Імпульс. Система центру мас

Для того, щоб визначити мех. стан частинки загалом достатньо трьох з-в Н. Звичайно, необх. знати $\vec F(t)$ + початкові умови

Якщо частинок багато (багато ступенів вільності), то ситуація ускладнюється

3n скал. р-нь → $m_i\ddot{\vec r}_i = \vec F_i(t)$ $\quad i = \overline{1,n}$

6n початк. умов $\begin{cases} \vec r_i(t=0) = \vec r_{i0} \\ \vec v_i(t=0) = \vec v_{i0} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\vec r_i(t)$, $\vec v_i(t)$

- необх. сила на кожну частинку
- неточність початкових умов 1 частинки може радикально змінити рух інших
- частинок дуже багато!!
- навіть $\{\vec r_i(t)\}$ характеризує не систему загалом.

але задача руху планет в Сонячній так цілком розв'язна..

для газів гірше..

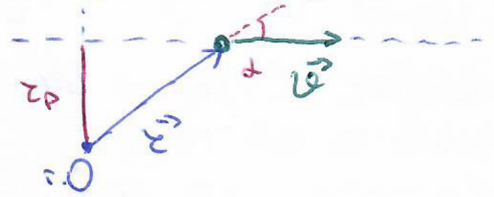
Будемо розглядати величини, які є ф-ями стану, але залишаються незмінними (напр., при вільному русі), спочатку 1 частинки, потім системи, знайдемо умови їх змін..

Однорідність часу => закон збереження енергії

однорідність простору => — // — імпульсу

ізотропність — // — => — // — моменту імпульсу

а) вільний рух частинки масою m:



$m\dot{\vec v} = \vec F_\Sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec v = const$ - вектор

$\vec v \cdot \vec v = v^2 = const$ - скаляр

вищі ступені також const, але їх можна подати через $\vec v$ та v^2

$\vec r \neq const$ але $r_p = r \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin(\widehat{\vec r\,\vec v}) = const$

тоді $r_p \cdot v = const = r_p \cdot v \cdot \sin\alpha = |[\vec r, \vec v]|$

тобто $[\vec r, \vec v] = const$

закони збер. не залежать від х-ру сил, тому застосовні і тоді, коли сили невідомі, як у фізиці елемент. частинок.

Імпульс для однієї частинки

$\vec p = m\vec v$ $\qquad m\dfrac{d\vec v}{dt} = \vec F = \dfrac{d\vec p}{dt}$ - II з.Н.

$d\vec p = \vec F dt$ - імпульс змінюється під дією прикладених сил, $d\vec p \uparrow\uparrow d\vec F$

$\Delta\vec p = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec F(t)\,dt}_{}$, імпульс сили $\quad$ при $\vec F = const$ $\quad \vec p_2 - \vec p_1 = \vec F(t_2 - t_1)$

Імпульс частинки зберігається, якщо сума всіх прикладених до неї сил $= 0$ (для вільної $\vec F = 0$)

$\vec p = const$ якщо $\vec F_\Sigma = 0$ $\qquad p_x = const$, $p_y = const$, $p_z = const$

$\dfrac{dp_x}{dt} = F_x$; $\dfrac{dp_y}{dt} = F_y$; $\dfrac{dp_z}{dt} = F_z$

при $F_x = 0$ $\quad p_x = const$

Система частинок

$\vec p = \vec p_1 + \vec p_2 + \vec p_3 \ldots = \sum_{i=1}^{n} \vec p_i$ — імпульс адитивна величина

$$m_1 \ddot{\vec r}_1 = \underbrace{\vec F_{21} + \vec F_{31} + \ldots + \vec F_{n1}}_{\text{внутрішні сили}} + \vec F_1^{\,зовн}$$

$$m\frac{d\vec v_2}{dt} = \vec F_{12} + \vec F_{32} + \ldots + \vec F_{n2} + \vec F_2^{\,зовн}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\vec p_n}{dt} = \vec F_{1n} + \vec F_{2n} + \ldots + \vec F_{n-1,n} + \vec F_n^{\,зовн}$$

