

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**М. М. Лазаренко, Ю. Ф. Забашта,  
О. С. Свечнікова**

## **МОДЕЛЬ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО БІОСИСТЕМ**

Частина I

Навчально-методичний посібник  
для студентів фізичного факультету

Київ – 2025

**УДК**

***Рецензенти:***

доктор фізико-математичних наук, доцент О.Л. Павленко  
кандидат фізико-математичних наук, доцент В.В. Курилюк

*Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка  
(протокол № від вересня 2025 року)*

**Колектив авторів: М.М. Лазаренко, Ю. Ф. Забашта,  
О. С. Свечнікова**

Модель суцільного середовища та її застосування до біосистем:  
Навчально- методичний посібник для студентів природничих  
спеціальностей університетів / М.М. Лазаренко, Ю. Ф. Забашта, О. С.  
Свечнікова; КНУ імені Тараса Шевченка. – Київ, 2025. – 127 с.

Навчально-методичний посібник є частиною курсу «Реологія біосистем», який викладається студентам фізичного факультету, які навчаються за програмою вибіркових блоків дисциплін «Молекулярна фізика» та «Фундаментальна медична фізика спеціальності 104 «Фізика та астрономія» Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він описує фундаментальні принципи фізики суцільного середовища та демонструє їх практичну значущість для біомедичних і біотехнологічних застосувань. Посібник призначений для студентів та аспірантів природничих спеціальностей університетів.

**УДК**

© М.М. Лазаренко, Ю. Ф. Забашта, О. С. Свечнікова, 2025

## ЗМІСТ

### Передмова

### Розділ 1. Напружений стан біополімерів

#### 1.1. Біополімер як континуум

Біополімерні ланцюги.	5
Мікроскопічний та макроскопічний опис системи.	7
Рівняння нерозривності.	9
Фізична та математична неперервність	11

#### 1.2. Тензор напружень

Нормальне напруження.	13
Випробування на простий розтяг.	14
Дотичні напруження.	17
Вектор напружень	18
Тензор напружень	21
Найпростіші напружені стани.	23
<i>Вправа 1. Побудова схеми напруженого стану.</i>	26
<i>Вправа 2. Граничні умови на вільній поверхні.</i>	27

#### 1.3. Напруження і координатні системи

Залежність напруження від нахилу площадки.	28
Зміна компонентів тензора при перетворенні координат.	30
<i>Вправа 3. Руйнування шарового композиту при простому розтягу.</i>	31
<i>Вправа 4. Шорсткість поверхні та міцність клейового з'єднання.</i>	33
<i>Вправа 5. Руйнування шарового композиту при простому стиску.</i>	35
<i>Вправа 6. Руйнування шарового композиту при двовісному розтягові.</i>	37
<i>Вправа 7. Залежність міцності біополімерного волокна від кратності витягування.</i>	37
Діагоналізація матриць: основні співвідношення.	41
<i>Вправа 8. Утворення тріщини при крихкому руйнуванні біополімеру</i>	42
Інваріанти тензора. Визначення тензора.	44
Кульовий тензор і девіатор.	46
<i>Вправа 9. Розрахунок приведенного напруження</i>	47

#### 1.4. Деформаційні характеристики континуума

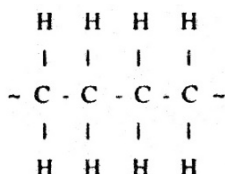
Абсолютна та відносна деформації.	48
Вектор зміщення	49
Тензор градієнтів зміщення	50
<i>Вправа 10. Чистий зсув та обернення елементарного паралелепіпеда.</i>	53
Тензор деформації.	55
Криволінійні координати та деформації.	57
<i>Вправа 11. Залежність деформації біополімерних сегментів від їхньої орієнтації.</i>	59
<i>Вправа 12. Форма клітин живої тканини при їх деформації.</i>	61
<b>1.5. Рівняння руху континуума</b>	
Рівняння руху при лінійному напруженому стані	64
<i>Вправа 13. Розподіл напружень у біополімері при випробуванні на простий розтяг.</i>	66
Поверхневі та об'ємні сили.	67
<i>Вправа 14. Напруження в канаті, що виникають під дією його власної ваги.</i>	69
Рівняння руху для довільного напруженого стану.	70
Симетрія тензора напружень.	71
Закон збереження імпульсу.	72
Закон збереження енергії.	77
Ейлерові та лагранжеві координати.	77
<b>Розділ 2. Пружні деформації біополімерів</b>	
<b>2.1. Пружний ізотропний континуум</b>	
Реологічне рівняння.	80
Закон Гука у тензорній формі.	83
<i>Вправа 15. Зв'язок між пружними сталими.</i>	84
<i>Вправа 16. Закон Гука у системі головних осей.</i>	84
Пружна енергія.	85
Рівняння Ляме.	86
Плоскі хвилі.	87
Хвилі у пружних біоволокнах.	90
Про миттєвість пружної деформації.	96
<b>2.2. Пружний анізотропний континуум</b>	
Тензор пружних жорсткостей.	97
Пружна симетрія орієнтованого біополімеру.	104
Фізична і лабораторна системи координат.	111
<i>Вправа 17. Компоненти тензора пружних податливостей для орієнтованої біополімерної плівки</i>	114

Простий розтяг анізотропного біоматеріалу.	<b>118</b>
Дисперсійне рівняння для орієнтованих біополімерів.	<b>123</b>
Література	<b>127</b>

# 1. НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІОПОЛІМЕРІВ

## 1.1. Біополімер як континуум

**Біополімерні ланцюги.** Ще зі шкільної лави студент пам'ятає, що полімери – це речовини, що складаються з довгих полімерних ланцюгів. І, мабуть, перше, що пригадується з того часу – це ланцюг поліетилену (ПЕ), побудований із груп  $\text{CH}_2$ . Хімічну формулу ПЕ записують так



Позначення « $\sim$ » застосовується на ознаку того, що ланцюг поліетилену не обмежується зображенням атомними групами. Атоми вуглецю у ланцюзі поліетилену утворюють так званий скелет ланцюга і саме тому називаються скелетними. Скелетні атоми з'єднані один з одним скелетними хімічними в'язями. Існування цих в'язей, власне, і дозволяє розглядати ланцюг як окреме утворення. Якщо поліетиленовий ланцюг повністю витягнути, то він набуде форми так званого плоского загзага (рис. 1.1.1):

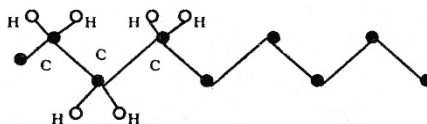


Рис. 1.1.1. Плоский зигзаг поліетиленового ланцюга

Відрізки ламаної лінії, зображеної на рис. 1.1.1, – то є хімічні

C-C в'язі. Їхня довжина складає  $1,54 \text{ \AA}$ . Валентні кути C-C-C дорівнюють  $112^\circ$ . До скелетних атомів приєднано бічні групи, що складаються з двох атомів водню. Чотири хімічні в'язі, які

сходяться в одній точці – атоми вуглецю, зображено на рис. 1.1.2а. Кути між хімічними в'язями Н-С-Н дорівнюють  $109^\circ$ .

Проекцію чотирьох в'язей (рис. 1.1.2а) на горизонтальну площину СНН зображено на рис. 1.1.2б, з якого видно, що кути між проекціями в'язей на цю площину складають  $120^\circ$ .

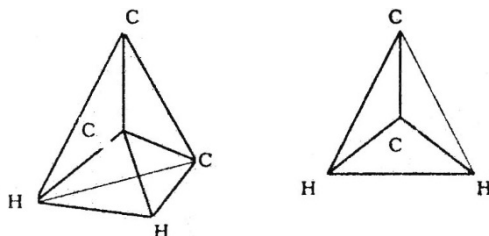


Рис. 1.1.2. Розташування сусідніх хімічних в'язей поліетиленового ланцюга

Як видно з рис. 1.1.1, плоский зигзаг утворено за рахунок послідовного відтворення у просторі однієї й тієї ж групи, а саме:  $-\text{CH}_2-\text{CH}_2-$ . Цю групу називають елементарною ланкою.

**Біополімери** — загальна назва макромолекулярних сполук, що існують у живій природі, вони є полімерами біологічного походження.

Природні полімери складається з повторюваних мономерних одиниць. Вони відіграють фундаментальну роль в будові та функціонуванні біологічних організмів. Біополімери є пептиди, нуклеїнові кислоти, білки, вуглеводи та полісахариди. Більшість біополімерів є кополімерами, тобто складаються із мономерних ланок різного типу.

Вся історія цивілізації людини пов'язана з використанням біополімерів: матеріали для виготовлення одягу, будівельні матеріали, опалення та їжа.

Термін «полімерний» ми застосовуємо до ланцюга, число ланок в якому досягає і перевищує тисячі.

Розрізняють два основних класи твердих біополімерів – аморфні та аморфно-кристалічні. У перших ланцюги розташовані безладно, у других – частина ланцюгів утворює кристалічну ґратку.

Будь-яка система, що її вивчає фізика, складається із частинок. Коли йдеться про механічні властивості твердих тіл, під

частинкою зазвичай розуміють окремий атом. При цьому **атом** розглядається як безструктурна частинка, що в розрахунковій моделі **зображується матеріальною точкою**. Саме з таким уявленням про атом пов'язаний вислів «атом знаходиться у точці  $\vec{x}$ , де  $\vec{x}$  - радіус-вектор цієї точки». Говорять також, що атом є силовим центром. Цей термін знову пов'язаний із образом атома як матеріальної точки. Дійсно, коли хочемо записати потенціальну енергію  $U_s$  взаємодії між двома атомами, то вводимо функцію  $U_s(\vec{r}_s)$ , де  $\vec{r}_s = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}$  - відстань між атомами, а  $\vec{x}^{(1)}; \vec{x}^{(2)}$  - радіус-вектори, що визначають положення обох атомів – матеріальних точок.

Для твердого полімеру **атом** також **можна розглядати як частинку – силовий центр**. Але буває й так, що задають потенціальну енергію взаємодії між окремими атомними групами (скажімо, говорять про взаємодію груп  $\text{CH}_2$  для сусідніх ланцюгів поліетилену). У цьому випадку силовим центром є вже вся група  $\text{CH}_2$  – саме її ми розглядаємо як матеріальну точку. Надалі йтиметься про частинки, з яких складається твердий полімер, уточнюючи при необхідності, з якими частинками – окремими атомами чи атомними групами – маємо справу.

### ***Мікроскопічний та макроскопічний опис системи.***

Положення ланцюга у просторі ми повністю визначимо, задавши координати усіх частинок, що складають даний ланцюг. У даному випадку йдеться про **мікроскопічну** конфігурацію ланцюга. Якщо до координат частинок додати ще й їхні швидкості, то тоді ми повністю задамо так званий мікроскопічний стан ланцюга. Звичайно нас цікавить фізична система, що складається з багатьох ланцюгів. **Мікроскопічний стан системи**, як і окремого ланцюга, **визначається певними значеннями координат і швидкостей частинок, що утворюють дану систему**. Терміни «мікроскопічний стан системи», «мікроскопічний опис системи» є синонімами.

Фізичну систему можна описувати, використовуючи дещо інший підхід.

У моделі, про яку йдеться, кожна частинка являє собою матеріальну точку, в якій сконцентрована маса атома чи ланки  $m$ .



**Густина матеріалу  $\rho'$**  для цієї моделі можна записати за допомогою  $\delta$ -функції, а саме

$$\rho'(x) = \sum_1^N m \delta(\vec{x} - \vec{x}^{(j)}), \quad (1.1.1)$$

де  $\vec{x}^{(j)}$  - радіус-вектор, що визначає положення  $j$ -тої частинки.

Виділимо деяку область об'ємом  $\Delta V$ , малу порівняно з усією системою, проте таку, що містить велику кількість частинок. Тепер «розмажемо» масу цієї області рівномірно по всій області, ввівши середню для цієї області густину

$$\rho = \int_{\Delta V} \rho'(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (1.1.2)$$

При цьому речовина не буде вже згущена в окремих точках, а рівномірно розподілиться за всім об'ємом області – неперервно, не залишаючи пустот. Така операція «розмазування» офіційно називається **усередненням**, а сама область, по якій поводитья усереднення, - **фізичним нескінченно малим об'ємом**. Унаслідок такого «розмазування», або, що те ж саме, - усереднення, приходимо до моделі, яку прийнято називати **континуумом**.

Як з'ясувалось, **континуум** являє собою **неперервне**, або, як кажуть, **суцільне середовище**. Проте усереднення ще не досить, щоб закінчити загальну характеристику континууму.

Згадаємо про поняття неперервності в математиці. Як відомо, неперервність функції  $f(x)$  у точці  $a$  рівнозначна прагненню числового значення  $f(x)$  до границі  $f(a)$ , коли аргумент  $x$  прямує до границі  $a$ . Іншими словами, інтервал  $x - a$  є нескінченно малою величиною.

Що прийняти за нескінченно малу величину в «нашому» континуумі, одержаному за допомогою усереднення? Цією величиною може бути тільки розмір фізично нескінченно малого об'єму. Отже, переходячи до континууму, необхідно вважати три ребра куба (якщо фізично нескінченно малий об'єм вибрано у формі куба) нескінченно малими величинами. А це, в свою чергу, означає, що зазначена область стягується в точку. Зазначена операція називається **граничним переходом до континууму**.

Таким чином, **шлях до континууму складається з двох етапів: усереднення та граничного переходу**. При цьому

**фізичний нескінченно малий об'єм перетворюється на математичний нескінченно малий об'єм**

$$d\vec{x} = dx_1 dx_2 dx_3 ,$$

де  $dx_1, dx_2, dx_3$  - нескінченно малі величини.

Опис системи, що ґрунтується на моделі континууму, називають **макроскопічним**.

**Рівняння нерозривності.** Головна перевага континууму як фізичної моделі полягає в тому, що всі функції, які характеризують систему, є **неперервними функціями координат**. Загалом, зазначені функції можуть залежати також від часу  $t$ . Очевидно, що і ця залежність є неперервною. До таких функцій належать, наприклад, густина  $\rho(\vec{x}, t)$ , швидкість  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , тощо (звернімо увагу на те, що записуємо залежність від координат  $x_1, x_2, x_3$ , наприклад,  $\rho(x_1, x_2, x_3)$ , як функцію векторного аргументу  $\rho(\vec{x})$ , зважаючи на те, що координати  $x_1, x_2, x_3$  є проекціями вектора  $\vec{x}$ ).

Вимога неперервності середовища призводить до існування залежності між уже згаданими функціями  $\rho(\vec{x})$  і  $\vec{v}(\vec{x})$ . Дійсно, запишемо для маси  $M$ , що займає ділянку суцільного середовища із об'ємом  $V$ , вираз, який впливає з самого визначення поняття густини

$$M = \int_V \rho dV \quad (1.1.3)$$

Згідно з цим виразом зміна маси за час  $dt$  дорівнюватиме

$$dM = \int_V \partial \rho / \partial t \cdot dV dt \quad (1.1.4)$$

Така зміна відбувається за рахунок того, що певна кількість речовини виділяється з об'єму (або додається до нього) крізь його поверхню  $S$ . Оскільки через одиницю поверхні проходить за час  $dt$  кількість речовини об'ємом  $v_n dS dt$ , де  $v_n$  - проекція швидкості на нормаль до поверхні  $S$ , то крізь усю поверхню проходитиме за цей же час маса

$$dM = \oint_S \rho v_n dS dt \quad (1.1.5)$$

Порівняння формул (1.1.4) та (1.1.5) приводить до

$$dM = \int_V \partial \rho / \partial t dV + \oint_S \rho v_n dS = 0 \quad (1.1.6)$$

Заміняючи в (1.6) поверхневий інтеграл об'ємним, одержуємо

$$\int_V [\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \vec{v})] dV = 0 \quad (1.1.7)$$

Оскільки об'єм  $V$  вибрано довільно, то ліва частина виразу (1.1.7) дорівнюватиме нулеві лише в тому випадку, коли підінтегральний вираз обернеться на нуль

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1.8)$$

Вважаючи відомими формули векторного числення

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho \quad (1.1.9)$$

$$d\rho / dt = \partial \rho / \partial t + \vec{v} \operatorname{grad} \rho, \quad (1.1.10)$$

перепишемо (1.1.6) у вигляді

$$d\rho / dt + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.1.11)$$

Отже, функції  $\vec{v}(x, t)$  та  $\rho(\vec{x}, t)$  не можуть бути вибрані довільно. Завдяки неперервності матеріалу вони мають задовольняти виразові (1.1.11), що відомий як **рівняння нерозривності** (або його називають також **законом збереження маси**). Звідкіля береться остання назва – ясно: «маса не зникає і не виникає» - ось про що говорить прирівнювання виразів (1.4) та (1.5), яке приводить врешті-решт до формули (1.1.11).

Вираз (1.1.11) можна одержати дещо простіше. За своїм визначенням густина речовини в об'ємі  $V$  записується за допомогою виразів

$$\rho = M / V \quad \text{або} \quad \rho V = M .$$

Нехай об'єм збільшився на величину  $dV$ , а маса речовини залишилась та ж сама (на відміну від попереднього випадку, коли об'єм залишався сталим, а маса речовини змінювалась завдяки тому, що частинки або залишали цей об'єм, або входили до нього, відповідно зменшуючи або збільшуючи масу). Густина має зменшитись. Величину цього зменшення  $d\rho$  можна визначити, використавши вираз для диференціала

$$dM = \rho dV + V d\rho \quad (1.1.12)$$

та прирівнявши  $dM$  нулеві (адже маса не змінилась)

$$0 = \rho dV + V d\rho . \quad (1.1.13)$$

Перейшовши від диференціалів до похідних, одержуємо

$$d\rho / dt + dV = 0 , \quad dV / dt = 0 . \quad (1.1.14)$$

Вираз  $dV$  – це відносна зміна об'єму, яка саме і дорівнює  $div \vec{v}$ , що й приводить до тотожності рівності (1.1.11) та (1.1.14).

**Фізично нескінченно малий об'єм** – ділянка простору, в якій існує стан локальної рівноваги.

**Фізична та математична неперервність.** Коли йшлося про нескінченно малий об'єм, то обов'язково підкреслювалось, який об'єм мається на увазі – фізичний чи математичний. Саме через поняття нескінченно малого об'єму вводиться, як вже це зрозуміло, поняття неперервності. Отже, по суті, маючи два визначення нескінченно малого об'єму, ми мусимо погодитись на існування і двох понять неперервності - фізичного та математичного.

Стосовно останнього, то його обґрунтування, де застосовуються границі, нескінченно малі величини тощо, з

арсеналу математичного аналізу добре відомі. Із фізичною ж неперервністю справа видається дещо складнішою. Джерело цих ускладнень можна проілюструвати за допомогою наступного прикладу.

Скажімо, нас зацікавило, як змінюється густина  $\rho$  вздовж осі деякого стрижня. Позначимо цю вісь через  $x$ . То ж нас цікавитиме вигляд функції  $\rho(x)$ . Для того, щоб знайти відповідь на це питання, розріжемо стрижень перпендикулярно до осі на окремі шматки. Зважуючи їх, ми й знайдемо аналітичну залежність  $\rho(x)$  як послідовність чисел  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  відповідно до номера шматка, що їх занумеровано в порядку розташування вздовж осі  $x$ . Нехай встановлено, що

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \rho_2 = \rho_3 \quad (1.1.15)$$

але, що водночас виконується нерівність

$$\rho_1 < \rho_3 \quad (1.1.16)$$

«Вибачте, - скажуть, - це вже якась нісенітниця». Ясно, коли виконуються рівності (1.15), то їхнім наслідком обов'язково має бути рівність  $\rho_1 = \rho_3$ . Але не треба поспішати з висновками. Річ у тім, що йдеться не про точні рівності – в експериментальній фізиці їх не буває (бо вимірюємо будь-яку величину завжди з деякою похибкою).

Нехай одержимо значення  $\rho_1 = 1, \rho_2 = 1,1$  та  $\rho_3 = 1,2 \text{ г/см}^3$ , і нехай похибка  $\Delta\rho$  при вимірюванні відповідних величин становила  $\Delta\rho = 0,1 \text{ г/см}^3$ . При такій похибці величини  $\rho_1$  та  $\rho_2$  не розрізнити. Через це ж ми не в змозі розрізнити і величини  $\rho_1$  та  $\rho_3$ . Саме на це зважалося, коли записувались рівності (1.1.15). Зрозуміло, що рівності у такому розумінні нічим не суперечать нерівності (1.1.16).

Отже, незважаючи на зростання густини при збільшенні  $x$ , нам вдалося певною мірою задовольнити й умові неперервності функції: у даній точці границя зліва повинна дорівнювати границі справа. Тільки й того, що згадану рівність вдалося задовольнити з певною точністю, а сама точка «розтяглася» на величину  $\Delta x$ ,

що дорівнювала довжині окремого шматка. Величину  $\Delta x$  було підбрано так, щоб зміна  $\rho$  на ній не перевищувала  $\Delta\rho$ .

У згаданих «шматках» вже, напевно, упізнано фізично нескінченно малі об'єми. Що ці шматки відіграють роль таких об'ємів, свідчить хоча б той факт, що в їхніх межах макроскопічний параметр  $\rho$ , що характеризує цей об'єм, залишається сталим (звичайно, з точністю до похибки  $\Delta\rho$ ). Це відповідає нашому звичному уявленню про нескінченно малий об'єм, коли значення параметра, задане в точці  $x$ , залишається сталим у межах інтервалу  $x, x + dx$ .

Важливо, що розмір  $\Delta x$  фізично нескінченно малого об'єму не вибирається довільно – його продиктовано точністю, з якою вимірюється той чи інший параметр. Усереднення ж за інтервалом  $\Delta x$  є результатом процесу вимірювання.

## 1.2. Тензор напружень

**Нормальне напруження.** Коли у підручниках йдеться про напруження, студент обов'язково натикається на рисунок, де зображений стрижень, який розтягують дві сили  $F$ , однакові за величиною та протилежні на напрямком (рис. 1.2.1 а). Далі умовно розрізають стрижень по площині  $A - A$ , відкидають якусь частину (скажімо, нижню) та її дію на частину, що залишилась, замінюють внутрішніми силами (рис. 1.2.1.б). Застосувавши термін «внутрішні», ми тим самим відмежували сили, що діють між окремими частинами стрижня від сили  $F$ . Називатимемо сили  $F$  зовнішніми (вони діють на стрижень з боку інших тіл).

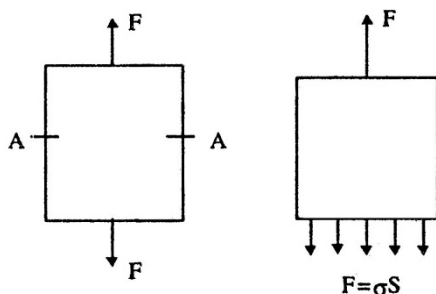


Рис. 1.2.1.  
навантаження  
простому розтягу

Схема  
при

Придивіться до даного рисунку. Сили  $F$  прикладені в одній точці, а внутрішні сили розподілені по всьому перерізі – у кожній точці перерізу діє сила (останнє й не дивно – ми ж домовилися мати справу з **континуумом** – неперервним середовищем: отже і внутрішні сили мають бути неперервно розподілені по перерізу). Як це зображено на рисунку, зовнішні сили  $F$  - зосереджені, а внутрішні – розподілені. Тоді для останніх можна говорити про силу, що діє на одиницю площини перерізу – або про **інтенсивність внутрішніх сил**. Неважко записати формулу для цієї величини

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.2.1)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу стрижня.

Величина  $\sigma$  називається **напруженням**, а конкретніше – «**нормальне напруження**». Термін «нормальний» визначає напрямок дії внутрішніх сил: вони направлені за нормаллю – перпендикулярно до площини перерізу. Одиниця вимірювання

напруження -  $\frac{H}{m^2}$  або Па (паскаль). Вживають також одиниці: кілопаскаль (1 КПа=10<sup>3</sup> Па), мегапаскаль (1 МПа=10<sup>6</sup> Па), гігапаскаль (1 ГПа=10<sup>9</sup> Па).

**Випробування на простий розтяг.** Згідно з рис. 1.2.1, сила вважається прикладеною у точці. Чи відповідає це дійсності? Ясно, що уявлення про прикладання сили в точці є не чим іншим, як абстракцією – в дійсності все виглядає дещо складніше. Прагнучи розказати про це «складніше», перейдемо до розмови про випробування про **простиг розтяг** – саме так називається схема навантаження, наведена на рис. 1.2.1.

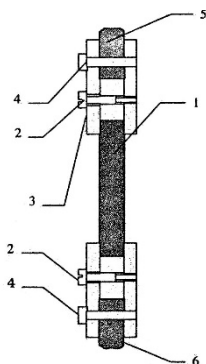


Рис. 1.2.2. Пристрій для розтягу зразка біополімеру у вигляді смужки

По-перше, зразок біополімеру (так називатимемо стрижень, що розтягується; якщо вже вжито термін «випробування», то відповідно до цього говоримо «зразок» - і далі вже можна зовсім «по-науковому» - «випробування проводились на зразках»). Так-от, зразок треба якось розтягувати. Найчастіше маємо справу з полімерними плівками: виріжемо з плівки смужку 1 (див. рис. 1.2.2), затиснемо її гвинтами 2 між металевими пластинками 3, а самі пластини за допомогою штифтів 4 приєднаємо до тяг 5, 6. Відтак маємо найпростіший пристрій, за допомогою якого можна прикладати зовнішню силу до зразка. Для цього достатньо знерухомити тягу 6 і змисити рухатися тягу 5.

Застосування зразка у вигляді смужки має певні недоліки. Річ у тім, що, стиснувши зразок між пластинами, ми ставимо в нерівні умови перерізи смужки  $B-B$  та  $A-A$ : у першому – внаслідок поперечного стиску можуть виникнути додаткові напруження, завдяки яким зразок зруйнується саме в перерізі  $B-B$ . І, вимірявши силу  $F$ , при якій відбулося руйнування, ми все-таки не будемо впевнені, що зразок зруйнувався саме при напруженні  $\sigma$ , що визначається формулою (1.2.1).

Щоб цього уникнути, краще вирізати зразок у формі лопатки (рис. 1.2.3).



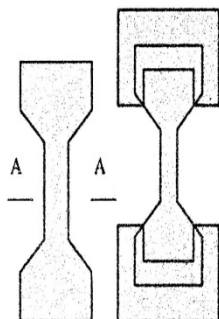


Рис. 1.2.3. Пристрій для розтягу зразка у вигляді лопатки

Тоді потовщена частина зразка прийдеться саме на металеві пластини затискувачі (їх позначено цифрою 3 на рис. 1.2.2) і зразок розірветься по перерізу  $A-A$ , для якого ми впевнені у справедливості формули (1.2.1). Форма лопатки має ще ту зручність, що в даному випадку можна обійтися без затискувачі (при їхньому застосуванні завжди існує небезпека, що зразок «вислизне» при розтягу з-поміж пластин), замінивши їх захватами 1 (рис. 1.2.3). Можливості «вислизання» при цьому зменшуються, однак треба ж мати досить товсті плівки (фактично не плівки, а полімерні пластини з товщиною  $\approx 5-6$  мм і більше), інакше зразок скрутиться і все-таким «вислизне» із захватів.

Розглянувши спосіб, за яким зовнішню силу прикладають до зразка, доходимо висновку, що сила  $F$ , зображена на рис. 1.2.1, де вона прикладена в точці, є рівнодійною сил, що діють на зразок з боку інших сил. І тепер ми маємо змогу відповісти, що означає вислів «зовнішня сила прикладена в точці». Це точка, в якій лінія дії рівнодійної перетинає переріз стрижня.

Повернувшись до рис. 1.2.1, згадаємо, що розтяг зразка досягається за рахунок руху тяги вгору. Рух тяги створює прилад, який називають **розривною машиною**. Джерелом руху в цій машині є електродвигун. Тому головне призначення машини – перетворити обертальний рух валу двигуна на поступальний рух суттєво зменшивши швидкість, оскільки число обертів валу двигуна – порядку тисячі (наприклад, 1400 об/хв.), швидкість же руху тяги – порядку мм за хв. Подивимось (рис. 1.2.4), як можна реалізувати цю задачу.

