Закони Ньютона

Динаміка - розділ механіки, де розглядаються причини зміни (чи сталості) руху. В основі - три закони Ньютона

У кінематиці всі СВ рівноправні, у динаміці - ні, причиною прискорення тіла відносно якоїсь СВ може бути як дія з боку інших матеріальних об'єктів, так і властивості самої С.В.

Якщо взаємодія з іншими матеріальними об'єктами (частинками, полями) відсутня - вільний рух тіла (рух ~~...~~ за інерцією)

I з. Ньютона (закон інерції Галілея-Ньютона): існують інерціальні системи відліку, в яких вільний рух частинки відбувається прямолінійно і рівномірно (прискорення тіла обумовлене взаємодією) $\Leftrightarrow$ $\forall$ тіло перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки дія на нього з боку інших ~~...~~ тіл не змінить цей стан (останнє формулювання Ньютона передбачає існування абсолютної СВ, яка постулювалася вченим)

Інерціальних СВ безліч - $\forall$ СВ, що рухається відносно деякої СВ рівномірно та прямолінійно, також є інерціальною.

До певної міри (щонайменше для спостерігачів в аудиторії) ІСВ - пов'язана з поверхнею стола (з поверхнею Землі)

СВ	a, м/с^2
Поверхня Землі	$3\cdot10^{-2}$
геоцентрична (центр Землі + "нерухомі" віддалені зірки	$1{,}6\cdot10^{-3}$
геліоцентрична (центр Сонця + -//-	$3\cdot10^{-10}$
центр мас Галактики	?

II з. Ньютона (узагальнення дослідних фактів)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

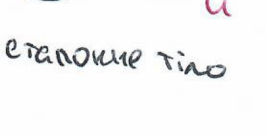
(прискорення мат. точки в ІСВ ~ $\vec{F}$ (прикладеній до неї силі) і обернено ~ масі)

Є взаємодія $\Rightarrow$ прискорення або деформація (загалом зміна відносного положення частинок супроводжується їх прискоренням)

Сила - кількісна міра взаємодії. Векторна величина, напрям визначається напрямом прискорення, яке вона викликає $\vec{F} \parallel \vec{a}$

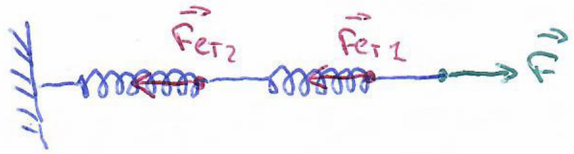
Вимірювання сили ґрунтується на вимірюванні наслідків її дії (прискорення чи деформації)

Наприклад еталонна сила



2 Способи вимірювання сили

- статичний (вимірювана компенсується еталонною (з боку пружини))



для перевірки, що сила - вектор

- динамічний, спирається на те, що для одного тіла

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\ldots=const \qquad \frac{a_1}{a_2}=\frac{F_1}{F_2}$$

Для різних тіл const різна, проте властивість протидіяти зміні мех. стану є універсальною, незалежною від форми, матеріалу, заряду, інших фізичних характеристик.
Ця вл-ть наз. * інертність і для її кількісної характеристики вводять масу (інертну) - скалярна х-ка

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}$$ - спосіб вимірювання

$\rho(x,y,z)=\frac{dm}{dV}$

$m=\int\rho dV=\int\rho(x,y,z)dxdydz$

$\langle\rho\rangle=\frac{m}{V}$

а) величина адитивна (складене тіло)
б) незмінна при русі (при $v \ll c$) та незалежна від вз-ї з іншими тілами

$$\vec a=\frac{1}{m}\sum_i \vec F_i$$ - основне рівняння мат. точки, так як дозволяє за відомими силами та початк. умовами знайти мех. стан ($\vec r(t), \vec v(t)$)

при $\vec F_\Sigma=0 \Rightarrow \vec a=0$, $\vec v=const$ проте II з.Н не є аналогом I з.Н.
I з.Н. постулює існування І.С.В., а II з.Н справедливий лише в І.С.В

$[m]$ = кг $\qquad$ $[F]$ = Н = кг·м·$с^{-2}$.

