КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Чумаченко Артем Васильович
Теслик Максим Вікторович
Теслик Олена Миколаївна
Приходько Олена Олександрівна
Вільчинський Станіслав Йосипович

Квантова механіка

методичні рекомендації до практичних занять

Київ – 2020

ЗМІСТ

Вступ

Методичні рекомендації до практичних занять з курсу „Квантова механіка” містять докладний план практичних занять та обов’язкові задачі на перший та другий семестри даного курсу, додаток з задачами підвищеної складності, список збірників задач, які використовуються на практичних заняттях. Видання призначено для студентів третього курсу фізичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка та викладачів, що проводять практичні заняття.

стала Планка	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.62559 \cdot 10^{-27}/2\pi$ ерг·сек;
число	$\pi = 3.14159265359$;
маса спокою електрона	$m_e = 9.10908 \cdot 10^{-28}$ г;
елементарний заряд	$e = 4.80298 \cdot 10^{-10}$;
Борівський радіус	$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5.2917720859(36) \cdot 10^{-11}$ м;
стала Рідберга	$R = 10973731.568539$ м$^{-1}$.

Теми практичних занять у другому семестрі

Тема 1. Наближені методи квантової механіки.

Семінар 1. Квазікласичне наближення.

Пояснення методу Вентцеля-Крамерса-Бріллюена. Отримання правила квантування Бора-Зоммерфельда:

1. для потенціалу скінченної глибини;
2. для напів нескінченного потенціалу (нескінченна стінка зліва або справа);
3. для бар'єру скінченної ширини трикутної форми. Як приклад розв'язується задача про холодну емісію електронів з металу під дією електричного поля.

Домашнє завдання.
Отримати правило квантування Бора-Зоммерфельда для:

1. потенціалу з двома нескінченними стінками;
2. прямокутного бар'єру скінченної ширини.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], И.В. Копыткин [2], А.Б. Мигдал [3].

Семінар 2.Стаціонарна теорія збурень за відсутності виродження.

1. Отримання поправки першого порядку теорії збурень до рівнів енергії одновимірного гармонічного осцилятора від збурення у вигляді βx^4, використовуючи оператори народження та знищення.
2. Отримання поправки до енергій гармонічного осцилятора з точністю $\mathcal{O}(\hbar^2)$ від збурення у вигляді $\alpha x^3 + \beta x^4$, використовуючи оператори народження та знищення.
3. Отримання енергії основного стану для потенціалу Морзе на основі стаціонарної теорії збурень, використовуючи в якості незбуреної задачі одновимірний гармонічнй осцилятор. Порівняти результат з точним значенням енергії основного стану для потенціалу Морзе.

Домашнє завдання.
Розрахувати енергію основного стану потенціалу Пешля-Теллера на основі стаціонарної теорії збурень, використовуючи в якості незбуре-

ної задачі одновимірний гармонічнй осцилятор. Порівняти результат з точним значенням енергії основного стану для потенціалу Морзе.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], И.В. Копыткин[2], А.В. Шорохов [5].

Семінар 3. Стаціонарна теорія збурень для вироджених станів. Ефект Штарка у атомі водню.

1. Отримання зсуву енергії для лінійного еффект Штарка коли атом водню знаходиться у основному стані $n = 1$;
2. Отримання зсуву енергії для лінійного еффект Штарка коли атом водню знаходиться у першому збудженому стані $n = 2$. Розрахунок енергії розщеплення стану та хвильових функцій отриманих рівнів енергії.

Домашнє завдання.
Розрахувати лінійний еффект Штарка для стану $n = 3$ атома водню. Отримати розщеплення стану та хвильові функцій отриманих рівнів енергії.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], Д.И. Блохинцев [7].

Семінар 4. Варіаційний принцип Рітца.

1. Отримання енергії основного стану гармонічного осцилятора використовуючи пробну функцію у вигляді $\Psi_0 = A\exp[-\alpha x^2]$;
2. Отримання енергії першого збудженого стану гармонічного осцилятора на основі функції $\Psi_1 = Ax\exp[-\alpha x^2]$.

