

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
фізичний факультет

Вибрані питання фізики лазерів

Київ-2017

Вибрані питання фізики лазерів. Посібник для студентів спеціальності «Лазерна фізика та оптоелектронна техніка» та спеціалізації «фотоніка»

Укладач к.ф.-м.н., доц. Ящук Василь Павлович. – Київ: Вид-во Київ. нац. університету ім. Тараса Шевченка, 2003. - 54с.

Укладач	В.П.Ящук, канд.ф.-м.н.,доцент кафедри оптики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Рецензенти	І.М.Дмитрук, докт.ф.-м.н., професор кафедри експериментальної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка О.В. Стронський, докт.ф.-м.н., завідувач відділом опто-електронних приладів інституту напівпровідників НАН України

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри оптики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 30 березня 2017р., протокол № 12.

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
(протокол №__ від 29 квітня 2017)

ВСТУП

Фізика лазерів вивчає процеси і оптичні пристрої, дія яких ґрунтується на ефекті вимушеного випромінювання. Такими пристроями є різноманітні лазери і лазерні підсилювачі. Різні лазери суттєво відрізняються фізичними явищами і ефектами, які створюють умови і регулюють прояви цього основного ефекту. Фізика лазерів виникла на основі багатьох наук: квантової механіки, атомної і молекулярної фізики, фізичної оптики, фізики твердого тіла.

Створенню першого лазера передувала тривалі пошуки підходящих активних середовищ і методів створення в них інверсії, існування якої є необхідною умовою режиму вимушеного випромінювання. Іншою принциповою проблемою були пошуки належних оптичних резонаторів. Але найважливішим досягненням було експериментальне підтвердження самої можливості отримання вимушеного випромінювання (Басов, Прохоров, Таунс – 1954р.). Перший лазер був запущений в 1960р. (Мейман) на кристалі синтетичного рубіну ($\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Cr}^{3+}$). Його випромінювання мало унікальні характеристики порівняно із випромінюванням відомих до того джерел: воно відрізнялось високою спрямованістю, потужністю, яскравістю і когерентністю. Таким чином було продемонстровано, що перехід від спонтанного до вимушеного режиму випромінювання кардинально змінює властивості випромінюваного світла.

Перший лазер мав відносно скромні характеристики: його випромінювання складалося із послідовності хаотичних імпульсів, загальною тривалістю $\sim 1\text{мс}$, а імпульсна потужність не перевищувала 10 кВт. В наступні роки відбувався бурхливий розвиток фізики і техніки лазерів, в результаті чого були створені сотні різноманітних лазерів, які відрізнялися активними середовищами, методами накачування, режимами випромінювання і, як наслідок, параметрами і характеристиками їх випромінювання. Вже в тому ж 1960 році був створений перший газовий лазер на суміші He та Ne ($\lambda=0,63\text{ мкм}$ $\lambda=1,15\text{ мкм}$). А в наступні два роки до першого твердотілого лазера на кристалах рубіна додалися лазери на кристалах флюориту та вольфрамату кальцію, активованих рідкоземельними іонами ($\text{CaF}_2\text{:U}^{3+}$ та $\text{CaF}_2\text{:Sm}^{2+}$, $\text{CaWO}_4\text{:Nd}^{3+}$). Трохи пізніше був створений лазер на ітрій-алюмінієвому гранаті з іонами неодиму (YAG-Nd^{3+}), який наразі є одним із найпопулярніших твердотілих лазерів.

В 1962 році були створені перші напівпровідникові лазери на арсеніді галія (GaAs), які нині стали найбільш економічними та найменшими за розмірами. Їх коефіцієнт корисної дії може складати десятки відсотків, а розміри – долі міліметра. З того часу було створені багато напівпровідникові лазерів різних типів, які відрізняються економічністю, потужністю та довжиною хвилі. Превагою цих лазерів є можливість електричної модуляції інтенсивності їх випромінювання. Завдяки своїм властивостям ці лазери створили революцію у оптичному запису, зчитуванню та передачі інформації.

В 1965 році були створені молекулярні лазери на вуглекислому газі (CO_2), які по економічності поступаються тільки напівпровідниковим ОКГ, але мають велику потужність у неперервному режимі (до 60 кВт) в середньому інфрачервоному діапазоні ($\lambda=10,6$ мкм), завдяки чому можуть використовуватись в термічних технологіях для різання, зварювання, відпалу та ін. . В цей же період був запущений перший йонний лазер на Ag^+ , який важливий тим, що може давати потужне неперервне випромінювання в синьо-зеленій області спектру, що важливо в багатьох фізичних експериментах, зокрема для збудження комбінаційного розсіяння.

1966 рік позначився відкриттям лазерного ефекту в органічних барвниках. Лазери на барвниках цікаві тим, що вони дозволяють в широких межах змінювати довжину хвилі генерації, що надзвичайно важливо для селективного збудження певних процесів. Вони часто використовуються для експериментів з фізики лазерів.

У 1970-их роках з'явилися найбільш потужні лазери – газодинамічні на CO_2 , в яких досягнена рекордна потужність 200 кВт в неперервному режимі, що обмежується лише стійкістю оптичних елементів. В цей же період були створені ексимерні лазери, які працюють на молекулах особливого типу – ексимерних, що існують лише в збудженому стані. З практичної точки зору ці лазери цікаві тим, що випромінюють у вакуумному ультрафіолеті і мають велику енергію імпульсу. Завдяки малій довжині хвилі це випромінювання поглинається. Ці лазери знайшли широке використання в офтальмології і дослідженнях термоядерного синтезу.

Завдяки пошуку нових активних середовищ лазерна генерація була отримана в широкому спектральному діапазоні від вакуумного ультрафіолету до середнього інфрачервоного діапазону. Паралельно із створенням лазерів на нових активних середовищах йшов пошук методів впливу на параметри їх випромінювання, що призвело до створення нових типів імпульсних лазерів і вражаючого прогресу їх енергетичних і часових характеристик. Так в 1962 був винайдений метод модуляції добротності оптичного резонатора, в результаті чого тривалість лазерного імпульса була скорочена більш ніж на три порядки (до 10-20 нс), а пікова інтенсивність зросла до ~ 10 МВт. Згодом (1965 р.) був винайдений метод синхронізації мод, який призвів до скорочення тривалості лазерного імпульсу ще на три порядки (до 5 пс) і збільшення пікової інтенсивності до ~ 10 ГВт. На початку 80-их років були створені лазери ультра коротких імпульсів (УКІ), які генерували імпульси фемтосекундної тривалості із тераватною (10^{12} Вт) піковою потужністю. Ці лазери стали можливими завдяки створенню активних середовищ на так званих вібронних кристалах. Найбільш видатним лазером цього класу є титан-сапфіровий ($\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Ti}^{3+}$) лазер (1986), який широко застосовується в фізичних, біологічних, медичних, хімічних дослідженнях та в технології. Нині створені фемтосекундні лазерні комплекси, які дозволяють отримувати пентаватні (10^{15} Вт) пікові потужності. При фокусуванні пучка такої

потужності отримують електричні поля з напруженістю, що на три порядки перевищує внутрішньоатомне поле.

Широкий діапазон параметрів лазерного випромінювання дозволяє реалізувати такі умови, які неможливо реалізувати іншими засобами. Завдяки унікальним характеристикам свого випромінювання, лазери забезпечують прогрес в багатьох науках і технологіях.

ПРИНЦИПИ ОПТИЧНОГО ПІДСИЛЕННЯ ТА ГЕНЕРАЦІЇ

Елементарні процеси взаємодії випромінювання з атомами

Принцип і необхідні умови функціонування лазера можна встановити проаналізувавши елементарні процеси взаємодії випромінювання з атомами, іонами та молекулами як квантово-механічними об'єктами. Оскільки загальні риси цих процесів в названих об'єктах однакові, тонадалі будемо проводити розгляд для атома. Можливі три елементарні процеси (рис. 1.1): поглинання, вимушене випромінювання і спонтанне випромінювання. Для їх протікання необхідний резонанс – співпадіння енергії фотона з енергією певного переходу. Це призводить до того, що фотон певної енергії може взаємодіяти лише з конкретною парою енергетичних рівнів, а інші рівні не задіяні. В зв'язку з цим доцільно ввести поняття *дворівневих атомів*, в яких існує лише два рівні: основний з енергією E_1 і збуджений з енергією E_2 .

Поглинання це процес, що відбувається при взаємодії фотона з атомом, який знаходиться в основному стані. Енергія падаючого фотона переходить до атома, в результаті чого атом збуджується і переходить із основного енергетичного стану 1 в збуджений стан 2, а фотон зникає. Пучок світла, проходячи через середовище з незбудженими атомами послаблюється.

Вимушене випромінювання це процес, що відбувається при взаємодії фотона з атомом, який знаходиться у збудженому стані 2. В результаті цього атом втрачає своє збудження, переходячи в основний стан 1, а звільнена енергія йде на утворення ще одного фотона. В середовищі із збудженими атомами цей процес призводить до розмноження фотонів, оскільки кожний новонароджений фотон здатний повторити цей процес за участю інших атомів. Завдяки цьому пучок світла в середовищі збуджених атомів підсилюється. Важливо, що новонароджений при вимушеному випромінюванні фотон повністю ідентичний падаючому: він зберігає його енергію, імпульс і момент імпульсу, що відповідає збереженню частоти, фази, напрямку і поляризації електромагнітної хвилі. Тому підсилене випромінювання повністю ідентичне падаючому і відрізняється від нього тільки інтенсивністю.

Іншим механізмом випромінювання є спонтанне випромінювання, яке відбувається без збурення, саме по собі. Новонароджені в результаті

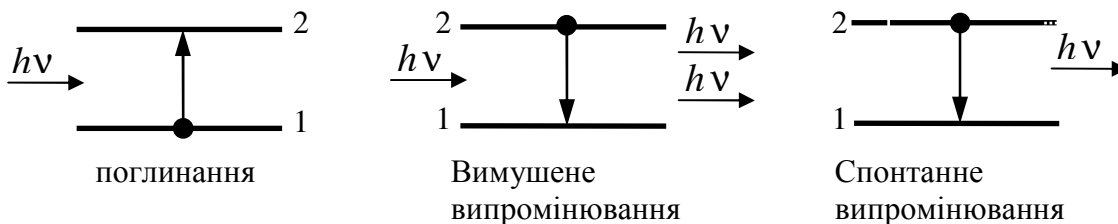


Рис. 1.1. Елементарні процеси взаємодії випромінювання і атома.

спонтанного випромінювання фотони ніяк не пов'язані між собою, тому мають відмінні енергії, імпульси і моменти імпульсів, а електромагнітні хвилі - частоту, фазу, напрямок і поляризацію.

Названі елементарні процеси відбуваються з певною ймовірністю, яка визначається долею атомів, що беруть участь в даному процесі. Ведемо поняття *густини населеності* енергетичного рівня j , яка визначається як кількість атомів в одиниці об'єму речовини, що знаходяться на цьому рівні. Очевидно, що кількість dN_{21}^c актів спонтанного випромінювання в одиниці об'єму за час dt пропорційна густині населеності n_2 збудженого рівня:

$$dN_{21}^c = A_{21} n_2 dt. \quad (1.1)$$

Коефіцієнт пропорційності A_{21} в (1.1) називається коефіцієнтом Ейнштейна для спонтанних переходів. Він має фізичний зміст густини ймовірності w_{21}^c спонтанного випромінювання (ймовірності в одиницю часу), оскільки у виразі $A_{21} = dN_{21}^c / n_2 dt$ відношення dN_{21}^c / n_2 відповідає визначенню ймовірності спонтанного переходу $2 \rightarrow 1$.

Кількість dN_{21}^e актів вимушеного випромінювання в одиниці об'єму за час dt пропорційна населеності n_2 збудженого рівня і густині енергії ρ падаючого випромінювання:

$$dN_{21}^e = B_{21} \rho n_2 dt. \quad (1.2)$$

В цьому виразі фізичний зміст густини ймовірності вимушеного випромінювання відіграє добуток $w_{21}^e = B_{21} \rho$, де B_{21} - коефіцієнт Ейнштейна для вимушеного випромінювання.

Аналогічно кількість dN_{12} актів поглинання в одиниці об'єму за час dt пропорційна населеності n_1 основного рівня і густині енергії ρ падаючого випромінювання:

$$dN_{12} = B_{12} \rho n_1 dt, \quad (1.3)$$

Де $w_{12} = B_{12} \rho$ - густина ймовірності поглинання, а B_{12} - коефіцієнт Ейнштейна для поглинання.

Як видно, густина ймовірності спонтанного випромінювання є константою, а густини вимушеного випромінювання і поглинання - пропорційні густині енергії падаючого випромінювання. Ця відмінність є

наслідком того, що перший процес відбувається сам по собі, а останні два - вимушені, які протікають лише при збуренні атома. Виходячи з цього, фізичний зміст коефіцієнтів B_{12} і B_{21} відповідає густині ймовірності, що припадає на одиницю густини енергії.

Слід врахувати, що оскільки випромінювання атомів має певний спектр, то коефіцієнти Ейнштейна залежні від частоти, а тому густина ймовірності всіх процесів повинна залежати від величини цього інтервалу:

$$dw_{21}^c = A_{21}(\nu) d\nu, \quad dw_{21}^e = B_{21}(\nu) \rho(\nu) d\nu, \quad dw_{12} = B_{12}(\nu) \rho(\nu) d\nu. \quad (1.4)$$

Коефіцієнти $A_{21}(\nu)$, $B_{21}(\nu)$ і $B_{12}(\nu)$ називаються спектральними коефіцієнтами Ейнштейна. Вони зв'язані із раніше введеними коефіцієнтами A_{21} , B_{21} і B_{12} формулами:

$$A_{21} = \int A_{21}(\nu) d\nu, \quad B_{21} = \int B_{21}(\nu) d\nu, \quad B_{12} = \int B_{12}(\nu) d\nu. \quad (1.5)$$

Для коефіцієнтів $A_{21}(\nu)$ і A_{21} можна встановити зворотній зв'язок через форм-фактор спектральної лінії спонтанного випромінювання - функції $\varphi(\nu)$, яка описує форму цього контура і нормована на його площу $\int \varphi(\nu) d\nu = 1$. Тоді:

$$A_{21}(\nu) = A_{21} \varphi(\nu) \quad (1.5a)$$

Між спектральними коефіцієнтами Ейнштейна існує зв'язок, який можна встановити, розглядаючи встановлення рівноваги між випромінюванням і збудженням атомів в замкненій порожнині з непоглинаючими і абсолютно відбивними стінками. Така порожнина з атомами всередині є моделлю абсолютно чорного тіла, оскільки випромінювання виявляється замкненим в цій порожнині і назовні не виходить. Густина цього рівноважного випромінювання описується формулою Планка:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1.6)$$

Цю ж формулу можна отримати із умови рівності кількості випромінених і поглинутих квантів в порожнині. Ця умова повинна виконуватись в будь-якому спектральному інтервалі:

$$B_{12}(\nu) \rho(\nu) n_1 d\nu dt = (B_{21}(\nu) \rho(\nu) n_2 + A_{21}(\nu) n_2) d\nu dt. \quad (1.7)$$

Звідси знаходимо:

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}(\nu)}{B_{12}(\nu) \frac{n_1}{n_2} - B_{21}(\nu)} = \frac{A_{21}(\nu)}{B_{21}(\nu) \frac{B_{12}(\nu) g_1}{B_{21}(\nu) g_2} \exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1.8)$$

В (1.9) враховано, що населеності рівнів при термодинамічній рівновазі описуються розподілом Больцмана:

$$n_2 = n_1 \frac{g_2}{g_1} \exp(-\Delta E_{21}/kT) = n_1 \frac{g_2}{g_1} \exp(-h\nu/kT), \quad (1.10)$$

де ΔE_{21} – різниця енергій рівнів, а g_1 , g_2 – їх ступені виродженості.

Порівнюючи формули (1.11) і (1.12), знаходимо:

$$A_{21}(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{21}(\nu), \quad (1.13)$$

$$B_{12}(\nu) = B_{21}(\nu) \frac{g_2}{g_1} \quad (1.14)$$

Пропорційність ймовірності вимушених переходів (поглинання і вимушеного випромінювання) густині енергії випромінювання можна встановити із теорії збурень квантової механіки. Розв'язуючи нестаціонарне рівняння Шредінгера для атома, збуреного електромагнітною хвилею, можна знайти, що ймовірність переходу W_{ij} між енергетичними рівнями i , j атома пропорційна квадратам модулів напруженості E_0 поля і дипольного моменту $\mu_{ij} = \int \Psi_i^* d \Psi_j dr$ переходу, а також часу взаємодії випромінювання з атомом:

$$W_{ij} = \frac{8\pi^3}{h^2} |\mu_{ij}|^2 E_0^2 \delta(\nu - \nu_{ij}) \cdot t, \quad (1.15)$$

де δ - дельта функція Дірака нормована по площі $\int \delta(\nu - \nu_{ij}) d\nu = 1$, E_0 - амплітуда електромагнітної хвилі.

Схожість (1.16) з формулами (1.17) і (1.18) стає явною, якщо одну із них (наприклад (1.2)) переписати у вигляді

$$W_{21} = \frac{dN_{21}^e}{n_2} = B_{21} \rho dt, \quad (1.19)$$

а в (1.15) врахувати що $\rho = \varepsilon_0 n^2 E_0^2 / 2$, де n - показник заломлення середовища.

Тоді із співставлення (1.20) і (1.21) випливає, що $B_{21} \propto |\mu_{21}|^2 \delta(\nu - \nu_{ij})$, де резонансні властивості переходу описуються δ -функцією (для повної схожості слід врахувати спектральне розширення, інтегруючи по всіх можливих станах).

Із (1.15), (1.13) і (1.14) випливає, що коефіцієнти Ейнштейна пропорціональні квадрату матричного елемента. Більш детальний розрахунок із застосуванням (1.15) до теплового випромінювання (для якогось коефіцієнти були введені) дає:

$$B_{ij} = \frac{8\pi^3}{3h^2} |\mu_{ij}|^2 \quad (1.20)$$

$$A_{ij} = \frac{64\pi^4 \nu^3}{3hc^3} |\mu_{ij}|^2 \quad (1.21)$$

Як випливає з (9), відношення коефіцієнтів Ейнштейна для вимушеного і спонтанного випромінювання сильно зростає із збільшенням довжини хвилі випромінювання: $\frac{B_{21}}{A_{21}} \approx \lambda^3$. Оскільки робота лазера ґрунтується на вимушеному

випромінюванні, а спонтанне випромінювання є конкуруючим процесом, що збіднює верхній лазерний рівень і тим самим знижує інверсію, то звідси випливає, що лазерну генерацію легше отримати в ІЧ області.

Час життя атома на збудженому рівні

Розглянемо середовище, що складається із дворівневих атомів, які не взаємодіють між собою та із зовнішніми полями. В атомах можуть відбуватися усі три типи розглянутих вище процесів, в результаті яких

встановлюється рівноважний розподіл населеності енергетичних рівнів, при якому кількості випромінювальних переходів та актів поглинання однакові. Встановлений рівноважний розподіл описуватиметься законом

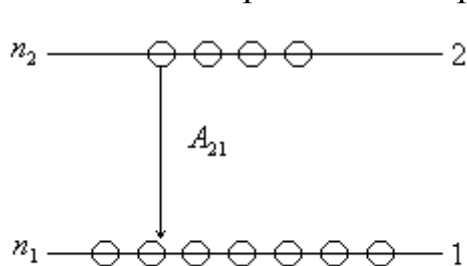


Рис. 1.2. Релаксація населеності збудженого рівня за рахунок спонтанного випромінювання.

Больцмана $n_2^0 = n_1^0 \cdot e^{-\frac{E_{21}}{kT}}$, де n_1^0, n_2^0 – населеність рівнів 1 та 2 в рівноважному стані, а $E_{21} = E_2 - E_1$ – різниця їх енергій. Оскільки в оптичній області $E_{21} \gg kT$, то $n_2^0 = 0$.

