

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Ю.Г. Рапопорт, А.В. Грицай

Нелінійні хвильові процеси в плазмі

Навчальний посібник

Київ-2020

УДК 533.9(075.8)
Р 23

Рецензенти:
д.ф.-м.н. О.Н. Кришталь
д.ф.-м.н. В.Н. Криводубський
к.ф.-м.н. О.І. Кельник

*Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету
(протокол № ... від ... 2020 року)*

Рапопорт Ю.Г., Грицай А.В.

Нелінійні хвильові процеси в плазмі: навчальний посібник / Ю.Г. Рапопорт,
А.В. Грицай. – 2020. – 101 с.

ISBN

УДК 533.9(075.8)

ISBN

© Ю.Г. Рапопорт, А.В. Грицай, 2020

Вступ

Систематичне дослідження нелінійних процесів у фізиці відбувається із другої половини ХХ ст. Це стосується різноманітних галузей, зокрема, теорії коливань, гідродинаміки, оптики. Окремі важливі результати, безумовно, були отримані раніше, але не дістали належної їм оцінки – так, опис солітона на мілкій воді зроблений Дж. С. Расселом у 1834 р., а диференціальне рівняння для нього виведене Д. Кортевегом і Г. де Врізом у 1895 р. Втім, розуміння загальнофізичного чи й загальнонаукового змісту подібних результатів прийшло лише через багато десятиліть після їх появи.

Особливо сприятливі умови для виникнення нелінійних явищ виникають у плазмі. Поріг нелінійності тут досягається значно легше, ніж, скажімо, в оптиці, де для цього потрібне потужне висококогерентне лазерне випромінювання. Як наслідок, знайомство з нелінійними процесами є необхідним для розуміння фізики плазми загалом.

Існує не дуже багато літературних джерел, які дозволяли б студентам ознайомитись із найважливішими нелінійними явищами у плазмі. Переважно доводиться користуватися загальними посібниками з коливань та хвиль, що в більшій чи меншій мірі знайомлять із плазмовою тематикою – зокрема, це книги І.О. Анісімова, М.І. Рабиновича і Д.І. Трубецкова, Д.І. Трубецкова і М.М. Рискіна. Також корисною є література, присвячена фізиці плазми, яка частково зачіпає й нелінійну тематику – монографії Б.Б. Кадомцева, Л.А. Арцимовича і Р.З. Сагдєєва. Водночас, навіть такого плану книги, не кажучи вже про переважну більшість статей у наукових журналах, далеко не завжди зрозумілі для студента при першому ознайомленні. Тому виникає потреба в методичних посібниках, які дають змогу, серед іншого більш ретельно відпрацювати необхідний математичний апарат.

Пропонований посібник складається із трьох частин. У першій розглядається трихвильова взаємодія, вивчення якої дає змогу ознайомитись із процесами трансформації хвиль у плазмі. Аналізуються базові моделі: взаємодія за умови точного синхронізму і наближення випадкових фаз. Коректне уявлення про трихвильову взаємодію важливе для розуміння складніших процесів у плазмі включно з турбулентністю.

У другій та третій частинах аналізуються основні рівняння, які описують нелінійні явища у плазмі. Обґрунтовується нелінійне параболічне рівняння, на його основі описуються явища самостиснення і самофокусування хвильових пакетів, характерні для низки розділів фізики. Розглядаються одновимірні задачі, що приводять до нелінійного рівняння Шредінгера, рівнянь Кортевега – де Вріза і синус-Гордона. Головна увага приділяється пошуку їх солітонних розв'язків. Дано уявлення про нелінійні процеси в неоднорідній плазмі – досліджується рівняння Хасегави – Міми.

Наведений матеріал буде корисним при вивченні курсу "Нелінійні хвильові процеси в плазмі", а також може використовуватися при самостійному ознайомленні з відповідною тематикою.

Створення даного посібника не було б можливим без різнопланової роботи багатьох людей. Автори висловлюють подяку О.П. Верхоглядівій та О.В. Агапітову, які протягом значного часу забезпечували викладання курсів із фізики плазми на кафедрі фізики космосу. Необхідно згадати студентів кафедри – робота з ними сприяла глибшому з'язуванню наукових питань і методичній діяльності. Це, зокрема, А. Бовчалюк, А. Кузьмич, А. Леонтьєв, В. Шастун, А. Вощепинець, В. Бовчалюк, Д. Менджул, О. Іваніга, В. Лях, А. Ткаченко, Є. Ткаченко, М. Хелашвілі, М. Василенко, А. Малюк, С. Дилда, Ю. Калініна, О. Компанієць, Б. Петренко – усвідомлюємо, що цей перелік не є вичерпним. Також висловлюємо вдячність З.І. Грицай за допомогу в роботі з текстом посібника.

І. ПАРАМЕТРИЧНА ВЗАЄМОДІЯ ХВИЛЬ У ПЛАЗМІ

1. Основні характеристики та поняття для лінійних та нелінійних хвиль та хвильових пакетів. Дисперсія та дифракція хвиль

Хвильові процеси полягають у поширенні коливань у просторі. Як і коливання, хвилі характерні для найрізноманітніших систем. При цьому, рівняння однакового типу описують процеси, в яких змінюються неоднакові величини у відмінних за своїми властивостями середовищах. Скажімо, існують механічні хвилі, зумовлені варіаціями механічних параметрів – зокрема, звукові, внутрішні гравітаційні, поверхневі; другий і третій типи виникають у гравітаційному полі. Електромагнітні хвилі полягають у поширенні коливань електромагнітного поля, гравітаційні – збурень метрики простору. Для опису плазмових хвиль важливо відстежувати варіації як електричного й магнітного поля, так і концентрації частинок.

Хвилі в тій чи іншій мірі розглядаються при вивченні всіх розділів фізики, тому обмежимося нагадуванням основних понять. У лінійній задачі маємо хвильове рівняння – диференціальне рівняння в частинних похідних гіперболічного типу:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad (1.1)$$

v – швидкість хвилі, u – величина, яка осцилює при поширенні хвилі. Розв'язок вказаного рівняння (1.1) можна записати як

$$u = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} + \text{к.с.} \quad (1.2)$$

Невід'ємну величину A називають амплітудою хвилі, \vec{k} – хвильовим вектором, ω – коловою (або ж циклічною) частотою, φ_0 – початковою фазою. Загалом, термін "фаза" застосовують до

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0. \quad (1.3)$$

Модуль хвильового вектора – це хвильове число:

$$k = |\vec{k}|.$$

Довжина хвилі λ характеризує просторовий період, при поширенні вздовж осі x :

$$u(x + \lambda, t) = u(x, t).$$

У той же спосіб, для часового періоду T :

$$u(\vec{r}, t + T) = u(\vec{r}, t).$$

На основі сказаного,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Вводять також лінійну частоту, яка характеризує кількість коливань за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Для одиниць лінійної частоти, на відміну від колової, традиційно використовують позначення "Герц (Гц)".

У наведеному рівнянні та його розв'язку швидкість хвилі, її амплітуда, хвильовий вектор, частота та початкова фаза є сталими – вони не змінюються у просторі й часі. При підстановці розв'язку вказаного виду до хвильового рівняння знаходимо:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \text{ чи}$$

$$k = \pm \frac{\omega}{v},$$

різний знак хвильового числа відповідає протилежним напрямком хвильового вектора і, відповідно, поширення хвилі. Загалом, співвідношення виду

$$\omega = \omega(k)$$

називають дисперсійним рівнянням. У даному випадку маємо лінійну залежність,

$$\omega = kv.$$

Розглянута хвиля має чітко визначену частоту ω ; таку хвилю називають монохроматичною.

Швидкість, яка входить у хвильове рівняння, описує рух поверхні сталої фази, тому використовують термін "фазова швидкість" і позначення v_{ph} . Дійсно, з означення фази

$$\vec{k} \cdot d\vec{r} = \omega dt;$$

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_{ph} = \omega.$$

Фазова швидкість і хвильовий вектор паралельні, тому

$$\vec{v}_{ph} = \frac{\omega \vec{k}}{k^2}. \quad (1.4)$$

Із такою швидкістю поширюється гармонічна хвиля, не змінюючи форми.

Монохроматичне наближення не завжди виправдане. Така хвиля має сталі значення ω та \vec{k} в усьому просторі в будь-який момент часу. Хвильова картина незмінна, відповідно, не реалізується перенос енергії. Тому застосовують поняття хвильових пакетів, які охоплюють певний частотний діапазон. Стосовно залежності частоти від хвильового вектора, то в загальному випадку вона не мусить бути лінійною. В ізотропному середовищі важливий тільки модуль хвильового вектора, а не його напрямок. Якщо виконати розклад у ряд Тейлора поблизу значення k_0 , то

$$\omega = \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} k + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} k^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \right|_{k=k_0} k^3 + \dots$$

Величину

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \quad (1.5)$$

називають груповою швидкістю, вона характеризує перенос енергії хвильовим пакетом. Тільки при лінійній залежності $\omega(k)$

$$v_g = v_{ph},$$

інакше такої рівності немає. Залежність $v_{ph}(\omega)$ називають дисперсією, вона означає різні фазові швидкості поширення хвиль із різними частотами. Відповідно, немонахроматичне збурення при наявності дисперсії змінює свою форму. Зазначимо, що для групової швидкості (1.5) справедливо:

$$\vec{v}_g = \frac{\partial(\vec{k} \cdot \vec{v}_{ph})}{\partial \vec{k}} = \vec{v}_{ph} + \vec{k} \frac{\partial \vec{v}_{ph}}{\partial \vec{k}}.$$

Іншим важливим явищем є дифракція, що описує відхилення поширення хвиль від прямолінійного чи зміну форми пучка при його поширенні. Нелінійність хвилі проявляється в залежності амплітуди від частоти,

$$A = A(\omega).$$

Конкретні прояви й наслідки нелінійності будуть розглядатись у подальших розділах, вплив дифракції і дисперсії аналізується в частині II.

2. Нелінійність у плазмі, базові властивості нелінійних систем

У плазмі можливе збудження багатьох мод коливань. Так, навіть у холодній замагніченій плазмі за умови однорідності здатні розповсюджуватися п'ять типів хвиль: альвенівська, швидка магнітозвукова, повільна незвичайна, звичайна і швидка незвичайна. Появу нелінійності можна описати такою схемою:

малі відхилення параметрів плазми від рівноважних значень

↓

слабкий струм, поява пучків заряджених частинок

↓

лінійні нестійкості

↓

поява хвиль – коливання розповсюджуються у середовищі

↓

наростання амплітуд є малим – осцилятори гармонічні й незалежні

↓

нелінійність: хвилі вже не можна вважати за окремі невзаємодіючі осцилятори, які описуються лінійними рівняннями. Виникає взаємодія між різними модами, що нижче буде проілюстровано для коливальної системи із квадратичною нелінійністю.

Лінійність збурень – наближення, застосовне при невеликих амплітудах. Система описується лінійними диференціальними рівняннями. При зростанні амплітуд з'являються інші ефекти, які потребують введення нелінійних доданків. Наведемо деякі приклади лінійних і нелінійних рівнянь:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ – лінійне;}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a^2 \sin u = 0 \text{ – нелінійне;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ – нелінійне;}$$

$$\frac{du}{dx} + \chi u = 0 \text{ – лінійне (оцінюємо по змінній } u\text{).}$$

В останньому випадку маємо рівняння зі змінними коефіцієнтами – параметрична залежність (параметр змінюється за заданим законом).

Нелінійні рівняння з малим параметром на прикладі квадратичної нелінійності

Позначаємо

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}.$$

$$\text{а) } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ – рівняння гармонічного осцилятора.} \quad (2.1)$$

Розв'язок:

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (2.2)$$

Інша форма запису:

$$x = C \cos(\omega_0 t + \varphi) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Справедлива умова:

$$\operatorname{Re} A_1 \sin \omega_0 t + \operatorname{Im} A_1 \cos \omega_0 t - \operatorname{Re} A_2 \sin \omega_0 t + \operatorname{Im} A_2 \cos \omega_0 t = 0,$$

бо фізична величина x дійсна.

Тому

$$\begin{cases} \operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} A_2 \\ \operatorname{Im} A_1 = -\operatorname{Im} A_2 \end{cases}; A_2 = A_1^*.$$

$$x = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_1^* e^{-i\omega_0 t}.$$

$$\text{б) } \ddot{x} + \omega_0^2 x = f_1 \cos \omega_1 t - \text{лінійний осцилятор зі змущуючою силою.} \quad (2.3)$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.3):

$$x = C_1 \cos \omega_1 t.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos \omega_1 t$:

$$-C_1 \omega_1^2 + \omega_0^2 C_1 = f_1;$$

$$C_1 = \frac{f_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку лінійного однорідного рівняння та часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Резонанс спостерігається на частотах ω_1, ω_2 , взаємодії між різними модами коливань немає.

в) Нелінійний осцилятор – розглянемо бездисипативну систему під дією двох зовнішніх сил, яка описується рівнянням

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t \quad (2.4)$$

Нехай нелінійність слабка:

$$|\alpha x| \ll \omega_0^2,$$

тоді квадратичний доданок слід вважати величиною першого порядку малості, а розв'язок можна шукати у формі:

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad (2.5)$$

Для коректності такого представлення кожен наступний доданок повинен бути суттєво меншим попереднього (за модулем):

$$|x_0| \gg |x_1| \gg |x_2| \gg \dots \quad (2.6)$$

Підставимо розклад за порядками малості до рівняння (2.4). Випишемо всі доданки нульового, першого і другого порядків (хоча останніми й не будемо користуватися):

$$\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \dots + \omega_0^2 (x_0 + x_1 + x_2 + \dots) + \alpha (x_0^2 + 2x_0 x_1 + \dots) = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t. \quad (2.7)$$

Зовнішні сили забезпечують нульовий порядок малості. На уникнення зайвої громіздкості обмежимося частковим розв'язком неоднорідного рівняння (2.7); вплив загального розв'язку однорідного рівняння досліджується аналогічно. Таким чином, беремо:

$$x_0 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t. \quad (2.8)$$

Із рівняння (2.7) випливає, що

$$C_{1,2} = \frac{f_{1,2}}{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2}.$$

У лінійній бездисипативній системі частоти зовнішніх сил, як уже вказувалось, є резонансними.

У першому наближенні, з огляду на малість квадратичного доданка:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\alpha x_0^2. \quad (2.9)$$

До правої частини підставляємо отриманий розв'язок для нульового порядку:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\alpha C_1^2 \cos^2 \omega_1 t - 2\alpha C_1 C_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t - \alpha C_2^2 \cos^2 \omega_2 t. \quad (2.10)$$

Подаємо доданки у правій частині (2.10) у вигляді гармонічних функцій:

$$\cos^2 \omega_{1,2} t = \frac{\cos 2\omega_{1,2} t + 1}{2};$$

$$2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \cos(\omega_1 + \omega_2) t + \cos(\omega_1 - \omega_2) t.$$

Нелінійність викликає появу комбінаційних частот:

$$x_1 = -\alpha [D_0 + D_1 \cos 2\omega_1 t + D_2 \cos 2\omega_2 t + D_3 \cos(\omega_1 + \omega_2)t + D_4 \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (2.11)$$

Амплітуди гармонік обчислюємо з рівняння для першого порядку:

$$D_0 = \frac{1}{2\omega_0^2} (C_1^2 + C_2^2) = \frac{1}{2\omega_0^2} \left[\frac{f_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{f_2^2}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} \right];$$

$$D_{1,2} = \frac{C_{1,2}^2}{2(\omega_0^2 - 4\omega_{1,2}^2)} = \frac{f_{1,2}^2}{2(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 (\omega_0^2 - 4\omega_{1,2}^2)};$$

$$D_{3,4} = \left[\frac{C_1 C_2}{\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2} \right] = \frac{f_1 f_2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)[\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2]}.$$

З'являється взаємодія між гармоніками – резонанс тепер спостерігається не тільки при $\omega_0 \rightarrow \omega_{1,2}$, а й на комбінаційних частотах. Якщо врахувати і загальний розв'язок однорідного рівняння, то комбінаційні частоти запишуться як $\omega = |\omega_i \pm \omega_j|$, де $i, j = 0, 2$. Резонансні частоти є одночасно й частотами коливань, серед них, зокрема, друга гармоніка власної частоти системи $2\omega_0$. Процес стає ангармонічним – спектр не обмежується єдиною частотою. Врахування вищих порядків обумовлює подальше ускладнення розв'язку, комбінаційні частоти описуються формулою:

$$\omega = |n_0 \omega_0 \pm n_1 \omega_1 \pm n_2 \omega_2|; \quad (2.12)$$

n_0, n_1, n_2 – цілі невід'ємні числа.

За відсутності резонансу амплітуда спадає зі збільшенням порядку малості, будучи пропорційною до α у відповідному степені. Зауважимо, крім того, наявність у розв'язку нульової гармоніки – положення рівноваги зміщене через вплив парної функції в рівнянні (2.4). Зміщення для нульового порядку відсутнє, бо така функція входить із малим параметром: αx^2 .

3. Параметрична взаємодія хвиль у плазмі. Узагальнене рівняння Мат'є.

Одним із типових сценаріїв при наростанні амплітуд хвиль є розвиток параметричної нестійкості. Найпростіший параметричний процес у плазмі – це трихвильова взаємодія: хвиля розпадається на дві інші чи відбувається злиття двох хвиль. Для взаємодії необхідне виконання умов синхронізму, викликаних законами збереження енергії та імпульсу (рис. 3.1).

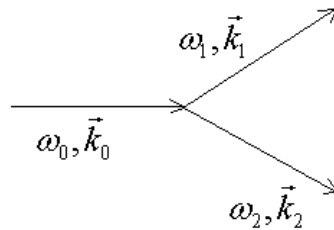


Рисунок 3.1 – Схема трихвильової взаємодії

Умова синхронізму при трихвильовій параметричній взаємодії:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad \cdot \hbar - \text{квантовомеханічна аналогія для законів збереження}$$

Найпростішим випадком трихвильової параметричної взаємодії у плазмі є нестійкість ленгмюрівської хвилі накачування. Відбувається розпад ленгмюрівської хвилі на ленгмюрівську нижчої частоти та іонно-звукову:

$$l \rightarrow l' + s \text{ (Сагдеев, 1962).}$$

За основу для моделі взаємодії хвиль візьмемо рівняння Мат'є (Mathieu). У коливальних системах модулюється частота:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + m \cos \omega_n t) u = 0. \quad (3.1)$$

Для хвиль застосуємо узагальнення (2.1) з модуляцією швидкості поширення:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - [1 + \alpha \cos(k_0 x - \omega_0 t)] v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \hat{L} u = 0. \quad (3.2)$$

Глибина модуляції визначається параметром α , \hat{L} відповідає лінійному оператору. Для з'ясування змісту такого оператора проаналізуємо нульове наближення, $\alpha = 0$. Розв'язок лінійного рівняння буде суперпозицією розв'язків для плоских монохроматичних хвиль – див. (1.2):

$$u \sim e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.3)$$

Приходимо до дисперсійного рівняння:

$$-\omega^2 + k^2 v^2 + L(\omega, k) = 0. \quad (3.4)$$

Доходимо висновку, що \hat{L} забезпечує відхилення від лінійного дисперсійного закону: при $L = 0$ маємо просто

$$\frac{\omega}{k} \equiv v_{ph} = \pm v = const.$$

Розвиток нестійкості, знаходження інкремента

Розв'язок узагальненого рівняння Мат'є (3.2) шукатимемо у вигляді суперпозиції двох плоских хвиль. При записі в експоненціальній формі:

$$u = \frac{1}{2} (u_1 e^{i\theta_1} + u_2 e^{i\theta_2} + \hat{e} \tilde{n}); \quad (3.5)$$

комплексно-спряжений вираз введений, щоб фізична величина u була дійсною. Фази становлять:

$$\theta_{1,2} \equiv k_{1,2} x - \omega_{1,2} t.$$

Аналогічно, для хвилі накачування

$$\theta_0 \equiv k_0 x - \omega_0 t.$$

Розглядатимемо початкову задачу в однорідному середовищі. Тоді хвильові вектори $\vec{k}_{1,2}$ (чи хвильові числа $k_{1,2}$ для одновимірної задачі) неодмінно дійсні, а частоти можуть ставати комплексними:

$$\omega_{1,2} = \omega'_{1,2} + i\gamma, \text{ де} \quad (3.6)$$

$\omega'_{1,2} \equiv \text{Re}(\omega_{1,2})$; ці дійсні частини відповідають дисперсійному рівнянню (3.4). Залежність від уявної частини частоти має характер:

$u \sim e^{\gamma t}$, тобто, нестійкість розвиватиметься при $\gamma > 0$.

У такому випадку γ є інкрементом нестійкості, натомість, при $\gamma < 0$ амплітуди спадатимуть. Вважатимемо зміну амплітуди повільною:

$$|\gamma| \ll \omega'_{1,2}. \quad (3.7)$$

Тоді характерний час розвитку нестійкості суттєво перевищує періоди хвиль:

$$\tau \sim \gamma^{-1} \gg \tau_{1,2}.$$

Аналогічні міркування застосовні й до просторового інкремента у граничній задачі.

Підставимо запропонований розв'язок до узагальненого рівняння Мат'є:

$$\begin{aligned} & -\omega_1^2 u_1 e^{i\theta_1} - \omega_2^2 u_2 e^{i\theta_2} + \hat{e} \tilde{n} + v^2 \left[1 + \frac{\alpha}{2} (e^{i\theta_0} + e^{-i\theta_0}) \right] (k_1^2 u_1 e^{i\theta_1} + k_2^2 u_2 e^{i\theta_2} + \hat{e} \tilde{n}) + \\ & + \hat{L} (u_1 e^{i\theta_1} + u_2 e^{i\theta_2} + \hat{e} \tilde{n}) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Амплітуди u_1 та u_2 вважаємо сталими. Взаємодія між хвилями буде забезпечена тільки за виконання умови синхронізму:

$$\theta_0 = \theta_1 + \theta_2^* = \theta_1^* + \theta_2.$$

Це означає:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_1' + \omega_2'; \\ k_0 &= k_1 + k_2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Прирівнюватимемо коефіцієнти при $e^{i\theta_1}$ та $e^{i\theta_2^*}$, щоб отримати систему рівнянь відносно u_1 та u_2^* . Результати дії лінійного оператора позначимо як

$$\begin{aligned}\widehat{L}(u_1 e^{i\theta_1}) &\equiv L_1 u_1 e^{i\theta_1}, \\ \widehat{L}(u_2^* e^{-i\theta_2^*}) &\equiv L_2 u_2^* e^{-i\theta_2^*}.\end{aligned}$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} (k_1^2 v^2 - \omega_1^2) u_1 + \frac{\alpha}{2} k_2^2 v^2 u_2^* + L_1 u_1 = 0 \\ (k_2^2 v^2 - \omega_2^{*2}) u_2^* + \frac{\alpha}{2} k_1^2 v^2 u_1 + L_2 u_2^* = 0. \end{cases}\tag{3.10}$$

Отримана система рівнянь (3.10) матиме ненульовий розв'язок тільки коли її визначник дорівнюватиме нулю. Для спрощення вигляду коефіцієнтів скористаємося дисперсійним рівнянням (3.4), згідно з яким:

$$\omega_{1,2}'^2 = k_{1,2}^2 v^2 + L_{1,2}.$$

Також при малій уявній частині частоти (3.7):

$$\omega_{1,2}'^2 \approx \omega_{1,2}^2 + 2i\gamma\omega_{1,2}'.$$

Наявна система рівнянь (3.10) спрощується до:

$$\begin{cases} -2i\gamma\omega_1' u_1 + \frac{\alpha}{2} k_2^2 v^2 u_2^* = 0 \\ 2i\gamma\omega_2' u_2^* + \frac{\alpha}{2} k_1^2 v^2 u_1 = 0 \end{cases}\tag{3.11}$$

Умова нетривіального розв'язку забезпечує

$$\frac{\alpha^2}{4} k_1^2 k_2^2 v^4 = 4\gamma^2 \omega_1' \omega_2'.$$

Отже, інкремент нестійкості становить

$$\gamma = \frac{\alpha k_1 k_2 v^2}{4\sqrt{\omega_1' \omega_2'}}.\tag{3.12}$$

Із отриманого результату випливає, що для параметричної нестійкості достатньо

$$\omega_1' \omega_2' > 0.$$

Враховуючи, що частоти наростаючих хвиль пов'язані умовою синхронізму, має забезпечуватися

$$0 < \omega_{1,2}' < \omega_0.\tag{3.13}$$

Нестійкість розвивається тим швидше, чим більша амплітуда хвилі накачування: $\gamma \sim \alpha$.

У розглянутому прикладі амплітуда хвилі накачування вважається сталою. Це припустимо, доки вона суттєво перевищує амплітуди хвиль 1 і 2, але у замкнутій системі нестійкість повинна забезпечуватися за рахунок якогось джерела енергії – у даній ситуації амплітуда хвилі 0 спадатиме.

4. Розпадна нестійкість ленгмюрівських хвиль

Розглянемо розпад ленгмюрівської хвилі на ленгмюрівську з меншою частотою та іонно-звукову. Така задача передбачає використання моделі теплої плазми. Напруженість електричного поля хвилі накачування подамо у вигляді:

$$\vec{E}_0 = \text{Re}(\vec{E}_{00} e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2}(\vec{E}_{00} e^{i\theta_0} + \text{к.с.}) \quad (4.1)$$

Фаза цієї хвилі:

$$\theta_0 \equiv k_0 x - \omega_0 t;$$

оскільки всі хвилі поздовжні, то достатньо дослідити одновимірну задачу. Наростаюча ленгмюрівська хвиля характеризується

$$\theta_1 \equiv k_1 x - \omega_1 t,$$

а іонно-звукова хвиля

$$\theta_s \equiv k_s x - \omega_s t.$$

Умовою синхронізму при трихвильовій взаємодії є:

$$\theta_0 \equiv \theta_1 + \theta_s. \quad (4.2)$$

Для поздовжніх хвиль ($\vec{k} \parallel \vec{E}$) рівняння

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

має своїм наслідком

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}] = 0. \quad (4.4)$$

За такої обставини $\text{rot } \vec{B} = 0$, тобто

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -4\pi \vec{j}. \quad (4.5)$$

Задача одновимірна, тому надалі працюватимемо зі скалярами. Крім того, при вивченні височастотних процесів доцільно зосередитися на русі електронів. Отже,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi e n v_e, \quad (4.6)$$

концентрація і швидкість стосуються саме електронів.

Випишемо доданки, що можуть містити $e^{i\theta_1}$, враховуючи вплив на концентрацію і швидкість:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = 4\pi e (n_0 v_1 + n_s v_0). \quad (4.7)$$

Тут:

n_0 – рівноважна концентрація електронів;

n_s – її збурення іонно-звуковою хвилею з фазою θ_s ;

v_0 – швидкість електронів під дією хвилі накачування (не є збуреною величиною), фаза становить θ_0 ;

v_1 – швидкість, зумовлена впливом виниклої ленгмюрівської хвилі з фазою θ_1 .

Лінеаризоване рівняння руху електронів під впливом ленгмюрівської хвилі 1:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_1. \quad (4.8)$$

Продиференціюємо даний вираз за часом і позбудемося напруженості електричного поля:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} v_1 - \frac{4\pi e^2}{m_e} n_s v_0.$$

Вводимо плазмову частоту:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\omega_{pe}^2 v_1 - \omega_{pe}^2 \frac{n_s}{n_0} v_0. \quad (4.9)$$

Тепер для ленгмюрівської хвилі врахуємо, що вона має частоту, відмінну від ω_{pe} , внаслідок ненульової температури плазми:

$$\omega_1^2 = \omega_{pe}^2 v_1 + 3k_1^2 v_{Te}^2. \quad (4.10)$$

Ввівши таку частоту безпосередньо до правої частини рівняння, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \omega_1^2 v_1 = -\omega_{pe}^2 \frac{n_s}{n_0} v_0. \quad (4.11)$$

Міркуючи так само, для хвилі накачування виведемо:

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 v_0 = -\omega_{pe}^2 \frac{n_s}{n_0} v_1, \text{ тут} \quad (4.12)$$

$$\omega_0^2 \equiv \omega_{pe}^2 + 3k_0^2 v_{Te}^2.$$

Маємо два рівняння (4.11), (4.12) для опису поведінки трьох хвиль. Ще одне дістанемо, розглянувши вплив іонного звуку на іони та електрони:

$$\begin{cases} m_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = eE_s \\ m_e \left(\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} \right) = -\frac{T_e}{n_0} \frac{\partial n_s}{\partial x} - eE_s \end{cases}; \quad (4.13)$$

температуру виражаємо в енергетичних одиницях, не вказуючи сталої Больцмана k_B . У вираз для гідростатичного тиску входить електронна температура T_e , E_s позначає напруженість електричного поля іонно-звукової хвилі. Додамо два рівняння (4.13) і візьмемо до уваги, що швидкість руху електронів визначається високочастотними ленгмюрівськими хвилями:

$$\begin{aligned} v_e &= v_0 + v_1; \\ m_e \left(\frac{\partial(v_0 + v_1)}{\partial t} + m_e (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial x} (v_0 + v_1) \right) &= -\frac{T_e}{n_0} \frac{\partial n_s}{\partial x} - m_i \frac{\partial v_i}{\partial t} - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Продиференціюємо отримане співвідношення (4.14) за x і залишимо тільки доданки, в яких може з'явитися фаза θ_s :

$$m_e \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 v_1) = -T_e \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{n_s}{n_0} - m_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x}. \quad (4.15)$$

Тепер потрібно усунути швидкість руху іонів. Їх зміщення зумовлене іонно-звуковою хвилею, з лінеаризованого рівняння неперервності:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0. \quad (4.16)$$

Таким чином,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{n_s}{n_0}.$$

Підставляємо цей результат у досліджуване рівняння трихвильової взаємодії (4.15):

$$m_e \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 v_1) = -T_e \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{n_s}{n_0} + m_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{n_s}{n_0}. \quad (4.17)$$

Залишаємо при часовій похідній одиничний коефіцієнт і вводимо швидкість іонного звуку (нехтуючи температурою іонів):

$$C_s^2 = \frac{T_e}{m_i}.$$

Приходимо до

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{n_s}{n_0} - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{n_s}{n_0} = \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 v_1). \quad (4.18)$$

Застосування методу повільно змінюваних амплітуд до рівнянь зв'язаних хвиль

Випишемо систему рівнянь (4.11), (4.12), (4.18) для зв'язаних хвиль із нелінійними доданками у правій частині:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 v_0 = -\omega_{pe}^2 \frac{n_s}{n_0} v_1 \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \omega_1^2 v_1 = -\omega_{pe}^2 \frac{n_s}{n_0} v_0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{n_s}{n_0} - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{n_s}{n_0} = \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 v_1) \end{cases}. \quad (4.19)$$

Розв'язок шукаємо у комплексному вигляді:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} (v_{00} e^{i\theta_0} + v_{00}^* e^{-i\theta_0}); \\ v_1 &= \frac{1}{2} (a e^{i\theta_1} + a^* e^{-i\theta_1}); \\ \frac{n_s}{n_0} &= \frac{1}{2} (b e^{i\theta_s} + b^* e^{-i\theta_s}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

При диференціюванні пам'ятаємо, що

$$\theta_{0,1,s} = k_{0,1,s} x - \omega_{0,1,s} t.$$

Амплітуди (4.20) вважаємо повільно змінюваними в часі, тому другими часовими похідними нехтуємо. Просторових змін не беремо до уваги, скрізь розглядаючи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -k^2.$$

За таких обставин:

$$\begin{cases} -\omega_0^2 v_{00} - 2i\omega_0 \dot{v}_{00} + \omega_0^2 v_{00} = -\frac{\omega_{pe}^2}{2} ab \\ -\omega_1^2 a - 2i\omega_1 \dot{a} + \omega_1^2 a = -\frac{\omega_{pe}^2}{2} v_{00} b^* \\ -\omega_s^2 b - 2i\omega_s \dot{b} + k_s^2 C_s^2 b = -\frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{2} v_{00} a^* \end{cases}. \quad (4.21)$$

У третьому рівнянні (4.21), з огляду на лінійне дисперсійне співвідношення для іонного звуку,

$$-\omega_s^2 + k_s^2 C_s^2 = 0.$$

Спростуємо формули, лишаючи в лівій частині часові похідні з коефіцієнтом 1:

$$\begin{cases} \dot{v}_{00} = -i \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_0} ab \\ \dot{a} = -i \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_1} v_{00} b^* \\ \dot{b} = -i \frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{4\omega_s} v_{00} a^* \end{cases} . \quad (4.22)$$

Полегшити аналіз трихвильової взаємодії вдається, якщо використати наближення сталого накачування,

$$v_{00} = const . \quad (4.23)$$

Як і для модельного рівняння Мат'є (3.4), це передбачає відносну малість амплітуд наростаючих хвиль:

$$|a| \ll |v_{00}|, \quad |b| \ll 1 .$$

За наближення сталого накачування (4.23) лишаються два лінійні диференціальні рівняння. Їх розв'язок шукаємо у вигляді:

$$a, b^* \sim e^{\gamma t} .$$

Приходимо до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma a = -i \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_1} v_{00} b^* \\ \gamma b^* = i \frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{4\omega_s} v_{00}^* a \end{cases} . \quad (4.24)$$

Умова нетривіального розв'язку дозволяє знайти інкремент нестійкості:

$$\gamma^2 = \frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2 \omega_{pe}^2}{16\omega_1 \omega_s} |v_{00}|^2 . \quad (4.25)$$

Доцільно подати інкремент (4.25) через напруженість електричного поля хвилі накачування. Із лінеаризованого рівняння руху електронів під її дією (4.8) знаходимо потрібну залежність:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} &= -\frac{e}{m_e} E_0 ; \\ -i\omega v_{00} &= -\frac{e}{m_e} E_{00} , \text{ звідки} \\ v_{00} &= -\frac{ie}{m_e \omega_0} E_{00} . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким чином,

$$\gamma^2 = \frac{e^2}{m_e m_i} \frac{k_s^2 \omega_{pe}^2}{16\omega_1 \omega_s \omega_0^2} |E_{00}|^2 . \quad (4.27)$$

Інкремент параметричної нестійкості, як і для модельного рівняння Мат'є (3.4), лінійно залежить від амплітуди хвилі накачування:

$$\gamma \sim |E_{00}| . \quad (4.28)$$

Можна вказати наближену формулу при невеликих хвильових числах,

$$k_{0,1} \ll \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} .$$

Тоді справедливо

$$\omega_0, \omega_1 \approx \omega_{pe} .$$

За обраного підходу:

$$\gamma^2 \approx \frac{e^2}{m_e m_i} \frac{k_s^2}{16 \omega_{pe} \omega_s} |E_{00}|^2. \quad (4.29)$$

Інакше представлення:

$$\gamma^2 \approx \frac{\omega_{pe} \omega_s}{64 \pi_0 m_i C_s^2} |E_{00}|^2 = \frac{\omega_{pe} \omega_s}{64 \pi_0 T_e} |E_{00}|^2.$$

Наростання хвиль починається від рівня флуктуацій.