Домашнє завдання.
Отримати значення енергії основного стану гармонічного осцилятора на основі функцій $\Psi_0 = A(1 - x^2/a^2)^{-1}$, $\Psi_0 = A(1 - x^2/a^2)^{-2}$, $\Psi_0 = A\exp(-\alpha|x|)$ та першого збудженого стану $\Psi_1 = Ax\exp(-\alpha|x|)$. Порівняти результати з точним значенням.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], И.В. Копыткин [2].

Тема 2. Релятивістська квантова механіка частинок зі спіном $s = 1/2$.

Семінар 5. Матриці Паулі, Дірака у різних представленнях. Оператор спіну $\hat{\vec{S}}$. Розклад по базису гама-матриць.

1. Перевірка властивостей матриць Паулі;
2. Перевірка властивостей матриць Дірака;
3. Розрахунок комутаторів операторів $[\hat{\vec{S}}, \hat{H}_D]$ та $[\hat{\vec{L}}, \hat{H}_D]$, де $\hat{H}_D$ – гамільтоніан Дірака. Доведення твердження про збереження повного моменту кількості руху у теорії Дірака.
4. Отримання матриць Дірака у представленні Вейля та Майорани;
5. Введення гама-матриць, побудова базису у просторі матриць 4×4, розклад по базису гама-матриць.

Домашнє завдання.
Розкласти по базису гама-матриць наступні добутки:

1. $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5$;
2. $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\sigma$.

Матеріали для підготовки: Дж. Д. Бьёркен [9], Ф. Дайсон [14], Пескин М. [10], W.Greiner [8] .

Семінар 6. Релятивістська інваріантність рівняння Дірака.

1. Отримання виразів для оператора перетворення $\hat{S}$, що визначається умовою $\Psi' = \hat{S}\Psi$, де Ψ' — стан квантової системи у теорії Дірака після перетворення Лоренца (повороти, трансляції та інверсія);
2. Отримання законів перетворення елементів базису гама-матриць при перетвореннях Лоренца (скаляр Лоренца, псевдовектор, псевдоскаляр).

Домашнє завдання.
Довести, що матриця перетворення для біспінора $\hat{S}$ задовольняє співвідношенню $\hat{S}^{-1} = \gamma_0\hat{S}^\dagger\gamma_0$ при власних і невласних перетвореннях Лоренца.

Матеріали для підготовки: Дж. Д. Бьёркен [9], Ф. Дайсон [14], М. Пескин[10], [8] .

Семінар 7. Атом водню в теорії Клейна-Гордона-Фока.

Знаходження спектру енергії електрона у атомі водню в теорії Клейна-Гордона-Фока (КГФ).

1. Розділенням змінних у рівнянні Клейна-Гордона-Фока зводимо задачу до радіального рівняння, що отримується у теорії Шредінгера. Отримуємо спектр електрона

$$E_n = mc^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{\left[n + \frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} \right)^{1/2} \right]^2} \right]^{-1/2}$$

<u>*Домашнє завдання.*</u>

1. Отримати розклад спектру за константою слабкого зв'язку $\alpha = 1/137$ до членів порядку α^2;
2. Порівняти отриманий розклад зі спектром електрона у атомі водню в теорії Шредінгера.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], А.М. Федорченко [6].

Семінар 8. Атом водню в теорії Дірака (частина 1)

1. Розділення оператора $c\hat{\vec{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}}$ у рівнянні Дірака на суму двох доданків $c\hat{\alpha}_r \hat{p}_r + \frac{ic\hbar}{r} \hat{\alpha}_r \hat{\beta} \hat{K}$, що залежать від радіальної та кутових змінних відповідно, де

$$\hat{\alpha}_r = \frac{\vec{r}}{r} \hat{\vec{\alpha}}, \quad \hat{p}_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right),$$

$\hat{\vec{\alpha}}$ та $\hat{\beta}$ – матриці Дірака.