+

$$\frac{d\vec p_1}{dt} + \frac{d\vec p_2}{dt} + \ldots + \frac{d\vec p_n}{dt} = (\vec F_{12} + \vec F_{21}) + (\vec F_{13} + \vec F_{31}) + \ldots + (\vec F_{1n} + \vec F_{n1}) + \vec F_1^{\,зовн} + \vec F_2^{\,зовн} + \ldots + \vec F_n^{\,зовн}$$

III з. Н $\vec F_{12} = -\vec F_{21}$ $\qquad \frac{d}{dt}(\vec p_1 + \vec p_2 + \ldots + \vec p_n) = \vec F_1^{\,зовн} + \vec F_2^{\,зовн} + \ldots + \vec F_n^{\,зовн}$

$$\frac{d}{dt}\vec p = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i^{\,зовн} = \vec F_{зовн} \qquad \vec p_2 - \vec p_1 = \int_0^t \vec F^{\,зовн}(t)\,dt$$

$\vec p = const$ при $\vec F_{зовн} = 0$ або $p_x = const$ при $\sum_i F_{i,x}^{зовн} = 0$

Якщо $\vec F_i^{\,зовн} = 0$ $(i = \overline{1,n})$ — замкнена система (відсутня взаємодія з матеріальними об'єктами, що не належать системі)

Для замкненої системи $\vec p = const$ (хоча замкненість занадто жорстка умова, взагалі такі системи є певною ідеалізацією ← достатньо $\sum \vec F_i^{\,зовн} = 0$)

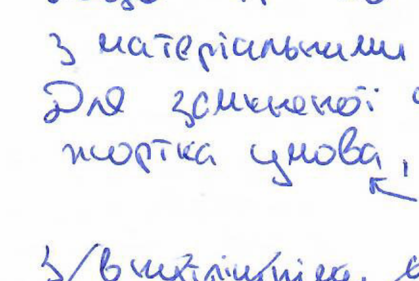
~~3/ внутрішніми силами можна зробити ще один фокус звичайно~~ $\cancel{\vec F_{ik} = -\vec F_{ki}}$ ~~, але~~

Ж електронейтральна система в однорідному електричному полі

$$\vec F^{\,зовн} = \sum_{i=1} q_i^- \vec E + \sum_{j=1} q_j^+ \vec E = \left(\sum q_i^- + \sum_j q_j^+\right)\vec E = 0$$ — тобто $\vec p = const$

Центр мас системи частинок

$$\vec R_c = \frac{\int_V \rho \vec r\, dV}{\int_V \rho\, dV}$$

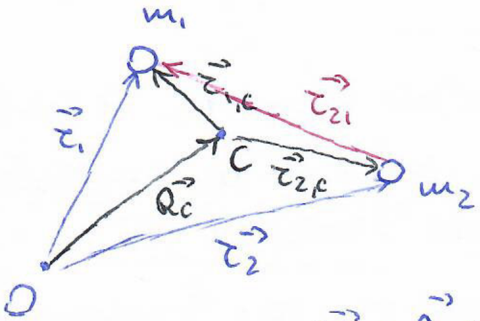


$$\vec R_c = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + \ldots + m_n\vec r_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec r_i$$

радіус-вектор центру мас (центра інерції) системи частинок

$\vec R_c$ залежить від взаємного розташування частинок та співвідношення їх мас, в загальному випадку не збігається з певною частинкою

- 3.3 -



* 2 частинки з m_1 та m_2

$$\vec R_c = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$$

нехай $\vec r_{1c}$ - положення частинки 1 відносно центра мас.

$$\vec r_1 = \vec R_c + \vec r_{1,c} \qquad \vec r_2 = \vec R_2 + \vec r_{2,c}$$

$$\vec r_{1,c} = \vec r_1 - \vec R_c = \vec r_1 - \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_1 - m_1\vec r_1 - m_2\vec r_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec r_1 - \vec r_2)$$

$$\vec r_{2,c} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec r_2 - \vec r_1)$$

$$\vec r_1 - \vec r_2 = \vec r_{21} \qquad \vec r_{1,c} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec r_{21} \qquad \vec r_{2,c} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec r_{21}$$

$\vec r_{1c}$ та $\vec r_{2,c}$ - колінеарні $\Rightarrow$ т.С лежить на відрізку прямої, що з'єднує частинки, довжини $r_{2,c}$ та r_{1c} обернено пропорційні масам $r_{1,c}/r_{2,c} = \frac{m_2}{m_1}$