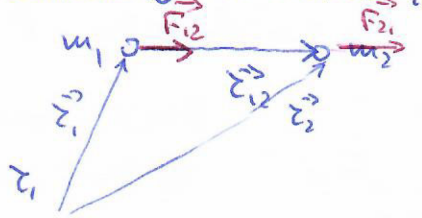
Фундаментальні взаємодії

вид	інтенсивність	радіус дії
сильна	1	$\sim 10^{-15}$ м
✓ електромагнітна	1/137	∞
слабка	10^{-15}	$\sim 2\cdot10^{-18}$ м
✓ гравітаційна	10^{-40}	∞

Закони сил встановлюються експериментально (див. способи вимірювання.

1) Сила гравітаційного притягання між двома мат. точками визначається законом всесвітнього тяжіння, встановлене Ньютоном

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$\vec F_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec r_{12}}{r_{12}}$$

з боку 1 та 2

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2·кг$^{-2}$

m_1, m_2 - гравітаційні

$m_{гр} \approx m_{in}$, if коеф. пропорційності = 1, то... загалом далі ще буде З.В.Т

Якщо маси не точкові

$$\sum \vec F_{ij} = F$$

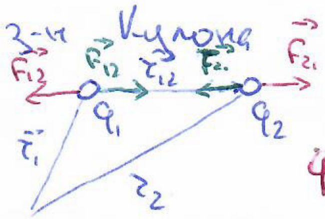
2) Сила електромагнітної вз-ї

$$\vec F = q\vec E + q[\vec v, \vec B]$$

, $\vec v, \vec B$ - в одній СВ

Якщо заряди нерухомі - з-н Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$\vec F_{21} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec r_{12}}{r_{12}}$$

$q_1 \cdot q_2 > 0$ $\quad$ $q_1 q_2 < 0$

Наближені закони сил (встановлені емпірично, спрощують грав. та ЕМ взаємодії:

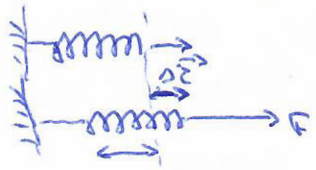
а) однорідна сила тяжіння

$$\vec F_т = m\vec g$$

$h \ll R_з$ $\quad F = G\frac{m M_з}{(R_з + h)^2} \approx m\underbrace{\frac{G M_з}{R_з^2}}_{g}$

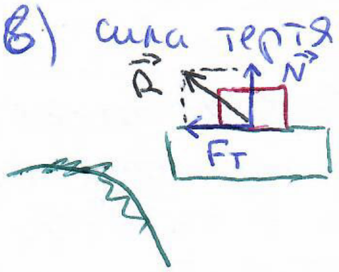
б) сила пружної деформації

$$\vec F_{пруж} = -k\Delta\vec r$$



$\Delta\vec r$ - вектор зміщення з положення рівноваги

в) сила тертя



Якщо тіла контактують - між ними виникають сили вз-ї - R сила реакції, одне тіло □ діє на інше □. В загальному випадку

$$\vec R = \vec N + \vec F_т$$

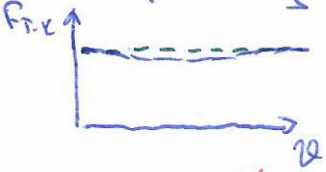
нормальна складова $\vec R$ (сила нормального тиску збоку □)

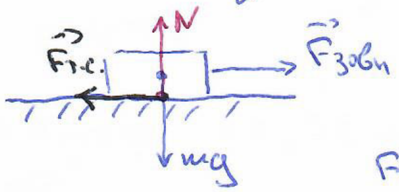
$\vec F_т$ - тангенціальна складова (дії в площині контакту) наз. сила тертя.

