Для центрального поля

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}\psi+U(r)\psi=E\psi$$

Вигляд $\hat{L}^2$ див на стор 45. : $\hat{L}^2$ і $\hat{H}(\vec{r})$ - комутують $\Rightarrow \psi(r,\theta,\varphi)$ має бути власною і [illegible] — де $U(r)$

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi)=C_{l,m}\,P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\,(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$$

$$P_l^{(m)}=(\sin\theta)^m\frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)}P_l(\cos\theta);$$

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l\,l!}\frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^l\right] \text{ – поліном Лежандра}$$

$$C_{l,m}=\sqrt{\frac{(l-|m|)!\,(2l+1)}{(l+|m|)!\,4\pi}}$$

$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$; $Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos$ [illegible]

$Y_{1,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\,e^{\pm i}$ [illegible]

$Y_{2,0}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)$

$Y_{2,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\,e^{\pm}$ [illegible]

$Y_{2,\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\,e^{\pm i}$ [illegible]

$$\Rightarrow\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}R+U(r)R=ER$$

Для воднеподібних іонів $\quad U(r)=-\frac{Ze^2}{r}$

$$R_{n,l}(\xi)=N_{n,l}\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right)\cdot\xi^l\cdot L_{n+l}^{2l+1}(\xi)$$

де $L_k^s(\xi)=\frac{d^s}{d\xi^s}L_k(\xi)$; $\quad L_k(\xi)=\exp(\xi)\,\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\exp(-\xi)\cdot\xi^k\right)$

↑ поліном Лагерра

$$\xi=\frac{2Z}{na}r;\quad a=\frac{\hbar^2}{\mu e^2}=0{,}529\cdot10^{-10}\text{ м.}$$

$$E_n=-\frac{Z^2e^4m}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\quad\left(=-\frac{me^4Z^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\text{ в СІ}\right)$$

Імовірність знайти ел-н в об'ємі $dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ (в ССК)

де: $\rho_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)=R^2_{n,l}(r)\,r^2\,dr\,|Y_{l,m}(\theta,\varphi)|^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

Знайти r_0, що відповідає максимуму ρ_{100}

$R_{10}(\xi) = N_{1,0}\exp(-\frac{\xi}{2})\,\xi^0\,L_1^1(\xi)$

$n=1,\ l=0$

$L_1(\xi) = \exp(\xi)\cdot\frac{d}{d\xi}(e^{-\xi}\cdot\xi) = e^{\xi}(e^{-\xi} - \xi e^{-\xi}) = 1-\xi$

$L_1^1(\xi) = \frac{d}{d\xi}L_1 = -1$

$R_{1,0} = -N_{10}\cdot\exp(-\frac{\xi}{2})$; $R_{1,0} = \cancel{const}\ N\exp(-\frac{\xi}{2}) = N\exp(-\frac{Z}{a}r)$

$Y_{0,0} = C_{l,m}\cdot P_0^0(\cos\theta)$

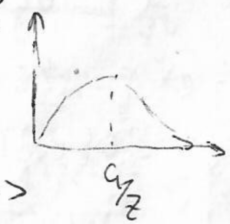
$P_0 = 1 = P_0^0$; $Y_{00} = const$

$\leftarrow$ до R_{10}^2

$\rho_{100} = const\cdot r^2\exp(-\frac{2Z}{a}r)$

$\frac{d\rho}{dr} = const\left[2r\cdot\exp(-\frac{2Z}{a}r) + r^2\cdot\left(-\frac{2Z}{a}\right)\exp(-\frac{2Z}{a}r)\right] = 0 \Rightarrow$

$r=0;\ r=\infty$ – min; $1-\frac{Z}{a}r = 0 \Rightarrow \cancel{r=\frac{2a}{Z}}\ r = \frac{a}{Z}$



для водню $r_0 = a$

водночас ~~ρ_{100} від~~ $Y_{00} = const \Rightarrow$ кульова симетрія для ρ_{100}

Так само ~~для~~ для $\forall$ s-станів (де $l=0$) характерна кульова симетрія

Для $n=2$

$R_{2,0} = N_{20}\exp(-\frac{\xi}{2})\,\xi^0\,L_2^1(\xi)$

$L_2 = \exp(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}[\exp(-\xi)\cdot\xi^2] = \exp(\xi)\frac{d}{d\xi}[\underbrace{2\xi\exp(-\xi)}_{-2\xi\exp(-\xi)} - \xi^2\exp(-\xi)] =$

$= \exp(\xi)\{2\exp(-\xi) - 2\xi\exp(-\xi) + \xi^2\exp(-\xi)\} = 2 - 4\xi + \xi^2$