5. Співвідношення Менлі – Роу при трихвильовій взаємодії. Закон збереження енергії.

Було встановлено, що при дотриманні умови синхронізму трихвильова взаємодія описується рівняннями виду (4.22),

$$\begin{cases} \dot{a}_{1s} = -i \sigma_1 a_{2s}^* a_{3s} \\ \dot{a}_{2s} = -i \sigma_2 a_{1s}^* a_{3s} , \\ \dot{a}_{3s} = -i \sigma_3 a_{1s} a_{2s} \end{cases} \quad (5.1)$$

де для фаз справедливо

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2. \quad (5.2)$$

При розпаді ленгмюрівської хвилі (тут – індекс "3") на більш довгохвильову ленгмюрівську (індекс "1") та іонно-звукову ("2") коефіцієнти (4.22) становили:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_1}; \\ \sigma_2 &\equiv \frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{4\omega_s}; \\ \sigma_3 &\equiv \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_0}. \end{aligned}$$

Однак, записані у загальному вигляді рівняння годяться для багатьох задач на параметричну взаємодію як хвиль, так і мод коливань. Третє рівняння наведеної системи відрізняється від перших двох тільки відсутністю комплексного спряження, адже у ньому фігурує зміна амплітуди хвилі з найбільшою частотою:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 + \omega_2, \text{ також} \\ \vec{k}_3 &= \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \end{aligned}$$

Припускаємо

$$\sigma_j > 0,$$

як у задачі про розпад ленгмюрівської хвилі на ленгмюрівську та іонно-звукову. Проведемо заміну

$$a_{js} = \sqrt{\sigma_j} \cdot a_j \quad \forall j = \overline{1,3}. \quad (5.3)$$

Це дозволяє надати рівнянням максимально уніфікованого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -i \sigma a_2^* a_3 \\ \dot{a}_2 = -i \sigma a_1^* a_3 , \\ \dot{a}_3 = -i \sigma a_1 a_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

куди входить спільний коефіцієнт

$$\sigma \equiv \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} . \quad (5.5)$$

Тепер запишемо рівняння, комплексно-спряжене до першого з системи (5.4):

$$\dot{a}_1^* = i\sigma a_2 a_3^* . \quad (5.6)$$

Домножимо рівняння, яке входить до системи (5.4), на a_1^* , а щойно наведене комплексно-спряжене (5.6) – на a_1 . У лівій частині після додавання отриманих рівнянь з'явиться:

$$\dot{a}_1 \cdot a_1^* + \dot{a}_1^* \cdot a_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} |a_1|^2 .$$

Таку ж процедуру виконаємо для всіх рівнянь системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} |a_1|^2 = i\sigma(a_1 a_2 a_3^* - a_1^* a_2^* a_3) \\ \frac{\partial}{\partial t} |a_2|^2 = i\sigma(a_1 a_2 a_3^* - a_1^* a_2^* a_3) \\ \frac{\partial}{\partial t} |a_3|^2 = -i\sigma(a_1 a_2 a_3^* - a_1^* a_2^* a_3) \end{cases} . \quad (5.7)$$

Величина

$$N_j \equiv |a_j|^2$$

характеризує інтенсивність коливань. Її умовно, за аналогією із квантовою механікою, називають кількістю квантів. Як показує вигляд правої частини рівнянь, зміни N_j з часом пов'язані простими співвідношеннями:

$$\begin{cases} N_1(t) - N_2(t) = C_1 = const \\ N_1(t) + N_3(t) = C_2 = const \\ N_2(t) + N_3(t) = C_3 = const \end{cases} . \quad (5.8)$$

Ці вирази і є співвідношеннями Менлі – Роу (Manley – Rowe). Вони демонструють, що квант високої частоти ω_3 може розпастися на один квант частоти ω_1 та один квант частоти ω_2 . Можливий і зворотний процес злиття квантів. Ніякі інші процеси трансформації при трихвильовій взаємодії зі співвідношеннями Менлі – Роу не узгоджуються.

Низькочастотне накачування

Нехай у початковий момент часу домінує одна з низькочастотних хвиль,

$$N_1(0) \gg N_{2,3}(0) . \quad (5.9)$$

Це означає

$$C_3 \ll C_{1,2} .$$

Як наслідок, існують жорсткі обмеження на потенційне зростання амплітуд слабких початково хвиль:

$$N_{2,3}(t) \ll N_1(t) \quad (5.10)$$

для довільного моменту часу t . Таким чином, суттєвого перерозподілу енергії, а отже і розвитку нестійкості при низькочастотному накачуванні не відбувається. За квантовою термінологією, при розпаді чи злитті квантів має дотримуватись умова

$$\hbar \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 .$$

Тому розпад хвилі 1 з утворенням більш високочастотної хвилі 3 не реалізується, хоч би процес загалом і не суперечив закону збереження енергії.

З'ясуємо характер варіацій, скориставшись наближенням заданого накачування (4.23). Воно застосовне, коли зміну амплітуди найбільш інтенсивної хвилі припустимо вважати незначною. Тобто, при низькочастотному накачуванні

$$a_1 = const = a_1^{(0)} .$$

Для двох інших амплітуд:

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = -i\sigma a_1^{(0)*} a_3 \\ \dot{a}_3 = -i\sigma a_1^{(0)} a_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Диференціюючи (5.11) за часом, приходимо до

$$\ddot{a}_{2,3} + \sigma^2 |a_1^{(0)}|^2 a_{2,3} = 0. \quad (5.12)$$

Це рівняння гармонічного осцилятора із розв'язком, який можна представити у формі

$$a_{2,3} = A_{2,3} \cos(\sigma |a_1^{(0)}| t + \varphi_{2,3}). \quad (5.13)$$

Подальший розгляд дуже спрощується, якщо фаза $\varphi_{2,3}$ дійсна (у загальному випадку доцільно перейти до дійсних амплітуд і фаз за схемою $a = \tilde{a} e^{i\varphi}$). Кількість квантів (інтенсивність) становитиме:

$$N_{2,3} = |A_{2,3}|^2 \cos^2(\sigma |a_1^{(0)}| t + \varphi_{2,3}).$$

Отже, кількість квантів змінюватиметься за гармонічним законом:

$$N_{2,3} = \frac{|A_{2,3}|^2}{2} (\cos 2(\sigma |a_1^{(0)}| t + \varphi_{2,3}) + 1). \quad (5.14)$$

Таким чином, $N_{2,3}$ осцилюватимуть, періодично спадаючи до нуля. Візьмемо до уваги співвідношення Менлі – Роу (5.8):

$$N_2(t) + N_3(t) = C_3 = \text{const}.$$

Забезпечити такий результат для довільного моменту часу вдається лише якщо

$$|A_2| = |A_3|; \varphi_2 = \varphi_3 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Отже, N_2 і N_3 змінюються за гармонічним законом у протифазі, а N_1 – синфазно з N_2 . Амплітуда варіації N_1 теж повинна становити $|A_2|$, а частота складає $2\sigma |a_1^{(0)}|$. Схема процесу наведена на рис. 5.1. Середні інтенсивності слабких хвиль, N_2 та N_3 :

$$\bar{N}_2 = \bar{N}_3 = \frac{|A_2|^2}{2}.$$

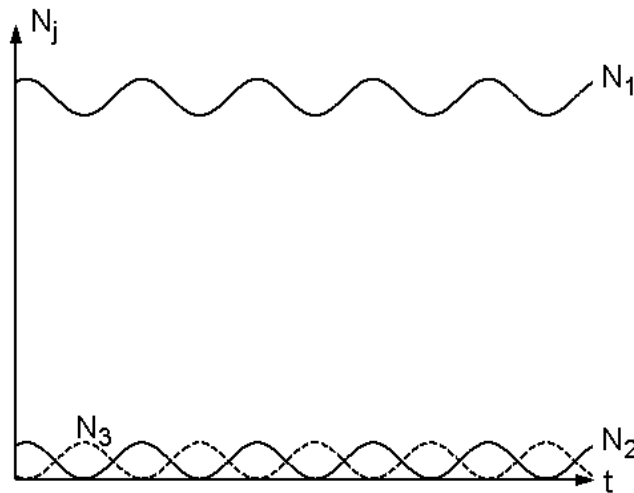


Рисунок 5.1 – Інтенсивності хвиль при низькочастотному накачуванні

Високочастотне накачування

Тепер нехай домінує хвиля з найбільшою частотою ω_3 :

$$N_3(0) \gg N_{1,2}(0). \quad (5.15)$$

Перевіримо, чи не суперечить співвідношенням Менлі – Роу (5.8) припущення, що для якогось моменту часу t справедливо:

$$N_1(t) \sim N_3(0). \quad (5.16)$$

Наслідком буде

$$N_3(t) \sim N_1(0),$$

а зі співвідношення для $N_1 - N_2$:

$$N_2(t) \sim N_3(0).$$

Третє співвідношення Менлі – Роу (5.8) – це лінійна комбінація двох розглянутих, отже, інтенсивний енергообмін при високочастотному накачуванні не наражається на принципові перешкоди. При застосуванні квантової аналогії розпад квантів високої частоти теж не створює труднощів. Знову скористаємося наближенням заданого накачування (4.23):

$$a_3 = \text{const} = a_3^{(0)}.$$

Рівняння для амплітуд $a_{1,2}$:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -i\sigma a_2^* a_3^{(0)} \\ \dot{a}_2 = -i\sigma a_1^* a_3^{(0)} \end{cases}. \quad (5.17)$$

При диференціюванні і залученні комплексно-спряженого виразу:

$$\ddot{a}_{1,2} - \sigma^2 |a_3^{(0)}|^2 a_{1,2} = 0. \quad (5.18)$$

Записуючи розв'язок (5.18), відразу врахуємо, що необхідно забезпечити сталість $N_2 - N_1$ (5.8). Візьмемо:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 \text{ch}(\sigma |a_3^{(0)}| t + \varphi_1); \\ a_2 &= A_1 \text{sh}(\sigma |a_3^{(0)}| t + \varphi_1). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Фазу φ_1 і тут беремо дійсною, для визначеності припустили, що $|a_1| > |a_2|$. У результаті:

$$\begin{aligned} N_1 &= |A_1|^2 \text{ch}^2(\sigma |a_3^{(0)}| t + \varphi_1) = |A_1|^2 \frac{\text{ch} 2(\sigma |a_3^{(0)}| t + \varphi_1) + 1}{2}; \\ N_2 &= |A_1|^2 \text{sh}^2(\sigma |a_3^{(0)}| t + \varphi_1) = |A_1|^2 \frac{\text{ch} 2(\sigma |a_3^{(0)}| t + \varphi_1) - 1}{2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Наростання кількості квантів має експоненціальний характер. Через це, на відміну від попередньої задачі, наближення заданого накачування (4.23) незабаром перестане виконуватися. Характерний час росту амплітуди:

$$\tau \sim (\sigma |a_3^{(0)}|)^{-1}. \quad (5.21)$$

Відзначимо, що побудова точного розв'язку (5.4) виявляє періодичність процесу. Спершу йде розпад високочастотних квантів, а коли вони вичерпуються, реалізується зворотний процес злиття низькочастотних. Згодом хід подій повторюється (рис. 5.2). Зі співвідношень Менлі – Роу випливає, що у максимумі

$$\begin{aligned} N_2(t) &= N_3(0); \\ N_1(t) &> N_3(0). \end{aligned}$$

Співвідношення Менлі – Роу виведені на початку 1960-х рр. у рамках електротехнічної задачі. Зрештою, з'ясувалися набагато ширші можливості для їх застосування до взаємодії як коливальних систем, так і хвиль. Зокрема, бачимо, що співвідношення Менлі – Роу корисні у фізиці плазми.

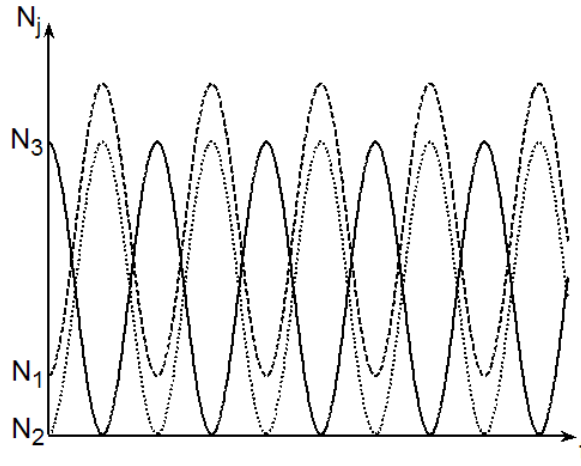


Рисунок 5.2 – Інтенсивності хвиль при високочастотному накачуванні

Закон збереження енергії при трихвильовій взаємодії

Домножимо рівняння для кожного \dot{N}_j (5.7) на ω_j , після чого всі додамо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3) = i\sigma(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)(a_1 a_2 a_3^* - a_1^* a_2^* a_3). \quad (5.22)$$

Оскільки при точному синхронізмі $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, то

$$\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 = \text{const}. \quad (5.23)$$

Дана формула і відтворює закон збереження енергії: до неї входять добутки частот на відповідну кількість квантів. У квантовій механіці безпосередньо отримуємо енергію домноження на сталу Планка \hbar . Інтеграл енергії (5.23) характеризує взаємодію як при коливальних процесах, так і у випадку хвиль.

Загальний підхід до рівнянь трихвильової взаємодії

У системі рівнянь для \dot{a}_j (5.4) відразу виокремимо дійсні амплітуди і фази,

$$a_j \equiv A_j e^{i\varphi_j}. \quad (5.24)$$

Тоді:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 + iA_1\dot{\varphi}_1 = -i\sigma A_2 A_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \\ \dot{A}_2 + iA_2\dot{\varphi}_2 = -i\sigma A_1 A_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \\ \dot{A}_3 + iA_3\dot{\varphi}_3 = -i\sigma A_1 A_2 e^{-i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \end{cases}. \quad (5.25)$$

Рівняння розпадаються на дійсну й уявну частини; можна обійтися чотирма змінними, ввівши для комбінації фаз:

$$\Phi \equiv \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

Тоді приходимо до:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \sigma A_2 A_3 \sin \Phi \\ \dot{A}_2 = \sigma A_1 A_3 \sin \Phi \\ \dot{A}_3 = -\sigma A_1 A_2 \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = \sigma \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} + \frac{A_1 A_3}{A_2} - \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \cos \Phi \end{cases}. \quad (5.26)$$

Із отриманих рівнянь (5.26) випливає, що

$$\Phi(t=0) = \frac{\pi}{2}$$

означає подальшу незмінність фази. Перші три рівняння (5.26) тоді можливо проаналізувати в наближенні заданого накачування (4.23), як це було зроблено раніше. У свою чергу, в загальному випадку (5.26) доцільно замінити в четвертому рівнянні квадратичні вирази, використовуючи перші три:

$$\dot{\Phi} = \operatorname{ctg} \Phi \left(\frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_2}{A_2} + \frac{\dot{A}_3}{A_3} \right). \quad (5.27)$$

Знайдений інтеграл системи:

$$\operatorname{tg} \Phi d\Phi = d \ln(A_1 A_2 A_3) \text{ чи} \\ -\ln \cos \Phi = \ln(A_1 A_2 A_3) + \operatorname{const}.$$

Таким чином,

$$A_1 A_2 A_3 \cos \Phi = C. \quad (5.28)$$

При використаних позначеннях (5.24):

$$N_j = A_j^2.$$

Домножимо рівняння (5.26) для \dot{A}_3 на A_3 і скористаємось отриманим інтегралом руху (5.28):

$$\dot{N}_3 = -2C\sigma \operatorname{tg} \Phi. \quad (5.29)$$

Рівняння (5.29) можливо подати через інтенсивності:

$$\operatorname{tg} \Phi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \Phi} - 1} = \sqrt{\frac{A_1^2 A_2^2 A_3^2}{C^2} - 1}.$$

Приходимо до:

$$\dot{N}_3 = -2\sigma \sqrt{N_1 N_2 N_3 - C^2}. \quad (5.30)$$

Власне, маємо розв'язок (5.30) у квадратурах; в елементарних функціях результат інтегрування представити не вдається. Якщо позначити корені рівняння

$$(C_1 - N_3)(C_2 - N_3)N_3 - C^2 = 0 \quad (5.31)$$

як N_a , N_b , N_c , де

$$0 \leq N_a \leq N_b \leq N_c,$$

то

$$\int_{N_3(t_0)}^{N_3(t)} \frac{dN_3}{\sqrt{(N_3 - N_a)(N_3 - N_b)(N_3 - N_c)}} = -2\sigma(t - t_0). \quad (5.32)$$

Такий інтеграл зводиться до еліптичного. При заміні

$$y(t) = \sqrt{\frac{N_3(t) - N_a}{N_b - N_a}};$$

$$dy = \frac{dN_3}{2\sqrt{(N_b - N_a)(N_3 - N_a)}} = \frac{dN_3}{2(N_b - N_a)y}$$

результатом стає (за найбільш зручного вибору нижньої межі)

$$\int_0^{y(t)} \frac{2(N_b - N_a)dy \cdot y}{y\sqrt{(N_b - N_a)[y^2(N_b - N_a) + N_a - N_b][y^2(N_b - N_a) + N_a - N_c]}} = -2\sigma(t - t_0) \text{ чи} \\ \int_0^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - s^2 y^2)}} = -\sigma \sqrt{N_c - N_a} (t - t_0); \quad (5.33) \\ s \equiv \sqrt{\frac{N_b - N_a}{N_c - N_a}}.$$

Звідси

$$y = \text{sn} \left[\sigma \sqrt{N_c - N_a} (t_0 - t); s \right], \text{ а}$$

$$N_3 = (N_b - N_a) y^2 + N_a. \quad (5.34)$$

6. Аналіз умови синхронізму при розпаді ленгмюрівської хвилі

З'ясуємо, за яких співвідношень між параметрами ленгмюрівської хвилі вона може розпадатися за схемою

$$l \rightarrow l' + s;$$

інкремент нестійкості для такого процесу раніше обчислювався (4.27). Для фаз справедлива умова синхронізму

$$\theta_0 = \theta_1 + \theta_s;$$

θ_0, θ_1 – фази ленгмюрівських хвиль, θ_s – іонно-звукової. Відповідно, для частот та хвильових чисел виконується:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + \omega_s; \\ k_0 &= k_1 + k_s. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Дисперсійне співвідношення для ленгмюрівських хвиль (4.10):

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 a_{De}^2), \quad (6.2)$$

де $a_{De} \equiv \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_0}}$ – електронний дебаївський радіус.

Як наслідок,

$$\omega \approx \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 a_{De}^2 \right). \quad (6.3)$$

Іонний звук характеризується дисперсійним співвідношенням:

$$\omega_s^2 = \frac{k_s^2 C_s^2}{1 + k_s^2 a_{De}^2}. \quad (6.4)$$

Нехай:

$$k_s^2 a_{De}^2 \ll 1,$$

тобто, довжина іонно-звукової хвилі суттєво перевищує дебаївський радіус. З умови синхронізму для частот (6.1):

$$\frac{3}{2} \omega_{pe} (k_0^2 - k_1^2) a_{De}^2 = k_s C_s.$$

Застосувавши ще й умову (6.1) на хвильові числа, отримуємо:

$$k_0 + k_1 = \frac{2}{3} \frac{C_s}{\omega_{pe} a_{De}^2}. \quad (6.5)$$

Вираз містить

$$\frac{C_s}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{T_e}{m_i} \cdot \frac{m_e}{4\pi e^2 n_0}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} a_{De}$$

Таким чином:

$$k_0 + k_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} a_{De}^{-1}. \quad (6.6)$$

Якщо хвильові числа одного знаку, то виведена умова накладає досить жорсткі обмеження. Дійсно,

$$0 < k_1 < k_0.$$

Тому хвильове число для хвилі накачування має задовольняти подвійній нерівності:

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} a_{De}^{-1} < k_0 < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} a_{De}^{-1}. \quad (6.7)$$

Процес реалізується тільки у вузькому діапазоні хвильових чисел: відношення максимального прийнятного до мінімального становить 2.

Також розглянемо випадок відносно великих хвильових чисел, коли

$$k_0 a_{De} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (6.8)$$

(але не $k_0 a_{De} \gg 1$, бо порушиться наближення для дисперсійного рівняння ленгмюрівських хвиль). Застосована формула для іонного звуку тоді потребує корекції, але врахування дебаївського радіуса навіть підсилює висновок – маємо:

$$k_0 + k_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{a_{De}^{-1}}{1 + k_s^2 a_{De}^2}. \quad (6.9)$$

Задовольнити наведене співвідношення вдається тільки при $k_1 \approx -k_0$, що також означає $k_s \approx 2k_0$. Зміна модуля хвильового числа ленгмюрівської хвилі при розпаді є суттєво меншою самого хвильового числа. Умова синхронізму (6.1) для модулів хвильових чисел набуває нестандартного вигляду,

$$|k_s| = |k_0| + |k_1|. \quad (6.10)$$

Параметрично взаємодіючими є зустрічні ленгмюрівські хвилі (рис. 6.1). Радіус-вектор точки, яка відповідає хвилі накачування, рівний сумі радіус-векторів для двох інших хвиль. Така можливість існує завдяки низьким частотам іонного звуку,

$$\omega < \frac{C_s}{a_{De}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_i}} = \omega_{pi} \ll \omega_{pe}.$$

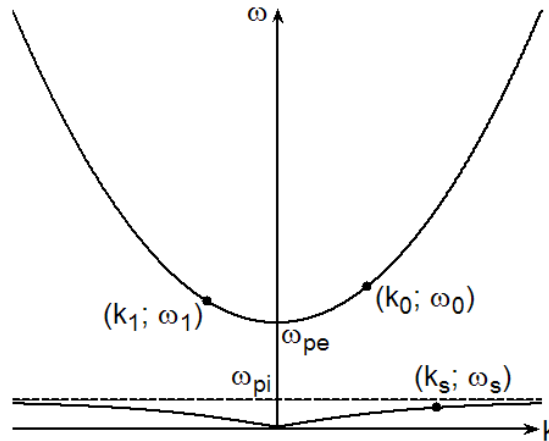


Рисунок 6.1 – Частоти та хвильові числа при розпаді ленгмюрівської хвилі на ленгмюрівську й іонно-звукову

7. Модифікована розпадна нестійкість

Нестійкість із великим інкрементом

Інкремент параметричної нестійкості (4.25) визначається амплітудою хвилі накачування, через що немає принципових перешкод для виникнення ситуації, коли $\gamma > \omega_s$, інкремент перевищує частоту іонного звуку. Процес розглянемо у наближенні сталого накачування (4.23):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \omega_1^2 v_1 = -\omega_{pe}^2 v_0 \frac{n_s}{n_0} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{n_s}{n_0} - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{n_s}{n_0} = \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 v_1) \end{cases} \quad (7.1)$$

Розв'язок шукаємо у звичній для задачі про трихвильову взаємодію формі:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} (v_{00} e^{i\theta_0} + v_{00}^* e^{-i\theta_0}) \\ v_1 &= \frac{1}{2} (a e^{i\theta_1} + a^* e^{-i\theta_1}) \\ \frac{n_s}{n_0} &= \frac{1}{2} (b e^{i\theta_s} + b^* e^{-i\theta_s}) \end{aligned}$$

Беремо (4.23): $v_{00} = const$, але передбачаємо

$$|\ddot{b}| \gg \omega_s |\dot{b}| \gg \omega_s^2 b; \quad (7.2)$$

час наростання амплітуди іонно-звукової хвилі малий порівняно з її періодом. Доданок із C_s^2 зануляється при записі дисперсійного співвідношення. Як повільно змінювану тепер розглядаємо тільки амплітуду a :

$$\begin{cases} -i\omega_1 \dot{a} = -\frac{\omega_{pe}^2}{4} v_{00} b^* \\ \frac{1}{2} \ddot{b} = -\frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{4} v_{00} a^* \end{cases} \quad (7.3)$$

Перепишемо систему (7.3) відносно змінних a і b^* :

$$\begin{cases} \dot{a} = -i \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_1} v_{00} b^* \\ \ddot{b}^* = -\frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{2} v_{00}^* a \end{cases} \quad (7.4)$$

При сталій амплітуді хвилі накачування v_{00} приходимо до:

$$\ddot{a} = i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2 k_s^2}{8\omega_1} |v_{00}|^2 a. \quad (7.4)$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} a &\sim e^{\gamma t}, \text{ тоді} \\ \gamma^3 &= i \frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{8} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1} |v_{00}|^2. \end{aligned}$$

Нестійкість розвиватиметься при $\text{Re } \gamma > 0$. Кубічний корінь має три значення:

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Отже, корені становлять

$$\begin{aligned} &\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; \\ &-i. \end{aligned}$$

Нестійкість розвиватиметься при $\text{Re } \gamma > 0$:

$$\operatorname{Re} \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2 \omega_{pe}^2}{\omega_1} |v_{00}|^2 \right)^{1/3}. \quad (7.5)$$

Подамо знайдену величину (7.5) через напруженість електричного поля хвилі накачування. Із лінеаризованого рівняння руху (4.8):

$$\begin{aligned} -i\omega_0 v_{00} &= -\frac{e}{m_e} E_{00}, \text{ звідки} \\ v_{00} &= -\frac{ie}{m_e \omega_0} E_{00}. \end{aligned}$$

У підсумку,

$$\operatorname{Re} \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{e^2}{m_i m_e} \frac{k_s^2 \omega_{pe}^2}{\omega_1 \omega_0^2} |E_{00}|^2 \right)^{1/3}. \quad (7.6)$$

Як бачимо, при великих амплітудах хвилі накачування інкремент зростає повільніше, ніж у розглянутій раніше версії розпадної нестійкості при малих амплітудах (4.27). Тепер

$$\gamma \sim |E_{00}|^{2/3}. \quad (7.7)$$

Розпад ленгмюрівської хвилі великої довжини

Нехай для хвилі накачування $\lambda_0 \rightarrow \infty$, тобто, $k_0 \rightarrow 0$. У даному випадку $k_1 + k_s = k_0 \approx -k_0$. Також справедливо $\omega_0 \approx \omega_{pe} \gg \omega_s$. Обидві гармоніки з частотами $\omega = \omega_0 \pm \omega_s$ близькі до ω_{pe} і мають враховуватися при пошуку розв'язку. Стандартно беремо

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2} (v_{00} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \text{к.с.}), \\ \frac{n_s}{n_0} &= \frac{1}{2} (b e^{i(k_s x - \omega_s t)} + \text{к.с.}). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \theta_0 - \theta_s &= (k_0 - k_s)x - (\omega_0 - \omega_s)t; \\ \theta_0 + \theta_s &= (k_0 + k_s)x - (\omega_0 + \omega_s)t. \end{aligned}$$

Для амплітуди наростаючої ленгмюрівської хвилі:

$$v_1 = \frac{1}{2} \left[v_- e^{i(k_1 x - (\omega_0 - \omega_s)t)} + v_+ e^{i(-k_1 x - (\omega_0 + \omega_s)t)} + \text{к.с.} \right] \quad (7.8)$$

k_1 у другій експоненті завдячує своїй появі саме малості хвильового числа хвилі накачування k_0 .

Тепер потрібно застосувати рівняння зв'язаних хвиль (7.1) у прийнятній для аналізованої задачі формі. Розгляд ведемо в наближенні заданого накачування (4.23). Рівняння для v_1

та $\frac{n_s}{n_0}$ початково мають вигляд (7.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \omega_1^2 v_1 = -\omega_{pe}^2 v_0 \frac{n_s}{n_0} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{n_s}{n_0} - C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{n_s}{n_0} = \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 v_1) \end{cases}.$$

Вважатимемо інкремент нестійкості γ великим порівняно з частотою іонного звуку, тобто:

$$|\ddot{b}| \gg \omega_s |\dot{b}| \gg \omega_s^2 |b|. \quad (7.9)$$

Для ленгмюрівської хвилі, навпаки, інкремент припускати не будемо несуттєвим відносно її частоти, так що головну роль відіграватиме

$$\omega_1^2 - (\omega_0 \pm \omega_s)^2 \approx \omega_{pe}^2 - (\omega_0 \pm \omega_s)^2.$$

Дістанемо такі рівняння для амплітуд:

$$\begin{cases} \left[\omega_{pe}^2 - (\omega_0 - \omega_s)^2 \right] \frac{v_-}{2} = -\frac{\omega_{pe}^2}{4} v_{00} b^* \\ \left[\omega_{pe}^2 - (\omega_0 + \omega_s)^2 \right] \frac{v_+}{2} = -\frac{\omega_{pe}^2}{4} v_{00} b \ ; \\ \gamma^2 \frac{b}{2} = \frac{m_e}{4m_i} (-k_s^2) (v_{00} v_-^* + v_{00}^* v_+) \end{cases} \quad (7.10)$$

Величиною k_0 при отриманні рівнянь нехтуємо.

