

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кудін В.Г.

Додаткові матеріали для підготовки до лабораторних робіт

Навчальний посібник

Лабораторна робота № 11

«Визначення в'язкості повітря за формулою Пуазейля»

Розділ 1. Сили в'язкості.

Розділ. 2. Формула Пуазейля.

Київ — 2025

Рецензенти:

Кравченко В.М., канд. фіз.-мат. наук., доц.

Лосицький М.Ю., канд. фіз.-мат. наук, асист.

Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № від року)

Кудін Володимир Григорович

Додаткові матеріали для підготовки до лабораторних робіт. Навчальний посібник. —К, 2025.
—13 с.

© Кудін В.Г., 2025

Зміст

Зміст	3
Вступ.....	4
1. Опис руху рідин (газів). Неідеальні рідини (гази)	5
1.1. Рівняння нерозривності.....	6
1.2. Внутрішнє тертя. Рух неідеальної рідини	7
2. Рух неідеальних рідин (газів) в трубках. Формула Пуазейля	9
2.1 Характер зміни швидкості вздовж радіуса трубки.....	10
2.2. Формула обчислення об'єму рідини (газу), що протікають через циліндричну трубку за одиницю часу	12
Література.....	13

Вступ

Програмою вивчення курсу фізики студентами декількох факультетів та інститутів Київського національного університету імені Тараса Шевченка передбачене виконання лабораторних робіт з цього предмету. Протягом багатьох років кафедра загальної фізики фізичного факультету організовує і забезпечує їх проведення. Викладачами цієї кафедри для лабораторних робіт були підготовлені описи і методичні вказівки [1], інженери кафедри допомагають їх виконувати.

Проводячи лабораторні заняття, викладачу завжди приємно відмічати зацікавленість студентів, що виникає у них під час практичного знайомства з тими чи іншими явищами. Цей сприятливий момент хотілося б використати для стимулювання подальшого поглиблення ними знань. Але не завжди є необхідний навчальний матеріал в потрібному обсязі «під рукою». В підручниках він «розкиданий» і на його пошуки, зазвичай, часу не вистачає. Було б добре, що б в наявності був посібник з матеріалом сконцентрований біля явищ конкретної лабораторної роботи і в той же час базувався на фізичних знаннях студентів молодших курсів. Працюючи з таким матеріалом самостійно, вони б мали змогу їх поглиблювати і ефективно засвоювати нові. Саме таку мету ставить перед собою автор, розробляючи цей посібник.

Лабораторна робота «Визначення в'язкості повітря за формулою Пуазейля» не відноситься до простих. Основна частина теоретичного матеріалу цієї роботи стосується гідро-, аеродинаміки, молекулярної фізики. При розгляді явищ в цих розділах використовуються елементи диференціального і інтегрального числення, тому можливість успішного їх засвоєння студентами буде суттєвою підмогою на наступних етапах вивчення фізики.

Ще одним важливим аспектом цієї лабораторної роботи є те, що проводячи її, студентам різних спеціальностей можна навести приклади застосування розглянутих формул безпосередньо з їх галузей навчання. Розуміння їх дозволяють хімікам звернути увагу на принцип роботи крану бюретки, чи хроматографа, біологам — на особливості протікання крові в судинах чи повітря в дихальних шляхах, ландшафтним дизайнерам — на вплив розмірів шлангів на швидкість поливу.

1. Опис руху рідин (газів). Неідеальні рідини (гази)

Динаміка рідин і газів (гідро- та аеродинаміка) — це розділ механіки, що вивчає рух зазначених речовин, які іноді називають флюїдами. Багато явищ, що зустрічаються в життєдіяльності людини, пов'язані саме з рухом рідин і газів. Це протікання рідин і газів в трубопроводах, каналах, рух тіл в рідинах, рух повітряних мас в атмосфері. Протягом 17 – 19 ст., завдяки роботам Б. Паскаля (1623–1662), Д. Бернуллі (1700–1782), Л. Ейлера (1707–1773), К. Нав'є (1875–1836), Г. Стокса (1819–1903) були сформульовані основні закономірності, що описують такий рух. В більшості випадків це диференціальні рівняння, що базуються на законах І. Ньютона (1643–1727). Але застосовуються закони Ньютона не для конкретних частот, наприклад молекул, а для невеликих об'ємів.

