Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК З РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ДО КУРСУ “ПРИСКОРЮВАЧІ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК”

ДЛЯ СТУДЕНТІВ КАФЕДРИ ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ВИСОКИХ ЕНЕРГІЙ ФІЗИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Київ

2025

Методичний посібник з розв'язку задач до курсу "Прискорювачі заряджених частинок" для студентів кафедри ядерної фізики та високих енергій фізичного факультету /: О.А.Безшийко, Л.О.Голінка-Безшийко, І.М.Каденко,– К. : 2025.- 72 с.

Рецензенти: В.А. Кушнір, д-р фіз.-мат. наук, с.н.с,
О.О. Парлаг, канд. фіз.-мат. наук, с.н.с

Затверджено
Вченою радою фізичного факультету
__ квітня 2025 року

Навчальне видання

Методичний посібник з розв'язку задач до курсу "Прискорювачі заряджених частинок" для студентів кафедри ядерної фізики та високих енергій фізичного факультету.

Безшийко Олег Анатолійович
Голінка-Безшийко Лариса Олександрівна
Каденко Ігор Миколайович

Передмова

Методичний посібник з розв'язку задач до курсу "Прискорювачі заряджених частинок" для студентів кафедри ядерної фізики та високих енергій фізичного факультету підготовлено з метою як розвинення вмінь розв'язувати задачі з цього курсу, так і для кращого закріплення лекційного матеріалу, а також для отримання навичок застосування теоретичних знань для вирішення практичних завдань. Серед задач є як і класичні, що необхідні для розуміння базового матеріалу, так і оригінальні приклади для опанування особливостей сучасних прискорювачів і установок, а також розвинення критичного мислення та аналізу в тому числі неочікуваних даних. В прикладах розв'язку задач необхідно спочатку отримувати аналітичні вирази із детальним виведенням, а потім підставляти конкретні числа для отримання кінцевого результату. Зверніть увагу на те, щоб уникати стандартних студентських недоліків при розв'язку задач, а саме: розв'язування проводити в одній системі одиниць (як правило – це система SI), інакше є висока ймовірність виникнення важко помітних помилок; не пропускати проміжних дій як при отриманні аналітичних виразів, так і при проведенні обчислень, уникати роботи в «думках», що теж може призвести до частих помилок; обов'язково перевіряти розмірності отриманих результатів (в наведених прикладах це зроблено для більшості розв'язків), такі додаткові перевірки є необхідними для підвищення надійності розрахунків.

Для кожної задачі надано розділ «Вхідні енциклопедичні дані». Ці дані часто використовуються в розв'язуванні практичних задач, хоч і не вказуються як вхідні дані задачі. Конкретний викладач може вимагати або запам'ятати ці величини (всі чи частину), або надаватиме довідники для знаходження даних в них, ми рекомендуємо їх запам'ятовувати.

Вступ

Прискорювачі частинок бувають різних форм і використовують різні технічні принципи. Всі вони засновані на взаємодії електричного заряду зі статичними і динамічними електромагнітними полями, і саме технічна реалізація цієї взаємодії призводить до різних типів прискорювачів частинок. Електромагнітні поля використовуються у більшості доступних частотних діапазонів - від статичних електричних полів до змінних магнітних полів у бетатронах, що коливаються на частоті 50 або 60 Гц, і радіочастотних полів у діапазоні від МГц до ГГц, а також останні роки успішно досліджуються ідеї використання лазерних променів для генерування прискорення частинок.

Основні компоненти прискорювальних установок

Ми коротко опишемо компоненти прискорювачів, щоб ввести термінологію і загальні характеристики. Прискорювачі частинок складаються з двох основних блоків: джерела частинок або інжектора і головного прискорювача. Джерело частинок включає в себе всі компоненти для генерації пучка потрібних частинок.

Зазвичай різні типи іонних джерел використовуються для створення пучків протонів або іонів, які на початкових етапах розвитку прискорювальної техніки прискорювалися в електростатичних прискорювачах, таких як прискорювач Ван де Граафа [1] або Кокрофта-Уолтона [2], а в подальшому почали широко використовуватися лінійні прискорювачі різних типів [3-8]. Для збільшення енергії пучків важких іонів початково однозарядні іони після деякого прискорення можуть пропускатися через тонку металеву фольгу, щоб відірвати від іонів більше електронів. Для досягнення максимальної іонізації для найефективнішого прискорення може використовуватися більше однієї стадії відриву при різних енергіях.

Для створення антипротонів потрібно застосовувати набагато складніші методи. Зазвичай пучок протонів високої енергії спрямовують на мішень з важкого металу, де через адронну взаємодію з матеріалом мішені, серед інших частинок, генеруються антипротони. Виходячи з мішені, ці антипротони збираються потужними фокусуючими пристроями і далі прискорюються.

Електрони зазвичай генеруються з нагрітого катода, який також називають термоелектронною гарматою, на поверхню якого наносять спеціальні лужні оксиди або будь-яку іншу речовину з низькою роботою виходу для випромінювання електронів при технічно практичних температурах. Інший метод створення великої кількості електронів протягом короткого імпульсу використовує сильний лазерний імпульс, спрямований на поверхню фотокатода. Системи, в яких катод вставляється безпосередньо в прискорююче радіочастотне поле, називаються радіочастотними гарматами. Позитрони створюються так само, як і антипротони, шляхом спрямування електронів високої енергії на мішень з важкого металу, де завдяки електромагнітній зливі та утворенню пар генеруються позитрони. Ці позитрони знову збираються сильними магнітними полями і далі прискорюються.

Яким би не був метод генерації частинок, загалом вони не мають часової структури, потрібної для подальшого прискорення або спеціального застосування. Ефективне прискорення радіочастотними полями відбувається лише протягом дуже короткого періоду за цикл коливань, і більшість частинок буде втрачено без належної підготовки. Для досягнення високої щільності пучка бажано стиснути безперервний потік частинок з джерела йонів в більш короткий імпульс за допомогою подрібнювача і/або пребанчера. Подрібнювач може бути механічним пристроєм або відхиляючим магнітним чи радіочастотним полем, що переміщує безперервний пучок через отвір щілини. На виході з подрібнювача ми спостерігаємо серію імпульсів пучка, які називаються пучками, що підлягають подальшій обробці в пребанчері. Тут ранні частинки в пучку сповільнюються, а пізні прискорюються. Після чітко визначеного простору дрейфу довжина пучка зменшується через енергетичну залежність швидкості частинок. Очевидно, що це стиснення працює лише доти, доки частинки не є релятивістськими, а швидкість частинок може модулюватися прискоренням або сповільненням.

Для античастинок таке стиснення не потрібне, оскільки вони утворюються високоенергетичними частинками з відповідною часовою структурою. Пучки античастинок, що вилітають з мішені, мають, однак, великий розмір пучка і розходження пучка. Щоб зробити їх придатними для подальшого прискорення, їх зазвичай зберігають протягом деякого часу в охолоджувальному або демпфуючому кільці. Такі охолоджувальні кільця є круговими «прискорювачами», в яких частинки не прискорюються, а лише певний час циркулюють. Позитрони, що циркулюють у таких кільцях, швидко втрачають свій поперечний момент і велику розбіжність пучка через випромінювання синхротронного випромінювання. У випадку антипротонів, зовнішні поля застосовуються для зменшення розміру поперечного пучка або вони циркулюють проти сильного пучка електронів, що обертаються протилежно, втрачаючи поперечний імпульс через розсіювання.

Античастинки не завжди генеруються у великих кількостях. З іншого боку, прискорювач перед мішенню перетворення часто може видавати імпульс зі значно більшою частотою, ніж основний прискорювач може прийняти. У таких випадках античастинки збираються з інжектора швидкого циклу в кільце-акумулятор, а потім передаються в основний прискорювач, коли це необхідно.

Підготовлені таким чином пучки частинок тепер можна прискорювати в лінійних або кільцевих прискорювачах. Лінійний прискорювач складається з лінійної послідовності багатьох прискорювальних блоків, де прискорювальні поля генеруються і синхронізуються таким чином, що частинки поглинають і накопичують енергію від кожного прискорювального блоку. Найчастіше лінійні прискорювачі складаються з серії порожнин, які збуджуються радіочастотними джерелами до високих прискорюючих полів. В індукційному прискорювачі кожен прискорювальний блок складається з трансформатора, який генерує від зовнішнього електричного імпульсу поле на вторинній обмотці трансформатора, яке формується таким чином, що дозволяє прискорювати пучок частинок. Такі індукційні прискорювачі можуть бути оптимізовані для прискорення дуже високих струмів пучка до середніх енергій пучка.

Для дуже високих енергій пучка лінійні прискорювачі стають дуже довгими і дорогими. Таких практичних проблем можна уникнути в кругових прискорювачах, де пучок утримується на круговій траєкторії магнітними полями в поворотних магнітах і проходить повторно на кожному витку через прискорювальні секції, подібні до тих, що в лінійних прискорювачах. Таким чином, частинки отримують енергію від прискорювальних порожнин на кожному повороті і досягають вищих енергій, коли поля в поворотних магнітах підвищуються.

Базові принципи прискорення частинок різного типу подібні, і нам не потрібно розрізняти протони, іони та електрони. Технічно окремі компоненти прискорювача відрізняються більшою чи меншою мірою, щоб пристосуватися до конкретних параметрів пучка, які в основному пов'язані зі швидкістю частинок. Для високорелятивістських частинок відмінності в динаміці пучка зникають. Протони та іони, швидше за все, є нерелятивістськими і тому змінюють швидкість зі збільшенням кінетичної енергії, створюючи таким чином проблеми синхронізації з коливальними прискорювальними полями, які необхідно вирішувати технічними засобами.

Після прискорення в лінійному або кільцевому прискорювачі пучок можна спрямувати на мішень, здебільшого на мішень з рідкого водню для вивчення високоенергетичних взаємодій з протонами мішені. Такі експерименти з фіксованою мішенню домінували в ядерній фізиці та фізиці частинок високих енергій від перших застосувань пучків штучно прискорених частинок в далеких 1970-х роках і досі є цінним інструментом фундаментальних досліджень. Очевидно, що цей метод також використовується у поєднанні з мішенню з важкого металу для виробництва вторинних частинок, таких як античастинки для використання в установках на пучках, що зіштовхуються, і мезонів для фундаментальних досліджень.

Щоб збільшити енергію центру мас для фундаментальних досліджень, пучки частинок спрямовують не на нерухомі цілі, а на зіткнення з іншим пучком. Це одна з головних цілей будівництва установок на пучках, що зіштовхуються, або накопичувальних кільцях. У такому кільці пучки частинок і античастинок інжектуються в протилежних напрямках і зіштовхуються в спеціально спроектованих зонах взаємодії. Оскільки взаємодія між частинками, що обертаються на зустрічних орбітах, відбувається дуже рідко, кільця-накопичувачі спроектовані так, щоб пучки могли циркулювати багато витків з часом життя пучка в кілька годин, щоб дати частинкам достатньо можливостей зіткнутися з іншими частинками, що обертаються на зустрічних орбітах. Звичайно, пучки можуть зустрічно обертатися в тих самих магнітних полях, тільки якщо один пучок складається з античастинок іншого пучка, тоді як для зіткнення нерівноцінних частинок необхідно використовувати два перехресні накопичувальні кільця.

Циркулюючий пучок в кільці накопичувача електронів випромінює синхротронне випромінювання завдяки поперечному прискоренню під час відхилення в поворотних магнітах. Це випромінювання сильно колімоване в прямому напрямку, має високу яскравість і тому становить великий інтерес для фундаментальних і прикладних досліджень, технологій і медицини.

В основному конструкція накопичувального кільця така сама, як і в синхротроні, з деяким коригуванням у технічній реалізації для оптимізації бажаних характеристик прискорення і тривалості життя пучка, відповідно. Інтенсивність пучка в синхротроні, як правило, дуже відрізняється від інтенсивності пучка в накопичувальному кільці. У синхротроні інтенсивність частинок визначається інжектором, і ця інтенсивність набагато менша, ніж бажана в накопичувальному кільці. Тому система інжекції в накопичувальне кільце сконструйована так, щоб можна було накопичувати багато імпульсів пучка з лінійного прискорювача, кільця-акумулятора або синхротрона. Синхротрон, який служить для прискорення пучка від низькоенергетичного преінжектора до енергії інжекції основної установки, яка може бути більшим синхротроном або накопичувальним кільцем, також називається бустерним синхротроном або скорочено бустером.

Хоча накопичувальне кільце не використовується для прискорення частинок, часто трапляється, що накопичувальне кільце будується задовго до інжекторної системи і для більшої енергії пучка, ніж інжекторна система. В цьому випадку пучок накопичується з максимально доступною енергією інжектора. Після накопичення енергія пучка повільно підвищується в накопичувальному кільці до проектної енергії шляхом простого збільшення сили поворотних і фокусуючих магнітів.

Електронно-позитронні накопичувачі відіграли велику роль у фундаментальних дослідженнях високих енергій [11]. Однак для ще вищих енергій зіткнень втрата енергії через синхротронне випромінювання стала практичним і економічним обмеженням. Щоб уникнути цього обмеження, пучки з двох протилежних лінійних прискорювачів зіштовхуються при зіткненні з енергіями набагато вищими, ніж ті, що можна отримати в кругових прискорювачах. Щоб відповідати дослідницьким можливостям у кільцях зберігання пучків, що зіштовхуються, такі лінійні колайдери повинні використовувати складні засоби керування динамікою пучка, фокусування і технології, подібні до рентгенівських лазерних систем, що працюють зараз.

Застосування прискорювачів частинок

Прискорювачі частинок в основному відомі своїм застосуванням як дослідницькі інструменти в ядерній фізиці та фізиці частинок високих енергій, які потребують найбільших і найпотужніших установок. Менші прискорювачі, однак, знайшли широке застосування в різноманітних фундаментальних дослідженнях і технологіях, а також у медицині. Широкого використання набули наступні типи прискорювачів:

Прискорювачі електронів/протонів
Іонні прискорювачі/коллайдери

Прискорювачі неперервного пучка
Прискорювач з фіксованою мішенню
Кільця накопичувачів пучків, що зіштовхуються
Лінійні колайдери
Джерела синхротронного випромінювання
Джерела когерентного випромінювання
Лазери на вільних електронах, X-FEL

Лише для ознайомлення наведено довільний і звичайно далеко неповний перелік застосувань пучків заряджених частинок:

Ядерна фізика
Фізика високих енергій
Стерилізація харчових продуктів
Рентгенівська літографія
Фундаментальна атомна та молекулярна фізика
Фізика конденсованих систем
Науки про Землю
Матеріалознавство
Хімія
Молекулярна та клітинна біологія
Фізика поверхні/інтерфейсу
Генерація енергії
Інерційний термоядерний синтез
Селекція реакторного палива
Промисловість
Рентгенографія рентгенівськими променями
Іонна імплантація
Виробництво/розділення ізотопів
Випробування/модифікація матеріалів
Мікрозондування
Голографія
Медицина
Радіотерапія
Медична фізика
Мікрохірургія з настроюваним ФЕЛ
Стерилізація

Цей список аж ніяк не є вичерпним, з кожним роком він розширюється з шаленою швидкістю, оскільки якість і характеристики пучків частинок стають все більш досконалими, передбачуваними і керованими. Покращення будь-якого параметра пучків частинок створює можливості для нових експериментів і застосувань, які раніше були неможливі.

