Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О. М. Теслик, О. О. Приходько, С. Й. Вільчинський, Е. В. Горбар

Лекції з лінійної алгебри

(Навчальний посібник для студентів фізичного факультету)

Частина 1

Київ-2021

ББК 22.14я73
УДК 512.6(075.8)
Т36

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
(протокол № ... від ... року)

Рецензенти: **М. З. Іоргов** – д-р. фіз.-мат. наук
Н. В. Майко – д-р. фіз.-мат. наук

Теслик, О. М.
Т36 Лекції з лінійної алгебри / О. М. Теслик, О. О. Приходько, С. Й. Вільчинський, Е. В. Горбар. – К. 2021 – 90 с.

Посібник призначено для студентів фізичних спеціальностей, в якості допоміжного матеріалу до курсу лекцій «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», а також для викладачів даного курсу для допомоги в підготовці до практичних занять.

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.14я73

Зміст

Вступ

Навчальний посібник є доповненням до лекційного курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», що читається для студентів фізичного факультету. Книга призначена для аудиторних занять і самостійної роботи, а також може використовуватися викладачами при підготовці до практичних занять з даного курсу.

Посібник включає теоретичні відомості про різні розділи лінійної алгебри: матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а також алгоритми розв'язку та приклади типових задач. Теоретичний матеріал має чітку та просту для розуміння ієрархію, однаковість використовуваної термінології та символьних позначень. Структура матеріалу носить практикоорієнтований характер. Окрім стислого викладення найбільш важливих означень та теорем, задача посібника полягає у розвитку обчислювальних навичок та логічного мислення, які допомагатимуть у вивченні курса «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», а також в подальшому у засвоєнні більш складних фізичних та математичних курсів.

На завершення частини курсу лекцій, охопленої даним посібником, та відповідних практичних занять студент повинен:

знати

— означення матриці та лінійних операцій над матрицями;

— означення та властивості визначника матриці;

— означення та властивості лінійно незалежної системи векторів, критерії лінійної незалежності;

— означення та властивості добутку матриць;

— означення симетричної, антисиметричної, ортогональної, ермітової, унітарної матриць;

— означення мінору, базисного мінору та рангу матриці;

— теореми Крамера та Кронекера-Капеллі;

— що таке Фундаментальна Система Розв'язків, Нормальна Фундаментальна Система Розв'язків і Загальний Розв'язок заданої СЛАР та яка між ними різниця;

вміти

— розрахувати визначник матриці за довільним рядком або стовпчиком;

— знаходити суму і різницю матриць, добуток матриці на число, матрицю, транспоновану по відношенню до заданої;

— множити матриці;

— шукати матрицю, обернену до даної методом Гауса;

— шукати ранг матриці методом Гауса;

— шукати розв'язок СЛАР типу $(n \times n)$ методом Крамера та методом Гауса;

— знаходити нормальну фундаментальну систему розв'язків, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок для СЛАР типу $(m \times n), m \neq n$.

Розділ 1

Матриці

1. Означення матриці
2. Лінійні операції над матрицями
3. Транспонування матриці, симетрична та антисиметрична матриці
4. Матриця-рядок та матриця-стовпчик
5. Поняття лінійно незалежних систем матриць-стовпчиків та матриць-рядків
6. Властивості лінійно незалежних систем матриць

1.1 Означення матриці

Основні поняття та означення ***1.1. Означення.*** Прямокутною матрицею розміром $m \times n$, $(m, n = 1,\, 2,\, 3\,...)$ називають сукупність математичних об'єктів, поданих у вигляді таблиці з m рядків і n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^m & a_2^m & ... & a_n^m \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^m & a_2^m & ... & a_n^m \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Об'єкти, що складають матрицю, називають її *елементами.* Елементи матриці позначають буквами з двома індексами a_{ij} або a_j^i. Якщо обидва індекси розташовані знизу, то перший з них позначає номер рядка, а другий – номер стовпчика, на перетині яких розташований даний елемент матриці. Якщо ж один з індексів розташовано зверху, то цей індекс означає номер рядка, а нижній – номер стовпчика. (*Не можна плутати верхні індекси з показниками степеня!*). Елементи матриці можуть мати різноманітну природу – це можуть бути дійсні або комплексні числа, координати векторів, функції і т. п.

Прямокутну матрицю, що складається з m рядків і n стовпчиків часто називають $m \times n$ матрицею. Для $m \times n$ матриці A можна використовувати позначення $(a_{ij})_{m\times n}$, а якщо розміри матриці обумовлено завчасно, то, не вказуючи їх, можна писати $A = (a_{ij})$.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпчиків, то матрицю називає ть *квадратною*, а кількість її рядків (стовпчиків) називають *порядком матриці.* Елементи квадратної матриці з індексами $i = j$ називають *діагональними елементами*; сукупність цих елементів називають *головною діагоналлю* матриці, а елементи з $i \neq j$ називають недіагональними елементами.

1.2. Зауваження. Матриці, елементами яких є дійсні або комплексні числа називають **числовими матрицями.** Для числових матриць замість наданого вище означення ***1.1*** іноді вводять інше (але еквівалентне йому) означення. Для цього розглядають дві множини цілих чисел: $I = \{1,\, 2, ...,\, m\}$ і $J = \{1, 2, ...\, n\}$. Виразом $(I \times J)$ позначають множину всіх пар чисел виду $(i,\, j)$, де i – число з множини I, j – число з множини J. Матрицею називають функцію на множині $(I \times J)$, тобто математичне правило, за яким кожній парі чисел $(i,\, j)$ ставиться у відповідність певне число a_j^i.

1.3. Означення. Дві матриці A та B називають рівними одна одній, якщо вони мають однакові розміри (тобто, однакову кількість рядків і стовпчиків) та елементи, які стоять на однакових місцях, дорівнюють один одному, тобто $(a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n}$.

1.2 Лінійні операції над матрицями

1.4. Означення. Нехай A та B – матриці, що складаються з m рядків і n стовпчиків. Сумою матриць A та B називають матрицю C того ж розміру $m \times n$, кожний елемент якої дорівнює сумі елементів матриць A та B, які стоять на тих самих місцях, тобто елементи c_{ij} матриці C пов'язані з елементами a_{ij} та b_{ij} матриць A та B рівністю $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всіх $i = 1,\, ...,\, m$ та $j = 1,\, ...,\, n$.

Суму матриць A та B позначають $A+B$. Операцію знаходження матриці C за відомими матрицями A та B називають *додаванням матриць.*

1.5. Зауваження. З означення суми матриць випливає, що операція додавання матриць визначена лише для матриць одного розміру, а матриці різного розміру додати неможливо.

1.6. Означення. Матрицю C, елементи якої c_{ij} дорівнюють добутку елементів a_{ij} матриці A на дійсне або комплексне число α, називають добутком матриці A на число α і позначають αA. Отже, $c_{ij} = \alpha\, a_{ij}$ для всіх $i = 1, ..., m$ та $j = 1, ..., n$.

З означень ***1.3.*** і ***1.4.*** випливають наведені нижче властивості операцій додавання матриць A,B та C і множення матриці на довільні числа α та β.

1.7. Властивість. Додавання матриць є комутативною операцією, тобто

$$A + B = B + A. \tag{1.2}$$

1.8. Властивість. Додавання матриць є асоціативною операцією, тобто

$$(A + B) + C = A + (B + C). \tag{1.3}$$

1.9. Властивість. Множення матриці на число є дистрибутивною операцією по відношенню до матриць, тобто

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B. \tag{1.4}$$

1.10. Властивість. Множення матриці на число є дистрибутивною операцією по відношенню до чисел, тобто

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A. \tag{1.5}$$

1.11. Властивість. Множення матриці на число є асоціативною операцією, тобто

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A). \tag{1.6}$$

Деякі матриці виділяють із загальної кількості матриць і надають їм спеціальні назви, з огляду на те, що ці матриці частіше за інші зустрічаються при розв'язанні алгебраїчних і фізичних задач.

1.12. Означення. Матрицю, усі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою матрицею.*

Якщо 0 – нульова матриця розміром $m \times n$, то для будь-якої матриці A того ж розміру $A + 0 = A$.

1.13. Означення. Матрицю $(-1)A$ називають *протилежною* до матриці A і позначають $-A$. Матриця, протилежна до даної матриці, має таку властивість : $A+(-A) = 0$.

1.14. Означення. Операція віднімання матриць визначається за допомогою операції додавання матриць і множення матриці на число у такий спосіб: *різницею* матриць B та A називають суму матриць B та $-A$ і позначають її $B - A$.

1.15 Означення. Діагональною матрицею називається квадратна матриця, для якої всі недіагональні елементи a^i_j з $i \neq j$ дорівнюють нулю, а серед діагональних елементів є хоча б один відмінний від нуля. Діаганалну матрицю називають ***одиничною*** матрицею порядку n, якщо усі діагональні елементи матриці дорівнюють одиниці, а всі недіагональні – нулю. Одиничну матрицю позначають E_n.

Елементи одиничної матриці часто позначають символами δ_{ij}, або δ^i_j і називають їх *символами Кронекера.* Отже, $\delta_{ii} = \delta^i_i = 1$ і $\delta_{ij} = \delta^i_j = 0$, коли $i \neq j$.

1.3 Операція транспонування матриці. Симетрична та антисиметрична матриці

Розглянемо матрицю A, що складається з m рядків і n стовпчиків:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриці A можна поставити у відповідність матрицю B з n рядків і m стовпчиків за таким правилом: елементи a_{ik} матриці A дорівнюють елементам b_{ki} матриці B, тобто

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & ... & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицю B називають *транспонованою* відносно A і позначають A^T, перехід від A до A^Tназивають *транспонуванням* матриці A.
1.29. Приклад. Матриці

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{і} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

називаються матрицями Паулі і відіграють надзвичайно важливу роль у квантовій механіці і квантовій теорії поля. Транспонування цих матриць дає результат

$$\sigma_x^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

з якого випливає, що $\sigma_x = \sigma_x^T$, $\sigma_y = -\sigma_y^T$ і $\sigma_z = \sigma_z^T$.
1.30. Означення. Матриці, для яких справедлива рівність $A = A^T$, називаються симетричними, а матриці для яких $A = -A^T$, називаються *антисиметричними.* Приклад ***1.29*** показує, що матриці σ_x і σ_z симетричні, а матриця σ_y – антисиметрична.

1.4 Матриці-стовпчики та матриці-рядки

Матрицею-рядком називають матрицю розміром $1 \times n$, тобто таку, яка складається з одного рядка, у якому міститься n елементів. Матрицю розміром $1 \times n$ називають також *вектор-рядком* або *рядком* довжиною n.

Матрицею-стовпчиком називають матрицю розміром $m \times 1$, яка складається з одного стовпчика, у якому міститься m елементів. Матрицю розміром $m \times 1$ називають також *вектор-стовпчиком* або просто *стовпчиком* висотою m .

У подальшому зручно застосовувати позначення вектор-стовпчиків і вектор-рядків, уперше запропоновані відомим фізиком-теоретиком Полем Діраком. За позначеннями Дірака

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ ... \\ x^m \end{bmatrix} \equiv |x\rangle, \quad [x_1 \; x_2 \ldots x_n \,] \equiv \langle x \,|. \tag{1.7}$$

Зручність цих позначень полягає в тому, що вектор-стовпчик $|x\rangle$ важко переплутати з вектор-рядком $\langle x|$. Крім того, у подальшому введемо до розгляду правило множення матриць, згідно з яким добуток матриць $\langle x \mid y\rangle$ є числом (якщо $m{=}n$), а добуток $|y\rangle\langle x|$ – матрицею порядку $m \times n$. Цілком очевидно, що ці добутки, записані у позначеннях Дірака, легко відрізнити один від одного. Позначення Дірака широко застосовуються в сучасній літературі з квантової механіки, квантової теорії поля, квантової оптики, фізики твердого тіла тощо.

Матрицю (1.1) розміром $m \times n$ можна розглядати як сукупність стовпчиків висотою m або як сукупність рядків довжини n. Нехай

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ ... \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ ... \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ ... \ , \quad |a_n\rangle = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ ... \\ a_n^m \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

тоді можна ввести компактне позначення матриці (1.1), яке виглядає як

$$A = (|a_1\rangle, \ |a_2\rangle, \ ... \ |a_n\rangle) \, . \tag{1.9}$$

Ту саму матрицю можна вважати сукупністю вектор-рядків

$$\left\langle a^1 \right| = \left(a_1^1, \ldots, \ a_n^1\right), \ \ldots, \langle a^m| = (a_1^m, \ldots, a_n^m) \tag{1.10}$$

і виразити її у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ ... \\ \langle a^m| \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

1.17. Зауваження. Операцію додавання вектор-рядків визначено для вектор-рядків однієї довжини, так само як додавання вектор-стовпчиків – тільки для вектор-стовпчиків однієї висоти. Вивчимо детальніше операції додавання цих видів матриць і множення їх на число. Для стислості йтиметься лише про вектор-стовпчики, оскільки для вектор-рядків усі властивості формулюються і доводяться аналогічно.

1.5 Лінійна комбінація матриць-стовпчиків та матриць-рядків. Поняття лінійно залежної та лінійно незалежної систем векторів

1.18. Означення. Вектор-стовпчик $|q\rangle$ називають лінійною комбінацією стовпчиків $|p_1\rangle, ..., |p_m\rangle$ однакової висоти, якщо існують такі числа α_k, що

$$|q\rangle = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, |p_k\rangle \, . \tag{1.12}$$

У розгорнутому вигляді рівність (1.12) виглядає як

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ ... \\ q^n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \\ ... \\ p_1^n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} p_2^1 \\ p_2^2 \\ ... \\ p_2^n \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_m \begin{pmatrix} p_m^1 \\ p_m^2 \\ ... \\ p_m^n \end{pmatrix}.$$

Числа $\alpha_1, ..., \alpha_m$ називають коефіцієнтами лінійної комбінації. Згідно з означеннями операцій множення матриці на число та додавання рівність (1.12) рівносильна сукупності числових рівностей

$$\begin{aligned} q^1 &= \alpha_1 p_1^1 + \alpha_2 p_2^1 + ... + \alpha_m p_m^1 \\ q^2 &= \alpha_1 p_2^1 + \alpha_2 p_2^2 + ... + \alpha_m p_m^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .... \\ q^n &= \alpha_1 p_1^n + \alpha_2 p_2^n + ... + \alpha_m p_m^n \end{aligned}$$

1.19. Означення. Вектор-стовпчик, усі елементи якого дорівнюють нулю, називається нульовим і позначається як $|0\rangle$. Аналогічно означається й нульовий вектор-рядок $\langle 0|$.

1.20. Означення. Сукупність s стовпчиків $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$ однієї й тієї самої висоти називається лінійно незалежною, якщо з рівності

$$\alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle + ... + \alpha_s |a_s\rangle = |0\rangle \tag{1.13}$$

випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0$. В іншому випадку система з s стовпчиків є лінійно залежною.

Лінійну комбінацію вектор-стовпчиків, усі s коефіцієнтів якої дорівнюють нулю, називають тривіальною. За допомогою цього терміну означення ***1.20*** можна сформулювати в еквівалентній формі.

1.21. Означення. Сукупність стовпчиків називають лінійно залежною, якщо існує рівна нульовому стовпчику нетривіальна лінійна комбінація цих стовпчиків. Сукупність стовпчиків називають лінійно незалежною, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цих стовпчиків дорівнює нульовому стовпчику.

1.22. Приклад. Сукупність n вектор-стовпчиків висотою n:

$$|e_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, |e_{n-1}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_n\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

є лінійно незалежною.

1.6 Властивості лінійно незалежних систем матриць

1.23. Властивість. Система з $s > 1$ стовпчиків лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один зі стовпчиків є лінійною комбінацією інших стовпчиків.

▲ Доведемо цю властивість. Нехай система, про яку йдеться, є лінійно залежною. Тоді, за означенням ***1.20***, існує нетривіальна лінійна комбінація цих вектор-стовпчиків, рівна нульовому вектор-стовпчику:

$$\alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle + \ ... \ + \alpha_s |a_s\rangle = |0\rangle . \tag{1.15}$$

Принаймні один із коефіцієнтів нетривіальної лінійної комбінації (нехай це буде коефіцієнт α_j) не дорівнює нулю. Тому з (1.15) випливає рівність

$$|a_j\rangle = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}|a_1\rangle - ... - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}|a_{j-1}\rangle - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}|a_{j+1}\rangle - ... - \frac{\alpha_s}{\alpha_j}|a_s\rangle$$

тобто, j-й стовпчик є лінійною комбінацією інших стовпчиків. І навпаки, якщо один зі стовпчиків є лінійною комбінацією інших, то виконується рівність

$$|a_j\rangle = -\frac{1}{\alpha_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} \alpha_i |a_i\rangle$$

з якої випливає існування нетривіальної лінійної комбінації векторів, що дорівнює нульовому вектору.

1.24. Властивість. Якщо система векторів містить нульовий вектор-стовпчик, то вона є лінійно залежною.

Нульовий стовпчик є тривіальною лінійною комбінацією інших вектор-стовпчиків, приналежних до системи, про яку йдеться. За властивістю ***1.23*** ця система лінійно залежна.

Виберемо із системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$ певну сукупність вектор-стовпчиків $\{|a_j\rangle\} = |a_{j_1}\rangle, |a_{j_2}\rangle, ..., |a_{j_k}\rangle,\ k < s$. Згідно з традицією, яка існує серед фізиків, назвемо цю сукупність підсистемою системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$.

1.25. Властивість. Якщо деякі зі стовпчиків системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$ утворюють лінійно залежну підсистему $\{|a_j\rangle\}$, то і вся система є лінійно залежною.

За означенням ***1.21*** існує нетривіальна лінійна комбінація $|a\rangle$ векторів, приналежних до підсистеми $\{|a_j\rangle\}$, що дорівнює нульовому стовпчику. Якщо домножити ті стовпчики системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$, які не входять до підсистеми $\{|a_j\rangle\}$, на нульові коефіцієнти й додати їх до лінійної комбінації $|a\rangle$, то отримаємо таку нетривіальну лінійну комбінацію всіх стовпчиків системи, яка дорівнює нульовому стовпчику. За означенням ***1.21*** система $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$ лінійно залежна.

1.26. Властивість. Будь-які стовпчики, що входять до лінійно незалежної системи стовпчиків, утворюють лінійно незалежну підсистему даної системи.

Доводимо від оберненого. Нехай існує лінійно залежна підсистема лінійно незалежної системи стовпчиків. За властивістю ***1.25*** ця лінійно незалежна система має бути лінійно залежною. Отже, зроблене припущення веде до протиріччя.

1.27. Властивість. Якщо стовпчик $|a\rangle$ є лінійною комбінацією підсистеми стовпчиків $\{|a_j\rangle\}$ деякої системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$, то $|a\rangle$ є лінійною комбінацією всієї системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$.

Для доведення цієї властивості треба домножити ті стовпчики $|a_j\rangle$ системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$, яких немає в $|a\rangle$, на нульові коефіцієнти й додати добутки $0\,|a_j\rangle$ до лінійної комбінації $|a\rangle$. Отримаємо лінійну комбінацію системи $|a_1\rangle, |a_2\rangle, ..., |a_s\rangle$, яка буде нетривіальною, унаслідок нетривіальності лінійної комбінації $|a\rangle$.

1.28. Властивість. Будь-який стовпчик $|a\rangle$ висотою n є лінійною комбінацією стовпчиків

$$|e_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., |e_{n-1}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_n\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Із правил додавання матриць і множення матриці на число випливає, що лінійна комбінація стовпчиків $|e_1\rangle, |e_2\rangle, ..., |e_n\rangle$ з коефіцієнтами, які збігаються з відповідними елементами заданої матриці, дорівнює заданій матриці $|a\rangle$. Справді,

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ ... \\ a^n \end{pmatrix} = a^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + a^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ ... \\ a^n \end{pmatrix} = |a\rangle,$$

що й доводить вказану властивість.

Розділ 2

Детермінант (визначник) квадратної матриці

1. Означення визначника квадратної матриці та доповняльного мінора елемента a_{1k} матриці
2. Властивості визначників

   2.1 Розклад детермінанта за елементами першого стовпчика

   2.2 $\det A_n = \det A_n^T$

   2.3 Антисиметрія визначника (детермінанта) відносно перестановок рядків (стовпчиків)

   2.4 Формули розкладу визначника за довільним стовпчиком або рядком

   2.5 Лінійність детермінанта за його стовпчиками (рядками)

   2.6 Визначник матриці, в якій рядки (стовпчики) є лінійно залежними

   2.7 Формула повного розкладу визначника
3. Методи обчислення визначників

   3.1 Елементарними перетвореннями матриці

   3.2 Наслідок з властивостей визначників матриць

   3.3 Метод приведення визначника матриці до трикутного вигляду

   3.4 Метод рекурентних співвідношень

   3.5 Визначник Вандермонда
4. Нечасто вживані методи обчислення визначників

   4.1 Метод представлення визначника у вигляді суми визначників

   4.2 Метод заміни елементів визначника

2.1 Означення визначника квадратної матриці та доповняльного мінора елемента a_{1k} матриці

Для розв'язання багатьох задач математики та фізики використовують поняття *детермінант* (або *визначник*) **квадратної матриці. Важливо пам'ятати, що поняття ДЕТЕРМІНАНТ коректне тільки по відношенню до квадратних матриць! Говорити про детермінант неквадратної матриці беззмістовно!**

Детермінант квадратної матриці A позначається або стисло, як $\det A$, або у розгорнутому вигляді – прямими рисками по боках цієї матриці, тобто

$$\det A_n \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.31. Означення. Детермінант квадратної матриці – це число або математичний вираз, які ставляться у відповідність цій матриці й можуть бути знайдені за такими правилами:

1. детермінант матриці порядку 1 (яка складається лише з одного елемента a_{11}) дорівнює елементу цієї матриці, тобто $\det A \equiv |a_{11}| = a_{11}$;

2. детермінант матриці порядку $n > 1$ визначається через елементи матриці таким чином:
$$\det\ A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1, \tag{2.1}$$

де M_k^1 – детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується шляхом видалення (викреслення) з матриці A_n її першого рядка та k-го стовпчика.

$$M_k^1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Детермінант M_k^1 називають *доповняльним мінором* елемента a_{1k} вихідної квадратної матриці A_n.