$L_2^1 = \frac{d}{d\xi}L_2 = 2\xi - 4 \Rightarrow R_{20} = N_{20}\exp(-\frac{Z}{2a}r)\,2\left[\frac{2Z}{2a}r - 2\right]$

$$R_{20} = \text{const.}\left[\frac{Z}{a}r - 2\right]\exp\left(-\frac{Z}{2a}r\right) \qquad R_{2,0}=0 \text{ για } r = \frac{2a}{Z}$$

$$\rho_{200} = \text{const}\left[\frac{Z}{a}r - 2\right]^2 \exp\left(-\frac{Z}{a}r\right)\cdot r^2$$

$$R_{21} = N_{21}\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right)\xi^1 L_3^3(\xi) \qquad \xi = \frac{Z}{a}r$$

$$L_3 = \exp(\xi)\frac{d^3}{d\xi^3}\left[\exp(-\xi)\cdot\xi^3\right] = e^\xi \frac{d^2}{d\xi^2}\left[-\xi^3\exp(-\xi) + 3\xi^2\exp(-\xi)\right] =$$

$$e^\xi \frac{d}{d\xi}\left[-3\xi^2\exp(-\xi) + \xi^3\exp(-\xi) + 6\xi\exp(-\xi) - 3\xi^2\exp(-\xi)\right] =$$

$$= e^\xi\left[-12\xi\exp(-\xi) + 6\xi^2\exp(-\xi) + 3\xi^2\exp(-\xi) - \xi^3\exp(-\xi) + 6\exp(-\xi) - 6\xi\exp(-\xi)\right] = -18\xi + 9\xi^2 - \xi^3 + 6$$

$$L_3^3 = \frac{d^3}{d\xi^3}L_3 = -6 \qquad \underline{R_{21} = \text{const}\exp\left(-\frac{Z}{2a}r\right)\left(\frac{Z}{a}r\right)}$$

$$Y_{10} = C_{10}\,P_1^0(\cos\theta)$$

$$P_1^0 = (\sin\theta)^0\cdot P_1(\cos\theta) = \frac{1}{2}\frac{d}{d(\cos\theta)}\left[\cos^2\theta - 1\right] = \cos\theta$$

$$\underline{\psi_{210} = \text{const}\exp\left(-\frac{Z}{2a}r\right)\cdot r\cdot\cos\theta}$$

$$Y_{1,\pm1} = C_{1,\pm1}\,P_1^1(\cos\theta)\exp(\pm i\varphi)$$

$$P_1^1 = \sin\theta\frac{d}{d(\cos\theta)}\left[\frac{1}{2}\frac{d}{d(\cos\theta)}\left[\cos^2\theta - 1\right]\right] = \sin\theta$$

$$\underline{\psi_{21,\pm1} = \text{const}\exp\left(-\frac{Z}{2a}r\right)\cdot r\cdot\sin\theta\,\exp(\pm i\varphi)}$$

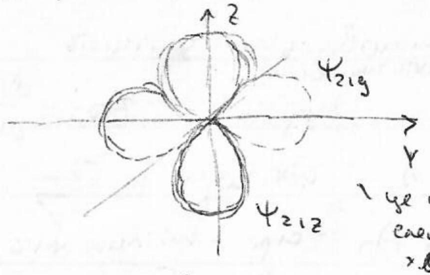
$\Psi_{210}, \Psi_{21\pm1}$ належать одному значенню енергії $\Rightarrow$ виродження $\Rightarrow$ є, можна будувати лін. комбінації

$\exp(\pm i\varphi) = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Беручи суму і різницю $\Psi_{21,1}$ і Ψ_{21-1} отримаємо

$\Psi_{21x} = R_{21}(r)\sin\theta\cos\varphi$

$\Psi_{21y} = R_{21}(r)\sin\theta\sin\varphi$

$\Psi_{21z} = R_{21}(r)\cos\theta$



це ще не вигляд електронної хмари, бо не врахована R_{21}

стан	$l, \lvert m\rvert$	$P_l^{\lvert m\rvert}(\theta)$
s	0 0	1
p	1 0	$\cos\theta$
	1 1	$\sin\theta$
d	2 0	$3\cos^2\theta - 1$
	2 1	$\sin\theta\cos\theta$
	2 2	$\sin^2\theta$