При надлишковій населеності збудженого рівня кількість випромінювальних переходів переважатиме і населеність збудженого рівня буде зменшуватись, прагнучи до рівноважного значення. Оскільки в звичайних умовах густина енергії випромінювання мала то $B_{21}\rho \ll A_{21}$ і вимушеним випромінювання можна нехтувати. Тому релаксація населеності відбуватиметься лише за рахунок спонтанного випромінювання (рис. 1.2): $-dn_2 = A_{21} \cdot n_2 \cdot dt$. Звідси випливає, що населеність збудженого рівня зменшується з часом експоненціально (рис. 1.3)

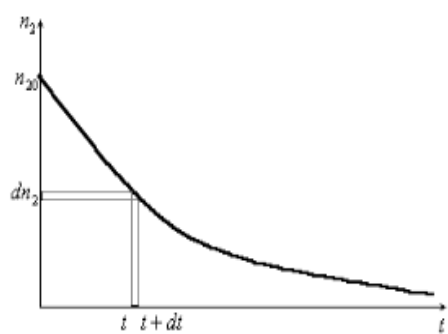


Рис. 1.3. Крива релаксації населеності збудженого рівня.

$$n_2 = n_{20} \cdot e^{-A_{21} \cdot t}, \quad (1.22)$$

де n_{20} – початкова населеність збудженого рівня.

Використовуючи (1.22) визначимо середній час життя атома в збудженому стані. З рис. 1.3 видно, що оскільки dn_2 атомів знаходиться в збудженому стані час t , то сумарний час життя усіх атомів може бути вирахований як $\int |dn_2| \cdot t$. Тоді середній час життя атома в збудженому стані буде дорівнювати:

$$\tau = \frac{1}{n_{20}} \int_0^{n_{20}} t \cdot |dn_2| = \frac{1}{n_{20}} \int_0^\infty (n_{20} A_{21}) \cdot e^{-A_{21} \cdot t} \cdot t dt = \int_0^\infty e^{-A_{21} \cdot t} \cdot d(A_{21} t) = \frac{1}{A_{21}}. \quad (1.23)$$

Підставляючи (1.23) в (1.22) матимемо

$$n_2 = n_{20} \exp(-t/\tau), \quad (1.24)$$

звідки видно, що середній час життя атома на збудженому рівні дорівнює такому часовому проміжку, протягом якого кількість збуджених атомів (населеність збудженого рівня) зменшується в e раз. У випадку, коли релаксація обумовлюється тільки спонтанним випромінюванням, середній час життя на збудженому рівні дорівнює оберненій величині ймовірності спонтанного випромінювання. Такі умови реалізуються лише тоді, коли на атом не діють зовнішні збурення (електромагнітні поля, зіткнення, тощо).

Вираз (1.24) дає можливість знайти залежність інтегральної по спектру потужності спонтанного випромінювання (люмінесценції) від часу:

$$P(t) = h\nu \cdot A_{21} \cdot n_{20} \exp(-A_{21}t) = P_0 \cdot \exp(-t/\tau), \quad (1.25)$$

де P_0 – початкова потужність люмінесценції на початку релаксації, $\bar{\nu}$ – середня частота спектрального контура. Видно, що середній час життя атома на збудженому рівні в (1.24) дорівнює часу згасання люмінесценції в (1.25), який вимірюється експериментально.

Контур і ширина спектральної лінії.

Оскільки інтенсивність світла $I \sim |E|^2$, то затухання свідчення з затухаючою по експоненті інтенсивністю (1.25) можна уявити собі як випромінювання електромагнітної хвилі частоти ω_0 з затухаючою по експоненті амплітудою (рис. 1.4)

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{A_{21}}{2}t} \cdot e^{-i\omega_0 t}, \quad (1.26)$$

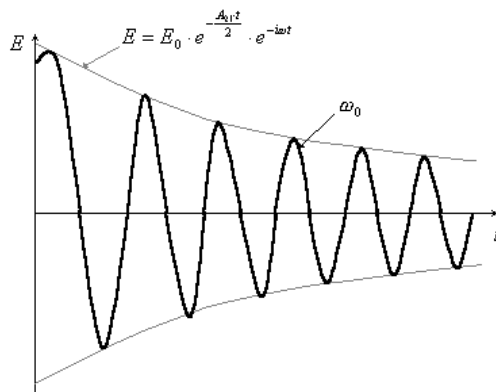


Рис. 1.4. Затухаючі коливання електричного поля згасаючого випромінювання люмінесценції.

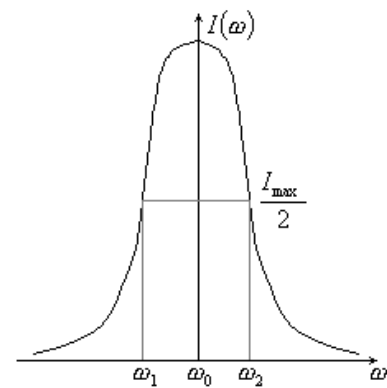


Рис. 1.5. Лоренцева форма спектральної лінії.

де ω_0 – несуча частота, що відповідає частоті переходу між рівнями атома.

Таке випромінювання вже не буде монохроматичним, в чому можна переконатися, провівши Фур'є аналіз цього виразу:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty E(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-\left[i(\omega_0 - \omega) + \frac{A_{21}}{2}\right]t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{E_0}{\frac{A_{21}}{2} - i(\omega - \omega_0)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Звідси інтенсивність випромінювання дорівнює:

$$I(\omega) \sim |E|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{A_{21}}{2}\right)^2}. \quad (1.28)$$

Оскільки $E_0^2 \propto I_0$, то (1.28) можна переписати у вигляді:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{A_{21}}{2}\right)^2}. \quad (1.29)$$

Вираз (1.29) описує форму спектрального контура випромінювання нерухомих і не взаємодіючих між собою та із зовнішнім оточенням атомів. Це так звана Лоренцева форма лінії (рис. 1.5).

Ширина спектральної лінії, обчислена як інтервал між частотами, що відповідають половині її інтенсивності в максимумі (надалі називатимемо її півшириною) визначається із умови:

$$\frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{A_{21}}{2}\right)^2}. \quad (1.29a)$$

Звідки знаходиться відхилення цих частот від центра лінії $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \pm \frac{A_{21}}{2}$ і її півширина $\Delta\omega_{0.5}$:

$$\Delta\omega_{0.5} = 2\Delta\omega = A_{21} \quad (1.30)$$

Півширина спектральної лінії виявилась рівною ймовірності спонтанного переходу. Отже чим більша ймовірність спонтанного переходу, тим ширша спектральна лінія.

Зауважимо, що добуток величин, визначених (1.23) і (1.30) дає $\Delta\omega_{0.5} \cdot \tau = 1$, що відповідає співвідношенню невизначеності Гейзенберга $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$. З цієї точки зору скінченний час τ життя атома на збудженому рівні призводить до невизначеності $\Delta E = \hbar/\tau$ енергії атома на цьому рівні, що може інтерпретуватися як існування ширини енергетичного рівня, що дорівнює цьому значенню.

Ширина спектрального контура визначається шириною енергетичних рівнів, які комбінують при переході (рис. 1.6). Якщо випромінювання відбувається при переході із збудженого рівня 2 на основний 0, то ширина контура визначається тільки шириною стартового рівня $\Delta\omega_{0.5} = \Delta E_2/\hbar$, оскільки кінцевий рівень 0 нескінченно вузький із-за необмеженого часу життя атома на ньому. Якщо ж кінцевий рівень не найнижчий (перехід $2 \rightarrow 1$), то його ширина теж скінченна, бо час життя на ньому обмежений. Тому спектральна лінія, яка відповідає переходу $2 \rightarrow 1$, розширюється: $\Delta\omega_{0.5} = (\Delta E_2 + \Delta E_1)/\hbar$, не

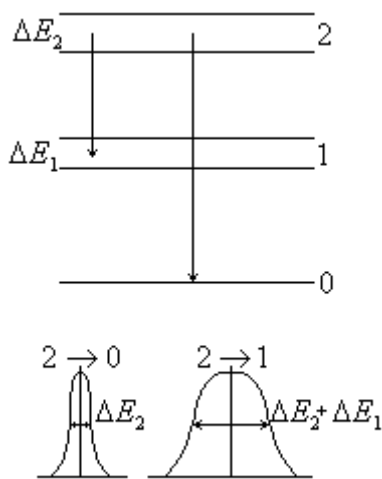


Рис. 1.6. Зв'язок між шириною енергетичних рівнів і спектральних ліній.

змінюючи Лоренцеву форму. Зауважимо, що ширина рівня і час життя на ньому визначається сумарною ймовірністю спонтанних переходів з цього рівня: $\Delta E_1 = \hbar A_{10}$, $\tau_1 = A_{10}^{-1}$ і $\Delta E_2 = \hbar(A_{21} + A_{20})$, $\tau_2 = (A_{21} + A_{20})^{-1}$. Тобто додаткові переходи з рівня скорочують час життя на ньому і збільшують його ширину.

Спектральне розширення.

Вище було проаналізовано спектр випромінювання атомів, які не зазнають зовнішнього збурення і не рухаються. В цьому випадку півширина спектрального контура визначалась лише ймовірністю внутрішньоатомних процесів. Така ширина називається природною. Вона має найменш можливу величину—тисячні і десятитисячні долі ангстрема. Спектр з такою шириною важко отримати, тому що в реальних умовах атоми взаємодіють з середовищем, з електромагнітними полями та між собою, переміщуються та коливаються. Ці ефекти розширюють спектральний контур випромінювання на декілька порядків.

Існує два типи спектрального розширення: однорідний та неоднорідний.



Рис. 1.7. Схематичне зображення впливу однорідного розширення.

Однорідне розширення—це такий тип розширення, коли спектральні контури будь-якої групи атомів в середовищі однакові і співпадають із спектральним контуром випромінювання всього середовища. Однорідне розширення спостерігається у тих випадках, коли всі атоми знаходяться в однакових умовах і існує ефект, який прискорює релаксацію діючи на всі атоми однаково, що скорочує їх час життя в збудженому стані. Прикладами таких ефектів є

зіткнення атомів в газах в процесі теплового руху та взаємодія атомів з фононами в твердих тілах. Ці ефекти впливають в середньому однаково на всі атоми, а тому всі вони знаходяться в однакових умовах і випромінювання будь-яких їх груп має однаковий контур. Загальний контур випромінювання всіх атомів залишається Лоренцевим з тією ж центральною частотою ν_0 , що і окремих нерухомих атомів, але розширюється (рис. 1.7) внаслідок скорочення середнього часу життя на збудженому рівні, викликаного зіткненнями. Ці зіткнення призводять до безвипромінювальних переходів з ймовірністю Q_{21} , що збільшує сумарну ймовірність релаксації із збудженого рівня в формулі (1.23):

$$\tau = (A_{21} + Q_{21})^{-1} \quad (1.31)$$

Неоднорідне розширення має місце тоді, коли спектральні контури різних груп атомів в середовищі не співпадають. В цьому випадку спектральний контур випромінювання всього середовища є суперпозицією не співпадаючих контурів цих груп атомів. Неоднорідне розширення виникає у випадку, якщо в середовищі існують групи атомів, що знаходяться в нееквівалентних умовах, внаслідок чого вони зазнають різного впливу фізичних ефектів. Прикладом неоднорідного розширення є вплив ефекту Штарка на енергетичні рівні домішкових іонів в діелектричних кристалах. Іони, що знаходяться в різних точках кристалу, знаходяться в нееквівалентних умовах із-за флуктуацій напруженості кристалічного поля, внаслідок чого їх енергетичні рівні і центральні частоти відповідних

Лоренцевих контурів випромінювання зміщуються на різну величину. Висота

цих контурів пропорційна кількості іонів, що знаходяться в полі певної напруженості, і є випадковою величиною розподіленою по нормальному закону Гауса. Тому загальний контур випромінювання, який є суперпозицією контурів, теж описується цим законом (рис. 1.8):

$$I(\omega) = I_0 \exp \left(- \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_e} \right)^2 \right), \quad (1.32)$$

де $\Delta\omega_e$ – ширина спектрального контура на рівні e^{-1} його максимуму.

Аналогічна ситуація буде мати місце в газі внаслідок ефекту Доплера,

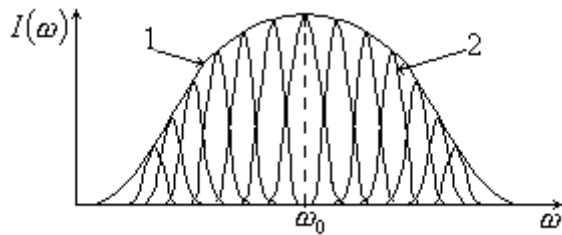


Рис. 1.8. Неоднорідне розширення: контур випромінювання всього середовища (1) і окремої групи атомів, що знаходяться в однакових умовах (2)

який зміщує частоту випромінювання пропорційно відношій швидкості атома (випромінювача) і приймача:

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{v_x}{c}. \text{ Внаслідок цього в спектрі}$$

зареєстрованого випромінювання кожному атому відповідає свій Лоренців контур з центральними частотами, зміщеними в залежності від швидкості атома. Оскільки згадана відносна швидкість відповідає

проекції швидкості атома на напрям до приймача, то, підставляючи розподіл Максвелла по проекціях швидкості $dn_x \sim \exp(-\frac{mv_x^2}{2kT}) dv_x$ з попередньої формули v_x , матимемо:

$$I(\omega) \propto dn_x \sim e^{-\frac{m(\omega - \omega_0)^2 \cdot c^2}{2kT\omega_0^2}}, \quad (1.33)$$

що відповідає Гаусовому контуру з шириною на рівні $1/e$ від його максимуму: $\Delta\omega_e = \sqrt{2kT/m} \omega_0 / c = v_p \omega_0 / c$, де $v_p = \sqrt{2kT/m}$ – найбільш ймовірна швидкість атома при тепловому русі. Півширина Гаусового контура (на рівні половинної інтенсивності) становить $\Delta\omega_{0.5}^G = 2 \ln 2 \Delta\omega_e$. Зважаючи на механізм розширення контур (1.33) називають Доплерівським, його півширина зростає із збільшенням температури.

Вирази (1.32) і (1.33) описують форму спектрального контура ансамблю атомів, які випромінюють вузькі лінії, з шириною значно меншою ніж ширина Гаусового контура обумовленого неоднорідним розширенням. В більш загальному випадку можуть діяти обидва типи спектрального розширення. В цьому випадку підсумковий спектральний контур визначається згорткою Лоренцевого і Гаусового контурів і має проміжну форму – контур Фойгта. Його форма наближається до Гаусового контура, коли переважає вплив неоднорідного розширення, і до Лоренцевого – коли переважає однорідне розширення. Співвідношення між внесками в спектральний контур цих типів спектральних розширень залежить від умов. Зокрема в газах при низьких тисках, коли ймовірність зіткнення між атомами низька, домінує неоднорідне спектральне розширення внаслідок ефекту

Доплера, при високих тисках основний вплив чинять зіткнення між атомами і тому домінує однорідне розширення.

Середовища із однорідним та неоднорідним спектральним розширенням по-різному взаємодіють із монохроматичним випромінюванням, що має важливе значення для фізики лазерів. При однорідному розширенні із цим випромінюванням взаємодіють (поглинають або вимушено випромінюють) всі атоми середовища. При неоднорідному розширенні з ним взаємодіють лише частина атомів – тих, для яких частота цього випромінювання попадає в їх однорідно розширений контур.

Підсилення світла середовищем дворівневих атомів.

Розглянемо зміну інтенсивності паралельного пучка світла при проходженні через середовище, що складається із дворівневих атомів. Якщо частота випромінювання попадає в резонанс із переходом між рівнями атомів то інтенсивність пучка буде змінюватись за рахунок процесів вимушеного випромінювання та поглинання в тих атомах, через які проходить пучок. Впливом спонтанного випромінювання на інтенсивність пучка можна нехтувати, оскільки цей процес є шумовим бо існує і без прохідного пучка.

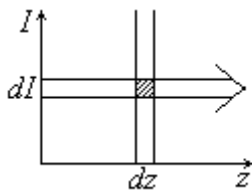


Рис. 1.9.

Знайдемо зміну інтенсивності пучка при проходженні тонкого шару товщиною dz (рис. 1.9). Вона буде обумовлена переходами в елементарному циліндрі, який «вирізає» пучок в цьому шарі, з об'ємом $dV = \Delta S dz$, де ΔS - площа поперечного перерізу пучка.

Для загальності будемо вважати, що падаюче випромінювання має певний спектр, а енергетичні рівні атома мають певну ширину, тому переходи між рівнями будемо описувати спектральними коефіцієнтами Ейнштейна.

Зміна кількості фотонів в пучку в одиницю часу, обумовлена цими переходами, враховуючи (1.2) і (1.3), буде дорівнювати

$$dN = [B_{21}(\nu)n_2 - B_{12}(\nu)n_1]\rho(\nu)\Delta S dz d\nu. \quad (1.34)$$

Звідки зміна спектральної густини інтенсивності пучка

$$dI(\nu) = \frac{dN}{\Delta S d\nu} h\nu = h\nu [B_{21}(\nu)n_2 - B_{12}(\nu)n_1]\rho(\nu) dz. \quad (1.35)$$

Спектральні густини інтенсивності $I(\nu)$ і енергії $\rho(\nu)$ зв'язані між собою співвідношенням $I(\nu) = \rho(\nu)c$, адже інтенсивність це енергія, що проходить через площадку одиничної площі за одиницю часу. Така енергія міститься в циліндрі з висотою $c\Delta t$ (де $\Delta t = 1$) і площею основи $\Delta S = 1$, тобто в об'ємі $c \cdot 1c \cdot 1m^2$, звідки $I = \rho c$. Підставляючи це співвідношення в (1.35) і користуючись співвідношенням (1.14), знаходимо:

$$dI(\nu) = \frac{B_{21}(\nu)h\nu}{c} (n_2 - \frac{g_2}{g_1}n_1)I(\nu) dz. \quad (1.36)$$

Інтегруючи цей вираз в припущенні, що вираз в дужках не залежить від I , отримаємо вираз:

$$I(x, \nu) = I_0(\nu) \exp(k(\nu)z), \quad (1.37)$$

який аналогічний до закону Бугера, але з показником (враховуючи (1.14)),

$$k(\nu) = \frac{B_{21}(\nu)h\nu}{c} \left(n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 \right), \quad (1.38)$$

що змінює знак в залежності від співвідношення населеності рівнів. При $k(\nu) > 0$ виникає підсилення світла і інтенсивність пучка в середовищі зростає. Така ситуація реалізується в лазерах і лазерних підсилювачах. При $k(\nu) < 0$ виникає ослаблення світла і інтенсивність пучка падає. Така ситуація в звичайних умовах.

В фізиці лазерів показник $k(\nu)$ називається коефіцієнтом підсилення. Його знак визначається виразом

$$\Delta = \left(n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 \right), \quad (1.39)$$

який називається густиною інверсної населеності рівнів. Зміст цієї назви походить від латинського слова «inversion», що в переносному значенні означає перевертання змісту. В даному випадку це стосується стану, протилежного до рівноважного. Адже в умовах термодинамічної рівноваги населеності рівнів описуються статистикою Больцмана (1.10), відповідно до якої $n_2 < \frac{g_2}{g_1} n_1$ і $\Delta < 0$. А в інвертованому стані навпаки $\Delta > 0$ і тому такий стан є суттєво нерівноважним. Формально цей стан може бути описаний розподілом Больцмана із від'ємною температурою. Проте за фізичним змістом температура є параметром рівноважного стану, що характеризує середню енергію теплового руху, тому в цьому розумінні вона не може бути від'ємною. Внаслідок цього від'ємна температура може розглядатися лише як індикатор сильно нерівноважного стану середовища.

Величина Δ є мірою відхилення середовища від рівноважного стану. Середовища, в яких можна досягнути $\Delta > 0$, називаються інвертованими або активними. Оскільки цей стан нерівноважний, то для його створення потрібно затратити певну енергію, яка називається енергією накачування.