Аналогічно можна визначити доповняльний мінор M_k^i довільного елемента a_{ik} матриці A_n як детермінант матриці порядку $(n-1)$, яка отримана з вихідної матриці A_n шляхом викреслення того рядка й того стовпчика, у яких розташовано елемент

a_{ik}, тобто i-го рядка та k-го стовпчика.

$$M_k^i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.32. Приклад. Користуючись означенням ***1.31*** знайдемо визначники матриць Паулі:

$$\begin{aligned} \det \sigma_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1; \\ \det \sigma_y &= \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-i) \cdot i = -1; \\ \det \sigma_z &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1; \end{aligned}$$

1.33. Зауваження. Формулу (2.1), за допомогою якої було означено поняття детермінанта, називають розкладом детермінанта за елементами першого рядка.

2.2 Властивості визначників

Дане означення визначника дозволяє розраховувати визначник тільки за елементами його першого рядка. Використовуючи це означення визначника матриці, сформулюємо та доведемо важливі властивості визначника матриці, які суттєво спрощують його обчислення.

2.2.1 Розклад детермінанта за елементами першого стовпчика

1.34. Властивість. Для визначника кожної квадратної матриці A порядку n справедлива рівність

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k, \tag{2.2}$$

Тут M_1^k – детермінант матриці порядку $n-1$, яка отримується шляхом видалення (викреслення) з матриці A_n її першого стовпчика та k-го рядка.

Ця формула називається розкладом детермінанта за елементами першого стовпчика.

Для доведення скористаємося методом математичної індукції.

- Крок 1: доведемо справедливість сформульованого твердження для випадку $n = 2$.

  Розглянемо визначник матриці другого порядку:

$$\det A_2 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k = (-1)^2 a_{11} M_1^1 + (-1)^3 a_{21} M_1^2 =$$
$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

- Крок 2:
  Постулюємо справедливість рівності

$$\det A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k,$$

де A – матриця порядку $n-1$, а M_1^k – детермінант матриці порядку $n-2$, яка отримується шляхом видалення (викреслення) з матриці A_{n-1} її першого стовпчика та k-го рядка. Використовуючи цей постулат, отримаємо з нього співвідношення (2.2).

- Крок 3
  Скористаємося означенням (2.1) детермінанта матриці порядку n, відокремивши в сумі перший доданок:

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1 = a_{11} M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1$$

При будь-якому $k \geq 2$ визначник M_k^1 матриці, яка отримується з матриці A_n викреслюванням першого рядка і k-го стовпчика, містить увесь перший стовпчик матриці A_n, за винятком елемента a_{11}

$$M_k^1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Використовуючи постулат про справедливість формули розкладу визначника за елементами його першого стовпчика для визначників квадратних матриць порядку $(n-1)$, розкладемо M_k^1 $k \geq 2$ за елементами його першого стовпчика, врахувавши, що i-й рядок матриці A_n входить до мінора M_k^1, під номером $i-1$, оскільки до цього мінора не увійшов перший рядок цієї матриці. Тому при $k \geq 2$ отримуємо

$$M_k^1 = \sum_{i=2}^{n}(-1)^i a_{i1} M_{k1}^{1i}$$

де M_{k1}^{1i} – детермінант матриці порядку $n-2$, яка отримується з матриці порядку $(n-1)$, що відповідає мінору M_k^1, шляхом викреслення його i-го рядка та 1-го стовпчика, або, що те саме, шляхом викреслення з матриці A_n 1-го та i-го рядків разом з 1-м і k-м стовпчиками.

$$M_{k1}^{1i} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Враховуючи це співвідношення, записуємо вираз для шуканого визначника матриці порядку n

$$\det A_n = a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}\left\{(-1)^{k+1}a_{1k}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}M_{k1}^{1i}\right\} =$$

$$= a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}\left\{\sum_{i=2}^{n}(-1)^{k+i+1}a_{1k}a_{i1}M_{k1}^{1i}\right\} = a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}\left\{\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+i+1}a_{1k}a_{i1}M_{k1}^{1i}\right\},$$

де було внесено незалежний від k множник під знак суми по індексу i, а потім було змінено порядок підсумовування.

Винесемо тепер в отриманому співвідношенні за знак суми по індексу k незалежні від цього індексу елементи:

$$\det\, A = a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{k1}^{1i}.$$

В останній формулі врахуємо тепер, що порядок викреслювання рядків і стовпчиків не відіграє ролі, тобто

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{k1}^{1i} = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{1k}^{i1}$$

і справедлива рівність

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{k1}^{1i} = M_1^i,$$

оскільки матриця A_{n-1}, детермінантом якої є M_1^i, відрізняється від матриці A, тим що в A_{n-1} пропущено перший стовпчик матриці A і всі номери стовпчиків зменшені на одиницю. Таким чином,

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i,$$

що й треба було довести.

2.2.2 $\det\, A = \det A^T$.

1.35. Властивість. Для будь-якої квадратної матриці $\det\, A = \det A^T$.

Для доведення знову скористаємось методом математичної індукції. Для матриць другого порядку маємо:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det A_2^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A_2.$$

Вважаємо, що справджується рівність $\det A_{n-1} = \det A_{n-1}^T$. Тоді, виходячи з означення ***1.31*** визначника матриці A_n і властивості ***1.34***, запишемо визначник транспонованої матриці

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_k^1\,, \quad \det A_n^T = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\tilde{a}_{k1}\tilde{M}_1^k,$$

де $\tilde{a}_{k1}$ – елементи першого стовпчика транспонованої матриці, тобто $\tilde{a}_{k1} = a_{1k}$, а $\tilde{M}_i^k$ – доповняльні мінори цих елементів. Враховуючи, що $M_k^1 = \tilde{M}_1^k$, доходимо висновку, що $\det A_n = \det A_n^T$.

1.36. Наслідок. Із властивості ***1.35.*** випливає рівноправність рядків і стовпчиків: якщо справедливе будь-яке твердження про детермінанти, яке стосується рядків відповідної матриці, то справедливе й аналогічне твердження, яке стосується стовпчиків. Отже, такі властивості достатньо довести лише для рядків.

2.2.3 Антисиметрія визначника відносно перестановки місцями рядків (стовпчиків)

1.37. Властивість. Якщо у квадратній матриці поміняти місцями будь-які два рядки (стовпчики), то детермінант матриці змінить знак, не змінившись за абсолютною величиною.

Використовуємо для доведення метод математичної індукції. Для $n = 2$ маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).$$

Припустимо тепер, що твердження справедливе для матриць порядку $n-1$. Якщо матриця B_{n-1} отримана з матриці A_{n-1} шляхом перестановки місцями довільних i-го і j-го рядків матриці A_{n-1}, то визначники матриць A_{n-1} і B_{n-1} однакові по модулю і відрізняються за знаком: $\det A_{n-1} = (-1)\det B_{n-1}$, або те ж саме в розгорнутій формі

$$\begin{vmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(j-1)}| \\ \langle a^j| \\ \langle a^{(j+1)}| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(n-1)}| \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(j)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(j-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(j+1)}| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(n-1)}| \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

Використовуючи це твердження, покажемо що з нього слідує аналогічна властивість для матриць порядку n.

Розглянемо спочатку випадок, коли матриця B_n отримується з матриці A_n шляхом перестановки місцями довільних сусідніх рядків матриці A_n (нехай ми переставлляємо місцями $(i-1)$-й та i-й рядки). Тобто якщо

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-2)1} & a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)k} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-2)1} & a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)k} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишемо розклад визначника матриці A_n за першим стовпчиком, використовуючи властивість 1.34 і формулу (2.2), відокремивши в сумі два доданки, які відповідають переставленим рядкам:

$$\det A_n = (-1)^{(i-1)+1} a_{(i-1)1} M_1^{(i-1)} + (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i + \sum_{\substack{k \neq (i-1), i \\ k=1}}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k.$$

Аналогічно для матриці B_n, яка отримується з матриці A_n шляхом переставлення в останній $(i-1)$-го та i-го рядків, справджується рівність

$$\det B_n = (-1)^{(i-1)+1} a_{i1} N_1^{(i-1)} + (-1)^{i+1} a_{(i-1)1} N_1^i + \sum_{\substack{k \neq (i-1), i \\ k=1}}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} N_1^k,$$

де N_i^k – доповняльні мінори елементів матриці B_n. Порівняємо записані вирази для визначників матриць A_n та B_n:

1. Якщо $k \neq (i-1)$ або i, то тоді до визначників

$$M_1^k = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)k} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

та

$$N_1^k = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)k} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

гарантовано входять рядки $(i-1)$ та i, але в різному порядку, а всі інші рядки цих визначників однакові. Отже, згідно з припущенням індукції $N_1^k = -M_1^k$, коли $k \neq (i-1),\ i$. Звідси робимо висновок, що

$$\sum_{\substack{k \neq (i-1), i \\ k=1}}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} N_1^k = -\sum_{\substack{k \neq (i-1), i \\ k=1}}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k.$$

2. Матриці, детермінанти яких позначено $M_1^{(i-1)}$ та N_1^i – однакові, оскільки вони отримані викресленням i-го рядка і першого стовпчика з матриці B або, що те саме, $(i-1)$-го рядка та першого стовпчика матриці A:

$$\begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)k} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тому й самі детермінанти однакові, тобто $M_1^{(i-1)} = N_1^i$, тому $(-1)^{(i-1)+1} a_{(i-1)1} M_1^{(i-1)}$ і $(-1)^{i+1} a_{(i-1)1} N_1^i$, очевидно, мають протилежні знаки

3. Аналогічно

$$M_1^i = N_1^{(i-1)} = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)k} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а отже очевидно протилежними за знаком будуть і $(-1)^{(i-1)+1} a_{i1} N_1^{(i-1)}$ і $(-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i$.

Таким чином, порівняння визначників $\det A_n$ і $\det B_n$ показує, що вони рівні за абсолютною величиною й відрізняються за знаком.

Нехай тепер у матриці A порядку n переставлено рядки з номером i та j, причому $i < j$. Перестановлення i-го та j-го рядків можна провести, переставляючи лише сусідні рядки: спочатку j-й рядок послідовно переставляємо з усіма рядками, які стоять між ним та i-м рядком (зробивши $j-i-1$ переставлень), потім i-й рядок переставляємо на j-те місце, міняючи місцем з $j-i$ рядками, розташованими нижче від нього. Усього буде зроблено непарну $2(j-i)-1$ кількість переставлень сусідніх рядків. Оскільки при кожному переставленні з перестановок детермінант змінює знак, то в результаті знак детермінанта зміниться.

1.38. Зауваження. Властивість ***1.37*** називають *антисиметрією* детермінанта відносно перестановок рядків (стовпчиків). Використовучи властивість антисиметрії детермінанта можна довести ще низку його властивостей.

2.2.4 Формули розкладу визначника за довільним стовпчиком або рядком

1.39. Властивість. Для кожної квадратної матриці A порядку n виконуються співвідношення:

- формула розкладу визначника за довільним рядком

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_k^i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{2.4}$$

  де M_k^i визначник матриці порядку $(n-1)$, яка отримується з даної квадратної матриці порядку n шляхом викреслювання i-го рядка та k-го стовпчика.

- формула розкладу визначника за довільним стовпчиком

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_j^k, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.5}$$

  де M_j^k - визначник матриці порядку $(n-1)$, яка отримується з даної квадратної матриці порядку n шляхом викреслювання k-го рядка та j-го стовпчика.

Очевидно, що коли $i = 1$, то співвідношення (2.4) є означенням детермінанта. Доведемо співвідношення (2.4) для значень $i \geq 2$. Із цією метою представимо квадратну матрицю порядку n у вигляді матриці-стовпчика висоти n, елементами якої є матриці-рядки довжини n:

$$A = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^n| \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Побудуємо матрицю B з матриці A шляхом перестановки i-го рядка на місце першого, тобто переставимо i-й рядок на перше місце так, щоб не порушувати порядок інших рядків, а саме, переставляючи i-й рядок послідовно з усіма рядками, розташованими вище нього.

$$B = \begin{pmatrix} \langle a^i| \\ \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^n| \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Вище i-го рядка розташовано $(i-1)$ рядків. Тому, якщо B – матриця, отримана з матриці A шляхом перестановки i-го рядка на місце першого, то $\det A = (-1)^{i-1} \det B$. В цьому співвідношенні розкладемо $\det B$ за першим рядком матриці B, тобто i-м рядком матриці A:

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B = (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{1k} N_k^1,$$

де N_k^1 – визначник матриці, яка отримується з матриці B викреслюванням першого рядка та k-го стовпчика або, що те саме – з матриці A викреслюванням i-го рядка і k-го стовпчика. Тому $N_k^1 = M_k^i$. Враховуючи, що $b_{1k} = a_{ik}$, отримаємо

$$\det A = (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{1k} N_k^1 = (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{ik} M_k^i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_k^i,$$

що і потрібно було довести.

Для доведення співвідношення (2.5) для значень $i \geq 2$ необхідно представити квадратну матрицю порядку n у вигляді матриці-рядка довжини n, елементами якої є матриці-стовпчики висоти n, і потім діяти аналогічно. Доведіть співвідношення (2.5) самостійно.

2.2.5 Лінійність детермінанта за його рядками (стовпчиками)

1.40. Властивість. Якщо i-й рядок матриці A є лінійною комбінацією рядків $\langle p|$ і $\langle q|$, тобто цей рядок має вигляд

$$\langle a^i| = \alpha\langle p| + \beta\langle q|,$$

де α і β – довільні числа, то справджується рівність

$$\det A = \alpha \det A_p + \beta \det A_q,$$

у якій матриці A_p та A_q отримуються з матриці A заміною її i-го рядка на рядки $\langle p|$ та $\langle q|$ відповідно.

Властивість ***1.40*** називають лінійністю детермінанта за його рядками (стовпчиками).

Для доведення даної властивості скористаємось тим, що згідно умови ми маємо

$$A = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \alpha\langle p| + \beta\langle p| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

і розкладемо визначник за i-м рядком, врахувавши що з співвідношення $\langle a^i| = \alpha\langle p| + \beta\langle q|$, слідує, що для любого елементу a^i_k i-го рядка матриці справедливо $a^i_k = \alpha p^i_k + \beta q^i_k$ тому

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a^i_k M^i_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}(\alpha p^i_k + \beta q^i_k)M^i_k =$$
$$= \alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}p^i_k M^i_k + \beta\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}q^i_k M^i_k = \alpha \det A_p + \beta \det A_q,$$

що й треба було довести.

1.41. Зауваження. Властивість лінійності детермінанта за його рядками можна сформулювати у вигляді двох окремих властивостей, а саме:

а) при множенні рядка матриці на число її детермінант множиться на це число;

б) якщо рядок матриці є сумою двох рядків, то її детермінант є сумою детермінантів відповідних матриць.

Очевідно, детермінанту притаманна властивість лінійності за його стовпчиками, яку можна також сформулювати у вигляді двох окремих властивостей, а саме:

а) при множенні стовпчика матриці на число її детермінант множиться на це число;

б) якщо стовпчик матриці є сумою двох стовпчиків, то її детермінант є сумою детермінантів відповідних матриць.

2.2.6 Визначник матриці, в якій рядки (стовпчики) є лінійно залежними

1.42. Властивість. Якщо у квадратній матриці її рядки є лінійно залежними, то її визначник дорівнює нулю.

Насамперед зауважимо, що якщо в матрицю входить нульовий рядок або нульовий стовпчик, то її визначник з очевидністю дорівнює нулю. Крім цього, із властивості антисиметрії визначника випливає, що коли матриця містить два однакових рядки або стовпчики, то її визначник також дорівнює нулю. Якщо рядки матриці лінійно залежні, то хоча б один рядок (нехай це буде i-й рядок) цієї матриці є лінійною комбінацією інших її рядків, тобто справджується така рівність:

$$\left\langle a^i\right| = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \alpha_k \left\langle a^k\right|.$$

Тоді, розкладаючи визначник матриці A за i-м рядком і використовуючи властивість ***1.39***, отримуємо:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \sum_{k=1,\,k\neq i}^{n} \alpha_k \langle a^k| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} = \sum_{k=1,\,k\neq i}^{n} \alpha_k \det \begin{pmatrix} \langle a^1 \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^k| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^1| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^2| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + ... + \alpha_{i-1} \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha_{i+1} \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ ...... \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^n| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ ..... \\ \langle a^n| \end{pmatrix} = 0 + 0 + ... + 0 + 0 + ... + 0 = 0$$

внаслідок того, що кожна з матриць A_n, визначник якої ми обчислюємо, містить два однакові рядки, тому визначники всіх цих матриць дорівнюють нулю, а тому, $\det A = 0$.

2.2.7 Формула повного розкладу визначника

Доведемо так звану формулу повного розкладу визначника

$$detA_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 \ldots i_n)} (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

де сума береться за всіма перестановками чисел 1, 2, ..., n, а $N(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ є кількістю порушень порядку в даній перестановці.

Перестановкою (the permutation) із n чисел $i_1, i_2, ...i_n$ називається будь-яка скінченна послідовність цих чисел, яка одержується в результаті довільного упорядкування цих чисел.

Число всіх перестановок із n елементів позначається P_n. Кажуть, що в перестановці число i_k порушує порядок перестановки, якщо воно знаходиться лівіше від числа або чисел, які менші за це число. Наприклад, в перстановці $\{2, 1, 5, 4, 3\}$ цифра 2 один раз порушує порядок перестановки, цифра 5 двічі порушує порядок, цифра 4 один раз порушує порядок, і, таким чином, сумарне число порушень порядку перестановки $N\{2, 1, 5, 4, 3\} = 4$.

Використаємо для доведення формули повного розкладу визначника метод математичної індукції

- Крок 1.
  Для випадку $n = 3$ маємо:

$$\det A_3 = \sum_{(i_1,i_2,i_3)} (-1)^{N(i_1,i_2,i_3)} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3} = (-1)^{N(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33} +$$
$$+(-1)^{N(2,3,1)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{N(3,1,2)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{N(1,3,2)}a_{11}a_{23}a_{32} +$$
$$+(-1)^{N(3,2,1)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{N(2,1,3)}a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

- Крок 2.
  Припустимо, що дане співвідношення є вірним для обчислення визначників матриць порядку $(n-1)$:

$$det A_{n-1} = \sum_{(i_1 \dots i_{n-1})} (-1)^{N(i_1,\dots,i_{n-1})} a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{(n-1)i_{n-1}}$$

  і використовуючи це припущення, отримаємо формулу для обчислення визначників матриць порядку n.

- Крок 3.
  Розкладаючи визначник за 1-м рядком, отримаємо

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_k^1 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k} \sum_{(i_1,\dots,i_{n-1})} (-1)^{N(i_1,\dots,i_{n-1})}a_{2i_1}\dots a_{ni_{n-1}}.$$

  Враховуючи, що M_k^1 – визначник матриці порядку $(n-1)$, отриманий з матриці A_n шляхом викреслювання першого рядка й k-го стовпчика і, що в перестановці $(k, i_1, \dots, i_{n-1})$ число k порушує порядок $(k-1)$ разів, можна стверджувати, що $(k-1) + N(i_1, \dots, i_{n-1}) = N(k, i_1, \dots, i_{n-1})$, а також те, що парність $N(i_1, \dots, i_{n-1}) + (k-1)$ збігається з парністю $N(i_1, \dots, i_{n-1}) + (k+1)$, маємо:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i_1,\dots,i_{n-1})} (-1)^{N(k,i_1,\dots,i_{n-1})}a_{1k}a_{2i_1}\dots a_{ni_{n-1}} =$$
$$= \sum_{(i_1,\dots,i_{n-1},i_n)} (-1)^{N(i_1,\dots,i_{n-1},i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}.$$

2.3 Методи обчислення детермінантів матриць

2.3.1 Елементарнмим перетвореннями матриці.

1.43. Означення. Елементарними перетвореннями матриці називаються такі перетворення:

1. Множення рядка на число, відмінне від нуля.

2. Додавання до одного рядка іншого рядка цієї самої матриці.

3. Перестановка рядків матриці.

4. Множення стовпчика на число, відмінне від нуля.

5. Додавання до одного стовпчика іншого стовпчика цієї самої матриці.

6. Перестановка стовпчиків матриці.

2.3.2 Наслідок з властивостей визначників матриць.

Із властивостей визначників випливає, що **детермінант матриці не зміниться, якщо до будь-якого рядка (стовпчика) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпчиків) цієї матриці** Дійсно, побудуємо, використовуючи матрицю

$$A_n = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \left\langle a^{(i-1)}\right| \\ \langle a^i| \\ \left\langle a^{(i+1)}\right| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix}$$

іншу матрицю B_n, додавши до i-го рядка матриці A_n лінійну комбінацію інших рядків цієї ж матриці:

$$\left\langle a^i\right| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \left\langle a^k\right|.$$

і знайдемо визначник цієї нової матриці B_n, використовуючи властивість лінійності визначника ***1.40***. Розкладемо визначник матриці B_n за i-м рядком та використаємо властивість ***1.40***. Отримаємо:

$$\det B_n = det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \langle a^k| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \left\langle a^k\right| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \sum_{k=1,\,k\neq i}^{n} \alpha_k \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^k| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \alpha_1 \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^1| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^2| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{i-1} \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} +$$

$$+ \alpha_{i+1} \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^n| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \ldots\ldots \\ \langle a^{(i-1)}| \\ \langle a^i| \\ \langle a^{(i+1)}| \\ \ldots.. \\ \langle a^n| \end{pmatrix} + 0 + \ldots + 0 = \det A_n$$

і таким чином, незважаючи на те, що $A_n \neq B_n$, визначники цих матриць одинакові $\det A_n = \det B_n$.

