по часу від обох частин цього співвідношення, ми отримаємо миттєве значення струму зарядки конденсатора

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_o}{dt}$$

В наведеному виразі враховано, що різниця потенціалів між пластинами конденсатора дорівнює напрузі на виході ланцюга. Згідно із законом Ома різниця потенціалів на резисторі

$$U_R = IR = RC \frac{dU_o}{dt}$$

Напруга на вході ланцюга- це сума різниць потенціалів між виводами резистора і конденсатора. Отже

$$U_i = U_R + U_o = RC \frac{dU_o}{dt} + U_o \quad (*)$$

Для визначення закону, за яким буде змінюватись з часом напруга на виході після появи напруги на вході, потрібно розв'язати вищенаведене диференціальне рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння

$$RC \frac{dU_o}{dt} + U_o = 0$$

Введемо сталу часу $\tau = RC$ і застосуємо метод розділення змінних

$$\frac{dU_o}{U_o} = -\frac{dt}{\tau}$$

Після інтегрування правої і лівої частин отримаємо

$$U_o(t) = A(t)e^{-t/\tau}$$

Для знаходження повного розв'язку потрібно покласти сталу інтегрування $A(t)$ залежною від t . Підстановка $U_o(t)$ у рівняння (*) приводить до диференціального рівняння відносно невідомого $A(t)$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{U_i}{\tau} e^{t/\tau}$$

Після інтегрування отримаємо для $A(t)$

$$A(t) = U_i e^{t/\tau} + A_0$$

що після підстановки дає

$$U_o(t) = U_i + A_0 e^{-t/\tau}$$

Сталу інтегрування A_0 знаходимо з початкової умови $U_o(t = 0) = U_i + A_0 = 0$. Остаточно знаходимо

$$U_o(t) = U_i (1 - e^{-t/\tau}) \quad (**)$$

Нехай тепер в момент часу $t = T$ вхідна напруга миттєво змінюється від U_i до нульового значення. Це аналогічно ситуації, коли вхідні

виводи закорочено між собою. Після цього конденсатор почне розряджатись через резистор і напруга на виході почне зменшуватись. Оскільки заряд конденсатора зменшується з часом, тоді струм розряду конденсатора визначається виразом

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{dU_0}{dt}$$

Замикання входу означає, що різниця потенціалів між виводами резистора і конденсатора буде однаковою і дорівнюватиме вихідній напрузі U_0

$$U_0 = IR = -CR \frac{dU_0}{dt}$$

Знову вводячи сталу часу $\tau = RC$ та застосовуючи метод розв'язку диференціального рівняння шляхом розділення змінних і інтегрування, отримаємо закон зміни вихідної напруги

$$U_0(t) = A_0 e^{-t/\tau} \quad (***)$$

Для знаходження сталої інтегрування A_0 потрібно прирівняти в момент часу $t = T$ значення вихідної напруги U_0 , які даються виразами (**) та (***)

$$U_0(t = T) = U_i(1 - e^{-T/\tau}) = A_0 e^{-T/\tau}$$

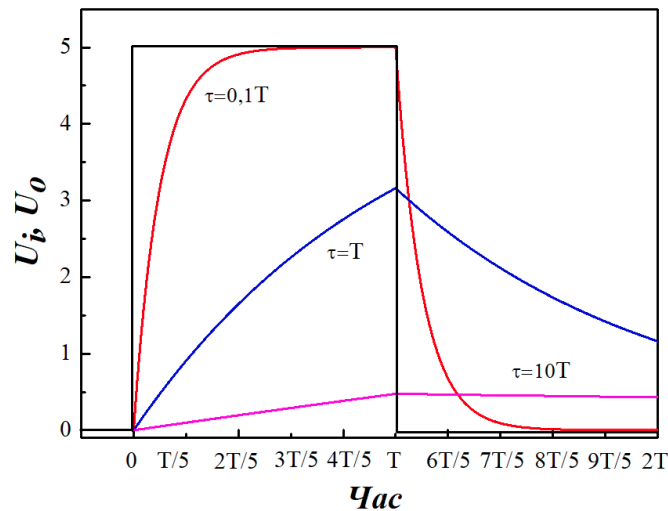
Після підстановки отримуємо вираз для зміни вихідної напруги після перемикання вхідної напруги на нульове значення

$$U_0(t) = U_i(e^{T/\tau} - 1)e^{-t/\tau}$$

Отже узагальнюючи можемо записати закон зміни напруги $U_0(t)$ на виході інтегруючого RC-ланцюга для випадку, коли в момент $t = 0$ на вхід подається одиничний імпульс напруги величиною U_i і тривалістю T

$$U_0(t) = \begin{cases} U_i(1 - e^{-t/\tau}), & 0 < t \leq T \\ U_i(e^{T/\tau} - 1)e^{-t/\tau}, & t \geq T \end{cases}$$

Нижче наведено часові залежності вихідної напруги $U_0(t)$ для трьох співвідношень сталої часу τ та тривалості вхідного імпульса T .



Лише за умови, що тривалість імпульса вхідної напруги набагато перевищує сталу часу $T \gg \tau$, за час тривалості імпульса напруга на виході встигає досягти значення U_i , яке з'являється на вході. При зменшенні тривалості імпульса по відношенню до сталої часу ланцюга, максимальне значення напруги на виході буде зменшуватись. За умови великого значення сталої часу $\tau \gg T$ $U_i \gg U_o$ і з рівняння (*) отримаємо

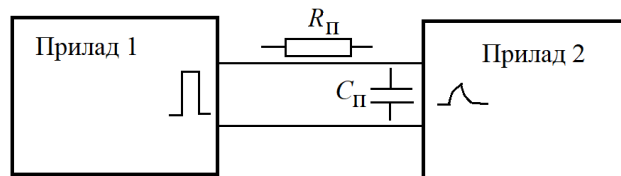
$$RC \frac{dU_o}{dt} = U_i - U_o \approx U_i$$

Проінтегрувавши обидві частини вищенаведеного виразу отримаємо

$$U_o(t) \approx \frac{1}{RC} \int U_i(t) dt + Const$$

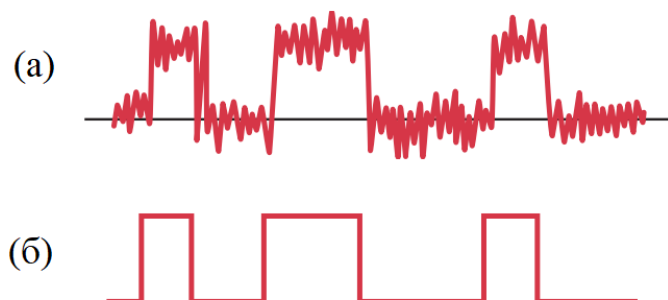
Отже за умов великого значення сталої часу τ відбувається інтегрування вхідного сигналу. Саме завдяки такій поведінці зазначений спосіб з'єднання резистора та конденсатора отримав назву інтегруючого RC-ланцюга.