2. Отримання власних значень оператора $\hat{K}$, що задається співвідношенням

$$\hbar \hat{K} = \hat{\beta} \left[(\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}) + \hbar \right],$$

де $\hbar \hat{\vec{S}}/2$ – оператор спіну, $\hat{\vec{L}}$ – оператор моменту кількості руху.

<u>*Домашнє завдання.*</u>

Показати, що оператор $\hat{K}$ має спільну систему власних функцій з операторами $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$ та $\hat{H}_D$ (гамільтоніан Дірака для атома водню).

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], А.М. Федорченко [6].

Семінар 9. Атом водню в теорії Дірака (частина 2)

1. Отримання спектру атома водню в теорії Дірака за методом асимптотик;
2. Порівняння отриманого виразу для спектру зі спектрами атома водню в теорії Клейна-Гордона-Фока та Шредінгера;
3. Розрахунок кратності виродження отриманих енергетичних рівнів.

Домашнє завдання.
Заповнити таблицю ієрархії станів для головного квантового числа від $n = 1$ до $n = 5$. Записати явний вигляд власних функцій електрона для атома водню в теорії Дірака.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], А.М. Федорченко [6].

Семінар 10. Прямокутний потенціал скінченної глибини в теорії Дірака. Парадокс Клейна.

1. Аналіз можливих станів електрона для різних значень енергії $|E| > mc^2$ та $|E| < mc^2$, де mc^2 – енергія спокою електрона, для потенціалу
$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a; \\ -V_0, & -a < x < a, \end{cases}$$
де $a = const$.
Визначення областей, де імпульс електрона p є дійсним;
2. Отримання системи рівнянь на коефіцієнти хвильових функцій зліва ($x < -a$) і справа ($x > a$) від потенціальної ями.
3. Виведення рівняння для спектру енергії для зв'язаних станів при енергії електрона $V_0 < E < mc^2$ та $-a < x < a$;
4. Визначення коефіцієнтів проходження та відбиття для електронів та позитронів при значеннях енергій $|E| > mc^2$.

Домашнє завдання.
Знайти спектр енергій зв'язаних станів та коефіцієнти проходженни та відбиття для задачі про потенціальну яму скінченної глибини в теорії Дірака (скалярний потенціал).
Матеріали для підготовки: W.Greiner [8].

Семінар 11. Енергія частинки зі спіном $s = 1/2$ у постійному магнітному полі. Рівні Ландау.

1. Введення доданку у рівнянні Паулі, що відповідає за взаємодію з магнітним полем H, яке має конфігурацію $\vec{A} = \{yH, 0, 0\}$.
2. Визначення операторів, які комутують з Гамільтоніаном задачі. Зведення задачі до осциляторної.
3. Аналіз спектру частинки у магнітному полі H. Виродження рівнів.

Домашнє завдання.
Для класичної колової траєкторії частинки у магнітному полі визначити координати центру (x_0, y_0) навколо якого обертатиметься частинка. Надати відповідь на питання: Чи зберігаються координати x_0 та y_0 з часом? Чи можуть бути знайдені одночасно?
Матеріали для підготовки: Л.Д. Ландау [19], А.М. Федорченко [6].

Семінар 12. Рух частинки зі спіном $s = 1/2$ у змінному магнітному полі

1. Для змінного у часі поля $H = \{H_1 \cos\omega t, H_1 \sin\omega t, H_0\}$ шукаємо розв'язок нестаціонарного рівняння Паулі;
2. Знаходимо часову залежність компонент спінора $\Psi(t) = (S_1(t), S_2(t))$

$$S_1(t) = \left(Ae^{irt} + Be^{-irt}\right) e^{-\frac{i\omega t}{2}},$$

$$S_2(t) = \left[\left(r - \frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) Ae^{irt} - \left(r + \frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) Be^{-irt}\right] \frac{e^{\frac{i\omega t}{2}}}{\omega_0},$$

   де $\omega_0 = \frac{2\mu H_0}{\hbar}$, $\Delta = \frac{H_1}{2H_0}$, $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}$ та A і B – константи, що визначаються з умов нормування.