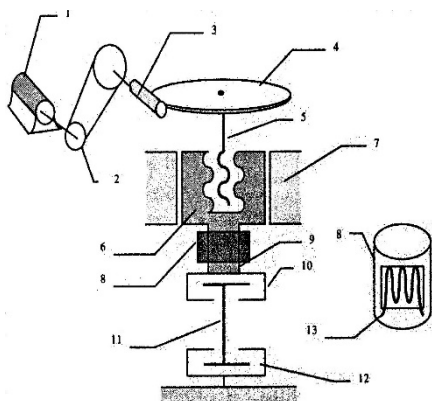


Рис. 1.2.4. Схема розривної машини

Оберти двигуна знижуються **редуктором** 2, який являє собою набір шестерн із різною кількістю зубців або ремінну передачу (яка саме зображена на рис. 1.2.4). Далі обертання уповільнюється черв'ячною передачею 3, 4. Завдяки обертанню гвинта 5 по направляючих 7 поступально рухається гайка 6, тягнучи за собою тягу 9 із верхнім захватом 10. При цьому розтягується зразок 11, що його тримає нерухомий захват 13. Сила вимірюється пружним елементом 8, який являє собою тонкостінну циліндричну втулку, на зовнішню поверхню якої наклеєний дротяний датчик опору 13. Деформація циліндра вважається пропорційною силі, що діє на зразок. Згадана деформація змінює опір датчика. Зазначена зміна опору вимірюється за допомогою моста опорів. Рисунок 1.2.4 показує, як можна реалізувати схему навантаження, зображену на рис. 1.2.1.

**Дотичні напруження.** Простий розтяг не вичерпує всіх способів навантаження. Наприклад, ми можемо розташувати поздовжню вісь зразка 1 перпендикулярно до напрямку руху тяги розривної машини (як це показано на рис. 1.2.5 а) – такий дослід називається **випробуванням на зріз**. Проведемо у зразку переріз  $A-A$ , відкинувши ліву частину 1 та замінивши її дію внутрішніми силами (рис. 1.2.5 б).

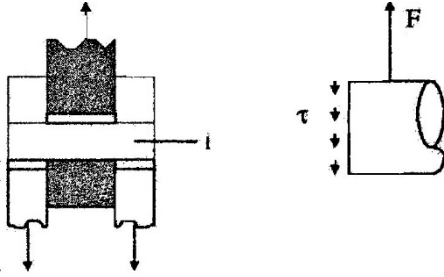


Рис. 1.2.5. Схема випробування на зріз

На відміну від попереднього випадку внутрішні сили направлені по дотичній до площини перерізу. Тому інтенсивність цих сил називається **дотичним напруженням**

$$\tau = \frac{F}{S} \quad (1.2.2)$$

**Вектор напружень.** Вище розглянуто випадки, коли внутрішні сили направлені або по нормалі, або по дотичній до площини перерізу. Логічно перейти до більш загального випадку, коли внутрішні сили направлені до площини перерізу під кутом, що має довільне значення.

Введемо декартову систему координат, одна з осей якої, наприклад, 1, направлена по нормалі до площинки. Позначимо інтенсивність внутрішніх сил через  $\vec{P}$  - це **вектор напружень**. Це вектор, і значить, його можна розкласти на складові, що направлені вздовж координатних осей. Позначаючи орти системи через  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ , одержуємо

$$\vec{P} = \vec{i}_1 \sigma_{11} + \vec{i}_2 \sigma_{21} + \vec{i}_3 \sigma_{31}, \quad (1.2.3)$$

де  $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}$  - проєкції вектора  $\vec{P}$  на координатні вісі.

(Звернімо увагу на те, як позначені індекси проєкцій вектора  $\vec{P}$ : перший визначає напрямок дії відповідної проєкції напруження, другий – напрямок нормалі до площини, по якій діє напруження).

Величину вектора напружень  $\vec{P}$ , як видно з формули (1.2.3), можна представити у вигляді суми нормального та двох дотичних напружень.

Повернімося до мікроскопічної картини (де ми розрізняємо ланки, ланцюги тощо). Нехай фізично нескінченно малий об'єм має форму куба (рис. 1.2.6 а, де зображено одну з граней  $DEGF$  цього куба).

Оберемо деяку частинку  $A$  із згаданого об'єму, яка взаємодіє з іншими частинками за межами цього куба, наприклад  $B$ ,  $C$  тощо. Позначимо сили взаємодії цих частинок із частинкою  $A$  через  $F_{BA}$ ,  $F_{CA}$  тощо.

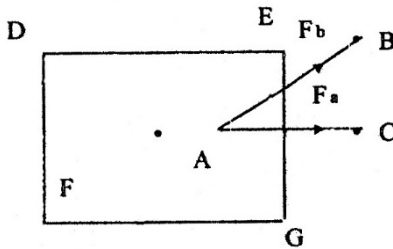


Рис. 1.2.6 а. Сили, що діють на фізично нескінченно малий об'єм з боку оточення

Аналогічно визначимо всі сили, з якими частинки «нашого» кубу взаємодіють із частинками мікроскопічного оточення. Із цих сил виберемо всі сили, лінії дій яких проходять через грань, що проектується в лінію  $EG$ , та знайдемо  $\vec{F}_{EG}$  рівнодійну цих сил

$$\vec{F}_{EG} = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AC} + \dots$$

Позначимо через  $\Delta S$  площу грані кубу. Виходячи з визначення напруження, треба було б записати наступне

$$\vec{P} = \frac{\vec{F}_{EG}}{\Delta S} \quad (1.2.4)$$

Однак необхідно врахувати ще одну обставину (адже йдеться про континуум) – неперервне середовище. І для нього напруження необхідно задавати в кожній точці. Точка ж континууму  $\vec{x}$  зі своїм оточенням  $dx$  відповідає певному фізично нескінченно малому об'єму, знаходячись у його центрі мас, і перехід до континууму

означає не що інше, як стягування цього об'єму в точку. Отже, точніше було б записати так

$$\vec{P} = \lim \frac{\vec{F}_{EG}}{\Delta S} \quad (1.2.5)$$

Коли йдеться про континуум, то всі функції, які його описують, можна розглядати як неперервні функції координат або (що те ж саме) як неперервні функції векторного аргументу  $\vec{x}$ . Про це вже йшлося, коли згадувалося про густину  $\rho$  та швидкість  $v$  – те ж саме стосується і проекцій напружень  $\sigma$ .

Можна було б міркувати так: оскільки у виразі (1.2.3) всі проекції  $\sigma$  залежать від  $\vec{x}$ , то, здавалося, можна записати, що  $\vec{P}$  також є функцією  $\vec{x}$  (і це буде правильно). Однак, цього не досить. Згадаймо, осі ж ми проводили для певної орієнтації площадки  $\Delta S$ , направляючи вісь 1 за зовнішньою нормаллю. Отже, вектор  $\vec{P}$  залежить не тільки від координат, але й від вибраної орієнтації площадки. У тому, що величина  $\vec{P}$  змінюється залежно від орієнтації площадки, неважно впевнитись, звернувшись до рис. 1.2.6 б.

Повернімо фізично нескінченний об'єм у положення  $D'E'G'F'$  навколо точки  $\vec{x}$  і розглянемо грань  $E'G'$ . Очевидно, що рівнодійна сил взаємодії з оточуючим середовищем через цю грань буде, загалом кажучи, відмінною від  $\vec{F}_{EG}$ . Тоді, стягуючи куб  $D'E'G'F'$  в точку, одержимо й інше значення  $\vec{P}$  для орієнтації площадки, що розташовується паралельно грані  $E'G'$ .

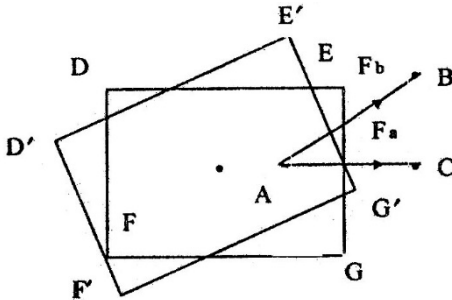


Рис. 1.2.6 б. Сили, що діють на фізично нескінченно малий об'єм з боку оточення

Отже, використовуючи вектор  $\vec{P}$  як характеристику сил, що діють у даній точці континууму (кажуть ще: для характеристики напруженого стану), у даній точці незручно – не будемо ж ми, крім значення вектора  $\vec{P}$  позначати ще й орієнтацію площадки, за якою діє цей вектор: таких площадок проходить через дану точку безліч. Нічого не залишається як шукати інший спосіб для опису напруженого стану.

**Тензор напружень.** Розглянемо тетраедр  $OABC$  (рис. 1.2.7), три грані якого лежать у координатних площинах.

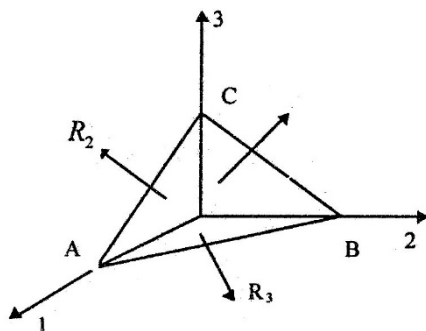


Рис. 1.2.7. Вектори напружень, що діють по гранях елементарного тензора

Одиничну нормаль до четвертої грані  $ABC$  позначимо через  $\vec{n}$ , площу площадки  $ABC$  – через  $dS$ . Записуючи площу як  $dS$ , ми підкреслюємо, що ця площа нескінченно мала величина, яка за визначенням прямує до границі, тобто дорівнює нулеві. Очевидно, що інші **грані** – теж **нескінченно малі величини**. Це відповідає основній вимозі, завдяки якій, власне, і виникає модель континууму, а саме: стягування фізично нескінченно малого об'єму в точку. Не так уже важливо, що цю область вибрано у формі тетраедра – головне, що її **об'єм прямує до нуля**. Саме тому цей **тетраедр** і називається **елементарним**.

Площа  $dS_1$  грані  $OBC$  є проекцією  $dS$  на площину 302 і тому дорівнює

$$dS_1 = n_1 dS,$$

де  $n_1$  - проекція вектора  $\vec{n}$  на вісь. Очевидно, що  $n_1$  дорівнює косинусу кута між одиничними векторами  $\vec{n}$  та  $\vec{i}_1$ , оскільки модуль вектора  $\vec{n}$  дорівнює одиниці. Відповідно площі граней  $AOB$  та  $AOC$  дорівнюють

$$dS_2 = n_2 dS; \quad dS_3 = n_3 dS$$

Позначимо через  $\vec{P}, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$  вектори напружень, що діють по площадках  $dS, dS_1, dS_2, dS_3$  (див. рис. 1.2.7). Нехай тетраедр знаходиться у рівновазі. Як відомо, однією з умов рівноваги є рівність нулю головного вектора, яка в даному випадку записується в такому вигляді

$$\vec{P}dS - \vec{R}_1dS_1 - \vec{R}_2dS_2 - \vec{R}_3dS_3 = 0 \quad (1.2.6)$$

Проекції векторів  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$  визначаємо в системі координат, осі яких збігаються із зовнішніми нормальми до відповідних граней. Осі зазначеної системи координат направлені протилежно осям системи координат, що її зображено на рис. 1.2.7. Звідси і знак «мінус» перед  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$  у рівності (1.2.6).

Враховуючи співвідношення між  $dS_1, dS_2, dS_3$  та  $dS$ , перепишемо (1.2.6) в такому вигляді

$$\vec{P} = \vec{R}_1 n_1 + \vec{R}_2 n_2 + \vec{R}_3 n_3 \quad (1.2.7)$$

Розкладемо вектори  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$  по координатних осях

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{i}_1 \sigma_{11} + \vec{i}_2 \sigma_{21} + \vec{i}_3 \sigma_{31}, \\ \vec{R}_2 &= \vec{i}_1 \sigma_{12} + \vec{i}_2 \sigma_{22} + \vec{i}_3 \sigma_{32}, \\ \vec{R}_3 &= \vec{i}_1 \sigma_{13} + \vec{i}_2 \sigma_{23} + \vec{i}_3 \sigma_{33} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Порівнюючи між собою рівності (1.2.6) та (1.2.7), одержуємо для компонентів  $P_i$  вектора  $\vec{P}$  такі значення

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\
 P_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\
 P_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3
 \end{aligned}
 \tag{1.2.9}$$

Три рівності (1.2.9) можна переписати скорочено за допомогою одного виразу

$$P_i = \sigma_{jk}n_{jk}, \tag{1.2.10}$$

в якому передбачається підсумовування за індексом  $k$ , що повторюється (індекси  $i, k$  набувають значень 1, 2, 3).

А тепер повернімось до наших труднощів. Ми шукали спосіб для опису напруженого стану – такого, щоб не треба було перераховувати: «для даного нахилу площадки – таке-то значення вектора напруження, іншого нахилу – таке-то», тощо. Саме вираз (1.2.10) дає цей спосіб. Дійсно, вектор  $\vec{n}$  задає орієнтацію площадки, а з виразу (1.2.10) випливає, що якщо нам відома матриця

$$\sigma_{jk} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix}, \tag{1.2.11}$$

то, користуючись виразом (1.2.10), ми зможемо розрахувати значення вектора  $\vec{P}$  для будь-якого нахилу площадки, тобто відповісти на питання, яке нас цікавить.

При такому підході головна переходить до матриці  $\sigma_{jk}$ , яку називають **тензором напружень**.

**Найпростіші напружені стани.** Знаючи тензор напружень, ми тим самим визначаємо напружений стан у даній точці.

(Нагадаємо, що тетраедр стягується в точку, отже і всі компоненти тензора напружень визначаються в точці  $O$  – вершині тетраедра. Надалі про елементарний тетраедр, що стягується в



точку, забудемо: він свою справу зробив, допомігши одержати таку важливу для нас формулу (1.2.10)).

Тепер на перший план виступає тензор напружень, компоненти якого діють по площадках, паралельних координатним площинам. Тому нам зручно зображати оточення точки, в якій розглядається напружений стан, у вигляді куба – **елементарного паралелепіпеда**.

Згадаємо, що це оточення – цей куб – є не що інше, як уже знайомий нам фізичний нескінченно малий об'єм – ми вже зображали цей об'єм у вигляді куба (рис. 1.2.6), коли нам було потрібно розглянути дію сил з боку оточення на «наш» об'єм.

Зараз знову виникає необхідність у поверненні до зображення фізичного нескінченно малого об'єму у вигляді куба, але тепер нас уже цікавить не мікроскопічне походження сил між оточенням і виділеним об'ємом. Користуємось елементарним паралелепіпедом (так ми домовились називати фізичний нескінченно малий об'єм) для ілюстрації напруженого стану, пам'ятаючи при цьому, що цей паралелепіпед має нескінченно малі ребра, тобто фактично стягується в точку.

Для **простого розтягу** – це один з найпростіших напружених станів (найчастіше зустрічається у фізичному експерименті), коли розтяг відбувається вздовж осі 1 – тензор напружень має такий вигляд

$$\sigma_{jk} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (1.2.12)$$

Такий саме вигляд має тензор напружень, коли вздовж осі 1 діє стискаюче напруження, з тією лише різницею, що величина  $\sigma$  буде від'ємною.

Простий розтяг і простий стиск об'єднують назвою **«лінійні напружені стани»**.

Обидва згадані напружені стани схематично зображено на рис. 1.2.8 за допомогою елементарного паралелепіпеда.

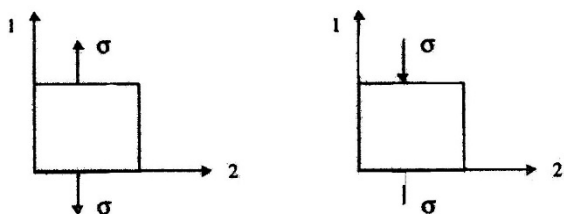


Рис. 1.2.8. Лінійні напружені стани:  
а - простий розтяг,  
б – простий стиск

Оскільки напруження діють тільки в напрямку осі 1, то нам і знадобилась для ілюстрації напруженого стану тільки одна грань паралелепіпеда. Обов'язковим на схемі є наявність координатних осей – тільки за цієї умови ми зможемо за рисунком відтворити вигляд матриці – тензора напружень.

Ще один вид напруженого стану – **чистий зсув** – зображено на рис. 1.2.9, де видно, що при чистому зсуві по верхній і правій гранях елементарного паралелепіпеда діють однакові дотичні напруження  $\tau$ .

Повернімось до того, що вже було сказано про проекції вектора напружень: ми домовились позначати їх двома індексами, з яких перший визначає напрямок дії відповідної складової вектора напружень, а другий – напрямок зовнішньої нормалі до площадки, по якій діє відповідна складова.

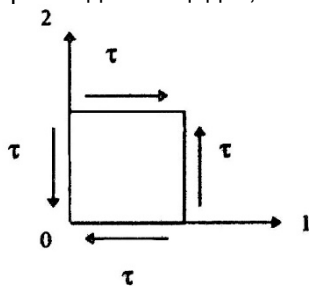


Рис. 1.2.9. Схема дії напружень при чистому зсуві

Отже, якщо на верхню грань діє напруження  $\tau = \sigma_{12}$ , а на праву грань – напруження  $\tau = \sigma_{21}$ , то тензор напружень, що відповідає чистому зсуву, можна записати у такому вигляді

$$\sigma_{jk} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (1.2.13)$$

Виникає питання: чому вибрані тільки дві грані – верхня і права? А що ж дві інші, де теж нарисовані стрілки і, значить, діють дотичні напруження?

По-перше, без цих стрілок елементарний паралелепіпед не був би у рівновазі, а по-друге, ми вже домовлялися вибирати координатні осі такими, щоб вони збігалися із зовнішніми нормаллями. Отже, якщо ми провели осі координат так, як зображено на рис. 1.2.9, то йдеться про компоненти тензора напружень, що діють на верхню і праву грані. Проте ніхто нам не заважає обрати ліву і нижню грані для визначення компонентів тензора напружень – для цього треба тільки поміняти напрямки координатних осей.

Ще один вид напруженого стану – **гідростатичний тиск**. Назва спричинена тією обставиною, що саме такий напружений стан виникає в рідині на певній глибині від поверхні завдяки тиску стовпа рідини (ще з шкільної лави відомо, що рідина тисне в усі боки однаково – закон Паскаля). Із допомогою тензора напружень запишемо цю властивість рідини у наступному вигляді

$$\sigma_{jk} = \begin{Bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{Bmatrix} \quad (1.2.14)$$

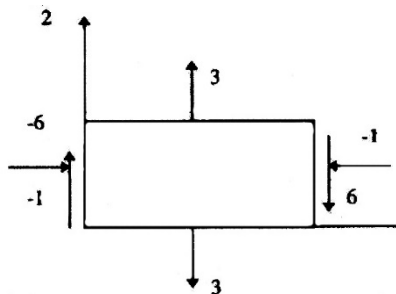
Знаком «мінус» визначено, що йдеться саме про стиск (порівняйте: у тензорі (1.2.12), що відповідає розтягу, напруження  $\sigma$  було додатнім).

**Вправа 1. Побудова схеми напруженого стану.** Необхідно представити за допомогою елементарного паралелепіпеда напружений стан, який визначено тензором

$$\sigma_{jk} = \begin{Bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

**Розв'язок.**

Схема напруженого стану має такий вигляд:



**Вправа 2. Граничні умови на вільній поверхні.** Необхідно записати граничну умову – співвідношення між компонентами тензора напружень для площини, яка є границею тіла та вільна від зовнішнього навантаження.

**Розв'язок.**

Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь 3 виявилась перпендикулярною до площини. Відповідно осі 1 та 2 лежатимуть у площині, що є границею тіла. Відсутність зовнішнього навантаження означає, що компоненти вектора напружень дорівнюють нулеві, тобто  $P_i = 0$ . Із урахуванням формули (1.2.9) одержуємо

$$\begin{aligned}\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= 0\end{aligned}\tag{1.2.15}$$

Площадка, до якої прикладаються зовнішні навантаження (аналог площадки ABC тетраедра з рис. 1.2.7) – це площина, що обмежує тіло. Отже, нормаль  $\vec{n}$ , про яку йдеться в останній формулі, збігається з віссю 3, а тому

$$n_1 = n_2 = 0,$$

і з передостанньої формули витікає така відповідь на питання вправи

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0\tag{1.2.16}$$

*Це і є граничні умови для поверхні, вільної від навантаження.*

**Завдання 1.** Прямокутний паралелепіпед з біополімеру, поперечні розміри якого 3 см та 0.5 см, розтягують з силою 1000Н. Записати тензор напружень для напруженого стану біополімеру.

**Завдання 2.** Який напружений стан виникає в хребці людини при вертикальному положенні тіла? Записати тензор напружень.

**Завдання 3.** Визначити напружений стан, який виникає в крові при її ламінарному русі по судині.

**Завдання 4.** Який напружений стан виникає в хребці людини при її нахилі тулуба в горизонтальне положення? Записати тензор напружень.

**Завдання 5.** Який напружений стан виникає в оболонці живої клітини? (В середині клітини діє тугарний тиск.) Записати тензор напружень.

### 1.3. Напруження і координатні системи

#### ***Залежність напруження від нахилу площадки.***

Повторимо рис. 1.2.1, додавши до перерізу  $A-A$  ще один переріз  $B-A$ , нахилений до попереднього під деяким кутом  $\alpha$  (рис. 1.3.1), і задамо питання: яке нормальне напруження діє по площадці  $B-A$ ?

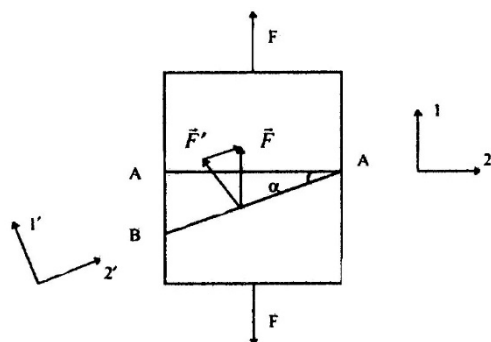


Рис. 1.3.1. Визначення нормального напруження по нахиленій площадці

Врахуємо, по-перше, ту обставину, що сила, яка діє по нормалі до цієї площадки, вже не дорівнює  $F$ . Дійсно, проектуємо  $F$  на зазначену нормаль, отримаємо

$$F' = F \cos \alpha \quad (1.3.1)$$

Крім того, і площа перерізу  $B - A$  інша

$$S' = \frac{S}{\cos \alpha} \quad (1.3.2)$$

Записуючи для напруження, яке діє по площадці  $B - A$ ,

$$\sigma' = \frac{F'}{S'}, \quad (1.3.3)$$

Підставляючи значення  $F'$  та  $S'$ , одержуємо таке

$$\sigma = \sigma \cos^2 \alpha \quad (1.3.4)$$

Отже, при нахилі площадки відносно розтягуючої сили нормальне напруження змінюється. (Порівняйте: сила  $F'$ , що діє по нормалі до площадки  $B - A$ , є проекцією розтягуючої сили  $F$  і тому визначається формулою (1.3.1), де ми множимо на  $\cos \alpha$ . Для одержання ж  $\sigma'$  напруження  $\sigma$  множимо вже на  $\cos^2 \alpha$ . Ось де виявляється відміна сили від напруження!)

**Зміна компонентів тензора при перетворенні координат.** Попередні міркування про зміну напруження при нахилі площадки можна трактувати дещо по-іншому, що пов'язане із порівнянням двох систем координат, а саме: «нештрихованої» системи 1, 2, 3, вісь 1 якої збігається з напрямком напружень  $\sigma$ , та «штрихованої» системи 1', 2', 3', вісь якої 1' напрямлена вздовж дії напруження  $\sigma'$ .

Запишемо згадані напруження за допомогою індексів, одержимо відповідно

$$\sigma = \sigma_{11} \quad \text{та} \quad \sigma' = \sigma_{1'1'}$$

Тепер уже зміну напруження при нахилі площадки можна розглядати як зміну напруження при переході від «нештрихованої» до «штрихованої» системи координат.

Досі йшлося про простий розтяг. А як змінюватимуться компоненти тензора напружень для довільного напруженого стану?

Спробуємо вивести загальну формулу, що зв'яже компоненти тензора напружень у «нештрихованій» та «штрихованій» системах координат. Для цього запишемо у «штрихованій» системі співвідношення, аналогічне формулі (1.2.10), а саме:

$$P_{i'} = \sigma_{ik} n_k \quad (1.3.5)$$

При перетворенні координат вектори, до яких відносяться  $P$ ,  $n$ , перетворюються згідно з такими формулами

$$P_{i'} = \alpha_{ii'} P_i \quad (1.3.6)$$

$$n_k = \alpha_{kk'} n_{k'} \quad (1.3.7)$$

де  $\alpha_{ii'} = \cos(i'i)$  - косинус кута між осями  $i$  та  $i'$ .

Підставимо вираз (1.2.10) у формулу (1.3.6),

$$P_{i'} = \alpha_{ii'} \sigma_{ik} n_k, \quad (1.3.8)$$

а вираз (1.3.7) – у співвідношення (1.3.8)

$$P_{i'} = \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \sigma_{ik} n_{k'} \quad (1.3.9)$$

Порівнюючи (1.3.5) та (1.3.9), отримуємо

$$\sigma_{i'k'} = \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \sigma_{ik} \quad (1.3.10)$$

Таким чином, ми одержали формулу, що пов'язує між собою величини  $\sigma_{i'k'}$  та  $\sigma_{ik}$ .

Однак, при цьому не слід забувати, що у (1.3.10) нами використаний скорочений запис, що передбачає підсумовування за індексами, що повторюються, а саме: за індексами  $i$  та  $k$ . Тому права частина формули (1.3.10) – це сума, що складається з 9 доданків. Наприклад, для компоненти  $\sigma_{1'2'}$  формула (1.3.10) набуде такого вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{1'2'} = & \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} \sigma_{11} + \alpha_{1'1} \alpha_{2'2} \sigma_{12} + \alpha_{1'1} \alpha_{2'3} \sigma_{13} + \\ & + \alpha_{1'2} \alpha_{2'1} \sigma_{21} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} \sigma_{22} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'3} \sigma_{23} + \\ & + \alpha_{1'3} \alpha_{2'1} \sigma_{31} + \alpha_{1'3} \alpha_{2'2} \sigma_{32} + \alpha_{1'3} \alpha_{2'3} \sigma_{33} \end{aligned}$$

**Завдання 6.** Вираз (1.3.4) ( $\sigma = \sigma \cos^2 \alpha$ ) одержано з простих міркувань – без застосування поняття тензора. Треба одержати цей вираз, виходячи з формули перетворення тензорів (1.3.10) -  $\sigma_{i'k'} = \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \sigma_{ik}$ .

**Завдання 7.** Визначити напружений стан який виникає на краю меніска колінного суглобу. Записати тензор напружень.

**Завдання 8.** Стінка судини знаходиться в стані двовісного розтягу. Знайти напруження, що діє під кутом  $\varphi$  до осі судини.

**Вправа 3.** Руйнування шарового композиту при простому розтягу.

### **Розв'язок**

Широке застосування у промисловості знайшли композити, які складаються з декількох шарів склотканини, які чергуються з шарами полімерного матеріалу. Їх ще називають шарові склопластики Ці матеріали одержують, насичуючи шари



склотканини рідиною, яка згодом полімеризується, перетворюючись на твердий полімер.

Полімер менш міцний від скла. Тому склопластик найвірогідніше руйнуватиметься внаслідок руйнування полімеру, що починається з росту мікротріщин, які розташовуються переважно паралельно поверхні розділу між склом і полімером. Висуваємо гіпотезу: руйнування склопластика починається, коли нормальне напруження, що діє в напрямку, перпендикулярному до шарів, досягає певного критичного значення (границі міцності  $\sigma_p$ ).

Перевіряємо цю гіпотезу таким чином: виріжемо зразки із різним нахилом шарів до поздовжньої осі зразка (рис. 1.3.2 а).

Руйнування зразків (рис. 1.3.2. б) відбувається, коли нормальне напруження  $\sigma$ , що діє вздовж осі зразка, досягне значення  $\sigma_p$  (границі міцності). Для кожного значення  $\beta$  ми, вочевидь, одержимо своє значення  $\sigma_p$ . А яка залежність  $\sigma_p$  від  $\beta$  впливає з гіпотези, що її щойно запропоновано? Ми будемо вважати, що за руйнування «відповідають» нормальні напруження (що діють перпендикулярно до шарів). Після введення «штрихованої» системи координат, яка буде описувати руйнування за шаром під кутом  $\beta$ , шукане напруження будемо позначати як  $\sigma_{1'1'}$ .