Ця властивість дає можливість знаходити визначник матриці довільного порядку.

2.3.3 Метод приведення визначника матриці до трикутного вигляду.

Суть методу полягає в тому, що потрібно матрицю, визначник якої необхідно обчислити, привести за допомогою додавання лінійних комбінацій рядків цієї матриці до інших рядків цієї ж матриці, до такого вигляду, коли всі елементи, що розміщені по один бік діагоналі матриці, дорівнюють нулю:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \to \quad \tilde{A}_n = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1i} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Отримана таким чином «трикутна» матриця $\tilde{A}_n$, очевидно, не дорівнює матриці A_n, визначник якої потрібно обчислити, тобто $A_n \neq \tilde{A}_n$, але внаслідок того, що матриця $\tilde{A}_n$ була отримана з матриці A_n шляхом додавання до рядків матриці A_n лінійних комбінацій інших рядків цієї ж матриці A_n, то визначники цих матриць співпадають:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det \tilde{A}_n = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1i} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}...\tilde{a}_{nn}$$

внаслідок того, що визначник будь-якої «трикутної» матриці дорівнює добутку її діагональних елементів

Для приведення матриці до «трикутного» вигляду застосовують так званий алгоритм Гауса, суть якого наступна. Якщо в першому стовпчику матриці A_n є ненульові елементи, то беремо будь-який з них, нехай це буде a_{k1}, і до всіх рядків, окрім k-го, додамо k-й рядок, помножений на $(-a_{i1}/a_{k1})$, де a_{i1} – перший елемент рядка, до якого додають k-й рядок. У такий спосіб матрицю буде приведено до вигляду, коли всі елементи крім одного в першому стовпчику дорівнюють нулю. Отже, $\det A = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A'$, де $\det A'$ – доповняльний мінор елемента a_{k1} у перетвореній матриці. Для обчислення $\det A'$ застосуємо той самий спосіб і через $(n-1)$ крок визначник буде знайдено.

1.44. Приклад. Знайдемо, використовуючи метод приведення визначника матриці до трикутного вигляду, такий визначник

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Скористаємось тим, що **детермінант матриці не зміниться, якщо до будь-якого рядка додати лінійну комбінацію інших рядків цієї матриці.**

Крок 1. Шляхом додавання до другого, третього і четвертого рядків визначника його першого рядка, помноженого на відповідне число, робимо рівними нулю всі елементи першого стовпчика, які знаходяться нижче елемента a_{11}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l}\text{до другого рядка додаємо перший} \\ \text{рядок, домножений на } (-2)\end{array}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{l}\text{до третього рядка додаємо перший} \\ \text{рядок, домножений на } (-\frac{1}{2})\end{array}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1.5 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

До четвертого рядка не має потреби в даному випадку додавати перший рядок, тому що елемент $a_{41} = 0$.

Крок 2. В отриманому визначнику шляхом додавання до третього і четвертого рядків цього визначника його другого рядка, помноженого на відповідне число, робимо рівними нулю всі елементи другого стовпчика, які знаходяться нижче елемента

a_{22}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1 & 1.5 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{до третього рядка додаємо} \\ \text{другий, домножений на } (-\frac{1}{6})\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{до четвертого рядка додаємо} \\ \text{другий, домножений на 2}\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Крок 3. В отриманому визначнику шляхом додавання до четвертого рядка цього визначника його третього рядка, помноженого на відповідне число, робимо рівними нулю всі елементи третього стовпчика, які знаходяться нижче елемента a_{33}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{до четвертого рядка додаємо} \\ \text{третій, домножений на 4}\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 23/3 \end{vmatrix}$$

Таким чином, визначник набув «трикутого» вигляду і дорівнює добутку діагональних елементів:

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 23/3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot \left(\frac{23}{3}\right) = -92.$$

1.45. Приклад. Знайдемо

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Крок 1. Віднімемо перший рядок від усіх інших:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Крок 2. Користуємось властивістю лінійності визначників: з першого стовпчика виносимо як спільний множник $(a_1 - x)$, з другого стовпчика як спільний множник виносимо $(a_2 - x)$, з третього – $(a_3 - x)$ і т. д.

$$D_n = (a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Крок 3. До першого стовпчика додаємо послідовно всі інші стовпчики

$$D_n = (a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\begin{vmatrix} \left(\frac{a_1}{a_1-x} + x\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i-x}\right) & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Крок 4. Розкриваємо визначник за першим стовпчиком і отримуємо кінцевий результат:

$$D_n = (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\cdot(-1)^{1+1}\left[\frac{a_1}{a_1 - x} + x\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i - x}\right]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\cdot\left[\frac{a_1 - x + x}{a_1 - x} + x\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i - x}\right] =$$

$$= (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\cdot\left[1 + x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i - x}\right] =$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

2.3.4 Метод рекурентних співвідношень.

Метод полягає в тому, що даний визначник D_n порядку n обчислюють, перетворюючи і розкладаючи його за рядком або стовпчиком, через визначники того самого вигляду, але більш низького порядку D_{n-1}, D_{n-2} і т.д. Отримане співвідношення називається *рекурентним.* Потім обчислюють безпосередньо по загальному вигляду визначника стільки визначників нижчих порядків, скільки їх є в правій частині рекурентного співвідношення. Визначники вищого порядку обчислюються послідовно з рекуррентного співвідношення. Якщо треба отримати вираз для визначника будь-якого порядку n, то, обчисливши з рекурентного співвідношення кілька визначників нижчих порядків, намагаються помітити загальний вигляд шуканого виразу, а потім доводять справедливість цього виразу при будь-якому n за допомогою рекурентного співвідношення і методу індукції по n.

Загальний вираз можна отримати й іншим шляхом. Для цього в рекурентне співвідношення, що виражає визначник n-го порядку, підставляють вираз для визначника $(n - 1)$-го порядку з того ж рекурентного співвідношення з заміною n на $(n - 1)$, далі підставляють аналогічний вираз визначника $(n-2)$-го порядку і т. д., поки не з'ясується вид шуканого загального виразу визначника n-го порядку.

1.46. Приклад. Знайдемо щойно порахований визначник методом рекурентних співвідношень/

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Крок 1. Запишемо останній стовпчик визначника у вигляді суми двох стовпчиків і скористаємось лінійностю визначника

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & 0+x \\ x & a_2 & \cdots & x & 0+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & 0+x \\ x & x & \cdots & x & x+(a_n-x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & \cdots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & 0 \\ x & a_2 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \cdots & x & a_n-x \end{vmatrix} =$$

Крок 2. У першому визначнику послідовно віднімемо від усіх стовпчиків визначника його останній стовпчик, а другий визначник розкриємо за елементами останнього стовпчика:

$$= \begin{vmatrix} (a_1-x) & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & (a_2-x) & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{n-1}-x) & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+n}(a_n-x) \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x & x & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

Крок 3. Перший визначник розкриваємо за останнім рядком, а в другому доданку визначник має таку ж структуру, як і стартовий визначник, але його порядок на одицю менший:

$$= (-1)^{n+n} x \begin{vmatrix} (a_1-x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2-x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{n-1}-x) \end{vmatrix} + (a_n-x)D_{n-1} =$$

$$= x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x) + (a_n-x)D_{n-1}.$$

Таким чином, ми отримали шукане рекурентне співвідношення

$$D_n = x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x) + (a_n-x)D_{n-1},$$

яке виражає визначник D_n через визначник D_{n-1}.

Крок 4. Використовуючи це рекурентне співвідношення, можна записати рекурентні співвідношення, які виражають визначник D_{n-1} через визначник D_{n-2} :

$$D_{n-1} = x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x) + (a_{n-1}-x)D_{n-2},$$

далі визначник D_{n-2} через визначник D_{n-3} :

$$D_{n-2} = x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-3} - x) + (a_{n-2} - x)D_{n-3},$$

потім визначник D_{n-3} через визначник D_{n-4} :

$$D_{n-3} = x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-4} - x) + (a_{n-3} - x)D_{n-4},$$

і так далі, аж до вираження визначника D_3 через визначник D_2 :

$$D_3 = x(a_1 - x)(a_2 - x) + (a_3 - x)D_2,$$

і визначника D_2 через визначникD_1 :

$$D_2 = x(a_1 - x) + (a_2 - x)D_1.$$

Крок 5. Записані рекурентні співвідношення послідовно підставляємо в отримане рекурентне співвідношення

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + (a_n - x)D_{n-1},$$

і отримаємо:

$$\begin{gathered}
D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + (a_n - x)D_{n-1} = \\
= x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + \\
+ (a_n - x)\left[x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-2} - x) + (a_{n-1} - x)D_{n-2}\right] = \\
= x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + \\
+ (a_n - x)x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-2} - x) + (a_n - x)(a_{n-1} - x)D_{n-2} = \\
= x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\
+ (a_n - x)(a_{n-1} - x)\left[x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-3} - x) + (a_{n-2} - x)D_{n-3}\right] = \\
= x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + \\
+ x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\
+ x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-3} - x)(a_{n-1} - x)(a_n - x) + (a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)(a_n - x)D_{n-3} = \\
= \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad = \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad = \\
= x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-1} - x) + \\
+ x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\
+ x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-3} - x)(a_{n-1} - x)(a_n - x) + \\
+ x(a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{n-4} - x)(a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)(a_n - x) + \cdots + \\
+ x(a_1 - x)(a_3 - x) \cdots (a_n - x) + \\
+ x(a_2 - x)(a_3 - x) \cdots (a_n - x) + \\
+ (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x) = \\
= x(a_1 - x)(a_2 - x) \ldots (a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x}\right).
\end{gathered}$$

Отримана відповідь така ж сама, як і відповідь, отримана методом приведення визначника до трикутної форми.

Розглянемо тепер випадок, коли рекурентне співвідношення має вигляд

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2, \quad p,\ q \text{ — незалежні від } n \text{ величини.}$$

Якщо $q = 0$, то $D_n = pD_{n-1} = p^2 D_{n-2} = \ldots = p^{n-1} D_1$, де D_1 — визначник 1-го порядку даного вигляду. Нехай $q \neq 0$, α і β — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, тоді $p = \alpha + \beta, q = -\alpha\beta$, і рекурентне співвідношення набуває вигляду:

$$D_n = (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

Враховуючи це рекурентне співвідношення, знайдемо різницю $D_n - \beta D_{n-1}$:

$$D_n - \beta D_{n-1} = (\alpha + \beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}).$$

Аналогічно

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}).$$

Таким чином,

$$\begin{cases} D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \\ D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), \end{cases}$$

звідки можна отримати

$$\begin{cases} D_{n-1} - \beta D_{n-2} = \alpha (D_{n-2} - \beta D_{n-3}), \\ D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \beta (D_{n-2} - \alpha D_{n-3}), \end{cases}$$

тому

$$\begin{cases} D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^2 (D_{n-2} - \beta D_{n-3}), \\ D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^2 (D_{n-2} - \alpha D_{n-3}). \end{cases}$$

Далі, понижуючи порядок визначників в правій частині рекурентного співвідношення отримаємо остаточно

$$\begin{cases} D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{(n-2)} (D_2 - \beta D_1), \\ D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{(n-2)} (D_2 - \alpha D_1). \end{cases}$$

Розглянемо два випадки.
Випадок 1. $\alpha \neq \beta$**:** тоді маємо в отриманому співвідношенні

$$\begin{cases} D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{(n-2)} (D_2 - \beta D_1), \\ D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{(n-2)} (D_2 - \alpha D_1), \end{cases}$$

і віднімаючи від першого рівняння, помноженого на α, друге рівняння, помножене на β, отримуємо:

$$(\alpha - \beta) D_n = \alpha^{n-1} (D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1} (D_2 - \alpha D_1),$$

звідки

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta}.$$

Випадок 2. $\alpha = \beta$. У цьому випадку маємо:

$$\begin{array}{l} D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \to D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1), \\ D_{n-1} = \alpha D_{n-2} - \alpha^{n-3}(D_2 - \alpha D_1) \to D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2\alpha^{n-1}(D_2 - \alpha D_1), \end{array}$$

і т. д. Аналогічно до попереднього випадку отримаємо

$$D_n = \alpha^{n-1} D_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

1.47. Приклад.

$$D_n = \begin{vmatrix} p & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & p & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & p & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & p \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами 1-го стовпчика:

$$D_n = (-1)^{(1+1)} p \begin{vmatrix} p & c & \cdots & 0 & 0 \\ c & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & p & c \\ 0 & 0 & \cdots & c & p \end{vmatrix} + (-1)^{(2+1)} c \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & p & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & p \end{vmatrix} =$$

Наступний крок — перший визначник, очевидно D_{n-1}, а другий визначник розкладемо за першим рядком:

$$= pD_{n-1} + (-1)^{(2+1)} c (-1)^{(1+1)} c \begin{vmatrix} p & c & \cdots & 0 & 0 \\ c & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & p & c \\ 0 & 0 & \cdots & c & p \end{vmatrix} = pD_{n-1} - c^2 D_{n-2}.$$

Таким чином ми отримали рекурентне співвідношення $D_n = pD_{n-1} - c^2 D_{n-2}$, отже, на основі отриманих раніше співвідношень обчислення даного визначника зводиться до пошуку коренів рівняння $x^2 - px - c^2 = 0$.

2.3.5 Визначник Вандермонда

Часто при обчисленні визначників зручно комбінувати обидва вказані вище методи. Як приклад, розглянемо обчислення визначника Вандермонда.

1.48. Приклад.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_{n-1})^2 & (x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_1)^{n-3} & (x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1})^{n-3} & (x_n)^{n-3} \\ (x_1)^{n-2} & (x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1})^{n-2} & (x_n)^{n-2} \\ (x_1)^{n-1} & (x_2)^{n-1} & \cdots & (x_{n-1})^{n-1} & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

Крок 1. Віднімемо від останнього рядка передостанній рядок, помножений на x_1 й отримаємо:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_{n-1})^2 & (x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_1)^{n-3} & (x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1})^{n-3} & (x_n)^{n-3} \\ (x_1)^{n-2} & (x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1})^{n-2} & (x_n)^{n-2} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-2} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

Крок 2. Віднімемо від передостаннього рядка третій знизу рядок, домножений на x_1, і отримаємо

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_{n-1})^2 & (x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_1)^{n-3} & (x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1})^{n-3} & (x_n)^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-3} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-2} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

Крок 3. Віднімемо від третього знизу рядка четвертий знизу рядок, домножений на x_1, і отримаємо

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_{n-1})^2 & (x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-4} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-4} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-4} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-3} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-2} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

і так далі — від стрічки під номером i віднімаємо стрічку під номером $(i-1)$, домножену на x_1.

Крок $(n-2)$. Віднімемо від третього рядка четвертий, домножений на x_1, і отримаємо

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2) & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}) & (x_n-x_1)(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-4} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-4} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-4} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-3} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-2} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

Крок $(n-1)$. Віднімемо від другого рядка перший, домножений на x_1, і отримаємо

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & (x_2-x_1) & \cdots & (x_{n-1}-x_1) & (x_n-x_1) \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2) & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}) & (x_n-x_1)(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-4} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-4} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-4} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-3} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-2} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

Крок n. Розкриваємо отриманий визначник за 1-им стовпчиком:

$$D_n = (-1)^{(1+1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2-x_1 & \cdots & x_{n-1}-x_1 & x_n-x_1 \\ (x_2-x_1)x_2 & \cdots & (x_{n-1}-x_1)x_{n-1} & (x_n-x_1)x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_2-x_1)(x_2)^{n-3} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-3} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-3} \\ (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & \cdots & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1})^{n-2} & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(1+1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ (x_2-x_1)x_2 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_n-x_1)x_n \\ (x_2-x_1)(x_2)^2 & (x_3-x_1)(x_3)^2 & \cdots & (x_n-x_1)(x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2-x_1)(x_2)^{n-3} & (x_3-x_1)(x_3)^{n-3} & \cdots & (x_n-x_1)(x_n)^{n-3} \\ (x_2-x_1)(x_2)^{n-2} & (x_3-x_1)(x_3)^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)(x_n)^{n-2} \end{vmatrix}$$

Крок $(n+1)$. З першого стовпчика визначника виносимо спільний множник (x_2-x_1), з другого стовпчика визначника виносимо спільний множник (x_3-x_1) і т.д.. . . , з останнього стовпчика визначника виносимо спільний множник (x_n-x_1) і отримуємо:

$$D_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ (x_2)^2 & (x_3)^2 & \cdots & (x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2)^{n-3} & (x_3)^{n-3} & \cdots & (x_n)^{n-3} \\ (x_2)^{n-2} & (x_3)^{n-2} & \cdots & (x_n)^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)D_{n-1}.$$

Отже, ми отримали рекурентне співвідношення

$$D_n = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)D_{n-1}$$

Крок (n+2). Розкриваючи визначник D_{n-1} аналогічно, знаходимо:

$$D_{n-1} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots(x_n - x_2)D_{n-2},$$

тому

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots(x_n - x_2)D_{n-2} = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots(x_n - x_2)\times \\ &\qquad \times(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)\dots(x_n - x_3)D_{n-3} = \dots = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots(x_n - x_2)\times \\ &\times(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)\dots(x_n - x_3)\cdot\dots\cdot(x_n - x_{(n-2)})(x_n - x_{(n-1)})D_1 = \prod_{i<j}^{n}(x_j - x_i). \end{aligned}$$

2.4 Рідко вживані (нестандартні) методи обчислення визначників

Для обчислення визначників матриць специфічного вигляду можливо застосовувати і деякі нестандартні методи обчислення.

2.4.1 Метод представлення визначника у вигляді суми визначників

Деякі визначники легко обчислюються шляхом розкладу їх в суму визначників того самого порядку відносно рядків (або стовпчиків).

1.49. Приклад.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Розкладемо відносно першого рядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Кожний з визначників розкладаємо відносно другого рядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = 0+0+0+0,$$

оскільки в першому визначнику є два пропорційні рядки ($a_2 = \lambda a_n$), тому він дорівнює 0, четвертий визначник дорівнює 0 (очевидно), а другий і третій визначники зводяться до визначників типу 1 (з пропорційними рядками) або типу 4. Отже, якщо $n > 2$, то $D_n = 0$. Для випадків $n = 1$ і $n = 2$ маємо

$$D_1 = a_1 + b_1$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$$

2.4.2 Метод заміни елементів визначника

.

Нехай

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Знайдемо

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}+x & a_{n+2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}+x & a_{n+2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що складові, які утримують більше одного рядка елементів, рівних x, дорівнюють нулю. Складові, які утримують один рядок елементів, рівних x, розкладем за цим рядком:

$$D' = D + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів визначника.

$$D = D' - x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}.$$

Розділ 3

Ранг матриці

1. Мінор, доповняльний мінор. Базисний мінор. Ранг матриці
2. Елементарні перетворення матриці і ранг матриці
3. Метод Гауса обчислення рангу матриці
4. Теореми про ранг матриці

3.1 Мінор, доповняльний мінор. Базисний мінор. Ранг матриці

Нагадаємо, що доповняльний мінор M_k^i довільного елемента a_{ik} квадратної матриці A_n визначається як детермінант матриці порядку $(n-1)$, яка отримана з вихідної матриці A_n шляхом викреслення того рядка й того стовпчика, у яких розташовано елемент a_{ik}, тобто i-го рядка та k-го стовпчика.

$$M_k^i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-2)1} & a_{(i-2)2} & \cdots & a_{(i-2)(k-1)} & a_{(i-2)(k+1)} & \cdots & a_{(i-2)n} \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Підкреслимо, що поняття доповняльний мінор є коректним тільки для елементів квадратних матриць!

Введемо поняття мінора матриці, яке є застосовним для будь-яких матриць (не тільки квадратних). Виберемо в необов'язково квадратній матриці розмірів $m \times n$ довільним чином s номерів рядків i_1, i_2, ..., i_s і s номерів стовпчиків j_1, j_2, ..., j_s, причому вважатимемо, що ці номери розташовані в порядку зростання $i_i < i_2 < \ldots < i_s$, $j_i < j_2 < \ldots < j_s$,

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_s}^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_s}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_s}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_s}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_s} & a_2^{i_s} & \cdots & a_{j_1}^{i_s} & \cdots & a_{j_2}^{i_s} & \cdots & a_{j_s}^{i_s} & \cdots & a_n^{i_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_s}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

1.50. Означення. Мінором порядку s матриці $A_{m\times n}$ називається детермінант матриці порядку s, утвореної елементами, розташованими на перетині вибраних рядків і стовпчиків, тобто

$$L_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_s} = \begin{vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \ldots & a_{j_s}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \ldots & a_{j_s}^{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_1}^{i_s} & a_{j_2}^{i_s} & \ldots & a_{j_s}^{i_s} \end{vmatrix}.$$

1.51. Зауваження. Якщо матриця квадратна, то кожному мінору $L_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_s}$ можна зіставити доповняльний мінор $M_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_s}$ – визначник матриці порядку $n-s$, який отримується з A викреслюванням рядків з номерами $i_1, \ldots, i_s$ і стовпчиків $j_1, \ldots, j_s$, тобто тих, у яких розташований мінор $L_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_s}$.