центр мас збігається з центром тяжіння за умови, що поле сили тяжіння однорідне

До центра мас прикладається $m\vec g$

$$R_{c,x} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i \,;\quad R_{c,y} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i \qquad R_{c,z} = \frac{1}{M}\sum m_i z_i$$

$$\frac{d}{dt}\vec R_c = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec r_i\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec v_i$$

з іншого боку $\vec p = \sum_i m_i\vec v_i = M\cdot\frac{d\vec R_c}{dt} = M\cdot\vec V_c$

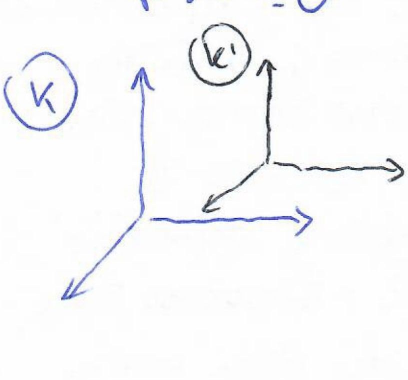
↑ швидкість центра мас.

$$\frac{d}{dt}(M\cdot\vec V_c) = \vec F^{\text{зовн}}$$

$$\boxed{M\frac{d\vec V_c}{dt} = \vec F^{\text{зовн.}}}$$

центр мас системи рухається так, ніби в ньому зосереджена маса всієї системи і до нього прикладена сума всіх зовн. сил.

$\vec F^{\text{зовн}} = 0 \quad \vec V_c = const$ (як для вільної частинки $\Leftrightarrow$ замкнена система



K та K' - дві ІСВ, K' рухається з $\vec V_{const}$ відносно K

$$\vec v_i = \vec v_i' + \vec V$$

$$\vec p = \sum_i m_i\vec v_i = \sum_i m_i(\vec v_i' + \vec V) = \sum_i m_i\vec v_i' + \vec V\sum m_i$$

$\vec p = \vec p' + M\vec V$ - імпульс змінюється при переході $K\to K'$

$\cancel{M\vec V_c = \vec p' + M\vec V}$

$$M\vec{V_c} = \vec{P}' + \vec{M}\vec{V}$$

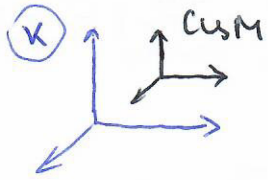
$\vec{P}'$ - імпульс системи в K' ↙ система центра мас (СЦМ)

при $\vec{V_c} = \vec{V}$ $\quad \vec{P}' = 0$ В системі відліку, де центр мас перебуває у спокої, імпульс д частинок $= 0$.

СЦМ або власна СВ, рух частинок відносно неї наз. внутрішній

Рух відносно інших СВ - суперпозиція внутрішнього і системи

рій одніи → як цілого з $\vec{V_c}$, ⟨ якщо $\vec{V_c} = const$, то імпульс системи зберігає



зокрема можна записати $\vec{P} = \vec{P}'_{сцм} + M\vec{V_c}$

правда $\vec{P}'_{сцм} = \emptyset$ ← імпульс системи не може бути змінений за рахунок внутрішніх

рухів частинок (за рахунок внутр. сил)

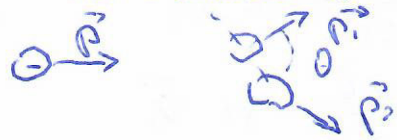
Повертаючись до $\quad \vec{P} = \vec{P}' + M\vec{V}$

якщо $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0$, то $\dfrac{d\vec{P}'}{dt} = 0$ також. - Якщо імпульс системи

зберігається в одній ІСВ, то зберігається і в інших (змінюється при переході але const всередині

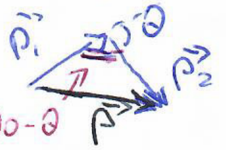
відповідає принципу Галілея

(Пр. 1) Частинка, яка рухалась, розпалася на дві з $\vec{p_1}$ та $\vec{p_2}$, кут між якими θ. Знайти імпульс вихідної частинки



$$\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \qquad \vec{P} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}$$

