

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Макарець М.В., Романенко О.В.

ЛЕКЦІЇ З КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

підручник для фізичних факультетів університетів

Видавничо-поліграфічний центр
“Київський університет”

Зміст

Передмова до першого видання	5
Передмова до другого видання	7
Домовленості, стандартні позначення та скорочення	9
<hr/>	
Частина I. Механіка Ньютона-Ейлера	
<hr/>	
1. Експериментальні основи класичної механіки. Закони Ньютона .	15
2. Закони збереження у системі частинок	37
3. Одновимірні малі коливання	65
4. Рух у центральному полі	79
5. Зіткнення та розсіювання частинок	99
6. Рух зі зв'язками. Рівняння Лагранжа першого роду	117
7. Механіка Ейлера. Кінематичні величини та рівняння	127
8. Механіка Ейлера. Динамічні величини та тензор інерції	141
9. Динамічні рівняння Ейлера. Вільне обертання	153
Підсумки до механіки Ньютона	164
<hr/>	
Частина II. Механіка Лагранжа	
<hr/>	
10. Рівняння Лагранжа другого роду	167
11. Структура функції та рівнянь Лагранжа	183
12. Методи інтегрування рівнянь Лагранжа	197
13. Приклад: математичний маятник	211
14. Рівняння Лагранжа для абсолютно твердого тіла. Рух дзиги	219
15. Малі коливання з кількома ступенями вільності. Нормальні координати	231
16. Коливання молекул та лінійних ланцюжків	249

17. Нелінійні коливання	275
18. Варіаційний принцип у механіці Лагранжа	303
19. Загальна форма першої варіації. Теорема Нетер	319
Підсумки до механіки Лагранжа	336

Частина III. Механіка Гамільтона

20. Перетворення Лежандра. Канонічні рівняння Гамільтона	339
21. Варіаційний принцип у фазовому просторі	353
22. Канонічні перетворення	361
23. Дужки Пуассона. Теорема та рівняння Ліувілля	373
24. Рівняння Гамільтона-Якобі	385
Підсумки до аналітичної механіки	399

Частина IV. Механіка суцільного середовища

25. Основні поняття. Кінематика суцільного середовища	403
26. Закони збереження і динаміка	419
27. Повна система рівнянь. Моделі суцільного середовища	433
28. Теорія пружності. Закон Гука	443
29. Стаціонарні та нестаціонарні задачі теорії пружності	451
30. Гідродинаміка. Рівняння Нав'є-Стокса	457
31. Звук у рідинах та газах	471

Частина V. Додаткові питання аналітичної механіки

32. Вироджені механічні системи	479
33. Метод Лагранжа та Гамільтона для неперервних систем	495
34. Релятивістська кінематика	511
35. Релятивістська динаміка	531
36. Поля	549

Додатки

А. Матриця переходу ортогональних перетворень.....	567
Б. Перетворення векторів та тензорів.	571
В. Символ (тензор) Леві-Чивіта	573
Г. Криволінійні ортогональні координати	575
Д. Еліптичні функції та інтеграли	583
Е. Диференціальні операції з векторами	589
Є. Кватерніони	597
Предметний покажчик	618
Література	625

Передмова до першого видання

В основу підручника покладено багаторічний досвід викладання авторами та їх колегами з кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка курсу класичної механіки на фізичному факультеті.

Даний підручник є спробою використання вже існуючих схем, однак автори відмовились від створення універсального тексту. Класична механіка, основи якої було закладено більш ніж 300 років тому, ще й досі може є розділом теоретичної фізики, який постійно збагачується новими цікавими ідеями. Умістити все у власній свідомості навіть на рівні логічної структури дуже важко, а описати у межах однієї книги (задуманої як підручник) із достатньою повнотою неможливо.

Задачі наведено у мінімальному обсязі — для ілюстрації тверджень або як вправи з дослідження додаткових питань загального характеру. Успішне вивчення класичної механіки, як і будь-якої іншої теоретичної дисципліни, неможливе без розв’язування великої кількості задач. Читачу рекомендується паралельно пройти відповідні розділи по одному зі стандартних збірників задач, які наведено у списку літератури. З одного боку практичні вміння обов’язкові для розуміння загальної теоретичної схеми, а з іншого — розвиток будь-якої дисципліни є послідовністю постановки та розв’язку задач, і часто буває так, що досить важко взагалі розділити теорію та її практичне застосування.

У підручнику автори обмежились тільки тими розділами теорії, які давно вважаються класичними та є основою побудови навчальних програм більшості університетів. Схема курсу обрана абсолютно традиційною, вона відображає історію розвитку дисципліни — від векторної механіки Ньютона до аналітичної динаміки.

Текст умовно розділено на “лекції”, кожна відповідає об’єднанню матеріалу за логічною замкнутістю. Звичайно, за обсягом різні “лекції” не рівноцінні, частина з них навряд чи може бути викладена протягом реальної аудиторної лекції.

Логічна структура курсу не скрізь збігається з порядком викладення матеріалу. Стандартний курс механіки можна розбити на кілька внутрішньо завершених частин, для даного тексту це виглядає так¹:

- *векторна механіка Ньютона*: базові — [1], [2], [5], [10], [11], [12] (частково), [25], [26], [27]; прикладні — [3], [4], [12] (частково), [14], [16], [17], [28], [29], [30], [31];
- *аналітична механіка Лагранжа*: базові — [6], [7], [8], [18], [19]; прикладні — [9], [13], [15];
- *аналітична механіка Гамільтона*: [20], [21], [22], [23], [24].

Механіка суцільного середовища, яка давно вже є окремою дисципліною, розглядається тільки за допомогою методів векторного підходу у мінімальному обсязі.

¹ Посилання наведено як у першому виданні (у другому порядок слідування лекцій інший).

Обмеженість програми не дозволяє розглядати протягом загального університетського курсу такі важливі питання як аналітична динаміка вироджених систем, теорію поля, а також деякі розділи, необхідні для інших областей теоретичної фізики (наприклад, адіабатичні інваріанти). Теми, які тільки коротко обговорюються у даному курсі, читач легко знайде в існуючій літературі.

Вимоги до рівня читача (хоча б у мінімальному обсязі):

- *математичний аналіз*: інтегральне та диференціальне числення однієї змінної, формула Тейлора, дослідження та побудова графіків елементарних функцій у декартових та полярних координатах, функції кількох змінних (диференціювання);
- *диференціальні рівняння*: розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку (та метод варіації сталої), однорідні та неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами;
- *теорія функцій*: означення комплексних чисел, формула Ейлера;
- *лінійна алгебра*: обчислення визначників, розв'язування систем лінійних рівнянь, властивості лінійних і квадратичних форм;
- *аналітична геометрія*: означення та властивостей добутків у тривимірному просторі, криві другого порядку;
- *фізика*: знання механіки у межах загального курсу фізики.

Бажані також елементарні знання з теорії поля (диференціальні операції з векторами) та векторного аналізу (матриці перетворень, означення тензорів), але вони не є абсолютно обов'язковими. Необхідну інформацію з цих та деяких інших питань наведено у додатках.

У тексті багато зауважень та уточнень, які набрані дрібнішим шрифтом. Ті з них, які не мають принципового характеру (і можуть бути опущені при першому читанні), або вимагають більш високого рівня знань у читача, позначено зірочкою.

Передмова до другого видання

У другому виданні підручника матеріал суттєво перероблено, додано нові розділи, виправлено значну кількість помилок. Такж стисло розглянуто матеріал, який можна віднести до кола питань, пов'язаних з класичною механікою і є важливою ланкою у переході від механіки до теорії поля, але він не висвітлюється у багатьох підручниках та посібниках.

Переважну більшість задач опущено до стандартного лекційного курсу, яким є даний підручник, для цієї мети легко знайти збірник задач.

Порядок розділів змінено на логічно послідовний, що також відповідає історичному розвитку класичної механіки як дисципліни. Традиційні розділи “Механіка твердого тіла” та “Малі коливання” розділено між главами “Механіка Ньютона-Ейлера” (векторна механіка) та “Механіка Лагранжа” (аналітична механіка).

Київ, 2024

Автори

Домовленості, стандартні позначення та скорочення

Домовленості

У тексті у низці випадків (якщо не зазначено протилежне) використовуються такі домовленості:

- 1) угода Ейнштейна про суми: якщо німий індекс зустрічається двічі, то по ньому передбачається сума в межах, які визначаються контекстом. Індекс є німим, якщо він фігурує тільки в одній стороні рівності.

Приклади: $A = x_i y_i \equiv \sum_i x_i y_i$ (німий індекс i), але $A_i = x_i y_i$ без суми (не німий індекс), та $A = x_i y_i z_i$ без суми (зустрічається тричі). У випадку порушення правила Ейнштейна знак суми вказується явно;

- 2) позначення діапазону цілої величини: $i = \overline{1, N}$ означає $i = 1, \dots, N$;
- 3) позначення подвійної суми з пропущеними доданками:

$$\sum'_{i,j=1}^N (\dots) \quad \text{означає} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (\dots);$$

- 4) позначення списків однотипних аргументів: якщо $f = f(q_1, \dots, q_n)$, то для скорочення записується $f = f(q)$ (якщо це не призводить до непорозумінь);
- 5) позначення повної похідної по часу: $\frac{d}{dt} F(t) = \dot{F}(t)$ — загальноприйняте у класичній механіці. Воно не поширюється на частинні похідні;
- 6) у випадках, коли індекси у сумах мають різну природу (нумерують нееквівалентні характеристики), вони позначаються літерами з різних алфавітів (це оговорюється для кожного випадку окремо);
- 7) вектори: \vec{a}, \vec{b}, \dots ; матриці: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$; тензори: \hat{A}, \hat{B}, \dots ; кути: α, β, \dots (грецькі літери); якщо \vec{a} — вектор, то його довжина $a = |\vec{a}|$;
- 8) функції: $f(x)$ (круглі дужки), функціонали: $F[x]$ (квадратні дужки);
- 9) позначення матричних елементів: матриця: \mathbf{A} , елементи A_{ij} або a_{ij} . Набір матричних елементів утворює матрицю, позначення: $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$ (межі i, j — за контекстом);
- 10) скалярний добуток: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (крапка обов'язкова), векторний добуток: $\vec{a} \times \vec{b}$ (хрестик обов'язковий). Можливі дужки не є частиною позначення, використовуються для групування;
- 11) декартові координати: (x, y, z) ; базис: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ або $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; радіус-вектор: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$;
- 12) циліндричні координати: (r, φ, z) ; означення:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z;$$

базис: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$; радіус-вектор: $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$; для уникнення непорозумінь циліндрична координата r іноді позначається ρ (значення $|\vec{r}|$ відмінне від циліндричної координати r);

13) сферичні координати: (r, θ, φ) ; означення:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

базис: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$; радіус-вектор: $\vec{r} = r\vec{e}_r$;

Скорочення

АТТ	абсолютно тверде тіло;
фнм-	фізично нескінченно мала/малий (про частинку, об'єм тощо);
L -система	лабораторна система відліку;
C -система	система відліку центру мас;
P -система	система полюса;

Латинські літери

\vec{A}	вектор-потенціал магнітного поля, вектор Рунге-Ленца (задача двох тіл);
A	робота;
C	центр мас (точка); його радіус-вектор \vec{R}_c ;
c	швидкість світла;
$d(\dots)$	диференціал;
$\partial(\dots)$	неповний диференціал;
\det	визначник (матриці);
E	енергія у механіці Ньютона;
\mathcal{E}	енергія у механіці Лагранжа;
\vec{E}	напруженість електричного поля;
e	основа експоненти, електричний заряд;
$(\dots)^{ext}$	(\dots) відноситься до зовнішніх факторів (external);
\vec{e}_i	вектор базису (із вказаним впорядкуванням);
Im	уявна частина;
I_{ij}	елементи тензору інерції \hat{I} ;
H	функція Гамільтона;
H_i	параметри Ламе;
\vec{H}	напруженість магнітного поля;
\vec{L}	момент імпульсу (частинки або системи частинок);
L	функція Лагранжа;
m, M	маса;
n	число ступенів вільності (механіка Лагранжа);
N	число частинок;
\vec{N}	момент сили;
\vec{p}, \vec{P}	імпульс частинки та системи частинок відповідно;
\vec{P}_c	імпульс центру мас;
q	узагальнена координата;
\mathcal{Q}	конфігураційний простір (механіка Лагранжа);

Re	дійсна частина, число Рейнольдса (гідродинаміка);
\vec{r}	радіус-вектор частинки $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, або список аргументів $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$;
r	модуль радіус-вектора, $r = \vec{r} $;
\vec{R}_c	радіус-вектор центру мас;
S	площа, інтеграл дії, головна функція Гамільтона;
Sp	слід (матриці);
T	кінетична енергія, період руху, температура;
$T\mathcal{Q}$	простір швидкостей (механіка Лагранжа);
$T^*\mathcal{Q}$	фазовий простір (механіка Гамільтона);
t	час;
U	потенціальна енергія;
\vec{u}	одне з позначень лінійної швидкості, вектор деформації;
u_{ij}	компоненти тензора деформації;
\vec{v}	одне з позначень лінійної швидкості;
v_{ij}	компоненти тензора швидкостей (механіка суцільного середовища);

Грецькі літери

α_{ij}	елементи матриці переходу \mathbf{A} ;
δ_{ij}	символ (тензор) Кронекера;
$\delta(\dots)$	мала зміна, варіація, віртуальне переміщення (для координат);
$\Delta(\dots)$	мала зміна, варіація, можливе переміщення (для координат);
Δ	оператор Лапласа;
$\Gamma, d\Gamma$	об'єм та елемент об'єму у фазовому просторі відповідно;
ε_{ijk}	символ (тензор) Леві-Чивіта;
η	стала в'язкості (гідродинаміка);
η_{ijkl}	тензор в'язкості (гідродинаміка);
λ	пружна стала ізотропного середовища (теорія пружності);
λ_{ijkl}	тензор пружних сталих (теорія пружності);
μ	зведена маса (у задачі двох тіл), пружна стала ізотропного середовища;
ω, Ω	частота, кутова швидкість;
ρ	густина, одне з позначень відстані (за контекстом);
τ	час;
φ	скалярний потенціал електромагнітного поля, кут;
ξ	стала в'язкості (гідродинаміка);

ЧАСТИНА I

Механіка Ньютона-Ейлера

- ❑ Експериментальні основи класичної механіки. Закони Ньютона
- ❑ Закони збереження у системі частинок
- ❑ Одновимірні малі коливання
- ❑ Рух у центральному полі
- ❑ Зіткнення та розсіювання частинок
- ❑ Рух зі зв'язками. Рівняння Лагранжа першого роду
- ❑ Механіка Ейлера. Кінематичні величини та рівняння
- ❑ Механіка Ейлера. Динамічні величини та тензор інерції
- ❑ Динамічні рівняння Ейлера. Вільне обертання

ЛЕКЦІЯ 1

Експериментальні основи класичної механіки. Закони Ньютона

1.	Предмет та задачі класичної механіки.	15
2.	Матеріальна точка.	17
3.	Взаємодія, сила.	18
4.	Повна система операціональних величин.	19
5.	Перший закон Ньютона.	21
6.	Другий закон Ньютона.	21
7.	Третій закон Ньютона.	22
8.	Наслідки законів Ньютона.	23
9.	Принцип суперпозиції сил.	23
10.	Наслідки з принципу суперпозиції.	24
11.	Механічний стан матеріальної точки.	25
12.	Принцип відносності Галілея.	25
13.	Рух частинки у електромагнітному полі (приклад).	27
14.	Форми представлення швидкості та прискорення.	30

1. ПРЕДМЕТ ТА ЗАДАЧІ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ. Класична механіка як самостійний розділ теоретичної фізики виникла у XVII столітті (в першу чергу цьому сприяли дослідження Галілея та Гука), і остаточну форму отримала завдяки роботі Ньютона “Математичні начала натуральної філософії”, одночасно з появою диференціального та інтегрального числення (її математичного апарату). Французькі математики Лагранж, Пуассон, німець Якобі та британець Гамільтон збагатили ньютонівську теорію ідеями, які надали їй значення, універсального для всієї фізики. Весь подальший розвиток теоретичної фізики відбувався під сильним впливом логічної структури та можливостей аналітичного апарату механіки¹.

Теоретична фізика як інструмент опису та пізнання об’єктивної реальності оперує з абстрактними універсальними поняттями “простору”, “часу”, “руху” та багатьох інших абстрактних категорій, які не можуть бути означені її засобами і є предметом розгляду філософії.

Залежно від прийнятої філософської концепції можна по-різному означити предмет класичної механіки та її задачі. Прийнемо просте, інтуїтивно зрозуміле для фізика означення:

Класична механіка є розділом теоретичної фізики, у якому вивчається механічний рух матеріальних тіл та їх взаємодії.

¹ Існує багато джерел з історії класичної механіки. автори рекомендують ознайомитись принаймні зі стислим оглядом у додатку в книзі [17].

Матерія є формою об'єктивної реальності, яка дається нам у відчуттях (за допомогою приладів, чи без них). Матерія існує у *просторі* та *часі*. Простір визначає порядок розташування окремих матеріальних об'єктів, а час — порядок їх зміни. Під *механічним рухом* розуміється зміна з часом просторового положення, деформації, або іншої просторової характеристики матеріальних об'єктів. Це найпростіша форма руху, у деякому сенсі можна сказати, що рух поєднує простір та час.

Матерія може існувати у двох формах — як *речовина* або *поле*. Історично ці форми існування вважались взаємовиключними і протиставлялись одна іншій. Речовина описує дискретні просторові характеристики розподілу матерії у просторі, а поле — неперервні. Згідно з концепцією класичної фізики, поле переносить взаємодію між матеріальними тілами (об'єктами речовини чи полями), має хвильову природу за способом поширення у просторі. Поле породжується речовиною², але не навпаки — класичний зв'язок цих протилежних понять не є симетричним.

Зауваження. У сучасній фізиці протиставлення речовини та поля як діалектичних протилежностей розмивається. Зараз прийнято вважати, що речовина та поле складаються з фундаментальних частинок, природа яких має як характеристики речовини (частинкоподібні), так і поля (хвильові). Речовину та поле можна описати як утворення елементарних об'єктів з різним складом. Крім того, матерія у формі речовини може переходити у матерію у формі поля і навпаки. ┘

Під *взаємодією* двох матеріальних тіл у класичній механіці розуміють причину зміни їх механічних рухів. Якщо механічний рух не змінюється, то взаємодія відсутня.

Предметом класичної механіки є вивчення механічного руху об'єктів речовини (крім елементарних частинок). Поле вважається зовнішнім щодо класичної механіки об'єктом.

Для дослідження механічного руху приймаються наступні припущення:

- 1) *простір* — евклідовий і тривимірний, з фізичного боку є причини розгляду саме такого простору³;
- 2) *час* — абсолютний (закон його зміни не залежить від інших факторів, зокрема від точки простору);
- 3) *об'єктом дослідження є речовина*;
- 4) *вплив одного матеріального тіла на інше має характер взаємодії*, поняття взаємодії відноситься тільки до об'єктів речовини;
- 5) *дія поля на речовину є односторонньою*, поле впливає на рух речовини, але не навпаки — речовина не змінює стану поля (який вважається заданим). Таке спрощення не є джерелом суперечностей, коли дія поля на речовину достатньо слабка і воно мало впливає її внутрішню структуру.

² У деякому розумінні поле можна назвати джерелом інформації про матеріальні об'єкти, які його породжують.

³ Такою причиною можна вважати перший закон Ньютона — див. далі.

Зауваження. Термін “взаємодія” передбачає “бінарність”, або двоелементність. Випадки тринарної (трьохелементної) взаємодії типу $\langle \text{об'єкт } 1 \rangle \rightarrow \langle \text{об'єкт } 2 \rangle \rightarrow \langle \text{об'єкт } 3 \rangle$, або дії сил більш високої кратності, у класичній механіці не розглядається. \perp

Закони класичної механіки виконуються в межах, де поле мало впливає на внутрішній стан речовини. Такі обмеження не можна сформулювати в рамках класичної механіки, вони даються більш загальними теоріями, що вивчають взаємний вплив речовини та поля. Найбільш суттєвими є просторові обмеження на розміри системи: характерні довжини l повинні бути значно більшими за розміри атомів l_{atom} (встановлюється квантовою механікою), але значно меншими за характерні астрономічні масштаби l_{astr} (вимагається загальною теорією відносності):

$$l_{atom} \ll l \ll l_{astr}.$$

Порушення однієї з цих вимог приведе до зміни моделі матеріального об'єкту та способу опису його руху.

Крім обмеження на просторові масштаби існує також обмеження на характерні швидкості v матеріальних об'єктів (встановлюється спеціальною теорією відносності):

$$v \ll c, \quad c — \text{швидкість світла.}$$

У випадку порушення цієї вимоги час перестає бути абсолютним і закон, за яким він змінюється, слід розглядати у комплексі зі змінами просторових характеристик системи.

2. МАТЕРІАЛЬНА ТОЧКА. Модельним елементарним об'єктом класичної механіки є *матеріальна точка*, або *частинка*⁴ — безструктурний об'єкт малих розмірів (порівняно з характерними просторовими масштабами системи). Аналіз сукупності експериментальних даних (який проводився з часу виникнення класичної механіки) показує, що матеріальна точка характеризується такими величинами:

- *ідентифікатором*⁵ — “номером”, або “ім'ям” — для того, щоб відрізнити від інших матеріальних точок;
- *положенням* у просторі;
- *моментом часу* даного положення;

Як ідентифікатор (“номер”, “ім'я”) частинки може виступати деяка її фізична характеристика, вона дозволяє однозначно ідентифікувати частинку. Вимірювання цієї характеристики не повинне впливати на механічний рух частинки. Крім того, частинки можна відрізнити за малюнком, формою, кольором тощо.

Усі величини, необхідні для опису матеріальної точки можна розбити на два класи:

- **операціональні**, які вимірюють експериментально шляхом порівняння з еталоном згідно із заданою *операцією вимірювання*. Наприклад, радіус-вектор \vec{r} , який вимірюється по проєкціях на осі обраної системи координат, та час t , що вимірюється годинником;

⁴ Ці терміни в межах класичної механіки вживаються як синоніми.