В реальних електронних інформаційних системах паразитні RC-ланцюги можуть негативно впливати на швидкість передачі інформаційних сигналів між окремими приладами. Розглянемо для прикладу два прилади, між якими по провідникам передається цифрова інформація у вигляді потоку цифрових імпульсів



З'єднувальні провідники завжди мають певний паразитний опір R_{Π} і між ними утворюється паразитна ємність C_{Π} . Отже на шляху передачі сигналу від Приладу 1 до Приладу 2 увімкнено інтегруючий ланцюг зі сталою часу $\tau_{\Pi} = R_{\Pi}C_{\Pi}$. Це означає, що величина імпульсного сигналу, який потрапляє на вхід приймаючого Приладу 2, буде меншою за величину імпульсного сигналу, який передається Приладом 1. В той же час для збільшення швидкості передачі інформації потрібно зменшувати тривалість цифрових імпульсів напруги. Однак при зменшенні тривалості імпульсів по відношенню до сталої часу $\tau_{\Pi} = R_{\Pi}C_{\Pi}$ величина імпульсного сигналу на вході приймаючого приладу також буде зменшуватись. Отже при достатньо коротких цифрових імпульсах величина імпульсного сигналу на вході приймаючого приладу може зменшитись нижче порогового рівня і такий імпульс не буде зафіксовано приймаючим Приладом 2 як корисний сигнал. Таким чином реальні електронні схеми, які використовуються для швидкої передачі цифрових інформаційних сигналів потрібно проектувати для досягнення мінімальних паразитних опорів R_{Π} та ємностей C_{Π} .

Проте зустрічаються випадки, коли в лінії передачі сигналів навмисно створюється інтегруючий RC -ланцюг. Як правило на цифрові сигнали при передачі в електронних схемах часто накладаються шумові флуктуації, які створюються іншими електронними пристроями (випадок *a* на рисунку нижче).

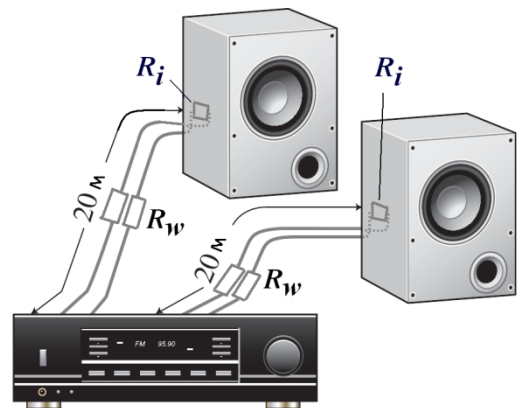


Для виділення сигналу з шумового забруднення саме і застосовується інтегруючий RC -ланцюг. Якщо вибрати сталу $\tau = RC$ достатньо малою порівняно з тривалістю цифрових імпульсів, ланцюг не буде суттєво впливав на величину сигналу. В той же час шумові флуктуації як правило представляють собою хаотичні сигнали, інтегрування яких дає нульове значення. Отже інтегруючий RC -ланцюг виконує роль фільтра, виокремлюючи корисний сигнал з шумового оточення (випадок б на рисунку вище).

Практичні завдання

1. Припустимо ви хочете під'єднати гучномовці до стереосистеми. Кожен з'єднувальний провідник повинен мати довжину $l=20\text{м}$. Якого діаметру потрібно вибрати мідний дріт, аби опір кожного провідника не перевищував $R_w=0,10\text{Ом}$? Якщо струм, який споживається кожним гучномовцем, дорівнює $I=4\text{А}$, якою буде різниця потенціалів (падіння напруги) на кожному зі з'єднувальних провідників?

Розв'язок.



Нехай діаметр дроту d . Тоді площа поперечного перерізу кожного провідника $S = \pi d^2/4$. Застосовуючи вираз для опору провідника з площею поперечного перерізу S та довжиною l отримаємо

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \rho \frac{l}{R_w} \text{ або } d = \sqrt{\frac{4\rho l}{\pi R_w}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,68 \cdot 10^{-8} \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot 20 \text{м}}{3,14 \cdot 0,10 \text{Ом}}} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{м} = 1,04 \text{мм}$$

Питомий опір міді $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8} \text{Ом} \cdot \text{м}$ отримано з довідника.

Коли під'єднуємо гучномовець до стереосистеми, то отримуємо замкнене електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних двох дротів з опорами R_w та внутрішнього опору гучномовця R_i . Якщо на виході стереосистеми створюється різниця потенціалів U , тоді згідно із законом Ома для однорідної ділянки кола та правилом послідовного з'єднання резисторів через з'єднувальні провідники і опір гучномовця буде протікати струм

$$I = \frac{U}{2R_w + R_i}$$

Згідно із законом Ома для однорідної ділянки кола при струмі $I=4\text{А}$ на виводах кожного із з'єднувальних провідників буде створюватись різниця потенціалів (падіння напруги) $U_w = IR_w = 4\text{А} \cdot 0,1\text{Ом} = 0,4\text{В}$.

2. Електронагрівач, який представляє собою намотаний на циліндричний каркас електричний дріт з опором $R=22\text{Ом}$, під'єднується до електромережі з напругою $U=220\text{В}$. Яку потужність споживає такий нагрівач і яку суму доведеться сплачувати енергетичній компанії щомісяця (30 днів), якщо нагрівач використовується щодня протягом 3 годин? Тариф електроенергії для споживача складає $4,32\text{ грн/кВт}\cdot\text{год}$.

Розв'язок.