У фізиці лазерів широко використовується величина

$$\sigma_{21}(\nu) = \frac{B_{21}(\nu)h\nu}{c}, \quad (1.40)$$

яка називається поперечним перерізом (поперечником) вимушеного випромінювання. Використовуючи цю величину вираз для коефіцієнта підсилення набуває простого вигляду:

$$k(\nu) = \sigma_{21}(\nu) \Delta \quad (1.38a)$$

Фізичний зміст цієї величини – ймовірність одиничного акту вимушеного випромінювання, тобто ймовірність цього процесу розраховану на один фотон. Цей зміст стає ясним, якщо (1.40) переписати у вигляді

$$\sigma_{21}(\nu) = \frac{B_{21}(\nu)\rho(\nu)}{\rho(\nu)c/h\nu} = \frac{B_{21}(\nu)\rho(\nu)}{I(\nu)/h\nu}, \quad (1.40a)$$

де чисельник має зміст ймовірності випромінювання в одиничному спектральному інтервалі за одиницю часу, а знаменник – кількість фотонів в цьому інтервалі, що взаємодіють з атомом протягом одиниці часу (проходять за одиницю часу через одиничну площадку).

Термін «поперечний переріз» історично походить із уявлень про взаємодію спрямованого потоку фотонів з атомами середовища як з деякими кульками, що мають площу поперечного перерізу σ . Взаємодія (вимушене випромінювання чи поглинання) відбувається тоді, коли фотон попадає на якусь із цих кульок (атомів). В шарі середовища товщиною dz , настільки тонкому, щоб проекції кульок в напрямі потоку не перекривались, доля фотонів $\frac{dN}{N}$, народжених вимушеним випромінюванням фотонів, дорівнює відношенню загальної площі проекцій всіх кульок до площі S цього шару, тобто

$$\frac{dN}{N} = \frac{\sigma_{21} n_2 S dz}{S}. \quad (1.41)$$

Інтегруючи, знаходимо вираз, що описує зростання потоку фотонів в результаті вимушеного випромінювання:

$$N = N_0 \exp(\sigma_{21} n_2 z). \quad (1.42)$$

Аналогічно можна знайти вираз, що описує зменшення потоку фотонів в результаті поглинання:

$$N = N_0 \exp(-\sigma_{12} n_{12} z) \quad (1.42a)$$

Для опису зміни потоку фотонів внаслідок дії обох процесів слід врахувати їхню дію в (1.41) з різним знаком:

$$\frac{dN}{N} = \frac{(\sigma_{21} n_2 - \sigma_{12} n_{12}) S dz}{S}. \quad (1.41a)$$

Звідки, інтегруючи, отримуємо вираз ідентичний (1.37) з параметрами (1.39) і (1.40):

$$N = N_0 \exp(\sigma_{21}(n_2 - g_2/g_1 n_1)z) = N_0 \exp(\sigma_{21} \Delta z). \quad (1.43)$$

Розглянута модель занадто груба, бо атоми, на відміну від кульок, не мають чітких границь. Більш того, площа поперечного перерізу (1.40) залежить від частоти, що в цій моделі означає залежність діаметра кульок від частоти. Проте, не зважаючи на це, цей термін широко вживається, оскільки σ в (1.40) як і в (1.41) має розмірність площі. Числові значення σ для лазерних переходів лежать в широких межах 10^{-21} - 10^{-16} см². Наприклад для іонів Cr^{3+} в кристалі рубіну $\sigma = 2,5 \cdot 10^{-20}$ см², для іонів Nd^{3+} в кристалі ітрій-алюмінієвого гранату - $3,5 \cdot 10^{-19}$ см² і для молекули органічного барвника родаміну 6Ж - $1,8 \cdot 10^{-16}$ см².

Властивості коефіцієнта підсилення

Спектральна залежність $k(\nu)$. Враховуючи, що $B_{21}(\nu) = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} A_{21}(\nu)$ і виражаючи $A_{21}(\nu)$ через форм-фактор $\phi(\nu)$ спектральної лінії (1.5a), вираз для коефіцієнта підсилення можна переписати так :

$$k(\nu) = \frac{c^2 A_{21} \Delta}{8\pi \nu^2} \phi(\nu) = \frac{c^2 \Delta}{8\pi \tau_r} \frac{\phi(\nu)}{\nu^2}, \quad (1.44)$$

З цього виразу випливає, що спектральна залежність коефіцієнта підсилення взагалі кажучи відмінна від форми спектральної лінії. Проте в

межах відносно вузького спектрального контура люмінесценції ($\Delta\nu/\nu \sim 10^{-6} - 10^{-2}$) множник $1/\nu^2$ змінюється незначно (рис. 1.10). Тому можна вважати, що спектральна залежність коефіцієнта підсилення практично співпадає з контуром спектра люмінесценції. Зокрема величина $\Delta\nu/\nu$ становить для лазерних переходів: в атомах газів (He-Ne лазер) — $2.5 \cdot 10^{-6}$, в домішкових іонах в кристалах — 10^{-2} (Cr^{3+} в рубіні і Nd^{3+} в ітрій-алюмінієвому гранаті), в молекулах органічних барвників — 10^{-1} . Таким чином лише для органічних барвників контур $k(\nu)$ трохи відрізняється від форми смуги люмінесценції

Залежність максимального підсилення від ширини смуги люмінесценції. Оцінимо коефіцієнт підсилення в максимумі контура підсилення. Внаслідок нормування форм-фактора спектрального контура на площу між його висотою $\varphi(\nu_0)$ і півшириною $\Delta\nu$ існує взаємозв'язок: $a\varphi(\nu_0)\Delta\nu = 1$. Коефіцієнт пропорційності a залежить від форми спектрального контура: для Лоренцового $a = \pi$, для Гаусового $a = \sqrt{\pi}/\sqrt{\ln 2}$. Використавши це у виразі (1.44), знайдемо коефіцієнт підсилення на частоті ν_0 його максимуму для Лоренцового і Гаусового контурів відповідно:

$$k(\nu_0) = \frac{c^2 \Delta}{8\pi\tau_r} \frac{\varphi(\nu_0)}{\nu_0^2} = \frac{c^2 \Delta}{8\pi\tau_r \nu_0^2} \frac{1}{\pi \Delta \nu_L} \quad (1.45a)$$

$$k(\nu_0) = \frac{c^2 \Delta}{8\pi\tau_r \nu_0^2} \frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi} \Delta \nu_G}. \quad (1.45b)$$

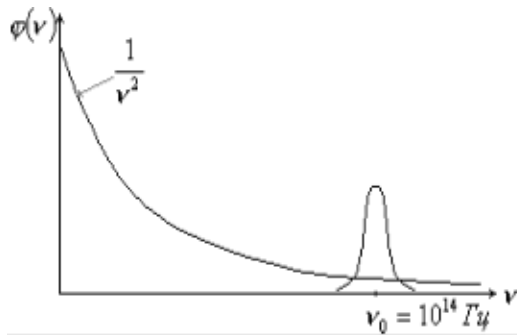


Рис. 1.10. Приблизний масштаб змін форм-фактора лінії і частотного множника в формулі (1.44).

Звідси видно, що максимальна величина коефіцієнта підсилення обернено пропорційна ширині лінії, тобто на вузьких лініях підсилення більше.

Слід зауважити, що цей висновок не стосується спектрів люмінесценції органічних барвників, для яких максимальне підсилення, навпаки, зростає із збільшенням їх ширини. Це обумовлено тим, що в багатоатомних молекулах барвників домінуючим фактором розширення спектра є не обмеження середнього часу життя на рівні, а коливальні стани молекули, які сильно розширюють електронні рівні між якими відбувається перехід.

Залежність коефіцієнта підсилення від спектрального діапазону.

З (1.45) видно, що коефіцієнт підсилення в максимумі контура зменшується при переміщенні у короткохвильову область як $\sim \frac{1}{\nu^2}$.

Тому при фіксованій інверсній населеності певну величину коефіцієнта підсилення значно легше отримати в інфрачервоній області ніж у видимій, а тим більше ультрафіолетовій. З цим пов'язані труднощі створення лазерів в

рентгенівському та γ -діапазоні: велике падіння коефіцієнта підсилення внаслідок збільшення частоти необхідно компенсувати таким же збільшенням величини інверсної населеності, що вимагає створення потужних систем накачування.

Сказане можна підтвердити прикладом для трьох найбільш широко вживаних ліній $He - Ne$ (табл. 1.1):

Табл.1.1

Довжина хвилі λ , мкм	3.39	1.15	0.63
Коефіцієнт підсилення на 1м	20дб=100раз	10 -12%	3-6%

Із таблиці видно, що коефіцієнт підсилення різко спадає при зменшенні довжини хвилі випромінювання від 3,39 мкм до 0,63 мкм.

Ефект насичення підсилення

Експоненціальне зростання інтенсивності пучка із збільшенням відстані(1.36), отримано в припущенні, що інверсна населеність Δn залежить від цієї інтенсивності k . Проте в дійсності при $\Delta > 0$ вимушені випромінювальні переходи переважають поглинання, тому інверсія насправді буде зменшуватися під дією випромінювання пучка. Залежність Δ від інтенсивності пучка I можна проаналізувати на моделі середовища дворівневих атомів.

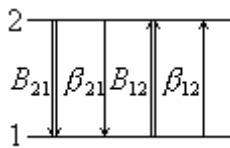


Рис. 1.11.

Будемо вважати, що між рівнями 2 і 1 двохрівневих атомів крім, вимушених переходів, що описуються ймовірностями $B_{21}\rho$ і $B_{12}\rho$, відбуваються переходи із ймовірностями β_{21} і β_{12} , що не залежать від густини випромінювання (рис. 1.11). Перша з них описує сумарну ймовірність спонтанного випромінювального (A_{21}) та безвипромінювального (Q_{21}) переходів: $\beta_{21} = A_{21} + Q_{21}$. Ймовірність β_{12} описує дію системи накачування, яка створює (відновлює) інверсію. Для простоти вважатимемо, що ступені виродженості рівнів однакові $g_2 = g_1$.

Зміна населеності рівнів з часом під дією цих процесів описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dn_2}{dt} = -B_{21}\rho n_2 - \beta_{21}n_2 + B_{12}\rho n_1 + \beta_{12}n_1, \\ n_1 + n_2 = n = \text{const}. \end{cases} \quad (1.46a)$$

$$(1.46b)$$

В цій системі із двох рівнянь три невідомі величини n_2, n_1 і ρ . Тому для її розв'язання бракує ще одного рівняння. Однак для стаціонарного випадку її можна легко розв'язати відносно n_2, n_1 , розглядаючи величину ρ як параметр, який задається вхідним пучком. На основі цього можна знайти залежності $\Delta(I)$ і $k(I)$.

Систему (1.46а,б) можна звести до одного рівняння для Δ , якщо скористатись очевидними співвідношеннями:

$$n_2 - n_1 = \Delta, \quad (1.47a)$$

$$n_2 + n_1 = n. \quad (1.47б)$$

Додаючи та віднімаючи ці рівняння знаходимо

$$n_2 = \frac{n + \Delta}{2}, \quad n_1 = \frac{n - \Delta}{2}. \quad (1.48)$$

Підставляючи їх у рівняння (1.46а) знаходимо:

$$\Delta = \frac{(\beta_{12} - \beta_{21})n}{\beta_{12} + \beta_{21} + 2B_{21}\rho}. \quad (1.49)$$

Після ділення чисельника і знаменника на $(\beta_{12} + \beta_{21})$ матимемо:

$$\Delta = \frac{\frac{\beta_{12} - \beta_{21}}{\beta_{12} + \beta_{21}} n}{1 + 2 \frac{B_{21}\rho}{\beta_{12} + \beta_{21}}} = \frac{\Delta_0}{1 + 2B_{21} \cdot \tau \cdot \rho} = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{I}{I_s}}, \quad (1.50)$$

де $\Delta_0 = \frac{\beta_{12} - \beta_{21}}{\beta_{12} + \beta_{21}} n$ – величина інверсної населеності при відсутності пучка,

$\tau_r = \frac{1}{\beta_{12} + \beta_{21}}$ – час релаксації населеності рівнів під дією двох процесів β_{21} і β_{12} ,

v – швидкість світла в середовищі, $I = \rho \cdot v$ – інтенсивність випромінювання.

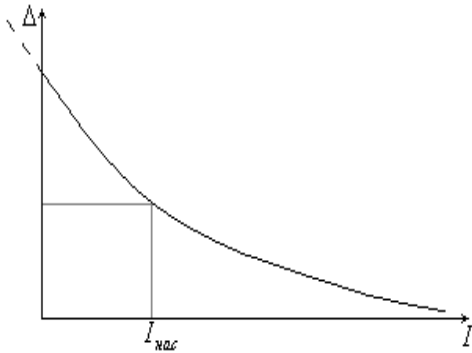


Рис. 1.12. Падіння інверсної населеності внаслідок ефекту насичення підсилення.

Як видно із (1.50) інверсна заселеність зменшується із збільшенням інтенсивності пучка по гіперболічному закону (рис. 1.12). Величина інтенсивності, при якій величина Δ падає вдвічі, називається інтенсивністю насичення I_s :

$$I_s = \frac{c}{2B_{21}\tau_r}. \quad (1.51)$$

Ця величина залежить від параметрів активного середовища (B_{21} , β_{21}) і системи накачування (β_{12}), проте може вважатися характеристикою середовища, оскільки зазвичай $\beta_{12} \sim \beta_{12}$ і тому можна вважати що $\tau_r \sim 2\beta_{21}$.

Використовуючи (1.38а) отримаємо аналогічний вираз для коефіцієнта підсилення:

$$k(I) = \frac{k_0}{1 + \frac{I}{I_s}}, \quad (1.51)$$

де k_0 – ненасичений коефіцієнт підсилення (при $I = 0$).

Падіння коефіцієнта підсилення із збільшенням інтенсивності пучка називається ефектом насичення підсилення. Він є причиною зменшення величини підсилення світлового пучка із збільшенням пройденої ним відстані. Для розгляду впливу насичення підсилення приймемо до уваги, що в реальному активному середовищі окрім підсилення існують також

втрати, обумовлені неактивним поглинанням (обумовлене неконтрольованими домішками) і розсіянням, які описуються коефіцієнтом ослаблення α . Тому зміна інтенсивності пучка при проходженні шару товщиною dz буде дорівнювати:

$$dI = k \cdot I \cdot dz - \alpha \cdot I \cdot dz = (k - \alpha) \cdot I \cdot dz, \quad (1.52)$$

Будемо спочатку вважати що коефіцієнт підсилення не залежить від інтенсивності пучка. Тоді, інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$I = I_0 \exp((k - \alpha) \cdot z). \quad (1.53)$$

Зроблені припущення справедливі лише при умові $I_0 \ll I_s$ і то лише на початкових ділянках активного середовища. При розповсюдженні через активне середовище інтенсивність випромінювання неперервно зростає, що призводить до монотонного зменшення коефіцієнта підсилення в глибинних шарах середовища. Тому вираз (1.53) несправедливий для всього середовища. Однак він може бути застосований до окремих тонких шарів середовища, таких, щона протязі їх товщини зміною коефіцієнта підсилення можна нехтувати. Тоді в межах кожного шару $k \approx const$ його величина зменшується при переході до наступного шару. Тоді в (1.53) можна вважати, що коефіцієнт підсилення залежить від діючої на цій глибині інтенсивності пучка відповідно до (1.51). Тобто:

$$I = I_0 \exp((k(I) - \alpha) \cdot z) \quad (1.53a)$$

Використовуючи ці уявлення можна з допомогою (1.53a) проаналізувати зміну інтенсивності пучка в активному середовищі з врахуванням впливу насичення підсилення (рис. 1.13). При малій вхідній інтенсивності $I_0 \ll I_s$ пучка $k \approx k_0 = const$ і інтенсивність на вході в середовище зростає по експоненті з показником пропорційним $(k_0 - \alpha)$. Із збільшенням z інтенсивність пучка зростає і поступово починає проявлятися ефект насичення підсилення, який призводить до падіння коефіцієнта підсилення. Внаслідок цього показник експоненти в (1.53a) падає, асимптотично наближаючись до нуля. В результаті темп наростання інтенсивності пучка по мірі заглиблення в середовище сповільнюється, а залежність $I(z)$ все більше віддаляється від експоненціальної. При великих z інтенсивність асимптотично наближається до граничного значення I_m , яке відповідає нульовому значенню показника експоненти знаходиться із умови $k_0(1 + I_m/I_s)^{-1} = \alpha$:

$$I_m = \left(\frac{k_0}{\alpha} - 1 \right) \cdot I_s. \quad (1.54)$$

Ефект насичення підсилення цікаво спостерігати в залежності кривої $I(z)$ від інтенсивності пучка на вході середовища. Якщо інтенсивність вхідного сигналу значна ($I_0 \sim I_s$), то коефіцієнт підсилення почне насичуватися відразу ж при вході в активне середовище і відхилення від експоненціального зростання буде спостерігатися вже в перших шарах середовища. Це відхилення зростатиме при наближенні I_0 до граничного значення I_m . При $I_0 = I_m$ інтенсивність пучка взагалі не змінюватиметься, а

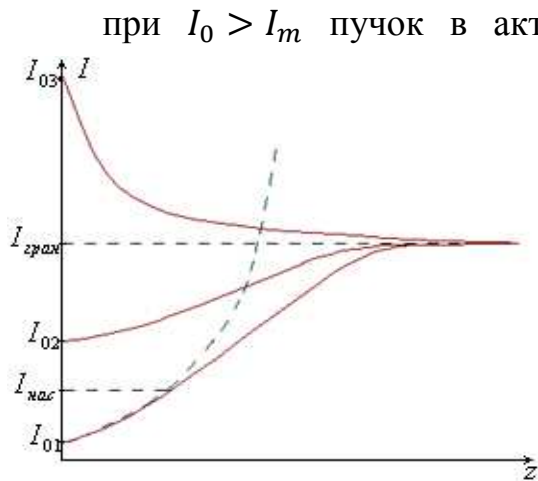


Рис. 1.13. Вплив ефекту насичення підсилення на залежність інтенсивності пучка від пройденого ним шляху.

експоненціальній. Незалежно від I_0 інтенсивність пучка в протяжному активному середовищі прагне до граничного значення I_m . Причому, в залежності від вхідної інтенсивності пучка це відбувається при підсиленні або ослабленні пучка.

при $I_0 > I_m$ пучок в активному середовищі буде ослаблятися не зважаючи на наявність в ньому інверсії. Це відбувається тому, що при інтенсивному вхідному сигналі ефект насичення підсилення зменшує коефіцієнт підсилення настільки, що він стає нижче коефіцієнта втрат.

Із цього аналізу видно, що експоненціальне зростання інтенсивності пучка (1.53) спостерігається лише при малосигнальному підсиленні ($I_0 \ll I_s$) і малій товщині активного середовища, а при більших значеннях I_0 залежність $I(z)$ значно відрізняється від

Умова самозбудження лазера

Підсилення світла можна використати для створення лазерної генерації, якщо забезпечити надходження частини підсиленого випромінювання з виходу активного середовища на його вхід. Принципова схема лазера зображена на рис. 1.14. В найпростішому варіанті лазер складається із активного середовища, розміщеного між двома плоскими паралельними чи сферичними дзеркалами, які складають оптичний резонатор. Перший тип резонатора називається плоско-паралельний, а інший – сферичний. Лінія, яка перпендикулярна до плоских дзеркал (або лінія, що проходить через фокуси сферичних дзеркал) називається оптичною віссю резонатора. Вона має ту властивість, що випромінювання, яке розповсюджується вздовж цієї осі може проходити багато разів через резонатор по чергові відбиваючись від дзеркал (для сферичного резонатора потрібно також, щоб між довжиною резонатора і радіусами кривизни дзеркал було певне співвідношення, яке буде розглянуте згодом). Крім того до складу лазера входить система накачування, яка створює інверсію в активному середовищі, переводячи його в режим підсилення світла. Спосіб створення інверсії і пристрої, які це забезпечують залежать від фізичних механізмів, які можна реалізувати в конкретному активному середовищі і будуть розглянуті пізніше.