Визначення. Одиниці виміру та розмірності

Динаміка пучка частинок може бути сформульована в різних одиницях, і тому доцільно визначити одиниці, які можуть використовуватися.

Для кількісного визначення фізичних констант у фізиці прискорювачів найчастіше використовують набір спеціальних фізичних одиниць, обраних насамперед для зручності. Використання багатьох таких одиниць часто визначається радше історичним розвитком, ніж базується на виборі послідовного набору величин, корисних для фізики прискорювачів.

Зазвичай теорія фізики прискорювачів формулюється в метричній mks-системі (одиницях СІ), якої ми дотримуємося і в цьому тексті. Для вимірювання енергії заряджених частинок одиниця Джоуль насправді використовується дуже рідко. Основною одиницею енергії у фізиці прискорювачів частинок є електрон-вольт (еВ), який є кінетичною енергією, яку набуває частинка з однією базовою одиницею електричного заряду *e* при прискоренні між двома провідними пластинами при різниці потенціалів 1 В. Тому 1 еВ еквівалентний $1{,}60217733\text{x}10^{-19}$ Дж. Зокрема, ми часто будемо використовувати похідні від основних одиниць, щоб виразити фактичну енергію частинок у зручній формі:

1 keB = 1000 eB; 1 MeB = 10^6 *eB; 1 GeV =* 10^9 *eB; 1 TeB =* 10^{12} *eB*

Для опису динаміки частинок нам доводиться іноді використовувати імпульс частинки, а іноді її енергію. Дія сили Лоренца з боку електричного або магнітного полів обернено пропорційна імпульсу частинки. Прискорення в радіочастотних полях, з іншого боку, найзручніше вимірювати збільшенням кінетичної або повної енергії.

Для спрощення технічного жаргону, що використовується у фізиці прискорювачів, термін енергія використовується для всіх трьох величин, хоча математично імпульс потім множиться на швидкість світла для узгодженості розмірностей. Існують ще числові відмінності, які треба враховувати для всіх, крім дуже високорелятивістських частинок. Там, де нам потрібно згадати чистий імпульс частинки і вказати числове значення, ми зазвичай використовуємо повну енергію, поділену на швидкість світла з одиницею еВ/с. За такого визначення частинка з енергією 1 еВ матиме імпульс $p = 1$ еВ/с.

Додаткове ускладнення виникає у випадку складних частинок, таких як важкі іони, що складаються з протонів і нейтронів. У цьому випадку енергія частинки вказується не для всього іона, а в перерахунку на один нуклон.

Струм пучка частинок зазвичай вимірюється в амперах, незалежно від того, яка загальна система одиниць використовується, але також іноді в термінах загального заряду або кількості частинок. Тоді струм - це сумарний заряд Q, що проходить через точку за час t: Залежно від тривалості часу ми отримуємо миттєвий струм або деякий середній струм. Тому визначення струму частинок вимагає також визначення часової структури пучка. Наприклад, у кільцевих прискорювачах середній струм пучка I безпосередньо залежить від інтенсивності пучка або кількості циркулюючих частинок N.

Магнітні поля вказуються або в Теслах, або в Гаусах. Аналогічно, градієнти поля та вищі похідні виражаються в Теслах на метр або в Гаусах на сантиметр. Часто виникає потреба виконати чисельні розрахунки з параметрами, заданими в різних одиницях.

№1.

Максимальний радіус кривизни траєкторії частинки в циклотроні R=0,5 м. Магнітна індукція поля D=1 Тл. Яку постійну різницю потенціалів повинні були пройти протони, щоб отримати таке саме прискорення, як в цьому циклотроні?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1. R= 0,5 м,
2. D=1 Тл,

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Маса протона – m_p =1,6726*10^{-19}кг
2) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = 1.602176565(35)·10^{-19} Кл ≈ 1.6·10^{-19} Кл
3) Заряд електрона q_e=-e
4) $E=qU$ – енергія, яку отримує частинка із зарядом q, яка проходить різницю потенціалів U
5) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія частинка $E_к$ з масою m, що рухається зі швидкістю v

Розв'язок:

Рівняння руху протона в циклотроні в магнітному полі має вигляд:

$m_p\, a_n = \bar{e}VB$ *(1)*

де a_n – нормальне прискорення , V – швидкість протона.

Врахуємо, що

$a_n = \frac{V^2}{R}$.

Якщо виразити з (1) швидкість протона, то отримаємо :

$V = \frac{\bar{e}RB}{m_p}$ (2)

Кінетична енергія E_k протона, що пройшов різницю потенціалів U буде дорівнювати:

$E_k = \bar{e}U = \frac{m_p V^2}{2}$ (3)

Якщо ми врахуємо вираз (2), то можемо отримати для U наступний вираз:

$$U = \frac{\bar{e}\, R^2 B^2}{2m_p} = \frac{1{,}6 * 10^{-19} \ * (0{,}5)^2 * 1^2}{2 * 1{,}6726 * 10^{-27}} = 1{,}196 * 10^7 B$$

Відповідь: Протони повинні пройти постійну різницю потенціалів $U=1{,}196*10^7$В

№2. Однократно йонізований йон гелію He^+ прискорюється в циклотроні так, що максимальний радіус кривизни його траєкторії R=0,5 м. Визначити кінетичну енергію $E_к$ йонів гелію в кінці прискорення, якщо індукція магнітного поля всередині циклотрона B=1 Тл.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) U - різниця потенціалів
2) R=0,5 м
3) B=1 Тл
4) $q= 1{,}6*10^{-19}$ Кл

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) $m_0=6{,}4*10^{-27}$ кг
2) $q= 1{,}6*10^{-19}$ Кл
3) Маса електрона – $m_e = 9.10938291(40)\cdot10^{-31}$ кг ≈ $9.1\cdot10^{-31}$ кг
4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл ≈ $1.6\cdot10^{-19}$ Кл
5) Заряд електрона q_e=-e
6) $E=qU$ – енергія, яку отримує частинка із зарядом q, яка проходить різницю потенціалів U

7) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія частинка Eк з масою m, що рухається зі швидкістю v

Розв'язок:

Кінетична енергія йонів дорівнює

$E_к = \frac{mv^2}{2}$ (1)

Радіус кривизни траєкторії частинки в циклотроні визначається, як

$$R = \frac{m_0\, v^2}{qB} \quad (2)$$

Якщо розв'язати систему (1), (2), то отримаємо шуканий вираз в алгебраїчному вигляді

$$E_к = \frac{(qBR)^2}{2m_0}$$

Аналіз отриманої залежності показує, що для збільшення енергії заряджених частинок в циклотроні необхідно підвищувати індукцію магнітного поля та збільшувати радіус полюсів електромагніту.

Якщо проведемо обчислення, то отримаємо

$$E_к = \frac{(1{,}6 * 10^{-19} * 1 * 0{,}5)^2}{2 * 6{,}4 * 10^{-27}} = 5 * 10^{-13}Дж = 3{,}125 \text{ МеВ}$$

Відповідь:

Кінетична енергія Eк йонів гелію в кінці прискорення становитиме 3,125 МеВ .

№3. Максимальний радіус кривизни траєкторії частинки в циклотроні R = 35 см, частота прикладеної до дуантів різниці потенціалів ν= 13,8 МГц. Необхідно знайти магнітну індукцію B поля, що необхідне для синхронної роботи циклотрона, та максимальну енергію W протонів, що вилітають.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) R = 35 см = 0,35 м
2) ν= 13,8 МГц = $13{,}8\cdot10^6$ Гц

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Маса протона – $m_p = 1.6726\cdot10^{-27}$ кг
2) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл $\approx 1.6\cdot10^{-19}$ Кл
3) $F_л = q * \nu * B * sin\alpha$ – сила Лоренца, що діє на частинка, яка рухається в магнітному полі

Розв'язок:

На частинку, що рухається в магнітному полі, діє сила Лоренца

$$F_л = q * \nu * B * sin\alpha$$

Оскільки частинка рухається по колу, то силова лінія вектора B буде перпендикулярна швидкості, тобто

$$\alpha=90^o$$

$$sin\alpha = 1$$

Сила Лоренца є доцентровою силою

$$F_л = F_ц$$

$$F_л = \frac{mv^2}{R}$$

$$q\nu B = \frac{mv^2}{R}$$

Звідси отримуємо

$$R = \frac{m\nu}{qB}$$

Частота обертання дорівнює частоті перемикання зовнішнього поля

$$V = \frac{\nu}{2\pi R}$$

Тоді для магнітної індукції B поля маємо

$$B = \frac{mv}{qR} = \frac{2\pi RVm}{qR} = \frac{2\pi Vm}{q}$$

Виконаємо обчислення

$$B = \frac{2 * 3{,}14 * 13{,}8 * 10^{6} * 1{,}67 * 10^{-27}}{1{,}6 * 10^{-19}} = 0{,}91 \text{ Тл}$$

$$v = 2\pi RV$$

Максимальна енергія W протонів

$$W = \frac{mv^2}{R2} = 2m\pi^2V^2R^2$$

Виконаємо обчислення

$$W = 2 * 1{,}6710^{-27} * 3{,}14 * (13{,}8 * 10^{6})^2 * 0{,}35^2 = 7{,}69 * 10^{-13}\text{Дж}$$
$$= 4{,}81 * 10^{6}\text{еВ}$$

Відповідь: Магнітна індукція поля B=0,91 Тл.

Максимальна енергія протонів W=7,69*10^{-13}Дж=4,81*10^{6} еВ

№4. В ядерній фізиці прийнято число частинок, що налітають на мішень, характеризувати їх спільним зарядом, що виражається в мікроампер-годинах (мкА·г). Визначити якому числу заряджених частинок відповідає загальний заряд q=1 мкА·г. Розв'язати цю задачу для :

а) електронів;

б)альфа-частинок.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) q = 1 мкА·г = 1·10^{-6}·3600 = 3,6·10^{-3}Кл

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $q_e = 1.602176565(35)\cdot 10^{-19}$ Кл ≈ $1.6\cdot 10^{-19}$ Кл
2) заряд електрона α-частиц по модулю $q_\alpha = 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

Розв'язок:

а) Розглянемо випадок пучка електронів

$$N = \frac{q}{q_e} = \frac{3{,}6 * 10^{-3}}{1{,}6 * 10^{-19}} = 2{,}25 * 10^{16} \text{ електронів}$$

б) У випадку альфа-частинок

$$N = \frac{q}{q_\alpha} = \frac{3{,}6 * 10^{-3}}{2 * 1{,}6 * 10^{-19}} = 1{,}125 * 10^{16} \text{ альфа} - \text{частинок}$$

Відповідь: загальний заряд *q=1 мкА·г* електронного пучка відповідає $2{,}25*10^{16}$ електронів, у випадку альфа-частинок загальний заряд *q=1 мкА·г* відповідає $1{,}125*10^{16}$ альфа-частинок

№5. Розгляньте бетатрон Керста [12] (R=1.23 м), з частотою 60 Гц. Електрони з енергією 50 кеВ інжектуються у бетатрон. Розрахуйте магнітне поле на орбіті та приросту енергії при першому обороті та в момент коли енергія електронів досягне 20 МеВ. Поясніть різницю в зміні енергії за один оборот. Використовуйте лінійне наближення залежності магнітного поля від часу B≈B_0 (ωt+1).

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) R=1.23 м
2) Частота 60 Гц
3) Енергія інжекції електронів 50 кеВ
4) Лінійне наближення залежності магнітного поля від часу B≈B_0 (ωt+1)

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – е = $1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл ≈ $1.6\cdot10^{-19}$ Кл

Розв'язок:

Енергія при якій електрони інжектуються (50 кеВ) є не релятивіською, тому можна скористатися формулою для імпульсу $p = mv$, звідки $v = \frac{p}{m}$. Підставляючи числові значення отримаємо швидкість електронів при інжекції $v_{\text{i}} = \frac{50\text{ кеВ}/c}{511\text{ кеВ}/c^2} \approx 0.097 \cdot c \approx 2.9 \cdot 10^7\text{ м/с}$

З рівняння для магнітної жорсткості $\frac{p}{e} = RB$, отримуємо магнітне поле при інжекції

$$B_{\text{i}} = \frac{p}{eR} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}/(3 \cdot 10^8\text{ м}/c)}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{ Кл} \cdot 1.23\text{ м}} = 1.36 \cdot 10^{-4}\text{Тл}$$

Використаємо формулу для приросту імпульсу $\Delta p = eR\,\Delta B$

Оскільки в умові було сказано вважати залежність магнітного поля від часу лінійною, то можна записати $\Delta p = eRB\omega\Delta t$. Тут ω відповідає частоті роботи бетатрона 60 Гц. Враховуючи співвідношення з формули для магнітної жорсткості, $p = eRB$, тоді можемо записати $\Delta p = p\,\omega\Delta t$.

Оскільки інжектовані електрони не є релятивіськими, то можна виразити приріст енергії через приріст імпульсу наступним чином

$$\Delta E_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(p)^2}{m} \approx \frac{p\,\Delta p}{m} = \frac{p^2\omega\,\Delta t}{m}$$

Розрахуємо час Δt_i за який інжектовані електрони здійснюють один оберт навколо бетатронного кільця.

$$\Delta t_i = \frac{2\pi R}{v_{\text{i}}} = \frac{2\pi \cdot 1.23\text{ м}}{2.9 \cdot 10^7\text{ м/с}} = 2.67 \cdot 10^{-7}\text{с}$$

Тоді, підставляючи числові значення у вираз для приросту енергії на першому обороті після інжекції, отримаємо

$$\Delta E_i = \frac{(50\ \text{кеВ}/c)^2 \cdot 60\ \text{Гц} \cdot 2.67 \cdot 10^{-7}\text{с}}{511\ \text{кеВ}/c^2} = 7.84 \cdot 10^{-2}\text{еВ}$$

Розрахуємо магнітне поле для електронів з енергією 20 МеВ.

$$B_\text{е} = \frac{p}{eR} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}/(3 \cdot 10^8\ \text{м}/c)}{1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 1.23\ \text{м}} = 5.4 \cdot 10^{-2}\text{Тл}$$

При таких енергіях електрони є високорелятивіськими, тому можемо скористатися формулою $E = cp$ та вважати, що їх швидкість є дуже близькою до швидкості світла, тоді

$$\Delta t_\text{е} = \frac{2\pi R}{v_\text{е}} = \frac{2\pi \cdot 1.23\ \text{м}}{3 \cdot 10^8\ \text{м/с}} = 2.58 \cdot 10^{-8}\text{с}$$

Тоді приріст енергії буде

$$\Delta E_e = c\Delta p = cp\omega\, \Delta t = 20\ \text{МеВ} \cdot 60\ \text{Гц} \cdot\ 2.58 \cdot 10^{-8}\text{с} = 30{,}96\ \text{еВ}$$

Приріст енергії (як і імпульсу) збільшується відповідно до формули

$$\Delta p = eRB\omega\Delta t.$$

Оскільки на обороті на якому електрони мають енергію 20 МеВ магнітне поле значно більше, то і відповідно приріст енергії збільшується.