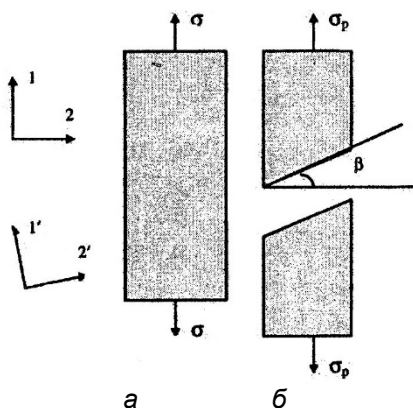


Рис. 1.3.2. Руйнування шарового склопластику при простому розтягу

Відповідно нормальне напруження, що діє вздовж осі зразка, позначене просто як  $\sigma$ .

Застосовуючи формулу (1.3.10), одержимо наступне

$$\sigma_{1'1'} = \sigma_{11} \alpha_{1'1}^2. \quad (1.3.11)$$

А це не що інше як формула (1.3.4), бо  $\alpha_{1'1} = \cos \beta$ .

Згідно з висунутою гіпотезою, яким би не був нахил шарів, критична величина  $\sigma_{1'1'}$ , при якій відбувається відрив шарів один від одного, має залишатися сталою. Позначимо її через  $A$ . Значення  $\sigma_p$ , що спостерігається на досліді, відповідає напруженню  $\sigma_{11}$ . Приймаючи зазначені позначення з формули (1.3.11), отримуємо теоретичну залежність, яка є наслідком прийнятої гіпотези:

$$\sigma_p = \frac{A}{\cos^2 \beta}. \quad (1.3.12)$$

Тепер залишається порівняти отриману теоретичну залежність (1.3.12), що відповідає прийнятій нами гіпотезі, з експериментальною залежністю  $\sigma_p$  від  $\beta$ , і ми знатимемо, чи правильна гіпотеза чи ні.

#### **Вправа 4. Шорсткість поверхні та міцність клейового з'єднання.**

Зразок, який розтягується, склеєний з двох частин (звичайно, поверхні, що склеєні, мають бути загладжені та зачищені). Чи вплине якість обробки цих поверхонь на міцність зразка?

##### **Розв'язок**

Вважатимемо, що міцність основного матеріалу зразка істотно більша за міцність шару, що утворюється після полімеризації клею. Тому розрив зразка буде відбуватися саме по цьому шарові (коли вживають вислів «міцність склеєного зразка», мають на увазі саме цей шар, який і називають «клейовим з'єднанням»). У цьому шарі можуть виникати в процесі твердіння клею тріщини, розташовані паралельно поверхні, яка відмежовує (у даному випадку – полімерний клейовий шар) від іншого матеріалу (того, що клеїться). Будемо

вважати, що саме ці тріщини і спричиняють руйнування клейового з'єднання: як тільки нормальне напруження, яке діє перпендикулярно до фронту тріщини, досягне певного значення  $A$ , тріщина починає рости, що призводить до розриву зразка.

Очевидно, що ідеальною гладкою поверхня не може бути внаслідок певної обробки (скажімо, фрезерування, шліфування, тощо), на ній завжди є нерівності. Позначимо характерний розмір нерівності через  $\ell$  (це може бути, наприклад, ширина окремого горба, з яких, власне, і складається поверхня). Розмір зародкової тріщини позначимо через  $L$ .

Нехай виконується нерівність  $L \gg \ell$ . В цьому випадку тріщина просто «не помічає» нерівностей поверхні, для неї поверхня ідеально гладка.

Поверхні, що склеюються, розташовані перпендикулярно до напрямку розтягу. Тому й тріщини також розташовані перпендикулярно до нього. І ми фактично повертаємось до формули (1.3.12) зі значенням  $\beta = 0$ .

Децю змінюється ситуація для випадку  $L \ll \ell$ . Поверхні, що склеюються, складаються з окремих дільниць, які по-різному нахилені до напрямку розтягу (нехай це знову буде вісь 1). Тріщини вже розрізняють кожні з дільниць і розташовуються паралельно відносно них, утворюючи з віссю 1 деякий кут, який ми позначимо як через  $90^\circ - \beta$ . Нормаль до фронту тріщини позначимо як вісь 1', і отже для напруження, що розкриває окрему тріщину, знову одержуємо вираз (1.3.11).

Проте тріщини по-різному орієнтовані відносно осі 1. Усереднюючи по кутах  $\beta$ , одержуємо натомість формули (1.3.12) вираз для міцності клейового з'єднання

$$\sigma_p = \frac{A}{\cos^2 \beta},$$

де за допомогою риси над виразом знаменника позначене середнє значення величини. Чим грубіша обробка, тим більший кут  $\beta$ , тим менше значення має величина  $\cos^2 \beta$ . Прийнята нами гіпотеза приводить до висновку: чим грубіша обробка поверхонь, що склеюються, тим більша міцність клейового з'єднання.

Звернімось до експериментальних даних: на рис. 1.3.3 а зображена залежність міцності клейового з'єднання  $\sigma_p$  від величини  $1/\sqrt{\cos^2 \beta}$ .

Зразок для випробування на простий розтяг складався з двох металевих циліндрів, що були склеєні по торцевих поверхнях полімерним клеєм «Спрут» (рис. 1.3.3 б). Саме ці поверхні й оброблялись (наприклад, фрезерувались), чим досягалась різна висота нерівностей на поверхні.

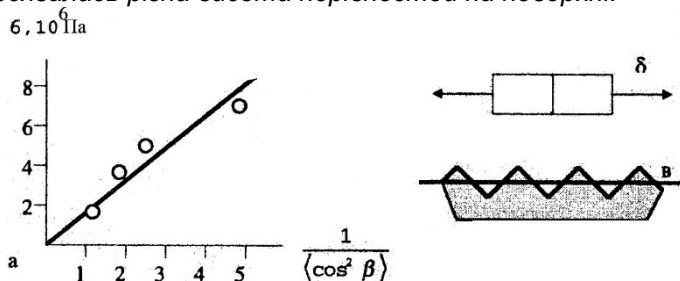


Рис. 1.3.3. Вплив шорсткості на міцність клейового з'єднання

Кути  $\beta$  вимірювались за допомогою профілометра, головною деталлю якого є щуп (голка), що дотикається до поверхні, нерівності якої досліджуються, слідкуючи за її формою: опускаючись у «ями» і піднімаючись на вершини «горбів». Типову профілографу наведено на рис. 1.3.3 в. Обробка профілографи і дозволяє вираховувати величину  $\cos^2 \beta$ .

Запропонована гіпотеза вимагає, щоб залежність між  $\sigma_p$  та  $1/\sqrt{\cos^2 \beta}$  була лінійною. Із певною точністю експериментальні точки зображені на рис. 1.3.3а, можна змодельовувати («посадити») прямою, що проходить через початок координат. Отже, наша гіпотеза одержує підтримку експерименту.

## **Вправа 5. Руйнування шарового композиту при простому стиску.**

Характер руйнування склопластику дещо змінюється при випробуваннях на простий (одновісний стиск): руйнування відбувається за рахунок зсуву однієї частини зразка відносно іншої по площині, що розділяє окремі шари (рис. 1.3.4)

Ця обставина дозволяє припустити, що руйнування відбувається, коли дотичне напруження, що діє по зазначеній площині, досягає деякої критичної величини  $B$ . Для перевірки цієї гіпотези необхідно розрахувати це дотичне напруження за формулою (1.3.10).

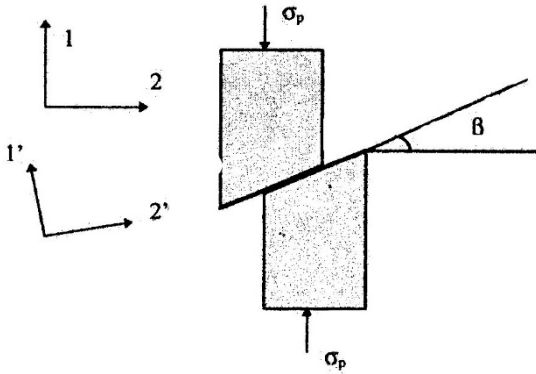


Рис. 1.3.4.  
Руйнування  
багатошарового  
пластику  
при простому  
стиску

#### Розв'язок

Розташування «штрихованої» системи координат, наведене на рис. 1.3.4, дає для шуканого дотичного напруження позначення  $\sigma_{2'1'}$ . Тоді за формулою (1.3.10) записуємо

$$\sigma_{2'1'} = \sigma_{11} \cos(2',1) \cos(1',1) \quad (1.3.13)$$

І знову, як і в попередній праві, заміна позначень:

$\sigma_{2'1'}$  - критичне значення дотичного напруження  $B$ ,

$\sigma_{11}$  - міцність зразка  $\sigma_p$

У нових позначеннях формула (1.3.13) набуває такого вигляду

$$\sigma_p = \frac{B}{\sin \beta \cos \beta}.$$

Саме так має змінюватись міцність на стиск для зразків із різним нахилом шарів, якщо «наша» гіпотеза справедлива.

### Вправа 6. Руйнування шарового склопластику при двовісному розтягові.

Оскільки випробування на простий розтяг зразків із шарового склопластику привело до висновку: руйнування склопластику відбувається, коли нормальне напруження, що діє у напрямку, перпендикулярному до шарів, досягає критичного значення  $A$ , то тепер нехай цей же зразок (шарів склопластик) піддано двовісному розтягові (рис. 1.3.5). Чи зруйнується склопластик за заданих значень  $\sigma_{11}$  та  $\sigma_{22}$ ?

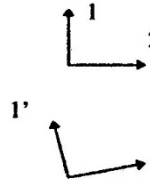
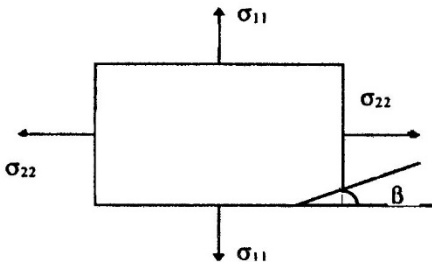


Рис. 1.3.5.  
Склопластик під дією двовісного розтягу

#### Розв'язок.

Формула (1.3.10) дає для напруження  $\sigma_{1'1'}$  такий вираз

$$\sigma_{1'1'} = \sigma_{11} \cos^2(1', 1) + \sigma_{22} \cos^2(2', 2) = \sigma_{11} \cos^2 \beta + \sigma_{22} \sin^2 \beta \quad (1.3.14)$$

Згідно прийнятої гіпотези руйнування відбудеться, якщо

$$\sigma_{1'1'} \geq A \quad (1.3.15)$$

Звідси одержуємо умову руйнування склопластику при двовісному розтягові:

$$\sigma_{11} \cos^2 \beta + \sigma_{22} \sin^2 \beta \geq A \quad (1.3.16)$$

### Вправа 7. Залежність міцності біополімерного волокна від кратності витягування

При виготовленні біополімерного волокна застосовують так зване витягування. При цьому кратність витягування  $\lambda$  - це величина, що дорівнює

$$\lambda = \frac{L}{L_0},$$

де  $L_0$  - довжина невитягнутого волокна,  $L$  - його довжина після витягування. Витягування має за мету підвищення міцності волокна. За рахунок чого це відбувається?

Однією з моделей ланцюга є так звана сегментна модель, коли полімерний ланцюг зображується як сукупність з'єднаних один з одним жорстких стержнів – сегментів, розмір яких значно перевищує розмір окремої в'язі, що з'єднує сусідні скелетні атоми. Орієнтацію сегментів прийнято задавати за допомогою одиничного вектора  $\vec{e}$ , що напрямлений вздовж сегмента та називається директором. Якщо директор  $\vec{e}$  змінює своє положення досить повільно, так що в межах фізично нескінченно малого об'єму цією зміною можна знехтувати, то тоді з'являється можливість розглядати орієнтацію сегментів у межах континуальної моделі, ввівши неперервну функцію  $\vec{e}(\vec{x})$ .

Нехай матеріал має вісь симетрії, що в певному наближенні справджується для волокна. Тоді напрямком вектора  $\vec{e}$  можна задавати за допомогою однієї величини – кута  $\theta$ , який утворює вектор  $\vec{e}$  з віссю симетрії (у нашому випадку – з віссю волокна).

Якщо ми говоримо, що в точці  $\vec{x}$  континууму директор має напрямок  $\vec{e}$ , то само собою зрозуміло, що ми це значення відносимо до математичного нескінченно малого об'єму  $d\vec{x}$ , який оточує цю точку. Але ж, якщо при цьому згадати, що  $d\vec{x}$  відповідає фізичному нескінченно малого об'єму, який вже за визначенням має містити в собі велику кількість сегментів, то, хочемо ми цього чи ні, маємо прийняти модель, де в межах зазначеного об'єму сегменти розташовуються практично паралельно один до одного – інакше ні про який однаковий напрямок  $\vec{e}$  в об'ємі  $d\vec{x}$  не може йти мова.

Для такого паралельного пучка сегментів міцність  $\sigma'_p$  вздовж сегментів буде набагато більшою за міцність  $\sigma''_p$  у поперечному напрямку. Фізичний підтекст цього твердження досить прозорий: частинки вздовж ланцюга (або що те ж саме – вздовж сегмента) з'єднані хімічними в'язями, для яких енергія розриву набагато переважає енергію в'язей, що з'єднують ланцюги між собою.

У літературі висловлюється гіпотеза про те, що для анізотропного матеріалу міцність є тензором (полімерне волокно є таким матеріалом, оскільки для нього властивості вздовж осі та в поперечному напрямку до осі суттєво розрізняються). Прийнемо на «озброєння» цю гіпотезу і побачимо, до чого це призведе.

Якщо направити вісь 1' вздовж сегментів, то тензор міцності набуває наступного вигляду

$$\sigma_{ik}^{(p)} = \begin{Bmatrix} \sigma_p' & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p'' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p'' \end{Bmatrix} \quad (1.3.18)$$

Міцність на розтяг у напрямку осі волокна згідно з формулою (1.3.10) можна записати у такому вигляді

$$\sigma_{11}^{(p)} = \sigma_p' \alpha_{11'}^2 + \sigma_p'' \alpha_{12'}^2 + \sigma_p'' \alpha_{13'}^2, \quad (1.3.19)$$

Величина  $\sigma_{11}^{(p)}$  визначає міцність у точці  $\vec{x}$ . І знову, як пам'ятаємо, цим значенням ми характеризуємо весь об'єм  $d\vec{x}$  - адже маємо справу із континуумом. Зазначену усереднену величину позначимо через  $\overline{\sigma_{11}^{(p)}}$ . Якщо всі величини, що пройшли таке усереднення, позначати відповідно верхньою горизонтальною рисою, то із (1.3.19) одержимо такий вираз

$$\overline{\sigma_{11}^{(p)}} = \sigma_p' \overline{\alpha_{11'}^2} + \sigma_p'' \overline{\alpha_{12'}^2} + \sigma_p'' \overline{\alpha_{13'}^2}, \quad (1.3.20)$$

Тепер саме час згадати, що вісь 1 є віссю симетрії, оскільки завдяки осьовій симетрії міцність  $\sigma^{(p)}$  не має залежати від кута повороту системи 123 відносно осі 1, і ми можемо розташувати площину 103 в площині 103, що, в свою чергу, приведе до рівності  $\overline{\alpha_{12'}} = 0$ . Отже, вираз (1.3.20) можна переписати у такому вигляді



$$\overline{\sigma_{11}^{(p)}} = \sigma_p' \overline{\cos^2 \theta} + \sigma_p'' \overline{\sin^2 \theta} \quad (1.3.21)$$

Значення величин  $\overline{\cos^2 \theta}$  та  $\overline{\sin^2 \theta}$  можна одержати з експерименту, наприклад, вимірюючи подвійне променезаломлення волокна  $\Delta n$ , що визначається наступною формулою

$$\Delta n = \Delta n_0 \left( \frac{3\overline{\cos^2 \theta}}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.3.22)$$

де  $\Delta n_0$  - подвійне променезаломлення ідеально орієнтованого полімеру (йдеться про випадок, коли сегменти розташовуються паралельно осі волокна).

Порівнюючи формули (1.3.21) та (1.3.22), доходимо висновку, що між міцністю волокна та його подвійним променезаломленням мусить існувати лінійна залежність.

На рис. 1.3.6 зображено експериментальну залежність між міцністю волокна та його подвійним променезаломленням.

Як видно з цього рисунку, експериментальну залежність між  $\sigma$  та  $\Delta n$  можна з достатньою точністю вважати лінійною. Тож наші нехитрі міркування отримують підтримку експерименту.

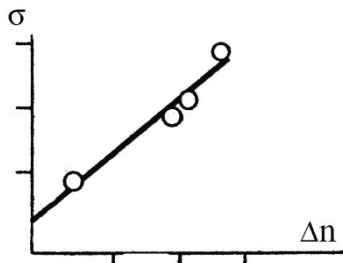


Рис. 1.3.6. Залежність між міцністю  $\sigma$  та променезаломленням  $\Delta n$  (волокно, температура  $T=295\text{ K}$ )

Звичайно, застосована простенька модель не відбиває всіх аспектів багатогранної проблеми міцності. Однак, очевидно, що ми на правильному шляху, і можна сподіватись, що подальше ускладнення моделі дозволить нам врахувати

*різноманітні фактори, які можуть впливати на зростання міцності при витягуванні волокна.*

**Діагоналізація матриць: основні співвідношення.** Нагадаємо, що головними значеннями тензора називають власні значення, а головними осями – власні вектори відповідної матриці (у нашому випадку – матриці  $\sigma_{ik}$ ). Позначимо головні осі дужками  $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$ . Відповідно головні значення слід позначити через  $\sigma_{\hat{1}\hat{1}}, \sigma_{\hat{2}\hat{2}}, \sigma_{\hat{3}\hat{3}}$ .

Нагадаємо також, що матриця у системі координат, утвореній головними осями, має діагональний вигляд. Відносно тензора напружень це означає, що в системі координат  $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$  на площадки, що є гранями елементарного паралелепіпеда, діють тільки нормальні напруження. Ці площадки називають головними.

Ще одне нагадування – про важливу властивість власних чисел. Вже зазначалось, що компоненти матриці  $\sigma_{ik}$ , включаючи і діагональні, змінюються при перетворенні координат. Так от: тільки в системі головних осей діагональні компоненти досягають свого найбільшого і найменшого значень (в алгебраїчному розумінні); тобто, найбільше і найменша значення нормального напруження в даній точці слід шукати серед головних значень  $\sigma_{\hat{1}\hat{1}}, \sigma_{\hat{2}\hat{2}}, \sigma_{\hat{3}\hat{3}}$ .

Ще повторення відомих речей. Головні значення тензора  $\sigma_{ik}$  є коренями такого рівняння

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3.23)$$

Для знаходження положення головної осі  $\hat{1}$ , вздовж якої діє нормальне напруження  $\sigma_{\hat{1}\hat{1}}$ , слід розв'язати наступну систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{11} - \sigma_{\hat{1}\hat{1}}) \alpha_{\hat{1}1} + \sigma_{12} \alpha_{\hat{1}2} + \sigma_{13} \alpha_{\hat{1}3} = 0 \\ \sigma_{21} \alpha_{\hat{1}1} + (\sigma_{22} - \sigma_{\hat{1}\hat{1}}) \alpha_{\hat{1}2} + \sigma_{23} \alpha_{\hat{1}3} = 0 \\ \sigma_{31} \alpha_{\hat{1}1} + \sigma_{32} \alpha_{\hat{1}2} + (\sigma_{33} - \sigma_{\hat{1}\hat{1}}) \alpha_{\hat{1}3} = 0 \end{array} \right\} \quad (1.3.24)$$

де  $\alpha_{\hat{1}1}, \alpha_{\hat{1}2}, \alpha_{\hat{1}3}$  - направляючі косинуси осі  $\hat{1}$ .

Завдяки існуванню залежності (1.3.23) одне з трьох рівнянь (1.3.24) виявляється наслідком двох інших: фактично в системі (1.3.24) ми маємо тільки два рівняння для знаходження трьох невідомих  $\alpha_{\hat{1}1}, \alpha_{\hat{1}2}, \alpha_{\hat{1}3}$ . Тому до системи (1.3.24) необхідно додати ще одне рівняння, яке зв'яже між собою направляючі косинуси

$$\alpha_{\hat{1}1}^2 + \alpha_{\hat{1}2}^2 + \alpha_{\hat{1}3}^2 = 1 \quad (1.3.25)$$

Для знаходження напрямку інших головних осей необхідно скласти системи рівнянь, аналогічні (1.3.24), тільки замість  $\sigma_{\hat{1}\hat{1}}$  слід підставляти  $\sigma_{\hat{2}\hat{2}}$  або  $\sigma_{\hat{3}\hat{3}}$ , дивлячись напрямок якої з головних осей ми визначаємо.

### **Вправа 8. Утворення тріщини при крихкому руйнуванні біополімеру**

*При низьких температурах для біополімерів характерне так зване крихке руйнування, що супроводжується незначними деформаціями. Вважають, що у випадку крихкого руйнування розрив біоматеріалу відбувається, коли нормальне розтягуючи напруження досягне певного критичного значення  $\sigma_p$ .*

Нехай  $\sigma_p = 7 \text{ ГПа}$ , а напружений стан у даній точці задано тензором

$$\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ МПа} \quad (1.3.26)$$

*Чи відбудеться руйнування біоматеріалу? Якщо відбудеться, то зазначте напрямок, у якому виникне тріщина.*

**Розв'язок.**

Необхідно знайти найбільше розтягуючи напруження. Відомо, що воно знаходиться з-поміж головних значень тензора напружень. Отже, запишемо рівняння (1.3.23) для нашого випадку

$$\begin{vmatrix} 6 - \sigma & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.3.27)$$

при записі визначника ми відкинули третій рядок і третій стовпчик матриці (1.3.26): якщо ми врахуємо їх, то це, очевидно, дасть нульове головне значення. То навіщо нам «тягти» за собою ті нулі, коли з самого початку ясно, що головні напруження діють тільки по площадках, які перпендикулярні до осей 1 та 2?

Розкриваючи визначник, отримуємо таке рівняння

$$\sigma^2 - 6\sigma - 16 = 0.$$

Корені рівняння визначаються відповідними рівностями

$$\sigma_{11} = 8 \quad \text{та} \quad \sigma_{22} = -2.$$

Найбільше розтягуючи напруження дорівнює 8 ГПа. Отже, напружений стан, що описується матрицею (1.3.26), призводить до руйнування біоматеріалу.

Тріщина пройде перпендикулярно до головної осі  $\hat{1}$ .

Шукаємо положення цієї осі  $\hat{1}$ , записавши рівняння (1.3.24) для нашого випадку

$$\begin{cases} (6 - 8)\alpha_{11} + 4\alpha_{12} = 0 \\ 4\alpha_{11} + 8\alpha_{12} = 0 \end{cases}$$

Як і передбачалось, натомість двох рівнянь ми маємо фактично одне, що примушує нас використати додатково рівняння (1.3.25)

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1$$

Розв'язавши систему рівнянь для  $\alpha_{\hat{1}1}$  і  $\alpha_{\hat{1}2}$ , одержуємо

$$\alpha_{\hat{1}1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,897.$$

Кут, що його утворює вісь  $\hat{1}$  з віссю 1, дорівнює  $\beta = \arccos \alpha_{\hat{1}1} \approx 27^\circ$ . Отже тріщина утворює з віссю кут  $63^\circ$ .

**Завдання 9.** Яким чином орієнтується еритроцит по відношенню до потоку крові? Рух крові вважати ламелярним. Розглянути випадки: біля стінки судини, на осі судини і на відстані половини радіуса від стінки.

**Завдання 10.** Напружений стан стінки судини визначається тензором напружень

$$\begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 7 \end{vmatrix}$$

Визначити напрямик та величину мінімального та максимального напруження.

**Інваріанти тензора.** Нагадаємо, що головні значення тензора  $\sigma_{ik}$  є коренями рівняння (1.3.23)

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи визначник виразу (1.3.23), одержуємо:

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - \sigma^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \\ & \left( \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \right) \\ & - \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

З алгебри відомий зв'язок між коренями та коефіцієнтами рівняння (1.3.26), а саме

$$I_{1\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{\bar{1}\bar{1}} + \sigma_{\bar{2}\bar{2}} + \sigma_{\bar{3}\bar{3}}; \quad (1.3.27)$$

$$I_{2\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{321} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \quad (1.3.28)$$

$$= \sigma_{\bar{1}\bar{1}}\sigma_{\bar{2}\bar{2}} + \sigma_{\bar{1}\bar{1}}\sigma_{\bar{3}\bar{3}} + \sigma_{\bar{2}\bar{2}}\sigma_{\bar{3}\bar{3}}$$

$$I_{3\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{\bar{1}\bar{1}}\sigma_{\bar{2}\bar{2}}\sigma_{\bar{3}\bar{3}} \quad (1.3.29)$$

Із рівностей (1.3.27) – (1.3.29) випливає, що коефіцієнти  $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2\sigma}$  та  $I_{3\sigma}$  залишаються сталими при перетворенні координат. Із цієї причини їх називають інваріантами тензора напружень: відповідно, першим, другим та третім.

**Визначення тензора.** Тепер ми маємо у своєму розпорядженні досить даних, щоб врешті-решт розібратись, що ж все-таки являє собою тензор.

Відомо, що тензор – це сукупність 9 величин, записаних у вигляді матриці. Відповідно ці величини мають позначення компонент матриці.

Мимохідь виникає питання: чи досить розмістити 9 будь-яких величин у вигляді матриці, щоб останню можна було назвати тензором. Ні в якому разі. Це можна зробити лише тоді, коли при перетворенні координат компоненти матриці змінюються так, як того вимагає формула (1.3.10)  $\sigma_{i'k'} = \alpha_{ii'}\alpha_{k'k}\sigma_{ik}$ . Отже:

Сукупність 9 величин  $\sigma_{ik}$  (не обов'язково напружень, а й будь-яких інших величин, заданих для декартової системи координат і розміщених у вигляді матриці), визначають собою Афіний ортогональний тензор другого рангу в тому випадку, коли при перетворенні координат величини  $\sigma_{ik}$  змінюються згідно з формулою  $\sigma_{i'k'} = \alpha_{ii'}\alpha_{k'k}\sigma_{ik}$ .

**Кульовий тензор і девіатор.** Позначивши перший інваріант тензора напружень через  $\sigma_{\ell\ell}$ , введемо так зване середнє напруження  $\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3}$ . Діагональний тензор

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{\ell\ell}/3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ell\ell}/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\ell\ell}/3 \end{pmatrix}, \quad (1.3.30)$$

що має своїми компонентами середні напруження, називається **кульовим**.

Тензор (1.3.30) записують також за допомогою наступного співвідношення

$$f_{ik} = \frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} \delta_{ik} \quad (1.3.31)$$

де  $\delta_{ik}$  - так званий символ Кронекера, що визначається такими рівностями

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & (i = k) \\ 0, & (i \neq k) \end{cases} \quad (1.3.32)$$

Очевидно, що кульовий тензор описує стан:

- або гідростатичного стиску - тоді компоненти кульового тензора від'ємні, оскільки в цьому випадку  $\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} = -p$ ,
- або рівномірного всебічного розтягу – тоді компоненти кульового тензора додатні.

Віднімаючи від діагональних членів тензора  $\sigma_{ik}$  величини

$\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3}$ , одержуємо тензор  $S_{ik}$ , що називається **девіатором**.

Відповідно записуємо

$$S_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} \delta_{ik} \quad (1.3.33)$$

Вираз (1.3.33) відповідає розкладові тензора напружень на кульовий тензор і девіатор. Такий розклад можна виконати для будь-якого тензора другого рангу.

**Вправа 9. Розрахунок приведенного напруження.***Приведенним напруженням називають величину*

$$\sigma_{\text{прив}} = I_{2S} \sqrt{3}, \quad (1.3.34)$$

*де  $I_{2S}$  - другий інваріант девіатора напружень.**Використовуючи формулу (1.3.28), записуємо наступне*

$$I_{2S} = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \sigma (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \right] \quad (1.3.35)$$

*При записі виразу (1.3.35) використано ту обставину, що тензор напружень є симетричним (з цього приводу див. п. 1.5).**Переходячи до головних напружень, одержуємо*

$$\sigma_{\text{прив}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ (\sigma_{\hat{1}\hat{1}} - \sigma_{\hat{2}\hat{2}})^2 + (\sigma_{\hat{2}\hat{2}} - \sigma_{\hat{3}\hat{3}})^2 + (\sigma_{\hat{3}\hat{3}} - \sigma_{\hat{1}\hat{1}})^2 \right]. \quad (1.3.36)$$



#### 1.4. Деформаційні характеристики континуума

**Абсолютна та відносна деформації.** З досвіду відомо, що стрижень, до якого прикладено розтягуючу силу (наприклад, рис. 1.2.1), видовжується за напрямком дії сили.

