Закон всесвітнього тяжіння

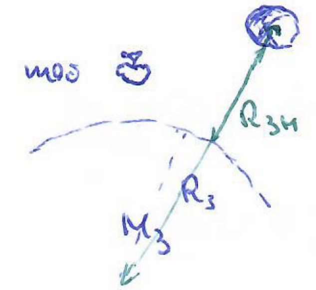
Спостереження за рухом планет Т. Браге $\Rightarrow$ Закони руху планет навколо Сонця Й. Кеплера $\Rightarrow$ З-н всесвітнього тяжіння Ньютона

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$ – 2 мат. точки притягують одна одну вздовж прямої, що їх з'єднує із силою $\sim m_1 m_2$, $\sim r^2$

$m_1 \xrightarrow{\vec r_{12}} m_2$

$$\vec F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec r_{12}}{r_{12}}$$ – сила на m_2 з боку m_1

Ньютон висунув та обґрунтував припущення, що сили, які діють між небесними тілами, і сили, які зумовлюють падіння тіл на Землю, мають спільну природу: порівняв прискорення ~~та падіння~~ Місяця відносно Землі і прискорення вільного падіння



$$M_М a_М = G\frac{M_М M_З}{R_{ЗМ}^2}$$ між центрами

$$m_{яб} a_{яб} = G\frac{m_{яб} M_З}{R_З^2}$$

$$\frac{a_{яб}}{a_М} = \left(\frac{R_{ЗМ}}{R_З}\right)^2$$

період обертання Місяця $T_М = 27{,}32$ доби, $R_{ЗМ} = 384$ тис. км.

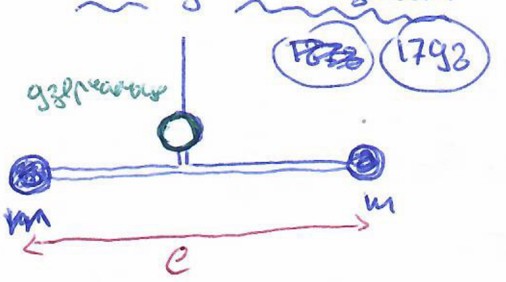
$v_М = 2\pi R_{ЗМ}/T_М$ $$a_М = \frac{v_М^2}{R_{ЗМ}} = \frac{4\pi^2 R_{ЗМ}}{T_М^2} = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 384\cdot 000\cdot 000}{(27{,}32\cdot 24\cdot 60\cdot 60)^2} \approx 2{,}7\cdot 10^{-3}\ м/с^2$$

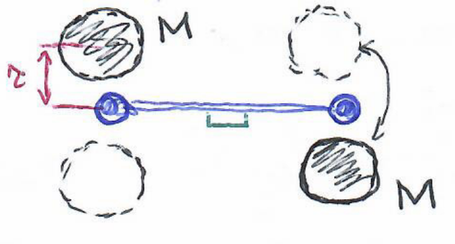
$a_{яб} = 9{,}81\ м/с^2$ $a_{яб}/a_М \approx 3{,}63\cdot 10^3$ } відмінність ~1%

$R_{ЗМ}/R_З = \frac{384\cdot 10^6}{6{,}36\cdot 10^6} = 60{,}38$ $\left(\frac{R_{ЗМ}}{R_З}\right)^2 \approx 3{,}645\cdot 10^3$

Дослід Кавендиша

~~1798~~ 1798





$m \approx 730$ г $M = 158$ кг

стержень-коромисло повертався з положення рівноваги під дією гравітац. вз-ї

Момент пари гравітаційних сил $G\frac{Mm}{r^2}l$ врівноважується пружним моментом нитки, що закручується $f\alpha$ (f - модуль кручення, α - кут кручення, що вимірювався завдяки відхиленню променя, відбитого від дзеркальця

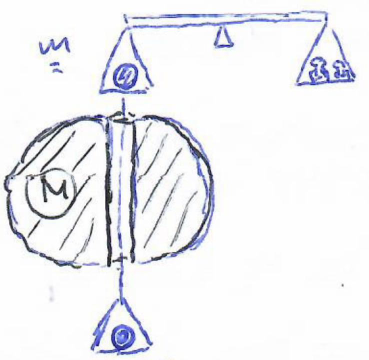
$$f\alpha_1 = \frac{GMm}{r^2}l \qquad f\alpha_2 = -G\frac{Mm}{r^2}l$$ α_1, α_2 - двом положення кульок

$$f(\alpha_1-\alpha_2) = 2G\frac{Mm}{r^2}l$$

f - з періоду вільних коливань коромисла $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{2f}}$

$$f = 2ml^2\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \qquad G = \frac{f(\alpha_1-\alpha_2)}{2Mml}r^2 = \frac{lr^2}{M}\left(\frac{\pi}{T}\right)^2(\alpha_1-\alpha_2)$$

Ф. Жолі 1878



коли тіло масою m на верхній чашці, то вниз діє сила $Q_1 = mg + F$

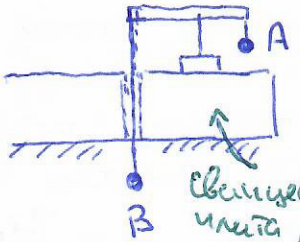
$$F = kG\frac{Mm}{r^2}$$

коефіцієнт, який залежить від форми тіла M

на нижній чашці $Q_2 = mg - F$

$$Q_1 - Q_2 = 2F = 2kG\frac{Mm}{r^2} \qquad G = \frac{Q_1 - Q_2}{2kMm}r^2$$

Ріхарц 1898 (100-річчя досл. Кавендіша)



кульки A та B - однакової маси (з врахуванням підвіс

$G = 6,6743 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2·кг$^{-2}$ - мала, а отже для атомів.

$ma = F$ - m хар-зує інертні властивості

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ - // - гравітаційні властивості) тотожні?

Тіло поблизу поверхні Землі: на нього діє сила

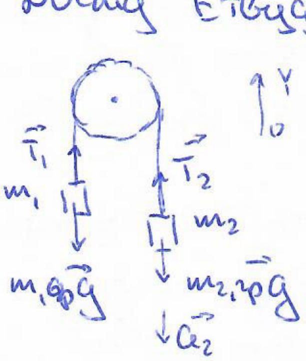
$$F = G\frac{M_З\, m_{гр}}{R_З^2}$$

воно отримує прискорення $a = \frac{F}{m_{ін}} = G\frac{M_З}{R_З^2}\frac{m_{гр}}{m_{ін}}$

дослід (Галілей) показує, що для всіх тіл $a = 9,81 \Rightarrow \frac{m_{гр}}{m_{ін}} = const$ для всіх тіл. Тобто інертна та гравітаційна маси пропорційні

$$m_{ін} = k \cdot m_{гр}$$

Дослід Етвуда (кінець XIX ст)



$$m_{1,ін}\vec a_1 = m_{1,гр}\vec g + \vec T_1 \qquad m_{2,ін}\vec a_2 = m_{2,гр}\vec g + \vec T_2$$

OY: $m_{1,ін}a = -m_{1,гр}g + T$

$-m_{2,ін}a = -m_{2,гр}g + T$

$$a = \frac{m_{2,гр} - m_{1,гр}}{m_{1,ін} + m_{2,ін}}g$$

якби маси не були в еквівалентними, то дослід не був би точним

Дослід Етвеша (1869-1909)
брав два тіла з однаковою інертною масою, але з різних матеріалів, закріплював до дуже чутливих торсійних терезів і визначав дію сили тяжіння