$r_1 = \frac{a_0}{Z}$

стан	n, l	$R(\rho)$, $\rho = \frac{r}{r_1}$
1s	1, 0	$\exp(-\rho)$
2s	2, 0	$(2-\rho)\exp(-\rho/2)$
2p	2, 1	$\rho\exp(-\rho/2)$
3s	3, 0	$(21 - 81\rho + 2\rho^2)\exp(-\rho/3)$
3p	3, 1	$\rho(6-\rho)\exp(-\rho/3)$
3d	3, 2	$\rho^2\exp(-\rho/3)$

р-ня Шр. для радіальної частини хв. ф-ї $R(r)$: $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U - \frac{L^2}{2mr^2}\right)R = 0$

Теплове випромінювання

Випромінювальна здатність (енергетична світність) $E_{\nu,T} = \dfrac{d\Phi_{випр}}{d\nu}$ ← енергія за одиницю ч. з одиниці площі в $[\nu, \nu + d\nu]$

Поглинальна здатність $A_{\nu,T} = \dfrac{d\Phi_{погл}}{d\Phi}$

$A_{\nu,T} = 1$ - абс. чорне

$A_{\nu,T} = A_T$ - сіре - поглинальна $\in f$ (T, матеріалу, поверхні) і не $\in f(\nu)$

З-н Кірхгофа в диф. формі $\dfrac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \varepsilon_{\nu,T}$ ← абс. чорне тіло

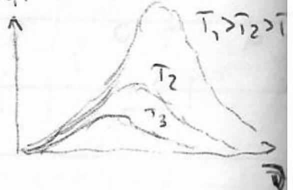
інтегральна випром. здатність $E_T = \int_0^\infty E_{\nu,T}\, d\nu$

$E_T = A_T \varepsilon_T$ - з-н. Кірхгофа в інт. формі, $E_T = \alpha \varepsilon_T$ ← ступінь чорноти

$\varepsilon_T = \sigma T^4$ - з-н Стефана-Больцмана

$\nu_{max} = b_1 T$ - з-н зміщення Віна

$\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$



1. Яку потужність потрібно підводити до металевої кульки радіусом $r = 2$ см, щоб підтримувати її т-ру на $\Delta T = 27$ K вище т-ри оточуючого середовища?. Т-ра оточуючого середовища $T_0 = 293$ K. Вважати, що тепло втрачається тільки за рахунок випромінення, кульку розглядати як абс. чорне тіло

кулька випромінює $P_1 = \varepsilon_T \cdot S = \sigma (T_0 + \Delta T)^4 \cdot 4\pi r^2$

поглинає $P_2 = P_{завідведене} + P_{від середов} = P_{підв} + \sigma T_0^4 \, 4\pi r^2$

$P_1 = P_2$

$P_{підв} = 4\pi r^2 \sigma \left((T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4 \right)$

Скільки часу пройде до охолодження, якщо припинити підведення теплоти

р-ня теплового балансу $dQ = mC\,dT = S\sigma(T_0^4 - T^4)\,dt$

$$\frac{dT}{T_0^4-T^4} = \frac{S\sigma}{mC}\,dt \qquad \int_{T_0+\Delta T}^{T_0} \frac{dT}{T_0^4-T^4} = \int_0^t \frac{S\sigma}{mC}\,dt$$

$$\int\frac{dx}{a^4-x^4} = \int\frac{dx}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^2}\int\frac{(a^2+a^2)\,dx}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^2}\int\frac{((a^2-x^2)+(a^2+x^2))\,dx}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\int\frac{dx}{a^2+x^2}+\int\frac{dx}{a^2-x^2}\right] = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|} + C\right]$$

найпростіше охолодження у вакуумі ($T_0=0$) і охолодження від T_1 до T_2 ($T_2<T_1$)

$$-\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^4} = \frac{S\sigma}{mC}t = +\frac{1}{3T^3}\Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_2^3}-\frac{1}{T_1^3}\right)$$

2. Як і в скільки разів зміниться потік випромінювання А.Ч.Т., якщо максимум енергії випромінювання змістився з червоної границі видимого спектру ($\lambda_{m1}=780$ нм) до фіолетової ($\lambda_{m2}=390$ нм)

$\Phi = S\sigma T^4$, $\lambda_m = \frac{b}{T}$; $\Phi = S\sigma\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4$

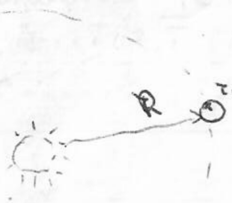
$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4 = 16$ => збільшиться в 16 разів.