1.52. Приклад. Для матриці

$$A_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

побудуємо мінор L_{34}^{25} і доповняльний до нього мінор M_{34}^{25}

$$L_{34}^{25} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix},$$

$$M_{34}^{25} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Узагальненням формули розкладу визначника за рядком є формула Лапласа, яка для матриці порядку n має вигляд:

$$\det A = \sum_{(i_1,\dots,i_s)} (-1)^{i_1+j_1+\dots+i_s+j_s} M_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_s} L_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_s},$$

де сума береться за всіма можливими перестановками $i_1, \dots, i_s$ такою, що $i_1 < i_2 < \dots < i_s$.
Алгебраїчне доповнення мінора $L_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_s}$ визначається так:

$$A_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_s} = (-1)^{i_1+j_1+\dots+i_s+j_s} M_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_s}.$$

1.53. Означення. У матриці A розміром $m \times n$ мінор порядку r називається базисним, якщо він не дорівнює нулю, а всі мінори порядку $(r+1)$ дорівнюють нулю або мінорів порядку $(r+1)$ узагалі немає, тобто r збігається з найменшим з чисел m і n.

$$L_{j_1\dots j_r}^{i_1\dots i_r} = \begin{vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_r}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_r}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j_1}^{i_r} & a_{j_2}^{i_r} & \dots & a_{j_r}^{i_r} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad L_{j_1\dots j_r, j_{r+1}}^{i_1\dots i_r, i_{r+1}} = \begin{vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_r}^{i_1} & a_{j_{r+1}}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_r}^{i_2} & a_{j_{r+1}}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j_1}^{i_r} & a_{j_2}^{i_r} & \dots & a_{j_r}^{i_r} & a_{j_{r+1}}^{i_r} \\ a_{j_1}^{i_{r+1}} & a_{j_2}^{i_{r+1}} & \dots & a_{j_r}^{i_{r+1}} & a_{j_{r+1}}^{i_{r+1}} \end{vmatrix} = 0.$$

У матриці можуть бути кілька базисних мінорів, але всі вони мають один і той самий порядок. Стовпчики і рядки, на перетині яких розташований базисний мінор, називаються *базисними стовпчиками і рядками.*
1.54. Означення. *Рангом* матриці називається порядок базисного мінора, або найбільший порядок, для якого існують відмінні від нуля мінори. Якщо кожний елемент матриці дорівнює нулю, то ранг такої матриці дорівнює нулю.
1.55. Зауваження. Ранг матриці A позначають $\operatorname{Rg} A$. Ранг матриці – це число. Найпростіше знаходити ранг матриці та її базисний мінор за допомогою елементарних перетворень матриці.

3.2 Елементарні перетворення матриці і ранг матриці

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі перетворення:

1. Множення рядка на число, відмінне від нуля.
2. Додавання до одного рядка іншого рядка цієї самої матриці.
3. Перестановка рядків матриці.
4. Множення стовпчика на число, відмінне від нуля.
5. Додавання до одного стовпчика іншого стовпчика цієї самої матриці.
6. Перестановка стовпчиків матриці.

1.56. Припущення. Елементарні перетворення матриці не змінюють рангу цієї матриці. Справді, розглянемо матрицю $A_{m\times n}$ і довільний її базисний мінор $L^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_r}$ порядку r:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_{j_1} & \cdots & a^1_{j_2} & \cdots & a^1_{j_s} & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_{j_1} & \cdots & a^2_{j_2} & \cdots & a^2_{j_s} & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a^{i_1}_1 & a^{i_1}_2 & \cdots & a^{i_1}_{j_1} & \cdots & a^{i_1}_{j_2} & \cdots & a^{i_1}_{j_s} & \cdots & a^{i_1}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a^{i_2}_1 & a^{i_2}_2 & \cdots & a^{i_2}_{j_1} & \cdots & a^{i_2}_{j_2} & \cdots & a^{i_2}_{j_s} & \cdots & a^{i_2}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a^{i_s}_1 & a^{i_s}_2 & \cdots & a^{i_s}_{j_1} & \cdots & a^{i_s}_{j_2} & \cdots & a^{i_s}_{j_s} & \cdots & a^{i_s}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_{j_1} & \cdots & a^m_{j_2} & \cdots & a^m_{j_s} & \cdots & a^m_n \end{pmatrix},\ L^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_r}=\begin{vmatrix} a^{i_1}_{j_1} & a^{i_1}_{j_2} & \dots & a^{i_1}_{j_r} \\ a^{i_2}_{j_1} & a^{i_2}_{j_2} & \dots & a^{i_2}_{j_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{i_s}_{j_1} & a^{i_s}_{j_2} & \dots & a^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix}.$$

а) При множенні будь-якого рядка матриці $A_{m\times n}$ на число $\lambda\neq 0$ базисний мінор або не зміниться (у випадку, якщо рядок, який домножають на число λ не є базисним) або помножиться на λ (у випадку, якщо рядок, який домножають на число λ є базисним). Жодний мінор, що дорівнює нулю, не стане відмінним від нуля.

б) Якщо всі мінори порядку $(r+1)$ дорівнюють нулю, то додавання будь-яких рядків матриці до рядків цих мінорів порядку $(r+1)$ не зробить жодний з них відмінним від нуля внаслідок властивості лінійності визначників: дійсно, якщо додавати будь-який рядок матриці до рядків мінорів $(r+1)$, то ми отримаємо суму мінорів порядку $(r+1)$, кожен з яких дорівнює нулю. Аналогічно, додавання рядків матриці до рядків базисного мінору не змінить значення цього мінору внаслідок властивостей визначника матриць.

в) При перестановці рядків мінор може змінити знак або може змінитись на мінор, який дорівнює по модулю і відрізняється за знаком від іншого мінора тієї самої матриці, або взагалі не зміниться.

3.3 Метод Гауса обчислення рангу матриці

На практиці ранг матриці знаходять методом приведення матриці до спрощеного вигляду (метод Гауса). Нехай дано матрицю A розміром $m \times n$. Нехай j_1 – номер першого стовпчика, який утримує ненульові елементи. Якщо такого стовпчика немає, тоді базисного мінора немає, а отже $\mathrm{Rg}\, A = 0$. Нехай $a_{i_1 j_1}$– ненульовий елемент j_1-го стовпчика. Переставимо i_1-й рядок на місце першого рядка, потім розділимо його на $a_{i_1 j_1}$, і після цього за допомогою елементарних перетворень всі відмінні від нуля елементи j_1-го стовпчика зробимо рівними нулю (для цього будемо до рядків починаючи з (i_1+1)-го рядка і аж до m-го рядка додавати перший рядок, домножений на відповідним чином підібране число, таке, щоб відповідний елемент j_1-го стовпчика став рівним нулю

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & j_1 \end{array} \\ i_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots 0 & 0 & \\ 0 & \dots 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots 0 & a^{i_1}_{j_1} & \\ \dots & \dots 0 & a^{i_1+1}_{j_1} & V_{m\times(n-j_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots 0 & a^{m}_{j_1} & \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & j_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots 0 & a^{i_1}_{j_1} & a^{i_1}_{j_1+1} & \dots & a^{i_1}_{n} \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots 0 & a^{i_1+1}_{j_1} & & W_{(m-1)\times(n-j_1)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & a^{m}_{j_1} & & & \end{array}\right) \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & j_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots 0 & 1 & \frac{a^{i_1}_{j_1+1}}{a^{i_1}_{j_1}} & \dots & \frac{a^{i_1}_{n}}{a^{i_1}_{j_1}} \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots 0 & a^{i_1+1}_{j_1} & & W_{(m-1)\times(n-j_1)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & a^{m}_{j_1} & & & \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & j_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots 0 & 1 & \frac{a^{i_1}_{j_1+1}}{a^{i_1}_{j_1}} & \dots & \frac{a^{i_1}_{n}}{a^{i_1}_{j_1}} \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots 0 & 0 & & \tilde{W}_{(m-1)\times(n-j_1)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & 0 & & & \end{array}\right) \end{array}$$

тут $\tilde{W}_{(m-1)\times(n-j_1)}$ – матриця розміром $(m-1)\times(n-j_1)$.

Якщо в результаті проведених операцій виявилось, що останні $(m-1)$ рядків матриці $\tilde{A}$, отриманої шляхом елементарних перетворень рядків з матриці A, нульові, тоді перетворення завершені і $\mathrm{Rg}\, A = 1$.

У протилежному випадку, нехай j_2 – номер самого лівого стовпчика матриці $\tilde{W}_{(m-1)\times(n-j_1)}$, який утримує ненульовий елемент. Тоді до матриці $\tilde{W}_{(m-1)\times(n-j_1)}$ знову застосовуємо описаний вище алгоритм: переставимо рядки матриці $\tilde{W}_{(m-1)\times(n-j_1)}$ таким чином, щоб рядок, який утримує цей ненульовий елемент, став першим, потім розділимо цей рядок на цей елемент і елементарними перетвореннями перетворимо на нуль всі інші елементи j_2-го стовпчика. При цьому стовпчики 1, 2, ..., j_1 матриці $\tilde{A}$ не зміняться. Матриця матиме такий вигляд:

$$A_{m\times n} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots 0 & 1 & * & ****** & & 0 & **** \\ 0 & \dots 0 & 0 & 0 & & \dots 0 & 1 & **** \\ 0 & \dots 0 & 0 & 0 & & \dots 0 & 0 & V_2 \\ 0 & \dots 0 & 0 & 0 & & \dots 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Тут V_2 – матриця розміром $(m-2)\times(n-j_2)$; символом «$*$» позначено елементи, про які нічого не можна сказати. Якщо в останніх $(m-2)$ рядках є ненульові елементи, то продовжуємо ті самі перетворення до тих пір, поки останні $(m-r)$ рядків матриці $\tilde{A}$ будуть складатись з нулів або ж не будуть вичерпані всі рядки.

Таким чином, за допомогою елементарних перетворень рядків кожну матрицю розміром $m\times n$ можна привести до такого вигляду – деякі r стовпчиків збігаються з першими r стовпчиками одиничної матриці порядку m. Якщо $r<m$, то останні $(m-r)$ рядків складаються з нулів. Матриці такого виду називають *спрощеними*. Мінор спрощеної матриці, розташований у перших r рядках і стовпчиках j_1, ..., j_r дорівнює 1, ненульових мінорів більшого порядку немає, отже цей мінор є базисним, а ранг спрощеної матриці дорівнює r. Якщо ми привели матрицю A до спрощеного вигляду й отримали матрицю рангу r, то й ранг матриці A також був r. Приведену процедуру визначення рангу називають *методом Гаусса*.

Таким чином, якщо A – матриця розміром $m\times n$, то яким би не був базисний мінор цієї матриці за допомогою елементарних перетворень рядків матриці A можна перетворити базисні стовпчики на стовпчики одиничної матриці. Якщо $\operatorname{Rg} A = r < m$, то останні $(m-r)$ рядків будуть нульовими.

Приклад 1.57. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

Скористаємося тим, що елементарні перетворення не змінюють ранг матриці. Спочатку до 2-го і 3-го рядків додаємо 1 рядок, помножений відповідно на -2 і -1. Отримаємо

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 3/2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$

Аналізуємо частину отриманої матриці, яка розташована нижче 1-го рядка і правіше 1-го стовпчика. Відмінний від нуля елемент розміщений на перетині 2-го рядка й 3-го стовпчика, тому тепер до 3-го рядка додаємо 2-й рядок, домножений на -2, отримуємо

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 3/2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 3/2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0 & -17/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Оскільки в отриманій матриці нижче другого рядка і правіше третього стовпчика відмінних від нуля елементів немає, то $\operatorname{Rg} A = 2$.

На завершення розглянемо квадратну матрицю з відмінним від нуля визначником $(\Delta\neq 0)$. У неї всі стовпчики базисні, отже її спрощений вигляд – одинична матриця, тобто кожну квадратну матрицю з ненульовим визначником можна перетворити на одиничну матрицю.

3.4 Теореми про базисний мінор

• ***Мають місце такі теореми про базисний мінор***
1.58. Теорема. У довільній матриці кожний стовпчик є лінійною комбінацією базисних стовпчиків, а кожний рядок – лінійною комбінацією базисних рядків.

Для доведення достатньо згадати метод Гаусса – приведення матриці до спрощеного вигляду – до небазисних рядків додавались базисні і в результаті отримували нульовий рядок.

1.59. Наслідок. Якщо A – квадратна матриця і $\det\ A = 0$, то хоча б один із стовпчиків є лінійною комбінацією інших стовпчиків, а один із рядків – лінійною комбінацією інших рядків.

1.60. Теорема. Ранг матриці A дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних стовпчиків цієї матриці.

Якщо $\operatorname{Rg} A = 0$, то всі стовпчики є нульові і немає жодного лінійно незалежного стовпчика. Нехай $\operatorname{Rg} A = r > 0$. Покажемо, що в A існують r лінійно незалежних стовпчиків. Розглянемо складену з елементів матриці A матрицю A' порядку r, детермінантом якої є базисний мінор. Стовпчики A' представляють собою частини стовпчиків A. Якби стовпчики в A, у яких розташований базисний мінор, були лінійно залежними, то були б лінійно залежними і стовпчики A', а базисний мінор дорівнював би нулю.

Доведемо, що будь-які p стовпчиків матриці A лінійно залежні, якщо $p > r$. Складемо матрицю B із цих p стовпчиків. Очевидно, що $\operatorname{Rg} B \leq p$, тобто кожний мінор матриці B є мінором матриці A, отже, $\operatorname{Rg} B \leq r$, а $p > r$. Оскільки $\operatorname{Rg} B < p$, то хоча б один із стовпчиків матриці B не входить у базисний мінор, а отже, є залежним.

Аналогічно доводиться, що ранг матриці дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних рядків.

Очевидно, що ранг матриці не змінюється при її транспонуванні.

Розділ 4

Множення матриць

1. Означення операції множення матриць, приклади
2. Властивості множення матриць
3. Елементарні перетворення як множення матриць. Детермінант добутку матриць

4.1 Множення матриць

Пара матриць називається впорядкованою, якщо в цій парі визначено, яка матриця є першою, а яка другою **!!!** Операція множення матриць означена тільки для такої впорядкованої пари матриць, у якій кількість стовпчиків першої матриці $A_{m_A \times n_A}$ дорівнює кількості рядків другої матриці $B_{m_B \times n_B}$.

1.61 Означення. Добутком матриці A розміром $m_A \times n_A$ на матрицю B розміром $m_B \times n_B$ називається матриця C розміром $m_A \times n_B$, елементи c_{ij} якої пов'язані з елементами a_{ij} та b_{ij} матриць A та B таким чином:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} b_{kj}, \quad \text{де } i = \overline{1, m_A}, \quad j = \overline{1, n_B}.$$

1.62 Приклад. Нехай дано матрицю-рядок довжиною n, а саме $A_{1\times n} \equiv \langle x| = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, і матрицю-стовпчик

$$B_{n\times 1} \equiv |y\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

висотою n. Добуток є матрицею розміром 1×1

$$A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} \equiv \langle x \,|\, y\rangle = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = x_1 y^1 + x_2 y^2 + \ldots + x_n y^n.$$

Добуток $B_{n\times 1} \cdot A_{1\times n} \equiv |y\rangle \langle x|$ є матрицею розміром $n \times n$, елементами якої є всі можливі добутки $x_i y^j$, де $i, j = \overline{1, n}$

$$B_{n\times 1} \cdot A_{1\times n} \equiv |y\rangle \langle x| = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} y^1 x_1 & y^1 x_2 & \cdots & y^1 x_n \\ y^2 x_1 & y^2 x_2 & \cdots & y^2 x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y^n x_1 & y^n x_2 & \cdots & y^n x_n \end{pmatrix}$$

Означення операції множення матриць дозволяє ввести для будь-якої квадратної матриці операцію піднесення до степеня n, тобто $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$.

1.63 Приклад.

$$\sigma_x^2 = \sigma_x \cdot \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2,$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_y \cdot \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2,$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_z \cdot \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2,$$

$$\sigma_x^3 = \sigma_x^2\sigma_x = E_2\sigma_x = \sigma_x,$$
$$\sigma_y^3 = \sigma_y^2\sigma_y = E_2\sigma_y = \sigma_y,$$
$$\sigma_z^3 = \sigma_z^2\sigma_z = E_2\sigma_z = \sigma_z.$$

Очевидно

$$\sigma_{x,y,z}^n = \begin{cases} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, & n = 2k+1 \\ E_2, & n = 2k \end{cases}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

4.2 Властивості множення матриць

1.64 Припущення: j-й стовпчик матриці $A \cdot B$ є лінійною комбінацією стовпчиків матриці A з коефіцієнтами, що дорівнюють елементам j-го стовпчика матриці B.

Нехай матриця A має розміри $m \times l$, а матриця B — $l \times n$, тоді матриця AB матиме розмір $m \times n$. Запишемо A як матрицю-рядок, елементами якої є її стовпчики $A = (|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_l\rangle)$. Тоді матрицю AB можна також записати як матрицю-рядок, стовпчики якої визначаються таким чином:

$$(|a_1\rangle\,|a_2\rangle \dots |a_l\rangle) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \dots & b_{lj} & \dots & b_{ln} \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\left| \sum_{s=1}^{l} b_{s1} |a_s\rangle \right\rangle, \left| \sum_{s=1}^{l} b_{s2} |a_s\rangle \right\rangle, \dots, \left| \sum_{s=1}^{l} b_{sj} |a_s\rangle \right\rangle, \dots, \left| \sum_{s=1}^{l} b_{sn} |a_s\rangle \right\rangle \right),$$

звідки випливає, що j-м стовпчиком матриці AB є $\left| \sum_{s=1}^{l} b_{sj} |a_s\rangle \right\rangle$.

1.65 Припущення: i-й рядок матриці AB є лінійною комбінацією рядка матриці B з коефіцієнтами, що дорівнюють елементам i-го рядка матриці A.

Записуючи матриці B і AB у вигляді матриць-стовпчиків висотою m, доводимо аналогічно попередньому.

1.66 Властивість. Множення матриць некомутативне, тобто в загальному $AB \neq BA$. Наприклад, перемножимо матриці Паулі:

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_z$$
$$\sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_z.$$

Різницю $AB - BA$ називають комутатором матриць A та B і позначають $[A, B]$. Суму $AB + BA$ називають антикомутатором і позначають $\{A, B\}$. Очевидно,

$$[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z,$$
$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0.$$

Безпосередньо множенням матриць можна переконатись, що

$$[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x,$$
$$[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y,$$
$$[\sigma_x, \sigma_x] = [\sigma_y, \sigma_y] = [\sigma_z, \sigma_z] = 0,$$
$$\{\sigma_y, \sigma_z\} = \{\sigma_z, \sigma_x\} = 0,$$
$$\{\sigma_x, \sigma_x\} = \{\sigma_y, \sigma_y\} = \{\sigma_z, \sigma_z\} = 2E_2.$$

За допомогою символу Леві-Чивіта комутативні співвідношення для матриць Паулі можна записати таким чином:

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma,$$

де $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$, а за допомогою символу Кронекера всі антикомутаційні співвідношення для матриць Паулі записуються таким чином:

$$\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}E_2.$$

Якщо будь-які матриці A та B задовольняють співвідношення $A \cdot B = B \cdot A$, то такі матриці називають *переставними (комутативними)*. Одинична матриця порядку n є переставною з будь-якою квадратною матрицею того самого порядку, тобто $AE_n = E_nA = A$. Які б не були A та B, якщо O – нульова матриця, то $AO = 0$, $OB = 0$.

1.67 Властивість. Множення матриць асоціативне, тобто, якщо визначені добутки AB та $(AB)\,C$, то визначені добутки BC та $A\,(BC)$ і виконується рівність

$$(AB)\,C = A\,(BC)\,.$$

Нехай матриці A, B, C мають розміри $m_A \times n_A$, $m_B \times n_B$ і $m_C \times n_C$, відповідно. Якщо добуток AB визначено, то $n_A = m_B$, і добуток AB має розміри $m_A \times n_B$, тому, якщо визначено добуток $(AB)\,C$, то $n_B = m_C$. Матриця AB складається з елементів:

$$(AB)_{\lambda\rho} = \sum_{\alpha=1}^{n_A} a_{\lambda\alpha}b_{\alpha\rho} \qquad (\lambda = 1, \ldots, m_A; \rho = 1, \ldots, n_B)$$

$$[(AB)\,C]_{\lambda\rho} = \sum_{\nu=1}^{n_B}\left(\sum_{\alpha=1}^{n_A} a_{\lambda\alpha}b_{\alpha\nu}\right)c_{\nu\rho} \qquad (\lambda = 1, \ldots, m_A; \rho = 1, \ldots, n_C)\,.$$

Однак, оскільки $n_B = m_C$, то визначено добуток матриць BC, елементи якого

$$(BC)_{\alpha\pi} = \sum_{\rho=1}^{n_B} b_{\alpha\rho}c_{\rho\pi} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m_B; \pi = 1, \ldots, n_C)\,.$$

Оскільки висота стовпчика (кількість рядків) матриці BC дорівнює $m_B = n_A$, тобто довжині рядка матриці A, то визначено добуток $A\,(BC)$, елементи якого мають вигляд

$$[A\,(BC)]_{\lambda\rho} = \sum_{\alpha=1}^{n_A} a_{\lambda\alpha}\left(\sum_{\nu=1}^{n_B} b_{\alpha\nu}c_{\nu\rho}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n_A}\sum_{\nu=1}^{n_B}(a_{\lambda\alpha}b_{\alpha\nu})\,c_{\nu\rho}.$$

1.68 Властивість. Множення матриць дистрибутивне щодо додавання, тобто: якщо має зміст вираз $A\,(B+C)$, то $A\,(B+C) = AB + AC$.