Якщо є рух тіл - сила тертя ковзання

$F_{т.к.} = \mu N$, $\quad \vec F_{т.к} = -\mu N\frac{\vec v}{v}$ $\quad$ v - відносна швидкість

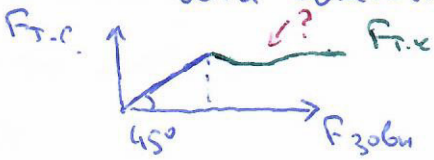
В простому випадку $\mu \neq f(v)$, але насправді певна залежність є, пов'язана зі зміною стану поверхонь в процесі руху (сухе тертя)





$\vec F_{тс} = -\vec F_{зовн}$

Якщо прикласти силу до тіла, що знаходиться на поверхні недостатню силу, то вона компенсується силою тертя спокою



максимальна сила тертя сп.
$F_{т.с.max} = \mu_0 N$ причому може бути $\mu_0 > \mu$

Якщо тіло рухається в рідині або газі - сила опору

сила внутрішнього тертя → $\vec F_{оп} = -k\vec v$ - при малих швидкостях
$k = f$ (форма, розмір тіла, характеристики рідини або газу)

або $\vec F_{оп} = -k'(v)\frac{\vec v}{v}$

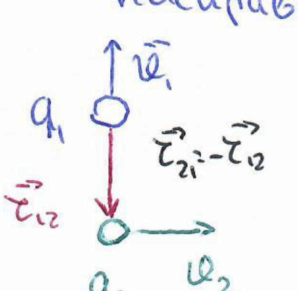
наприклад в аеродинаміці $\vec F_{оп} = -k v^2 \frac{\vec v}{v}$
при великих шв-тях $\left(F = k S \frac{\rho v^2}{2} \right)$
(в'язке)

Якщо на контакті рідина - рідинне тертя, для якого характерним є відсутність тертя спокою (рух може початися під дією ∀ малої сили)

<u>III з. Ньютона</u>: будь-яка дія одного тіла на інше має характер взаємодії, причому сили взаємодії мат. точок дорівнюють за модулем і протилежно спрямовані вздовж прямої, що їх з'єднує

$$\vec F_{12} = -\vec F_{21}$$

в клас. механіці вважається, що виконується в ∀ момент часу незалежно від руху частинок, що ~~насправді~~ можливо якщо вз-я поширюється з нескінченно великою швидкістю (принцип далекодії)
Насправді поширення вз-ї обмежене ~~шв~~ $c = 3\cdot10^8$ м/с.



Сила на q_1: $\vec F_{12} = q_1\vec E_{12} + q_1[\vec v_1, \vec B_{12}]$ — поля створювані q_2 в т. розт. q_1

$$\vec E_{12} = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\frac{\vec r_{12}}{r_{12}} \qquad \vec B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2}{r_{12}^3}[\vec v_2, \vec r_{21}]$$

$$\vec F_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^3}\vec r_{12} + \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r_{12}^3}[\vec v_1, [\vec v_2, \vec r_{21}]]$$

Аналогічно $\vec{F}_{21} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}\vec{r}_{21} + \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r_{21}^3}[\vec{v}_2,[\vec{v}_1,\vec{r}_{12}]]$

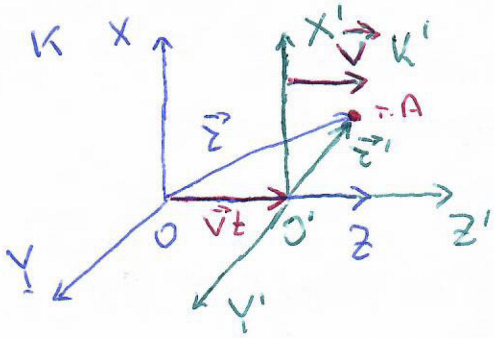
$\vec{v}_1 \parallel \vec{r}_{12}$ => магнітне поле, що створюється q_1 в т. розт. $q_2 = 0$

водночас $\vec{v}_2 \perp \vec{r}_{21}$, тому при рівності за модулем перших доданків $\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{12}$

якщо оцінити модулі сил то $\frac{F_m}{F_{el}} = \frac{v_1 v_2}{c^2}$ тому за малих швидкостей відмінність помітити важко

Принцип відносності Галілея

В усіх ІСВ властивості простору і часу однакові, як всі закони механіки, механічні явища — узагальнення дослідних фактів => неможливо розрізнити ІСВ, встановити, чи рухається дана..