Використовуючи наведену принципову схему визначимо при яких умовах можливе самозбудження такого лазера. Для простоти будемо вважати резонатор плоско-паралельним з коефіцієнтом відбиття дзеркал r_1 , r_2 і повністю заповненим активним середовищем. Зародження лазерної генерації починається із спонтанного випромінювання, в результаті чого виникає

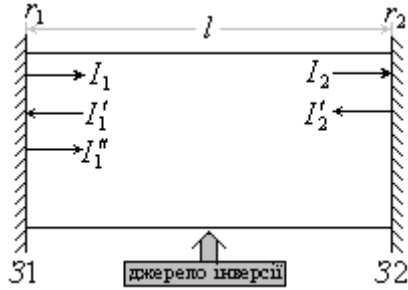


Рис.1.14. До виводу умови самозбудження лазера.

ізотропне за напрямком випромінювання, невелика частина якого з інтенсивністю I_1 розповсюджуватиметься вздовж осі резонатора. Для простоти будемо вважати, що це випромінювання виникло біля поверхні одного із дзеркал - $З_1$. Розповсюджуючись через активне середовище протяжністю l , це випромінювання підсилиться і біля поверхні іншого дзеркала ($З_2$) матиме інтенсивність

$$I_2 = I_1 e^{(k-\alpha)l}. \quad (1.55a)$$

Після відбиття від цього дзеркала його інтенсивність становитиме

$$I'_2 = I_2 r_2, \quad (1.55b)$$

а після повторного проходження активного середовища в зворотному напрямку, біля поверхні дзеркала $З_1$:

$$I'_1 = I'_2 \cdot e^{(k-\alpha)l}. \quad (1.55c)$$

І,накінець, після відбиття від дзеркала $З_1$ (після повного обходу резонатора):

$$I''_1 = I'_1 \cdot r_1. \quad (1.55d)$$

Умовою виникнення генерації є відтворення або зростання інтенсивності випромінювання після повного проходу резонатора, тобто $I''_1 \geq I_1$, або:

$$I_1 \cdot e^{2(k-\alpha)l} \cdot r_1 r_2 \geq I_1. \quad (1.56)$$

Звідки після логарифмування отримаємо умову самозбудження лазера:

$$k \geq \alpha + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r_1 r_2}. \quad (1.57)$$

Другий доданок в цьому виразі має зміст втрат, обумовлених неповним (відмінним від 100%) відбиванням дзеркал резонатора які називаються радіаційними. Хоч ці втрати зосереджені на поверхні дзеркал, але вони перераховуються в розподілені по резонатору завдяки діленню на довжину резонатора l таким чином мають однакову розмірність (см^{-1}) з іншими членами виразу. Умова самозбудження генерації (1.57) вимагає, щоб коефіцієнт підсилення перевищував сумарні втрати в резонаторі, включаючи радіаційні. З цієї точки зору ця умова ідентична амплітудній умові радіотехнічних генераторів.

З цієї умови випливає, що для її виконання необхідне перевищення певного порогового значення інверсії, яке знаходиться із (1.57):

$$\Delta_{i\delta} = \left(\alpha + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r_1 r_2} \right) \sigma^{-1}. \quad (1.58)$$

В картині виникнення генерації слід виділити такі важливі моменти.

1. Необхідною умовою виникнення генерації є наявність інверсії, що перевищує порогову величину $\Delta > \Delta_{\text{пор}}$, звідки впливає пороговий характер процесу генерації. Вона починається лише тоді, коли енергія накачування, щопоступає в активне середовище від системи накачування, перевищує порогову величину необхідну для створення $\Delta_{\text{пор}}$.
2. Хоч випромінювання генерації формується вимушеним випромінюванням, але для зародження генерації необхідне спочатку спонтанне випромінювання, яке відіграє роль спускового механізму.
3. Резонатор відіграє роль селектора спонтанних фотонів, який вносить фактор вибірковості за напрямком: тільки те спонтанне випромінювання, яке виникло в напрямку осі резонатора здатне багатократно підсилитися і перерости у лазерну генерацію. Випромінювання, яке виникло під іншими, навіть невеликими кутами до осі резонатора не зможе успішно конкурувати з випромінюванням вздовж осі, оскільки воно швидко залишить активне середовище.
4. У встановленні лазерної генерації важливу роль відіграє ефект насичення підсилення, який по мірі наростання інтенсивності генерації обмежує темп її зростання. При стаціонарній генерації ефект насичення підсилення зупиняє зростання інтенсивності генерації на певному рівні.

Особливості лазера як автоколивальної системи

Лазер є генератором електромагнітних хвиль оптичного діапазону. Як автоколивальна система він має свої особливості, порівняно із радіотехнічними генераторами електричних коливань. Для виявлення цих

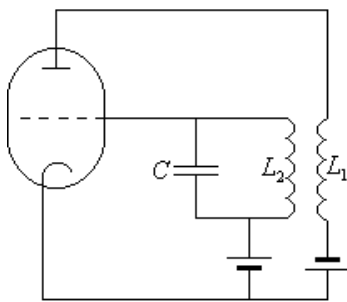


Рис. 1.15. Принципова схема лампового генератора електричних коливань.

особливостей нагадаємо принципи генерації електричних коливань. Розглянемо наприкладі найпростішого лампового генератора (рис. 1.15) який може використовуватись для генерації електромагнітних хвиль радіодіапазону.

Автоколивальна система в цьому випадку складається із таких принципових елементів

1. Коливальної системи, в якій збуджуються електричні коливання – L_2C контур;
2. Джерела енергії—анодна батарея, що забезпечує підтримку незатухаючих коливань в коливальному контурі;
3. Підсилювача коливань – електронної лампи з під'єднаною індуктивністю L_1 .
4. Системи позитивного зворотного зв'язку, який забезпечує надходження частини енергії з виходу генератора на його вхід – індуктивно зв'язані котушки L_1 і L_2 .

Необхідність позитивного зворотного зв'язку полягає у забезпеченні незатухаючих коливань в генераторі шляхом подачі частини енергії з виходу

підсилювача на його вхід для наступного підсилення. Для виникнення незатухаючих коливань в генераторі потрібно виконати амплітудну і фазову умови:

$$K\beta = 1, \quad (1.59a)$$

$$\varphi_k + \varphi_\beta = 0, \quad (1.59b)$$

де K і β - коефіцієнти передачі сигналу підсилювачем і системою зворотного зв'язку відповідно ($K, \beta = \Delta U_{\text{вих}} / \Delta U_{\text{вх}}$, де $\Delta U_{\text{вих}}$ і $\Delta U_{\text{вх}}$ зміна напруги на виході і вході), φ_k і φ_β - фазові зсуви, які вони вносять (тобто зсуви між коливаннями на вході і виході). Зміст амплітудної умови (1.59a) полягає в тому, що підсилювач повинен компенсувати ослаблення сигналу в системі зворотного зв'язку, коефіцієнт передачі якої $\beta < 1$. Зміст фазової умови в тому, що електричні коливання, які поступають через зворотний зв'язок на вхід підсилювача, повинні бути у фазі із існуючими там коливаннями (позитивний зв'язок). Для цього індуктивно зв'язані котушки L_1 і L_2 в схемі генератора повинні бути під'єднані певним чином. В такому випадку коливання будуть незатухаючі, оскільки втрати енергії будуть компенсуватись підсилювачем.

Коливання в генераторі починаються із шумових коливань напруги в коливальному LC контурі, які поступають на сітку лампи, підсилюються і через індуктивний зв'язок котушок L_1 і L_2 повертаються в коливальний контур. Такий процес повторюється циклічно. На початковому етапі $k \cdot \beta > 1$ і амплітуда цих коливань швидко наростає. Це триває доти, поки не почнуться нелінійні спотворення сигналу коефіцієнт підсилення впаде до рівня, при якому $k\beta = 1$. З цього моменту встановляться незатухаючі коливання з частотою, що дорівнює частоті власних коливань контура.

У високочастотних генераторах їх компоненти змінюються конструктивно (коливальний контур замінюється резонатором, лампа — магнетроном) але принцип генерації коливань залишається тим самим.

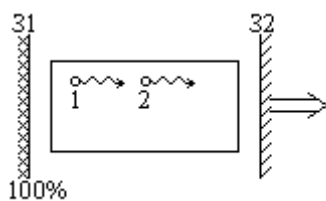


Рис. 1.16. Принципова схема лазера.

В лазері, як автоколивальній системі, наведені вище принципові елементи мають ряд особливостей:

1. Роль коливальної системи відіграють атоми (молекули, іони і т.п.), які випромінюють кванти світла при переходах між рівнями енергії. Вони задають частоту випромінювання і є аналогом коливального контура в радіотехнічних генераторах.
2. Джерелом енергії є система накачування—аналог анодної батареї в лампових генераторах.
3. Роль підсилювача відіграє активне середовище, що складається із збуджених атомів, які вимушено випромінюють при проходженні через них світлового пучка.
4. Роль системи зворотного зв'язку відіграє оптичний резонатор, дзеркала якого повертають частину пучка назад в активне середовище. Лазерна генерація починається при умові самозбудження лазера (1.57), яка

еквівалентна амплітудній умові (1.59б) радіотехнічного генератора електричних коливань.

Згадана еквівалентність стає явною, якщо врахувати, що коефіцієнти передачі сигналу і коефіцієнти підсилення зв'язані співвідношеннями:

$$K = \exp(kl), \quad (1.60a)$$

$$\beta = \exp \left[- \left(\alpha + \frac{1}{2l} \ln \frac{1}{r_1 r_2} \right) l \right] \quad (1.60b)$$

Після підставки їх в амплітудну умову (1.59б) і логарифмування вийде (1.57). В той же час лазер, як автоколивальна система, принципово відрізняється від радіотехнічного генератора тим, що вінне потребує спеціального пристрою, який забезпечує фазову умову (аналога індуктивно зв'язаних котушок L_1 і L_2). Ця умова виконується автоматично завдяки ефекту вимушеного випромінювання, який забезпечує повну еквівалентність генерованого випромінювання вже існуючому: атом 2 випромінює з тією ж фазою, яку йому нав'яже випромінювання атома 1 (рис. 1.16). Цим лазерна генерація принципово відрізняється від генерації електричних (електромагнітних) коливань радіотехнічних генераторів.

Слід зауважити, що частота випромінювання лазера визначається не лише переходом між відповідними енергетичними рівнями атома, а й резонатором - завдяки його резонансним властивостям, обумовлених інтерференцією двох зустрічних хвиль. Ця інтерференція призводить до існування незатухаючих (добротних) коливань лише на певних частотах (модах резонатора). Тому можна сказати, що резонатор входить не тільки в систему зворотного зв'язку, але й в коливальну систему разом із атомами. Ця його роль не принципова для виникнення генерації, але надзвичайно важлива. Завдяки цьому випромінювання лазера стає винятково монохроматичним, оскільки ширина спектрального контура визначається не шириною спектра випромінювання атома, а шириною контура моди резонатора, яка на кілька порядків менша.

ФОРМУВАННЯ ЛАЗЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ В ОПТИЧНОМУ РЕЗОНАТОРІ

Механізми впливу оптичного резонатора на формування лазерного випромінювання

Резонатор є надзвичайно важливим елементом лазера оскільки в ньому формується випромінювання генерації. В найпростішому випадку резонатор складається із двох плоских дзеркал з високою точністю паралельних один одному ($\sim 1'$ та вище), між якими розміщене активне середовище.

З точки зору встановлення генерації роль резонатора полягає в створенні позитивного зворотного зв'язку і забезпеченні амплітудної умови генерації (1.59а), при якій в резонаторі виникають незатухаючі хвилі (при умові тривалого існуванні інверсії в активному середовищі). Якщо приймати до уваги лише фактор підсилення випромінювання, то виникнення незатухаючих хвиль можна отримати також і в нескінченно протяжному активному середовищі, в якому вимушене випромінювання і ефект насичення підсилення сформує випромінювання граничної інтенсивності (рис. 1.13). Подібна ситуація реалізується в так званих надсвітних (однопрохідних) лазерах. Однак таке випромінювання по суті є не генерацією, а багатократно підсиленою люмінесценцією. Тому вплив резонатора не зводиться до простого подовження активного середовища, еквівалентного багатократно проходженню випромінювання через резонатор. Він проявляється у формуванні гострої діаграми спрямованості випромінювання в напрямі осі резонатора, формуванні поперечної структури лазерного пучка і лінійчатого спектра генерації. Визначимо механізми кожного з цих ефектів і якісно опишемо їх прояви.

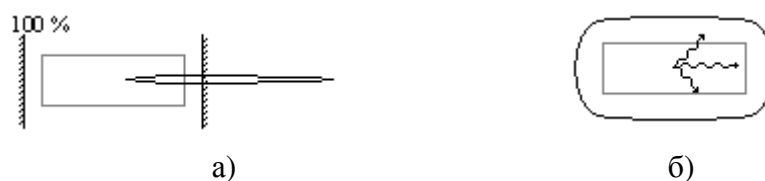


Рис. 2.1. Спрямованість вимушеного випромінювання в резонаторі (а) і без резонатора (б).

Формування спрямованого випромінювання є принциповою і дуже важливою функцією резонатора. Адже тільки ті спонтанні фотони, які випроменились вздовж оптичної осі зможуть пройти активне середовище багаторазово, значно розмножитись і перетворитися у випромінювання генерації. Фотони, які виникли під значними кутами до осі, не зможуть пройти через активне середовище багато разів і розмножаться значно менше (не кажучи вже про фотони, випромінені під великими кутами). Більш того, по мірі зростання інтенсивності спрямованого вздовж осі пучка зростає і ймовірність вимушеного випромінювання в цьому напрямку, в той час як ймовірність спонтанного випромінювання залишається сталою і ізотропною. Тому з

деякого моменту ймовірність вимушеного випромінювання вздовж осі пучка стає домінуючою і надалі практично вся запасена інверсія буде потрачена на створення лазерного пучка. Таким чином завдяки резонатору випромінювання ОКГ стає спрямованим, з шириною діаграми спрямованості близької до дифракційної межі (порядку кутових хвилин) (рис.2.1а). Вимушене випромінювання активного середовища без резонатора розподілене практично ізотропно, оскільки можливість розмноження фотонів у всіх напрямках практично однакова (рис.2.1б).

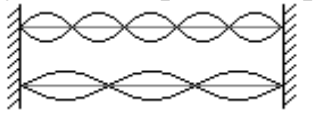


Рис. 2.2. Поле поздовжніх мод резонатора.

Іншою важливою функцією резонатора є формування спектрального складу генерованого випромінювання. Це відбувається внаслідок двох ефектів: звуження спектрального контура випромінювання і інтерференції зустрічних хвиль, які виникають в резонаторі. Перший ефект обумовлений

переважним підсиленням на центральній частоті контура випромінювання, що було описано в попередньому розділі. Інтерференція зустрічних хвиль призводить до виникнення стоячих хвиль, які називають *поздовжніми*, або *аксіальними модами* резонатора (рис.2.2). Оскільки в двох дзеркальному резонаторі ці хвилі утворюють вузли на поверхні обох дзеркал, то на довжині резонатора l повинно укладатись ціле число півхвиль:

$$L = \frac{\lambda'}{2} q, \text{ де } \lambda' = \lambda/n' - \text{довжина хвилі в активному середовищі, а } \lambda - \text{зовні його, } n' - \text{показник заломлення активного середовища. Ціле число } q, \text{ що визначає кількість півхвиль, називається порядком аксіальної моди. Таким чином аксіальні моди це стаціонарні розподіли поля, які встановлюються вздовж осі резонатора і відрізняються одна від одної кількістю півхвиль, що вкладаються на довжині резонатора. Виникнення аксіальних мод призводить до того, що вимушене випромінювання відбувається на довжинах хвиль } \lambda_q = \frac{2L}{q}, \text{ які із збільшенням } q \text{ змінюються дискретно і утворюють лінійчатий спектр. На осі частот ці лінії розташовані еквідистантно } \nu_q = \frac{c}{2Ln} q.$$

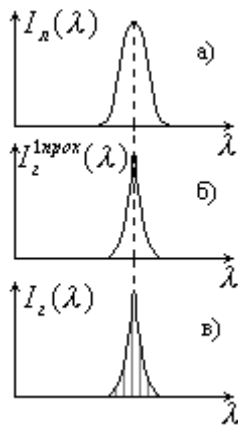


Рис. 2.3. Спектри випромінювання люмінесценції (а), надсвітлого лазера (б) та лазера з резонатором (в).

На рис.2.3 схематично показано послідовний вплив обох факторів. Якби вплив резонатора зводився лише до ефективного подовження активного середовища, то випромінювання генерації мало б звужений суцільний спектр підсиленої люмінесценції, характерний для надсвітлого лазера (рис.2.3а, б). Інтерференція зустрічних хвиль призводить до перетворення цього суцільного спектра на лінійчатий, в якому інтенсивність ліній визначається його контуром (рис.2.3в).

Вплив резонатора на розподіл поля випромінювання в поперечному перерізі пучка відбувається завдяки дифракції на дзеркалах. Очевидно, що хвиля, яка відповідає рівномірному розподілу поля по поверхні дзеркал,

матиме великі дифракційні втрати при багаторазовому проходженні резонатора і тому швидко затухатиме. Хвиля, що відповідає полю, сконцентрованому в центрі дзеркал (рис.2.4), матиме значно менші дифракційні втрати, оскільки амплітуда її поля швидко зменшується до країв дзеркал. Тому така хвиля існуватиме в резонаторі набагато довше і при підсиленні в активному середовищі створить спрямований пучок із аналогічним розподілом інтенсивності в його поперечному перерізі.

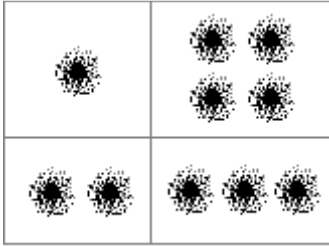


Рис.2.4. Схематичний розподіл інтенсивності випромінювання мод на прямокутних дзеркалах резонатора.

Майже такі ж малі втрати матиме і хвиля з розподілом поля, якому відповідає два максимуми інтенсивності на поверхні дзеркал. Аналогічно можуть існувати хвилі, яким відповідають поля з більшою кількістю таких максимумів. Хвилі з такими розподілами так само створюють спрямовані пучки із аналогічним розподілом інтенсивності в поперечному перерізі. Очевидно, що дифракційні втрати цих хвиль зростатимуть із збільшенням кількості цих максимумів, оскільки амплітуда поля на краях дзеркал теж зростатиме.

Зрозуміло, що розподіл поля в поперечному перерізі пучка залежатиме також від форми дзеркал, оскільки від цього залежить дифракційна картина. Тому цей розподіл різний для пучків, сформованих в резонаторах з круглими і прямокутними дзеркалами. Хвилі, яким відповідають такі конфігурації електромагнітного поля в поперечному перерізі пучка, які не змінюються (тобто є стаціонарними) при відбиваннях випромінювання від дзеркал називаються поперечними модами. Ці конфігурації проявляються у відповідному розподілі поля і інтенсивності на дзеркалах та в поперечному перерізі пучка, який формується в активному середовищі, і розповсюджується вздовж осі резонатора. Поперечні моди характеризуються двома індексами m і n , які задають розподіл напруженості поля і інтенсивності випромінювання вздовж поперечних координат. У випадку резонатора з прямокутними дзеркалами – ці індекси дорівнюють числам, які на одиницю менше, ніж кількість максимумів в розподілі інтенсивності вздовж декартових координат x і y . Найбільше важливою є мода з єдиним максимумом розподілу, яка називається основною, або найнижчою модою резонатора 00, оскільки її випромінювання має найкращі параметри для застосування. При даній конфігурації поля в поперечному перерізі може встановлюватися багато стоячих хвиль. Тому при даній поперечній моді існує багато повздовжніх мод.

Підсумовуючи цей попередній розгляд, можна сказати, що завдяки резонатору в активному середовищі утворюється поле випромінювання, яке є модами цього резонатора. Ці моди характеризуються певним розподілом поля в поздовжньому і поперечному напрямках, що призводить до дискретності частотного і просторового спектра випромінювання. Детально утворення мод буде розглянуто далі.