<u>Відповідь:</u>

$B_\text{i} = 1.36 \cdot 10^{-4}\text{Тл}$

$\Delta E_i = 7.84 \cdot 10^{-2}\text{еВ}$

$B_\text{е} = 5.4 \cdot 10^{-2}\text{Тл}$

$\Delta E_e = 30{,}96\ \text{еВ}$

№6. Розрахуйте загальний струм у кожній з двох обмоток бетатрона з радіусом орбіти рівним $\boldsymbol{R = 0.4}$ м, максимальним імпульсом електронів $\boldsymbol{p = 42\ MeV/c}$ та щілиною між полями $\boldsymbol{g = 10}$ см.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) Радіус орбіти $R = 0.4$ м
2) Максимальний імпульсом електронів $p = 42$ MeV/c
3) Щілиною між полями $g = 10$ см $= 0{,}1$ м.

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

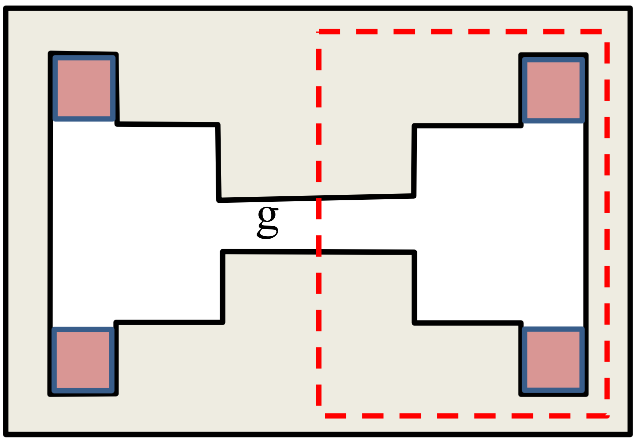
1) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35)\cdot 10^{-19}$ Кл $\approx 1.6\cdot 10^{-19}$ Кл
2) Магнітна стáла $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$

Розв'язок:

Знайдемо магнітне поле, необхідне для того щоб утримувати на орбіті електрони з імпульсом $42\ MeV/c$. З рівняння для магнітної жорсткості маємо $B = \frac{p}{eR}$ підставляючи числові значення отримаємо

$$B = \frac{42 \cdot 10^{6} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}/(3 \cdot 10^{8}\text{м/с})}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 0{,}4\text{ м}} = 0{,}35\text{ Тл}$$

Розглянимо схему бетатрона та проведемо умовний контур вздовж магнітної лінії (на рисунку позначено червоним кольором)



Розділимо контур на частину що знаходиться в феромагнітній частині бетатрона (позначимо C), та частину що у вакуумі (позначимо γ). Розглянемо вектор циркуляції магнітного поля вздовж даного контуру, оскільки ми обрали контур вздовж магнітної лінії, то магнітна індукція залишається сталою за абсолютним значенням, а також абсолютне значення напруженості магнітного поля в межах одного середовища залишається незмінним та виражається через магнітну індукцію за формулою $B = \mu\mu_0 H$. Тоді можемо записати

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{Bg}{\mu_0} + \frac{BL_C}{\mu\mu_0}$$

Оскільки магнітна проникність феромагнетиків є дуже великою $\mu \gg 1$, то можемо знехтувати другим доданком у правій частині рівняння, отже отримаємо

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{Bg}{\mu_0}$$

З іншої сторони, згідно з рівнянням Максвелла

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = 2I$$

де I – струм що протікає в одній котушці бетатрона. Поєднавши два останніх рівняння отримаємо

$$I = \frac{Bg}{2\mu_0}$$

Підставляючи числові значення отримуємо

$$I = \frac{0{,}35\ \text{Тл}\ 0{,}1\ \text{м}}{2 \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}} = 1{,}39 \cdot 10^4 \text{А}$$

Відповідь: Загальний струм у кожній з двох обмоток бетатрона $I = 1{,}39 \cdot 10^4$А

№7. Розрахуйте зміну частоти (у відносних одиницях) потрібну для прискорення протонів чи дейтронів на синхроциклотроні з початкової кінетичної енергії $E_{kin\,0} = 100$ кеВ до кінцевої енергії $E_{kin} = 600$ МеВ. Розглядайте магнітне поле сталим і знехтуйте слабким фокусуванням. Виведіть формулу радіочастоти синхроциклотрона як функцію від кінетичної енергії та намалюйте графік залежності $\frac{f_{rf}}{f_{rf\,0}}$ від кінетичної енергії. Наскільки сильно зміниться частота у випадку прискорення

електронів?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) Початкова кінетична енергія $E_{kin\ 0} = 100$ кеВ
2) кінцева кінетична енергія $E_{kin} = 600$ МеВ.

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Маса електрона – $m_e = 9.10938291(40)\cdot 10^{-31}$ кг $\approx 9.1\cdot 10^{-31}$ кг
2) Маса протона – $m_p = 1.672621777(74)\cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1.7\cdot 10^{-27}$ кг ~ 1 ГеВ
3) Маса дейтрона -$m_d = 3{,}343\ 583\ 20\times 10^{-27}$ кг = 1875,612 82 МеВ ~ 2 ГеВ

Розв'язок:

Мінімальна радіочастота синхроциклотрона задається формулою $f_{rf} = \frac{ZeB}{2\pi\gamma mc}$.

З релятивістських співвідношень маємо формулу для лоренц фактору

$$\gamma = 1 + \frac{E_{kin}}{mc^2}$$

Тоді

$$f_{rf} = \frac{ZeB}{2\pi mc\left(1 + \frac{E_{kin}}{mc^2}\right)}$$

Для відношення частоти до початкової маємо

$$\frac{f_{rf}}{f_{rf\ 0}} = \frac{\left(1 + \frac{E_{kin\ 0}}{mc^2}\right)}{\left(1 + \frac{E_{kin}}{mc^2}\right)} = \frac{(mc^2 + E_{kin\ 0})}{(mc^2 + E_{kin})}$$

Тоді, для даних в умові енергій, зміна частоти у випадку прискорення протонів (масу протона наближено вважаємо 1 ГеВ) буде

$$\left(\frac{f_{rf}}{f_{rf\ 0}}\right)_p = \frac{(1000\ \text{MeB} + 0{,}1\ \text{MeB})}{(1000\ \text{MeB} + 600\ \text{MeB})} = 0{,}625$$

Для дейтрона відповідно матимемо

$$\left(\frac{f_{rf}}{f_{rf\,0}}\right)_d = \frac{(2000 \text{ МеВ} + 0{,}1 \text{ МеВ})}{(2000 \text{ МеВ} + 600 \text{ МеВ})} = 0{,}77$$

Зміна частоти для електронів буде значно помітнішою, оскільки вони мають значно меншу масу.

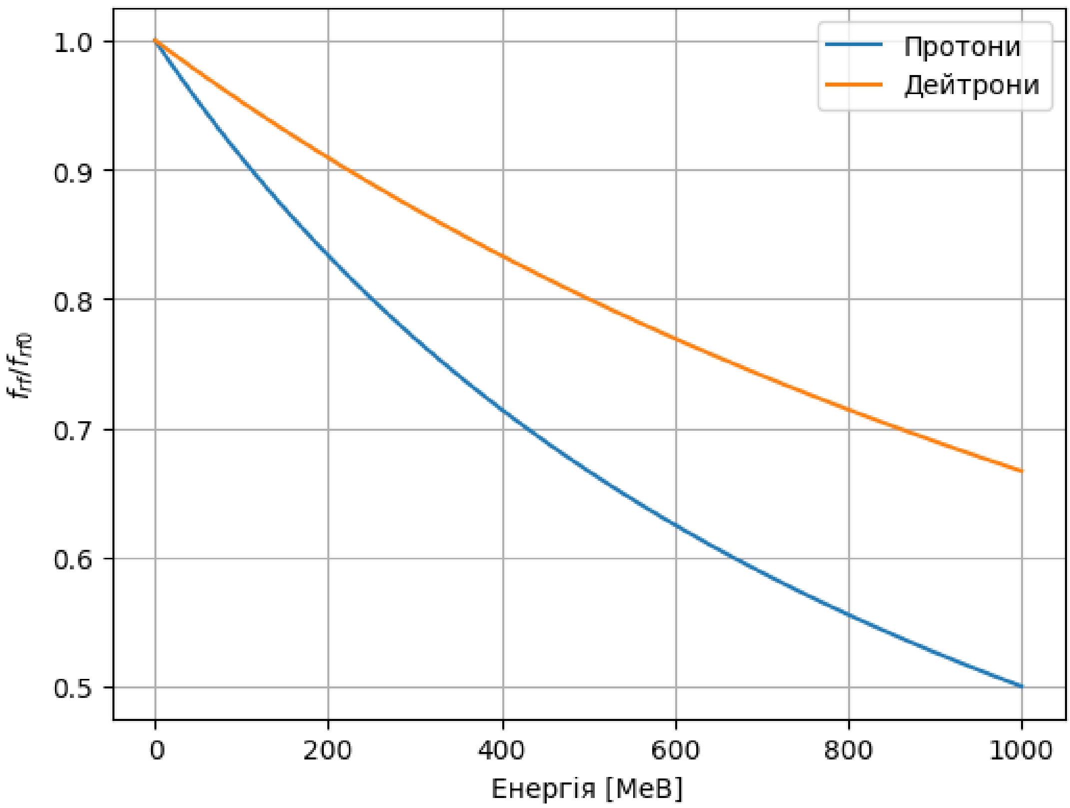
Відповідь: зміна частоти у випадку прискорення протонів

$$\left(\frac{f_{rf}}{f_{rf\,0}}\right)_p = 0{,}625$$

зміна частоти у випадку прискорення дейтронів

$$\left(\frac{f_{rf}}{f_{rf\,0}}\right)_d = 0{,}77$$

Зміна частоти для електронів буде значно помітнішою, оскільки вони мають суттєво меншу масу.



№8. Розрахуйте струм електронного пучка в бетатроні Керста [12] (R =

$\mathbf{1.23}$м), який буде продукувати синхротронне випромінювання потужністю 1 Вт при енергії електронів 300 МеВ.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) Потужність синхротронного випромінювання 1 Вт
2) $\mathrm{R} = 1.23$ м

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Потужність синхротронного випромінювання для електронів може бути розрахована з формулою

$$P[\text{МВт}] = 0.088463\,\frac{(E[\text{ГеВ}])^2}{R[\text{м}]}\,I[\text{А}]$$

Розв'язок:

Виразимо струм з формули

$$I[\text{А}] = \frac{P[\text{МВт}]\cdot R[\text{м}]}{0.088463\cdot(E[\text{ГеВ}])^2}$$

Підставляючи величини у формулу, отримуємо

$$I[\text{А}] = \frac{1\cdot 10^{-6}[\text{МВт}]\cdot 1.23[\text{м}]}{0.088463\cdot(0.3[\text{ГеВ}])^2} = 1.55\cdot 10^{-4}\text{А}$$

<u>Відповідь:</u> Струм електронного пучка в бетатроні Керста

$$I[\text{А}] = 1.55\cdot 10^{-4}\text{А}$$

№9. Розгляньте синхротрон, що прискорює протони до імпульсу $\boldsymbol{p_e} = \mathbf{400}$ ГеВ/$\boldsymbol{c}$ та має довжину кільця $\boldsymbol{L} = \mathbf{6000}$ м. Протони інжектуються з імпульсом $\boldsymbol{p_i} = \mathbf{1}$ ГеВ/$\boldsymbol{c}$. Обчисліть в яких межах буде змінюватися частота синхротрона в процесі прискорення.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) Імпульс $p_e = 400$ ГеВ/с
2) Довжина кільця $L = 6000$ м.
3) Імпульс протонів при інжекції $p_i = 1$ ГеВ/с

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Маса протона – $m_p = 1.672621777(74) \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг = 0,9383 ГеВ
2) Релятивіський вираз для імпульсу $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Розв'язок:

З релятивіського виразу для імпульсу $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ отримуємо вираз для швидкісті через імпульс

$$v = c\frac{pc}{\sqrt{(mc^2)^2+(pc)^2}}$$

Звідки знаходимо швидкість протонів при інжекції

$$v_i = c\frac{10\ \text{ГеВ}}{\sqrt{(0{,}9383\ \text{ГеВ})^2+(10\ \text{ГеВ})^2}} = 298481412\ \text{м/с}$$

А потім знаходимо швидкість протонів після циклу прискорення

$$v_e = c\frac{400\ \text{ГеВ}}{\sqrt{(0{,}9383\ \text{ГеВ})^2+(400\ \text{ГеВ})^2}} = 299791633\ \text{м/с}$$

Частота обертання пучка в кільці

$$f = \frac{L}{v}$$

Тоді маємо

$f_i = \frac{6000\ \text{м}}{298481412\ \text{м/с}} = 2.010785$

$f_e = \frac{6000\ \text{м}}{299791633\ \text{м/с}} = 2.001390$

Як можемо бачити частота коливань майже не змінюється, це пов'язано з тим, що протони вже були релятивістськими при інжекції.

Відповідь: Оскільки протони вже були релятивістськими при інжекції, то частота коливань не змінюється суттєво

$f_{\text{i}} = 2.010785$
$f_{\text{e}} = 2.001390$

№10. Розробіть мікротрон для максимальної енергії електронів $\boldsymbol{E} = \mathbf{25}$ МеВ у магнітному полі $\boldsymbol{B} = \mathbf{0.214}$ Т.

a) Який діаметр траєкторії останнього циклу пучка?

b) Намалюйте схему прискорювача з обмотками магнітів. Висота вакуумної щілини у якій рухається пучок рівна $\boldsymbol{g} = \mathbf{2}$ см. Використовуйте загальний переріз обмотки рівний 5 см²

c) Яка потужність електроенергії споживає кожна обмотка, вважаючи що вона складається з міді на 75 % (інші 25 % складають ізолятори). На вашу думку чи потрібно використовувати водяне охолодження обмотки (для простоти, вважайте що довжина обмотки рівна довжині останнього циклу пучка +10%)?

d) На скільки зміниться споживання електроенергії якщо змінити загальний струм обмотки шляхом зміни кількості витків обмотки котушки електромагніту залишаючи при цьому струм джерела живлення котушки незмінним, при цьому залишаючи 75 % заповнення обмотки міддю.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) ***Максимальна енергія електронів $\boldsymbol{E} = \mathbf{25}$ МеВ***
2) ***Магнітне поле $\boldsymbol{B} = \mathbf{0.214}$ Т.***
3) ***Висота вакуумної щілини у якій рухається пучок $\boldsymbol{g} = \mathbf{2}$ см***
4) ***Загальний переріз обмотки 5 см²***

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = $1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл ≈ $1.6\cdot10^{-19}$ Кл
2) Питомий опір міді $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
3) Загальна сила струму в одній обмотці прискорювача необхідна для створення магнітного поля $I = \frac{Bg}{2\mu_0}$

Розв'язок:

a) З формули для магнітної жорсткості маємо $R = \frac{p}{eB}$. Враховуючи, що при енергії 25 МеВ електрони є релятивістськими, можемо записати

$$p = \frac{E}{c}.$$

Тоді

$$R = \frac{E}{ecB} = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж}}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 0{,}214\text{Т}} = 0{,}39\ \text{м}$$

Діаметр останнього циклу траєкторії $d = 2R = 0.78$ м

b) На рисунку зображена схема мікротрона

c) Нехай у нас є N витків обмотки котушки. Площа поперечного перерізу одного витка буде

$$S_1 = \frac{0.75 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{N} \text{ м}^2,$$

та струм, що протікає через один виток буде

$$I_1 = \frac{I}{N},$$

де I – загальний струм котушки.