⁵ Цей термін не є загальноприйнятим, ми обрали його через відсутність кращого.

- **формально-логічні**, які обчислюють з операціональних за допомогою математичних операцій. Наприклад,

$$\text{швидкість} \quad \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{прискорення} \quad \vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \text{і т. д.}$$

Швидкість є найпростішою мірою механічного руху частинки, її зміна викликається взаємодією з іншими матеріальними об'єктами.

Зауваження. У класичній механіці похідну по часу прийнято позначати крапкою зверху символу функції (традиція бере початок від Ньютона). ┘

Для опису положення частинки необхідно ввести систему координат, пов'язавши її початок з деякою точкою у просторі і спрямувавши три її осі на деякі матеріальні об'єкти, що не лежать на одній прямій з початком. Положення матеріальної точки задається вектором \vec{r} , проведеним з початку координат. Такий вектор називається *радіус-вектором* точки. Довжини, пов'язані з положенням частинки вимірюють шляхом порівняння з еталоном. Зараз як еталон використовують 1 метр, що дорівнює 1650763.73 довжинам хвиль випромінювання у вакуумі при переході між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ атома ^{86}Kr . Напрямні кути радіус-вектора відносно осей вимірюються геометричними методами за допомогою світлових променів.

Час t є скалярною величиною і описує причинні зв'язки між подіями (поняття “перед” та “після”). Він вимірюється *годинником*, принцип дії якого базується на порівнянні тривалості даного процесу з еталоном, в якості якого береться стандартний періодичний процес, який легко відтворювати (сталій період і є мірою часу). Спочатку еталоном служив макроскопічний рух маятника, потім період малих коливань кристалу кварцу, і, нарешті, в наш час, застосовуються мікроскопічні рухи — коливання ядер (атомні годинники). Одиницею вимірювання часу є *секунда*, яка дорівнює 9 192 631 770 періодам випромінювання атому ^{133}Cs при переході між двома рівнями надтонкої структури його основного стану (такі виміри проводяться методами радіоспектроскопії з високою точністю).

Система координат із заданими процедурами вимірювання часу та довжин називається *системою відліку*. Відмітимо, що еталони довжини та часу є незалежними. Часто початок координат пов'язують з матеріальним тілом, яке називається *тілом відліку*.

3. Взаємодія, сила. Міра взаємодії між тілами визначається іншою, незалежною від координат та часу характеристикою — *силою*, вимірювання якої задається спеціальним еталоном. Наприклад, динамометром, який є пружиною на стержні з мітками її довжини. Величина сили вважається пропорційною величині її розтягу, а напрямок визначається орієнтацією стержня.

Із властивостей еталона випливає, що сила є векторною величиною, тобто крім значення характеризується також напрямком. Взаємодія матеріальної точки з іншими тілами проявляється у зміні координат та швидкостей з часом. Відмітимо, що з часом змінюються всі похідні радіус-вектора $\ddot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{r}}$ тощо, але, як буде показано далі, величини \vec{r} та $\dot{\vec{r}}$ у деякому розумінні фізично незалежні. Сила є новою операціональною величиною, фізично відмінною від означених раніше. Якщо на

частинку діє кілька об'єктів, то їх спільну дію можна описати сумарною силою — вона є вектором, який є сумою векторів окремих сил. Для системи N частинок сила, яка діє на i -ту частинку з боку інших має вигляд:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij},$$

де \vec{F}_{ij} — сила, яка діє на i -ту частинку з боку j -ї. Зауважимо, що доданок \vec{F}_{ii} відсутній — частинка сама на себе не діє.

Зауваження. У класичній механіці відсутня самодія елементарного об'єкту (матеріальної точки), але для складного об'єкту, який можна розбити на елементарні, таку взаємодію можна означити. Наприклад, у класичній електродинаміці є випадки самодії: елементарним об'єктом магнітостатики є замкнений струм, елементи якого взаємодіють між собою (але вони не є базовими об'єктами). Самодію також означено для заряду, що рухається з прискоренням — під час руху він створює електромагнітне поле, яке потім діє на цей самий заряд (джерело поля), гальмуючи його. Відповідна сила називається силою променевого тертя. ┘

Походження сил має немеханічну природу. Будь-яку взаємодію між матеріальними тілами можна звести до чотирьох базових типів⁶: *сильна взаємодія* (короткодіючі ядерні сили), *слабка* (специфічна взаємодія елементарних частинок), *електромагнітна* та *гравітаційна*⁷.

Матеріальний об'єкт може взаємодіяти з іншим об'єктом, або полем, причому перенесення самодії здійснюється полем, що розподілено у просторі. Поля є немеханічними об'єктами, тому вирази для сил взаємодії вважаються відомими і запозичуються з електродинаміки, теорії гравітації або фізики елементарних частинок.

4. Повна система операціональних величин. Для опису механічної системи необхідно задати *повну* систему незалежних операціональних величин⁸. Повнота системи означає, що *всі інші* механічні характеристики системи повинні розглядатись як формально-логічні (незважаючи на те, що їх також можна вимірювати), а незалежність полягає у тому, що жодну величину такої системи не можна формально виразити через інші величини, і всі вони *фізично* незалежні (експериментальні процедури їх вимірювання — різні). Ці величини включають найбільш суттєву інформацію про систему (точніше про її механічні характеристики), часто кажуть, що вони визначають її стан.

⁶ Зокрема, сили тертя мають електромагнітну природу, вони зумовлені молекулярною структурою поверхонь, що дотикаються. Причина утворення цих сил полягає в виникненні та розриві зв'язків у зонах контакту під час їх відносного руху.

⁷ Зараз (за станом на 2010 рік) можна говорити вже про три типи самодії, в 1970-і роки С. Вайнбергом, А. Саламом та С. Глешоу побудовано теорію, що об'єднує слабку та електромагнітну взаємодію. Це дало новий поштовх до побудови теорій великого об'єднання, пошук яких почався роботами А. Ейнштейна.

⁸ Зауважимо, що у квантовій механіці є аналогічна структура — повна система комутуючих спостережуваних.

У класичній механіці повна система операціональних величин матеріальної точки складається із:

- 1) *ідентифікатора* (базова характеристика, включає операцію його нанесення та зчитування);
- 2) *системи відліку* (базова характеристика, включає операцію побудови);
- 3) *координати* \vec{r} (кінематична характеристика, включає операцію вимірювання та еталон);
- 4) *часу* t (кінематична характеристика, включає операцію вимірювання та еталон);
- 5) *сили* \vec{F} (динамічна характеристика, включає операцію вимірювання та еталон).

Згідно з процедурою їх введення, ці величини є незалежними і жодного логічного зв'язку між ними немає. Якщо він виявиться на експерименті, то цей зв'язок буде *законом природи*.

Основною задачею класичної механіки є дослідження руху системи. Для того, щоб його описати, потрібно перелічити всі допустимі набори значень величин повної системи операціональних величин. Оскільки у більшості випадків досліджується еволюція системи у часі, то розглядаються значення координат та інших операціональних величин у всі можливі моменти часу (який набуває послідовних значень з деякого інтервалу). Формально йдеться про послідовні вимірювання координати та сили у різні моменти часу і побудову відповідних функцій, заданих таблично. Для неперервних вимірів набори значень (\vec{r}, t, \dots) утворюють функції $\vec{r}(t), \dots$. Функція $\vec{r}(t)$ називається *траєкторією* матеріальної точки.

У деяких випадках повний набір операціональних величин можна замінити на інший (еквівалентний), далі так і буде зроблено. Вибір системи операціональних величин в основному визначається можливостями їх експериментального вимірювання. Але дві величини, а саме система відліку та ідентифікатор, завжди є операціональними величинами, оскільки вони визначають контекст для побудови решти операціональних величин — координат, часу та сили.

Зауваження*. Розглянемо детальніше один із способів заміни системи операціональних величин. Формально-логічні величини A задаються за допомогою явних аналітичних виразів типу $A = \varphi(B)$, в яких над операціональними величинами B здійснюються математичні операції. Наприклад, означення швидкості через координати та час має вигляд $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$. Якщо перейти у таких формулах до обернених співвідношень $B = \varphi^{-1}(A)$, то величини B , які були спочатку операціональними, будуть виражені через формально-логічні величини A , наприклад, координати можна виразити через швидкості та час як $\vec{r} = \int \vec{v} dt$.

Якщо ж існує процедура вимірювання формально-логічних величин A , то можна означити новий спосіб опису системи, де A — операціональні величини, а B — формально-логічні, які визначаються формулою $B = \varphi^{-1}(A)$. Для швидкості так робити недоцільно, оскільки важко вказати зручну операцію її вимірювання.

Підкреслимо, що система відліку фігурує у неявному вигляді у співвідношеннях типу $A = \varphi(B)$, тому що визначає контекст означення операціональних величин. Однак не існує аналітичного виразу, з якого можна виразити “систему відліку” через щось інше. Те саме стосується ідентифікатора. ┘

Передбачення значень операціональних величин (законів їх зміни з часом) належить до основних задач класичної механіки.

5. ПЕРШИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. Згідно з означенням взаємодії, вона є причиною зміни швидкості матеріальної точки, а її кількісною мірою є сила.

У випадку великого віддалення матеріальної точки від джерел сил можна вважати, що матеріальна точка є *вільною* і на неї не діють сили, тому її швидкість не повинна змінюватись. Якщо за відсутності сил це порушується, то слід вважати, що причиною такої зміни є невдало вибрана система відліку⁹. Система відліку, у якій вільна матеріальна точка рухається зі сталою швидкістю називається *інерціальною*. Для побудови такої системи відліку потрібна вільна матеріальна точка, що вибирається як тіло відліку. Для перевірки того факту, що обране тіло відліку є вільною матеріальною точкою потрібно виміряти її швидкість, що вимагає задання іншої інерціальної системи відліку і т. д.

Розірвати це логічне коло математичними чи фізичними засобами неможливо, тому доводиться це зробити за допомогою *експериментально обгрунтованого постулату* — *першого закону Ньютона*:

Існують інерціальні системи відліку, у яких вільна матеріальна точка рухається прямолінійно та рівномірно, або перебуває у стані спокою.

Переміщення матеріальної точки може бути пов'язане з рухом системи відліку, тому завжди можна знайти систему відліку, у якій вільна матеріальна точка нерухома.

Зауваження*. Як показує детальний аналіз, умова інерціальності системи відліку потрібна для виконання основних припущень, покладених у основу класичної механіки. У таких системах відліку час є однорідним, а простір — однорідним та ізотропним. Якщо на тіло відліку діють сили, то ці властивості втрачаються, у просторі з'являються виділені напрямки, а час змінюється нерівномірно (відносно тіла відліку та зв'язаного з ним спостерігача). ┘

6. ДРУГИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. Операціональні величини з повної системи можна розбити на дві групи: кінематичні (3 та 4) та міра взаємодії 5 в системі 2 для тіла 1 (величини 1 та 2 є допоміжними). Як було відмічено вище, ці групи незалежні між собою, між ними не існує ніякого *логічного* зв'язку, оскільки операції їх вимірювання є абсолютно різними. Якщо зв'язок між ними існує, то він може мати тільки емпіричне походження та пов'язуватиме геометричні величини із мірою взаємодії (силою).

Такий зв'язок дійсно існує, він встановлений експериментально, виконується для всіх явищ, які відносяться до області застосовності класичної механіки і формулюється у вигляді *другого закону Ньютона*. Згідно з цим законом, прискорення матеріальної точки у інерціальній системі відліку пропорційне до прикладеної сили зі сталим коефіцієнтом:

$$\ddot{\vec{r}} = \alpha \vec{F}(t, \vec{r}, \dots),$$

⁹ Так може бути внаслідок нерівномірного руху початку системи відліку або обертання її осей.

де сила \vec{F} залежить від геометричних операціональних характеристик частинки (часу t , координати \vec{r}), формально-логічних величин, які утворюються з них (наприклад, швидкості \vec{v}), зовнішніх факторів (властивостей джерела сили), що виражається в явній залежності сили від часу. Величина α виявляється однаковою для одного і того самого тіла, на яке діють сили, утворені різними джерелами. Це означає, що стала α є індивідуальною характеристикою цього тіла.

Вводячи перепозначення $\alpha = \frac{1}{m}$, запишемо другий закон Ньютона у формі ¹⁰:

У інерціальній системі відліку прискорення матеріальної точки пропорційне до прикладеної сили зі сталим коефіцієнтом:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dots) \quad (\text{II закон Ньютона}). \quad (1.1)$$

Коефіцієнт пропорційності $m \neq m(t, \vec{r}, \dots)$ є сталою величиною і називається *інертною масою* (матеріальна точка безструктурна, всередині неї немає нічого, що може змінити її характеристики, тому $m = \text{const}$). Часто кажуть, що маса є мірою інертності тіла, це означає, що при дії однакових сил тіло з більшою масою отримає менше прискорення (тобто є більш інертним)¹¹.

Маса вводиться в механіку за допомогою другого закону Ньютона, який узагальнює експериментальні дані. На вираз (1.1) можна дивитись інакше — як на означення сили через прискорення та масу, якщо останню вважати операціональною величиною. З суто практичних міркувань масу дійсно зручніше вибрати незалежною операціональною величиною замість сили, по двох причинах: маса є скаляром (одна величина замість трьох компонент сили), і операція вимірювання маси така сама — вона проводиться порівнянням дії на еталон сили (пружину) даної маси та еталонної. Крім того, маса є індивідуальною характеристикою частинки.

Зауваження. Другий закон Ньютона жодним чином не визначає характеру аргументів сили. Взагалі, крім положення частинки, сила може залежати від її швидкості, прискорення та вищих похідних. Те, що другий закон Ньютона є диференціальним рівнянням саме другого порядку, визначається іншими експериментальними законами (див. далі).
┘

Зауваження. Із означення сили та формулювання другого закону Ньютона та означення сили можна зрозуміти, яку роль відіграє перший закон Ньютона. Від дозволяє виділити систему відліку, у якій можна точно сказати, діють на дану частину сили чи ні. Якщо такої системи не існує, то у означенні сили (і у формулюванні закону, за яким сила змінює рух частинки) не було б жодного сенсу.
┘

¹⁰ У формулюванні (1.1), як і у будь-якому виразі, система відліку як операціональна величина присутня за замовчуванням. Далі цей факт явно підкреслюватись не буде.

¹¹ Означення маси як частки від ділення сили на прискорення належить Маху (воно не спирається на розмите формулювання “кількість речовини”). Взагалі поняття маси є досить складним для означення, детальніше про це див. [22]

7. ТРЕТІЙ ЗАКОН НЬЮТОНА уточнює характер взаємодії:

Сили взаємодії двох матеріальних точок напрямлені вздовж прямої, що з'єднує матеріальні точки, рівні за величинами та протилежні за напрямками:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (1.2)$$

(тут \vec{F}_{21} позначає силу дії першої частинки на другу, \vec{F}_{12} — навпаки)¹². Відмітимо, що рівність (1.2) справедлива для одного й того самого моменту часу в аргументах сил у обох частинах рівності.

Третій закон Ньютона є найбільш обмеженим у контексті самої механіки, оскільки він стосується по-перше, тільки взаємодії матеріальних точок, і по-друге — тільки *механічних* (або *ньютонівських*) сил, що визначаються геометричними характеристиками частинки, часом та масою. Він може порушуватись, якщо взаємодія між частинками залежить від інших, немеханічних, параметрів (наприклад, заряду, або квантовомеханічного спіну) і принципово не виконується для взаємодії частинки із зовнішнім полем, оскільки така дія для механіки вважається односторонньою — поле діє на частинку, а не навпаки.

Зауваження. У класичній електродинаміці третій закон Ньютона порушується при взаємодії елементів струму: при деяких орієнтаціях елементів струму вектори \vec{F}_{12} та \vec{F}_{21} утворюють пару сил (не належать одній прямій, часткове порушення), а для деякого розміщення може виявитись так, що $\vec{F}_{12} = 0$ при $\vec{F}_{21} \neq 0$ (повне порушення). Для замкнених струмів сили обчислюються як сумарні сили взаємодії елементів, справедливості третього закону Ньютона відновлюється. ┘

8. НАСЛІДКИ ЗАКОНІВ НЬЮТОНА.

Наслідок 1.1. (з III закону) З III закону випливає інформація про напрямки та симетрія аргументів сили взаємодії:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} f(t, \vec{r}_{12}, \dots), \quad f - \text{скаляр}, \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad (1.3)$$

причому після заміни частинок місцями (перестановка $1 \leftrightarrow 2$) множник f не змінюється. Сила механічної взаємодії двох матеріальних точок є центральною і визначається їх геометричними характеристиками.

Наслідок 1.2. (З III закону, принцип далекодії) У III законі Ньютона рівність сил виконується в один і той самий момент часу, незалежно від відстані між об'єктами. Це означає, що у класичній механіці взаємодії, які описуює III закон Ньютона, поширюються миттєво.

9. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ СИЛ є експериментальним фактом, що уточнює поняття “взаємодії”. Його можна сформулювати так:

¹² За Ньютоном: *actio est reactio*, незважаючи на афоризматичність це формулювання неважко, оскільки не містить чіткої інформації про напрямки.

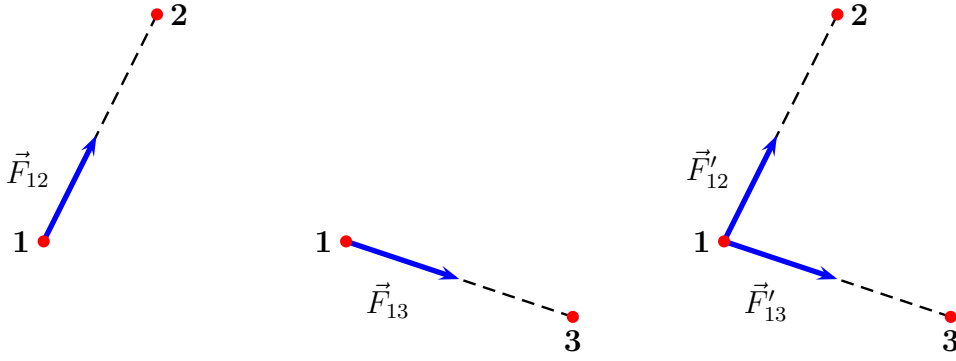


Рис. 1.1. Принцип суперпозиції сил: системи 1 + 2, 1 + 3 та 1 + 2 + 3.

Сила взаємодії двох матеріальних точок не залежить від наявності інших матеріальних точок.

Це твердження у розширеній формі можна переформулювати так (див. рис. 9). Нехай задано ізольовану систему двох матеріальних точки 1 та 2, на точку 1 з боку точки 2 діє сила \vec{F}_{12} . У ізольованій системі точок 1 та 3 на точку 1 діє сила \vec{F}_{13} . Принцип суперпозиції стверджує, що у системі точок 1, 2 та 3 з тією самою просторовою конфігурацією сили \vec{F}'_{12} та \vec{F}'_{13} , які діють на точку 1 з боку точок 2 та 3 будуть такими самими, як і в ізольованих системах з точок 1 та 2, і 1 та 3:

$$\vec{F}'_{12} = \vec{F}_{12}, \quad \vec{F}'_{13} = \vec{F}_{13}. \quad (1.4)$$

Зауваження. У літературі принцип суперпозиції сил інколи формулюється як правило побудови сумарної сили, $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ (розуміючи термін “суперпозиція” як “сума”). Насправді це і так очевидно з властивостей еталону сили. Формулу із сумою сил слід розуміти так: сила, що діє на частинку з боку інших тіл є сумою сил, які є силами взаємодії частинки з кожним тілом за відсутності інших тіл. ┘

10. Наслідки з принципу суперпозиції. З формулювання принципу суперпозиції безпосередньо впливає характер аргументів сили взаємодії: аргументами сили у II законі Ньютона є операціональні та формально-логічні геометричні характеристики матеріальної точки — координати \vec{r} , час t , швидкості \vec{v} тощо. У контексті цього закону формально не можна назвати загальні причини, які визначають залежність (чи незалежність) сили від вищих похідних радіус-вектора. Такі обмеження накладає принцип суперпозиції:

Наслідок. Сили, для яких виконується принцип суперпозиції, не можуть залежати від прискорення матеріальної точки.

□ Доведемо від оберненого. Припустимо, що сила залежить від прискорення матеріальної точки, тобто $\vec{F} = \vec{F}(\vec{a})$. Розглянемо частинку маси m , на яку діють однотипні матеріальні точки, з однаковим характером взаємодії. Для спрощення вважатимемо задачу одновимірною. Згідно з другим законом Ньютона, під дією окремо взятого тіла 1 частинка набуває прискорення: $a_1 = \frac{1}{m} F_1(a_1)$, аналогічно, під дією тіла 2 прискорення частинки буде $a_2 = \frac{1}{m} F_2(a_2)$. Якщо тіла 1 та 2 діють на частинку одночасно з тією самою геометричною конфігурацією, то вона матиме прискорення $a = \frac{1}{m} F(a)$. Згідно з принципом суперпозиції та властивостями адитивності сила дії буде сумарною, $a = F(a) = F_1(a_1) + F_2(a_2)$.

У силу попередніх рівностей це автоматично означає, що $a = a_1 + a_2$. Характер взаємодії зберігається, тому $F(a) = F_1(a) + F_2(a)$ (правило додавання), звідки:

$$F_1(a_1 + a_2) + F_2(a_1 + a_2) = F_1(a_1) + F_2(a_2).$$

Цей вираз є рівністю функцій. Очевидно, якщо функції рівні, то їх значення для всіх можливих аргументів будуть однаковими. Якщо це порушується хоча б для одного значення аргументу, то висновок про рівність функцій неправильний. Остання рівність є суперечливою за винятком випадку $F(a) \equiv \text{const}$. Дійсно, формально поклавши $a_1 = 0$, отримаємо $F_1(a_2) = F_1(0)$, тобто F_1 не залежить від свого аргументу (яким би він не був). ■

Зауваження*. Інший спосіб отримання суперечності полягає у побудові розкладу Тейлора по одному з прискорень, наприклад по a_2 . Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо рівність нулю всіх похідних $F_2^{(n)}(a_1)$ при $n \neq 0$, що доводить незалежність сили від прискорення. ┘

Зауваження. Довести незалежність ньютонівської сили від третьої похідної радіус-вектора та похідних більш високих порядків складніше. Відмітимо, що за умови такої залежності порушується принцип причинності. Єдина сила, яка залежить від \vec{r} — це сила променевого тертя в електродинаміці; саме з нею і виникають суперечності з принципом причинності. ┘

З принципу суперпозиції та попереднього наслідку випливає, що

Сила механічної взаємодії між парою матеріальних точок може залежати тільки від їх координат та швидкостей (аргументи входять попарно):

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_j, t).$$

11. МЕХАНІЧНИЙ СТАН МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. Принцип суперпозиції визначає характер аргументів для широкого класу сил. Другий закон Ньютона для матеріальної точки можна тепер записати так:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Основне рівняння, що описує рух матеріальної точки є диференціальним рівнянням другого порядку, явним відносно старшої похідної.

