Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Фізичний факультет

Методичні вказівки
до проведення практичних занять
з основ векторного і тензорного аналізу

для студентів фізичного факультету

Київ – 2017

Методичні вказівки до проведення практичних занять з основ векторного і тензорного аналізу для студентів фізичного факультету / Упорядники: М.Ф. Ледней, В.О. Гнатовський, О.С. Тарнавський. — Київ, 2017. — 62 с.

Рецензенти: С.Й. Вільчинський, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Д.А. Гаврюшенко, доктор фіз.-мат. наук, професор

Затверджено
Вченою Радою
фізичного факультету
"__" ____________ 2017 року

Передмова

Дана методична розробка орієнтована на студентів фізичного факультету, які слухають навчальний курс "Основи векторного і тензорного аналізу" один семестр в обсязі 90 годин (з них, лекцій – 14 год., практичних занять – 30 год.). У розробці подано підбірку задач до кожного практичного заняття, включаючи завдання для самостійної роботи. Теми та зміст практичних завдань повністю відповідає програмі курсу "Основи векторного і тензорного аналізу", затвердженій Міністерством освіти та науки України. Набір задач розрахований на "середньостатистичного" студента і відповідає, на наш погляд, тому мінімуму знань, вмінь і навичок, який повинен мати кожен студент після курсу "Основи векторного і тензорного аналізу". Звичайно, в добре підготовлених студентських групах число виконаних завдань має бути більшим, а їх складність вищою. Це також стосується індивідуальної роботи з добре підготовленими студентами. У методичній розробці наведено основні закони та формули (але не всі), на яких базуються методи вирішення задач. Також, у межах кожної теми, як приклад, наведено детальний розв'язок типових завдань, що суттєво допоможе студентам самостійно опанувати весь необхідний матеріал. Методична розробка полегшить складання робочого плану практичних занять з курсу "Основи векторного і тензорного аналізу" викладачам, які приступають до проведення таких занять.

Усі номери завдань зазначені за таким збірником задач:

1. Ледней М.Ф., Разумова М.А., Романенко О.В., Хотяїнцев В.М. *Збірник задач з векторного та тензорного числення.* – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 129 с.

Заняття 1, 2

Диференціальні операції в прямокутній декартовій системі координат

Основні диференціальні операції у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) мають вигляд

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \big[\vec{\nabla}\times\vec{A}\big] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}\,, \tag{3}$$

$$\big(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{A} = B_x\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + B_y\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + B_z\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\,. \tag{4}$$

Записуються основні диференціальні операції через векторний диференціальний оператор $\vec{\nabla}$ (“набла”):

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Дія цього оператора на різні об’єкти визначається як їх функціональними властивостями, так і способом множення оператора на ці об’єкти (для скалярних функцій множення — числове, для векторних — скалярне, векторне або тензорне). За домовленістю $\vec{\nabla}$ діє на всі величини, що стоять праворуч від нього. Виконуючи проміжні алгебраїчні перетворення, приймаємо домовленість, що оператор $\vec{\nabla}$ буде діяти лише на підкреслені величини, а всі інші величини відносно $\vec{\nabla}$ будуть сталими.

Диференціальні операції над векторними величинами є узагальненням відомого в математичному аналізі правила Лейбніца для диференціювання добутків функцій на випадок, коли множники є векторними функціями. У випадку функцій однієї змінної правило Лейбніца записується у вигляді

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = f(x)\,\frac{d\,g(x)}{d\,x} + g(x)\,\frac{d\,f(x)}{d\,x}\,,$$

або, керуючись введеною вище домовленістю,

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big[\underline{f(x)}\,g(x) + f(x)\,\underline{g(x)}\Big]$$

(кількість доданків у правій частині співпадає з числом множників у лівій). У такій формі запису непідкреслений множник вважається сталим і його можна виносити за оператор похідної.

Аналогічно чинять і у випадку оператора $\vec{\nabla}$, беручи до уваги тип множення (числовий, скалярний або векторний) при винесенні сталого множника за оператор диференціювання. Потім виконуються алгебраїчні перетворення, метою яких є приведення похідної та її операнда до стандартного вигляду (так, щоб у підкресленні операнда не було необхідності). Тобто всі величини на які діє $\vec{\nabla}$ повинні стояти праворуч від нього, а сталі відносно $\vec{\nabla}$ — ліворуч. Типові приклади застосування такої процедури приведені у вказівках до задач 8.3 та 8.7.

Пошук похідних (градієнта, ротора, дивергенції та їх комбінацій) від явно заданих функцій можна проводити, записуючи їх у декартових координатах і безпосередньо здійснюючи диференціювання. Проте, для об'єктів, які можна подати у вигляді добутків, доцільно спочатку скористатися правилом Лейбніца і звести задачу пошуку похідної до явного диференціювання максимально простих функцій.

При такому підході процедура пошуку градієнта, ротора та дивергенції аналогічна звичайному диференціюванню з використанням таблиці похідних елементарних функцій. Останні обчислюються попередньо, згідно з прямим означенням диференціальних операцій у декартових координатах. До "елементарних" похідних можна віднести, наприклад

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\,,\quad (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}\,,\quad \vec{\nabla}r\,,\quad \mathrm{div}\vec{r}\,,\quad \mathrm{rot}\vec{r}\,,$$

а також деякі вирази, коли функція під знаком похідної залежить лише від $r=|\vec{r}|$, а саме

$$\vec{\nabla}\varphi(r)\,,\quad \mathrm{div}\vec{A}(r)\,,\quad \mathrm{rot}\vec{A}(r)\,.$$

Задачі приведені нижче зводяться до обчисленя похідних сум, добутків та часток комбінацій "елементарних" похідних.

Типові приклади пошуку похідних приведені у вказівках до задач 8.21 (а, б, ж), 8.22 (з) та 8.23 (а).

Задача 1

У безкоординатному підході обчислити наступні вирази:
а) $\vec{\nabla}(\varphi\psi)$; б) $\mathrm{div}(\varphi\vec{A}\,)$; в) $\mathrm{rot}(\varphi\vec{A}\,)$; г) $\mathrm{div}[\vec{A}\times\vec{B}\,]$; д) $\mathrm{rot}[\vec{A}\times\vec{B}\,]$; е) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}\,)$, де φ, ψ – скалярні функції $\vec{r}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$ – векторні функції $\vec{r}$.

Розв'язок:

а) Згідно визначення $\vec{\nabla}$ – лінійний диференціальний оператор першого порядку. Тому в силу правила диференціювання добутку функцій маємо

$$\vec{\nabla}(\varphi\psi)=\psi\vec{\nabla}\varphi+\varphi\vec{\nabla}\psi.$$

б) Згідно визначення операції div та правила диференціювання добутку функцій

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{A}\,)=(\vec{\nabla}\cdot\varphi\vec{A}\,)=(\vec{\nabla}\cdot\underline{\varphi}\vec{A}\,)+(\vec{\nabla}\cdot\varphi\underline{\vec{A}}\,)=$$

У першому доданку оператор $\vec{\nabla}$ діє на скалярну функцію φ, тому останню переносимо в перший множник скалярного добутку. У другому доданку скаляр φ виносимо із скалярного добутку, оскільки на нього оператор $\vec{\nabla}$ не діє. У результаті матимемо:

$$=(\vec{\nabla}\underline{\varphi}\cdot\vec{A}\,)+\varphi\,(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{A}}\,)=(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{A}\,)+\varphi\,\mathrm{div}\vec{A}.$$

в) За визначенням операції rot та згідно правила диференціювання добутку функцій

$$\mathrm{rot}(\varphi\vec{A}) = [\vec{\nabla}\times\varphi\vec{A}] = [\vec{\nabla}\times\underline{\varphi}\vec{A}] + [\vec{\nabla}\times\varphi\underline{\vec{A}}] =$$

У першому векторному добутку скалярну функцію φ переносимо в перший множник, оскільки на неї діє оператор $\vec{\nabla}$. Тоді як із другого векторного добутку скаляр φ виносимо, оскільки на нього оператор $\vec{\nabla}$ не діє. Звідки отримуємо:

$$= [\vec{\nabla}\underline{\varphi}\times\vec{A}] + \varphi[\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}] = [\vec{\nabla}\varphi\times\vec{A}] + \varphi\,\mathrm{rot}\vec{A}.$$

г) $\mathrm{div}[\vec{A}\times\vec{B}] = \big(\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}\times\vec{B}]\big) = \big(\vec{\nabla}\cdot[\underline{\vec{A}}\times\vec{B}]\big) + \big(\vec{\nabla}\cdot[\vec{A}\times\underline{\vec{B}}]\big) =$
Обидва доданки є мішаними добутками і можуть бути записані наступним чином

$$\begin{aligned}&=(\vec{\nabla},\underline{\vec{A}},\vec{B}) + (\vec{\nabla},\vec{A},\underline{\vec{B}}) = \big(\vec{B}\cdot[\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}]\big) - \big(\vec{A}\cdot[\vec{\nabla}\times\underline{\vec{B}}]\big) =\\ &=\vec{B}\,\mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\vec{B}.\end{aligned}$$

д) $\mathrm{rot}[\vec{A}\times\vec{B}] = \big[\vec{\nabla}\times[\vec{A}\times\vec{B}]\big] = \big[\vec{\nabla}\times[\underline{\vec{A}}\times\vec{B}]\big] + \big[\vec{\nabla}\times[\vec{A}\times\underline{\vec{B}}]\big] =$
Кожний із доданків може бути переписаний як подвійний векторний добуток, а саме

$$\begin{aligned}&=(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\underline{\vec{A}} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{A}}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{B}}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\underline{\vec{B}} =\\ &=(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}\,\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A}\,\mathrm{div}\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.\end{aligned}$$

е) Згідно правила диференціювання добутку функцій

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{\nabla}(\underline{\vec{A}}\cdot\vec{B}) + \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\underline{\vec{B}}).$$

Кожний із доданків може бути переписаний за допомогою формули подвійного векторного добутку $\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) = \big[\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}]\big] + \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$, а саме

$$\vec{\nabla}(\underline{\vec{A}}\cdot\vec{B}) = \big[\vec{B}\times[\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}]\big] + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\underline{\vec{A}} = [\vec{B}\times\mathrm{rot}\vec{A}] + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A},$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\underline{\vec{B}}) = \big[\vec{A}\times[\vec{\nabla}\times\underline{\vec{B}}]\big] + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\underline{\vec{B}} = [\vec{A}\times\mathrm{rot}\vec{B}] + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

Склавши отримані рівності, матимемо:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = [\vec{A}\times\mathrm{rot}\vec{B}] + [\vec{B}\times\mathrm{rot}\vec{A}] + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

Задача 2

Обчислити наступні вирази:
а) $\operatorname{div}(\vec r r^2)$; б) $\operatorname{div}\big(\vec r(\vec a\cdot\vec r)\big)$; в) $\operatorname{div}[\vec a\times\vec r]$; г) $\operatorname{rot}\big(r[\vec a\times\vec r]\big)$;
д) $\operatorname{rot}\big[\vec r\times[\vec a\times\vec r]\big]$, де $\vec a$ – сталий вектор.

Розв'язок:

а) Згідно результату, отриманому в завданні 1б, маємо

$$\operatorname{div}(\vec r r^2) = r^2\operatorname{div}\vec r + (\vec\nabla r^2\cdot\vec r) = 3r^2 + 2(\vec r\cdot\vec r) = 5r^2.$$

Тут враховано, що $\operatorname{div}\vec r = 3$, $\vec\nabla r^2 = 2\vec r$.

б) Як і в попередньому завданні

$$\operatorname{div}\big(\vec r(\vec a\cdot\vec r)\big) = (\vec a\cdot\vec r)\operatorname{div}\vec r + \big(\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)\cdot\vec r\big) = 3(\vec a\cdot\vec r) + (\vec a\cdot\vec r) = 4(\vec a\cdot\vec r),$$

де враховано $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r) = \vec a$.

в) У силу визначення операції div розглядуваний вираз є мішаним добутком у якому оператор $\vec\nabla$ діє тільки на вектор $\vec r$. Згідно властивостей мішаного добутку маємо

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\vec a\times\vec r] &= \big(\vec\nabla\cdot[\vec a\times\underline{\vec r}]\big) = (\vec\nabla,\vec a,\underline{\vec r}) = -(\vec a,\vec\nabla,\underline{\vec r}) = \\ &= -\big(\vec a\cdot[\vec\nabla\times\vec r]\big) = -(\vec a\cdot\operatorname{rot}\vec r) = 0,\end{aligned}$$

оскільки $\operatorname{rot}\vec r = 0$.

г) За результатом завдання 1в маємо

$$\operatorname{rot}\big(r[\vec a\times\vec r]\big) = r\operatorname{rot}[\vec a\times\vec r] + \big[\vec\nabla r\times[\vec a\times\vec r]\big].$$

У першому доданку член $\operatorname{rot}[\vec a\times\vec r]$ є подвійним векторним добутком у якому оператор $\vec\nabla$ діє тільки на вектор $\vec r$, тому

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}[\vec a\times\vec r] &= \big[\vec\nabla\times[\vec a\times\underline{\vec r}]\big] = \vec a(\vec\nabla\cdot\underline{\vec r}) - (\vec a\cdot\vec\nabla)\underline{\vec r} = \\ &= \vec a\operatorname{div}\vec r - (\vec a\cdot\vec\nabla)\vec r = 2\vec a.\end{aligned}$$

Тут враховано, що $(\vec a\cdot\vec\nabla)\vec r = \vec a$. Взявши до уваги $\vec\nabla r = \vec r/r$, після розкриття подвійного векторного добутку в другому доданку, матимемо

$$\operatorname{rot}\big(r[\vec a\times\vec r]\big) = 3r\vec a - \frac{\vec r\,(\vec a\cdot\vec r)}{r}.$$

д) Спочатку розкриємо подвійний векторний добуток

$$\big[\vec{r}\times[\vec{a}\times\vec{r}]\big]=\vec{a}r^2-\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r}).$$

Тоді, використовуючи результат завдання 1в, матимо

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\big[\vec{r}\times[\vec{a}\times\vec{r}]\big]&=r^2\mathrm{rot}\,\vec{a}+[\vec{\nabla}r^2\times\vec{a}]-(\vec{a}\cdot\vec{r})\mathrm{rot}\,\vec{r}-\big[\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\times\vec{r}\big]=\\&=2[\vec{r}\times\vec{a}]-[\vec{a}\times\vec{r}]=3[\vec{r}\times\vec{a}].\end{aligned}$$

Тут враховано, що $\mathrm{rot}\,\vec{r}=0$.