місія MICROSCOPE (2016-2022) - дослід Етвеша, але в умовах космосу

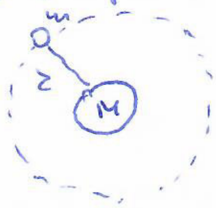
$k = 1$ (з точністю до 10^{-15})

Еквівалентність інерційної та гравітаційної мас лягла в основу загальної теорії відносності Ейнштейна

Кеплерівський рух

Я рух двох тіл з M та m під дією гравіт. вз-ї. Якщо $M \gg m \Rightarrow$ M нерухоме, якщо відстань $r \gg$ розмірів

Найпростіший рух – рівномірний рух по колу з центром в центрі тіла M



$$\frac{m v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \qquad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$ – стала для всіх планет

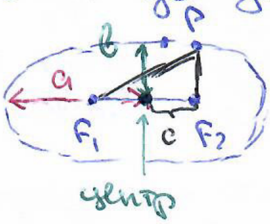
тобто або $T^2 \sim r^3$, або $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ – квадрати періодів відносяться як куби великих півосей орбіт

III з-н Кеплера

Загалом, в такому центральному полі частинка може рухатися і по еліпсам, гіперболам, параболам. Але ми вже колись згадували, що в такому випадку
1) траєкторія пласка 2) L = const, секторіальна шв-ть $\frac{dS}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}$ = const
тобто за однакові проміжки часу радіус-вектор частинки (планети) описує однакові площі – II з. Кеплера

I з. К: кожна планета рухається навколо Сонця по еліпсу, в одному с фокусів якого міститься Сонце.

еліпс – фігура створена всіма точками, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок F сталою



$PF_1 + PF_2 = 2a$ = const
↑ велика піввісь

b – мала піввісь ($\frac{1}{2}$ найкоротшого діаметра)

ексцентриситет $e = \frac{c}{a}$ ← відстань від центра до фокуса

при $e = 0$ – коло

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (якщо центр в (0,0))

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \frac{b^2}{a} = p = a(1-e^2)$$

від фокуса до точки на еліпсі

$e = 0$ коло
$0 < e < 1$ еліпс
$e = 1$ парабола
$e > 1$ гіпербола

Поле тяжіння (гравітаційне) – одна з видів матерії, проявляє себе в тому, що на тіло масою m, розміщене в ∀ точці поля діє сила гравітаційної вз-ї

$$\vec{F} = m \cdot \vec{G}$$ ← напруженість поля.

джерело – тіла з масою, якщо створюється тілом з M

$$\vec{G} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Поблизу поверхні Землі

$$\vec G = \vec g = -G\frac{M_З}{R_З^3}\vec R_З$$ - однорідне ($\vec G$ = const у всіх точках)

Принцип суперпозиції $\vec G = \sum_i \vec G_i$

Гравітаційне поле - потенціальне $A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2 = -GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

$$U = -G\frac{Mm}{r} \quad \& \quad \frac{U}{m} = \varphi = -G\frac{M}{r}$$

за початок відліку можна вибрати таке розміщення, що $U=0$ $(r\to\infty)$ тоді

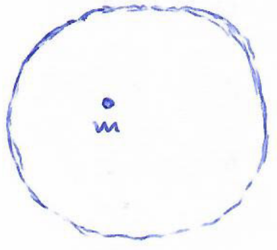
Для однорідного поля - нульовий рівень поверхня діла, яке створює поле

$$U = mgh = m\frac{GM_З}{R_З^2}h \quad \varphi$$

Якщо бути більш точним

$$g = G\frac{M_З}{(R_З+h)^2} = G\frac{M_З}{R_З^2\left(1+\frac{h}{R_З}\right)^2} = G\frac{M_З}{R_З^2}\left(1-2\frac{h}{R_З}+\dots\right)$$

літак $h=20$км $\frac{h}{R_З}\sim 3\cdot10^{-3}$



якщо розташувати тіло у кульовій порожнині, то сила, яка діятиме на нього $=\varnothing$ - див. семінари

Сила тяжіння під поверхнею Землі - менша, ніж на поверхні, бо прошарок товщиною h внеску не дає

* густина однорідна $\rho = \frac{M_З}{\frac43\pi R_З^3}$

тоді $g = \frac{F}{m} = G\frac{\frac43\pi r^3\rho}{r^2} = \frac43\pi G\rho\cdot r = \frac43\pi G\frac{M_З}{\frac43\pi R_З^3}r = \frac{GM_З}{R_З^3}\cdot r$

(в центрі Землі сила тяжін. $=\varnothing$)

Гравітаційна енергія - енергія поля, що обумовлює грав. вз-ю

Я кулю з R та M. Г.Е. - робота, яку необх. затратити, щоб рознести всі частинки кулі на нескінченні відстані

Видаляти частинки зручніше за все послідовно ~~нар~~ кульовими прошарками, починаючи з поверхні (видалені шари не впливають на інші

маса прошарку $dm = \rho\cdot4\pi r^2dr$

робота його видалення $dU_{гр} = -G\frac{\rho\cdot\frac{4\pi}{3}r^3}{r}dm$

$$U_{гр} = \int_0^R -G\rho^2\frac{4\pi}{3}r^2\cdot4\pi r^2dr = -G\rho^2\frac{16\pi^2}{3}\int_0^R r^4dr = -G\frac{16\pi^2}{15}\rho^2R^5 =$$

$$= -G\frac{16\pi^2}{15}\frac{M^2}{\left(\frac43\pi R^3\right)^2}R^5 = -\frac35 G\frac{M^2}{R}$$ - енергія пов'язана з гравіт. притяг.

гравітаційний радіус - радіус кульки, для якої енергія гравіт. поля = енергії спокою

$$\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R_{гр}} = Mc^2 \qquad R_{гр} = \frac{3}{5}\frac{GM}{c^2} \simeq \frac{GM}{c^2}$$

для Землі $R_{гр} = \dfrac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{(3\cdot10^8)^2} \simeq 4\cdot10^{-3}$ (м)

для Сонця $R_{гр} \sim 1$ км (радіус ~ 700.000 км)

Всесвіт: $\rho_0 \simeq 10^{-25}$ кг/м^3 (в 1 м^3 - біля 100 нуклонів)

$M \sim \rho_0 \cdot R_{гр}^3$ $\quad M \simeq 1{,}5\cdot10^{53}$ кг

$R_{гр} \simeq \dfrac{G\,\rho_0 R_{гр}^3}{c^2}$ $\quad R_{гр} = \dfrac{c}{\sqrt{G\rho_0}} \simeq 10^{26}$ м що відповідає величині, яка вважається радіусом Всесвіту $\quad R_{гр} \sim 10^{26}$ м

Світло не може залишити область, що знаходиться всередині гравітаційного радіуса (обл. всередині сфери втрачає ∀ зв'язок з областю за межами сфери, окрім гравітаційного) - "чорні дірки"

Розрахунки показують що якщо маса зірки $\geq 2 M_{Сонця}$, то під дією сил тяжіння вона поступово стискається аж до $R_{гр}$

1964 - виявили джерело Rn випромінювання у сузір'ї Лебедя, яке відповідає опису чорної дірки

2015 - зафіксовані гравітаційні хвилі при злитті 2 чорних дірок

2019 - зображення тіні чорної дірки (в центрі галактики M87) опублікувала команда Event Horizon Telescope

Але щось простіше

Оцінка маси Сонця: Земля рухається по коловій орбіті

$$M_З \cdot \frac{v^2}{r} = G\frac{M_З M_С}{r^2}$$

$v = \dfrac{2\pi r}{T}$, $T = 1$ рік $\qquad \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\dfrac{M_С}{r}$

$r = 149{,}6\cdot10^9$ м. $\qquad M_С = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \simeq 1{,}98\cdot10^{30}$ - аналогічно можна розраховувати маси планет, що мають супутники.