Спростимо вираз:

$$\frac{\omega_{pe}^2 - (\omega_0 \pm \omega_s)^2}{\omega_{pe}^2} = 1 - \left(\frac{\omega_0 \pm \omega_s}{\omega_{pe}} \right)^2.$$

Введемо відхилення частоти накачування від плазмової:

$$\Delta \equiv \omega_0 - \omega_{pe}.$$

При записі через цю величину:

$$1 - \left(1 + \frac{\Delta \pm \omega_s}{\omega_{pe}} \right)^2 \approx -\frac{2(\Delta \pm \omega_s)}{\omega_{pe}}.$$

Підставляємо v_+ та v_- у рівняння для амплітуди іонно-звукової хвилі (7.10):

$$\gamma^2 = -\frac{m_e}{2m_i} k_s^2 \frac{\omega_{pe}}{4} |v_{00}|^2 \left(\frac{1}{\Delta - \omega_s} + \frac{1}{\Delta + \omega_s} \right).$$

Звідси

$$\gamma^2 = \frac{m_e}{8m_i} k_s^2 \omega_{pe} |v_{00}|^2 \frac{2\Delta}{\omega_s^2 - \Delta^2}. \quad (7.11)$$

Нестійкість потребує

$$\Delta < \omega_s,$$

частота хвилі накачування має бути близькою до ω_{pe} . Інкремент пропорційний до амплітуди хвилі,

$$\gamma \sim |E_{00}|.$$

Можна записати:

$$\gamma = \frac{ek_s}{2\omega_0} \sqrt{\frac{\omega_{pe}\Delta}{m_e m_i (\omega_s^2 - \Delta^2)}} |E_{00}|. \quad (7.12)$$

Інша можлива ситуація – коли інкремент важливий у рівняннях для амплітуд v_+ та v_- (7.10). Якщо доданки з $\omega \cdot \dot{v}$ домінують, приходимо до:

$$\begin{cases} -i(\omega_0 - \omega_s)\dot{v}_- = -\frac{\omega_{pe}^2}{4}v_{00}b^* \\ -i(\omega_0 + \omega_s)\dot{v}_+ = -\frac{\omega_{pe}^2}{4}v_{00}b \\ \frac{\ddot{b}}{2} = -\frac{m_e}{4m_i}k_s^2(v_{00}v_-^* + v_{00}^*v_+) \end{cases} \quad (7.13)$$

Знов-таки, оперуємо заключним рівнянням системи (7.13):

$$\begin{aligned} \ddot{b} &= -\frac{m_e}{8m_i}k_s^2\omega_{pe}^2|v_{00}|^2b\left(\frac{i}{\omega_0 - \omega_s} - \frac{i}{\omega_0 + \omega_s}\right), \text{ тобто} \\ \gamma^3 &\approx -i\frac{m_e}{4m_i}k_s^2\omega_s\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}|v_{00}|^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Нестійкість потребує

$$\text{Re } \gamma > 0,$$

що дає інкремент

$$\text{Re } \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m_e}{4m_i}k_s^2\omega_s\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}|v_{00}|^2\right)^{1/3}. \quad (7.15)$$

Великий інкремент і в цьому випадку зростає з амплітудою повільніше, ніж малий. Незмінним лишається і закон (7.7):

$$\gamma \sim |E_{00}|^{2/3}.$$

8. Різновиди трихвильових параметричних процесів

Умови синхронізму у плазмі можуть задовольнятися для трійок хвиль різних типів. Скажімо, можливий розпад вістрелера на вістрелер і альвенівську хвилю:

$$w \rightarrow w' + A.$$

Що стосується однорідної немагніченої плазми, то, за врахування електронної температури, у ній поширюються поперечні електромагнітні хвилі (t), а також поздовжні ленгмюрівські (l) та іонно-звукові (s). Дисперсійні криві для хвиль у ізотропній немагніченій плазмі показані на рис. 8.1. Можливі сценарії розпаду хвилі в такому середовищі:

$$l \rightarrow l' + s;$$

$$t \rightarrow l + s;$$

$$t \rightarrow l + l';$$

$$t \rightarrow t' + s;$$

$$t \rightarrow t' + l.$$

Перший із цих процесів детально досліджений раніше, заключний ще буде розглядатись у розділі 11. В одновимірному за хвильовим числом випадку взаємодія відображається векторною сумою на площині ($k; \omega$).

Деякі з цих параметричних нестійкостей є аналогічними до явищ, що розглядаються в інших розділах фізики. Зокрема, розпаду за схемою $t \rightarrow t' + l$ відповідає комбінаційне (раманівське) розсіяння світлових хвиль на власних коливаннях молекул речовини. Таке розсіяння непружне – з'являються компоненти на різницевій частоті (стоксова) та сумарній (антистоксова). У свою чергу, процес $t \rightarrow t' + s$ відображає розсіяння світлових хвиль на хвилях, які зумовлюють варіації показника заломлення. Таке явище відоме як розсіяння Мандельштама

– Бріллюена. Якщо реалізується розсіюння світлових хвиль на звукових, то довжина перших значно менша, тобто

$$|\vec{k}_s| \ll |\vec{k}_0|, |\vec{k}_1|.$$

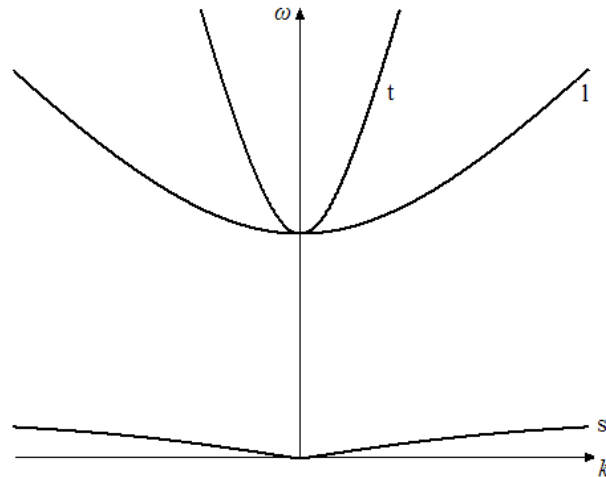


Рисунок 8.1 – Дисперсійні криві хвиль у теплій незамагніченій плазмі

В одновимірному випадку трихвильової взаємодії не буде, бо нахил дисперсійної кривої для світлових хвиль значно більший, ніж для звукових. Втім, уже у двовимірній задачі схема реалізується (рис. 8.2). Через малість $|\vec{k}_s|$ обидві світлові хвилі поширюються майже в одному напрямку. Більш точно, для кута відхилення з рівнобедреного трикутника:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{k_s}{2k_0}.$$

Отже,

$$k_s = 2k_0 \sin \alpha / 2, \quad (8.1)$$

а для довжин хвиль

$$\lambda_0 = 2\lambda_s \sin \alpha / 2.$$

Отриманий результат аналогічний до відомої умови дифракції Вульфа – Бреггів (Bragg's law) для хвиль у кристалах. При взаємодії світлових і звукових хвиль кут розсіювання дуже малий, $\alpha \ll 1$.

Тому можемо записувати

$$\lambda_0 \approx \lambda_s \alpha.$$

Частота розсіяної хвилі, знов-таки, змінюється на величину ω_s .

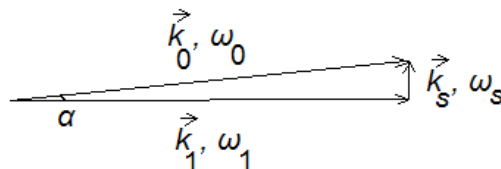


Рисунок 8.2 – Схема трихвильової взаємодії для звукової і світлових хвиль

Зауважимо, що, у принципі, можливі розпадні спектри, коли умови синхронізму забезпечуються для однієї дисперсійної кривої. В одновимірному випадку необхідно:

$$\omega(k_1 + k_2) = \omega(k_1) + \omega(k_2). \quad (8.2)$$

Відповідна схема проілюстрована на рис. 8.3. У дво- чи тривимірній задачі умова синхронізму:

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2; \quad (8.3)$$

достатньо, щоб із відрізків k_0, k_1, k_2 можна було побудувати трикутник:

$$k(\omega_1 + \omega_2) \leq k(\omega_1) + k(\omega_2).$$

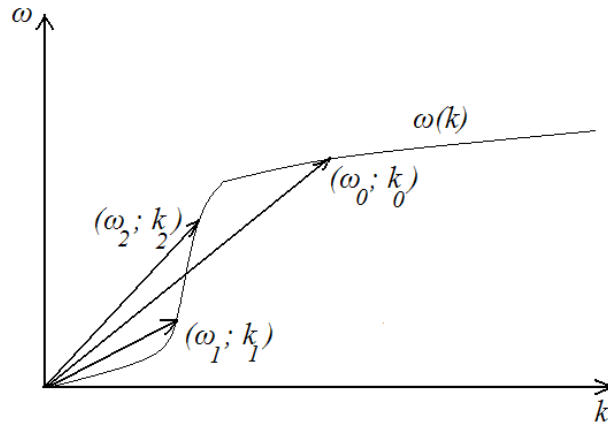


Рисунок 8.3 – Приклад розпадного спектра

9. Взаємодія хвиль із частотами ω і 2ω

Окремого розгляду потребує вироджений випадок трихвильової взаємодії (5.4) (чи взаємодії трьох коливальних процесів):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega; \\ \omega_3 &= 2\omega. \end{aligned}$$

Маємо тільки два зв'язані рівняння:

$$\begin{cases} \dot{a}_\omega = -i\sigma a_\omega^* a_{2\omega} \\ \dot{a}_{2\omega} = -i\sigma a_\omega^2 \end{cases}. \quad (9.1)$$

Відразу наголосимо на особливостях, не притаманних невиродженій задачі:

- а) амплітуда хвилі з частотою ω залежить від її власного значення;
- б) із першого рівняння також випливає, що коли початково

$$a_\omega(t=0) = 0,$$

то коливання на частоті ω взагалі не виникнуть;

в) якщо

$$a_\omega(t=0) \neq 0,$$

$$a_{2\omega}(t=0) = 0,$$

то з часом ітиме перекачування енергії на частоту 2ω .

Дослідимо систему (9.1), яка тепер складається лише з двох рівнянь. Перейдемо до дійсних амплітуд і фаз:

$$a_\omega \equiv A_1 e^{i\varphi_1};$$

$$a_{2\omega} \equiv A_2 e^{i\varphi_2}.$$

При підстановці:

$$\begin{cases} (\dot{A}_1 + iA_1\dot{\varphi}_1)e^{i\varphi_1} = -i\sigma A_1 e^{-i\varphi_1} A_2 e^{i\varphi_2} \\ (\dot{A}_2 + iA_2\dot{\varphi}_2)e^{i\varphi_2} = -i\sigma A_1^2 e^{2i\varphi_1} \end{cases}. \quad (9.2)$$

В обох випадках присутня комбінація фаз

$$\Phi \equiv 2\varphi_1 - \varphi_2.$$

Систему (9.2) можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 + iA_1\dot{\phi}_1 = -i\sigma A_1 A_2 e^{-i\Phi} \\ \dot{A}_2 + iA_2\dot{\phi}_2 = -i\sigma A_1^2 e^{i\Phi} \end{cases}.$$

Виокремимо дійсну й уявну частини в кожному рівнянні:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = -\sigma A_1 A_2 \sin \Phi \\ \dot{A}_2 = \sigma A_1^2 \sin \Phi \\ \dot{\phi}_1 = -\sigma A_2 \cos \Phi \\ \dot{\phi}_2 = -\sigma \frac{A_1^2}{A_2} \cos \Phi \end{cases} \quad (9.3)$$

Загалом, це система з чотирьох нелінійних рівнянь першого порядку. Однак при початковому $\Phi(t=0) = \pm \frac{\pi}{2}$ фази лишаються сталими. Обираємо знак "+", тоді

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = -\sigma A_1 A_2 \\ \dot{A}_2 = \sigma A_1^2 \end{cases} \quad (9.4)$$

За протилежної фазової умови наростатиме хвиля з частотою ω за рахунок хвилі з частотою 2ω . Інтеграл системи знаходимо, домноживши перше рівняння на A_1 , друге – на A_2 і додавши їх:

$$A_1^2 + A_2^2 = A_0^2 = \text{const} \text{ (рівняння кола)}.$$

Введемо нормовані амплітуди:

$$\alpha_{1,2} \equiv A_{1,2} / A_0.$$

Тепер інтеграл системи має форму

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

Друге рівняння (9.4) записується як

$$\dot{\alpha}_2 = \sigma A_0 (1 - \alpha_2^2).$$

Виконуємо інтегрування:

$$\int \frac{d\alpha_2}{1 - \alpha_2^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - \alpha_2} + \frac{1}{1 + \alpha_2} \right) d\alpha_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2}.$$

У підсумку,

$$\frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2} = C e^{2\sigma A_0 t}. \quad (9.5)$$

Опишемо наростання амплітуди збурення з частотою 2ω від нульового рівня. Це означає

$$\begin{aligned} C &= 1; \\ \alpha_2 &= \frac{e^{2\sigma A_0 t} - 1}{e^{2\sigma A_0 t} + 1} = \text{th } \sigma A_0 t \end{aligned} \quad (9.6)$$

Звідси також маємо:

$$\alpha_1 = \sqrt{1 - \text{th}^2 \sigma A_0 t} = \frac{1}{\text{ch } \sigma A_0 t}.$$

Характерний час взаємодії подається величиною $t_0 = (\sigma A_0)^{-1}$.

Зобразимо еволюцію системи графічно (рис. 9.1). Точка перетину кривих відповідає

$$\text{th } \sigma A_0 t = \frac{1}{\text{ch } \sigma A_0 t} \text{ чи } \text{sh } \sigma A_0 t = 1. \text{ Звідси } e^{\sigma A_0 t} - e^{-\sigma A_0 t} = 2; e^{\sigma A_0 t} = \sqrt{2} + 1.$$

Отже, шуканий час

$$t = \frac{\ln(\sqrt{2} + 1)}{\sigma A_0},$$

що відрізняється від введеного характерного значення t_0 числовим коефіцієнтом порядку одиниці.

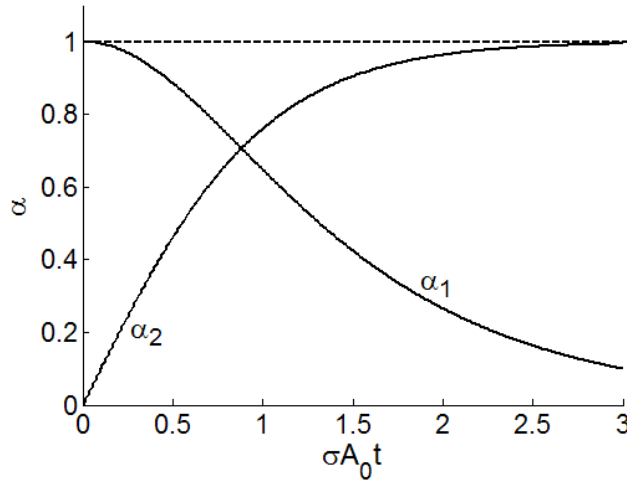


Рисунок 9.1 – Зміна амплітуди хвиль із частотами ω та 2ω . Початково вся енергія міститься у хвилі з частотою 2ω .

У підсумку, енергія повністю переходить до хвилі з частотою ω_2 . Такий перехід реалізується за довільного значення C . Дійсно,

$$C = \frac{1 + \alpha_2(0)}{1 - \alpha_2(0)} \geq 1.$$

Як наслідок,

$$\alpha_2 = \frac{C e^{2\sigma A_0 t} - 1}{C e^{2\sigma A_0 t} + 1} \rightarrow 1 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Розглянутий процес розвивається, якщо

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi_2) = 1;$$

фази лишаються сталими.

10. Вибухова нестійкість

У нерівноважному середовищі можуть існувати хвилі з від'ємною енергією. Наростання амплітуди такої хвилі супроводжується зменшенням сумарної енергії системи "середовище + хвиля". Амплітуди хвиль з енергією різних знаків можуть наростати одночасно без вилучення енергії з середовища. Хвилі з від'ємною енергією реєструються, зокрема, у плазмі з пучками, коли функція розподілу є багатогорбою.

Якісно простежимо за розвитком трихвильової взаємодії (5.1), коли в ній бере участь хвиля з від'ємною енергією. За основу візьмемо розглянуту раніше модель розпаду ленгмюрівської хвилі накачування, де отримані рівняння:

$$\begin{cases} \dot{a}_{1s} = -i\sigma_1 a_{2s}^* a_{3s} \\ \dot{a}_{2s} = -i\sigma_2 a_{1s}^* a_{3s} \\ \dot{a}_{3s} = -i\sigma_3 a_{1s} a_{2s} \end{cases}.$$

Коефіцієнти у правій частині становили (4.22):

$$\sigma_1 \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_1};$$

$$\sigma_2 \equiv \frac{m_e}{m_i} \frac{k_s^2}{4\omega_2};$$

$$\sigma_3 \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{4\omega_3}.$$

Якщо розпадатиметься хвиля з від'ємною енергією і, відповідно, частотою, то

$$\sigma_3 \sim \frac{1}{\omega_3} < 0.$$

Вкажемо, що при розглянутому в наступному розділі розпаді фотона на фотон і плазмон від'ємними стають два коефіцієнти – це не принципово, аби тільки в одному з рівнянь виник інший знак, ніж у двох інших.

Нормовані амплітуди тепер вводимо так:

$$\begin{aligned} a_{1s} &\equiv \sqrt{\sigma_1} a_1; \\ a_{2s} &\equiv \sqrt{\sigma_2} a_2; \\ a_{3s} &\equiv \sqrt{-\sigma_3} a_3. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Під коренем скрізь містяться додатні числа; у рівняннях виникне коефіцієнт

$$\sigma \equiv \sqrt{-\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}. \quad (10.2)$$

Ситуація відрізняється від типової трихвильової взаємодії (5.4) тільки знаком:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -i\sigma a_2^* a_3 \\ \dot{a}_2 = -i\sigma a_1^* a_3 \\ \dot{a}_3 = i\sigma a_1 a_2 \end{cases} \quad (10.3)$$

Перейдемо до дійсних амплітуд і фаз, $a_j \equiv A_j e^{i\varphi_j}$:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 + iA_1\dot{\varphi}_1 = -i\sigma A_2 A_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \\ \dot{A}_2 + iA_2\dot{\varphi}_2 = -i\sigma A_1 A_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \\ \dot{A}_3 + iA_3\dot{\varphi}_3 = i\sigma A_1 A_2 e^{-i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \end{cases} \quad (10.4)$$

Подібні системи вже розглядалися (5.25). Вводимо

$$\Phi \equiv \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2$$

й отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \sigma A_2 A_3 \sin \Phi \\ \dot{A}_2 = \sigma A_1 A_3 \sin \Phi \\ \dot{A}_3 = \sigma A_1 A_2 \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = \sigma \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} + \frac{A_1 A_3}{A_2} + \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \cos \Phi \end{cases} \quad (10.5)$$

Специфічність ситуації (10.5) у тому, що амплітуди A_j змінюються однотипно. Достатньо взяти

$$\Phi(t=0) = \frac{\pi}{2},$$

щоб усунути фазову залежність. Для амплітуд:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \sigma A_2 A_3 \\ \dot{A}_2 = \sigma A_1 A_3 \\ \dot{A}_3 = \sigma A_1 A_2 \end{cases} \quad (10.6)$$

Співвідношення Менлі – Роу (5.8), записані на основі такої системи, матимуть форму

$$N_i - N_j = \text{const} \quad (10.7)$$

в усіх випадках, тобто, кванти частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ здатні народжуватися всі одночасно. Рівняння мають вигляд:

$$\dot{A} = \sigma A^2, \text{ звідки} \quad \frac{1}{A_0} - \frac{1}{A(t)} = \sigma t \Rightarrow A(t) = \frac{1}{\frac{1}{A_0} - \sigma t} = \frac{A_0}{1 - \sigma A_0 t}. \quad (10.8)$$

Характерний час розвитку нестійкості: $t_0 = (\sigma A_0)^{-1}$.

Цей час скінченний, тому говорять про вибуховий процес (рис. 10.1). На практиці наростання обмежується через вплив нелінійностей вищих порядків (як і загалом у фізиці, коли з'являється нескінченність за скінченний час; зазначимо, втім, що в космології більш-менш серйоз розглядається сценарій Великого Розриву (Big Rip) із поведінкою масштабного фактора, повністю аналогічною до наведеного графіка).

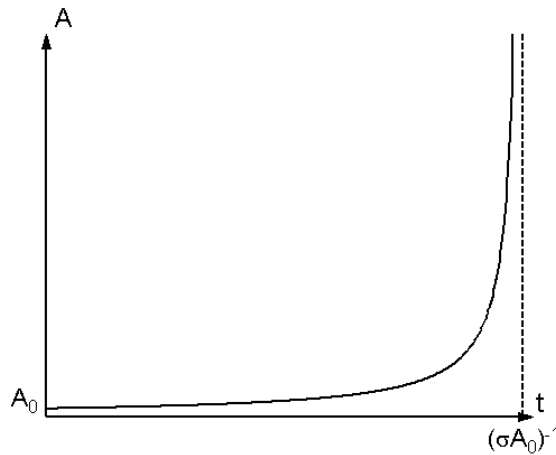


Рисунок 10.1 – Зміна амплітуди при вибуховій нестійкості

11. Розпад фотона на фотон і плазмон

Детально дослідимо ще один процес трихвильової взаємодії – розпад поперечної електромагнітної хвилі на іншу поперечну електромагнітну та поздовжню ленгмюрівську: $t \rightarrow t' + l$. Як і раніше, вважаємо, що для фаз хвиль точно виконується умова синхронізму:

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2,$$

де індекс “3” стосується хвилі накачування t , “1”: t' , “2”: l .

Усі хвилі високочастотні, тому треба аналізувати рух електронів.

Запишемо рівняння Максвелла і рівняння руху:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e(n_0 - n_e) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en_e \vec{v} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} - \frac{e}{m_e c} [\vec{v} \times \vec{B}] - \frac{1}{n_e m_e} \vec{\nabla}(n T_e) \end{array} \right. . \quad (11.1)$$

До наведених рівнянь входять:

$n_e = n_0 + n_1$, сума рівноважної і збуреної концентрації електронів;

\vec{v} – швидкість руху електронів (збурена величина);

\vec{E} – напруженість електричного поля;

\vec{B} – напруженість магнітного поля;

e – заряд електрона;

m_e – маса електрона;

T_e – температура електронної компоненти плазми, її розглядаємо як сталу.

Передбачається відсутність фонових полів.

Нехай усі хвилі поширюються вздовж осі z :

$$\vec{k} \parallel \vec{e}_z.$$

Тоді у задачі існує осьова симетрія, а залежність від двох інших координат відсутня:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \text{ стосовно всіх змінних.}$$

Із рівняння для $\operatorname{div} \vec{B}$ відразу випливає

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow B_z = 0.$$

Через відсутність залежності від координат x та y суттєво спрощуються векторні рівняння Максвелла. Так,

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Запишемо рівняння для $\operatorname{rot} \vec{E}$ і $\operatorname{rot} \vec{B}$ (11.1) покомпонентно:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en_e v_x \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en_e v_y \\ 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en_e v_z \end{aligned} \quad (11.2)$$

Тут є дві групи рівнянь, які містять, відповідно, $\{B_y, v_x, E_x\}$ та $\{B_x, v_y, E_y\}$. При розгляді лінійно поляризованих хвиль доцільно обмежитись однією з цих груп. Оберемо

$$\begin{aligned}\vec{E}_\perp &\parallel \vec{e}_x; \\ \vec{B} &\parallel \vec{e}_y,\end{aligned}$$

тоді з указаних чотирьох рівнянь (11.2) треба розглядати друге й третє. П'яте містить збурення, викликане поздовжньою ленгмюрівською хвилею.

Об'єднаємо рівняння для поперечних збурень (11.2). Виконаємо диференціювання і вилучимо B_y :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e v_x). \quad (11.3)$$

У свою чергу, з рівняння для $\text{div} \vec{E}$ (11.1):

$$n_e = n_0 - \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Рівноважна концентрація n_0 стала:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{4\pi e n_0}{c^2} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right). \quad (11.4)$$

Скористаємося лінеаризованим рівнянням руху:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \approx -\frac{e}{m_e} E_x.$$

Квадратична поправка:

$$\frac{e}{m_e c} v_z B_y - v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = v_z \left(\frac{e}{m_e c} B_y - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right).$$

У першому порядку

$$\begin{aligned}B_y &= \frac{kc}{\omega} E_x; \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{ek}{m_e \omega} E_x,\end{aligned}$$

відбувається занулення. Отримуємо рівняння з нелінійним доданком у правій частині:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega_{pe}^2 E_x = f_x, \quad \text{де} \quad (11.5)$$

$$f_x \equiv -\frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right). \quad (11.6)$$

У лінійному випадку

$$f_x = 0.$$

При переході до фур'є-гармонік,

$$E_x \sim e^{i(kz - \omega t)},$$

дістаємо

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2,$$

тобто, дисперсійне рівняння електромагнітних хвиль у незамагніченій плазмі.

Продиференціюємо також рівняння (11.2) для поздовжньої компоненти електричного поля:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 4\pi e \frac{\partial}{\partial t} (n_0 v_z). \quad (11.7)$$

Збурення концентрації зумовить появу доданка $\sim v_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$, який буде несинхронним із E_z . Залучаємо рівняння руху (11.1):

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{e}{m_e} E_z - \frac{e}{m_e c} v_x B_y - \frac{T_e}{n_0 m_e} \frac{\partial n_e}{\partial z}.$$

Доданок із $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$ теж несинхронний, решту підставляємо до рівняння для $\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$ (11.7):

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega_{pe}^2 E_z - \frac{\omega_{pe}^2}{c} v_x B_y - \frac{4\pi e T_e}{m_e} \left(-\frac{1}{4\pi e} \right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}.$$

В останньому доданку використаний вираз для збурення концентрації. У підсумку,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega_{pe}^2 E_z = f_z. \quad (11.8)$$

Тут нелінійний доданок має вигляд

$$f_z \equiv -\frac{\omega_{pe}^2}{c} v_x B_y. \quad (11.9)$$

У лінійному випадку:

$$E_z \sim e^{i(kz - \omega t)};$$

$$\omega^2 = k^2 v_{Te}^2 + \omega_{pe}^2.$$

Отримали дисперсійне рівняння ленгмюрівських хвиль у гідродинамічному наближенні.

Для поперечної й поздовжньої компонент електричного поля маємо рівняння зв'язаних хвиль (11.5), (11.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega_{pe}^2 E_x = f_x; \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega_{pe}^2 E_z = f_z \end{cases}; \quad (11.10)$$

$$f_x = -\frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right);$$

$$f_z = -\frac{\omega_{pe}^2}{c} v_x B_y.$$

Поле E_x створюється поперечними електромагнітними хвилями 1 і 3, завдяки чому:

$$E_x = \frac{1}{2} (E_1(z, t) e^{i\theta_1} + E_3(z, t) e^{i\theta_3} + \kappa.c.). \quad (11.11)$$

Тут враховано, що амплітуди можуть змінюватись як у просторі, так і в часі. За поздовжню компоненту електричного поля відповідальна ленгмюрівська хвиля з

$$E_z = \frac{1}{2} (E_2(z, t) e^{i\theta_2} + \kappa.c.). \quad (11.12)$$

Вважатимемо амплітуди за повільно змінювані. Зокрема,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \approx \frac{1}{2} \left[\left(-2i\omega_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} - \omega_1^2 E_1 \right) e^{i\theta_1} + \left(-2i\omega_3 \frac{\partial E_3}{\partial t} - \omega_3^2 E_3 \right) e^{i\theta_3} + \kappa.c. \right].$$

За тим же принципом:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \approx \frac{1}{2} \left[\left(2ik_1 \frac{\partial E_1}{\partial z} - k_1^2 E_1 \right) e^{i\theta_1} + \left(2ik_3 \frac{\partial E_3}{\partial z} - k_3^2 E_3 \right) e^{i\theta_3} + \kappa.c. \right].$$

При підстановці даних виразів зануляються доданки, що відповідають дисперсійному співвідношенню. Дістанемо:

$$-i\omega_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} e^{i\theta_1} - i\omega_3 \frac{\partial E_3}{\partial t} e^{i\theta_3} - ik_1 c^2 \frac{\partial E_1}{\partial z} e^{i\theta_1} - ik_3 c^2 \frac{\partial E_3}{\partial z} e^{i\theta_3} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(v_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right). \quad (11.13)$$

Для правої частини залуцаємо лінійну залежність із рівняння руху (11.1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_x \quad \text{чи}$$

$$i\omega v_x = \frac{e}{m_e} E_x,$$

що дає:

$$v_x = -\frac{ie}{m_e \omega} E_x. \quad (11.14)$$

Із урахуванням наведеної формули для швидкості (11.14) зберемо доданки, що містять $e^{i\theta_1}$:

$$-i\omega_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} - ik_1 c^2 \cdot \frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{e}{m_e} \frac{E_3}{2} \cdot (-ik_2) \frac{E_2^*}{2} + \frac{ie}{m_e \omega_3} \frac{E_3}{2} \cdot k_2 \omega_2 \frac{E_2^*}{2}.$$

Дещо спростимо результат:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{k_1 c^2}{\omega_1} \frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{ek_2}{4m_e \omega_1} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) E_2^* E_3. \quad (11.15)$$

Беремо до уваги, що

$$\frac{k_1 c^2}{\omega_1} = \frac{c^2}{v_{ph1}} = v_{g1} \quad (\text{групова швидкість електромагнітної хвилі}).$$

Дістаємо:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + v_{g1} \frac{\partial E_1}{\partial z} = \beta_1 E_2^* E_3. \quad (11.16)$$

Із урахуванням умови синхронізму:

$$\beta_1 = \frac{ek_2}{4m_e \omega_3}. \quad (11.17)$$

Тепер прирівняємо коефіцієнти при $e^{i\theta_3}$:

$$-i\omega_3 \frac{\partial E_3}{\partial t} - ik_3 c^2 \cdot \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{e}{m_e} \frac{E_1}{2} \cdot ik_2 \frac{E_2}{2} + \frac{ie}{m_e \omega_1} \frac{E_1}{2} \cdot \omega_2 k_2 \frac{E_2}{2}. \quad (11.18)$$

Приходимо до

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{k_3 c^2}{\omega_3} \frac{\partial E_3}{\partial z} = -\frac{ek_2}{4m_e \omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_1} E_1 E_2. \quad (11.19)$$

Вводимо позначення за аналогією з попереднім рівнянням (11.16):

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} + v_{g3} \frac{\partial E_3}{\partial z} = -\beta_3 E_1 E_2;$$

$$v_{g3} \equiv \frac{k_3 c^2}{\omega_3}; \quad (11.20)$$

$$\beta_3 \equiv \frac{ek_2}{4m_e \omega_1}.$$

Нарешті, дослідимо рівняння для поздовжньої компоненти електричного поля (11.8). Амплітуду E_2 теж вважаємо повільно змінюваною, тоді:

$$\left(-i\omega_2 \frac{\partial E_2}{\partial t} - v_{Te}^2 \cdot ik_2 \frac{\partial E_2}{\partial z}\right) e^{i\theta_2} + \kappa.c. = -\frac{\omega_{pe}^2}{c} v_x B_y . \quad (11.21)$$

З'ясуємо вигляд квадратичного доданка. Маємо:

$$v_x = -\frac{ie}{2m_e} \left(\frac{E_1}{\omega_1} e^{i\theta_1} + \frac{E_3}{\omega_3} e^{i\theta_3} \right) + \kappa.c.$$

Із рівняння для $\text{rot } \vec{E}$ (11.2):

$$B_y = \frac{kc}{\omega} E_x, \text{ тому}$$

$$B_y = \frac{c}{2} \left(\frac{k_1}{\omega_1} E_1 e^{i\theta_1} + \frac{k_3}{\omega_3} E_3 e^{i\theta_3} \right) + \kappa.c.$$

Зберемо коефіцієнти при $e^{i\theta_2}$:

$$-i\omega_2 \frac{\partial E_2}{\partial t} - ik_2 v_{Te}^2 \frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{ie\omega_{pe}^2}{4m_e} \left(-\frac{k_3}{\omega_1\omega_3} + \frac{k_1}{\omega_1\omega_3} \right) E_1^* E_3 . \quad (11.22)$$

Враховуємо умови синхронізму:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{k_2 v_{Te}^2}{\omega_2} \frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{e\omega_{pe}^2 k_2}{4m_e \omega_1 \omega_2 \omega_3} E_1^* E_3 . \quad (11.23)$$

Вводимо такі ж позначення, як у двох попередніх рівняннях:

$$v_{g2} \equiv \frac{k_2 v_{Te}^2}{\omega_2} - \text{групова швидкість ленгмюрівської хвилі};$$

$$\beta_2 \equiv \frac{e\omega_{pe}^2 k_2}{4m_e \omega_1 \omega_2 \omega_3} - \text{коефіцієнт трихвильової взаємодії}.$$

Рівняння має форму:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + v_{g2} \frac{\partial E_2}{\partial z} = \beta_2 E_1^* E_3 . \quad (11.24)$$

Аналіз рівнянь для зв'язаних хвиль

Таким чином, трихвильова взаємодія $t \rightarrow t' + l$ описується системою рівнянь із квадратичною нелінійністю (11.16), (11.20), (11.24):

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} + v_{g1} \frac{\partial E_1}{\partial z} = \beta_1 E_2^* E_3 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + v_{g2} \frac{\partial E_2}{\partial z} = \beta_2 E_1^* E_3 \\ \frac{\partial E_3}{\partial t} + v_{g3} \frac{\partial E_3}{\partial z} = -\beta_3 E_1 E_2 \end{cases} . \quad (11.25)$$

При розгляді початкової задачі беремо

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

У наближенні низькочастотного накачування хвилею 1 маємо типову для трихвильової взаємодії ситуацію (5.11):

$$\begin{cases} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \beta_2 E_1^{(0)*} E_3 \\ \frac{\partial E_3}{\partial t} = -\beta_3 E_1^{(0)} E_2 \end{cases} .$$

Звідси

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \beta_2 \beta_3 |E_1^{(0)}|^2 E_2 = 0. \quad (11.26)$$

Відбуваються осциляції напруженості електричного поля хвилі з частотою

$$\omega = \sqrt{\beta_2 \beta_3} = \frac{e \omega_{pe} k_2}{4 m_e \omega_1 \sqrt{\omega_2 \omega_3}} |E_1^{(0)}|. \quad (11.27)$$

Як показано раніше зі співвідношень Менлі – Роу, при низькочастотному накачуванні не відбувається інтенсивного перерозподілу енергії (див. рис. 5.1).