Заняття 1: 8.1–8.7; 8.21

Домашнє завдання: 8.8–8.15; 8.22

Заняття 2: 8.23–8.26; 8.31; 8.32

Домашнє завдання: 8.16; 8.17; 8.29; 8.33–8.36; 8.55

Заняття 3

Інтегральні теореми

Теореми Гаусса та Стокса в певному сенсі узагальнюють відому властивість інтеграла для функції однієї змінної, яка виражається рівністю:

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a). \tag{5}$$

Тобто, інтеграл від похідної функції $f(x)$ на відрізку визначається тільки значеннями цієї функції на кінцях відрізку інтегрування.

Для векторних функцій векторного аргументу існує кілька комбінацій з диференціальним оператором $\vec{\nabla}$, які можна розглядати як узагальнення повної похідної в лівій частині (5). Відповідні форми співвідношення (5) мають назву **інтегральних теорем**.

Теореми Гаусса та Стокса доводяться в математичному аналізі і формулюються наступним чином.

Теорема Гаусса. В об'ємі V, обмеженому замкнутою поверхнею $S(V)$, задана векторна функція $\vec{A}(\vec{r})$, неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області $V+S$. Тоді виконується рівність

$$\oint\limits_{S(V)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\, dS = \int\limits_{V} \mathrm{div}\vec{A}(\vec{r})\, dV, \tag{6}$$

де $\vec{n}(\vec{r})$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні S в точці $\vec{r}$. Зміст рівності (6) полягає в тому, що інтеграл у лівій частині визначається тільки значенням функції $\vec{A}(\vec{r})$ на поверхні $S(V)$. Зауважимо, що для функцій які не є неперервними теорема Гаусса, взагалі кажучи, не виконується. Рівність (6) можна інтерпретувати у контексті гідродинаміки та класичної електродинаміки, оскільки інтеграл у правій частині описує потік векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ (поля швидкостей рідини або газу, електричного поля тощо) через поверхню. Як видно з (6), у поля з нульовою дивергенцією в об'ємі V джерела відсутні.

Теорема Стокса. Заданий замкнутий контур L, поверхня S, яка спирається на контур L (це єдина вимога по її вибору), і векторна функція $\vec{A}(r)$, компоненти якої неперервно диференційовні в області $S+L$. Тоді має місце співвідношення:

$$\oint\limits_{L(S)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r})\, dl = \int\limits_{S} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r})\, dS, \tag{7}$$

де $\vec{\tau}(\vec{r})$ — одиничний направляючий вектор контура L в точці $\vec{r}$ (вектор дотичної), $d\vec{l} = \vec{\tau} dl$ — елемент довжини вздовж контура. З фізичної точки зору інтеграл у лівій частині (7) задає циркуляцію векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру L. У випадку $\mathrm{rot}\vec{A} = 0$ циркуляція вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру дорівню нулю. Наприклад, робота потенціальної сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки по замкнутій траєкторії (тобто циркуляція $\vec{F}$) дорівнює нулю.

З основних форм інтегральних теорем можна отримати ряд наслідків, які відрізняються способом множення оператора $\vec{\nabla}$ та типом підінтегральної функції. Вони приведені у задачах 10.1 та 10.2 (див. також вказівки до них). Різні формулювання інтегральних теорем можна записати у компактній формі, зручній у практичних застосуваннях. Вони приведені в тексті після задач 10.1 та 10.2.

Задача 1

Довести наступні співвідношення, що є наслідками теореми Остроградського-Гаусса:
а) $\oint\limits_{S(V)} \varphi\vec{n}\, dS = \int\limits_V \vec{\nabla}\varphi\, dV$; б) $\oint\limits_{S(V)} [\vec{n}\times\vec{A}\,]\, dS = \int\limits_V \mathrm{rot}\,\vec{A}\, dV$;
в) $\oint\limits_{S(V)} t_{ij}n_j\, dS = \int\limits_V \dfrac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\, dV$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, яка обмежує об'єм V.

Розв'язок:

а) Підставимо в теорему Гаусса векторне поле вигляду $\vec{A} = \varphi\vec{C}$, де $\vec{C}$ – довільний сталий вектор, матимемо:

$$\oint\limits_{S(V)} (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\, dS = \oint\limits_{S(V)} (\varphi\vec{C}\cdot\vec{n}\,)\, dS = \vec{C} \oint\limits_{S(V)} \varphi\vec{n}\, dS,$$

$$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{A}\, dV = \int\limits_V (\vec{C}\cdot\vec{\nabla}\varphi)\, dV = \vec{C}\int\limits_V \vec{\nabla}\varphi\, dV.$$

Тут враховано, що $\mathrm{div}\vec{A} = \mathrm{div}(\varphi\vec{C}\,) = (\vec{C}\cdot\vec{\nabla}\varphi)$. Звідси теорема Гаусса набуває вигляду

$$\vec{C} \oint\limits_{S(V)} \varphi\vec{n}\, dS = \vec{C}\int\limits_V \vec{\nabla}\varphi\, dV.$$

Оскільки вектор $\vec{C}$ довільний, маємо потрібний результат

$$\oint\limits_{S(V)} \varphi\vec{n}\, dS = \int\limits_V \vec{\nabla}\varphi\, dV.$$

б) Підставимо в теорему Гаусса векторне поле вигляду $\vec{A} = [\vec{B}\times\vec{C}\,]$, де $\vec{C}$ – довільний сталий вектор, матимемо:

$$\oint\limits_{S(V)} (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\, dS = \oint\limits_{S(V)} (\vec{n}\cdot[\vec{B}\times\vec{C}\,]\,)\, dS = \vec{C} \oint\limits_{S(V)} [\vec{n}\times\vec{B}\,]\, dS,$$

$$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{A}\,dV = \int\limits_V (\vec{\nabla}\cdot[\vec{B}\times\vec{C}\,])\,dV = \vec{C}\int\limits_V [\vec{\nabla}\times\vec{B}\,]\,dV.$$

Звідки теорема Гаусса набуває вигляду

$$\vec{C}\oint\limits_{S(V)} [\vec{n}\times\vec{B}\,]\,dS = \vec{C}\int\limits_V [\vec{\nabla}\times\vec{B}\,]\,dV.$$

Оскільки вектор $\vec{C}$ довільний, маємо потрібне

$$\oint\limits_{S(V)} [\vec{n}\times\vec{B}\,]\,dS = \int\limits_V [\vec{\nabla}\times\vec{B}\,]\,dV.$$

в) Тепер підставимо в теорему Гаусса вектор $\vec{A} = \vec{C}\hat{T}$, де $\vec{C}$ – довільний сталий вектор, $\hat{T} = \{t_{ij}\}$ – тензор 2-го рангу. Маємо:

$$\oint\limits_{S(V)} (\vec{A}\cdot\vec{n}\,)\,dS = \oint\limits_{S(V)} \vec{C}\hat{T}\vec{n}\,dS = C_i \oint\limits_{S(V)} t_{ij}n_j\,dS,$$

$$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{A}\,dV = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_j}(C_i t_{ij})\,dV = C_i\int\limits_V \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\,dV.$$

Звідси теорема Гаусса запишеться у вигляді

$$C_i \oint\limits_{S(V)} t_{ij}n_j\,dS = C_i\int\limits_V \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\,dV.$$

Оскільки вектор $\vec{C}$ довільний, маємо потрібний результат

$$\oint\limits_{S(V)} t_{ij}n_j\,dS = \int\limits_V \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\,dV.$$

Задача 2

Довести наступні співвідношення, які є наслідками теореми Стокса:

а) $\displaystyle\oint\limits_{L(S)} \varphi\vec{\tau}\,dl = \int\limits_S [\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]\varphi\,dS;$ б) $\displaystyle\oint\limits_{L(S)} [\vec{\tau}\times\vec{A}\,]\,dl = \int\limits_S \big[[\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]\times\vec{A}\,\big]\,dS,$

де $\vec{\tau}$ – одиничний напрямляючий вектор кривої L.

Розв'язок:

а) Підставимо в теорему Стокса векторне поле вигляду $\vec{A} = \varphi\vec{C}$, де $\vec{C}$ – довільний сталий вектор, матимемо:

$$\oint\limits_{L(S)} (\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,)\,dl = \oint\limits_{L(S)} (\varphi\vec{C}\cdot\vec{\tau}\,)\,dl = \vec{C}\oint\limits_{L(S)} \varphi\vec{\tau}\,dl,$$

$$\int\limits_S (\vec{n}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}\,)\,dS = \int\limits_S \big([\vec{n}\times\vec{\nabla}\varphi]\cdot\vec{C}\big)\,dS = \vec{C}\int\limits_S [\vec{n}\times\vec{\nabla}]\varphi\,dS.$$

Тут враховано, що $\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{rot}(\varphi\vec{C}\,) = [\vec{\nabla}\varphi\times\vec{C}\,]$. Звідси теорема Стокса набуває вигляду

$$\vec{C}\oint\limits_{L(S)} \varphi\vec{\tau}\,dl = \vec{C}\int\limits_S [\vec{n}\times\vec{\nabla}]\varphi\,dS.$$

Оскільки вектор $\vec{C}$ довільний, отримуємо потрібне

$$\oint\limits_{L(S)} \varphi\vec{\tau}\,dl = \int\limits_S [\vec{n}\times\vec{\nabla}]\varphi\,dS.$$

б) Підстановка в теорему Стокса векторного поля $\vec{A} = [\vec{B}\times\vec{C}\,]$, де $\vec{C}$ – довільний сталий вектор, дає:

$$\oint\limits_{L(S)} (\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,)\,dl = \oint\limits_{L(S)} \big(\vec{\tau}\cdot[\vec{B}\times\vec{C}\,]\big)\,dl = \vec{C}\oint\limits_{L(S)} [\vec{\tau}\times\vec{B}\,]\,dl,$$

$$\int\limits_S (\vec{n}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}\,)\,dS = \int\limits_S \big([\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]\cdot[\vec{B}\times\vec{C}\,]\big)\,dS = \vec{C}\int\limits_S \big[[\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]\times\vec{B}\,\big]\,dS.$$

Звідки теорема Стокса набуває вигляду

$$\vec{C}\oint\limits_{L(S)} [\vec{\tau}\times\vec{B}\,]\,dl = \vec{C}\int\limits_S \big[[\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]\times\vec{B}\,\big]\,dS.$$

У силу довільності вектора $\vec{C}$, маємо

$$\oint\limits_{L(S)} [\vec{\tau}\times\vec{B}\,]\,dl = \int\limits_S \big[[\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]\times\vec{B}\,\big]\,dS.$$

На занятті 3: 10.1; 10.2; 10.5; 10.6; 10.9; 10.10

Домашнє завдання: 10.7; 10.10; 10.11; 10.12

Заняття 4, 5

Методи векторної алгебри. Векторні тотожності та рівняння

Означення: скалярним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{E}_3$ називається число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}\,),$$

де a, b, $\angle(\vec{a}, \vec{b}\,)$ — відповідно довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та кут між ними.

Необхідною і достатньою умовою *ортогональності* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток векторів має властивості симетричності та лінійності:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$;
3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}\,), \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0\,$.

Довжиною (нормою) вектора $\vec{a}$ називається число

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Тобто в евклідовому просторі довжина вектора визначається через скалярний добуток векторів.[1] Також має місце обернене твердження: скалярний добуток двох векторів виражається через довжини їх суми і різниці за формулою

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}\,|^2 - |\vec{a} - \vec{b}\,|^2 \right)$$

.

У прямокутній декартовій системі координат (ПДСК), яка задається ортонормованим базисом $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, вектор $\vec{a}$ однозначно представляється

[1]квадрат довжини вектора a^2 часто позначається через $\vec{a}^2$.

набором своїх координат a_i, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Координати вектора $\vec{a}$ є коефіцієнтами лінійного розкладу цього вектора відносно базису ПДСК:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \equiv a_i \vec{e}_i \,,^2 \quad \text{де} \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = a \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_i)\,.$$

Зазначимо, що координати a_i вектора $\vec{a}$ у ПДСК <u>однозначно</u> визначаються самим вектором та базисом $\vec{e}_i$, де $i = 1, 2, 3$.

Зауваження: у прямокутній декартовій системі координат існує кілька способів позначення базисних векторів. Вибір позначень мотивується зручністю використання у конкретній задачі:

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \equiv \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \equiv \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\,.$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, заданих у ПДСК своїми координатами, має вигляд:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) = a_i b_i\,, \quad \text{де} \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Означення: векторним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{E}_3$ називається вектор $[\vec{a} \times \vec{b}\,]$, який задовольняє наступні умови:

- $\big|[\vec{a} \times \vec{b}\,]\big| = ab \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}\,)$, де a, b, $\angle(\vec{a}, \vec{b}\,)$ — відповідно довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та кут між ними;
- вектор $[\vec{a} \times \vec{b}\,]$ ортогональний до площини в якій лежать вектори-множники;
- якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a} \times \vec{b}\,]$ є правою.

Необхідною і достатньою умовою *колінеарності* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх векторного добутку, $[\vec{a} \times \vec{b}\,] = 0$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то модуль їх векторного добутку $[\vec{a} \times \vec{b}\,]$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Векторний добуток має властивості антисиметричності та лінійності:

[2]тут і далі використовується правило Ейнштейна відносно сум: по індексах, які повторюються двічі, відбувається підсумовування в межах їх зміни від 1 до 3, а знак суми при цьому не пишеться. Такі індекси називаються **німими**.

1. $[\vec{a} \times \vec{b}\,] = -[\vec{b} \times \vec{a}\,]$;

2. $\big[(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}\,\big] = [\vec{a}_1 \times \vec{b}\,] + [\vec{a}_2 \times \vec{b}\,]$;

3. $[\alpha\vec{a} \times \vec{b}\,] = \alpha[\vec{a} \times \vec{b}\,] = [\vec{a} \times \alpha\vec{b}\,], \quad \forall\alpha \in \mathbf{R}$.

Для подвійного векторного добутку мають місце тотожності:

$$\big[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}\,]\big] = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}\,),$$

$$\big[[\vec{a} \times \vec{b}\,] \times \vec{c}\,\big] = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c}\,).$$

Векторний добуток векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у ПДСК задається наступним чином:

$$[\vec{a} \times \vec{b}\,] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Звідки випливає, що компоненти векторного добутку у ПДСК записуються так

$[\vec{a}\times\vec{b}\,]_i = a_j b_k - a_k b_j$, де i, j, k утворюють циклічну перестановку чисел 1,2,3.