Маса Землі $\qquad M_З = \dfrac{R_З^2\, g}{G}$

на полюсі $g = 9{,}83$ м/с^2. $R_З = 6371{,}2\cdot10^3$ м $\Rightarrow M_З = 5{,}98\cdot10^{24}$ кг

отже середня густина земної кулі $\simeq 5500$ кг/м^3

густина поверхневих шарів ~ 2500 кг/м^3 - до центру густина, тиск, температура зростають

Рух частинки під дією центральної сили

$\vec F(\vec r) = f(r)\frac{\vec r}{r}$ r – відстань від силового центру.

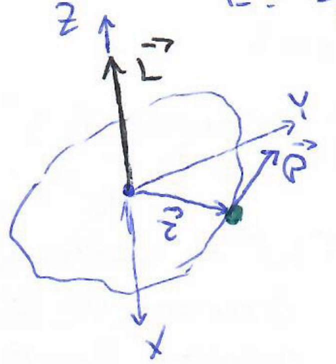
$\vec M^{зовн} = [\vec r, \vec F] = \frac{f(r)}{r}[\vec r, \vec r] = 0 \Rightarrow \vec L = [\vec r, \vec p] = const$, $\vec r \perp \vec L$, $\vec p \perp \vec L$ –

$v \perp L$

траєкторія плоска

центральна сила – консервативна

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = const$$



Система координат – початок у силовому центрі,

$OZ \parallel \vec L \Rightarrow \vec L = (0,0,L)$. $L_z = L$

$\vec r = (x, y, 0)$. $\vec v = (v_x, v_y, 0)$

$$L_z = L = m(x\dot y - y\dot x)$$

$$E = \frac12 m(\dot x^2 + \dot y^2) + U(r)$$

Перейдемо в циліндричну С.К (полярну у площині)

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\dot x = \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot\varphi \qquad \dot y = \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi$$

$$L = m\{r\cos\varphi(\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi) - r\sin\varphi(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi)\} =$$
$$= m\{r^2\dot\varphi\cos^2\varphi + r^2\dot\varphi\sin^2\varphi\} = mr^2\dot\varphi$$

$$E = \frac12 m\{(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi)^2 + (\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi)^2\} + U(r) =$$
$$= \frac12 m\{\dot r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 - 2r\dot r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \dot r^2\sin^2\varphi +$$
$$+ r^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + 2\dot r r\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot\varphi\} + U(r) =$$
$$= \frac12 m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + U(r)$$

$L = const \Rightarrow$

1) секторіальна швидкість $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac12 r^2 d\varphi\right) = \frac12 r^2\dot\varphi = \frac{L}{2m} = const$

2) $\dot\varphi = \frac{L}{mr^2}$ – знак кутової шв-ті сталий

$$E = \frac12\left(m\left(\dot r^2 + r^2\cdot\frac{L^2}{m^2r^4}\right) + U(r)\right) = \frac12 m\dot r^2 + \overbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}^{U_{еф}} = \frac12 m\dot r^2 + U_{еф}(r)$$

радіальна швидкість

Отже рух частинки в радіальному напрямі можна розглядати як одномірний рух з $U_{еф}$, цей напрям обертається навколо силового центру з $\dot\varphi$ (завжди в один бік!

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{еф})}$$

$\dot r = 0$ при $E = U_{еф}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$ – точки повороту (частинка не зупиняється, бо існує

азимутальна складова швидкості $r\cdot\dot\varphi = L/mr$ (рух квазіодновимірний)

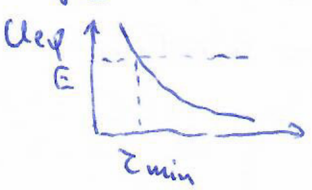
рівняння траєкторії:

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}dt \; ; \quad dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{еф})}}$$

$$d\varphi = \pm\frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{еф})}} \qquad \varphi = \pm\frac{L}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-\frac{L^2}{2mr^2}-U(r)}} + \varphi_0$$

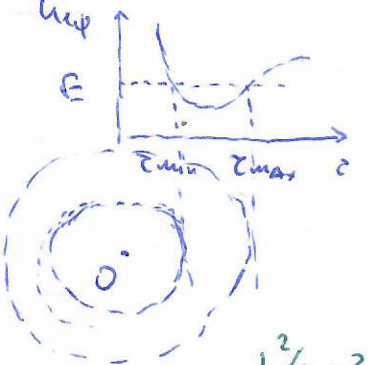
залежить від $U(r)$

рух можливий, лише при $E - U_{еф} \ge 0$



інфінітний

$r \ge r_{min}$



фінітний

$r_{min} \le r \le r_{max}$

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$$

$U_{еф}$ завжди > 0

$\alpha > 0$ відштовх.

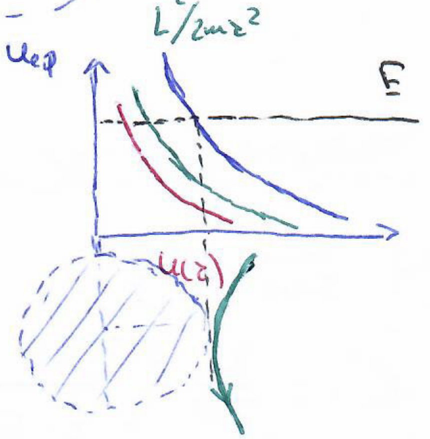
< 0 притягання до силового центру

$U_{еф}$ може бути різним

a) $\alpha > 0$, $n > 0$

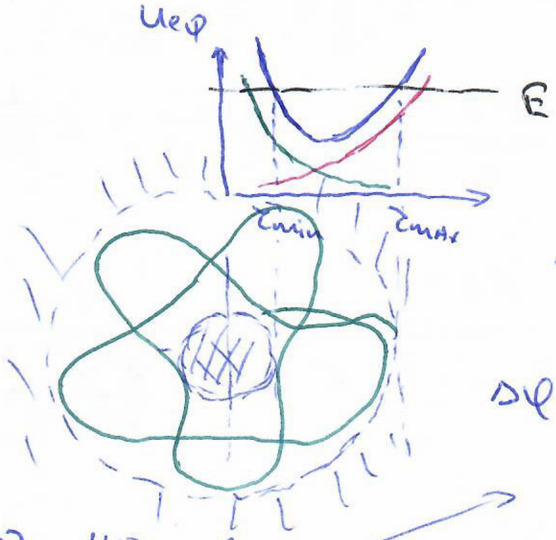
$$E = \frac{1}{2}m\dot r^2 + U_{еф}$$

рух завжди інфінітний – розсіяння на силовому центрі



б) $\alpha > 0$, $n < 0$

рух фінітний



умова замкнутості траєкторії:

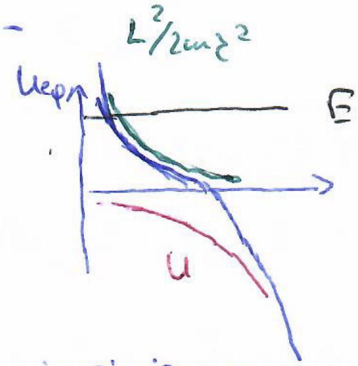
$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{L}{\sqrt{2m}}\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{еф}}} = \frac{m}{n}2\pi$$