У свою чергу, для початкової задачі при високочастотному накачуванні (5.17), $E_3 = \text{const} = E_3^{(0)}$, маємо з (11.25):

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \beta_1 E_3^{(0)} E_2^* \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} = \beta_2 E_3^{(0)} E_1^* \end{cases}.$$

Зводимо рівняння до:

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \beta_1 \beta_2 |E_3^{(0)}|^2 E_1 = 0. \quad (11.28)$$

При високочастотному накачуванні йде експоненціальне наростання амплітуди – розвивається нестійкість із інкрементом

$$\gamma = \sqrt{\beta_1 \beta_2} |E_3^{(0)}| = \frac{e \omega_{pe} k_2}{4 m_e \omega_3 \sqrt{\omega_1 \omega_2}} |E_3^{(0)}|. \quad (11.29)$$

На початковому етапі йде інтенсивний перехід енергії від хвилі 3 – див. рис. 5.2.

Також розглянемо вплив дисипації при високочастотному накачуванні. Фізично дисипація може зумовлюватися зіткненнями частинок чи витратами енергії хвилі на зміну функції розподілу. Подібні процеси описуються доданками, пропорційними до амплітуди:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \beta_1 E_3^{(0)} E_2^* - \nu_1 E_1 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} = \beta_2 E_3^{(0)*} E_1 - \nu_2 E_2^* \end{cases}. \quad (11.30)$$

Для лінійних рівнянь розв'язок шукаємо у формі:

$$E_1, E_2 \sim e^{pt}.$$

Умовою нетривіального розв'язку буде:

$$\begin{vmatrix} p + \nu_1 & -\beta_1 E_3^{(0)} \\ -\beta_2 E_3^{(0)*} & p + \nu_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.31)$$

Отримуємо:

$$p^2 + (\nu_1 + \nu_2)p + \nu_1 \nu_2 - \beta_1 \beta_2 |E_3^{(0)}|^2 = 0.$$

Для коренів маємо:

$$p = \frac{1}{2} \left[-(\nu_1 + \nu_2) \pm \sqrt{(\nu_1 + \nu_2)^2 - 4\nu_1 \nu_2 + 4\beta_1 \beta_2 |E_3^{(0)}|^2} \right].$$

Після спрощення підкореневого виразу:

$$p = \frac{1}{2} \left[-(\nu_1 + \nu_2) \pm \sqrt{(\nu_1 - \nu_2)^2 + 4\beta_1 \beta_2 |E_3^{(0)}|^2} \right]. \quad (11.32)$$

Для розвитку нестійкості потрібен додатний корінь p (11.32), тобто,

$$(v_1 - v_2)^2 + 4\beta_1\beta_2|E_3^{(0)}|^2 > (v_1 + v_2)^2;$$

$$|E_3^{(0)}|^2 > \frac{v_1 v_2}{\beta_1 \beta_2}.$$

Нестійкість стає пороговою із граничним значенням напруженості електричного поля для хвилі накачування

$$|E_3^{(0)}|_{cr} = \sqrt{\frac{v_1 v_2}{\beta_1 \beta_2}}. \quad (11.33)$$

Тому розглянуті раніше приклади з нульовою пороговою амплітудою, зокрема, (11.29) відповідають ситуаціям, коли дисипацією можливо знехтувати. При великих амплітудах $|E_3^{(0)}|$ залежність інкремента від вказаної амплітуди є лінійною, як і в безпороговому наближенні. Відзначимо, що при $v_1 = v_2$ залежність теж лінійна, але з порогом $|E_3^{(0)}|_{cr} = \frac{v}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}$. Загалом, маємо ситуацію, зображену на рис. 11.1.

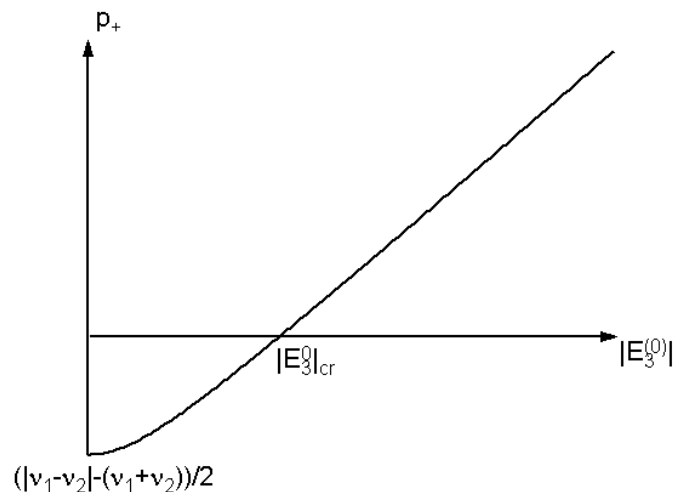


Рисунок 11.1 – Більший корінь із (11.32) залежно від амплітуди хвилі накачування; нестійкість розвивається при його додатному значенні

12. Рівняння зв'язаних хвиль при слабкій кореляції між фазами

Критерій процесу з випадковими фазами

Якщо в ході взаємодії фаза хвилі суттєво змінюється, то таку хвилю більше не можна вважати монохроматичною. Зміни зумовлюються дрібними неоднорідностями середовища. Тоді доцільним стає наближення цугів монохроматичних хвиль. З'являються два характерні часові масштаби (рис. 12.1). На наведеній схемі:

τ_0 – період хвилі;

τ – довжина цугу.

Частоту монохроматичної хвилі $\Omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}$ називають частотою заповнення цугу. Наближення

застосовне при $\tau \gg \tau_0$.

Ширина спектра хвильового пакету визначається його часовою протяжністю: $\delta\Omega \sim \tau^{-1}$. Звідси впливає $\delta\Omega \ll \Omega_0$.

Ширину спектра можна пов'язати з хвильовим вектором:

$$\delta\Omega \approx \left. \frac{\partial\Omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \delta\vec{k} \equiv \vec{v}_g(\vec{k}_0) \delta\vec{k}.$$

Отже, для пакету $\delta k \sim \frac{1}{v_g(k_0)\tau}$.

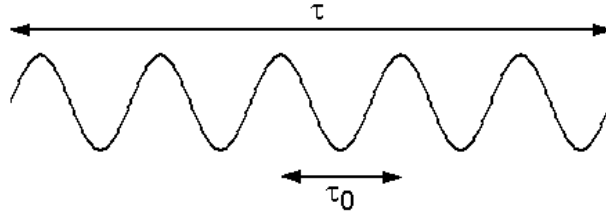


Рисунок 12.1 – Цуг монохроматичних хвиль

Нелінійна взаємодія відбувається за характерний час $t_{nl} \sim (\sigma A_0)^{-1}$. Процес варто вважати відповідним наближенню випадкових фаз, якщо

$$\langle \vec{E}_{t_{nl}} \rangle = 0. \quad (12.1)$$

Це потребує великого часу взаємодії порівняно із тривалістю окремого цугу:

$$t_{nl} \gg \tau \sim (\delta\Omega)^{-1}.$$

Близька до монохроматичної хвиля має вузький спектр, тоді така умова не виконується і процес немає потреби розглядати як випадковий. Наближення випадкових фаз застосовне, коли справедлива подвійна нерівність:

$$\tau_0 \ll \tau \ll t_{nl}. \quad (12.2)$$

Таким чином, період хвилі суттєво менший за тривалість цугу, а та, у свою чергу, за час нелінійної взаємодії хвиль. Для частот, відповідно:

$$t_{nl}^{-1} \ll \delta\Omega \ll \Omega_0.$$

Випадковість процесу на часових інтервалах $t \geq t_{nl}$ викликає занулення лінійних за амплітудою фізичних величин, зокрема, напруженостей полів,

$$\langle \vec{E}_\omega \rangle_{t_{nl}} = 0.$$

Таким же буде і результат усереднення у просторі на масштабах $l \gg (\delta k)^{-1}$ (δk – ширина цугу за хвильовими числами). Квадратичні за амплітудою характеристики, наприклад, густина енергії електричного поля

$$w_\omega = \frac{\langle E_\omega^2 \rangle}{8\pi},$$

при усередненні лишаться відмінними від нуля.

Закон збереження енергії не допускає суттєвих змін амплітуд унаслідок впливу дрібних просторових неоднорідностей чи часових нестаціонарностей. Натомість, зміні фази ніщо не перешкоджає. Записана раніше умова $t_{nl} \gg \tau$ саме й означає, що характерний час зміни фази суттєво менший характерного часу зміни амплітуди. Відзначимо, що взаємодія за умов точного синхронізму включно з вибуховою нестійкістю передбачає зворотне співвідношення, $t_{nl} \ll \tau$.

Якщо умова точного синхронізму не виконується, то все-таки можлива повільна трихвильова взаємодія при

$$\langle \Phi \rangle \equiv \langle \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0. \quad (12.3)$$

Характер зміни амплітуд хвиль при слабкій кореляції між їх фазами

Нехай умова синхронізму за частотами справджується не строго:

$$\omega(\vec{k}_3) = \omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) + \Delta\omega. \quad (12.4)$$

При усередненні протягом характерного часу взаємодії $\langle \Delta\omega \rangle_{t_{nl}} = 0$.

Для трихвильової взаємодії будемо користуватися звичною системою рівнянь для амплітуд, які містять квадратичну нелінійність (5.4):

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -i\sigma a_2^* a_3 \\ \dot{a}_2 = -i\sigma a_1^* a_3 \\ \dot{a}_3 = -i\sigma a_1 a_2 \end{cases}$$

Введемо дійсні амплітуди A_j та фази φ_j :

$$a_j \equiv A_j e^{i\varphi_j}$$

Для нових змінних:

$$\begin{cases} (\dot{A}_1 + iA_1\dot{\varphi}_1) e^{i\varphi_1} = -i\sigma A_2 A_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)} \\ (\dot{A}_2 + iA_2\dot{\varphi}_2) e^{i\varphi_2} = -i\sigma A_1 A_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)} \\ (\dot{A}_3 + iA_3\dot{\varphi}_3) e^{i\varphi_3} = -i\sigma A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{cases} \quad (12.5)$$

Нелінійна взаємодія описується комбінацією фаз

$$\Phi_{nl} \equiv \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2.$$

Відповідно, відокремивши дійсну й уявну частини, отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \sigma A_2 A_3 \sin \Phi_{nl} \\ \dot{A}_2 = \sigma A_1 A_3 \sin \Phi_{nl} \\ \dot{A}_3 = -\sigma A_1 A_2 \sin \Phi_{nl} \\ \dot{\Phi}_{nl} = \sigma \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} + \frac{A_1 A_3}{A_2} - \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \cos \Phi_{nl} \end{cases} \quad (12.6)$$

При цілком випадковому процесі

$$\langle \sin \Phi_{nl} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{A}_j \rangle = 0.$$

Зміна амплітуд можлива тільки при скорельованості варіацій фаз. За відсутності точного синхронізму маємо хаотичні (випадкові) зміни фаз,

$$\dot{\Phi}_{\text{вип}} = -\Delta\omega.$$

Наближення випадкового процесу застосовне при

$$|\dot{\Phi}_{nl}| \ll |\dot{\Phi}_{\text{вип}}|, \text{ тоді } \dot{\Phi} \approx \dot{\Phi}_{\text{вип}}.$$

Фази, на відміну від амплітуд, не регулюються законом збереження енергії, тому їх варіації можуть бути хаотичними.

Для аналізу процесу, як і при точному синхронізмі, введемо інтенсивності хвиль,

$$N_j \equiv |a_j|^2.$$

Для їх зміни:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*) \\ \dot{N}_2 = -i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*) \\ \dot{N}_3 = i\sigma(a_1^* a_2^* a_3 - a_1 a_2 a_3^*) \end{cases} \quad (12.7)$$

Припускаємо слабку взаємодію трьох хвиль при $\langle \Delta\omega \rangle = 0$. Амплітуди подамо у вигляді

$$a_j = \sqrt{N_j} e^{i\varphi_j} + \tilde{a}_j; \quad (12.8)$$

збурення амплітуди \tilde{a}_j вважатимемо малим. Підстановка таких виразів (12.8) до рівнянь для \dot{a}_j приводить до

$$\begin{cases} \dot{\tilde{a}}_1 = -i\sigma\sqrt{N_2N_3}e^{i(\varphi_3-\varphi_2)} \\ \dot{\tilde{a}}_2 = -i\sigma\sqrt{N_1N_3}e^{i(\varphi_3-\varphi_1)} ; \\ \dot{\tilde{a}}_3 = -i\sigma\sqrt{N_1N_2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{cases} \quad (12.9)$$

збуреними доданками у правій частині нехтуємо.

Інтенсивності N_j – повільно змінювані величини, які можна винести з-під інтеграла при обчисленні збурень амплітуди. Зокрема,

$$\tilde{a}_1 \approx -i\sigma\sqrt{N_2N_3} \int_{t_s}^t e^{i(\varphi_3-\varphi_2)} dt'; \quad (12.10)$$

t_s – час початку взаємодії. З урахуванням аналогічних формул для збурених амплітуд запишемо одне з рівнянь (12.7), виконавши усереднення за фазами:

$$\begin{aligned} \langle \dot{N}_1 \rangle = & -i\sigma \left\langle \left[\sqrt{N_1} e^{-i\varphi_1} + i\sigma\sqrt{N_2N_3} \int_{t_s}^t e^{-i(\varphi_3-\varphi_2)} dt' \right] \times \left[\sqrt{N_2} e^{-i\varphi_2} + i\sigma\sqrt{N_1N_3} \int_{t_s}^t e^{i(\varphi_3-\varphi_1)} dt' \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\sqrt{N_3} e^{i\varphi_3} - i\sigma\sqrt{N_1N_2} \int_{t_s}^t e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} dt' \right] \right\rangle + \kappa.c. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Проаналізуємо отриману формулу (12.11). Повільно змінювані амплітуди припустимо винести з-під усереднення, як раніше з-під інтеграла (12.10). Для величин нульового порядку, таким чином:

$$\langle (\dot{N}_1)_0 \rangle = \sigma\sqrt{N_1N_2N_3} \langle -ie^{i(\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)} + ie^{-i(\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)} \rangle = \sigma\sqrt{N_1N_2N_3} \times 2\langle \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) \rangle = 0$$

за рахунок випадковості фаз.

Будемо враховувати тільки лінійні за малими збуреннями доданки в (12.11), нехтуючи квадратичними й кубічними. Тоді:

$$\begin{aligned} \langle \dot{N}_1 \rangle \approx & \sigma^2 \left\langle \left[-N_1N_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \int_{t_s}^t e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} dt' + N_1N_3e^{i(\varphi_3-\varphi_1)} \int_{t_s}^t e^{-i(\varphi_3-\varphi_1)} dt' + \right. \right. \\ & \left. \left. + N_2N_3e^{i(\varphi_3-\varphi_2)} \int_{t_s}^t e^{-i(\varphi_3-\varphi_2)} dt' \right] \right\rangle + \kappa.c. \end{aligned}$$

Результат визначається виразами виду

$$\left\langle e^{-i\varphi(t)} \int_{t_s}^t e^{i\varphi(t')} dt' \right\rangle + \kappa.c. \equiv \tilde{\tau},$$

які мають розмірність часу. Вони залежать від автокореляційних властивостей фазових функцій $\varphi(t)$.

Введемо коефіцієнт

$$W \equiv \sigma^2 \tilde{\tau},$$

що забезпечує

$$\langle \dot{N}_1 \rangle = W(N_1N_3 + N_2N_3 - N_1N_2). \quad (12.12)$$

Із рівнянь для інтенсивностей також випливає

$$\begin{aligned}\langle \dot{N}_2 \rangle &= \langle \dot{N}_1 \rangle; \\ \langle \dot{N}_3 \rangle &= -\langle \dot{N}_1 \rangle = -W(N_1 N_3 + N_2 N_3 - N_1 N_2)\end{aligned}$$

Дані формули виражають повільні зміни інтенсивностей завдяки скорельованості варіацій фаз.

Співвідношення Менлі – Роу та розподіл за енергіями

Попри зміну характеру взаємодії, вигляд співвідношень Менлі – Роу зберігається:

$$\begin{cases} \langle N_1 \rangle - \langle N_2 \rangle = C_3 = const \\ \langle N_1 \rangle + \langle N_3 \rangle = C_2 = const \\ \langle N_2 \rangle + \langle N_3 \rangle = C_1 = const \end{cases}$$

Такі формули, однак, стосуються не миттєвих, а усереднених величин. Усереднення проводиться за час, суттєво більший тривалості цугу τ , але менший характерного часу нелінійної взаємодії t_{nl} (інакше зміну інтенсивностей доведеться враховувати при усередненні).

Домножимо рівняння для \dot{N}_j (12.12) на ω_j , після чого всі три додамо. Після усереднення при повільній змінюваності амплітуд:

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3) \right\rangle = W(N_1 N_3 + N_2 N_3 - N_1 N_2) \times \langle \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \rangle. \quad (12.13)$$

При усередненні повинна дотримуватись умова синхронізму:

$$\langle \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \rangle = 0$$

Отже, можна зробити висновок про збереження сумарної енергії:

$$\varepsilon = \langle \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 \rangle = const$$

Рівноважний стан досягається при

$$N_j = \frac{const}{\omega_j} \quad (12.14)$$

Дійсно, вираз у правій частині рівнянь (12.12) для $\langle \dot{N}_i \rangle$ тоді пропорційний до

$$\frac{1}{\omega_1 \omega_3} + \frac{1}{\omega_2 \omega_3} - \frac{1}{\omega_1 \omega_2} = \frac{\omega_2 + \omega_1 - \omega_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}.$$

Унаслідок усереднення зміна N_i буде нульовою. Можна очікувати, що за тривалий час, $t \rightarrow \infty$ енергія рівномірно розподілиться за ступенями вільності: $\varepsilon_j = \omega_j N_j \rightarrow \varepsilon_0 = const$.

Даний результат відомий як закон Релея – Джинса. Схематично досягнення рівноважного стану зображено на рис. 12.2. Розподіл за законом Релея – Джинса буде рівноважним і для 4-хвильових процесів.

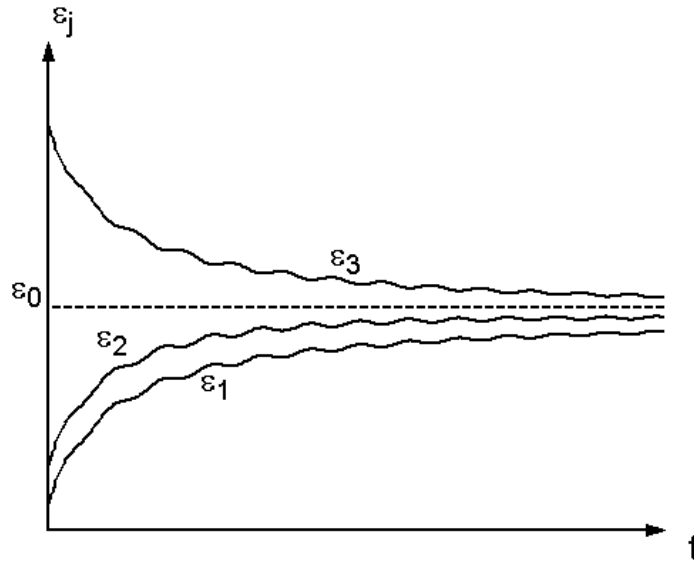


Рисунок 12.2 – Досягнення рівноважного стану при трихвильовій взаємодії

II. Параболічне рівняння, модуляційна нестійкість

13. Рівняння простих хвиль

При наявності дисперсії, тобто, коли залежність $\omega(\vec{k})$ відрізняється від лінійної, хвильовий пакет розпливається. За рахунок нелінійності, коли швидкість руху визначається амплітудою, спостерігається зворотний ефект – збільшення крутизни фронту. Існує принципова можливість виникнення стаціонарних хвиль при компенсації названих ефектів. Зазначимо, що йдеться про бездисипативне середовище.

Розглянемо найпростішу модель руху – пучок невзаємодіючих частинок. Їх швидкість не змінюється, тому в одновимірному випадку

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

Записане рівняння формально є нелінійним, що дозволяє розглянути вплив нелінійності на характеристики пучка.

Нехай у незбуреному стані рух відбувається зі сталою швидкістю v_0 . Перейдемо до системи відліку, яка рухається з такою швидкістю:

$$\begin{aligned} v &= u + v_0; \\ x' &= x - v_0 t; \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}; \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} - v_0 \frac{\partial}{\partial x'}. \end{aligned}$$

Перетворюємо рівняння (13.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t'} - v_0 \frac{\partial u}{\partial x'} + (u + v_0) \frac{\partial u}{\partial x'} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} = 0 - \text{вигляд рівняння не змінюється.}$$

Проаналізуємо поведінку пучка при наявності збурення:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1; \\ v_1 &= V \cos kx'. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Швидкості руху частинок тепер різняться. Простежимо за змінами на фазовій площині (x', u) . Концентрація у незбуреному випадку не змінюється: $n(x') = \text{const}$. Натомість, збурення швидкості означає, що частинки з $u > 0$ забігатимуть уперед, а з $u < 0$ – відставатимуть. Із часом профіль "хвилі" зазнаватиме змін. Якісна картина показана на рис. 13.2.

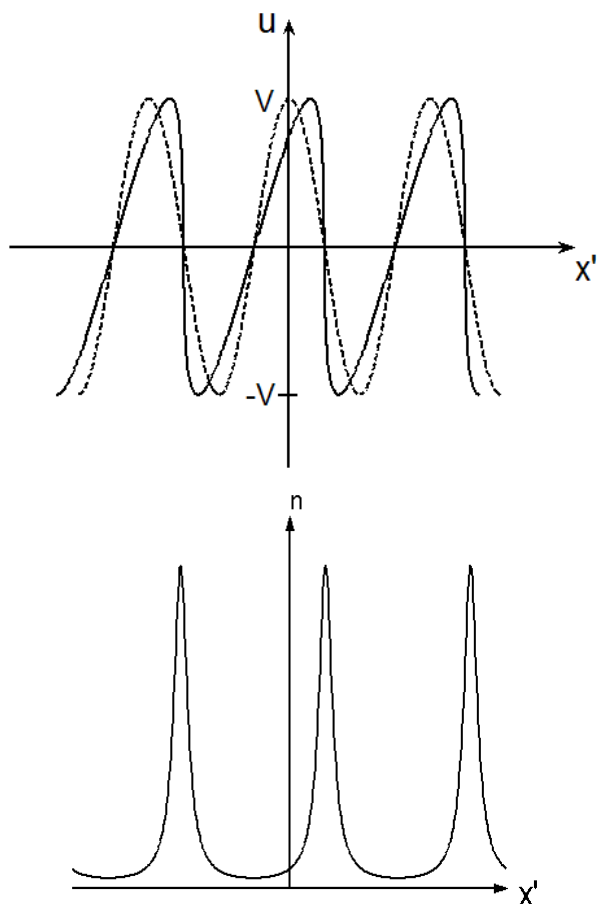


Рисунок 13.2 – Залежність швидкості та концентрації від координати при поширенні пучка не взаємодіючих частинок

На передньому фронті хвилі з'являється збурення концентрації, яке з часом наростає. Зрештою, похідна $\frac{\partial u}{\partial x'}$ досягає нескінченного значення – відбувається перекидання хвилі.

Нескінченною (в рамках зробленого наближення) стає і концентрація частинок. Надалі залежність швидкості від координати є неоднозначною. З'являються точки повороту, а отже, і зустрічні пучки. Згодом кількість зустрічних пучків у обраній області простору зростатиме, спостерігатиметься вирівнювання концентрації (рис. 13.3).

Дана модельна задача демонструє типові нелінійні явища: наростання вищих гармонік, перекидання хвилі, збільшення збурень густини. Простежимо за наростанням другої гармоніки:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t'} = -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x'}. \quad (13.3)$$

Підставляємо першу гармоніку із (13.2):

$$u_1 = v_1 = V \cos kx', \text{ тоді}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t'} = V \cos kx' \cdot kV \sin kx' = \frac{kV^2}{2} \sin 2kx'.$$

За час

$$\tau \sim (kV)^{-1}$$

амплітуда другої гармоніки збільшується до рівня першої. Зазначимо, що загальне рівняння простих хвиль в одновимірному випадку записується як

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (13.4)$$

Важлива функціональна залежність $u(n)$.

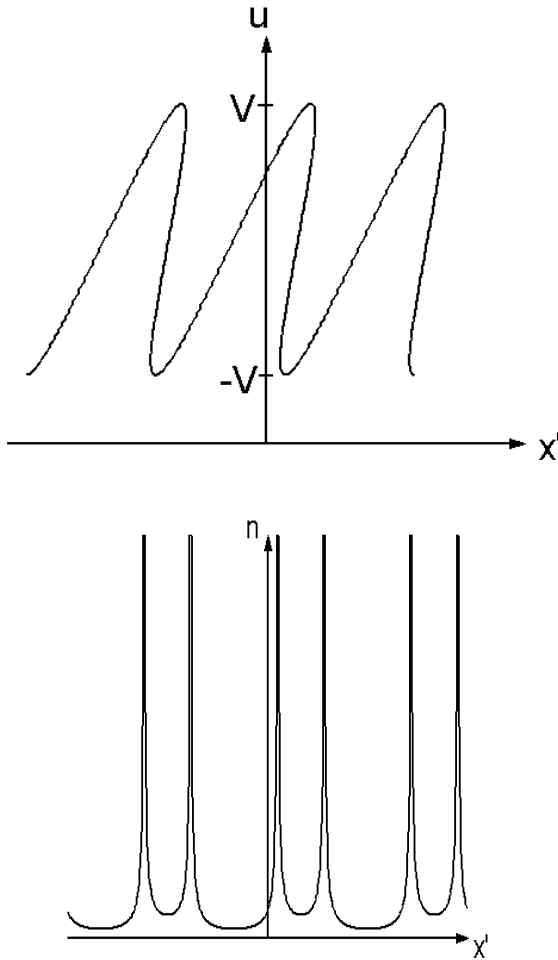


Рисунок 13.3 – Залежність швидкості та концентрації від координати після перекидання хвилі

Прості хвилі у плазмі на прикладі іонного звуку

Іонно-звукові хвилі можуть бути описані рівняннями руху та неперервності для іонів:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{T_e}{m_i n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0 \end{cases}. \quad (13.5)$$

У лінійному наближенні:

$$\begin{aligned} v_1 &= a \cos k(x - C_s t); \\ n_1 &= b \cos k(x - C_s t), \end{aligned}$$

$$C_s \equiv \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}.$$

Для простої хвилі існує функціональна залежність

$$n = n(v).$$

Скористаємося цим для виокремлення потрібного нелінійного розв'язку (13.5):

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{C_s^2}{n} \frac{dn}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{dn}{dv} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Домножуючи перше рівняння на $\frac{dn}{dv}$ і віднімаючи від другого, отримаємо:

$$\left(n^2 - C_s^2 \left(\frac{dn}{dv} \right)^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} C_s^2 \left(\frac{dn}{dv} \right)^2 &= n^2; \\ C_s \frac{dn}{dv} &= \pm n. \end{aligned}$$

При підстановці:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm C_s) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (13.6)$$

Перехід до системи, яка рухається зі швидкістю $\pm C_s$, забезпечує приведення (13.6) до рівняння для пучка невзаємодіючих частинок (13.1). Профіль швидкості змінюватиметься, як у розглянутому прикладі, доки залежність швидкості $v(x)$ лишатиметься однозначною. При $\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \infty$ виникне ударна хвиля, енергія дисипуватиме внаслідок в'язкості. Подібні розв'язки можливі й у інших випадках – для швидкого магнітного звуку, альвенівських хвиль.

14. Метод характеристик

Гідродинамічна чи магнітогідродинамічна задача описується системою диференціальних рівнянь. Для цієї системи може бути поставлена задача Коші: у загальному випадку на певній 3-вимірній гіперповерхні заданий вектор стану \vec{I} . Такий вектор стану включає змінні, якими описується система: концентрацію, тиск, швидкість, напруженість електричного та магнітного полів. Мета – визначити \vec{I} поза заданою гіперповерхнею. Наприклад, може бути задана $\vec{I}(t=0)$ в усьому просторі (x, y, z) . Тоді задача Коші зводиться до знаходження \vec{I} при $t \neq 0$.

З'ясуємо, чи завжди така задача Коші має однозначний розв'язок. Розглянемо найпростіший випадок – одне диференціальне рівняння з двома незалежними координатами:

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + V \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} = 0; \quad (14.1)$$

$$V = V(\vec{I}, t, x). \quad (14.2)$$

Крайова умова:

$$\vec{I}(t, x)\big|_{\Gamma} = \vec{I}_0(s); \quad (14.3)$$

s – довжина дуги на кривій Γ , що відраховується від певної т. О (рис. 14.1).

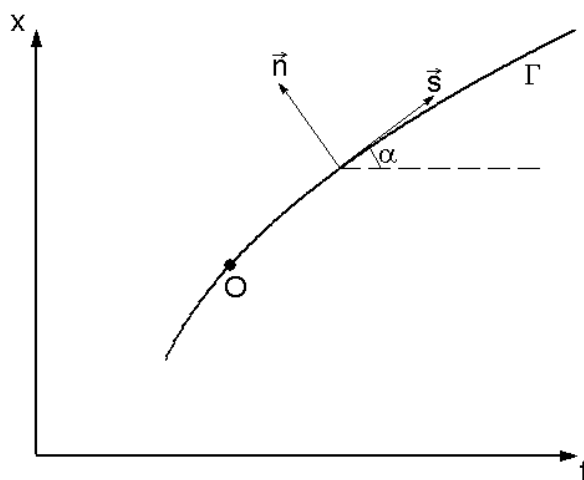


Рисунок 14.1 – Розташування тангенціального і нормального векторів відносно координатних осей

Щоб знайти $\vec{I}(t, x)\big|_{\Gamma}$ поза кривою Γ , треба знати $\frac{\partial \vec{I}}{\partial n}$ для цієї кривої. Осі системи (s, n) повернуті відносно (t, x) на кут α . Перепишемо похідні за координатами t і x через змінні s і n :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \end{cases}. \quad (14.4)$$

Скористаємося формулами для повороту на кут α ; для простоти вважаємо t і x безрозмірними. Маємо:

$$\begin{cases} ds = dt \cdot \cos \alpha + dx \cdot \sin \alpha \\ dn = -dt \cdot \sin \alpha + dx \cdot \cos \alpha \end{cases}.$$

Це означає:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \cdot \sin \alpha \\ \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \cdot \sin \alpha + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (14.5)$$

Виразимо кут α через початкові координати:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dt}{\sqrt{dt^2 + dx^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_{\Gamma}^2}}; \\ v_{\Gamma} &\equiv \frac{dx}{dt}\bigg|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (14.6)$$

швидкість зміни x на кривій Γ . При цьому,

$$\sin \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dt^2 + dx^2}} = \frac{v_{\Gamma}}{\sqrt{1 + v_{\Gamma}^2}}.$$

Тоді

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} - \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \frac{v_\Gamma}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}}.$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} &= \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \cos \alpha; \\ \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} &= \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dt^2}} + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \frac{dt}{\sqrt{dx^2 + dt^2}} = \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \frac{v_\Gamma}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \frac{1}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} \end{aligned}$$

Як наслідок,

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} - \frac{v_\Gamma}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \\ \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} = \frac{v_\Gamma}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} \frac{\partial \vec{I}}{\partial s} + \frac{1}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} \end{cases} \quad (14.7)$$

Візьмемо до уваги початкове рівняння (14.1) із умовою (14.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + V \frac{\partial \vec{I}}{\partial x} &= 0; \\ V &= V(\vec{I}, t, x). \end{aligned}$$

Представимо похідні через s і n :

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial s} (1 + v_\Gamma V) \frac{1}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} + \frac{\partial \vec{I}}{\partial n} (V - v_\Gamma) \frac{1}{\sqrt{v_\Gamma^2 + 1}} = 0.$$

Знаючи $\frac{\partial \vec{I}}{\partial s}$, вдається обчислити й $\frac{\partial \vec{I}}{\partial n}$ у випадку, коли $v_\Gamma \neq V$. Тоді задача Коші має єдиний розв'язок. Натомість, при $v_\Gamma = V$, тобто,

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_\Gamma = V(\vec{I}, t, x), \quad (14.8)$$

$\frac{\partial \vec{I}}{\partial n}$ неможливо визначити із вказаного рівняння. Якщо $v_\Gamma = V$, то автоматично $v_\Gamma V \neq -1$.