Означення: мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbf{E}_3$ називається число

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = \big(\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}\,]\big).$$

Необхідною і достатньою умовою компланарності трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = 0$. Якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарна, то модуль мішаного добутку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цій трійці векторів. Мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ — додатній, якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою, і від'ємний, якщо вона ліва.

Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці множників:

$$\big(\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}\,]\big) = \big([\vec{a} \times \vec{b}\,] \cdot \vec{c}\big)\,, \quad \text{або} \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\,) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\,),$$

і змінює знак при перестановці будь-яких двох множників (антициклічна перестановка):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\,) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\,) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\,).$$

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані координатами у ПДСК, то їх мішаний добуток визначається формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Задача 1

Розв'язати векторне рівняння $\alpha\vec{x} + \beta[\vec{a} \times \vec{x}] = \vec{b}$ відносно вектора $\vec{x}$.

Розв'язок:

Помножимо вихідне рівняння скалярно на вектор $\vec{a}$ і матимемо

$$(\vec{a} \cdot \vec{x}\,) = \frac{1}{\alpha}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}\,).$$

Тепер помножимо рівняння векторно на вектор $\vec{a}$, наприклад, зліва. Розкривши подвійний векторний добуток і беручи до уваги отриманий вище результат знайдемо

$$[\vec{a} \times \vec{x}\,] = \frac{1}{\alpha}\,[\vec{a} \times \vec{b}\,] - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) - a^2\vec{x}\right).$$

Підстановка значення векторного добутку $[\vec{a} \times \vec{x}\,]$ у вихідне рівняння дає значення невідомого вектора

$$\vec{x} = \frac{\alpha^2\vec{b} + \beta^2\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}\,) - \alpha\beta[\vec{a} \times \vec{b}\,]}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 a^2)}.$$

Задача 2

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (\vec{x} \cdot \vec{a}\,) & = & p\,, \\ [\vec{x} \times \vec{b}\,] & = & \vec{q}\,. \end{cases}$$

відносно вектора $\vec{x}$.

Розв'язок:

Помножимо друге рівняння системи векторно на вектор $\vec{a}$, наприклад, зліва. Розкривши подвійний векторний добуток у лівій частині отриманого співвідношення і беручи до уваги перше рівняння системи, знаходимо

$$\vec{x} = \frac{[\vec{a} \times \vec{q}] + p\vec{b}}{(\vec{a} \cdot \vec{b})}.$$

Задача 3

Розв'язати векторне рівняння $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$ відносно невідомих x, y, z.

Розв'язок:

Помножимо вихідне рівняння скалярно на вектор $\vec{a}^* \equiv \dfrac{[\vec{b} \times \vec{c}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$. Оскільки $(\vec{a}^* \cdot \vec{a}) = 1$, $(\vec{a}^* \cdot \vec{b}) = 0$, $(\vec{a}^* \cdot \vec{c}) = 0$, то

$$\vec{x} = (\vec{d} \cdot \vec{a}^*) = \frac{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Аналогічно

$$\vec{b} = \frac{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}, \qquad \vec{c} = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Задача 4

Довести векторну тотожність

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \left[\vec{c} \times \vec{d}\right] = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) & (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{d}) & (\vec{b} \cdot \vec{d}) \end{vmatrix}.$$

Розв'язок:

Вихідний вираз перепишемо в наступному вигляді

$$\Big([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{c} \times \vec{d}]\Big) = \Big(\vec{a} \cdot \big[\vec{b} \times [\vec{c} \times \vec{d}]\big]\Big) =$$

Розкривши подвійний векторний добуток матимемо потрібне

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) & (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{d}) & (\vec{b} \cdot \vec{d}) \end{vmatrix}.$$

Задача 5

Довести векторну тотожність

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\right) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{d}) & (\vec{b} \cdot \vec{d}) & (\vec{c} \cdot \vec{d}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{e}) & (\vec{b} \cdot \vec{e}) & (\vec{c} \cdot \vec{e}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{f}) & (\vec{b} \cdot \vec{f}) & (\vec{c} \cdot \vec{f}) \end{vmatrix}.$$

Розв'язок:

Кожний із мішаних добутків запишемо як визначник.

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

Матрицю другого визначника транспонуємо, оскільки така операція не змінює визначника. Скориставшись правилом, що визначник матриці, яка є добутком двох квадратних матриць, дорівнює добутку визначників цих матриць, матимемо:

$$= \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{d}) & (\vec{a} \cdot \vec{e}) & (\vec{a} \cdot \vec{f}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{d}) & (\vec{b} \cdot \vec{e}) & (\vec{b} \cdot \vec{f}) \\ (\vec{c} \cdot \vec{d}) & (\vec{c} \cdot \vec{e}) & (\vec{c} \cdot \vec{f}) \end{vmatrix} =$$

Транспонуємо матрицю отриманого визначника і матимемо потрібний результат

$$= \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{d}) & (\vec{b} \cdot \vec{d}) & (\vec{c} \cdot \vec{d}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{e}) & (\vec{b} \cdot \vec{e}) & (\vec{c} \cdot \vec{e}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{f}) & (\vec{b} \cdot \vec{f}) & (\vec{c} \cdot \vec{f}) \end{vmatrix}.$$

Задача 6

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (\vec{x} \cdot \vec{a}\,) &= \alpha, \\ (\vec{x} \cdot \vec{b}\,) &= \beta, \\ (\vec{x} \cdot \vec{c}\,) &= \gamma \end{cases}$$

відносно невідомого вектора $\vec{x}$.

Розв'язок:

Перші два рівняння системи задають площини, які перетинаються по прямій з напрямляючим вектором $\vec{l} = [\vec{a} \times \vec{b}]$. Рівняння цієї прямої, як легко бачити, має вигляд

$$\big[\vec{x} \times [\vec{a} \times \vec{b}]\big] = \beta\vec{a} - \alpha\vec{b}.$$

Дане рівняння домножимо векторно зліва на вектор $\vec{c}$ і, розкривши подвійний векторний добуток у лівій частині отриманого співвідношення, матимемо

$$\vec{x}\big(\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]\big) - [\vec{a} \times \vec{b}](\vec{c} \cdot \vec{x}\,) = \beta[\vec{c} \times \vec{a}\,] + \alpha[\vec{b} \times \vec{c}\,].$$

Звідси, беручи до уваги останнє рівняння вихідної системи, знаходимо шуканий вектор у вигляді

$$\vec{x} = \alpha\vec{a}^* + \beta\vec{b}^* + \gamma\vec{c}^*,$$

де $\vec{a}^* = \dfrac{[\vec{b} \times \vec{c}\,]}{\big(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\big)}$, $\vec{b}^* = \dfrac{[\vec{c} \times \vec{a}\,]}{\big(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\big)}$, $\vec{c}^* = \dfrac{[\vec{a} \times \vec{b}\,]}{\big(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\big)}$.

Очевидно, знайдений розв'язок має місце за умови некомпланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Задача 7

Знайти відстань від заданої точки $\vec{r}_1$ до площини $(\vec{r} \cdot \vec{a}\,) = \alpha$.

Розв'язок:

Очевидно, рівняння перпендикуляра опущеного з точки $\vec{r}_1$ на площину має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a},$$

де λ – довільна стала. Точка перетину перпендикуляра з площиною знаходиться з системи векторних рівнянь

$$\begin{cases} (\vec{r} \cdot \vec{a}\,) = \alpha, \\ \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}. \end{cases}$$

Підстановка другого рівняння системи в перше, приводить до значення сталої

$$\lambda = \frac{1}{a^2}\big(\alpha - (\vec{r}_1 \cdot \vec{a}\,)\big),$$

Звідси, довжина перпендикуляра дорівнює

$$d = |\lambda\vec{a}| = \frac{\left|\alpha - (\vec{r}_1 \cdot \vec{a}\,)\right|}{a}.$$

На занятті 4: 1.4; 1.6; 1.7; 1.23; 1.36–1.38; 1.41; 1.45; 1.51*; 1.58
Домашнє завдання: 1.58; 1.59; 1.61; 1.62; 1.69; 1.70; 1.84; 1.89; 1.90; 1.92; 1.97; 1.112; 1.114; 1.115

На занятті 5: 1.9; 1.11; 1.13; 1.14; 1.19; 1.24; 1.26–1.29; 1.40; 1.49
Домашнє завдання: 1.60; 1.63; 1.64; 1.73; 1.77; 1.88; 1.95; 1.98; 1.99; 1.105; 1.113; 1.116

Заняття 6

Ортогональні перетворення системи координат. Матриця переходу. Перетворення компонент вектора та тензора при заміні базису

Перехід від одного ортонормованого базису $S : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до іншого ортонормованого базису $S' : \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ називається *ортогональним перетворенням* і описується набором співвідношень:

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}\vec{e}_j{}', \quad \text{де} \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (8)$$ [3]

(розклад векторів нештрихованого базису в штрихованому базисі).

Коефіцієнти розкладу

$$\alpha_{ij} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j{}') = \cos\angle(\vec{e}_i, \vec{e}_j{}') \qquad (9)$$

утворюють *матрицю переходу* $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$.

Очевидно, пошук матриці переходу

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

[3] Тут і далі індекси змінюються від 1 до 3.

зручно проводити, зображаючи її у вигляді "таблиці Піфагора"

	$\vec{e}_1{}'$	$\vec{e}_2{}'$	$\vec{e}_3{}'$
$\vec{e}_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Тут номер вектора (або координатної осі) нештрихованого базису визначає номер рядка матриці переходу, а номер вектора (або осі) штрихованого базису — номер стовпчика.

З умов ортонормованості обох базисів $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = (\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}') = \delta_{ij}$ випливає

$$\alpha \cdot \alpha^T = \alpha^T \cdot \alpha = E\,, \tag{10}$$

де E — одинична матриця, α^T — матриця, транспонована до α. Тому перетворення, обернене до (8), має вигляд

$$\vec{e}_i{}' = \alpha_{ji}\vec{e}_j\,. \tag{11}$$

Закони перетворення (8) і (11) базисних векторів при ортогональних перетвореннях систем координат зручно записати у матричній формі

$$\vec{e} = \alpha\vec{e}\,' \quad \text{та} \quad \vec{e}\,' = \alpha^T\vec{e}.$$

Співвідношення (10) для матриці переходу у компонентному представленні має вигляд:

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}\,. \tag{12}$$

Звідси випливають наступні властивості рядків та стовпчиків матриці переходу:

1. Сума квадратів елементів кожного рядка (стовпчика) матриці переходу дорівнює одиниці.

2. Різні рядки (стовпчики) матриці переходу — ортогональні між собою.

Ці властивості дозволяють перевірити правильність побудови матриці переходу або знайти її елементи за мінімальним числом заданих. Матриця переходу однозначно визначається трьома *незалежними* матричними елементами (параметрами) та знаком $\det|\alpha|$. Якщо $\det|\alpha| > 0$ (див. задачу 2.1, то відповідне перетворення (8) системи координат є просторовим поворотом і переводить праву систему координат в праву, а ліву — в ліву (див. задачу 2.2). Якщо ж $\det|\alpha| < 0$, то перетворення (8) системи координат є суперпозицією просторового повороту та відбивання в площині або інверсії, і переводить праву систему координат в ліву, а ліву — в праву.

Зауважимо, що декартові координати точки при переході від однієї прямокутної декартової системи координат до іншої перетворюються так само як базисні вектори (вирази (8) та (11), відповідно):

$$x_i = \alpha_{ij} x'_j \quad \text{та} \quad x'_i = \alpha_{ji} x_j \,. \tag{13}$$

Для знаходження елементів матриці переходу можна скористатись будь-яким із співвідношень (8) – (13). Найбільш раціональний спосіб залежить від того, які саме величини є заданими.

Якщо відомі кути між осями двох систем координат (див. задачу 2.4), то елементи α_{ij} матриці переходу зручно знаходити за формулою (9) як косинуси відповідних кутів. Можна також виразити базисні вектори нештрихованої системи координат як лінійні комбінації векторів штрихованого базису.

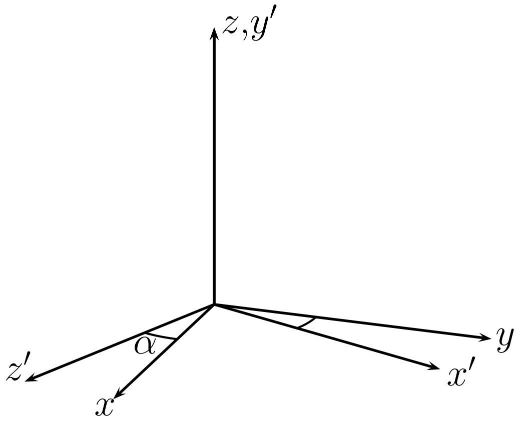
Так, згідно (8) та (11), рядки матриці переходу є компонентами нештрихованих базисних векторів у штрихованому базисі (див. задачу 2.5), а стовпчики є компонентами штрихованих базисних векторів відносно нештрихованих (див. задачу 2.6).

У задачах 2.15 та 2.16 для пошуку матриці переходу можна скористатись законом перетворення компонент радіус-вектора при заміні базису і результатом задачі 1.60.

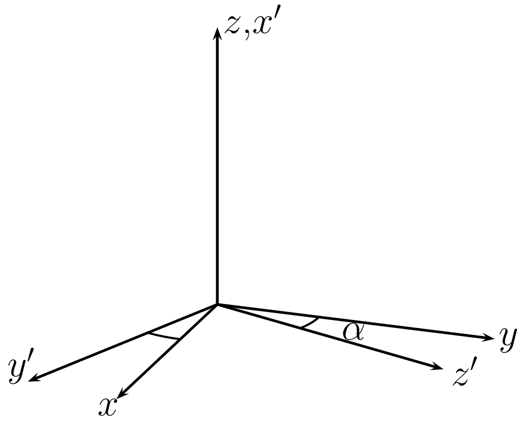
Задача 1

Знайти компоненти матриці переходу для просторових перетворень:

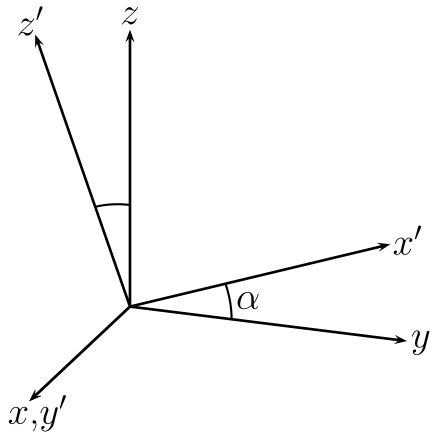
1)



2)



3)



Розв'язок:

Оскільки системи координат $Oxyz$ і $Ox'y'z'$ – прямокутні декартові, виходячи із визначення компонент матриці переходу $\alpha_{ij} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j{}') = \cos\angle(\vec{e}_i, \vec{e}_j{}')$, матимемо

$$1) \begin{pmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ 2) \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Знайти компоненти матриці переходу для повороту системи координат на кут φ навколо осі, паралельної одиничному вектору $\vec{n}$.