↗ K' рухається з $\vec{V}$ відносно іншої ІСВ K

при $t=0$ O та O' збігаються ($t=t'$)

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$ (*) $\left.\begin{array}{l}\vec{r}' = \vec{r}(t) - \vec{V}t \\ t' = t\end{array}\right\}$ перетвор. Галілея

інваріанти: - часові інтервали між подіями $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$

- просторові відрізки $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}'$ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}$

В ПДСК перетворення Галілея в координатах мають вигляд

$x' = x$; $y' = y$; $z' = z - Vt$, $t' = t$

Похідна від (*) => $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ $v_x' = v_x$ $v_y' = v_y$ $v_z' = v_z - V$

$\Delta\vec{v}' = \Delta\vec{v}$

ще одна похідна $\vec{a}' = \vec{a}$

Якщо маса частинки не залежить від швидкості, то $m' = m$

Сили взаємодії теж інваріанті => сила є функцією інваріантних величин (різниць координат та швидкостей)

$m\vec{a} = \vec{F}$ залишається незмінним при перетвореннях Галілея

І з.Н також не змінюється (враховуючи визначення ІСВ),

ІІІ з.Н при незмінності сил — теж.

З іншого боку, якщо розглянути НеІСВ, то І з. не виконується, $\vec{V}$ не буде постійною, $\vec{a}' \neq \vec{a}$ => ІІ з. не виконується для виконання ~~тр~~ III з.Н. необхідна далекодія, тобто $v \ll c$

Квантова механіка (з об'єктами розміром $10^{-9} \div 10^{-15}$ м) - миттєвий стан частинки не може бути описаний класичним способом через значення координат та швидкостей, поняття траєкторії не застосовне

$$\Delta x \cdot m \Delta v_x \geq \frac{h}{2\pi}$$

Отже для виконання З.Н необ. ІСВ, невеликі швидкості, макрооб'єкти

Приклади застосування законів Ньютона

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \qquad m\vec{a} = \vec{F}$$

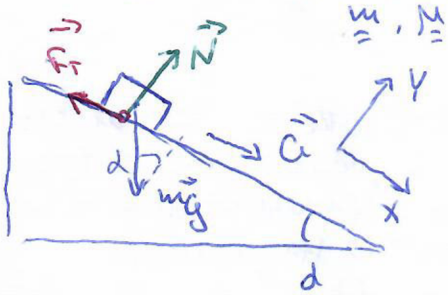
згадаємо $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ $\Rightarrow$ $m\frac{dv}{dt} = F_\tau$, $m\frac{v^2}{R} = F_n$ — проекції сили на орти $\vec{\tau}$ та $\vec{n}$ (до центру)

напевне краще в II з.Н.

зручно, якщо відома траєкторія

1. Зробити малюнок
2. Зобразити вектори сил, що діють на тіла системи ← поля, інші тіла, що контактують
3. Записуємо рівняння II з. Н. у векторному вигляді для кожного тіла системи $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ ← сил зі знаком "-" у векторній сумі не буває
4. Вибираємо систему відліку, проектуємо ~~...~~ р-ня руху
5. Визначаємо зв'язки між величинами
6. Розв'язуємо систему рівнянь
7. Проаналізувати отриманий розв'язок (розмірність, граничні випадки

Тіло на похилій площині



Сила реакції у вигляді двох сил $\vec{R} = \vec{F}_T + \vec{N}$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{N}$$

OX: $ma_x = mg\sin\alpha - F_T$

OY: $ma_y = -mg\cos\alpha + N$

$y = const$ $\quad \dot{y} = 0 = v_y$ $\quad a_y = \ddot{y} = 0$, $\quad a_x = a$

$F_T = \mu N$ $\quad \left(\vec{F}_T = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}\right)$

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - \mu N \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