Для формулювання закону руху достатньо знання координати та швидкості у деякий момент часу. Пара значень \vec{r} та $\dot{\vec{r}}$ називається *механічним станом* матеріальної точки в момент часу t . Задання цих величин достатньо для визначення довільної операціональної (крім системи відліку та ідентифікатора) та формально-логічної величини.

Основною задачею класичної механіки є пошук закону зміни механічного стану матеріальної точки з часом.

12. ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ ГАЛІЛЕЯ є узагальненням експериментальних фактів і формулюється так¹³:

¹³ Сформульований Галілеєм у 1636 році.

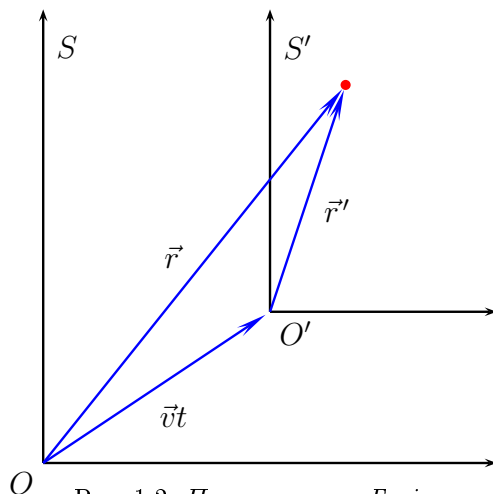


Рис. 1.2. Перетворення Галілея.

Усі механічні явища відбуваються однаково у всіх інерціальних системах відліку.

На математичному рівні це означає, що рівняння, які описують ці закони, не змінюють *форми* після переходу до іншої інерціальної системи відліку¹⁴.

Принцип відносності констатує, що всі інерціальні системи відліку, які існують згідно з першим законом Ньютона, є експериментально рівноправними для опису механічної системи. Жодними механічними дослідженнями не можна визначити, рухається дана інерціальна система відліку, чи ні. У силу еквівалентності інерціальних систем немає жодного сенсу виділяти одну з них як особливу (абсолютну, нерухому або за іншими ознаками), так можна робити у практичних застосуваннях винятково з міркувань зручності.

Зауваження. У ширшій за областю застосовності теорії відносності принцип Галілея замінюється на принцип Пуанкаре про інваріантність усіх фізичних явищ при переході до іншої інерціальної системи відліку. Перетворення Галілея переходить у більш загальне перетворення Лоренца, у якому накладається обмеження на швидкість частинки (всі можливі швидкості переміщення об'єктів обмежені швидкістю світла). ┘

Для математичного формулювання принципу Галілея розглянемо перетворення координат та часу, яке називається *перетворенням Галілея*:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \\ t' = t \end{cases} \quad (1.5)$$

де \vec{v} — сталий вектор. Перетворення (1.5) описує перехід від інерціальної системи відліку S до іншої інерціальної системи S' , яка рухається відносно S зі швидкістю \vec{v} . Тоді \vec{r} — радіус-вектор частинки у системі S , \vec{r}' — у системі S' , $\vec{v}t$ — вектор, який з'єднує початки координат систем S та S' (рис. 1.2).

Оскільки $\frac{d}{dt}(\dots) = \frac{d}{dt'}(\dots)$, то зв'язок швидкостей та прискорень у обох системах має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}' = \frac{d}{dt}\vec{r} - \vec{v}, \quad \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}' = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r},$$

¹⁴ У часи Галілея основні закони механіки у вигляді диференціальних рівнянь ще не були відомі.

тобто прискорення є інваріантними при переході до іншої інерціальної системи відліку.

Координати та швидкості не є інваріантними, однак у системі частинок відносні координати та швидкості не змінюються при переході до іншої системи відліку:

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}'_i - \vec{r}'_j, \quad \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j = \dot{\vec{r}}'_i - \dot{\vec{r}}'_j.$$

Таким чином, для перетворення Галілея інваріантними будуть відносні величини.

Оскільки при перетворенні Галілея другий закон Ньютона не повинен змінюватись за формою, то в силу незмінності прискорення це означає, що сила, яка діє на i -ту частинку у системі частинок є інваріантною:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}'_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}'_i.$$

Тому у системі частинок сила взаємодії частинок з номерами i та j залежить від інваріантних величин, тобто від відносних аргументів — координат та швидкостей:

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j, t) = \vec{F}_{ij}(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j, \dot{\vec{r}}'_i - \dot{\vec{r}}'_j, t'). \quad (1.6)$$

У результаті, отримаємо наслідок:

Ньютонівські сили взаємодії можуть залежати тільки від відносних координат, відносних швидкостей та часу.

13. РУХ ЧАСТИНКИ У ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ (ПРИКЛАДИ). Розглянемо приклади інтегрування тривимірних рівнянь руху для задачі руху частинки з зарядом e у зовнішньому електромагнітному полі. Дія поля описується силою Лоренца у правій частині рівнянь руху:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{H}(\vec{r}, t), \quad (1.7)$$

де \vec{E} , \vec{H} — напруженості електричного та магнітного полів, c — швидкість світла¹⁵.

Приклад 1. Дослідити рух частинки маси m з зарядом e у постійному електричному полі \vec{E} та знайти рівняння траєкторії.

◀ Рівняння руху має вигляд:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}.$$

Оскільки права частина є сталим вектором, то двічі інтегруючи, знайдемо

$$\vec{r}(t) = \frac{e\vec{E}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0,$$

де сталі інтегрування \vec{r}_0 та \vec{v}_0 мають зміст початкової координати та швидкості відповідно.

¹⁵ Тут використано систему одиниць Гаусса, у системі СІ швидкість світла у формулі (1.7) відсутня.

Рівняння можна проінтегрувати у проекціях на осі системи координат (у переважній більшості випадків саме так і доводиться робити). На початковому етапі аналізу задачі доцільно потрібно оптимально вибрати положення та орієнтацію системи координат, пов'язаної з інерціальною системою відліку. Вибір можна вважати вдалим, якщо проекції векторного рівняння зводяться до простих скалярних рівнянь, у розв'язках яких з'являється якомога менше сталих інтегрування. Для вибору системи координат потрібно зафіксувати положення початку та напрямки двох осей, не порушуючи інерціальності системи відліку. Для цього можна скористатись деякою виділеною точкою та сталими напрямками, якщо вони у задачі. Аналіз початкових даних та параметрів задачі у векторній механіці Ньютона слід проводити щоразу, перш ніж братись за розв'язування.

У даній задачі є виділений напрямок \vec{E} та два сталих вектори $\vec{r}(0)$ і $\dot{\vec{r}}(0)$. Фіксуємо положення початку координат вважаючи, що у початковий момент часу частинка перебувала у початку координат, тобто $\vec{r}(0) = 0$. Напрямок осі x виберемо вздовж сталого вектора \vec{E} , тепер $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Залишаються довільними напрямки ще двох осей, виконаємо поворот навколо вже фіксованої осі x так, щоб одна з компонент (y або z) початкової швидкості стала рівною нулю, нехай $\dot{z}(0) = 0$, тоді $\dot{\vec{r}}(0) = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y$. Проекції рівняння руху на осі вибраної системи координат мають вигляд:

$$m\ddot{x} = eE, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Розв'язки цих рівнянь тривіальні:

$$x(t) = \frac{eE}{2m}t^2 + v_{0x}t, \quad y(t) = v_{0y}t, \quad z(t) = 0.$$

Якщо виразити з другого рівняння час і підставляючи до першого, отримаємо рівняння траєкторії $x(y)$:

$$x = \frac{eE}{2mv_{0y}^2}y^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}}y.$$

Траєкторія буде параболою, що проходить через початок координат (побудова та аналіз графіка для різних початкових умов на напрямків електричного поля залишається як вправа). ►

Приклад 2. Дослідити рух частинки маси m з зарядом e у постійному магнітному полі \vec{H} та знайти рівняння траєкторії, якщо $\dot{\vec{r}}(0) \perp \vec{H}$.

◀ Виберемо систему координат так, що $\vec{r}(0) = 0$ (фіксуємо початок координат) і $\vec{H} = H\vec{e}_z$ (фіксуємо напрямок осі z), орієнтацію осей x та y поки залишимо довільною (зафіксуємо для спрощення відповіді¹⁶), при цьому $\dot{\vec{r}}(0) \cdot \vec{e}_z = 0$ згідно з умовою задачі. Векторне Рівняння руху частинки у магнітному полі має вигляд:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{H}.$$

Запишемо проекції цього рівняння на осі декартової системи координат. Оскільки у вибраних координатах

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{H} = (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \times H\vec{e}_z = \dot{y}H\vec{e}_x - \dot{x}H\vec{e}_y,$$

¹⁶ За аналогією з попередньою задачею зрозуміло, що для цього можна скористатись відомим вектором початкової швидкості.

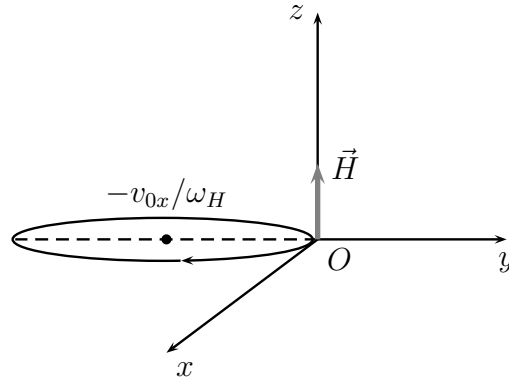


Рис. 1.3. Частинка у сталому магнітному полі.

то

$$m\ddot{x} = \frac{eH}{c} \dot{y}, \quad m\ddot{y} = -\frac{eH}{c} \dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Позначимо для скорочення $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ (комбінація розмірності частоти), тоді

$$\ddot{x} = \omega_H \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_H \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (1.8)$$

Останнє рівняння можна розв'язати одразу. Очевидно, $z(t) = v_{0z}t + z_0$ і у вибраній системі координат $z(t) = 0$.

Перші два рівняння потрібно розв'язувати як систему, це можна зробити кількома способами. Перший, найпростіший і універсальний підхід — запис системи у вигляді матричного рівняння зі сталими коефіцієнтами і підбір розв'язку у вигляді добутку сталого вектора на експоненту:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_H \\ -\omega_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{розв'язок:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

(зручно одразу записувати через комплексну експоненту). Такий підхід пропонується як вправа для читача.

Більш ефективним є інший спосіб, характерний саме для задач з магнітним полем. Він полягає у записі системи двох рівнянь відносно дійсних функцій x та y у вигляді одного рівняння відносно їх комплексної комбінації

$$\xi = x + iy,$$

після того, як залежність $\xi(t)$ знайдено, координати x та y можна отримати з очевидних рівностей $x = \text{Re } \xi$ та $y = \text{Im } \xi$. Для отримання рівняння на змінну ξ з системи рівнянь

$$\ddot{x} = \omega_H \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_H \dot{x},$$

додамо до першого рівняння друге, домножене на i , тоді

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_H (\dot{y} - i\dot{x}) = -i\omega_H \dot{\xi},$$

звідки

$$\ddot{\xi} + i\omega \dot{\xi} = 0. \quad (1.9)$$

Розв'язок рівняння (1.9) знаходимо у стандартному вигляді $\xi(t) = Ae^{\lambda t}$, підстановка дає характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + i\omega_H \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -i\omega_H,$$

тому загальний розв'язок має вигляд

$$\xi(t) = A_1 + A_2 e^{-i\omega_H t},$$

де $A_{1,2}$ — комплексні сталі, які визначаються початковими умовами. Початкові умови зручно підставити для змінної самої ξ , використовуючи її означення:

$$\xi(0) = x(0) + iy(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) \equiv v_{0x} + iv_{0y},$$

тоді

$$\begin{cases} \xi(0) = x(0) + iy(0) = A_1 + A_2 = 0, \\ \dot{\xi}(0) = -i\omega_H A_2 = v_{0x} + iv_{0y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{v_{0x} + iv_{0y}}{i\omega_H} = \frac{v_{0y} - iv_{0x}}{\omega_H} \\ A_2 = -A_1 \end{cases}$$

звідки

$$\xi(t) = \frac{v_{0y} - iv_{0x}}{\omega_H} (1 - e^{-\omega_H t}).$$

Обчислюючи дійсну та уявну частини, знайдемо дійсні координати:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} \xi(t) = \frac{1}{\omega_H} [v_{0y}(1 - \cos \omega_H t) + v_{0x} \sin \omega_H t], \\ y(t) &= \operatorname{Im} \xi(t) = \frac{1}{\omega_H} [v_{0y} \sin \omega_H t - v_{0x}(1 - \cos \omega_H t)]. \end{aligned}$$

Для запису рівняння траєкторії зручно вибрати координати так, що $v_{0y} = 0$, тоді $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$, функції $x(t)$ та $y(t)$ можна переписати, окремо виділяючи тригонометричні функції:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_H} \sin \omega_H t \\ y = \frac{v_0}{\omega_H} (\cos \omega_H t - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_H} \sin \omega_H t \\ y + \frac{v_0}{\omega_H} = \frac{v_0}{\omega_H} \cos \omega_H t \end{cases}$$

Виключимо час, додаючи квадрати останніх рівнянь, отримаємо:

$$x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega_H}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_H}\right)^2,$$

траєкторія є колом з центром у точці $(0, -v_0/\omega_H)$, яке проходить через початок координат (рис. 1.3, де зображено випадок $v_0 > 0$). ►

Задача 1.1. Дослідити рух частинки у сталих електричному та магнітному полі. Початкова швидкість перпендикулярна до напрямку магнітного поля.

14. ФОРМИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ШВИДКОСТІ ТА ПРИСКОРЕННЯ. Незважаючи на формально-логічне означення, швидкість $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ відіграє важливу роль у класичній механіці і описує міру зміни положення матеріальної точки з часом. Вектор \vec{v} напрямлений по дотичній до траєкторії $\vec{r}(t)$. Розглянемо різні способи опису вектора швидкості залежно від вибору системи координат.

Приклад 3. Швидкість та прискорення у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК).

◀ У ПДСК радіус-вектор можна задати розкладом по глобальному базису:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

Оскільки базисні вектори є сталими, то компоненти швидкості будуть похідними координат по часу:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z, \quad \text{або} \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z},$$

аналогічно для вектора прискорення отримаємо:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z, \quad \text{або} \quad a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}$$

(вищі похідні також будуть простими похідними радіус-вектора). ▶

Приклад 4. Швидкість та прискорення у циліндричній системі координат (ЦСК).

◀ Радіус-вектор можна задати розкладом по локальному базису:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$$

положення частинки визначається циліндричними координатами r , φ та z . На відміну від випадку декартових координат, у ЦСК базисні вектори є змінними величинами і залежать від координат, тому для обчислення швидкості їх потрібно диференціювати по часу як складні функції. Знайдемо спочатку похідні базисних векторів, попередньо розкладаючи їх по декартовому базису:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi, \quad \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z.$$

Тоді, вважаючи, що циліндричні координати є функціями часу, отримаємо:

$$\dot{\vec{e}}_r = (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -(\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{\vec{e}}_z = 0,$$

або

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r, \quad \dot{\vec{e}}_z = 0.$$

В результаті,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) = (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r) + (\dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z.$$

Компоненти швидкості можна отримати множенням обох частин на вектори базису циліндричної системи координат, тобто $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Аналогічно обчислюється прискорення як повторна похідна від швидкості:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z,$$

або

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}$$

(останній вираз збігається з ньютонівським прискоренням). ▶

Зауваження. Компоненти швидкості та прискорення можна знайти іншим способом, не диференціюючи вектори базису циліндричної системи координат. Для цього потрібно знайти розклад швидкості по декартовому базису (він є сталим), але компоненти виразити через циліндричні координати. Потім скористатись прямим означенням — для пошуку компонент у ЦСК вектор \vec{v} (вже розкладений у декартовому базисі) потрібно домножити на відповідний вектор базису ЦСК. Наприклад,

$$v_r = \vec{e}_r \cdot (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z).$$

Підставляючи $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ та $z = z$, та формулу для розкладу \vec{e}_r по декартовому базису, отримаємо

$$v_r = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \cos \varphi + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \sin \varphi = \dot{r}.$$

Аналогічно можна знайти інші компоненти швидкості та прискорення. \square

Задача 1.2. Знайти компоненти швидкості та прискорення у ЦСК способом, вказаному у зауваженні.

Приклад 5. Швидкість та прискорення у сферичній системі координат (ССК).

◀ Скористаємось тим же способом, що і для циліндричних координат. Радіус-вектор описується розкладом по локальному базису \vec{e}_r , \vec{e}_θ та \vec{e}_φ ,

$$\vec{r} = r\vec{e}_r,$$

і положення точки задається сферичними координатами r , θ , φ . Вектори базису ССК можна виразити через глобальний декартів базис:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{e}_x \cos \varphi \sin \theta + \vec{e}_y \sin \varphi \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_x \cos \varphi \cos \theta + \vec{e}_y \sin \varphi \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta \\ \vec{e}_\theta &= -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi,\end{aligned}$$

диференціювання по часу дає:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta.$$

Тому для швидкості отримаємо:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

або

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}. \quad (1.10)$$

Аналогічно для прискорення:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2]\vec{e}_\theta \\ &\quad + [r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta]\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta,\end{aligned}$$

це і є остаточні формули для прискорення. ►

Задача 1.3. Знайти компоненти швидкості та прискорення у ССК способом, вказаним у задачі 1.2.

Приклад 6. Швидкість та прискорення у довільній ортогональній криволінійній системі координат.

◀ Виведемо формулу для швидкості, розкладаючи базис криволінійної системи координат по декартовому. За означенням, базисні вектори мають вигляд:

$$\vec{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

де вважається, що декартові координати виражені через криволінійні:

$$\vec{r} = x(q)\vec{e}_x + y(q)\vec{e}_y + z(q)\vec{e}_z.$$

Пряме диференціювання радіус-вектора дає:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \sum_i \left(\vec{e}_x \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i + \vec{e}_y \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i + \vec{e}_z \frac{\partial z}{\partial q_i} \dot{q}_i \right).$$

Оскільки

$$H_i \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{e}_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + \vec{e}_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + \vec{e}_z \frac{\partial z}{\partial q_i},$$

то

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = H_i(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_i), \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = H_i(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_i), \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = H_i(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_i)$$

(суми по i немає), тому

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i H_i \dot{q}_i [(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z] \equiv \sum_i H_i \dot{q}_i \vec{e}_i,$$

і остаточно:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i H_i \dot{q}_i \vec{e}_i, \quad \text{або} \quad v_i = H_i \dot{q}_i.$$

Формулу для прискорення можна отримати диференціюванням швидкості по часу, для чого потрібно мати формули похідних базисних векторів по координатам, оскільки

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \frac{d\vec{e}_i}{dq_i} \dot{q}_i.$$

Для пошуку цих похідних запишемо градієнт рівняння $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ за допомогою стандартної тотожності:

$$0 \equiv \vec{\nabla}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \vec{e}_i \times \text{rot } \vec{e}_j + \vec{e}_j \times \text{rot } \vec{e}_i + (\vec{e}_i \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_j + (\vec{e}_j \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_i.$$

Потрібну похідну можна знайти з останніх двох доданків, у явній формі:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_j = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}, \quad (\vec{e}_j \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_i = \frac{1}{H_j} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}.$$

Виразимо один доданок через інший підстановкою означення базисного вектору:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_j = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = -\frac{\vec{e}_j}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} + \frac{1}{H_i H_i} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Міняючи місцями індекси та віднімаючи, знайдемо:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_j - (\vec{e}_j \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_i = \frac{1}{H_i H_j} \left(\vec{e}_i \frac{\partial H_i}{\partial q_j} - \vec{e}_j \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \right)$$

Доданки з роторами можна перетворити за допомогою явного виразу:

$$\text{rot } \vec{e}_i = \frac{\vec{\nabla} H_i \times \vec{e}_i}{H_i},$$

який можна отримати підстановкою формули $\vec{\nabla} q_i = \frac{\vec{e}_i}{H_i}$ у тотожність $\text{rot } \vec{\nabla} q_i = 0$. Тоді

$$\vec{e}_i \times \text{rot } \vec{e}_j = \delta_{ij} \frac{\vec{\nabla} H_j}{H_i} - \frac{\vec{e}_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i}.$$

Підстановка до тотожності $\vec{\nabla}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$ дає

$$0 = 2\delta_{ij} \frac{\vec{\nabla} H_j}{H_j} - \left(\frac{\vec{e}_j}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} + \frac{\vec{e}_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \right) + 2(\vec{e}_j \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_j - \left(\frac{\vec{e}_j}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} - \frac{\vec{e}_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \right),$$

або

$$(\vec{e}_j \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_j + \delta_{ij} \frac{\vec{\nabla} H_j}{H_j} - \frac{\vec{e}_j}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} = 0.$$

Враховуючи, що $\vec{e}_j \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{H_j} \frac{\partial}{\partial q_j}$, отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\vec{e}_j}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} - \delta_{ij} \vec{\nabla} H_j. \quad (1.11)$$

Формула для прискорення частинки має вигляд:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i (\dot{H}_i \dot{q}_i \vec{e}_i + H_i \ddot{q}_i \vec{e}_i + H_i \dot{q}_i \dot{\vec{e}}_i) = \sum_i H_i \ddot{q}_i \vec{e}_i + \sum_{i,j} \vec{e}_i \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial H_i}{\partial q_j} + \sum_{i,j} H_i \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}.$$

Підставляючи похідні (1.11), знайдемо після нескладних алгебраїчних перетворень:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{e}_i \left[H_i \ddot{q}_i + \sum_j \left(2\dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial H_i}{\partial q_j} - \dot{q}_i^2 \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \right) \right],$$

або, для компонент:

$$a_i = H_i \ddot{q}_i + \sum_j \left(2\dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial H_i}{\partial q_j} - \dot{q}_i^2 \frac{H_j}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \right).$$

►

Задача 1.4. Довести формулу для прискорення:

$$a_i = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right],$$

де $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ — швидкість частинки.