Оптичні резонатори

В лазерах, як зазначалось раніше, використовується резонатор, утворений дзеркалами. Від радіотехнічного резонатора, що використовується для збудження і утримування електромагнітного випромінювання надвисоких частот (НВЧ) він відрізняється відсутністю бокових стінок. Тому він називається *відкритим* або *оптичним*. Найчастіше оптичний резонатор є системою двох дзеркал з плоскою або сферичною поверхнею, розташованих на відстані $L \gg \lambda$ і з'юстованих так, щоб забезпечити багатократне проходження випромінювання через резонатор при відбитті від його дзеркал. У випадку двох плоских дзеркал (плоско паралельний резонатор) дзеркала з'юстовані паралельно і утворюють інтерферометр Фабрі-Перо заповнений активним середовищем (рис. 2.5). Надалі вважатимемо, що активне середовище не збуджене і тому не підсилює випромінювання - резонатор пасивний.

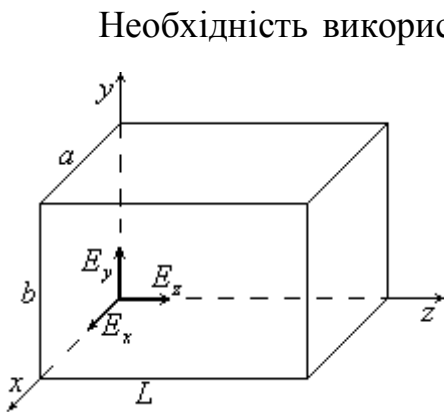


Рис.2.5. Закритий резонатор.

Необхідність використання в лазерах відкритих резонаторів витікає із аналізу властивостей електромагнітного поля в закритих резонаторах. З цією метою розглянемо резонатор у вигляді прямого паралелепіпеда із провідними стінками, всередині якого знаходиться вакуум. Виберемо для опису декартову систему координат з осями, орієнтованими вздовж ребер резонатора (рис.2.5). Напруженість електричного поля електромагнітних хвиль в резонаторі описується векторним хвильовим рівнянням, яке є наслідком рівнянь Максвелла.

Для даної геометрії резонатора, в якому поле може існувати у вигляді набору плоских хвиль, це рівняння набуває вигляду

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

з умовами, що накладаються виразами:

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad (2.1a)$$

$$E_n = 0. \quad (2.1b)$$

Перша з них (2.1a) – задає поперечність хвиль: $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$, а інша (2.1b) є граничною умовою, яка вимагає рівності нулю тангенціальної компоненти поля на стінках резонатора; \vec{k} - хвильовий вектор з модулем $k = \frac{\omega}{c}$.

Розв'язки рівняння для амплітуд компонент поля мають вигляд:

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ E_y = A_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ E_z = A_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{cases} \quad (2.2)$$

Гранична умови (2.1a) накладає обмеження на можливі значення хвильового вектора. Зокрема компонента E_x є тангенціальною на лівій ($z=0$) і правій ($z=L$) стінці резонатора (див. рис.2.5) і тому при цих значеннях z

набуває нульових значень, звідки випливає, що $k_z L = q\pi \rightarrow k_z = \frac{\pi}{L} q$. Аналогічні висновки можна зробити і відносно інших компонент, що в підсумку призводить до дискретності проекцій хвильових векторів:

$$k_x = \frac{\pi}{a} n, \quad k_y = \frac{\pi}{b} m, \quad k_z = \frac{\pi}{L} q, \quad n, m, q \in N \quad (2.3)$$

і його модуля:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{L^2}} \quad (2.4)$$

з кроками дискретності, що визначаються величинами $\Delta k_x = \frac{\pi}{a}$, $\Delta k_y = \frac{\pi}{b}$, $\Delta k_z = \frac{\pi}{L}$.

Розв'язок рівняння (2.1) можна подати у комплексному вигляді, еквівалентному (2.2):

$$E = 0.5 \cdot E_0 \exp [i(\omega t \pm k_x \pm k_y \pm k_z) + \text{к. с.}], \quad (2.5)$$

звідки видно, що випромінювання закритого резонатора з фіксованим значенням модуля хвильового вектора k є суперпозицією восьми плоских хвиль, які відповідають всім можливим комбінаціям проекцій цього хвильового вектора на осі координат $\pm k_x, \pm k_y, \pm k_z$.

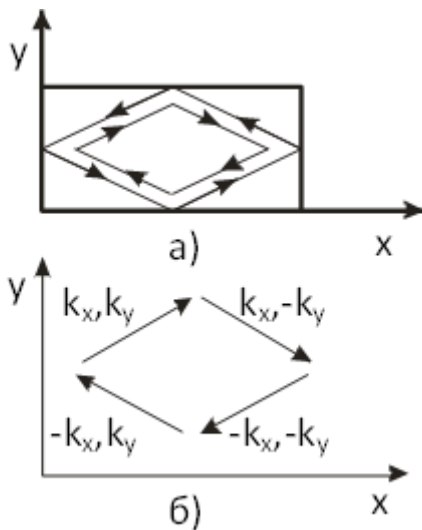


Рис.2.6. Суперпозиція хвиль з фіксованим модулем k в двовимірному резонаторі.

Утворення суперпозиції хвиль з фіксованим k можна краще уявити на прикладі двовимірного резонатора, схематично зображеного на рис.2.6а. Видно, що при кожному відбитті від стінки резонатора одна із компонент хвильового вектора змінює знак (рис.2.6б): $(k_x, k_y) \rightarrow (k_x, -k_y) \rightarrow (-k_x, -k_y) \rightarrow (-k_x, k_y)$. В результаті, при повному обході резонатора, реалізується наведені вище чотири комбінації проекції хвильового вектора. Хвилі з такими комбінаціями компонент хвильового вектора формують разом біжучу хвилю, яка по чергово відбивається від усіх чотирьох стінок резонатора.

Причому, таких хвиль існує дві, які розповсюджуються назустріч одна одній (рис.2.6а). Вони формують стоячу хвилю, яка має вузли і пучності вздовж обох осей координат.

В трьохвимірному резонаторі стояча хвиля формується двома зустрічними хвилями, утвореними вісьмома складовими - по кількості комбінацій компонент хвильового вектора в (2.5). Відстані між цими пучностями (чи вузлами) задаються значеннями проекцій хвильового вектора на відповідні осі (2.3). Із них випливає, що:

$$\frac{\lambda_x}{2} n = a, \quad \frac{\lambda_y}{2} m = b, \quad \frac{\lambda_z}{2} q = L, \quad n, m, q \in N, \quad (2.3a)$$

де $\lambda_x/2$, $\lambda_y/2$, і $\lambda_z/2$ мають зміст відстані між пучностями (вузлами) поля вздовж відповідних осей, а індекси n , m і q визначають кількість вузлів (півхвиль), що поміщаються між стінками резонатора, перпендикулярними цим осям. Співвідношення є узагальненням виразу $L = \frac{\lambda}{2} q$ для стоячих хвиль, утворених при відбитті від двох паралельних дзеркал, що є одновимірним резонатором. З тою відмінністю, що відстань між пучностями в цьому резонаторі дорівнює половині довжини хвилі, а в трьохвимірному резонаторі вони відрізняються.

Стоячим хвилям, що описуються виразами (2.2) разом з (2.3) і (2.3а) відповідають стаціонарні розподіли амплітуд коливань електричного поля в резонаторі, між точками якого немає переносу енергії, тому їх називають типами коливань резонатора. Типи коливань з певними значеннями індексів n , m і q називаються модами резонатора. Індокси мод однозначно визначають розподіл напруженості електричного поля всередині закритого резонатора. Моды прийнято позначати аббревіатурою TEM_{nmq} , що в перекладі означає поперечна електромагнітна хвиля.

На рис.2.6 наведена найпростіша ситуація, коли біжуча хвиля відбивається лише по одному разу від кожної стінки резонатора. В загальному випадку кількість відбиттів від стінок може бути великою, що залежить від кута падіння біжучої хвилі на стінки резонатора і його розмірів. Показовим є випадок, коли резонатор протяжний в одному напрямку, наприклад $L \gg a, b$. Пара стінок резонатора, що обмежують розповсюдження вздовж осі z (які $\perp OZ$) назвемо умовно торцевими, а інші – боковими. При розповсюдженні біжучої хвилі вздовж осі z вона багато разів відіб'ється від бокових стінок резонатора, перш ніж досягне торцевих стінок. Таке розповсюдження, яке супроводжується багатократним відбиттям від бокових стінок, характерне для хвилеводів. Відбиття від торцевих стінок повертає біжучу хвилю назад в хвилевод. Це дозволяє уявити стоячі хвилі в закритому резонаторі як «затиснуті» торцевими стінками «хвилеводні» хвилі.

Наведені вище міркування не стосуються витягнутого резонатора як такого. Вони знадобилися лише для того, щоб ясніше уявити утворення поля в резонаторі. Ці висновки справедливі для резонаторів довільних розмірів з врахуванням того, що в таких резонаторах поняття бічних і торцевих стінок стає умовним.

Хвилі з різними проекціями хвильового вектора, але однаковим значенням його модуля, мають одну і ту ж частоту, що впливає із формули $k = \frac{2\pi\nu}{c} n$. В межах наведеної вище інтерпретації це цілком закономірно, ці хвилі є складовими однієї і тієї «затиснутої хвилеводної» хвилі – моди резонатора. Використовуючи (2.4) знаходимо її частоту:

$$\nu_{nmq} = \frac{c}{2n} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{L^2}}. \quad (2.6)$$

Із цього виразу видно, що спектр коливань закритого резонатора дискретний. Він складається із частот окремих мод, які визначаються їх індексами n , m і q .

По аналогії із радіочастотною областю моди відкритого резонатора позначаються TEM_{nmq} , де аббревіатура означає термін «поперечна електромагнітна хвиля».

Іншою важливою характеристикою резонатора є його добротність Q , яка є кількісною мірою якості коливальної системи. Вона визначається відношенням запасеної в резонаторі енергії W_C до втраченої за один радіан коливань W_R , яка в свою чергу виражається через енергію W_T втраченою за один період: $W_R = W_T/2\pi$. Таким чином:

$$Q = \frac{W_C}{W_R} = 2\pi \frac{W_C}{W_T}. \quad (2.7)$$

Величина Q пов'язана з часом затухання енергії коливань резонаторі, яке описується формулою:

$$W_C = W_{C0} \exp(-t/\tau), \quad (2.8)$$

де W_{C0} - початкова енергія коливань. Звідси диференціюванням можна знайти втрачену за період енергію W_T : $W_T = \Delta W_{C, \Delta t = \tau} = (T/\tau) W_{C0} \exp(-t/\tau) =$

$W_C(T/\tau)$. Підставляючи її в (2.7), знаходимо:

$$Q = 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega \tau. \quad (2.9)$$

Використовуючи співвідношення $\Delta\omega_{0.5} \cdot \tau = 1$ цю формулу можна переписати у вигляді:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{0.5}}. \quad (2.10)$$

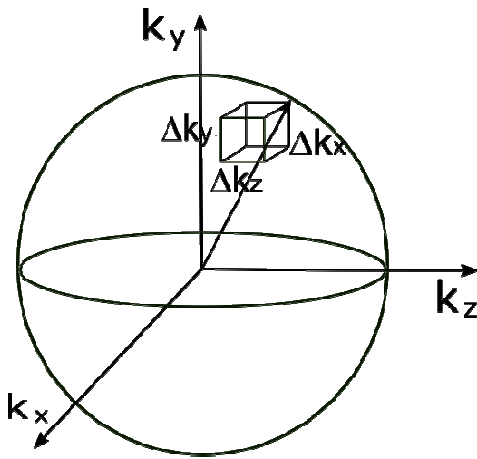


Рис.2.7. Схематичне зображення об'єму моди в k -просторі.

Знайдемо густину спектральних ліній в спектрі закритого резонатора. З цією метою підрахуємо кількість N_m мод з хвильовими векторами, модуль яких лежить в межах від 0 до k . Вона дорівнюватиме відношенню об'єму, що займають всі моди в k -просторі до об'єму, що припадає на одну моду - відповідно об'єму сфери з радіусом k , і величини $\Delta V = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{abL} = \frac{\pi^3}{V}$.

Враховуючи зазначене, матимемо:

$$N_m = \frac{4/3 \pi k^3}{\pi^3} V = \frac{4}{3} \frac{k^3 V}{\pi^2} \quad (2.11)$$

Врахуємо, що частоти визначається модами резонатора, кожна з яких утворюється вісьмома плоскими хвилями, які відрізняються проекціями

хвильового вектора, але мають однаковий модуль k . Тому результат слід поділити на вісім. Крім того слід врахувати, що кожна мода може мати дві поляризації, тому результат слід подвоїти. В підсумку матимемо:

$$N_m = \frac{1}{3} \frac{k^3 V}{\pi^2} = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} V. \quad (2.11a)$$

Звідси кількість коливань в частотному інтервалі $\nu \div \nu + \Delta\nu$ та у відповідному інтервалі довжин хвиль $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$:

$$\Delta N_m = \frac{dN}{d\nu} \Delta\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \Delta\nu = \frac{8\pi V}{\lambda^4} \Delta\lambda. \quad (2.11b)$$

Із цієї формули видно, що кількість коливань (спектральних ліній) в межах заданого спектрального інтервалу різко зростає із збільшенням частоти. Проілюструємо це на прикладі переходу з області надвисоких частот (НВЧ) радіодіапазону (де закриті резонатори зазвичай використовуються) в оптичний діапазон. Для резонатора об'ємом $V=1 \text{ см}^3$ і спектрального інтервалу $\Delta\lambda = 0.1 \text{ нм} = 10^{-8} \text{ см}$ в НВЧ діапазоні, де $\lambda \sim 1 \text{ см}$, величина $N_m \approx 10^{-7}$, що відповідає дуже точному налаштуванню резонатора. В оптичному діапазоні, де $\lambda \sim 1 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ см}$, густина мод зростає до $N_m \approx 10^9$. Крім того, збільшення частоти ν призводить до скорочення часу τ затухання коливань в резонаторі, що збільшує півширину спектральних контурів мод $\Delta\nu = 1/2\pi\tau$ і

при великій густині ліній призводить до перекриття їх контурів (Рис.2.8). В результаті резонатор втрачає резонансні властивості і запасена в ньому енергія випромінюється не на одній частоті, а розпорошується практично неперервно по всьому спектру.

Залежність часу затухання від частоти задається формулою (2.9а), в якій $Q(\nu)$. Для замкнутої металевої порожнини $Q = L/\delta$, де δ - глибина проникнення випромінювання в метал - товщина скін-шару. Ця товщина зменшується із зростанням частоти $\delta \sim \nu^{-1/2}$, що в підсумку дає зростання добротності: $Q \sim \delta^{-1} \sim \nu^{1/2}$. Тоді у відповідності з (2.9а) і (2.9б)

$$\tau = Q/2\pi\nu \sim \nu^{-1/2} \text{ і } \Delta\nu \sim \nu^{1/2}. \quad (2.12)$$

Для того, щоб в оптичному діапазоні відновити резонансні властивості закритого резонатора, потрібно відповідним чином зменшити його об'єм. Але, оскільки необхідне для цього значення $N_m < 1$, то це означає зменшення об'єму в 10^9 раз, що призведе до такого самого зменшення накопиченої в резонаторі енергії W_C коливань.

Крім того, із зменшенням об'єму зменшується і добротність резонатора:

$$Q = 2\pi \frac{W_R}{W_T} \sim \frac{V}{S} \sim \sqrt[3]{V}, \quad (2.13)$$

оскільки втрачена за період енергія W_T пропорційна омічним втратам в стінках резонатора, які в свою чергу пропорційні їх площі $S \sim V^{2/3}$. Таким чином намагання відновити резонансну налаштованість шляхом зменшення

розмірів резонатора призведе до додаткового скорочення часу затухання порівняно із скороченням, викликаним збільшенням частоти (2.12).

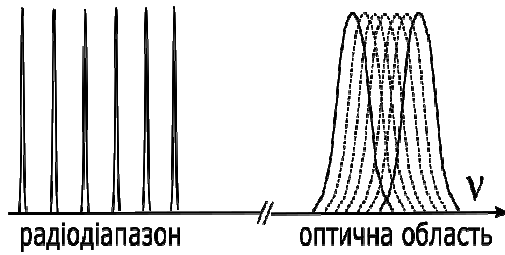


Рис.2.8. Залежність спектра мод закритого резонатора від частотного діапазону і прорідження його у відкритому резонаторі.

Із (2.11б) легко бачити, що $N_m = 1$ досягається при $V \sim \lambda^3$, тобто при лінійних розмірах закритого резонатора порядку λ , що для оптичної області, в якій $\lambda < 1$, зробити нереально.

Відкритий резонатор в першому наближенні можна розглядати як граничний випадок закритого, як правило витягнутого вздовж осі z , резонатора, в якому відсутні бічні стінки. При відкиданні бічних стінок закритий резонатор перетворюється

на інтерферометр Фабрі – Перо (ІФП) з великою базою. В такому резонаторі з'являється сильна залежність втрат енергії від кута між хвильовим вектором плоских хвиль, які утворюють моду і віссю резонатора, оскільки при збільшенні цього кута ці хвилі швидко покидатимуть резонатор через відсутність відбивання бокових стінок. Оскільки цей кут пропорційний поперечним індексам моди $\theta_y = \frac{k_y}{k_z} = \frac{L}{bq} m$, $\theta_x = \frac{L}{aq} n$, то звідси випливає, що у відкритому резонаторі з'являється сильна селекція поперечних мод. Виживають лише моди з невеликими індексами n і m , випромінювання яких розповсюджується під малими кутами ($\sim 1^\circ - 5^\circ$) до осі і тому зможе пройти багато разів через резонатор, відбиваючись лише від торцевих стінок-дзеркал, перш ніж вони покинуть його через відсутність відбивання бокових стінок. При цьому найбільшу перевагу мають аксіальні моди, яким відповідають поперечні індекси $n, m = 0$ і хвильовий вектор $k(0, 0, \pi q/L)$ яких спрямований строго вздовж осі резонатора, а тому їх випромінювання затухає лише через часткове пропускання дзеркал.

Усунення переважної кількості мод у відкритому резонаторі призводить до сильного прорідження спектра випромінювання. В результаті цього зникає перекриття контурів мод і відновлюються резонансні властивості резонатора, як це показано на рис. 2.8, де контури мод, що залишилися, зображені суцільними лініями, а ті, що зникли – пунктиром. Таким чином, перехід до відкритого резонатора вирішує основну проблему при застосуванні його в лазерах: забезпечення резонансного налаштування резонатора при значних його розмірах, що дозволяє використовувати протяжні активні середовища необхідних розмірів.

Дифракція на дзеркалах, змінюватиме розподіл поля в поперечному напрямку до осі оптичного резонатора, тобто по фронту хвиль, що

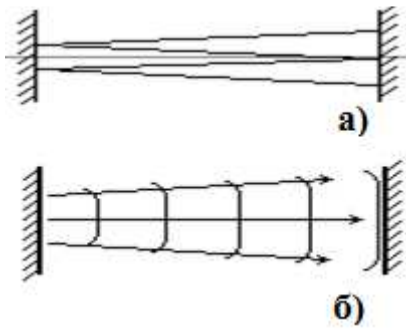


Рис.2.9. Розповсюдження (а) і хвильові фронти (б) випромінювання у плоско-паралельному оптичному резонаторі.

утворюють моди, але практично не змінюватиме форму їх хвильового фронту. Зокрема в плоско паралельному резонаторі форма хвильового фронту залишатиметься плоскою із незначним відставанням на краю дзеркал (рис.2.9). Розподіл амплітуди поля по фронту змінюватиметься із рівномірного (2.5) на суттєво нерівномірний - з концентрацією поля поблизу осі резонатора.

Тому можна вважати, що в плоско-паралельному резонаторі випромінювання мод складається із плоских хвиль амплітуда яких спадає від осі резонатора до його країв, що підтверджуються експериментальними даними і результатами чисельного моделювання, виконаними Фоксом і Лі, викладеними в наступному розділі. Збереження плоских хвиль при переході до відкиданні бокових стінок дає підстави розглядати відкритий резонатор як граничний випадок закритого резонатора. Це було зроблено Шавловим і Таунсом, внаслідок чого цей підхід названо теорією Шавлова і Таунса.