Згідно і законом Джоуля-Ленца щосекунди нагрівач буде виділяти кількість теплоти Q яка дорівнює споживаній потужності P -кількості електроенергії, спожитої з електромережі щосекунди

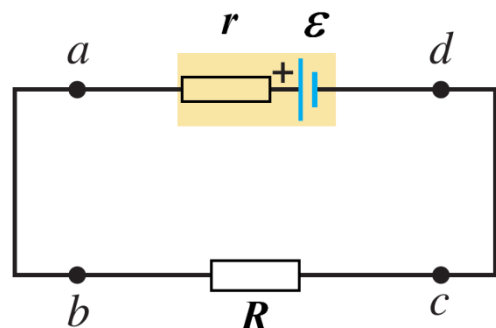
$$Q = P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2 \text{ В}^2}{22 \text{ Ом}} = 2200 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 2200 \text{ Вт} = 2,2 \text{ кВт}$$

Щомісяця такий нагрівач працює протягом $t = 30 \cdot 3 \text{ год} = 90 \text{ год}$ і споживає електроенергію

$$W = P \cdot t = 2,2 \cdot 90 \text{ кВт} \cdot \text{год} = 198 \text{ кВт} \cdot \text{год}$$

Отже за обігрів приміщення споживачу доведеться щомісяця сплатити $198 \text{ кВт} \cdot \text{год} \cdot 4,32 \frac{\text{грн}}{\text{кВт}\cdot\text{год}} = 855,36 \text{ грн}$.

3. В наведеному на рисунку електричному колі ЕРС та внутрішній опір батареї $\varepsilon=12\text{В}$ та $r=1\text{Ом}$, відповідно. Опір резистора, під'єданого до батареї, дорівнює $R=5\text{Ом}$. Знайти різницю потенціалів між точками електричного кола a і c та a і d .



Розв'язок.

Згідно із законом Ома для замкненого кола через батарею та резистор, під'єднаний до батареї, буде протікати електричний струм

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = 2 \text{ A}$$

Між точками a і b відсутній електричний опір, і між ними не буде різниці потенціалів (будуть мати однаковий потенціал). Отже різниця потенціалів між точками a і c буде дорівнювати різниці потенціалів між точками b і c . Згідно із законом Ома для однорідної ділянки кола

$$\varphi_b - \varphi_c = IR = 2 \text{ A} \cdot 5 \text{ Ом} = 10 \text{ В}$$

Оскільки між точками d і c теж відсутній електричний опір, тоді між ними відсутня і різниця потенціалів. Отже різниця потенціалів між точками a і d буде дорівнювати різниці потенціалів між точками b і c .

Проте різницю потенціалів між точками a і d можна також розрахувати скориставшись законом Ома для неоднорідної ділянки кола

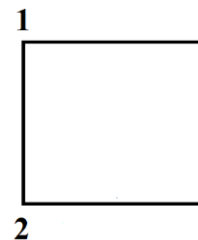
$$\varphi_a - \varphi_d = \varepsilon - Ir = 10 \text{ В}$$

4. Мідний дріт діаметром $d=0,2$ мм і довжиною $l=1,6$ м розрізали на 4 рівних частини які з'єднали паралельно між собою. На скільки при цьому зміниться опір?

Відповідь: $\approx 0,8$ Ом

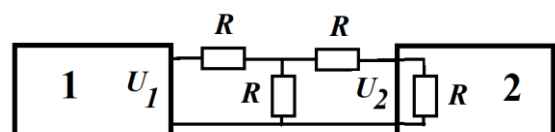
5. Чотири однакових мідних дроти діаметром $d=0,1$ мм і довжиною $l=3,14$ м з'єднано так, як наведено на рисунку. Знайти опір отриманого електричного кола між точками 1 і 2.

Відповідь: 5,04 Ом

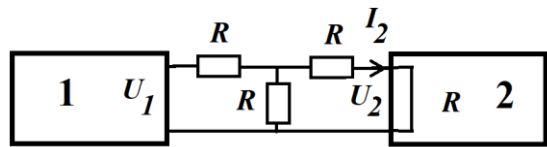


6. На виході приладу 1 виникає різниця потенціалів $U_1=5\text{В}$. Яка різниця потенціалів U_2 встановиться на вході приладу 2, якщо $R=1$ Ом?

Відповідь: 1 В

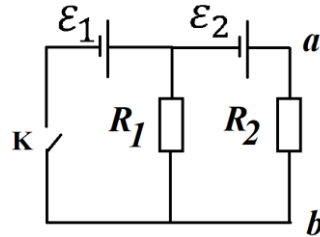


7. На виході приладу 1 виникає різниця потенціалів $U_1=3\text{В}$. Який струм I_2 встановиться на вході приладу 2, якщо $R=10\text{ Ом}$?



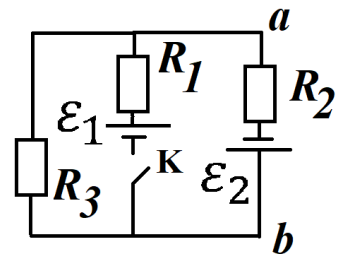
Відповідь: 0,1 А

8. В електричному колі, зображеному на рисунку, замкнули ключ К. Який струм при цьому почне протікати між точками a і b ? $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=1\text{ В}$ та $R_1=R_2=2\text{ Ом}$.



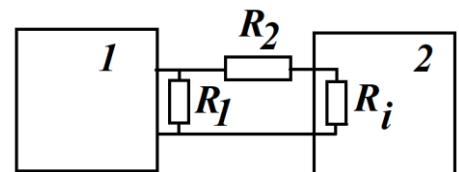
Відповідь: 1 А

9. В електричному колі, зображеному на рисунку, замкнули ключ К. Яка різниця потенціалів при цьому встановиться між точками a і b ? $\mathcal{E}_1=2\text{ В}$, $\mathcal{E}_2=3,5\text{ В}$ та $R_1=R_2=R_3=5\text{ Ом}$.



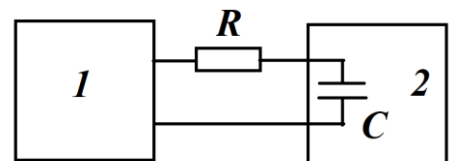
Відповідь: 0,5 В

10. На виході приладу 1 виникає певна різниця потенціалів. Яким повин бути вхідний опір R_i приладу 2, аби виділення теплоти на опорі R_i складало лише 10% від виділення теплоти на опорі R_1 ? $R_1=R_2=10\text{ Ом}$.



Відповідь: $\approx 78,73\text{ Ом}$ або: $\approx 1,27\text{ Ом}$

11. Між виходом приладу 1 та входом приладу 2 внаслідок невдало спроектованого з'єднання паразитні елементи утворюють інтегруючий RC-ланцюг зі сталою часу $\tau=10^{-6}\text{с}$. На виході приладу 1 з'являється сигнал у вигляді одиничного імпульсу напруги $U_1=5\text{ В}$ і тривалістю T . Якою може бути мінімальна тривалість імпульса на виході приладу 1, аби максимальне значення напруги на вході приладу 2 було не меншим за $U_2=3,3\text{ В}$?