якщо система замкнена

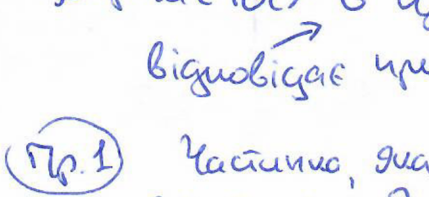


Якщо ~~розпад~~ система під дією зовн. сил,

то для можливості застосування такого підходу необх.:

- $\vec{P}, \vec{p_1}, \vec{p_2}$ безпосередньо в околі розпаду
- час розпаду має бути дуже малий, щоб $\int_0^t F_{зовн}\,dt$ був знехтуваним

(Пр. 2)



Людина масою m_1 здійснила переміщення $\Delta r'$ відносно плоту масою m_2 і зупинилася. Опір води знехтувано малий. Знайти зміщення плоту відносно берега Δr_2

Результуюча зовн. сила $= 0$, тому імпульс системи в процесі рух не має змінюватися, залишаючись нульовим

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = 0 \qquad \vec{v_1}, \vec{v_2} \text{ - відносно берега.}$$

водночас $\vec{v_1} = \vec{v_2} + \vec{v}'$, $\vec{v}'$ - швидкість людини відн. плоту

$m_1(\vec{v}_2 + \vec{v}') + m_2\vec{v}_2 = 0$

$(m_1+m_2)\vec{v}_2 + m_1\vec{v}' = 0$ $\quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}'$

$\vec{v}_2\,dt = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}'\,dt$

$d\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,d\vec{r}'$ $\quad \Delta\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta\vec{r}'$ $\quad \Delta\vec{r}_2$ не залежить від х-ру руху людини $\vec{v}'(t)$

Використовуючи СЦМ

$\frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{1}{M}\vec{F}_{зовн} = 0$ $\quad \vec{V}_c = const$

На початку $\vec{V}_c = 0$ => $\vec{R}_c = const$ $\quad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = const$

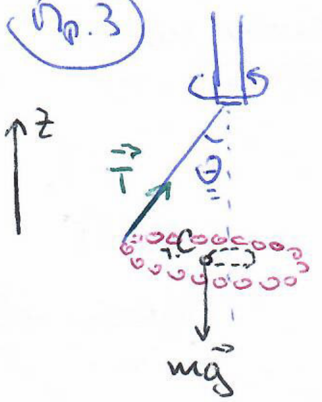
$m_1\vec{r}_1(t_п) + m_2\vec{r}_2(t_п) = m_1\vec{r}_1(t_к) + m_2\vec{r}_2(t_к)$

$m_1\Delta\vec{r}_1 + m_2\Delta\vec{r}_2 = 0$ $\quad \Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t_к) - \vec{r}_2(t_п)$

$\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2$ - відносно берега, $\Delta\vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}'$

$m_1(\Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}') + m\Delta\vec{r}_2 = 0$ $\quad \Delta\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta\vec{r}'$

Пр.3



Замкнутий ланцюжок, з'єднаний ниткою з віссю ~~до~~ центробіжної машини обертається з навколо вертикальної осі з ω. Нитка утворює кут θ з вертикаллю. Як поводить себе центр мас ланцюжка

$\vec{F}^{зовн} = \vec{T} + m\vec{g}$

При $\omega = 0$ $\quad V_{c,z} = 0$ $\quad F_z^{зовн} = 0$

$-mg + T\cos\theta = 0$

$T_n = const$, направлена до осі обертання $\quad T = mg/\cos\theta$.

=> центр мас рухається по колу, причому

$m\frac{v_c^2}{R} = T\sin\theta$

т. С знаходиться між віссю обертання та ниткою.

$m\omega^2 \cdot R = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad R = \frac{g\,tg\theta}{\omega^2}$

Задача двох тіл

$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^з$

$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^з$

↓

дві незалежні задачі

1) знаходження руху центра мас $(m_1+m_2)\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}_1^з + \vec{F}_2^з$

2) визначення відносного руху двох мат. точок.

$$\cancel{m_2 \frac{d^2\vec r_2}{dt^2} - m_1 \frac{d^2 \vec r_1}{dt^2} = \vec F_{21} + \vec F_2^3 - \vec F_{12} - \vec F_1^3 =}$$

$$\cancel{\vec F_{21} = -\vec F_{12}}$$

$$\frac{d^2\vec r_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec r_1}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\vec F_{21} + \frac{1}{m_2}\vec F_2^3 - \frac{1}{m_1}\vec F_{12} - \frac{1}{m_1}\vec F_1^3$$