Домашнє завдання.
Для початкового положення $S_1(0) = 1$ та $S_2(0) = 0$ (spin up) проекції спіну розрахувати час повного перевороту спіну.
Матеріали для підготовки: Л.Д. Ландау [19], А.М. Федорченко [6].

Тема 3. Квантування електромагнітного поля. Випромінювання та поглинання світла. Теорія дисперсії.

Семінар 12. Квантування електромагнітного поля.

Знайти силу притягання двох металевих заземлених пластин у вакуумі (ефект Казимира) в одно- та двовимірному випадках.

Домашнє завдання.

Розрахувати силу Казимира у тривимірному випадку.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 13. Теорія випромінювання та поглинання.

Знайти інтенсивності випромінювання та поглинання, використовуючи золоте правило Фермі. Правила відбору для дипольного електричного випромінювання (випадок лінійної та кругової поляризації світла).

Домашнє завдання.

Правила відбору для електричного квадрупольного та магнітного дипольного випромінювання.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 14. Елементи нестаціонарної теорії збурень.

Отримати правило Фермі для ймовірності переходів у одиницю часу.

Домашнє завдання.

Довести, що

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha\tau}{\pi\alpha^2\tau} = \delta(\alpha).$$

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 15. Теорія випромінювання та поглинання.

Квантова теорія дисперсії світла для ізотропного середовища. Отримати явний вигляд залежності показника заломлення від частоти ω падаючого світла.

Домашнє завдання.

Вивести правило сум для сили осцилятора (теорема Томаса-Райхе-Куна).

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 16. Теорія випромінювання та поглинання.

Розрахувати диференційний переріз розсіяння через фотоефект, враховуючи правило Фермі та вважаючи переходи однофотонними.

Домашнє завдання.

Розрахувати повний переріз фотоефекту. Розрахувати та проаналізувати кількість поглинутої енергії через фотоефект.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], М.О. Скалли [11].

Тема 4. Елементи теорії розсіяння.

Семінар 17. Теорія пружнього розсіяння.

Борнівське наближення. Функція Гріна розсіяної частинки.

Домашнє завдання.

Знайти у борнівському наближенні диференційний та повний переріз розсіяння у полі:

1. $U(r) = g^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$;
2. $U(r) = U_0 e^{-\alpha^2 r^2}$.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], А.М. Федорченко [6].

Семінар 18. Теорія не пружнього розсіяння.

Отримати диференційний ефективний переріз непружнього розсіяння для атома водню, якщо в результаті зіткнення із швидким електроном атом переходить зі стану $1s$ у стан $2s$.

Домашнє завдання.

Розрахувати переріз непружнього розсіяння швидкого електрону із збудженням атома водню зі стану $1s$ у стан $2p$.

Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1], А.М. Федорченко [6].

Тема 5. Багатоелектронні задачі квантової механіки.

Семінар 19. Квантова механіка багатьох частинок.

Аналіз збуджених станів атома гелію. Ортогелій та парагелій.

Домашнє завдання.
Розрахувати кулонівський та обмінний інтеграли у виразі для енергії першого збудженого стану.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 20. Квантова механіка багатьох частинок.

Розрахувати енергію іонізації для йону атома водню.
Домашнє завдання.
Отримати вираз для енергії іонізації, використовуючи варіаційний метод Рітца з двома варіаційними параметрами.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 21. Квантова механіка багатьох частинок.

Метод Томаса-Фермі. Адіабатичне наближення. Молекула водню H_2.
Домашнє завдання.
Виконати технічні викладки для методів, викладених на практичному занятті.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Семінар 22. Квантова механіка багатьох частинок.

Метод Гартрі-Фока. Спінові стани системи частинок.
Домашнє завдання.
Отримати хвильові функції заплутаних станів для тричастинкової системи.
Матеріали для підготовки: І.О. Вакарчук [1].

Додаткові завдання з квантової механіки підвищеної складності.