при $n = -2$ можливе

за n періодів здійсне m повних обертів

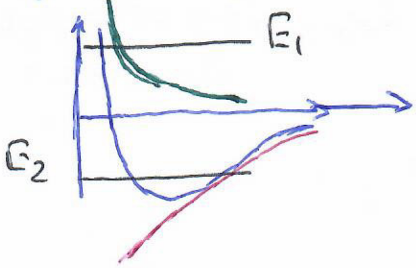
в) $\alpha < 0$, $n < 0$

інфінітний при $\forall E$



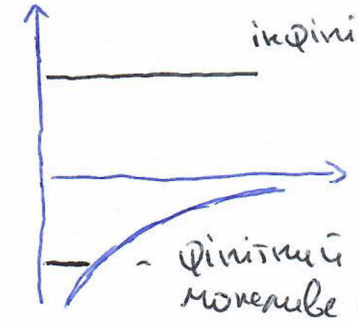
розсіяння частинки

г) $\alpha < 0$, $2 > n > 0$



$E > 0$ - інфінітний рух

$E < 0$ - фінітний рух (n=1 - замкнена траєкторія $\Rightarrow$ більше варіантів нема)



інфінітний рух ($E > 0$)

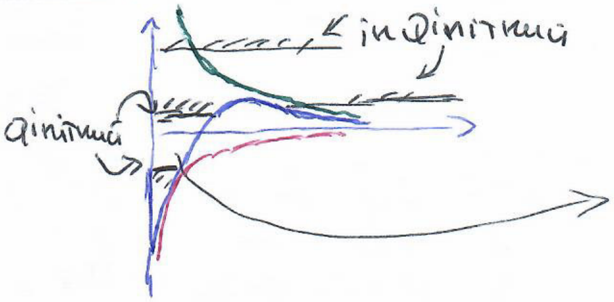
д) $\alpha < 0$, $n = 2$

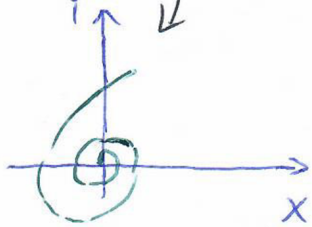
- фінітний рух ($E < 0$)
можливе падіння на силовий центр

$$U_{еф} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left(\alpha + \frac{L^2}{2m}\right)$$

$$|\alpha| > \frac{L^2}{2m}$$

е) $\alpha < 0$, $n > 2$





Рух частинки в полі $U(r) = \frac{\alpha}{r}$

$$U_{еф} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{r} \\ dx = -\frac{dr}{r^2} \end{array} \right] =$$

$$= \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \alpha x - \frac{L^2}{2m} x^2}} = \cancel{\mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \left(\alpha x + \frac{\alpha^2}{2L^2} + \frac{L^2}{2m} x^2\right) - \frac{\alpha^2}{2L^2}}}}$$

$$= \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dx}{E - \left(\frac{L^2}{2m} x^2 + \alpha x + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}\right) + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}} = \left[\frac{L^2 x}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\alpha \sqrt{m}}{\sqrt{2} L} \cdot 2 = \alpha x \right] =$$

$$= \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \left(\frac{L}{\sqrt{2m}} x + \frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^2 + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}}} = \left[\begin{array}{l} \frac{Lx}{\sqrt{2m}} + \frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{m}{2}} = \eta \\ \frac{L}{\sqrt{2m}}\, dx = d\eta \\ dx = \frac{\sqrt{2m}}{L}\, d\eta \end{array} \right.$$

$$= \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{\sqrt{2m}}{L} \int \frac{d\eta}{\sqrt{E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2} - \eta^2}} = \left[E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2} = a^2 \right] =$$

$$= \mp \int \frac{d\eta}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} = \pm \arccos \frac{\eta}{a} = \underbrace{\varphi - \varphi_0}_{} = \theta$$

θ - перенесення початку відліку φ_0

$$\cos\theta = \frac{\eta}{a}$$

$$\eta = a\cos\theta \qquad \frac{Lx}{\sqrt{2m}} + \frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}}\cos\theta$$

$$\frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2m}{L^2}} = \sqrt{E + \alpha^2 \frac{m}{2L^2}}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2m}}{L}\left(\sqrt{E + \frac{\alpha^2 m}{2L^2}}\cos\theta - \frac{\alpha}{L}\sqrt{\frac{m}{2}}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{2m}}{L} \frac{|\alpha|}{L}\sqrt{\frac{m}{2}}}_{\frac{|\alpha| m}{L^2} = \frac{1}{p}} \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{2L^2 E}{\alpha^2 m} + 1}}_{e} \cos\theta \mp 1 \Bigg)$$

при $\alpha > 0$

" $\alpha < 0$

$$r = \frac{1}{p}\left(e\cos\theta \mp 1\right) \qquad r(\theta) = \frac{p}{\mp 1 + e\cos\theta}$$

рівняння конічних перерізів

$e<1$ еліпс
$e=1$ параб
$e>1$ - гіперб.

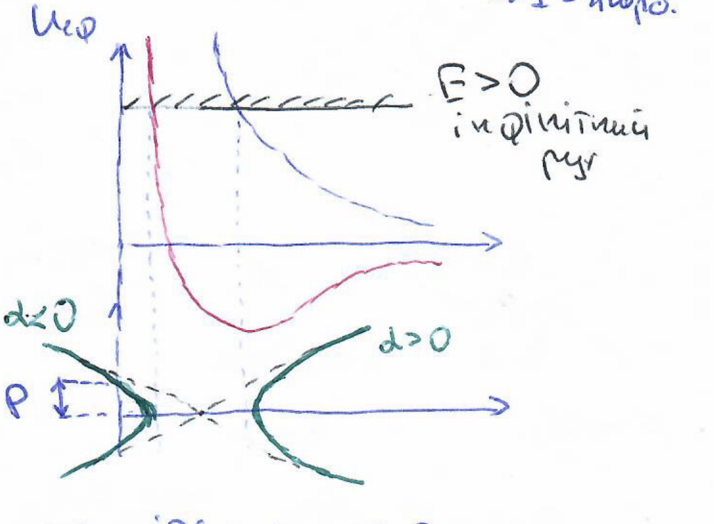
$\alpha > 0$ - ~~притягання~~ відштовх

α ~~>~~ 0 - ~~відштовх~~ притяг.

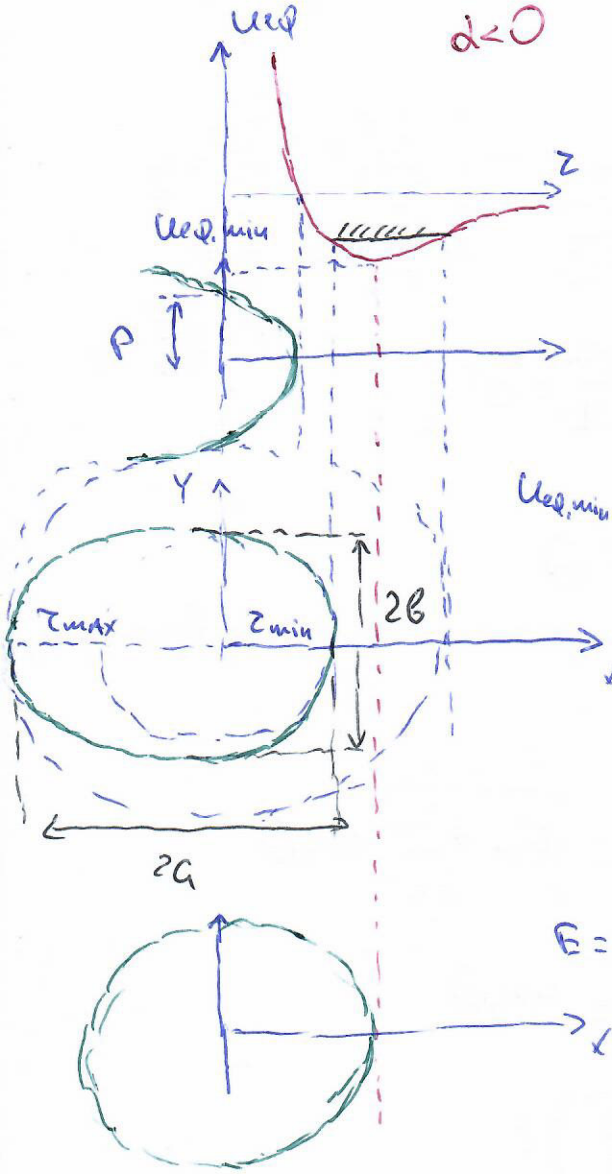
$$r = \frac{p}{\mp 1 + e\cos\theta}$$

$E>0$ - ~~???~~ інфінітний рух ~~???~~ по гіперболічних траєкторіях $e>1$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 m}} > 1.$$