Задача 1.5. Знайти компоненти швидкості та прискорення у параболічних координатах u, v та φ

$$x = uv \cos \varphi, \quad y = uv \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

Приклад 7. Швидкість та прискорення у природних координатах.

◀ Якщо частинка рухається по кривій, то природною координатою для її опису є довжина дуги s вздовж кривої, у такій параметризації траєкторія дається векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Швидкість частинки можна обчислити за правилом диференціювання складної функції:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}.$$

Введемо локальний базис для розкладу векторів швидкості та прискорення. Вектор

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$$

напрявлений по дотичній до траєкторії в точці $\vec{r}(s)$ і має одиничну довжину. Оскільки $d\vec{r} = ds$, то вектор швидкості можна записати як

$$\dot{\vec{r}} = \vec{e}_1 \dot{s},$$

а прискорення можна знайти повторним диференціюванням цього виразу:

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{e}}_1 \dot{s} + \vec{e}_1 \ddot{s} = \dot{s}^2 \frac{d\vec{e}_1}{ds} + \vec{e}_1 \ddot{s}.$$

Для перетворення правої частини означимо ще два вектори базису. Диференціюючи тожність $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$ по параметру s , отримаємо:

$$\frac{d}{ds}(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} = 0, \quad \text{тому} \quad \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} = 0$$

і вектор $\frac{d\vec{e}_1}{ds}$ ортогональний до вектора \vec{e}_1 , тому останній можна вибрати в якості базисного вектора, нормуючи на одиницю:

$$\vec{e}_2 = R \frac{d\vec{e}_1}{ds} \equiv R(s) \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}, \quad \text{де} \quad \frac{1}{R(s)} = \left| \frac{d\vec{e}_1}{ds} \right|,$$

де число R називається *радіусом кривизни кривої*. У результаті, прискорення має вигляд:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{e}_1 \ddot{s} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)} \vec{e}_2.$$

Третій базисний вектор доповнює побудовані два до правої трійки і називається *вектором бінормалі*:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2.$$

Для повноти картини запишемо похідні базисних векторів \vec{e}_2 та \vec{e}_3 . Очевидно,

$$\frac{d\vec{e}_3}{ds} = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \times \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\vec{e}_2 \left(\vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} \right) = -\kappa \vec{e}_2$$

де число

$$\kappa(s) = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds}$$

називається *крученням кривої*. Аналогічно,

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{d\vec{e}_3}{ds} \times \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \times \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \kappa \vec{e}_3 - \frac{\vec{e}_1}{R}.$$

Співвідношення з похідними базисних векторів можна записати у вигляді одного рівняння, яке називається *рівнянням Френе*:

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i, \quad \text{де} \quad \vec{\omega} = \dot{s}(k\vec{e}_3 + \kappa\vec{e}_1), \quad k = \frac{1}{R}.$$

Рівняння Френе широко застосовуються у диференціальній геометрії для опису кривих у просторі. ►

Задача 1.6. Виразити вектори \vec{e}_i через явні похідні вектора $\vec{r}(s)$.

ЛЕКЦІЯ 2

Закони збереження у системі частинок

1.	Рівняння руху.	37
2.	Задача інтегрування рівнянь руху.	38
3.	Інтеграл руху.	39
4.	Пошук інтегралів руху у механіці Ньютона.	40
5.	Імпульс.	41
6.	Центр мас.	44
7.	Момент імпульсу.	45
8.	Класифікація сил.	46
9.	Енергія.	48
10.	Робота сил та потенціальна енергія.	50
11.	Теорема віріала.	51
12.	Висновки.	54
13.	Зміна інтегралів руху при перетворенні Галілея.	56
14.	Одновимірний рух.	57

1. РІВНЯННЯ РУХУ. Механічний стан системи системи частинок змінюється внаслідок взаємодії між частинками та дії зовнішніх джерел. Джерелом зовнішніх сил вважається об'єкт (матеріальна точка) із *заданим* механічним станом, або немеханічний об'єкт (поле).

Для опису системи N частинок система рівнянь Ньютона має вигляд¹:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij}, t) + \vec{F}_i^{ext}(\vec{r}_i - \vec{r}_P, \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_P, t), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

де $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, \vec{F}_{ij} — сила дії j -ї частинки на i -ту, \vec{F}_i^{ext} — зовнішня сила, що діє на i -ту частинку з боку зовнішнього об'єкту, який формально задано матеріальною точкою P із *заданим* механічним станом — відомими координатами $\vec{r}_P = \vec{r}_P(t)$ та швидкостями². Відмітимо, що залежність \vec{F}_i^{ext} від координат джерела сили P часто не вказують, враховуючи її у явній залежності від часу $\vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_i^{ext}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ (підстановка $\vec{r}_P(t)$ та спрощення виразу).

¹ Вимога $i \neq j$ у сумі внутрішніх сил виражає відсутність самодії елементарного об'єкту у класичній механіці.

² Це означає, що $\vec{r}_P = \vec{r}_P(t)$ та $\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_P(t)$ є заданими функціями часу і взаємодія з механічною системою їх не змінює.

Зауваження. Модель зовнішніх об'єктів ґрунтується на припущенні, що механічна система приводить до знехтовно малих змін їх стану. У дійсності зовнішні об'єкти разом з механічною системою мають є складовими більш широкої системи зі спільними рівняннями руху. Для ілюстрації розглянемо замкнену механічну систему, що складається з двох підсистем, кожна є зовнішнім об'єктом щодо іншої, якщо підсистеми розглядати окремо. Якщо загальна система складається з N частинок (нумеруємо їх літерами i, j), до першої підсистеми входить N_1 частинок з номерами $1, \dots, N_1$ (нумеруємо грецькими літерами α, β), до другої — $N_2 = N - N_1$ частинок з номерами $N_1 + 1, \dots, N$ (нумеруємо великими літерами A, B), то рівняння руху

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij}, t)$$

розщеплюватимуться на дві групи. Для першої підсистеми:

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{N_1} \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \dot{\vec{r}}_{\alpha\beta}, t) + \sum_{A=N_1+1}^N \vec{F}_{\alpha A}(\vec{r}_{\alpha A}, \dot{\vec{r}}_{\alpha A}, t), \quad (2.2)$$

і для другої:

$$m_A \ddot{\vec{r}}_A = \sum_{\alpha=1}^{N_1} \vec{F}_{A\alpha}(\vec{r}_{A\alpha}, \dot{\vec{r}}_{A\alpha}, t) + \sum_{\substack{B=N_1+1 \\ B \neq A}}^{N_2} \vec{F}_{AB}(\vec{r}_{AB}, \dot{\vec{r}}_{AB}, t). \quad (2.3)$$

Якщо перша підсистема мало впливає на рух другої, то у рівняннях (2.3) можна знехтувати силами з боку першої підсистеми, звідки для \vec{r}_A отримаємо рівняння:

$$m_A \ddot{\vec{r}}_A \simeq \sum_{\substack{B=N_1+1 \\ B \neq A}}^{N_2} \vec{F}_{AB}(\vec{r}_{AB}, \dot{\vec{r}}_{AB}, t). \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) утворюють незалежну систему, її можна розв'язати окремо від рівнянь на \vec{r}_α . Після того, як радіус-вектори \vec{r}_A знайдено, у доданках із силами з боку другої підсистеми у рівняннях (2.2) можна позбавитись від невідомих \vec{r}_A прямими підстановками:

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{N_1} \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \dot{\vec{r}}_{\alpha\beta}, t) + \sum_{A=N_1+1}^N \vec{F}_{\alpha A}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_A(t), \dot{\vec{r}}_\alpha - \dot{\vec{r}}_A(t), t).$$

Останню суму можна замінити силою $\vec{F}_\alpha(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t)$ з боку другої підсистеми на першу (всі залежності від часу зібрано разом). Даний підхід формулювання моделі взаємодії механічної системи з “оточенням” формально можна узагальнити для випадку $N_2 \rightarrow \infty$ (оточення з нескінченним числом координат, таке середовище утворює континуум). Результатом буде поява у аргументі зовнішньої сили додаткової залежності від часу, яка відповідає закону руху зовнішньої системи.

У випадку поля, стан якого не можна вважати фіксованим, до законів Ньютона, що описують механічну систему у загальному випадку слід додати рівняння поля (для електромагнітного поля це будуть рівняння Максвелла), частинки системи виступатимуть джерелами поля. \square

2. ЗАДАЧА ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ. Математично система (2.1) є системою $3N$ диференціальних рівнянь другого порядку, її загальний розв'язок буде залежати від $6N$ сталих інтегрування:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t; C_1, \dots, C_{6N}), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5)$$

Сталі C_α звичайно не мають безпосереднього фізичного змісту. Їх можна виразити через початкові умови — координати та швидкості (початковий стан) у деякий момент часу t_0 (початковий момент). Підставляючи до розв'язку (2.5) системи (2.1) значення $t = t_0$, отримаємо:

$$\begin{cases} \vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0; C_1, \dots, C_{6N}), \\ \dot{\vec{r}}_{i0} = \dot{\vec{r}}_i(t_0; C_1, \dots, C_{6N}), \end{cases} \quad \text{звідси виражаємо} \quad C_\alpha = C_\alpha(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t_0), \quad \alpha = \overline{1, 6N}, \quad (2.6)$$

тут і далі у випадках, коли йдеться про набір однотипних функцій у аргументі, вживатимемо скорочене позначення без індексу. Для координат $f(\vec{r})$ позначає $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$.

Підстановка (2.6) до формального розв'язку (2.5) дає запис координат точок через початкові умови:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.7)$$

Таким чином,

Основна задача механіки формулюється як задача розв'язку системи рівнянь руху другого порядку з початковими умовами (задача Коші).

За деяких обмежень на функціональний вигляд сил у правій частині рівняння руху можна розв'язати однозначно (згідно з теоремою Пеано з теорії диференціальних рівнянь).

Цей висновок часто формулюється у вигляді *принципу механістичного детермінізму* Лапласа:

Для заданих параметрів системи (мас, характеру сил тощо) та відомого початкового механічного стану можна повністю визначити механічний стан системи у довільний момент часу t , тобто передбачити поведінку системи у майбутньому та дослідити її у минулому.

Зауваження*. У принципі механістичного детермінізму Лапласа стверджується, що результат передбачення поведінки системи на основі законів класичної механіки є у деякому розумінні однозначним. Однак така впевненість насправді є ілюзією — інформація про систему, яку закладено у значення параметрів та початкові умови вимірюється на експерименті, який має певну точність. Рівняння руху можуть бути нелінійними, а їх розв'язки — дуже чутливими до значень параметрів. Часто трапляється так, що навіть у випадку незначної зміни початкових умов якісний характер розв'язку задачі суттєво змінюється. Цей ефект впливу можна передбачити на основі рівнянь руху тільки за умови абсолютно точних вхідних даних, які принципово неможливо отримати. Тому детерміністичність (визначеність) у класичній механіці має суто теоретичний характер.

┘

3. ІНТЕГРАЛИ РУХУ. На сталі інтегрування можна дивитись інакше. Позначимо сталі $C_\alpha := I_\alpha$ і перейдемо до співвідношень, обернених до (2.5) та їх похідних:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i(t, I), \\ \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i(t, I) \end{cases} \Rightarrow I_\alpha = I_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (2.8)$$

Величини I_α утворюють набір *констант* (функцій, що для всіх аргументів набувають *сталого* значення). За означенням, $I_\alpha = \text{const}$, тому

$$\frac{dI_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{dt} = 0, \quad \alpha = \overline{1, 6N}, \quad (2.9)$$

однак у загальному випадку функція I_α може явно залежати від часу.

Комбінації $I_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ координат, швидкостей та часу, які зберігаються в процесі руху, називаються (першими) *інтегралами руху*. Значення інтегралів руху фіксуються початковими умовами:

$$I_\alpha(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = I_\alpha(\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0), t_0) = \text{const}. \quad (2.10)$$

Знання кількох інтегралів руху дозволяє спростити інтегрування базової системи (2.1). Дійсно, комбінації $I_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \text{const}$ можна розуміти як диференціальні рівняння першого порядку відносно координат \vec{r} , які можна розв'язати хоча б у квадратурах, тоді як загального методу розв'язку системи рівнянь другого порядку (2.1) не існує. Для постановки задачі Коші у системі рівнянь першого порядку (2.10) початкові умови по координатах — ті самі, що і для системи (2.1), а значення початкових швидкостей явно входять у константи I_α . Формально кожен інтеграл руху знижує сумарний порядок системи (2.1) на одиницю у тому розумінні, що одне з рівнянь другого порядку системи (2.1) можна замінити на диференціальне рівняння з першими похідними, яке випливає із закону збереження. Якщо всі інтеграли руху відомі, то задача повністю інтегрується у квадратурах.

Таким чином, загальний підхід розв'язування системи рівнянь Ньютона, застосовний до будь-якої задачі — пошук інтегралів руху. Аналіз інтегралів руху та розв'язок системи рівнянь Ньютона для тих самих початкових умов — еквівалентні задачі.

Зауваження. Забігаючи наперед, слід зазначити, що такий підхід (заміна розв'язку рівнянь руху на аналіз перших інтегралів) є характерною рисою класичної механіки взагалі. Розвиток цієї ідеї у деякій мірі стимулював побудову інших форм механіки — Лагранжа та Гамільтона, де методи інтегрування набули досконалішого вигляду. \square

4. ПОШУК ІНТЕГРАЛІВ РУХУ У МЕХАНІЦІ НЬЮТОНА. У законах класичної механіки не закладено жодного способу пошуку інтегралів руху, тому залишається скористатись методами теорії диференціальних рівнянь. Із умови $I_\alpha = \text{const}$ випливає, що

$$dI_\alpha(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, 6N}. \quad (2.11)$$

Оскільки комбінації I_α не залежать від прискорень, то рівняння (2.11), як диференціали комбінацій з першими похідними, є рівняннями другого порядку відносно координат \vec{r} . Залежність від других похідних буде явною та лінійною, тому рівняння (2.11) еквівалентні вихідним рівнянням Ньютона (2.1).

Загальний метод пошуку повних диференціалів (2.11), відомий з теорії диференціальних рівнянь — це пошук інтегровальних множників рівнянь системи (2.1) та побудова комбінацій цих рівнянь, що приводять до (2.11). Інакше кажучи, кожне рівняння системи (2.1) потрібно домножити на деяку функцію $\varphi_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, яку слід підібрати так, щоб сума отриманих виразів зводилась до повного диференціалу у формі $dI = 0$:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \varphi_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dI(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0.$$

Цей підхід, зрозуміло, не універсальний, в ньому є певний елемент угадування. Однак у загальному випадку задачі про рух системи частинок існує кілька варіантів вибору інтегровальних множників, що дають інтеграли руху для широкого класу задач.

Інтегровальні множники повинні бути функціями координат, швидкостей та часу, оскільки інтеграли руху не залежать від прискорень. Рівняння Ньютона є векторними, тому множник може бути як скалярним, так і векторним (із вказаним типом добутку). Наприклад, як інтегровальні множники можна взяти прості комбінації (для векторів указаний спосіб множення на рівняння):

$$dt, \quad (\vec{r} dt \cdot), \quad (\vec{r} dt \times), \quad (\dot{\vec{r}} dt \cdot), \quad (\dot{\vec{r}} dt \times),$$

їх прості узагальнення та комбінації типу:

$$(\vec{r}^{2n+1} dt \cdot), \quad (\vec{r}^{2n+1} dt \times), \quad (\dot{\vec{r}}^{2n+1} dt \cdot), \quad (\dot{\vec{r}}^{2n+1} dt \times), \quad [\times (\times \vec{r}) dt], \quad \dots$$

(ступінь розуміється як скалярний добуток, парні степені відкидаються, оскільки вони є скалярами) або більш складні вирази з однократними

$$[\vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) dt \cdot], \quad [\vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) dt \times]$$

або багатократними добутками. Виявляється, що у загальному випадку нетривіальний результат можна отримати тільки для кількох типів інтегровальних множників, їх використання приводить до базових інтегралів руху класичної механіки та умов їх збереження. Вибір інтегровальних множників dt , $(\vec{r}_i dt \times)$ та $(\dot{\vec{r}}_i dt \cdot)$ дає закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії, відповідно.

5. ІМПУЛЬС. Домножимо кожне рівняння Ньютона на dt і знайдемо суму по всіх частинках:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i dt = \sum_{i,j=1}^N{}' \vec{F}_{ij} dt + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} dt,$$

де для скорочення введено позначення $\sum_{i,j=1}^N{}' (\dots) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^N (\dots)$.

Перетворимо окремо обидві частини рівності. У лівій частині можна виділити повну похідну, оскільки $m_i \neq m_i(\vec{r}, t)$:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i dt = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \right) dt = d\vec{P}, \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Вектор \vec{P} називається *імпульсом системи частинок*, а $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$ — *імпульсом i -ї частинки*.

Імпульс є адитивною величиною, якщо розділити систему частинок на кілька підсистем, то вектор \vec{P} розіб'ється на кілька доданків, які є імпульсами відповідних підсистем. Зокрема, після додавання до системи ще однієї частинки, у векторі \vec{P} з'явиться ще один доданок — з її імпульсом, інші доданки залишаться незмінними.

Для перетворення першого доданку правої частини подамо його як півсуму двох однакових доданків, змінимо позначення індексів у другому з них і використаємо III закон Ньютона:

$$\begin{aligned} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} dt &= \frac{1}{2} \left(\sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} + \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} + \sum'_{j,i} \vec{F}_{ji} \right) dt \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{III закон Ньютона:} \\ \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(\sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} - \sum'_{j,i} \vec{F}_{ij} \right) dt \equiv 0, \end{aligned}$$

оскільки порядок обчислення сум по i та j можна змінювати (обидві суми зі сталими межами).

У результаті, отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t), \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad (2.12)$$

або

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \quad (2.13)$$

де $\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$ — сумарна зовнішня сила.

Якщо права частина у формулі (2.12) дорівнює нулю, то імпульс є інтегралом руху. Це виконується для *замкненої (або консервативної)* системи частинок, на яку не діють зовнішні сили, $\vec{F}_i^{ext} = 0$. Замкнена система частинок, очевидно, є ідеалізацією. Для реальних об'єктів можна говорити про *ізолювані системи*, які достатньо віддалені від інших тіл та джерел поля так, що зовнішніми силами можна знехтувати.

Імпульс зберігається також у випадку, коли сумарна зовнішня сила дорівнює нулю, тобто $\sum_i \vec{F}_i^{ext} = 0$. Таким чином, закон збереження імпульсу можна сформулювати так:

Якщо зовнішні сили дорівнюють нулю, або сумарна сила зовнішня дорівнює нулю, то повний імпульс системи частинок зберігається. Умова $\vec{P} = \text{const}$ дає один векторний інтеграл руху, що має три компоненти.

У випадку, якщо імпульс системи не зберігається, співвідношення (2.13) задає закон його зміни, імпульс дає деяку загальну інформацію про систему “як ціле”. Рівняння (2.13) має форму другого закону Ньютона. У системі частинок не можна говорити про прискорення всієї системи, тому в лівій частині фігурує імпульс, який є більш загальним поняттям, ніж швидкість³.

Зауваження. 1) У виведенні закону збереження імпульсу третій закон Ньютона був використаний у неповній формі — для збереження імпульсу центральність сил не вимагається. Перший закон Ньютона присутній у неявній формі — його роль допоміжна і полягає у означенні системи відліку.

2) Імпульс системи частинок є адитивною величиною, тобто записується у вигляді суми імпульсів окремих частинок:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

3) У незамкненій системі частинок може зберігатись не повний вектор імпульсу, а одна з його компонент, у напрямку якої проекція повної зовнішньої сили дорівнює нулю. Тоді загальна кількість законів збереження буде менша трьох.

4) Імпульс не залежить від вибору початку координат, якщо змінити початок координат за допомогою зміщення на сталий вектор \vec{a} , тобто $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$, то

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{a}}) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i \equiv \vec{P}',$$

оскільки $\dot{\vec{a}} = 0$. ┘

Задача 2.1. Записати компоненти імпульсу частинки у циліндричних та сферичних координатах.

Зауваження*. Рівняння руху частинки у формі закону зміни імпульсу зручне для узагальнення другого закону Ньютона на випадок руху тіла змінної маси (у самому формулюванні другого закону Ньютона маса не може бути змінною). Нехай у момент часу t частинка мала імпульс $\vec{P}(t) = m(t)\vec{v}(t)$. У наступний момент часу $t + dt$ маса та швидкість зміняться і дорівнюватимуть $m + dm$ та $\vec{v} + d\vec{v}$, у імпульсі $\vec{P}(t + dt)$ потрібно врахувати крім зміненого імпульсу частинки також імпульси мас, що приєдналися до частинки та відділились (за рахунок чого і змінилась маса частинки):

$$\vec{P}(t + dt) = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{v}_{in}dm_{in} + \vec{v}_{out}dm_{out}$$

тут індекси *in* та *out* позначають величини, що відповідають масам, що приєднуються та відділяються, та їх швидкостям. Повна маса має зберігатись, тому

$$dm + dm_{in} + dm_{out} = 0.$$

³ Сам Ньютон формулював другий закон руху матеріальної точки в термінах імпульсу як $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, де $\vec{p} = m\vec{v}$ — імпульс математичної точки (який він називав “кількість руху”). У сучасній традиції таким способом користуються не часто, оскільки для матеріальної точки зі сталою масою імпульс та швидкість є рівноцінними поняттями.