Спектр випромінювання плоско-паралельного оптичного резонатора

Розглядаючи відкритий резонатор як граничний випадок закритого резонатора, для знаходження його спектру можна скористатись формулою (2.6), врахувавши, що в ній $n, m \ll q$. Покладаючи для простоти $a = b$, отримаємо:

$$\nu_{nmq} = \frac{c}{2Ln'} q \sqrt{1 + \frac{n^2 + m^2}{q^2} \frac{L^2}{a^2}} \approx \frac{c}{2Ln'} q \left(1 + \frac{n^2 + m^2}{2q^2} \frac{L^2}{a^2} \right) \quad (2.14)$$

Для типових параметрів резонатора $L = 1\text{ м}$, $\lambda = 1\text{ мкм}$, $a = 1\text{ см}$ величина q становитиме $q = \frac{L}{\lambda/2} = 2 \cdot 10^6$. Тому:

$$\nu_{nmq} \approx \frac{c}{2Ln'} q \left(1 + 1,25 \cdot 10^{-9} (n^2 + m^2) \right). \quad (2.14a)$$

Звідси можна зробити висновок, що поперечні індекси мало впливають на величину частоти випромінювання відкритого резонатора. Її значення визначається в основному індексом q , а тому вона практично співпадає із частотою аксіальних мод

$$\nu_q = \frac{c}{2Ln'} q, \quad (2.15)$$

яким відповідають стоячі хвилі між дзеркалами резонатора. Як видно із (2.14б) спектр аксіальних еквідистантний, з відстанню між спектральними лініями, яка дорівнює міжмодовому інтервалу

$$\Delta \nu_q = \frac{c}{2Ln'}. \quad (2.16)$$

Використовуючи (2.16) вираз (2.14) можна переписати у вигляді

$$\nu_{nmq} = \Delta \nu_q \left[q + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 + n^2}{q} \right) \frac{L^2}{a^2} \right] \quad (2.14в)$$

Із цього виразу видно, що спектр поперечних мод з певним значенням поперечного індексу n (для простоти покладемо $m = 0$) що відповідає різним поздовжнім індексам q теж еквідистантний з тим же інтервалом, але

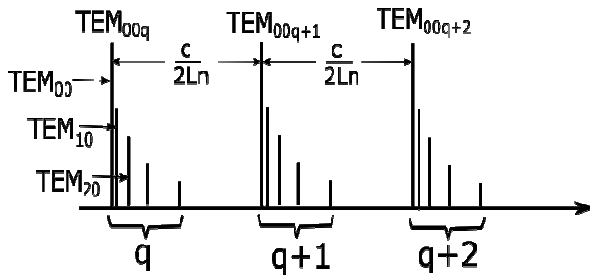


Рис.2.10. Спектр мод плоско-паралельного резонатора.

зсунутий відносно спектра аксіальних мод на малу величину пропорційну квадрату індекса поперечної моди (рис.2.10). Через це частоти поперечних мод з різними індексами n зосереджені біля ліній аксіальних мод, поступово віддаляючись від них пропорційно n^2 . При збільшенні n лінія поперечної моди TEM_{n0q} може досягнути лінії наступної аксіальної

моди TEM_{00q+1} , подолавши міжмодовий інтервал, що їх розділяє. Це станеться, коли другий доданок в (2.14в) стане рівним одиниці. Звідси знайдемо кількість частот поперечних мод, що знаходяться між двома сусідніми поздовжніми модами:

$$n = \frac{a}{L} \sqrt{2q} \quad (2.17)$$

що для наведених вище параметрів резонатора це становить $n=14$. Таким чином в типових випадках між лініями двох сусідніх аксіальних мод може міститись півтора – два десятка ліній поперечних мод. Тобто, незважаючи на

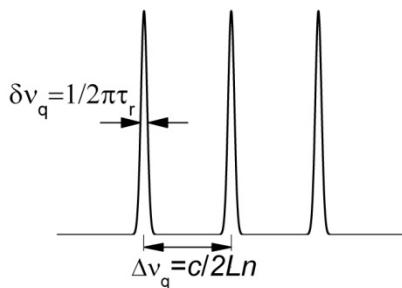


Рис.2.11. Розділення аксіальних мод оптичного резонатора.

малий внесок поперечних мод у частоту випромінювання, цей внесок становить помітну частину міжмодового інтервалу $\Delta \nu_q$.

Переконаємось, що контури аксіальних мод не перекриваються, тобто, що оптичний резонатор має резонансні властивості. Для цього порівняємо відстань між лініями (2.14в) з шириною їх спектрального контура $\delta \nu_q$. Останню величину знайдемо як $\delta \nu_q =$

$(2\pi\tau_r)^{-1}$ (див. (1.30а)), де τ_r - час життя (існування) випромінювання в резонаторі, який пропорційний кількості p повних обходів резонатора, яке здійснить випромінювання за час свого існування. Тобто $\tau_r = \frac{2Ln'}{c} p = \frac{p}{\Delta \nu_q}$.

Враховуючи це співвідношення знаходимо:

$$\delta \nu_q = \frac{1}{2\pi\tau_r} = \frac{\Delta \nu_q}{2\pi p} \quad (2.15)$$

Для розділення спектральних контурів мод необхідно виконання умови (рис.2.11):

$$\delta\nu_q < \Delta\nu_q, \quad (2.16)$$

яка виконується якщо $2\pi p > 1$, для чого достатньо щоб кількість повних обходів резонатора перевищувала одиницю. Отже, якщо забезпечується принаймні один повний обхід резонатора, то контури аксіальних мод в ньому розділені і оптичний резонатор має резонансні властивості.

Оцінимо тепер частотний інтервал $\delta\nu_{m,m+1}$ між двома сусідніми поперечними модами і покажемо, що контури поперечних мод (принаймні у практично важливих випадках) теж розділяються. Для цього перепишемо вираз (2.14) у вигляді:

$$\nu_{mq} = \Delta\nu_q \left[q + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 + n^2}{q} \right) \frac{L^2}{a^2} \right] \quad (2.17)$$

Звідси інтервал $\delta\nu_{m,m+1}$ дорівнюватиме:

$$\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{\Delta\nu_q}{2} \frac{L^2[(m+1)^2 - m^2]}{a^2 q} = \frac{L^2 \Delta\nu_q}{a^2 q} \left(m + \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

Перепишучи множник перед дужками у вигляді $\Delta\nu_q \cdot \frac{L\lambda}{a^2/4} \frac{L}{4q\lambda} = \frac{\Delta\nu_q}{8N}$, матимемо:

$$\Delta\nu_{m,m+1} = \Delta\nu_q \frac{(m+1/2)}{8N}, \quad (2.19)$$

де $N = \frac{L\lambda}{(a/2)^2}$ число Френеля, фізичний зміст якого буде вияснено пізніше.

Зауважимо, що для дзеркал круглої форми (які зазвичай використовуються) величина $a' = a/2$ має зміст радіуса, що надає цьому виразу простішої форми:

$$N = \frac{L\lambda}{(a')^2}.$$

Із (2.19) видно, що міжмодовий інтервал для поперечних мод $\delta\nu_{m,m+1}$ залежить від індексу моди і числа Френеля. Використовуючи (2.9) і (2.19) умову розділення поперечних мод запишемо у вигляді

$$\delta\nu_m < \Delta\nu_{m,m+1}, \quad (2.20)$$

де $\delta\nu_m = \omega/2\pi Q_m$, Q_m - добротність поперечної моди з індексом m . Звідси знаходимо, що для розділення поперечних мод необхідна певна добротність резонатора:

$$Q > \frac{4\omega N}{\pi\Delta\nu_q(m+1/2)}, \quad (2.21)$$

яка залежить від числа Френеля, порядку поперечної моди m і міжмодового інтервалу $\Delta\nu_q$.

Вважаючи в (2.20), що ширина контурів аксіальної і поперечної мод однакові, отримаємо умову розділення поперечних мод, виражену через число повних обходів резонатора, яке повинно здійснити випромінювання за час його існування:

$$p > \frac{4N}{\pi(m+1/2)} . \quad (2.22)$$

Звідси видно, що у важливому випадку $N=1$ (використовується при селекції поперечних мод) $p > \frac{4}{\pi(m+1/2)} \sim \frac{1}{m}$ і, отже, поперечні (як і аксіальні) моди розділяються якщо забезпечується не менше ніж один повний обхід резонатора.

Для типових параметрів резонатора оцінимо порядок величин інтервалів між сусідніми аксіальними $\Delta\nu_q$ та поперечними $\Delta\nu_{m,m+1}$ модами, а також напівширину $\delta\nu_q$ контура моди в частотах та довжинах хвиль. Перші дві оцінки можуть бути зроблені безпосередньо по формулах (2.16) і (2.19). Для оцінки останньої величини по формулі (2.15) необхідно знайти час життя випромінювання у резонаторі (синонім: час життя фотона в резонаторі), що можна зробити розглянувши послідовне проходження паралельного пучка в між з'юстованими дзеркалами резонатора з коефіцієнтами відбивання r_1 і r_2 , між яким знаходиться середовище з втратами за один прохід, які опишемо коефіцієнтом пропускання T .

Розглянемо зміну інтенсивності випромінювання в залежності від часу t , який вважатимемо кратним тривалості повного обходу резонатора $t_0 = \frac{2Ln'}{c}$. Після кожного відбиття від дзеркала інтенсивність пучка зменшуватиметься в r_1 (чи r_2) разів, а при проходженні середовища – в $(1-T)$. Тому після повного обходу резонатора вона дорівнюватиме:

$$I = I_0 r_1 r_2 (1 - T)^2, \quad (2.21)$$

а після p обходів - в момент часу $t_p = \frac{2Ln'}{c} p$:

$$I(t_p) = I_0 [r_1 r_2 (1 - T)^2]^p. \quad (2.21)$$

Такою ж формулою буде описуватись повна кількість фотонів в резонаторі, яка пропорційна цій інтенсивності:

$$q(t_p) = q_0 [r_1 r_2 (1 - T)^2]^p \quad (2.22)$$

де I_0 і q_0 – початкові значення інтенсивності та кількості фотонів. З іншого боку кількість фотонів в резонаторі, як і в будь-якій коливальній системі, затухатиме експоненціально:

$$q(t_p) = q_0 \exp(-t_p/\tau_r) = q_0 [\exp(-)]^p, \quad (2.23)$$

де τ_r - час життя фотона в резонаторі. Прирівнюючи (2.22) і (2.23) знаходимо:

$$\tau_r = - \frac{2Ln'}{c \ln[r_1 r_2 (1-T)^2]}. \quad (2.24)$$

Для резонаторів, які використовують в He-Ne лазерах, типові значення параметрів $r_1=0.99$, $T \approx 0$, $n'=1$, $L=0.5$ м. Час життя фотона в такому резонаторі становить $\tau_r \approx 66t_0$, що значно перевищує час одного повного обходу резонатора $t_0 = 0.5 \cdot 10^{-8}$ с. Використовуючи це значення, матимемо $\delta\nu_q = \frac{1}{2\pi\tau_r} = 0,48$ МГц, що в довжинах хвиль становить

$\delta\lambda_q = 1/c \lambda^2 \delta\nu_q \sim 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ нм}$. Це надзвичайно мала величина, яка набагато менша, ніж ширина ліній при електронних переходах навіть в ізольованих атомах, що становить $\delta\nu_q = 16 \text{ МГц}$ або $\delta\lambda_q = \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ нм}$.

ДИФРАКЦІЙНА ТЕОРІЯ ОПТИЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ

Вплив дифракції на формування поперечних мод

Розглянутий в попередньому розділі підхід базувався на теорії закритих резонаторів, висновки з якої переносились і на оптичний резонатор, що розглядався як граничний випадок закритого резонатора. У відповідності з цією теорією (вирази (2.1) (2.5)) моди випромінювання відкритого резонатора утворюються плоскими хвилями з однорідним розподілом поля по фронту. Однак у відкритому резонаторі на формування випромінювання в оптичному резонаторі суттєво впливає дифракція. Тому у відкритому резонаторі не можуть існувати плоскі хвилі з однорідним розподілом амплітуди електричного поля по поверхні дзеркал. Якщо припустити, що на одному з плоских дзеркал виник такий однорідний розподіл, то при розповсюдженні випромінювання в напрямі до іншого дзеркала його фронт розшириться внаслідок дифракції і обріжеться при відбитті на краях цього дзеркала. Внаслідок цього периферійна частина пучка зазнає втрат. Цей процес повторюватиметься при кожному наступному відбитті.

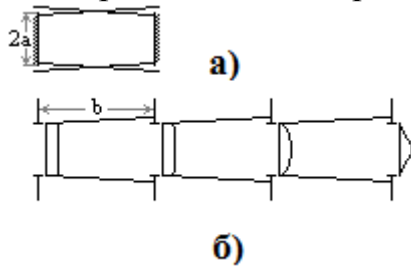


Рис.3.1. Еквівалентність почергового відбиття (а) випромінювання дзеркалами резонатора і проходження ним системи співосних отворів (б).

Розповсюдження випромінювання між дзеркалами резонатора еквівалентне проходженню пучка випромінювання через систему співосних отворів діаметром $2a$ рівним діаметру дзеркал і розташованим на відстані b рівній довжині резонатора (рис. 3.1). При кожному проходженні отвору дифракція на ньому розширюватиме пучок і він частково екрануватиметься наступним отвором. В результаті багатократного проходження отворів (еквівалентного багатократному відбиттю від дзеркал) відбуватиметься дифракційне

розтікання енергії від осі до краю пучка де відбуватиметься втрата енергії через екранування. Оскільки при кожному проході отвору дифракційні втрати енергії хвилі зосереджені на краю фронту, то після багатьох відбиттів розподіл енергії набуватиме форми, що характеризується швидким спаданням амплітуди електромагнітних коливань до країв дзеркал. Можна чекати, що після багатьох актів відбивань і дифракції настане момент, коли розподіл поля по перетину пучка перестане змінюватися. Така конфігурація електромагнітного поля, яка не змінюється при відбиваннях випромінювання від дзеркал є власним типом коливань – модою електромагнітного поля в відкритому резонаторі. Оскільки коливання, які виникають таким чином, стосуються розподілу поля в поперечному перерізі пучка, то вони відповідають поперечним модам оптичного резонатора.

Таким чином поперечні моди відкритого резонатора це такі самоузгоджені конфігурації електромагнітного поля в поперечному перерізі пучка, які після виникнення в резонаторі не змінюються при відбиваннях і

дифракції на дзеркалах. Кількість таких мод обмежена. Вона обмежується дифракційними втратами, які стрімко зростають із збільшенням порядку моди із-за наближення максимумів розподілу поля до країв дзеркала. Приклади розподілів поля в різних поперечних модах схематично були наведені на рис. 2.4.

Метод Фокса-Лі і його застосування до плоско-паралельного резонатора

Виникнення поперечних мод в відкритому резонаторі вперше було розглянуто Фоксом і Лі в 1961 р. Вони розробили досить простий і наглядний

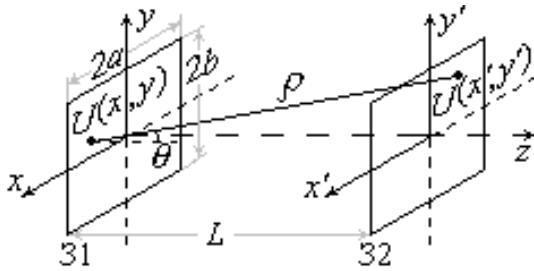


Рис. 3.2. До розрахунку розподілу поля на дзеркалах.

метод обчислення розподілу поля на дзеркалах і встановлення поперечних мод відкритого плоско-паралельного резонатора. Цей підхід згодом було успішно застосовано і для розрахунку поля сферичних резонаторів. Сутність цього методу в наступному.

Нехай на плоскому дзеркалі 31 розміром $2a \times 2b$ амплітуда напруженості електричного поля задається функцією $U(x, y)$ (рис. 3.2). Для простоти вважатимемо поле лінійно поляризованим. Напруженість $U(x', y')$ поля на другому дзеркалі можна обчислити за допомогою дифракційного інтегралу Френеля-Кірхгофа:

$$U(x', y') = \frac{ik}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b U(x, y) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) dx dy, \quad (3.1)$$

де k – хвильовий вектор, ρ – відстань від точки випромінювання на дзеркалі 31 до точки спостереження на дзеркалі 32, θ – кут, який утворює відрізок ρ з віссю резонатора (нормаллю до дзеркал). Оскільки в цьому інтегралі поля від різних ділянок дзеркала 31 сумуються скалярно, то ця формула застосовна при умові $\lambda \ll a, b \ll L$ – в цьому випадку кут між векторами напруженості полів малий і ним можна нехтувати. В лазерних резонаторах ці умови виконуються дуже добре. Після p проходів резонатора поле на дзеркалі $U_p(x', y')$ буде результатом дифракції на іншому дзеркалі, яке в свою чергу сформувалося за попередній прохід $U_{p-1}(x, y)$. Вони пов'язані між собою цією ж формулою:

$$U_p(x', y') = \frac{ik}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b U_{p-1}(x, y) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) dx dy. \quad (3.2)$$

Після багатьох проходів логічно припустити, що розподіл поля на дзеркалах буде зазнавати незначні зміни і з часом стане незмінним – стаціонарним. В цьому випадку поле при кожному новому проході буде змінюватись лише по амплітуді. Тому можна записати

$$U_p(x, y) = \left(\frac{1}{\gamma} \right)^p v(x, y), \quad (3.3)$$

де функція $v(x, y)$ описує розподіл поля, який не змінюється при відбитті і дифракції на дзеркалах, а γ – комплексна постійна, на яку змінюється амплітуда напруженості поля. Сенса постійної γ видно з співвідношення між амплітудами поля при двох послідовних відношеннях

$$U_p(x, y) = \frac{1}{\gamma} U_{p-1}(x, y), \quad (3.4)$$

яке можна переписати з врахуванням $\gamma = e^{\beta + i\alpha}$ таким чином

$$U_p = e^{-\beta - i\alpha} \cdot U_{p-1} = e^{-\beta} \cdot e^{-i\alpha} \cdot U_{p-1}. \quad (3.5)$$

Звідси видно, що дійсна частина β описує згасання хвилі, а уявна α – зміну фази за один прохід резонатора.

Підставляючи (11) в (10) отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^p v(x', y') = \frac{ik}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{p-1} v(x, y) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) dx dy. \quad (3.6)$$

Або

$$v(x', y') = \frac{ik\gamma}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b v(x, y) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) dx dy \quad (3.6a)$$

де $K = \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} (1 + \cos \theta)$ – ядро інтегрального рівняння.

Розв'язуючи це рівняння, можна визначити власні функції цього рівняння $v_{nm}(x, y)$ і власні значення γ_{nm} . Ці власні функції задають стаціонарний розподіл поля на дзеркалах, який встановився в результаті багаторазового відбиття і дифракції на дзеркалах. Вони будуть поперечними модами плоско паралельного резонатора. Власні значення γ_{nm} , при яких рівняння (15) має розв'язки визначають зсув фаз і дифракційні втрати для даної моди.

Враховуючи нерівність $a, b \ll L$, в рівнянні (3.6a) можна покласти $\rho \approx L$ в знаменнику підінтегрального виразу і $\cos \theta \approx 1$. Що стосується ρ в показнику експоненти, то враховуючи, що $\exp(-ik\rho)$ періодична функція, заміна $\rho \rightarrow L$ занадто груба. Тому її потрібно розкласти в ряд:

$$\rho = \sqrt{L^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2} \approx L \left\{ 1 + \frac{1}{2L^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2] \right\}$$

Тоді рівняння (3.6a) набуде вигляду

$$v(x', y') \approx \frac{ike^{-ikL}}{2\pi L} \int_{-a}^a \int_{-b}^b v_p(x, y) e^{-i\frac{k(x-x')^2}{2L}} \cdot e^{-i\frac{k(y-y')^2}{2L}} dx dy. \quad (3.7)$$

В цьому рівнянні ядро симетричне – воно є добутком двох співмножників, які залежать від різних змінних. Тому в шуканий розв'язок може бути записаний як добуток двох функцій, кожна з яких залежна лише від однієї координати:

$$v(x, y) = v_x(x) \cdot v_y(y). \quad (3.8)$$

Отримаємо

$$v_x(x) v_y(y) = \frac{ik\gamma e^{-ikL}}{2\pi L} \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a v_x(x) e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2L}} dx \right) v_y(y) e^{-\frac{ik(y-y')^2}{2L}} dy \quad (3.9)$$

Це рівняння розпадається на два рівняння окремо відносно функцій $v_x(x)$ і $v_y(y)$:

$$v_x(x') = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\lambda L}} \gamma_x \int_{-a}^a v_x(x) \cdot e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2L}} dx; \quad (3.10a)$$

$$v_y(y') = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\lambda L}} \gamma_y \int_{-b}^b v_y(y) \cdot e^{-\frac{ik(y-y')^2}{2L}} dy, \quad (3.10б)$$

де враховано, що $\sqrt{i} = \sqrt{e^{\frac{i\pi}{2}}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а $\gamma_x \cdot \gamma_y = \gamma \cdot e^{-ikL}$.