1. **Ефект Штарка.** Поясніть, чому у воднеподібних атомах спостерігається лінійний ефект Штарка, а у атома натрію – тільки квадратичний.
2. **Атом тритію.** Електрон знаходиться в основному стані атома тритію ^{3}H. Ядерна реакція змінює ядра на аналогічні до атома гелію ^{3}He.
   (a) Розрахуйте ймовірність того, що електрон лишиться в основному стані атома ^{3}He.
   (b) Яка ймовірність того, що електрон стане вільним?
3. **Нестаціонарне магнітне збурення.** Атом водню спочатку знаходиться у основному стані з повним кутовим моментом $J = L + S = 0$. Цей стан відрізняється від стану з $J = 1$ малою різницею енергій ΔE. На атом починає діяти слабке магнітне поле, направлене вздовж осі z, яке визначається функцією

$$B_z(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ B_0 e^{-\gamma t}, & \text{при } t > 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

   де B_0 та γ — константи.
   (a) Напишіть ефективний гамільтоніан взаємодії атома з магнітним полем. Поясніть, чому можна знехтувати взаємодією протона з магнітним полем.
   (b) Розрахуйте ймовірність, що у далекому майбутньому, коли поле повністю зникне, атом буде знаходитись у стані з $J = 1$. При розв'язку задачі не розглядайте можливість випромінення фотонів атомом.
4. **Протони у магнітному полі.** Протони з магнітним моментом μ знаходяться у магнітному полі $\vec{B} = (B_0 \cos\omega t, B_0 \sin\omega t, B_z)$, де B_z та B_0 – константи. В момент часу $t = 0$ усі протони поляризовані в напрямку осі z.
   (a) Яке значення частоти ω буде резонансним, якщо $B_0 \ll B_z$?
   (b) Яка ймовірність перевороту спіну протона в момент часу t, якщо $B_z \ll B_0$?
5. **Оптична теорема.** Розглянемо частинку, що летить з нескінченності вздовж осі z і пружньо розсіюється на деякому центральносиметричному потенціалі $U(r)$, який достатньо швидко спадає з

відстанню. Щоб знайти хвильову функцію цієї частинки, спочатку дослідимо загальний розв'язок рівняння Шредінгера. Його можна шукати у вигляді розкладу за поліномами Лежандра:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r), \tag{0.2}$$

де A_l — довільні коефіцієнти, а функції $R_{kl}(r)$ визначаються радіальним рівнянням Шредінгера:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{kl}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\right)R_{kl} = 0 \tag{0.3}$$

(a) Знайдіть розв'язок цього рівняння для випадку $U(r) = 0$ та переконайтесь, що асимптотика при $r \to \infty$ дається виразом:

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \tag{0.4}$$

(b) Обґрунтуйте, що увімкнення короткодіючого потенціалу $U(r)$ модифікує асимптотику наступним чином:

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{0.5}$$

Величини δ_l називаються *фазою розсіяння.*

З іншого боку, хвильова функція частинки при розсіянні повинна мати вигляд плоскої хвилі та сферичної хвилі, що розходиться,

$$\Psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr}. \tag{0.6}$$

Функція $f(\theta)$ називається *амплітудою розсіяння.*

(a) Користуючись розкладом плоскої хвилі за поліномами Лежандра

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left((-1)^{l+1}e^{-ikr} + e^{ikr}\right),$$

доведіть, що асимптотика хвильової функції Ψ має вигляд

$$\Psi \simeq \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left((-1)^{l+1}e^{-ikr} + e^{i\delta_l}e^{ikr}\right). \tag{0.7}$$

Знайдіть звязок між амплітудою розсіяння $f(\theta)$ та фазами розсіяння δ_l.