Розглянемо декілька уявлень, в рамках яких описується рух рідини чи газу.

На відміну від кристалічних тіл, в яких молекули (атоми) зберігають свої положення більш-менш незмінними, молекули рідин і газів мають велику рухливість і здійснюють постійний хаотичний (тепловий) рух. В газоподібному стані рухливість є особливо великою, в рідкому стані вона суттєво менша, але все ж присутня. Завдяки рухливості молекул, ці речовини можуть легко змінювати свою форму (текти). В залежності від відстані між молекулами, між ними діють сили притягання чи відштовхування. Через більш щільне розташування молекул в рідинах їх стисливість є малою, на відміну від речовин в газоподібному стані, для яких характерна велика стисливість. Важливою макроскопічною характеристикою стану рідини (газу) є тиск p . Його наявність можна помітити по силі тиску, яка створюється під час стикання молекул рідини чи газу з поверхнями. Обчислюється тиск за формулою $p = F/S$, де F — сила тиску, що діє на поверхню площею S . Одиницею вимірювання тиску є паскаль (Па).

Статичний стан рідини (газу) — це такий стан, у якому вказані речовини не здійснюють макроскопічний рух. Рідина (газ) в цьому випадку характеризується тиском, який залежить тільки від положення точки в середині рідини або газу ($p=p(r)$) і завжди діє перпендикулярно до елемента поверхні і не залежить від його орієнтації. В цьому випадку слід розрізняти сили поверхневі і об'ємні. Прикладом об'ємної сили є сила тяжіння, а поверхневої — сили, що діють з боку стінок герметичної посудини.

Якщо рідина є нестисливою, то її густина однакова в усіх точках об'єму. Для нестисливих рідин виконується закон Б. Паскаля: тиск, що чиниться на рідину в якійсь точці (не враховуючи сили тяжіння), передається рідиною (газом) в усіх напрямках однаково. З силою тяжіння в рідинах і газах пов'язаний так званий гідростатичний тиск: завдяки притягання кожної молекули до земної кулі і нашаруванню молекул одна на одну, в кожному прошарку рідини виникає тиск $p=\rho gh$, де ρ — густина рідини (газу), h — висота стовпа рідини (газу) над розглянутим прошарком, g — прискорення вільного падіння.

Стан рідини (газу), що рухається в просторі (його вивчає *гідро- і аеродинаміка*) можна повністю описати, якщо для кожної точки простору з координатами (x, y, z) вказати п'ять величин, яких набуває рідина (газ), перебуваючи в малому її околі: три компоненти швидкості $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, тиск $p = p(x, y, z, t)$ і густина $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Якщо ці величини залишаються незмінними з часом, то такий рух рідини (газу) називається *стаціонарним*. Стаціонарний стан руху встановлюється через деякий час, після того як перестають змінюватись зовнішні сили, що викликають рух рідини (газу). Ми обмежимося розглядом саме стаціонарних випадків.

Якщо густина рідини або газу $\rho(x, y, z, t)$ залишається незмінною, то це випадок *нестисливих* рідин (газів). Рідина в більшості випадків є нестисливою. Що до газів, то якщо його рух відбувається з швидкостями, меншими за характерну швидкість поширення звуку в ньому, його теж можна вважати нестисливим.

Сукупність векторів швидкості $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$, яких набуває рухома рідина (газ), утворюють поле швидкостей (рис. 1, а). Що б отримати загальне уявлення про його конфігурацію використовують так звані лінії течії — сукупність ліній, дотичні до яких в будь-якій їх точці збігаються з напрямками швидкостей рідини (газу) в їх околах (рис. 1, б). Число ліній течії (густина ліній), що проходять біля певної точки, є пропорційним величині швидкості рідини (газу) в околі цієї точки. Лінії течії не перетинаються між собою, в іншому випадку, вектор швидкості в точці перетину не можливо визначити однозначно (рис. 1, в). Лінії струму можна спостерігати безпосередньо, якщо в рухому рідину (газ) підмішати невеликі частки барвника і прослідкувати за їх подальшим рухом. Закономірності, виявлені для полів швидкостей в гідродинаміці були узагальнені і поширені на інші типи полів — гравітаційне, електростатичне, магнітне. Їх характеризують величинами, поняття про які виникли при розгляді рухомих рідин (газів).