Р/3

3. Потік випромінювання абс. чорн. тіла $\Phi = 10$ кВт, максимум енергії випром. припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0.8$ мкм. Визначити площу S випромінюючої поверхні.

$$\Phi = \sigma T^4 S, \quad \lambda_m = \frac{b}{T}; \quad T = \frac{b}{\lambda_m}; \quad S = \frac{\Phi}{\sigma T^4} = \frac{\Phi}{\sigma}\left(\frac{\lambda_m}{b}\right)^4$$

4. Радіус Сонця дорівнює $r_c = 6.96 \cdot 10^5$ км, радіус орбіти Меркурія $R_{Mе} = 5.79 \cdot 10^7$ км, Марса – $R_{Mа} = 2.28 \cdot 10^8$ км. Тем-ра поверхні Сонця дорівнює приблизно $T_c = 6000$ K. Використовуючи закони теплового випромінювання, оцінити середні т-ри планет.



Потік енергії з поверхні сонця за одиницю ча[су]

$$q = \sigma T_c^4 S_c = \sigma T_c^4 4\pi r_c^2$$

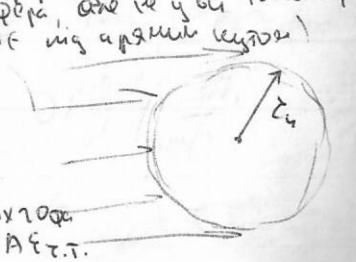
На орбіті планети інтенсивність, що падає на одиницю площі

$$I_0 = \frac{q}{4\pi R^2} = \sigma T_c^4 \left(\frac{r_c}{R}\right)^2$$

Енергія, яку поглинає планета в одиницю часу

$$q' = A I_0 \pi r_n^2$$ – площа перерізу планети (там сфера, але не у всі точки сфери падає під прямим кутом)

A – поглинальна здатність планети



Одночасно, планета випромінює

$$q'' = A \sigma T_n^4 4\pi r_n^2$$ – з-н Кірхгофа $E = A \varepsilon_{т.т.}$

$$q' = q'' \qquad A I_0 \pi r_n^2 = A \sigma T_c^4 \left(\frac{r_c}{R}\right)^2 \pi r_n^2 = A \sigma T_n^4 4\pi r_n^2 \Rightarrow$$

$$T_n = T_c \sqrt{\frac{r_c}{2R}}$$

Заняття 1. Метод комплексних амплітуд.

Задачі зі списку Горового

1.6. ~~Натягнися~~ Початкова т-ра теплового випромінювання $T = 2000$ K. На скільки кельвінів змінилась ця т-ра, якщо найбільш ймовірна довжина хвилі в його спектрі збільшилась на $\Delta\lambda = 260$ нм

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \qquad (\lambda + \Delta\lambda) = \frac{b}{T - \Delta T} \qquad \Delta T = -\frac{b}{\lambda + \Delta\lambda} + T = -\frac{b}{\frac{b}{T} + \Delta\lambda} + T = T\left(1 - \frac{b}{b + \Delta\lambda T}\right)$$

$$= T\left(\frac{\Delta\lambda T}{b + \Delta\lambda T}\right) = \boxed{\frac{T}{1 + b/(T\Delta\lambda)} = 300\,\text{K}}$$

1.7. При переходе от одной т-ры к другой площадь под кривой ф-и Кирхгофа $f(\lambda)$ уменьшилась в $\eta = 13$ раз. Как и во сколько раз изменилась при этом длина волны, соответствующая максимуму ф-и $f(\lambda)$?

$$\varepsilon_T = \sigma T^4 \qquad \lambda_m = \frac{b}{T} \qquad \frac{\lambda_{m2}}{\lambda_{m1}} = \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\sigma\,\varepsilon_{T_1}}{\sigma\,\varepsilon_{T_2}}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\eta}$$

1.8* Найти наиболее вероятную длину волны в спектре теплового излучения с энергетической светимостью $M = 5.7$ Вт/см^2? $\quad M = \sigma T^4$

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = b\sqrt[4]{\frac{\sigma}{M}}$$

1.22* Определить с помощью ф-лы Планка, во сколько раз возрастет спектральная интенсивность излучения с длиной волны $\lambda = 0.6$ мкм при увеличении т-ры от $T_1 = 2000$ K до $T_2 = 2300$ K.