$I = \frac{Bg}{2\mu_0} = \frac{0.214 \text{ Т} \cdot 0.02 \text{ м}}{2 \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} = 1698 \text{ А}.$

Довжина котушки (і в наближені, кожного витка) за умовою задачі на 10 % більше за довжину останнього циклу траєкторії пучка,

$$L = 1.1 \cdot 2\pi R = 2.69 \text{ м}$$

Опір одного витка обмотки

$r = \rho \frac{L}{S_1} = 1.68 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м} \frac{2.69 \text{ м}}{0.75 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{м}^2} N = 1.21 \cdot 10^{-4} \text{Ом} \cdot \text{N}$

Тоді потужність енергії що виділяється на одному витку обмотки рівна

$$p_1 = rI^2.$$

Відповідно потужність що виділяється на всій обмотці рівна

$p = NrI^2 = N \cdot 1.21 \cdot 10^{-4} \text{Ом} \cdot \text{N} \cdot \frac{(1698 \text{ А})^2}{N^2} = 348.87 \text{ Вт}.$

Порівнюючи дану потужність з тепловиділенням 100 ватної лампи розжарювання (майже вся енергія якої перетворюється в тепло), та враховуючи що характерний розмір даного мікротрона є порядку 1 метра і виготовлений він з металевих частин (мідна котушка і феромагнітний корпус, який зазвичай виготовляють з магнітної сталі), які є теплопровідними, можемо прийти до висновку що водяне охолодження котушок електромагнітів не є обов'язковим.

d) Оскільки в кінцевому виразі для потужності скорочується кількість витків обмотки електромагніту, потужність не змінюється при зміні кількості витків.

Відповідь:

a) $d = 2R = 0.78$ м

b)

c) $p = 348.87$ Вт

d) Не зміниться

№11. Генератор Ван де Граафа складається з двох ізольованих різнойменно заряджених сфер, кожна з діаметром 60 см. Визначити максимальну можливу різницю потенціалів меж сферами, якщо критична напруженість електричного поля в повітрі, при якій на поверхні сфери виникає коронний розряд – 30000 В/см

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) U - різниця потенціалів
2) Діаметр сфер d = 0.6 м.
3) ***Критична напруженість електричного поля в повітрі,*** $E_{кр}$ = 3000000=3$\cdot 10^6$ В/м

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Напруженість електричного поля на поверхні сфери $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

2) Потенціал зарядженої сфери $U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

3) Електрична стала $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\text{м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$(або ж $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф $\cdot$ м$^{-1}$)

Розв'язок:

З напруженості сфери можемо виразити потенціал для однієї сфери

$$U_{\text{сфер}} = ER \implies U_{\text{сфер}} = E\frac{d}{2} = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}3 = 9 \cdot 10^5 = 900\text{кВ} .$$

Сфери зарядженні різнойменно відповідно і максимальний потенціал

$$U_{max} = 2U_{\text{сфер}} = 1.8\text{МВ}$$

Відповідь:

Максимально можливий потенціал між цими двома сферами

$$U_{max} = 1.8\ M\text{В}$$

№12. Визначити максимальний струм, який можна зняти з Генератора Ван де Граафа, якщо заряд знімається з стрічки живлення колектором, що приєднаний до середини порожнистої сфери, якщо ширина стрічки 125 см, а швидкість її руху 300 см/сек. Вважати що максимальна можлива напруженість електричного поля у поверхні стрічки 30000 В/см.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) U - різниця потенціалів
2) l = 1.25 м - довжина стрічки.
3) v = 3 м/с – швидкість руху стрічки
4) $E_{\text{кр}}$ = 3000000=3$\cdot 10^6$ В/м

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Напруженість електричного поля через поверхневий заряд $E_{\text{кр}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
2) Електрична стала $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2 =$
$= 8{,}85 \cdot \quad 10^{-12}\ \Phi \cdot \text{м}^{-1}$

Розв'язок:

Знаючи ширину стрічки і швидкість її руху можемо представити площу стрічки з якої знімається заряд за одиницю часу $S = lv$. Тоді щоб знайти струм знайдемо поверхневий заряд з напруженості електричного поля:

$$E_{\text{кр}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = E_{\text{кр}}\varepsilon_0 \ \Rightarrow$$

$$I = Sq = lvE_{\text{кр}}\varepsilon_0 = 1.25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} = 99.6\text{мкА},$$

або ж якщо вважати, що заряд можна знімати з обох сторін стрічки то домножимо отримане значення на 2 і отримаємо 199.2мкА

Відповідь:

а)99.6 мкА якщо струм знімається з однієї сторони стрічки.

б)199.2 мкА якщо струм знімається з двох сторін стрічки.

№13. Генератор циклотрона працює з частотою 11 МГц, визначити напруженість магнітного поля необхідну для прискорення α-частинок, дейтронів і протонів. Якою буде енергія частинок в кінці прискорення, якщо максимальний діаметр орбіти дорівнює 100 см?

Вказівка: Зміну масси частинки з енергією не враховувати.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) $f = 11 \cdot 10^6$ *Гц* – частота прискорюючого поля циклотрона
2) $r = 0.5$м – радіус орбіти траєкторії

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца $-\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = 1.602176565(35)·10^{-19} К ≈ 1.6·10^{-19} Кл
5) $T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right|$ – період обертання частинки масою m та зарядом q в циклотроні з рівномірним полем з індукцією B
6) Заряд протона q_p=e
7) c=3·10^8м/с
8) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – зв'язок кінетичної енергії тіла $E_к$ з масою m, яке рухається зі швидкістю v
9) Маси різних частинок в а.о.м:

   протон = 1.007, дейтрон = 2.014 альфа-частинка = 4.002

Розв'язок:

Прискорююче поле циклотрона змінюється з періодом

$$T = \frac{1}{f},$$

цей період дорівнює періоду обертання протона в циклотроні

$$T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m_p}{q_p}\right|.$$

Звідки отримуємо

$$B = 2\pi f\left|\frac{m_p}{q_p}\right|, \text{частота } f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Перейдемо до системи СГС в якій буде дуже зручно проводити розрахунок оскільки $B = H$. Тоді врахувавши масштабування частоти в сгс домножимо знаменник на c і замінимо B на H:

$$f = \frac{qH}{2\pi mc} \Rightarrow H = 2\pi fc\left|\frac{m_p}{q_p}\right|$$

Враховуємо, що формула записана в сгс і переведемо усі одиниці:

$c = 3 \cdot 10^{10}$см/с; 1 а.о.м $= 1.66 \cdot 10^{-24}$г е $= 1.6 \cdot 10^{-19}$Кл $= 4.8 \cdot 10^{-10}$стКл

Для протона:

$$H_p = 2\pi fc\left|\frac{m_p}{q_p}\right| = \frac{2\pi \cdot 11 \cdot 10^6 3 \cdot 10^{10} \cdot 1.007 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24}}{4.8 \cdot 10^{-10}} = 7217 \text{ ерстед}$$

У випадку з дейтроном заряд не змінюється, а маса збільшується в 2 рази, відповідно і напруженість необхідна в два рази більша, ніж для протона. В свою чергу альфа частинка в два рази важча за дейтрон, але і заряд в неї в двічі більший тобто число залишиться тим самим:

$H_d = H_\alpha = 2H_p = 14434$ ерстед

Таким чином отримали частоти необхідні для розгону частинок:

Протон ~ 7200 ерстед

Дейтрон ~ 14400 ерстед

Альфа-частинка ~ 14400 ерстед

Тепер виразимо енергію. На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила Лоренца

$$\overrightarrow{F_L} = q \cdot (\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \ .$$

За умовами задачі напруженість електричного поля $\vec{E}$ відсутня. Рух по колу означає, що частинка влетіла в магнітне поле перпендикулярно до його силових ліній. Тому складова $[\vec{v} \times \vec{B}]$ спрощується до вигляду $v \cdot B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вигляд формули для сили Лоренца по модулю

$$F_L = q \cdot v \cdot B$$

(векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку)

$$[\vec{v} \times \vec{B}]).\ E_к = \frac{m_e v^2}{2}.$$

$F = F_L \Rightarrow ma = qvB \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = qvB. \Rightarrow \ v = \frac{qBr}{m} \Rightarrow E = \frac{q^2B^2r^2}{2m} = |\text{СГС}| = \frac{q^2H^2r^2}{2mc^2}$

Підставимо значення для протона враховуючи, що напруженість поля ми знайшли в сгс і потім перейдемо до МеВ (1 ерг=6.24$\cdot$ 10^5МеВ):

$$E_p = \frac{(4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 7200 \cdot 50)^2}{2 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \cdot 6.24 \cdot 10^5 = 6{,}23 \text{ MeB}$$

У випадку дейтрона, заряд залишиться той самий, маса буде в два рази більша, частота також буде в два рази більша, відповідно енергія буде в два рази більша, ніж для протона. Альфа частинка в 2 рази важча за дейтрон, має вдвічі більший заряд і ту саму частоту, тому анологічно відбудеться збільшення в 2 рази. Тоді отримуємо:

$E_p = 6{,}23$ МеВ;

$E_p = 12{,}46$ МеВ;

$E_\alpha = 24{,}94$ МеВ

<u>**Відповідь:**</u>

Протон : $E_p = 6{,}23$ МеВ; $H_p \sim 7200$ ерстед

Дейтрон : $E_d = 12{,}46$ МеВ; $H_d \sim 14400$ ерстед

Альфа частинка : $E_\alpha = 24{,}94$ МеВ; $H_d \sim 14400$ ерстед

№14. Визначити максимальну енергію протонів, що прискорюються в синхроциклотроні, що має дуанти діаметром 2 м, при напруженості магнітного поля 10000 е. Який максимальний пробіг у повітрі протонів, виведених з прискорювача через алюмінієве віконце товщиною 5 мг/см^2***. Гальмівна здатність алюмінія відносно повітря – 1,5.***

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) *H=10000 е* – напруженість магнітного поля
2) d = 2 м – діаметр дуантів
3) $S_{Al} = 1.5 S_{air}$ – відношення гальмівної здатності повітря та алюмінію
4) $l_{Al} = 5 \text{мг/см}^2$

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = 1.602176565(35)·10^{-19} К ≈ 1.6·10^{-19} Кл
5) $T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right|$ – період обертання частинки масою m та зарядом q в циклотроні з рівномірним полем з індукцією B
6) Заряд протона q_p=e
7) c=3·10^8м/с
8) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – зв'язок кінетичної енергії тіла $E_к$ з масою m, яке рухається зі швидкістю v
9) Маси різних частинок в а.о.м:

   Протон = 1.007 Дейтрон = 2.014 Альфа-частинка = 4.002

10) $E=qU$ – енергія, яку отримує частинка із зарядом q, яка проходить різницю потенціалів U

Розв'язок:

На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила Лоренца

$$\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right) .$$

За умовами задачі напруженість електричного поля $\vec{E}$ відсутня. Рух по колу означає, що частинка влетіла в магнітне поле перпендикулярно до його силових ліній. Тому складова $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$ спрощується до вигляду $v \cdot B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вигляд формули для сили Лоренца по модулю

$$F_L = q \cdot v \cdot B$$

(векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$).

$$E_к = \frac{m_e v^2}{2}.$$

F=F_L ➔ $ma = qvB \implies m\frac{v^2}{r} = qvB. \implies v = \frac{qBr}{m} \implies E_к = \frac{q^2B^2r^2}{2m} = |СГС| = \frac{q^2H^2r^2}{2mc^2}$

Підставимо значення для протона враховуючи що напруженість поля ми знайшли в сгс і потім перейдемо до МеВ(1 ерг=6.24$\cdot 10^5$МеВ):

$E_p = \frac{(4.8\cdot10^{-10}\cdot10000\cdot50)^2}{2\cdot1.66\cdot10^{-24}\cdot9\cdot10^{20}} \cdot 6.24 \cdot 10^5 = 48{,}1$ МеВ

Перерахуємо товщину алюмінію:

$$l_{Al,cm} = \frac{l_{Al,мг/см^2}}{\rho_{al}} = \frac{5\cdot10^{-3}}{2.7} = 0.00185см$$

Проходження алюмінію такої товщини аналогічно проходженню 0.00185$\cdot$ 1.5=0.00278 см повітря відповідно до умови.

Відповідно до бази даних NIST пробіг протона такої енергії у повітрі 18.5-19 м. В даному випадку алюмінієвим віконцем можна знехтувати.

<u>Відповідь:</u>

а)E=48,1 МеВ

б)Пробіг буде складати приблизно 19 метрів

№15. Використовуючи результати задачі № 13, визначити шлях, який пройдуть альфа-частинки, дейтрони, протони для досягнення максимальної енергії, якщо ефективне значення різниці потенціалів між дуантами циклотрона 28.3 кВ.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) $f = 11\cdot10^6$ *Гц* – частота прискорюючого поля циклотрона
2) r = 0.5м – радіус орбіти траєкторії
3) U=28.3$\cdot 10^3$В

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – е = $1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ К ≈ $1.6\cdot10^{-19}$ Кл
5) $T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right|$ – період обертання частинки масою m та зарядом q в циклотроні з рівномірним полем з індукцією B
6) Заряд протона q_p=e
7) c=$3\cdot10^8$м/с
8) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – зв'язок кінетичної енергії тіла $E_к$ з масою m, яке рухається зі швидкістю v
9) Маси різних частинок в а.о.м:
   Протон = 1.007 Дейтрон = 2.014 Альфа-частинка = 4.002
10) *E=qU* – енергія, яку отримує частинка із зарядом *q*, яка проходить різницю потенціалів *U*

Розв'язок:

Оскільки за цикл поле діє на частинку двічі, відповідно частинка двічі отримує приріст енергії

$$E=2qU \Longrightarrow N = \frac{E_{max}}{2qU}$$

(N-кількість кругів циклотрона яка буде пройдена для досягнення максимальної енергії)

$$L = \pi R N = \pi R \frac{E_{max}}{2qU}$$

(оскільки в нас дано максимальний радіус, будемо вважати що середній радіус рівний $\frac{R}{2}$).