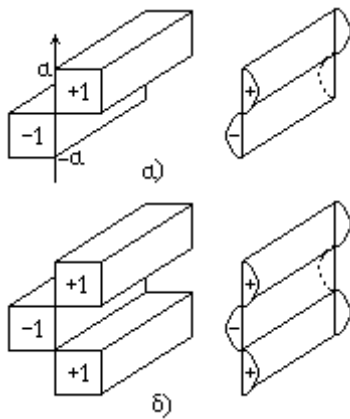


Рис. 3.3. Початковий і кінцевий розподіли поля на одномірних дзеркалах для мод TEM_{1q} і TEM_{2q} .

Рівняння (3.10a) і (3.10б) є рівняннями для знаходження поля мод резонатора. Переписані через відповідні інтегральні оператори, вони мають вигляд $Lv(x') = \sigma v(x)$. Їх розв'язками є набір власних функцій $v_n(x)$ і $v_m(y)$ які описують розподіли поля поперечних мод резонаторів з уявними «одномірними» дзеркалами, а власні значення σ_n та σ_m – дифракційні втрати і фазовий зсув коливань за один прохід резонатора. Ці дзеркала обмежені лише по одній координаті: відповідно по x і по y . Їх можна уявити у вигляді нескінченно довгих смужок шириною $2a$ і $2b$ витягнутих відповідно вздовж осей y і x . Внаслідок обмеження розмірів дзеркал лише по одній координаті дифракція на них відбувається теж

лише по цій координаті. Відповідно до (3.8) розподіли поля мод резонатора з двомірними дзеркалами описуються добутком розподілів поля мод в резонаторах з одномірними дзеркалами:

$$v_{nm}(x, y) = v_n(x) \cdot v_m(y) \quad (3.11)$$

Інтегральні рівняння Фредгольма з таким, як в (3.10a) і (3.10б) ядром аналітично не розв'язується. Їх можна розв'язати методом послідовних наближень. Причому внаслідок їх симетрії достатньо розв'язати одне з них, наприклад (3.10a). Сутність методу полягає в тому, що спочатку задається довільний розподіл поля на першому дзеркалі і по формулі (3.10a) з допомогою комп'ютера чисельним методом обчислюється поле на іншому. Потім отриманий результат підставляється знову в (3.10a) і обчислюється поле на першому дзеркалі. Обчислення продовжують циклічно до тих пір поки не виконається умова (3.4), тобто поки функція $v_n(x)$ перестане

змінюватись. Знайдена таким чином функція визначає розподіл поля моди на одномірному дзеркалі. Розподіл поля моди на двомірному дзеркалі визначається (3.11), в якій комбінуються знайдені розподіли поля мод резонаторів з одномірними дзеркалами.

Метод послідовних наближень цікавий тим, що дозволяє відстежити процес встановлення мод. Кожен новий крок у обчисленнях відповідає новому відбиванню. Таким чином, слідкуючи за результатом обчислень після кожного нового кроку, можна відстежувати як змінюється розподіл поля на дзеркалах при кожному відбиванні і дифракції.

Початковий розподіл при обчисленнях може задаватись довільно. Однак враховуючи еквівалентність всіх точок дзеркала, цей розподіл

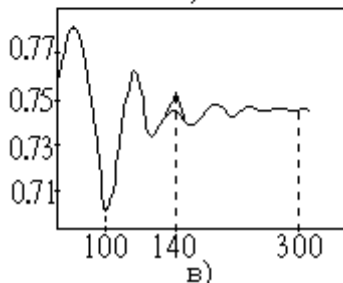
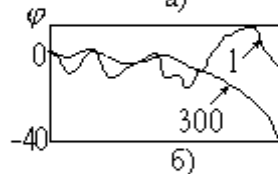
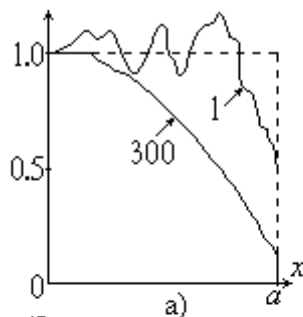


Рис.3.4. Розподіл амплітуди (а) і фази напруженості електричного поля на одномірному дзеркалі після одного і 300 проходів резонатора. в) залежність амплітуди поля в довільній точці дзеркала від кількості проходів резонатора.

що цей розподіл відтворюється при наступних проходах з точністю до 0,03 %. Наведений розподіл відповідає найнижчій поперечній моді з індексом $n = 0$

Оскільки початковий розподіл був однорідний, то уявна частина вирахованої функції $v_p(x)$ дає розподіл фази коливань по поверхні дзеркала після p проходів резонатора. Виявилось, що аналогічно до амплітуди, після 300 проходів резонатора розподіл фази на поверхні дзеркала також стає

доцільно задавати або однорідним (з однаковою амплітудою і фазою по всьому дзеркалу): $v(x, y) = 1$ ($-a < x < a$) і $v(x, y) = 0$ ($x < -a$, $x > a$), або періодичним - найзручніше у вигляді меандру - двополярного періодичного розподілу прямокутної форми (рис.3.3).

Розв'язок рівняння (3.10) показав, якщо початковий розподіл на одному з дзеркал задати однорідним, то після першого проходження в розподілі випромінювання $v(x', y')$ на іншому дзеркалі спостерігаються виразні дифракційні максимуми, обумовлені дифракцією на апертурі першого дзеркала. Однак вже після 300 проходів встановлюється стаціонарний розподіл поля на дзеркалах, який характеризується рівномірним спадом амплітуди поля від середини до країв дзеркала. (рис.3.4а). Враховуючи дзеркальну симетрію розподілу середини одномірного (смугового) дзеркала, результати наведені на рис. 3.4 для половини дзеркала.

Якщо на дзеркалі обрати довільну точку і слідкувати за амплітудою поля в цій точці, то виявиться, що вже після 100 проходів коливання амплітуди від проходження до проходження затухають, а після 300 проходів ці коливання не перевищують ті ж самі 0,03 % (рис.3.4в). Тому можна вважати,

стаціонарним (рис.3.4б). При цьому фаза на краю дзеркала менше ніж в центрі приблизно на $\Delta\varphi = 40^\circ < \pi/4$. Це дуже мале запізнення краю фронту хвилі відносно його центральної частини порівняно із зміною фази за прохід, що дорівнює $\varphi = q\pi$, де $q = 10^6$. В інтерферометрії таке значення $\Delta\varphi$ відповідає відхиленню від площинності $\lambda/9$. Тому хвилі в оптичному плоско-паралельному резонаторі можна вважати плоскими з великим ступенем точності. Це свідчить, що при переході від закритого до відкритого резонатора змінюється лише розподіл поля по фронту хвилі, а форма фронту не змінюється.

Після того як розв'язки стануть стаціонарними і коливання амплітуди зникнуть, її величина в фіксованій точці зменшуватиметься після кожного проходу лише внаслідок дифракційних втрат. Це дає можливість вирахувати величину дифракційних втрат за один прохід як дійсну частину відношення

$$\gamma = \frac{v_{p-1}(x)}{v_p(x)}. \quad (3.4a)$$

Якщо початковий розподіл задати у вигляді одного періоду двополярного меандра: $v(x, y) = 1$ ($0 < x < a$) і $v(x, y) = 1$ ($-a < x < 0$),

то після багатьох проходів теж отримується стаціонарний розв'язок, схематично зображений на рис. 3.3а. Крива розподілу амплітуди коливань по координаті нагадує період синусоїди, однак на відміну від неї, максимумами цієї кривої значно більш виражені, а її ордината швидше спадає до країв дзеркала. Цей розподіл відповідає моді наступного порядку з індексом $n=1$. Він відрізняється від попереднього тим, що на середині дзеркала знак поля змінюється. Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна E^2 , то цій моді буде відповідати дві плями, розділені темною смугою на середині дзеркала, на місці лінії де E змінює знак.

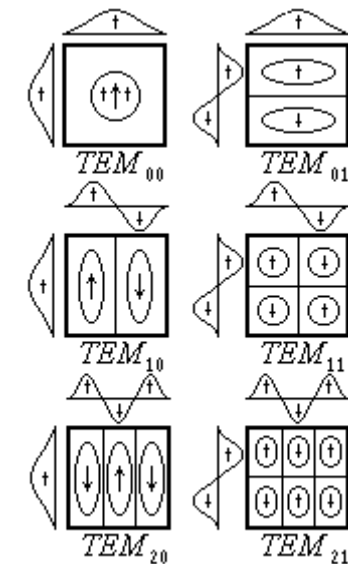


Рис.3.5. Схематичний розподіл амплітуди напруженості електричного поля поперечних мод на поверхні двомірного дзеркала.

Задаючи початковий розподіл у вигляді півтора періоду двополярного меандра (рис.3.3б) отримаємо моду, в якій знак поля змінюється в двох місцях. Цій моді відповідають три смуги (плями). Це мода з індексом $n=2$. Таким чином візуально поперечні моди відрізняються кількістю темних смуг де поле змінює знак. Це покладено в основу класифікації поперечних мод. Індекс поперечної моди дорівнює кількості разів зміни знаку поля при русі від однієї кромки смуги до іншої (або кількості темних смуг).

Моди резонатора з двомірними прямокутними дзеркалами утворюються відповідно до (3.11) перемноженням різних комбінацій розподілів поля мод резонаторів з одномірними дзеркалами. На рис.3.5

схематично показано, що перемноження цих одномірних розподілів призводить до утворення на поверхні прямокутного дзеркала областей з протилежними (зсунутими на π) фазами, які

показані стрілками різного напрямку. Вони межують між собою і там де вони сходяться виникає темна смуга, оскільки коливання з протилежними фазами гасять одне одного. Таким чином нижні індекси в позначеннях TEM моди вказують порядок моди, які визначаються кількістю разів зміни знаку вздовж кожної з сторін прямокутного дзеркала (або кількість темних смуг).

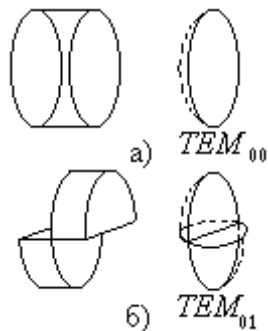


Рис.3.6. Початковий розподіл напруженості поля для розрахунку розподілу поля поперечних мод на круглому дзеркалі.

Враховуючи, що аксіальний індекс впливає лише на розподіл поля вздовж осі резонатора, який дуже дрібномасштабний із-за дуже великої величини $q \sim 10^6$ і тому його зазвичай в позначеннях не вказують.

В переважній більшості лазерних резонаторів дзеркала мають круглу форму. Методика розрахунку розподілу поля мод в таких резонаторах аналогічна випадку прямокутних дзеркал. Але виходячи з циліндричної симетрії резонатора інтегральне рівняння слід записувати в полярних координатах r, φ . Відповідно і власні значення цих рівнянь будуть виражатись через полярні координати. Виходячи із симетрії ядра інтегрального рівняння відносно координат r, φ , власні функції $v_{nm}(r, \varphi)$ цього рівняння можуть бути записані як добуток двох функцій, кожна з яких залежна лише від однієї з координат. Тобто власні функції рівняння рівні добутку радіальної та кутової частин. Причому функція, залежна від φ , задана явно як $\exp(-im\varphi)$ і її шукати не потрібно. Тому кругові зміни амплітуди поля завжди періодичні (косинусоїдальні). Таким чином:

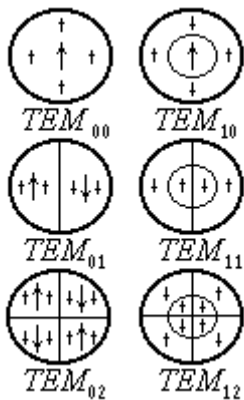


Рис.3.7. Схематичний розподіл напруженості поля поперечних мод на круглому дзеркалі.

$$v_{nm}(r, \varphi) = R_{nm}(r) \cdot e^{-im\varphi}. \quad (3.12)$$

Відповідно до цього виразу при $m=0$ розподіл поля від кута не залежить; при $m=1$ амплітуда $\text{Re } v_{n,m=1}(r, \varphi) \sim \cos \varphi$ має два нулі (при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\frac{3}{2}\pi$); при $m=2$ — чотири нулі і т.д. Ці значення кутів задають вузлові прямі, при переході яких напруженість поля змінює знак. Тобто вони розмежовують області з протилежними фазами. Кутовий індекс m визначає кількість цих прямих.

Радіальна функція знаходиться із інтегрального рівняння

$$v(r, \varphi) = R_n(r) e^{-im\varphi}; \quad R_n(r_2) \sqrt{r_2} = \gamma_n \int_0^a k_n(r_2 r_1) R_n(r_1) \sqrt{r_1} dr_1, \quad (3.13)$$

в якому ядро

$$k_n(r_2 r_1) = i^{n+1} \cdot \frac{k}{b} \cdot I_n \left(k \frac{r_1 r_2}{b} \right) \sqrt{r_1 r_2} \cdot e^{-ik \frac{(r_1^2 + r_2^2)}{2L}} \quad (3.14)$$

виражається через функцію Бесселя $I_n \left(k \frac{r_1 r_2}{b} \right)$.

Це рівняння також вирішується лише чисельно методом послідовних наближень. Для розрахунку поля найнижчої моди початковий розподіл поля на дзеркалі задається рівномірним (рис. 3.6а), як і в прямокутних дзеркалах. Для розрахунку поля мод з ненульовими кутовими індексами початковий розподіл задається у вигляді секторів (рис. 3.6б), де поле почергово змінює знак (знакозмінний меандр в залежності від кута). Для розрахунку розподілу поля мод з ненульовими радіальними індексами за початковий розподіл по радіусу береться розподіл у вигляді кругових поясів (знакозмінний прямокутний меандр як функція радіусу).

Конфігурація поля поперечних мод для круглих дзеркал визначається зміною знаку поля фази коливань в залежності від радіуса і кута. Відповідно до цього будується і класифікація мод резонатора з круглою апертурою дзеркал: перший індекс вказує кількість змін знаку по радіусу, а другий - по куту в межах інтервалу $(0, \pi)$ щоб кожна вузлова лінія зустрічалась лише по одному разу (при повному обході кола це відбувалось би двічі). Приклади результатів розрахунків поля мод резонатора з круглою апертурою дзеркал схематично наведені на рис.3.7, де зміна напрямку стрілок вказує на зміну знаку поля, а їх довжина – на амплітуду.

Поперечні моди симетричного конфокального резонатора.

Оптичні резонатори із сферичними дзеркалами відрізняються тим, що на формування їх випромінювання впливає фокусуючі дія дзеркал. А дифракція може впливати не тільки на розподіл поля випромінювання по фронту хвилі, але й на сам фронт змінюючи його кривизну. В результаті в так званих стійких резонаторах формується пучок з особливими властивостями, так званий гаусів пучок, в якого поле зосереджено на осі пучка, а радіус кривизни хвильового фронту змінюється. Зрозуміло, що до таких резонаторів не можуть бути застосовані результати теорії Шавлова і Таунса. Тому вони вимагають спеціального розгляду.

Серед сферичних резонаторів особливе місце займає симетричний конфокальний резонатор, який складається з двох однакових ввігнутих дзеркал із спільним фокусом F . Оскільки фокусна відстань сферичного дзеркала рівна половині його радіуса кривизни R , то довжина резонатора $L = R$. На рис. 3.8 наведено хід променів в цьому резонаторі: вони почергово проходять через спільний фокус дзеркал, а потім ідуть паралельно оптичній осі і навпаки. Такий же хід променів і в напівконфокальному резонаторі, в якому друге дзеркало плоске і розташоване в фокусі першого. Тому в цих резонаторах поле мод однакове. Проте напівконфокальний резонатор має

більшу стійкість до роз'юстування і зміни параметрів резонатора, тому саме він використовується в лазерах.

Конфокальний резонатор має велике теоретичне значення в фізиці лазерів. Він визначний тим, що інтегральне рівняння для його мод розв'язується аналітично, а його розв'язки легко аналізуються. Ці розв'язки не тільки аналітично описують розподіл поля мод на поверхні дзеркала, але й дозволяють знайти цей розподіл в просторі. Це в свою чергу дає можливість зробити висновки про існування стійких резонаторів, на яких теж можна розповсюдити ці розв'язки.

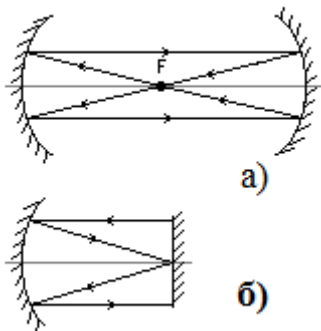


Рис.3.8. Хід променів в конфокальному (а) і напівконфокальному (б) резонаторах.

Для виводу інтегрального рівняння спочатку розглянемо симетричний резонатор, утворений двома однаковими сферичними дзеркалами квадратного перерізу $2a \cdot 2a$ з радіусами кривизни R , розташованими на довільній відстані $L \gg a$. З кожним із дзеркал зв'яжемо декартові системи координат (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2) , початки яких розташовані в середині дзеркал, а осі z_1 і z_2 направлені вздовж однієї прямої.

Аналогічно до плоского резонатора будемо вважати, що після багатьох проходів на дзеркалах конфокального резонатора встановлюється поле, яке в подальшому змінюється лише по амплітуді і фазі, а розподіл напруженості поля по поверхні дзеркал $U(x, y)$ залишається незмінним. В цьому випадку поля на дзеркалах можуть бути зв'язані інтегралом Френеля – Кірхгофа:

$$v(x_2, y_2) = \frac{ik\gamma}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a v(x_1, y_1) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) dx_1 dy_1, \quad (3.15),$$

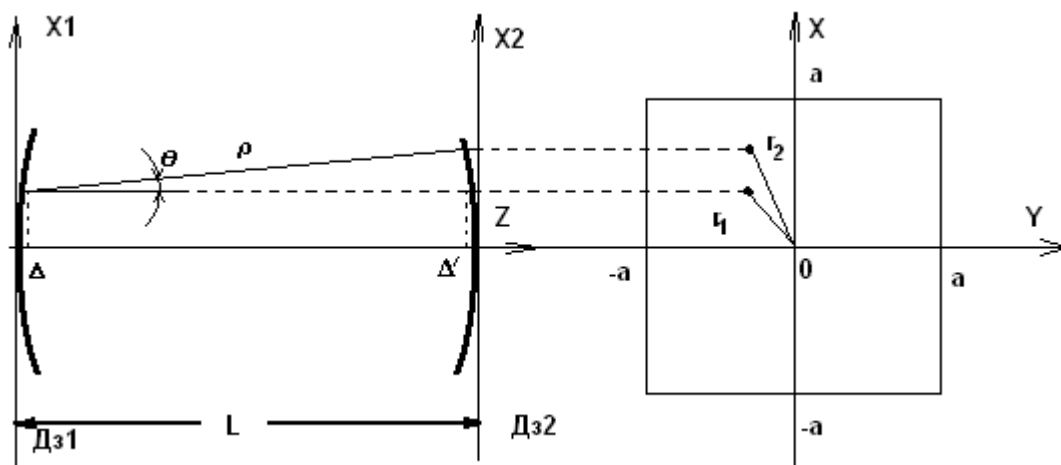


Рис.3.9. До виводу інтегрального рівняння для поперечних мод конфокального резонатора.