Якщо позначити довжину стрижня в напруженому стані через  $\ell$ , а у ненапруженому – через  $\ell_0$ , то видовження складає

$$\Delta\ell = \ell - \ell_0 \quad (1.4.1)$$

Цю величину називають абсолютною деформацією.

Поряд з  $\Delta\ell$  розглядають також відносну деформацію

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \quad (1.4.2)$$

Отже, під дією сили в стрижні виникає деформація, стрижень деформується – зазначеними термінами визначається та обставина, що стрижень змінює свої розміри під дією сили.

Обговорюючи рис. 1.2.1, ми шукали відповідь на питання: як прикласти силу до реального зразка, щоб отримати схему навантаження, яку зображено на даному рисунку. Тепер, коли йдеться про деформацію, виникає подібне питання: що для зразка вважати величинами  $\ell$  та  $\ell_0$ ? (Довжини  $\ell$  та  $\ell_0$  називаються **робочою довжиною**). Ми вже знаємо що реальний зразок при випробуваннях затиснений у захватах (рис. 1.2.2 та 1.2.3). Хотілось би прийняти за  $\ell$  та  $\ell_0$  відстань між захватами, тоді виміряти абсолютну деформацію було б дуже легк. Проте при затисканні зразка у захватах останній отримує додаткову деформацію, яка називається **деформацією зминання**. Тому прийняти за робочу довжину відстань між захватами можна тільки у випадку великих деформацій, коли загальна деформація суттєво перевищує деформацію зминання. При малих же деформаціях для вимірювання їх можна застосовувати датчики опору. Робоча довжина  $\ell_0$  дорівнює в цьому випадку довжині датчика. Наклеєний на певній відстані від захватів датчик опору виключає вплив деформації зминання.

**Вектор зміщення.** Нехай деяка довільна точка континууму у відсутності зовнішніх сил займає положення  $A$ , що визначається радіус-вектором  $\vec{x}_A$ . І хай після того, як сили прикладені, ця точка переходить у положення  $A'$  із радіус-вектором  $\vec{x}_{A'}$ . Різницю згаданих радіус-векторів називають вектором зміщення точки  $A$

$$\vec{U}_A = \vec{x}_{A'} - \vec{x}_A. \quad (1.4.3)$$

Замість позначення  $\vec{U}_A$  вживатимемо інше  $\vec{U}_A(\vec{x}_A)$ .

*(Здавалося б, що при такій заміні нічого не міняється: обидві величини означають, що йдеться про вектор зміщення. Однак друге позначення має свої переваги: воно позначає, що вектор зміщення є функцією координат точки континууму в ненапруженому стані. Можна було б обмежитись лише заданням координат точок континууму в ненапруженому та напруженому станах. Проте, ми ніби додаємо собі клопоту, враховуючи ще й вектор зміщення. Навіщо? Доцільність цього стає зрозумілою, якщо згадати про неперервність континууму, із чого випливає неперервність функції  $\vec{U}(\vec{x})$  - і найчастіше також і її диференційованість, якщо це не зумовлено окремо).*

Нас цікавить **деформація континуума**. Нехай йдеться про деформацію розтягу, яку для стрижня ми визначили формулою (1.4.2). Яким чином задати аналогічну деформацію для континуума? Для цього нам потрібно виділити в континуумі якусь ділянку матеріалу певної довжини, щоб потім у міру зміни цієї довжини говорити про деформацію.

Характерних лінійних розмірів у континуумі ми не ввели, вважаючи його безструктурним. Через відсутність таких розмірів нам нічого не залишається, як розглядати деформацію математичних нескінченно малих відрізків  $dx$  (як пам'ятаємо, ці відрізки відповідають розмірам фізичного нескінченно малого об'єму – ця величина, до речі, і є єдиним характерним лінійним розміром структурної моделі. Але ж ми, перейшовши до континууму, «знищили» цей розмір, стягнувши його в точку). Саме отут і стане в нагоді існування неперервної і диференційованої функції  $\vec{U}(\vec{x})$ .

**Тензор градієнтів зміщення.** Запис  $\vec{U}(\vec{x})$  означає, що проекції  $\vec{U}_j$  ( $j=1,2,3$ ) вектора  $\vec{U}$  є функціями координат, тобто  $U_j = U_j(x_1, x_2, x_3)$ .

Запишемо вирази для перших диференціалів згаданих функцій

$$\begin{aligned} dU_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3, \\ dU_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} dx_3, \\ dU_3 &= \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

За аналогією з формулами (1.2.9) та (1.2.10) скорочено перепишемо (1.4.4) у такому вигляді

$$dU_j = \frac{\partial U_j}{\partial x_k} dx_k. \quad (1.4.5)$$

Матриця  $\frac{\partial U_j}{\partial x_k}$  називається тензором градієнтів зміщень.

Визначимо *геометричний зміст частинних похідних*. Звернімось, наприклад, до функції  $U_1(x_1, x_2, x_3)$  і зафіксуємо координати  $x_2$  та  $x_3$ . Тоді, якщо координата  $x_1$  одержить нескінченно мале прирощення  $dx_1$ , функція  $U_1(x_1, x_2, x_3)$  зміниться на величину  $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1$ .

Спробуємо означене відобразити графічно (рис. 1.4.1).

Для цього до точки 0 з координатами  $x_1, x_2, x_3$  дорисуємо вже добре знайомий елементарний паралелепіпед, який за умовою має нескінченно малі ребра  $dx_1, dx_2, dx_3$ .

Що означає для елементарного паралелепіпеда той факт, що функція  $U_1(x_1, x_2, x_3)$  на довжині  $dx_1$  змінила своє значення

на величину  $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1$ ? Та тільки те, що ребро  $AB$  перемістилося у положення  $A'B'$ , причому  $AA'$  якраз і складатиме величину  $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1$ .

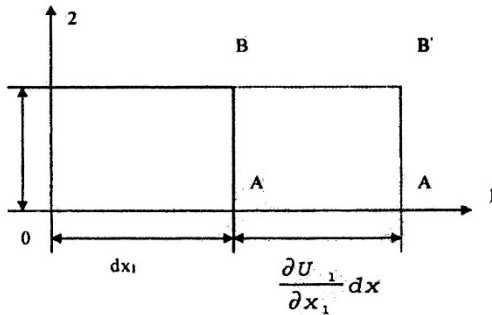


Рис. 1.4.1. Простий розтяг елементарного паралелепіпеда

Отже, при згаданій зміні функції  $U_1(x_1, x_2, x_3)$  ребро  $OA$  видовжиться на величину  $AA'$ . Відносна деформація розтягу в напрямку осі 1, яку ми позначимо як  $\varepsilon_{11}$ , складатиме  $\varepsilon_{11} = \frac{AA'}{OA}$ , що після підстановки відповідних довжин, які мають відрізки  $OA$  та  $AA'$  (рис. 1.4.1), приведе нас до такої формули

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad (1.4.6)$$

Отже, похідна  $\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$  - це не що інше, як видовження елементарного паралелепіпеда.

Говоримо «видовження», маючи на увазі рис. 1.4.1, де зображено деформований елементарний паралелепіпед із видовженим ребром  $OA'$ . Але з таким же успіхом ми могли нарисувати елементарний паралелепіпед із ребром, що

зменшилось внаслідок деформації. Тоді похідна  $\frac{\partial U_1}{\partial x_1}$  означала б відносне скорочення ребра, що відбувалось унаслідок деформації паралелепіпеда. Тільки в цьому випадку похідна буде вже від'ємною.

Об'єднуючи обидва розглянуті випадки, робимо висновок, що похідна  $\frac{\partial U_1}{\partial x_1}$  являє собою відносну деформацію (видовження чи скорочення) в напрямку осі 1.

За аналогією, похідні  $\frac{\partial U_2}{\partial x_2}$  та  $\frac{\partial U_3}{\partial x_3}$  - це відносні деформації  $\varepsilon_{22}$  та  $\varepsilon_{33}$  в напрямку осей 2 та 3, відповідно.

Таким чином, рис. 1.4.1 допоміг розібратись у геометричному змісті діагональних компонент тензора градієнтів зміщень.

Щоб встановити **геометричний зміст недіагональний компонентів**, знадобиться рис. 1.4.2, де верхня грань паралелепіпеда зсувається відносно нижньої на величину  $dU_1$ .

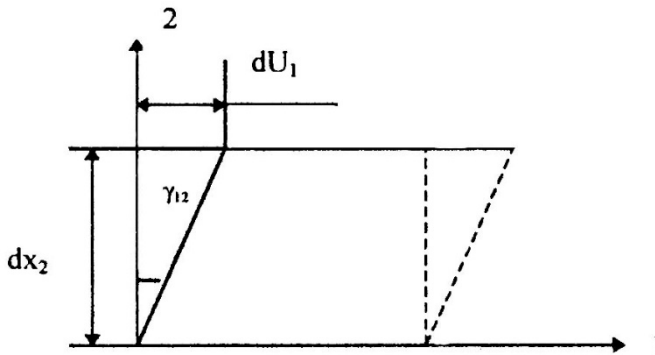


Рис. 1.4.2  
. Схема  
простого  
зсуву

Таку деформацію елементарного паралелепіпеда називають **простим зсувом**. Відповідно, кут  $\gamma_{12}$  називатимемо **кутом зсуву**. Саме тангенс цього кута (а при малих кутах – і сам

кут) дорівнює відповідній недіагональній компоненті тензора градієнтів зміщень

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \gamma_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad (1.4.7)$$

Таким чином, кут  $\gamma_{12}$ , а отже і похідна  $\frac{\partial U_1}{\partial x_2}$ , вважаються

малими – значно меншими одиниці.

З рис. 1.4.2 стає очевидним, що додатне значення кута зсуву відповідає зменшенню прямого кута **1-0-2** паралелепіпеда. Неважко зробити висновок, що від'ємне значення кута зсуву означає збільшення відповідного прямого кута при деформації.

За аналогією можна зобразити кути зсуву, які відповідають похідним  $\frac{\partial U_2}{\partial x_1}, \frac{\partial U_2}{\partial x_3}$ , тощо, що повністю вичерпує питання про геометричний зміст недіагональних компонентів  $\frac{\partial U_2}{\partial x_j}$ .

### **Вправа 11. Чистий зсув та обернення елементарного паралелепіпеда.**

*Визначимо характер зміщень елементарного паралелепіпеда, коли залежність зміщень елементарного паралелепіпеда має вигляд:*

$$U_1 = kx_1,$$

$$U_2 = kx_2,$$

$$U_3 = 0$$

*та коли ця залежність визначається такими рівняннями*

$$U_1 = kx_1,$$

$$U_2 = -kx_2,$$

$$U_3 = 0$$

### **Розв'язок.**

*Тензори градієнтів зміщень для обох випадків мають наступний вигляд*

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \begin{Bmatrix} 0 & K & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (1.4.8)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \begin{Bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (1.4.98)$$

Розташування елементарного паралелепіпеда, що описуються матрицями (1.4.8) та (1.4.9), показано на рис. 1.4.3 а та б.

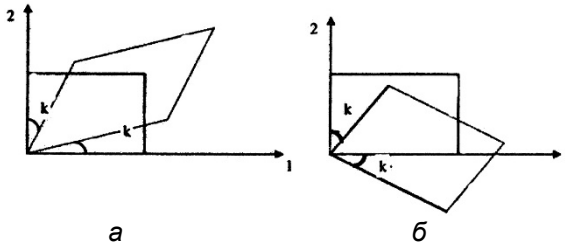


Рис. 1.4.3.  
Чистий зсув (а)  
та обертання  
(б)  
елементарного  
паралелепіпеда

У рис. 1.4.3 а для нас важливим є той факт, що діагональ паралелепіпеда, що проходить через початок координат, не змінює свого напрямку після деформації. Цей факт свідчить про те, що в цьому випадку не відбувається обертання паралелепіпеда як цілого – він тільки деформується. Деформований стан паралелепіпеда, який зображено на рис. 1.4.3 а, називається **чистим зсувом**.

Останнє поняття вже застосовано вдруге: вперше його використали як назву напруженого стану (див. рис. 1.2.9 та формулу (1.2.12)). Надалі покажемо, що таке подвійне застосування терміну має прямий сенс, тому що саме напруження, показані на рис. 1.2.9, і викликають згадану деформацію.

Як видно з рис. 1.4.3 б, тензор градієнтів зміщень (1.4.9) описує виключно обертання паралелепіпеда як цілого (без його деформації). Причиною зазначеного є рівність  $\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial U_2}{\partial x_1}$ ,

завдяки чому вертикальне і горизонтальне ребра паралелепіпеда обертаються на один і той самий кут навколо початку координат.

**Тензор деформації.** Раніше ми вже впевнились у тому, що якщо тензор  $\frac{\partial U_j}{\partial x_k}$  має діагональний вигляд, то він описує деформацію елементарного паралелепіпеда, а саме: видовження (або скорочення) в напрямку відповідних осей. З попереднього маємо висновок, що тензор вигляду (1.4.8) також описує лише деформацію паралелепіпеда. Обидва тільки-но згадані тензори об'єднує одна властивість – їх вигляд не змінюється, якщо індекси компонентів поміняти місцями. Такі тензори називаються симетричними.

Тензор вигляду (1.4.9) називають антисиметричним. Його компоненти, не змінюючи своєї величини, змінюють знак на протилежний, якщо поміняти індекси місцями. Вже підкреслювалось, що такий тензор описує обертання паралелепіпеда як цілого.

Запишемо тензор градієнтів зміщень у вигляді суми симетричного та антисиметричного тензорів

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.4.10)$$

Тоді згідно з вищезгаданим симетричний тензор

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.4.11)$$

описуватиме деформацію паралелепіпеда – він і називається **тензором деформації**.

А тензор

$$\omega_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.4.12)$$

описуватиме обертання елементарного паралелепіпеда як цілого.



До висновку про те, що тензор (1.4.12) описує обертання паралелепіпеда як цілого, можна прийти більш строгим шляхом.

Згадаємо, що швидкість  $\vec{v}$  - це похідна від зміщення  $\vec{u}$  за часом, тобто

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Відомо, що вираз  $\frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$  є кутовою швидкістю обертання  $\Omega$  нескінченно малого об'єму (тобто елементарного паралелепіпеда).

Змінюючи місцями операції  $\frac{d}{dt}$  на  $\text{rot}$ , одержуємо

$$\frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} \right).$$

Згадуючи, що

$$\text{rot} \vec{u} = \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}$$

з урахуванням виразу (1.4.12) запишемо

$$\Omega = \frac{d}{dt} \omega_{jk}.$$

З останньої формули випливає, що  $\omega_{jk}$  - кут обертання нескінченно малого об'єму – елементарного паралелепіпеда – відносно осі, перпендикулярної до площини, яка проходить через осі  $j$  та  $k$ .

На прикладі тензора напружень ми раніше розглянули поняття інваріанту тензора. З таким же успіхом можна говорити про інваріанти будь-якого тензора, в тому числі і тензора деформації. У подальшому зустрічатиметься перший інваріант цього тензора

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Згідно з визначенням, об'єм елементарного паралелепіпеда до деформації дорівнює

$$\overline{dx} = dx_1 dx_2 dx_3.$$

Нехай осі 1, 2, 3 є головними. Тоді ребра паралелепіпеда після деформації дорівнюватимуть

$$dx'_1 = dx_1 (1 + \varepsilon_{11}),$$

тощо, а об'єм  $\overline{dx'} = dx'_1 dx'_2 dx'_3$  буде дорівнювати

$$\overline{dx'} = \overline{dx} (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}). \quad (1.4.13)$$

Обмежуючись випадком малих деформацій ( $\varepsilon_{11} \ll 1$  і т.д.) та залишаючи в (1.4.13) тільки, лінійні щодо  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ , одержуємо

$$\overline{dx'} = \overline{dx} (1 + \varepsilon_{11}) \quad (1.4.14)$$

Отже, величина  $\varepsilon_{11}$  є відносною зміною об'єму в даній точці (або, що те ж саме – відносною зміною об'єму елементарного паралелепіпеда, що прилягає до даної точки)

$$\frac{\overline{dx'} - \overline{dx}}{\overline{dx}} = \varepsilon_{11} \quad (1.4.15)$$

**Завдання 11.** Знайти швидкість кута зсуву еритроциту на відстані 2 мм від осі артерії діаметром 8 мм. Швидкість крові в артерії 500 мм/с.

**Криволінійні координати та деформації.** Тільки-но встановлено, що похідні від зміщення визначають відносні видовження (або скорочення) ребер елементарного паралелепіпеда  $dx_1$ ,  $dx_2$  та  $dx_3$ . Зрозуміло, що йшлося про декартову систему координат: нескінченно малий об'єм ми й зображали паралелепіпедом саме завдяки прямокутним осям цієї системи. А як визначити деформації у криволінійній системі координат?

Перейдемо, наприклад, до циліндричної системи координат, коли положення точки визначається:

- відстанню  $\rho$  від початку координат,
- кутом  $\varphi$ , що відраховується від осі  $x_1$  у площині  $x_1 0 x_2$ ,
- та висотою  $z = x_3$ .

Нескінченно малий об'єм  $dV$ , що ми його записували в декартових координатах зазвичай як  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ , тепер визначатиметься такою формулою

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Область, що ототожнюється з нескінченно малим об'ємом, - це вже не паралелепіпед. «Вирізаємо» цю область із континууму за допомогою:

- двох площин, що відповідають значенням  $z$  та  $z + dz$ ;
- двох площин, що відповідають значенням  $\varphi$  та  $\varphi + d\varphi$
- та двох циліндричних поверхонь з радіусами  $\rho$  та  $\rho + d\rho$ .

За цих умов область (тобто «наш» нескінченно малий об'єм) набуде вигляду, зображеного на рис. 1.4.4 а.

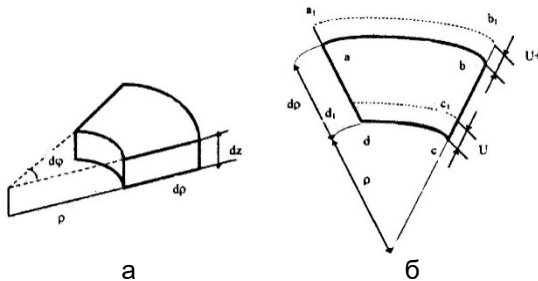


Рис. 1.4.4.  
Нескінченно  
малий об'єм у  
циліндричних  
координатах

Спроекуємо зазначену область на площину, перпендикулярну до осі – фігура  $abcd$  на рис. 1.4.4 а.

Нехай зміщення  $U$  змінюється тільки в радіальному напрямку. Тоді, якщо точки, що лежать на радіусі  $\rho$ , одержать зміщення  $U$ , то точки, які лежать на радіусі  $\rho + d\rho$ , матимуть

зміщення  $U + dU$ . Внаслідок зазначених зміщень фігура  $abcd$  перейде в положення  $a'b'c'd'$ , що його зображено пунктиром.

Для відносних видовжень у радіальному та тангенціальному напрямках згідно з рис. 1.4.4 б запишемо

$$\varepsilon_{rr} = \frac{b_1c_1 - bc}{bc}, \quad (1.4.16)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{d_1c_1 - dc}{dc}. \quad (1.4.17)$$

Враховуючи, що

$$dc = rd\phi,$$

$$d_1c_1 = r + U,$$

$$bc = dr,$$

$$b_1c_1 = dr + dU,$$

Одержуємо

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dU}{b\rho}, \quad (1.4.18)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{U}{\rho}. \quad (1.4.19)$$

При користуванні сферичними координатами, коли до  $\rho$  та  $\varphi$  додається ще одна координата  $\theta$  - кут між віссю  $x_3$ , нескінченно малий об'єм «вирізається» із стінки сфери товщиною  $d\rho$ , і ми вимушені ввести за аналогією з рис. 1.4.4 б, ще одну тангенціальну деформацію

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{\rho} \quad (1.4.20)$$

**Вправа 11. Залежність деформації біополімерних сегментів від їхньої орієнтації.**

Величина  $\varepsilon_{ik}$  - тензор, тому справедлива формула для обчислення компонентів тензора при перетворенні координат, аналогічна виразу (1.3.10), а саме

$$\varepsilon_{i'k'} = \alpha_{i'i} \alpha_{k'k} \varepsilon_{ik} \quad (1.4.21)$$

Дану формулу можна використати для розв'язку практичних задач фізики полімерів. Вже згадувалось про сегментальну модель ланцюга, де ланцюг уявляють як сукупність з'єднаних між собою жорстких стрижнів. Прикладемо до волокна розтягуючи силу – таку, що відносні видовження волокна досягнуть  $\varepsilon$ . Як при цьому деформуються сегменти?

### Розв'язок

Розглянемо нескінченно малий об'єм  $d\vec{x}$ , в якому кут між сегментом  $i$  напрямком розтягу (тобто віссю волокна) дорівнює  $\theta(\vec{x})$ . Направимо вісь 1 вздовж волокна. Відносне видовження в напрямку осі 1 нам відоме

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon.$$

При витягуванні волокна його поперечні розміри зменшуються залежно від величини  $\varepsilon$ , а саме

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\mu\varepsilon, \quad (1.4.22)$$

де  $\mu$  - так званий коефіцієнт Пуассона (надалі – у п. 2.1 ми ще повернімось до цього коефіцієнта детальніше, поки що сприймаємо формулу (1.4.22) як експериментальну реальність).

Таким чином, у «не штрихованій» системі координат тензор деформації має такий вигляд

$$\varepsilon_{ik} = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\varepsilon \end{array} \right\} \quad (1.4.23)$$

Проведемо вздовж сегмента вісь 1'. Отже, деформацію, що нас цікавить, слід позначити як  $\varepsilon_{1'1'}$ . Використовуючи формулу (1.4.21), запишемо такий вираз

$$\varepsilon_{1'1'} = \varepsilon \alpha_{1'1}^2 - \mu \varepsilon \alpha_{1'2}^2 - \mu \varepsilon \alpha_{1'3}^2 \quad (1.2.24)$$

У різних точках  $\vec{x}$  (а точніше – у різних нескінченно малих об'ємах  $d\vec{x}$ , що прилягають до цих точок), сегменти мають різний напрямок. Тому деформація  $\varepsilon_{1'1'}$  є функцією від  $\vec{x}$ . Вводячи, як і в аналогічній ситуації (вправа в п. 1.2), середні величини та позначаючи їх рискою нагорі, перепишемо (1.4.24) у вигляді

$$\overline{\varepsilon_{1'1'}} = \overline{\varepsilon \alpha_{1'1}^2} - \mu \overline{\varepsilon \alpha_{1'2}^2} - \mu \overline{\varepsilon \alpha_{1'3}^2} \quad (1.4.24)$$

Як і у згаданій попередній вправі, вважатимемо, що вісь волокна (яка позначена через 1) є віссю симетрії. Внаслідок цього вираз (1.2.24) набуде такого вигляду

$$\overline{\varepsilon_{1'1'}} = \overline{\varepsilon (\cos^2 \theta - \mu \sin^2 \theta)} \quad (1.4.25)$$

Виражаючи величини  $\overline{\cos^2 \theta}$  та  $\overline{\sin^2 \theta}$  через подвійне променезаломлення  $\Delta n$  за допомогою формули (1.3.22), дістанемо змогу обчислити видовження сегментів при відомих значеннях  $\Delta n$ .

При розв'язку даної вправи ми вважали, що при деформації орієнтація ланцюгів суттєво не змінюється. Як побачимо далі, це припущення залишається справедливим тільки тоді, коли деформацію  $\varepsilon$  можна вважати пружною.

## **Вправа 12. Форма клітин живої тканини при їх деформації.**

Ней в живій тканині клітини мають форму сфер діаметром 0,1 мкм.

### **Розв'язок**

Вважатимемо живу тканину суцільним середовищем. Очевидно, щоб стати на таку точку зору, необхідно вибрати розмір фізичного нескінченно малого об'єму набагато більшим за розмір складових клітини. Тому розмір нескінченно малого об'єму буде співпадати з розміром клітини.

Нехай, наприклад, деформаційний стан клітини визначається тензором

$$\varepsilon_{ik} = \begin{Bmatrix} 14 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

Позначимо діаметр клітини через  $d$ .

Внаслідок деформації, що діє, як бачимо, в площині 102, переріз клітини, який мав форму кола, перетворюється на еліпс з осями  $d(1 + \varepsilon_{11})$  та  $d(1 + \varepsilon_{22})$ , де  $\varepsilon_{11}$  та  $\varepsilon_{22}$  - головні значення тензора. Напрямок осей еліпса збігається з головними осями  $\hat{1}$  та  $\hat{2}$ .

Для розв'язку поставленої задачі скористаємось усім тим, що ми вже знаємо про знаходження головних значень і головних осей тензора.

- Запишемо рівняння для знаходження головних значень

$$\begin{vmatrix} 14 \cdot 10^{-2} - \varepsilon & 6 \cdot 10^{-2} \\ 6 \cdot 10^{-2} & -2 \cdot 10^{-2} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

- Розкриємо визначник:  $\varepsilon^2 \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot \varepsilon \cdot 64 \cdot 10^{-4} = 0$ .

- Визначимо корені рівняння:  $\varepsilon_{\hat{1}\hat{1}} = 16 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_{\hat{2}\hat{2}} = -4 \cdot 10^{-2}$ .

- Записуємо систему рівнянь для знаходження направляючих косинусів осі  $\hat{1}$

$$\alpha_{i1}(14 - 16) + \alpha_{i2}6 = 0$$

$$\alpha_{i1}6 + \alpha_{i2}(-2 - 16) = 0$$

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 = 1$$

- Розв'язуючи цю систему, одержуємо:  $\alpha_{i1} = 0,909$ .

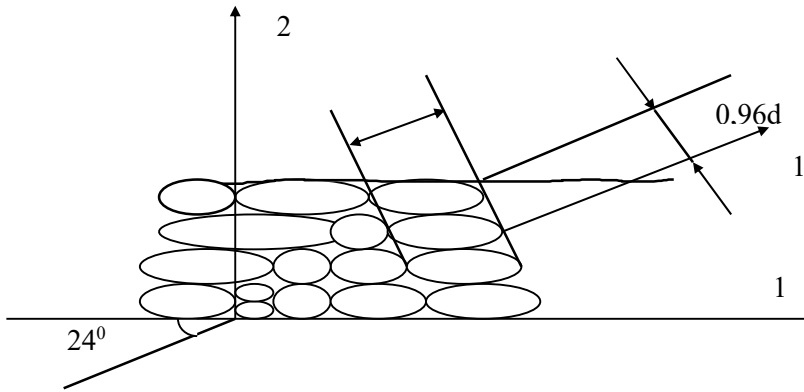


Рис. 1.4.5. Структура деформованої біотканини

Отже, кут між осями 1 та  $\hat{1}$  складає  $24^\circ$ . Згідно з виконаними розрахунками осі еліптичного перерізу клітини мають такі розміри:  $1,16d$  та  $0,96d$ , причому велика вісь еліпса нахилена до осі 1 під кутом  $24^\circ$ . Структура деформованої біотканини зображена на рис. 1.4.5.

**Завдання 12.** М'язові клітини об'єднуються в утворення, що носять назву фібрили. Нехай при навантаженні в фібрилах виникла деформація яка описується тензором деформацій

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2}$$

Тензор деформацій визначений в системі координат вісь 2 якою розташована під кутом 30 градусів до осі фібрили, а вісь 3 перпендикулярна до осі фібрили. Відстань між фібрилами 100мкм.

Визначити видовження фібрил, величину зміни відстані між фібрилами та величину зсуву фібрил одна відносно одної.



## 1.5. Рівняння руху континуума

### *Рівняння руху при лінійному напруженому стані.*

Коли йдеться про динаміку, то щонайперше згадують рівняння руху – саме воно містить у собі інформацію про поведінку системи під дією зовнішніх сил. Усі знають рівняння руху матеріальної точки – це не що інше як затверджений ще в шкільні роки другий закон Ньютона

$$\vec{P} = m\vec{a},$$

де  $\vec{P}$  - сила, яка діє на цю точку,  $m$  - маса точки,  $\vec{a}$  - прискорення.