Ф-ла Планка $\quad u_\omega = \dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\,\dfrac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \qquad u_\omega$ – спектральна густина енергії

$$\varepsilon_T = \frac{c}{4}u$$

$$\omega \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \qquad \hbar\omega = h\nu$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\exp(\alpha/T_1) - 1}{\exp(\alpha/T_2) - 1} \qquad \alpha = \frac{hc}{k\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{k\lambda}$$

1.34. При ~~як~~ якому значенні швидкості електрону його імпульс дорівнює імпульсу фотона с довжиною хвилі $\lambda = 1$ пм.

$$\lambda = \frac{h}{p} \ ; \ p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \qquad \text{для ел-ну} \quad E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2c^4} = \frac{1}{c} m_0c^2\sqrt{-1 + \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0c\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0c}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2}-1}}$$

$$\frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{m_0c}{\sqrt{-1+\frac{c^2}{v^2}}} \Rightarrow \cancel{v=} \quad -1 + \frac{c^2}{v^2} = \left(\frac{m_0c\lambda}{2\pi\hbar}\right)^2 ; \quad v = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{m_0c\lambda}{2\pi\hbar}\right)^2}} = 2.8\cdot10^8 \text{ м/с}$$

1.35*. Знайти довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу ел-ну с кінет. енерг. $T = 0{,}3$ MeV

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0+T)T} = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{(2m_0c^2+T)T}} = 2\cdot10^{-12} \text{ м}$$

1.50. Знайти роботу виходу з поверхні деякого металу, якщо при почерговому освітленні його електромагнітним випромінюванням з довжинами хвиль $\lambda_1 = 0{,}35$ мкм і $\lambda_2 = 0{,}54$ мкм максимальні швидкості фотоелектронів відрізняються в $\eta = 2$ рази.

$$\hbar\omega_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = A + \frac{mv_1^2}{2} \ ; \quad \frac{hc}{\lambda_2} = A + \frac{mv_2^2}{2} \qquad v_1 = \eta v_2$$

$$v_2^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda_2} - A\right) \qquad \frac{hc}{\lambda_1} = A + \eta^2\left(\frac{hc}{\lambda_2} - A\right)$$

$$\eta^2\frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1} = A(\eta^2 - 1) \qquad A = \frac{hc}{\lambda_2}\left(\eta^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)/(\eta^2-1) = 1{,}9 \text{ eV}$$

1.51*. Медный шарик, отдаленный от других тел, облучают э-м. излучением с длиной волны $\lambda = 200$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик?

$$\frac{hc}{\lambda} = A + T_{max} = A + eU \ ; \quad U = \frac{1}{e}\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - A\right) = 1{,}74 \text{ В.}$$

Заняття 1. Метод комплексних амплітуд.

1.52* При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемой э-м. излучением с длиной волны λ_0, прекращается. Изменив длину волны излучения в $n = 1.5$ раза, установили, что для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в $\eta = 2$ раза. Вычислить λ_0.

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A + eU_0 \qquad \frac{hc\,n}{\lambda_0} = A + e\eta U_0$$

$$eU_0 = \frac{hc}{\lambda_0} - A \qquad \frac{hc\,n}{\lambda_0} = A + \frac{hc}{\lambda_0}\eta - A\eta \qquad \lambda_0 = \frac{hc\,(n-\eta)}{A(1-\eta)} \approx 0{,}26 \text{ мкм}$$

1.62*. Фотон с длиной волны $\lambda = 3.64$ пм рассеялся на покоившемся эл-не так, что кин. энергия эл-на отдачи составила $\eta = 25\%$ от энергии налетевшего фотона. Найти: а) комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона; б) угол θ, под которым рассеялся фотон.

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \lambda_2 - \lambda_1$$

кин. энергия эл-на $\eta \cdot \frac{hc}{\lambda_1}$, тогда $\frac{hc}{\lambda_2} = (1-\eta)\frac{hc}{\lambda_1} = (1-\eta)\frac{hc}{\lambda}$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\eta} \qquad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda = \frac{\lambda}{1-\eta} - \lambda = \lambda\,\frac{1+\eta-1}{1-\eta} = \lambda\,\frac{\eta}{1-\eta} = 1{,}2 \text{ пм}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{m_0 c}{h}\,\frac{\lambda\eta}{(1-\eta)} \qquad \theta = 60^\circ$$

1.100* – можна отримати $r = a_0 n^2$ (вираз для a_0) через р-ня руху і умову квантування
1.101 – краще N1. ст. 5
+ задачу на ф-лу Бальмера.