Відповідь: $T=\tau \ln(U_1/(U_1 - U_2)) \approx 1,08 \cdot 10^{-6}\text{с}$

8. Фізичні основи передачі інформації в ОПТИЧНИХ ВОЛОКНАХ

Оптичний зв'язок – передача інформації за допомогою електромагнітних хвиль оптичного діапазону. Ідея оптичного зв'язку відома давно, однак лише зі створенням лазерів з'явилася реальна можливість побудови широкосмугових систем оптичного зв'язку.

Застосування волоконно-оптичних ліній забезпечує ряд істотних переваг:

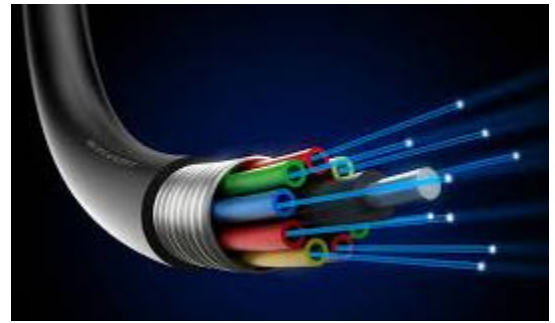
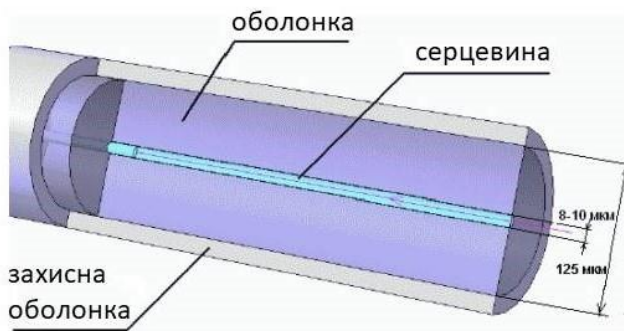
- **Висока пропускну здатність** за рахунок високої несучої частоти, і, отже, можливість передачі великих обсягів інформації з великою швидкістю (швидкістю світла). Теоретична можливість одного оптичного волокна – кілька терабіт інформації за 1 секунду.
- Волоконно-оптичний кабель відрізняється *низьким рівнем шуму*, що позитивно позначається на його пропускну здатності і можливості передавати сигнали різної модуляції.
- Завдяки *малому загасанню* світлового сигналу оптичні системи включають ділянки значної довжини, >100 км, без використання додаткових ретрансляторів (підсилювачів сигналу). При використанні мідної кабельної пари ретранслятори потрібно ставити через кожні кілька кілометрів.
- **Інформаційна безпека.** Волоконно-оптична зв'язок забезпечує надійний захист від несанкціонованого доступу і перехоплення конфіденційної інформації. Така здатність пояснюється відсутністю випромінювань в радіодіапазоні.
- **Висока надійність і стійкість** системи. Волокно, будучи діелектричним провідником, не чутливо до електромагнітних випромінювань, не боїться окислення й вологи.

•**Економічність.** Незважаючи на те, що створення оптичних систем в силу своєї складності дорожче, ніж традиційних кабельних систем, в загальному підсумку їх власник отримує реальну економічну вигоду. Оптичне волокно, яке виготовляється з кварцу, коштує приблизно в 2 рази дешевше мідного кабелю, додатково при будівництві великих систем можна заощадити на підсилювачах. Якщо при використанні мідної пари ретранслятори потрібно ставити через кожні кілька кілометрів, то в ВОЛЗ ця відстань складає не менше 100 км. При цьому швидкість, надійність і довговічність традиційних СКС значно поступаються оптиці.

•**Термін використання** волоконно-оптичних ліній становить по порядку чверті століття. Через 25 років безперервного використання в волокні збільшується загасання сигналу.

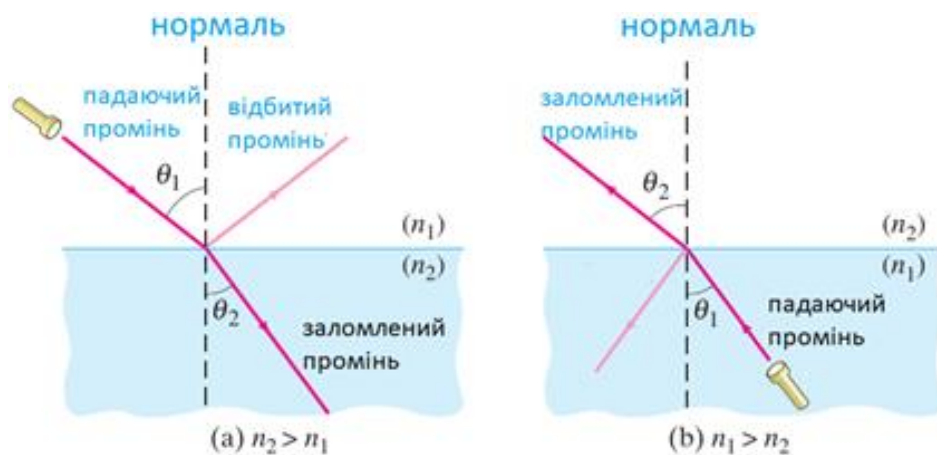
• При однаковій пропускній здатності мідного і оптичного кабелю останній *важить* приблизно в 4 рази *менше*, а його *об'єм* навіть при використанні захисних оболонок буде *менше*, ніж у мідного, в кілька разів.

Оптичні волокна відрізняються за матеріалом виготовлення і по модовою структурі світла. Що стосується матеріалу, розрізняють повністю скляні волокна (зі скляною серцевиною і скляною оптичною оболонкою), повністю пластикові волокна (з пластиковою серцевиною і оболонкою) і комбіновані моделі (зі скляною серцевиною і з пластиковою оболонкою). Найкращу пропускну здатність забезпечують скляні волокна, більш дешевий пластиковий варіант використовують в тому випадку, якщо вимоги до параметрів загасання і пропускну здатності не критичні. Типовий вигляд волокна у перерізі має вигляд:



Ефект повного внутрішнього відбиття світла

Принцип передачі світлового сигналу по оптоволокну заснований на явищі повного внутрішнього відбиття при переході світла з оптично більш щільного середовища в оптично менш щільне. Кут заломлення θ_2 в цьому випадку більший у порівнянні з кутом падіння θ_1 :



При збільшенні кута падіння світлових променів на поверхню розділу двох середовищ настане такий момент, коли переломлений промінь піде уздовж межі розділу двох середовищ, тобто $\theta_2 = 90^\circ$. Цей ефект називають **повним внутрішнім відбиттям** світла.