$N = mg\cos\alpha$

$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $a = g$ - вільне падіння

$\mu = 0$ $a = g\sin\alpha$ +

$\mu = tg\,\alpha$ $a = 0$ - сила тертя спокою +

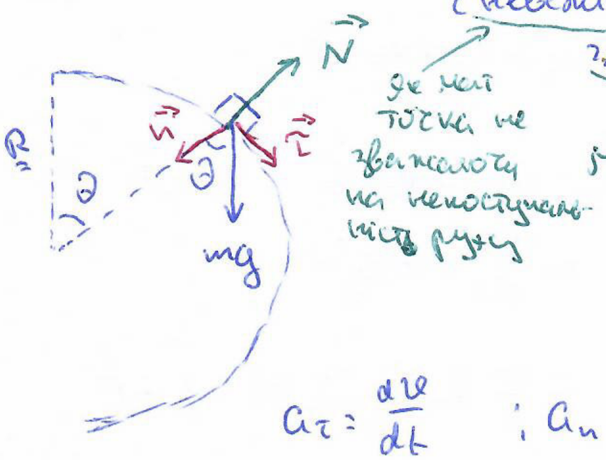
$\alpha = 0$ * $a = -g\mu$ ⊖ фізично неможливий розв'язок тому що наш вираз не застосовний для області $tg\,\alpha \leq \mu$ (ми при розв'язку вважали, що брусок ковзає

Повна відповідь : $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ при $\alpha > \mathrm{arctg}\,\mu$

$tg\,\alpha > \mu$

Ковзання тіла з вершини сфери

(невелике тіло починає ковзати з вершини гладенької сфери радіусом R. Визначити швидкість в момент відриву



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\begin{cases} ma_\tau = mg\sin\theta \\ ma_n = mg\cos\theta - N \end{cases}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g\sin\theta \\ m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N \end{cases}$$

$v = \frac{ds}{dt}$; $ds = Rd\theta$; $v = R\frac{d\theta}{dt}$

$dt = \frac{Rd\theta}{v}$

$$v\,dv = gR\sin\theta\,d\theta \qquad t = 0 \quad v = 0 \quad \theta = 0$$

$$\int_0^v v\,dv = gR\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{v^2}{2} = gR(1-\cos\theta) \\ m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N \end{matrix}\right\}$$

В момент відриву $N = 0$

$$\begin{cases} \frac{v_в^2}{2} = gR(1-\cos\theta_в) \\ \frac{v_в^2}{R} = g\cos\theta_в \end{cases}$$

$$\cos\theta_в = \frac{v_в^2}{gR} \qquad \frac{v_в^2}{2} = gR - gR\frac{v_в^2}{gR} \qquad \frac{3}{2}v_в^2 = gR \qquad v_в = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

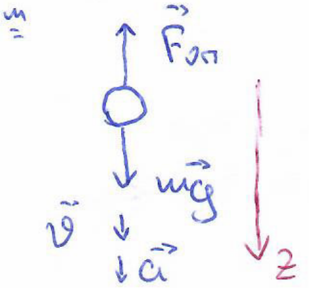
$$\cos\theta_в = \frac{2}{3}$$

$v_в \nearrow$ при $R \nearrow, g \nearrow$ $\theta_в \neq f(R)$

результат справедливий, коли розмірами тіла можна знехтувати

Затяжний стрибок парашутиста

знайти max швидкість, якої може досягти пар-т масою m, якщо сила опору повітря $\vec F_{оп} = -k\vec v$



$m\vec a = m\vec g + \vec F_{оп}$

$m\vec a = m\vec g - k\vec v$ $v(0)=0 \Rightarrow$ при $t=0$ прискорення максимальне

$\vec v_{max}$ при $\vec a = 0$ $\vec v_{max} = \frac{m}{k}\vec g$

$[v] = \frac{[m]}{[k]}[g]$ $[k] = \frac{[F]}{[v]}$

$[v] = \frac{[m]}{[F]}[g]\cdot[v] = \frac{кг}{Н}\frac{м}{с^2}\cdot\frac{м}{с} = \frac{кг\cdot м}{кг\cdot м\cdot с^{-2}\cdot с^2}\frac{м}{с} = \frac{м}{с}$

$k=0$ $v_{max}\to\infty$ (бо рух рівноприскорений)

$v_{max} \nearrow$ при $m\nearrow$, $g\nearrow$, $k\searrow$

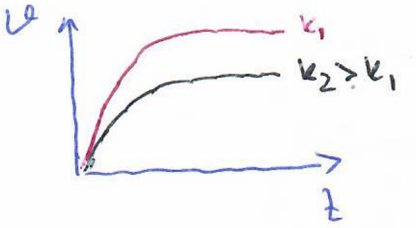
Спробуємо знайти закон зміни швидкості з часом