Розв'язок:

Розглянемо довільний вектор $\vec{a}$. Подамо його у вигляді суми двох складових паралельної $\vec{a}_{\parallel}$ і перпендикулярної $\vec{a}_{\perp}$ одиничному вектору $\vec{n}$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}\,) + \big[\vec{n} \times [\vec{a} \times \vec{n}\,]\big].$$

Очевидно поворот системи координат на кут φ навколо осі, паралельної одиничному вектору $\vec{n}$, рівносильний повороту вектора $\vec{a}$ навколо цієї осі на кут $-\varphi$. У результаті такого просторового перетворення складова $\vec{a}_\parallel$ не змінюється, а складова $\vec{a}_\perp$ повертається на кут $-\varphi$;

$$\vec{a}\,'_\parallel = \vec{a}_\parallel, \quad \vec{a}\,'_\perp = \cos\varphi\,\big[\vec{n}\times[\vec{a}\times\vec{n}\,]\big] - \sin\varphi\,[\vec{a}\times\vec{n}\,].$$

При цьому довільний вектор $\vec{a}$ відображається на вектор

$$\begin{aligned}\vec{a}\,' &= \vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}\,) + \cos\varphi\,\big[\vec{n}\times[\vec{a}\times\vec{n}\,]\big] - \sin\varphi\,[\vec{a}\times\vec{n}\,] = \\ &= \cos\varphi\,\vec{a} + (1-\cos\varphi)\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}\,) - \sin\varphi\,[\vec{a}\times\vec{n}\,].\end{aligned}$$

Стосовно ортів вихідної декартової системи координат можна записати

$$\vec{e}\,'_j = \cos\varphi\,\vec{e}_j + (1-\cos\varphi)\vec{n}(\vec{e}_j\cdot\vec{n}\,) + \sin\varphi\,[\vec{e}_j\times\vec{n}].$$

Компоненти матриці переходу згідно визначення рівні

$$\alpha_{ij} = (\vec{e}_i\cdot\vec{e}\,'_j) = \cos\varphi\,\delta_{ij} + (1-\cos\varphi)n_i n_j + \sin\varphi\,\varepsilon_{ijk}n_k.$$

Тут взято до уваги, що

$$\big(\vec{e}_i\cdot[\vec{e}_j\times\vec{n}]\big) = \big([\vec{e}_i\times\vec{e}_j]\cdot\vec{n}\big) = \varepsilon_{ijk}(\vec{e}_k\cdot\vec{n}\,) = \varepsilon_{ijk}n_k.$$

Задача 3

Знайти матрицю переходу для повороту на три кути Ейлера φ, θ, ψ.

Розв'язок:

Послідовність виконання поворотів наступна: 1) навколо осі Oz на кут ψ (у результаті такого повороту вісь Ox переходить у лінію вузлів $Ox' \equiv ON$); 2) навколо осі Ox' на кут θ; 3) навколо осі Oz'' на кут φ.

Виходячи з послідовності виконання поворотів, матриця переходу $\hat{A}$ є добутком трьох матриць

$$\hat{A}(\psi,\theta,\varphi) = \hat{A}_z(\psi)\hat{A}_{x'}(\theta)\hat{A}_{z''}(\varphi) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

На занятті 6: 2.3; 2.4; 2.8; 2.9; 2.12; 2.13; 2.15; 2.16*; 2.19

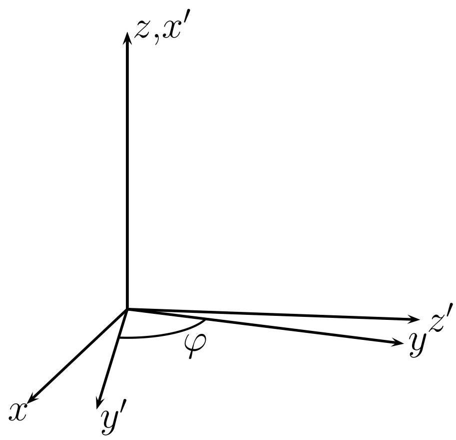
Домашнє завдання: 2.5–2.7; 2.10; 2.14; 2.18(a); 2.20; 2.21

Заняття 7

Модульна контрольна робота №1

Типовий варіант контрольної роботи

1. Знайти компоненти матриці переходу для просторового перетворення



2. Записати рівняння прямої, що проходить через дану точку $\vec{r}_1$ і перетинає дану пряму $[\vec{r}\times\vec{a}\,] = \vec{A}$ під прямим кутом.

3. Величину $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ розкласти в ряд Тейлора по r'/r з точністю до $\left(r'/r\right)^2$, якщо $r' \ll r$.

4. Обчислити $\vec{\nabla}\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r}\,)}{r^3}$, якщо вектор $\vec{a}$ сталий.

5. Обчислити $\operatorname{div}\big(\vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})\big)$, якщо вектор $\vec{a}$ сталий.

6. Обчислити $\operatorname{rot}\big(\vec{r}\,e^{ikr}\big)$, якщо k – стала.

7. Поверхневий інтеграл $\oint\limits_{S(V)} \big(\vec{a}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}\cdot\vec{n}\big)\,dS$ перетворити в інтеграл по об'єму, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{k}$ – сталі, $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $S(V)$, що обмежує об'єм V.

Домашнє завдання: Аналіз розв'язків завдань контрольної роботи.

Заняття 8

Алгебраїчні операції над тензорами 2-го рангу. Тензори вищих рангів

Якщо за допомогою якої-небудь операції із одного або декількох тензорів утворюються інші тензори, то такі операції називаються тензорними. У координатному підході всі тензорні операції визначаються через компоненти тензорів і мають інваріантний зміст, тобто означені співвідношення між компонентами виконуються в будь-якій системі координат.

Додавання (віднімання). Якщо $\hat{A}$ та $\hat{B}$ — тензори рангу n, то їх сумою (різницею) називається тензор $\hat{C}$ рангу n з компонентами

$$C_{i_1\ldots i_n} = A_{i_1\ldots i_n} + B_{i_1\ldots i_n} \quad (C_{i_1\ldots i_n} = A_{i_1\ldots i_n} - B_{i_1\ldots i_n}).$$

Зауважимо, що додавати (віднімати) можна тільки тензори однакового рангу[4].

Множення. Зовнішнім (тензорним) добутком тензора $\hat{A} = \{A_{i_1 i_2\ldots i_n}\}$ рангу n із тензором $\hat{B} = \{B_{j_1 j_2\ldots j_m}\}$ рангу m називається тензор $\hat{C}$ рангу $n+m$ з компонентами

$$C_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_m} = A_{i_1\ldots i_n} B_{j_1\ldots j_m}\,.$$

Тензори-співмножники, на відміну від доданків у сумі (різниці), можуть бути різного рангу. Наприклад, якщо $\hat{A}$ — тензор першого рангу (вектор), $\hat{B}$ — тензор другого рангу, то їх тензорним добутком називається тензор $\hat{C}$ третього

[4]нульовий тензор довільного рангу позначається символом $\hat{0}$.

рангу з компонентами

$$C_{ijk} = A_i B_{jk}\,.$$

В інваріантному записі ця операція позначається знаком "$\otimes$" або символом звичайного множення. Для приведеного вище прикладу: $\hat{A} \otimes \hat{B} \equiv \hat{A}\hat{B} \equiv \{A_i B_{jk}\}$.

Як і у випадку множення матриць, добуток тензорів є асоціативним

$$\hat{A} \otimes (\hat{B} \otimes \hat{C}) = (\hat{A} \otimes \hat{B}) \otimes \hat{C}$$

і некомутативним

$$\hat{A} \otimes \hat{B} \neq \hat{B} \otimes \hat{A}\,.$$

Зауваження: у випадку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ їх тензорний добуток часто називається прямим, а сам тензор $\vec{a} \otimes \vec{b}$ — діадою.

Згортка. Згорткою тензора $\hat{A} = \{A_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ рангу n по виділеній парі індексів $i_k i_{k+j}$ називається тензор $\hat{B}$ рангу $n-2$, компоненти якого обчислюються наступним чином. У вибраній парі індексів покладаємо $i_k = i_{k+j} = s$ і по індексах, що повторюються (німих індексах), здійснюємо підсумовування від 1 до 3

$$B_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{k+j-1} i_{k+j+1} \ldots i_n} = A_{i_1 \ldots i_{k-1} s\, i_{k+1} \ldots i_{k+j-1} s\, i_{k+j+1} \ldots i_n} \equiv$$
$$\equiv \sum_{s=1}^{3} A_{i_1 \ldots i_{k-1} s\, i_{k+1} \ldots i_{k+j-1} s\, i_{k+j+1} \ldots i_n}\,.$$

Згортати тензори можна по одній, двох, трьох і т.д. виділених парах, якщо вистачає індексів. Наприклад, якщо $\hat{A}$ — тензор третього рангу, то в результаті згортки по першій парі індексів отримується тензор першого рангу (вектор):

$$B_k = A_{iik} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{iik} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k}\,.$$

Очевидно, операція згортки означена для тензорів рангу 2 і вище.

Властивості симетрії тензорів. Тензор $\hat{A}$ називається *симетричним* по виділеній парі індексів, якщо його компоненти не змінюються при перестановці індексів цієї пари. Наприклад, симетричний по першій парі індексів тензор $\hat{A}$ третього рангу задовольняє рівність $A_{ijk} = A_{jik}$.
Тензор $\hat{A}$ називається *антисиметричним* по виділеній парі індексів, якщо його компоненти змінюють свій знак при перестановці індексів цієї пари. Наприклад, антисиметричний по першій парі індексів тензор $\hat{A}$ третього рангу задовольняє рівності $A_{ijk} = -A_{jik}$.

Тензор називається повністю симетричним (антисиметричним), якщо він симетричний (антисиметричний) по будь-якій парі індексів.

Всі властивості симетрії є інваріантними, тобто не залежать від вибору системи координат.

Довільний тензор $\hat{T}$ можна представити у вигляді суми симетричної $\hat{S}$ та антисиметричної $\hat{A}$ частини відносно перестановки заданої пари індексів. Зокрема для тензора другого рангу

$$\hat{T} = \hat{S} + \hat{A}, \quad \text{де} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right), \quad A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right).$$

Побудова вказаним способом із даного об'єкту нових, симетричних і антисиметричних, називається, відповідно, симетризуванням та альтернуванням заданого об'єкту. Наприклад, для тензора $\hat{T}$ третього рангу симетрична частина дається виразом

$$S_{ijk} = \frac{1}{3}(A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij})$$

(сума по циклічних перестановках індексів), антисиметрична частина

$$S_{ijk} = \frac{1}{3!}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji})$$

(сума по антициклічних перестановках індексів).

Внутрішнім добутком або згорткою тензора $\hat{A} = \{A_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ рангу n із тензором $\hat{B} = \{B_{j_1 j_2 \ldots j_m}\}$ рангу m по виділеній парі індексів $i_k j_l$ $(1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant m)$, один з яких належить тензору $\hat{A}$, а другий — тензору $\hat{B}$, називається тензор $\hat{C}$ рангу $n+m-2$ з компонентами

$$C_{i_1\ldots i_{k-1}i_{k+1}\ldots i_n j_1\ldots j_{l-1}j_{l+1}\ldots j_m} = A_{i_1\ldots i_{k-1}s\,i_{k+1}\ldots i_n}B_{j_1\ldots j_{l-1}s\,j_{l+1}\ldots j_m} \equiv$$
$$\equiv \sum_{s=1}^{3} A_{i_1\ldots i_{k-1}s\,i_{k+1}\ldots i_n}B_{j_1\ldots j_{l-1}s\,j_{l+1}\ldots j_m}\,.$$

Набір тензорів $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ ($\vec{e}_i$ — орти ПДСК) утворює лінійно незалежний базис у просторі тензорів другого рангу. Довільний тензор $\hat{t}$ другого рангу можна розкласти по цьому базису наступним чином

$$\hat{t} = t_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\,,$$

де коефіцієнти розкладу t_{ij} мають вигляд $t_{ij} = \vec{e}_i\,\hat{t}\,\vec{e}_j,\;\; i,j = 1,2,3.$

Діагональну компоненту тензора $\hat{t}$ другого рангу відносно осі, заданої одиничним вектором $\vec{n}$, можна знайти, обчисливши згортку

$$t_{nn} = \vec{n}\,\hat{t}\,\vec{n}.$$

При цьому орієнтація інших осей значення не має (див.розділ 4 і задачі 4.20, 4.21).

Для тензора $\hat{t} = \{t_{ij}\}$ другого рангу, якщо $\det|\,\hat{t}\,| \neq 0$, існує обернений тензор $\hat{t}^{-1}$, який визначається оберненою матрицею компонент $||t_{ij}||^{-1}$:

$$t^{-1}_{ij} = \frac{T_{ji}}{\det|\,\hat{t}\,|}\,,$$

де $T_{ji} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji}$ — алгебраїчне доповнення до елемента t_{ji}, а Δ_{ji} — додатковий мінор до елемента t_{ji}, $i,j = 1,2,3.$

Задача 1

Знайти компоненту t'_{12} симетричного тензора $\hat{t} = \{t_{ij}\}$ 2-го рангу в системі координат, повернутій на кут φ навколо осі Oz. При яких кутах $t'_{12} = 0$?

Розв'язок:

Оскільки при ортогональних перетвореннях базису координати перетворюються за правилом $x'_i = \alpha_{ji}x_j$ $(i,j = 1,2,3)$, то при повороті на кут φ

навколо осі Oz маємо

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Як відомо, при ортогональних перетвореннях систем координат компоненти тензора перетворюються як добутки відповідних координат. Тому компонента t'_{12} тензора $\hat{t}$ перетворюється як добуток

$$\begin{aligned} x'y' &= (x\cos\varphi + y\sin\varphi)(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) = \\ &\quad = \sin\varphi\cos\varphi\,(yy - xx) + xy\cos^2\varphi - yx\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Звідки, враховуючи симетрію тензора $\hat{t}$, маємо

$$t'_{12} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\big(t_{22} - t_{11}\big) + \cos 2\varphi\, t_{12}.$$

Компонента $t'_{12} = 0$ для величини кута $\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}}$.