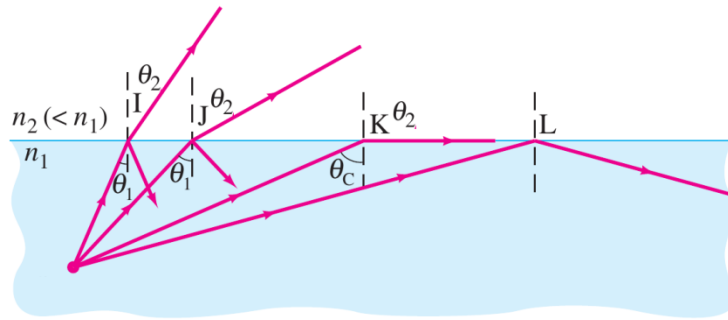
Запишемо закон заломлення:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Видно, що при $n_1 > n_2$ кут падіння θ_1 менший за кут заломлення β ($\theta_1 < \theta_2$). Тоді умова повного внутрішнього відбиття, $\theta_2 = 90^\circ$, подається у вигляді:

$$\sin \theta_{1_{\text{гр}}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Тим самим промені із кутами падіння, більшими за $\theta_{1_{\text{гр}}}$, проходять в оптоволокну, повністю відбиваючись від поверхні світлопровідного шару (промені K і L):



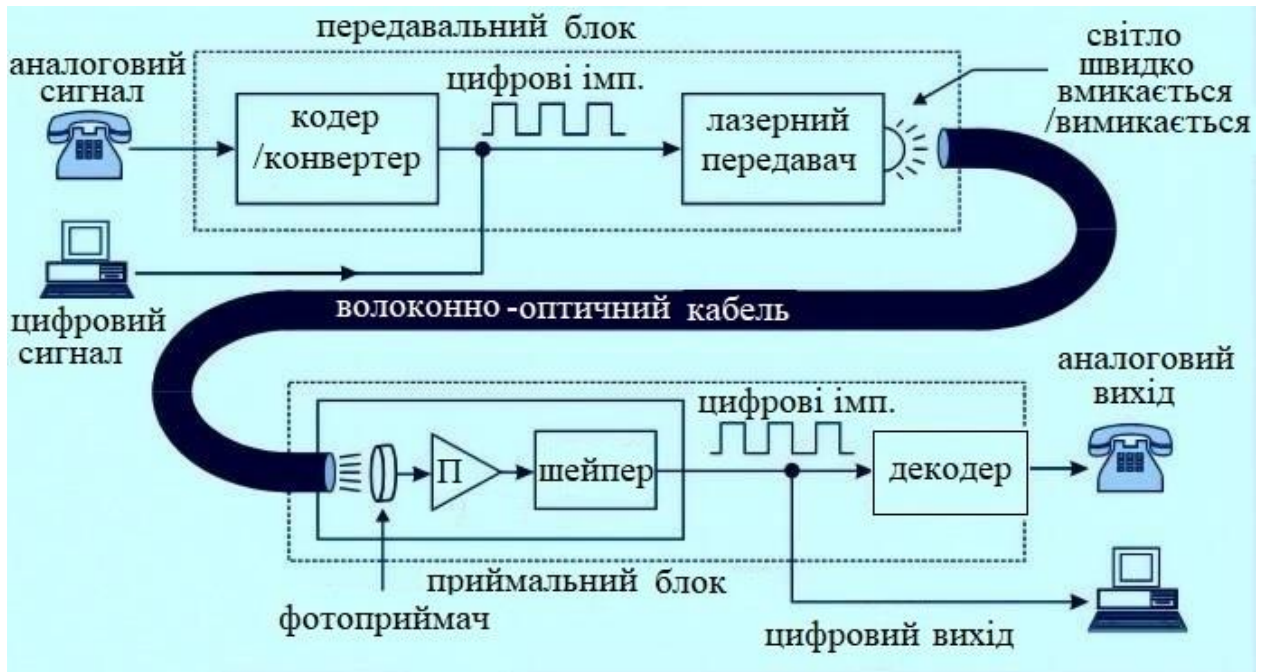
Промені I і J на рис. виходять із серцевини світловода назовні, оскільки спрямовані під великими кутами до його поверхні. Промінь L вийде з циліндричного волокна лише в його торці, багаторазово відбиваючись від стінок світловода на межі поділу серцевина/оболонка.

Зрозуміло, що різні промені із $\theta > \theta_{1_{\text{гр}}}$ пройдуть шляхами різної довжини до вихідного торця світловода. Як наслідок, оптичні імпульси розширюються в часі при поширенні скрізь волокно. При високій частоті проходження імпульсів на певній відстані від джерела випромінювання може виникнути ситуація, коли імпульси почнуть перекриватися в часі (тобто наступний імпульс прийде на вихід оптичного волокна раніше, ніж закінчиться попередній). Це явище носить назву межсимвольної інтерференції. Приймач обробить отриманий сигнал з помилками. Відповідно, зменшиться щільність інформації, що передається кабелем.

Оскільки швидкість світлової хвилі залежить від показника заломлення, $v = \frac{c}{n}$, таке спотворення сигналів можна компенсувати більшою швидкістю світла на периферії циліндру за рахунок зменшення n при віддалення від його осі. Такі світловоди з градієнтним профилем показника заломлення, залежним від радіусу всередині волокна, називають *граданами*.

Волоконно-оптичний зв'язок

Основні елементи волоконно-оптичної системи зв'язку є такими:



Якщо передається аналоговий сигнал, то він спочатку кодується в цифровий вигляд за допомогою спеціальних електронних пристроїв-кодера або конвертера. Далі цифровими імпульсами модулюється світло лазера-передавача: на вході волоконно-оптичного кабелю формуються інформаційні світлові імпульси шляхом швидкого вмикання (цифрова "1") та вимикання (цифровий "0") лазерного передавача. На іншому кінці волоконно-оптичного кабелю інформаційні імпульси світла перетворюються в інформаційні електричні імпульси за допомогою спеціального фотоприймача. Електричні імпульси підсилюються до необхідного рівня широкопasmовим підсилювачем (П) і відновлюються їх стандартний цифровий вигляд за допомогою спеціального електронного пристрою-шейпера. Якщо цифровим сигналом передавався закодований аналоговий сигнал, то він знову декодується в аналоговий за допомогою спеціального електронного пристрою-декодера.