$\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$ – вектор від 1 до 2, визначає відносне розташування

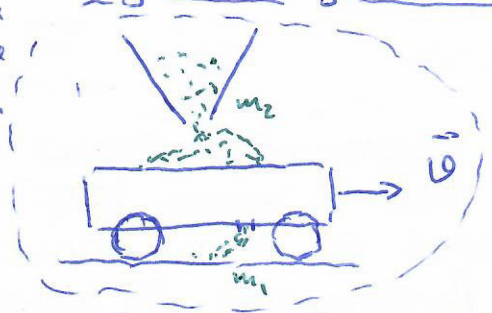
$\vec F_{21} = -\vec F_{12}$ $\quad \frac{1}{m_2}\vec F_{21} + \frac{1}{m_1}\vec F_{21} = \frac{m_1+m_2}{m_2 m_1}\vec F_{21}$ $\quad \mu = \frac{m_2 m_1}{m_1+m_2}$ – зведена маса

якщо $\vec F_1^3 = 0$, $\vec F_2^3 = 0$ (або хоча б $\frac{\vec F_1^3}{m_1} = \frac{\vec F_2^3}{m_2}$)

$$\mu \frac{d\vec r}{dt} = \vec F_{21}$$ – рівняння руху другої точки з μ у силовому полі першої точки

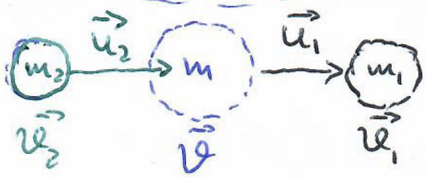
Рух тіла змінної маси. Реактивний рух.

рисунок наливне пізніше.



Прикладів подібного руху достатньо багато (витрата палива / дозаправка, розкидання добрив, гасіння пожеж, навантаження платформи.

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F^{\text{зовн.}}$$



момент часу t : $\vec p = m(t)\,\vec v(t)$

відносно певної ІСВ

$t + dt$: $m \to m + dm$
$\vec v \to \vec v + d\vec v$

зміна імпульсу внаслідок від'єднання $dm_1\ \vec v_1$, $dm_2\ \vec v_2$ та приєднання мас.

$$\vec p(t+dt) = (m+dm)(\vec v + d\vec v) + \vec v_1 dm_1 + \vec v_2 dm_2$$

$m(t) + m_1(t) + m_2(t) = \text{const} \Rightarrow$ $\cancel{dm = -dm_1}$ $\quad dm + dm_1 + dm_2 = 0$

$$\vec p(t+dt) = (m - dm_1 - dm_2)(\vec v + d\vec v) + dm_1 \vec v_1 + dm_2 \vec v_2 =$$

$$= m\vec v - dm_1\vec v - dm_2\vec v + m\,d\vec v - \underbrace{dm_1 d\vec v - dm_2 d\vec v}_{\text{мале} \to \text{нехтуємо}} + dm_1\vec v_1 + dm_2 \vec v_2 =$$

$$= m\vec v + m\,d\vec v - dm_1(\vec v - \vec v_1) - dm_2(\vec v - \vec v_2)$$

$$d\vec p = \vec p(t+dt) - \vec p(t) = m\,d\vec v - dm_1(\vec v - \vec v_1) - dm_2(\vec v - \vec v_2) \qquad \Big|\ \frac{1}{dt}$$

$$m\frac{d\vec v}{dt} + (\vec v_1 - \vec v)\frac{dm_1}{dt} + (\vec v_2 - \vec v)\frac{dm_2}{dt} = \vec F_{\text{зовн}}$$

$\underbrace{(\vec v_1 - \vec v)}_{\vec u_1}$, $\underbrace{(\vec v_2 - \vec v)}_{\vec u_2}$ – швидкості dm_1 та dm_2 відносно тіла, що рух. з $\vec v$

$\vec u_1$ – шв-ть витікання газів із сопла літака

$\vec u_2$ – шв-ть, з якою повітря набігає на вхідний отвір реактивного двигуна може бути без деталей $m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F^{зовн} + \frac{dm}{dt}\vec u$