неперіодичні комети



$E=0$ $\quad e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}=1$ – парабола

інфінітний $\quad r_{min}=\frac{p}{2}=\frac{L^2}{2m|\alpha|}$

$U_{еф,min}<E<0$ $\quad e=\sqrt{1-\frac{2|E|L^2}{m\alpha^2}}<1$

$r_{min}=\frac{p}{1+e}$; $\quad r_{max}=\frac{p}{1-e}$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a=\frac{p^2}{1-e^2}=\frac{|\alpha|}{2|E|}$ $\quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$ $\quad \boxed{b^2=pa}$

велика піввісь визначається $|E|$ і не залежить від L, $\quad b\sim L$ $\quad ds=\frac{L}{2m}dt$

$E=U_{еф\,min}$ $\quad r_{min}=r_{max}$ – коло

$e=0$ $\quad |E|=\frac{m\alpha^2}{2L^2}$

за період замітається вся площа $S=\frac{L}{2m}T$
для еліпса $S=\pi ab$ $\quad$ ІІІ з-н Кепл.
$T^2=\frac{4\pi^2 m}{|\alpha|}a^3$

Планети сонячної системи, їх природні та штучні супутники, астероїди, періодичні комети, подвійні зірки, зірки навколо центра галактик

Космічні швидкості $\quad \alpha=-GmM_З$ $\quad \cancel{\alpha=-Gm}M$

Я силовий центр – Земля, частинка – штучний супутник, якому в початковий момент надали $\vec{v}_0$ горизонтально

$v_0=0$ – рух по прямій до центра Землі

v_0 – мала, рух по еліпсу до зустрічі з поверхнею (на малих ділянках ~~еліпс~~ поблизу апогею (для цієї траєкторії :-) еліпс апроксим. параболою – як і роблять в задачах)

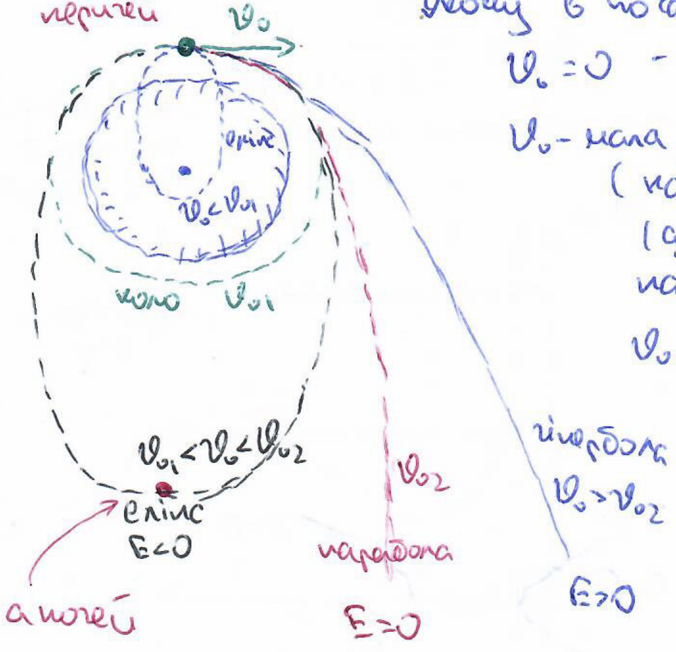
$v_0\nearrow \Rightarrow E\nearrow,\ L\nearrow \Rightarrow$ збільшуються піввісі, причому b зростає швидше

$|E|\searrow$

при $a=b$ коло, тіло – штучний супутник

$m\frac{v_{01}^2}{R_З}=G\frac{mM_З}{R_З^2} \Rightarrow v_{01}=\sqrt{G\frac{M_З}{R_З}}=\sqrt{gR_З}$

знехтували початковою висотою над поверхнею



$E=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{mM_З}{R_З}$ $\quad$ при $v=v_{01}$ $\quad E=-G\frac{mM_З}{2R_З}$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, м^3 \cdot кг^{-1} с^{-3}$ $M_З = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг, $R_З = 6{,}378 \cdot 10^6$ м

$\underline{v_{01} = 7{,}9 \text{ км/с}}$ - перша космічна, мін, щоб тіло стало штуч. супутником

$v_0 \nearrow$ коло => еліпс, але у ~~фокусі~~ центр Землі у іншому фокусі

$E \nearrow$ $(E<0)$

$E = 0$ - парабола $\dfrac{m v_{02}^2}{2} - G \dfrac{m M_З}{R_З} = 0$ $\dfrac{m v_0^2}{2} - m g R_З = 0$

$$v_{02} = \sqrt{2G \frac{M_З}{R_З}} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

- друга космічна, мін, щоб тіло назавжди залишило Землю

Якщо стартувати не з Землі, то

Місяць	$v_{02} = 2{,}4$ км/с
Марс	5,0
Венера	10,22
Сатурн	~~35,~~ 36
Сонце	617,7

Третя космічна швидкість - мін, щоб (запущене із Землі) залишило Сонячну систему => силовий центр - Сонце б) вже рухається разом із Землею

$\frac{1}{2} m v_{03}^2 - \frac{G M_C m}{R_{ЗС}} = 0$ => $v_{03} \approx 42{,}1$ км/с. (з ~~врахуванням, що~~ загалом

орбітальна шв-ть Землі навколо Сонця $\sim 29{,}8$ км/с, отже можна скоротити :-)

$v_{03} = (16{,}7 \div 73)$ км/с

Вояджер-1 (1977) "втік" відносно Сонця зі швидкістю > 17 км/с завдяки гравітаційним маневрам

четверта косм. шв-ть - мін, яку треба надати ракеті, щоб вона могла впасти на задану точку Сонця.

Задача двох тіл

Ми вважали, що силовий центр нерухомий, насправді...

дві частинки => 1) знаходження руху центра мас

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \vec{F}_1^{з} + \vec{F}_2^{зовн.}$$

2) рух другої частинки з $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ у силовому полі першої

$$\underline{\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Фактично таку задачу ми і розв'язували.