Запишемо зміну імпульсу нехтуючи квадратичним доданком $dm d\vec{v}$ (зникає при $dt \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)}{dt} \Big|_{dt \rightarrow 0} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} + \vec{v}_{in} \frac{dm_{in}}{dt} + \vec{v}_{out} \frac{dm_{out}}{dt} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}_{in} - \vec{v}) \frac{dm_{in}}{dt} + (\vec{v}_{out} - \vec{v}) \frac{dm_{out}}{dt}, \end{aligned}$$

у останньому виразі враховано збереження сумарної маси. Тоді закон руху у формі зміни імпульсу матиме вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{ext} - \vec{u}_{in} \frac{dm_{in}}{dt} - \vec{u}_{out} \frac{dm_{out}}{dt}, \quad \vec{u}_{in} = \vec{v}_{in} - \vec{v}, \quad \vec{u}_{out} = \vec{v}_{out} - \vec{v}, \quad (2.14)$$

тут \vec{u}_{in} та \vec{u}_{out} позначають швидкості мас, що приєднуються та відділяються відносно частинки. Рівняння (2.14) називається *рівнянням Мещерського* воно є основним для опису руху тіла змінної маси. Останні два доданки у його правій частині називаються *реактивною силою*:

$$\vec{F}_R = -\vec{u}_{in} \frac{dm_{in}}{dt} - \vec{u}_{out} \frac{dm_{out}}{dt}.$$

До рівняння Мещерського неявно закладено припущення, що маси dm_{in} та dm_{out} отримують швидкості \vec{u}_{in} та \vec{u}_{out} миттєво (у момент часу t їх швидкості відносно частинки дорівнюють нулю). У випадку невеликих швидкостей руху таке припущення є виправданим (наприклад, маса, що відділяється утворюється в результаті хімічної реакції, що відбувається дуже швидко).

На практиці найбільш цікавими є два випадки:

- реактивний рух: $dm_{in} = 0$, $dm_{out} = -dm$, рух відбувається із втратою маси (наприклад, рух ракети);
- повітряно-реактивний рух: $dm_{in} = -dm_{out}$, $dm = 0$, тоді частинка прискорюватиметься під дією реактивної сили, якщо $u_{in} < u_{out}$ (так працюють реактивні та гвинтові двигуни).

┘

6. ЦЕНТР МАС. Імпульс системи можна записати як повну похідну по часу:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right). \quad (2.15)$$

Означимо точку з радіус-вектором

$$\vec{R}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (\text{повна маса}), \quad (2.16)$$

яка називається *центром мас* системи частинок. Цей вектор вводиться для опису руху системи частинок “як цілого” — це означає, що у деякому розумінні вся

система частинок розглядається як матеріальна точка з радіус-вектором \vec{R}_c і масою M , яка є повною масою системи. Тоді, якщо імпульс системи зберігається, тобто $\vec{P}(t) = \vec{P}(t_0)$, то координати центру мас системи можна знайти з рівності

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \int \vec{P}(t) dt \equiv \int \vec{P}(t_0) dt = \vec{P}(t_0) t + \vec{C},$$

де \vec{C} — стала інтегрування, або

$$\vec{R}_C = \frac{\vec{P}}{M} t + \frac{\vec{C}}{M}. \quad (2.17)$$

Очевидно, швидкість центру мас буде $\dot{\vec{R}}_C = \frac{\vec{P}}{M} = \text{const}$, а $\vec{R}_C(0) = \frac{\vec{C}}{M} = \text{const}$ — положення центру мас при $t = 0$. Закон збереження імпульсу означає, що центр мас рухається зі сталою швидкістю (і відображає рух системи як цілого), а рівність (2.17) вводить три сталі інтегрування \vec{C} , які є інтегралами руху і описують положення центру мас у початковий момент часу. Вибором початку координат можна досягти $\vec{C} = 0$.

Зауваження. 1) Сталість швидкості центру мас для замкненої системи можна розуміти як узагальнення поняття вільної матеріальної точки для системи частинок (І закону Ньютона).

2) За допомогою перетворення Галілея завжди можна знайти систему відліку, в якій центр мас нерухомий, тобто $\vec{R}_C = \text{const}$, система відліку рухатиметься зі швидкістю $\vec{V} = -\frac{\vec{P}}{M}$. У такій системі відліку (вона називається *системою відліку центру мас* або *C-системою*) повний імпульс системи дорівнює нулю і можна сказати, що система як ціле перебуває у стані спокою (природне узагальнення поняття стану спокою для системи частинок). \lrcorner

7. МОМЕНТ ІМПУЛЬСУ. Векторно домножимо кожне рівняння (2.1) на множник $\vec{r}_i dt$ ліворуч та знайдемо суму по всіх частинках:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i dt = \sum_{i,j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} dt + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} dt.$$

Окремо, ліва частина:

$$dt \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = d \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) - \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i}_{=0} \equiv d \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) := d\vec{L},$$

вектор

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (2.18)$$

називається *моментом імпульсу системи частинок*, а $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ — *моментом імпульсу i-ї частинки*.

Для перетворення першого доданку правої частини використовується той самий прийом, що і для імпульсу, однак тут враховується властивість центральності сил:

$$\begin{aligned} dt \sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} dt \left(\sum'_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum'_{j,i} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{III закон Ньютона:} \\ \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} dt \sum'_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \left| \begin{array}{l} \text{центральність сил:} \\ \vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

Тому, остаточно:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{ext}, \quad \text{де} \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}. \quad (2.19)$$

Вектор $\vec{N}_i^{ext} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$ називається *моментом зовнішньої сили*, який діє на i -ту частинку, а \vec{N}^{ext} — повним моментом зовнішніх сил. Для ізольованої системи зовнішні сили відсутні і момент імпульсу є інтегралом руху, останнє також виконується для неізольованої системи з $\vec{N}^{ext} = 0$:

Якщо моменти зовнішніх сил дорівнюють нулю, або вони врівноважуються, то повний момент імпульсу системи частинок зберігається. Умова $\vec{L} = \text{const}$ дає один векторний інтеграл руху, з трьома компонентами.

Зауваження. 1) На відміну від імпульсу, під час виведення закону збереження моменту імпульсу третій закон Ньютона було використано у повній формі. У випадку сил, для яких третій закон Ньютона порушується, або виконується частково, закон збереження та рівняння зміни моменту імпульсу може мати інший вигляд.

2) Момент імпульсу зберігається, якщо моменти сил дорівнюють нулю, але для цього механічна система не обов'язково має бути консервативною. Якщо зовнішні сили є центральними, тобто $\vec{F}_i^{ext} \parallel \vec{r}_i$, то їх моменти дорівнюють нулю.

3) Момент імпульсу системи частинок є адитивною величиною, що складається з моментів імпульсу окремих частинок:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i, \quad \vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i.$$

4) Як і для імпульсу, у неконсервативній системі частинок може зберігатись не повний вектор моменту імпульсу, а його окремі компоненти.

5) Момент імпульсу залежить від вибору початку координат. Якщо останній змістити на сталий вектор \vec{a} (перетворення $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$), то

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i + \vec{a}) \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{L}' + \vec{a} \times \vec{P}.$$

Момент імпульсу не залежить від вибору початку координат тільки у випадку, якщо система як ціле перебуває у стані спокою, тобто $\vec{P} = 0$. ┘

Задача 2.2. Записати компоненти моменту імпульсу частинки у циліндричних та сферичних координатах.

8. Класифікація сил. Перш ніж перейти до закону збереження енергії, введемо часткову класифікацію сил, яка потрібна для перетворення виразів з ними у правих частинах комбінацій рівнянь Ньютона з інтегрувальними множниками.

Третій закон Ньютона обмежує всі можливі сили *механічної* взаємодії⁴ між частинками центральними силами:

$$\vec{F}_{ij} = f_{ij}(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij}, t) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}},$$

де f_{ij} — скалярна функція, а $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Найбільш важливий тип центральних сил — *потенціальні сили*, що виражаються через градієнт деякої функції $U_{ij}(r_{ij}, t)$ відносних відстаней та часу⁵:

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}, t) = -\vec{\nabla}_{ij} U_{ij}(r_{ij}, t), \quad \vec{\nabla}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_{ij}}. \quad (2.20)$$

Функція U_{ij} називається *потенціалом взаємодії* частинок з номерами i та j . Підкреслимо, що потенціал залежить тільки від довжини вектора відносної відстані між частинками та часу, а відповідна сила не залежить від швидкостей. При цьому потенціал симетричний відносно індексів, $U_{ij} = U_{ji}$, така властивість впливає з третього закону Ньютона (і пояснює термін “взаємодія”).

Відокремлення такого класу поділяє сили взаємодії на потенціальні та непотенціальні. В середині кожного класу можна розглядати додаткове виділення *стаціонарних* (незалежних від часу) та *нестационарних* сил.

Аналогічну класифікацію можна провести і серед зовнішніх сил. Окрім потенціальних, досить поширені зовнішні сили, напрямком яких відмінний від напрямку радіус-вектора частинки, зокрема

$$\text{дисипативні: } \vec{F}_i^{ext} \parallel \dot{\vec{r}}_i; \quad \text{гіроскопічні: } \vec{F}_i^{ext} \perp \dot{\vec{r}}_i.$$

До дисипативних сил належать сили рідинного тертя $\vec{F} = -\alpha \dot{\vec{r}}^{n-1}$, а до гіроскопічних — сили взаємодії з магнітним полем $\vec{F} = \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{H}$. Вони мають немеханічне походження і породжуються взаємодією зовнішніх полів та частинки. У механіці вони з’являються разом з немеханічними характеристиками частинки та середовища — в’язкості рідини (для сил тертя), заряду частинки (для взаємодії з електромагнітним полем) тощо.

Зауваження. Для деяких взаємодій сила може виражатись через градієнт деякої функції U , яку можна назвати потенціалом, однак U залежить не тільки від відстані, а й від напрямку. Прикладом може бути анізотропний осцилятор:

$$U(\vec{r}) = \frac{k_x x^2}{2} + \frac{k_y y^2}{2} + \frac{k_z z^2}{2}$$

(з різними сталими по осях). ┘

⁴ Тобто сил, які визначаються суто механічними параметрами частинок — координатами та швидкостями (механічним станом).

⁵ Наявність часу ніяк не впливає на обчислення градієнту, який є частинною похідною.

Зауваження. Формально можна розглядати також дисипативні та гіроскопічні сили взаємодії між частинками, вважаючи, що за них відповідають немеханічні параметри частинок. Для таких сил порушується ІІІ закон Ньютона. Наприклад, взаємодію заряджених частинок можна описати як дію електромагнітного поля, що породжується однією частинкою, на іншу. ┘

9. ЕНЕРГІЯ. Скалярно домножимо кожне рівняння руху на множник $\dot{\vec{r}}_i dt$ і знайдемо суму по всіх частинках:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i dt = \sum_{i,j=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} dt + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{ext} dt.$$

Ліва частина:

$$dt \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot d\dot{\vec{r}}_i = d \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \right) := dT.$$

Функція

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \quad (2.21)$$

називається *кінетичною енергією системи частинок*, вона є адитивною величиною. Доданок цієї суми з номером i називається кінетичною енергією i -ї частинки.

Комбінацію у правій частині із силами взаємодії перетворимо, розділяючи суму по i та j тим самим способом, що і раніше:

$$\begin{aligned} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i dt &= \frac{1}{2} dt \left[\sum'_{i,j} + \sum'_{j,i} \right] \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i = \left| \begin{array}{l} \text{ІІІ з-н Ньютона,} \\ \text{у другій сумі } i \leftrightarrow j \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} dt \sum'_{i,j} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \vec{F}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}. \end{aligned}$$

Отриману суму можна записати інакше, впорядкувавши індекси і врахувавши, що кожен доданок у сумі зустрічається двічі:

$$\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{i-1} + \sum_{j=i+1}^N \right) \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \equiv \sum_{j<i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}.$$

Розділимо сили на потенціальні та непотенціальні, останні позначимо \vec{F}_{ij}^n , тоді:

$$\begin{aligned} dt \sum'_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j<i} [-\vec{\nabla}_{ij} U_{ij}(r_{ij}, t) + \vec{F}_{ij}^n] d\vec{r}_{ij} = -d \sum_{j<i} U_{ij}(r_{ij}, t) \\ &+ dt \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j<i} U_{ij}(r_{ij}, t) + \sum_{j<i} d\vec{r}_{ij} \cdot \vec{F}_{ij}^n \equiv -dU + dt \frac{\partial U}{\partial t} + \partial A^n, \end{aligned}$$

де позначено

$$U = \sum_{j < i} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, t) = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, t) \quad (2.22)$$

потенціальна енергія взаємодії частинок, та

$$\partial A^n = \sum_{j < i} d\vec{r}_{ij} \cdot \vec{F}_{ij}^n(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij}, t) \quad (2.23)$$

інфінітезимальна⁶ *робота* непотенціальних сил взаємодії. Цей вираз є неповним диференціалом (відсутні доданки з диференціалами $d\vec{r}_{ij}$ та dt), що відображається використанням позначення “ ∂ ” замість “ d ”.

Робота непотенціальних сил за одиницю часу називається їх *потужністю*:

$$P^n = \frac{\partial A^n}{dt} = \sum_{j < i} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{F}_{ij}^n(\vec{r}_{ij}, \dot{\vec{r}}_{ij}, t) \quad (2.24)$$

Зауваження. 1) До виразу для роботи не входять гіроскопічні сили, оскільки для них, за означенням, виконується $\vec{F}_{ij}^g \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} = 0$. Якщо обмежитись силами з розглянутої вище класифікації, то ∂A^n породжується дисипативними силами.

2) Потенціал взаємодії, як правило, явно не залежить від часу. Явна залежність від t виникає тільки у випадках, коли параметри частинок, якими задається взаємодія, є змінними величинами. ┘

Аналогічно можна перетворити вираз із зовнішніми силами, розділяючи їх на потенціальні та непотенціальні:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}(\vec{r}_i, t) \cdot \dot{\vec{r}}_i dt &= \sum_{i=1}^N [-\vec{\nabla}_i U^{ext}(\mathbf{r}_i, t) + \vec{F}_i^{n,ext}(\vec{r}_i, t)] d\vec{r}_i \\ &= -dU^{ext} + \frac{\partial U^{ext}}{\partial t} dt + \partial A^{n,ext}, \end{aligned}$$

де

$$U^{ext} = \sum_{i=1}^N U_i^{ext}(\mathbf{r}_i, t), \quad \partial A^{n,ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{n,ext}(\vec{r}_i, t) \cdot d\vec{r}_i, \quad (2.25)$$

позначають потенціал та роботу непотенціальних зовнішніх сил. Як і сили взаємодії, зовнішні гіроскопічні сили роботи не виконують.

У результаті,

$$\frac{d}{dt}(T + U + U^{ext}) = \frac{\partial A^n}{dt} + \frac{\partial A^{n,ext}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}(U + U^{ext}) \quad (2.26)$$

У замкненій системі з потенціальними силами взаємодії, що явно не залежать від часу, права частина (2.26) дорівнює нулю, і співвідношення переходить у закон збереження:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0, \quad \text{або} \quad T + U = E = \text{const}. \quad (2.27)$$

⁶ Інфінітезимальний: від англ. infinitesimal, нескінченно малий.

Величина E називається *повною енергією системи*. Закон збереження енергії можна розширити і на випадок незамкнених систем зі стаціонарним потенціалом U у випадку взаємодії зі стаціонарним потенціальним зовнішнім полем (тобто для $\frac{\partial U^{ext}}{\partial t} = 0$). Тоді до повної енергії буде входити доданок потенціальної енергії взаємодії із полем:

$$\frac{d}{dt}(T + U + U^{ext}) = 0, \quad \text{або} \quad T + U + U^{ext} = E = \text{const}. \quad (2.28)$$

Зауваження. Часто суму $U + U^{ext}$ позначають знову через U і називають *повною потенціальною енергією системи*. \lrcorner

Таким чином, закон збереження енергії можна сформулювати так:

Енергія зберігається для системи частинок із потенціальними стаціонарними силами взаємодії, якщо система замкнена або перебуває у потенціальному стаціонарному зовнішньому полі сил. Умова $E = \text{const}$ дає один скалярний інтеграл руху.

Зауваження. На відміну від інших інтегралів руху енергія не є адитивною величиною. Якщо розбити систему на дві частини 1 та 2, то повну енергію можна записати так:

$$E = \underbrace{T_1 + T_2}_T + \underbrace{U_1 + U_2 + U_{12}}_U = E_1 + E_2 + U_{12}$$

де U_{12} описує потенціал взаємодії між підсистемами: для підсистеми 2 підсистема 1 є зовнішнім джерелом зі своїм внеском до повної енергії системи. У загальному випадку адитивною є тільки кінетична енергія (за означенням), повна енергія буде адитивною тільки тоді, коли підсистеми не взаємодіють, або ж сили взаємодії є короткодіючими і підсистеми достатньо віддалені одна від іншої⁷ — це означає, що $U_{12} \simeq 0$ і $E \simeq E_1 + E_2$. \lrcorner

10. РОБОТА СИЛ ТА ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ. Робота сил при переміщенні окремо взятої частинки визначає зміну повної енергії, вона визначається як інтеграл по траєкторії з точки (1) в точку (2):

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \partial A = E_2 - E_1. \quad (2.29)$$

У загальному випадку ця величина залежить як від початкової та кінцевої точок траєкторії, так і від її форми. Тільки для потенціальних сил робота не залежить від форми траєкторії, для однієї частинки:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{(1)}^{(2)} \vec{\nabla} U(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{(1)}^{(2)} dU(\vec{r}) = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)]. \quad (2.30)$$

⁷ Такі системи розглядаються у термодинаміці.

Крім того, робота потенціальної сили при переміщенні частинки по замкненому контуру дорівнює нулю:

$$A = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}). \quad (2.31)$$

Таку властивість можна взяти як інше, еквівалентне означення потенціального поля сил. Еквівалентність очевидна з того, що за теоремою Стокса з рівності нулю криволінійного інтегралу по довільному замкненому контуру випливає тотожність $\text{rot } \vec{F} \equiv 0$, що еквівалентно можливості запису сили через градієнт потенціалу.

Зауваження. Умова $\text{rot } \vec{F} = 0$ є іншим, еквівалентним до попереднього, означенням потенціальної сили. \lrcorner

Формула (2.30) допускає обернений вираз, потенціальну енергію можна записати за допомогою інтегралу вздовж довільної кривої, яка з'єднує точки \vec{r}_0 та \vec{r} :

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + U(\vec{r}_0). \quad (2.32)$$

Точку \vec{r}_0 і, відповідно, сталу $U(\vec{r}_0)$ можна вибирати довільним чином — вона визначає початок відліку потенціальної енергії. Для сил, які спадають зі збільшенням відстані початок відліку вибирають так, щоб потенціальна енергія прямувала до нуля у випадку великих віддалень від системи, тобто $U_\infty = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} U(\vec{r}_0) = 0$, при такому виборі початкової точки

$$U(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + U_\infty.$$

Потенціальну енергію можна означати тоді як роботу сил, що витрачається для переміщення частинки з нескінченно віддаленої точки в точку \vec{r} .

11. ТЕОРЕМА ВІРІАЛА. Кінетична та потенціальна енергії є логічно незалежними поняттями. Якщо перша є кінематичною характеристикою і безпосередньо не залежить від сил, які діють на частинки, то друга як раз ними і визначається. У системах, де зберігається повна енергія E , кінетичну та потенціальну енергії T та U можна виразити одну через іншу із співвідношення $E = T + U$. Прямого виразу, який би пов'язував ці енергії і не зводився до закону збереження не існує, оскільки T та U — незалежні і виникають у механіці саме під час виведення інтегралу E .

Однак існують механічні системи, у яких можна зв'язати між собою значення кінетичної та потенціальної енергій, усереднених по великому проміжку часу. Відповідне співвідношення формулюється як *теорема віріала*.

Розглянемо перетворення виразу для кінетичної енергії T . Скористаємось тим, що кінетична енергія є однорідною функцією другого порядку відносно швидкостей, це означає, що при масштабному перетворенні координат $\vec{r} \rightarrow \alpha \vec{r}$

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \rightarrow \sum_i \frac{m_i (\alpha \dot{\vec{r}}_i)^2}{2} = \alpha^2 T.$$

Згідно з теоремою Ейлера про однорідні функції кінетична енергія задовольняє співвідношення:

$$2T = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$$

(саме для кінетичної енергії це й так очевидно, що легко перевірити безпосередньою підстановкою). Продовжуючи попередню рівність, виділимо повний диференціал у вираз для T , отримаємо:

$$2T = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i \right) - \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i.$$

У другому доданку можна використати рівняння Ньютона $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$ для i -ї частинки, позначимо

$$\mathcal{V} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \equiv \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i. \quad (2.33)$$

Функція \mathcal{V} називається *віріалом Клаузіуса* (має розмірність роботи).

Тепер вираз, який пов'язує кінетичну енергію та функцію віріала можна переписати, виділяючи повну похідну по часу у правій частині:

$$2T + \mathcal{V} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i \right) \equiv \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i \frac{m_i \vec{r}_i^2}{2} \right). \quad (2.34)$$

Перейдемо до усереднення по часу у обох частинах цієї рівності. За означенням, середнє значення функції $g(t)$ на інтервалі $[0, \tau]$ дається інтегралом:

$$\langle g \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt$$

для нескінченного інтервалу часу:

$$\langle g \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt$$

(усереднення протягом всієї історії системи). Якщо функція $g(t)$ є повною похідною по часу, тобто $g(t) = G'(t)$, то⁸

$$\langle G'(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}.$$

Середнє значення $\langle G'(t) \rangle$ буде дорівнювати нулю, якщо виконується одна з умов:

⁸ По суті, це формула Ньютона-Лейбніца, де функція $G(t)$ є первісною для $g(t)$.

- функція $G(t)$ є періодичною функцією часу з періодом τ_G , тоді $G(0) = G(\tau_G)$ (за умови неперервності) і усереднення тоді стосуватиметься інтегрування по багатократному періоду;
- функція $G(t)$ є обмеженою функцією часу, тоді чисельник дробу — обмежений, а знаменник прямує до нескінченності.