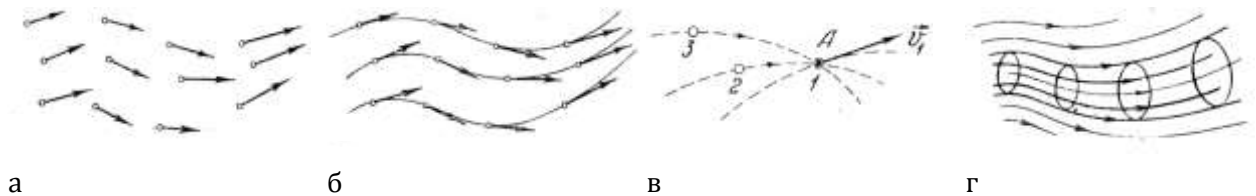


Рис. 1

Об'єм рідини, що обмежений з усіх сторін лініями течії, називається *трубкою течії* (рис. 1, г). З достатнім наближенням можна вважати, що частинки рідини (газу), які під час свого руху потрапили в певну трубку течії, будуть в ній постійно залишатись і не перетинати її бокову поверхню (стінку). Весь потік рідини можна розділити на сукупність трубок течії.

Для рухомих флюїдів можна сформулювати декілька закономірностей. Із закону збереження маси, застосованому до стаціонарної течії в трубці течії, випливає закон нерозривності — закон, що описує зміну швидкості малих об'ємів рідини або газу вздовж трубки течії в залежності від площі її перерізу в тому чи іншому місці.

1.1. Рівняння нерозривності

При рухові в трубці течії змінного перерізу, маса флюїду, що перетинає переріз трубки 1 за одиницю часу дорівнює масі, що перетинає інший переріз 2: $\rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2$. Якщо S_1, S_2 — це площі перерізів трубки в місцях 1, 2 (рис. 2), які є достатньо малими, щоб можна було вважати відповідні значення швидкостей \vec{v}_1, \vec{v}_2 однаковими на всій їх поверхні, то об'єм речовини, що їх перетинає за одиницю часу (за 1 с) можна обчислити за формулою $\Delta V = \vec{v} \vec{S}$. Справді, об'єм можна порахувати, як добуток площі основи S на висоту h . За одну секунду, площини перерізу досягне вся рідина (газ), яка знаходиться від неї на відстані $\Delta l = v \Delta t = v \cdot 1 \text{ с} = v$, тому об'єм знаходимо як: $V = Sv$. Якщо рідина не стислива, то густина ρ залишається незмінною вздовж потоку і рівняння неперервності набуває спрощеного вигляду: $v_1 S_1 =$

$v_2 S_2$. Якщо і площа перерізів трубки вздовж неї незмінна, то швидкість рідини (газу) теж буде постійною.

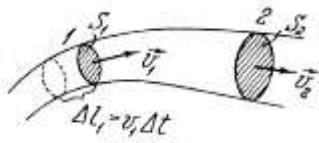


Рис. 2.

1.2. Внутрішнє тертя. Рух неідеальної рідини

Рідкі і особливо газоподібні тіла відрізняються від твердих тим, що вони майже не чинять спротиву зміні своєї форми. Якщо ж рідина (газ) все ж протидіють такій зміні, то вони називаються *в'язкими (неідеальними)*, а сила, що виникає з їх боку називається силою *в'язкості, або внутрішнього тертя*. Виявляється, що сила в'язкості пропорційна не величині деформації, як у твердих тілах (закон Гука), а швидкості деформації. Якщо швидкості деформації малі, то в'язкістю рідини можна знехтувати і вважати рідину ідеальною.

Приклади рідин з помітною в'язкістю ми зустрічаємо достатньо часто — це мед, сметана, олія, мастило, розплавлене скло, вулканічна магма (останні дві рідини є особливо в'язкими). Нам легко помітити відмінність у в'язкості води і сметани по швидкості, з якою вони витікають з пляшок. Далі ми будемо вести мову саме про рідини, бо саме для них в'язкість більш помітна. Для газів характер закону в'язкого тертя такий же.