Очевидно, що B і C мають однакові розміри $m \times n$, A – розмір $p \times m$ (p – довільне). Ця сума може бути представлена у вигляді

$$[A\,(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}\,,$$

де $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,n}$.

1.69 Властивість. Якщо добуток AB має зміст, то $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$.

1.70 Властивість. Ранг добутку двох матриць не перевищує рангів співмножників.

Для доведення розглянемо матрицю D, складену з усіх стовпчиків матриць A та AB. Запишемо її символічно $D = \|A|AB\|$. Очевидно, що $\mathrm{Rg}\,(AB) \leq \mathrm{Rg}\,D$. Згідно з припущенням **1.64**, стовпчики AB є лінійними комбінаціями стовпчиків A, тому $\mathrm{Rg}\,D = \mathrm{Rg}\,A$, таким чином маємо $\mathrm{Rg}\,(AB) \leq \mathrm{Rg}\,A$. Аналогічно доводиться, що $\mathrm{Rg}\,(AB) \leq \mathrm{Rg}\,B$.

1.71 Властивість. Якщо визначено добуток AB, то визначено й добуток $B^T A^T$, і виконується рівність $(AB)^T = B^T A^T$.

Нехай матриці A та B мають розміри $m \times n$ і $n \times p$. У матриці AB на перетині i-го рядка та j-го стовпчика розташований елемент $\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p})$; j-й рядок матриці B^T складається з елементів $b_{1j}, \ldots, b_{nj}$, а i-й стовпчик матриці A^T – з елементів $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Тому добуток $B^T A^T$ визначений, і в ньому на перетині j-го рядка та i-го стовпчика є елемент $\sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha j} a_{i\alpha}$, що збігається з $\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$.

1.72 Наслідок. Якщо визначено добуток ABC, то $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, згідно з $(ABC)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$.

1.73 Означення. Матриця X, що з деякою заданою матрицею A задовільняє рівність $XA = AX = E_n$ (де E_n – одинична матриця деякого порядку n), називається оберненою до A і позначається A^{-1}.

Оскільки A і A^{-1} комутативні, то вони обидві мають бути квадратними того самого порядку n, а оскільки $\mathrm{Rg}\,E_n \leq \mathrm{Rg}\,A$, то $\mathrm{Rg}\,A = n \Rightarrow$ матриця може мати обернену тільки тоді, коли її визначник відмінний від нуля.

4.3 Елементарні перетворення як множення матриць. Детермінант добутку матриць

1.74 Теорема. Кожне елементарне перетворення рядків матриці A розміром $m \times n$ рівносильно множенню матриці A зліва на деяку квадратну матрицю порядку m.

Для доведення представимо матрицю $A_{m\times n}$ у вигляді матриці-стовчика висоти m, елементами якої є рядки довжини n матриці $A_{m\times n}$:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^i & a_2^i & \cdots & a_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \langle a^i| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix}$$

1. Розглянемо квадратну матрицю S_m^1, яка отримується з одиничної матриці E_m

порядку m перестановкою i-го та j-го рядків:

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad S_m^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що при множенні матриці S_m^1 на $A_{m\times n}$ відповідні рядки матриці $A_{m\times n}$ переставляться

$$S_m^1 \cdot A_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \langle a^i| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^i| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix}$$

2. Нехай S_m^2 – матриця, яка отримується з тієї самої одиничної матриці E_m заміною i-ї одиниці на діагоналі на число $\lambda \neq 0$:

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad S_m^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

При множенні матриці S_m^2 на $A_{m\times n}$ i-й рядок матриці $A_{m\times n}$ помножиться на λ

$$S_m^2 \cdot A_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \langle a^i| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \lambda \langle a^i| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix}$$

3. Позначимо через S_m^3 матрицю, яка отримується з одиничної матриці E_m заміною на одиницю нульового елемента, розташованого на перетині i-го рядка та j-го стовпчика:

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \quad S_m^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Множення матриці S_m^3 на матрицю $A_{m\times n}$ рівносильне додаванню j-го рядка матриці $A_{m\times n}$ до i-го рядка

$$S_m^3 \cdot A_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \langle a^i| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^1| \\ \langle a^2| \\ \vdots \\ \langle a^i| + \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^j| \\ \vdots \\ \langle a^m| \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що $\det S_m^1$, $\det S_m^2$ і $\det S_m^3$ відмінні від нуля: $\det S_m^1 = -1$, $\det S_m^2 = \lambda$, $\det S_m^3 = 1$. Матриці S_m^1, S_m^2 і S_m^3 називають матрицями елементарних перетворень. Якщо матриця $A_{m\times n}$ квадратна $(m = n)$, то $\det(S_m^1 \cdot A) = -\det A$, $\det(S_m^2 A) = \lambda \det A$, $\det(S_m^3 A) = \det A$. Отже, у цьому випадку для матриць елементарних перетворень справедливо

$$\det(SA) = \det S \det A$$

Послідовному виконанню елементарних перетворень рядків матриці $A_{m\times n}$ відповідає множення зліва матриці $A_{m\times n}$ на добуток відповідних матриць елементарних перетворень.

Елементарні перетворення стовпчиків можна довести, домножуючи матрицю $A_{m\times n}$ справа на аналогічні матриці елементарних перетворень порядку n.

1.75 Припущення. Якщо $\det A \neq 0$, то знайдуться матриці елементарних перетворень $S_m^i, S_m^j, \ldots, S_m^p$ такі, що $A = S_m^i S_m^j \cdots S_m^p$.

Якщо $\det A \neq 0$, то A^{-1} існує. Оскільки $\det A^{-1} \neq 0$, то елементарними перетвореннями рядків матриця A^{-1} може бути перетворена на одиничну матрицю, тобто знайдуться такі $S_m^i, S_m^j, \ldots, S_m^p$, для яких $S_m^i S_m^j \cdots S_m^p A^{-1} = E$. Очевидно, що $S_m^i S_m^j \cdots S_m^p = A$.

1.76 Зауваження. Існування оберненої матриці для кожної невиродженої матриці було доведено в попередньому розділі.

1.77 Припущення. Для будь-яких квадратних матриць A і B одного порядку

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Справді, у випадку $\det A = 0$ твердження випливає з оцінки рангу добутку матриць. Якщо $\det A \neq 0$, то

$$\begin{aligned}
A &= S^i \cdots S^p \\
&\Downarrow \\
\det(A \cdot B) &= \det\left(S^i \cdots S^p \cdot B\right) = \\
&= \det S^i \det\left(S^j \cdots S^p \cdot B\right) = \\
&= \det S^i \det S^j \det\left(S^k \cdots S^p \cdot B\right) = \\
&= \cdots = \\
&= \det S^i \cdots \det S^p \cdot \det B = \\
&= \det\left(S^i \cdots S^p\right) \cdot \det B = \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}$$

Тут було використано те, що

$$\det S^i \cdots \det S^p = \det\left(S^i S^j\right) \det S^k \cdots \det S^p = \cdots = \det\left(S^i \cdots S^p\right).$$

Розділ 5

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

5.1 Означення та постановка задачі

1.78 Означення. Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називають систему з m рівнянь відносно n невідомих $x^1, x^2, \dots, x^n$ такого виду:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases}$$

Існують інші, більш компактні способи запису СЛАР:
1)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = b^j, \quad j = \overline{1, m};$$

2) або ж за допомогою операції множення матриць: нехай

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

— матриця, елементи якої задані і є коефіцієнтами при невідомих у заданій СЛАР. Цю матрицю називають *матрицею системи*

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

— стовпчик вільних членів (його елементи теж задані)

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

— стовпчик невідомих, які потрібно знайти

тоді СЛАР можна записати як

$$A\,|x\rangle = |b\rangle;$$

3) ще одна форма запису СЛАР

$$x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + \dots + x^i \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

або

$$x^1\,|a_1\rangle + \dots + x^i\,|a_i\rangle + \dots + x^n\,|a_n\rangle = |b\rangle,$$

де $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$ – стовпчики матриці системи, $|b\rangle$ – стовпчик вільних членів.

Матриця системи, доповнена стовпчиком вільних членів, називається *розширеною матрицею системи* і позначається

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j & b^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{c|c} & b^1 \\ A & \vdots \\ & b^m \end{array} \right).$$

Якщо вільні члени всіх рівнянь дорівнюють нулю, система називається *однорідною.*

1.79 Означення. Сукупність n чисел $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ називається розв'язком СЛАР, якщо кожне рівняння системи перетворюється на числову рівність після підстановки в нього чисел α^i замість відповідних невідомих x^i для всіх $i = \overline{1, n}$.

Задача полягає в знаходженні розв'язків СЛАР, причому ми не робимо ніяких припущень щодо коефіцієнтів і вільних членів системи, і навіть щодо кількості рівнянь і кількості невідомих. Тому можуть існувати різні можливості – система може взагалі не мати розв'язків $\begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 + x^2 = 10 \end{cases}$ або мати їх безліч $x^1 + x^2 = 0$. Системи, які не мають розв'язків, називаються *несумісними*, а які мають хоча б один розв'язок — *сумісними.*

5.2 Розв'язування СЛАР, в яких кількість рівнянь і невідомих співпадають. Теорема Крамера

Почнемо розгляд з найпростішого випадку, коли кількість рівнянь у СЛАР дорівнює кількості невідомих. Також вважатимемо, що рівняння лінійно незалежні (це означає, що рядки матриці системи лінійно незалежні). У випадку, коли $m = n$, для лінійної незалежності рівнянь системи достатньо вимагати, щоб детермінант матриці системи був відмінним від нуля.

1.80 Теорема Крамера. СЛАР з n рівнянь відносно n невідомих

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_n^n x^n = b^n \end{cases}$$

у випадку, коли визначник матриці системи відмінний від нуля, має єдиний розв'язок, який визначається таким чином:

$$x^i = \frac{\Delta^i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1, n},$$

де $\Delta = \det A$ – детермінант матриці системи, а Δ^i – детермінант матриці, отриманої з матриці системи шляхом заміни i-го стовпчика на стовпчик вільних членів, тобто

$$\Delta^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Для доведення додамо зверху до розширеної матриці системи, яка має розміри $[n \times (n+1)]$, довільний її рядок, номер якого j. В результаті маємо квадратну матрицю порядку $(n+1)$, у якій два рядки збігаються,

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j & b^j \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j & b^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & b^n \end{pmatrix}$$

тому визначник цієї матриці дорівнює нулю. Обчислимо цей визначник, розкривши його за першим рядком

$$\det H_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i^j M_i + (-1)^{n+1+1} b^j \det A = 0.$$

Тут M_i – детермінант матриці, отриманої з матриці H_{n+1} шляхом викреслювання її першого рядка та i-го стовпчика, або, що теж саме, детермінант матриці, отриманої з розширеної матриці системи A^* викреслюванням її i-го стовпчика:

$$M_i = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{i-1}^1 & a_{i+1}^1 & \dots a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{i-1}^2 & a_{i+1}^2 & \dots a_n^2 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_{i-1}^j & a_{i+1}^j & \dots a_n^j & b^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_{i-1}^n & a_{i+1}^n & \dots a_n^m & b^m \end{vmatrix}$$

Оскільки $\det A \equiv \Delta \neq 0$, то

$$b^j = -\frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i^j M_i}{(-1)^{n+1+1} \Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i-n} a_i^j M_i}{\Delta}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Якщо ввести формальне позначення

$$q^i = \frac{(-1)^{i-n} M_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n},$$

тоді отримане співвідношення матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j q^i = b^j, \quad j = \overline{1,n},$$

що цілком співпадає з однією з форм запису СЛАР (див. попередній пункт)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = b^j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким чином, визначений набір чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ задовільняє розв'язок системи. Суттєво, що числа $x^1, x^2, \dots, x^n$ не залежать від j, а тому задовольняють усі рівняння системи, тобто є її розв'язком. Існування розв'язку доведено.

Приведемо вираз для x^i до вигляду, анонсованого у формулюванні теореми, переставивши у визначнику M_i останній стовпчик b на i-те місце, тобто поміняємо місцями цей стовпчик послідовно зі стовпчиками з номерами $n, n-1, \ldots, i+1$. Усього потрібно $(n-i)$ перестановок, тому

$$M_i = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{i-1}^1 & a_{i+1}^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{i-1}^2 & a_{i+1}^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^j & a_2^j & \ldots & a_{i-1}^j & a_{i+1}^j & \ldots & a_n^j & b^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{i-1}^n & a_{i+1}^n & \ldots & a_n^n & b^n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{i-1}^2 & b^2 & a_{i+1}^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_1^j & a_2^j & \ldots & a_{i-1}^j & b^j & a_{i+1}^j & \ldots & a_n^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{n-i} \Delta^i$$

тому

$$q^i = x^i = \frac{(-1)^{i-n} M_i}{\Delta} = \frac{(-1)^{i-n} (-1)^{n-i}}{\Delta} \Delta^i = \frac{\Delta^i}{\Delta}.$$

Доведемо єдиність отриманого розв'язку методом від супротивного. Нехай є два розв'язки системи $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ і $\{\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n\}$. Запишемо систему у вигляді:

$$x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix} + \cdots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \qquad \text{або} \qquad x^1 \left|a_1\right\rangle + \cdots + x^n \left|a_n\right\rangle = \left|b\right\rangle,$$

де $\left|a_1\right\rangle, \ldots, \left|a_n\right\rangle$ – стовпчики матриці системи, $\left|b\right\rangle$ – стовпчик вільних членів. Результат підстановки розв'язків $\{\alpha^i\}$ і $\{\beta^i\}$ у систему має вигляд

$$\begin{aligned} \alpha^1 \left|a_1\right\rangle + \cdots + \alpha^n \left|a_n\right\rangle &= \left|b\right\rangle \\ \beta^1 \left|a_1\right\rangle + \cdots + \beta^n \left|a_n\right\rangle &= \left|b\right\rangle, \end{aligned}$$

отже,

$$\left(\alpha^1 - \beta^1\right) \left|a_1\right\rangle + \left(\alpha^2 - \beta^2\right) \left|a_2\right\rangle + \cdots + \left(\alpha^n - \beta^n\right) \left|a_n\right\rangle = \left|0\right\rangle.$$

Якщо розв'язки не збігаються, то хоча б одна з різниць $(\alpha^i - \beta^i)$, $i = \overline{1,n}$ відмінна від нуля. Це означає, що стовпчики $\left|a_i\right\rangle$ є лінійно залежними, а цього бути не може, тому що із самого початку припускалося, що $\det A \neq 0$. Зауважимо, що в доведенні не використовувався збіг кількості рівнянь і кількості невідомих, тобто за змістом доведено більш сильне твердження: якщо стовпчики матриці є лінійно незалежними, то система не може мати два різних розв'язки.

Це твердження стане більш зрозумілим після доведення теореми Кронекера - Капеллі в наступному розділі.

5.3 Загальна теорія СЛАР

5.3.1 Теорема Кронекера-Капеллі про сумісність СЛАР

Теорема про базисний мінор дозволяє сформулювати таку умову сумісності довільно заданої СЛАР:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases}$$

1.81 Теорема Кронекера-Капеллі. СЛАР є сумісною (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці A^*: $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$

Для доведення теореми скористаємось такою формою запису СЛАР:

$$x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + \dots + x^i \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

або

$$x^1 \left| a_1 \right\rangle + \dots + x^i \left| a_i \right\rangle + \dots + x^n \left| a_n \right\rangle = \left| b \right\rangle .$$

Необхідність. Якщо розв'язок існує, то така форма запису означає, що стовпчик вільних членів $|b\rangle$ є лінійною комбінацією стовпчиків матриці системи

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} .$$

Отже, якщо ми доповнимо матрицю системи цим стовпчиком і отримаємо таким чином розширену матрицю системи

$$A^*_{m\times(n+1)} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j & b^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix} ,$$

то кількість лінійно незалежних стовпчиків в розширеній матриці системи $A^*_{m\times(n+1)}$. буде такою ж, як і кількість лінійно незалежних стовпчиків в матриці системи $A_{m\times n}$. Отже $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = \operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)}$.

Достатність. Нехай $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = \operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)}$. У цьому випадку базисний мінор матриці $A_{m\times n}$ є базисним і в матриці $A^*_{m\times(n+1)}$ (якби це було не так, то мала би місце рівність $(1 + \operatorname{Rg} A_{m\times n}) = \operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)}$).

Нехай стовпчики $\left| a_{i_1} \right\rangle, \dots, \left| a_{i_r} \right\rangle$ є базисними стовчиками матриці системи $A_{m\times n}$. Тоді стовпчик вільних членів $|b\rangle$ є лінійною комбінацією цих базисних стовпчиків, у яких розташований базисний мінор матриці $A_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = \alpha^1 \begin{pmatrix} a^1_{i_1} \\ a^2_{i_1} \\ \vdots \\ a^m_{i_1} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^r \begin{pmatrix} a^1_{i_r} \\ a^2_{i_r} \\ \vdots \\ a^m_{i_r} \end{pmatrix}.$$

Тоді, згідно з однією з властивостей лінійно незалежних систем вектор-стовпчиків, якщо стовпчик $|b\rangle$ є лінійною комбінацією системи вектор-стовпчиків $|a_{i_1}\rangle, \ldots, |a_{i_r}\rangle$, то тоді цей вектор-стовпчик $|b\rangle$ може бути записаний у вигляді лінійної комбінації будь-якої системи вектор-стовпчиків, яка містить стовпчики $|a_{i_1}\rangle, \ldots, |a_{i_r}\rangle$, як підсистему. Отже, у цьому випадку стовпчик вільних членів може бути записано у вигляді лінійної комбінації всіх стовпчиків матриці системи $A_{m\times n}$:

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = \alpha^1 \begin{pmatrix} a^1_{i_1} \\ a^2_{i_1} \\ \vdots \\ a^m_{i_1} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^r \begin{pmatrix} a^1_{i_r} \\ a^2_{i_r} \\ \vdots \\ a^m_{i_r} \end{pmatrix} + \begin{matrix}\text{тривіальна лінійна комбінація} \\ \text{інших стовпчиків матриці } A_{m\times n}\end{matrix}$$

Коефіцієнти цієї лінійної комбінації являють собою розв'язок даної СЛАР. Отже, виконання умови $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = \operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)}$ для даної СЛАР забезпечує її сумісність.

1.82 Наслідок. СЛАР не сумісна тоді й тільки тоді, коли до спрощеного вигляду матриці A^* входить рядок $\|0\,0\ \ldots\ 0\,1\|$.

Дійсно, якщо $\operatorname{Rg} A^* > \operatorname{Rg} A$, то будь-який базисний мінор розширеної матриці A^* має утримувати останній стовпчик цієї матриці. Якщо останній стовпчик є базисним, то після приведення матриці A^* до спрощеного вигляду за допомогою алгоритму Гауса, її останній стовпчик буде співпадати з останнім стовпчиком одиничної матриці, а це означає, що останній рядок у цій матриці матиме вигляд $\|0\,0\ldots0\,1\|$. Навпаки, якщо такий рядок є в матриці, то її останній стовпчик не може бути лінійною комбінацією інших стовпчиків. Отже, $\operatorname{Rg} A^* > \operatorname{Rg} A$, і система не сумісна.

5.3.2 Критерій Фредгольма

Нехай задано СЛАР

$$\begin{cases} a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \cdots + a^1_nx^n = b^1 \\ a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \cdots + a^2_nx^n = b^2 \\ \ldots \\ a^m_1x^1 + a^m_2x^2 + \cdots + a^m_nx^n = b^m. \end{cases}$$

Транспонуємо матрицю A заданої СЛАР

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix} \quad \to \quad (A_{m\times n})^T = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \ldots & a^m_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \ldots & a^m_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^1_n & a^2_n & \ldots & a^m_n \end{pmatrix}$$

і розглянемо однорідну систему з n лінійних рівнянь відносно m невідомих $y_1, y_2, \ldots, y_m$:

$$\begin{cases} a^1_1y_1 + \cdots + a^m_1y_m = 0 \\ \ldots \\ a^1_ny_1 + \cdots + a^m_ny_m = 0. \end{cases}$$

Така система називається *спряженою однорідною системою* для заданої СЛАР.

1.83 Теорема Фредгольма. Для того, щоб задана СЛАР була сумісною, необхідно й достатньо, щоб кожний розв'язок спряженої однорідної системи задовільняв рівняння

$$b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = 0,$$

де $b^1, \ldots, b^m$ – вільні члени заданої СЛАР.

Необхідність. Необхідність умови буде встановлена, якщо зробити припущення, що умова теореми не виконана, і на основі цього прийти до висновку, що задана СЛАР не сумісна.

Нехай існує розв'язок спряженої системи такий, що для нього справедливо

$$b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = p \neq 0.$$

Помножимо кожне рівняння заданої СЛАР на числа $y_1, \ldots, y_m$ відповідно

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1(a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n) = y_1 b^1 \\ y_2(a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n) = y_2 b^2 \\ \ldots \\ y_m(a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n) = y_m b^m. \end{cases}$$

і додамо їх.

$$y_1(a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n) + y_2(a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n) + \ldots + y_m(a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n) =$$
$$= y_1 b^1 + y_1 b^1 + \ldots + y_1 b^1$$

Проводимо перегрупування в правій частині рівності, а в лівій враховуємо, що

$$(y_1 a_1^1 + y_2 a_1^2 + \ldots + y_m a_1^m) x^1 + (y_1 a_2^1 + y_2 a_2^2 + \ldots + y_m a_2^m) x^2 + \ldots + (y_1 a_n^1 + y_2 a_n^2 + \ldots + y_m a_n^m) x^n = p$$

і з врахуванням спряженої системи рівнянь отримаємо рівняння

$$0 \cdot x^1 + \cdots + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n = p,$$

яке не має розв'язків, а це означає, що і задана СЛАР, з якої було отримано на основі припущення $b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = p \neq 0$ це рівняння, також не має розв'язків, тобто є несумісною. Отже для того, щоб задана СЛАР була сумісною, необхідно, щоб виконувалась умова $b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = 0$.