Для механічної системи, що займає обмежену область простору (частинки не розлітаються і протягом руху не залишають деякий скінченний об'єм), координати $|\vec{r}_i|$ та швидкості $|\dot{\vec{r}}_i|$ є обмеженими, тому їх комбінація під похідною у правій частині рівності (2.34) також обмежена. Рух у обмеженій області називається *фінітним*⁹. У силу попереднього, усереднення правої частини по нескінченному інтервалу часу для такої системи дорівнює нулю:

$$\langle 2T \rangle + \langle \mathcal{V} \rangle = \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i \frac{m_i \vec{r}_i^2}{2} \right) \right\rangle \equiv 0.$$

У результаті, для фінітного руху системи з інтегралом енергії виконується рівність

$$\langle \mathcal{V} \rangle = -\langle 2T \rangle \quad (\text{теорема віріала}). \quad (2.35)$$

Для частинного випадку потенціальних полів

$$\mathcal{V} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i) U, \quad (2.36)$$

тому

$$2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right\rangle. \quad (2.37)$$

Якщо потенціал U є однорідною функцією координат порядку s , тобто має місце рівність $U(\alpha \vec{r}) = \alpha^s U(\vec{r})$, то праву частину (2.37) можна перетворити за допомогою теореми Ейлера

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = sU,$$

і теорема віріала набуває вигляду

$$2\langle T \rangle = s\langle U \rangle, \quad (2.38)$$

що безпосередньо пов'язує середні величини. За допомогою закону збереження енергії $E = T + U$ та тотожності $E = \langle E \rangle$ (усереднення константи є тією самою константою) можна виразити середні величини через саму енергію. Дійсно, з (2.38) випливає:

$$E = \langle T \rangle + \langle U \rangle = \langle T \rangle + \frac{2}{s} \langle T \rangle,$$

звідки

$$\langle T \rangle = \frac{s}{s+2} E, \quad \langle U \rangle = \frac{2}{s+2} E, \quad \langle T \rangle = \frac{s}{2} \langle U \rangle, \quad (2.39)$$

⁹ Фінітний: від *англ.* finite, обмежений.

Ці співвідношення встановлюють, у якій пропорції повна енергія E “розподіляється у середньому” між кінетичною і потенціальною енергіями у процесі фінітного руху консервативної системи.

Зауважимо, що за означенням $\langle T \rangle > 0$, тому для формальної коректності виразів (2.39) потрібно вимагати $s(s+2)E > 0$, що накладає обмеження на повну енергію та потенціал. Фізично ці обмеження відповідають умовам, за яких можливий фінітний рух системи.

Зокрема, для потенціалу гармонічного осцилятора $s = 2$, $U \sim r^2$ і

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} E,$$

а для потенціалу кулонівського типу $s = -1$, $U \sim \frac{1}{r}$:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle = -E.$$

З цього виразу випливає, що під час руху у гармонічному потенціалі фінітний рух можливий для $E > 0$, а для потенціалу Кулона — у випадку $E < 0$.

Теорема віріала у формі (2.39) використовується у квантовій механіці та статистичній фізиці (з відповідними узагальненнями операцій усереднення та інших понять).

Задача 2.3. Записати теорему віріала для системи частинок, які рухаються у зовнішньому однорідному магнітному полі. З боку поля на частинку з зарядом e діє сила Лоренца $\vec{F} = \frac{e}{c} \vec{r} \times \vec{H}$, де \vec{H} — напруженість поля.

12. Висновки. У загальному випадку для замкненої системи існує 10 інтегралів руху:

- 3 інтеграли імпульсу \vec{P} (адитивні);
- 3 інтеграли моменту імпульсу \vec{L} (адитивні);
- 3 інтеграли координат центру мас у початковий момент часу $\vec{C} = M\vec{R}_c(0)$ (адитивні);
- 1 інтеграл енергії E (неадитивний).

Для неконсервативних систем частина цих величини також може зберігатись, але за певних умов. Форма інтегралів руху буде незмінною, тільки вираз для енергії доповниться потенціальною енергією взаємодії з зовнішнім джерелом.

Навіть у випадку, коли імпульс, момент імпульсу та енергія не зберігаються, співвідношення (2.12), (2.19), та (2.25), які описують зміну цих величин з часом, мають самостійний фізичний зміст і широко використовуються. Зокрема, другий закон Ньютона можна записати як закон зміни імпульсу матеріальної точки. Зміна енергії з часом описує або втрати (наприклад, на загасання), або збільшення енергії за рахунок зовнішніх джерел.

Інші варіанти вибору інтегрувальних множників у загальному випадку не приводять до нових інтегралів руху — або не виділяється повний диференціал у лівій частині після утворення суми рівнянь з множниками, або не перетворюється права частина. Можна, звичайно, спробувати виділити окремий тип сил у класі

потенціальних, для яких доданки із силами набувають бажаного вигляду, але це недоцільно. Класифікацію сил не можна продовжувати до безмежності, інакше загальна теорія повністю потоне в несуттєвих деталях.

У конкретних випадках для заданих сил взаємодії вдалий вибір інтегрувального множника може привести до закону збереження, який не зводиться до загальних. Для ілюстрації розглянемо виведення інтегралу руху, специфічного для кулонівського потенціалу.

Приклад 1. Інтеграл руху для потенціалу Кулона $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ (вектор Рунге-Ленца).

◀ Для частинки, що рухається у потенціалі Кулона $U(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r}$, рівняння руху має вигляд:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{\alpha\vec{r}}{r^3}.$$

Векторно домножимо обидві частини рівності на інтегрувальний множник $(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dt$ (з точністю до коефіцієнту це момент імпульсу), тоді у лівій частині отримаємо:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dt \times m\ddot{\vec{r}} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \ddot{\vec{r}} dt = \vec{L} \times \ddot{\vec{r}} dt = \frac{d}{dt}(\vec{L} \times \dot{\vec{r}}) dt,$$

оскільки у такій системі момент імпульсу зберігається. Для правої частини, беручи до уваги, що¹⁰ $\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}$, знайдемо:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \frac{\alpha\vec{r}}{r^3} dt = \alpha \frac{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})}{r^3} dt = \alpha \frac{\dot{\vec{r}}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha\vec{r}}{r} \right) dt$$

прирівнюючи праву та ліву частини, отримаємо закон збереження:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} dt = d\vec{A} = 0, \quad \vec{A} = \vec{L} \times \dot{\vec{r}} - \frac{\alpha\vec{r}}{r}.$$

Інтеграл руху \vec{A} називається *вектором Рунге-Ленца* і є характерним саме для потенціалу Кулона. У випадку кількох частинок вектор Рунге-Ленца побудувати не можна, оскільки моменти імпульсу кожної частинки окремо не зберігаються (інтегралом руху буде їх сума). ▶

Цим вичерпується логічна структура механіки Ньютона, яка формулюється у вигляді системи диференціальних рівнянь другого порядку. Загального підходу до їх інтегрування, окрім пошуку інтегралів руху, немає, але, з іншого боку, немає і загального підходу до пошуку самих інтегралів руху, крім 10 класичних. Використання кожного інтегралу руху знижує сумарний порядок системи рівнянь на одиницю, що еквівалентно наявності хоча б однієї квадратури.

Механіка Ньютона справедлива для сил довільної природи — потенціальних, дисипативних, гіроскопічних і навіть нецентральных. Порушення третього закону Ньютона не змінює рівнянь руху, а свідчить тільки про вихід за межі класу ньютонівських сил (такі сили можна розглядати як односторонні, або як сили

¹⁰ Очевидно, $\frac{d}{dt}r^2 = \frac{d}{dt}\vec{r}^2 = 2r\dot{r} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$.

немеханічної взаємодії). Вона є відправною точкою побудови більш гнучких (щодо логічної структури) теорій, у яких, однак, прозора методологія досягається за рахунок введення додаткових ідеалізацій і звуження області застосовності.

Забігаючи наперед, підкреслимо ще раз, що саме розв'язок задачі інтегрування за допомогою аналізу законів збереження є центральною ідеєю механіки взагалі. У гамільтоновій формі класичної механіки інтеграли руху знаходять автоматично. Складність підбору інтегровального множника для визначення закону збереження у ньютонівській теорії трансформується у складність розв'язку рівняння Гамільтона-Якобі, яке по суті генерує всі можливі закони збереження. У іншому підході пошук інтегралів руху здійснюється за допомогою аналізу симетрій системи (теорема Нетер).

13. ЗМІНА ІНТЕГРАЛІВ РУХУ ПРИ ПЕРЕТВОРЕННІ ГАЛІЛЕЯ. Інтеграли руху описують механічний стан системи “як цілого”, тому, очевидно, залежать від вибору системи відліку. Розглянемо зв'язок між виразами для імпульсу, моменту імпульсу та енергії у двох системах відліку S та S' , пов'язаних перетворенням Галілея:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad t \rightarrow t' = t, \quad \vec{v} = \text{const}.$$

Центр мас. З означення центру мас отримаємо:

$$\vec{R}_c \rightarrow \vec{R}'_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = \vec{R}_c - M\vec{v}t. \quad (2.40)$$

Імпульс. Підставимо формули перетворення Галілея до виразу для імпульсу системи \vec{P}' :

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i - \vec{v}) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i - M\vec{v},$$

звідки, згідно з означенням імпульсу, отримаємо закон перетворення:

$$\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{v}, \quad (2.41)$$

Обернений вираз, який можна отримати перестановкою штрихів на заміною знаку перед \vec{v} :

$$\vec{P} = \vec{P}' + M\vec{v}. \quad (2.42)$$

Якщо імпульс зберігається, то швидкість \vec{v} завжди можна підібрати так, щоб у новій системі $\vec{P}' = 0$. У такій системі відліку система перебуває у спокої “як ціле”, і $\vec{R}'_c(t) = \vec{R}'_c(0)$ є сталою, яку можна вибрати рівною нулю. З умови $\vec{R}'_c = 0$, випливає, що $\vec{R}_c = M\vec{v}t$, імпульс у системі S буде дорівнювати $\vec{P} = M\vec{v}$, що еквівалентно імпульсу матеріальної точки M , що рухається зі швидкістю \vec{v} .

Момент імпульсу. Аналогічно, для моменту імпульсу отримаємо:

$$\begin{aligned}\vec{L}' &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{v}t) \times (\dot{\vec{r}}_i - \vec{v}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \\ &\quad + \vec{v} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - \vec{v}t \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{L} + \vec{v} \times M\vec{R}_c - \vec{v}t \times \vec{P},\end{aligned}$$

звідси

$$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{v} \times (M\vec{R}_c - \vec{P}t),$$

для $\vec{P} = \text{const}$ останній доданок є сталим, тому що

$$\vec{R}_c - \frac{\vec{P}}{M}t = \vec{R}_c - \vec{V}_c t = \vec{R}_c(0)$$

є координатами центру мас у початковий момент часу, тому:

$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{R}_c(0) \times M\vec{v}. \quad (2.43)$$

Обернений вираз:

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R}'_c(0) \times M\vec{v}. \quad (2.44)$$

Якщо система відліку S' є системою спокою, тобто $\vec{P}' = 0$, то у ній центр мас нерухомий, $\vec{R}'_c(0) = \vec{R}'_c(t)$. У другому доданку правої частини $\vec{R}'_c(0)$ можна замінити на $\vec{R}_c(0)$ (беручи до уваги векторне множення на \vec{v}) і \vec{L} розділятиметься на доданки \vec{L}' моменту імпульсу у системі спокою та $\vec{R}_c(0) \times M\vec{v} = \vec{R}_c(0) \times \vec{P}$, що описує момент імпульсу системи частинок як цілого.

Енергія. Нарешті, запишемо правило перетворення для енергії. Оскільки потенціальна енергія залежить тільки від відносних відстаней, то вона не змінюватиметься при перетворенні Галілея. Для кінетичної енергії матимемо:

$$T' = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}'^2_i}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\dot{\vec{r}}_i - \vec{v})^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}^2_i}{2} - \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i + \frac{M\vec{v}^2}{2} = T - \vec{v} \cdot \vec{P} + \frac{M\vec{v}^2}{2},$$

тому, для повної енергії отримаємо:

$$E' = E - \vec{v} \cdot \vec{P} + \frac{M\vec{v}^2}{2}. \quad (2.45)$$

Обернений вираз:

$$E = E' + \vec{v} \cdot \vec{P} - \frac{M\vec{v}^2}{2} = E' + \vec{v} \cdot (\vec{P}' - M\vec{v}) - \frac{M\vec{v}^2}{2} = E' + \vec{v} \cdot \vec{P}' + \frac{M\vec{v}^2}{2}.$$

У системі спокою S' імпульс зникає і енергія розбивається на власну (або внутрішню) енергію системи E' , і енергію руху як цілого $\frac{M\vec{v}^2}{2}$.

14. ОДНОВИМІРНИЙ РУХ. Як простий приклад використання законів збереження запишемо квадратурний розв'язок для одновимірного руху.

Розглянемо рух матеріальної точки під дією стаціонарної потенціальної сили $F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$. Повна енергія частинки у зовнішньому полі зберігається і використання цього інтегралу знижує сумарний порядок системи на одиницю, що дозволяє знайти закон у квадратурах. Енергія має вигляд:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = \text{const}. \quad (2.46)$$

Виразимо з рівняння (2.46) швидкість:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}.$$

Відокремлюючи змінні в отриманому диференціальному рівнянні, знайдемо розв'язок у квадратурах:

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}, \quad (2.47)$$

де t_0 — стала інтегрування, яка має розмірність часу (вона не збігається з початковим моментом часу, який у більшості випадків вибирається рівним нулю). Знак у правій частині (2.47) відповідає напрямку швидкості у початковий момент часу, знак “+” вибирається при $\dot{x}(0) > 0$ (частинка рухається вправо вздовж осі x). Після обчислення інтегралу у правій частині (2.47) буде отримано деяку функцію $t(x)$, після чого можна перейти до оберненого співвідношення та виразити координату x як функцію часу t .

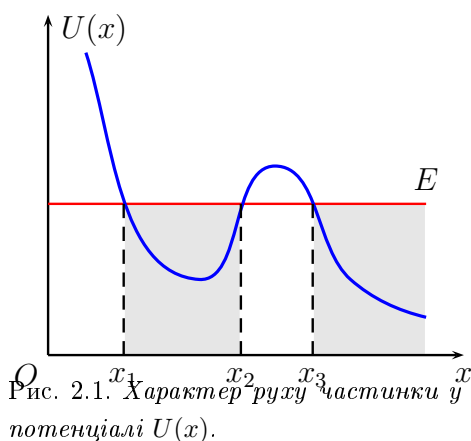


Рис. 2.1. Характер руху частинки у потенціалі $U(x)$.

У випадку безпосереднього інтегрування рівняння руху $m\ddot{x} = -U'(x)$ початкові умови потрібно підставити до отриманого розв'язку. Якщо ж використовувати розв'язок у квадратурах (2.47), то початкові умови по суті вже враховано ще до обчислення інтегралу. Дійсно, сталі E та t_0 мають безпосередній фізичний зміст на відміну від сталих, що виникають після розв'язування рівняння руху. Перша стала є енергією, яка в усіх задачах однаковим чином виражається через $x(0)$ та $\dot{x}(0)$:

$$E = \frac{m\dot{x}(0)^2}{2} + U(x(0)),$$

а зміст другої визначається контекстом задачі і встановлюється, як правило, вже після обчислення інтегралу. Таким чином, задання сталих E та t_0 можна вважати еквівалентним підстановці початкових умов.

Представлення розв'язку через сталу t_0 не завжди зручне для аналізу, тому інтеграл (2.47) часто записують як визначений, замінюючи t_0 на початкову координату (тоді при $t = 0$ автоматично $x = x(0)$):

$$t = \pm \int_{x(0)}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}. \quad (2.48)$$

За допомогою закону збереження енергії можна провести попередній якісний аналіз руху, не виконуючи інтегрування (воно проводиться потім). Оскільки за означенням

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0$$

(як повний квадрат) то рух частинки можливий тільки у областях, де виконується умова¹¹

$$U(x) \leq E, \quad (2.49)$$

тобто там, де горизонтальна пряма рівня енергії E (яка вважається заданою як початкова умова) буде вище, ніж графік потенціалу $U(x)$. Області, можливі для руху в потенціалі на рис. 2.1 розташовані між точками x_1 та x_2 , і праворуч точки x_3 .

Очевидно, чим ближче крива $U(x)$ до горизонталі E , тим менша швидкість частинки, а у точках перетину цих кривих кінетична енергія дорівнює нулю і частинка зупиняється. Точки x , у яких $U(x) = E$ називаються *точками повороту*, або *точками зупинки*. Прискорення частинки у точках повороту у загальному випадку не дорівнює нулю, оскільки при $U(x^*) = E$ (для точки повороту x^*) може бути $U'(x^*) \neq 0$ і $m\ddot{x}^* = -U'(x^*) \neq 0$, тому частинка може не залишитись у точці повороту, а продовжити рух, змінивши напрямок швидкості (звідси і термін¹²).

Якщо область руху частинки обмежена двома точками повороту (інтервал $[x_1, x_2]$ на рис. 2.1), то рух частинки називається *фінітним* (обмеженим) і відбувається у обмеженій області простору, а якщо однією точкою (інтервал $[x_3, \infty[$), або необмежений взагалі — то *інфінітним* (необмеженим). У останньому випадку можливі два сценарії руху частинки, які відрізняються напрямком початкової швидкості: 1) частинка віддаляється від точки повороту на нескінченність; 2) частинка рухається з нескінченності до точки повороту, а після її досягнення або зупиняється, або рухається знову на нескінченність.

Одновимірний фінітний рух, коли частинка рухається між двома точками повороту, має коливальний характер. У силу симетрії рівняння руху $m\ddot{x} = -U'(x)$ відносно перетворення $t \rightarrow -t$, час руху між точками повороту буде одним і тим самим незалежно від напрямку. Для потенціалу на рис. 2.1 це означає, що час

¹¹ Якщо її порушено, то швидкість частинки буде комплексною величиною.

¹² Подвійний термін пов'язаний з тим, що у точках, де швидкість обертається в нуль частинка може зупинитись, а може продовжити рух у оберненому напрямку — це залежить від поведінки потенціалу у околі цієї точки.

руху t_{12} від точки x_1 до точки x_2 дорівнює часу руху t_{21} у оберненому напрямку:

$$t_{12} = t_{21} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

де $x_{12}(E)$ — корені рівняння $U(x) = E$, які відповідають точкам повороту. Таким чином, період коливальних рухів дорівнює подвоєному часу руху між точками повороту, тобто $T = t_{12} + t_{21} = 2t_{12}$, або

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (2.50)$$

Ця формула повністю визначає період фінітного руху як функцію повної енергії E .

Зауваження*. Квадратурні формули для траєкторії та періоду фінітного руху можна інтерпретувати в термінах імовірностей. Час руху між близькими точками $[x, x + dx]$ складає

$$dt(x, x + dx) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (2.51)$$

такий самий час буде і для руху в оберненому напрямку. Тоді імовірність перебування частинки на інтервалі $[x, x + dx]$ в області між точками повороту дорівнює частині повного періоду коливальних рухів, протягом якої частинка рухається на цьому інтервалі:

$$P([x, x + dx]) = \frac{2dt(x, x + dx)}{T} = \frac{\sqrt{2m}}{T} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} := \omega(x) dx,$$

де $\omega(x)$ — густина імовірності, яка буде тим більша, чим менша різниця $E - U$ в околі точки x . Для скінченного $[x_1, x_2]$ інтервалу імовірність дається інтегралом:

$$P([x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \omega(x) dx.$$

┘

Для ілюстрації використання квадратурних формул одновимірного руху розглянемо простий приклад.

Приклад 2. Дослідити рух частинки у потенціалі Морзе

$$U(x) = -U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

де $U_0 > 0$, $\alpha > 0$.

◀ Потенціал зображений на рис. 14. Залежно від значення енергії можливі три сценарії руху:

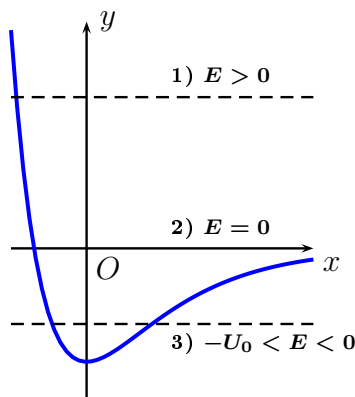


Рис. 2.2. Потенціал Морзе.

- 1) інфінітний рух з однією точкою повороту, $E > 0$; У випадку великого віддалення від початку координат швидкість частинки прямує до сталої величини $v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$;
- 2) інфінітний рух з однією точкою повороту, $E = 0$ (випадок виділяється штучно з технічних причин) — при $x \rightarrow \infty$ частинка зупиняється;
- 3) фінітний рух з двома точками повороту, $-U_0 \leq E < 0$.

Попередньо обчислимо точки повороту:

$$U(x) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{U_0} e^{2\alpha x} + 2e^{\alpha x} - 1 = 0,$$

рівняння зводиться до квадратного відносно змінної¹³ $y = e^{\alpha x}$, фізичний зміст матимуть тільки додатні корені. Розв'язки рівняння мають вигляд:

- 1) випадок $E > 0$: одна точка повороту, $x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[-\frac{U_0}{E} + \sqrt{\frac{U_0}{E} \left(\frac{U_0}{E} + 1 \right)} \right]$;
- 2) випадок $E = 0$: одна точка повороту, $x_1 = -\frac{1}{\alpha} \ln 2$;
- 3) випадок $-U_0 \leq E < 0$: дві точки повороту, $x_{1,2} = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{U_0}{|E|} \pm \sqrt{\frac{U_0}{|E|} \left(\frac{U_0}{|E|} - 1 \right)} \right]$

Інтеграл траєкторії:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{E - U(x)} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})}} = \left| \begin{array}{l} \text{заміна:} \\ y = e^{\alpha x}, \quad dy = \alpha y dx \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{E y^2 + 2U_0 y - U_0}}. \end{aligned}$$

Знайдемо цей інтеграл для кожного випадку окремо (на результат впливає знак енергії) зведенням до табличного шляхом виділення повного квадрату у підкореному виразі.

¹³ рівняння можна розв'язувати і відносно змінної $y = e^{-\alpha x}$. Вибір мотивується подальшою підстановкою у інтеграл траєкторії.