$m\frac{d\vec v}{dt} = m\vec g - k\vec v$ OZ: $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$ $\int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v} = \int dt$ $-\frac{m}{k}\ln|g-\frac{k}{m}v| = t + C$

$\ln|\underbrace{g - \frac{k}{m}v}_{\geq 0}| = -\frac{k}{m}t + C'$ $g - \frac{k}{m}v = C'' \exp(-\frac{k}{m}t)$, $t=0$, $v=0$, $C''=g$

$g - \frac{k}{m}v = g\exp(-\frac{k}{m}t)$ $v = \frac{m}{k}g(1-\exp(-\frac{k}{m}t))$



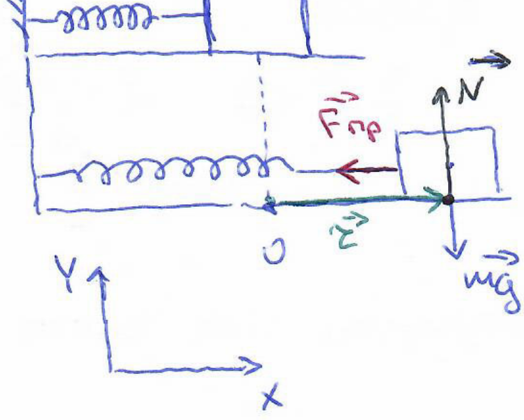
при малих t $\exp(-\frac{k}{m}t) \approx 1 - \frac{k}{m}t$

$v \approx \frac{m}{k}g(1 - 1 + \frac{k}{m}t) = gt$ - лінійна як при рівноприскореному

Коливання тіла під дією пружної сили

- закон руху після початкового розтягу пружини на x_0

m, k



$m\vec a = m\vec g + \vec N + \vec F_{пр}$

$\vec F_{пр} = -k\vec r$

$m\vec a = m\vec g + \vec N - k\vec r$

OX: $ma_x = -kx$

OY: $m\cdot 0 = N - mg$ $N = mg$ і збудим.

$a_x = \ddot{x}$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ ← декілька слів про ~~коливання~~ очікуваний рух (збільш. шв-ті, перехід за т. рівноваги, зменшення, зупинка...)

$k>0,\ m>0 \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 > 0 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

амплітуда, фаза, початкова фаза

$-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t+\varphi) = 0$

$\omega = \omega_0$ – власна частота коливань (визначається лише властивостями системи)

$t=0 \quad x = x_0 \quad x_0 = A\cos\varphi$

$\dot{x} = v = 0 \quad 0 = -A\omega_0\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0,\ A = x_0$

$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

T ↗ при m ↗, k ↘; при $k \to 0$ $T \to \infty$ коливань немає.

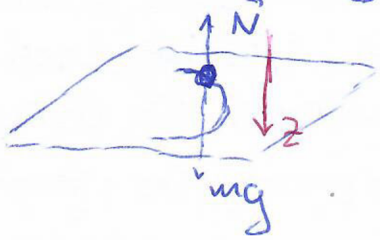
Якщо інші початкові умови $x=0$, $v = v_0$

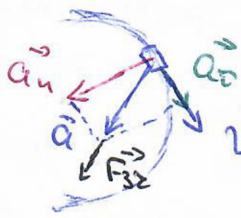
$0 = A\cos\varphi \quad v_0 = -A\omega_0\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2};\ A = -\frac{v_0}{\omega_0}$

$x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

Прискорений рух автомобіля по колу

на горизонтальній поверхні автомобіль починає рухатися по колу R, причому його швидкість зростає $\frac{dv}{dt} = a_\tau$. коеф. тертя ковзання коліс з поверхнею – μ. Знайти максимальну швидкість, яку може розвинути, залишаючись на траєкторії.