Закон в'язкого тертя був встановлений І. Ньютоном. З'ясуємо його особливості.

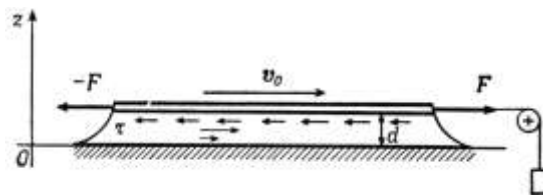


Рис. 3

Якщо спробувати тягнути плиту по поверхні рідини (рис. 3), то виявиться, що для підтримання її постійного (*рівномірного*) руху з деякою швидкістю v_0 потрібно постійно прикладати деяку силу F . Згідно із законами Ньютона, це буде тільки тоді, коли з боку рідини на плиту діє сила, протилежна за напрямком F і рівна їй за модулем. Змінюючи величину діючої сили, ми знову ж таки отримаємо рівномірний рух, але вже з іншою швидкістю. Таким чином, сила в'язкого тертя з боку рідини буде різною для різних швидкостей.

Розглянувши рух не тільки плити, а й рідини між нею і нижньою поверхнею, можна помітити наступні важливі особливості. Виявляється, що рідина розділиться на ряд плоскопаралельних шарів, швидкість руху речовини в яких буде рівномірно спадати від верхнього шару до нижнього.

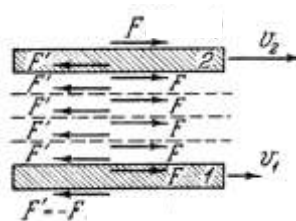


Рис 4

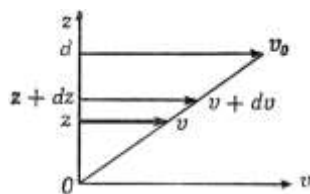
А з іншого боку, утворені шари можна розглядати як трубки течії з незмінним перерізом і постійною швидкістю рідини в них, а значить із повністю скомпенсованими силами, що діють на неї в кожному з цих перерізів.

Як зазначалося вище, якщо верхня плита рухається рівномірно зі швидкістю v_0 , то згідно з другим законом Ньютона, векторна сума сил, що на неї діють повинна дорівнювати нулю. Значить, крім прикладеної зовнішньої сили F , на неї діє й інша сила — сила F' , рівна за модулем, але протилежна за знаком ($F' = -F$). Ця сила гальмування виникає з боку рідини з найближчого прошарку, що межує з плитою: $F_{\text{тр}} = F'$. Згідно з третім законом Ньютона, на рідину з цього прошарку з боку плити теж діє сила, рівна за модулем, але протилежна за знаком силі тертя: $F_{\text{рід1}} = -F_{\text{тр}} = -(F') = -(-F) = F$. Таким чином, до верхнього прошарку рідини сила, що діє на плиту, передалася в незмінному вигляді. Повторивши аналогічні міркування для інших прошарків, ми прийдемо до висновку, що на рідину в кожному з них діють дві сили, рівні за модулем, але протилежні за напрямком — вправо F з боку верхнього прошарку і в ліво F' з боку нижнього. Виходить, що сила, яку ми прикладали до плити і яка підтримує її рух, двічі присутня в усіх рухомих прошарках рідини. Але швидкість руху рідини в усіх прошарках є різною. Це важливий висновок з другого і третього законів Ньютона, які ми застосували для опису стаціонарного руху рідини. Зараз ми не розглядали те, як змінювалась швидкість плити чи рідини в момент початку дії сили, чи коли її величина змінювалась, тобто коли рух встановлювався. Ми аналізували той рух, який вже встановився (стаціонарний), тобто триває вже довго в незмінному вигляді.

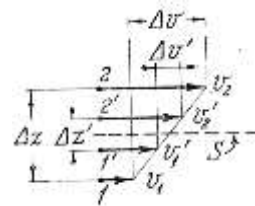
Якщо ж нижня пластина буде рухомою, але зв'язаною з нерухомою стінкою пружиною, то по величині деформації пружини ми зможемо визначити силу дії на цю пластину прилеглого шару рідини і переконатися, що вона справді буде рівною F (рис. 5).