Задача 2

Знайти обмеження на загальний вигляд тензора $\hat{t} = \{t_{ij}\}$ 2-го рангу, якщо він не змінюється при повороті на кут $2\pi/4$ навколо осі Oz (вісь симетрії C_4).

Розв'язок:

Виходячи із закону перетворення компонент тензора 2-го рангу $\hat{t}' = \hat{A}^T\hat{t}\hat{A}$, враховуючи явний вигляд матриці переходу $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, знаходимо компоненти тензора $\hat{t}' = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{21} & t_{23} \\ -t_{12} & t_{11} & -t_{13} \\ t_{32} & -t_{31} & t_{33} \end{pmatrix}$ у системі координат, повернутій відносно вихідної на кут $\pi/2$ навколо осі Oz. Із умови $\hat{t} = \hat{t}'$ легко отримується наступний вигляд тензора $\hat{t} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ -t_{12} & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$.

Задача 3

Антисиметричний тензор $\hat{t}$ 2-го рангу можна подати в вигляді

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Довести, що величини ω_1, ω_2, ω_3 утворюють вектор $\vec{\omega}$. Виходячи із закону перетворення компонент тензора $\hat{t}$, знайти закон перетворення компонент вектора $\vec{\omega}$ при відбиванні в площині xOy та інверсії.

Розв'язок:

Безпосередньою перевіркою не важко переконатися, що компоненти тензора $\hat{t} = \{t_{ij}\}$ можна записати в вигляді $t_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k$, де $i, j, k = 1, 2, 3$. Обидві частини даного співвідношення домножимо на ε_{ijl} та вирахуємо подвійну суму по індексах i та j. Враховуючи, що $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$, матимемо $\omega_l = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{lij}t_{ij}$. При ортогональних перетвореннях системи координат з матрицею переходу $\hat{A} = ||\alpha_{ij}||$ $(i, j = 1, 2, 3)$ величини ω_l будуть перетворюватися так

$$\omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lij}t_{ij} = \frac{1}{2}\Delta\alpha_{lm}\alpha_{in}\alpha_{jp}\,\varepsilon'_{mnp}\alpha_{iq}\alpha_{js}\,t'_{qs} =$$

Тут $\Delta = \det|\hat{A}| = \pm 1$. Беручи до уваги, що $\alpha_{in}\alpha_{iq} = \delta_{nq}$, $\alpha_{jp}\alpha_{js} = \delta_{ps}$, матимемо

$$= \frac{1}{2}\Delta\alpha_{lm}\,\varepsilon'_{mnp}t'_{np} = \Delta\alpha_{lm}\omega'_m.$$

Як видно, набір величин $\{\omega_i\}$ утворює аксіальний вектор $\vec{\omega}$.

При відбиванні в площині xOy, що описується матрицею переходу $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, виходячи із закону перетворення тензорів 2-го рангу $\hat{t}' = \hat{A}^T\hat{t}\hat{A}$, знаходимо явний вигляд тензора $\hat{t}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$. У результаті порівняння вигляду тензорів $\hat{t}$ і $\hat{t}'$, отримуємо закон перетворення компонент вектора ω у вигляді $\omega' = (-\omega_1, -\omega_2, \omega_3)$. У випадку інверсії шляхом аналогічних міркувань матимемо $\omega' = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Задача 4

Обчислити:

$$1)\ (\vec a\otimes\vec b\,)\cdot\vec c\,;\quad 2)\ \vec a\cdot(\vec b\otimes\vec c\,)\,;\quad 3)\ (\vec a\otimes\vec b\,)\cdot\vec b\,;\quad 4)\ (\vec a\otimes\vec b\,)\cdot\big[\vec a\times\vec b\,\big].$$

Розв'язок:

1) Введемо позначення $\hat t=\vec a\otimes\vec b$ і матимемо $\hat t\vec c=\vec y$. Компоненти вектора $\vec y$ матимуть вигляд

$$y_i=t_{ij}c_j=a_ib_jc_j=a_i(\vec b\cdot\vec c\,),$$

де $t_{ij}=a_ib_j$, $i,j=1,2,3$. Звідси маємо вектор $\vec y=\vec a(\vec b\cdot\vec c\,)$ і відповідно $(\vec a\otimes\vec b\,)\cdot\vec c=\vec a(\vec b\cdot\vec c\,)$.

2) Ввівши позначення $\hat t=\vec b\otimes\vec c$, запишемо $\vec a\hat t=\vec y$. Компоненти вектора $\vec y$ будуть рівні

$$y_j=a_it_{ij}=a_ib_ic_j=(\vec a\cdot\vec b\,)c_j,$$

де $t_{ij}=b_ic_j$, $i,j=1,2,3$. Звідси вектор $\vec y=(\vec a\cdot\vec b\,)\,\vec c$ і відповідно маємо $\vec a\cdot(\vec b\otimes\vec c\,)=(\vec a\cdot\vec b\,)\,\vec c$.

3) Згідно результату, отриманому в прикладі 1, матимемо

$$(\vec a\otimes\vec b\,)\cdot\vec b=\vec a\,(\vec b\cdot\vec b\,)=b^2\vec a.$$

4) Згідно результату, отриманому в прикладі 1, матимемо

$$(\vec a\otimes\vec b\,)\cdot\big[\vec a\times\vec b\,\big]=\vec a\,\Big(\vec b\cdot\big[\vec a\times\vec b\,\big]\Big)=\vec a\,\big(\vec b,\vec a,\vec b\,\big)=0.$$

Задача 5

Заданий тензор $\hat t=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&-5&6\\-7&8&9\end{pmatrix}$ та вектор $\vec a=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Тензор $\hat t$ розкласти на симетричну $\hat S$ та антисиметричну $\hat A$ частини. Обчислити:

1) згортки t_{ii}, A_{ii}, S_{ii};

2) $\vec b=\hat t\vec a$, $\vec c=\vec a\hat t$;

3) $\vec a\hat t\vec a=\vec a\cdot\vec b=\vec c\cdot\vec a$;

4) $t_{ij}S_{ij}$, $t_{ij}A_{ij}$;

5) $t_{ij}-\dfrac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}$, $\left(t_{ij}-\dfrac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right)a_j$, $\left(t_{ij}-\dfrac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right)a_ia_j$;

6) обчислити згортки $\nu_{ij}\nu_{ij}$, $\nu_{ij}\nu_{ji}$, $\nu_{ij}S_{ij}$, $\nu_{ij}A_{ij}$, де

$$\hat{\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

Симетрична $\hat{S}$ та антисиметрична $\hat{A}$ частини тензора $\hat{t}$ знаходяться наступним чином

$$\hat{S}=\frac{1}{2}\left(\hat{t}+\hat{t}^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}=\frac{1}{2}\left(\hat{t}-\hat{t}^T\right)=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Шукані згортки є суми діагональних елементів відповідних тензорів. Тому $t_{ii}=t_{11}+t_{22}+t_{33}=1-5+9=5$. Аналогічно $S_{ii}=1-5+9=5$, $A_{ii}=0$.

2)

$$\vec{b}=\hat{t}\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c}=\vec{a}\hat{t}=\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12, & 12, & 42 \end{pmatrix}.$$

3)

$$\vec{a}\hat{t}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}=138,$$

$$\vec{a}\hat{t}\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -12, & 12, & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 138.$$

4)

$$t_{ij}S_{ij} = t_{ij}S^T_{ji} = \left(\hat{t}\hat{S}^T\right)_{ii} = \mathrm{Sp}\left(\hat{t}\hat{S}^T\right) = 215,$$

$$t_{ij}A_{ij} = t_{ij}A^T_{ji} = \left(\hat{t}\hat{A}^T\right)_{ii} = \mathrm{Sp}\left(\hat{t}\hat{A}^T\right) = 70.$$

5)

$$T_{ij} = t_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk} \implies \hat{T} = \hat{t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\left(\hat{t}\right)\hat{E} = \hat{t} - \frac{5}{3}\,\hat{E} = \begin{pmatrix} -2/3 & -2 & 3 \\ 4 & -20/3 & 6 \\ -7 & 8 & 22/3 \end{pmatrix},$$

$$\left(t_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right)a_j = T_{ij}a_j \implies \hat{T}\vec{a} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & -2 & 3 \\ 4 & -20/3 & 6 \\ -7 & 8 & 22/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 26/3 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$\left(t_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right)a_i a_j = a_i T_{ij} a_j = \vec{a}\hat{T}\vec{a} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/3 & -2 & 3 \\ 4 & -20/3 & 6 \\ -7 & 8 & 22/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 344/3.$$

6)

$$\nu_{ij}\nu_{ij} = \nu_{ij}\nu^T_{ji} = \left(\hat{\nu}\hat{\nu}^T\right)_{ii} = \mathrm{Sp}\left(\hat{\nu}\hat{\nu}^T\right) = 28,$$

$$\nu_{ij}\nu_{ji} = \left(\hat{\nu}\hat{\nu}\right)_{ii} = \mathrm{Sp}\left(\hat{\nu}\hat{\nu}\right) = 8,$$

$$\nu_{ij}S_{ij} = \nu_{ij}S_{ji} = \left(\hat{\nu}\hat{S}\right)_{ii} = \mathrm{Sp}\left(\hat{\nu}\hat{S}\right) = 42,$$

$$\nu_{ij}A_{ij} = -\nu_{ij}A_{ji} = -\left(\hat{\nu}\hat{A}\right)_{ii} = -\mathrm{Sp}\left(\hat{\nu}\hat{A}\right) = -26.$$

Задача 6

Відомо, що $\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{x}\right]\right]=\hat{t}\vec{x}$. За якої умови тензор $\hat{t}$ буде симетричним?

Розв'язок:

Розкриємо подвійний векторний добуток у лівій частині вихідного співвідношення

$$\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{x}\right]\right]=\vec{b}\big(\vec{a}\cdot\vec{x}\,\big)-\vec{x}\big(\vec{a}\cdot\vec{b}\,\big)=$$

Беручи до уваги результат, отриманий у прикладі 1 задачі 4, будемо мати

$$=\big(\vec{b}\otimes\vec{a}\big)\vec{x}-\vec{x}\big(\vec{a}\cdot\vec{b}\,\big)=\Big(\vec{b}\otimes\vec{a}-\big(\vec{a}\cdot\vec{b}\,\big)\hat{E}\Big)\,\vec{x}.$$

Звідси маємо вигляд тензора $\hat{t}=\vec{b}\otimes\vec{a}-\big(\vec{a}\cdot\vec{b}\,\big)\hat{E}$. Очевидно, симетрія тензора $\hat{t}$ вимагає виконання рівності $\vec{b}\otimes\vec{a}=\vec{a}\otimes\vec{b}$, що можливо за умови колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Задача 7

Дано вектор $\vec{a}=\left[\vec{n}\times\left[\vec{b}\times\vec{n}\right]\right]$. Встановити зв'язок між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у вигляді тензорної рівності (вигляду $\vec{a}=\hat{t}\,\vec{b}$), якщо вектор $\vec{n}$ – одиничний.

Розв'язок:

У правій частині виразу для вектора $\vec{a}$ розкриємо подвійний векторний добуток

$$\vec{a}=\left[\vec{n}\times\left[\vec{b}\times\vec{n}\right]\right]=\vec{b}-\vec{n}\big(\vec{n}\cdot\vec{b}\,\big)=\vec{b}-\big(\vec{n}\otimes\vec{n}\big)\,\vec{b}=$$
$$=\big(\hat{E}-\vec{n}\otimes\vec{n}\big)\,\vec{b}=\hat{t}\,\vec{b}.$$

Тут тензор $\hat{t}=\hat{E}-\vec{n}\otimes\vec{n}$.

На занятті 8: 3.4; 3.6; 3.8; 3.10(2); 3.18; 3.20; 4.7; 4.9; 4.11; 4.14; 4.15; 4.27

Домашнє завдання: 3.2; 3.7; 3.9; 3.10(1,3,6); 3.12; 3.19; 3.22; 4.8; 4.10; 4.12; 4.17; 4.18; 4.29; 4.39

Заняття 9

Власні значення та власні вектори тензора 2-го рангу. Головна система координат симетричного тензора 2-го рангу

Спектральна задача для тензора $\hat{t} = \{t_{ij}\}$ другого рангу полягає у пошуку чисел λ та відповідних їм векторів $\vec{a}$ (причому $\vec{a} \neq 0$), що задовольняють векторне рівняння

$$\hat{t}\,\vec{a} = \lambda\vec{a} \qquad (\vec{a}\,\hat{t} = \lambda\vec{a}) \tag{14}$$

Вектор $\vec{a}$ називається *правим* (*лівим*) власним вектором тензора $\hat{t}$, λ — власним значенням тензора $\hat{t}$, що відповідає власному вектору $\vec{a}$. Векторне рівняння (14) еквівалентне однорідній системі алгебраїчних рівнянь

$$t_{ij}a_j = \lambda a_i \qquad (a_i t_{ij} = \lambda a_j)\,, \quad \text{де} \quad i, j = 1, 2, 3$$

або

$$(t_{ij} - \lambda\delta_{ij})a_j = 0 \quad \big(a_i(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0\,\big)\,, \tag{15}$$

відносно компонент власного вектора $\vec{a}$ тензора $\hat{t}$.

З умови існування нетривіального розв'язку системи (15) випливає *характеристичне* рівняння

$$|t_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \tag{16}$$

для знаходження власних значень λ, які є спільними для лівих і правих власних векторів тензора $\hat{t}$. Очевидно, для тривимірного тензора $\hat{t}$ другого рангу характеристичне рівняння (16) є алгебраїчним рівнянням третього степеня відносно λ

$$|t_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{17}$$

Число власних значень λ тензора $\hat{t}$ другого рангу (а також число відповідних їм власних та приєднаних векторів $\vec{a}$) співпадає з розмірністю тензора, тобто дорівнює трьом.

Розкривши визначник, характеристичне рівняння (17) перепишеться у простішому вигляді

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

де коефіцієнти

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33}\,,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix},$$

відповідно, називаються першим, другим та третім інваріантом тензора $\hat{t}$.