Якби ми мали справу із дискретною системою точок, то принципів ускладнень порівняно з однією точкою не виникло б: досить було б записати другий закон Ньютона для кожної матеріальної точки, з яких складається система. Правда, без труднощів не обійшлося б, проте вони полягали б уже не в тому, як записати рівняння руху, а в ому, як їх розв'язати.

Стосовно ж континууму (а ми продовжуємо працювати з цією моделлю) ускладнення виникають уже при записі самих рівнянь. Згадаємо, що континуум теж складається з окремих точок, які щільно «припасовані» одна до одної. То може й тут можна записати другий закон Ньютона?

При цьому зразу ж виникають питання.

Перше з них: як визначити масу такої точки? У континуумі точка розглядається разом із своїм оточенням – нескінченно малим об'ємом  $d\vec{x}$ . Логічно прийняти для маси точки такий вираз

$$dm = \rho dx_1 dx_2 dx_3.$$

Друге: як визначити прискорення для точки континуума? У точці задано зміщення  $\vec{u}(\vec{x})$ . Отже, прискорення можна записати як

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}.$$

Тепер – сила  $\vec{P}$ . Як її записати для точки континууму? Принципово тут є обставина, що внутрішні сили розподілені неперервно в континуумі: ці сили описують взаємодію між окремими частинками континууму – нескінченно малими об'ємами – і, отже, саме вони й мають входити до рівняння руху.

Розглянемо **лінійний напружений стан**, коли одне єдине напруження, наприклад,  $\sigma_{11}$ , відрізняється від нуля.

Тоді на ліву грань елементарного паралелепіпеда діятиме сила

$$\sigma_{11} dx_2 dx_3,$$

де  $dx_2 dx_3$  - площа, по якій діє напруження  $\sigma_{11}$ .

На праву грань при цьому буде діяти сила  $\left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_3 dx_1$ , адже  $\sigma_{11}$  є функцією від  $\bar{x}_1$ , і при переході

до точки  $x_1 + dx_1$  одержує таке приращення  $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$ .

Сили, що діють на зазначені грані, направлені у протилежні боки і відтак рівнодійна сил, прикладених до елементарного паралелепіпеда, напрямлена, звичайно, вздовж осі 1 та дорівнює

$$Q_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Отже, рівняння руху після підстановки значень маси  $dm$ ,

прискорення  $\frac{d^2 u_1}{dt^2}$  (зміщення також направлене вздовж осі 1) та

сили  $Q_1$  набуде такого вигляду

$$\rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \quad (1.5.1)$$

Виникає питання: чому по гранях паралелепіпеда, перпендикулярних до осі 1, діють різні напруження? Адже раніше (наприклад, рис. 1.3.2, див. п.1.3) ми завжди приймали, що по цих гранях діють однакові напруження?

Річ у тім, що раніше розглядали рівновагу паралелепіпеда, а тепер нас цікавить його рух. Саме ця обставина призводить до того, що

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \neq 0,$$

як це впливає з рівняння (1.5.1). Те, що прискорення дорівнює нулеві, означає стан рівноваги, який описується таким рівнянням

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (1.5.2)$$

Умова (1.5.2) й означає те, що напруження на протилежних гранях паралелепіпеда, дорівнюють одне одному.

**Вправа 14. Розподіл напружень у біополімері при випробуванні на простий розтяг.**

Досі ми вважали, що напруження в зразку, який має форму стрижня, при простому розтягу (див. рис. 1.2.1 з п. 1.2) однакові у кожній точці стрижня. Іншими словами, йшлося про так званий однорідний напружений стан.

Чи можна це довести? Скористаємось рівнянням (1.5.2), яке й описує поведінку системи (зразка) в напруженому стані. Тобто, напруження, які виникають у зразку, мають задовольняти цьому рівнянню.

Крім рівняння (1.5.2), має задовольнятися й гранична умова

$$\int_s \sigma_{11}(x_1 = \ell) dx_2 dx_3 = F, \quad (1.5.3)$$

де  $F$  відповідно до рис. 1.2.1 – сила, що прикладена на кінці стрижня  $x_1 = \ell$ .

Вважатимемо, що у поперечному перерізі  $x_1 = \ell$  напруження мають однакові значення. Тоді умова (1.5.3) заміниться таким виразом

$$\sigma_{11}(x_1 = \ell) = \frac{F}{S}, \quad (1.5.4)$$

де через  $S$ , як і раніше (див. рис. 1.2.1), позначено площу перерізу.

Очевидно, що завдяки прийнятому припущенню, у кожному перерізі (а не тільки в перерізі  $x_1 = \ell$ ) напруження однакові. При цьому розв'язок рівняння (1.5.2) має такий вигляд

$$\sigma_{11} = C \quad (1.5.5)$$

де  $C$  – деяка стала величина.

Порівнюючи (1.5.4) та (1.5.5), доходимо висновку, що  $C = \frac{F}{S}$ . Отже, дійсно, **при простому розтягу виникає однорідний напружений стан.**

Важливим є методика знаходження функції  $\sigma(\vec{x}, t)$  у напруженій системі: ця функція є розв'язком рівняння (1.5.1) (якщо йдеться про рівновагу, то шукаємо функцію  $\sigma(\vec{x})$  - рішення рівняння (1.5.1)); і крім того ця функція має бути такою, щоб задовольнялись граничні умови.

Отож, в даній вправі, як у краплині води, відбилась головна мета, що її ставили: визначити величину напружень  $\sigma(\vec{x}, t)$  у кожній точці  $\vec{x}$  напруженої системи і в кожний момент часу. Тобто ця вправа підказує, що треба робити, а саме: розв'язуйте рівняння руху, що описує поведінку континууму, задовольняйте граничні умови – і ваша мета досягнута.

**Поверхневі та об'ємні сили.** Згадаймо рис. 1.2.6 (див. п. 1.2). З погляду фізики було припущено неточності при введенні поняття «вектор напружень»: відкидалося оточення (наприклад, частинку  $B$  та інш.), при цьому оточення замінювалось силами (наприклад, силою  $F_{BA}$  тощо), які діють на частинки, які містяться в об'ємі  $DEFG$ . Але ж ці сили мають діяти саме на частинки (наприклад, сила  $F_{BA}$  мусила б прикладатись до частинки  $A$ ).

А що ж було зроблено? Проводилась якась уявна площа (наприклад  $GE$ ) і в точці, де лінія дії сили перетинає дану (підкреслимо – уявну!) площину, прикладалась сила (для сили  $F_{BA}$  це точка  $A$ ).

Чи можна якимось чином виправдати таку, строго кажучи, некоректну операцію?

Виправдання в тому, що фізично нескінченно малий об'єм мусить містити в собі велику кількість частинок (ланок) – це впливає з самої суті даного поняття.

Сили ж взаємодії частинок одна з одною мають малий радіус дії – їхній вплив відчутний на відстанях порядку відстані між

частинками. Отже, фактично із оточенням взаємодіють не всі частинки, які складають даний фізично нескінченно малий об'єм, а тільки ті, що знаходяться від поверхні об'єму на відстані порядку радіусу дії. Порівняно з розміром фізично нескінченно малого об'єму цим радіусом можна знехтувати, вважаючи, що згадані сили діють на поверхні фізично нескінченно малого об'єму.

Оскільки при переході до континууму фізично нескінченно малий об'єм стягується в точку, то внутрішні сили передаються від кожної точки тільки найближчою до неї. Такі сили, як відомо, у фізиці називаються **близькодійчими**. Із зазначеного випливає, що в континуумі сили діють на якусь частину системи з боку оточуючих її частин тільки через поверхню цієї частини – вони є поверхневими.

Проте у фізиці поряд із близькодійчими розглядають також і далекодіючі сили. До них, наприклад, відносяться гравітаційні, кулонівські сили та ін. Вважають, що взаємодія між частинками завдяки цим силам встановлюється миттєво. Отже, якщо помістити нашу в поле таких сил, то всі частинки системи мають одночасно відчувати вплив далекодіючих сил – такі сили діють відразу на весь об'єм системи, тому їх можна назвати об'ємними.

Необхідно врахувати існування таких сил у рівнянні руху. Позначимо через  $Q$  об'ємну силу, що діє на одиницю маси. Відповідно об'ємна сила, яка діє на елементарний паралелепіпед, дорівнюватиме

$$\vec{Q}dm = \vec{Q}\rho dx_1 dx_2 dx_3.$$

Щоб не виходити за межі лінійного напруженого стану, вважатимемо, що сила  $\vec{Q}$  направлена вздовж осі 1. Тоді з урахуванням об'ємних сил отримуємо натомість (1.5.1) наступне рівняння руху

$$\rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + Q_1 \rho \quad (1.5.6)$$

Мабуть, слід нагадати, що уявлення про миттєву взаємодію є наближенням. Воно передбачає миттєву передачу збудження від однієї точки до іншої, що (взагалі кажучи) не відповідає дійсності. Проте в нашому випадку, коли

розглядаються механічні збудження (а зміщення – це не що інше, як збудження, викликані дією механічних сил), таке наближення цілком прийнятне. Ще зі шкільного курсу фізики відомо, що ці збудження поширюються зі швидкістю звуку, яка набагато менша швидкості поширення гравітаційних та електромагнітних збуджень. Саме ця різниця швидкості і дозволяє поділяти сили на поверхневі та об'ємні.

**Вправа 14. Напруження в канаті, що виникають під дією його власної ваги.**

Часто-густо виникає потреба підняти вантаж зі дна океану. Канати, які застосовують в такому випадку, найчастіше виготовлено з полімерних волокон: вони легкі та досить міцні. Проте, якими б легкими не були ці волокна, якщо довжина каната досягає кілометра і більше, то його вага дається взнаки. Розрахувати напруження, що виникають у канаті під дією власної ваги.

**Розв'язок.**

Нехай канат займає вертикальне положення. Проведемо вісь 1 вздовж каната.

Будемо виходити з такого рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + Q_1 \rho = 0 \quad (1.5.7)$$

Очевидно, що  $Q_1 = g$ , де  $g$  - прискорення вільного падіння.

Сила, що діє на верхній (підвищений) переріз канату має дорівнювати вазі канату  $G_K$ . Отже, граничну умову для перерізу  $x = 0$  можна записати у такому вигляді

$$\sigma_{11}(x = 0) = \frac{G_K}{S} \quad (1.5.8)$$

Розв'язок (1.5.7) має такий вигляд

$$\sigma_{11} = -gx_1\rho + C_1 \quad (1.5.9)$$

де  $C_1$  - стала величина.

Використовуючи граничну умову (1.5.8) для знаходження сталої  $C_1$ , отримуємо таке

$$\sigma_{11} = \frac{G_K}{S} - gx_1\rho \quad (1.5.10)$$

Отже, напруження, що виникають у канаті під дією його власної ваги, лінійно зменшуються від найбільшого значення, що досягається у точці підвісу, до нуля на кінці канату.

**Рівняння руху для довільного напруженого стану.** Нехай усі компоненти тензора напружень відрізняються від нуля – це і є найзагальнішим випадком напруженого стану, який може виникнути у точці континууму. На рис. 1.5.1 показані напруження, що діють по гранях елементарного паралелепіпеда, перпендикулярних до осей 1 та 2.

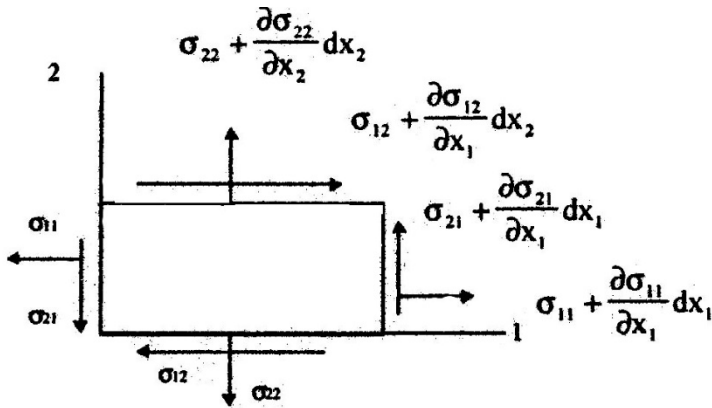


Рис. 1.5.1. Приближення компонентів тензора напружень

Користуючись наведеним рисунком, запишемо проекцію рівнодійної на вісь 1, помноживши відповідні напруження на площі граней, по яких вони діють.

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \\
 & + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{12} dx_1 dx_3 + \\
 & + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{13} dx_1 dx_2.
 \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

В останньому виразі, окрім зображених на рис. 1.5.1 напружень, зустрічаємо і напруження  $\sigma_{13}$ , що згідно з своїм позначенням (див. п.1.1.2) діє у напрямку осі 1 і отже мусить давати внесок у проекцію рівнодійної  $Q_1$ .

Відповідно до одержаної формули записуємо **рівняння руху**

$$\rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho \quad (1.5.12)$$

Інші два рівняння руху мають аналогічний вигляд.

Скорочено всі три рівняння записуємо наступною формулою

$$\rho \frac{d^2 u_j}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \rho \quad (1.5.13)$$

**Симетрія тензора напружень.** Будемо шукати проекцію  $M_3$  моменту сил  $\vec{M}$ , що діють на елементарний паралелепіпед.

Для цього подумки трохи змінимо рис. 1.5.1, розташувавши початок координат у центрі паралелепіпеда. Тоді моменти відносно осі 3 будуть створювати тільки дотичні напруження, і для  $M_3$  отримаємо вираз

$$M_3 = \left( \sigma_{21} + \sigma_{21} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} - \left( \sigma_{12} + \sigma_{12} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} \quad (1.5.14)$$

В одержаній формулі не всі члени мають однаковий порядок малості: члени  $\frac{1}{2} \sigma_{21} dx_1 dx_2 dx_3$  та  $\frac{1}{2} \sigma_{12} dx_1 dx_2 dx_3$  - нескінченно малі третього порядку; а члени  $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_2 dx_3 \frac{dx_1^2}{2}$  та  $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_1 dx_3 \frac{dx_2^2}{2}$  мають вищий порядок малості.



Нехтуючи останніми, натомість (1.5.14) запишемо

$$M_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{21} - \sigma_{12}) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.5.15)$$

Аналогічні вирази неважко одержати і для інших проекцій вектора  $\vec{M}$ .

Припустимо, що ми маємо справу з таким континуумом, в якому не виникає опору повороту елементарного паралелепіпеда як цілого. Згідно цього припущення момент  $\vec{M}$  має дорівнювати нулеві

$$\vec{M} = 0, \quad (1.5.16)$$

Звідкіля випливає, що

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}, \quad (1.5.17)$$

тобто тензор  $\sigma_{jk}$  - симетричний.

Зайвий раз підкреслимо, що симетрія тензора напружень не є його неодмінною рисою, вона характерна для певного типу континуумів, для яких виконується умова (1.5.16).

**Закон збереження імпульсу.** Як видно з попереднього розгляду, головною задачею при введенні рівняння руху було визначення сили  $\vec{Q}_1$ , що діє на даний елементарний об'єм з боку оточення.

Те, що нами зроблено з цього приводу раніше, фактично є спрощеним викладенням більш строгих міркувань.

Позначимо через  $\vec{q}$  силу, що діє на одиницю об'єму. Цю величину зв'яже з силою  $\vec{Q}$ , з якою ми мали справу раніше, співвідношення

$$\vec{Q} = \vec{q} dV \quad (1.5.18)$$

Виділимо в континуумі об'єм  $V$ . На кожний з елементів  $dV$  його діє сила  $\vec{Q}$ , і отже на весь об'єм діятиме сила

$$\vec{Q}' = \int_V \vec{q} dV \quad (1.5.19)$$

Чи можуть сили, що діють між окремими елементами цього об'єму, дати в сумі рівнодійну, що відрізнялась би від нуля?

Очевидно, що ні, бо це б суперечило закону дії та протидії. Тому рівнодійна є сумою тільки тих сил, що діють на виділений об'єм з боку оточення.

Як уже згадувалось, ці сили діють на згаданий об'єм тільки через його поверхню, а рівнодійна є сумою сил, що діють на кожний з елементів цієї поверхні. Іншими словами, рівнодійна сил має вигляд інтеграла по поверхні, що обмежує виділений об'єм  $V$ .

Таким чином, об'ємний інтеграл (1.5.19) можна перетворити в інтеграл по поверхні. Якби величина, яку ми інтегруємо по об'єму  $V$ , була скаляром (дивергенцією деякого вектора), то замінити об'ємний інтеграл поверхневим можна було б, застосовуючи добре відому теорему Остроградського-Гаусса. Але ж величина  $\vec{q}$  - вектор. То як бути в цьому випадку?

Знову йтиметься про дивергенцію, але вже про дивергенцію тензора 2 рангу  $\sigma_{jk}$ , запишемо

$$\vec{q} = \text{div} \sigma_{jk} \quad (1.5.20)$$

Компоненти вектора  $\vec{q}$  мають такий вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} = q_j \quad (1.5.21)$$

Отже, умова рівноваги елементарного об'єму  $q_j = 0$  мусить мати вже знайомий нам вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.5.22)$$

(Ми ведемо розмову про поверхневі сили, значить, у рівняння рівноваги (1.5.22) не увійшла об'ємна сила  $Q_j$ ).

Звернемо увагу на компактне (навіть вишукане) виведення рівняння рівноваги, що ґрунтується на виразі (1.5.20), отриманому за рахунок суто фізичних міркувань. Напевне, оцінена простота та досконалість такого підходу – адже нами зразу отримано не тільки рівняння рівноваги (від якого до рівняння руху «рукою подати»: для цього досить додати до сили  $\vec{q}$

інерційний член  $\rho \frac{d^2 u}{dt^2}$ ), а й цілком природним шляхом введено

поняття тензора напружень (згадайте, скільки на це було витрачено зусиль у п. 1.1.2). Більш того, вираз (1.5.21) дозволяє подивитись на рівняння руху з дещо незвичного погляду.

Запишемо для імпульсу  $\vec{k}'$  того ж об'єму  $V$  такий вираз

$$\vec{k}' = \int \vec{k} dV, \quad (1.5.23)$$

ввівши густину імпульсу  $\vec{k}'$ .

Відомий з механіки вираз

$$\vec{Q}' = \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (1.5.24)$$

можна переписати тепер у вигляді

$$\frac{\partial \vec{k}'}{\partial t} = \vec{q}, \quad (1.5.24)$$

або, враховуючи (1.5.21), ще й таким чином

$$\frac{\partial \vec{k}'}{\partial t} = \text{div} \sigma_{jk} \quad (1.5.26)$$

А тепер порівняємо одержану рівність з (1.1.8) – стосовно густини

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\text{div}(\rho \vec{v}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Згадаємо, про що там йшлося: речовина витікала з об'єму, призводячи до зменшення її кількості, яка залишалась у даному об'ємі і, значить (при сталому об'ємі) до зменшення густини в ньому.

Кількість речовини (маси), яка проходила за одиницю часу через одиницю поверхні, що обмежувала об'єм  $V$ , очевидно, дорівнює  $\rho V_n$ . Остання величина – це проекція вектора  $\rho \vec{V}$  на нормаль до поверхні. Саме вектор  $\rho \vec{V}$  - це так звана **густина потоку маси**.

Порівнюючи, бачимо, що (1.5.26) та (1.1.8) дуже схожі, з тією різницею, що  $\rho V_n$  замінено на  $\sigma_{jk}$ , а натомість  $\rho$  стоїть векторна величина.

Щодо формули (1.1.8) ми робили висновок, що вона являє собою закон збереження маси. Оскільки  $\rho$  - то є маса одиниці об'єму, а  $\vec{k}'$  - імпульс одиниці об'єму, то чи не є рівняння (1.5.26) законом збереження імпульсу?

Все збігалось б, якби не знак мінус перед величиною  $\sigma_{jk}$ . Проте це спричинено нашим вибором системи координат, яку ми використали, визначаючи компоненти вектора напружень, що діяв на площадку, паралельну деякій координатній величині. Згадаймо рис. 1.2.7 (див. п.1.2), де ми направили осі по зовнішній нормалі до граней  $AOB$ ,  $BOC$  та  $AOB$ , і вектори напружень на цих площадках виявились від'ємними.

Таким чином, якщо ми задаватимемо компоненти вектора напружень у системі координат 123 (як на рис. 1.2.7), то матимемо справу вже з величиною  $\Pi_{jk} = -\sigma_{jk}$ .

Очевидно, що  $\vec{k}' = \rho \vec{v}$ , тоді рівняння (1.5.26) можна переписати у такому вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_j = - \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_k} \quad (1.5.27)$$

Маючи весь час на думці аналогію з міркуваннями стосовно маси, повернімось від рівняння (1.5.27) до виразу, аналогічного (1.1.7) ( $\int_V [\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \vec{v})] dV = 0$ ). Для цього необхідно замінити об'ємний інтеграл поверхневим. Нагадаємо правило, згідно з яким інтеграл по замкнутій поверхні перетворюється на інтеграл по об'єму, що його охоплює ця поверхня: воно має такий вигляд

$$dS_j \rightarrow dV \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.5.29)$$

де  $d\vec{S}$  - орієнтований елемент поверхні – вектор, який направлений по зовнішній нормалі до її поверхні. Модуль цього вектора дорівнює  $dS$  і отже можна записати таке

$$d\vec{S} = \vec{n}dS .$$

Згідно з (1.5.28) маємо наступне

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_j dV = - \oint \prod_{jk} n_k dS , \quad (1.5.30)$$

де  $S$  - поверхня, що обмежує об'єм  $V$ .

Тепер згадаємо формулу (1.2.10) для вектора напружень

$$P_i = \sigma_{jk} n_{jk} , \quad (1.2.10)$$

і приходимо до висновку, що  $\prod_{jk} n_k$  - це  $j$ -та компонента вектора напружень (тільки зі знаком мінус) -  $P_i$ , що діє по площадці  $dS$ .

Ліворуч у формулі (1.5.30) стоїть зміна  $j$ -тої компоненти імпульсу в даному об'ємі за одиницю часу. Тому інтеграл праворуч – «кількість» цього імпульсу, що витікає в одиницю часу через поверхню, яка обмежує даний об'єм, і, значить,  $\prod_{jk} n_k dS$  -  $j$ -та компонента імпульсу, що витікає через елемент поверхні  $dS$  за одиницю часу,  $\prod_{jk} n_k = -P_j$  - це потік  $j$ -тої компоненти імпульсу, віднесений до одиниці площі поверхні.

Згадуючи фізичний зміст компонентів тензора напружень, доходимо висновку, що  $\prod_{jk}$  - це  $j$ -та компонента імпульсу, що протікає за одиницю часу через площадку, яка має одиничку площу, перпендикулярну до осі  $x_k$ . Тому  $\prod_{jk}$  - а це ж тензор напружень, тільки із знаком мінус – називають ще тензором **густини потоку імпульсу**.

Таким чином, рівняння (1.5.30) означає, що імпульс не виникає і не зникає – наскільки змінився імпульс в об'ємі  $V$  (ліва частина рівняння (1.5.30)), така ж його «кількість» «витікає» через поверхню, що обмежує цей об'єм. Відтак, рівняння руху (1.5.26) є не чим іншим як законом збереження імпульсу.

**Закон збереження енергії.** Оскільки зайшла мова про закони збереження, згадаємо ще один з них – закон збереження енергії.

Знайдемо спочатку потужність сили, що діє на площадку  $dS$ . Цю силу ми тільки-но згадували, - це величина

$$\prod_{jk} n_k dS,$$

точніше,  $j$ -та компонента сили. Потужність ми знайдемо скалярно, помноживши силу на швидкість, що дасть вираз

$$\prod_{jk} v_j n_k dS.$$

Вектор із компонентами

$$W_k = \prod_{jk} v_j \quad (1.5.31)$$

називають **вектором густини потоку потужності**.

Зміна енергії в об'ємі  $V$  відбувається за рахунок потоків енергії, які саме і характеризуються величиною (1.5.31). Отже, для закону збереження енергії (звичайно, маючи на увазі лише механічну енергію – ми ж розглядаємо механічні сили  $\prod_{jk} n_k$ ) ми маємо отримати вирази, аналогічні законам збереження, що ми їх вже розглянули:

у диференціальній формі:

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \text{div} \vec{W} = 0 \quad (1.5.32)$$

або в інтегральній формі:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U_e dV + \int_S W_n dS = 0 \quad (1.5.33),$$

де  $U_e$  - густина енергії.

**Ейлерові та лагранжеві координати.** Увівши поняття фізичного нескінченно малого об'єму, ми тим самим розбили систему на велику кількість областей, кожна з яких характеризується «своїми» параметрами: наприклад, «своєю» густиною, «своєю» швидкістю тощо. Важливо, що ці параметри характеризують усю область в цілому. Саме ця обставина дозволяє розглядати зазначені області як частинки суцільного середовища, а всю систему – як сукупність таких частинок.

Поряд з іншими за параметр, що визначає частинку (зараз йдеться про частинки суцільного середовища), можна

прийняти її координати  $\vec{X} = \vec{\xi}$  в деякий фіксований момент часу. Тоді координати частинок у будь-який інший момент часу  $t$  визначатимуться співвідношенням

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{\xi}, t) \quad (1.5.34)$$

Величини називаються лагранжевими координатами частинки, на відміну від  $x_{jk}$ , що їх називають ейлеревими координатами.

Очевидно, що, зафіксувавши лагранжеві координати, ми зауважимо на певній частинці. Зафіксувавши ж ейлерові координати, ми ставимо собі за мету відповісти на питання, що ж відбувається у вибраній точці  $\vec{X}$  простору.

Нехай нас цікавить, наприклад, величина  $u_j$  - де-яка проекція вектора зміщення. Поле величини  $U_j$  можна досліджувати як у ейлеревих, так і в лагранжевих координатах, тобто можна розглядати як залежність  $u_j(\vec{x}, t)$ , так і залежність  $u_j(\vec{\xi}, t)$ . У першому випадку ми проводимо вимірювання величини  $u_j$ , «сидячи» в точці  $\vec{X}$ , - отже, вимірюємо значення  $u_j$  для різних частинок, що «пропливають» через точку  $\vec{X}$ . У другому ж – «прив'язуємо» себе до частинки і «рухаємось» разом із нею, вимірюючи значення  $u_j$  із часом саме для цієї частинки.

Раніше ми уже домовлялися відносити величину  $u_j$  до недеформованого стану, записуючи  $u_j(\vec{X})$ . Фактично ми «прив'язували» величину  $u_j$  до певної точки простору – йшлося про ейлерові координати. Отже, саме вони застосовані при записі правої частини рівняння (1.5.13).

У ліву частину цього рівняння входить прискорення  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  - похідна, що визначає не зміну швидкості у даній нерухомій точці

простору, а зміну швидкості певної частинки, що рухається у просторі. Швидкість є функцією часу  $t$  та ейлеревих координат  $x_j$

$$\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{X}). \quad (1.5.35)$$

Тому повну похідну за часом (повторимо: саме вона визначає зміну швидкості даної частинки) можна записати через частинні похідні, а саме:

$$\frac{dV_j}{dt} = \frac{\partial V_j}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \quad (1.5.36)$$

Для зміщення одержимо аналогічну формулу

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (1.5.37)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \ll 1$$

З (1.5.36) та (1.5.37) випливає, що за умови можна записати наближено

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} \approx \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (1.5.38)$$



## РОЗДІЛ 2. ПРУЖНІ ДЕФОРМАЦІЇ БІОПОЛІМЕРІВ

### 2.1. Пружний ізотропний континуум

**Реологічне рівняння.** Якщо спробувати коротко переказати зміст попереднього розділу, то він зведеться до наступного.

Прикладені зовнішні сили. У системі виникають внутрішні сили як відгук на зовнішню дію. Для їх опису ми хочемо використати модель континууму. Це приводить до поняття напруженого стану в точці. Його ми визначаємо, задаючи тензор напружень у цій точці. Під дією напружень виникають деформації. Для їх опису вводимо поняття деформаційного стану в точці, задаючи тензор деформації.

Очевидно, що різні матеріали (це або різні полімери, або один і той самий, але за різних умов, скажімо, за різних температур) по-різному відгукуються на дію зовнішніх сил. Наприклад, якщо в даній точці виникне певний напружений стан, однаковий для різних матеріалів, то деформаційний стан буде, загалом кажучи, різним. Для всіх цих матеріалів ми пробуємо застосувати модель континууму. Нами вже використана його неперервність, яка дозволила «забути» про конкретну структуру матеріалу, що суттєво спростило опис відгуку системи, звівши його до тензорів напружень та деформацій. Але цього замало: «пам'ять» про структуру має десь зберігатись, тому що різна реакція на зовнішню дію якраз і викликана різною структурою.