Для протона:

$$L_p = \pi \cdot 0{,}5 \cdot \frac{6{,}23 \cdot 10^6}{2 \cdot 1 \cdot 28{,}3 \cdot 10^3} = 172{,}9\text{м}$$

З задачі №13 знаємо що у дейтрона максимальна енергія в два рази більша, а у альфа-частинки в 4 рази більша, у дейтрона такий самий заряд, а у альфа-частинки заряд в два рази більше. Отже, що для альфа частинки, що для дейтрона шлях буде однаковим.

$$L_d = L_\alpha = 340\text{м}$$

Відповідь:

а) Для протона $L_p = 172{,}9\text{м}$
б) Для дейтрона $L_d = 340\text{м}$

в) Для альфа частинок $L_\alpha = 340\text{м}$

№16. Виразити радіус кривизни траєкторії електрона, що рухається в магнітному полі з напруженістю H е, через його кінетичну енергію Е (Мев)

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) *H*= *e* – напруженість магнітного поля
2) $\text{E} = \text{МеВ} - \text{кінетична енергія}$

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = $1.602176565(35) \cdot 10^{-19}$ К ≈ $1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
5) $T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right|$ – період обертання частинки масою m та зарядом q в циклотроні

з рівномірним полем з індукцією B

6) c=$3\cdot10^8$м/с

7) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – зв’язок кінетичної енергії тіла $E_к$ з масою m, яке рухається зі швидкістю v

8) $E=qU$ – енергія, яку отримує частинка із зарядом q, яка проходить різницю потенціалів U

Розв’язок:

На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила Лоренца

$$\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)\ .$$

За умовами задачі напруженість електричного поля $\vec{E}$ відсутня. Рух по колу означає, що частинка влетіла в магнітне поле перпендикулярно до його силових ліній. Тому складова $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$ спрощується до вигляду $v\cdot B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вигляд формули для сили Лоренца по модулю

$$F_L = q\cdot v\cdot B$$

(векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$).

$$E_к = \frac{m_e v^2}{2}.$$

$$F=F_L \Rightarrow ma = qvB \quad \Longrightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = qvB. \Longrightarrow\ v = \frac{qBr}{m} \Longrightarrow r = \frac{m\,v}{qB} = |СГС| = \frac{m\,vc}{qH}$$

Тепер знаходимо радіус кривизни траєкторії електрона з урахуванням поправок на релятивістські ефекти:

$$E = (\gamma - 1)m_0c^2;\ \ m = \gamma m_0;\ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \Longrightarrow\ \ v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E+m_0c^2}\right)^2} \Longrightarrow$$

$$r = \frac{\gamma m_0c^2\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E+m_0c^2}\right)^2}}{qH} = \frac{E+m_0c^2}{m_0c^2}\cdot\frac{m_0c^2}{qH}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E+m_0c^2}\right)^2} =$$

$$r = \frac{E + m_0c^2}{qH} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E + m_0c^2}\right)^2}$$

Враховуючи, що маса електрона рівна $m_0 = 0{,}511$ МеВ, заряд електрона у системі СГС $q = 4.803 \cdot 10^{-10}$стКл, а також співвідношення між енергетичними одиницями $1\text{МеВ} = 1{,}602 \cdot 10^{-6}$ерг, можемо записати вираз для радіуса у наступному вигляді

$$r = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-6}}{4.803 \cdot 10^{-10} H} \cdot \sqrt{E(E + 1.022)} = \frac{10^4}{3H} \cdot \sqrt{E(E + 1.022)}$$

У даному виразі енергія береться у мега електрон вольтах, а напруженість магнітного поля у ерстедах.

Відповідь:

$$r = \frac{10^4}{3H} \cdot \sqrt{E(E + 1.022)}$$

№17. Знайти швидкість електрона у нерелятивістському наближенні при його прискоренні в електричному полі з різницею потенціалів U.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

3) U - різниця потенціалів

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

9) Маса електрона – $m_e = 9.10938291(40) \cdot 10^{-31}$ кг $\approx 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг
10) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35) \cdot 10^{-19}$ Кл $\approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
11) Заряд електрона q_e=-e
12) $E=qU$ – енергія, яку отримує частинка із зарядом q, яка проходить різницю потенціалів U

13) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія частинка $E_к$ з масою m, що рухається зі швидкістю v

Розв'язок:

Після прискорення електрона з різницею потенціалів U електрон набуде кінетичної енергії $E_к = Uq_e$. З іншої сторони вона визначається через швидкість електрона v простим співвідношенням $E_к = \frac{m_e v^2}{2}$. В результаті маємо $E_к = Uq_e = \frac{m_e v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2Uq_e}{m_e} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e}{m_e}U}$. Знак заряду електрона не записуємо – він тільки задає напрямок прискорення при заданій різниці потенціалів, тому при обчисленні абсолютної величини швидкості його можна не враховувати.

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-19}\ Кл}{9.1 \cdot 10^{-31}\ кг}}\sqrt{U} = \sqrt{2 \cdot 1.76 \cdot 10^{11}\ Кл \cdot кг^{-1}}\sqrt{U} =$$

$$= 10^5 \cdot \sqrt{35.2}\sqrt{U[В]}\ \cdot \sqrt{Кл \cdot кг^{-1} \cdot В} = 5.93 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{U[В]}\ \text{м/с}$$

$$\sqrt{Кл \cdot кг^{-1} \cdot В} = \sqrt{Кл \cdot кг^{-1} \cdot \frac{Дж}{Кл}} = \sqrt{кг^{-1} \cdot Н \cdot м} = \sqrt{кг^{-1} \cdot кг \cdot м \cdot м \cdot с^{-2}} = \text{м/с}$$

Відповідь:

Швидкість електрона *v*, яку він набуває, коли проходить різницю потенціалів *U*

$$v = 5.93 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{U[В]}\ \text{м/с}$$

№18. В ядерній фізиці в деяких випадках прийнято характеризувати число частинок, які бомбардують мішень їх загальним зарядом, який виражають в мкА·год. Якому числу частинок відповідає заряд Q = 1 мкА·год для: а)електронів; б)альфа-частинок?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) Q = 1 мкА·год (перевести в Кл самостійно)

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = $1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл ≈ $1.6\cdot10^{-19}$ Кл
2) Заряд електрона q_e=-e
3) Заряд протона q_p=e
4) альфа-частинка – ядро атому гелію, яке складається з двох протонів і двох нейтронів

Розв’язок:

Кількість електронів N_e пропорційна заряду Q:

$$N_e = \frac{Q}{q_e} = \frac{A\cdot t}{e} = \frac{10^{-6}\text{А}\cdot 3600\text{ с}}{1.6\cdot 10^{-19}\text{Кл}} = 2.25\cdot10^{16}$$

Для альфа-частинок їх кількість N_α також пропорційна заряду Q, але коефіцієнт в 2 рази менший, оскільки заряд альфа-частинки в 2 рази більший за заряд електрона:

$$N_\alpha = \frac{Q}{q_\alpha} = \frac{A\cdot t}{2e} = \frac{10^{-6}\text{А}\cdot 3600\text{ с}}{2\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\text{Кл}} = 1.125\cdot10^{16}$$

Відповідь:

а) $N_e = 2.25\cdot10^{16}$

б) $N_\alpha = 1.125\cdot10^{16}$

№19. Заряджена частинка влітає в однорідне магнітне поле з індукцією B =0.5 Тл і рухається по колу з радіусом r = 10 см. Швидкість частинки v = 2350 км/с. Знайти для цієї частинки: а) відношення заряду до маси;

б) визначити тип частинки; в) радіус кривизни траєкторії (кола), якщо така частинка – електрон.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

2) $r = 0.1$ м - радіус кривизни траєкторії в магнітному полі
3) $B=0.5$ Тл - магнітна індукція поля
4) $v = 2.35 \cdot 10^6$ м/с – швидкість руху частинки

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot (\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}])$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Маса електрона – $m_e = 9.10938291(40) \cdot 10^{-31}$ кг $\approx 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг
5) Маса протона – $m_p = 1.672621777(74) \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг
6) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35) \cdot 10^{-19}$ Кл $\approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
7) Заряд електрона q_e=-e
8) Заряд протона q_p=e

Розв’язок:

На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила Лоренца $\overrightarrow{F_L} = q \cdot (\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}])$. За умовами задачі напруженість електричного поля $\vec{E}$ відсутня. Рух по колу означає, що частинка влетіла в магнітне поле перпендикулярно до його силових ліній. Тому складова $[\vec{v} \times \vec{B}]$ спрощується до вигляду $v{\cdot}B$. Отримуємо для умов задачі остаточний виглядд формули для сили Лоренца по модулю $F_L = q{\cdot}v{\cdot}B$ (векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку $[\vec{v} \times \vec{B}]$). Сила Лоренца є доцентровою силою в даному випадку і з умови рівності $F{=}F_L$ ➔ $ma = qvB \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = qvB \quad \Rightarrow$

$\frac{q}{m} = \frac{v}{Br} = \frac{2.35 \cdot 10^6 \text{ м/с}}{0.5 \text{ Тл} \cdot 0.1 \text{ м}} = 4.7 \cdot 10^7 \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}} = 4.7 \cdot 10^7 \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$

Для електрону

$$\frac{q_e}{m_e} = \frac{-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}} = -1.76 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}$$

$$\frac{q_p}{m_p} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}}{1.7 \cdot 10^{-27} \text{кг}} = 9.4 \cdot 10^7 \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}$$

Отримана величина $\frac{q}{m}$ не співпадає з відомими значеннями ні для електрона, ні для протона, але вона рівно в два рази менша за відношення заряду до маси для протона. Спираючись на загальні фізичні знання, які отримано за попередні курси можна припустити, що в якості частинки виступає іон, у якого співвідношення заряду до маси в 2 рази менше, ніж для протону. Для однозарядних іонів (як найбільш ймовірних) – це ядро дейтерію (протон+нейтрон), для двозарядних – це альфа-частинка (2 протони+2 нейтрони) і т.д.

Для визначення радіусу кола із формули $\frac{q}{m} = \frac{v}{Br}$ слідує $r = \frac{v}{B}\frac{m}{q}$. Для електрона отримуємо (знак заряду не пишемо, оскільки він тільки впливає на напрямок повороту частинки в полі)

$$r_e = \frac{v}{B}\frac{m_e}{q_e} = \frac{2.35 \cdot 10^6 \text{ м/с}}{0.5 \text{ Тл}} \frac{1}{1.76 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}} \quad \Rightarrow$$

$$r_e = \frac{v}{B}\frac{m_e}{q_e} = \frac{2.35 \cdot 10^6 \text{ м/с}}{0.5 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}} \frac{1}{1.76 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}} = 2.67 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Відповідь:

а) Відношення заряду до маси частинки $\frac{q}{m} = \frac{v}{Br} = 4.7 \cdot 10^7 \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$

б) Тип частинки – іон з відношенням Q/A=1/2, де Q – заряд іона, який не може бути більшим за заряд ядра - $Q \leq Z$. Для однозарядних іонів це дейтрон, для двохзарядних іонів – це альфа-частинка і т.д.

в) Радіус повороту траєкторії (кола) електрону в магнітному полі $r_e = \frac{v}{B}\frac{m_e}{q_e} =$

$26.7 \cdot 10^{-6}$ м ≈ 27 мкм

№20. Вивести формулу, що пов'язує величину магнітної індукції поля циклотрону і частоту f зміни різниці потенціалів, яка прикладається до дуантів. Магнітна індукція B = 1 Тл. Визначити частоту f для а) протонів; б) дейтронів; в) альфа-частинок. Вважати, що маса нуклона приблизно дорівнює масі протона і знехтувати енергіями зв'язку нуклонів в ядрах. Також розглядати прискорення повністю іонізованих ядер.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) B=1 Тл - магнітна індукція поля

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца $-\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = $1.602176565(35) \cdot 10^{-19}$ Кл $\approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
5) Заряд протона q_p=e
6) Зв'язок між частотою обертання f і періодом обертання – $T = \frac{1}{f}$
7) Дейтрон складається з протона і нейтрона – двох нуклонів, альфа-частинка складається з двох протонів і двох нейтронів – чотирьох нуклонів

Розв'язок:

На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила Лоренца $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$. За умовами задачі напруженість електричного поля $\vec{E}$ відсутня. В циклотроні частинка рухається перпендикулярно до силових ліній магнітного поля. Тому складова $[\vec{v} \times \vec{B}]$ спрощується до вигляду $v{\cdot}B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вигляд формули для сили Лоренца по модулю $F_L = q{\cdot}v{\cdot}B$ (векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку $[\vec{v} \times \vec{B}]$). Сила Лоренца є доцентровою силою в даному випадку, і з умови рівності $F{=}F_L$ ➔ $ma = qvB \quad \Longrightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = qvB \quad \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$

В даному випадку r – радіус кола, по якому проходить рух частинки

Період обертання частинки в циклотроні $T = \frac{1}{f}$

Він же дорівнює $T = \frac{L}{v}$

Де L - довжина кола обертання в циклотроні

Вона пов'язана з радіусом через залежність $L = 2\pi r = \frac{2\pi m v}{qB} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$

Тоді частота $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

Для постійного прискорення частинки необхідно, щоб коли частинка приходила в прискорюючий проміжок між дуантами, електричне поле між ними міняло б свій напрямок на протилежний. Оскільки дуантів два, протягом одного періоду обертання частинка буде потрапляти в проміжок між дуантами двічі і кожний раз вже в цей момент поле змінюватиме напрямок на протилежний (на другий раз буде в тому ж напрямі, як і на початку періоду). Тобто частота зміни прискорюючого поля між дуантами повинна співпадати з частотою обертання частинки в циклотроні.