У випадку тензора $\hat{t}$ другого рангу його інваріанти виражаються через власні значення λ_1, λ_2, λ_3 наступним чином

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\,, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1\,, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\,.$$

Власні вектори $\vec{a}_i$ тензора $\hat{t}$ знаходяться в результаті послідовної підстановки власних значень λ_i $(i = 1, 2, 3)$ у систему (15). Оскільки в однорідній алгебраїчній системі (15) число рівнянь на одиницю менше числа невідомих ($\vec{a}$ та λ), то її розв'язок буде неоднозначним. А саме, власні вектори знаходяться з точністю до числових множників, які можна визначити з умови нормування (наприклад, на одиницю): $\vec{\mu}_i = \vec{a}_i/|\vec{a}_i|,\ i = 1, 2, 3$.

Власні значення симетричного тензора $\hat{t}$ другого рангу — дійсні, а відповідні їм власні вектори взаємно ортогональні. Одиничні власні вектори такого тензора задають ортонормований базис $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$, $\vec{\mu}_3$, в якому тензор $\hat{t}$ представляється діагональною матрицею

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

де λ_i — власне значення, що відповідає власному вектору $\vec{\mu}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Прямокутна декартова система координат з базисом $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$, $\vec{\mu}_3$ називається головною системою координат тензора $\hat{t}$.

У випадку співпадіння власних значень $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$ симетричного тензора $\hat{t}$ однозначно визначається лише власний вектор $\vec{\mu}_1$. Довільний вектор із площини, перпендикулярної до $\vec{\mu}_1$, також буде власним. У цій площині завжди можна вибрати (причому, неєдиним чином) пару ортогональних векторів так, щоб вони разом з $\vec{\mu}_1$ утворювали праву трійку векторів. Для тензорів, кратних одиничному, будь-який ненульовий вектор буде власним.

Задача 1

Знайти власні значення і відповідні їм праві та ліві власні вектори тензора $\hat{t} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язок:

Власні значення тензора 2-го рангу, що відповідають правим і лівим власним векторам, співпадають та визначаються з наступного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-4) = 0.$$

Звідси матимемо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

Праві власні вектори $\vec{x}$ тензора $\hat{t}$ даються рівнянням $(\hat{t} - \lambda\hat{E})\vec{x} = 0$, у яке по черзі підставляються власні значення λ_i $(i = 1, 2, 3)$. Так, у випадку $\lambda_1 = 0$ маємо

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо власний вектор $\vec{x}_1 = (-2, 1, 0)$. Аналогічно знаходяться два інших власних вектори $\vec{x}_2 = (0, 0, 1)$, $\vec{x}_3 = (2, 1, 0)$.

Ліві власні вектори $\vec{y}$ тензора $\hat{t}$ визначаються з рівняння $(\hat{t}^T - \lambda_i\hat{E})\vec{y}_i = 0$, де $i = 1, 2, 3$. Якщо $i = 1$, матимемо

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо власний вектор $\vec{y}_1 = (1, -2, 0)$. Аналогічно знаходимо ще два власні вектори $\vec{y}_2 = (0, 0, 1)$, $\vec{y}_3 = (1, 2, 0)$.

Задача 2

Знайти власні значення, власні вектори та інваріанти тензора діелектричної проникності анізотропного кристалу $\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}$, де $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$.

Розв'язок:

Власні значення тензора $\hat{\varepsilon}$ знаходяться з рівняння

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_\perp - \lambda & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_\perp - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel - \lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon_\parallel - \lambda)\big((\varepsilon_\perp - \lambda)^2 - \varepsilon_a^2\big) = 0.$$

Звідки маємо $\lambda_1 = \varepsilon_\parallel$, $\lambda_2 = \varepsilon_\perp - \varepsilon_a$, $\lambda_3 = \varepsilon_\perp + \varepsilon_a$.

Власні вектори $\vec{x}$ тензора $\hat{\varepsilon}$ визначаються з рівняння $(\hat{\varepsilon} - \lambda_i \hat{E})\vec{x}_i = 0$, де $i = 1, 2, 3$. Так, якщо $i = 1$, матимемо

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де взято до уваги, що $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$. Неважко бачити, що власний вектор $\vec{x}_1$ має вигляд $\vec{x}_1 = (0, 0, 1)$. Два інших власних вектори знаходяться аналогічно і виявляються рівними $\vec{x}_2 = (1, -i, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, i, 0)$.

Звідси, інваріанти тензора $\hat{\varepsilon}$ будуть рівні $I_1 = \varepsilon_\parallel + 2\varepsilon_\perp$, $I_2 = \varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_a^2 + 2\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp$, $I_3 = \varepsilon_\parallel\big(\varepsilon_\perp^2 - \varepsilon_a^2\big)$.

Задача 3

Знайти власні значення, власні вектори та інваріанти тензора $\hat{t} = \vec{a} \otimes \vec{a}$.

Розв'язок:

Власні значення λ та відповідні їм власні вектори $\vec{x} \neq 0$ тензора $\hat{t} = \vec{a} \otimes \vec{a}$ знаходяться з рівняння

$$\vec{a}\big(\vec{a} \cdot \vec{x}\big) = \lambda\vec{x},$$

яке отримується з міркувань, що $\big(\vec{a} \otimes \vec{a}\big)\vec{x} = \vec{a}\big(\vec{a} \cdot \vec{x}\big)$.

Неважко бачити, що записане вище рівняння задовольняється при $\vec{x}_1 = \vec{a}$, $\lambda_1 = \left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right) = a^2$. Два інших власних значення співпадають $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Відповідні їм власні вектори $\vec{x}_2$ і $\vec{x}_3$ є довільними взаємно ортогональними векторами із площини перпендикулярної до вектора $\vec{a}$.

Інваріанти тензора $\hat{t} = \vec{a} \otimes \vec{a}$ є

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a^2,$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = 0,$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0.$$

Задача 4

Знайти власні значення, власні вектори та інваріанти тензора $\hat{t} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{b} \otimes \vec{a}$, де $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні вектори.

Розв'язок:

Рівняння для пошуку власних значень і власних векторів тензора $\hat{t}$ має вигляд

$$\vec{a}\big(\vec{b} \cdot \vec{x}\big) + \vec{b}\big(\vec{a} \cdot \vec{x}\big) = \lambda\vec{x}, \quad \text{де} \quad \vec{x} \neq 0.$$

Як легко бачити, одне із власних значень $\lambda_1 = 0$, а відповідний йому власний вектор $\vec{x}_1 = \big[\vec{b} \times \vec{a}\big]$. Інші два власні вектори шукаємо у вигляді продиктованому формою рівняння на власні значення: $\vec{x}_{2,3} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, де α і β – довільні сталі. Підстановка вектора $\vec{x}_{2,3}$ у рівняння для пошуку власних значень і власних векторів тензора $\hat{t}$ дає

$$\vec{a}\left(\alpha\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big) + \beta b^2 - \lambda\alpha\right) + \vec{b}\left(\alpha a^2 + \beta\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big) - \lambda\beta\right) = 0.$$

В силу лінійної незалежності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих сталих α і β:

$$\begin{cases} \alpha\left(\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big) - \lambda\right) + \beta b^2 = 0, \\ \alpha a^2 + \beta\left(\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big) - \lambda\right) = 0. \end{cases}$$

Умова існування нетривіального розв'язку такої системи приводить до рівняння

$$\left(\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big) - \lambda\right)^2 - a^2b^2 = 0,$$

розв'язавши яке знаходимо власні значення $\lambda_2 = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) - ab$, $\lambda_3 = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + ab$. Підстановка отриманих власних значень у систему для знаходження сталих α і β приводить до значень відповідних їм власних векторів $\vec{x}_2 = b\vec{a} - a\vec{b}$, $\vec{x}_3 = b\vec{a} + a\vec{b}$.

Звідси, інваріанти тензора $\hat{t}$ рівні $I_1 = 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, $I_2 = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 - a^2b^2$, $I_3 = 0$.

На занятті 9: 5.2; 5.6; 5.10; 5.18; 5.19; 5.24

Домашнє завдання: 5.1; 5.3; 5.5; 5.7; 5.17; 5.21; 5.22

Заняття 10, 11

Обчислення за допомогою символу Леві-Чівіта

Означення: символ Леві-Чівіта у тривимірному випадку вводиться як мішаний добуток ортів прямокутної декартової системи координат

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right),$$

тобто

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } i,\ j,\ k \text{ складають циклічну перестановку з } 1,\ 2,\ 3\,; \\ -1, & \text{якщо } i,\ j,\ k \text{ складають} \\ & \text{антициклічну перестановку з } 1,\ 2,\ 3\,; \\ \ 0, & \text{якщо серед } i, j, k \text{ є однакові числа}\,. \end{cases}$$

Символ Леві-Чівіта є повністю антисиметричним псевдотензором третього рангу, що має 6 відмінних від нуля компонент

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1\,, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1\,.$$

Властивості символу Леві-Чівіта безпосередньо випливають з означення і приведені у задачі 6.1. Довільний антисиметричний тензор рангу меншого трьох можна представити у вигляді згортки символу Леві-Чівіта з іншим тензором (не обов'язково антисиметричним). Як приклад, можна вказати представлення антисиметричного тензора $\hat{t}$ другого рангу через аксіальний вектор

$\vec{\omega}$: $t_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$. Інше застосування символу Леві-Чівіта — в обчисленнях, пов'язаних із визначниками (див. задачу 6.15).

Зручність використання символу Леві-Чівіта у задачах пов'язана з рядом тотожностей, яким він задовольняє. Так, для тривимірного евклідового простору ці тотожності приведені у задачі 6.11. Для їх доведення необхідно явно розкрити визначник і обчислити необхідні згортки.

За допомогою символу Леві-Чівіта, векторний $[\vec{a}\times\vec{b}\,]$ та мішаний $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ добутки, які відповідно є псевдовектором та псевдоскаляром, можна записати так:

$$[\vec{a}\times\vec{b}\,] = \varepsilon_{ijk}a_i b_j \vec{e}_k\,, \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k\,.$$

Приклад використання цих формул приведений у задачі 6.12.

Задача 1

Довести наступні тотожності:

$$1)\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta k} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\,;$$

$$3)\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha jk} = 2\delta_{i\alpha}\,; \qquad 4)\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6\,.$$

Розв'язок:

1) Скористаємось тим, що символ Леві-Чівіта можна записати як мішаний добуток трьох ортонормованих векторів, а саме $\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$, де $i, j, k = 1, 2, 3$. Тоді матимемо

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\gamma) = \begin{vmatrix} (\vec{e}_i\vec{e}_\alpha) & (\vec{e}_i\vec{e}_\beta) & (\vec{e}_i\vec{e}_\gamma) \\ (\vec{e}_j\vec{e}_\alpha) & (\vec{e}_j\vec{e}_\beta) & (\vec{e}_j\vec{e}_\gamma) \\ (\vec{e}_k\vec{e}_\alpha) & (\vec{e}_k\vec{e}_\beta) & (\vec{e}_k\vec{e}_\gamma) \end{vmatrix} =$$

Оскільки $(\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) = \delta_{mn}$, то

$$= \begin{vmatrix} \delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{i\gamma} \\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{j\gamma} \\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & \delta_{k\gamma} \end{vmatrix}.$$

2) Скориставшись результатом прикладу 1), матимемо

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta k} = \begin{vmatrix} \delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{ik} \\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{jk} \\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i\alpha} & \delta_{i\beta} & \delta_{ik} \\ \delta_{j\alpha} & \delta_{j\beta} & \delta_{jk} \\ \delta_{k\alpha} & \delta_{k\beta} & 3 \end{vmatrix} =$$

Тут враховано, що $\delta_{kk} = 3$. Розкривши визначник будемо мати шуканий результат

$$= \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}.$$

3) Скористаємось результатом прикладу 2), маємо

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha jk} = \delta_{i\alpha}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{j\alpha} = 3\delta_{i\alpha} - \delta_{i\alpha} = 2\delta_{i\alpha}.$$

4) Згідно результату отриманому в прикладі 3), матимемо

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Задача 2

За допомогою символу Леві-Чівіта записати через скалярні добутки векторів наступні вирази:

$$1)\big[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]\big]; \quad 2)\big([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{c} \times \vec{d}]\big).$$

Розв'язок:

1) Скористаємось представленням для векторного добутку $[\vec{a} \times \vec{b}] = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$ і запишемо

$$\big[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]\big] = \varepsilon_{ijk} a_i [\vec{b} \times \vec{c}]_j \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} a_i \varepsilon_{\alpha\beta j} b_\alpha c_\beta \vec{e}_k =$$
$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{\alpha\beta j} a_i b_\alpha c_\beta \vec{e}_k =$$

Тут враховано, що символ Леві-Чівіта не змінюється при циклічній перестановці індексів. Беручи до уваги результат, отриманий у прикладі 2) задачі 1, матимемо

$$= (\delta_{k\alpha}\delta_{i\beta} - \delta_{i\alpha}\delta_{k\beta}) a_i b_\alpha c_\beta \vec{e}_k = a_i b_k c_i \vec{e}_k - a_i b_i c_k \vec{e}_k =$$
$$= \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}\,)$$

2) Скориставшись представленням для векторного добутку $[\vec{a}\times\vec{b}\,] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta \vec{e}_\gamma$, запишемо

$$\big([\vec{a}\times\vec{b}\,]\cdot[\vec{c}\times\vec{d}\,]\big) = [\vec{a}\times\vec{b}\,]_i\,[\vec{c}\times\vec{d}\,]_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \varepsilon_{ilm}c_l d_m =$$

Використовуючи результат прикладу 2) задачі 1, запишемо

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})a_j b_k c_l d_m = a_j b_k c_j d_k - a_j b_k c_k d_j =$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{c}\,)(\vec{b}\cdot\vec{d}\,) - (\vec{a}\cdot\vec{d}\,)(\vec{b}\cdot\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} (\vec{a}\cdot\vec{c}\,) & (\vec{a}\cdot\vec{d}\,) \\ (\vec{b}\cdot\vec{c}\,) & (\vec{b}\cdot\vec{d}\,) \end{vmatrix}.$$

Задача 3

Для наступних векторних полів $\vec{A}$ обчислити $\mathrm{div}\vec{A}$ та $\mathrm{rot}\vec{A}$:

$$1)\big[\vec{a}\times[\vec{r}\times\vec{b}\,]\big];\quad 2)\big[\vec{r}\times[\vec{a}\times\vec{r}\,]\big];\quad 3)\frac{[\vec{a}\times\vec{r}\,]}{r^3},$$

де $\vec{a}$, $\vec{b}$ – сталі вектори.