$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F^{зовн} \underbrace{- \frac{dm_1}{dt}\vec u_1 - \frac{dm_2}{dt}\vec u_2}_{\text{реактивна сила}}$ – р-ня Мещерського, основне дин. р-ня поступального руху тіла змінної маси

$\vec F^{реак} = -\frac{dm_1}{dt}\vec u_1 - \frac{dm_2}{dt}\vec u_2$ – за своїм змістом це сила реакції (чи тяги), що прикладається до тіла з боку маси, що від'єднується від/приєднується до тіла

$\vec F^{реак} = \frac{dm}{dt}\vec u$ $\quad \frac{dm}{dt}>0$ $\quad \vec F^{реак}\uparrow\uparrow\vec u$

Загалом $m\frac{d\vec v}{dt} \neq \frac{d}{dt}(m(t)v(t))$ – тому р-ня М. це не зовсім II з. Н.

$\vec F^{реак}\neq 0$

Ч платформу (див. рисунок раніше)

вплив лише завдяки dm.

пісок що висипається – $\vec u_1=0$ (нульова відносна швидкість) $m(t)$

якщо бункер нерухомий, то $\vec v_2=0$, $\vec u_2=-\vec v$ => реактивна сила горизонтальна, dm_2 – зміна маси m_2 => $dm_2<0$

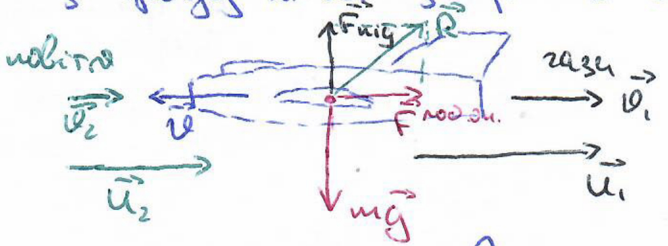
$$-\frac{dm_2}{dt}\vec u_2 = \frac{dm_2}{dt}\vec v \uparrow\downarrow \vec v$$

якщо дірку у підлозі закрити ($dm_1=0$) => $dm_2=-dm$

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F^{зовн} - \frac{dm}{dt}\vec v \quad ; \quad m\frac{d\vec v}{dt}+\frac{dm}{dt}\vec v = \vec F^{зовн}$$

$$\frac{d(m\vec v)}{dt} = \vec F^{зовн}$$ і фактично можна розглядати лише горизонтальні складові зовнішніх

реактивний літак: повітряно-реактивні двигуни засмоктують атмосферне повітря, його тиск підвищується і воно разом з продуктами згоряння виходить.



$m\approx const$

$dm=0=-(dm_1+dm_2)$

$dm_1=-dm_2$ $\quad$ $dm_1>0$ завжди(!)

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F^{зовн} - \frac{dm_1}{dt}(\vec u_1-\vec u_2)$$

$$\vec F^{зовн} = m\vec g + \underbrace{\vec F^{під} + \vec F^{лоб.о}}_{R}$$

підіймальна, лобового опору

$\vec F^{реак} = -\frac{dm_1}{dt}(\vec u_1-\vec u_2)$ – сила тяги двигуна (виникає під час роботи)

ракета: двигун викидає у вільний простір робоче тіло (напр. газоподібні продукти горіння ракетного палива)

$dm_2=0$ $\quad dm=-dm_1$

$\vec F^{зовн}=0$ (вільний простір) $\quad m\frac{d\vec v}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec u_1=\frac{dm}{dt}\vec u$

$dm<0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \uparrow\downarrow \vec{u}$

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m}\vec{u}$$

* $\vec{v}(0)=0$, $m(0)=m_0$ $\vec{u} = const$

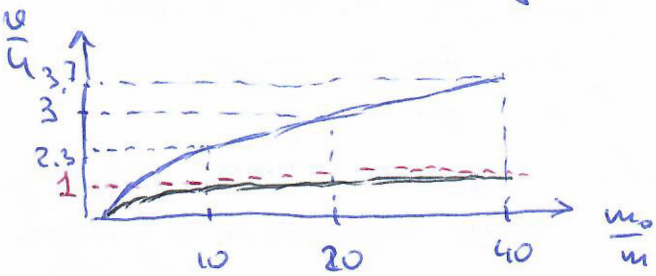
$$\int_0^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{u}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \qquad \vec{v} = -\vec{u}\ln\frac{m_0}{m}$$