Якщо система замкнена, то зберігаються енергія та момент імпульсу

$\vec{L}_C = [m_1 \vec{r}_1, \vec{v}_1] + [m_2 \vec{r}_2, \vec{v}_2]$ загальний $\vec{L} = \vec{L}_C + [\vec{R}_C, \vec{P}]$

Розглядаємо систему центра мас, її початок на лінії, що з'єднує частинки $\vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{M} \vec{r}$, $\vec{r}_1 = -\dfrac{m_2}{M} \vec{r}$

$$\vec{L}_c = m_1\left[-\frac{m_2}{M}\vec{r}, \left(-\frac{m_2}{M}\right)\dot{\vec{r}}\right] + m_2\left[\frac{m_1}{M}\vec{r}, \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right] =$$

$$= m_1\frac{m_2^2}{M^2}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \frac{m_1 m_2(m_2+m_1)}{M^2}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$$

$$L_c = \mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$$

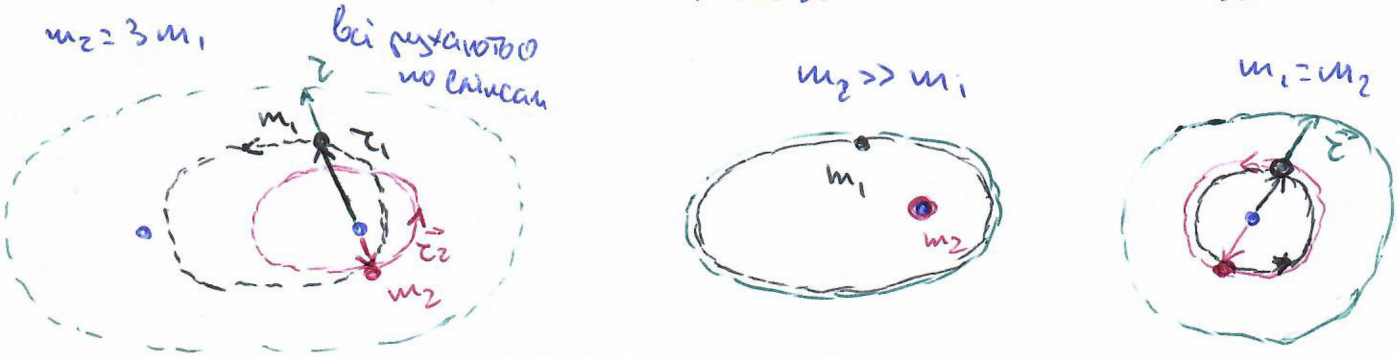
$$E = E_c + \frac{1}{2}MV_c^2 \quad , \quad E_c = \frac{1}{2}m_1 v_{1,c}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,c}^2 + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{m_1\frac{m_2^2}{M^2}v^2 + m_2\frac{m_1^2}{M^2}v^2\right\} + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r)$$

$\Rightarrow$ рух однієї уявної частинки з μ з потенціальною енергією, що має ~~перша~~ друга частинка у полі першої

* $U = \frac{\alpha}{r}$, $\alpha < 0$ $\quad r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$; $\quad p = \frac{L^2}{|\alpha|\mu}$; $\quad e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\alpha^2\mu}}$

$U_{ef\,min} < E < 0$ $\quad r_1 = \frac{m_2}{M}\frac{p}{1+e\cos\theta}$; $\quad r_2 = \frac{m_1}{M}\frac{p}{1+e\cos\theta}$



частинки завжди на протилежних кінцях відрізка через фокус (початок відліку центр мас)

$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$ можна переписати наступним чином

$$m_1\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)\vec{F}_{21} = \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\vec{F}_{21}$$

якщо $\vec{F}_{21}$ - гравітаційна, $m_2 = M_c$ (Сонце), то фактично врахування впливу руху Сонця $G \to G\cdot\left(1+\frac{m}{M_c}\right)$

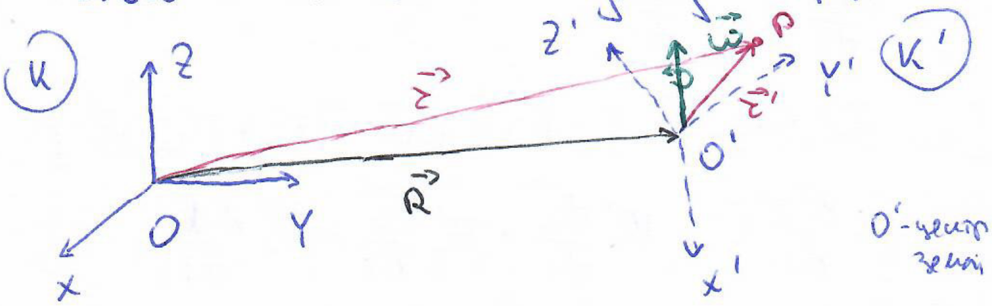
тоді трохи уточнюється III з-н Кеплера (I та II незмінні)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{|\alpha|}a^3 \quad , |\alpha| = GM_c m \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{M_c G\left(1+\frac{m}{M_c}\right)}a^3$$

все стала для планет $\quad \frac{a^3}{T^2(M_c+m)} = \frac{G}{4\pi^2}$

Неінерціальні системи відліку

Далеко не всі системи відліку - інерційні (транспорт, поверхня Землі)



* K' рухається прискорено відносно K (можливо O - центр Сонця, коперникова СВ) + обертається з $\vec\omega$

$\Delta l' = \Delta l$, $\Delta t' = \Delta t$, $m' = m$, $\vec F' = \vec F$

$$\vec r = \vec R + \vec r' \qquad \vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec R}{dt} + \frac{d\vec r'}{dt}$$

$$\vec R = X\vec i + Y\vec j + Z\vec k; \quad \vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k; \quad \vec r' = x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k'$$

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec i + x\frac{d\vec i}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec j + y\frac{d\vec j}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec k + z\frac{d\vec k}{dt} = \left[\frac{d\vec i}{dt} = 0 = \frac{d\vec j}{dt} = \frac{d\vec k}{dt}\right] =$$
$$= \frac{dx}{dt}\vec i + \frac{dy}{dt}\vec j + \frac{dz}{dt}\vec k = \vec v$$

$$\frac{d\vec R}{dt} = \frac{dX}{dt}\vec i + \frac{dY}{dt}\vec j + \frac{dZ}{dt}\vec k = \vec V$$

$$\frac{d\vec r'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec i' + \frac{dy'}{dt}\vec j' + \frac{dz'}{dt}\vec k'}_{\vec v'} + x'\frac{d\vec i'}{dt} + y'\frac{d\vec j'}{dt} + z'\frac{d\vec k'}{dt}$$

$dt = dt'$ $\quad \vec v'$ - в-р швидкості частинки P відносно K'

$\vec i'$ - змінюється в K-системі, обертається за dt на $d\vec i'$

$d\vec i' = [d\vec\varphi, \vec i']$ - поворот навколо нерухомої осі

$$\frac{d\vec i'}{dt} = \left[\frac{d\vec\varphi}{dt}, \vec i'\right] = [\vec\omega, \vec i'] \qquad \frac{d\vec j'}{dt} = [\vec\omega, \vec j']; \quad \frac{d\vec k'}{dt} = [\vec\omega, \vec k']$$

$$\frac{d\vec r'}{dt} = \vec v' + x'[\vec\omega, \vec i'] + [\vec\omega, y'\vec j'] + [\vec\omega, z'\vec k'] = \vec v' + [\vec\omega, \vec r']$$

$$\vec v = \underbrace{\vec V + [\vec\omega, \vec r']}_{\text{переносна шв-ть}} + \vec v'$$