Розв'язок:

1) Згідно результату, отриманому в прикладі 1) задачі 2, запишемо подвійний векторний добуток $\vec{A}$ у вигляді

$$\vec{A} = \big[\vec{a}\times[\vec{r}\times\vec{b}\,]\big] = \vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}\,) - \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}\,).$$

Згідно визначення дивергенції вектора, запишемо

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big((\vec{a}\cdot\vec{b}\,)x_i - b_i a_j x_j\Big) = (\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\frac{\partial x_i}{\partial x_i} - b_i a_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} =$$

Беручи до уваги, що $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$, $\dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$, отримуємо

$$= 3(\vec{a}\cdot\vec{b}\,) - b_i a_j \delta_{ij} = 3(\vec{a}\cdot\vec{b}\,) - b_i a_i = 2(\vec{a}\cdot\vec{b}\,).$$

Скориставшись представленням для ротора $\mathrm{rot}\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j}$, запишемо

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Big((\vec{a}\cdot\vec{b}\,)x_k - b_k a_m x_m\Big) =$$
$$= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\Big((\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\delta_{jk} - b_k a_m \delta_{jm}\Big) =$$

Оскільки $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \varepsilon_{ikk} \equiv 0$, матимемо наступний результат

$$= -\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k = -\big[\vec{a} \times \vec{b}\big].$$

2) Згідно результату прикладу 1) задачі 2, запишемо подвійний векторний добуток $\vec{A}$ так

$$\vec{A} = \big[\vec{r} \times [\vec{a} \times \vec{r}]\big] = \vec{a}\, r^2 - \vec{r}\,(\vec{a} \cdot \vec{r}).$$

Згідно визначення дивергенції вектора, запишемо

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,(a_i x_j x_j - x_i a_j x_j) =$$

Беручи до уваги, що $\dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$, $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$, отримуємо

$$= 2a_i x_j \delta_{ij} - 3a_j x_j - a_j x_i \delta_{ij} = -2a_i x_i = -2(\vec{a} \cdot \vec{r}).$$

Скориставшись визначенням операції $\mathrm{rot}\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \dfrac{\partial A_k}{\partial x_j}$, запишемо

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j}\,(a_k x_m x_m - x_k a_m x_m) =$$
$$= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \Big(2a_k x_m \delta_{jm} - \delta_{jk} a_m x_m - x_k a_m \delta_{jm}\Big) =$$

Оскільки $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \varepsilon_{ikk} \equiv 0$, матимемо наступний результат

$$= 2\varepsilon_{imk}\vec{e}_i x_m a_k - \varepsilon_{imk}\vec{e}_i a_m x_k = 2\big[\vec{r} \times \vec{a}\,\big] - \big[\vec{a} \times \vec{r}\,\big] = 3\big[\vec{r} \times \vec{a}\,\big].$$

3) Скориставшись представленням для векторного добутку $[\vec{a} \times \vec{r}\,] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\vec{e}_\alpha a_\beta x_\gamma$, запишемо дивергенцію вектора $\vec{A}$ так

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{[\vec{a} \times \vec{r}\,]_i}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\varepsilon_{ijk} a_j x_k}{r^3} = \frac{\varepsilon_{ijk} a_j}{r^3}\frac{\partial x_k}{\partial x_i} +$$
$$+ \varepsilon_{ijk} a_j x_k \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^3}.$$

Враховуючи, що $r^2 = x_i x_i$, вирахуємо похідну

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{(x_m x_m)^{3/2}} = -\frac{3}{2}\frac{2x_m \delta_{im}}{(x_m x_m)^{5/2}} = -\frac{3x_i}{r^5}.$$

Звідси знаходимо значення дивергенції вектора $\vec{A}$:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^3}\,\varepsilon_{ijk} a_j \delta_{ik} - \frac{3}{r^5}\,\varepsilon_{ijk} x_i a_j x_k = -\frac{3}{r^5}\,(\vec{r}, \vec{a}, \vec{r}\,) = 0.$$

Виходячи з визначення операції ротор, будемо мати

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{[\vec{a}\times\vec{r}]_k}{r^3} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\varepsilon_{klm}a_l x_m}{r^3} = \\
= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\vec{e}_i a_l\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_m}{\partial x_j} + x_m\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{1}{r^3}\right) = \\
= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\vec{e}_i a_l\left(\frac{\delta_{jm}}{r^3} - \frac{3x_j x_m}{r^3}\right) = \\
= (\vec{e}_i a_i\delta_{jm} - \vec{e}_m a_j)\left(\frac{\delta_{jm}}{r^3} - \frac{3x_j x_m}{r^3}\right) =
\end{aligned}$$

Беручи до уваги, що $\delta_{jm}\delta_{jm} = \delta_{jj} = 3$, матимемо

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\vec{a}}{r^3} - \frac{\vec{e}_j a_j}{r^3} - \frac{3\vec{a}}{r^5}\,x_j x_j + \frac{3}{r^5}\,\vec{e}_m x_m a_j x_j = \\
&= -\frac{\vec{a}}{r^3} + \frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} = \frac{-r^2\vec{a} + 3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}.
\end{aligned}$$

На занятті 10: 1.45; 6.2; 6.3; 6.5; 6.10; 6.12(1)

Домашнє завдання: 6.6; 6.7; 6.11; 6.12(2,3,4)

На занятті 11: 8.4; 8.5; 8.22

Домашнє завдання: 1.37; 1.38; 1.39; 1.42; 8.26(є,і); 8.35

Заняття 12, 13

Елементи ортогональних криволінійних систем координат

Положення точки в евклідовому просторі E_3 повністю визначається трьома координатами її радіус-вектора $\vec{r}$. В глобальному (однаковому для всіх точок простору) базисі, який задають ортонормовані вектори $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, — це трійка декартових координат:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z\,.$$

Розв'язок багатьох задач значно спрощується, якщо замість декартових систем координат використовувати інші системи координат, більш природньо зв'язані з даною задачею. Зокрема, в задачах з осьовою симетрією зручно користуватися циліндричними координатами (задача 9.1), якщо задача має кульову симетрію — сферичними (задача 9.2), якщо в задачах зустрічаються одночасно і r, і z — параболічними (задача 9.3) тощо.

Нехай задана деяка криволінійна система координат (q_1, q_2, q_3) через декартову (x, y, z):

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3)\,\vec{e}_x + y(q_1, q_2, q_3)\,\vec{e}_y + z(q_1, q_2, q_3)\,\vec{e}_z\,.$$

Якщо якобіан переходу $\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}, \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}, \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\right) \neq 0$, вектори $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ $(i = \overline{1,3})$ утворюють трійку лінійно незалежних векторів. Модулі цих векторів

$$H_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}\,.$$

називаються параметрами Ламе.

Трійку одиничних векторів

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\,, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\,, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}$$

можна обрати за базис криволінійної системи координат.

У деяких спеціальних випадках, які є цікавими з точки зору фізичних застосувань, цей базис — ортогональний:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij}\,, \quad \left[\vec{e}_i \times \vec{e}_j\,\right] = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k\,.$$

Перетворення, що здійснює перехід від декартової системи координат до ортогональної криволінійної системи координат, є ортогональним, оскільки переводить ортонормований базис в ортонормований. Коефіцієнти розкладу одного базису по іншому є елементами ортогональної матриці переходу α_{ij}. Знаючи їх та компоненти вектора (або довільного тензора) в прямокутній декартовій системі координат, можна знайти компоненти цього геометричного об'єкта і в криволінійній ортогональній системі координат.

Якщо взяти довільну точку $M(q_1^o, q_2^o, q_3^o)$ і змінювати лише q_i, то радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ опише координатну лінію q_i (через кожну точку простору можна провести 3 координатні лінії).

Якщо зафіксувати q_i, а змінювати інші координати, то отримаємо координатну поверхню $q_i = \text{const}$. Координатні лінії q_j, q_k $(j \neq k \neq i)$ утворюють сітку на координатній поверхні $q_i = \text{const}$. Зафіксувавши на цій поверхні змінну q_j, можна отримати координатну лінію q_k.

В задачах 9.18–9.19 потрібно скористатися виразом для диференціала

$$d\vec{r} = H_1 dq_1\, \vec{e}_1 + H_2 dq_2\, \vec{e}_2 + H_3 dq_3\, \vec{e}_3\,.$$

Лінії векторного поля $\vec{A} = A_i\, \vec{e}_i$ в криволінійній системі координат з базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{H_1 dq_1}{A_1} = \frac{H_2 dq_2}{A_2} = \frac{H_3 dq_3}{A_3}\,.$$

Основні властивості диференціальних операцій у криволінійних координатах суттєво не відрізняються від розглянутих раніше операцій у декартових координатах. Насамперед, зберігаються всі інваріантні співвідношення (незалежні від вибору базису), зокрема, правила диференціювання добутків. Тому основні підходи до розв'язування задач такі самі як і у випадку векторних полів заданих у декартовому базисі.

Єдина відмінність ортогонального криволінійного базису від декартового полягає в тому, що криволінійний базис — локальний (залежить від точки простору) і використовувати формули (1)–(3), які справедливі для декартових координат, не можна. Базисні вектори $\vec{e}_i$ — залежать від координат q_i і разом з координатами векторів підлягають диференціюванню. Наприклад, для дивергенції векторного поля $\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$, використовуючи векторну тотожність, можна записати:

$$\operatorname{div} \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{div}\bigl(A_i \vec{e}_i\bigr) = \sum_{i=1}^{3} \bigl(A_i \operatorname{div}\vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla} A_i\bigr)$$

(у декартових координатах перший доданок відсутній).

Основні диференціальні операції в криволінійних координатах мають вигляд:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\vec{e}_1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1 A_2 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_3)}{\partial q_3}\right)\,,$$

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_1}{H_2H_3} & \dfrac{\vec{e}_2}{H_1H_3} & \dfrac{\vec{e}_3}{H_1H_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1H_1 & A_2H_2 & A_3H_3 \end{vmatrix},$$

Ці формули можна вивести, використовуючи векторні тотожності (див. задачі 9.23–9.25 та вказівки до них).

Зручність використання криволінійної системи координат (порівняно з декартовою) у деяких задачах викликана особливістю заданого векторного поля. Наприклад, центрально-симетричне поле у координатах (x, y, z) має вигляд $\vec{A}(x, y, z) = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot f(r)/r$, (три компоненти), тоді як у сферичних координатах (r, θ, φ): $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \vec{e}_r f(r)$ (одна компонента). Кількість доданків у виразах для ротора та дивергенції такого поля визначається числом відмінних від нуля його компонент.

Задача 1

У циліндричній системі координат (ρ, φ, z): $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ визначити:

1) параметри Ламе H_ρ, H_φ, H_z;
2) зв'язок базисів ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) та ($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$);
3) зв'язок компонент вектора $\vec{a}$ в цих базисах;
4) рівняння координатних площин.

Розв'язок:

1) Радіус-вектор довільної точки простору, записаний через циліндричні координати, має вигляд

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Звідки параметри Ламе будуть рівні відповідно

$$H_\rho = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

$$H_\varphi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} = \rho,$$

$$H_z = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = 1.$$

2) Базисні вектори циліндричної системи координат мають вигляд

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{H_\rho}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j},$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j},$$

$$\vec{e}_z = \frac{1}{H_z}\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k}.$$

Якщо отримані співвідношення розглядати як систему відносно векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$, матимемо

$$\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{j} = \sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{k} = \vec{e}_z.$$

3) Вектор $\vec{a}$ у циліндричній системі координат можна записати у вигляді розкладу по базису

$$\vec{a} = a_\rho\,\vec{e}_\rho + a_\varphi\,\vec{e}_\varphi + a_z\,\vec{e}_z =$$

Використаємо, отриманий у попередньому пункті 2, зв'язок базисних векторів $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ з базисом прямокутної декартової системи координат $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Тоді розкривши дужки і звівши подібні доданки, матимемо

$$= (a_\rho\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi)\,\vec{i} + (a_\rho\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi)\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} =$$

$$= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}.$$

Неважко бачити

$$a_x = a_\rho\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi,$$

$$a_y = a_\rho\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi,$$

$$a_z = a_z.$$

Звідси можна побудувати обернений зв'язок

$$a_\rho = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi,$$
$$a_\varphi = a_y \cos\varphi - a_x \sin\varphi,$$
$$a_z = a_z.$$

4) Щоб отримати рівняння координатних площин, необхідно по черзі зафіксувати всі три координати ρ, φ і z. Таким чином, $\rho = \mathrm{const}$ – рівняння циліндричної поверхні радіуса ρ вісь якої співпадає з координатною віссю Oz. $\varphi = \mathrm{const}$ – рівняння півплощини, яка обмежена віссю Oz та утворює кут φ з площиною xOz. $z = \mathrm{const}$ – рівняння площини, яка перпендикулярна до осі Oz та перетинає її в точці з координатою z.

Задача 2

У сферичній системі координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ визначити:

1) параметри Ламе H_r, H_θ, H_φ;
2) зв'язок базисів $(\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$ та $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_\varphi)$;
3) зв'язок компонент вектора $\vec{a}$ в цих базисах;
4) рівняння координатних поверхонь.

Розв'язок:

1) Радіус-вектор довільної точки простору, записаний через сферичні координати, має вигляд

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}.$$

Звідки параметри Ламе будуть рівні відповідно

$$H_r = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + \cos^2\theta} = 1,$$
$$H_\theta = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta)^2} = r,$$
$$H_\varphi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{(r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2} = r\sin\theta.$$

2) Базисні вектори сферичної системи координат матимуть вигляд

$$\vec{e}_r = \frac{1}{H_r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k},$$
$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{H_\theta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k},$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

Якщо отримані співвідношення розглянути як систему відносно векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$, матимемо

$$\vec{i} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$
$$\vec{j} = \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$
$$\vec{k} = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta.$$

3) Вектор $\vec{a}$ у сферичній системі координат можна записати у вигляді розкладу по базису

$$\vec{a} = a_r\,\vec{e}_r + a_\theta\,\vec{e}_\theta + a_\varphi\,\vec{e}_\varphi =$$

Використаємо, отриманий у попередньому пункті 2, зв'язок базисних векторів $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ з базисом прямокутної декартової системи координат $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Тоді розкривши дужки і звівши подібні доданки, матимемо

$$= (a_r\sin\theta\cos\varphi + a_\theta\cos\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi)\,\vec{i}+$$
$$+ (a_r\sin\theta\sin\varphi + a_\theta\cos\theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi)\,\vec{j}+$$
$$+ (a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta)\,\vec{k} =$$
$$= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}.$$

Неважко бачити

$$a_x = a_r\sin\theta\cos\varphi + a_\theta\cos\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi,$$
$$a_y = a_r\sin\theta\sin\varphi + a_\theta\cos\theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi,$$
$$a_z = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta.$$

Можна побудувати обернений зв'язок, якщо з отриманих співвідношень знайти a_r, a_θ і a_φ:

$$a_r = a_x \sin\theta\cos\varphi + a_y \sin\theta\sin\varphi + a_z\cos\theta,$$
$$a_\theta = a_x \cos\theta\cos\varphi + a_y \cos\theta\sin\varphi - a_z\sin\theta,$$
$$a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y\cos\varphi.$$

4) Рівняння координатних площин отримується, якщо по черзі зафіксувати всі три координати r, θ і φ. Таким чином, $r = \mathrm{const}$ – рівняння сфери радіуса r з центром у початку координат. $\theta = \mathrm{const}$ – рівняння конічної поверхні, $\varphi = \mathrm{const}$ – рівняння півплощини, яка обмежена віссю Oz та утворює кут φ з площиною xOz.