3.41*. Визначити середнє значення фізичної величини, що описується оператором L_z^2 в стані $\psi(\varphi) = A\sin^2\varphi$

З умови нормування $A^2 = \frac{4}{3\pi}$ $\qquad \langle L_z^2 \rangle = \frac{4\hbar^2}{3}$

3.84* Електрон в атомі водню знаходиться в основному стані, що описується хв. ф-ією $\Psi = A\exp(-r/r_1)$. Знайти а) нормувальний коеф A; б) енергію E ел-ну та r_1 (за допомогою р-ня Шр)

$A = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}$; $r_1 = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{me^2}$; $E = -\frac{\hbar^2}{2m r_1^2}$

3.86* Знайти для 1-s ел-на атому водню найбільш імовірну відстань його від ядра $r_{ім}$ та імовірність знаходження ел-ну в обл $r < r_{ім}$

$r_{ім} = r_1$. $P = 1 - 5/e^2 \approx 32.3\%$

$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right)$ $\rho_{100} = \text{const} \exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right) r^2$; $\frac{\partial \rho_{100}}{\partial r} = \left(2r e^{-\frac{2r}{r_1}} - r^2 \frac{2}{r_1} e^{-\frac{2r}{r_1}}\right) = 0$

$2r\exp\left(-\frac{2r}{r_1}\right)\left(1 - \frac{r}{r_1}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{r_{ім} = r_1}$

3.87* Визначити для 1s-ела в атомі водню середні значення його відстані від ядра $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$ і $\langle (r - \langle r\rangle)^2\rangle$

$\langle r\rangle = \frac{3r_1}{2}$; $\langle r^2\rangle = 3r_1^2$; $\langle (\Delta r)^2\rangle = \langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2 = \frac{3r_1^2}{4}$

3.90* Знайти для 2p і 3d ел-в атомів водню найбільш імовірну відстань від ядра

$4r_1$, $9r_1$

2p: $R(r) = \left(\frac{r}{r_1}\right)\exp\left(-\frac{r}{2r_1}\right)$; $\rho_{2p}(r) = \frac{r^4}{r_1^2}\exp\left(-\frac{r}{r_1}\right)$

$\frac{\partial \rho_{2p}}{\partial r} = \frac{1}{r_1^2}\left[4r^3\exp\left(-\frac{r}{r_1}\right) - r^4\frac{1}{r_1}\exp\left(-\frac{r}{r_1}\right)\right] = 0 \Rightarrow 4 - \frac{r}{r_1} = 0 \quad r = 4r_1$

3d $R(r) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\exp\left(-\frac{r}{3r_1}\right)$; $\rho_{3d} = \frac{r^6}{r_1^4}\exp\left(-\frac{2r}{3r_1}\right)$

$\frac{\partial \rho_{3d}}{\partial r} = \frac{1}{r_1^4}\left[6r^5\exp\left(-\frac{2r}{3r_1}\right) + r^6\left(-\frac{2}{3r_1}\right)\exp\left(-\frac{2r}{3r_1}\right)\right] = 6 - \frac{2r}{3r_1} = 0 \quad r = 9r_1$

Занятие 1. Метод комплексных амплитуд.

$\psi = A\exp(-\frac{r}{r_1})$ $\quad 1 = A^2\int_0^\infty \exp(-\frac{2r}{r_1}) r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 (-\frac{r_1}{2}) d(e^{-\frac{2r}{r_1}})$

$= 4\pi A^2 (-\frac{r_1}{2}) r^2 \exp(-\frac{2r}{r_1})\Big|_0^\infty + 4\pi A^2 \frac{r_1}{2}\int_0^\infty 2r\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = 4\pi A^2 r_1 \int_0^\infty (-\frac{r_1}{2}) r\, d(\exp(-\frac{2r}{r_1})) =$

$= 4\pi A^2 r_1 (-\frac{r_1}{2}) r\exp(-\frac{2r}{r_1}) + 2\pi A^2 r_1^2 \int_0^\infty \exp(-\frac{2r}{r_1})dr = -2\pi A^2 r_1^2 (-\frac{r_1}{2})\exp(-\frac{2r}{r_1})\Big|_0^\infty = A^2\pi r_1^3$

$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}}$

Р-ие Ш-р $\quad -\frac{\hbar^2}{2m} \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \frac{L^2}{2mr^2}\psi + U\psi = E\psi$, основн. сост. $\Rightarrow L = 0$

$L^2 = \hbar^2 l(l+1),\ l = 0$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[A\frac{1}{r_1^2}\exp(-\frac{r}{r_1}) + \frac{2}{r}(-\frac{1}{r_1})A\exp(-\frac{r}{r_1})\right] - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} A\exp(-\frac{r}{r_1}) = E A\cdot\exp(\frac{r}{r_1})$

выполнится при одинаковых степенях r: r^0: $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2mr_1^2} = E}$. $\quad r^{-1}$: $+\frac{\hbar^2}{mr_1} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}}$