Рис 5



а,



б

Рис. 6

Як вже зазначалося, рідина в об'ємі між пластинами розбивається на шари з різною швидкістю її руху в кожному з них. Завдяки адсорбції (притяганню молекул рідини до твердого тіла), швидкість рідини верхнього шару, який безпосередньо прилягає до рухомої плити, збігається з її швидкістю v_0 . Швидкість же найнижчого шару рідини збігається з швидкістю нижньої нерухомої пластинки, тобто $v = 0$. Середні ж шари рідини набувають проміжних значень швидкості, величини яких лінійно змінюються між граничними (рис. 6). І. Ньютон показав, що для більшості рідин, сила опору з їх боку, яка гальмує рух верхньої пластини, пропорційна площі пластинки S , відношенню різниці швидкостей між шарами рідини Δv до

різниці відстаней між ними Δz ($\Delta v/\Delta z$, так званому *градієнту швидкості*) і коефіцієнту, що пов'язаний з властивостями самої рідини і не залежить від S і v — коефіцієнту в'язкості η : $|\vec{F}| = -\eta S \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta z} \right|$. В цю формулу входять модулі векторів, бо їх напрями перпендикулярні між собою.

Коефіцієнт в'язкості η вимірюється в Па·с.

На рис. 6, б показано приклад розрахунку градієнта, коли вибираються різні пари шарів. На цьому малюнку площа площею S взята всередині потоку, а вибрані шари між якими рахуються різниці ($1-2$, $1'-2'$) розташовані відносно цієї площини симетрично $\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{\Delta v'}{\Delta z'}$. Хоча такий вибір не є обов'язковим. Ці відношення можна записати для нескінченно малих: $\frac{dv}{dz}$ — для стаціонарного випадку (відсутність залежності швидкості від часу і інших координат); $\frac{\partial v}{\partial z}$ — для нестаціонарного випадку (є залежність швидкості від часу чи інших координат).

Згідно визначення ідеальної рідини (газу), сили, що можуть виникнути з їх боку як наслідок протидії можуть бути тільки нормальними (тобто перпендикулярними до поверхні цих речовин). Внаслідок однорідного розподілу величини цих сил в об'ємі і на його поверхні їх можна охарактеризувати відношенням їх величини до площі (F/S або dF/dS), тобто тиском P (нормальним напруженням). Якщо ж рідина неідеальна (в'язка) то з її боку додатково виникає протидія і дотичним силам (сили в'язкого тертя). І в цьому випадку ми можемо скласти подібне відношення, тільки в ньому сила вже буде дотичною до поверхні площею S : $F_{\text{дотич}}/S = dF_{\text{дотич}}/dS = \tau$ — дотичне напруження (рис. 3).

2. Рух неідеальних рідин (газів) в трубках. Формула Пуазейля

Як ми вже з'ясували, під час руху шарів рідини (газу) один відносно одного (з різними швидкостями), на поверхні, що розділяє ці шари виникають дотичні сили — сили внутрішнього тертя або сили в'язкості.

Дію сил в'язкості при протіканні рідини через трубку круглого перерізу експериментально можна виявити за спадом тиску вздовж напрямку її протікання. Для цього можна використати установку, зображену рис. 7. Горизонтальна трубка, що одним кінцем під'єднана до ємності з водою і з вентилем на іншому кінці, має вертикальні тонкі трубки в декількох місцях бічної поверхні. Останні відіграють роль манометрів — висота, на яку підніметься рідина в кожній з них, буде пропорційна тиску в місті їх під'єднання ($p \sim \rho h g$). Коли в горизонтальній трубці рух рідини не відбувається (вентиль перекритий), рівень рідини в вертикальних трубках буде однаковим і збігатиметься з рівнем води в ємності, що свідчить про однаковий тиск вздовж трубки (статичний стан, виконується закон Паскаля), який створений стовпом рідини в ємності. Як тільки вентиль відкривається і рідина починає витікати, рівень рідини в манометричних трубках зміниться, він буде зменшуватись в напрямку протікання рідини, що свідчить про зменшення тиску вздовж течії рідини.