Переріз розсіяння визначається наступною формулою:

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

(a) Користуючись знайденим вище зв'язком між амплітудою та фазами розсіяння доведіть *оптичну теорему*:

$$\mathrm{Im} f(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma.$$

6. **Тривимірний дельта-потенціал.** Частинка маси m взаємодіє з тривимірним сферично симетричним потенціалом $V(r) = -C\delta(r-a)$, де C та a є достатніми константами.
   (a) Знайдіть мінімальне значення C для якого існує зв'язаний стан.
   (b) Розгляньте експеримент з розсіяння в якому частинка налітає на потенціал з малою швидкістю. Розрахуйте переріз розсіяння і кутовий розподіл у цьому наближенні.
7. **Розсіяння на сферичній прямокутній ямі.** Розрахуйте переріз розсіяння низькоенергетичної частинки маси m на потенціалі

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{при } r < a, \\ 0, & \text{при } r > a, \end{cases} \tag{0.8}$$

де $V_0 > 0$. Результат порівняйте з Борнівським наближенням.

8. **Розсіяння у потенціалі Пешля-Теллера.** Частинка маси m розсіюється на центральному потенціалі

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{ma^2}\frac{1}{\cosh^2(r/a)}, \tag{0.9}$$

де a — константа розмірності довжини. Розрахуйте внесок s-хвилі до повного перерізу розсіяння для енергії E.

9. **Дві частинки у нескінченній ямі.** Дві неідентичні частинки однакової маси m знаходяться у нескінченній потенціальній ямі шириною L.

(a) Запишіть хвильові функції трьох перших станів з найменшою енергією (для яких щонайбільше одна частинка перебуває у збудженому стані), якщо частинки не взаємодіють між собою.

(b) Нехай потенціал взаємодії між частинками $V_{12} = \lambda\delta(x_1 - x_2)$. Знайдіть поправки до енергій цих станів у першому порядку теорії збурень.

10. **Магнітна сприйнятливість атома гелію.** Оцінити магнітну сприйнятливість атома гелію у основному стані. Він є парамагнетиком чи діамагнетиком?

11. **Молекула порфірину.** Порфіринове кільце це молекула, яка міститься у хлорофілі, гемоглобіні та інших важливих речовинах. Приблизний спектр молекули можна отримати якщо змоделювати її як 18 вільних ідентичних електронів що знаходяться на кільці радіуса $R = 4$ Å.

    (a) Запишіть хвильові функції даної багатоелектронної системи з певними значенням енергії.

    (b) Знайдіть найнижчу енергію збудження і відповідне чисельне значення довжини хвилі.

12. **Вектор Рунге-Ленца.** Для кулонівського потенціалу $V(r) = -\dfrac{e^2}{r}$ в класичній механіці існує інтеграл руху:

$$\vec{A} = \frac{1}{m}\left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - \frac{e^2\vec{q}}{q}, \qquad (0.10)$$

де m – маса електрона, а $\vec{p}$, $\vec{q}$ та $\vec{L}$ – імпульс, координата та момент імпульсу відповідно.

(a) Знайдіть відповідний ермітовий оператор у квантовій механіці. Перевірте, що він зберігається для гамільтоніану з кулонівським потенціалом;

(b) Запишіть інший оператор симетрії даного гамільтоніану, окрім тривимірних поворотів;

(c) Доведіть наступні вирази:

$$\hat{A}^2 = e^4 + \frac{2}{m}\left[\hat{L}^2 + \hbar^2\right]\hat{H} \qquad (0.11)$$

$$(\hat{A} \cdot \hat{L}) = (\hat{L} \cdot \hat{A}) = 0$$

(d) Знайдіть такий оператор $\hat{J}$, що $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$ і вираз (0.11) переписується як співвідношення тільки на $\hat{J}$ та $\hat{H}$;

(e) Таким чином, покажіть, що власні значення гамільтоніану залежать лише від одного квантового числа.

13. **Нерівність Белла.** *Теорії з прихованими параметрами* – це альтернативні до квантової механіки теорії, у яких припускається, що ймовірнісна природа квантового вимірювання пов'язана зі складною, але класичною динамікою прихованих степенів вільності. У цих теоріях квантовий стан можна ефективно описувати класичним розподілом імовірності $P(\mathcal{O}_1, ..., \mathcal{O}_n)$, де $\mathcal{O}_i$ – релевантні для даного досліду спостережувані.