Тому нескінченна кількість розв'язків буде при $\frac{\partial \vec{I}}{\partial s} = 0$. У свою чергу, при $\frac{\partial \vec{I}}{\partial s} \neq 0$ задача Коші за виконання умови (14.8), $v_\Gamma = V$, розв'язків не матиме.

Рівність $v_\Gamma = V$ визначає сукупність кривих, які називають характеристиками диференціального рівняння. Задання довільних значень $\vec{I}(t, x)|_\Gamma = \vec{I}_0$ на характеристиці не дає змоги відшукати розв'язок рівняння зовні характеристики. Згадані значення повинні задовольняти умові $\frac{\partial \vec{I}}{\partial s} = 0$, інакше задача Коші не матиме розв'язків. Якщо така умова на характеристиці виконана, то рівняння справджується тотожно.

Характеристики є лініями розділу для областей із різними типами розв'язків. Величини, які лишаються сталими вздовж характеристик, називають інваріантами Рімана. Прості

хвилі характеризуються n диференціальними рівняннями першого порядку, тому для них існують $n - 1$ інтегралів руху. Ці інтеграли і є інваріантами Рімана.

Застосування характеристик при вивченні нелінійних хвиль

Розглянемо рівняння простої хвилі (13.4):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

На характеристиці справедлива умова (14.8) $u = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\Gamma}$. Для простої хвилі існує функціональна

залежність: $n(x, t) = n[x - u(n)t]$.

Позначимо $x - u(n)t \equiv \psi$.

Тут

$\psi = \psi(n)$ – обернена функція, це так звана локальна фаза. Для похідних із рівняння простої хвилі:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{dn}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -u \frac{dn}{d\psi}; \quad (14.9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dn}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dn}{d\psi}. \quad (14.10)$$

Як бачимо, початкове рівняння виконується автоматично. Із підстановки також маємо:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Уздовж характеристики $u = \frac{dx}{dt}$, а, отже, приходимо до

$$\frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (14.11)$$

Тому на характеристиці

$$\psi = const.$$

Оскільки $\psi = \psi(n)$, то також

$$n = const.$$

Швидкість u теж є функцією концентрації,

$$u(n) = const.$$

Розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = u$$

записується у вигляді:

$$x - u(\xi, 0)t = \xi, \quad (14.12)$$

де $\xi \equiv x(t=0)$;

$$u(\xi, 0) = u[n(x = \xi, t = 0)].$$

Тобто, внаслідок збереження швидкості u , кожна точка профілю хвилі рухається вздовж прямої на площині (t, x) . Сама початкова швидкість визначається профілем $u(n)$ у момент часу $t = 0$.

За допомогою методу характеристик можна визначити координати точок розриву хвилі. Продиференціюємо означення локальної фази за x :

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} t = \frac{d\psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (14.13)$$

Звідси

$$\frac{d\psi}{dn} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{t=0}^{-1}. \quad (14.14)$$

ψ , будучи функцією однієї змінної, залежить тільки від початкового профілю концентрації. Можемо бачити, що

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\frac{du}{dn}t + \frac{d\psi}{dn}} = \frac{1}{\frac{du}{dn}t + \frac{1}{\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{t=0}^{-1}}}. \quad (14.15)$$

У точці розриву $\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial t}, \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} \rightarrow \infty$.

Параметри точки розриву дістаємо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^* - u(n^*)t^* = \psi(n^*) \\ -\frac{du}{dn}\bigg|_{n=n^*} t^* = \frac{d\psi}{dn}\bigg|_{n=n^*} \\ -\frac{d^2 u}{dn^2}\bigg|_{n=n^*} t^* = \frac{d^2 \psi}{dn^2}\bigg|_{n=n^*} \end{cases}. \quad (14.16)$$

15. Загасання Ландау

Дослідження властивостей ленгмюрівських та іонно-звукових хвиль у рамках кінетичного підходу демонструє спадання їх амплітуд. Зокрема, для ленгмюрівських хвиль при слабкому загасанні

$$\omega'' \approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 a_{De}^3} e^{-\frac{1}{2k^2 a_{De}^2} - \frac{3}{2}}.$$

При $ka_{De} \approx 1$ загасання відбувається швидко (відносно періоду хвилі). Повільні поздовжні й поперечні хвилі зовсім не поширюються через те ж явище, яке називають загасанням Ландау. Воно реалізується тільки у теплій плазмі й не потребує зіткнень між частинками.

Хвиля втрачає енергію, якщо уявна частина діелектричної проникності $\varepsilon'' > 0$. Це потребує

$$\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial |v_\parallel|} \right|_{v_\parallel = \frac{\omega}{k}} < 0 \quad (15.1)$$

для поздовжніх хвиль та

$$\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial |v_\perp|} \right|_{v_\perp = \frac{\omega}{k}} < 0 \quad (15.2)$$

для поперечних. Така умова реалізується для рівноважної функції розподілу, зокрема, максвеллівської (рис. 15.1).

У свою чергу, при $\varepsilon'' < 0$ амплітуда хвилі наростатиме. Має забезпечуватися:

$$\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial |v|} \right|_{v = \frac{\omega}{k}} > 0 \quad (15.3)$$

Подібний результат можливий при наявності пучків. Вигляд функції розподілу, який допускає плазмово-пучкову нестійкість, проілюстрований на рис. 15.2.

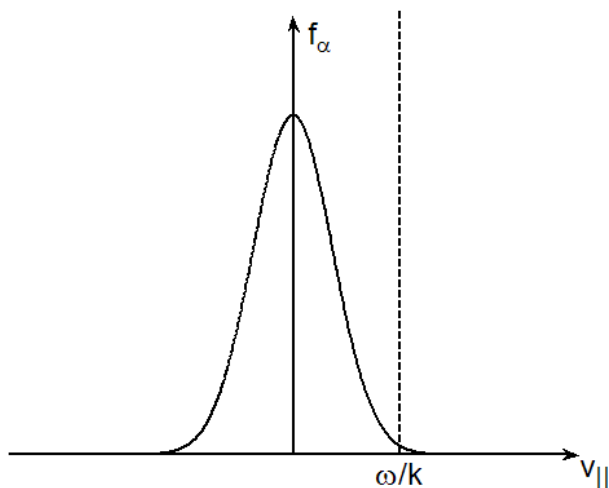


Рисунок 15.1 – Максвеллівська функція розподілу частинок; пунктирна вертикальна пряма показує фазову швидкість хвилі

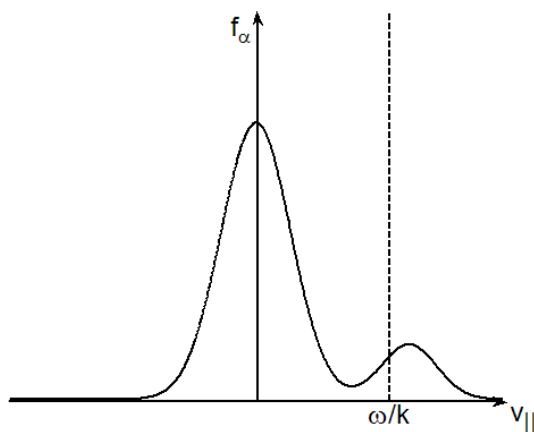


Рисунок 15.2 – Приклад функції розподілу, при якій можлива плазмово-пучкова нестійкість

Розглянемо взаємодію поздовжньої хвилі з електронами. У системі відліку, пов'язаній із хвилею, існує стаціонарне збурення електричного поля. При малих амплітудах воно задається гармонічною функцією:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kx. \quad (15.4)$$

Разом із графіком потенціалу побудуємо фазовий портрет. Беремо до уваги, що від'ємно заряджені електрони здійснюватимуть малі коливання поблизу максимумів потенціалу. Рух частинок із великими швидкостями інфінітний (рис. 15.3). Фазовий портрет, із огляду на характер потенціалу (15.4), є таким же, як для консервативного математичного маятника. Всередині петлі сепаратиси містяться траєкторії захоплених полем хвилі електронів, зовні – траєкторії пролітних. Період коливань захоплених електронів зростає з амплітудою, стаючи нескінченним на сепаратрисі.

Рівняння руху електронів у потенціальному електричному полі:

$$m_e \ddot{x} = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (15.5)$$

Для лінійної хвилі:

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m_e} k \varphi_0 \sin kx. \quad (15.6)$$

У випадку малих коливань, $kx \ll 1$:

$$\ddot{x} + \frac{e\varphi_0 k^2}{m_e} x = 0.$$

Частота малих коливань захоплених частинок становить

$$\Omega \equiv \sqrt{\frac{e\varphi_0}{m_e}} k. \quad (15.7)$$

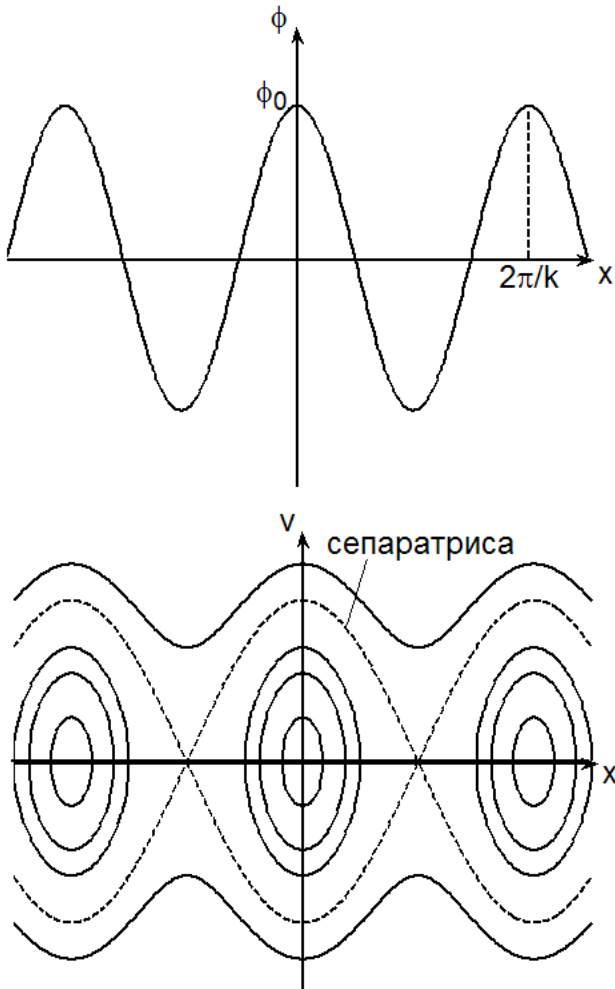


Рисунок 15.3 – Ілюстрація руху електронів у полі синусоїдальної хвилі: залежність потенціалу від координати і фазовий портрет

Форма сепаратриси визначається із закону збереження енергії при русі вздовж неї:

$$0 + e\varphi_0 = \frac{m_e v^2}{2} - e\varphi_0 \cos kx \quad (15.8)$$

(зліва – мінімум потенціалу, справа – довільна точка). Знаходимо залежність $v(x)$:

$$e\varphi_0(1 + \cos kx) = \frac{m_e v^2}{2}, \text{ тому}$$

$$v = \pm 2 \sqrt{\frac{e\varphi_0}{m_e}} \cos \frac{kx}{2}. \quad (15.9)$$

Амплітуда $2\sqrt{\frac{e\varphi_0}{m_e}}$ відображає півширину петлі сепаратриси за швидкістю. Траєкторії захоплених і пролітних електронів відокремлюються двома косинусоїдами з довжиною, вдвічі більшою довжини хвилі.

На характер взаємодії хвилі з частинками суттєво впливає неізохронність коливань. Простежимо за коливаннями захоплених частинок, припускаючи незмінність амплітуди хвилі. Малі коливання відбуваються з періодом $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, а поблизу сепаратриси період прямує до нескінченності. У початковий момент часу припускаємо рівноважну функцію розподілу, $\frac{\partial f}{\partial v} < 0$.

Відтворимо одну довжину хвилі для $t = 0$ і $t = \frac{\pi}{\Omega}$ (рис. 15.4). Друга побудова ілюструє розташування більш численних електронів, які початково у системі відліку хвилі мали від'ємні швидкості.

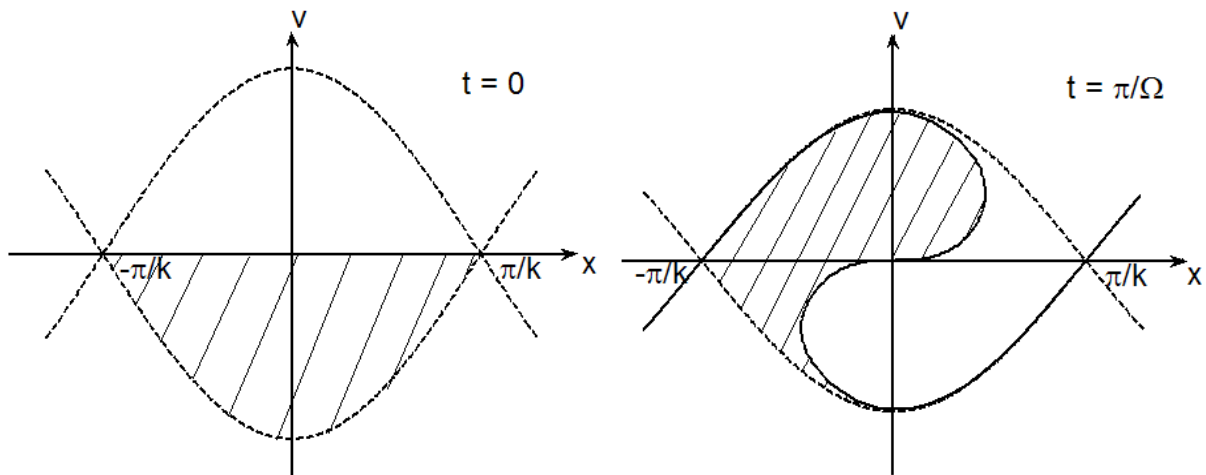


Рисунок 15.4 – Еволюція розподілу електронів у полі синусоїдальної хвилі. Штриховка позначає більш численні частинки.

Надалі внаслідок неізохронності коливань відбувається фазове змішування і на функції розподілу виникає плато (рис. 15.5). Модифікацію функції розподілу частинок під дією поля хвилі називають нелінійним загасанням Ландау. Натомість, лінійне загасання – спад амплітуди за експоненціальним законом, коли зміну функції розподілу можна не враховувати. При малих амплітудах хвиля повністю загасає. Навпаки, при великих амплітудах спостерігатимуться осциляції, які з часом слабшатимуть (рис. 15.6). Частинки, що наздоганяють хвилю, забирають у неї енергію і прискорюються. Навпаки, ті, які випереджають хвилю, будучи захоплені її полем, енергію втрачають. При рівноважній функції розподілу перших більше, що й обумовлює дисипацію хвилі. Наростання амплітуди відбуватиметься у зворотній ситуації,

коли $\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\frac{\omega}{k}} > 0$. Умову $\omega = \vec{k}\vec{v} = kv_{\parallel}$ іноді називають резонансом Ландау: рівними є фазова

швидкість хвилі і проекція швидкості частинки на хвильовий вектор. Зазначимо також, що поле електростатичної хвилі захоплює електрони, для яких

$$|v| < 2\sqrt{\frac{e\varphi_0}{m_e}}.$$

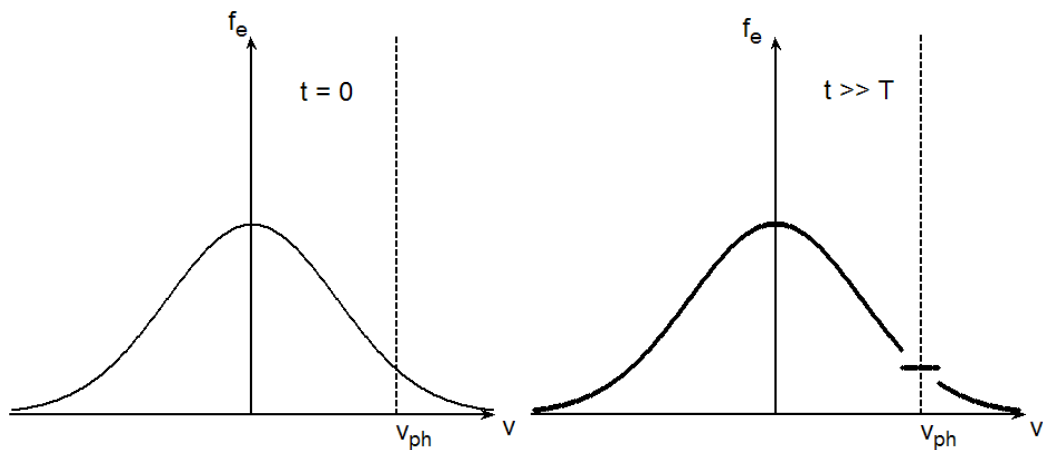


Рисунок 15.5 – Еволюція функції розподілу при фазовому змішуванні

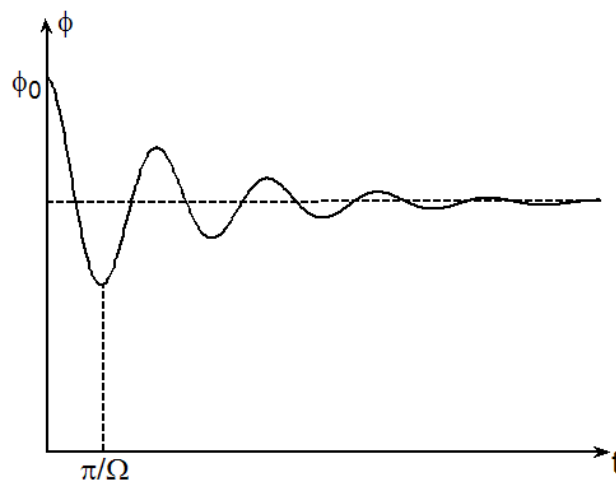


Рисунок 15.6 – Варіації амплітуди хвилі при взаємодії з частинками

16. Параболічне рівняння для хвилі, близької до монохроматичної

Лінійне параболічне рівняння (ЛПР)

Нехай в ізотропному середовищі існує хвиля, близька до монохроматичної. Її частота залежатиме тільки від модуля хвильового вектора, але не від його напрямку: $\omega = \omega(|\vec{k}|)$.

Розглядатимемо лінійну поляризацію:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_{\vec{k}_0} E(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} + \text{к.с.} \right). \quad (16.1)$$

Тут:

$\vec{e}_{\vec{k}_0}$ – сталий вектор, який визначає поляризацію;

$E(\vec{r}, t)$ описує повільні зміни амплітуди й фази;

\vec{k}_0 , ω_0 – незбурені хвильовий вектор і частота, вони підпорядковуються дисперсійному співвідношенню $\omega_0 = \omega(k_0)$.

При наявності збурення існує не монохроматична хвиля, а хвильовий пакет (рис. 16.1). ω_0 і k_0 – це характеристики хвилі заповнення. Таке представлення доцільне при $\lambda \ll L$ чи $k_0 \gg \frac{1}{L}$.

Характерна ширина пакету за хвильовими числами:

$$\Delta k \sim \frac{1}{L}. \quad (16.2)$$

Параметр $\frac{\Delta k}{k_0} \ll 1$ тоді буде малим.

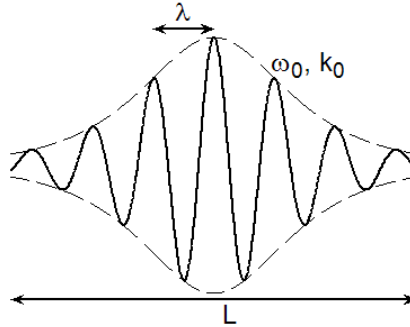


Рисунок 16.1 – Структура хвильового пакету: λ – довжина хвилі; L – протяжність пакету

Розкладемо повільно змінювану амплітуду в інтеграл Фур'є:

$$E = \iint E_{\vec{k}\nu} \vec{e}_{\vec{k}_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \nu t)} d\vec{k} d\nu. \quad (16.3)$$

Область інтегрування визначається протяжністю хвильового пакету: $\sim \frac{1}{L}$ за κ , $\sim \frac{1}{T}$ – за частотами, де

$T = \frac{L}{v_g}$ – характерний час зміни пакету.

Малими параметрами будуть $\frac{\nu}{\omega_0} \ll 1$; $\frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|} \ll 1$.

Підставимо розклад (16.3) в інтеграл до формули для напруженості електричного поля \vec{E} (16.1):

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{e}_{\vec{k}_0} e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega_0 t)} \iint E_{\vec{k}\nu} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \nu t)} d\vec{k} d\nu + \text{к.с.} \quad (16.4)$$

Записано, знов-таки, інтеграл Фур'є з амплітудою $\vec{E}_{\vec{k}\omega} = \vec{e}_{\vec{k}_0} E_{\vec{k}\nu}$, хвильовим вектором $\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{\kappa}$ та частотою $\omega = \omega_0 + \nu$.

У фур'є-розклад повинні входити тільки компоненти, частота яких ω збігається з власною частотою $\omega_{\vec{k}}$:

$$(\omega - \omega_{\vec{k}}) \vec{E}_{\vec{k}\omega} = 0.$$

Частоту і хвильовий вектор подамо через параметри низькочастотної обвідної і високочастотного заповнення:

$$(\omega_0 + \nu - \omega_{\vec{k}_0 + \vec{\kappa}}) \vec{E}_{\kappa\nu} = 0. \quad (16.5)$$

Залежність частоти від хвильового вектора, $\omega_{\vec{k}_0 + \vec{\kappa}}$, треба розкласти в ряд Тейлора поблизу $\vec{k} = \vec{k}_0$. Враховуємо, що в ізотропній плазмі існує залежність тільки від модуля хвильового вектора:

$$\omega_{\vec{k}_0 + \vec{\kappa}} \approx \omega_0 + (|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}| - k_0) v_g + \frac{1}{2} (|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}| - k_0)^2 v_g'. \quad (16.6)$$

Коефіцієнти визначаються груповою швидкістю хвильового пакету (1.5) та її першою похідною за хвильовим числом:

$$\begin{aligned} v_g &\equiv \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} \\ v'_g &\equiv \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Оберемо вісь x уздовж хвильового вектора \vec{k}_0 і залишимо у рівнянні доданки не вищого порядку, ніж квадратичні. Зокрема:

$$|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}| = \sqrt{(k_0 + \kappa_x)^2 + \kappa_{\perp}^2} = k_0 \left(1 + \frac{2\kappa_x}{k_0} + \frac{\kappa_x^2 + \kappa_{\perp}^2}{k_0^2} \right)^{1/2}. \quad (16.8)$$

Застосовуємо розклад у ряд:

$$|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}| \approx k_0 + \kappa_x + \frac{\kappa_x^2 + \kappa_{\perp}^2}{2k_0} - \frac{\kappa_x^2}{2k_0} = k_0 + \kappa_x + \frac{\kappa_{\perp}^2}{2k_0}.$$

Крім того, звідси випливає:

$$\left(|\vec{k}_0 + \vec{\kappa}| - k_0 \right)^2 \approx \kappa_{\perp}^2.$$

Отже, (16.6) зводиться до:

$$\omega_{\vec{k}_0 + \vec{\kappa}} \approx \omega_0 + \left(\kappa_x + \frac{\kappa_{\perp}^2}{2k_0} \right) v_g + \frac{\kappa_x^2}{2} v'_g. \quad (16.9)$$

Для амплітуди обвідної маємо рівняння на основі (16.5) і (16.9):

$$\left[v - \left(\kappa_x + \frac{\kappa_{\perp}^2}{2k_0} \right) v_g - \frac{\kappa_x^2}{2} v'_g \right] \vec{E}_{\vec{\kappa}v} = 0. \quad (16.10)$$

Відновимо диференціальне рівняння, з якого можна отримати щойно записане. Врахуємо, що для повільно змінюваних величин

$$E \sim e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - vt)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -iv; \\ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} &\rightarrow i\vec{\kappa}. \end{aligned}$$

Зараз потрібні обернені співвідношення:

$$\begin{aligned} v &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}; \\ \vec{\kappa} &\rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \vec{r}}. \end{aligned}$$

Як наслідок,

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + iv_g \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{v_g}{2k_0} \Delta_{\perp} E + \frac{v'_g}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0. \quad (16.11)$$

За структурою отримали лінійне параболическе рівняння, під такою назвою воно й відоме. Запропоноване М. Леонтовичем. Два перші доданки відповідають наближенню геометричної оптики. Третій описує відхилення поширення хвиль від прямолінійного (дифракція), а четвертий – зміну групової швидкості з хвильовим числом (дисперсія).

Нелінійне параболічне рівняння (НПР). Модуляційна нестійкість.

Якщо система є нелінійною, то частота хвилі залежить від її амплітуди. У найпростішому випадку

$$\omega_{\vec{k}_0+\vec{k}} = \omega_0 + \left(\vec{k}_0 + \vec{k} \right) v_g + \frac{1}{2} \left(\vec{k}_0 + \vec{k} \right)^2 v_g' + \alpha |E|^2 + \dots \quad (16.12)$$

З'являється коефіцієнт

$$\alpha \equiv \frac{\partial \omega}{\partial |E|^2}. \quad (16.13)$$

Тому нелінійне параболічне рівняння набуває форми

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + i v_g \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{v_g}{2k_0} \Delta_{\perp} E + \frac{v_g'}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \alpha |E|^2 E = 0. \quad (16.14)$$

Розглянемо задачу про нестійкість обвідної. Нехай хвиля характеризується повільно змінюваними у просторі й часі амплітудою і фазою:

$$E = (a_0 + a_1) e^{-i\nu_0 t + i\varphi_1} \quad (16.15)$$

величини a_0 , a_1 , φ_1 – дійсні; амплітуда a_0 у незбуреному випадку додатна. Необхідно, щоб рівняння справджувалося у незбуреному випадку, тоді

$$\nu_0 = \alpha a_0^2.$$

З'ясуємо вигляд рівняння для першого порядку малості. Беремо до уваги, що

$$|a_0 + a_1|^2 (a_0 + a_1) \approx a_0^3 + 3a_0^2 a_1.$$

Загалом, при підстановці (16.15) у (16.14):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a_1}{\partial t} + \nu_0 a_1 - a_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + i v_g \frac{\partial a_1}{\partial x} - v_g a_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{v_g}{2k_0} \Delta_{\perp} a_1 + i \frac{v_g}{2k_0} a_0 \Delta_{\perp} \varphi_1 + \frac{v_g'}{2} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \\ + i \frac{v_g'}{2} a_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - 3\alpha a_0^2 a_1 = 0 \end{aligned} \quad (16.16)$$

Для спрощення запису зберемо повторювані другі похідні в лінійний оператор,

$$\hat{L} \equiv -\frac{v_g}{2k_0} \Delta_{\perp} - \frac{v_g'}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad (16.17)$$

знак ставиться з тим розрахунком, щоб отримати "+" при переході до хвильових чисел. Також залучимо вираз для ν_0 із рівняння нульового порядку. Отримуємо:

$$i \frac{\partial a_1}{\partial t} - 2\alpha a_0^2 a_1 - a_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + i v_g \frac{\partial a_1}{\partial x} - v_g a_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \hat{L} a_1 - i a_0 \hat{L} \varphi_1 = 0. \quad (16.18)$$

Випишемо окремо рівняння для уявної та дійсної частини:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_g \frac{\partial a_1}{\partial x} - a_0 \hat{L} \varphi_1 = 0 \\ a_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + v_g a_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + (2\alpha a_0^2 + \hat{L}) a_1 = 0 \end{cases}. \quad (16.19)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді плоских хвиль:

$$a_1, \varphi_1 \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \nu t)}.$$

Для лінійного оператора (16.17) на такий вираз утворить

$$L = \frac{v_g}{2k_0} \kappa_{\perp}^2 + \frac{v_g'}{2} \kappa_x^2. \quad (16.20)$$

Загалом,

$$\begin{cases} i(v_g \kappa_x - \nu) a_1 - a_0 L \varphi_1 = 0 \\ (2\alpha a_0^2 + L) a_1 + i a_0 (v_g \kappa_x - \nu) \varphi_1 = 0 \end{cases}. \quad (16.21)$$

Зазначимо, що в такій системі a_1 , φ_1 уже є амплітудами фур'є-гармонік (на відміну від (16.19)) і мають розглядатись як комплексні.

Умова нетривіального розв'язку (16.21) відносно a_1 , φ_1 :

$$-a_0(v_g \kappa_x - \nu)^2 + a_0 L(2\alpha a_0^2 + L) = 0. \quad (16.22)$$

Знайдемо частоту обвідної ν :

$$\begin{aligned} v_g \kappa_x - \nu &= \mp \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)}; \\ \nu &= v_g \kappa_x \pm \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)}. \end{aligned} \quad (16.23)$$

При додатному підкореневому виразі хвильовий пакет характеризується двома сателітними частотами:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \pm \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)};$$

тут фігурує зсув $\Delta\omega \equiv v_g \kappa_x$.

Поправка, залежна від L , впливає на величину групової швидкості. Натомість, при

$$L(2\alpha a_0^2 + L) < 0 \quad (16.24)$$

у початковій задачі реалізується нестійкість – амплітуда обвідної наростатиме. Таку нестійкість називають модуляційною, оскільки її виникнення пов'язане з властивостями не високо-частотної хвилі, а саме низькочастотної обвідної, яка здійснює амплітудну модуляцію сигналу.

17. Розвиток модуляційної нестійкості. Самостиснення хвильових пакетів та самофокусування хвильових пучків.

Самостиснення хвильових пакетів

Розглядатимемо самостиснення в рамках одновимірної задачі, взявши у (16.20) $\kappa_\perp = 0$. Спочатку проаналізуємо малі збурення, при яких

$$|L| \ll 2|\alpha|a_0^2. \quad (17.1)$$

Тоді умовою нестійкості замість (16.24) є

$$\alpha L < 0. \quad (17.2)$$

Для одновимірного випадку

$$L = \frac{v_g'}{2} \kappa_x^2. \quad (17.3)$$

Отже, нестійкість розвиватиметься при

$$\alpha v_g' < 0.$$

За означенням наведених величин (16.7), (16.13), це відповідає

$$\frac{\partial \omega}{\partial |E|^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} < 0. \quad (17.4)$$

Дану нерівність називають критерієм Лайтхілла (Lighthill, 1965) розвитку модуляційної нестійкості.

Простежимо за еволюцією хвильового пакету при дотриманні критерію Лайтхілла (17.4). Нехай спершу $\alpha < 0$. Тоді в максимумах обвідної внаслідок нелінійності

$$\delta\omega = \alpha \cdot \delta|E|^2 < 0.$$

Зменшення частоти приводить до зниження фазової швидкості. Схема процесу показана на рис. 17.1.

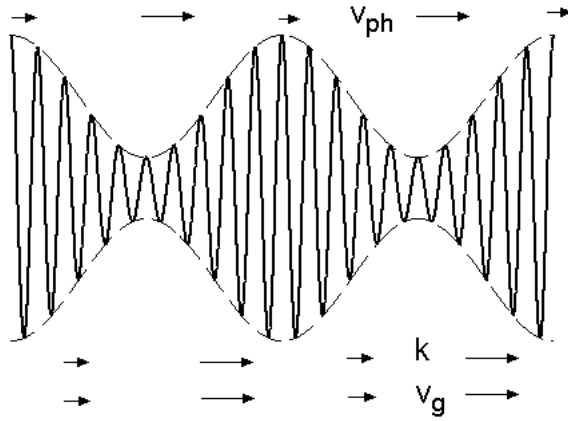


Рисунок 17.1 – Параметри хвильового пакету при $\frac{\partial \omega}{\partial |E|^2} < 0$ й дотриманні критерію Лайтхілла. Стрілки показують величину відповідної характеристики.

Хвилі концентруватимуться перед максимумами обвідної – в таких областях хвильове число зростатиме. Якщо критерію Лайтхілла (17.4) дотримано, то

$$\frac{\partial v_g}{\partial k} > 0.$$

Як наслідок, групова швидкість змінюватиметься синхронно з k , тому енергія наростатиме в області максимуму. Це і свідчить про розвиток нестійкості. Модуляція, випадково виникнувши, посилюватиметься. Якщо ж критерій Лайтхілла не реалізується, енергія в області максимуму обвідної знижуватиметься – збурення зникатиме.

Подібним чином аналізується і випадок $\alpha > 0$. У максимумі обвідної тепер $\delta \omega > 0$, фазова швидкість збільшується. Схема подана на рис. 17.2. Тепер хвильове число перед максимумом спадає, а при виконанні критерію Лайтхілла (17.4) маємо $\frac{\partial v_g}{\partial k} < 0$, групова швидкість змінюється у протифазі до хвильового числа. Знов-таки, енергія в області максимуму збільшується – розвивається нестійкість.