Інформацію про структуру ми «заганяємо» в так зване **реологічне рівняння стану** (або просто – реологічне рівняння) – деяке співвідношення між тензорами напружень та деформацій, яке різне для різних матеріалів.

Отже «різні» у сполученні слів «різні матеріали» в межах континууму означає «різні реологічні рівняння». Йдеться про різну здатність матеріалу до деформації, до течії.

Згадаємо лінійний напружений стан. Повернімося до стрижня, що розтягується зовнішньою силою, знову направимо вздовж напрямку розтягу вісь 1, знову напруження  $\sigma_{11}$  та деформації  $\varepsilon_{11}$ . Зв'язок між ними описує відомий **закон Гука**

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} \quad (2.1.1)$$

де коефіцієнт пропорційності  $E$  називається модулем Юнга.

Водночас з поздовжньою деформацією  $\varepsilon_{11}$  відбувається і поперечна  $\varepsilon_{22}$ , величина якої пропорційна  $\varepsilon_{11}$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\mu \varepsilon_{11} \quad (2.1.2)$$

де  $\mu$  - так званий коефіцієнт Пуассона.

З урахуванням (2.1.1) формулу (2.1.2) можна представити у такому вигляді

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\mu \left( \frac{\sigma_{11}}{E} \right) \quad (2.1.3)$$

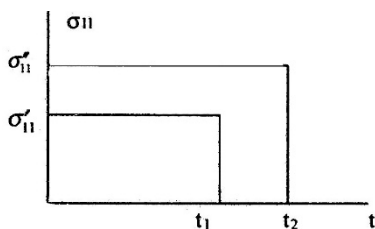


Рис. 2.1.1. Стрибкоподібне прикладення і зняття напружень ( $t$  – час)

Розглянемо особливості поведінки характеристик лінійного напруженого стану. Наприклад, як при стрибкоподібному прикладенні напруження (рис. 2.1.1) буде змінюватись деформація? Відповідь – на рис. 2.1.2.

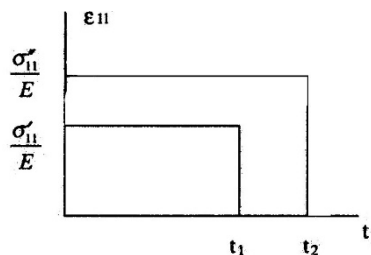


Рис. 2.1.2. Залежність пружної деформації від часу при стрибкоподібному прикладенні напруження

З порівняння рис. 2.1.1 та рис. 2.1.2 випливає наступне.

- Перше – це **однозначність деформації** – одному значенню напруження, наприклад,  $\sigma'_{11}$ , відповідає тільки одне значення деформації  $\varepsilon'_{11} = \sigma'_{11} / E$ .
- Друге – це **миттєвість** – деформація невідступно слідує за напруженням, миттю змінює своє значення відповідно до зміни напруження: напруження змінюється стрибком – стрибком змінюється і деформація.
- Третє – це **оберненість** – зникає навантаження – зникає і деформація.
- Четверта риса деформації, про яку йдеться, - це **лінійність** – деформація визначається формулою (2.1.1), в якій зафіксована пропорційність напруження та деформації.

**Деформація**, якій характерні вище перелічені риси, називається **пружною**. **Середовище**, в якому виникає ця деформація, також називається **пружним**, а сама **здатність до такої деформації – пружністю**.

Чи можна застосувати до твердих полімерів **модель пружного середовища** (інакше – **пружний континуум**)? Забігаючи трохи наперед (про це йтиметься у розділі 3), зауважимо, що для полімерів якраз дуже характерним є вплив часу на їх деформаційні властивості: якась частина деформації продовжує розвиватися, незважаючи навіть на відсутність зміни напруження в даний момент часу. Саме цю рису твердих полімерів можна вважати їх «візиткою». Однак згадана залежність деформації від часу стосується тільки частини певної деформації – інша частина є пружною, тобто описується законом Гука. Як показує експеримент, при зниженні температури твердий полімер все більше нагадує пружний континуум. Тому можна вважати, що при температурі  $T \rightarrow 0$  (а це підтверджує і мікроскопічна теорія – див. розділ 2) твердому полімеру властиві лише пружні деформації.

**Ізотропне пружне середовище – це континуум, пружні властивості якого не залежать від напрямку.**

Іншими словами, в якому б напрямку ми не вирізали зразок для випробувань на простий розтяг, модуль Юнга для таких об'єктів дослідження залишається однією і тією ж величиною.

**Закон Гука в тензорній формі.** Закон Гука у формі (2.1.1) справедливий для простого розтягу (стиску). Для довільного ж напруженого стану цей закон записується в такому вигляді

$$\sigma_{ik} = K \varepsilon_{11} \delta_{ik} + 2G \left( \varepsilon_{ik} - \frac{\varepsilon_{11} \delta_{ik}}{3} \right) \quad (2.1.4)$$

де  $K$  та  $G$  – пружні сталі, що відповідно називаються об'ємним та зсувним модулем.

Як видно з (2.1.4), компоненти напружень є лінійними комбінаціями компонентів тензора деформації. Отже, лінійність деформації забезпечена (ми дійсно маємо справу з пружним середовищем).

Залежність (2.1.4) називається **законом Гука в тензорній формі для ізотропного середовища**. Цей закон і є **реологічним рівнянням** для даного середовища.

Запишемо формулу (2.1.4) у вигляді пропорційних співвідношень, подібних до (2.1.1). Вираховуючи компоненти  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  за допомогою (2.1.4) і складаючи їх, одержуємо

$$\sigma_{11} = 3K \varepsilon_{11} \quad (2.1.5)$$

Вираз (2.1.5) з'єднує кульові тензори напружень і деформації.

Підставляючи значення  $\varepsilon_{11}$  з (2.1.5) у перший доданок правої частини (2.1.4), отримуємо вираз, що з'єднує девіатори напружень і деформації

$$\sigma_{ik} - \frac{\sigma_{11} \delta_{ik}}{3} = 2G \left( \varepsilon_{ik} - \frac{\varepsilon_{11} \delta_{ik}}{3} \right) \quad (2.1.6)$$

Таким чином, формулу (2.1.4) можна замінити двома виразами (2.1.5) та (2.1.6). Вони вже мають вигляд співвідношень пропорційності, подібно до (2.1.1).

Пружність ізотропного середовища характеризується двома сталими  $K$  та  $G$ . В той же час в закон Гука (2.1.1) для лінійно напруженого стану входить тільки одна стала  $E$ . Деся ми загубили ще одну сталу – її знаходимо, якщо згадаємо про поперечну деформацію, - це коефіцієнт Пуассона  $\mu$ , що входить у формулу (2.1.2). Таким чином, ізотропне пружне середовище можна характеризувати будь-якою парою сталих:

- або  $K$  та  $G$ ,

- або  $E$  та  $\mu$ .

Ясно, що між обома парами повинен існувати зв'язок.

**Вправа 15. Зв'язок між пружними сталими**

Підставивши  $\varepsilon_{11}$  з (2.1.5) у (2.1.4), отримаємо

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K} \sigma_{11} \delta_{ik} + \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \delta_{ik} \right) \quad (2.1.7)$$

Запишемо за допомогою (2.1.7) вирази для  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  при лінійному напруженому стані (тобто, врахувавши, що від нуля відрізняється тільки одна компонента  $\sigma_{11}$ ), а саме

$$\varepsilon_{11} = \left( \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} \right) \sigma_{11} \quad (2.1.8)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \left( \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right) \sigma_{11} \quad (2.1.9)$$

Порівнюючи останні формули з виразами (2.1.1) та (2.1.3), маємо

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}, \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\mu}{E} = \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}, \quad (2.1.11)$$

звідки випливають ті вирази, що нас цікавлять

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2.1.11)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (2.1.12)$$

**Вправа 16: закон Гука в системі головних осей.**

Враховуючи, що в системі головних осей відрізняються від нуля тільки діагональні компоненти  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , за допомогою формул (2.1.7), (2.1.11) та 2.1.12) запишемо

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu \sigma_{22} - \mu \sigma_{33}), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \mu \sigma_{11} - \mu \sigma_{33}), \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \mu \sigma_{11} - \mu \sigma_{22}),
 \end{aligned}
 \tag{2.1.13}$$

**Пружна енергія.** Нехай ребра елементарного паралелепіпеда розташовано паралельно головним осям. Замінивши відносне видовження  $\varepsilon_{11}$  на величину  $\delta \varepsilon_{11}$ , залишаємо інші компоненти тензора деформації без змін. Тоді сила  $\sigma_{11} dx_2 dx_3$  на переміщенні  $\varepsilon_{11} dx_1$  виконає роботу

$$\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dx_1 dx_2 dx_3$$

Проводячи ту саму операцію з іншими компонентами, отримуємо для роботи, виконаної силами, які діють на елементарний паралелепіпед, наступний вираз

$$\delta A' = (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33}) dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2.1.14}$$

При цьому внутрішня енергія системи (в даному випадку паралелепіпеда) збільшується. Нехтуючи неминучим (як того вимагає 2 начало ТД) переходом частини виконаної роботи в тепло, можна вважати, що зростання внутрішньої енергії в точності дорівнює виконаній роботі.

Вже згадувалось, що поняття пружності в його «чистому» вигляді може бути застосоване лише тоді, коли  $T \rightarrow 0$ . Але ж в цих умовах тепловий рух має фактично припинитися, тобто кінетична енергія часток, з яких складається речовина, прямуватиме до нуля. При цьому роботу буде витрачено на збільшення лише потенціальної енергії взаємодії між частками.

Йдеться про пружне середовище: обмежуємось лише випадком, коли сили взаємодії між частинками пропорційні зміні відстані між частинками (див. про це детально у розд. 2). Ці сили (також і як відповідні напруження) прийнято називати **пружними**. **Потенційну ж енергію цих сил називають енергією пружної деформації** або просто пружною енергією.

Введемо величину  $A$  – пружну енергію одиниці об'єму (її ще називають густиною пружної енергії або питомою пружною енергією). Оскільки вся робота зовнішніх сил йде виключно на збільшення потенційної енергії, з виразу (2.1.14) для прирощення величини  $A$  одержуємо наступне

$$\delta A = \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33} \quad (2.1.15)$$

Перепишемо закон Гука (2.1.4) в так званій формі Ляме

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon_{11} \delta_{ik} + 2G \varepsilon_{ik}, \quad (2.1.16)$$

де величини  $\lambda, G$  називаються сталими Ляме. Підставляючи (2.1.16) в (2.1.15), замінюючи прирощення диференціалами і виконуючи інтегрування, отримаємо для питомої пружної енергії

$$A = G(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 \quad (2.1.17)$$

Порівнюючи (2.1.17) та (2.1.16), доходимо висновку, що

$$A = \frac{1}{2} \sigma_{\bar{j}\bar{j}} \varepsilon_{\bar{j}\bar{j}} \quad (2.1.18)$$

Енергія є інваріантом, відтак вираз (2.1.18) справедливий для будь-якої системи координат, це означає, що ми можемо записати

$$A = \frac{1}{2} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} \quad (2.1.19)$$

**Рівняння Ляме.** Маючи загальні рівняння руху (1.5.6) суцільного середовища, неважко записати ці рівняння для конкретного континууму, підставивши в (1.5.6) вираз для тензора напружень  $\sigma_{jk}$ , що визначається реологічним рівнянням цього континууму. Виконаємо цю підстановку для пружного континууму, використавши реологічне рівняння у формі Ляме (2.1.16).

Згідно з визначенням символу Кронекера запишемо наступне

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{11} \delta_{jk}) = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_j} \quad (2.1.20)$$

Підставляючи вирази для тензори деформації 91.4.11) та його першого інваріанта в (2.1.16), одержуємо таке рівняння руху

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_j} + G \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + Q_j \rho \quad (2.1.21)$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \equiv \text{div} \vec{u}$ , а  $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}$  - компоненти вектора

$\Delta \vec{u}$ , позначення якого містить лапласіан

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \text{перепишемо (2.1.21) у векторних}$$

позначеннях

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\lambda + G) \nabla \text{div} \vec{u} + G \nabla \vec{u} + \vec{Q} \rho \quad (2.1.22)$$

Рівняння (2.1.21), або, що те ж саме, рівняння (2.1.22) називають **рівняннями Ляме**. Їх називають також **динамічним рівнянням пружного ізотропного континууму**. Ці рівняння відкривають клас динамічних рівнянь, що описують поведінку різноманітних континуумів. Усі ці рівняння одержують одним і тим самим способом: підстановкою відповідного реологічного рівняння у рівняння руху суцільного середовища. (Звернімо увагу на те, що у лівій частині знаходиться похідна за часом. Як пам'ятаємо, це означає, що ми маємо справу з малими градієнтами зміщень).

**Плоскі хвилі.** Нехай компоненти вектора зміщень залежать (окрім часу  $t$ ) ще тільки від однієї координати -  $x_\ell$

$$u_j = u_j(x_\ell, t). \quad (2.1.23)$$

У цьому випадку рівняння Ляме набудуть такого вигляду



$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\ell^2}, \\
 \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_\ell^2}, \\
 \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= G \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\ell^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.24}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 C_\ell^2 &= \frac{(\lambda + 2G)}{\rho}, \\
 C_t^2 &= \frac{G}{\rho}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.25}$$

І з їхнім урахуванням перепишемо рівняння (2.1.24) в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= C_\ell^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\ell^2}, \\
 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= C_t^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_\ell^2}, \\
 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= C_t^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\ell^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.26}$$

Читач звичайно упізнав знайомі йому хвильові рівняння, розв'язок яких має вигляд

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_{01} \exp[i(\omega t - k_\ell x_1)], \\
 u_2 &= u_{02} \exp[i(\omega t - k_t x_1)], \\
 u_3 &= u_{03} \exp[i(\omega t - k_t x_1)].
 \end{aligned}
 \tag{2.1.27}$$

Добре знайомі величини, що входять у наведені розв'язки (кругова частота  $\omega$ , хвильові числа  $k_\ell$  та  $k_t$ ), які визначаються такими виразами

$$k_\ell = \frac{\omega}{C_\ell}, k_t = \frac{\omega}{C_t}. \quad (2.1.28)$$

Нагадаємо, що хвильові числа – це обернені (з точністю до множника  $2\pi$ ) значення довжин хвиль

$$k_\ell = \frac{2\pi}{\lambda_\ell}, k_t = \frac{2\pi}{\lambda_t}. \quad (2.1.29)$$

І оскільки вже вжито терміни «хвильовий», «хвиля», то згадано вже й про те, що рівняння (2.1.26) – це **рівняння плоских хвиль**, що поширюються вздовж осі  $x_\ell$ . Перше з цих рівнянь (2.1.26) – це поздовжня хвиля: зміщення  $u_1$  в ній напрямлені вздовж напрямку поширення  $x_\ell$ , два інших рівняння – поперечні хвилі зі зміщеннями  $u_2$  та  $u_3$ , які перпендикулярні до напрямку поширення. Величини, що стосуються поздовжньої хвилі, ми позначили індексами « $\ell$ », а ті, що стосуються поперечних, – індексом « $t$ ».

Тепер черга дійшла і до величин  $C_\ell$  та  $C_t$  – швидкостей поширення відповідних хвиль. Їх ще називають **фазовими швидкостями**, бо вони визначають швидкість, з якою переміщується вздовж осі певне значення фази коливання  $(\omega t - kx_\ell)$ .

Зміщення записані нами у вигляді комплексних чисел. Зрозуміло, що такий запис зроблений для зручності – фактично ми маємо на увазі дійсну частину цих чисел: точніше, замість формули (2.1.27), наприклад, слід було б писати

$$u_1 = \operatorname{Re}\{u_{01} \exp[i(\omega t - k_\ell x_1)]\},$$

або, що те ж саме

$$u_1 = u_{01} \cos(\omega t - k_\ell x_1).$$

Усе розглянуте вище стосувалося випадку, коли хвиля поширювалась у напрямку осі  $x_1$ . А якщо хвиля поширюватиметься у довільному напрямку? І цей випадок не має викликати ускладнень: адже існує хвильовий вектор  $\vec{k}$ , за

допомогою якого ми й записуємо вираз для **довільної плоскої хвилі**

$$u_j = u_{0j} \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \vec{x} \right) \right] \quad (2.1.30)$$

І нарешті останнє, що слід згадати щодо плоскої хвилі: вона існує лише в **необмеженому середовищі**. Іншими словами, рівняння (2.1.24) мають розв'язок (2.1.30) тільки тоді, коли речовина, яка моделюється, займає необмежений простір.

### **Хвилі у пружних біоволокнах.**

Які хвилі поширюються у біоволокнах (наприклад, м'язове фібрила або у волосина). Давайте приєднаємо біоволокно до джерела коливань і збуджуватимемо коливання у напрямку осі волокна. Звичайно, що при цьому уздовж біоволокна бігтимуть із певною швидкістю  $C_E$  хвилі. Нехай їхня довжина набагато перевищує діаметр біоволокна. При цьому можна вважати, що у даному поперечному перерізі зміщення всіх точок однакове.

Збуджуючи коливання вздовж осі біоволокна, ми фактично навантажуюмо біоволокно у цьому напрямку, попеременно стискаючи його та розтягуючи. Отже, маємо знову добре знайомий нам **лінійний напружений стан із тензором напружень, що має єдину компоненту, відмінну від нуля**, - нормальне напруження  $\sigma_{33}$ , де 3 - вісь волокна. І знову (згадавши, як поздовжня деформація  $\varepsilon_{33}$  - одна з діагональних компонент тензора деформації виражається через зміщення  $u_3$ ) маємо закон Гука у найпростішій формі (2.1.1) із модулем Юнга  $E$

$$\sigma_{33} = E \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

У цьому випадку рівняння руху для компоненти вектора зміщень  $u_j$  набуде такого вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}. \quad (2.1.31)$$

Після підстановки закону Гука одержуємо замість попереднього рівняння наступний вираз

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t} = E \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2_3}. \quad (2.1.32)$$

Але ж це тільки одне з трьох рівнянь руху. А де ж решта, які стосуються поперечних зміщень?

Домовимось нехтувати товщиною  $d$  біоволокна: це вже не кінцева величина – товщина перетворюється в точку. А точка у континуумі, як відомо, має розмір фізично нескінченно малого об'єму - це елементарний паралелепіпед. За умовою, він як **ціле не переміщується** у напрямку, поперечному осі біоволокна, - адже коливання збуджуються тільки у поздовжньому напрямку.

Згадаємо, що в лівій частині рівняння руху (в їхньому вихідному вигляді) знаходяться величини  $a_3 dm, a_2 dm, a_1 dm$ , де  $dm = \rho dx_1 dx_2 dx_3$  - маса всього елементарного паралелепіпеда, а  $a_j$  - прискорення знов-таки всього елементарного паралелепіпеда як цілого. Коли ж ми нехтуємо зміщеннями у поперечному напрямку (але знов-таки зміщенням паралелепіпеда як цілого), то змушені прирівняти нулю і прискорення  $a_1$  та  $a_2$ . А це означає, що із трьох рівнянь Ляме залишається тільки одне – рівняння (2.1.32), що стосується зміщення  $u_3$ .

Тоді що ж – поперечні зміщення повністю відсутні? Ні, йдеться тільки про те, що поперечні зміщення елементарного паралелепіпеда як цілого обертаються на нуль. Але ж цей паралелепіпед може, не переміщуючись як ціле, деформуватись у поперечному напрямку. Отже, хоча поперечні зміщення  $u_1$  та  $u_2$

і обертаються на нуль, але поперечні деформації  $\frac{du_1}{dx_1}$  та  $\frac{du_2}{dx_2}$

відрізняються від нуля.

Шукатимемо розв'язок єдиного рівняння, яке у прийнятому наближенні (коли ми нехтуємо товщиною волокна) дозволяє описати поширення звукових хвиль у волокні (зрозуміло, що оскільки йдеться про пружне середовище, полімер ми вважаємо при цьому пружним матеріалом: інакше нам довелося б вибрати інше рівняння – див. наступний розділ).

Перепишемо, як і раніше, рівняння (2.1.32) у такому вигляді

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t} = C_E^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}, \quad (2.1.33)$$

де  $C_E$  - швидкість поширення звукової хвилі у волокні, що дорівнює

$$C_E = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.1.34)$$

Зауважимо на тому, що швидкість поширення звуку  $C_E$  відрізняється від швидкостей поздовжньої та поперечної хвиль. Неважко упевнитись безпосередньою підстановкою, що вираз

$$u_3 = u_{03} \exp[i(\omega t - kx_3)] \quad (2.1.35)$$

задовольняє рівняння (2.1.33) і отже є його розв'язком, якщо

$$\omega = C_E k. \quad (2.1.36)$$

Так і хочеться назвати даний розв'язок поздовжньою хвилею – адже зміщення, якщо глянути на вираз (2.1.35), направлені вздовж напрямку поширення хвилі. Дещо стримує від зазначеного та обставина, що швидкість цієї хвилі не дорівнює  $C_E$ .

Хвиля, яку описує вираз (2.1.36), не є поздовжньою плоскою хвилею. Дійсно, у поздовжній хвилі поперечні зміщення мають дорівнювати нулеві. Ніби й у даному випадку зазначені зміщення зникають: ми ж вважаємо, що товщина волокна дорівнює розмірові елементарного паралелепіпеда, а сам паралелепіпед рухається тільки у поздовжньому напрямку. Все це правильно, але ми не виключили з розгляду поперечних деформацій паралелепіпеда – розрахувати їх досить просто, згадавши вираз для поперечних деформацій (2.1.2), що виникають при одновісному напруженому стані – вони для вибраних координатних осей записуються в такому вигляді

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = ik\mu u_3. \quad (2.1.37)$$

Для поперечного зміщення, наприклад,  $u_2$ , маємо таке

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2. \quad (2.1.38)$$

У прийнятому наближенні ми вважаємо товщину волокна нескінченно малою величиною  $dx_2$  (ми ж знехтували товщиною волокна): відтак і зміщення  $du_2$  виявляється нескінченно малою величиною – логіка примушує нас знехтувати також і поперечним зміщенням.

У дійсності ж величина  $dx_2 \sim d$ , а значить і зміщення  $u_2$  - скінченні величини.

Підставимо у (2.1.38) вираз (2.1.37), а замість  $dx_2$  підставимо скінченне значення  $d$ . Це приводить нас до формули

$$u_2 \sim ikd\mu_3. \quad (2.1.39)$$

Згадавши, що  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , можна переписати останню формулу у вигляді

$$u_2 \sim i\mu_3 \left( \frac{d}{\lambda} \right). \quad (2.1.40)$$

Тепер усе встало на свої місця: нехтуючи товщиною волокна, ми фактично «працюємо» в нульовому наближенні за малим параметром  $\frac{d}{\lambda}$ , і в цьому наближенні ми звісно повинні вважати поперечне зміщення такими, що дорівнює нулеві. Але вже в першому наближенні за параметром  $\frac{d}{\lambda}$ , коли ми починаємо враховувати члени, які містять параметр  $\frac{d}{\lambda}$  у першому ступені (їх ще називають членами першого порядку малості щодо параметру  $\frac{d}{\lambda}$ ), ми вимушені відмовитись від твердження, що поперечне зміщення дорівнює нулеві.

Якщо забути, що поперечні зміщення відрізняються від нуля, хоча вони й малі, то це може привести до непорозумінь. Авторам згадується з цього приводу дискусії, в якій один з науковців уперто відстоював термін «поздовжня хвиля» щодо

хвилі у волокні-стрижні (ще й так можна називати біоволокно при поширенні в ньому звукових хвиль: акустичні вимірювання передбачають певний натяг волокна, так що гнучкість волокна – його характерна відмінність від стрижня, не проявляється).

У того упертюха запитали, як був розташований п'єзоелемент, що сприймав коливання, які поширювались у біоволокні. (Варто, мабуть, нагадати, що п'єзоелемент – це виготовлена з п'єзоелектричного матеріалу деталь, на поверхню якої нанесені електроди, з яких знімається заряд, що виникає при прямому п'єзоефекті).

Упертюх у відповідь намалював схему відносного розміщення волокна та п'єзоелементу (рис. 2.1.3). За його розповіддю п'єзоелемент 1 у вигляді стрижня жорстко закріплювався на важелі 2, що міг обертатися навколо вісі 3, притискаючись завдяки своїй вазі до волокна 4.

Чи буде п'єзоелемент реагувати на механічні коливання, якщо вони відбуватимуться в напрямку осі волокна? Звичайно, ні. Адже вся схема, зображена на рис. 2.1.3, розрахована якраз на поперечні зміщення.

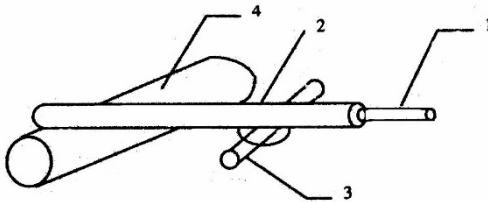


Рис. 2.1.3. Схема взаємного розташування біоволокна та п'єзоелемента при акустичних вимірюваннях

Таким чином, уже та обставина, що ми в експерименті «бачимо» акустичний сигнал, свідчить про те, що у біоволокні обов'язково виникають поперечні зміщення, саме тому хвилю у стержню назвати поздовжньою було б неправильним. Тому у цьому випадку застосовують іншу назву – «поздовжня нормальна хвиля у стрижні» або «**поздовжня хвиля Похгамера**».

Як буде деформуватися біоволокно при поширенні в ньому зазначеної хвилі? Щоб відповісти на це питання, зафіксуємо певний момент часу та подивимось, як змінюються вздовж волокна деформації (фактично ми миттєво «заморожуємо» хвилю у цей момент часу).

У нашому «замороженому» біоволокні ми виявимо періодичну послідовність областей стиску та розтягу, які

розташовані вздовж осі: кожна з цих областей займає відрізок довжиною  $\lambda/2$ . Але ж водночас із стиском у напрямку осі волокна в тій же області відбувається видовження в поперечному напрямку (коефіцієнт Пуассона), а водночас із розтягом у напрямку осі в тій самій області спостерігатиметься поперечне скорочення. Отже, при поширенні поздовжньої хвилі Похгаммера біоволокно набуває форми, зображеної на рис. 2.1.4.

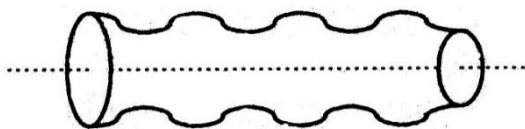


Рис. 2.1.4.  
Поздовжня хвиля  
Похгаммера

Тепер стає зрозумілим, що примушує рухатись «угорудонизу» важіль 2 (рис. 2.1.3): потрапляючи в «яму», важіль рухається униз, «пагорб» відкидає його вгору. Із тією ж частотою, з якою відбуваються коливання важеля, коливається і п'єзоелемент, за електричним сигналом якого ми й вивчаємо поздовжню хвилю Похгаммера, яка поширюється у волокні.



**Про миттєвість пружної деформації.** «Пружна деформація розвивається миттєво» - такий тезис зустрівся нам при визначенні пружної деформації. Що малося на увазі? Згадаймо, що йшлося про континуум, де роль «точки» відіграв фізичний нескінченно малий об'єм. Зазначене уявлення про точку виникло тому, що розмір цього об'єму  $\Delta x$  є характерним лінійним розміром континууму (якщо йдеться, звичайно, про однорідний континуум, бо в неоднорідному з'являються додаткові характерні лінійні розміри, що описують неоднорідність). Відповідно можна ввести і характерний час для континууму  $\tau_x = \Delta x/c$  - це час, за який пружний сигнал поширюється на відстань  $\Delta x$  ( $c$  – вже відома нам швидкість звуку).

Ми записували реологічне рівняння для «точки» континууму, в якому напруження у даній точці  $\vec{x}$  однозначно було зв'язане із деформацією у тій самій «точці», причому вважалося, що тезис «пружна деформація розвивається миттєво» стосувався саме згаданої деформації – деформації у «точці». Тепер, коли ми згадали, що означає ота «точка», то неважко і здогадатись, що означає вислів «миттєвість» деформації.

Уся справа тепер полягатиме у порівнянні часу  $\tau_k$  - характерного часу розвитку деформації із  $\tau_\sigma$  - характерним часом зростання напруження. Останню величину можна оцінити, скажімо, співвідношенням

$$\tau_\sigma \approx \frac{\Delta x}{v_\sigma},$$

де  $v_\sigma$  - швидкість зростання напруження із часом.