$P = \frac{1}{\pi r_1^3}\int_0^{r_1} r^2\exp(-\frac{2r}{r_1})dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{4}{r_1^3}\int_0^{r_1} r^2(-\frac{r_1}{2}) d(\exp(-\frac{2r}{r_1})) =$

$= \frac{4}{r_1^3}\frac{r_1}{2} r^2\exp(-\frac{2r}{r_1})\Big|_0^{r_1} + \frac{2}{r_1^2}\int_0^{r_1} 2r\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = -2e^{-2} + \frac{4}{r_1^2}\int_0^{r_1}(-\frac{r_1}{2}) r\, d(e^{-\frac{2r}{r_1}}) =$

$= -2e^{-2} + (-\frac{2}{r_1}) r\exp(-\frac{2r}{r_1})\Big|_0^{r_1} + \frac{2}{r_1}\int_0^{r_1}\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = -2e^{-2} - 2e^{-2} +$

$+ \frac{2}{r_1}(-\frac{r_1}{2})\exp(-\frac{2r}{r_1})\Big|_0^{r_1} = -4e^{-2} - e^{-2} + 1 = \underline{1 - 5e^{-2}}$

$\langle r\rangle = \frac{1}{\pi r_1^3}\int_0^\infty r^2\exp(-\frac{2r}{r_1})\cdot r\,dr\cdot 4\pi = \frac{4}{r_1^3}\int_0^\infty r^3\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = \frac{4}{r_1^3}(-\frac{r_1}{2}) r^3 e^{-\frac{2r}{r_1}}\Big|_0^\infty +$

$+ \frac{4}{r_1^3}\frac{r_1}{2}\int_0^\infty 3r^2\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = \frac{6}{r_1^2}\int_0^\infty r^2\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = \frac{6}{r_1^2}(-\frac{r_1}{2}) r^2\exp\Big|_0^\infty +$

$+ \frac{3}{r_1}\int_0^\infty 2r\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = -\frac{6}{r_1}\frac{r_1}{2} r\exp(-\frac{2r}{r_1})\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = -3\frac{r_1}{2}\exp(-\frac{2r}{r_1})$

$= \frac{3}{2}r_1 = \langle r\rangle$

$\langle r^2\rangle = \frac{1}{\pi r_1^3} 4\pi\int_0^\infty r^4\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = \frac{4}{r_1^3}\int_0^\infty r^4\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = +\frac{4}{r_1^3}\frac{r_1}{2}\int_0^\infty 4r^3\exp(-\frac{2r}{r_1})dr =$

$= \frac{4\pi}{\pi r_1^3}\cancel{\frac{1}{2}}\, 2r_1\int_0^\infty r^3\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = 2r_1\frac{4\pi}{\pi r_1^3}\int_0^\infty r^3\exp(-\frac{2r}{r_1})dr = 2r_1\langle r\rangle = 3r_1^2$

$(r - \langle r\rangle)^2 = r^2 - 2r\langle r\rangle + \langle r\rangle^2$

$\langle (r - \langle r\rangle)^2\rangle = \langle r^2\rangle - 2\langle r\rangle\langle r\rangle + \langle r\rangle^2 = \langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2 = 3r_1^2 - \frac{9}{4}r_1^2 = \frac{3}{4}r_1^2$

Д/З № 39, 41, 42(а)

465-22-83

Вважаючи Сонце абс. т. кулею радіусом 6.96·10⁵ км

~~Радіус Сонця 6.96·10⁵ км, маса 2·10³⁰ кг. Вважаючи його абс. чорним тілом~~, для якої максимум випромінювальної здатності припадає на $\lambda_m = 0.48$ мкм, знайти масу яка ним втрачається щосекунди внаслідок випромінення.
Оцінити час, за який маса Сонця зменшиться на 1%, якщо маса Сонця $2\cdot10^{30}$ кг

$b = 2.9\cdot10^{-3}$ м·К, $\sigma = 5.7\cdot10^{-8}$ Вт/м²·К⁴

$$E_{випр} = \sigma\cdot T^4\cdot S = \cancel{\Delta m c}\ \frac{\Delta m}{\Delta t}\cdot c^2$$

$$S = 4\pi R_c^2 \quad ; \quad \lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\sigma\cdot\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4\cdot 4\cdot\pi R_c^2}{c^2} = \frac{5.7\cdot10^{-8}\left(\frac{2.9\cdot10^{-3}}{4.8\cdot10^{-7}}\right)^4\cdot4\cdot3.14\cdot(6.96\cdot10^8)^2}{(3\cdot10^8)^2} \simeq$$

$$\simeq 5.1\cdot10^9\ (кг/с)$$

$$\frac{dm}{dt} \quad m = m_0 - \left(\frac{dm}{dt}\right)\cdot t \qquad m = 0.99m_0 \qquad t = \frac{m_0 - m}{dm/dt} = \frac{0.01m_0}{dm/dt} = 3.8\cdot10^{18}\ с \simeq$$

$$\simeq 1.2\cdot10^{11}\ років$$

Заняття 1. Метод комплексних аналітик.