Достатність. Якщо умову $b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = 0$ виконано для всіх розв'язків спряженої системи, то система рівнянь

$$\begin{cases} a_1^1 y_1 + \cdots + a_1^m y_m = 0 \\ \ldots \\ a_n^1 y_1 + \cdots + a_n^m y_m = 0 \\ b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = 0 \end{cases}$$

є очевидно сумісною, а система рівнянь

$$\begin{cases} a_1^1 y_1 + \cdots + a_1^m y_m = 0 \\ \ldots \\ a_n^1 y_1 + \cdots + a_n^m y_m = 0 \\ b^1 y_1 + \cdots + b^m y_m = 1 \end{cases}$$

розв'язків мати не може в силу того, що умову $b^1y_1 + \dots + b^m y_m = 0$ виконано. Тому для неї ранг розширеної матриці більший за ранг матриці ситеми

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^m & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^m & 0 \\ b^1 & b^2 & \dots & b^m & 1 \end{pmatrix} > \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^m \\ b^1 & b^2 & \dots & b^m \end{pmatrix}.$$

Транспонуючи обидві матриці і враховуючи, що ранг матриці не змінюється при транспонуванні, отримуємо:

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b^m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} > \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Із теореми **1.60** про ранг матриці випливає, що рядок $\|0 \dots 01\|$ є базисним рядком матриці, яка розташована в лівій частині нерівності. Отже, цей рядок гарантовано не є лінійною комбінацією рядків розширеної матриці заданої СЛАР:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix},$$

і тому рядок такого вигляду не може входити до спрощеного вигляду цієї матриці. Отже, на основі наслідку теореми Кронекера-Капеллі робимо висновок, що задана СЛАР є сумісною.

1.84 Приклад. Застосуємо теорему Фредгольма для отримання умови паралельності прямих на площині. Система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

не має розв'язків, якщо існують такі числа y_1 і y_2, що

$$\begin{cases} A_1y_1 + A_2y_2 = 0 \\ B_1y_1 + B_2y_2 = 0 \end{cases}$$

але $y_1C_1 + y_2C_2 \neq 0$. Дійсно, якщо $y_1C_1 + y_2C_2 \neq 0$, то y_1 та y_2 не можуть бути рівними нулю, тому можна покласти $y_2/y_1 = \lambda$ і записати отриману умову таким чином, що існує число λ таке, що $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ і $C_1 \neq \lambda C_2$.

5.4 Знаходження розв'язків СЛАР

Для розв'язування СЛАР надзвичайно важливими є наступні властивості:

1. Зміна порядку слідування рівнянь в заданій СЛАР приводить до СЛАР, розв'язки якої є такими ж самими, як і розв'язки заданої СЛАР.

2. Множення будь-яких рівняннь заданої СЛАР на будь-які відмінні від нуля числа приводить до СЛАР, розв'язки якої є такими ж самими, як і розв'язки заданої СЛАР.

3. Додавання до будь-якого рівняння заданої СЛАР довільної лінійної комбінації інших рівнянь цієї ж СЛАР приводить до СЛАР, розв'язки якої є такими ж самими, як і розв'язки заданої СЛАР.

Враховуючи те, що розширена матриця системи однозначно задає СЛАР, три зазначені властивості дають можливість зробити наступне твердження, яке є ключовим при пошуку розв'язків СЛАР: **будь-які елементарні перетворення *рядків* розширеної матриці заданої системи СЛАР згенерують матрицю, яка відповідає СЛАР, відмінній від заданої СЛАР, але розв'язки цих двох різних СЛАР будуть ідентичні!**

5.4.1 Алгоритм Гауса пошуку розв'язків СЛАР

Вважаємо, що задана сумісна система з m лінійних рівнянь відносно n невідомих.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_r}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_r} & a_2^{i_r} & \cdots & a_{j_1}^{i_r} & \cdots & a_{j_2}^{i_r} & \cdots & a_{j_r}^{i_r} & \cdots & a_n^{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^{i_1} \\ \vdots \\ b^{i_2} \\ \vdots \\ b^{i_r} \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

Нехай ранг матриці $A_{m\times n}$ дорівнює r: $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = r$ Нехай базисний мінор матриці $A_{m\times n}$ розташований на перетині рядків i_1, i_2,... i_r і стовпчиків j_1, j_2,... j_r

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_r}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_r} & a_2^{i_r} & \cdots & a_{j_1}^{i_r} & \cdots & a_{j_2}^{i_r} & \cdots & a_{j_r}^{i_r} & \cdots & a_n^{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Оскільки задана СЛАР є сумісною, то ранг розширеної матриці системи також дорівнює r: $\operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)} = r$, і базисний мінор розширеної матриці системи $A^*_{m\times(n+1)}$ теж розташований на перетині рядків i_1, i_2,... i_r і стовпчиків j_1, j_2,... j_r

$$A^*_{m\times(n+1)} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_r}^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} & b^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} & b^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{i_r} & a_2^{i_r} & \cdots & a_{j_1}^{i_r} & \cdots & a_{j_2}^{i_r} & \cdots & a_{j_r}^{i_r} & \cdots & a_n^{i_r} & b^{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

В заданій СЛАР переставимо рівняння, які відповідають базисним рядкам розширеної матриці системи, вгору і в результаті отримаємо таку СЛАР

$$\begin{pmatrix} a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_r} & a_2^{i_r} & \cdots & a_{j_1}^{i_r} & \cdots & a_{j_2}^{i_r} & \cdots & a_{j_r}^{i_r} & \cdots & a_n^{i_r} \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_r}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{i_1} \\ b^{i_2} \\ \vdots \\ b^{i_r} \\ b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

Цій СЛАР відповідає наступна розширена матриця системи

$$\begin{pmatrix} a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} & b^{i_1} \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} & b^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{i_r} & a_2^{i_r} & \cdots & a_{j_1}^{i_r} & \cdots & a_{j_2}^{i_r} & \cdots & a_{j_r}^{i_r} & \cdots & a_n^{i_r} & b^{i_r} \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_r}^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи елементарні перетворення рядків таким чином, щоб базисні стовпчики матриці набули вигляду перших r стовпчиків одиничної матриці, приведемо цю розширену матрицю до такого спрощеного вигляду

$$\overline{A^*}_{m\times(n+1)} = \begin{pmatrix} \overline{a_1^{i_1}} & \overline{a_2^{i_1}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_1}} & \overline{b^{i_1}} \\ \overline{a_1^{i_2}} & \overline{a_2^{i_2}} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_2}} & \overline{b^{i_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_1^{i_r}} & \overline{a_2^{i_r}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \overline{a_n^{i_r}} & \overline{b^{i_r}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут $\overline{a_j^i}, \overline{b^i}$ – елементи перетвореної розширеної матриці. Ця матриця визначає наступну СЛАР

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1^{i_1}} & \overline{a_2^{i_1}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_1}} \\ \overline{a_1^{i_2}} & \overline{a_2^{i_2}} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_1^{i_r}} & \overline{a_2^{i_r}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \overline{a_n^{i_r}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{b^{i_1}} \\ \overline{b^{i_2}} \\ \vdots \\ \overline{b^{i_r}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to$$

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1^{i_1}} & \overline{a_2^{i_1}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_1}} \\ \overline{a_1^{i_2}} & \overline{a_2^{i_2}} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_1^{i_r}} & \overline{a_2^{i_r}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \overline{a_n^{i_r}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{b^{i_1}} \\ \overline{b^{i_2}} \\ \vdots \\ \overline{b^{i_r}} \end{pmatrix}.$$

Ця СЛАР з r лінійно незалежних рівнянь,

$$\begin{cases} \overline{a_1^{i_1}}x^1 + \overline{a_2^{i_1}}x^2 + \cdots + 1\cdot x^{j_1} + \cdots + 0\cdot x^{j_2} + \cdots + 0\cdot x^{j_r} + \cdots + \overline{a_n^{i_1}}x^n = \overline{b}^{j_1} \\ \overline{a_1^{i_2}}x^1 + \overline{a_2^{i_2}}x^2 + \cdots + 0\cdot x^{j_1} + \cdots + 1\cdot x^{j_2} + \cdots + 0\cdot x^{j_r} + \cdots + \overline{a_n^{i_2}}x^n = \overline{b}^{j_2} \\ \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \overline{a_1^{i_r}}x^1 + \overline{a_2^{i_r}}x^2 + \cdots + 0\cdot x^{j_1} + \cdots + 0\cdot x^{j_2} + \cdots + 1\cdot x^{j_r} + \cdots + \overline{a_n^{i_r}}x^n = \overline{b}^{j_r} \end{cases}$$

згідно з тим, що елементарні перетворення рядків розширеної матриці системи відповідають перетворенню СЛАР на еквівалентну систему, має такі ж самі розв'язки, що і початкова СЛАР. Ці розв'язки можна записати таким чином: у лівих частинах рівнянь залишимо невідомі x^{j_1}, $x^{j_2}, \ldots, x^{j_r}$ (всього їх r і їх кількість співпадає з рангом розширеної матриці і матриці системи), які відповідають стовпчикам обраного базисного мінора розширеної матриці заданої СЛАР, і які називаються *базисними невідомими*, інші $(n-r)$ невідомих величин — $x^1, x^2, \ldots, x^{n-r}$, які називають *параметричними невідомими*, перенесемо в праві частини рівностей.

$$\begin{cases} x^{j_1} = \overline{b}^{j_1} - \overline{a_1^{i_1}}x^1 - \overline{a_2^{i_1}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_1}}x^{n-r} \\ x^{j_2} = \overline{b}^{j_2} - \overline{a_1^{i_2}}x^1 - \overline{a_2^{i_2}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_2}}x^{n-r} \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x^{j_r} = \overline{b}^{j_r} - \overline{a_1^{i_r}}x^1 - \overline{a_2^{i_r}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_r}}x^{n-r} \end{cases}$$

Присвоївши параметричним невідомим певні довільні значення, знаходимо для вибраного нами набору значень параметричних змінних відповідні їм значення базисних змінних. Знайдені таким чином значення базисних і параметричних невідомих визначають розв'язок заданої СЛАР.

Таким чиином, будь-яка сумісна СЛАР в загальному має нескінчену кількість розв'язків — присвоюючи параметричним невідомим довільні значення, будемо знаходити відповідні значення базисних невідомих, і кожен такий набір є окремим розв'язком системи (зафіксовані довільним чином значення параметричних змінних і відповідні їм значення базисних змінних утворюють один з можливих розв'язків СЛАР).

Сумісна СЛАР має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих величин, тобто $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = n$. У такому випадку всі невідомі в даній СЛАР є базисними, параметричних змінних немає, і очевидно СЛАР має єдиний розв'язок

$$x_1 = \overline{b^1}, x_2 = \overline{b^2}, \cdots x_n = \overline{b^n}.$$

Враховуючи, що ранг матрици системи $A_{m\times n}$ є число, яке не може бути більшим за менше з пари чисел m, n: $\operatorname{Rg} A_{m\times n} \leq \min(m,\ n)$ і те, що кількість базисних невідомих дорівнює рангу матриці системи, приходимо до наступних висновків:

- Якщо в заданій сумісній СЛАР кількість невідомих є більшою ніж кількість рівнянь, то така СЛАР має нескінчену кількість розв'язків: дійсно, якщо $m < n$, то $\operatorname{Rg} A_{m\times n} \leq m$, а отже кількість базисних невідомих є гарантовано меншою за загальну кількість невідомих n, що гарантує ненульову кількість параметричних невідомих, наявність яких приводить до існування нескінченної кількості розв'язків СЛАР.

- Якщо в заданій сумісній СЛАР кількість невідомих є меншою ніж кількість рівнянь $n < m$, то така СЛАР має:
  а) нескінченну кількість розв'язків, якщо $r < n$ (тоді $\operatorname{Rg} A_{m\times n} \leq n$ і кількість базисних невідомих є меншою за загальну кількість невідомих n),
  б) єдиний розв'язок, якщо ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = n$ (тоді параметричних невідомих немає, всі невідомі базисні).

Тепер очевидно, що теорема Крамера відповідає випадку сумісної СЛАР, в якій не тільки кількість рівнянь ідентична кількості невідомих, а ще і ранг матриці системи співпадає з кількістю невідомих.

На практиці, схема пошуку розв'язків СЛАР виглядає наступним чином:

1. Знайти ранги матриці системи $\operatorname{Rg} A_{m\times n}$ і розширеної матриці системи $\operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)}$ порівняти їх. Якщо $\operatorname{Rg} A_{m\times n} < \operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)}$, то система не сумісна і пошук розв'язку завершено. Якщо $\operatorname{Rg} A_{m\times n} = \operatorname{Rg} A^*_{m\times(n+1)} = r$, то переходимо до наступного пункту.

2. В матриці системи $A_{m\times n}$ вибрати будь-який з її базисних мінорів і цим вибором зафіксувати базисні рядки і стовпчики матриці системи і розширеної матриці системи.

3. З m рівнянь заданої СЛАР вибрати r лінійно незалежних рівнянь — це ті рівняння заданої СЛАР, які відповідають базисним рядкам, а з n невідомих $x^1, x^2, ...x^n$ вибрати r базисних невідомих — це ті невідомі, які відповідають стовпчикам обраного базисного мінора матриці заданої СЛАР.

4. Перейти від пошуку розв'язку заданої СЛАР

$$\begin{pmatrix}
a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_{j_1} & \cdots & a^1_{j_2} & \cdots & a^1_{j_r} & \cdots & a^1_n \\
a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_{j_1} & \cdots & a^2_{j_2} & \cdots & a^2_{j_r} & \cdots & a^2_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a^{i_1}_1 & a^{i_1}_2 & \cdots & a^{i_1}_{j_1} & \cdots & a^{i_1}_{j_2} & \cdots & a^{i_1}_{j_r} & \cdots & a^{i_1}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a^{i_2}_1 & a^{i_2}_2 & \cdots & a^{i_2}_{j_1} & \cdots & a^{i_2}_{j_2} & \cdots & a^{i_2}_{j_r} & \cdots & a^{i_2}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a^{i_r}_1 & a^{i_r}_2 & \cdots & a^{i_r}_{j_1} & \cdots & a^{i_r}_{j_2} & \cdots & a^{i_r}_{j_r} & \cdots & a^{i_r}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_{j_1} & \cdots & a^m_{j_2} & \cdots & a^m_{j_r} & \cdots & a^m_n
\end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^{i_1} \\ \vdots \\ b^{i_2} \\ \vdots \\ b^{i_r} \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

до пошуку розв'язку СЛАР, в яку входять тільки лінійно незалежні рівняння заданої СЛАР

$$\begin{pmatrix}
a^{i_1}_1 & a^{i_1}_2 & \cdots & a^{i_1}_{j_1} & \cdots & a^{i_1}_{j_2} & \cdots & a^{i_1}_{j_r} & \cdots & a^{i_1}_n \\
a^{i_2}_1 & a^{i_2}_2 & \cdots & a^{i_2}_{j_1} & \cdots & a^{i_2}_{j_2} & \cdots & a^{i_2}_{j_r} & \cdots & a^{i_2}_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a^{i_r}_1 & a^{i_r}_2 & \cdots & a^{i_r}_{j_1} & \cdots & a^{i_r}_{j_2} & \cdots & a^{i_r}_{j_r} & \cdots & a^{i_r}_n
\end{pmatrix} \cdot
\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} b^{i_1} \\ b^{i_2} \\ \vdots \\ b^{i_r} \end{pmatrix}.$$

5. Застосувати до розширеної матриці, яка відповідає цій СЛАР

$$\begin{pmatrix}
a^{i_1}_1 & a^{i_1}_2 & \cdots & a^{i_1}_{j_1} & \cdots & a^{i_1}_{j_2} & \cdots & a^{i_1}_{j_r} & \cdots & a^{i_1}_n & b^{i_1} \\
a^{i_2}_1 & a^{i_2}_2 & \cdots & a^{i_2}_{j_1} & \cdots & a^{i_2}_{j_2} & \cdots & a^{i_2}_{j_r} & \cdots & a^{i_2}_n & b^{i_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a^{i_r}_1 & a^{i_r}_2 & \cdots & a^{i_r}_{j_1} & \cdots & a^{i_r}_{j_2} & \cdots & a^{i_r}_{j_r} & \cdots & a^{i_r}_n & b^{i_r}
\end{pmatrix}$$

елементарні перетворення рядків таким чином, щоб базисні стовпчики цієї матриці набули вигляду перших r стовпчиків одиничної матриці порядку r, і привести цю розширену матрицю до такого спрощеного вигляду:

$$\overline{A^*}_{m\times(n+1)} = \begin{pmatrix} \overline{a_1^{i_1}} & \overline{a_2^{i_1}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_1}} & \overline{b^{i_1}} \\ \overline{a_1^{i_2}} & \overline{a_2^{i_2}} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \overline{a_n^{i_2}} & \overline{b^{i_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_1^{i_r}} & \overline{a_2^{i_r}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \overline{a_n^{i_r}} & \overline{b^{i_r}} \end{pmatrix}.$$

6. Використовуючи цю матрицю, записати СЛАР

$$\begin{cases} \overline{a_1^{i_1}}x^1 + \overline{a_2^{i_1}}x^2 + \cdots + 1\cdot x^{j_1} + \cdots + 0\cdot x^{j_2} + \cdots + 0\cdot x^{j_r} + \cdots + \overline{a_n^{i_1}}x^n = \overline{b}^{j_1} \\ \overline{a_1^{i_2}}x^1 + \overline{a_2^{i_2}}x^2 + \cdots + 0\cdot x^{j_1} + \cdots + 1\cdot x^{j_2} + \cdots + 0\cdot x^{j_r} + \cdots + \overline{a_n^{i_2}}x^n = \overline{b}^{j_2} \\ \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \\ \overline{a_1^{i_r}}x^1 + \overline{a_2^{i_r}}x^2 + \cdots + 0\cdot x^{j_1} + \cdots + 0\cdot x^{j_2} + \cdots + 1\cdot x^{j_r} + \cdots + \overline{a_n^{i_r}}x^n = \overline{b}^{j_r} \end{cases}$$

7. Виразити вибрані r базисних невідомих $x^{j_1}, x^{j_2}, \ldots, x^{j_r}$ через інші $(n-r)$ параметричних невідомих,

$$\begin{cases} x^{j_1} = \overline{b}^{j_1} - \overline{a_1^{i_1}}x^1 - \overline{a_2^{i_1}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_1}}x^{n-r} \\ x^{j_2} = \overline{b}^{j_2} - \overline{a_1^{i_2}}x^1 - \overline{a_2^{i_2}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_2}}x^{n-r} \\ \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \\ x^{j_r} = \overline{b}^{j_r} - \overline{a_1^{i_r}}x^1 - \overline{a_2^{i_r}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_r}}x^{n-r} \end{cases}$$

Ці рівності і є шуканими розв'язками заданої СЛАР.
Описаний вище алгоритм пошуку розв'язків СЛАР називається алгоритмом Гауса.

Для зручності перенумеруємо параметричні змінні наступним чином $x^1 \to x^{j_{r+1}}, x^2 \to x^{j_{r+2}}, \ldots, x^{n-r} \to x^{j_n}$

$$\begin{cases} x^{j_1} = \overline{b}^{j_1} - \overline{a_1^{i_1}}x^1 - \overline{a_2^{i_1}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_1}}x^{n-r} \\ x^{j_2} = \overline{b}^{j_2} - \overline{a_1^{i_2}}x^1 - \overline{a_2^{i_2}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_2}}x^{n-r} \\ \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \\ x^{j_r} = \overline{b}^{j_r} - \overline{a_1^{i_r}}x^1 - \overline{a_2^{i_r}}x^2 - \cdots - \overline{a_{n-r}^{i_r}}x^{n-r} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x^{j_1} = \overline{b}^{j_1} - \overline{a_{j_{r+1}}^{i_1}}x^{j_{r+1}} - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_1}}x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a_{j_n}^{i_1}}x^{j_n} \\ x^{j_2} = \overline{b}^{j_2} - \overline{a_{j_{r+1}}^{i_2}}x^{j_{r+1}} - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_2}}x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a_{j_n}^{i_2}}x^{j_n} \\ \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \\ x^{j_r} = \overline{b}^{j_r} - \overline{a_{j_{r+1}}^{i_r}}x^{j_{r+1}} - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_r}}x^{j_{r+1}} - \cdots - \overline{a_{j_n}^{i_r}}x^{j_n} \end{cases}$$

і в подальшому будемо використовувати цю форму запису розв'язків СЛАР.
1.85 Приклад. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Ранг матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

і ранг розширеної матриці системи

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

співпадають і дорівнюють 2, тому дана СЛАР є сумісною, має безліч розв'язків (оскільки кількість невідомих більша ніж кількість рівнянь), в ній два з трьох рівнянь є лінійно незалежними, дві невідомі величини є базисними, три невідомі величини є парметричними. Візьмемо в якості базисного мінора мінор другого порядку, що складається із чотирьох елементів, до яких входять другий і третій елементи першого та другого рядків

$$L^{1\,2}_{2\,3} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

При такому виборі базисного мінора перший і другий рядки є базисними рядками, другий і третій стовпчики є базисними стовпчиками, і, відповідно, невідомі величини x_2, x_3 будуть базисними невідомими, а невідомі x_1, x_4, x_5 є параметричними невідомими.