9. Фізичні основи квантової інформації

Базовими поняттями квантової теорії є об'єкти та їх стани. Під квантовими об'єктами зазвичай мають на увазі об'єкти мікросвіту, наприклад, електрони, атоми, молекули, а також світлові пучки у вільному просторі та хвилеводах. Принциповою особливістю квантових об'єктів є їх статистичний характер по відношенню до результатів усіх можливих вимірювань. Детерміністська відтворюваність результатів вимірювань, характерна для класичних об'єктів, у квантовому світі не має місця. Підготовлені за однакових умов квантові частинки демонструють, в загальному випадку, різні результати під час вимірювань. Для опису цього факту в квантовій теорії вводиться поняття стану об'єкта. Стан квантового об'єкта - це список (каталог) можливих результатів вимірювань, що здійснюються над ним.

У квантовій механіці розглядають два стани об'єктів: чисті та змішані. Чисті описують об'єкти, що є незалежними від усіх інших оточуючих їх квантових об'єктів. Математично, чистий стан задається вектором стану (хвильовою функцією), який прийнято записувати в позначеннях Дірака як кет-вектор $|\psi\rangle$. Використовуючи в якості базисних векторів взаємно ортогональні вектори $|i\rangle$, можна подати довільний вектор стану у вигляді лінійної суперпозиції базисних векторів:

$$|\psi\rangle = \sum_{\text{ш}} c_i |i\rangle$$

В роботі Ервіна Шредінгера «Сучасний стан квантової механіки» проаналізовано особливості квантово-механічних процесів та сформульовано чотири основні положення, які характеризують стан квантового об'єкту:

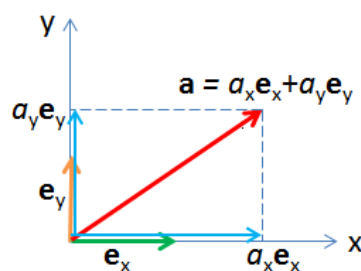
1. Принцип суперпозиції. Стан квантового об'єкту описується лінійною комбінацією базисних станів;

2. Принцип інтерференції. Результат вимірювань залежить від відносних фаз хвильових функцій, що входять до суперпозиційного стану;

3. Сплутаність (entanglement) квантових станів. Повна інформація про стан всієї системи не відповідає такій самій повній інформації про стан її складових частин;

4. Неклонованість та невизначеність. Невідомий квантовий стан неможливо копіювати або спостерігати без його збурення.

У цьому контексті спін електрона математично описується абстрактними векторами стану. Мало того, що при вимірі спіну виявляється у стані власного вектора спінової матриці, до виміру він може описуватись ще складніше. Не можна просто взяти електрон і припустити, що його спін уже описується таким вектором стану. Треба спочатку пропустити його через прилад Штерна-Герлаха або ще якимось способом виміряти спіни. Це називається підготовкою стану. З цього моменту ми можемо застосовувати математичний апарат квантової механіки для прогнозування результатів майбутніх вимірювань, наприклад, підрахувати ймовірність того, що, перебуваючи в стані $|\psi\rangle$ він опиниться в стані $|\varphi\rangle$. Необхідно знайти амплітуду ймовірності $\langle\varphi|\psi\rangle$ та піднести її модуль у квадрат. Дивно, але вектор стану між вимірами може знаходитись не тільки в одному з базисних станів. Він здатний бути в будь-якій суперпозиції цих станів. Таку математику простіше пояснити на прикладі звичайних векторів на площині:



Вектори e_x и e_y – базисні вектори декартової системи координат. Подано їх у такому матричному вигляді:

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Будь-який вектор \mathbf{a} на площині можна подати як суперпозицію (суму) базисних векторів, помножених на відповідну координату a_x та a_y :

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Причому сама координата – це скалярний добуток самого вектора з базисним вектором. Геометрична інтерпретація скалярного добутку – це проекція одного вектора на інший. Проекція на вісь координат, таким чином, і є координатою:

$$a_x = \mathbf{e}_x \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

З векторами стану все відбувається аналогічно. У нас є базисні вектори, наприклад, «спін вгору» $|\uparrow\rangle$ і «спин вниз» $|\downarrow\rangle$. Тільки їх ми можемо одержати при вимірі спина щодо осі z . Але найбільш загальним вектором є суперпозиція:

$$|\psi\rangle = c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle$$

де c_\uparrow і c_\downarrow – компоненти вектора стану (просто числа, загалом комплексні числа). Як і у випадку із звичайними векторами на площині, компонента вектора стану – це скалярний добуток вектора з базисним. Але скалярний добуток у квантовій механіці характеризує амплітуду ймовірності:

$$|\psi\rangle c_\uparrow = \langle \uparrow | \psi \rangle$$

Виходить, що квадрат модуля компоненти вектора стану – це ймовірність виявити при вимірі спін у даному базисному векторі та виміряти власне значення цього вектора. Тобто, в нашому випадку $|c_\uparrow|^2$ – це ймовірність отримати спин «вгору», а $|c_\downarrow|^2$ – «вниз». Оскільки іншого варіанта спінової орієнтації нема, то в сумі ймовірність має дорівнювати 100%, тобто:

$$|c_\uparrow|^2 + |c_\downarrow|^2 = 1.$$

Ця формула відповідає так званому нормуванню вектора стану. Вона може бути узагальнена на випадок, якщо компонент вектора більше, ніж дві. Наприклад, вектор стану, поданий у вигляді

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

свідчить, що при вимірі спіна відносно осі z 50% виявляться зі спином "вгору", а 50% – зі спином "вниз".

Відзначимо, що спін електрона є однією з фізичних реалізацій кубіту: квантовомеханічної системи з двома станами (**квантовий біт**, quantum bit, qubit, кубіт). Якщо позначити орієнтацію "вгору" за "1", а "вниз" – за "0", отримаємо цей кубіт. Тут можна інтуїтивно зрозуміти відмінності та «вбудований паралелізм» квантових комп'ютерів: класичний біт не може, на відміну від квантового, знаходитися в суперпозиції нуля та одиниці.