Отже, умова синхронізації $f = \frac{qB}{2\pi m}$. Підставивши значення магнітної індукції та масу відповідної частинки отримуємо:

для протона отримуємо частоту зміни напруги на дуантах: $f_p = \frac{q_з B}{2\pi m_p} = \frac{eB}{2\pi m_p} = \frac{1.6{\cdot}10^{-19}\ \text{Кл}{\cdot}1\ \text{Тл}}{2{\cdot}3.14{\cdot}1.7{\cdot}10^{-27}\text{кг}} = \frac{1.6{\cdot}10^{-19}\ \text{Кл}{\cdot}1\ \text{кг}{\cdot}\text{с}^{-2}{\cdot}\text{А}^{-1}}{2{\cdot}3.14{\cdot}1.7{\cdot}10^{-27}\text{кг}} = 15 \cdot 10^6$ Гц;

для дейтрона (складається двох нуклонів, протона і нейтрона - з умови задачі маса в двічі більша за масу протона, заряд такий же): $f_d = \frac{q_d B}{2\pi m_d} = \frac{eB}{2\pi 2 m_p} = \frac{1}{2} f_p$

$\Rightarrow\ f_d = \frac{1}{2} f_p = 7.5$ МГц ;

для альфа-частинки (складається з чотирьох нуклонів, 2 протонів і 2 нейтронів - з умови задачі маса в 4 рази більша за масу протона, заряд більший в 2 рази):

$$f_\alpha = \frac{q_\alpha B}{2\pi m_\alpha} = \frac{2eB}{2\pi 4 m_p} = \frac{1}{2} f_p = 7.5 \text{ МГц}$$

Відповідь:

Необхідна частота зміни напруги на дуантах для:

а) протона $f_p = \frac{eB}{2\pi m_p} = 15$ МГц

б) дейтрона $f_d = \frac{1}{2} f_p = 7.5$ МГц

в) альфа-частинки $f_\alpha = \frac{1}{2} f_p = 7.5$ МГц

№21. Частота генератора прискорюючої напруги циклотрона f = 10 МГц. Знайти значення ефективної прискорюючої напруги на дуантах циклотрону, при якій відстань між сусідніми орбітами траєкторії протонів з радіусом орбіти r = 50см не менше Δr = 1 см

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) *f = 10 МГц* – частота прискорюючого поля циклотрона
2) r = 0.5м – радіус орбіти траєкторії, на якій необхідний приріст радіуса
3) *Δr = 0.01 м* – приріст радіуса орбіти, який вимагається на орбіті с радіусом r = 0.5м

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$

4) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = 1.602176565(35)·10^{-19} К ≈ 1.6·10^{-19} Кл
5) $T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right|$ – період обертання частинки масою m та зарядом q в циклотроні з рівномірним полем з індукцією B
6) Заряд протона q_p=e
7) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – зв'язок кінетичної енергії тіла $E_к$ з масою m, яке рухається зі швидкістю v

Розв'язок:

Прискорююче поле циклотрона змінюється з періодом $T = \frac{1}{f}$, цей період дорівнює періоду обертання протона в циклотроні $T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m_p}{q_p}\right|$. Звідки отримуємо $B = 2\pi f \left|\frac{m_p}{q_p}\right|$.

На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила Лоренца $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$. За умовами задачі напруженість електричного поля $\vec{E}$ відсутня (окрім проміжків дуантів, але для процесу обертання по орбіті циклотрону вони не розглядаються). В циклотроні частинка рухається в магнітному полі перпендикулярно до його силових ліній. Тому складова $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$ спрощується до виду $v·B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вид формули для сили Лоренца по модулю $F_L = q·v·B$ (векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$). Сила Лоренца є доцентровою силою в даному випадку і з умови рівності $F=F_L$ ➔ $ma = qvB \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = qvB \quad$ ⇒ для протона

$$v = \left|\frac{q_p}{m_p}\right| rB = \left|\frac{q_p}{m_p}\right| r \cdot 2\pi \cdot f \left|\frac{m_p}{q_p}\right| = 2\pi \cdot f \cdot r$$

За цикл прискорююче поле діє двічі і, відповідно, збільшується на два однакових прирости енергія протона $\Delta E = 2\left|q_p\right|U$

З іншої сторони, ця величина є приростом кінетичної енергії $\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 2|q_p|U$

Розглядаємо цей відносно (енергії) малий приріст як диференціал і використовуємо відповідну математичну операцію диференціювання

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\Delta(v^2) = \frac{m}{2}\Delta((2\pi\cdot f\cdot r)^2) = \frac{m}{2}(2\pi\cdot f)^2\Delta(r^2) =$$

$$= 2\cdot m\cdot \pi^2\cdot f^2\cdot 2r\Delta r$$

В нашому випадку маса відповідає масі протону, тому маємо

$2|q_p|U = 2\cdot m_p\cdot \pi^2\cdot f^2\cdot 2r\Delta r$

Звідки отримуємо

$U = 2\frac{m_p}{|q_p|}\cdot \pi^2\cdot f^2\cdot r\cdot \Delta r$

Підставляємо задані в задачі значення і отримуємо:

$$U = 2\frac{1.7\cdot 10^{-27}\text{кг}}{1.6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}}\cdot 3.14^2\cdot (10^7)^2\cdot 0.5\ \text{м}\cdot 0.01\ \text{м}$$

$$= \frac{2}{9.4\cdot 10^7\ \text{Кл}\cdot \text{кг}^{-1}}\cdot 10^{14}\text{с}^{-2}0.005\ \text{м}^2$$

$$U = \frac{2}{9.4}\cdot 3.14^2\cdot 5\cdot 10^4\ \frac{\text{с}^{-2}\text{м}^2}{\text{Кл}\cdot \text{кг}^{-1}} = 104889{,}4\ \frac{\text{с}^{-1}\cdot \text{кг}\cdot \text{м}^2}{\text{Кл}} \approx 1{,}05\cdot\ 10^5\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$

$$= 1{,}05\cdot\ 10^5\ \text{В}$$

Відповідь:

$U = 1{,}05\cdot\ 10^5$ В – мінімально необхідна прискорююча напруга між дуантами для того, щоб задовольнити умови задачі.

№22. Іонний струм в циклотроні при роботі з альфа-частинками дорівнює I=15 мкА. Вважати, що прискорюються лише повністю іонізовані іони. Визначити:

а) в скільки разів такий циклотрон продуктивніший, ніж 1 г радію Ra-226;

б) яка при цьому інтенсивність пучка альфа-частинок.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) I=15 мкА - іонний струм в циклотроні при роботі з альфа-частинками
2) m_{Ra} = 0.001 кг

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = $1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл ≈ $1.6\cdot10^{-19}$ Кл
2) Заряд альфа-частинки q_α=2e
3) Зв'язок активності A для N ядер радіоактивного елементу з постійною радіоактивного розпаду λ – A = λN
4) Зв'язок між періодом напіврозпаду $T_{1/2}$ та постійною розпаду λ – $T_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{\lambda}$
5) Число Авагадро – N_A=$6.022\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
6) Період напіврозпаду ^{226}Ra – $T_{1/2}$ = 1600 років*3600 с/год*24 год/добу*365 діб/рік = 1600 років*86400 с/добу*365 = 1600 років*31536000 с/рік=$5.046\cdot10^{10}$ с

Розв'язок:

Потік частинок є неперервний, тому за один період прискорення із циклотрона вилітає заряд (заряджені альфа-частинки), який дорівнює добутку струму на час одного циклу. Кількість альфа-частинок, які циркулюють в циклотроні і вилітають з нього в неперервному режимі буде:

$$Q = t \cdot I$$

З іншої сторони цей заряд створюють N альфа-частинок

$$Q = Nq_\alpha = N2e$$

Прирівнюємо перше і друге рівняння $N2e = t \cdot I$. Оскільки інтенсивність генерації частинок циклотроном є відношення кількості частинок, які генеруються за період до величини цього періоду, приходимо до простої формули:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{I}{2e} = \frac{15 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}} \approx 4.7 \cdot 10^{13}\ \text{с}^{-1}$$

Визначаємо, скільки випромінює 1 г радію-226.

Кількість ядер N_{Ra} радію-226 в массі m_{Ra} 1 г :

$$N_{Ra} = \frac{m_{Ra}}{\mu} N_A = \frac{0.001\text{кг}}{0.226\ \text{кг}\cdot\text{моль}^{-1}} 6.022 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1} \approx 2.66 \cdot 10^{21},$$

де μ - молярна маса ^{226}Ra

Активність 1 г радію-226:

$A = \lambda N_{Ra} = \frac{ln2}{T_{1/2}} N_{Ra} = \frac{0.693}{5.046 \cdot 10^{10} c} 2.66 \cdot 10^{21} = 3.65 \cdot 10^{10}\ c^{-1}$(Бк) – ця величина добре збігається із табличним значенням визначення внесистемної одиниці 1 Кюрі (активність 1 грама радію-226) = $3.7 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$(Бк)

Знаходимо шукане співвідношення інтенсивностей альфа частинок $\frac{n}{A} = \frac{4.7 \cdot 10^{13} c^{-1}}{3.65 \cdot 10^{10} c^{-1}} \approx 1288$. Отже, у циклотрона зі струмом 15 мкА пучок альфа-частинок інтенсивніший за пучок тих же частинок від одного граму радію-226 більше, ніж на три порядки (1288 раз)

Відповідь:

а) у циклотрона зі струмом 15 мкА пучок альфа-частинок інтенсивніший за пучок тих же частинок від одного граму радію-226 більше, ніж на три порядки (1288 раз)

б) інтенсивність пучка альфа-частинок з циклотрону – $n \approx 4.7 \cdot 10^{13}\ \text{с}^{-1}$.

№23. Електрон спочатку прискорюється у полі з різницею потенціалів U = 1000 В. Далі він рухається в однорідному магнітному полі під кутом α=30⁰ до вектора магнітної індукції $\vec{B}$, модуль якого складає B = 29 мТл. Знайти крок гвинтової траєкторії, вздовж якої рухається електрон.

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) B=29 мТл – величина модуля магнітної індукції поля
2) $\alpha=30^0$ – кут між напрямком вльоту електрона в магнітне поле та вектором індукції цього поля
3) U = 1000 В – різниця потенціалів електричного поля, в якому прискорювався електрон до вльоту в магнітне поле

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) $E=qU$ – енергія, яку отримує частинка із зарядом q, яка проходить різницю потенціалів U
5) $E_к = \frac{mv^2}{2}$ – зв'язок кінетичної енергії тіла $E_к$ з масою m, яке рухається зі швидкістю v
6) Маса електрона – $m_e = 9.10938291(40)\cdot10^{-31}$ кг $\approx 9.1\cdot10^{-31}$ кг
7) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл $\approx 1.6\cdot10^{-19}$ Кл
8) Заряд електрона за модулем $|q_e|=e$

Розв'язок:

На заряджену частинку із зарядом q в однорідному магнітному полі діє сила поля $\vec{E}$, що присутня на першому етапі – при прискоренні електрона в електричному полі. В цій частині виходячи із умов задачі простіше використати формулу для енергії $E_к$, якої набуває електрон після проходження різниці потенціалів U:

$$E_к=q_eU$$

Тут і далі ми не будемо писати модулі заряду, але будемо розуміти, що використовуємо модуль – без знаку, який тільки впливає на напрямок прискорення електрону, а в даній задачі із її умов явно випливає тільки позитивне прискорення.

Далі частинка влітає в зону дії магнітного поля (електричне поле відсутнє) під кутом $\alpha=30^0$ до вектора індукції цього поля.

Вектор швидкості електрона можна розкласти на частину, паралельну напрямку вектору індукції – повздовжню компоненту швидкості $v_\parallel$, та перпендикулярну складову швидкості $v_\perp$. На повздовжню компоненту швидкості магнітне поле не впливає і вона не змінюється, а перпендикулярну складова призводить до обертання її навколо напрямку індукції магнітного поля. В результаті сума цих двох векторів утворює гвинтову лінію з кроком вздовж ліній індукції магнітного поля. Величина кроку дорівнює добутку $v_\parallel$ складової, яка не міняється на період обертання вектору перпендикулярної складової $v_\perp$. Тобто крок гвинтової лінії h дорівнює:

$$h = v_\parallel \cdot T$$

$$v_\parallel = v \cdot cos\alpha$$

Визначимо швидкість вльоту електрону в магнітне поле:

Ми вже знаємо його кінетичну енергію $E_к=q_eU$, а також залежність $E_к = \frac{m_e v^2}{2}$, звідки, прирівнюючи праві частини рівнянь, визначаємо v:

В результаті маємо $E_к = Uq_e = \frac{m_e v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2Uq_e}{m_e} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e}{m_e}U}$

Тепер визначимо період обертання вектору $v_\perp$.

Ця складова швидкості електрона перпендикулярна до силових ліній магнітного поля. Тому складова $\left[\vec{v}_\perp \times \vec{B}\right]$ спрощується до виду $v_\perp \cdot B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вид формули для сили Лоренца для складової $v_\perp$ по модулю $F_L = q_e \cdot v_\perp \cdot B$ (векторний напрямок задається напрямком з векторного добутку $\left[\vec{v}_\perp \times \vec{B}\right]$). Сила Лоренца є доцентровою силою в даному випадку і з умови рівності $F=F_L$ ➔ $ma = qvB \quad \Longrightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = qvB \quad \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$, для електрону $r = \frac{m_e v_\perp}{q_e B}$

В даному випадку r – радіус кола, по якому проходить рух перпендикулярної складової швидкості електрону

Період обертання $T = \frac{L}{v_\perp}$, де L - довжина кола обертання.

Вона пов'язана з радіусом, як $L = 2\pi r = 2\pi \frac{m_e v_\perp}{q_e B} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi m_e}{q_e B} = \frac{2\pi m_e}{eB}$

Отримуємо чудову залежність – період обертання електрону ніяк не залежить від складової $v_\perp$. А отже крок гвинтової лінії дорівнює:

$$h = v_\parallel \cdot T = \sqrt{\frac{2e}{m_e} U} \cdot cos\alpha \cdot \frac{2\pi m_e}{eB} = \frac{\pi}{B} \cdot \sqrt{\frac{8m_e}{e} U} \cdot cos\alpha$$

$$h = \frac{\pi}{B} \cdot \sqrt{\frac{8m_e}{e} U} \cdot cos\alpha = \frac{3.14}{29 \cdot 10^{-3}\text{Тл}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2m_e}{e} 1000\ B} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{3.14}{29 \cdot 10^{-3}\text{Тл}} \cdot 2\sqrt{\frac{2m_e}{e} 1000\ B} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3.14}{29 \cdot 10^{-3}\text{Тл}} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}}{1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}} 1000\ B}$$

$$h = 1.08 \cdot 10^{2}\text{Тл}^{-1} \cdot \sqrt{3.41 \cdot 10^{-8} \frac{\text{кг}}{\text{Кл}}\ B} \approx 2 \cdot 10^{-2}\ \ \text{Тл}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}\ B}$$

$$h = 2 \cdot 10^{-2}\ \ (\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}\text{А}^{-1})^{-1} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Кл}} \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}}$$

$$= 2 \cdot 10^{-2}\ \ (\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}\text{А}^{-1})^{-1} \cdot \frac{1}{\text{А} \cdot \text{с}} \sqrt{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}}$$

$$= 2 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{2} \cdot \text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}$$

Відповідь:

Крок гвинтової лінії траєкторії електрона:

$$h = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}$$

№24. При плануванні будівництва Великого адронного колайдера LHC розглядали різні варіанти, найбільш привабливою стала можливість розміщення його в тунелі прискорювача електронів LEP. Довжина кола тунелю була 27 км. Чи буде достатньо такої довжини для прискорення протонів до 7 ТеВ, якщо планували використовувати магнітне поле в іонопроводі на основі надпровідних магнітів з індукцією 8.36 Тл?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) B=8.36 Тл – величина магнітної індукції поля
2) L = 27000 м – довжина кола тунелю для LHC
3) E_p = 7 ТеВ – бажана енергія для прискорених протонів

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Сила Лоренца – $\overrightarrow{F_L} = q \cdot \left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$
2) Доцентрове прискорення при русі по колу – $a = \frac{v^2}{r}$
3) Другий закон Ньютона – $F = m \cdot a$
4) Маса протона – $m_p = 1.672621777(74) \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг
5) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35) \cdot 10^{-19}$ Кл $\approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
6) Заряд протона $q_p = e$
7) $c=3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла

Розв’язок:

Траєкторія протона в кільці весь час перпендикулярна до силових ліній магнітного поля. Тому складова сили Лоренца $\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$ спрощується до виду $v \cdot B$. Отримуємо для умов задачі остаточний вид формули для сили Лоренца $F_L = q_p \cdot v \cdot B$.