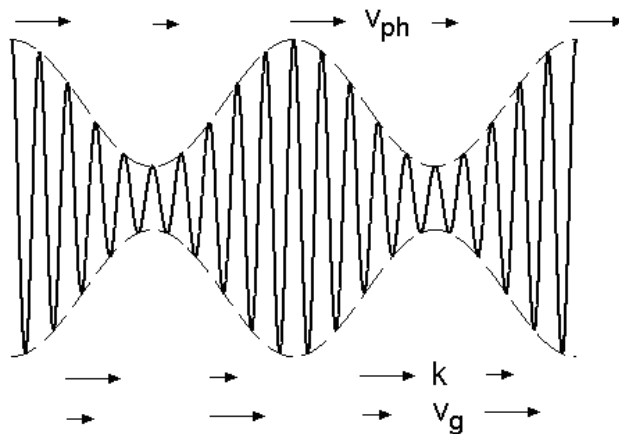


Рисунок 17.2 – Параметри хвильового пакету при $\frac{\partial \omega}{\partial |E|^2} > 0$ й дотриманні критерію Лайтхілла. Стрілки показують величину відповідної характеристики.

З'ясуємо також критерій розвитку модуляційної нестійкості в загальному випадку, коли не можна знехтувати у (16.24) $|L|$ порівняно з $2|\alpha|a_0^2$. Залишатимемося в рамках одновимірної задачі, тоді виконується (16.23),

$$\nu = \nu_g \kappa_x \pm \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)},$$

де $L = \frac{\nu_g'}{2} \kappa_x^2$ згідно із (17.3). Умовою нестійкості буде

$$\begin{aligned} \alpha \nu_g' a_0^2 \kappa_x^2 + \frac{\nu_g'^2}{4} \kappa_x^4 < 0, \text{ звідси} \\ \alpha \nu_g' < -\frac{\nu_g'^2}{4} \frac{\kappa_x^2}{a_0^2}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Таким чином, критерій Лайтхілла виражає необхідну, але не достатню умову модуляційної нестійкості. $\alpha \nu_g'$ не просто має бути від'ємним, а й перевищувати за модулем порогове значення. Можна розглядати отриману нерівність і відносно хвильового числа обвідної:

$$\kappa_x^2 < -\frac{4\alpha}{\nu_g'} a_0^2.$$

Отримуємо

$$\kappa_x < 2a_0 \sqrt{-\frac{\alpha}{\nu_g'}}. \quad (17.6)$$

Обвідна повинна мати достатньо велику довжину. Розвиток нестійкості ускладнений при $\kappa_x \rightarrow 0$, що можливо при малій амплітуді хвилі, слабкій нелінійності чи сильній залежності групової швидкості від хвильового числа. В останньому випадку пакет розпливатиметься через дисперсію.

Інкремент нестійкості визначає функція

$$f(\kappa_x) = \frac{\nu_g'^2}{4} \kappa_x^4 + \alpha \nu_g' a_0^2 \kappa_x^2. \quad (17.7)$$

Максимальний інкремент досягатиметься для найбільшого за модулем від'ємного $f(\kappa_x)$. Знаходимо екстремум:

$$f'(\kappa_x) = \nu_g'^2 \kappa_x^3 + 2\alpha \nu_g' a_0^2 \kappa_x = 0. \quad (17.8)$$

Крім $\kappa_x = 0$ із локальним максимумом, існує додатний корінь (17.8):

$$\kappa_{xm} = a_0 \sqrt{-\frac{2\alpha}{\nu_g'}}. \quad (17.9)$$

Максимальний інкремент становитиме

$$\gamma_{\max} = \sqrt{|f(\kappa_{x\min})|} = \sqrt{\alpha^2 a_0^4} = |\alpha| a_0^2, \quad (17.10)$$

будучи пропорційним до параметра нелінійності та квадрата амплітуди хвилі. Для побудови залежності також зауважимо:

$$f(\kappa_x) = 0 \Rightarrow \kappa_x = 0 \text{ чи}$$

$$\kappa_x = 2a_0 \sqrt{-\frac{\alpha}{\nu_g'}}. \quad (17.11)$$

Вигляд графіка показаний на рис. 17.3. Отже, в загальному випадку критерій Лайтхілла уточнюється: довжина обвідної має перевищувати порогове для нестійкості значення, яке визначається (17.11).

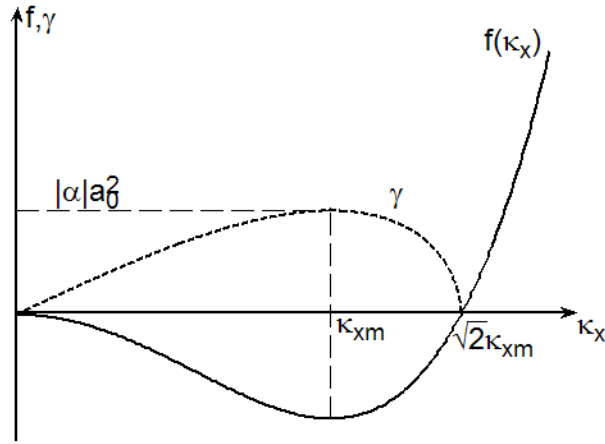


Рисунок 17.3 – Можливість самоствиснення хвильових пакетів. Нестійкість розвивається при $f(\kappa_x) < 0$, відображений її інкремент γ .

Розглянемо на прикладі, як перевірити можливість розвитку модуляційної нестійкості. Нехай розглядаємо електромагнітні хвилі у плазмі із заданою діелектричною проникністю:

$$\varepsilon(\omega, |E|^2) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} (1 + \beta |E|^2). \quad (17.12)$$

Для поперечних хвиль:

$$\varepsilon = n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (17.13)$$

Дисперсійне співвідношення, отже, має вигляд:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 (1 + \beta |E|^2). \quad (17.14)$$

Для з'ясування умов модуляційної нестійкості обмежимося критерієм Лайтхілла (17.4), не беручи до уваги дифракції і припускаючи довжину обвідної достатньо великою.

Продиференціюємо залежність (17.14):

$$2\omega d\omega = 2kc^2 dk + \beta \omega_{pe}^2 d|E|^2.$$

Звідси

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{kc^2}{\omega};$$

$$\alpha \equiv \frac{\partial \omega}{\partial |E|^2} = \frac{\beta \omega_{pe}^2}{2\omega}.$$

Залишається обчислити

$$v'_g \equiv \frac{\partial v_g}{\partial k} = c^2 \frac{\omega - kv_g}{\omega^2} = c^2 \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega^3} = \frac{\omega_{pe}^2 (1 + \beta |E|^2)}{\omega^3} c^2$$

згідно з дисперсійним співвідношенням (17.14). Нелінійність природно брати відносно слабкою, за виконання

$$|\beta| |E|^2 \ll 1.$$

При цьому, критерій Лайтхілла (17.4) вимагає тільки $\beta < 0$, що й забезпечує розвиток модуляційної нестійкості.

Самофокусування хвильових пучків

Після аналізу явища самоствиснення зосередимося на поперечних збуреннях, узявши $\kappa_x = 0$. Тоді із (16.20) залишається:

$$L = \frac{v_g}{2k_0} \kappa_{\perp}^2. \quad (17.15)$$

Для обвідної із (16.23):

$$v = \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)}. \quad (17.16)$$

Нестійкість потребує від'ємного знаку підкореневого виразу, причому k_0 вважаємо додатним. Треба забезпечити:

$$\frac{v_g}{2k_0} \kappa_{\perp}^2 \left(2\alpha a_0^2 + \frac{v_g}{2k_0} \kappa_{\perp}^2 \right) < 0. \quad (17.17)$$

Для хвильового числа в поперечному напрямку:

$$\begin{aligned} \frac{v_g^2}{4k_0^2} \kappa_{\perp}^2 + \frac{\alpha v_g}{k_0} a_0^2 &< 0; \\ \kappa_{\perp}^2 &< -\frac{4\alpha k_0}{v_g} a_0^2. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Нестійкість щодо самофокусування можлива при

$$\alpha v_g < 0, \quad (17.19)$$

але потребує перевищення довжиною збурення порогового значення, виходячи із (17.18).

Унаслідок самофокусування хвиля перетворюється на періодичну в поперечному напрямі сукупність пучків. Для пучка радіуса R мінімальне хвильове число, яке може з'явитись у спектрі:

$$\kappa_{\perp} \sim \frac{1}{R}.$$

Для заданої хвилі нестійкість виникне, починаючи з деякого критичного значення $a_0^2 R^2$. Ця величина пропорційна до потужності, яка для розвитку нестійкості повинна бути достатньо великою.

Стабілізуючий вплив дисперсії та дифракції

Із отриманих результатів випливає, що модуляційна нестійкість не розвивається при достатньо сильних дисперсії (велике κ_x) чи дифракції (велике κ_{\perp}). Розглянемо можливість існування стаціонарних хвильових пакетів за наявності дисперсії. Залучимо нелінійне параболічне рівняння (16.14) без урахування поперечних похідних:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + i v_g \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{v_g'}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \alpha |E|^2 E = 0. \quad (17.20)$$

Стаціонарний пакет рухатиметься із груповою швидкістю v_g у поздовжньому напрямі:

$$E = e^{-i v_0 t} u(x - v_g t). \quad (17.21)$$

Введемо змінну

$$\xi \equiv x - v_g t.$$

Похідні за часом і координатою перепишуться так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \left(-i v_0 u - v_g \frac{du}{d\xi} \right) e^{-i v_0 t}; \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{du}{d\xi} e^{-i v_0 t}. \end{aligned}$$

Із нелінійного параболічного рівняння (17.20) отримуємо:

$$v_0 u + \frac{v_g'}{2} \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \alpha u^3 = 0. \quad (17.22)$$

Забезпечимо одиничний коефіцієнт при похідній:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{2\alpha}{v'_g} u^3 - \frac{2v_0}{v'_g} u. \quad (17.23)$$

Дане співвідношення характеризує консервативний осцилятор або ж систему з аперіодичним рухом. Відповідно, можемо ввести потенціал:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= -\frac{\partial W}{\partial u}; \\ W &\equiv \frac{v_0}{v'_g} u^2 - \frac{\alpha}{2v'_g} u^4. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Потенціальна яма існуватиме при

$$\frac{\alpha}{v'_g} < 0; \quad \frac{v_0}{v'_g} < 0.$$

Таким чином, α і v_0 мають однаковий знак, а v'_g – протилежний. Екстремум потенціалу (17.24) відповідає нулю $\frac{\partial W}{\partial u}$, тому

$$u_{\min} = \sqrt{\frac{v_0}{\alpha}}; \quad (17.25)$$

$$W(u_{\min}) \equiv \frac{v_0}{\alpha v'_g} \left(v_0 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{v_0}{\alpha} \right) = \frac{v_0^2}{2\alpha v'_g}. \quad (17.26)$$

Потенціал набуває нульового значення при $u_0 = \sqrt{\frac{2v_0}{\alpha}}$.

Графік показаний на рис. 17.4. Поблизу дна потенціальної ями реалізуються гармонічні коливання (1). При збільшенні енергії (випадок 2) вони стають ангармонічними, а в граничній ситуації (3) маємо усамітнену хвилю (солітон). Отже, залежно від енергії, існуватимуть стаціонарні хвильові пакети різних типів.

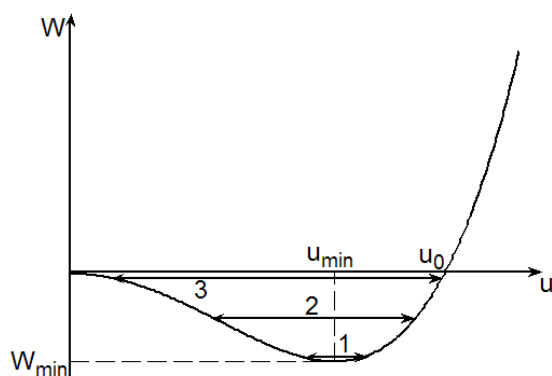


Рисунок 17.4 – Залежність потенціалу W від амплітуди обвідної u

Нелінійна стадія модуляційної нестійкості

Якісно вкажемо можливі варіанти еволюції система при виникненні модуляційної нестійкості. Визначальною є асимптотика початкового збурення на нескінченності. Якщо збурення досить швидко спадає, то основна частина енергії міститься у солітонах із високочастотним заповненням (радіосолітонах). У периферійній частині такої структури відбувається дисипація.

Інша можлива ситуація – нелокалізоване у просторі збурення, наприклад, періодичне. Спочатку в такому випадку припускався рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності. Однак, подальші дослідження продемонстрували можливість іншого сценарію: енергія переходить тільки до кількох мод, причому періодично відбувається повернення до початкового стану. Такий перебіг процесу фіксується попри наявність багатьох ступенів вільності. Описане явище спостерігається для різних коливальних систем і носить назву парадоксу Фермі – Паста – Улама (ФПУ, Fermi–Pasta–Ulam). Схема процесу відтворена на рис. 17.5.

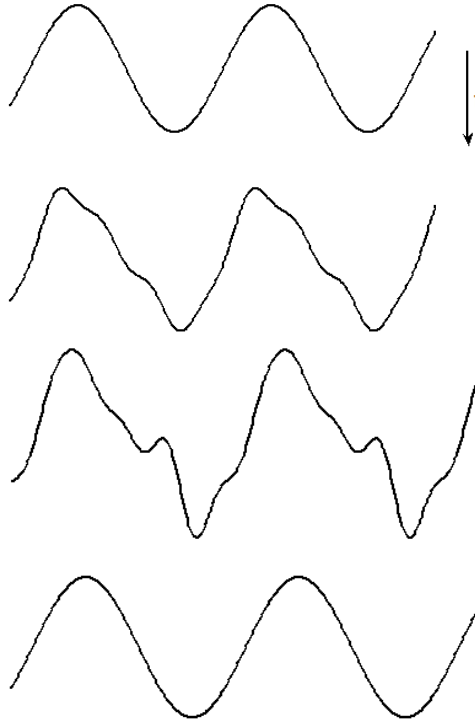


Рисунок 17.5 – Схема зміни вигляду збурення при реалізації парадоксу Фермі – Паста – Улама

Розглянуті сценарії можливі при розвитку нестійкості у плазмі, зокрема, для взаємодії модульованих ленгмюрівських хвиль із іонним звуком. Характер еволюції при цьому залежить від співвідношення частот.

18. Високочастотний тиск, сила Міллера

Розглянемо рух електронів у полі ленгмюрівської хвилі. Запишемо концентрацію електронів у вигляді:

$$n_e = n_0 + n_1 + \delta n ; \quad (18.1)$$

n_0 – незбурене значення;

n_1 – лінійне збурення;

δn – низькочастотна варіація, викликана ефектом обвідної, наслідок несталості амплітуди хвилі. Якщо напрямок поширення хвилі взяти за вісь z , то рух електронів описуватиметься рівнянням:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} = -\frac{e}{m_e} E - \frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial p}{\partial z} . \quad (18.2)$$

За сталої електронної температури T_e :

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} = -\frac{e}{m_e} E - \frac{T_e}{n_e m_e} \frac{\partial n_e}{\partial z} . \quad (18.3)$$

У лінійному наближенні, нехтуючи тепловим внеском (останній доданок у (18.3)), беремо:

$$v_e = \frac{1}{2}(v_0 e^{i\theta} + \text{к.с.});$$

$$E = \frac{1}{2}(E_0 e^{i\theta} + \text{к.с.}),$$

в одновимірному випадку фаза

$$\theta \equiv kz - \omega t.$$

Маємо співвідношення:

$$-i\omega v_0 = -\frac{e}{m_e} E_0;$$

$$v_0 = \frac{-ie}{m_e \omega} E_0.$$

Можливий варіант розв'язування задачі про низькочастотне збурення концентрації – розглядати розподіл Больцмана в низькочастотному полі обвідної:

$$n_e = n_0 e^{-\frac{m_e \langle v_e^2 \rangle}{2T_e}}. \quad (18.4)$$

Усереднення виконується по періоду високочастотної хвилі заповнення. При записі через ефективний потенціал:

$$n = n_0 e^{\frac{e\varphi_{\text{eff}}}{T_e}}, \text{ тобто,}$$

$$\varphi_{\text{eff}} = -\frac{m_e}{2e} \langle v_e^2 \rangle.$$

Результат усереднення швидкості:

$$\langle v_e^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle (v_0 e^{i\theta} + v_0^* e^{-i\theta})^2 \rangle = \frac{1}{2} |v_0|^2.$$

Аналогічно: $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} |E_0|^2.$

Виражаємо швидкість через напруженість електричного поля:

$$\langle v_e^2 \rangle = \frac{e^2 |E_0|^2}{2m_e^2 \omega^2}. \quad (18.5)$$

Тоді для концентрації в полі обвідної:

$$n_e = n_0 e^{-\frac{e^2 |E_0|^2}{4m_e \omega^2 T_e}}.$$

У слабких полях доцільним є розклад у ряд:

$$n_e = n_0 + \delta n, \text{ де}$$

$$\delta n \approx -\frac{e^2 |E_0|^2}{4m_e \omega^2 T_e} n_0. \quad (18.6)$$

Оскільки стоїть знак "-", то електрони виштовхуються з області сильнішого поля – "самовплив" ленгмюрівської хвилі. Явище обумовлене перебуванням електрона в неоднорідному високочастотному електричному полі, тому говорять про високочастотний тиск. Іноді застосовують термін "сила Міллера".

Можлива інтерпретація сили Міллера без розгляду розподілу Больцмана (18.4). Усереднимо нелінійний доданок у рівнянні руху електронів:

$$\left\langle v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \langle v_e^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} |v_0|^2.$$

У представленні через напруженість електричного поля:

$$\left\langle v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e^2 \omega^2} \frac{\partial}{\partial z} |E_0|^2.$$

Маємо рівняння руху з додатковою силою у правій частині:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E - \frac{T_e}{n_e m_e} \frac{\partial n_e}{\partial z} - \frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e^2 \omega^2} \frac{\partial}{\partial z} |E_0|^2. \quad (18.7)$$

Для знаходження об'ємної густини сили Міллера домножимо прискорення на масову густину. Беремо концентрацію електронів $n_e \approx n_0$:

$$f \approx -\frac{e^2 n_0}{4 m_e \omega^2} \frac{\partial}{\partial z} |E_0|^2. \quad (18.8)$$

Сила Міллера визначається градієнтом високочастотного тиску – для об'ємної густини справедливо:

$$f = -\frac{\partial p_{ech}}{\partial z},$$

звідки

$$p_{ech} = \frac{e^2 |E_0|^2}{4 m_e \omega^2} n_0. \quad (18.9)$$

Більший високочастотний тиск збалансований зменшенням гідростатичного, тому потрібно:

$$\delta n = -\frac{p_{ech}}{T_e} = -\frac{e^2 |E_0|^2}{4 m_e \omega^2 T_e} n_0.$$

Вираз збігається з отриманим при застосуванні розподілу Больцмана (18.4).

III. Основні нелінійні рівняння, що допускають аналітичні розв'язки. Солітони

19. Опис ленгмюрівських хвиль із використанням нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ)

Нелінійність, зумовлена силою Міллера

Ленгмюрівська хвиля є поздовжньою, напрям її хвильового вектора оберемо за вісь z . Для високочастотної хвилі враховуватимемо тільки збурення електронних параметрів. Запишемо в лінеаризованому вигляді рівняння неперервності, рівняння руху та рівняння Максвелла для $\text{div } \vec{E}$. Збурення іонних параметрів не враховуємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_e v_e) = 0 \\ \frac{\partial v_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E - \frac{T_e}{n_0 m_e} \frac{\partial n_e}{\partial z} \\ \frac{\partial E}{\partial z} = -4\pi e (n_e - n_0) \end{cases} \quad (19.1)$$

Концентрацію електронів подаємо у формі

$$n_e = n_0 + n_1 + \delta n;$$

n_0 – незбурене значення;

n_1 – лінійне збурення;

δn – збурення, викликане силою Міллера, описаної в попередньому розділі.

Останній із цих доданків виражається як (18.6)

$$\delta n = -\frac{e^2 |E_0|^2}{4m_e T_e \omega^2} n_0.$$

Тут E_0 – повільно змінювана амплітуда напруженості електричного поля:

$$E = \frac{1}{2} (E_0 e^{i\theta} + E_0^* e^{-i\theta}).$$

Продиференціюємо рівняння неперервності за часом і збережемо доданки, що містять фазу θ . Також тут і надалі нехтуємо всіма доданками, що включають зміни δn :

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + (n_0 + \delta n) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v_e}{\partial t} = 0. \quad (19.2)$$

Похідну від швидкості за часом підставляємо з рівняння руху із (19.1). Добутком збурених величин δn та n_1 знехтуємо:

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + n_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{e}{m_e} E - \frac{T_e}{n_0 m_e} \left(\frac{\partial n_1}{\partial z} \right) \right] - \delta n \frac{e}{m_e} \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (19.3)$$

Із третього рівняння наявної системи (19.1) доданки з фазою θ дають:

$$n_1 = -\frac{1}{4\pi e} \frac{\partial E}{\partial z}. \quad (19.4)$$

Підставляємо (19.4) до (19.3) та інтегруємо результуюче рівняння за z . Залишається тільки одна змінна – напруженість електричного поля E :

$$-\frac{1}{4\pi e} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{n_0 e}{m_e} E - \frac{T_e}{m_e} \cdot \frac{-1}{4\pi e} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{e}{m_e} \frac{e^2 |E_0|^2}{4m_e T_e \omega^2} n_0 E = 0;$$

знов-таки, не беремо до уваги повільні зміни δn . Спростуємо вигляд рівняння, домножуючи на $-4\pi e$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 E - v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{4m_e T_e \omega^2} |E_0|^2 E = 0. \quad (19.5)$$

Будемо шукати просторово-часову залежність амплітуди обвідної. Часові зміни припускаємо повільними:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial E_0}{\partial t} - \omega^2 E_0 \right) e^{i\theta} + \text{к.с.} \approx \frac{1}{2} \left(-2i\omega \frac{\partial E_0}{\partial t} - \omega^2 E_0 \right) e^{i\theta} + \text{к.с.}$$

Натомість, для просторових варіацій наближення не застосовуємо:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0 \right) e^{i\theta} + \text{к.с.}$$

Отже, рівняння для амплітуди є таким:

$$-2i\omega \frac{\partial E_0}{\partial t} - \omega^2 E_0 + \omega_{pe}^2 E_0 - v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - 2ikv_{Te}^2 \frac{\partial E_0}{\partial z} + k^2 v_{Te}^2 E_0 - \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{4m_e T_e \omega^2} |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (19.6)$$

Враховуємо дисперсійне співвідношення для ленгмюрівських хвиль при гідродинамічному підході:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 v_{Te}^2.$$

Залишаємо при часовій похідній коефіцієнт із одиничним модулем:

$$i \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{2\omega} \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + \frac{ikv_{Te}^2}{\omega} \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{8m_e T_e \omega^3} |E_0|^2 E_0 = 0 \quad (19.7)$$

Відповідність нелінійному параболічному рівнянню, перехід до безрозмірних змінних

При наявності збурення, зумовленого силою Міллера, дисперсійне рівняння для ленгмюрівських хвиль записується у вигляді:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) + k^2 v_{Te}^2 \quad (19.8)$$

(продовжуємо використовувати гідродинамічне наближення). Беремо до уваги формулу для збурення концентрації δn (18.6):

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 v_{Te}^2 - \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{4m_e T_e \omega^2} |E_0|^2. \quad (19.9)$$

Феноменологічне НІР без поперечної компоненти збурення є таким (17.20):

$$i \frac{\partial E_0}{\partial t} + iv_g \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{v_g'}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{\partial \omega}{\partial |E_0|^2} |E_0|^2 E_0 = 0$$

Диференціюємо дисперсійне співвідношення (19.9):

$$2\omega d\omega = 2kdkv_{Te}^2 - \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{4m_e T_e \omega^2} d|E_0|^2 + \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{2m_e T_e \omega^3} |E_0|^2 d\omega;$$

малою поправкою, заданою останнім доданком, припустимо знехтувати. Звідси випливають формули для коефіцієнтів. Зокрема,

$$\begin{aligned} v_g &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} \approx \frac{kv_{Te}^2}{\omega}; \\ v_g' &\equiv \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \approx v_{Te}^2 \frac{\omega - k \frac{\partial \omega}{\partial k}}{\omega^2} \approx \frac{v_{Te}^2}{\omega^3} (\omega^2 - k^2 v_{Te}^2) \approx \frac{v_{Te}^2}{\omega}; \\ \frac{\partial \omega}{\partial |E_0|^2} &= -\frac{e^2 \omega_{pe}^2}{8m_e T_e \omega^3}. \end{aligned}$$

Як бачимо, існує відповідність між НІР (17.20) і отриманим із гідродинамічної моделі рівнянням для ленгмюрівських хвиль (19.7). Зауважимо дотримання критерію Лайтхілла (17.4):

$$\frac{\partial \omega}{\partial |E_0|^2} \cdot v_g' < 0,$$

що вказує на можливість розвитку модуляційної нестійкості.

Перейдемо до системи відліку, пов'язаної з хвильовим пакетом, тобто,

$$\begin{cases} \zeta \equiv z - v_g t \\ \tau \equiv t \end{cases}.$$

При цьому:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \zeta}; \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Проведена заміна дозволяє позбутися в (19.7) першої похідної за координатою:

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \tau} + \frac{v_{Te}^2}{2\omega} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \zeta^2} + \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{8m_e T_e \omega^3} |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (19.10)$$

Отримали нелінійне рівняння Шредінгера – НРШ (nonlinear Schrödinger equation – NSE).

Проаналізувати НРШ (19.10) простіше, подавши його у безрозмірних змінних. Час нормуємо на плазмову частоту:

$$\tau_0 \equiv \omega_{pe} \tau.$$

Для просторової координати:

$$x \equiv C \zeta.$$

Сталу C підберемо так, щоб коефіцієнти при $\frac{\partial}{\partial \tau_0}$ та $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ були однаковими за модулем:

$$\omega_{pe} = \frac{v_{Te}^2}{2\omega} \cdot C^2.$$

Звідси

$$C = \frac{\sqrt{2\omega_{pe}\omega}}{v_{Te}}.$$

Отже, має бути

$$x = \frac{\sqrt{2\omega_{pe}\omega}}{v_{Te}} \zeta.$$

Після ділення (19.10) на ω_{pe} тільки при $|E_0|^2 E_0$ збережеться коефіцієнт із відмінним від одиниці модулем:

$$2g \equiv \frac{e^2 \omega_{pe}}{8m_e T_e \omega^3}. \quad (19.11)$$

Нелінійне рівняння Шредінгера у нових змінних:

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + 2g |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (19.12)$$

Солітонний розв'язок НРШ

Розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера (19.12) шукаємо у вигляді:

$$E_0(x, \tau_0) = \psi(x - u\tau_0) e^{i(ax - b\tau_0)}. \quad (19.13)$$

Функція ψ задає стаціонарну структуру, яка рухається зі швидкістю u . Натомість, експоненціальна частина описує високочастотне заповнення: a відповідає хвильовому числу, b – частоті (звісно, безрозмірним). Тому фазова швидкість становить

$$v_{ph} = \frac{b}{a}.$$

Рух хвильового пакету зручно характеризувати змінною

$$\xi \equiv x - u\tau_0.$$

Із НРШ (19.12) можемо отримати:

$$-iu \frac{d\psi}{d\xi} + b\psi + \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 2ia \frac{d\psi}{d\xi} - a^2\psi + 2g\psi^3 = 0; \quad (19.14)$$

функцію ψ вважаємо дійсною.

Відокремимо дійсну й уявну частини виведеного рівняння (19.14):

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (b - a^2)\psi + 2g\psi^3 = 0 \\ (2a - u) \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \end{cases}. \quad (19.15)$$

Оскільки $\psi \neq const$, то з другого співвідношення (19.15) випливає зв'язок між швидкістю руху обвідної (тобто, груповою швидкістю) u та хвильовим числом високочастотної компоненти a :

$$a = \frac{u}{2}. \quad (19.16)$$

Для компактності введемо

$$\sigma = a^2 - b = \frac{u^2}{4} - b. \quad (19.17)$$

Домножимо перше рівняння (19.15) на $\frac{d\psi}{d\xi}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\sigma \psi^2}{2} - \frac{g \psi^4}{2} \right).$$

Інтегруємо за ξ , обираючи нульову сталу – локалізований розв'язок передбачає на нескінченності $\psi \rightarrow 0$, $\frac{d\psi}{d\xi} \rightarrow 0$:

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \pm \sqrt{\sigma \psi^2 - g \psi^4}. \quad (19.18)$$

Оскільки $g > 0$, то потрібно $\sigma > 0$. Результат приводимо до виду:

$$\int d\xi = \pm \int \frac{d\psi}{\sqrt{\sigma \psi} \sqrt{1 - \frac{g}{\sigma} \psi^2}}. \quad (19.19)$$

Інтегрування можна провести з допомогою заміни:

$$\begin{aligned} \sin s &\equiv \sqrt{\frac{g}{\sigma}} \psi; \\ d\psi &= \sqrt{\frac{\sigma}{g}} \cos s ds. \end{aligned}$$

Тут теж сталу інтегрування прирівняємо до нуля – її зміна визначається тільки зсувом початку відліку для ξ . Загалом:

$$\xi = \pm \int \frac{\cos s ds}{\sqrt{\sigma} \sin s \cos s} = \pm \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int \frac{-d \cos s}{1 - \cos^2 s}.$$

Отже,

$$\xi = \mp \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \int d \cos s \left(\frac{1}{1 - \cos s} + \frac{1}{1 + \cos s} \right) = \mp \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \ln \frac{1 + \cos s}{1 - \cos s}.$$

Доцільно перейти до функції $s(\xi)$, а потім і $\psi(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos s}{1 - \cos s} &= e^{\mp 2\sqrt{\sigma} \xi}; \\ \cos s &= \frac{e^{\mp 2\sqrt{\sigma} \xi} - 1}{e^{\mp 2\sqrt{\sigma} \xi} + 1} = \mp \operatorname{th} \sqrt{\sigma} \xi. \end{aligned}$$

Тому

$$1 - \frac{g}{\sigma} \psi^2 = \operatorname{th}^2 \sqrt{\sigma} \xi$$

чи

$$\psi = \frac{\sqrt{\sigma/g}}{\operatorname{ch} \sqrt{\sigma} \xi}. \quad (19.20)$$

Результат означає, що НРШ (19.12) має локалізований у просторі розв'язок:

$$E_0(x, \tau) = \frac{\sqrt{\sigma/g}}{\operatorname{ch} \sqrt{\sigma}(x - u\tau_0)} e^{i(ax - b\tau_0)}. \quad (19.21)$$

Коефіцієнти пов'язані співвідношеннями (19.16), (19.17):

$$a = \frac{u}{2};$$

$$\sigma = a^2 - b.$$

Крім того, згідно з (19.11)

$$g = \frac{e^2 \omega_{pe}}{16 m_e T_e \omega^3}.$$

Структура розв'язку відтворена на рис. 19.1. Амплітуда становить

$$E_{00} = \sqrt{\sigma/g}. \quad (19.22)$$

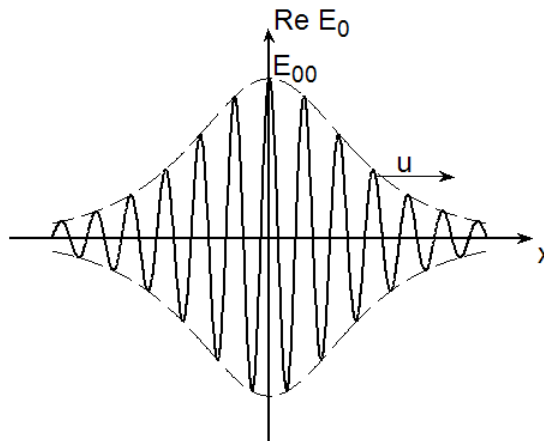


Рисунок 19.1 – Солітонний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера

Зазначимо основні властивості локалізованого розв'язку НРШ.

а) Збурення є радіосолітоном – хвильовим пакетом із високочастотним заповненням.

б) Залежність між амплітудою і груповою швидкістю, використовуючи (19.22), можемо подати як

$$gE_{00}^2 = \frac{u^2}{4} - b. \quad (19.23)$$

Так як залежність містить вільний параметр b , то однозначної відповідності між u та E_{00} не існує. Повинна забезпечуватися нерівність

$$b < \frac{u^2}{4}.$$

в) Фазова швидкість характеризує високочастотне заповнення і становить

$$v_{ph} = \frac{b}{a} = \frac{2b}{u}.$$

При малій амплітуді солітона,

$$E_{00} \ll \frac{u}{2\sqrt{g}},$$

маємо:

$$b \approx \frac{u^2}{4};$$

$$v_{ph} = \frac{u}{2}; \quad (19.24)$$

u є швидкістю обвідної в системі, пов'язаній із лінійними хвилями. Наведене значення виявляється максимально можливим.