$m\vec a = m\vec g + \vec N + \vec F_{зт}$

рух плоский

$m\vec a = \vec F_{зт}$

$Oz: \quad 0 = mg - N \quad N = mg$

$m\vec a = \vec F_{зт} \Rightarrow$ 1) $\vec a \parallel \vec F_{зт}$

2) єдина сила, що спричиняє прискорення – сила тертя (а не сила тяги двигуна)

$F_{зт,max} = \mu N = \mu mg$

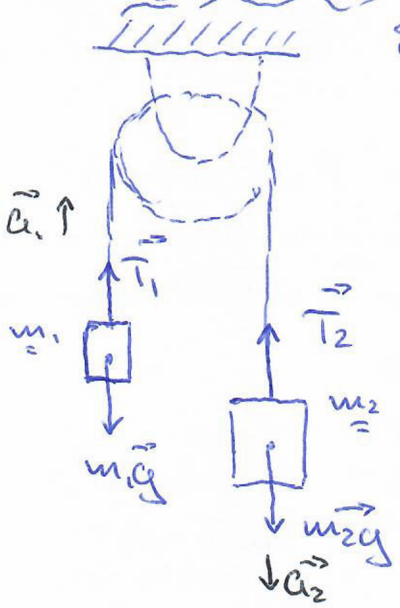
$ma_{max} = \mu mg \qquad a_{max} = \sqrt{a_{\tau,max}^2 + a_{n,max}^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{v_{max}^2}{R}\right)^2} = \mu g$

$v_{max} = \sqrt[4]{R^2(\mu^2 g^2 - a_\tau^2)}$

зчеплення!

зимові шини, спортивне взуття.

Рух системи зв'язаних тіл



блок невагомий, нерухомий,
нитка нерозтяжна, невагома, рухається без тертя

Y

$$m_1\vec a_1 = m_1\vec g + \vec T_1$$
$$m_2\vec a_2 = m_2\vec g + \vec T_2$$

OY: $m_1 a_1 = -m_1 g + T_1$

$-m_2 a_2 = -m_2 g + T_2$

До речі не обов'язково, щоб С.В були однакові для тіл

нитка нерозтяжна $a_1 = a_2$

невагома, без тертя, блок невагомий $T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

$m_2 > m_1$

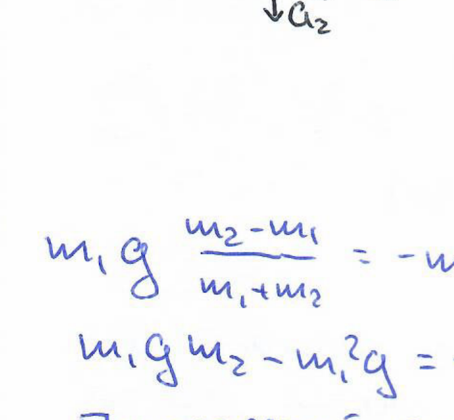
$$a(m_1+m_2) = -m_1 g + m_2 g \qquad a = g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}$$

$$m_1 g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} = -m_1 g + T$$

$$m_1 g m_2 - m_1^2 g = -m_1^2 g - m_1 m_2 g + T(m_1+m_2) \qquad T = 2g\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

Прискорений рух тіла на нитці

Тіло з m підвішене до кінця нерозтяжної нитки довжиною l. Точка закріплення нитки рухається відносно Землі з прискоренням $\vec a$, що утворює кут α з горизонтом. Знайти силу натягу нитки та її відхилення від вертикалі



$m\vec a = m\vec g + \vec T$ прискорення тіла також $\vec a$

OX: $ma\cos\alpha = T\sin\varphi$

OY: $ma\sin\alpha = -mg + T\cos\varphi$

$$T = \frac{ma\cos\alpha}{\sin\varphi} \qquad ma\sin\alpha = -mg + ma\cos\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\text{ctg}\,\varphi\cdot a\cdot\cos\alpha = a\sin\alpha + g$$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{a\cos\alpha}{a\sin\alpha + g}$$

$\cancel{\text{tg}}$ $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\text{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$\text{ctg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2\varphi}$

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\varphi}}$

$$T = ma\cos\alpha\sqrt{1+\text{ctg}^2\varphi} = ma\cos\alpha\sqrt{1+\left(\frac{a\sin\alpha+g}{a\cos\alpha}\right)^2} =$$
$$= m\sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a\sin\alpha+g)^2} = m\sqrt{g^2+a^2+2ag\sin\alpha}$$