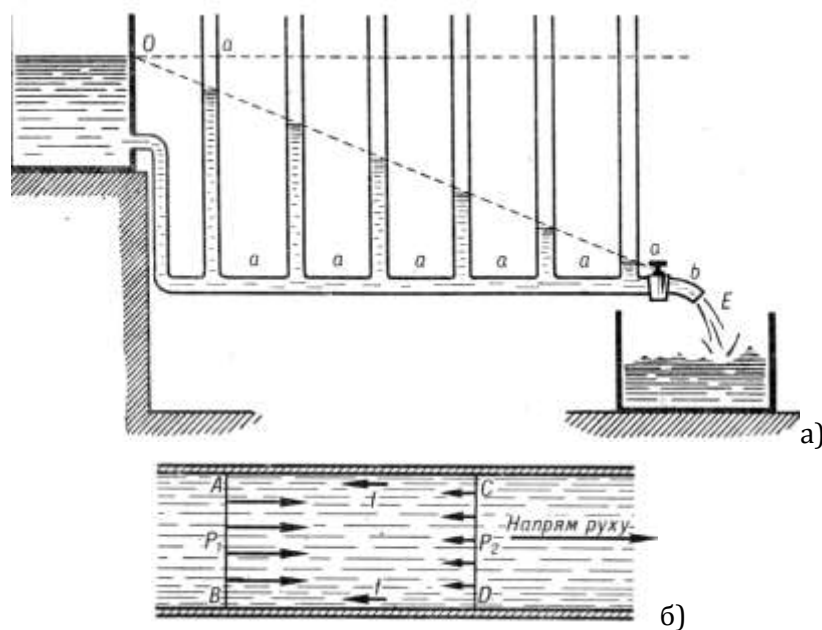


Рис 7

Якби в рідині діяли тільки сили тиску, то за наявності вказаної різниці, рідина повинна була б рухатись прискорено. Але згідно рівняння нерозривності, середня швидкість руху рідини в усіх перерізах труби з незмінним діаметром повинна бути однаковою. Значить, під час руху рідини діють ще якісь сили, які компенсують сили тиску — це сили в'язкого тертя (рис. 7, б).

Враховуючи циліндричну симетрію обмежуючої поверхні, можна припустити, що рух рідини буде ламінарним, а трубки течії будуть мати вигляд співвісних трубок різного діаметру, кожна з яких рухатиметься з різною швидкістю (рис. 8) Максимальна швидкість буде в трубчастих шарах малого діаметра біля осі трубки, а мінімальна — в шарах, що прилягають до внутрішньої поверхні трубки.



Рис. 8

2.1 Характер зміни швидкості вздовж радіуса трубки

Розглянемо стаціонарну течію в'язкої рідини по трубці круглого перерізу. Виділимо уявний циліндричний (трубчастий) шар довжиною l , внутрішнім радіусом r , з нескінченно малою товщиною стінки dr , тобто — зовнішнім радіусом $r+dr$ (рис. 9).

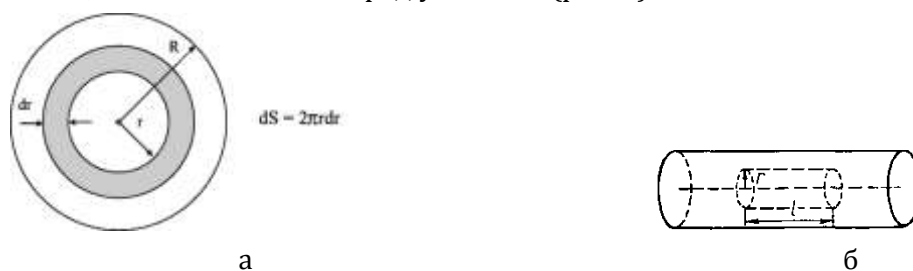


Рис. 9.