Сила Лоренца є доцентровою силою в даному випадку і з умови рівності $F=F_L$

➔ $m_{\mathrm{p}}a = q_p vB \implies m_p \frac{v^2}{r} = q_p vB \quad \Rightarrow$ (враховуючи, що імпульс протону дорівнює $p=m_p v$) маємо важливу формулу:

$$p = q_p rB$$

Ми знаємо довжину кола тунелю (а отже і траєкторії протона), тому:

$$p = q_p \frac{L}{2\pi} B$$

$p = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \frac{27000\ \text{м}}{2\pi}\ 8.36\ \text{Тл} = 5.75 \cdot 10^{-15}\ \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}\text{А}^{-1} = 5.75 \cdot 10^{-15} \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$

При ультрарелятивістських енергіях (вони майже на 4 порядки перевищують енергію спокою протону) виконується з гарною точністю формула для повної енергії $E = pc$, і відповідно $p = E/c$, де c – швидкість світла, p – імпульс частинки.

$$E = pc = 5.75 \cdot 10^{-15}\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{8}\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = 1.73 \cdot 10^{-6}\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$E = 1.73 \cdot 10^{-15}\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} = 1.73 \cdot 10^{-6}\text{Дж}$$

Для вираження в несистемних одиницях енергії (еВ)

1 еВ енергії – отримує частинка із зарядом в одну одиницю елементарного заряду при проходженні потенціалу в 1 В. E [еВ] = e·U

$1\ \text{еВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{В} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot \text{В} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$

Відповідно $1\ T\text{еВ} = 10^{12} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж} = 1.6 \cdot 10^{-7}\text{Дж}$, а відповідно

$$1\ \text{Дж} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-7}}\ T\text{еВ} = 6.25 \cdot 10^{6}\ T\text{еВ}$$

Тому

$$E = 1.73 \cdot 10^{-15}\text{Дж} = 1.73 \cdot 10^{-6} \cdot 6.25 \cdot 10^{6}\ T\text{еВ} = 10{,}8\ \text{ТеВ}$$

Отже на 27 км можна досягти енергій (повернути в магнітному полі) 10,8 ТеВ, тобто більшу енергію, ніж потрібно.

Тому ще є запас на прямолінійні ділянки, де можна було облаштовувати експериментальні ділянки – що було і зроблено.

Можна оцінити необхідну довжину кола, для $E = 7$ ТеВ

$$p = \frac{E}{c} = \frac{7\text{ ТеВ}}{3 \cdot 10^8 \text{м} \cdot \text{с}^{-1}} = \frac{7 \cdot\ 1.6 \cdot 10^{-7}\text{Дж}}{3 \cdot 10^8 \text{м} \cdot \text{с}^{-1}} = 3.73 \cdot 10^{-15} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}$$

$$p = 3.73 \cdot 10^{-15}\ \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$p = q_p \frac{L}{2\pi} B \qquad \Rightarrow \qquad L = 2\pi \frac{p}{Bq_p}$$

$$L = 2\pi \frac{3.73 \cdot 10^{-15}\ \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}}{8.36\ \text{Тл} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}} = 1.75 \cdot 10^4 \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}\text{А} \cdot \text{с}}$$

$$L = 17500\ \text{м} = 17.5\ \text{км}$$

Відповідь:

Для розміщення кільця LHC, щоб прискорювати протони до енергій 7 ТеВ достатньо було по мінімуму довжини 17.5 км, що дозволяє на кільці LEP 27 км із помітним запасом розмістити LHC разом з прямолінійними ділянками для установки експериментально-вимірювального обладнання.

№25. В колайдері LHC зустрічні пучки складаються із банчів (тобто не неперервні, а мають періодично імпульсну структуру). В кожному кільці 2835 банчів, які будуть зіштовхуватися біля кожного детектора. Довжина кола тунелю для LHC 27 км.

Скільки буде зіткнень таких банчів: а) за одну секунду; за один цикл вимірювань, який триватиме 10 годин?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) N=2835 – кількість банчів в кільці
2) L = 27000 м – довжина кола тунелю для LHC

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) c=$3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла

Розв’язок:

Проміжок між зіткненням двох банчів визначається з формули:

$$\Delta t = \frac{L/N}{c} = \frac{L}{cN} = \frac{27000\ \text{м}}{3\cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 2835} = 3.17\cdot 10^{-8}\ \text{с}$$

Швидкість світла використовується, тому що протони при енергіях порядку тева мають швидкість, яка практично дорівнює швидкості світла.

Частота зіткнень дорівнює $f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{3.17\cdot 10^{-8}\ \text{с}} = 31{,}55\cdot\ 10^6\ c^{-1} \approx 32\ \text{МГц}$

Взагалі то кажучи, частота зіткнень запланована 40 МГц

За t=10 годин кількість зіткнень n=f·t

$$n = f\cdot t = 31{,}55\cdot\ 10^6\ c^{-1}\ 3600\frac{c}{\text{год}}\cdot 10\text{год} = 1.14\cdot 10^{12}$$

Відповідь:

При умовах задачі відстань між зіткненнями банчів 31.7 нс,

а) частота зіткнень (кількість зіткнень за секунду) порядку 32 МГц

б) за 10 годин буде зіткнень $n = 1.14\cdot 10^{12}$

№26. В колайдері LHC пучки складаються із банчів (тобто не неперервні, а мають періодично імпульсну структуру). Час між двома банчами, які приходять на детектор Т=25 нс.

а) скільки буде зіткнень таких банчів біля детектора за одну секунду;

б) яка частота таких зіткнень?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) Т=25 нс =$2.5\cdot 10^{-8}$ с – відстань між двома банчами в LHC

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Зв'язок між частотою і періодом f=1/T

Розв’язок:

Кількість зіткнень банчів визначається з формули:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-8} c} = 4 \cdot 10^{7}\ \text{с}^{-1} = 40 \cdot 10^{6}\ \text{с}^{-1} = 40\ \text{МГц}$$

Частота зіткнень дорівнює $f = 40$ МГц

<u>Відповідь:</u>

При відстані між банчами 25 нс

а) кількість зіткнень за секунду буде $4 \cdot 10^{7}\ \text{с}^{-1}$

б) частота зіткнень 40 МГц

№27. В колайдері LHC струм протонного пучка I = 0.5 А. Пучки складаються із банчів (тобто не неперервні, а мають періодично імпульсну структуру). Час між двома банчами, які приходять на детектор T=25 нс. Кількість банчів 2835.

Скільки протонів в одному банчі?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

1) I = 0.5 А – струм протонного пучка в кільці LHC
2) T=25 нс $=2.5\cdot10^{-8}$ с – відстань між двома банчами в LHC
3) N=2835 – кількість банчів в кільці LHC

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Зв'язок між частотою і періодом f=1/T
2) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – $e = 1.602176565(35)\cdot10^{-19}$ Кл $\approx 1.6\cdot10^{-19}$ Кл
3) Заряд протона $q_p = e$

Розв'язок:

Кількість протонів, які проходять за одну секунду:

$$n = \frac{I}{\mathrm{q}_p} = \frac{I}{\mathrm{e}} = \frac{0.5\ \mathrm{A}}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл}} = \frac{0.5\ \text{Кл/с}}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл}} = 3.1 \cdot 10^{18}\ \mathrm{с}^{-1}$$

Якщо між банчами T=25 нс – тоді на період одного банчу приходиться кількість протонів

$$N_b = n \cdot \mathrm{T} = 3.1 \cdot 10^{18}\ \mathrm{с}^{-1} \cdot 2.5 \cdot 10^{-8} c \approx 8 \cdot 10^{10}$$

Як видно, кількість банчів не знадобилася, але її можна теж було б використать, якщо мати енциклопедичні знання про швидкість світла і довжину кільця LHC При енергіях в кілька ТеВ протони рухаються зі швидкістю світла з хорошим наближенням. При довжині кільця L= 27 км кожний протон в кільці зробить за секунду багато обертів n_c

$$n_c = \frac{c}{L} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{27000\ \text{м}} = 1.1 \cdot 10^4\ \mathrm{с}^{-1}$$

Тобто протони, які знаходяться в усіх банчах кільця за секунду пробігають 10000 раз кільце і заряд протонів в кільці в стільки ж раз збільшує струм в абсолютних значеннях. Тобто, якщо між банчами 25 нс, з цього слідує, що за секунду пройде банчів:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-8} c} = 4 \cdot 10^7\ \mathrm{с}^{-1} = 40 \cdot 10^6\ \mathrm{с}^{-1} = 40\ \text{МГц}$$

А якщо відомо, що в кільці тільки N=2835 реальних банчів, то з цього слідує, Що

$$f = \frac{c}{L} N = 1.1 \cdot 10^4\ \mathrm{с}^{-1} \cdot 2835 = 31.5 \cdot 10^8\ \mathrm{с}^{-1}$$

І насправді треба, визначивши, скільки протонів за секунду, далі розділити на реальне число «працюючих» банчів $31.5 \cdot 10^8\ \mathrm{с}^{-1}$, але ця цифра не сильно відрізняється від визначеної у відповіді ідеальної робочої.

Відповідь:

При відстані між банчами 25 нс

на період одного банчу приходиться в ідеалі кількість протонів $N_b = 8 \cdot 10^{10}$

№28. В колайдері LHC в одному кільці накопичуються протони з енергією 7 ТеВ. В одному банчі вважати кількість протонів 10^{11}. Кількість банчів в кільці 2835.

Яка енергія пучка?

Вхідна інформація задачі (в одиницях SI):

4) E_p = 7 ТеВ – енергія протонів
5) N_b=10^{11} – вважати таку кількість протонів в одному банчі
6) N=2835 – кількість банчів в кільці LHC

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

Не обов’язкові

Розв’язок:

Загальна енергія пучка $E_{beam} = N \cdot N_b \cdot \mathrm{E}_p = 2835 \cdot 10^{11} \cdot 7\ \text{ТеВ}$

Для переводу із несистемних одиниць енергії (еВ)

1 еВ енергії – отримує частинка із зарядом в одну одиницю елементарного заряду при проходженні потенціалу в 1 В. 1еВ = е·1 В

$1\ \text{еВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{В} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot \text{В} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$

Відповідно $1\ T\text{еВ} = 10^{12} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{Дж} = 1.6 \cdot 10^{-7}\text{Дж}$,

$$E_{beam} = N \cdot N_b \cdot \mathrm{E}_p = 2835 \cdot 10^{11} \cdot 7\ \text{ТеВ} = 2835 \cdot 10^{11} \cdot 7\ \cdot 1.6 \cdot 10^{-7}\text{Дж}$$

$$E_{beam} = 3.18 \cdot 10^{8}\ \text{Дж} = 318\ \text{МДж}$$

Ця енергія еквівалентна енергії 1000 прасок з потужністю 1 кВт, які працюють більше, ніж 5 хв

Відповідь:

Загальна енергія пучка в кільці колайдера LHC

$$E_{beam} = 3.18 \cdot 10^8 \text{ Дж} = 318 \text{ МДж}$$

№29. Світимість колайдера LHC на перших етапах роботи була 10^{33} см$^{-2}$с$^{-1}$. Світимість Теватрону була - 10^{30} см$^{-2}$с$^{-1}$. Якщо припустити, що утворення Бозона Хігса з розпадом через канал розпаду на два гамма кванти йде з перерізом 50 фбн, з якою частотою проходитиме ця подія на а) LHC; б) Теватроні?

Вхідна інформація задачі (в одиниці SI перевести самостійно):

1) L = ***10^{33} см$^{-2}$с$^{-1}$*** – світимість колайдера LHC
2) L = ***10^{30} см$^{-2}$с$^{-1}$*** – світимість колайдера LHC
3) σ =50 фбн – очікування величини перерізу утворення Бозону Хігса з розпадом через канал розпаду на два гамма кванти

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) $\frac{N}{t} = L\sigma$ – формула для частоти подій на колайдері (кількості подій за одиницю часу – для системи SI за секунду)
2) $L = f_{b1b2}\frac{N_{b1} \cdot N_{b2}}{S}$ – залежність світимості від кількості частинок в кожному банчі, які зіштовхуються (N_{b1} і N_{b2}), частоти зустрічі цих банчів f_{b1b2} та ефективної площі S перетину таких банчів

Розв'язок:

Визначаємо інтенсивність подій $\nu = \frac{N}{t} = L\sigma$, періодичність, з якою з'являється така подія $\mathrm{T} = \frac{1}{\nu}$

Для LHC визначаємо інтенсивність подій:

$$\nu = \frac{N}{t} = L\sigma = 10^{33}\text{см}^{-2}\text{с}^{-1} \cdot 50 \text{ фбн} = 10^{33}\text{см}^{-2}\text{с}^{-1} \cdot 50 \ \cdot 10^{-15} \cdot 10^{-24}\text{см}^{2}$$
$$= 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$$

Періодичність подій буде $\text{T} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}} = 2 \cdot 10^{4} \text{ с} \approx 5.6 \text{ години}$

Для Теватрона інтенсивність подій:

$$\nu = \frac{N}{t} = L\sigma = 10^{30}\text{см}^{-2}\text{с}^{-1} \cdot 50 \text{ фбн} = 10^{30}\text{см}^{-2}\text{с}^{-1} \cdot 50 \ \cdot 10^{-15} \cdot 10^{-24}\text{см}^{2}$$
$$= 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$$

Періодичність подій для Теватрона буде $\text{T} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}} = 2 \cdot 10^{7} \text{ с} \approx 230 \text{ діб}$

Відповідь:

а) Для LHC очікувана інтенсивність подій утворення Бозону Хігса $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$

б) Для Теватрона очікувана інтенсивність подій утворення Бозону Хігса $\nu = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$

№30. Світимість колайдера LHC після 2020 року в результаті модернізації планують збільшити на порядок і довести її до 10^{35} см$^{-2}$с$^{-1}$. Яка інтегральна світимість за еквівалентний рік (10^{7} с, приблизно 4 місяці активної роботи на пучку за рік) буде у цьому випадку у колайдера?