Белл (1964) запропонував наступний дослід, що дозволяє однозначно перевірити дієздатність таких теорій з прихованими параметрами. Розглянемо дві квантові частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ у синглетному стані. Ці частинки розділяють та направляють до ізольованих між собою камер. Нехай у камері 1 вимірюється проекція спіну на вісь $\vec{a}_1$. Результат вимірювання $\pm\frac{1}{2}$ (в одиницях сталої Планка $\hbar$) назвемо A_1. У другій камері вимірюється проекція спіну A_2 на вісь $\vec{a}_2$. Проводячи повторно цей дослід, отримано деяке середнє значення добутку $\langle A_1 A_2 \rangle$.

(a) Допускаючи усі можливі напрямки $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, у яких межах може змінюватись величина $\langle A_1 A_2 \rangle$?

(b) Тепер розглянемо величину

$$R = |\langle A_1 A_2 \rangle + \langle B_1 A_2 \rangle + \langle B_1 B_2 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle|,$$

де B_1 та B_2 відповідають деяким новим осям $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ (індекси 1, 2 відповідають камерам 1, 2). Припустимо, що дана система описується теорією з прихованими параметрами. В такому разі наш дослід має повністю описуватись деяким розподілом імовірностей $P = P(A_1, A_2, B_1, B_2)$.

Допускаючи довільний розподіл P та напрямки осей $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$ та $\vec{b}_2$ – яке максимальне значення може набувати величина R? Відповідне обмеження називається *нерівністю Белла.*

(c) Доведемо, що квантова механіка передбачає порушення цієї нерівності. Для простоти, розглянемо вісі $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$ та $\vec{b}_2$, що лежать у одній площині.

Знайдіть власні стани матриці $(\vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}})$ проекції спіну на вісь

$\vec{n}$, скориставшись сферичними координатами для $\vec{n}$. Скористайтесь результатом, щоб виразити величину R через відносні кути між осями. Знайдіть хоча б одне розташування осей, при якому можна очікувати порушення нерівності Белла.

14. **Стохастичний осцилятор.** Частинка з масою m знаходиться у одновимірному гармонічному осциляторному потенціалі $V_1 = \dfrac{1}{2}kx^2$.
    (a) У початковий момент частинка знаходиться у основному стані. Константа k раптово подвоюється, тобто новий потенціл стає рівним $V_2 = kx^2$, після чого енергія частинки вимірюється. Яка ймовірність того, що частинка опиниться у основному стані нового потенціалу V_2?
    (b) Розглянемо інший експеримент, де константа k у потенціалі раптово подвоюється так само, як і у попередньому пункті, але енергія частинки не вимірюється. Замість цього через час T після переходу до потенціалу V_2 відбувається зворотна зміна потенціалу до V_1. Знайдіть такі моменти часу T, що система буде знайдена у основному стані для V_1 з ймовірністю 100%.
    (c) Чи будуть існувати такі моменти часу T з попереднього пункту, якщо V_2 — деякий довільний потенціал? Якщо ні, то яким умовам повинен задовольняти потенціал V_2 для існування таких T?
15. **Осциляції нейтральних K-мезонів.** У цій задачі ми будемо розглядати нестабільні частинки. Для їх спрощеного опису ми будемо використовувати неермітові гамільтоніани $H^+ \neq H$.
    (a) Розглянемо частинку у стані спокою, що описується гамільтоніаном $\hat{H} = M - \frac{i}{2}\Gamma$, де M, Γ — дійсні додатні числа. Покажіть що ймовірність спостереження частинки підкорюється закону радіоактивного розпаду з часом життя $\hbar/\Gamma$. Величину Γ називаюсь *шириною розпаду.*

    У природі існує 2 нейтральні K-мезона $|K^0\rangle$ та $|\bar{K}^0\rangle$, що мають кварковий склад $d\bar{s}$ та $\bar{d}s$ відповідно. Відомо, що ці стани переходять один в одного під дією CP симетрії, яка є симетрією квантової хромодинаміки. Будемо записувати хвильову функцію системи як

$$|\Psi\rangle = a|K^0\rangle + b|\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{0.12}$$