Силу в'язкого тертя, яка діє на внутрішню поверхню виділеного циліндра з боку прилеглої рідини, можна розрахувати за формулою Ньютона для сили в'язкого тертя: $F_1 = \eta S \frac{dv}{dr} = -\eta l 2\pi r \frac{dv}{dr}$. Ця сила напрямлена вздовж напрямку руху рідини (праворуч), бо швидкість оточуючої рідини з цього боку циліндричної поверхні є вищою і вона буде прискорювати циліндричний шар, що розглядається. Величина градієнту швидкості в цьому випадку буде від'ємною величиною: якщо приріст координати вздовж радіуса від центру до краю труби вважати позитивним, то відповідний йому приріст швидкості буде негативним. Тому перед виразом поставлено знак «—». Площа внутрішньої поверхні розраховується як добуток довжини внутрішнього периметра циліндра радіусом r ($2\pi r$) на довжину його твірної l .

Шар рідини, що прилягає до зовнішньої поверхні циліндра, гальмує його з силою $F_2 = \eta l 2\pi(r + dr) \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right)$, направленою ліворуч. У цій формулі враховано більший радіус зовнішньої поверхні циліндричного шару $(r+dr)$ і, як наслідок, більша площа бічної поверхні $2\pi(r + dr)l$. Крім цього враховано величину градієнта швидкості на цій відстані $(r+dr)$ через значення градієнту на відстані r плюс похідна градієнту по радіусу (це буде друга похідна $\frac{d^2v}{dr^2}$) на приріст відстані від центру на dr : $\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr$.

Різниця сил тиску на торцях вибраного циліндричного шару обчислюється за формулою: $\Delta F = p_1 dS - p_2 dS = (p_1 - p_2) \cdot dS = (p_1 - p_2) \cdot 2\pi r dr$. Площа торцевої поверхні циліндра для випадку нескінченно малої її товщини dr можна порахувати як добуток довжини кола радіусом r (тобто $2\pi r$) на товщину стінки трубки dr .

Згідно з рівнянням нерозривності швидкість рідини в циліндричному шарі повинна бути постійною, тому сума всіх діючих сил повинна бути рівна нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + dp d\vec{s} = 0$. Запишемо це рівняння через проєкції сил на вісь, що збігається з віссю трубки: $F_1 - F_2 + dp \cdot ds = 0$.

$$-\eta l 2\pi r \frac{dv}{dr} + \eta l 2\pi(r + dr) \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right) = (p_1 - p_2) \cdot 2\pi r dr.$$

Розкривши дужки і знехтувавши малим доданком другого порядку малості $\left(\frac{d^2v}{dr^2} dr \cdot dr \right)$ по відношенню до dr , отримаємо:

$$2\pi\eta l \frac{dv}{dr} + 2\pi\eta l r \frac{d^2v}{dr^2} = 2\pi\eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi r (p_1 - p_2)$$

Двічі проінтегрувавши, отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} \frac{dv(r)}{dr} &= -\frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta l} + \frac{C}{r} \\ v(r) &= -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} \cdot \frac{r^2}{2} + C \cdot \ln(r) + B \end{aligned}$$

Константи інтегрування визначаємо з граничних умов. Коли $r=0$ (вісь трубки) значення логарифма $\ln(r)$ прагне до мінус нескінченності, що суперечить здоровому глузду. Тому вважаємо, що $C=0$. На границі трубки $v(R)=0$, звідки $B = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot R^2$.

Таким чином, закон зміни швидкості руху рідини в шарах на різній відстані від центра трубки має такий вигляд:

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2)$$

Якщо від кожної точки площини перерізу труби відкласти вектори швидкості, що відповідають швидкості рідини в цих точках, то їх кінці утворять поверхню обертання, меридіональний переріз якої буде параболою (рис. 10) — течія має параболічний профіль швидкостей.

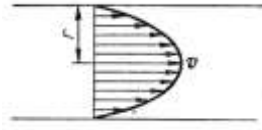


Рис. 10

2.2. Формула обчислення об'єму рідини (газу), що протікають через циліндричну трубку за одиницю часу

Ми з'ясували характер зміни швидкості руху рідини в шарах, що розташовані на різній відстані від центру трубки. Швидкість максимальна в прошарках малого радіусу (біля осі трубки) і майже нульова для шарів з радіусом, близьким до радіусу трубки. Загальна залежність має вигляд: $v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2)$. Згідно з рівнянням нерозривності, швидкість рідини в усіх циліндричних прошарках буде залишатися незмінною.