Вхідна інформація задачі (в одиниці SI перевести самостійно):

1) L = 10^{35} см$^{-2}$с$^{-1}$ – майбутня очікувана світимість колайдера LHC
2) $t_{\text{ерік}}$ =10^{7} с – еквівалентний рік роботи колайдера (приблизно 4 місяці активної роботи на пучку за рік)

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) $\frac{N}{t} = L\sigma$ – формула для частоти подій на колайдері (кількості подій за одиницю часу – для системи SI за секунду)

2) $L = f_{b1b2}\frac{N_{b1} \cdot N_{b2}}{S}$ – залежність світимості від кількості частинок в кожному банчі, які стикаються (N_{b1} і N_{b2}), частоти зустрічі цих банчів f_{b1b2} та ефективної площі S перетину таких банчів

3) $L \cdot t_{\text{ерік}}$ – інтегральна світимість (часто визначають в обернених фемтобарнах чи похідних величинах)

Розв'язок:

Визначаємо інтегральну світимість майбутнього модернізованого LHC:

$L \cdot t_{\text{ерік}} = 10^{35}\text{см}^{-2}\text{с}^{-1} \cdot 10^{7}\ c = 10^{42}\text{см}^{-2} = 10^{42}\text{см}^{-2} \cdot 10^{-15} \cdot 10^{-24}\text{см}^{2}\ \text{фбн}^{-1}$

Використання інтегральної світимості у обернених фемтобарнах дуже зручне для оцінки кількості подій за рік, які утворяться при відомому перерізі (добуток величини світимості у обернених фемтобарнах на переріз реакції, яка призводить до події у фемтобарнах)

$$L \cdot t_{\text{ерік}} = 1000\ \text{фбн}^{-1} = 1000\ fb^{-1}$$

Насправді плани трохи нижчі – очікують отримати на першому етапі апгрейда інтегральну світимість десь в районі $300\ fb^{-1}$

<u>Відповідь:</u>

Інтегральна світимість майбутнього модернізованого LHC

$$L \cdot t_{\text{ерік}} = 1000\ \text{фбн}^{-1} = 1000\ fb^{-1}$$

№31. Станфордський лінійний прискорювач має довжину 3.05 км. Він може прискорювати електрони до енергій 50 ГеВ. Кількість електронів в банчі - $4 \cdot 10^{10}$ і прискорюється 100 банчів за секунду (тобто повторення імпульсу-

банчу 100 Гц). Визначіть:

а) Який середній прискорюючий градієнт поля радіочастотних хвильоводів прискорювача;

б) Яка потужність пучка електронів?

Вхідна інформація задачі (в одиниці SI перевести самостійно):

1) L = 3050 м – довжина Стенфордського лінійного прискорювача
2) $\mathrm{E_e} = 50$ ГеВ – повна енергія прискорених електронів
3) $N_b = 4 \cdot 10^{10}$ – кількість електронів в банчі
4) $f = 100$ Гц $(100\ c^{-1})$ – частота генерації банчів

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) $G = \frac{\mathrm{E_e}}{L}$ – формула для середнього прискорюючого градієнту поля радіочастотних хвильоводів лінійного прискорювача
2) Елементарний заряд (заряд електрона по модулю) – e = $1.602176565(35) \cdot 10^{-19}$ Кл ≈ $1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
3) Заряд протона $q_p = e$

Розв'язок:

$$G = \frac{\mathrm{E_e}}{L} = \frac{50\ \text{ГеВ}}{3050\ \text{м}} = 16.4\ \text{МеВ/м}$$

Для переводу із несистемних одиниць енергії (еВ)

1 еВ енергії – отримує частинка із зарядом в одну одиницю елементарного заряду при проходженні потенціалу в 1 В.   1еВ = e·1 В

$1\ \text{еВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{В} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{Кл} \cdot \text{В} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{Дж}$

Відповідно $1\ \text{ГеВ} = 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{Дж} = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{Дж}$,

$$G = \frac{\mathrm{E_e}}{L} = \frac{50\ \text{ГеВ}}{3050\ \text{м}} = \frac{50\ \cdot 1.6 \cdot 10^{-10} \text{Дж}}{3050\ \text{м}} = 2.6 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж/м}$$

Потужність пучка електронів (енергія за секунду):

$$W = f N_b \mathrm{E_e} = 100\ c^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 50\ \text{ГеВ} = 2 \cdot 10^{14}\ c^{-1} \cdot 1.6 \cdot 10^{-10} \text{Дж}$$

$$W = 3.2 \cdot 10^4 \text{ Дж} \cdot c^{-1} = 32 \text{ кВт}$$

Відповідь:

а) Середній прискорюючий градієнт поля радіочастотних хвильоводів Станфордського лінійного прискорювача $G = 16.4$ МеВ/м

б) Потужність пучка електронів (енергія за секунду) Станфордського лінійного прискорювача $W = 3.2 \cdot 10^4 \text{ Дж} \cdot c^{-1} = 32 \text{ кВт}$

№32. Прискорювач колайдерного типу Теватрон прискорював для зіткнення протони і антипротони з енергіями 1 ТеВ для кожного пучку. Визначіть, яку енергію повинні б були мати антипротони, які зіштовхувалися б з ядрами водню у стаціонарній водневій мішені, щоб енергія в системі центра мас була така ж, як на Теватроні (не більше цієї енергії може йти на різні ядерні та частинкові перетворення, енергія руху центру мас із-за законів збереження імпульсу і енергії не може бути для цього використана).

Вхідна інформація задачі (в одиниці SI перевести самостійно):

1) $E_T = 1$ ТеВ – повна енергія прискорених протонів (антипротонів) в кожному пучку Теватрона

Вхідні енциклопедичні дані (в системі SI):

1) Маса протона – $m_p = 1.672621777(74) \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг
2) $m_p c^2 = 938.3$ МеВ – маса протона в енергетичних одиницях

Розв’язок:

Енергія, яка пов’язана з імпульсом центру мас, не може бути використана для ядерних і частинкових перетворень. Для характеризування ефективності реакції зручно використовувати поріг реакції, який визначається як мінімально необхідна енергія для перетворень одних частинок (ядер) в інші (одних мас в інші). Зрозуміло, що він буде найменшим, коли частинки утворюються з нульовими кінетичними енергіями. Енергія реакції Q визначається як різниця сумарних мас частинок (ядер) в енергетичних одиницях до $\sum_i m_i$ і після реакції $\sum_j m_j'$:

$$Q = \sum_i m_i - \sum_j m_j'$$

В ідеалі треба надавати найменшу кінетичну енергію частинкам (ядрам), коли поріг реакції дорівнює енергії реакції $E_{пор} = Q$. Таке не можливо для випадку, коли до реакції система має не нульовий сумарний імпульс (центр мас має не нульовий імпульс). При цьому із-за закону збереження імпульсу центр мас повинен мати той же не нульовий імпульс, а отже і не нульові кінетичні енергії складових після реакції. Навіть якісно зрозуміла перевага прискорювачів колайдерного типу з фізичної точки зору, оскільки при зустрічному русі частинок можна забезпечити нульовий сумарний імпульс, що принципово неможливо для схеми прискорювача із нерухомою мішенню. Оцінимо, наскільки колайдери ефективніші в цьому розумінні – тобто як відрізняються пороги реакцій для двох типів прискорювачів. Перед цим треба зауважити, що ми тут розглядаємо зіткнення частинок (ядер), неявно вважаючи їх до реакції безструктурними одиницями. Взагалі кажучи, це не так і для ядер і для таких частинок як нуклони, але для простоти картини тут ми не будемо ускладнювати розгляд системи, тим паче, що принципові висновки не змінюються при цьому.

До і після реакції система має повну енергію E та імпульс p, які є сумою відповідних повних енергій та імпульсів для кожної частинки

($E = \sum_i E_i$, $p = \sum_i p_i$).

Між повною енергією і імпульсом існує зв'язок через релятивіське співвідношення:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Це співвідношення виконується як для окремої частинки, так і для тіла як складної системи, тому що при його виведенні ніде не використовувалась неділимість тіла (об'єкта).

В теорії відносності величина

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i p_i\right)^2 \mathrm{c}^2 = invariant$$

є релятивістським інваріантом для механічних взаємодій, тобто однакова в усіх інерціальних системах координат. Це рівняння діє і для системи яка знаходиться в різних станах, коли діють тільки механічні закони, тобто задовго до початку реакції і через помітний час після реакції, коли всі взаємодії та потенціальні поля не відіграють помітної ролі в балансі енергій-імпульсів. При цьому маси і кількість частинок можуть бути і іншими. $\sum_i E_i = \mathrm{E}$, $\sum_i p_i = p$, із законів збереження також слідує, що повна енергія E та імпульс p всієї системи зберігаються.

Тепер скористаємося фактом, що на порозі реакції всі частинки в кінцевому стані покояться одна відносно іншої в системі центра мас (СЦМ), і порахуємо для прискорювача із статичною (нерухомою) мішенню вище наведений інваріант в початковому стані (до реакції) в лабораторній системі координат, а в кінцевому стані (після реакції) – в СЦМ.

В лабораторній системі координат до початку реакції:

$$E^2 - p^2c^2 = \left(T_{\text{пор}} + mc^2 + Mc^2\right)^2 - {p_m}^2c^2$$

Тут на мішень масою M налітає частинка масою m, кінетична енергія налітаючої частинки є по суті пороговою енергії реакції $T_{\text{пор}}$, кінетична енергія частинки в мішені дорівнює нулю. Ми використали співвідношення, що повна енергія дорівнює сумі кінетичної енергії та енергії спокою, наприклад для налітаючої частинки повна енергія $E_m = T_{\text{пор}} + mc^2$. Оскільки частинка мішені нерухома в лабораторній системі координат – її імпульс дорівнює нулю, тому $p = p_m + 0 = p_m$

Виразимо p_m через кінетичну енергію налітаючої частинки:

$$p_m{}^2c^2 = E_m{}^2 - m^2c^4 = \left(T_{\text{пор}} + mc^2\right)^2 - m^2c^4 = T_{\text{пор}}{}^2 + 2T_{\text{пор}}mc^2$$

В результаті маємо:

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \left(T_{\text{пор}} + mc^2 + Mc^2\right)^2 - p_m{}^2c^2 \\ &= T_{\text{пор}}{}^2 + m^2c^4 + M^2c^4 + 2T_{\text{пор}}mc^2 + 2T_{\text{пор}}Mc^2 + 2mMc^4 - T_{\text{пор}}{}^2 \\ &- 2T_{\text{пор}}\,m\,c^2 = (M+m)^2c^4 + 2T_{\text{пор}}Mc^2 \end{aligned}$$

З іншої сторони розглянемо цей же інваріант для системи після реакції, коли утворюються інші частинки і виберемо СЦМ. В ній, оскільки використовується порогова енергія, то кінетичні енергії продуктів реакції дорівнюють нулю, і, отже, імпульси частинок та сумарний імпульс p' дорівнюють нулю, а повні енергії дорівнюють енергіям спокою частинок, повна енергія системи E' є сумою повних енергій частинок:

$$E'^2 - p'^2c^2 = \left(\sum_i m_ic^2\right)^2 - 0 = \left(\sum_i m_i\right)^2 c^4$$

Прирівнюємо вирази (оскільки це -інваріант) $E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2$

$$\left(\sum_i m_i\right)^2 c^4 = (M+m)^2c^4 + 2T_{\text{пор}}Mc^2$$

$$T_{\text{пор}} = \frac{(\sum_i m_i)^2 - (M+m)^2}{2M}c^2$$

$Q = [(M+m) - \sum_i m_i]c^2$ – за визначенням енергії реакції, оскільки для порогових реакцій енергія реакції завжди менше нуля, тому будемо розглядати для зручності позитивну величину – модуль $|Q|$

$$|Q| = \left[\sum_i m_i - (M+m)\right]c^2$$

$$T_{\text{пор}} = \frac{\left((M+m)c^2 + |Q|\right)^2 - (M+m)^2c^4}{2Mc^2}$$
$$= \frac{|Q|^2 + (M+m)^2c^4 + 2|Q|(M+m)c^2 - (M+m)^2c^4}{2Mc^2}$$
$$= \frac{|Q|^2 + 2|Q|(M+m)c^2}{2Mc^2} = |Q|\left(\frac{|Q|}{2Mc^2} + 1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$T_{\text{пор}} = |Q|\left(1 + \frac{m}{M} + \frac{|Q|}{2Mc^2}\right)$$

Для симетричних колайдерів центр мас знаходиться у спокої, що означає, що лабораторна система і система центра мас співпадають.

$\text{E}_{\text{цм}} = 2\text{E}_{\text{T}} = 2\ \text{TeB}$, тобто вся кінетична енергія частинок, які зіштовхуються може йти на утворення нових частинок (мас) - $Q = \text{E}_{\text{цм}} = 2\ \text{TeB}$ для Теватрона (звичайно, тут розглядається модуль, оскільки $Q < 0$)

Отже визначимо еквівалентну енергію прискорювача, який забезпечуватиме $|Q| = \text{E}_{\text{цм}} = 2\ \text{Te}$

m і M дорівнюють масі протона (антипротона)

$$T_{\text{пор}} = |Q|\left(1 + \frac{m}{M} + \frac{|Q|}{2Mc^2}\right) = 2\ \text{TeB}\left(1 + 1 + \frac{2\ \text{TeB}}{2 \cdot 938.3\ \text{MeB}}\right) = 2\ \text{TeB} \cdot 1068$$
$$= 2136\ \text{TeB}$$

<u>Відповідь:</u>

Еквівалентна енергія прискорювача з нерухомою мішенню, щоб замінити Теватрон повинна бути на три порядки більша за енергію, до якої прискорює Теватрон:

$$T_{\text{еквів}} = 2\ \text{TeB} \cdot 1068 = 2136\ \text{TeB}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. **Van de Graaff, R. J.; Compton, K. T.; Van Atta, L. C.** (February 1933). "The Electrostatic Production of High Voltage for Nuclear Investigations" *(PDF)*. Physical Review. **43** (3): *149*–157. Bibcode:1933PhRv...43..149V. doi:10.1103/PhysRev.43.149. *Retrieved August 31, 2015*.
2. **J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton**, Experiments with High Velocity Positive Ions.(I) Further Developments in the Method of Obtaining High Velocity Positive Ions, Proceedings of the Royal Society A, vol. 136, pp. 619–630, 1932.
3. **Stanley Humphries, Jr.,** Charged Particle Beams.- Department of Electrical and Computer Engineering. University of New Mexic, 2002.
4. **Stanley Humphries, Jr.,** Principles of Charged Particle Acceleration.- Department of Electrical and Computer Engineering. University of New Mexic, 1986.
5. **J.M. Peterson,** Physics of Particle Accelerators. AIP, vol. 184 (American Institute of Physics, New York, 1989), pp. 2240
6. **Lee S.Y.** Accelerator Physics. 3 ed. – S-NJ-L-HK:World Scientific, 2012.
7. **Wiedemann H**. Particle Acceleraror Physics. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2007.
8. **Wilson E.** An Introduction to Particle Accelerators. – Oxford publ., 2001.
9. **. J.S. Schwinger,** On the classical radiation of accelerated electrons. Phys. Rev. 75, 1912 (1949).
10. Slac linear collider, conceptual design report. Technical Report SLAC-229, SLAC, Stanford (1981).
11. Design study of a 15 to 100 gev positron-electron colliding beam machine(lep). Technical Report ISR-LEP 78-17, CERN, CERN, Geneva (1978).
12. https://archives.library.illinois.edu/2013/06/11/donald-kerst-and-the-betatron/