1) **Інфінітний рух, $E > 0$.** Виділяємо повний квадрат у підкореневому виразі:

$$Ey^2 + 2U_0y - U_0 = E \left[\left(y + \frac{U_0}{E} \right)^2 - \frac{U_0}{E} \left(\frac{U_0}{E} + 1 \right) \right],$$

тоді

$$t - t_0 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2E}} \operatorname{arch} \frac{y + \frac{U_0}{E}}{\sqrt{\frac{U_0}{E} \left(\frac{U_0}{E} + 1 \right)}}$$

Оскільки $x = \frac{1}{\alpha} \ln y$, то перейдемо до оберненої залежності $y(t)$ і повернемося до змінної x :

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\sqrt{\frac{U_0}{E} \left(\frac{U_0}{E} + 1 \right)} \operatorname{ch} \left(\alpha \sqrt{\frac{2E}{m}} (t - t_0) \right) - \frac{U_0}{E} \right],$$

задання сталої t_0 еквівалентно початковій умові $x(0)$.

2) **Інфінітний рух, $E = 0$.** Інтеграл приймає вигляд:

$$t - t_0 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2U_0}} (2y - 1),$$

звідки

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\alpha^2 U_0}{m} (t - t_0)^2 + 1 \right],$$

при $t \rightarrow \infty$ асимптотика $x(t)$ буде $x(t) \simeq \frac{2}{\alpha} \ln(t - t_0)$ (некоректна розмірність розв'язку викликана тим, що в ньому пропущено малу сталу розмірності логарифму часу).

3) **Фінітний рух, $-U_0 < E < 0$.** Виділяємо повний квадрат, враховуючи, що $E < 0$:

$$Ey^2 + 2U_0y - U_0 = |E| \left(-y^2 + 2\frac{U_0}{|E|}y - \frac{U_0}{|E|} \right) = E \left[\frac{U_0}{|E|} \left(\frac{U_0}{|E|} - 1 \right) - \left(y - \frac{U_0}{|E|} \right)^2 \right],$$

тому

$$t - t_0 = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \arccos \frac{y - \frac{U_0}{|E|}}{\sqrt{\frac{U_0}{|E|} \left(\frac{U_0}{|E|} - 1 \right)}}$$

остаточний вираз для $x(t)$ має вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\sqrt{\frac{U_0}{|E|} \left(\frac{U_0}{|E|} - 1 \right)} \cos \left(\alpha \sqrt{\frac{2|E|}{m}} (t - t_0) \right) + \frac{U_0}{|E|} \right].$$

Період коливань. У випадку $E < 0$ рух буде періодичним. Підставляємо значення точок повороту у формулу для періода, для скорочення позначимо $a^2 = \frac{U_0}{|E|} \left(\frac{U_0}{|E|} - 1 \right) > 0$ і скористаємось знайденим вище інтегралом:

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \arccos \frac{y - \frac{U_0}{|E|}}{a} \Big|_{y=U_0/E-a}^{y=U_0/E+a} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

Період малих коливань. Для малих відхилень від положення рівноваги $x = 0$ розклад потенціалу по степеням відхилення x має вигляд:

$$U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) \simeq -U_0 + U_0 \cdot \alpha^2 x^2,$$

і рівняння руху буде:

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2\alpha^2 U_0}{m} x = 0,$$

що збігається з рівнянням гармонічних коливань з частотою $\omega_0 = \alpha \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$. Відповідний період:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{U_0}}$$

що узгоджується із загальним результатом при $|E| = U_0$. ►

Зауваження. Насправді при $|E| = U_0$ коливань не буде, частинка не рухається і знаходиться у початку координат. Якщо покласти $E = -U_0$ у формулі для T , то період коливань вийде рівним нулю (точки повороту збігаються), а не $\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{U_0}}$. Причина відмінності полягає в тому, що у квадратурному розв'язку підстановка значення $E = -U_0$ некоректна, тому що під час проміжних обчислень (а саме, коли відбувався перехід до тригонометричної функції) виконувалась підстановка з різницею $U_0 - |E|$ у знаменнику. Рівність

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = -\arccos \frac{y}{a}, \quad a^2 = \frac{U_0}{|E|} \left(\frac{U_0}{|E|} - 1 \right)$$

буде правильною тільки при $a \neq 0$. ┘

ЛЕКЦІЯ 3

Одновимірні малі коливання

1.	Рівняння руху.	65
2.	Коливання без загасання.	65
3.	Коливання із загасанням.	71

1. Рівняння руху. У загальному випадку рівняння Ньютона для одновимірного осцилятора має вигляд:

$$m\ddot{x} = F^{ext}(x, \dot{x}, t) = -kx - \alpha\dot{x} + F(t), \quad (3.1)$$

де перший доданок у правій частині описує силу пружності (сила, що повертає частинку у положення рівноваги, протидіючи віддаленню та діє за законом Гука), другий — лінійну по швидкості силу тертя, а третій — зовнішню змушуючу силу. Поділивши на масу, запишемо рівняння руху у формі:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (3.2)$$

де для зручності введено перепозначення:

$$2\beta = \frac{\alpha}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

У загальному випадку для осцилятора із рівнянням руху (3.1) законів збереження немає. Запишемо закон зміни енергії, домножуючи рівняння (3.1) на інтегрувальний множник \dot{x} та виділяючи повні похідні по часу:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = -\alpha\dot{x}^2 + F(t)\dot{x}. \quad (3.3)$$

Вираз під похідною можна ототожити з енергією осцилятора:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2). \quad (3.4)$$

Перший доданок у правій частині (3.3) описує втрати енергії на загасання, а другий — потужність зовнішніх сил.

Розглянемо послідовно задачі про рух осцилятора із врахуванням окремих доданків у рівнянні руху.

2. КОЛИВАННЯ БЕЗ ЗАГАСАННЯ. У випадку коливань без загасання рух частинки відбувається без дисипації, тобто $\beta = 0$. Спочатку доцільно знайти розв'язок рівнянь руху для вільного осцилятора.

Приклад 1. Дослідити рух вільного одновимірної осцилятора без загасання.

◀ Рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.5)$$

Розв'язок цього однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами шукатимемо підстановкою $x = Ae^{\lambda t}$, це дає:

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)A = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

оскільки випадок $A = 0$ нецікавий (немає руху). Із характеристичного рівняння знайдемо можливі значення параметру λ , які відповідають двом фундаментальним розв'язкам, а саме $\lambda = \pm i\omega_0$. Загальний розв'язок рівняння можна записати як лінійну комбінацію фундаментальних:

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Невідомі комплексні сталі $A_{1,2}$ не мають безпосереднього фізичного змісту, їх потрібно виразити через початкові умови $x(0)$ та $\dot{x}(0)$. Перш ніж підставляти початкові умови перейдемо до дійсних функцій за допомогою формул Ейлера і запишемо $x(t)$ у тригонометричному вигляді¹:

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad (3.6)$$

де $a = A_1 + A_2$ та $b = i(A_1 - A_2)$, і через початкові умови виразимо вже дійсні сталі a та b :

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b\omega_0,$$

звідки

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.7)$$

Така функція описує гармонічні коливання із частотою ω_0 , що називається *власною частотою коливань* гармонічного осцилятора.

Функцію (3.6) можна записати у іншому вигляді за допомогою однієї тригонометричної функції:

$$x(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega_0 t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega_0 t \right] = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{та} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a}.$$

¹ Перехід до тригонометричного запису можна зробити одразу, замінивши фундаментальну систему розв'язків

$$\{e^{i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t}\} \quad \text{на еквівалентну} \quad \{\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t\}$$

(вони також є незалежними) і скористатись дійсними функціями для побудови загального розв'язку.

Тут A — амплітуда та φ — початкова фаза коливань. Амплітуду та фазу можна виразити через початкові умови:

$$A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{\dot{x}(0)^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = \arctg\left(-\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right).$$

Побудований розв'язок можна використовувати далі для загального розв'язку однорідного рівняння у задачах про рух осцилятора без тертя у полі зовнішньої сили. ►

Перейдемо до задачі про вимушені коливання, яка задається рівнянням руху з неоднорідністю у правій частині:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (3.8)$$

Виявляється, що розв'язок цього рівняння можна знайти у загальному вигляді.

Приклад 2. Розв'язати рівняння (3.8) у квадратурах.

◀ Один із способів отримання розв'язку рівняння (3.8) полягає у перетворенні його до рівняння першого порядку — саме для цього класу рівнянь існує загальний метод побудови розв'язку у квадратурах (метод варіації сталої Лагранжа). Для цього побудуємо комплексну комбінацію швидкості та координати, яка може задовольняти рівняння першого порядку, що еквівалентне (3.8). Рівняння другого порядку відносно дійсної змінної еквівалентне системі двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -\omega_0^2 x + f(t) \end{cases}$$

Побудуємо лінійну комбінацію рівнянь із множниками α_1 та α_2 :

$$\alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{v} = \alpha_1 v + \alpha_2 [-\omega_0^2 x + f(t)].$$

За певного добору коефіцієнтів у обох частинах можна досягти виділення однієї і тієї самої комбінації швидкості та координати. Для спрощення покладемо $\alpha_2 = 1$:

$$\dot{v} + \alpha_1 \dot{x} = \alpha_1 v - \omega_0^2 x + f(t) = \alpha_1 v + (i\omega_0)(i\omega_0 x) + f(t) = \alpha_1 \left(v + \frac{i\omega_0}{\alpha_1} i\omega_0 x \right) + f(t).$$

У випадку $\alpha_1 = i\omega_0$ у правій та лівій частинах виділяється одна комбінація швидкості та координати²:

$$\xi = \dot{x} + i\omega_0 x.$$

У термінах змінної ξ рівняння (3.8) має вигляд:

$$\dot{\xi} - i\omega_0 \xi = f(t), \quad \text{початкова умова: } \xi(0) = \dot{x}(0) + i\omega_0 x(0).$$

Розв'язок $\xi(t)$ знайдемо як суму загального розв'язку однорідного рівняння та частинного неоднорідного. Для однорідного рівняння обчислення проводиться безпосередньо:

$$\dot{\xi} - i\omega_0 \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \xi_0 e^{i\omega_0 t}.$$

² У класичній механіці така підстановка є формальною і не має самостійного фізичного змісту, у квантовій механіці аналогічна комбінація швидкості та координати приводить до операторів народження та знищення.

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у тому самому вигляді, що і розв'язок однорідного, але заміняючи сталу ξ_0 функцією часу, тобто підставляємо $\xi = A(t)e^{i\omega_0 t}$ до рівняння (3.8):

$$\dot{A}e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A e^{i\omega_0 t} = f(t) \Rightarrow \dot{A} = f(t)e^{-i\omega_0 t},$$

звідки

$$A(t) = \int_0^t f(\tau)e^{-i\omega_0 \tau} d\tau$$

(оскільки ми шукаємо *частинний розв'язок*, сталу інтегрування можна пропустити або вибрати довільним чином, як це зроблено в останній формулі підстановкою нижньої межі). У результаті, повний розв'язок рівняння (3.8) має вигляд:

$$\xi(t) = e^{i\omega_0 t} \left[\xi_0 + \int_0^t f(\tau)e^{-i\omega_0 \tau} d\tau \right].$$

Очевидно, що при $t = 0$ останній доданок зникає, і $\xi(0) = \xi_0$. Остаточно:

$$\xi(t) = e^{i\omega_0 t} \left[\dot{x}(0) + i\omega_0 x(0) + \int_0^t f(\tau)e^{-i\omega_0 \tau} d\tau \right]. \quad (3.9)$$

За означенням, $\xi = \dot{x} + i\omega_0 x$, тому

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} \xi(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau.$$

Перші два доданки, очевидно, є загальним розв'язком однорідного рівняння. ►

Зауваження*. У теорії диференціальних рівнянь є загальний метод побудови частинного розв'язку задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь типу

$$\hat{L}x(t) = f(t), \quad \hat{L} = \sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k}{dx^k}.$$

Частинний розв'язок має вигляд (початкові умови задано у точці t_0):

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t K(t, t') f(t') dt',$$

де функція $K(t, t')$ називається *імпульсною функцією Коші* (аналог функції Гріна) і задовольняє однорідне рівняння:

$$\begin{aligned} \hat{L}K(t, t') &= 0, \\ K(t, t')|_{t'=t} = \dots = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} K(t, t')|_{t'=t} &= 0, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} K(t, t')|_{t'=t} = 1. \end{aligned}$$

У побудованого таким способом частинного розв'язку значення перших $n - 1$ похідних у початковій точці дорівнюють нулю:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}'(t_0) = \dots = \bar{x}^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Функцію Коші можна побудувати за допомогою фундаментальних розв'язків $\Phi_\alpha(t)$ однорідного рівняння із залежними від t' коефіцієнтами:

$$K(t, t') = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha(t') \Phi_\alpha(t).$$

Фізичний зміст означення функції Коші полягає у розбиванні області розв'язку $[t_0, t]$ на малі інтервали ширини Δt і врахуванню дії сили $f(t)$ на кожному з них. Частина розв'язку $\bar{x}(t)$, яка виникає за рахунок дії сили на інтервалі $[t', t' + \Delta t]$ має вигляд³ $K(t, t')f(t')\Delta t'$, а весь розв'язок дається інтегралом по часу.

Для задачі $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ функцію Коші можна знайти з рівнянь

$$K_t'' + \omega_0^2 K = 0, \quad K(t)|_{t=t'} = 0, \quad K'(t)|_{t=t'} = 1.$$

Із однорідного рівняння випливає $K = A(t') \cos \omega_0 t + B(t') \sin \omega_0 t$, після врахування початкових умов знайдемо

$$K(t, t') = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t - t'),$$

що збігається з результатами попереднього прикладу. ┐

Енергію осцилятора зручно записати за допомогою комплексної змінної ξ :

$$E(t) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{m}{2} |\xi(t)|^2,$$

Повну енергію, яка передається осцилятору зовнішньою силою, можна подати у вигляді інтегралу

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2,$$

де за нижню межу береться значення $t = -\infty$ замість $t = 0$ і вважається, що $\xi(-\infty) = 0$ (для зручності використання властивостей перетворення Фур'є). Тоді:

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \frac{1}{2m} |F(\omega)|^2,$$

де $F(\omega)$ позначає фур'є-образ функції $F(t)$. Якщо сила діє протягом скінченного інтервалу часу, тобто $\Delta t \ll \omega_0$, то вважаючи $e^{-i\omega_0 t} \simeq 1$

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right|^2 = \frac{1}{2m} |F(\omega)|^2,$$

³ Саме тому функцію Коші називають імпульсною функцією.

під модулем — імпульс, що передається системі.

Задача 3.1. Знайти енергію, яка передається лінійному осцилятору під дією зовнішньої сили $F(t) = F_0 e^{-\alpha^2 t^2}$, якщо $x(-\infty) = 0$.

Розглянемо явні вирази для правої частини у рівнянні руху. Найпоширенішою є періодична змушуюча сила.

Приклад 3. Дослідити рух гармонічного осцилятора без загасання під дією періодичної змушуючої сили $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Розглянути випадок резонансу, коли частота змушуючої сили прямує до частоти власних коливань, тобто $\omega \rightarrow \omega_0$.

◀ Рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Однорідне рівняння вже розв'язано у прикладі (1), розв'язок неоднорідного рівняння знайдемо підстановкою $x(t) = A \cos \omega t$ з невідомою сталою⁴ A . Підставляючи у рівняння руху, отримаємо:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)A = f_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Тоді повний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Виразимо невідомі сталі a та b через початкові умови:

$$x(0) = a + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \dot{x}(0) = \omega_0 b,$$

тому

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

Така залежність відповідає суперпозиції коливань із частотами ω та ω_0 (биття).

У випадку резонансу, коли $\omega \rightarrow \omega_0$, у останньому доданку виникає невизначеність типу $\frac{0}{0}$, для її розкриття використаємо правило Лопіталія:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) &= x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f_0 \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ &= x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Розв'язок, отриманий у границі $\omega \rightarrow \omega_0$ є нефізичним, оскільки амплітуда лінійно зростає по часу, що приводить до порушення наближення, у якому отримане вихідне рівняння — закон Гука про пропорційність сили пружності до зміщення частинки, справедливий тільки для невеликих відхилень від положення рівноваги. Цей висновок, очевидно, не стосується значень частот, далеких від резонансних. ▶

⁴ Більш строго, розв'язок потрібно шукати у вигляді комбінації обох тригонометричних функцій, тобто $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, але у даному рівнянні відсутній доданок з першою похідною, це еквівалентно $B = 0$.

Поведінка отриманого розв'язку у попередньому прикладі при $\omega \rightarrow \omega_0$ є типовим прикладом нестійкості щодо зовнішніх параметрів (у даному випадку частоти змущуючої сили). Причина у тому, що така механічна система є занадто ідеалізованою — коливання у реальних системах відбуваються із загасанням (взаємодія з зовнішніми факторами), або нелінійною (тоді частота коливань залежить від амплітуди і у процесі руху зсуватиметься, тому наростання амплітуди може не бути). Далі буде розглянуто систему із періодичною силою у системі із загасанням, де перехід до резонансу є цілком коректним як у математичному, так і фізичному сенсі.

3. КОЛИВАННЯ ІЗ ЗАГАСАННЯМ. Розглянемо задачу, аналогічні наведеним раніше для випадку $\beta \neq 0$.

Приклад 4. Дослідити рух вільного осцилятора із загасанням.

◀ Рівняння руху у даному випадку має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння будемо у вигляді $x = Ae^{\lambda t}$, підстановка приводить до характеристичного рівняння з розв'язком:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Загальний розв'язок рівняння руху має вигляд комбінації:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Залежно від співвідношення між ω_0 та β задача розбивається на кілька випадків.

1) Випадок $\beta > \omega_0$. Корені $\lambda_{1,2}$ є дійсними і від'ємними, тому:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{\Omega t} + A_2 e^{-\Omega t}),$$

де для скорочення перепозначено

$$\Omega(\beta) = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Використовуючи формули Ейлера для гіперболічних функцій

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

запишемо розв'язок в термінах гіперболічного синуса та косинуса

$$x(t) = e^{-\beta t} [a_1 \operatorname{ch} \Omega(\beta)t + a_2 \operatorname{sh} \Omega(\beta)t],$$

де введено інші невідомі сталі $a_1 = A_1 + A_2$ та $a_2 = A_1 - A_2$. Такий запис зручніший для підстановки початкових умов, оскільки при $t = 0$ один із доданків у виразах для координати та швидкості зникає:

$$\begin{cases} x(0) = a_1 \\ \dot{x}(0) = \Omega(\beta)a_2 - \beta a_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = x(0), \\ a_2 = \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\Omega(\beta)} \end{cases}$$

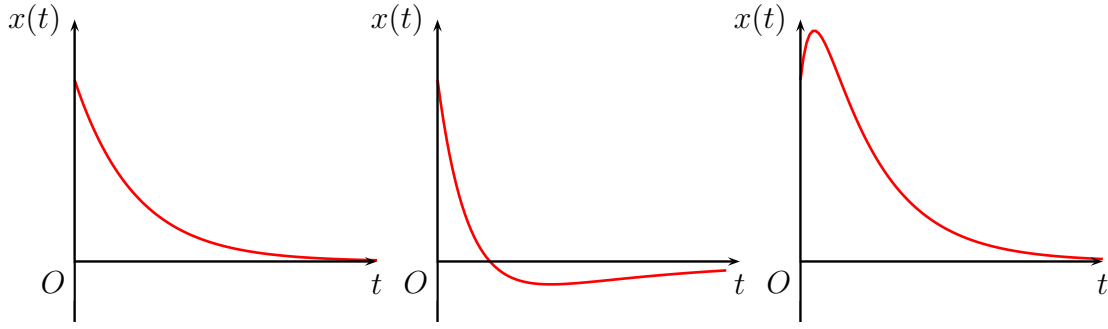


Рис. 3.1. Аперіодичний рух

звідки остаточно:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[x(0) \operatorname{ch} \Omega(\beta)t + \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\Omega(\beta)} \operatorname{sh} \Omega(\beta)t \right], \quad \Omega(\beta) = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (3.10)$$

або в експоненціальній формі:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \Omega(\beta), \quad A_{1,2} = \mp \frac{x(0)}{2\Omega(\beta)} \left[\lambda_{1,2} - \frac{\dot{x}(0)}{x(0)} \right]. \quad (3.11)$$

Функція $x(t)$ описує *аперіодичний рух* і має вигляд комбінації двох спадних експонент із різними характерними часами, які рівні $1/|\lambda_{1,2}|$. При $t \rightarrow 0$ основний внесок до розв'язку дає доданок $e^{\lambda_1 t}$, а при $t \rightarrow \infty$ — доданок $e^{\lambda_2 t}$, оскільки $\lambda_1 > \lambda_2$. Графіки $x(t)$ для різних типів початкових умов наведено на рис. 3.1, на всіх графіках $x(0) > 0$. Функція $x(t)$ як комбінація експонент може мати один екстремум (другий та третій випадки, коли $\dot{x}(0) > 0$ та $\dot{x}(0) < 0$ відповідно), або не мати жодного (перший випадок).