$\vec v$ - абсолютна шв-ть частинки; $\vec v'$ - відносна шв-ть

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec V}{dt} + \left[\frac{d\vec\omega}{dt}, \vec r'\right] + \left[\vec\omega, \frac{d\vec r'}{dt}\right] + \frac{d\vec v'}{dt}$$

$$\frac{d\vec V}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec i + \frac{d^2y}{dt^2}\vec j + \frac{d^2z}{dt^2}\vec k = \vec A$$

$$\frac{d\vec\omega}{dt} = \vec\beta = \frac{d\omega_x}{dt}\vec i + \frac{d\omega_y}{dt}\vec j + \frac{d\omega_z}{dt}\vec k$$

$$\left[\vec\omega, \frac{d\vec r'}{dt}\right] = [\vec\omega, [\vec\omega,\vec r'] + \vec v'] = [\vec\omega,[\vec\omega,\vec r']] + [\vec\omega,\vec v']$$

$$\frac{d\vec v'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt'^2}\vec i' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec j' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec k' + v'_x\frac{d\vec i'}{dt} + v'_y\frac{d\vec j'}{dt} + v'_z\frac{d\vec k'}{dt} =$$

$$= \vec a' + [\vec\omega,\vec v']$$

$\frac{d\vec v'}{dt}$

$$\vec a = \vec A + [\vec\beta,\vec r'] + [\vec\omega,[\vec\omega,\vec r']] + 2[\vec\omega,\vec v'] + \vec a'$$

або $$\vec a' = \vec a - \underbrace{\vec A - [\vec\beta,\vec r'] - [\vec\omega,[\vec\omega,\vec r']]}_{\text{переносне прискорення}} - 2[\vec\omega,\vec v']$$

(обумовлене рухом С.В і може спостерігатися навіть для частинок, які в НеІСВ нерухомі. $\vec r'=const$

- $\vec A$ – поступальне прискорення
- $[\vec\beta,\vec r']$ – дотичне прискорення (спрямоване вздовж дотичної до траєкторії частинки в ІСВ)
- $[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r']]$ – відцентрове прискорення (спрямоване від осі обертання, = нормальній складовій прискорення частинки відносно ІСВ, взятій зі знаком "–"
- $-2[\vec\omega,\vec v']$ – коріолісове прискорення.

$m\vec a = \vec F_{вз}$ (сили взаємодії прикладені до частинки), $m=m'$, $\vec F_{вз} = \vec F'_{вз}$

$$m\vec a' = \vec F_{вз} - m\vec A - m[\vec\beta,\vec r'] - m[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r']] - 2m[\vec\omega,\vec v']$$

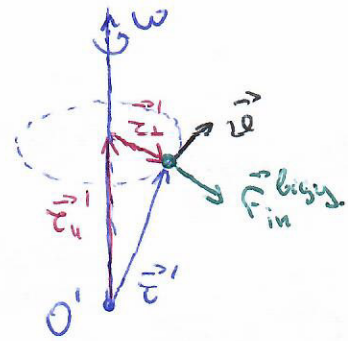
$m\vec a' = \vec F_{вз} + \vec F_{ін}$ – основне рівняння динаміки в НеІСВ

сили інерції (поступальна, відцентрова, Коріоліса, без назви ☺))

Для сил інерції неможливо вказати матеріальне джерело => проблеми з І з. Ньютона

=> неможливо вказати силу протидії => проблеми з ІІІ з. Ньютона

} => закони динаміки Ньютона справедливі лише в ІСВ



напрям відцентрової

$$\vec r' = \vec r'_{\parallel} + \vec r'_{\perp}, \quad \vec r'_\parallel \parallel \vec\omega$$

$$\vec F_{відц} = -m[\vec\omega,[\vec\omega,(\vec r'_\parallel+\vec r'_\perp)]] = -\underbrace{m[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r'_\parallel]]}_{0} - m[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r'_\perp]] =$$

$$= -m[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r'_\perp]] = -m(\vec\omega\underbrace{(\vec\omega\cdot\vec r'_\perp)}_{0} - \vec r'_\perp(\vec\omega\cdot\vec\omega)) = m\omega^2\vec r'_\perp$$

Загалом, одну й ту ж задачу можна однаково успішно розглянути як у неІСВ, так і в ІСВ

$\vec F_{ін}$ - зовнішні сили

Рух частинки поблизу поверхні Землі

$$m\vec a' = \vec F_З + \vec F_C + \vec f + \vec F_{ін}$$ - рух відносно поверхні Землі.

$\vec F_З$ - гравіт. збоку Землі; $\vec F_C$ - гравіт. з боку Сонця; $\vec f$ - інші

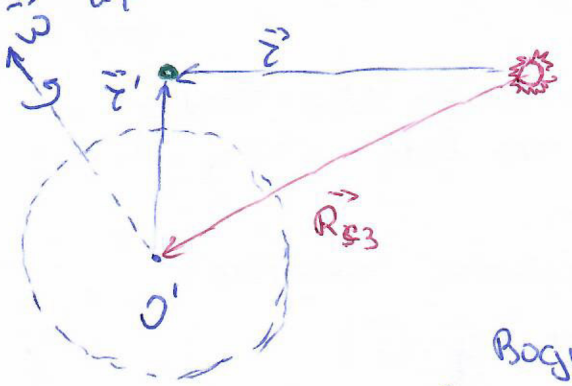
$$\vec F_{ін} = -m\ddot{\vec R}_{СЗ} - m\left[\frac{d\vec\omega}{dt},\vec r'\right] - m[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r]] - 2m[\vec\omega,\vec v']$$

$\vec R_{СЗ}$ - радіус вектор Сонце-Земля

$\vec\omega$ - оберт. Землі навколо власної осі

$\vec r'$ - відносно центра Землі

$\frac{d\vec\omega}{dt}\approx 0$ (коливання тривалості земної доби не перевищують $3\cdot\vec\omega_C^{-3}$)



$$\vec F_C = -G\frac{M_C m}{r^2}\frac{\vec r}{r} = -G\frac{M_C m}{|\vec R_{СЗ}+\vec r'|^3}(\vec R_{СЗ}+\vec r')$$

$|\vec r'|\approx 6370$ км, $R_{СЗ}\approx 1.5\cdot 10^8$ км

$$\vec F_C \approx -G\frac{M_C m}{R_{СЗ}^3}\vec R_{СЗ}$$

Водночас, в ІСВ геліоцентричній р-ня руху Землі

$$M_З\ddot{\vec R}_{СЗ} = -G\frac{M_З M_C}{R_{СЗ}^3}\vec R_{СЗ}$$

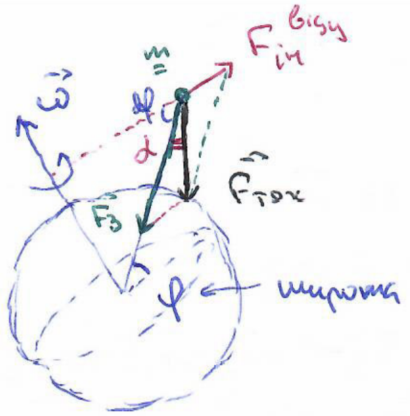
для інших небесних тіл те саме.

$$\Rightarrow \vec F_C = m\ddot{\vec R}_{СЗ}$$

$$m\vec a' = \underbrace{\vec F_З + \vec f - m[\vec\omega,[\vec\omega,\vec r']]}_{} - 2m[\vec\omega,\vec v']$$

сила тяжіння поблизу поверхні Землі - завжди прикладена до тіла незалежно від його руху.