Сплутані стани

Зі спином окремо взятого електрона ми практично розібралися. Розглянемо систему із двох електронів, врахувавши виключно їх спін. Здавалося б, якщо спін першого електрона описується вектором стану:

$$|1\rangle = a_1|\uparrow\rangle + b_1|\downarrow\rangle,$$

а спін другого – вектором:

$$|2\rangle = a_2|\uparrow\rangle + b_2|\downarrow\rangle,$$

то обидва одночасно описуються їх комбінацією (тензорним добутком):

$$\begin{aligned} |12\rangle &= (a_1|\uparrow\rangle + b_1|\downarrow\rangle) \otimes (a_2|\uparrow\rangle + b_2|\downarrow\rangle) = \\ &= a_1a_2|\uparrow\uparrow\rangle + a_1b_2|\uparrow\downarrow\rangle + b_1a_2|\downarrow\uparrow\rangle + b_1b_2|\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

Загалом, якісь з коефіцієнтів в останньому виразі можуть дорівнювати нулю. Наприклад, вектор стану системи двох електронів зі спінами, напрямленими у додатному напрямку осі z , описується вектором:

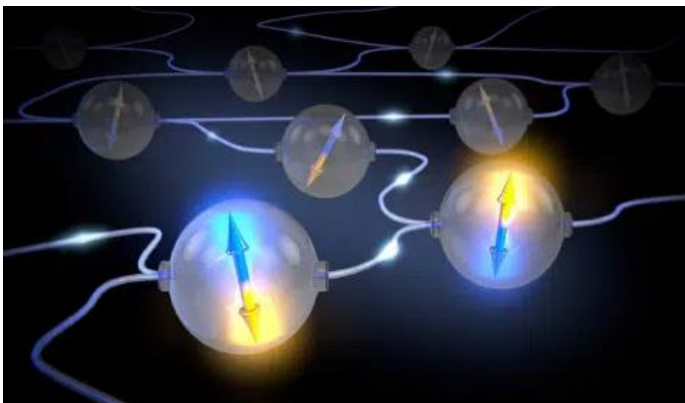
$$|12\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle.$$

Цей вектор стану теж можна уявити вектор-стовпцем, але вже розміром 4×1 . Однак, система з двох електронів може також описуватися таким вектором, який не можна розкласти на добуток незалежних векторів стану, наприклад:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Такий вектор стану відповідає так званому синглетному стану. Електрони, перебуваючи один біля одного, намагаються орієнтувати спини в протилежні боки, що енергетично вигідніше. Тому на енергетичному рівні можуть бути лише два електрони з протилежними спінами (принцип заборони Паулі).

Цей стан – приклад **заплутаного стану** (entangled state). В англійській навіть є іменник – entanglement, який можна перекласти як квантова заплутаність. Явище дуже цікаве і не має класичних аналогів.



Квантова заплутаність

Вектор стану несе в собі повну інформацію про систему (спини двох електронів у нашому випадку). Ми в принципі не можемо знати нічого більшого про систему і водночас у разі синглетного стану ми нічого не можемо сказати про кожен зі спінів окремо. Все, що ми

можемо отримати, – це інформація щодо обох спінів. Якщо визначено, що спін першого напрямлений «вгору», то спін другого обов'язково буде напрямлений «вниз» (відносно тієї ж осі). І навпаки, при вимірі ми отримуємо один із базисних векторів, а в синглетному стані їх лише два.

Тобто в квантовій механіці є ситуації, коли повне знання про систему не передбачає повного знання про її складові. У класичній механіці якщо ми знаємо все про елементарні складові, ми можемо дізнатися, як поведеться система в цілому. Це відомо як редукціонізм – спроба розібрати об'єкт, що досліджується, на якомога менші шматочки і дослідити їх поведінку (від простого до складного). Він працює зі зменшенням розмірів аж до молекул, частково працює також і з атомами, але на субатомних відстанях перестає працювати. Можна показати, що вимірюючи спін одного з електронів пари в синглетному стані, ми завжди отримаємо 50% того, що спін напрямлений «вгору» і 50%, що він напрямлений «вниз». Такого не було, коли ми описували спіни одного електрона. Наприклад, якщо електрон зараз у стані «вгору» відносно осі z , то ймовірність того, що його спін напрямлений «вгору» відносно перпендикулярної осі становить 50%, але відносно початкової осі z ймовірність виміру спіна з орієнтацією «вгору» залишається 100% (звичайно, до виміру відносно іншої осі). Для електронів у синглетному стані виділеного напрямку немає. Ми нічого не можемо сказати про спін одного з електронів цієї пари крім того, що він абсолютно випадковий.

Ще однією особливістю є те, що кореляції спинів зберігаються на будь-яких відстанях. Або, іншими словами, опис комбінованої системи одним вектором стану зберігається на будь-яких масштабах. Можна взяти два електрони в синглетному стані і рознести їх на різні кінці всесвіту і все одно, якщо ми виміряємо спін відносно будь-якої осі і отримаємо, наприклад, орієнтацію "вгору", то ми відразу дізнаємося, що інший спін відносно цієї ж осі буде орієнтований "вниз". Таким чином, вектори спіна нікуди не спрямовані до виміру, а після виміру

заплутаний стан руйнується і ми потрапляємо до одного з базисних векторів.

Можна провести аналогію із класичними статистичними кореляціями. Візьмемо червону та зелену кульки, перемішаємо їх у себе за спиною і візьмемо по одному в кожну руку. Тепер якщо ми подивимось, яка кулька опинилась у правій руці, наприклад, зелена, то ми відразу ж, не дивлячись, дізнаємося, що в лівій руці буде червона кулька. Особливістю квантової механіки є те, що, на відміну від кольору кульки, до вимірювання спінів не визначено (він нікуди не був спрямований). Вісь вимірювання ми теж можемо вибрати абсолютно довільно – будь-який з нескінченно можливих кутів. І тільки-но спин став визначений тут, він миттєво став визначений і на іншому кінці всесвіту.

Однак передавати інформацію швидше за швидкість світла цей ефект все одно не дозволяє. Необхідно передати інформацію про напрямок обраної осі та результат свого вимірювання щоб передбачити результат на іншій стороні. Без цієї інформації результати виміру спіна з орієнтацією «вгору» або «вниз» одного електрона є абсолютно випадковими.

Дані квантовомеханічні кореляції (заплутані стани) вводили в оману багатьох, зокрема Ейнштейна. Наприклад, відомий парадокс Ейнштейна-Подільського-Розена був покликаний показати, що об'єктивна реальність все ж таки існує. Якщо, наприклад, в результаті розпаду однієї частинки виходять дві частинки, що розлітаються в протилежні боки, то Ейнштейн запропонував виміряти координату першої і імпульс (швидкість) другої. І із закону збереження імпульсу побічно обчислити імпульс першої частинки. Таким чином, визначивши і координату, і швидкість, ми повернемося в класичний світ з траєкторіями і завжди строго певними величинами. Але це не відбувається. Він не враховував, що ці дві частинки знаходяться в заплутаному стані, описуються одним вектором стану, і дії з однієї впливають на іншу.