У цьому представленні гамільтоніан K-мезонів у стані спокою має вигляд

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K & 0 \\ 0 & M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K \end{pmatrix}. \tag{0.13}$$

Стан $|K^0\rangle$ може переходити у стан $|\bar{K}^0\rangle$ через слабку взаємодію, що ми будемо описувати за допомогою оператора $\hat{V}_W$. Припустимо, що слабка взаємодія CP-інваріантна (це не зовсім так, але порушення CP інваріантності дуже мале і ми його розглядати далі не будемо).

(a) Покажіть, що

$$\langle K^0|\hat{V}_W|\bar{K}^0\rangle = \langle \bar{K}^0|\hat{V}_W|K^0\rangle = \Delta, \tag{0.14}$$

де Δ деяке комплексне число. Тоді повний вираз для гамільтоніану вільних K-мезонів

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K & \Delta \\ \Delta & M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K \end{pmatrix}. \tag{0.15}$$

(b) Діагоналізуйте цей гамільтоніан. Покажіть що власні стани цього гамільтоніану є власними станами оператору CP симетрії з власними значеннями ± 1.

CP-парний стан називають $|K_S^0\rangle$, а CP-непарний $|K_L^0\rangle$. Їм відповідають частинки з певними масами m_S, m_L та ширинами розпаду Γ_S, Γ_L.

(a) Пов'яжіть між собою параметри нашої моделі M_K, Γ_K, Δ з фізично спостережуваними властивостями частинок.

Нехай у початковий момент часу утворюється нерухома частинка у стані $\Psi(0) = |K^0\rangle$.

(a) Знайдіть ймовірність $P(t)$ детектування частинки у стані $|\bar{K}^0\rangle$ у момент часу t. Відповідь запишіть через спостережувані параметри системи. У який час t ця ймовірність максимальна і чому вона рівна?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вакарчук І.О.* Квантова механіка. Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2007.-848 с.

2. *И.В. Копыткин, А.С. Корнев, Т.А. Чуракова* Задачи по квантовой механике: учебное пособие для вузов. Часть 3. Воронеж, 2008.-75 с.

3. *А.Б. Мигдал, В.П. Крайнов* Приближенные методы квантовой механики. Москва: Наука, 1966.- 152 с.

4. *А.В. Шорохов, М.А. Пятаев* Ведение в квантовую теорию. Саранск, 2010.-63 с.

5. *А.В. Поваров* Повышающий и понижающий операторы в квантовой механике. Ярославль, 2010.-18 с.

6. *Федорченко А.М.* Основы квантовой механики. К. Вища школа, 1979.- 271 с.

7. *Д.И. Блохинцев* Основы квантовой механики. М. Наука, 1976.- 664 с.

8. *Walter Greiner* Relativistic quantum mechanics: wave equations. Berlin, Springer 2000.

9. *Дж. Д. Бъёркен, С. Д. Дрелл* Релятивистская квантовая теория. М. Наука, 1978. - 297 с.

10. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. — Ижевск: РХД, 2002. — 784 с.

11. *М.О. Скалли, М.С. Зубайри* Квантовая оптика. — М: Физматлит, 2003. — 512 с.

12. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979. — 440 с.

13. *Дирак П. А. М.* Релятивистское волновое уравнение электрона (рус.) // Успехи физических наук. — 1979. — Т. 129, вып. 4. — С. 681—691.

14. *Дайсон Ф.* Релятивистская квантовая механика. — Ижевск: РХД, 2009. — 248 с.

15. *Шифф Л.* Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1959. — 476 с.

16. *Shankar R.* Principles of Quantum Mechanics. — Plenum, 1994.

17. *Thaller B.* The Dirac Equation. — Springer, 1992.

18. *Forshaw, J. R.; Smith, A. G.* Dynamics and Relativity. Manchester Physics Series. John Wiley and Sons Ltd, 2009. pp. 124–126.

19. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 512 с.