Третій рядок матриці A^* є лінійною комбінацією базисних рядків, тому останнє рівняння системи є наслідком перших двох рівнянь, і його можна відкинути і розв'язувати наступну СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 6. \end{cases}$$

Приведемо розширено матрицю цієї системи

$$\tilde{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

шляхом елементарних перетворень її рядків до спрощеного вигляду, в якому другий і третій стовпчики співпадають з першим і другим стовпчиками одиничної матриці другого порядку:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{домножимо перший} \\ \text{рядок на (-1)} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \text{до другого рядка} \\ \text{додаємо перший,} \\ \text{помножений на 2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{домножимо другий} \\ \text{рядок на (-1)} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{до першого рядка додаємо} \\ \text{другий, помножений на 3} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -12 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо наступну СЛАР

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - 12x_4 - x_5 = -3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$$

з якої виражаємо базисні невідомі величини x_2, x_3 через параметричні невідомі x_1, x_4, x_5

$$\begin{cases} x_2 = -3 + 2x_1 + 12x_4 + x_5 \\ x_3 = 5x_4 - x_5. \end{cases}$$

Присвоюючи параметричним невідомим x_1, x_4, x_5 довільні незалежні одне від одного чисельні значення $x_1 = \alpha, x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$ знаходимо

$$\begin{cases} x_2 = -3 + 2\alpha + 12\beta + \gamma \\ x_3 = 5\beta - \gamma, \end{cases}$$

і розв’язком даної СЛАР є вектор-стовпчик

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 + 2\alpha + 12\beta + \gamma \\ 5\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

5.5 Загальний розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Як правило, на практиці розв’язки заданої неоднорідної СЛАР записують не у вигляді, отриманому за допомогою алгоритму Гауса

$$\begin{cases} x^{j_1} = \overline{b}^{j_1} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+1}}} x^{j_{r+1}} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+2}}} x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a^{i_1}_{j_n}} x^{j_n} \\ x^{j_2} = \overline{b}^{j_2} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+1}}} x^{j_{r+1}} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+2}}} x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a^{i_2}_{j_n}} x^{j_n} \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x^{j_r} = \overline{b}^{j_r} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+1}}} x^{j_{r+1}} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+2}}} x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a^{i_r}_{j_n}} x^{j_n}, \end{cases}$$

а у вигляді суми будь-якого частинного розв’язку даної неоднорідної СЛАР і лінійної комбінації розв’язків однорідної СЛАР, яка відповідає даній неоднорідній СЛАР, і має назву фундаментальна система розв’язків СЛАР.

5.5.1 Фундаментальна система розв'язків (ФСР) однорідної СЛАР. Нормальна фундаментальна система розв'язків (НФСР) однорідної СЛАР.

Знайдемо розв'язки однорідної СЛАР, яка відповідає даній неоднорідній СЛАР

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{j_1}^1 & \cdots & a_{j_2}^1 & \cdots & a_{j_r}^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{j_1}^2 & \cdots & a_{j_2}^2 & \cdots & a_{j_r}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \cdots & a_{j_1}^{i_1} & \cdots & a_{j_2}^{i_1} & \cdots & a_{j_r}^{i_1} & \cdots & a_n^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \cdots & a_{j_1}^{i_2} & \cdots & a_{j_2}^{i_2} & \cdots & a_{j_r}^{i_2} & \cdots & a_n^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^{i_r} & a_2^{i_r} & \cdots & a_{j_1}^{i_r} & \cdots & a_{j_2}^{i_r} & \cdots & a_{j_r}^{i_r} & \cdots & a_n^{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{j_1}^m & \cdots & a_{j_2}^m & \cdots & a_{j_r}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_2} \\ \vdots \\ x^{j_r} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Будь-яка однорідна система лінійних рівнянь сумісна. Вона має один розв'язок $0, \ldots, 0$, який називається *тривіальним розв'язком* у випадку, коли ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих, або безліч розв'язків, коли кількість невідомих є більшою за ранг матриці системи. Розв'язок неоднорідної СЛАР, отриманий методом Гауса, очевидно є справедливим і для однорідних СЛАР і у цьому випадку матиме вигляд:

$$\begin{cases} x^{j_1} = -\overline{a_{j_{r+1}}^{i_1}} x^{j_{r+1}} - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_1}} x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a_{j_n}^{i_1}} x^{j_n} \\ x^{j_2} = -\overline{a_{j_{r+1}}^{i_2}} x^{j_{r+1}} - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_2}} x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a_{j_n}^{i_2}} x^{j_n} \\ \qquad \vdots \\ x^{j_r} = -\overline{a_{j_{r+1}}^{i_r}} x^{j_{r+1}} - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_r}} x^{j_{r+2}} - \cdots - \overline{a_{j_n}^{i_r}} x^{j_n} \end{cases}$$

(очевидно, що $\overline{b}^1 = \cdots = \overline{b}^n = 0$, оскільки при елементарних перетвореннях рядків нульовий стовпчик перейде тільки в нульовий). Звертаємо увагу на те, що у випадку розв'язування однорідної СЛАР базисні невідомі x^{j_1}, $x^{j_2}...x^{j_r}$ є лінійними комбінаціями параметричних невідомих $x^{j_{r+1}}$, ... ,x^{j_n}.

1.86 Теорема. Якщо стовпчики $|x\rangle_1, |x\rangle_2$ – розв'язки однорідної СЛАР, то їх лінійна комбінція $\alpha_1 |x\rangle_1 + \alpha_2 |x\rangle_2$ $(\alpha_1, \alpha_2$ — будь-які числа) також є розв'язком цієї системи.

Згідно умови теореми нам дано

$$A\,|x\rangle_1 = |0\rangle\,, \quad A\,|x\rangle_2 = |0\rangle\,.$$

Звідси випливає, враховуючи лінійність операції множення матриць, що

$$A\left[\alpha_1 |x\rangle_1 + \alpha_2 |x\rangle_2\right] = \alpha_1 A\,|x\rangle_1 + \alpha_2 A\,|x\rangle_2 = \alpha_1 |0\rangle + \alpha_2 |0\rangle = |0\rangle\,,$$

якими би не були числа α_1 і α_2.

Для доведення двох наступних теорем будемо, як і раніше, вважати, що базисний мінор матриці системи розташований у j_1, $j_2, \ldots j_r$ стовпчиках.

1.87 Теорема. Якщо ранг матриці однорідної СЛАР відносно n невідомих дорівнює r, то система має $(n-r)$ лінійно незалежних розв'язків.

Для доведення надамо параметричним змінним $x^{j_{r+1}}$, $x^{j_{r+2}}, \ldots, x^{j_{n-r}}$ такі $(n-r)$ набори значень:

$$
\begin{array}{rllll}
1: & x^{j_{r+1}} = \alpha_1, & x^{j_{r+2}} = \alpha_2, & \dots, & x^{j_n} = \alpha_{n-r} \\
2: & x^{j_{r+2}} = \beta_1, & x^{j_{r+2}} = \beta_2, & \dots, & x^{j_n} = \beta_{n-r} \\
 & \dots & \dots & \dots & \\
(n-r): & x^{j_{r+1}} = \gamma_1, & x^{j_{r+2}} = \gamma_2, & \dots, & x^{j_n} = \gamma_{n-r}
\end{array}
$$

де числа $\alpha_i, \beta_i, \dots \gamma_i$ є довільними числами, але ці числа повинні бути такими, що квадратна матриця порядку $(n-r)$ наступного вигляду:

$$
H_{n-r} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-r} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-r} \end{pmatrix}
$$

повинна бути невиродженою

$$
\det H_{n-r} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-r} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-r} \end{vmatrix} \neq 0
$$

Для кожного вибраного набору значень параметричних невідомих знайдемо відповідні значення базисних невідомих x^{j_1}, x^{j_2}, $\dots .x^{j_r}$, і отримані таким чином $(n-r)$ різних розв'язків даної однорідної СЛАР запишемо у вигляді стовпчиків:

$$
|x_1\rangle = \begin{pmatrix} x_1^{j_1} \\ x_1^{j_2} \\ \vdots \\ x_1^{j_r} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix}, \quad |x_2\rangle = \begin{pmatrix} x_2^{j_1} \\ x_2^{j_2} \\ \vdots \\ x_2^{j_r} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-r} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |x_{n-r}\rangle = \begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1} \\ x_{n-r}^{j_2} \\ \vdots \\ x_{n-r}^{j_r} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-r} \end{pmatrix},
$$

тут

$$
\begin{cases}
x_1^{j_1} = -\overline{\underline{a_{j_{r+1}}^{i_1}}}\alpha_1 - \overline{\underline{a_{j_{r+2}}^{i_1}}}\alpha_2 - \dots - \overline{\underline{a_{j_{n-r}}^{i_1}}}\alpha_{n-r} \\
x_1^{j_2} = -a_{j_{r+1}}^{i_2}\alpha_1 - a_{j_{r+2}}^{i_2}\alpha_2 - \dots - a_{j_{n-r}}^{i_2}\alpha_{n-r} \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_1^{j_r} = -\overline{a_{j_{r+1}}^{i_r}}\alpha_1 - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_r}}\alpha_2 - \dots - \overline{a_{j_{n-r}}^{i_r}}\alpha_{n-r}
\end{cases},
$$

$$
\begin{cases}
x_2^{j_1} = -\overline{\underline{a_{j_{r+1}}^{i_1}}}\beta_1 - \overline{\underline{a_{j_{r+2}}^{i_1}}}\beta_2 - \dots - \overline{\underline{a_{j_{n-r}}^{i_1}}}\beta_{n-r} \\
x_2^{j_2} = -a_{j_{r+1}}^{i_2}\beta_1 - a_{j_{r+2}}^{i_2}\beta_2 - \dots - a_{j_{n-r}}^{i_2}\beta_{n-r} \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_2^{j_r} = -\overline{a_{j_{r+1}}^{i_r}}\beta_1 - \overline{a_{j_{r+2}}^{i_r}}\beta_2 - \dots - \overline{a_{j_{n-r}}^{i_r}}\beta_{n-r}
\end{cases},
$$

$$\begin{cases} x^{j_1}_{n-r} = -\overline{a^{i_1}_{j_{r+1}}}\gamma_1 - \overline{a^{i_1}_{j_{r+2}}}\gamma_2 - \dots - \overline{a^{i_1}_{j_{n-r}}}\gamma_{n-r} \\ x^{j_2}_{n-r} = -\overline{a^{i_2}_{j_{r+1}}}\gamma_1 - \overline{a^{i_2}_{j_{r+2}}}\gamma_2 - \dots - \overline{a^{i_2}_{j_{n-r}}}\gamma_{n-r} \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x^{j_r}_{n-r} = -\overline{a^{i_r}_{j_{r+1}}}\gamma_1 - \overline{a^{i_r}_{j_{r+2}}}\gamma_2 - \dots - \overline{a^{i_r}_{j_{n-r}}}\gamma_{n-r}. \end{cases}$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними. Дійсно, складемо матрицю розміру $n\times(n-r)$ з стовпчиків $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$

$$\begin{pmatrix} x^{j_1}_1 & x^{j_1}_2 & & x^{j_1}_{n-r} \\ x^{j_2}_1 & x^{j_2}_2 & & x^{j_2}_{n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{j_r}_1 & x^{j_r}_2 & \dots & x^{j_r}_{n-r} \\ \alpha_1 & \beta_1 & & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-r} & \beta_{n-r} & & \gamma_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Вона має мінор порядку $(n-r)$, розташований в останніх $(n-r)$ рядках, який відмінний від нуля в силу зафіксованої раніше умови на вибрані довільним чином чисельні значення параметричних невідомих

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-r} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-r} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тому її ранг дорівнює $(n-r)$ і всі стовпчики є лінійно незалежними, а перші r рядків цієї матриці є лінійними комбінаціями останніх $(n-r)$ рядків.

Сукупність таких розв'язків $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$ називають **фундаментальною системою розв'язків (ФСР)** даної однорідної СЛАР.

У випадку, коли параметричним змінним $x^1, x^2, \dots, x^{n-r}$ присвоюють наступні специфічні $(n-r)$ наборів значень

$$\begin{aligned} 1:&\quad x^{j_{r+1}} = 1, \quad x^{j_{r+2}} = 0, \quad \dots, \quad x^{j_n} = 0 \\ 2:&\quad x^{j_{r+2}} = 0, \quad x^{j_{r+2}} = 1, \quad \dots, \quad x^{j_n} = 0 \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ (n-r):&\quad x^{j_{r+1}} = 0, \quad x^{j_{r+2}} = 0, \quad \dots, \quad x^{j_n} = 1, \end{aligned}$$

отримуємо сукупність лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР:

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} x^{j_1}_1 \\ x^{j_2}_1 \\ \vdots \\ x^{j_r}_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |x_2\rangle = \begin{pmatrix} x^{j_1}_2 \\ x^{j_2}_2 \\ \vdots \\ x^{j_r}_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |x_{n-r}\rangle = \begin{pmatrix} x^{j_1}_{n-r} \\ x^{j_2}_{n-r} \\ \vdots \\ x^{j_r}_{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

яку називають **нормальною фундаментальною системою розв'язків (НФСР)** даної однорідної СЛАР.

Підкреслимо, що НФСР це є частинний випадок ФСР.

Очевидно, що в силу щойно доведеної теореми 1.86 будь-яка лінійна комбінація вектор-стовпчиків $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$, які утворюють ФСР, дає нам вектор-стовпчик $|x\rangle = C_1 |x_1\rangle + \dots + C_{n-r} |x_{n-r}\rangle$, який також є розв'язком даної однорідної СЛАР.

1.88 Теорема. Нехай $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$ – довільна фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Тоді будь-який розв'язок $|\tilde{x}\rangle$ цієї ж однорідної СЛАР є лінійною комбінацією розв'язків $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$.

Справді, нехай маємо будь-який один розв'язок з нескінченної кількості розв'язків даної однорідної СЛАР

$$|\tilde{x}\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^r \\ \tilde{x}^{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix},$$

в якому $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2 ... \tilde{x}^r$ базисні невідомі, $\tilde{x}^{r+1}$, ... ,$\tilde{x}^n$ — параметричні невідомі, які пов'язані між собою за допомогою тих же самих коефіцієнтів, що й базисні і параметричні невідомі в розв'язках однорідної СЛАР, що утворюють ФСР

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = -\overline{a^{i_1}_{j_{r+1}}}\tilde{x}^{r+1} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+2}}}\tilde{x}^{r+2} - \dots - \overline{a^{i_1}_{j_n}}\tilde{x}^n \\ \tilde{x}^2 = -\overline{a^{i_2}_{j_{r+1}}}\tilde{x}^{r+1} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+2}}}\tilde{x}^{r+2} - \dots - \overline{a^{i_2}_{j_n}}\tilde{x}^n \\ \qquad :::: \quad :::: \quad :::: \quad :::: \quad :::: \quad :::: \quad :::: \\ \tilde{x}^r = -\overline{a^{i_r}_{j_{r+1}}}\tilde{x}^{r+1} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+2}}}\tilde{x}^{r+2} - \dots - \overline{a^{i_r}_{j_n}}\tilde{x}^n. \end{cases}$$

Для того, щоб переконатись в тому, що цей розв'язок є лінійною комбінацією лінійно незалежних розв'язків даної однорідної СЛАР $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$, які утоворюють фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь, побудуємо матрицю розмірами $n\times(n-r+1)$, стовпчиками якої є $(n-r)$ стовпчиків $|x_1\rangle, \dots, |x_{n-r}\rangle$ плюс вектор стовпчик $|\tilde{x}\rangle$, який також є розв'язком даної однорідної СЛАР і не входить до ФСР

$$\begin{pmatrix} x_1^{j_1} & x_2^{j_1} & & x_{n-r}^{j_1} & \tilde{x}^1 \\ x_1^{j_2} & x_2^{j_2} & & x_{n-r}^{j_2} & \tilde{x}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{j_r} & x_2^{j_r} & \dots & x_{n-r}^{j_r} & \tilde{x}^r \\ \alpha_1 & \beta_1 & & \gamma_1 & \tilde{x}^{r+1} \\ \alpha_2 & \beta_2 & & \gamma_2 & \tilde{x}^{r+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-r} & \beta_{n-r} & & \gamma_{n-r} & \tilde{x}^n \end{pmatrix}$$

Ця матриця може мати ранг не більший ніж $(n-r+1)$. З іншого боку, її ранг є не меншим ніж $(n-r)$, тому що вона має мінор порядку $(n-r)$, розташований в останніх $(n-r)$ рядках і перших $(n-r)$ стовпчиках, який відмінний від нуля в силу зафіксованої раніше умови на вибрані довільним чином чисельні значення параметричних невідомих

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-r} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Враховуючи те, що всі базисні змінні пов'язані з параметричними одними й тими ж співвідношеннями, можна стверджувати, що перші r рядків цієї матриці є лінійними комбінаціями останніх $(n-r)$ рядків, отже ранг цієї матриці дорівнює $(n-r)$ і не всі $(n-r+1)$ стовпчиків є лінійно незалежними. Оскільки стовпчики, які утворюють ФСР, є лінійно незалежними, то приходимо до висновку, що останній стовпчик цієї матриці є лінійною комбінацією цих стовпчиків

$$|\tilde{x}\rangle = C_1\,|x_1\rangle + C_2\,|x_2\rangle + \cdots + C_{n-r}\,|x_{n-r}\rangle\,,$$

або ж те саме у розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^r \\ \tilde{x}^{r+1} \\ \tilde{x}^{r+2} \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1^{j_1} \\ x_1^{j_2} \\ \vdots \\ x_1^{j_r} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2^{j_1} \\ x_2^{j_2} \\ \vdots \\ x_2^{j_r} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-r} \end{pmatrix} + \quad \dots \quad + C_{n-r} \begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1} \\ x_{n-r}^{j_2} \\ \vdots \\ x_{n-r}^{j_r} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-r} \end{pmatrix}.$$

5.5.2 Частинний і загальний розв'язок неоднорідної СЛАР

Для знаходження будь-якого частинного розв'язку даної неоднорідної СЛАР достатньо в отриманому за допомогою алгоритму Гауса розв'язку цієї СЛАР

$$\begin{cases} x^{j_1} = \overline{b}^{j_1} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+1}}} x^{j_{r+1}} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+2}}} x^{j_{r+2}} - \dots - \overline{a^{i_1}_{j_n}} x^{j_n} \\ x^{j_2} = \overline{b}^{j_2} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+1}}} x^{j_{r+1}} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+2}}} x^{j_{r+2}} - \dots - \overline{a^{i_2}_{j_n}} x^{j_n} \\ \qquad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \\ x^{j_r} = \overline{b}^{j_r} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+1}}} x^{j_{r+1}} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+2}}} x^{j_{r+2}} - \dots - \overline{a^{i_r}_{j_n}} x^{j_n} \end{cases}$$

присвоїти параметричним невідомим будь-які значення $x^{j_{r+1}} = x_0^{r+1}$, $x^{j_{r+2}} = x_0^{r+2}$ ... $x^{j_n} = x_0^n$і і знайти відповідні значення базисних невідомих x_0^1, ... ,x_0^r

$$\begin{cases} x_0^1 = \overline{b}^{j_1} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+1}}} x_0^{r+1} - \overline{a^{i_1}_{j_{r+2}}} x_0^{r+2} - \dots - \overline{a^{i_1}_{j_n}} x_0^n \\ x_0^2 = \overline{b}^{j_2} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+1}}} x_0^{r+1} - \overline{a^{i_2}_{j_{r+2}}} x_0^{r+2} - \dots - \overline{a^{i_2}_{j_n}} x_0^n \\ \qquad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \quad \vdots\vdots\vdots\vdots \\ x_0^r = \overline{b}^{j_r} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+1}}} x_0^{r+1} - \overline{a^{i_r}_{j_{r+2}}} x_0^{r+2} - \dots - \overline{a^{i_r}_{j_n}} x_0^n \end{cases}$$

Знайдений таким чином вектор-стовпчик

$$|x_0\rangle = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^r \\ x_0^{r+1} \\ x_0^{r+2} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$$

буде частинним розв'язком заданої неоднорідної СЛАР.

Зауважимо, що як правило, при пошуку частинного розв'язку параметричним невідомим присвоюють значення 0 і при такому виборі шуканий розв'язок очевидно матиме вигляд:

$$|x_0\rangle = \begin{pmatrix} \bar{b}^{j_1} \\ \bar{b}^{j_2} \\ \vdots \\ \bar{b}^{j_r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи знайдені частинний розв'язок і ФСР однорідної СЛАР побудуємо найбільш загальний розв'язок неоднорідної СЛАР.

1.89 Теорема. Якщо $|x_1\rangle, \ldots, |x_{n-r}\rangle$ – фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР $A|x\rangle = |0\rangle$, а $|x_0\rangle$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної СЛАР $A|x\rangle = |b\rangle$ (основні матриці систем обох СЛАР ідентичні), то стовпчик

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^r \\ x_0^{r+1} \\ x_0^{r+2} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} x_1^{j_1} \\ x_1^{j_2} \\ \vdots \\ x_1^{j_r} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2^{j_1} \\ x_2^{j_2} \\ \vdots \\ x_2^{j_r} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-r} \end{pmatrix} + \quad \ldots \quad + C_{n-r} \begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1} \\ x_{n-r}^{j_2} \\ \vdots \\ x_{n-r}^{j_r} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-r} \end{pmatrix}$$

за будь-яких значень чисел $C_1, \ldots, C_{n-r}$ є розв'язком заданої неоднорідної СЛАР. Такий розв'язок називається **загальним розв'язком даної неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь**.