- 6.16 -



$$\vec F_з = -G\frac{mM_з}{r'^2}\frac{\vec r'}{r'}$$

$r' \approx R_з$ $\quad F_з = G\frac{mM_з}{R_з^2} = mg_0$ — 9,83 м/с²

$$\vec F_{тяж} = \vec F_з + \vec F_{ін}^{відц}$$

географічна широта

$$F_{тяж}^2 = F_з^2 + F_{ін}^{відц\,2} - 2F_з\cdot F_{ін}^{відц}\cos\varphi$$

$$F_{ін}^{відц} = m\omega^2 r_\perp \approx m\omega^2 R_з\cos\varphi$$

$$F_{тяж} = m\sqrt{g_0^2 + \omega^4R_з^2\cos^2\varphi - 2g_0\omega^2R_з\cos^2\varphi}$$

$\omega = \frac{2\pi}{1\ доба} \approx 7{,}3\cdot10^{-5}$ рад/с

$\omega^2\cdot R_з \approx 0{,}03$ м/с² $\ll g_0$

$$F_{тяж} \approx m\sqrt{g_0^2 - 2g_0\omega^2R_з\cos^2\varphi} = mg_0\left(1 - 2\frac{\omega^2R_з\cos^2\varphi}{g_0}\right)^{1/2} \approx$$

$$\approx mg_0\left(1 - \frac{\omega^2R_з\cos^2\varphi}{g_0}\right) = m(g_0 - \omega^2R_з\cos^2\varphi)$$

$g = (9{,}83 - 0{,}034\cdot\cos^2\varphi)$ м/с²

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{F_{ін}^{відц}}{F_{тяж}} \qquad \alpha \approx \sin\alpha = \frac{m\omega^2R_з\cos\varphi}{mg_0}\sin\varphi = \frac{\omega^2R_з\sin2\varphi}{2g}$$

насправді фігура Землі сплюснута + + ще складніша $\quad g = (9{,}83 - 0{,}05\cos^2\varphi)$ м/с²

$\frac{\Delta g}{g} \xrightarrow{екватор-полюс} 0{,}06\%$ $\qquad \alpha_{max}(\varphi = 45°) \approx 11'$

для маятникових годинників $T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow$ 3,5 хв/добу

в дійсності g на екваторі менше, ніж на полюсі (сплюснутість - точки віддалені далі від центру Землі)

Вага - сила з якою тіло діє на опору або підвіс (сила тяжіння прикладена до тіла, вага - з боку тіла до зв'язків)

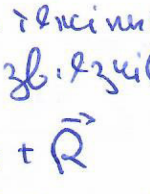
$m\vec a = \vec F_{тяж} + \vec R$ $\quad$ (силою Коріоліса нехтуємо)

$$\vec P = -\vec R = -(m\vec a - \vec F_{тяж}) = m(\vec g - \vec a)$$

якщо $\vec P = 0$ невагомість

$\vec P > m\vec g$ - перевантаження

ліфт:



$\vec a = 0 \qquad P = m\vec g$

$\vec a \uparrow\uparrow g \qquad P = m(g-a)$

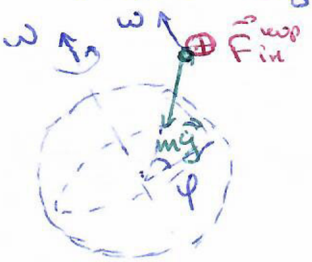
$\vec a \uparrow\downarrow g \qquad P = m(g+a)$

6.17

Ефекти сили Коріоліса

$$m\vec a' = m\vec g + \vec S - 2m[\vec\omega, \vec v']$$

Вільне падіння:



$$m\vec a' = m\vec g - 2m[\vec\omega, \vec v']$$

$\vec v'$ - до центра Землі => $\vec F_{ін}^{кор} = -2m[\vec\omega, \vec v']$
спрямована на схід => тіла відхиляються на схід від напрямку підвісу

$|\vec F_{ін}^{кор}| = 2m\omega v' \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) =$
$= 2m\omega v' \cos\varphi$ - max на екваторі (22 мм при падінні зі 100м)

$$\vec a' = \vec g - 2[\vec\omega, \vec v']$$

Вважаємо, що прискорення Коріоліса мале, використовуємо метод послідовних наближень:

"0", $\vec v' = 0$ $\quad \vec a'_{(0)} = \vec g$ => $\vec v'_{(0)} = \vec g t$ $\quad$ ($\vec v'(t=0) = 0$, $\vec r'(t=0) = 0$ відлік з точки падіння)

$\vec r'(t) = \frac{\vec g t^2}{2}$

"1" $\vec a_{(1)} = \vec g - 2[\vec\omega, \vec v'_{(0)}] =$
$= \vec g - 2[\vec\omega, \vec g t]$ => $\vec v'_{(1)} = \vec g t - 2[\vec\omega, \frac{\vec g t^2}{2}]$

$\vec r'_{(1)} = \frac{1}{2}\vec g t^2 - \frac{1}{3}[\vec\omega, \vec g] t^3$

тобто поправка Коріоліса з'являється вже в першому наближенні.

Вибираємо ПДСК: $OZ \parallel \vec g$, $OX \perp \vec\omega$ (на захід по паралелі), OY по меридіану до екватору

$\vec g = (0, 0, g)$ $\qquad \vec\omega = (0, -\omega\cos\varphi, -\omega\sin\varphi)$

$$[\vec\omega, \vec g] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & -\omega\cos\varphi & -\omega\sin\varphi \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = -\vec i g\omega\cos\varphi$$

$$\vec r'_{(1)} = \Big(\underbrace{-g\omega\cos\varphi\frac{t^3}{3}}_{\text{зміщення на схід}};\ 0;\ \frac{1}{2}g t^2\Big)$$

Висота падіння $h = \frac{1}{2}g t^2$

$x_{(1)} = -\frac{2}{3}\omega\cos\varphi \cdot h \cdot t =$
$= -\frac{4\pi}{3}\frac{t}{T_{оберт.\ Землі}} h \cdot \cos\varphi$

Оцінимо поправки, що дає друге наближення

"2": $\vec a'_{(2)} = \vec g - 2[\vec\omega, (\vec g t - [\vec\omega, \vec g]\frac{t^2}{3}] =$
$= \vec g - 2[\vec\omega, \vec g]t + 2[\vec\omega, [\vec\omega, \vec g]]t^2$

$$\vec v'_{(2)} = \vec g t - [\vec\omega, \vec g]t^2 + \frac{2}{3}[\vec\omega, [\vec\omega, \vec g]]t^3$$

$$\vec r'_{(2)} = \frac{1}{2}\vec g t^2 - \frac{1}{3}[\vec\omega, \vec g]t^3 + \frac{1}{6}[\vec\omega, [\vec\omega, \vec g]]t^4$$

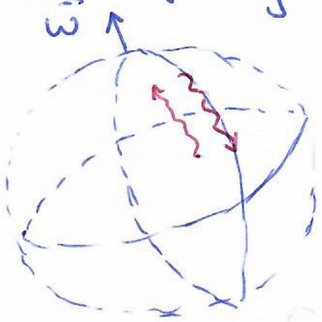
- 6.18 -

$$[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{g}]] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega\cos\varphi & -\omega\sin\varphi \\ -g\omega\cos\varphi & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}\, g\,\omega^2 \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\vec{r}_{(2)} = \Big(-g\omega\cos\varphi\,\frac{t^3}{3};\ \underbrace{g\omega^2 \sin 2\varphi\,\frac{t^4}{12}}_{\text{зміщення в напрямку екватора, на схід не виявл...}};\ \frac{1}{2} g t^2\Big)$$

Інші прояви

маятник Фуко, підмивання правого (лівого) берега річок північної ~~півкулі~~ (південної) півкулі, що течуть в напрямку меридіана, постійні напрямки пасатів (північно-східний у північній, та південно-східний у південній) — потоки прохолодного повітря з полюсів до екватора викривляються силою Коріоліса



напрямки закручування циклонів та антициклонів.