Нелінійне рівняння Шредінгера застосовують до хвильових явищ різної природи. У плазмі це, зокрема, ленгмюрівські хвилі (які й були розглянуті), віслери, іонні циклотронні, альвенівські хвилі.

20. Солітонні розв'язки рівняння Кортевега – де Вріза

Нелінійний іонний звук

Розглянемо іонно-звукові хвилі в однорідній ізотропній плазмі без зіткнень. Описуватимемо рух іонів, а для електронів скористаємося больцманівським розподілом в електричному полі з потенціалом φ :

$$n_e = n_0 e^{e\varphi/T_e}.$$

Для поздовжньої хвилі достатньо проаналізувати одновимірну задачу – напрям хвильового вектора оберемо за вісь z . Поведінку іонів характеризуватимемо рівняннями неперервності, руху та Пуассона (Poisson):

$$\begin{cases} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_i v_i) = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial z} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e (n_0 e^{e\varphi/T_e} - n_i) \end{cases} \quad (20.1)$$

Аналогічно до нелінійного рівняння Шредінгера, шукатимемо солітонний розв'язок, який не змінює форми з часом:

$$n_i, v_i, \varphi \sim f(z - ut).$$

Існує залежність від однієї змінної,

$$\zeta \equiv z - ut, \text{ тоді}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{d}{d\zeta};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{d\zeta}.$$

Рівняння неперервності відразу зводиться до

$$n_i(v_i - u) = C_1. \quad (20.2)$$

Виходимо з того, що в незбуреному стані

$$v_i = 0;$$

$$n_i = n_0.$$

Отже,

$$C_1 = -n_0 u. \quad (20.3)$$

Як наслідок, для концентрації іонів із (20.2) отримуємо:

$$n_i = -\frac{n_0 u}{v_i - u}. \quad (20.4)$$

У рівнянні руху (20.1) вводимо змінну ζ :

$$(v_i - u) \frac{dv_i}{d\zeta} = -\frac{e}{m_i} \frac{d\varphi}{d\zeta}. \quad (20.5)$$

Виконуємо інтегрування:

$$\frac{v_i^2}{2} - uv_i = -\frac{e}{m_i} \varphi;$$

стала зануляється, бо в незбуреному стані

$$\varphi = 0;$$

$$v_i = 0.$$

З отриманого квадратного рівняння знаходимо залежність швидкості від потенціалу:

$$\begin{aligned} v_i^2 - 2uv_i + \frac{2e}{m_i} \varphi &= 0; \\ v_i &= u - \sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}}, \end{aligned} \quad (20.6)$$

знак "-" обираємо для коректності результату за відсутності збурень. Тому для концентрації з (20.4):

$$n_i = \frac{n_0 u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}}}. \quad (20.7)$$

Тепер рівняння Пуассона з (20.1) містить тільки одну змінну – скалярний потенціал φ :

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = 4\pi en_0 \left(e^{e\varphi/T_e} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}}} \right). \quad (20.8)$$

Спочатку отримаємо результат у лінійному наближенні (20.8):

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = \left(\frac{1}{a_{De}^2} - 4\pi en_0 \cdot \frac{e}{m_i u^2} \right) \varphi$$

чи

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = \left(\frac{1}{a_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{u^2} \right) \varphi. \quad (20.9)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді плоскої хвилі:

$$\varphi \sim e^{ik\zeta} = e^{ik(z-ut)}.$$

У такому представленні u є фазовою швидкістю – відношенням частоти до хвильового числа:

$$-k^2 = \frac{1}{a_{De}^2} - \frac{k^2 \omega_{pi}^2}{\omega^2}.$$

Звідси

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \frac{1}{k^2 a_{De}^2}} = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 a_{De}^2}, \text{ відоме дисперсійне співвідношення для іонного звуку.}$$

У свою чергу, нелінійне рівняння (20.8) має структуру виду

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}, \text{ де} \quad (20.10)$$

$$W = -4\pi en_0 \int \left(e^{e\varphi/T_e} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}}} \right) d\varphi. \quad (20.11)$$

Після виконання інтегрування:

$$W = -4\pi en_0 \left(\frac{T_e}{e} e^{e\varphi/T_e} + \frac{m_i u}{e} \sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}} \right) + C_2.$$

Сталу визначаємо так, щоб величина W занулялася в незбуреному стані:

$$W(\varphi=0) = 0, \text{ тобто,}$$

$$C_2 = 4\pi n_0 (T_e + m_i u^2).$$

Остаточно з (20.11):

$$W = -4\pi n_0 \left[T_e (e^{e\varphi/T_e} - 1) + m_i u^2 \left(\left(1 - \frac{2e\varphi}{m_i u^2} \right)^{1/2} - 1 \right) \right]. \quad (20.12)$$

Вважаючи збурення не дуже великим, розкладемо W (20.12) у ряд Маклорена. Зберігаємо доданки до кубічних включно, а саме:

$$e^y \approx 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6};$$

$$(1-y)^{1/2} \approx 1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{16}.$$

Отже, наближенням для потенціалу є:

$$W(\varphi) \approx -4\pi n_0 \left[T_e \left(\frac{e\varphi}{T_e} + \frac{e^2 \varphi^2}{2T_e^2} + \frac{e^3 \varphi^3}{6T_e^3} \right) + m_i u^2 \left(-\frac{e\varphi}{m_i u^2} - \frac{e^2 \varphi^2}{2m_i^2 u^4} - \frac{e^3 \varphi^3}{2m_i^3 u^6} \right) \right].$$

Перший порядок за потенціалом φ , який відповідав би сталій у правій частині рівняння Пуассона (20.10), скорочується. Для спрощення подаємо результат через електронний дебаївський радіус і швидкість лінійного іонного звуку:

$$W(\varphi) = \left(-\frac{1}{2a_{De}^2} + \frac{C_s^2}{2a_{De}^2 u^2} \right) \varphi^2 + \left(-\frac{e}{6T_e a_{De}^2} + \frac{e C_s^4}{2T_e a_{De}^2 u^4} \right) \varphi^3. \quad (20.13)$$

Введемо для отриманих коефіцієнтів позначення:

$$\frac{p^2}{2} \equiv \frac{1}{2a_{De}^2} \left(1 - \frac{C_s^2}{u^2} \right); \quad (20.14)$$

$$\frac{b}{2} \equiv \frac{e}{2T_e a_{De}^2} \left(\frac{C_s^4}{u^4} - \frac{1}{3} \right). \quad (20.15)$$

Тоді (20.13) подається як

$$W = -\frac{p^2}{2} \varphi^2 + \frac{b}{2} \varphi^3. \quad (20.16)$$

Потенціальна яма виникає при додатних сталих p^2 і b . Це потребує дотримання подвійної нерівності:

$$C_s < u < 3^{1/4} C_s.$$

Таким чином, швидкість нелінійного збурення u дещо перевищує величину для лінійного іонного звуку C_s .

Для знаходження розв'язку перетворимо рівняння (20.10)

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}.$$

При домноженні на $\frac{d\varphi}{d\zeta}$ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 \right] &= -\frac{dW}{d\zeta}; \\ \frac{d\varphi}{d\zeta} &= \pm \sqrt{-2W(\varphi)}. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Сталу інтегрування зануляємо, щоб при $\zeta \rightarrow \infty$ забезпечити

$$\begin{aligned} W &\rightarrow 0; \\ \frac{d\varphi}{d\zeta} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi \sqrt{p^2 - b\varphi}} = \pm (\zeta - \zeta_0).$$

Виконаємо інтегрування, ввівши допоміжну змінну

$x \equiv \sqrt{p^2 - b\varphi}$, звідки

$$\varphi = \frac{p^2 - x^2}{b};$$

$$d\varphi = -\frac{2xdx}{b}.$$

Отже,

$$\pm (\zeta - \zeta_0) = \int \frac{-2xdx \cdot b}{b(p^2 - x^2)x} = -\frac{1}{p} \int \left(\frac{1}{p-x} + \frac{1}{p+x} \right) dx.$$

Результат інтегрування:

$$\pm (\zeta - \zeta_0) = -\frac{1}{p} \ln \frac{p + \sqrt{p^2 - b\varphi}}{p - \sqrt{p^2 - b\varphi}}$$

при поверненні до φ .

Для компактності позначимо

$$a \equiv \mp p(\zeta - \zeta_0).$$

При цьому,

$$\begin{aligned} p + \sqrt{p^2 - b\varphi} &= \left(p - \sqrt{p^2 - b\varphi} \right) e^a; \\ \sqrt{p^2 - b\varphi} &= \frac{p(e^a - 1)}{(e^a + 1)} \equiv p \operatorname{th} \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Солітонний розв'язок (20.17) із потенціалом (20.16) має вигляд:

$$\varphi = \frac{p^2 \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{a}{2} \right)}{b} = \frac{p^2 / b}{\operatorname{ch}^2 \frac{p}{2} (\zeta - \zeta_0)}. \quad (20.18)$$

Графік відповідної функції поданий на рис. 20.1.

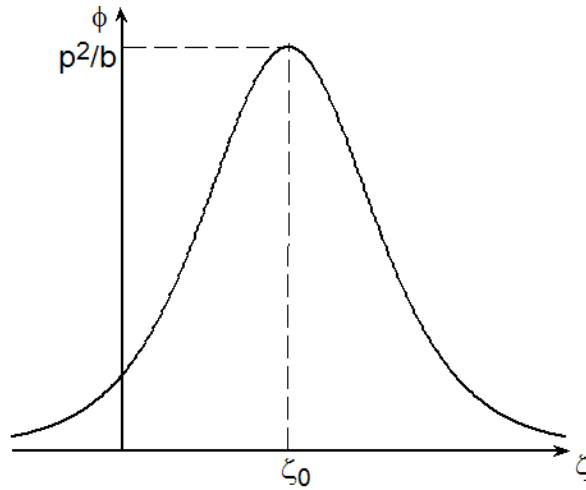


Рисунок 20.1 – Солітонний розв’язок рівняння Кортевега – де Вріза (Korteweg – de Vries)

Ширина солітона (20.18) обернено пропорційна до параметра p . Як наслідок, амплітуда обернено пропорційна до квадрата ширини – у вузких солітонів φ_0 є вищим. Сама амплітуда з огляду на (20.14), (20.15) становить

$$\varphi_0 = \frac{p^2}{b} = \frac{T_e}{e} \frac{1 - \frac{C_s^2}{u^2}}{\frac{C_s^4}{u^4} - \frac{1}{3}}.$$

Швидкість солітона u близька до швидкості іонно-звукових хвиль C_s з огляду на наведену раніше подвійну нерівність для u . Тому подамо швидкість солітона як

$$u \equiv C_s + \Delta.$$

Для амплітуди маємо:

$$\varphi_0 = \frac{T_e}{e} \frac{1 - \left(1 + \frac{\Delta}{C_s}\right)^{-2}}{\left(1 + \frac{\Delta}{C_s}\right)^{-4} - \frac{1}{3}} \approx \frac{T_e}{e} \cdot \frac{2\Delta}{C_s} \cdot \frac{3}{2} = 3 \frac{T_e}{e} \cdot \frac{\Delta}{C_s}, \quad (20.19)$$

зберігаючи тільки лінійний за Δ доданок. Як наслідок, швидкість солітона відносно лінійних хвиль пропорційна до його амплітуди φ_0 . Тому вершини спільно виниклих солітонів розташовуються на одній прямій. Більша амплітуда відповідає вищій швидкості і меншій ширині (рис. 20.2).

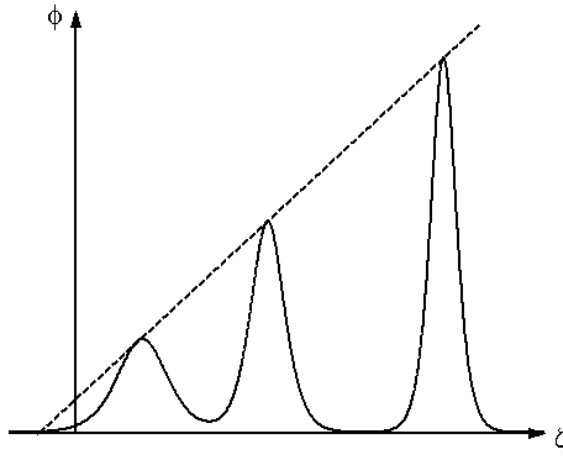


Рисунок 20.2 – Розташування спільно виниклих солітонів різних амплітуд

Зв'язок рівняння Кортевега – де Вріза з нелінійним іонним звуком

Покажемо, як прийти до рівняння Кортевега – де Вріза на основі загальних міркувань. Для величини φ , яка зберігається:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (20.20)$$

В одновимірному випадку:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

При переході до фур'є-компонент,

$$\varphi \sim e^{i(kz - \omega t)},$$

отримуємо дисперсійне рівняння

$$-\omega + kv = 0.$$

Через дисперсію існуватиме залежність $v = v(k)$. Цю залежність розкладемо в ряд за степенями k ; в ізотропному середовищі степені будуть лише парними. При не надто сильній дисперсії беремо до уваги тільки два доданки:

$$v(k) = v_0 - \beta k^2.$$

Таким чином,

$$\omega = v_0 k - \beta k^3. \quad (20.21)$$

Застосуємо метод відновлення диференціального рівняння за дисперсійним. При цьому:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \Rightarrow \omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}.$$

Також:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow ik \Rightarrow k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial z} \text{ та } k^3 \rightarrow i \frac{\partial^3}{\partial z^3}.$$

Маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = 0. \quad (20.22)$$

Введемо в (20.22) нелінійність найпростішого виду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = 0, \quad (20.23)$$

дістали рівняння Кортевега – де Вріза (КдВ).

Другий доданок у (20.23) усувається при переході до системи відліку, яка рухається зі швидкістю v_0 , тому відразу оберемо $v_0 = 0$.

Шукаємо солітонний розв'язок:

$$\varphi = \varphi(\zeta) = \varphi(z - ut).$$

Приходимо до:

$$-u \frac{d\varphi}{d\zeta} + \alpha \varphi \frac{d\varphi}{d\zeta} + \beta \frac{d^3\varphi}{d\zeta^3} = 0. \quad (20.24)$$

Інтегруємо рівняння (20.24), зануляючи сталу, бо за умови локалізованості розв'язку потенціал і його похідні на нескінченності нульові. Тоді:

$$-u\varphi + \frac{\alpha}{2}\varphi^2 + \beta \frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = 0. \quad (20.25)$$

Відзначимо, що іонно-звуковий солітон з огляду на (20.10) і (20.16) описується рівнянням

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = p^2\varphi - \frac{3}{2}b\varphi^2. \quad (20.26)$$

Зауважуємо цілковиту відповідність (20.25) та (20.26) при

$$p^2 = \frac{u}{\beta};$$

$$b = \frac{\alpha}{3\beta}.$$

Можемо зробити такі висновки:

а) нелінійний іонний звук описується рівнянням Кортевега – де Вріза;

б) рівняння КдВ має солітонні розв'язки виду

$$\varphi = \frac{p^2/b}{ch^2 \frac{P}{2}(\zeta - \zeta_0)} = \frac{3u/\alpha}{ch^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{\beta}}(\zeta - \zeta_0)}.$$

Добуток амплітуди солітона на квадрат його ширини не залежить від швидкості, а визначається коефіцієнтами рівняння:

$$\frac{p^2}{b} \cdot \frac{4}{p^2} = \frac{4}{b} = 12 \frac{\beta}{\alpha}.$$

При цьому, амплітуда пропорційна до швидкості й не залежить від коефіцієнта β при третій похідній. Натомість, ширина обернено пропорційна до кореня зі швидкості й не залежить від параметра нелінійності α .

Вкажемо, що в простий спосіб будуються інтеграли руху рівняння КдВ (20.23). Так,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dz = -\alpha \frac{\varphi^2}{2} - \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}. \quad (20.24)$$

Через занулення на нескінченності функції φ та її похідних:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dz = \text{const}. \quad (20.25)$$

Подібним чином із (20.23) знаходимо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2}{2} dz = -\alpha \frac{\varphi^3}{3} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \beta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} dz. \quad (20.26)$$

Перший доданок справа нульовий, для другого:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 \varphi^2}{\partial z^3} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) dz + \int_{-\infty}^{\infty} 2\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} dz + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) dz,$$

звідки й випливає:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2}{2} dz = \text{const} \quad (20.27)$$

(знов-таки, враховуючи занулення на нескінченності φ разом із координатними похідними).

21. Рівняння sin-Гордона на прикладі параметричної взаємодії трьох хвиль

Виведення рівняння

Запишемо у загальному вигляді рівняння, які описують трихвильову взаємодію за відсутності дисипації (для одновимірної задачі – див. (11.25)):

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \alpha_1 E_2^* E_3 \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \alpha_2 E_1^* E_3 \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} + \frac{1}{v_{g3}} \frac{\partial E_3}{\partial t} = -\alpha_3 E_1 E_2; \end{cases} \quad (21.1)$$

умова синхронізму має вигляд

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2.$$

Нехай групова швидкість однієї з хвиль суттєво менша, ніж у двох інших:

$$v_{g2} \ll |v_{g1}|, |v_{g3}|.$$

Зокрема, така умова природна при розпаді ленгмюрівської хвилі на ленгмюрівську хвилю та іонний звук (рис. 21.1). Тоді доданками з $\frac{1}{v_{g1}}$ та $\frac{1}{v_{g3}}$ у (21.1) можна знехтувати. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial z} = \alpha_1 E_2^* E_3 \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \alpha_2 E_1^* E_3 \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} = -\alpha_3 E_1 E_2. \end{cases} \quad (21.2)$$

Перейдемо у (21.2) до безрозмірних просторової й часової змінних. Зауважуємо, що безрозмірною є комбінація $\alpha E z$. Тому оберемо змінні:

$$\zeta = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} E_0 z; \quad \tau = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} E_0 v_{g2} t;$$

E_0 – характерне значення напруженості електричного поля.

При цьому:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} E_0 \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} E_0 v_{g2} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Система рівнянь (21.2) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} E_0 \frac{\partial E_1}{\partial \zeta} = \alpha_1 E_2^* E_3 \\ E_0 \left(\frac{\partial E_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial E_2}{\partial \tau} \right) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} E_1^* E_3 \\ E_0 \frac{\partial E_3}{\partial \zeta} = -\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} E_1 E_2 \end{cases} \quad (21.3)$$

Вводимо безрозмірні амплітуди і позбуваємося коефіцієнтів у рівняннях:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \varepsilon_1 \\ E_2 = E_0 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \varepsilon_2 \\ E_3 = E_0 \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}} \varepsilon_3 \end{cases} \quad (21.4)$$

Отримуємо, зрештою:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \zeta} = \varepsilon_2^* \varepsilon_3 \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tau} = \varepsilon_1^* \varepsilon_3 \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \zeta} = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{cases} \quad (21.5)$$

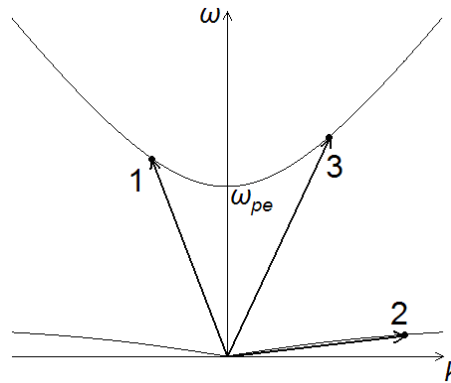


Рисунок 21.1 – Приклад трихвильової взаємодії, коли групова швидкість однієї хвилі значно менша, ніж двох інших: представлені дисперсійні криві для ленгмюрівських хвиль та іонного звуку

Будемо шукати розв'язок, який виражається через одну функцію $\varphi(\zeta, \tau)$. Нехай нормовані амплітуди ε будуть дійсними. Із першого і третього рівнянь тоді випливає:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2 = \text{const}(\zeta).$$

Обираємо:

$$\varepsilon_1 = \sin \frac{\varphi}{2};$$

$$\varepsilon_3 = \cos \frac{\varphi}{2};$$

коефіцієнт $\frac{1}{2}$ введений для зручнішого запису в подальшому в другому рівнянні (21.5). Перше і третє рівняння (21.5) задовольнятимуться тотожно при

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}.$$

Залишається:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \tau} = \sin \varphi. \quad (21.6)$$

Щоб усунути змішану похідну, виконаємо заміну виду:

$$\begin{cases} x = \zeta \\ \tau_0 = \zeta + p\tau. \end{cases}$$

При такому підході:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau_0}; \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= p \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \end{aligned}$$

Як наслідок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \varphi &= \sin \varphi \text{ чи} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + (1+p) \frac{\partial}{\partial \tau_0} \right) \varphi &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

Звідси $p = -2$;

$$\tau_0 = \zeta - 2\tau.$$

Виконавши заміну, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_0^2} = \sin \varphi \text{ – рівняння sin-Гордона.} \quad (21.7)$$

Для пошуку локалізованого розв'язку візьмемо

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(\xi); \\ \xi &\equiv x - u\tau_0, \text{ де } u = \text{const}. \end{aligned}$$

Відповідно,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{\partial}{\partial \tau_0} = -u \frac{d}{d\xi}.$$

Тепер маємо диференціальне рівняння в повних похідних:

$$(1-u^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \sin \varphi. \quad (21.8)$$

Після домноження на $\frac{d\varphi}{d\xi}$:

$$\begin{aligned} \frac{1-u^2}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 &= \frac{d}{d\xi} (-\cos \varphi) \text{ чи} \\ \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 &= \frac{2}{1-u^2} (C_1 - \cos \varphi); \end{aligned} \quad (21.9)$$

C_1 – стала інтегрування.

Тут можливі два різні випадки. При

$$u^2 < 1 \quad (21.10)$$

у (21.9) має бути

$$C_1 - \cos \varphi \geq 0.$$

Для $C_1 \geq 1$ така умова неодмінно задовольняється. Натомість, якщо

$$u^2 > 1, \text{ то}$$

$$C_1 - \cos \varphi \leq 0.$$

Щоб уявляти характер розв'язку в першому випадку (при малих u , (21.10)), розглянемо

$$C_1 = 1.$$

Потрібно обчислити інтеграл:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = -\sqrt{2} \int \frac{d \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int d \cos \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{1 + \cos \frac{\varphi}{2}} \right)$$

Загалом,

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Отримуємо із (21.9):

$$\pm \frac{2}{\sqrt{1 - u^2}} (\xi - \xi_0) = \ln \frac{1 + \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Позначимо

$$\psi = \pm \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (21.11)$$

Тоді

$$e^{2\psi} = \frac{1 + \cos \frac{\varphi}{2}}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}};$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{e^{2\psi} - 1}{e^{2\psi} + 1} = \text{th } \psi.$$

Отриманий результат відповідає ε_3 у (21.5). Також:

$$\varepsilon_1 = \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \text{th}^2 \psi} = \frac{1}{\text{ch } \psi};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau_0} \right) \varphi = \frac{1 - u}{2} \frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Потрібну похідну обчислюємо із залежності для ε_3 :

$$-\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{d\xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 \psi}.$$

Звідси

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \mp \frac{2}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{1}{\text{ch } \psi}, \text{ тому}$$

$$\varepsilon_2 = \mp \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \operatorname{ch}^{-1} \psi.$$

Початкові амплітуди E_1, E_2, E_3 знаходяться домноженням на сталі коефіцієнти (21.4):

$$E_1 = \frac{E_0}{\operatorname{ch} \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-u^2}}};$$

$$E_2 = \mp E_0 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-u^2}}};$$

$$E_3 = \pm E_0 \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \cdot \operatorname{th} \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Розв'язок є трихвильовим солітоном, при виборі верхнього знаку його характер такий, як показано на рис. 21.2.

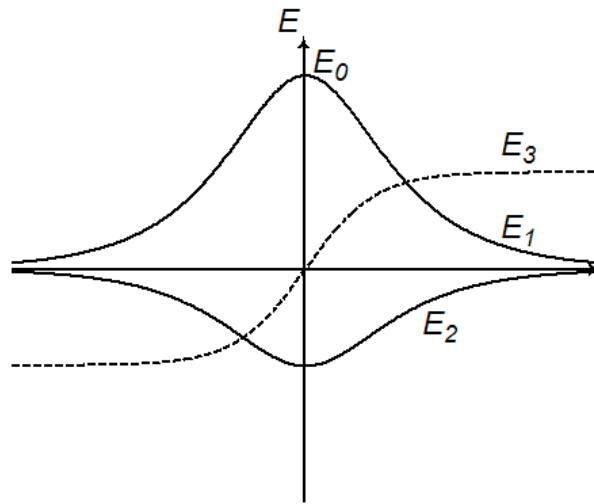


Рисунок 21.2 – Трихвильовий солітон при виконанні умови (21.9) – малі швидкості збурення

Як уже вказувалося, другий тип розв'язку (21.9) відповідає

$$u^2 > 1; \quad C_1 - \cos \varphi \leq 0. \quad (21.12)$$

Якщо брати сталу C_1 , рівну за модулем 1, то р (21.9) отримаємо рівняння:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}} = \pm \sqrt{\frac{2}{u^2-1}} d\xi.$$

Обчислюємо інтеграл у лівій частині:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2} \int \frac{d \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2} \int \frac{d \sin \frac{\varphi}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{1 - \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Таким чином:

$$\pm \frac{2}{\sqrt{u^2 - 1}} (\xi - \xi_0) = \ln \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{1 - \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

За аналогією з попереднім випадком (21.11), позначимо:

$$\psi \equiv \pm \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{u^2 - 1}}. \quad (21.13)$$

Знаходимо:

$$\frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{1 - \sin \frac{\varphi}{2}} = e^{2\psi}.$$

Звідси для функції φ :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{e^{2\psi} - 1}{e^{2\psi} + 1} = \text{th } \psi.$$

Для нормованих напруженостей полів хвиль, які відповідають (21.5), будемо мати:

$$\varepsilon_1 = \sin \frac{\varphi}{2} = \text{th } \psi;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 - u}{2} \frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Похідну обчислюємо з виразу для ε_1 :

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{d\xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1} \text{ch}^2 \psi}, \text{ звідки}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm \frac{2}{\sqrt{u^2 - 1} \text{ch } \psi}.$$

Зрештою,

$$\varepsilon_2 = \mp \sqrt{\frac{u-1}{u+1}} \text{ch}^{-1} \psi.$$

Нарешті,

$$\varepsilon_3 = \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\text{ch } \psi}.$$

Розв'язок має подібну до попереднього випадку структуру (зі зміною ролей хвиль 1 та 3) (рис. 21.2).

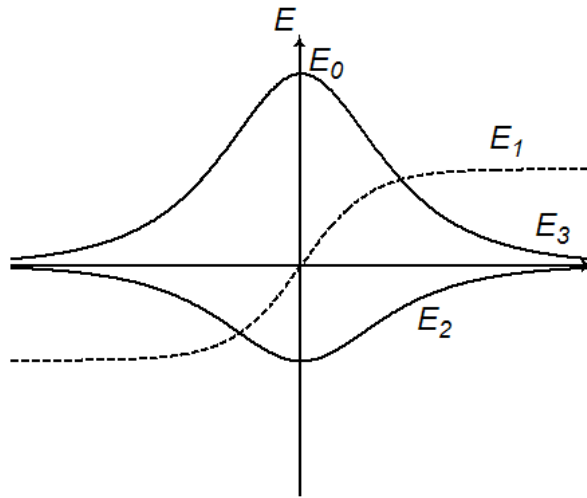


Рисунок 21.2 – Трихвильовий солітон при виконанні умови (21.12) – великі швидкості збурення

22. Хвилі Росбі. Застосування геострофічного наближення.

Лінійні хвилі Росбі

Великомасштабні збурення розглянемо на прикладі нейтральної атмосфери планети, що обертається. Тому необхідним буде врахування сили Коріоліса. Введемо систему координат, у якій вісь x спрямована на схід, y – на північ, z – вертикально вгору (рис. 22.1). Для сили Коріоліса маємо:

$$\vec{F} = -2m[\vec{\Omega} \times \vec{V}];$$

$\vec{\Omega}$ – кутова швидкість обертання планети.

Рівняння неперервності й руху набувають вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -g \vec{e}_z - \frac{\nabla p}{\rho} - 2[\vec{\Omega} \times \vec{V}] \end{cases}; \quad (22.1)$$

відцентрову силу при наближеному розгляді не враховуємо.

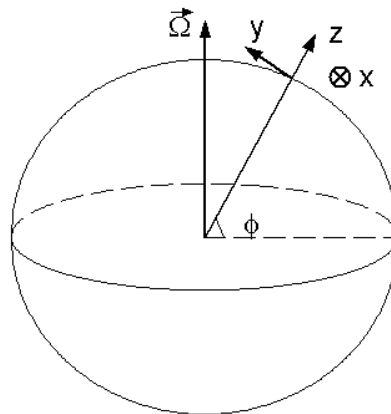


Рисунок 22.1 – Вибір системи координат при розгляді хвиль Росбі (Rossby)

У введених координатах:

$$\vec{\Omega} = (0; \Omega \cos \varphi; \Omega \sin \varphi);$$

$$\vec{V} = (u; v; w), \text{ де}$$

u – зональна компонента швидкості;

v – меридіональна;

w – вертикальна.

Для демонстрації хвиль Росбі достатньо доволі простого підходу. Розглядатимемо двовимірний (горизонтальний) рух, нехтуючи вертикальною швидкістю w . Рух вважаємо повільним, тому не враховуємо квадратичного за швидкістю доданка. Крім того, обмежимося нестискуваним середовищем:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 0, \text{ звідки} \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0. \end{aligned} \quad (22.2)$$

При вилученні вертикальної складової швидкості зональна й меридіональна компоненти сили Коріоліса становлять:

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{m} &= 2\Omega \sin \varphi \cdot v = fv; \\ \frac{F_y}{m} &= -2\Omega \sin \varphi \cdot u = -fu. \end{aligned}$$

Тут введений параметр Коріоліса

$$f = 2\Omega \sin \varphi, \quad (22.3)$$

який визначається географічною широтою. Нехай густина нестискуваної рідини становить ρ_0 , тоді система рівнянь (22.1) запишеться як

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{cases} \quad (22.4)$$

Розв'язок першого рівняння (22.4) автоматично забезпечується введенням струмової функції ψ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Щоб позбутися залежності від тиску, продиференціюємо у (22.4) x -компоненту рівняння руху за змінною y , y -компоненту – за x і віднімемо від першого друге:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (fv) + f \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Тут враховано, що параметр Коріоліса залежить тільки від координати y . При цьому, поблизу деякої широти φ_0 :

$$f = 2\Omega \sin(\varphi_0 + \varphi_1) = f_0 \cos \varphi_1 + 2\Omega \cos \varphi_0 \sin \varphi_1.$$

Для малих відхилень φ_1 :

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &\approx 1; \\ \sin \varphi_1 &\approx \varphi_1 = \frac{y}{R}; \end{aligned}$$

R – радіус планети.

Тому

$$f \approx f_0 + \beta y \quad (22.5)$$

(так зване наближення β -площини). Величину

$$\beta = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{R} \quad (22.6)$$

називають параметром Росбі.

З урахуванням рівняння неперервності (22.4) приводимо до:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \beta v.$$

Через струмову функцію:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad (22.7)$$

фігурує двовимірний оператор Лапласа. Отримане рівняння описує великомасштабні атмосферні хвилі – хвилі Росбі, зумовлені зміною параметра Коріоліса з широтою. Перейдемо до дисперсійного співвідношення:

$$\begin{aligned} -i\omega(-k^2) + i\beta k_x &= 0; \\ \omega &= -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}. \end{aligned} \quad (22.8)$$

Фазова швидкість поширення в зональному напрямку:

$$v_{phx} = -\frac{\beta}{k^2}.$$

Рух відбувається на захід (протилежно до напрямку обертання планети), довші хвилі є швидшими.