Повторимо: нам із самого початку відомо, що пружна деформація не може виникати миттєво – усі фізичні процеси мають скінчену швидкість. Але може скластися така ситуація, що справедливою стає нерівність  $\tau_k \ll \tau_\sigma$ . І лише тоді ми маємо право вжити термін «миттєвість», маючи на увазі попередню нерівність. Можна також говорити, що в даному випадку ми «працюємо» у нульовому наближенні щодо малого параметра  $\tau_k/\tau_\sigma$ . Термін «миттєвість» може бути вжитий і в дещо іншому розумінні. Це пов'язане із існуванням ще одного характерного

часу – а він існує для будь-якої системи – це час  $\tau_L \approx \frac{L}{c}$ , де  $L$  - розмір системи. Якщо навантаження проводиться із такою швидкістю, що виконується нерівність  $\tau_L \ll \tau_\sigma$ , то ми можемо говорити, що пружна деформація миттєво встановлюється в усій системі (зразку).

## 2.2. Пружний анізотропний континуум

**Тензор пружних жорсткостей.** Із терміном “полімер” невідривно пов’язаний вислів “полімеризація”, яким називають хімічний процес утворення полімерних ланцюгів із вихідної речовини — мономера, молекули якого містять набагато менше атомів, ніж згадані ланцюги. Провівши полімеризацію та видаливши тим чи іншим способом домішки, ми отримуємо, як правило, твердий полімер, для властивостей якого характерна ізотропія. Уже згадувалось, що однією з переваг полімеру є його здатність легко утворювати волокна та плівки. В такому вигляді полімер уже стає анізотропним матеріалом. Відповідно до цього слід підібрати й відповідний континуум.

**Анізотропним пружним середовищем** називають континуум, реологічне рівняння якого має вигляд

$$\sigma_{jk} = C_{jklm} \varepsilon_{lm} \quad (2.3.1)$$

Вираз (2.3.1) є скороченим записом дев'яти рівнянь, оскільки тензор напружень має дев'ять компонент. Права частина цих рівнянь є сумою дев'яти доданків — за кількістю компонент тензора деформації (нагадаємо, що вираз (2.3.1) передбачає підсумовування за індексами, які повторюються — а у нас таких індексів два -  $l$  та  $m$  - і “пробігають” вони значення 1, 2, 3, охоплюючи таким чином усі компоненти тензора  $\varepsilon_{lm}$ ). Запишемо, наприклад, вираз для компоненти тензора напружень  $\sigma_{12}$

$$\sigma_{12} = C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1213}\varepsilon_{13} + C_{1221}\varepsilon_{21} + C_{1222}\varepsilon_{22} + C_{1223}\varepsilon_{23} + C_{1231}\varepsilon_{31} + C_{1232}\varepsilon_{32} + C_{1233}\varepsilon_{33} \quad (2.3.2)$$

Аналогічні формули можна записати і для інших компонент тензора напружень. Кожна із згаданих формул містить дев'ять коефіцієнтів  $C_{jklm}$ . Отже, у дев'яти виразах, яких ми скорочено записали одним виразом (2.3.1), міститься 81 коефіцієнт  $C_{jklm}$ . Сукупність цих коефіцієнтів утворює матрицю — тензор четвертого рангу, який називається **тензором пружних жорсткостей**.

Звичайно, порівняно з двома пружними константами ізотропного пружного середовища кількість пружних констант (81!!) просто приголомшує. Але не треба лякатись: незалежних констант серед них значно менше. Щоб переконатись у цьому, запишемо для анізотропного пружного середовища вираз, який буде визначати густину пружної деформації. Аналогічну формулу ми вже виводили і переконалися, що її можна записати у вигляді (2.1.19). Проте вже із запису цієї формули, в яку не входять пружні константи, неважко здогадатись, що вона залишається справедливою і для анізотропного пружного середовища. Отож, підставляючи (2.3.1) у (2.1.19), одержуємо

$$A = \frac{1}{2} C_{jklm} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{jk} \quad (2.3.3)$$

Змінімо в (2.3.2)  $\varepsilon_{lm}$  та  $\varepsilon_{jk}$  місцями

$$A = \frac{1}{2} C_{lmjk} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{lm} \quad (2.3.4)$$

Прирівняємо праві частини виразів (2.3.3) та (2.3.4)

$$C_{jklm} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{jk} = C_{lmjk} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{lm} \quad (2.3.5)$$

Оскільки вираз (2.3.5) справедливий для довільних  $\varepsilon_{jk}$ , причому він справедливий тільки за умови

$$C_{jklm} = C_{lmjk} \quad (2.3.6)$$

Таким чином, при перестановці індексів  $jk \rightarrow lm$  величина компонент тензора  $C_{jklm}$  не змінюється, що означає:  $C_{1122} = C_{2211}$ ,  $C_{2312} = C_{1223}$  і т.д.

Як відомо, тензор напружень  $\sigma_{jk}$ , а значить, і тензор деформацій  $\varepsilon_{lm}$ , симетричні. Підставимо в (2.3.3) замість  $\varepsilon_{lm}$  величину  $\varepsilon_{ml}$ , що дорівнює їй

$$A = \frac{1}{2} C_{jklm} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{jk} \quad (2.3.7)$$

Густину енергії  $A$  можна переписати також у такому вигляді

$$A = \frac{1}{2} C_{jkml} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{jk} \quad (2.3.8)$$

При цьому не має ніякого значення, яку літеру поставити на місце третього індексу величини  $C_{jklm}$  - адже ми все одно проводимо підсумовування за всіма індексами.

Прирівнюючи праві частини виразів (2.3.7) та (2.3.8), отримуємо такий вираз

$$C_{jkml} = C_{jklm} \quad (2.3.9)$$

Це означає, що при перестановці індексів  $l \rightarrow m$  величини компонент тензора  $C_{jklm}$  не повинні змінюватись. Те саме відноситься і до перестановки  $j \rightarrow k$ . Таким чином, справедливі такі вирази

$$C_{1213} = C_{2113}, \quad C_{1213} = C_{2131}, \text{ тощо.}$$

Розглядаючи величину  $C_{jklm}$  як тензор, ми й використовували для компонент матриці  $C_{jklm}$  тензорні позначення, тобто визначали кожен компоненту чотирма індексами. Але компоненти матриці, незалежно від того, чи є ця

матриця тензором, чи ні, позначають звичайно двома індексами. Такі двоіндексні позначення прийнято називати матричними.

Застосуємо для компонент тензора  $C_{jklm}$  матричні позначення. Для цього змінимо спочатку позначення компонент тензора напружень на одноіндексні згідно з правилом

$$\sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2 \quad (2.3.10)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_4, \sigma_{13} = \sigma_5, \sigma_{12} = \sigma_6$$

а компоненти тензора напружень позначимо таким чином

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \quad (2.3.11)$$

$$2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4, 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5, 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6$$

Залишивши по шість компонент напружень і деформацій при переході до одноіндексних позначень, ми ще раз використали симетрію тензорів  $\sigma_{jk}$  та  $\varepsilon_{jk}$ .

Відповідно до введених одноіндексних позначень для компонент тензорів  $\sigma_{jk}$  та  $\varepsilon_{jk}$  вираз (2.3.1) переходить у таку формулу

$$\sigma_j = C_{jk} \varepsilon_k,$$

де  $j$  та  $k$  набувають значень від 1 до 6.

Із рівності (2.3.6) випливає, що

$$C_{jk} = C_{kj},$$

тобто матриця  $C_{jk}$  симетрична. Тому, незважаючи на те, що, взагалі кажучи, матриця  $C_{jk}$  має 36 компонент, незалежних серед них тільки 21. Щоб впевнитись у цьому, необхідно перерахувати всі компоненти, які розташовані по один бік головної діагоналі.

Повторимо запис для компонент тензора напружень, але вже в нових позначеннях

$$\sigma_6 = C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_3 + C_{64}\varepsilon_4 + C_{65}\varepsilon_5 + C_{66}\varepsilon_6 \quad (2.3.12)$$

Порівнюючи вирази (2.3.2) та (2.3.12), доходимо висновку, що  $C_{1211} = C_{61}, C_{1212} = C_{66}$  і т.д., тобто можна взагалі записати, що

$$C_{jklm} = C_{qr} \quad (2.3.13)$$

коли перехід до нових позначень проводиться за правилами (2.3.10) та (2.3.11), а саме  $jk \rightarrow q, lm \rightarrow r$ .

Реологічне рівняння (2.3.1) записують також у такому вигляді

$$\varepsilon_{jk} = S_{jklm} \sigma_{lm} \quad (2.3.14)$$

де  $S_{jklm}$  - **тензор пружних податливостей**.

У розгорнутому вигляді, наприклад, для компоненти  $\varepsilon_{12}$ , вираз (2.3.14) записується

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & S_{1211}\sigma_{11} + S_{1212}\sigma_{12} + S_{1213}\sigma_{13} + S_{1221}\sigma_{21} + \\ & + S_{1222}\sigma_{22} + S_{1223}\sigma_{23} + S_{1231}\sigma_{31} + S_{1232}\sigma_{32} + S_{1233}\sigma_{33} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Вводячи матричні позначення, маємо записати

$$\varepsilon_j = S_{jk} \sigma_k \quad (2.3.16)$$

що для компоненти  $\varepsilon_6$  означає наступне

$$\varepsilon_6 = S_{61}\sigma_1 + S_{62}\sigma_2 + S_{63}\sigma_3 + S_{64}\sigma_4 + S_{65}\sigma_5 + S_{66}\sigma_6 \quad (2.3.17)$$

Щоб перейти від виразу (2.3.15) до формули (2.3.17) за правилом (2.3.11), необхідно обидві частини рівності (2.3.15) помножити на двійку, після чого натомість  $2\varepsilon_{12}$  у лівій частині рівності (2.3.15) можна ставити  $\varepsilon_6$  і почати порівняння правих частин виразів (2.3.15) та (2.3.17).

Із цього порівняння випливає, що

$$\begin{aligned} 2S_{1211} &= S_{61} & 4S_{1223} &= S_{64} \\ 2S_{1222} &= S_{62} & 4S_{1213} &= S_{65} \\ 2S_{1233} &= S_{63} & 4S_{1212} &= S_{66} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

“Розгорнемо” вираз (2.3.14) для компоненти  $\varepsilon_{33}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = & S_{3311}\sigma_{11} + S_{3312}\sigma_{12} + S_{3313}\sigma_{13} + S_{3321}\sigma_{21} + \\ & + S_{3322}\sigma_{22} + S_{3323}\sigma_{23} + S_{3331}\sigma_{31} + S_{3332}\sigma_{32} + S_{3333}\sigma_{33} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Тепер уже для переходу до матричних позначень необхідності у множенні на двійку цієї рівності не виникає. Тому, записавши вираз

$$\varepsilon_3 = S_{31}\sigma_1 + S_{32}\sigma_2 + S_{33}\sigma_3 + S_{34}\sigma_4 + S_{35}\sigma_5 + S_{36}\sigma_6 \quad (2.3.20)$$

та порівнявши праві частини (2.3.19) та (2.3.20), отримуємо

$$\begin{aligned} S_{3311} &= S_{31} & 2S_{3323} &= S_{34} \\ S_{3322} &= S_{32} & 2S_{3313} &= S_{35} \\ S_{3333} &= S_{33} & 2S_{3312} &= S_{36} \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Тепер, ґрунтуючись на виразах (2.3.18) та (2.3.21), маємо змогу сформулювати загальне правило, що зв'язує компоненти тензора пружних податливостей у тензорних та матричних позначеннях

$$\begin{aligned} S_{jklm} &= S_{qr} & q &= 1, 2, 3 & r &= 1, 2, 3 \\ 2S_{jklm} &= S_{qr} & \begin{cases} q = 1, 2, 3 & r = 4, 5, 6 \\ q = 4, 5, 6 & r = 1, 2, 3 \end{cases} & & & \\ 2S_{3333} &= S_{33} & q &= 4, 5, 6 & r &= 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Очевидно, нема потреби доводити, що матриця  $S_{jk}$ , як і матриця  $C_{jk}$ , має 21 незалежну компоненту. Щоб упевнитись у цьому, достатньо повторити із виразом

$$A = \frac{1}{2} S_{jk} \sigma_k \sigma_j \quad (2.3.23)$$

все те, що ми проробили із виразом (2.3.3), щоб дійти зазначеного висновку.

Визначимо **фізичний зміст компонент матриці**  $S_{jk}$ .

Нехай усі компоненти тензора напружень, окрім  $\sigma_1$ , дорівнюють нулеві, тобто маємо лінійний напружений стан. Тоді згідно формули (2.3.12) записуємо

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 \quad (2.3.24)$$

Іншими словами, величина  $S_{11}$  дорівнює  $E_1^{-1}$  - оберненому значенню модуля Юнга, що характеризує деформацію, яка виникає при розтягу (стиску) у напрямку осі 1. Аналогічні міркування приводять до рівностей  $S_{22} = E_2^{-1}, S_{33} = E_3^{-1}$

Нехай тепер відрізняється від нуля тільки компонента  $\sigma_4$  тензора напружень. За формулою (2.3.12) маємо

$$\varepsilon_4 = S_{44}\sigma_4 \quad (2.3.25)$$

Повернувшись до тензорних позначень компонент  $\sigma_{jk}, \varepsilon_{jk}$ , попередню рівність переписуємо як

$$2\varepsilon_{23} = S_{44}\sigma_{23}.$$

Порівнюючи останній вираз із формулою (2.1.6), доходимо висновку, що величина  $S_{44}^{-1}$  дорівнює модулю зсуву в координатній площині **2-0-3**. Аналогічно величини  $S_{55}^{-1}$  та  $S_{66}^{-1}$  - це модулі зсуву в координатній площинах **1-0-3** та **1-0-2**.

Нехай тепер знову відрізняється від нуля тільки компонента  $\sigma_1$  тензора напружень, але тепер нас цікавитиме деформація в напрямку осі 2. Згідно з (2.3.12) записуємо

$$\varepsilon_2 = S_{21}\sigma_1 \quad (2.3.26)$$

З виразу (2.3.26) випливає, що  $S_{21}$  - це взятє із знаком «мінус» відношення коефіцієнта Пуассона до модуля Юнга, коли розтяг (стиск) відбувається уздовж осі 1, а поперечна деформація розглядається в напрямку осі 2. Аналогічний зміст мають такі величини  $S_{23}, S_{13}, S_{12}, S_{31}, S_{32}$ .



**Пружна симетрія орієнтованого біополімеру.** Число 21 – то є всього лише верхня границя для кількості незалежних компонент матриць  $S_{jk}$  та  $C_{jk}$ . За наявності симетрії пружних властивостей ця кількість зменшується. Нехай, наприклад, середовище має площину симетрії **1-0-2** і нехай при відображенні у цій площині координати  $x_1, x_2, x_3$  переходять у  $x_1', x_2', x_3'$ . Оскільки при відображенні у вказаній площині симетрії осі 1, 2 залишаються нерухомими, то  $x_1' = x_1$  та  $x_2' = x_2$ . Координата ж  $x_3$  змінює при перетворенні знак:  $x_3' = -x_3$ .

Сукупність величин  $C_{jklm}$  є тензором, тому за аналогією із зазначеною вже властивістю тензорів другого рангу (див. 1.3.10)) при перетворенні координат компоненти тензора змінюються згідно з такою формулою

$$C_{j'k'l'm'} = \alpha_{j'j} \alpha_{k'k} \alpha_{l'l} \alpha_{m'm} C_{jklm} \quad (2.3.27)$$

де  $\alpha_{j'j}$  – косинус кута між осями  $j'$  та  $j$  (як і раніше).

Нехай, наприклад, нас цікавить компонента  $C_{1'2'3'3'}$ . Згідно з попередньою формулою запишемо

$$C_{1'2'3'3'} = \alpha_{1'1} \alpha_{3'1}^3 C_{1111} + \alpha_{1'1} \alpha_{3'1} \alpha_{3'2}^2 C_{1122} + \alpha_{1'1} \alpha_{3'3}^3 C_{1333} + \dots \quad (2.3.28)$$

Оскільки всі косинуси (за винятком  $\alpha_{1'1} = 1$ ,  $\alpha_{2'2} = 1$ ,  $\alpha_{3'3} = -1$ ) мають обертатися на нуль, то в правій частині попереднього виразу залишиться тільки член, що містить  $C_{1333}$ , і тоді вираз (2.3.28) набуде такого вигляду

$$C_{1'2'3'3'} = \alpha_{1'1} \alpha_{3'3}^3 C_{1333} = -C_{1333} \quad (2.3.29)$$

Отже, при даному перетворенні компонента  $C_{1333}$  змінює знак. Але ж при перетворенні симетрії компоненти не повинні

змінюватись. Ця умова виконується лише тоді, коли  $C_{1333}$  дорівнює нулеві. Це стосується всіх компонент, що містять індекс 3 непарне число разів.

Таким чином, певна кількість із 21 компоненти матриці має дорівнювати нулеві, якщо існує симетрія пружних властивостей, і отже загальна кількість незалежних та відмінних від нуля компонент стане вже меншою за 21 завдяки симетрії.

Анізотропія в біополімерах виникає завдяки тому, що ланцюги розташовуються в деякому переважному напрямку. Розглянемо **ідеальну структуру, коли ланцюги розміщені паралельно один одному**. У ланцюзі ланки з'єднані хімічними в'язями. Між собою ланцюги з'єднані ван-дер-ваальсовими в'язями. Енергія розриву останніх набагато (до двох порядків) менша від енергії розриву хімічної в'язі. Відповідно модуль пружності, який одержано у поздовжньому (вздовж осі ланцюгів), набагато перевищує модулі, що отримані для будь-якого з поперечних напрямків. Між собою ж згадані поперечні модулі не відрізняються такою мірою – вони мають, в усякому разі, однаковий порядок.

У зв'язку з такими обставинами можна знехтувати різницею між поперечними модулями різних напрямків – все одно найбільший вплив на виникнення анізотропії справляє існування напрямку, за яким переважно орієнтовані ланцюги. Це приводить до необхідності «нав'язати» полімерам осьову симетрію із віссю симетрії, що співпадає із напрямком орієнтації ланцюгів.

Нехай анізотропний матеріал має вісь симетрії шостого порядку.

Щоб визначити, які з компонент тензора  $C_{jklm}$  завдяки існуванню осі симетрії повинні дорівнювати нулеві, зручним виявляється перехід до комплексних координат.

Направимо уздовж осі симетрії вісь  $z$ . Повернімо систему координат на кут  $\varphi$  відносно осі  $z$ . Тоді координати точки у «новій» системі координат  $x' y' z'$  зв'язуватимуть із координатами «старої системи координат такі співвідношення

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.3.30}$$

Для комплексного числа  $\xi = x + iy$ , що визначає радіус-вектор, розташований у площині  $xu$ , одержимо таку формулу перетворення

$$\xi' x' + iy' = \xi e^{-i\varphi} \tag{2.3.31}$$

а для спряженого комплексного числа  $\eta = x - iy$  - наступну

$$\eta' x' - iy' = \eta e^{-i\varphi} \tag{2.3.32}$$

Величини  $\xi$  та  $\eta$  є тими «новими» комплексними координатами, з якими ми збираємось «працювати».

Якщо заданий вектор  $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , то для величини  $a_\xi = a_x + ia_y$  і  $a_\eta = a_x - ia_y$  одержимо такі формули перетворення

$$\begin{aligned}a'_\xi &= a' + ia' = a_\xi e^{i\varphi} \\a'_\eta &= a' - ia' = a_\eta e^{-i\varphi} \\a'_z &= a_z\end{aligned}\tag{2.3.33}$$

Введемо такі позначення

$$\begin{aligned}a_\xi &= a_x + ia_y = a_{+1} \\a_\eta &= a_x - ia_y = a_{-1} \\a_z &= a_0\end{aligned}\tag{2.3.34}$$

Тоді формули перетворення (2.3.33) можна коротко записати таким чином

$$A'_\alpha = a_\alpha e^{i\varphi\alpha}, \tag{2.3.35}$$

де  $\alpha$  набуває значень  $-1, 0, +1$ , причому за індексом  $\alpha$  підсумовування ми не ведемо.

Якщо задано два вектори  $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  та  $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ , то справедливі такі формули перетворення

$$a'_\alpha = a_\alpha e^{i\varphi\alpha}, b'_\beta = b_\beta e^{i\varphi\alpha} \quad (2.3.36)$$

Відповідно для величин  $a_\alpha$  та  $b_\beta$  формули перетворення мають такий вигляд

$$a'_\alpha b'_\beta = a_\alpha b_\beta e^{i\varphi(\alpha+\beta)} \quad (2.3.37)$$

Дев'ять величин  $a_\alpha$  та  $b_\beta$  є компонентами другого рангу  $P_{\alpha\beta}$ , що називається **діадом**. Для прикладу запишемо деяку компоненту цього тензора, наприклад, компоненту, що відповідає значенням  $\alpha = +1, \beta = +1$

$$\begin{aligned} a_\xi b_\xi &= a_{+1} b_{+1} = (a_x + i a_y)(b_x + i b_y) = \\ &= a_x b_x - a_y b_y + i(a_x b_y + a_y b_x) \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Якщо ми маємо справу із деяким симетричним тензором другого порядку (наприклад, із тензором деформації  $\varepsilon_{ik}$ ) у «нових» координатах, то мусимо записати за аналогією з (2.3.38) такі вирази

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{+1+1} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2i\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= \varepsilon_{-1-1} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - 2i\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{\xi\eta} &= \varepsilon_{\eta\xi} = \varepsilon_{+1-1} = \varepsilon_{-1+1} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{00} \\ \varepsilon_{z\xi} &= \varepsilon_{\xi z} = \varepsilon_{0+1} = \varepsilon_{+10} = \varepsilon_{xz} + i\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{z\eta} &= \varepsilon_{\eta z} = \varepsilon_{0-1} = \varepsilon_{-10} = \varepsilon_{xz} - i\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

а за аналогією з (2.3.37), відповідно, таку формулу

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} e^{i\varphi(\alpha+\beta)} \quad (2.3.40)$$

Проводячи аналогічні міркування для тензора четвертого рангу  $C_{ijklm}$  одержимо

$$C'_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{i\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \quad (2.3.41)$$

У попередніх формулах за усіма грецькими літерами, що повторюються, підсумовування не проводимо. Згідно заданому типу симетрії властивості матеріалу не повинні змінюватись при поворотах на кут  $2\pi/6$ . Це означає, що при  $\varphi = 2\pi/6$  формула (2.3.41) повинна перетворитись на таку тотожність

$$C'_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.3.42)$$

що може бути виконано лише тоді, коли індекс  $\xi$ , що відповідає  $+1$ , та індекс  $\eta$ , що відповідає  $-1$ , зустрічаються однакову кількість разів. Отже, компонентами тензора пружних жорсткостей осесиметричного матеріалу, що відрізняються від нуля, є такі величини

$$C_{zzzz}, C_{\xi\eta\xi\eta}, C_{\xi\xi\eta\eta}, C_{\xi\eta zz}, C_{\xi z\eta z} \quad (2.3.43)$$

Звернімо увагу на те, що коли  $\xi$  та  $\eta$  зустрічаються однакову кількість разів, то умова задовольняється при будь-якому куті  $\varphi$ . Отже, пружні властивості матеріалу не змінюються не тільки при поворотах на  $2\pi/6$ , як того вимагає шостий порядок осі симетрії, а й при будь-яких поворотах. Це є вияв відомої у кристалографії **теорема Германа**: якщо тензор рангу  $r$  має вісь симетрії порядку  $N$  та  $r < N$ , то цей тензор має і вісь симетрії нескінченного порядку.

А тепер згадаємо нашу «перепалку» щодо осі симетрії шостого порядку. Тепер стає зрозумілим, чому, вибравши для

полімера осьову симетрію, ми повели розмову про вісь шостого порядку - теорема Германа все поставила на свої місця.

Запишемо густину пружної деформації у «нових» координатах

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{1}{2} C_{zzzz} \varepsilon_{zz}^2 + \frac{1}{2} (C_{\xi\eta\xi\eta} + C_{\eta\xi\xi\eta} + \dots) \varepsilon_{\xi\eta} \varepsilon_{\xi\eta} + \\
 & + \frac{1}{2} (C_{\xi\xi\eta\eta} + C_{\eta\eta\xi\xi}) \varepsilon_{\xi\xi} \varepsilon_{\eta\eta} + \frac{1}{2} (C_{\xi\eta zz} + C_{\eta\xi zz} + \dots) \varepsilon_{\xi\eta} \varepsilon_{zz} + \\
 & + \frac{1}{2} (C_{\xi z \eta z} + C_{z \xi \eta z} + \dots) \varepsilon_{\xi z} \varepsilon_{\eta z}
 \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

У дужках правої частини попередньої формули поміщено суми однакових доданків, які одержують перестановкою індексів: так, перша сума містить чотири доданки, остання – вісім. Тому формулу (2.3.44) можна переписати в такому вигляді

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{1}{2} C_{zzzz} \varepsilon_{zz}^2 + 2C_{\xi\eta\xi\eta} \varepsilon_{\xi\eta} \varepsilon_{\xi\eta} + \\
 & + C_{\xi\xi\eta\eta} \varepsilon_{\xi\xi} \varepsilon_{\eta\eta} + 2C_{\xi\eta zz} \varepsilon_{\xi\eta} \varepsilon_{zz} + 4C_{\xi z \eta z} \varepsilon_{\xi z} \varepsilon_{\eta z}
 \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Підставимо у (2.3.45) формули (2.3.39)

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{1}{2} C_{zzzz} \varepsilon_{zz}^2 + 2C_{\xi\eta\xi\eta} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 + \\
 & + C_{\xi\xi\eta\eta} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2i\varepsilon_{xy})(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - 2i\varepsilon_{xy}) + \\
 & + 2C_{\xi\eta zz} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 4C_{\xi z \eta z} (\varepsilon_{xz} + i\varepsilon_{yz})(\varepsilon_{xy} - i\varepsilon_{yz})
 \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Тепер, коли ми частково (тільки для компонент тензора деформації) повернулися до «старих» координат, з'являється можливість записати компоненти тензора  $C_{jklm}$ , які відрізняються від нуля, у «старих» координатах, не займаючись зворотнім переходом від «нових» до «старих» - досить тільки згадати, що у

виразі для величини  $A$  у «старих» координатах  $\varepsilon_{xx}^2$  домножується на  $\frac{1}{2}C_{11}$ , а добуток  $\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}$  - на множник  $C_{12}$ , і так далі. Після цього, дивлячись, які множники є при відповідних добутках у формулі (2.3.46), записуємо

$$\frac{1}{2}C_{11} = 2C_{\xi\eta\xi\eta} + C_{\xi\xi\eta\eta}$$

$$C_{12} = 4C_{\xi\eta\xi\eta} - 2C_{\xi\xi\eta\eta}$$

$$C_{44} = 2C_{\xi z\eta z} = C_{55}$$

$$C_{13} = 2C_{\xi\eta z z} = C_{23}$$

$$C_{66} = 2C_{\xi\xi\eta\eta}$$

Порівнявши між собою першу і п'яту із записаних рівностей, одержуємо:

$$C_{66} = \frac{1}{2}(C_{xxxx} - C_{xxyy}) = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$

Отже, компонент тензора  $C_{jklm}$ , що відрізняються від нуля, виявляється п'ять -  $C_{11}, C_{12}, C_{33}, C_{44}, C_{13}$ .

Підкреслимо ще раз, що система координат  $x, y, z$  «прив'язана» до осі симетрії, якою вважається вісь  $z$ .

Таким чином, **матриця пружних жорсткостей у випадку осьової симетрії** набуде такого вигляду

$$C_{jk} = \left\{ \begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{array} \right\} \quad (2.3.47)$$

Для **матриці пружних податливостей** відповідно одержимо таке

$$S_{jk} = \left\{ \begin{array}{cccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{11} - S_{12}) \end{array} \right\} \quad (2.3.48)$$

**Фізична і лабораторна система координат.** Назвемо **фізичною** таку декартову **систему координат**, в якій одна із осей перпендикулярна до деякої площини пружної симетрії. Осі фізичної системи назвемо **основними**. Компоненти тензорів  $C_{jklm}$  та  $S_{jklm}$  задані у фізичній системі, також називають основними.