Дійсно, якщо система перебуває у заплутаному стані, то вимір в одному місці впливає на результат виміру в іншому. Як ми з'ясували всю справу в тому, що вони описуються єдиним вектором стану (навіть якщо частинки просторово розділені), який не можна розкласти на два незалежні. У класичній механіці просторово розділені об'єкти можна розглядати незалежно. У квантовій механіці немає – тут інтуїція знову підводить.

Можна порівняти експеримент із спробою одночасно дізнатися спін у напрямку z та перпендикулярному напрямку y (нехай навіть і побічно). Це неможливо. Властивості систем у заплутаному стані забороняють навіть непрямі вимірювання одночасно не комутувальних величин. Мало того, що вони не існують до виміру, то їх ще й виміряти одночасно не можна. Вимірювання однієї властивості затирає (робить неактуальною) інформацію про інше. Це може бути і пара величин «спін X »-«спін Y », і «координата»-«імпульс», і будь-яких інших величин, чий оператори не комутують.

Квантовий біт

В класичних комп'ютерах фундаментальною одиницею інформації є класичний біт, який може приймати значення 0 або 1. Для представлення набору таких бітів комп'ютер містить набір відповідних фізичних систем, кожна з яких може знаходитись в одному з двох фізичних станів, які легко відрізнити один від одного, та які асоціюються зі значеннями 0 та 1 абстрактного біта, котрий дана система представляє. Такою фізичною системою може бути, наприклад, магніт, намагніченість якого орієнтована в двох різних напрямках: вгору (0) та вниз (1).

За аналогією з класичним комп'ютером, що оперує послідовністю класичних бітів, квантовий комп'ютер оперує послідовністю квантових бітів. Таким чином, фундаментальною одиницею інформації в квантових інформаційних системах є квантовий біт або скорочено

кубіт. Для представлення кубіта може бути використана деяка квантова система з двома стійкими станами. Для реалізації кубітів використовують багато різноманітних фізичних систем. Можливі способи фізичної реалізації кубіта: дві різні поляризації фотона, напрямки ядерного спіну в однорідному магнітному полі, стан електрона в одиночному атомі або йоні. В моделі атома електрон може існувати або в основному ($|0\rangle$), або в збудженому ($|1\rangle$) станах. Опромінюючи атом світлом з певною енергією, можна здійснювати переходи між цими станами.

Зазвичай кубіти розглядають як абстрактні математичні об'єкти. Такий підхід є зручним для побудови загальної теорії квантових обчислень та квантової інформації, оскільки виключається залежність від конкретної системи, що використовується для її реалізації. Аналогічно до класичного біту, кубіт також має стан. Двома можливими станами кубіта є стани $|0\rangle$ та $|1\rangle$, які відповідають станам 0 та 1 класичного біта. Суттєва відмінність кубіта від класичного біта полягає в тому, що кубіт може знаходитись у стані, що відрізняється від $|0\rangle$ або $|1\rangle$.

Як вже зазначалось, можна створити лінійну комбінацію станів, яка є суперпозицією:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Числа α та β є комплексними, причому $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Таким чином, стан кубіта являє собою вектор у двовимірному комплексному векторному просторі. Спеціальні стани $|0\rangle$ та $|1\rangle$ називають станами обчислювального базису, які утворюють ортонормований базис цього векторного простору.

Можна виміряти біт, щоб визначити стан, в якому він знаходиться. Наприклад, комп'ютери роблять це кожного разу, зчитуючи вміст своєї пам'яті. Проте ми не можемо виміряти кубіт, щоб визначити його квантовий стан $|\psi\rangle$. Квантовий біт може приймати нескінченно багато значень, проте як результат вимірювань ми можемо отримати

або стан $|0\rangle$ з імовірністю $|\alpha|^2$, або стан $|1\rangle$ з імовірністю $|\beta|^2$. Цей розрив між спостережуваним станом кубіта та доступними нам спостереженнями лежить в основі квантових обчислень та квантової інформації.

У випадку системи з двох класичних бітів може існувати чотири можливі стани: 00, 01, 10 та 11. За аналогією, для системи двох кубітів маємо чотири стани обчислювального базису, а саме $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$. Для опису квантового стану такої системи слід кожен стан обчислювального базису співставити з комплексним коефіцієнтом, який називають іноді амплітудою. Вектор стану для такої системи матиме вигляд:

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

Подібно до випадку одиночного кубіта, амплітуди в цьому виразі визначають імовірність знайти систему в одному з чотирьох базисних станів в результаті вимірювання. Отже, необхідним є виконання умови нормування амплітуд:

$$\sum_{i,j=0}^1 |c_{ij}|^2 = 1$$

Для системи з двох кубітів є можливість вимірювання стану лише одного кубіта, наприклад, першого. Тоді імовірність знайти перший кубіт в стані $|0\rangle$ дорівнює $|c_{00}|^2 + |c_{01}|^2$, а система під час вимірювання переходить до стану:

$$|\psi'\rangle = \frac{c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle}{|c_{00}|^2 + |c_{01}|^2}$$

Важливим прикладом двохкубітного стану є стан Белла або ЕПР пара (сплутаний стан):

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Цей стан відіграє ключову роль в квантовій телепортації та надщільному кодуванні. Під час вимірювання першого кубіта можливі два результати: 0 з імовірністю $\frac{1}{2}$ та кінцевим станом $|\psi'\rangle = |00\rangle$, та 1 з імовірністю $\frac{1}{2}$ та кінцевим станом $|\psi''\rangle = |11\rangle$. Внаслідок цього, вимірювання другого кубіта дає той самий результат, що й вимірювання першого, тобто дані вимірів є корельованими. Ця кореляція зберігається й під час виконання операцій над кубітами, що входять до ЕПР пари.

Таким чином, стан багатокубітної квантової системи можна представити у вигляді:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} z_i |i\rangle, \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} z_i = 1$$

Література

Вакарчук І.О. Квантова механіка – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2012.

Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка – Київ: Вища школа, 1993.

Карбованець М.І., Лазур В.Ю., Нодь Є.А. Практикум з квантової механіки. – Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2022.

Карлаш Г.Ю. Квантові інформаційні системи. – Київ: факультет радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2018.

Кучерук І.М., Дущенко В.П. Загальна фізика: Оптика. Квантова фізика. Київ – Вища школа, 1991.

Федорченко А.М. Квантова механіка, термодинаміка і статистична фізика. — К.: Вища школа, 1993.