1. На сьогодні в природному урані міститься 99,28% ^{238}U та 0,72% ^{235}U. Підрахувати вік Землі, якщо припустити, що у момент утворення Землі кількості ^{238}U та ^{235}U були однакові.

$N = N_0 \exp(-\lambda t)$ $\quad {}^{235}N_0 = {}^{238}N_0$

$\frac{^{238}N}{^{235}N} = \exp((-\lambda^{238} + \lambda^{235})t)$ $\quad t = \frac{\ln(^{238}N/{}^{235}N)}{^{235}\lambda - \lambda^{238}}$

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$; $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ $\quad t = \frac{^{238}T_{1/2}\,{}^{235}T_{1/2}}{^{238}T_{1/2} - {}^{235}T_{1/2}} \frac{\ln(^{238}N/{}^{235}N)}{\ln 2}$

$T_{1/2}(^{238}U) = 4.5 \cdot 10^9$ р

$T_{1/2}(^{235}U) = 7{,}1 \cdot 10^8$ років

$$t = \frac{4{,}5 \cdot 10^9 \cdot 7{,}1 \cdot 10^8}{(45 - 7{,}1) \cdot 10^8} \frac{\ln \frac{99{,}28}{0{,}72}}{\ln 2} \approx 2{,}1 \cdot 10^9 \text{ років}$$

2. Активність деякого препарату зменшується в $n = 2.5$ разів за $t = 7$ діб. Знайте період його напіврозпаду.

$A = \lambda N$ $\quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{N_0}{N_0 \exp(-\lambda t)} = n$ $\quad \lambda = \frac{\ln n}{t} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

$T_{1/2} = t \frac{\ln 2}{\ln n} \approx 5{,}3$ доби.

3. Знайти енергію зв'язку ядра, яке має однакове число протонів і нейтронів і радіус, у 1.5 рази менший за радіус ядра ^{27}Al

$R = 1.3\cdot10^{-15}\ A^{1/3}$ м

$\frac{R_{Al}}{R_x} = 1{,}5 = \frac{(27)^{1/3}}{(A_x)^{1/3}} \Rightarrow A_x = \frac{27}{(1{,}5)^3} = \frac{3^3}{1{,}5^3} = 8 \Rightarrow$

$n=4,\ p=4 \Rightarrow {}^4_4Be$

$E_{зв} = c^2\left[4\cdot m_n + 4\cdot m_p - m({}^4_4Be)\right]$

$m_p = 1{,}00783$ а.о.м., $m_n = 1{,}00867$ а.о.м

$m({}^4_4Be) = 8{,}00531$ а.о.м., 1 а.о.м $= 1{,}66\cdot10^{-27}$ кг

$E_{зв} \approx 56{,}5$ MeV

4. Вважаючи, що при одному поділі ядра ^{235}U вивільняється енергія 200 МеВ, визначить

а) енергію, що виділяється при згорянні 1 кг ізотопу ^{235}U і масу вугілля з ~~3 тепло~~ питомою теплотою згорання 30 кДж/г, еквівалентну 1 кг ^{235}U - $8{,}2\cdot10^{10}$ кДж, $2{,}7\cdot10^{6}$ кг

б) масу ізотопу ^{235}U, що поділився під час вибуху ~~ядерної~~ атомної бомби з тротиловим еквівалентом 30 кілотон, якщо тепловий еквівалент тротилу 4,1 кДж/г - 1,5 кг.

5. Записати позначення, яких не вистачає в наступних ядерних реакціях

а) ^{10}B (x, α) ^{8}Be б) $^{16}O(d,n)X$ в) $^{23}Na(p,x)Ne^{20}$ г) $X(p,n)Ar^{37}$

α ^{17}F α ^{37}Cl.

6. Внаслідок радіоактивного розпаду $^{238}_{92}U$ перетворюється в $^{206}_{82}Pb$.

Скільки α- та β-розпадів має місце в цьому випадку

$\frac{238-206}{4} = 8 = N_\alpha$; $92 - 2\cdot N_\alpha = 76$, $82 - 76 = 6 = N_\beta$