Експеримент, що ставить на меті вивчення пружних властивостей, полягає у визначенні основних компонент тензорів  $C_{jklm}$  та  $S_{jklm}$ . Умови експерименту (форма зразка, характер навантаження тощо) диктують вибір так званої **лабораторної системи координат**, що загалом відрізняється від фізичної. Наприклад, ми випробуємо зразок призматичної форми на розтяг, а зразок вирізано таким чином, що його вісь не збігається ні з однією із основних осей. При цьому ми вимушені при проведенні



експерименту користуватись лабораторною системою координат, чиї осі були б направлені перпендикулярно до граней зразка, бо саме в цій системі задано напруження, що розтягує зразок.

Отже виникає задача обчислення основних констант пружності (жорсткостей, податливостей) за даними експерименту. Розв'язується ця задача за допомогою формули (2.3.27) для пружних жорсткостей або за допомогою аналогічної формули для пружних податливостей.

Положення лабораторної («штрихованої») системи координат відносно фізичної («нештрихованої») визначається матрицею косинусів  $\alpha_{jj'}$ . Ця матриця має, взагалі кажучи, дев'ять компонент, але між ними існують відомі залежності

$$\begin{aligned} \alpha_{1'1}^2 + \alpha_{1'2}^2 + \alpha_{1'3}^2 &= 1 & \alpha_{1'1}\alpha_{1'2} + \alpha_{1'2}\alpha_{2'2} + \alpha_{1'3}\alpha_{3'2} &= 0 \\ \alpha_{2'1}^2 + \alpha_{2'2}^2 + \alpha_{2'3}^2 &= 1 & \alpha_{2'1}\alpha_{1'3} + \alpha_{2'2}\alpha_{2'3} + \alpha_{2'3}\alpha_{3'3} &= 0 \\ \alpha_{3'1}^2 + \alpha_{3'2}^2 + \alpha_{3'3}^2 &= 1 & \alpha_{1'1}\alpha_{1'3} + \alpha_{1'2}\alpha_{2'3} + \alpha_{1'3}\alpha_{3'3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Отже, із дев'яти косинусів  $\alpha_{jj'}$  незалежними є лише три. Звичайно, можна задати три якісь кути між осями «лабораторної» та «фізичної» координатних систем, а косинуси інших кутів визначити із системи рівнянь (2.3.49). Замість цього найчастіше величини  $\alpha_{jj'}$  виражають через **ейлерові кути**.

Позначимо через  $ON$  лінію перетину площин  $X'OY$  та  $XOY'$  (рис. 2.3.1).

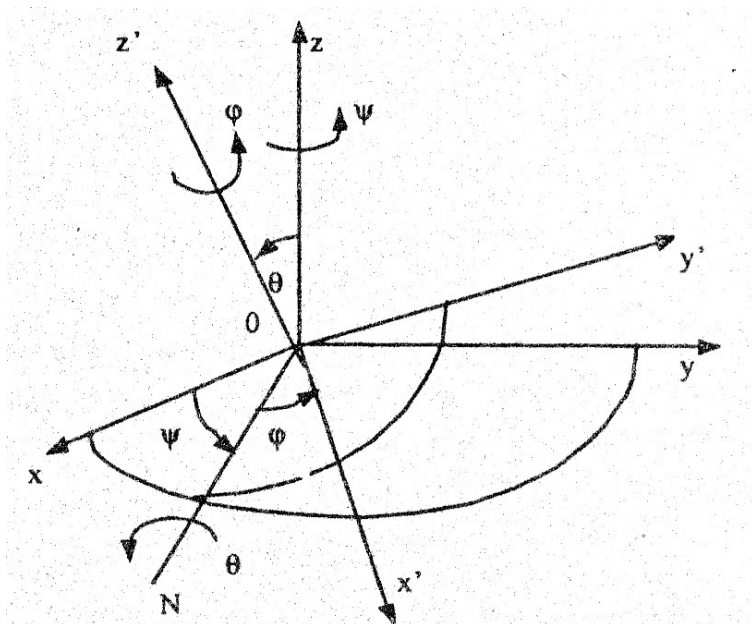


Рис. 2.3.1. Ейлерові кути

Перший ейлерів кут (**прецесія**  $\psi$ ) утворений у площині  $XOY$  лінією  $ON$  та віссю  $OX$ . Другий (**чисте обертання**  $\varphi$ ) розташований у площині  $X'OX'$  і відраховується від лінії  $ON$  до осі  $OX'$ . Третій кут (**нутація**  $\theta$ ) відраховується в площині  $ZOZ'$  від осі  $OZ$  до осі  $OZ'$ .

Компоненти матриці  $\alpha_{jj}$  виражаються через ейлерові кути за допомогою таких співвідношень

$$\begin{aligned}
\alpha_{1'1} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \\
\alpha_{1'2} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \\
\alpha_{1'3} &= \sin \varphi \sin \theta \\
\alpha_{2'1} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\
\alpha_{2'2} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \\
\alpha_{2'3} &= \cos \varphi \sin \varphi \\
\alpha_{3'1} &= \sin \varphi \sin \theta \\
\alpha_{3'2} &= -\cos \psi \sin \theta \\
\alpha_{3'3} &= \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.3.50}$$

**Вправа 17:** компоненти тензора пружних податливостей для орієнтованої біополімерної плівки.

Зразок призматичної форми вирізано з орієнтованої біополімерної плівки під кутом  $\theta$  до напрямку орієнтації плівки. Необхідно записати співвідношення, що зв'язують компоненти тензора пружної податливості у лабораторній та фізичній системах координат.

#### **Розв'язок.**

Проведемо вісь 3 у напрямку орієнтації біоплівки, вісь  $\ell$  - перпендикулярно до поверхні плівки. Такий же напрямок матиме й вісь 1' для зразка, вісь 3' направимо уздовж поздовжньої осі зразка. Як і раніше, «нештриховані» осі відповідають фізичній, «штриховані» - лабораторній системі координат.

Матриця косинусів  $\alpha_{j'j}$  може бути записана у такому вигляді

$$\alpha_{j'j} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{Bmatrix} \tag{2.3.51}$$

Зважаючи на осьову симетрію матеріалу, перерахуємо, використовуючи тензорні позначення, усі компоненти  $S_{jklm}$ , що відрізняються від нуля

$$\begin{aligned} S_{1111} &= S_{2222}, S_{3333}, S_{1133} = S_{3311}, S_{2233} = S_{3322} = S_{1133}, \\ S_{1122} &= S_{2211}, S_{3232} = S_{2323} = S_{3223} = S_{2332} = S_{3131}, \\ S_{1313} &= S_{3113} = S_{1331} = S_{3131}, \\ S_{1212} &= S_{2121} = S_{2112} = S_{1221} = 2(S_{1111} - S_{1122}) \end{aligned}$$

Компоненти тензора пружних податливостей при перетворенні координат змінюються за формулою, яка повторює вираз (2.3.27), з тією різницею, що величини  $C_{jklm}$  в ньому замінено компонентами  $S_{jklm}$ . На цій підставі запишемо для компонентів тензора пружної податливості в лабораторній системі координат

$$S_{1'1'1'1'} = S_{1'1'1'1'1'1'} = S_{1111} \quad (2.3.52)$$

$$\begin{aligned} S_{2'2'} &= S_{2'2'2'2'} = 2\alpha_{2'2}^2 \alpha_{2'3}^2 S_{2233} + 4\alpha_{2'2}^2 \alpha_{2'3}^2 S_{2323} + \\ &+ \alpha_{2'3}^4 S_{3333} + \alpha_{2'2}^4 S_{2222} = 2S_{12} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &+ S_{44} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{33} \sin^4 \theta + S_{11} \cos^4 \theta \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

$$\begin{aligned} S_{3'3'} &= S_{3'3'3'3'} = 2\alpha_{3'2}^2 \alpha_{3'3}^2 S_{2233} + \alpha_{3'3}^4 S_{3333} + \alpha_{3'2}^4 S_{2222} = \\ &= 2S_{13} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{44} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{33} \cos^4 \theta + S_{11} \sin^4 \theta \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

$$\begin{aligned}
S_{2'3'} &= S_{2'2'3'3'} = 2\alpha_{2'2}^2\alpha_{3'3}^2S_{2233} + \alpha_{2'3}^2\alpha_{3'2}^2S_{3322} + \\
&+ \alpha_{2'2}\alpha_{2'3}\alpha_{3'2}\alpha_{3'3}S_{2323} + \alpha_{2'3}\alpha_{2'2}\alpha_{3'3}\alpha_{3'2}S_{3232} + \\
&+ \alpha_{2'2}\alpha_{2'3}\alpha_{3'3}\alpha_{3'2}S_{2332} + \alpha_{2'2}^2\alpha_{3'2}^2S_{2222} + \alpha_{2'3}\alpha_{2'2}\alpha_{3'2}\alpha_{3'3}S_{3223} + \\
&+ \alpha_{2'3}^2\alpha_{3'3}^2S_{3333} = S_{13}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - \\
&-(S_{44}\cos^2\theta\sin^2\theta + S_{33}\cos^2\theta\sin^2\theta + S_{11}\cos^2\theta\sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{2.3.55}$$

$$\begin{aligned}
S_{4'4'} &= S_{2'3'2'3'} = 4(\alpha_{2'2}\alpha_{3'2}\alpha_{2'3}\alpha_{3'3}S_{2233} + \alpha_{2'3}\alpha_{3'3}\alpha_{2'2}\alpha_{3'2}S_{3322} + \\
&+ \alpha_{2'2}\alpha_{3'3}\alpha_{2'2}\alpha_{3'3}S_{2323} + \alpha_{2'3}\alpha_{3'2}\alpha_{2'3}\alpha_{3'2}S_{3232} + \\
&+ \alpha_{2'2}\alpha_{3'3}\alpha_{2'3}\alpha_{3'2}S_{2332} + \alpha_{2'3}\alpha_{3'2}\alpha_{2'2}\alpha_{3'3}S_{3223} + \alpha_{2'3}^2\alpha_{3'3}^2S_{3333} + \\
&+ \alpha_{2'2}^2\alpha_{3'2}^2S_{2222}) = 4[-2S_{13}\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{44}(\cos^4\theta - \\
&-2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta) + S_{33}\cos^2\theta\sin^2\theta + S_{11}\cos^2\theta\sin^2\theta]
\end{aligned} \tag{2.3.56}$$

$$\begin{aligned}
S_{5'5} &= 4S_{1'3'1'3'} = 4(\alpha_{1'1}^2\alpha_{3'3}^2S_{1313} + \alpha_{1'1}^2\alpha_{3'2}^2S_{1212}) = \\
&= S_{44}\cos^2\theta + S_{66}\sin^2\theta = S_{44}\cos^2\theta + 2(S_{11} - S_{12})\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.3.57}$$

$$\begin{aligned}
S_{6'6'} &= 4S_{1'2'1'2'} = 4(\alpha_{1'1}^2\alpha_{2'3}^2S_{1313} + \alpha_{1'1}^2\alpha_{2'2}^2S_{1212}) = \\
&= S_{66}\cos^2\theta + S_{44}\sin^2\theta = S_{44}\sin^2\theta + 2(S_{11} - S_{12})\cos^2\theta
\end{aligned} \tag{2.3.58}$$

$$\begin{aligned}
S_{1'3'} &= S_{1'1'3'3'} = \alpha_{1'1}^2\alpha_{3'3}^2S_{1133} + \alpha_{1'1}^2\alpha_{3'2}^2S_{1122} = \\
&= S_{13}\cos^2\theta + S_{12}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.3.59}$$

$$\begin{aligned}
S_{1'2'} &= S_{1'1'2'2'} = \alpha_{1'1}^2\alpha_{2'2}^2S_{1122} + \alpha_{1'1}^2\alpha_{3'3}^2S_{1133} = \\
&= S_{12}\cos^2\theta + S_{13}\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{2.3.60}$$

Вираз  $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta$ , що входить у формули, можна записати у такому вигляді

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = \frac{1}{2}[(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2]$$

Розкриваючи дужки, одержимо

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta) \quad (2.3.61)$$

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = 1 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

Із врахуванням останньої формули вирази (2.3.55) та (2.3.56) можна записати

$$S_{2'3'} = (S_{11} + S_{33} - 2S_{13} - S_{44})\sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{13} \quad (2.3.62)$$

$$S_{4'4'} = 4(S_{11} + S_{33} - S_{13} - S_{44})\sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{44} \quad (2.3.63)$$

Виконана вправа дозволяє прослідкувати, як при переході до лабораторної системи втрачається той простий вигляд, що був властивий тензору пружних податливостей у фізичній системі координат. Подивіться: порушуються рівності, які справджувалися у фізичній системі:  $S_{4'4'}$  уже не дорівнює  $S_{5'5'}$ , а  $S_{1'1'}$  також не дорівнює  $S_{2'2'}$ . Не дорівнюють один одному і коефіцієнти  $S_{2'3'}$  та  $S_{1'3'}$ . Мало того, з'являються нові коефіцієнти, які у фізичній системі дорівнювали нулю, наприклад,  $S_{3'5'} = 2S_{3'3'1'3'}$ ,  $S_{3'4'} = 2S_{3'3'2'3'}$  тощо (ми навмисно привели поряд із матричними і тензорні позначення, бо тоді й без розрахунків видно, що ці коефіцієнти не дорівнюють нулеві).

**Простий розтяг анізотропного біоматеріалу.** Знову повернімося до найпоширеного (саме тому ми й звертаємось і ще неодноразово звертатимемось до нього) типу механічних випробувань – простого розтягу. Розтягуюча сила  $F$  направлена вздовж поздовжньої осі призматичного зразка, яку позначатимемо через  $Z$ . Припустимо, як і раніше, що зусилля, які діють на нижній кінець зразка, і реакції, які діють на верхній кінець, розподілені по перерізу площею  $S$  рівномірно. Тоді, як вже відомо, рівняння рівноваги та умови на поверхні задовольняє тензор напруження, всі компоненти якого дорівнюють нулеві за винятком такої компоненти

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{S} = \sigma_3 \quad (2.3.64)$$

До речі, згадаймо, що до цього висновку ми прийшли, не обмежуючи себе певним типом середовища, отож, для анізотропного середовища той висновок також зберігає свою силу.

Скориставшись виразом (2.3.16), запишемо формули для компонент тензора деформації

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{13}\sigma_3 & 2\varepsilon_{23} &= S_{43}\sigma_3 \\ \varepsilon_{22} &= S_{23}\sigma_3 & 2\varepsilon_{13} &= S_{53}\sigma_3 \\ \varepsilon_{33} &= S_{33}\sigma_3 & 2\varepsilon_{12} &= S_{63}\sigma_3 \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

Згадавши, як записуються компоненти тензора деформації через компоненти тензора зміщення, переписуємо попередню систему рівностей у такому вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= S_{13}\sigma_3 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= S_{43}\sigma_3 \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= S_{23}\sigma_3 & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= S_{53}\sigma_3 \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= S_{33}\sigma_3 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= S_{63}\sigma_3
\end{aligned} \tag{2.3.66}$$

Виходячи із лівої трійки рівнянь (2.3.66), доходимо висновку, що розв'язок системи (2.3.66) матиме такий вигляд

$$\begin{aligned}
u_1 &= S_{13}\sigma_3 x_1 + f_1(x_2, x_3) \\
u_2 &= S_{23}\sigma_3 x_2 + f_2(x_1, x_3) \\
u_3 &= S_{33}\sigma_3 x_3 + f_3(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{2.3.67}$$

де  $f_1, f_2, f_3$  - деякі поки що невідомі функції відповідних змінних.

Підставивши (2.3.67) у праву трійку рівнянь (2.3.66), одержуємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= S_{43}\sigma_3 \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= S_{53}\sigma_3 \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= S_{63}\sigma_3
\end{aligned} \tag{2.3.68}$$

Шукатимемо розв'язок системи (2.3.68) у такому вигляді

$$\begin{aligned}
f_1 &= m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + m_{10} \\
f_2 &= m_{21}x_1 + m_{23}x_3 + m_{20} \\
f_3 &= m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{30}
\end{aligned} \tag{2.3.69}$$

Нехай початок координат лежить у верхньому перерізі зразка. Вважатимемо елементарний паралелепіпед, що прилягає



до початку координат, закріплений жорстко. Це означає, по-перше, що він не зміщується як ціле, тобто

$$u_1(0,0,0) = u_2(0,0,0) = u_3(0,0,0) = 0, \quad (2.3.70)$$

а, по-друге, що в площині, перпендикулярній до осі  $Z$ , він не обертається як ціле (див. п. 1.4, де розглядалось обертання паралелепіпеда), тобто

$$\frac{\partial u_1(0,0,0)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(0,0,0)}{\partial x_1} = 0 \quad (2.3.71)$$

По-третє, жорстке закріплення паралелепіпеда поблизу початку координат передбачає незмінний (паралельний осі  $Z$ ) нахил граней згаданого паралелепіпеда, що приводить до такого співвідношення

$$\frac{\partial u_1(0,0,0)}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2(0,0,0)}{\partial x_3} = 0 \quad (2.3.72)$$

Підставляючи (2.3.70) у (2.3.69), одержуємо

$$m_{10} = m_{20} = m_{30} = 0 \quad (2.3.73)$$

Відповідно співвідношення (2.3.72) приводить до таких рівностей

$$m_{13} = m_{23} = 0 \quad (2.3.74)$$

І нарешті, згідно формули (2.3.71) отримуємо

$$m_{12} = m_{21} \quad (2.3.75)$$

Останнє із правої трійки рівняння (2.3.66) дозволяє записати

$$m_{12} = m_{21} = \frac{1}{2} S_{36} \quad (2.3.76)$$

Враховуючи, що

$$m_{31} = \frac{\partial u_3(0,0,0)}{\partial x_1} \quad m_{32} = \frac{\partial u_3(0,0,0)}{\partial x_2}$$

Із відповідних рівнянь (2.3.68) одержуємо

$$m_{31} = S_{53}m_{32} = S_{43} \quad (2.3.77)$$

Тоді формули (2.3.67) набувають такого вигляду

$$u_1 = (S_{13}x_1 + \frac{1}{2}S_{63}x_2)\sigma_3$$

$$u_2 = (\frac{1}{2}S_{63}x_1 + S_{23}x_2)\sigma_3 \quad (2.3.78)$$

$$u_3 = (S_{35}x_1 + S_{34}x_2 + S_{33}x_3)\sigma_3$$

Як і формули (2.3.64), вирази (2.3.78) також є **розв'язком задачі про простий розтяг анізотропного зразка біополімеру**.

Як прийнято казати, формула (2.3.64) – це розв'язок задачі «у напруженнях». Формули ж (2.3.78) дають розв'язок цієї ж задачі «у зміщеннях». Фактично ж це є розв'язок рівняння рівноваги для анізотропного середовища.

Перші дві рівності системи (2.3.78) виражають вже відомий результат: зразок при поздовжньому розтягу скорочується в поперечному напрямку. Ми чекали, опираючись на свій «ізотропний» досвід, що третє рівняння описуватиме тільки поздовжнє видовження. Але саме тут на нас чекає несподіванка! Якщо розглядати точку кінцевого поперечного перерізу, що лежить на осі зразка, і для якої  $x_1 = x_2 = 0$ , то її зміщення таке ж, як і для ізотропного бруска

$$u_3(0,0,l) = S_{33}l_0\sigma_{33} \quad (2.3.79)$$

де  $l_0$  - довжина зразка.

Деформація видовження дорівнює  $\frac{u_3}{l_0}$ , а

$$S_{33} = \frac{1}{E_3},$$

де  $E_3$  - модуль Юнга у напрямку осі 3.

Отже, вираз (2.3.79) повністю збігається із відомим законом Гука, з яким ми зустрічались, вивчаючи ізотропне пружне середовище.

Але у третьому рівняння (2.3.78) (окрім доданка  $\sigma_3 S_{33} x_3$ ) є ще ж два доданки:  $\sigma_3 S_{34} x_2$  та  $\sigma_3 S_{35} x_1$ . А це означає, що зміщення точок кінцевого перерізу  $x_3 = \ell_0$  буде різним і таким, що не дорівнює зміщенню точки, що лежать на осі. Ось де виявила себе анізотропія: площа перерізу вже не залишається після деформації перпендикулярною до осі зразка (що було для ізотропного стрижня) – як це впливає із третьої формули (2.3.78), ця площа після деформації відхиляється від свого початкового положення до перпендикулярного до осі (рис. 2.3.2). Кути, які утворює ця площа із осями 1 і 2, дорівнюють відповідно  $2\varepsilon_{13} = S_{53}\sigma_3$ ;  $2\varepsilon_{23} = S_{43}\sigma_3$ .

Мало того, перекошується у горизонтальній площині **1-0-2** і поперечний прямокутний переріз стрижня, чого не було для ізотропного стрижня. Відповідний кут «перекосу» виявляється таким, що дорівнює

$$2\varepsilon_{12} = S_{63}\sigma_3.$$

Як ми бачимо, всі ці «нахили» та «перекоси» спричинені коефіцієнтами  $S_{53}, S_{43}$  та  $S_{63}$ .

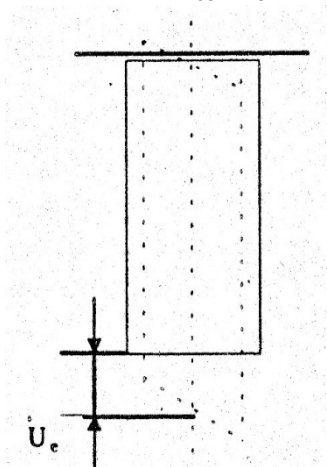


Рис. 2.3.2. Простий розтяг анізотропного стрижня

Отже, увага(!), пам'ятайте, як вирізано зразок із орієнтованої біоплівки: якщо вісь зразка збігається із напрямком орієнтації – вас ніякі сюрпризи не чекають, адже для цього випадку компоненти  $S_{53}, S_{43}$  та  $S_{63}$  (що саме й «мутять воду») обертаються на нуль (згадаємо, що для біополімерів прийнято наближення осьової симетрії). Але стережіться: якщо ви вирізали зразок якимось по-іншому, то тут і почнуться всілякі «вихиласи», які спричинені анізотропією – осі зразка вже не відповідають фізичній системі, а в довільній системі, незважаючи на осьову симетрію, згадані компоненти тензора пружних податливостей вже не дорівнюють нулю. От і матимете і нахили, і перекоси в зразку при простому розтягові.

### **Дисперсійне рівняння для орієнтованих біополімерів.**

Нами раніше вже розглядалися пружні хвилі в ізотропному середовищі. Що ж нового внесе анізотропія пружних властивостей у поширення хвиль?

Звернімося до формул (2.1.32) та (2.1.33) і згадаймо простий спосіб, яким ми їх одержували: достатньо лише підставити якусь із формул (2.1.29) – (2.1.31) у відповідне рівняння – одне з трьох (2.1.26) – (2.1.28) – і ми приходимо до формул (2.1.32) та (2.1.33), які і називаються **дисперсійними рівняннями**.

Отож, поставимо перед собою завдання: отримати дисперсійні рівняння (тобто залежності  $\omega$  від  $k$ ) для анізотропного середовища.

Передусім нам потрібне динамічне рівняння для анізотропного середовища. Реологічне рівняння цього середовища у нашому розпорядженні – це вираз (2.3.1). Згідно відомому правилу для одержання динамічного рівняння слід підставити реологічне рівняння (2.3.1) у рівняння руху суцільного середовища (1.5.13). Виконуючи цю підстановку, отримаємо

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = C_{jklm} u_{klm} \quad (2.3.80)$$

де позначено

$$u_{klm} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial x_m} \quad (2.3.81)$$

Об'ємними силами при цьому нехтуватимемо.

Розв'язок рівнянь (2.3.80) шукаємо у вигляді плоскої хвилі (2.1.36). Саме вираз (2.1.36) і підставлятимемо у (2.3.80) для отримання дисперсійних рівнянь анізотропного середовища (згадайте, саме таким способом були одержані аналогічні рівняння для ізотропного середовища).

Зважаючи на те, що диференціювання  $u_j$  за часом тотожне множенню на  $i\omega$ , а диференціювання за  $x_i$  - множенню на  $-ik_\ell$ , після підстановки (2.1.36) у (2.3.80) одержуємо

$$\rho\omega^2 u_j = C_{jklm} K_k K_l u_m \quad (2.3.82)$$

Використовуючи тотожність  $u_j = \delta_{jm} u_m$ , переписуємо попередній вираз у такому вигляді

$$(-\rho\omega^2 \delta_{jm} + C_{jklm} K_k K_l) u_m = 0 \quad (2.3.83)$$

Формула (2.3.83) відповідає системі трьох однорідних рівнянь першого ступеня відносно невідомих  $u_1, u_2, u_3$ . Відомо, що ця система має розв'язок, який відрізняється від нуля тільки тоді, коли виконується така умова

$$\left| C_{jklm} K_k K_l - \rho\omega^2 \delta_{jm} \right| = 0 \quad (2.3.84)$$

Даний вираз є детермінантом матриці, компоненти якої визначаються виразом, що знаходиться між вертикальними дужками.

Всього у нас три динамічних рівняння. Відповідно і детермінант має три рядки. Відтак, рівняння (2.3.84) є кубічним відносно  $\omega^2$ . Три кореня цього рівняння і три залежності  $\omega^2$  від

хвильового вектора  $k$  являють собою дисперсійні рівняння, які ми шукаємо.

Як раніше було домовлено, будемо приписувати твердим полімерам осьову симетрію.

Направимо вісь 3 уздовж осі симетрії. У даному випадку осі  $x$  та  $y$  можна направити довільно: їхній напрямок не впливає на величину компонент  $C_{jklm}$  - то ж вважатимемо, що вектор  $k$  лежить у площині **1-0-3**

$$K_2 = 0 \quad (2.3.85)$$

Введемо матрицю

$$b_{jm} = C_{jklm} K_k K_l / \rho \quad (2.3.86)$$

та обчислимо її компоненти, пам'ятаючи про осьову симетрію нашого матеріалу.

Вираз (2.3.85) приводить нас до думки, що компоненти матриці  $b_{jm}$ , які мають один індекс «2», мають обертатись на нуль. Дійсно, нехай, наприклад,  $m$  (або  $j$  - немає різниці) дорівнює 2. Як ми вже знаємо, у випадку осьової симетрії серед індексів  $k$  або  $\ell$  величини  $C_{jklm}$  ця двійка має повторитися, інакше згадана величина взагалі дорівнюватиме нулеві. А це означає, що у відповідному члені  $C_{jklm} K_k K_\ell$  присутній множник  $K_2$ , який ми прирівняли до нуля. Отже, компоненти  $b_{jm}$  із одним індексом «2» дорівнюють нулеві, і введена матриця має вигляд

$$b_{jm} = \begin{Bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{13} & 0 & b_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.3.87)$$

із такими значеннями компонент

$$b_{11} = (C_{1111} K_1^2 + C_{1313} K_3^2) / \rho \quad (2.3.88)$$

$$b_{22} = (C_{1212} K_1^2 + C_{1313} K_3^2) / \rho \quad (2.3.89)$$

$$b_{33} = (C_{1313}K_1^2 + C_{3333}K_3^2) / \rho \quad (2.3.90)$$

$$b_{13} = (C_{1133} + C_{1133})K_1K_3 / \rho \quad (2.3.91)$$

Рівність (2.3.84) для даного випадку набуває такої форми

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \omega^2 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} - \omega^2 & 0 \\ b_{13} & 0 & b_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3.92)$$

Корені рівняння (2.3.92) такі

$$\omega_1^2 = b_{22} \quad (2.3.93)$$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{b_{11} + b_{33}}{2} \pm \sqrt{(b_{11} + b_{33})^2 + 4b_{13}^2} \right) \quad (2.3.94)$$

Це і є **дисперсійні рівняння для орієнтованого біополімеру**, які і треба було знайти.

## Література

1. Булавін Л.А., Забашта Ю.Ф. Фізична механіка полімерів. К.: ВКУ, 1998.
1. В.Д. Будаєв, Я.О. Жук Механіка суцільних середовищ. Миколаїв : Іліон. 2011. 160 с.
2. Parke, W. C. (2020). Mechanical Aspects of Biosystems. In *Biophysics: A Student's Guide to the Physics of the Life Sciences and Medicine* (pp. 27-76). Cham: Springer International Publishing.
3. Huston, R. L. (2013). *Fundamentals of biomechanics* (Vol. 377). Boca Raton, FL:: CRC Press.
4. Wiggins, C. H. (2001). Biopolymer mechanics: Stability, dynamics, and statistics. *Mathematical methods in the applied sciences*, 24(17-18), 1325-1335.