Рівняння Чарні – Обухова. Геострофічне наближення

Проаналізуємо двовимірні збурення в атмосфері, вважаючи процес адіабатичним. Користуємося системою рівнянь, складеною з рівняння неперервності, рівняння руху та рівняння адіабати:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -g \vec{e}_z - \frac{\nabla p}{\rho} - 2[\vec{\Omega} \times \vec{V}] \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \end{cases} \quad (22.9)$$

При цьому, використовуючи означення (22.3),

$$-2[\vec{\Omega} \times \vec{V}] = f(v \vec{e}_x - u \vec{e}_y) = -f[\vec{e}_z \times \vec{V}]. \quad (22.10)$$

Рівняння неперервності можна подати у формі:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0.$$

Оскільки процес адіабатичний,

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1} d\rho.$$

Звідси

$$dp = \frac{p}{\rho} d\rho.$$

Такий вираз дозволяє перейти від густини до тиску в рівнянні неперервності:

$$\frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

При геострофічному русі за означенням горизонтальний градієнт тиску (надалі його позначаємо просто $\vec{\nabla} p$) врівноважується силою Коріоліса:

$$f[\vec{e}_z \times \vec{V}_g] = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}. \quad (22.11)$$

Загалом, швидкість є сумою геострофічної і негеострофічної складових:

$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_n. \quad (22.12)$$

Геострофічне наближення прийнятне для дуже повільних рухів,

$$\omega \ll f. \quad (22.13)$$

Геострофічну швидкість визначаємо векторним домноженням умови рівності сил (22.11) на \vec{e}_z :

$$f[\vec{e}_z \times [\vec{e}_z \times \vec{V}_g]] = -\frac{1}{\rho}[\vec{e}_z \times \vec{\nabla} p], \text{ звідки} \\ \vec{V}_g = \frac{1}{\rho f}[\vec{e}_z \times \vec{\nabla} p]. \quad (22.14)$$

Отже, геострофічний вітер спрямований перпендикулярно до градієнта тиску – вздовж ізобар. У північній півкулі $f > 0$, тому ілюстрація напрямку геострофічного потоку виглядатиме, як показано на рис. 22.2. Негеострофічну складову швидкості знаходимо, нехтуючи в лівій частині рівняння руху \vec{V}_n порівняно з \vec{V}_g :

$$\frac{d\vec{V}_g}{dt} \approx -f[\vec{e}_z \times \vec{V}_n]; \\ \vec{V}_n = \frac{1}{f} \left[\vec{e}_z \times \frac{d\vec{V}_g}{dt} \right]. \quad (22.15)$$

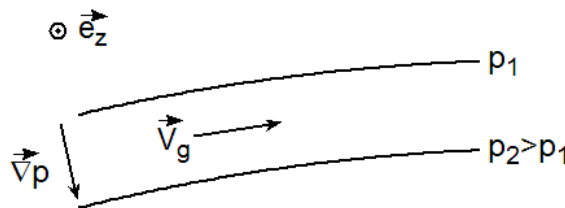


Рисунок 22.2 – Геострофічний вітер у північній півкулі

Запишемо рівняння неперервності, відокремлюючи геострофічну та негеострофічну компоненти швидкості:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_n) \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{V}_g + \vec{V}_n) = 0.$$

Згідно з означенням геострофічної швидкості (22.14),

$$\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} \rho = 0.$$

Загалом, із (22.14):

$$\vec{V}_g = \frac{1}{\rho f}[\vec{e}_z \times \vec{\nabla} p] = \frac{1}{\rho f} \left(-\vec{e}_x \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{e}_y \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Як наслідок,

$$\operatorname{div} \vec{V}_g = \frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho f} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho f^2} \beta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho f} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \text{ чи}$$

$$\operatorname{div} \vec{V}_g = -\frac{1}{\rho^2 f} \{p, \rho\} - \frac{\beta}{\rho f^2} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (22.16)$$

тут фігурують дужки Пуассона,

$$\{p, \rho\} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Отриманий результат (22.16) суттєво спрощується, якщо між тиском і густиною існує функціональна залежність (у нашому випадку – адіабатична, (22.9)). Тоді:

$$\begin{aligned} \{p, \rho\} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{V}_g &= -\frac{\beta}{\rho f^2} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Для негеострофічної швидкості (22.15):

$$\vec{V}_n \approx \frac{1}{f} \left[\vec{e}_z \times \left(\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_g \right) \right].$$

Зауважимо, що виконується

$$(\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) s = \frac{1}{\rho f} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho f} \{p, s\}; \quad (22.18)$$

s може бути як вектором, так і скаляром. Знаходимо:

$$\vec{V}_n = \frac{1}{f} \left[\vec{e}_z \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho f} [\vec{e}_z \times \vec{\nabla} p] \right) \right] + \frac{1}{\rho f^2} \left[\vec{e}_z \times \left\{ p, \frac{1}{\rho f} [\vec{e}_z \times \vec{\nabla} p] \right\} \right].$$

Користуючись лінійністю операторів, переписуємо співвідношення у формі:

$$\vec{V}_n = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho f} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{\rho f^2} \left\{ p, \frac{1}{\rho f} \vec{\nabla} p \right\}.$$

Тут і далі нехтуємо доданками, що містять добутки похідних за наявності однотипних без такого внеску:

$$\vec{V}_n = -\frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} p - \frac{1}{\rho^2 f^3} \{p, \vec{\nabla} p\}. \quad (22.19)$$

З огляду на сказане, не враховуємо $\vec{V}_n \cdot \vec{\nabla} p$, а також беремо

$$\operatorname{div} \vec{V}_n \approx -\frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta p - \frac{1}{\rho^2 f^3} \{p, \Delta p\}.$$

Випишемо всі збережені в рівнянні неперервності доданки:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma \beta}{f^2} \frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta p - \frac{\gamma}{\rho^2 f^3} \{p, \Delta p\} = 0. \quad (22.20)$$

У першому наближенні вважаємо сталою швидкість звуку

$$C_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Спростимо вигляд рівняння переходом до безрозмірних змінних. Природно взяти:

$$t = \frac{\tau}{f};$$

$$x = \xi \frac{C_s}{f}, y - \text{аналогічно.}$$

Отримуємо з (22.20):

$$f \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\beta C_s}{f} \frac{\partial p}{\partial \xi} - f \frac{\partial \Delta p}{\partial \tau} - f \frac{C_s^2}{\rho_0 C_s^4} \{p, \Delta p\} = 0;$$

ρ_0 – незбурена густина, а всі просторові оператори включають безрозмірні змінні. Для тиску природно ввести

$$p = C_s^2 \rho_0 \tilde{p}, \text{ тепер} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} - \frac{\beta C_s}{f^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial \Delta \tilde{p}}{\partial \tau} = \{\tilde{p}, \Delta \tilde{p}\}. \quad (22.21)$$

Величину

$$\tilde{u}_R = \frac{\beta C_s}{f^2} \quad (22.22)$$

називають швидкістю Росбі (безрозмірною), розмірним відповідником є

$$u_R = \frac{\beta C_s^2}{f^2}. \quad (22.23)$$

У свою чергу, характерний розмір

$$r_R = \frac{C_s}{f} \quad (22.24)$$

відомий як радіус Росбі. Остаточно (22.21) записується як

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\tilde{p} - \Delta \tilde{p}) - \tilde{u}_R \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = \{\tilde{p}, \Delta \tilde{p}\}. \quad (22.25)$$

Це співвідношення називають рівнянням Чарні (Charney) – Обухова.

Розв’язок Ларичева – Рєзника. Дипольна вихрова структура

Розглянемо двовимірні атмосферні рухи в наближенні нестискуваності:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - f [\vec{e}_z \times \vec{V}] \end{cases} \quad (22.26)$$

У проекціях на горизонтальні осі x (спрямована на схід) та y (на північ):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \end{cases} \quad (22.27)$$

Шукатимемо розв’язок у вигляді стаціонарної структури, яка рухається зі швидкістю u_0 у зональному напрямі. Введемо

$$\xi = x - u_0 t, \text{ тоді}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Подамо систему рівнянь (22.27) у координатах $(\xi; y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ (u - u_0) \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ (u - u_0) \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \right. \end{cases} \quad (22.28)$$

Диференціюємо друге рівняння за y , третє – за ξ і виконуємо їх віднімання. Використовуємо наближення β -площини (22.5):

$$f = f_0 + \beta y.$$

Дістаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (u - u_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \beta v - f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - (u - u_0) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial y} - f \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

Завдяки рівнянню неперервності доданки попарно заноляються (перший із третім, шостий – із заключним, сьомий – із дев'ятим).

Перейдемо до єдиної змінної – струмової функції ψ :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{cases}.$$

Для функції ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi \partial y^2} - u_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} - u_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^2 \partial y} = 0.$$

Компактнішою буде форма з оператором Лапласа:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi} - u_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0.$$

Зберемо разом однотипні похідні за ξ :

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} (\psi - u_0 y) - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi - \beta y) = 0. \quad (22.29)$$

Створимо симетричну конструкцію, додаючи функції у під знаком похідної за ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \psi - \beta y) \frac{\partial}{\partial y} (\psi - u_0 y) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi - u_0 y) \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi - \beta y) &= 0 \text{ чи} \\ \{\Delta \psi - \beta y, \psi - u_0 y\} &= 0. \end{aligned} \quad (22.30)$$

Найпростіший розв'язок такого рівняння – це лінійна залежність між компонентами дужок Пуассона. Локалізований розв'язок може мати різну форму при $r \leq a$ та $r > a$ (тут a – довільна стала):

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 - \beta y = -k^2 (\psi_1 - u_0 y), r \leq a \\ \Delta \psi_2 - \beta y = p^2 (\psi_2 - u_0 y), r > a \end{cases}. \quad (22.31)$$

Отже, координатна площина поділяється на дві області з неоднаковими розв'язками (рис. 22.3).

Локалізований розв'язок занолюється на нескінченності разом зі своїми похідними. Через цю обставину:

$$p^2 = \frac{\beta}{u_0};$$

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = -k^2 (\psi_1 - u_0 y) + \beta y \\ \Delta \psi_2 = p^2 \psi_2 \end{cases}.$$

Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} \xi = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}.$$

Для внутрішньої області:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} = -k^2 (\psi_1 - u_0 r \sin \varphi) + \beta r \sin \varphi. \quad (22.32)$$

Характер кутової залежності дозволяє взяти

$$\psi_1 = R(r) \sin \varphi, \text{ тоді} \quad (22.33)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} R + k^2 (R - u_0 r) - \beta r = 0. \quad (22.34)$$

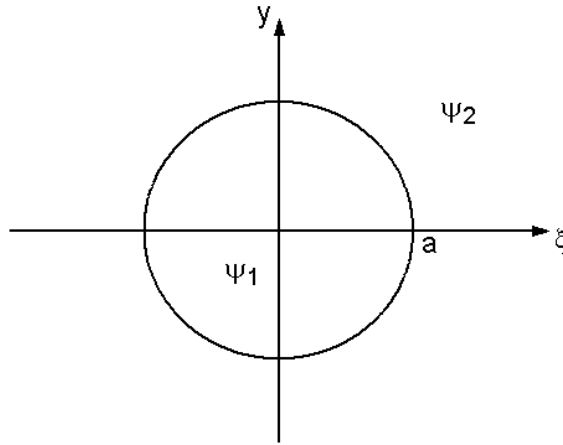


Рисунок 22.3 – Області, в яких існують розв'язки ψ_1 та ψ_2 рівняння (22.30)

Виконаємо заміну змінних:

$$R = R_1 + Ar,$$

сталу A знайдемо, виходячи з максимального спрощення рівняння (22.34). Маємо:

$$\frac{1}{r} R_1' + \frac{A}{r} + R_1'' - \frac{1}{r^2} R_1 - \frac{A}{r} + k^2 R_1 + r(k^2 A - u_0 k^2 - \beta) = 0.$$

Звідси:

$$A = \frac{\beta}{k^2} + u_0;$$

$$r^2 R_1'' + r R_1' + (k^2 r^2 - 1) R_1 = 0. \quad (22.35)$$

Скінченний у нулі розв'язок виражається через функцію Бесселя J_1 ,

$$R_1 = C_1 J_1(kr). \quad (22.36)$$

У зовнішній області аналогом (22.32) буде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \varphi^2} - p^2 \psi_2 = 0. \quad (22.37)$$

Теж розглядаємо як у (22.33):

$$\psi_2 = R_2(r) \cdot \sin \varphi; \quad (22.38)$$

$$\frac{1}{r} R_2' + R_2'' - \frac{1}{r^2} R_2 - p^2 R_2 = 0.$$

Таким чином, (22.37) за підстановки (22.38) зводиться до

$$r^2 R_2'' + r R_2' - (p^2 r^2 + 1) R_2 = 0. \quad (22.39)$$

Обмеженість розв'язку на нескінченності відповідає функції Макдональда 1-го роду K_1 ,

$$R_2 = C_2 K_1(pr). \quad (22.40)$$

Отже, повним розв'язком (22.31) буде:

$$\psi_1 = \left[C_1 J_1(kr) + \left(\frac{\beta}{k^2} + u_0 \right) r \right] \sin \varphi; \quad r \leq a$$

$$\psi_2 = C_2 K_1 \left(\sqrt{\frac{\beta}{u_0}} r \right) \sin \varphi; \quad r > a.$$

Сталі C_1 і C_2 знаходяться з умови неперервності функції ψ та її першої похідної при $r = a$. Розв'язок є локалізованим, при $r \rightarrow \infty$ він спадає експоненціально. Винятком бачиться тільки випадок $\beta = 0$, коли $\psi_2 \sim r^{-1}$. Тому швидкий спад розв'язку потребує ненульового параметра Росбі. З'ясуємо кутову залежність швидкості. За означенням струмової функції

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Оскільки $\psi \sim \sin \varphi$, то

$$\begin{aligned} u(-\xi, y) &= u(\xi, y); \quad v(-\xi, y) = -v(\xi, y); \\ u(\xi, -y) &= u(\xi, y); \quad v(\xi, -y) = -v(\xi, y). \end{aligned}$$

Внутрішня область замкнута, розв'язком для неї є дипольний вихор (рис. 22.4).

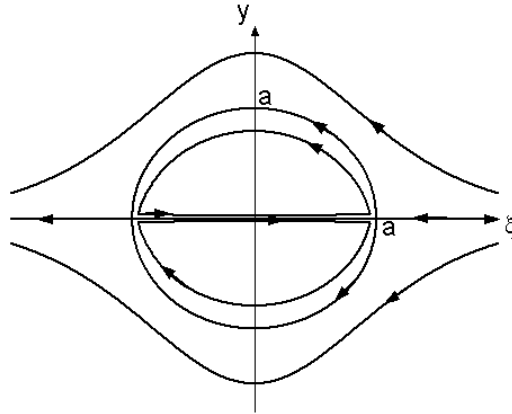


Рисунок 22.4. Характер руху при реалізації розв'язку Ларичева – Рєзника

23. Нелінійні потенціальні дрейфові хвилі.

Рівняння Хасегави – Міми.

Розглянемо задачу про рухи у плазмі, яка приводить до нелінійності, аналогічної отриманій у рівнянні Чарні – Обухова (22.25) для нейтральної атмосфери. Нехай плазма перебуває в однорідному магнітному полі, напрямком якого оберемо за вісь z :

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z.$$

Вважаємо, що теплові швидкості задовільняють співвідношенню для електронних дрейфових хвиль:

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_{\parallel}} \ll v_{Te}. \quad (23.1)$$

При описі іонів користуватимемося гідродинамічними рівняннями, нехтуючи тепловим рухом. При цьому, передбачаємо, що електрони підпорядковуються розподілу Больцмана:

$$n_e = n_0 e^{e\varphi/T_e}, \quad \text{де}$$

φ – скалярний потенціал;
напруженість електричного поля

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

(розглядаємо потенціальні хвилі).

Досліджуватимемо квазіпоперечні збурення, тобто,

$$k_{\perp} \gg k_{\parallel},$$

а для довжин хвиль тоді

$$\lambda_{\perp} \ll \lambda_{\parallel}.$$

У зв'язку з таким характером збурень, градієнт будь-якої величини визначається головним чином його поперечною складовою:

$$\vec{\nabla} \approx \vec{\nabla}_{\perp} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Незбурену концентрацію будемо вважати залежною тільки від координати x :

$$n_e = n_0(x) e^{e\varphi/T_e}.$$

Рух іонів у плазмі низького тиску визначається електромагнітним полем. Оскільки хвилі потенціальні, то магнітне поле представлене тільки незбуреною компонентою:

$$\vec{B} = \vec{B}_0.$$

Отже, рівняння руху для іонів має вигляд:

$$m_i \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}_0]. \quad (23.2)$$

Переносимо масу до правої частини і вводимо потенціал φ :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m_i} \vec{\nabla} \varphi + [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}];$$

іонну циклотронну частоту вводимо як

$$\vec{\omega}_{Ci} = \frac{e\vec{B}_0}{m_i c}.$$

Застосуємо до обох частин рівняння руху операцію взяття ротора. При цьому відразу

$$\text{rot } \vec{\nabla} \varphi \equiv 0.$$

Для другого доданка справа у загальному випадку:

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}]] = e_{ijk} \vec{e}_i \nabla_j [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}]_k = e_{ijk} \vec{e}_i \nabla_j (e_{klm} v_l \omega_{Cim}). \quad (23.3)$$

Враховуємо тотожність для згортки тензорів Леві – Чивіті:

$$e_{ijk} e_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Будемо мати:

$$\begin{aligned} \text{rot} [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}] &= \vec{e}_i \nabla_j (v_i \omega_{Cij}) - \vec{e}_i \nabla_j (v_j \omega_{Cii}), \text{ тобто,} \\ \text{rot} [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}] &= \vec{v} \text{div } \vec{\omega}_{Ci} + (\vec{\omega}_{Ci} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}_{Ci} - \vec{\omega}_{Ci} \text{div } \vec{v}. \end{aligned}$$

При сталості магнітного поля похідні від $\vec{\omega}_{Ci}$ заносяться. Якщо збурення близькі до поперечних, то також

$$(\vec{\omega}_{Ci} \cdot \vec{\nabla}) \approx (\vec{\omega}_{Ci} \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) = 0.$$

Отже, приходимо до:

$$\text{rot} [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}] \approx -\vec{\omega}_{Ci} \text{div } \vec{v}. \quad (23.4)$$

У лівій частині рівняння руху:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}.$$

Введемо позначення:

$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\Omega}$ – вихор швидкості.

При двовимірних рухах у площині xy :

$$\vec{\Omega} \approx [\vec{v}_\perp \times \vec{v}_\perp] = \Omega \cdot \vec{e}_z.$$

Таким чином, вихрові структури визначаються віссю, паралельною до силових ліній магнітного поля. Для конвективного доданка скористаємося тим, що

$$[\vec{v} \times [\vec{v} \times \vec{v}]] = e_{ijk} \vec{e}_i v_j [\vec{v} \times \vec{v}]_k = e_{ijk} \vec{e}_i v_j e_{klm} \nabla_l v_m.$$

Знов-таки, при переході до символів Кронекера зрештою отримаємо:

$$[\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}] = \vec{e}_i v_j (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) = \vec{v} \frac{v^2}{2} - (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v}.$$

Тому

$$(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \vec{v} \frac{v^2}{2} - [\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}].$$

У зв'язку з цим,

$$\text{rot}((\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v}) = -\text{rot}[\vec{v} \times \vec{\Omega}].$$

Знову використаємо вираз для ротора від векторного добутку:

$$[\vec{v} \times [\vec{v} \times \vec{\Omega}]] = \vec{v} \text{div } \vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{v}) \vec{v} - \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\Omega}) \vec{\Omega}.$$

За означенням вихору швидкості

$$\text{div } \vec{\Omega} \equiv \text{div rot } \vec{v} \equiv 0.$$

Для двовимірних рухів

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{v}) \vec{v} \approx \Omega (\vec{e}_z \cdot \vec{v}_\perp) \vec{v} = 0.$$

Відповідно,

$$\text{rot}((\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v}) \approx \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\Omega}) \vec{\Omega}. \quad (23.5)$$

Прирівнюючи цей вираз до доданка (23.4), зумовленого магнітним полем, отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\Omega}) \vec{\Omega} + \vec{\omega}_{Ci} \text{div } \vec{v} = 0, \quad (23.6)$$

перший доданок виник із $\text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.

Знову скористаємося постійністю магнітного поля. Через це можна додати $\vec{\omega}_{Ci}$ під знаком похідної:

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{Ci}) + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}_{Ci}) \text{div } \vec{v} = 0. \quad (23.7)$$

Користуючись рівнянням неперервності, пов'яжемо швидкість із концентрацією:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \vec{v}) &= 0; \\ \frac{dn}{dt} + n \text{div } \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$\text{div } \vec{v} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dt}.$$

При зроблених наближеннях

$$\vec{\Omega} \parallel \vec{\omega}_{Ci} \parallel \vec{e}_z.$$

Тому вдається перейти до скалярної форми запису (23.7):

$$\frac{1}{\Omega + \omega_{Ci}} \frac{d}{dt} (\Omega + \omega_{Ci}) - \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = 0. \quad (23.8)$$

Формально перепишемо через натуральні логарифми:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{\Omega + \omega_{Ci}}{n} = 0. \quad (23.9)$$

Логарифм від розмірної величини означає нормування на значення для якогось виокремленого стану, тобто,

$$\ln \left(\frac{\Omega + \omega_{Ci}}{\Omega_0 + \omega_{Ci}} \cdot \frac{n_0}{n} \right).$$

Отримане рівняння – це закон збереження вихору для стискуваної замагніченої рідини. Для нестискуваної рідини у рамках звичайної гідродинаміки (за відсутності магнітного поля) маємо замість (23.9) просто

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Проаналізуємо низькочастотні рухи із частотою

$$\omega \ll \omega_{Ci}.$$

Тоді з рівняння руху

$$-\frac{e}{m_i} \vec{\nabla} \varphi + [\vec{v} \times \vec{\omega}_{Ci}] \approx 0.$$

Досліджуємо двовимірні процеси у площині, перпендикулярній до вектора магнітної індукції. Для знаходження швидкості векторно домножимо рівняння на \vec{e}_z :

$$\begin{aligned} -\frac{e}{m_i} [\vec{e}_z \times \vec{\nabla} \varphi] + \omega_{Ci} \vec{v} &= 0, \text{ тобто,} \\ \vec{v} &= \frac{e}{m_i \omega_{Ci}} [\vec{e}_z \times \vec{\nabla} \varphi] = \frac{c}{B_0} [\vec{e}_z \times \vec{\nabla} \varphi]. \end{aligned} \quad (23.10)$$

Через скалярний потенціал подаємо і вихор швидкості:

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v} = \frac{c}{B_0} [\vec{\nabla} \times [\vec{e}_z \times \vec{\nabla} \varphi]] = \frac{c}{B_0} (\vec{e}_z \Delta \varphi - (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi) = \frac{c}{B_0} \Delta_{\perp} \varphi \vec{e}_z.$$

З огляду на проведені обчислення, умова збереження вихору (23.9) представляється як

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\frac{c}{B_0} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_{Ci}}{n_0 e^{e\varphi/T_e}} + \frac{c}{B_0} ([\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_{\perp} \varphi] \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) \ln \frac{\frac{c}{B_0} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_{Ci}}{n_0 e^{e\varphi/T_e}} = 0 \quad (23.11)$$

вважаємо, що

$$n_i \approx n_e = n_0 e^{e\varphi/T_e} \text{ – бoльцманівський розподіл.}$$

Виконаємо перетворення логарифма у (23.11):

$$\ln \frac{\frac{c}{B_0} \Delta_{\perp} \varphi + \omega_{Ci}}{n_0 e^{e\varphi/T_e}} = \ln \frac{\omega_{Ci}}{n_0} + \ln \left(1 + \frac{c}{\omega_{Ci} B_0} \Delta_{\perp} \varphi \right) - \frac{e\varphi}{T_e}.$$

Для незначних збурень

$$\ln \left(1 + \frac{c}{\omega_{Ci} B_0} \Delta_{\perp} \varphi \right) \approx \frac{c}{\omega_{Ci} B_0} \Delta_{\perp} \varphi.$$

Рівноважну концентрацію вважаємо незмінною з часом, тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{\omega_{Ci} B_0} \Delta_{\perp} \varphi - \frac{e\varphi}{T_e} \right) + \frac{c}{B_0} ([\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_{\perp} \varphi] \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) \left(\ln \frac{\omega_{Ci}}{n_0} + \frac{c}{\omega_{Ci} B_0} \Delta_{\perp} \varphi - \frac{e\varphi}{T_e} \right) = 0.$$

Для довільного скаляра s :

$$([\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_{\perp} \varphi] \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) s = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} = \{\varphi, s\},$$

отримані дужки Пуассона (Poisson). Отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{B_0 \omega_{Ci}} \Delta_{\perp} \varphi - \frac{e\varphi}{T_e} \right) + \frac{c}{B_0} \left\{ \varphi, \ln \frac{\omega_{Ci}}{n_0} + \frac{c}{B_0 \omega_{Ci}} \Delta_{\perp} \varphi - \frac{e\varphi}{T_e} \right\} = 0. \quad (23.12)$$

Для спрощення вигляду домножимо рівняння на $\frac{T_e}{e}$. З'являється множник

$$\frac{cT_e}{eB_0 \omega_{Ci}} = \frac{C_s^2}{\omega_{Ci}^2} \equiv \rho_s^2.$$

Якщо електронна температура T_e не залежить від координат, то останній доданок у дужках Пуассона (23.12) дає нуль. Зрештою, приходимо до:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s^2 \Delta_{\perp} \varphi - \varphi) + \frac{c}{B_0} \left\{ \varphi, \frac{T_e}{e} \ln \frac{\omega_{Ci}}{n_0} + \rho_s^2 \Delta_{\perp} \varphi \right\} = 0. \quad (23.13)$$

Перейдемо до безрозмірних змінних, користуючись наявними розмірними величинами:

$$x \equiv \rho_s \cdot \xi;$$

$$y \equiv \rho_s \cdot \eta;$$

$$t \equiv \tau / \omega_{Ci};$$

$$\varphi \equiv \frac{T_e}{e} \psi.$$

Для дужок Пуассона:

$$\{\dots\}_{x,y} = \frac{1}{\rho_s^2} \{\dots\}_{\xi,\eta}.$$

Як наслідок,

$$\omega_{Ci} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta_{\perp} \psi - \psi) \cdot \frac{T_e}{e} + \frac{c}{B_0 \rho_s^2} \cdot \frac{T_e}{e} \left\{ \psi, \frac{T_e}{e} \ln \frac{\omega_{Ci}}{n_0} + \frac{T_e}{e} \Delta_{\perp} \psi \right\} = 0.$$

Розмірні величини, що лишились, утворюють

$$\frac{cT_e}{eB_0 \rho_s^2 \omega_{Ci}} = \frac{C_s^2}{\rho_s^2 \omega_{Ci}^2} = 1.$$

Остаточно

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta_{\perp} \psi - \psi) + \left\{ \psi, \Delta_{\perp} \psi + \ln \frac{\omega_{Ci}}{n_0} \right\} = 0. \quad (23.14)$$

Виведено рівняння Хасегави – Міми (Hasegawa – Mima), яке широко застосовується для опису великомасштабних вихрових рухів у плазмі. Оскільки циклотронна частота стала, то друга складова у дужках Пуассона може мати вигляд $\Delta_{\perp} \psi - \ln n_0$.

З'ясуємо, яким буде розв'язок лінеаризованого рівняння Хасегави – Міми. Нехай залежність концентрації від координати експоненціальна:

$$n_0 = n_{00} e^{\kappa x}; \quad (23.15)$$

κ – масштаб просторової неоднорідності. У безрозмірних координатах

$$\kappa x = \tilde{\kappa} \xi, \text{ де}$$

$$\tilde{\kappa} = \kappa \rho_s.$$

Рівняння (23.14) має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta_{\perp} \psi - \psi) + \left\{ \psi, \Delta_{\perp} \psi - \tilde{\kappa} \xi \right\} = 0. \quad (23.16)$$

У лінійному випадку

$$\psi \sim e^{i(\tilde{\kappa}_{\perp} \eta - \tilde{\omega} \tau)}, \text{ тут}$$

$$\tilde{k}_{\perp} \equiv k_{\perp} \rho_s ;$$

$$\tilde{\omega} \equiv \omega / \omega_{Ci} .$$

Припускаємо поширення хвилі вздовж осі y . Позбавляючись квадратичних за змінною ψ доданків, дістанемо з (23.16) дисперсійне рівняння:

$$-i\tilde{\omega}(-\tilde{k}_{\perp}^2 - 1) + i\tilde{k}_{\perp}\tilde{\kappa} = 0 .$$

Розв'язок задається як

$$\tilde{\omega} = -\frac{\tilde{\kappa}\tilde{k}_{\perp}}{\tilde{k}_{\perp}^2 + 1} .$$

Повернемося до розмірних змінних:

$$\frac{\omega}{\omega_{Ci}} = -\frac{\kappa \rho_s \cdot k_{\perp} \rho_s}{1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2} .$$

Множник у чисельнику зводиться до

$$-\kappa k_{\perp} \rho_s^2 \omega_{Ci} = -\frac{\kappa k_{\perp} C_s^2 \omega_{Ci}}{\omega_{Ci}^2} = -\frac{\kappa k_{\perp} v_{Te}^2}{\omega_{Ce}} = \omega_e^* .$$

Результатом стає

$$\omega = \frac{\omega_e^*}{1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2} , \tag{23.17}$$

дисперсійне рівняння для електронних дрейфових хвиль. Тому рівняння Хасегави – Міми (23.14) є його нелінійним узагальненням. Воно описує двовимірні вихрові структури.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – Москва: Наука, 1992. – 560 с.
- Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. – Москва: Атомиздат, 1979. – 320 с.
- Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. – Москва: Наука, 1988. – 304 с.
- Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. – Москва: Наука-Физматлит, 2000 – 272 с.
- Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – Москва: Мир, 1988. – 694 с.
- Кингсеп А.С. Введение в нелинейную физику плазмы. – Москва: Изд-во МФТИ, 1996. – 208 с.
- Treumann R.A., Baumjohann W. Advanced Space Plasma Physics. – London: Imperial College Press, 1997. – 392 p.
- Анісімов І.О. Коливання та хвилі. – Київ: Академпрес, 2003. – 280 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Т. VIII: Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 620 с.
- Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. – Москва: Энергоатомиздат, 1989. – 200 с.
- Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – Москва: Наука, 1988. – 368 с.
- Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. Класична механіка. – Київ: Фізичний факультет КНУ, 2008. – 398 с.
- Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика, Т. X: Физическая кинетика. – Москва: Наука, 1979. – 528 с.
- Электродинамика плазмы / Под ред. Ахиезера А.И. – Москва: Наука, 1974. – 721 с.
- Козак Л.В. Вступ до фізики космічної плазми. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2010. – 317 с.
- Загородній А.Г., Момот А.І. Вступ до кінетичної теорії плазми. – Київ: Наукова думка, 2015. – 445 с.
- Зеленський С.Є. Обернення хвильового фронту: конспект лекцій із дисципліни "Адаптивна оптика". – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 67 с.
- Ситенко О.Г., Мальнев В.М. Основы теории плазмы. – Київ: Наукова думка, 1994. – 372 с.
- Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика в 2-х т. – Москва: Мир, 1984. – Т. 1. – 398 с., Т. 2. – 416 с.
- Веденов А.А. Задачник по физике плазмы. – Москва: Атомиздат, 1981. – 160 с.

Зміст

Вступ.....	3
I. Параметрична взаємодія хвиль у плазмі.....	4
1. Основні характеристики та поняття для лінійних та нелінійних хвиль та хвильових пакетів. Дисперсія та дифракція хвиль.....	4
2. Нелінійність у плазмі, базові властивості нелінійних систем.....	6
3. Параметрична взаємодія хвиль у плазмі. Узагальнене рівняння Мат'є.....	8
4. Розпадна нестійкість ленгмюрівських хвиль.....	11
5. Співвідношення Менлі – Роу при трихвильовій взаємодії. Закон збереження енергії.....	15
6. Аналіз умови синхронізму при розпаді ленгмюрівської хвилі.....	21
7. Модифікована розпадна нестійкість.....	22
8. Різновиди трихвильових параметричних процесів.....	26
9. Взаємодія хвиль із частотами ω та 2ω	28
10. Вибухова нестійкість.....	30
11. Розпад фотона на фотон і плазмон.....	32
12. Рівняння зв'язаних хвиль при слабкій кореляції між фазами.....	39
II. Параболічне рівняння, модуляційна нестійкість.....	44
13. Рівняння простих хвиль.....	44
14. Метод характеристик.....	47
15. Загасання Ландау.....	51
16. Параболічне рівняння для хвилі, близької до монохроматичної.....	55
17. Розвиток модуляційної нестійкості. Самостиснення хвильових пакетів та самофокусування хвильових пучків.....	59
18. Високочастотний тиск, сила Міллера.....	65
III. Основні нелінійні рівняння, що допускають аналітичні розв'язки. Солітони.....	67
19. Опис ленгмюрівських хвиль із використанням нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ).....	67
20. Солітонні розв'язки рівняння Кортевега – де Вріза.....	73
21. Рівняння \sin -Гордона на прикладі параметричної взаємодії трьох хвиль.....	80
22. Хвилі Росбі. Застосування геострофічного наближення.....	86
23. Нелінійні потенціальні дрейфові хвилі. Рівняння Хасегави – Міми.....	94
Список рекомендованої літератури.....	100

Навчальне видання

Рапопорт Юрій Григорович
Грицай Асен Васильович

Нелінійні хвильові процеси в плазмі

Навчальний посібник