Знову скористаємось поділом об'єму рухомої рідини на систему циліндричних шарів, що прилягають один до одного, співвісних з віссю трубки, так щоб їх товщина була малою ($dr \rightarrow 0$), а швидкість руху рідини (газу) в кожному з них можна було б вважати постійною. Вигляд перерізу труби з одним виділеним циліндричним шаром зображено на рис. 9, а. Загальний об'єм рідини (газу), що витікатиме з трубки за одиницю часу буде дорівнювати сумі об'ємів, що витікатимуть з кожного циліндричного шару окремо: $Q = \frac{V}{t} = \sum dQ_i$. З циліндричного шару за одиницю часу витікатиме об'єм $dQ = v(r) \cdot dS(r) = v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$, а загальний об'єм ми знайдемо замінивши сумування інтегруванням:

$$Q = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r dr = \int_0^R \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta l}$$

Одже, загальний об'єм рідини(газу), що витікає за одиницю часу з трубки радіусом R і довжиною l , якщо на її кінцях існує різниця тисків $p_1 - p_2$, обчислюється за формулою:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta l}$$

Цей вираз незалежно експериментально отримали у 1838 р. інженер Г. Хаген (1797–1884) і фізіолог Ж.Л. Пуазейль (1779–1869). Останній проводив дослідження руху крові в судинах. Теоретично цю формулу вивів Дж. Г. Стокс у 1845 році.

Величини $Q=V/t$, p_1 , p_2 , R , l , які входять в цю формулу, можна визначити експериментально і вже знаючи їх можна обчислити коефіцієнт в'язкості рідини η . Якщо ж потрібно визначити в'язкість газу за цією формулою, як у нашій лабораторній роботі, то слід притримуватись обмежень, зумовлених значною стисливістю газів. Так як тиск вздовж течії газу через трубку змінюється, то його об'єм не буде зберігатись сталим. Згідно із законом Бойля-Маріотта, в ізотермічних умовах сталим залишається добуток тиску на об'єм pV . Тому для газів формула Пуазейля набуває дещо іншого вигляду:

$$Q = \frac{(p_1^2 - p_2^2)\pi R^4}{16\eta l \cdot p_2}$$

Для того щоб нею скористатись, потрібні манометри, які вимірюють тиск на початку і в кінці капіляру, а не манометр різниці тисків, як в лабораторній установці, описаній в [1]. Тому вимірювання в'язкості повітря слід проводити при невеликих витратах газу, коли $p_1 - p_2 \ll p_2$.

Як впливає з формули Пуазейля, при заданій різниці тисків загальний об'єм рідини, що витікає з труби певної довжини за одиницю часу різко зменшується зі зменшенням радіуса труби. При заданому об'ємі витікаючої рідини за одиницю часу спад тиску на одиницю довжини труби $(p_1 - p_2)/l$ різко зростає на ділянках із малим радіусом трубки. Останній ефект можна продемонструвати, з'єднавши послідовно три відрізки труб різного діаметра, що обладнані манометричними трубками. На однакових по довжині ділянках труби спад тиску у вузькій частині значно більший, ніж у широкій. Більший спад тиску у вузькій частині можна пояснити необхідністю створити більшу різницю тисків, що потрібно для створення більшої швидкості рідини, досягаючи тим самим сталості витрат рідини вздовж всієї трубки.

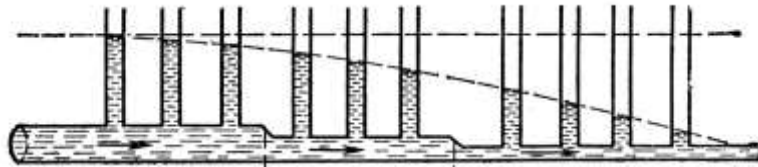


Рис. 12

Література

1. Фізичний практикум. Частина I. Механіка, молекулярна фізика, електрика та магнетизм. Навчальний посібник /М.О. Боровий, В.І. Лисов, В.В. Козаченко, Т.Л. Цареградська, І.В. Овсієнко, О.М. Жабітенко —К., 2012. —289 с. (Механіка, молекулярна фізика) https://gen.phys.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2022/09/FP1_New.pdf
2. Кучеренко І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. —К.: Техніка, 1999, с. 154-170, с. 348-352