Доведення: дійсно, враховуючи, що згідно умови $A|x_0\rangle = |b\rangle$, і $A|x_1\rangle = A|x_2\rangle = \ldots = A|x_{n-r}\rangle = |0\rangle$ маємо

$$A\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^r\\ x^{r+1}\\ x^{r+2}\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix} = A\left[\begin{pmatrix} x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^r\\ x_0^{r+1}\\ x_0^{r+2}\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} x_1^{j_1}\\ x_1^{j_2}\\ \vdots\\ x_1^{j_r}\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x_2^{j_1}\\ x_2^{j_2}\\ \vdots\\ x_2^{j_r}\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-r} \end{pmatrix} + \quad \dots \quad + C_{n-r}\begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1}\\ x_{n-r}^{j_2}\\ \vdots\\ x_{n-r}^{j_r}\\ \gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_{n-r} = \end{pmatrix}\right]$$

$$= A\begin{pmatrix} x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^r\\ x_0^{r+1}\\ x_0^{r+2}\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix} + C_1A\begin{pmatrix} x_1^{j_1}\\ x_1^{j_2}\\ \vdots\\ x_1^{j_r}\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} + C_2A\begin{pmatrix} x_2^{j_1}\\ x_2^{j_2}\\ \vdots\\ x_2^{j_r}\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-r} \end{pmatrix} + \quad \dots \quad + C_{n-r}A\begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1}\\ x_{n-r}^{j_2}\\ \vdots\\ x_{n-r}^{j_r}\\ \gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^m \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} + \quad \dots \quad + C_{n-r}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^m \end{pmatrix}$$

Навпаки, для кожного розв'язку заданої неоднорідної СЛАР знайдуться такі числа $C_1, \dots, C_{n-r}$, для яких цей розв'язок має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^r\\ x^{r+1}\\ x^{r+2}\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^r\\ x_0^{r+1}\\ x_0^{r+2}\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} x_1^{j_1}\\ x_1^{j_2}\\ \vdots\\ x_1^{j_r}\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x_2^{j_1}\\ x_2^{j_2}\\ \vdots\\ x_2^{j_r}\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-r} \end{pmatrix} + \quad \dots \quad + C_{n-r}\begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1}\\ x_{n-r}^{j_2}\\ \vdots\\ x_{n-r}^{j_r}\\ \gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Доведення: дійсно, вважаючи що стовпчики $|x\rangle$, $|x_0\rangle$, і $|x_1\rangle, |x_2\rangle, |x_{n-r}\rangle$ є задані і всі їх елементи відомі, а коефіцієнти C_1, $C_2, ..., C_{n-r}$ невідомі, маємо неоднорідну СЛАР з n рівнянь відносно $(n-r)$ невідомих величин C_1, $C_2, ..., C_{n-r}$:

$$C_1\begin{pmatrix} x_1^{j_1}\\ x_1^{j_2}\\ \vdots\\ x_1^{j_r}\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x_2^{j_1}\\ x_2^{j_2}\\ \vdots\\ x_2^{j_r}\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-r} \end{pmatrix} + \quad \dots \quad + C_{n-r}\begin{pmatrix} x_{n-r}^{j_1}\\ x_{n-r}^{j_2}\\ \vdots\\ x_{n-r}^{j_r}\\ \gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^r\\ x^{r+1}\\ x^{r+2}\\ \vdots\\ x^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^r\\ x_0^{r+1}\\ x_0^{r+2}\\ \vdots\\ x_0^n \end{pmatrix}.$$

В силу того, що всі вектор-стовпчики, які входять в цю СЛАР, є розв'язками заданої неоднорідної СЛАР, ранги основної і розширеної матриць цієї СЛАР однакові і дорівнюють $(n-r)$. Отже, ця СЛАР є сумісною і має єдиний розв'язок в силу того, що ранг дорівнює кількості невідомих.

1.90 Приклад. Знайти ФСР, частинний розв'язок і загальний розв'язок заданої СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

В попередньому прикладі було знайдено, що застосування до цієї СЛАР алгоритму Гауса і вибір невідомих x^2 і x^3 в якості базисних, а невідомих x^1, x^4 і x^5 — параметричних, дозволяє записати цю СЛАР у такому вигляді

$$\begin{cases} x_2 = -3 + 2x_1 + 12x_4 + x_5 \\ x_3 = 0 + 5x_4 - x_5. \end{cases}$$

Скористаємось для розв'язування поставленої задачі цим результатом.

Для знаходження загального розв'язку необхідно знайти будь-який частинний розв'язок даної неоднорідної СЛАР і будь-яку ФСР відповідної однорідної СЛАР.

- Знайдемо будь-який частинний розв'язок даної неоднорідної СЛАР, для чого в еквівалентній до заданої СЛАР системі рівнянь

  $$\begin{cases} x_2 = -3 + 2x_1 + 12x_4 + x_5 \\ x_3 = 0 + 5x_4 - x_5 \end{cases}$$

  покладемо парметричні змінні рівними нулю: $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, і тоді

  $$\begin{cases} x_2 = -3 \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

  і шуканий частинний розв'язок є:

  $$|X_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Для знаходження ФСР розв'яжемо відповідну даній неоднорідній СЛАР однорідну СЛАР

  $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

  Ранг матриці цієї системи дорівнює 2, тому вимірність простору розв'язків даної системи дорівнює $n - r = 5 - 2 = 3$, а її ФСР складається з трьох розв'язків. Очевидно, що пошук розв'язків цієї однорідної СЛАР зводиться до пошуку розв'язків наступної СЛАР:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 12x_4 + x_5, \\ x_3 = 5x_4 - x_5. \end{cases}$$

Знайдемо три лінійно незалежні розв'язки цієї СЛАР, які утворюють ФСР, підібравши відповідним чином значення параметричних змінних:

1) нехай $x_1 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2$, тоді

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 12x_4 + x_5 = -2 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 2 = 26 \\ x_3 = 5x_4 - x_5 = 5 \cdot 2 - 2 = 8, \end{cases}$$

і перший розв'язок має вигляд:

$$|X_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 26 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) нехай $x_1 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, тоді:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 12x_4 + x_5 = -2 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 3 = 13 \\ x_3 = 5x_4 - x_5 = 5 \cdot 1 - 3 = 2, \end{cases}$$

і другий розв'язок має вигляд:

$$|X_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3) нехай $x_1 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, тоді:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 12x_4 + x_5 = -2 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 1 = -1 \\ x_3 = 5x_4 - x_5 = 5 \cdot 0 - 1 = -1, \end{cases}$$

і третій розв'язок має вигляд:

$$|X_3\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Переконавшись що

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

стверджуємо, що знайдені розв'язки $|X_1\rangle$, $|X_2\rangle$ і $|X_3\rangle$ є лінійно незалежними, отже можуть бути вибрані як ФСР.

Отже, знайшовши частинний розв'язок СЛАР і її ФСР, можемо записати загальний розв'язок СЛАР:

$$|X\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 26 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5.3 Аналіз взаємного розташування двох прямих на площині і в просторі за допомогою теореми Кронекера-Капеллі

1.91 Приклад. Як приклад, на основі теореми Кронекера-Капеллі проаналізуємо взаємне розташування двох прямих на площині і в просторі.

Випадок 1. Критерієм того, що дві прямі $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, які лежать в одній площині, є паралельними є несумісність такої СЛАР

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2, \end{cases}$$

тобто, якщо

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} < \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \end{pmatrix}$$

Випадок 2. Аналіз взаємного розташування двох прямих у просторі:

Відомо, що рівняння прямої в просторі можна записати як $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{a}t$, де $\overrightarrow{r_0}$ – радіус-вектор будь-якої точки, що належить даній прямій (початкова точка), $\overrightarrow{a}$ – направляючий вектор цієї прямої.

Нехай задано дві прямі в просторі $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{a_1}t_1$ і $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{a_2}t_2$, де $\overrightarrow{r_1}$ і $\overrightarrow{r_2}$ – радіус-вектори початкових точок прямих, а $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ – відповідно направляючі вектори прямих. Ці прямі можуть бути мимобіжними, паралельними, співпадати або перетинатись. Для того, щоб з'ясувати, яким чином ці прямі взаємно розташовані, проаналізуємо СЛАР, яка слідує з наступної векторної рівності:

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{a_1}t_1 = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{a_2}t_2,$$

з якої отримуємо таку СЛАР відносно невідомих величин t_1 і t_2:

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{a_1}t_1 = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{a_2}t_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{1x}t_1 - a_{2x}t_2 = x_2 - x_1 \\ a_{1y}t_1 - a_{2y}t_2 = y_2 - y_1 \\ a_{1z}t_1 - a_{2z}t_2 = z_2 - z_1. \end{cases}$$

Маємо СЛАР з трьох рівнянь відносно двох невідомих t_1 і t_2. Ця СЛАР може бути:
1) несумісною, що означатиме, що прямі або мимобіжні, або паралельні;
2) сумісною і мати єдиний розв'язок, що означатиме, що прямі перетинаються і мають одну спільну точку;
3) сумісною, і мати безліч розв'язків, що означає що прямі співпадають.

Аналіз співвідношення між рангом матриці даної СЛАР

$$A = \begin{pmatrix} a_{1x} & (-a_{2x}) \\ a_{1y} & (-a_{2y}) \\ a_{1z} & (-a_{2z}) \end{pmatrix}$$

і рангом розширеної матриці СЛАР

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{1x} & (-a_{2x}) & x_2 - x_1 \\ a_{1y} & (-a_{2y}) & y_2 - y_1 \\ a_{1z} & (-a_{2z}) & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

та чисельні значення рангів дають можливість провести класифікацію взаємного розташування двох заданих прямих.

Очевидно, що можливі значення рангу розширеної матриці системи лежать в межах від 1 до 3: $\operatorname{Rg} A^* = 1, 2, 3$, а значення рангу матриці системи можуть бути рівними або 1 або 2: $\operatorname{Rg} A = 1, 2$.

1) Нехай $\operatorname{Rg} A^* = 3$, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

а $\operatorname{Rg} A = 2$. Виконання цієї умови означає, що дана СЛАР є несумісною, і задані прямі не мають спільних точок. Так як направляючі вектори прямих $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ у цьому випадку є не паралельні, то прямі є мимобіжними. Це узгоджується з тим, що умовою мимобіжності прямих є некомпланарність векторів $(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$, $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$, тобто, якщо задовільняється

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо ж $\Delta = 0$, то прямі лежать в одній площині і або перетинаються, або паралельні, або збігаються.

Отже, у випадку, коли $\operatorname{Rg} A^* = 3$, $\operatorname{Rg} A = 2$, прямі є мимобіжними.

2) Випадок $\operatorname{Rg} A^* = 2$, $\operatorname{Rg} A = 2$. У цьому випадку дана СЛАР є сумісною і має єдиний розв'язок, який дає координати точки перетину цих прямих. Дійсно, прямі перетинаються, якщо $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ не є колінеарними, тобто в цьому випадку

$$\operatorname{Rg} \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} \\ a_{1y} & a_{2y} \\ a_{1z} & a_{2z} \end{pmatrix} = 2$$

і збігається з

$$\operatorname{Rg} \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & x_2 - x_1 \\ a_{1y} & a_{2y} & y_2 - y_1 \\ a_{1z} & a_{2z} & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 2,$$

тобто кількість базисних змінних – 2, параметричних змінних немає. Отже, дана СЛАР має єдиний розв'язок, який дає значення параметрів t_1 і t_2, що визначають точку перетину заданих прямих. Єдиний розв'язок СЛАР дасть нам координати точки перетину двох прямих.

3) $\operatorname{Rg} A^* = 2$, $\operatorname{Rg} A = 1$. В цьому випадку СЛАР є несумісною, отже прямі є паралельними.

Дійсно, якщо прямі паралельні, то вектори $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ є колінеарними, тобто $\overrightarrow{a_1} = \alpha \overrightarrow{a_2}$, тоді

$$\operatorname{Rg} \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} \\ a_{1y} & a_{2y} \\ a_{1z} & a_{2z} \end{pmatrix} = 1.$$

Якщо в цьому випадку $(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$ є не колінеарним з векторами $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$, то тоді прямі паралельні, і

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & x_2 - x_1 \\ a_{1y} & a_{2y} & y_2 - y_1 \\ a_{1z} & a_{2z} & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 2,$$

тобто СЛАР згідно з теоремою Кронекера-Капеллі є несумісною.

4) Нехай $\operatorname{Rg} A^* = 1$, $\operatorname{Rg} A = 1$. Тоді СЛАР є сумісною і має безліч розв'язків, тобто прямі співпадають. Дійсно, якщо $(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$ є колінеарним до $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$, то прямі збігаються. У цьому випадку ранги основної та розширеної матриць СЛАР збігаються й дорівнюють 1, тобто в цьому випадку СЛАР має безліч розв'язків, як і має бути.

5.6 Пошук матриці, оберненої до даної

За допомогою методів розв'язування СЛАР можна побудувати алгоритм пошуку матриці, оберненої до даної.

1.92 Теорема. Кожна квадратна матриця з детермінантом, відмінним від нуля, має обернену матрицю, і притому тільки одну.

Дійсно, нехай матриця

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

є невиродженою, тобто $\det A_n \neq 0$. Тоді пошук матриці A_n^{-1}, оберненої до даної A_n, зводиться до розв'язку матричного рівняння:

$$A_n \cdot A_n^{-1} = E_n, \quad E_n \text{ -- одинична матриця порядку } n.$$

Записуємо це матричне рівняння у явному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^j & x_2^j & \dots & x_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

і в результаті отримуємо n систем лінійних алгебраїчних рівнянь, кожна з яких складається з n рівнянь відносно n невідомих: перша СЛАР - відносно невідомих елементів першого стовпчика шуканої оберненої матриці, друга СЛАР - відносно невідомих елементів другого стовпчика шуканої оберненої матриці, і так далі, до СЛАР під номером n відносно невідомих елементів n-го стовпчика матриці A_n^{-1}:

$$\begin{cases} a_1^1x_1^1 + a_2^1x_1^2 + \cdots + a_n^1x_1^n = 1 \\ a_1^2x_1^1 + a_2^2x_1^2 + \cdots + a_n^2x_1^n = 0 \\ \ldots \\ a_1^jx_1^1 + a_2^jx_1^2 + \cdots + a_n^jx_1^n = 0 \\ \ldots \\ a_1^nx_1^1 + a_2^nx_1^2 + \cdots + a_n^nx_1^n = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_1^1x_2^1 + a_2^1x_2^2 + \cdots + a_n^1x_2^n = 0 \\ a_1^2x_2^1 + a_2^2x_2^2 + \cdots + a_n^2x_2^n = 1 \\ \ldots \\ a_1^jx_2^1 + a_2^jx_2^2 + \cdots + a_n^jx_2^n = 0 \\ \ldots \\ a_1^nx_2^1 + a_2^nx_2^2 + \cdots + a_n^nx_2^n = 0 \end{cases}, \ldots$$

$$\ldots\begin{cases} a_1^1x_j^1 + a_2^1x_j^2 + \cdots + a_n^1x_j^n = 0 \\ a_1^2x_j^1 + a_2^2x_j^2 + \cdots + a_n^2x_j^n = 0 \\ \ldots \\ a_1^jx_j^1 + a_2^jx_j^2 + \cdots + a_n^jx_j^n = 1 \\ \ldots \\ a_1^nx_j^1 + a_2^nx_j^2 + \cdots + a_n^nx_j^n = 0 \end{cases}, \quad \ldots \quad \begin{cases} a_1^1x_n^1 + a_2^1x_n^2 + \cdots + a_n^1x_n^n = 0 \\ a_1^2x_n^1 + a_2^2x_n^2 + \cdots + a_n^2x_n^n = 0 \\ \ldots \\ a_1^jx_n^1 + a_2^jx_n^2 + \cdots + a_n^jx_n^n = 0 \\ \ldots \\ a_1^nx_n^1 + a_2^nx_n^2 + \cdots + a_n^nx_n^n = 1 \end{cases}.$$

Очевидно, що у всіх цих СЛАР одна й та ж сама матриця системи, яка співпадає з A_n. Ці n СЛАР можуть бути записані таким чином:

$$A_n \left|x\right\rangle_j = \left|e\right\rangle_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

де $\left|x\right\rangle_j$ відповідний стовпчик шуканої матриці, $\left|e\right\rangle_j$- відповідний стовпчик одиничної матриці. В силу того, що матриця A_n є невиродженою, згідно теоремі Крамера кожна з n СЛАР має єдиний розв'язок, отже для даної невиродженої матриці A_n існує єдина обернена до неї матриця. Теорему доведено.

На практиці для пошуку оберненої матриці не має потреби розв'язувати n СЛАР. Справді, застосовуючи до кожної з вищезаписаних n СЛАР метод Гауса, можна ці СЛАР звести до таких еквівалентних їм СЛАР:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1^1 + 0\cdot x_1^2 + \cdots + 0\cdot x_1^n = b_1^1 \\ 0\cdot x_1^1 + 1\cdot x_1^2 + \cdots + 0\cdot x_1^n = b_1^2 \\ \ldots \\ 0\cdot x_1^1 + \cdots + 1\cdot x_1^j + \cdots + 0\cdot x_1^n = b_1^j \\ \ldots \\ 0\cdot x_1^1 + 0\cdot x_1^2 + \cdots + 0\cdot x_1^n = b_1^n \end{cases}, \begin{cases} 1\cdot x_2^1 + 0\cdot x_2^2 + \cdots + 0\cdot x_2^n = b_2^1 \\ 0\cdot x_2^1 + 1\cdot x_2^2 + \cdots + 0\cdot x_2^n = b_2^2 \\ \ldots \\ 0\cdot x_2^1 + \cdots + 1\cdot x_2^j + \cdots + 0\cdot x_2^n = b_2^j \\ \ldots \\ 0\cdot x_2^1 + 0\cdot x_2^2 + \cdots + 0\cdot x_2^n = b_2^n \end{cases}, \ldots$$

$$\begin{cases} 1\cdot x_j^1 + 0\cdot x_j^2 + \cdots + 0\cdot x_j^n = b_j^1 \\ 0\cdot x_j^1 + 1\cdot x_j^2 + \cdots + 0\cdot x_j^n = b_j^2 \\ \ldots \\ 0\cdot x_j^1 + \cdots + 1\cdot x_j^j + \cdots + 0\cdot x_j^n = b_j^j \\ \ldots \\ 0\cdot x_j^1 + 0\cdot x_j^2 + \cdots + 0\cdot x_j^n = b_j^n \end{cases}, \ldots, \begin{cases} 1\cdot x_n^1 + 0\cdot x_n^2 + \cdots + 0\cdot x_n^n = b_n^1 \\ 0\cdot x_n^1 + 1\cdot x_n^2 + \cdots + 0\cdot x_n^n = b_n^2 \\ \ldots \\ 0\cdot x_n^1 + \cdots + 1\cdot x_n^j + \cdots + 0\cdot x_n^n = b_n^j \\ \ldots \\ 0\cdot x_n^1 + 0\cdot x_n^2 + \cdots + 0\cdot x_n^n = b_n^n \end{cases}$$

звідки знаходимо елементи всіх стовпчиків шуканої матриці

$$|x\rangle_j = \begin{pmatrix} b_j^1 \\ b_j^2 \\ \vdots \\ b_j^1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Нескладно бачити, що розв'язуючи кожну систему методом Гауса, в силу того, що $\det A \neq 0$, ми елементарними перетвореннями весь час перетворювали матрицю A_n на одиничну матрицю. При цьому стовпчики вільних членів $|e\rangle_j$ перетворюються на розв'язки системи $|x\rangle_j$, у яких у цьому випадку відсутні параметричні невідомі. За різних j системи рівнянь відрізняються лише стовпчиками вільних членів, тому елементарні перетворення рядків розширеної матриці одні й ті самі при будь-яких j. Отже, можна розв'язувати всі СЛАР одночасно, приписавши до A_n стовпчики вільних членів усіх систем і застосувавши алгоритм Гауса до такої прямокутної матриці розмірів $n \times 2n$, за допомогою елементарних перетворень рядків матриці перетворити її ліву половину на одиничну матрицю, то при цьому її права половина перетвориться на матрицю ${A_n}^{-1}$.

$$[A_n|E_n]_{n\times 2n} \equiv \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_n^j & 0 & 0 & \dots 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \to \text{алгоритм Гауса} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 \dots & 0 & b_1^j & b_2^j & \dots & b_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix} \equiv [E_n|A_n^{-1}]_{n\times 2n}$$

Література

[1] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука., 1987. — 320 с.

[2] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Физматлит., 2001. — 272 с.

[3] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит., 2001. — 272 с.

[4] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. — М.: Физматлит., 2001. — 368 с.

[5] Курош А. Г. Курс высшей алгебры — М.: Наука., 1968. — 432 с.

[6] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука., 1970. — 400 с.

[7] Придатченко Ю. В., Львов В. А. Алгебра для фізиків: вектори і координати: Навч. посібник. — Видавничо–поліграфічний центр «Київський університет», 2002. — 87 с.

[8] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука., 1971. — 272 с.

[9] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука., 1970. — 528 с.

[10] Кострикин А. И. Введение в алгебру — М.: Наука., 1977. — 496 с.

[11] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия — М.: Наука., 1986. — 309 с.

[12] Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука., 1982. — 272 с.

[13] Схоутен А. Я. Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука., 1965. — 456 с.

[14] Постников М. М. Аналитическая геометрия. — М.: Наука., 1979. — 336 с.

[15] Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука., 1979. — 336 с.

[16] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир., 1989. — 655 с.