де ρ - відстань між точкою випромінювання (x_1, y_1) на одному дзеркалі і точкою спостереження (x_2, y_2) на іншому дзеркалі, θ - кут між відрізком ρ та

оптичною віссю OZ, що проходить через вершини дзеркал, γ - комплексний коефіцієнт, який описує зміну амплітуди і фази поля в за один прохід резонатора.

Як і для плоско-паралельного резонатора, враховуючі $a \ll L$, зробимо наближення: $\rho \approx L$ в знаменнику і $\cos\theta = L/\rho \approx 1$. В фазовому множнику розкладемо $\rho(x_1, y_1, x_2, y_2)$ по степенях малих величин x_1/L і y_1/L , відкидаючи нескінченно малі величини вищих порядків. Із рис.3.9 видно, що

$$\rho^2 = (L - \Delta_1 - \Delta_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \quad (3.16),$$

Підносячи доданки до квадрату і виносячи L^2 , знайдемо:

$$\rho^2 = L^2 \left[1 + \left\{ \left(\frac{\Delta_1}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{L} \right)^2 + 2 \frac{\Delta_1 \Delta_2}{L^2} \right\} - 2 \frac{\Delta_1}{L} - 2 \frac{\Delta_2}{L} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{L^2} - 2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{L^2} \right] \quad (3.16a)$$

Величину відхилення сферичної поверхні дзеркала від площини Δ_i знайдемо із теореми про рівність добутків відрізків хорд, що перетинаються (рис. 3.10): $r_i^2 = (2R - \Delta)\Delta$. Враховуючи, що $\Delta_i \ll R$, де R - радіус кривизни дзеркала і величиною Δ_i в дужках можна нехтувати, знаходимо

$$\Delta_i = \frac{r_i^2}{2R} = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R}. \quad (3.17)$$

Внаслідок умови $x_i, y_i \leq a \ll L$ всі величини в (3.16a), крім одиниці, є малими. Величини виділені фігурними дужками мають вищий порядок малості ніж решта і тому можуть бути відкинуті. Тоді після перегрупування матимемо

$$\rho = L \left[1 - 2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{L^2} + 2 \left(1 - \frac{L}{R} \right) \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{L^2} \right]^{1/2}$$

Отриманий вираз розкладемо в ряд, обмежившись лише членами першого порядку малості (відповідно до формули $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$):

$$\rho \approx L \left[1 - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{L^2} + \frac{g}{L^2} (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) \right], \quad (3.18)$$

де

$$g = 1 - L/R \quad (3.19)$$

Підставляючи (3.18) в (3.15) дістанемо інтегральне рівняння з симетричним відносно x_i та y_i ядром, що допускає розділення змінних

$$v(x, y) = v(x)v(y). \quad (3.20)$$

Після розділення змінних отримане інтегральне рівняння розпадається на два відносно x та y

$$v(x_2) = \left(\frac{ik\gamma_x}{2\pi L} e^{-ikL} \right)^{1/2} \int_{-a}^a v(x_1) K(x_1 x_2) dx_1 \quad (3.21a)$$

$$v(y_2) = \left(\frac{ik\gamma_y}{2\pi L} e^{-ikL} \right)^{1/2} \int_{-a}^a v(y_1) K(y_1 y_2) dy_1, \quad (3.21б)$$

де $\gamma_x \cdot \gamma_y = \gamma$, а ядра рівнянь мають вигляд

$$K(x_1 x_2) = \exp \left[-\frac{ik}{L} (x_1 x_2 - g(x_1^2 + x_2^2)) \right], \quad (3.22a)$$

$$K(y_1 y_2) = \exp \left[-\frac{ik}{L} (y_1 y_2 - g(y_1^2 + y_2^2)) \right]. \quad (3.22б)$$

Розв'язки кожного з рівнянь відповідають модам смугових дзеркал шириною $2a$ витягнутих відповідно вздовж осей OY та OX . Внаслідок повної їх ідентичності достатньо розглянути одне із них, наприклад (3.22a).

Для конфокального резонатора ($L=R$) ядро (3.22a) і рівняння (3.21a) значно спрощуються. Перепишемо їх, перейшовши до безрозмірної координати

$$X_i = \sqrt{\frac{k}{L}} x_i \quad (3.23)$$

Тоді межами інтегрування будуть $\pm \sqrt{2\pi N}$, де введений параметр N

$$N = \frac{a^2}{\lambda L}, \quad (3.24)$$

який називається числом Френеля, фізичний зміст якого буде викладений пізніше.

В нових змінних рівняння (3.21a) матиме вигляд

$$U(X_2) = \frac{\chi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2\pi N}}^{\sqrt{2\pi N}} U(X_1) e^{-iX_1 X_2} dX_1. \quad (3.25)$$

При нескінченних межах інтегрування рівняння (3.21a) є фур'є-перетворенням, яке перетворює функцію $v(x)$ саму в себе з точністю до постійного множника χ . Таку властивість мають поліноми Ерміта-Гауса,:

$$v_n(X) = e^{(-X^2/2)} H_n(X), \quad (3.26a)$$

де

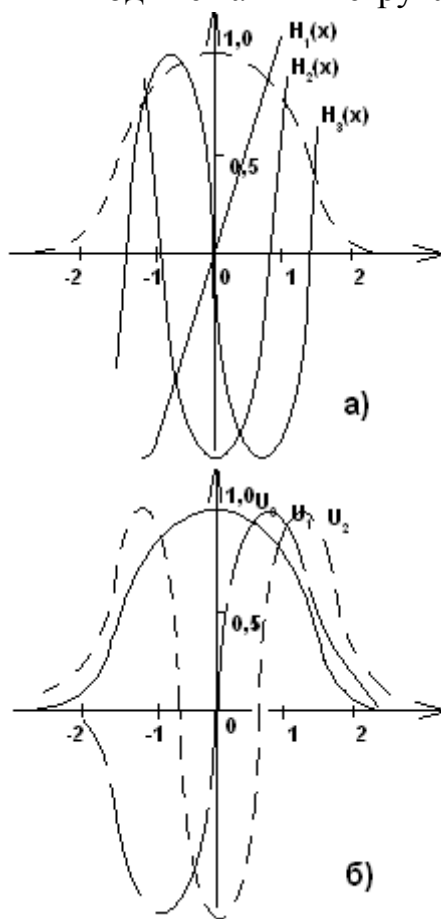
$$H_n(X) = (-1)^n e^{X^2} \frac{d^n}{dX^n} (e^{-X^2}). \quad (3.26б)$$

Рис.3.10. а) Поліноми Ерміта нижчих степенів і функція Гауса; б) поліноми Ерміта-Гауса.

Власними значеннями рівняння є

$$\chi_n = i^{-n} \quad (3.27)$$

Обчислення за допомогою (3.26б) поліномів Ерміта нижчих степенів дає:



$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (3.28)$$

Графіки цих функцій та функції Гауса $G(X) = e^{-X^2/2}$ схематично наведені на рис.3.10а, їх добутків – поліномів Ерміта-Гауса $U_n(X)$ – на рис. 3.10б.

Із наведених на рис. 3б. Графіків видно, що при $X \geq 3$ значення функцій $U_n(X)$ близькі до нуля. Це означає, що в правій частині рівняння (10) основний внесок дає інтегрування в межах $X < 3$. Розширення меж інтегрування більше цього значення, зокрема до нескінченності, вносить

малу похибку в значення інтеграла, тому можна вважати, що при $\sqrt{2\pi N} > 3$ і відповідно $N > 9/2\pi \approx 1,5$ заміна скінченних меж інтегрування в (10) на нескінченні виправдана. Для типових параметрів лазерів з конфокальним (напівконфокальним) резонатором значення $N = 5 \div 10$. Зокрема для He-Ne лазера з довжиною хвилі генерації $\lambda = 0,6328$ мкм при довжині резонатора $L = 1$ м та ефективному розмірі дзеркал $a = 2$ мм величина N становить 6,4 а

$\sqrt{2\pi N} \approx 6,3$. Тому власні функції (3.26а) рівняння (3.21а) з нескінченними межами описують розподіл поля на дзеркалах практично всіх симетричних конфокальних

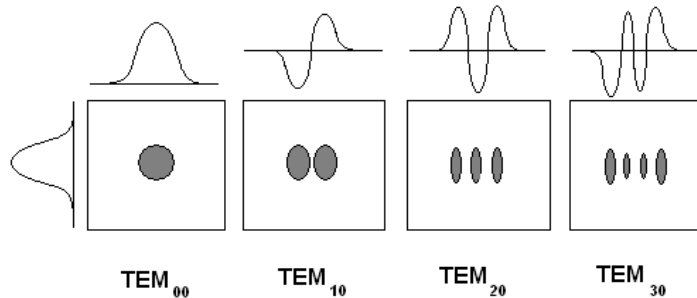


Рис.3.11. Розподіл амплітуди напруженості електричного поля найнижчих мод і інтенсивності випромінювання на дзеркалах кофокального резонатора.

резонаторів.

Функції (3.26а)

відповідають модам конфокального резонатора

з одномірними, витягнутими вздовж осі ОУ дзеркалами. Розподіл напруженості електричного поля мод на двомірному дзеркалі згідно (3.20) задається добутком

$$v_{nm}(X, Y) = H_n(X)H_m(Y)e^{(-\frac{X^2+Y^2}{2})} \quad (3.29)$$

а розподіл інтенсивності:

$$I \sim |v_{nm}|^2 = H_n^2(X)H_m^2(Y)e^{-(X^2+Y^2)} \quad (3.30)$$

Розподіл амплітуди поля і інтенсивності деяких найнижчих мод наведено на рис.3.11. Вздовж вертикальної осі (ОУ) на всіх зображеннях відкладено $U_0(x)$, а вздовж горизонтальної осі (ОХ) по порядку зліва направо $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$.

Результуючий розподіл інтенсивності на дзеркалі зображено у вигляді плям. Завдяки осцилюючому характеру функції $U_n(x)$ фаза коливань в сусідніх плямах моди відрізняється на π . Із малюнка видно, що індекс моди визначається кількістю разів зміни фази коливань вздовж відповідної осі, або кількістю темних смуг, що розділяють моду вздовж цієї осі.

Наведені на рис.4 розподіли амплітуди поля та інтенсивності добре узгоджуються з реальними. Зсув фаз на π в сусідніх плямах мод фіксується за допомогою інтерференції випромінювання моди з опорною когерентною плоскою хвилею. Інтерференційні смуги від сусідніх плям зсунуті на половину смуги, тобто в тому місці, де в одній плямі спостерігається інтерференційний максимум, в сусідній – мінімуми.

Просторовий розподіл поля мод

Як було показано вище розподіл поля в модах на дзеркалах описується поліномами Ерміта-Гауса. Користуючись цими виразами, можна знайти поле в будь-якій точці простору за допомогою інтеграла Френеля-Кіргофа (3.1). Якщо вибрати циліндричну систему координат (r, ϕ, z) з початком осі симетрії z в центрі резонатора, то для основної моди TEM_{00} отримується наступний вираз

$$E(r, z) = E_{00} \frac{\varpi_0}{\varpi_z} \exp\left(-\frac{r^2}{2\varpi^2(z)}\right) \exp\left[i\left(kz - k\frac{r^2}{2R(z)} + \phi\right)\right] \quad (3.31)$$

де

$$\varpi^2(z) = \varpi_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) \quad (3.32)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) \quad (3.33)$$

$$z_0 = \frac{L}{2} = k\varpi_0^2 \quad (3.34)$$

Фізичний зміст величин $\varpi(z)$ і $R(z)$, що входить у вираз (19) знайдемо аналізуючи показники експонент. Перша із експонент описує Гаусовий розподіл поля в поперечному напрямі (в площині, перпендикулярній до осі z). Такий розподіл існує при будь-якому значенні z , тому такий пучок називається Гаусовим. Величина ϖ відповідає такому відхиленню від осі пучка, при якому інтенсивність випромінювання (пропорційна $|E|^2$) зменшується в e разів. Умовно цю величину можна назвати радіусом гаусового пучка, оскільки в межах радіуса Гаусового пучка знаходиться основна доля його інтенсивності.

Згідно (3.32) радіус гаусового пучка збільшується із відстанню до центра резонатора. На великих відстанях ($z \gg z_0$) ця залежність лінійна

$$\varpi(z) = \varpi_0 \frac{z}{z_0} \quad (3.32a)$$

Найменший радіус гаусового пучка в центрі резонатора $\varpi_{\min} = \varpi(z=0) = \varpi_0$. Це найвужче місце називається перетяжкою, або горловиною гаусового пучка. Радіус горловини згідно (3.34) повністю визначається довжиною резонатора: $\varpi_0 \sim \sqrt{L}$. Z_0 , що дорівнює половині довжини резонатора – називається

конфокальним параметром. На поверхні дзеркал радіус в $\sqrt{2}$ а площа в 2 рази більші ніж в горловині.

Схематично хід залежності $\omega(z)$ ілюструється рис 3.12. В просторі ця крива описує гіперболоїд обертання, в межах якого розповсюджується основна енергія Гаусового пучка. В ближній зоні $z \leq z_0$ – всередині резонатора та поблизу дзеркал – ця залежність нелінійна; в дальній зоні $z \gg z_0$ – лінійна. Хід залежності $\omega(z)$ співпадає з каустикою - огинаючою сімейства променів в резонаторі. Мінімальний діаметр пучка не залежить від поперечних розмірів дзеркала, а лише від довжини L .

Друга експонента описує зміну фази хвилі в пучку. Φ – початкова фаза.

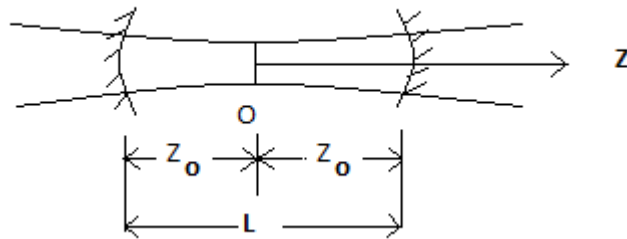


Рис.3.12. Залежність розмірів Гаусового пучка від відстані до центра конфокального резонатора.

Величина kz описує зміну фази плоскої хвилі на відстані z . Друга величина в показнику описує відхилення фронту хвилі від фронту плоскої хвилі, яке залежить від відстані r до осі пучка. Таке відхилення притаманне

сферичній хвилі з радіусом кривини фронту R , оскільки воно визначається величиною $\Delta = r^2 / 2R$, яка описує відхилення сферичної поверхні від площини

(див.(3.17)). Тому запізнення фази коливань на $k\Delta = k \frac{r^2}{2R(z)}$ свідчить про

сферичну форму фронту Гаусового пучка. Однак, на відміну від гомоцентричних пучків, радіус кривизни хвильового фронту не постійний, а відповідно до (3.33) залежить від відстані z .

Із (21) легко встановити, що хвильовий фронт в центрі резонатора – в горловині - плоский, бо $R(z=0) = \infty$. При відхиленні від горловини фронт стає сферичним. На однаковій відстані по різні боки горловини кривизна фронту однакова, але має протилежні знаки. Тобто горловина є площиною симетрії пучка: наближаючись зліва до перетяжки, пучок збігається, а після перетяжки – розходиться.

Радіус кривизни хвильового фронту немонотонно залежить від z (рис2.23). Його значення прагне до нескінченності при $z \rightarrow 0$ (в перетяжці) та при $z \rightarrow \infty$. Мінімальне значення R досягається на дзеркалах, що легко встановлюється з умови екстремуму $R'(z) = 0$:

$$R' = \left(z + \frac{z_0^2}{z} \right)' = 1 - \frac{z_0^2}{z^2} = 0 \rightarrow z = z_0 \quad (3.33)$$

Мінімальне значення радіуса кривизни рівне радіусу кривизни дзеркала – тобто хвильовий фронт при $z=z_0$ співпадає з поверхнею дзеркала:

$R(z = z_0) = 2z_0 = L = R_{\text{як}}$. Просторове розташування центра кривизни хвильового фронту залежить від положення останнього в просторі: при збільшенні z від 0 до ∞ центр пересувається із $-\infty$ в горловину.

Таким чином, на великих відстанях хвильовий фронт гаусового пучка має центр кривизни в центрі конфокального резонатора. Це дозволяє знайти кутову розбіжність Гаусового пучка θ на великих відстанях від резонатора, як

$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega(z)}{z} = \frac{1}{k\omega_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{2\omega_0} \quad (3.34)$$

Звідси випливає, що основна доля енергії зосереджена в тілесному куті

$$\Omega = \pi\theta^2 = \frac{\pi}{k^2\omega_0^2} = \frac{\pi}{kz_0} = \frac{\pi\lambda}{2\pi} \frac{L}{2} = \frac{\lambda}{L}. \quad (3.35)$$

Для He-Ne лазера ($\lambda=0,63$ мкм) з довжиною резонатора $L=1$ м цей кут становить $\theta = \frac{0,63 \cdot 10^{-6}}{1} = 0,63 \cdot 10^{-6}$ рад що становить $\frac{0,63 \cdot 10^{-6}}{4\pi} \approx 0,5 \cdot 10^{-7}$ частини повного тілесного кута. Таким чином випромінювання основної моди TEM_{00} конфокального резонатора – гаусового пучка - має дуже гостру, голкоподібну діаграму спрямованості.

Формула (3.34) для кутової розбіжності гаусового пучка, переписана у вигляді

$$\theta_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{d_0} \quad (3.36)$$

де $d_0 = 2\omega_0$ - діаметр горловини, подібна до формули для кутової розбіжності плоскої хвилі, дифрагрованої на діафрагмі діаметром d

$$\theta_0 = 1,22 \frac{\lambda}{d}. \quad (3.37)$$

Ця подібність не випадкова. Вона відбиває однакову природу розбіжності обох пучків. В горловині гаусового пучка, як і в площині діаграми, фронт хвилі плоский, а пучки відрізняються лише розподілом поля по фронту. Тому гаусів пучок можна вважати результатом дифракції плоскої хвилі. Але на відміну від дифракції на плоскій діафрагмі, пропускання якої описується функцією

$$T_{\text{як}} = \begin{cases} 1, |r| \leq \frac{d}{2} \\ 0, |r| > \frac{d}{2} \end{cases}, \quad (3.38)$$

гаусовий пучок формується дифракцією на «м'якій» діафрагмі, пропускання якої плавно спадає від центра по гаусовому закону:

$$T_2 = e^{-\left(\frac{r}{a_0}\right)^2} \quad (3.39)$$

Саме така діафрагма, якби вона стояла на шляху плоскої хвилі, призвела б до утворення плоскої хвилі з гаусовим розподілом по фронту – такої як в перетяжці.

Дифракція на згаданій «м'якій діафрагмі» призводить до двох важливих наслідків: зменшення кута дифракції приблизно в 7 разів і утворення сферичного фронту дифрагованої хвилі. Насправді реально такої діаграми непотрібно. Гаусовий пучок, як було показано вище, формується в результаті сукупної дії дифракції та фокусуючої дії дзеркал резонатора. І саме це формує в перетяжці плоский фронт і гаусів розподіл. Дифракція в перетяжці утворюється саме внаслідок обмеженості пучка в поперечному перерізі згідно (3.36). В цьому розумінні можна сказати, що Гаусовий пучок дифрагує сам на собі.

ЗМІСТ

Вступ	3
Принципи оптичного підсилення і генерації	
Елементарні процеси взаємодії випромінювання з атомами	3
Час життя атома на збудженому стані	8
Контур і ширина спектральної лінії	10
Спектральне розширення	12
Підсилення світла середовищем дворівневих атомів	14
Властивості коефіцієнта підсилення	16
Ефект насичення підсилення	18
Умова самозбудження лазера	21
Особливості лазера як авто коливної системи	23
Формування лазерного випромінювання в оптичному резонаторі	
Механізм впливу оптичного резонатора на формування лазерного випромінювання	26
Оптичні резонатори	29
Спектр випромінювання плоско-паралельного оптичного резонатора	35
Дифракційна теорія оптичних резонаторів	
Вплив дифракції на формування поперечних мод	40
Метод Фокса-Лі і його застосування до плоско-паралельного оптичного резонатора	41
Поперечні моди симетричного конфокального резонатора	47
Просторовий розподіл поля конфокального резонатора	52
Зміст	56