Задача 3

Обчислити $\operatorname{div}\vec{r}$ у: 1) циліндричних; 2) сферичних координатах.

Розв'язок:

1) Беручи до уваги результат задачі 1, вектор $\vec{r}$ може бути записаний через циліндричні координати так:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z.$$

Виходячи з виразу для дивергенції в циліндричній системі координат, матимемо

$$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho r_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\, r_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\, r_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{d\rho} + \frac{dz}{dz} = 3.$$

2) Враховуючи результат задачі 2, вектор $\vec{r}$ може бути записаний через сферичні координати так:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k} = r\vec{e}_r.$$

З виразу для дивергенції в сферичній системі координат, матимемо

$$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 r_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, r_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\, r_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{dr^3}{dr} = 3.$$

Задача 4

Обчислити $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})$, де вектор $\vec{a}$ сталий, у: 1) циліндричних; 2) сферичних координатах.

Розв'язок:

1) Беручи до уваги результат задачі 1, запишемо скалярний добуток $(\vec{a}\cdot\vec{r})$ через циліндричні координати

$$(\vec{a}\cdot\vec{r}) = xa_x + ya_y + za_z = \rho(a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi) + za_z = \rho a_\rho + za_z.$$

Виходячи з загального виразу для градієнта, запишемо

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \left(\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\rho a_\rho + za_z) =$$

Оскільки $a_z = \mathrm{const}$, а похідні $\dfrac{\partial a_\rho}{\partial\rho} = 0$, $\dfrac{\partial a_\rho}{\partial\varphi} = a_\varphi$ (згідно з результатом, отриманим в завданні 3 задачі 1), матимемо

$$= \vec{e}_\rho a_\rho + \vec{e}_\varphi a_\varphi + \vec{e}_z a_z = \vec{a}.$$

2) Беручи до уваги результат завдання 3 задачі 2, запишемо скалярний добуток $(\vec{a}\cdot\vec{r})$ через сферичні координати

$$(\vec{a}\cdot\vec{r}) = r(a_x\sin\theta\cos\varphi + a_y\sin\theta\sin\varphi + a_z\cos\theta) = ra_r.$$

Виходячи з виразу для градієнта в сферичних координатах, запишемо

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(ra_r) =$$

Оскільки $\dfrac{\partial a_r}{\partial r} = 0$, $\dfrac{\partial a_r}{\partial\theta} = a_\theta$, $\dfrac{\partial a_r}{\partial\varphi} = \sin\theta\, a_\varphi$ (згідно з результатом завдання 3 задачі 2), матимемо

$$= \vec{e}_r a_r + \vec{e}_\theta\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} = \vec{e}_r\, a_r + \vec{e}_\theta\, a_\theta + \vec{e}_\varphi\, a_\varphi = \vec{a}.$$

Задача 5

Обчислити $\mathrm{rot}\,[\vec{a}\times\vec{r}]$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, у: 1) циліндричних; 2) сферичних координатах.

Розв'язок:

1) Як було встановлено в завданні 1 задачі 3, у циліндричних координатах ρ, φ, z вектор $\vec{r}$ має вигляд $\vec{r} = (\rho, 0, z)$. Тоді для довільного векто-

ра $\vec{a} = (a_\rho, a_\varphi, a_z)$ обчислимо векторний добуток

$$[\vec{a} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ a_\rho & a_\varphi & a_z \\ \rho & 0 & z \end{vmatrix} = \vec{e}_\rho\, z a_\varphi + \vec{e}_\varphi\, (\rho a_z - z a_\rho) - \vec{e}_z\, \rho a_\varphi.$$

Виходячи із вигляду операції rot у циліндричних координатах, можна записати

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\,[\vec{a} \times \vec{r}] = \vec{e}_\rho &\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\rho a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z - z a_\rho)\right) + \\ &+ \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial}{\partial z}(z a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \rho}(-\rho a_\varphi)\right) + \\ &+ \vec{e}_z \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 a_z - z\rho a_\rho) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(z a_\varphi)\right). \end{aligned}$$

Згідно із результатом завдання 3 задачі 1, запишемо $\dfrac{\partial a_\rho}{\partial\rho} = 0$, $\dfrac{\partial a_\rho}{\partial\varphi} = a_\varphi$, $\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\rho} = 0$, $\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} = -a_\rho$. Враховуючи, що $a_z = \mathrm{const}$, в результаті нескладних обчислень матимемо шуканий результат

$$\operatorname{rot}\,[\vec{a} \times \vec{r}] = \vec{e}_\rho\,(a_\rho + a_\rho) + \vec{e}_\varphi\,(a_\varphi + a_\varphi) + \vec{e}_z\left(2a_z - \frac{z a_\rho}{\rho} + \frac{z a_\rho}{\rho}\right) = 2\vec{a}.$$

2) Як було встановлено в завданні 2 задачі 3, у сферичних координатах r, θ, φ вектор $\vec{r}$ має вигляд $\vec{r} = (r, 0, 0)$. Для довільного вектора $\vec{a} = (a_r, a_\theta, a_\varphi)$ обчислимо векторний добуток

$$[\vec{a} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ a_r & a_\theta & a_\varphi \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_\theta\, r a_\varphi - \vec{e}_\varphi\, r a_\theta.$$

Виходячи із вигляду операції rot у сферичних координатах, запишемо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\,[\vec{a} \times \vec{r}] = \frac{\vec{e}_r}{r\sin\theta} &\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin\theta\, r a_\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r a_\varphi)\right) - \\ &- \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-r^2 a_\theta) + \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_\varphi) = \end{aligned}$$

Із результату завдання 3 задачі 2, легко отримуються значення похідних $\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\theta} = -a_r$, $\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} = -a_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi$, Тому матимемо

$$= \frac{\vec{e}_r}{\sin\theta}\,(-\cos\theta\, a_\theta + \sin\theta\, a_r + a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi) + 2a_\theta\,\vec{e}_\theta + 2a_\varphi\,\vec{e}_\varphi =$$

Враховуючи, що $-a_\theta \cos\theta + a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi = a_r \sin\theta$, матимемо потрібний результат

$$= 2a_r\,\vec{e}_r + 2a_\theta\,\vec{e}_\theta + 2a_\varphi\,\vec{e}_\varphi = 2\vec{a}.$$

Задача 6

Обчислити в циліндричних координатах:

$$1)\ \vec{\nabla}\left(\rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z\sin\varphi\right)\ ;$$
$$2)\ \mathrm{rot}\left(\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\vec{e}_\varphi - \rho z\,\vec{e}_z\right)\ ;$$
$$3)\ \mathrm{div}\left(\rho\,\vec{e}_\rho + z\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + e^\varphi\cos z\,\vec{e}_z\right)\ ;$$
$$4)\ \mathrm{rot}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\vec{e}_\varphi + \rho^2\,\vec{e}_z\right)\ .$$

Розв'язок:

1) Виходячи із визначення операції $\vec{\nabla}$ в циліндричній системі координат, запишемо

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\left(\rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z\sin\varphi\right) = \\
&\quad= \left(\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z\sin\varphi\right) = \\
&\quad= \vec{e}_\rho\,2(\rho + \cos\varphi) - \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}\left(2\rho\sin\varphi + e^z\cos\varphi\right) - \vec{e}_z\,e^z\sin\varphi.
\end{aligned}$$

2) Згідно з визначенням операції rot в циліндричній системі координат, запишемо

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\left(\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\vec{e}_\varphi - \rho z\,\vec{e}_z\right) = \\
&\quad= \vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\rho z) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) + \\
&\quad+ \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial\rho}(-\rho z)\right) + \\
&\quad+ \vec{e}_z\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin\varphi\right) = z\,\vec{e}_\varphi - \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

3) Згідно з визначенням операції div в циліндричній системі координат,

запишемо

$$\operatorname{div}(\rho\,\vec{e}_\rho + z\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + e^\varphi\cos z\,\vec{e}_z) =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(z\sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(e^\varphi\cos z) =$$
$$= 2 + \frac{z\cos\varphi}{\rho} - e^\varphi\sin z.$$

4) Згідно з визначенням операції rot в циліндричній системі координат, запишемо

$$\operatorname{rot}\left(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\vec{e}_\varphi + \rho^2\,\vec{e}_z\right) =$$
$$= \vec{e}_\rho\,\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho^2 + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) +$$
$$+ \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\right) +$$
$$+ \vec{e}_z\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\sin\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi\right) = -2\rho\,\vec{e}_\varphi + \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\vec{e}_z.$$

Задача 7

Обчислити у сферичних координатах:

1) $\vec{\nabla}\left(r^2\sin\theta\right)$; 2) $\operatorname{div}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\,\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\,\vec{e}_\theta\right)$;

3) $\operatorname{rot}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\,\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\,\vec{e}_\theta\right)$,

Розв'язок:

1) Згідно з визначенням операції $\vec{\nabla}$ в сферичній системі координат, запишемо

$$\vec{\nabla}\left(r^2\sin\theta\right) = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(r^2\sin\theta\right) =$$
$$= 2r\sin\theta\,\vec{e}_r + r\cos\theta\,\vec{e}_\theta.$$

2) Згідно з визначенням операції div в сферичній системі координат, запишемо

$$\operatorname{div}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\,\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\,\vec{e}_\theta\right) =$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^3}\right) =$$
$$= -\frac{2\cos\theta}{r^4} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^4\sin\theta} = 0.$$

3) Виходячи із визначення операції rot в сферичній системі координат, запишемо

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\,\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\,\vec{e}_\theta\right) = \\
&\quad = -\frac{\vec{e}_r}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\theta}{r^3}\right) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\right) + \\
&\quad + \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\right)\right] = \\
&\quad = \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left(-\frac{2\sin\theta}{r^3} + \frac{2\sin\theta}{r^3}\right) = 0.
\end{aligned}$$

На занятті 12: 9.1–9.5

Домашнє завдання: 9.6–9.13; 9.17

На занятті 13: 9.18; 9.20; 9.23–9.25; 9.50; 9.51

Домашнє завдання: 9.19; 9.21; 9.22; 9.52–9.54

Заняття 14

Модульна контрольна робота №2

Типовий варіант контрольної роботи

1. Заданий тензор $\hat{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ та вектор $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Для тензора $\hat{t}$ знайти симетричну $\hat{S}$ та антисиметричну $\hat{A}$ частини. Обчислити: $A_{ik}t_{ik}$, $A_{ik}S_{ik}$, $A_{ik}a_i a_k$.

2. Заданий тензор $\hat{t}$. Знайти такий тензор $\hat{T}$, який задовольняє рівності $\vec{a}\,\hat{t} = \hat{T}\vec{a}$ для довільного вектора $\vec{a}$.

3. Знайти власні значення, власні вектори та інваріанти тензора $\hat{t} = \vec{a}\otimes\vec{a} + \vec{b}\otimes\vec{b}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ — одиничні вектори, кут між якими φ.

4. За допомогою символу Леві-Чівіта записати через скалярні добутки векторів наступний вираз $\big[[\vec{a}\times\vec{b}]\times\vec{c}\big]$.

5. За допомогою символу Леві-Чівіта обчислити:

1) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})^2$; 2) $\operatorname{div}\big(\vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})\big)$; 3) $\operatorname{rot}\big(r[\vec{a}\times\vec{r}]\big)$,

де $\vec{a}$ – сталий вектор.

6. Обчислити в циліндричних координатах

1) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}$;   2) $\mathrm{div}(\vec{r}/r^3)$,

де $\vec{a}$ – сталий вектор.

7. Обчислити в сферичних координатах

1) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})$;   2) $\mathrm{rot}\big(\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{r})\big)$,

де $\vec{a}$, $\vec{b}$ – сталі вектори.

Домашнє завдання: Аналіз розв'язків завдань контрольної роботи

Заняття 15

Підсумкове заняття, підготовка до заліку

Повторення найважливіших тем курсу: диференціальні операції в декартовій та в ортогональних криволінійних системах координат, перетворення компонент векторів та тензорів при ортогональних перетвореннях. Аналіз модульних контрольних робіт.

Література

[1] Борисенко А.И., Тарапов И.Е. *Векторный анализ и начала тензорного исчисления.* – М.: Высшая школа, 1966. – 252 с.

[2] Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – М.: Наука, 1967. – 664 с.

[3] Ледней М.Ф., Разумова М.А., Романенко О.В., Хотяїнцев В.М. *Збірник задач з векторного та тензорного аналізу.* – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 129 с.

[4] Разумова М.А., Хотяїнцев В.М. *Основи векторного і тензорного аналізу.* – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с.

[5] Кочин Н.Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.* – М.: Наука, 1965. – 426 с.

[6] Коренев Г.В. *Тензорное исчисление.* – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с.

[7] Акивис М.А., Гольдберг В.В. *Тензорное исчисление.* – М.: Наука, 1972. – 352 с.

[8] Схоутен Я.А. *Тензорный анализ для физиков.* – М.: Наука, 1965. – 456 с.

[9] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Векторный анализ.* – М.: Наука, 1978. – 160 с.

[10] Анчиков А.М. *Основы векторного и тензорного анализа.* – Изд-во Казанского ун-та, 1988. – 134 с.

[11] Сеньків М.Т. *Векторний і тензорний аналіз: текст лекцій.* – Львів: Ред.-видавн. відділ Львів. ун-ту, 1991. – 146 с.

[12] Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу.* – М.: Изд-во Московского ун-та, 1986. – 264 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до проведення практичних занять з основ векторного і тензорного аналізу

для студентів фізичного факультету

Упорядники: ЛЕДНЕЙ Михайло Федорович
ГНАТОВСЬКИЙ Володимир Олександрович
ТАРНАВСЬКИЙ Олександр Станіславович