* $Ox \uparrow\uparrow \vec{v}$, проектуємо $v = u\ln\frac{m_0}{m}$

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v}{u}\right)$$ - ф-ла Ціолковського

не містить часу, поточна шв-ть ракети залежить від поточного $\frac{m_0}{m}$ та u (фактично $\frac{dm}{dt}$ не важливий, його часові варіації також)

!! важливо може бути $v \gg u$



міномет (безвідкатна гармата)
пороховий заряд згорає практично миттєво, продукти згоряння з одного кінця відкритої труби, снаряд з іншого
з-н збер імпульсу

$$0 = m\vec{v} + (m_0-m)(\vec{u}+\vec{v})$$

m_0 - снаряд з порохом
m - снаряд $\vec{u}$ - швидкість відносно згорілого

тобто варіант одночасного згорання палива менш вигідний :-) чому?

$$\vec{v} = -\vec{u}\left(1-\frac{m}{m_0}\right)$$

Але $v \gg u$ тяжко досягти

v/u	1	5	10
m_0/m	2,71	148,4	22026

релятивістська формула

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{\frac{c}{2u}} \qquad \frac{v}{c} = \tanh\left(\frac{u}{c}\cdot\ln\frac{m_0}{m}\right)$$ ← завдання побудувати!

хімічне паливо: середньо-квадратична швидкість $\frac{m_M u^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ (маса молекули)

$u = \sqrt{\frac{3kT}{m_M}}$ $m_M = \mu\cdot m_p$ (масове число; маса протона)

$$u = \underbrace{\sqrt{\frac{3k}{m_p}}}_{=157\ \frac{м}{с\ K^{1/2}}}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К

* $T = 3000$ K $\mu=20$ (HF): $H_2+F_2 \to 2HF + Q$

досить поширене $2H_2 + O_2 \to 2H_2O + Q$ в шатлах, напр

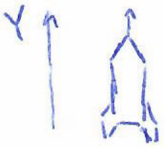
$u \approx 2000$ м/с   друга косм. швидкість 11,2 км/с $\frac{m_0}{m} = 270$ (18; 12) } багатоступеневі

$u_{max} \approx 4500$ м/с

* Старт ракети (поблизу поверхні Землі, $\vec{g}$ = const, опором повітря нехтуємо)

m_0, u = const

Y



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}u \qquad m\left(\frac{dv}{dt}+g\right) = m\frac{d}{dt}(v+gt) = -\frac{dm}{dt}u$$

$$m\,d(v+gt) = -u\,dm \qquad \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}d(v+gt)$$

$$\ln\frac{m(t)}{m_0} = -\frac{v+gt}{u} \qquad \underline{v = u\ln\frac{m_0}{m} - gt}$$

* ракета на певній висоті — скільки їй потрібно щосекунди викидати $\frac{dm}{dt}$ -?

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad 0 = m\vec{g} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

$$0 = -mg - \frac{dm}{dt}u$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{g}{u}dt \qquad \ln\frac{m}{m_0} = -\frac{g}{u}t \qquad m = m_0\exp\left(-\frac{gt}{u}\right)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{g}{u}m_0\exp\left(-\frac{gt}{u}\right)$$

До релятивістських рухів.

* $u = 10$ км/с

$\frac{v}{c}$	0,001	0,1	0,25	1/3	?
$\frac{m_0}{m}$	$1,07\cdot10^{13}$	$1,79\cdot10^{1307}$	$5,4\cdot10^{3327}$	$2,84\cdot10^{4515}$	

маса ел.-на $9,1\cdot10^{-31}$ кг

маса галактики $2\cdot10^{42}$ кг

необх $u\nearrow$ ⇒ ідеальний випадок фотонна ракета $u = c$

необх перетворення речовини у випромінювання

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{1-v/c}{1+v/c}\right)^{1/2} \qquad \text{для } v = c/2 \quad \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,; \quad \frac{m_0}{m} = \sqrt{3}$$

$$\frac{v}{c} = (1-10^{-4}) \qquad \frac{m}{m_0} = \left(\frac{10^{-4}}{2}\right)^{1/2} \qquad \frac{m_0}{m} = \frac{\sqrt{2}}{10^{-2}} = 141$$