Знайдемо асимптотику для великих значень параметру загасання β . Очевидно при $\beta \gg 1$ корені характеристичного рівняння будуть $\lambda_1 \simeq 0$ та $\lambda_2 \simeq -2\beta$, тому відхилення описується функцією без екстремумів:

$$x(t) \simeq e^{-\beta t} \left[\frac{x(0)}{2\beta} \left(2\beta + \frac{\dot{x}(0)}{x(0)} \right) e^{\beta t} - \frac{\dot{x}(0)}{2\beta} e^{-2\beta t} \right] = x(0) + \frac{\dot{x}(0)}{2\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

Остання крива на рис. 3.1 перетинає горизонтальну вісь у деякий момент часу, тобто осцилятор один раз проходить через положення рівноваги. Знайдемо умови, за яких реалізується такий сценарій руху. Перетин, очевидно, матиме місце, якщо існує значення часу t_0 , що є коренем функції $x(t)$:

$$x(t_0) = A_1 e^{\lambda_1 t_0} + A_2 e^{\lambda_2 t_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_0} = -\frac{A_2}{A_1},$$

звідки

$$t_0 = \frac{1}{2\Omega(\beta)} \ln \left(-\frac{A_2}{A_1} \right) = \frac{1}{2\Omega(\beta)} \ln \left(\frac{\lambda_1 - \frac{\dot{x}(0)}{x(0)}}{\lambda_2 - \frac{\dot{x}(0)}{x(0)}} \right)$$

Число $t_0 > 0$ існуватиме, якщо $\frac{A_2}{A_1} < 1$ і комбінація в аргументі логарифму — більша за одиницю (інакше розв'язок буде від'ємним). перша умова еквівалентна $x(0)\dot{x}(0) < 0$, а

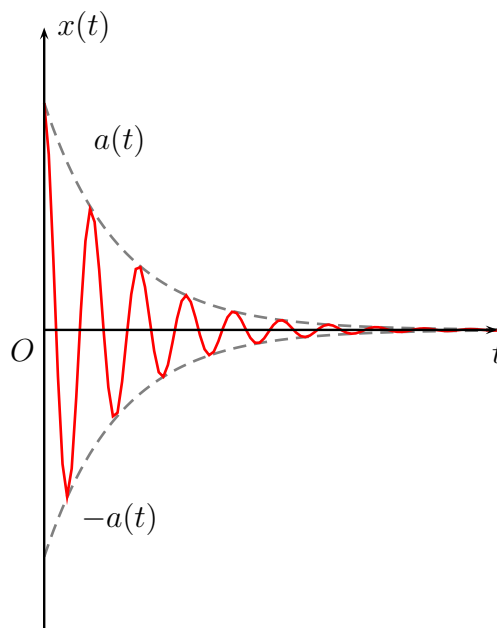


Рис. 3.2. Затухаючі коливання.

друга означає, що $\lambda_1 > \frac{\dot{x}(0)}{x(0)}$. У результаті, точка перетину існує, якщо виконуються дві умови:

$$x(0) \cdot \dot{x}(0) < 0, \quad \lambda_1 > \frac{\dot{x}(0)}{x(0)}.$$

2) Випадок $\beta = \omega_0$. Корені характеристичного рівняння збігаються, $\lambda_{1,2} = -\beta$. Згідно із загальною теорією диференціальних рівнянь розв'язок має вигляд:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}.$$

Виражаючи сталі інтегрування через початкові умови, отримаємо:

$$x(t) = [x(0) + (\dot{x}(0) + \beta x(0))t]e^{-\beta t}. \quad (3.12)$$

Рух також буде аперіодичним і буде описуватись однією спадною експонентою (тобто матиме тільки один характерний час загасання). Перетин з віссю t існуватиме, якщо початкові умови задовольняють нерівність $x(0) \cdot [\dot{x}(0) + \beta x(0)] < 0$.

3) Випадок $\beta < \omega_0$. Корені характеристичного рівняння є комплексними і мають від'ємну дійсну частину:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega(\beta), \quad \omega(\beta) = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Розв'язок можна подати у двох формах із різними сталими інтегрування:

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{i\omega(\beta)t} + A_2 e^{-i\omega(\beta)t}] = e^{-\beta t} [a_1 \cos \omega(\beta)t + a_2 \sin \omega(\beta)t].$$

Початкові умови зручніше підставляти до тригонометричної форми розв'язку:

$$\begin{cases} x(0) = a_1 \\ \dot{x}(0) = \omega(\beta)a_2 - \beta a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = x(0), \\ a_2 = \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega(\beta)}. \end{cases}$$

У результаті

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[x(0) \cos \omega(\beta)t + \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega(\beta)} \sin \omega(\beta)t \right]. \quad (3.13)$$

Рух частинки буде коливальним із загасаючою амплітудою, залежність $x(t)$ можна записати в термінах амплітудно-фазових характеристик:

$$x(t) = a(\beta, t) \cos[\omega(\beta)t + \varphi(\beta)],$$

де

$$a(\beta, t) = e^{-\beta t} \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega(\beta)} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\beta) = -\frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega(\beta)x(0)}.$$

Функція $x(t)$ вже не є періодичною, це осцилююча крива з огинаючими $a(t)$. Властивість періодичності частково зберігається у тому розумінні, що частинка проходить положення рівноваги через однакові проміжки часу, розташовані один від одного на відстані $\frac{T(\beta)}{2} = \frac{\pi}{\omega(\beta)}$ (тут $T(\beta)$ — “період” руху у тому самому розумінні). При $t \rightarrow \infty$ частинка зупиняється у положенні рівноваги $x_\infty = 0$. ►

Аналогічно задачі про вимушені коливання без загасання (приклад 2), можна побудувати загальний розв’язок у квадратурах і в задачі про вимушені коливання із загасанням для довільної змущуючої сили.

Приклад 5. Дослідити рух гармонічного осцилятора із загасанням під дією періодичної змущуючої сили $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Розглянути випадок резонансу.

◀ Рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (3.14)$$

Обмежимося випадком коливального руху, тобто $\omega_0 > \beta$. Загальний розв’язок однорідного рівняння було знайдено у прикладі 4,

$$x(t) = e^{-\beta t} [a \cos \omega(\beta)t + b \sin \omega(\beta)t].$$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння можна знайти кількома способами.

Перший спосіб. Права частина є тригонометричною функцією, тому частинний розв’язок можна шукати у вигляді комбінації тригонометричних функцій із тим самим аргументом:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

(оскільки у рівнянні (3.14) є перша похідна, то частинний розв’язок повинен включати обидві функції). Підставляючи цей вираз у рівняння (3.14) і прирівнюючи коефіцієнти при синусах та косинусах, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих сталих A та B :

$$\begin{cases} A \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + B \cdot 2\beta\omega = f_0 \\ A \cdot (-2\beta\omega) + B \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

звідки

$$A = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad B = \frac{2\beta\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

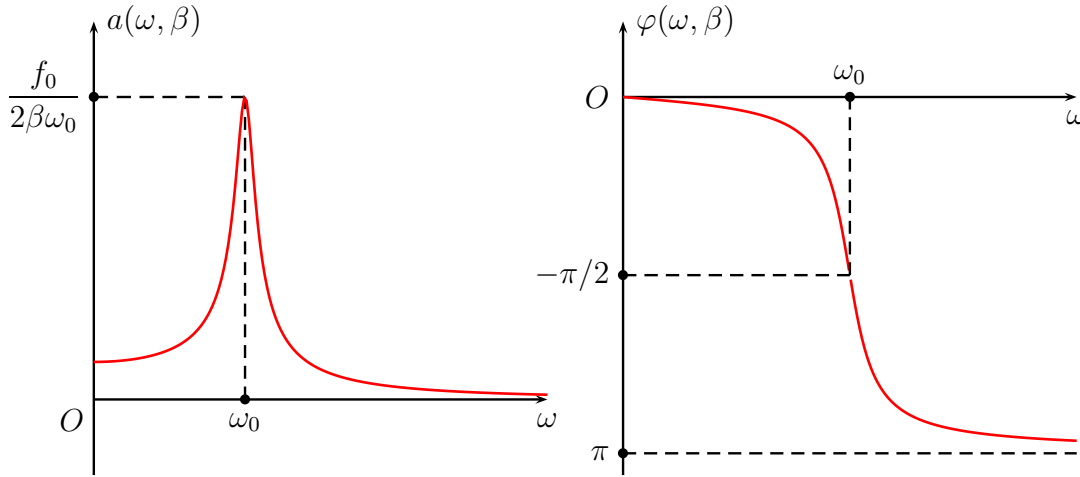


Рис. 3.3. Амплітуда та фаза усталених коливань.

У результаті, частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$x(t) = f_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\beta\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

Другий спосіб. Використаємо лінійність рівняння (3.14). Нехай $x = \operatorname{Re} z$ і змінна z задовольняє рівняння:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}.$$

Оскільки алгебраїчні операції, диференціювання та обчислення дійсної частини — лінійні, то їх можна проводити у довільному порядку. Очевидно, що дійсна частина останнього рівняння збігається з рівнянням (3.14) для x , тому для пошуку x можна спочатку знайти z (це простіше, оскільки частинний розв'язок можна шукати у вигляді одного доданку) а потім повернутись до старої змінної x за формулою $x = \operatorname{Re} z$.

Дійсно, будемо шукати частинний розв'язок у тому ж вигляді, що і права частина рівняння, тобто $z = Ae^{i\omega t}$, тоді підстановка дає:

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)Ae^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \cdot 2\beta\omega}.$$

У результаті,

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}) = \operatorname{Re} \left(\frac{f_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \cdot 2\beta\omega} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{f_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)(\omega_0^2 - \omega^2 - i \cdot 2\beta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \right) \\ &= f_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\beta\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Таким чином, повний розв'язок рівняння (3.14) має вигляд:

$$x(t) = e^{-\beta t} [a \cos \omega(\beta)t + b \sin \omega(\beta)t] + f_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\beta\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \quad (3.15)$$

Функція (3.15) має вигляд суперпозиції загасаючих коливань та періодичних коливань з частотою змушуючої сили. При $t \gg \frac{2\pi}{\omega(\beta)}$ ("період" загасаючих коливань) перші доданки

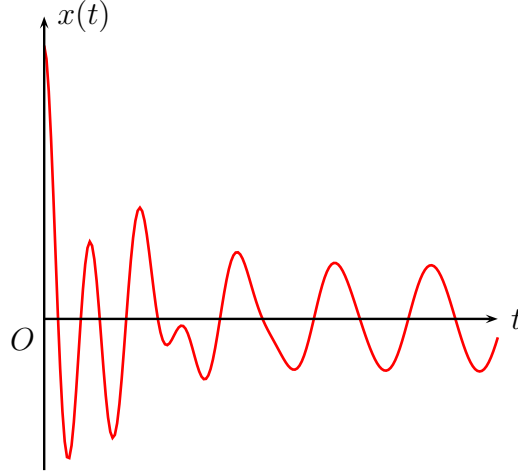


Рис. 3.4. Вимушені коливання із загасанням.

стають малими і рух повністю описується коливаннями з частотою ω , які не залежать від початкових умов:

$$x_{\infty}(t) = f_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\beta\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = a(\beta, \omega) \cos(\omega t + \varphi(\beta, \omega)), \quad t \gg \frac{2\pi}{\omega(\beta)}. \quad (3.16)$$

Такий режим називається *усталеними коливаннями*. Насправді система переходить у режим усталених коливань протягом досить короткого інтервалу часу, який дорівнює кільком проміжкам характерного часу загасання (див. рис. 3.4, де частота ω вдвічі менша за частоту ω_0). Амплітуда та фаза усталених коливань має вигляд:

$$a(\beta, \omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \varphi(\beta, \omega) = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (3.17)$$

Резонанс настає на частоті ω , коли амплітуда коливань системи набуває максимального значення. Очевидно, що у такому випадку $\omega = \omega_0$ (знаменник у виразі для $a(\beta, \omega)$ — мінімальний). Тоді

$$a(\beta, \omega) \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}, \quad \varphi(\beta, \omega) \Big|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\pi}{2}.$$

При зростанні частоти ω

$$a(\beta, \omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = 0, \quad \varphi(\beta, \omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = -\pi,$$

а при $\omega \rightarrow 0$

$$a(\beta, \omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad \varphi(\beta, \omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = 0,$$

Графіки $a(\beta, \omega)$ та $\varphi(\beta, \omega)$ як функцій ω наведено на рис. 3.3.

Знайдемо середню потужність зовнішніх сил в усталеному режимі. За означенням:

$$\frac{dE}{dt} = P(t) = F(t)\dot{x}(t), \quad P(t) = m[-2\beta\dot{x} + f(t)]\dot{x}$$

Усереднимо $P(t)$ по періоду змушуючої сили. Для сил тертя матимемо:

$$\langle P^d \rangle = -\frac{2\beta m \omega^2 a^2}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t + \varphi) dt = -\beta m \omega^2 a^2.$$

Аналогічно для сили $f(t)$:

$$\langle P^{ext} \rangle = -\frac{mf_0a}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t \, dt = -\frac{1}{2} mf_0a \sin \varphi.$$

Беручи до уваги вирази для $\sin \varphi$ та a , можна записати $\sin \varphi = -\frac{2\beta\omega}{f_0} A^2$, звідки

$$\langle P \rangle = \langle P^d \rangle + \langle P^{ext} \rangle = 0,$$

тобто в усталеному режимі середнє значення потужності сил дорівнює нулю, тому середнє значення енергії

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) dt = \frac{m}{4} (\omega^2 + \omega_0^2)$$

зберігатиметься. ►

ЛЕКЦІЯ 4

Рух у центральному полі

1.	Постановка задачі.....	79
2.	Закони збереження.....	79
3.	Ефективний потенціал.....	82
4.	Розв'язок у квадратурах для $r(t)$ та $\varphi(t)$	83
5.	Розв'язок у квадратурах для $r(\varphi)$	84
6.	Якісний аналіз руху.....	84
7.	Умова падіння у центр поля.....	86
8.	Періоди фінітного руху, умова замкненості траєкторії.....	87
9.	Теорема Ньютона.....	88
10.	Інтегровність задачі у класах тригонометричних, гіперболічних та еліптичних функцій.....	89
11.	Рух у потенціалі Кулона.....	91

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо рух ізольованої системи двох частинок з масами m_1 та m_2 , потенціал взаємодії яких залежить тільки від їх відносної відстані. Рівняння руху для задачі двох тіл матимуть вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{\nabla}_1 U(r_{12}) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{\nabla}_2 U(r_{12}) \end{cases} \quad \text{де} \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|. \quad (4.1)$$

Така механічна система є замкненою, сумарний порядок системи диференціальних рівнянь дорівнює 12, тому використання 10 інтегралів руху дозволяє знизити його до 2 і формально задача не інтегрується у квадратурах за допомогою одних лише стандартних інтегралів руху¹ (для цього порядок системи повинен дорівнювати кількості законів збереження). Однак через те, що потенціал залежить тільки від відносної координати (тобто однієї величини замість трьох), розв'язок у квадратурах все ж таки вдається побудувати. Якщо вдало вибрати систему координат, то кількість нетривіальних рівнянь руху може зменшитись. Розглянемо спочатку форму стандартних інтегралів руху у даній задачі.

2. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ.

Імпульс та центр мас. Механічна система є замкненою, тому імпульс зберігається:

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{const}.$$

¹ Підкреслимо, що насправді у цій задачі є 12 інтегралів руху, тільки два з них невідомі.

Оскільки $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}_c$, то центр мас рухатиметься прямолінійно та рівномірно. Виберемо систему відліку, в якій центр мас є нерухомим і помістимо його у початок координат:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0.$$

Тоді автоматично

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = 0.$$

Для зручності перейдемо до відносного радіус-вектора, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Виразимо перший радіус-вектор з цієї рівності, $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2$. Підстановка до закону збереження дає:

$$m_1(\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2\vec{r}_2 = 0,$$

звідки

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}, \quad M = m_1 + m_2 \quad (\text{сумарна маса}). \quad (4.2)$$

Весь подальший розгляд проводитиметься у системі центру мас.

Момент імпульсу системи

$$\vec{L} = m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

перетворимо, підставляючи вирази (4.2), тоді

$$\vec{L} = \frac{m_1m_2^2}{M^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2m_2}{M^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{m_1m_2}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}},$$

де означено так звану *зведену (ефективну) масу* μ двох частинок:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{M} \quad \text{або} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (4.3)$$

Оскільки $\vec{r} \parallel \vec{r}_1$ та $\vec{r} \parallel \vec{r}_2$ (див. (4.2)), то $\vec{L} \cdot \vec{r}_1 = \vec{L} \cdot \vec{r}_2 = 0$ і $\vec{L} \cdot \dot{\vec{r}}_1 = \vec{L} \cdot \dot{\vec{r}}_2 = 0$. Це означає, що радіус-вектори $\vec{r}_{1,2}$ частинок та їх швидкості $\dot{\vec{r}}_{1,2}$ належать одній площині, яка перпендикулярна сталому вектору \vec{L} . У цій площині і відбуватиметься рух системи.

Виберемо осі системи координат так, що цією площиною є координатна площина xy (тоді $\vec{L} = L\vec{e}_z$) і перейдемо до стандартних полярних координат (систему наведено на рис. ??):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Знайдемо формулу для швидкості $\dot{\vec{r}}$ у полярних координатах. Попередньо запишемо диференціали базисних ортів:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \end{cases}$$

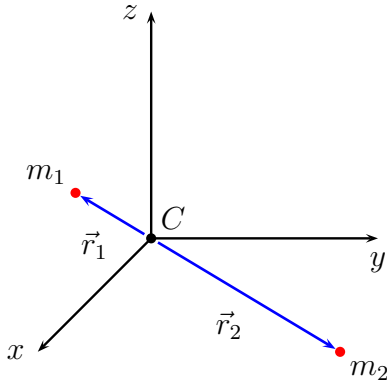


Рис. 4.1. Система центру мас

звідси отримаємо:

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = \vec{e}_\varphi d\varphi \\ d\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r d\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r. \end{cases}$$

У результаті, похідна вектора \vec{r} по часу має вигляд:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad (4.4)$$

Таким чином, для моменту імпульсу отримаємо вираз:

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = \mu r^2\dot{\varphi} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi.$$

Орти циліндричної системи координат утворюють праву трійку векторів. Добуток у правій частині виразу \vec{L} виражається через орт \vec{e}_z , а саме $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$, тому остаточна формула для моменту в полярних (циліндричних) координатах має вигляд:

$$\vec{L} = \mu r^2\dot{\varphi} \vec{e}_z \quad \text{або} \quad L = \mu r^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (4.5)$$

Закон збереження моменту імпульсу має безпосередній геометричний зміст. Розглянемо дві сусідні точки на траєкторії $r(\varphi)$, полярні кути відрізняються на малу величину $d\varphi$ (див рис. 4.3). Площу, яку описує радіус-вектор частинки \vec{r} у результаті її переміщення за час dt можна записати у вигляді:

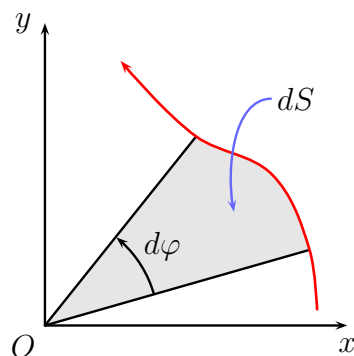


Рис. 4.3. До означення секторіальної швидкості.

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

швидкість зміни площі сектору $\frac{dS}{dt}$ називається *секторіальною швидкістю*.

Згідно із законом збереження моменту імпульсу, секторіальна швидкість у задачі двох тіл є сталою (другий закон Кеплера):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \equiv \frac{L}{2\mu} = \text{const}. \quad (4.6)$$

Енергія. Використовуючи вираз для швидкості у полярних координатах (4.4), перетворимо вираз для енергії системи:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} + U(r) = \left| \begin{smallmatrix} \text{підстановка} \\ \vec{r}_1 \text{ та } \vec{r}_2 \end{smallmatrix} \right| = \frac{m_1 m_2^2}{2M^2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{2M^2} \dot{\vec{r}}^2 + U(r) \\ &= \frac{\mu}{2} (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)^2 + U(r) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r). \end{aligned}$$

Остаточно, закони збереження мають вигляд:

$$\vec{P} = 0, \quad L = \mu r^2 \dot{\varphi}, \quad E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r). \quad (4.7)$$

Таким чином, для системи двох частинок з потенціальною взаємодією незалежними координатами будуть проекції вектора відносної відстані \vec{r} , або еквівалентні полярні координати.

Вирази для енергії та моменту імпульсу системи двох частинок з масами m_1 та m_2 за формою такі самі, як відповідні вирази для енергії та моменту для однієї частинки з масою μ , яка рухається у потенціалі $U(r)$ нерухомого силового центру, розташованого у початку координат. У цьому розумінні *задача двох тіл зводиться до задачі руху частинки у центральному полі*. Аналогія цих задач, однак, є тільки формальною — фізично вони *абсолютно різні*². Для однієї частинки силовий центр є зовнішньою системою, тому зберігатиметься повна енергія, яка включає енергію взаємодії з полем, а також момент імпульсу (через центральність поля)

$$E = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r), \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(-\frac{\vec{r}}{r} U'(r) \right) \equiv 0.$$

Імпульс частинки не зберігатиметься, закон його зміни дається рівнянням руху

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) = -\frac{\vec{r}}{r} U'(r),$$

тоді як у задачі двох тіл система двох частинок є замкненою, імпульс зберігається і у вибраних координатах дорівнює нулю.

Незважаючи на це, далі розглядатиметься задача руху у центральному полі як еквівалентна форма задачі двох тіл, оскільки для аналізу руху частинки імпульс як такий не використовується. Перехід від розв'язку однієї задачі до розв'язку іншої проводиться за допомогою формул зв'язку векторів $\vec{r}_{1,2}$ та вектора відносної відстані \vec{r} (формули (4.2)).

3. ЕФЕКТИВНИЙ ПОТЕНЦІАЛ. Виразимо кутову швидкість $\dot{\varphi}$ із закону збереження моменту імпульсу

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}, \quad (4.8)$$

і підставимо до формули для енергії:

$$E = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

Другий доданок у правій частині за своїм походженням є кінетичною енергією обертання, але після використання закону збереження моменту імпульсу перестає залежати від швидкості, тому *за формою* він нагадує потенціальну енергію і часто називається *відцентровим потенціалом*. Означимо *ефективний потенціал* як суму потенціалу поля та відцентрового:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (4.9)$$

² Хоча б тому, що ці задачі означені у різних системах відліку: для задачі двох тіл початок координат розташований у центрі мас, а для руху у центральному полі — у силовому центрі.

тоді повна енергія має вигляд суми кінетичної енергії радіального руху та ефективного потенціалу:

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r). \quad (4.10)$$

Вираз (4.10) за формою схожий на вираз енергії одновимірного руху, але з двома суттєвими відмінностями. По-перше, полярна координата r за своїм змістом є невід'ємною величиною (як довжина відрізка), тоді як координата у задачі про одновимірний рух може мати довільний знак (як відхилення від початку координат). По-друге, сила, яка діє на частинку, виражається не через ефективний, а через фізичний потенціал, за законом $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$. Незважаючи на те, що ефективний потенціал не має безпосереднього фізичного змісту, його використання зручне для якісного аналізу руху — визначення точок повороту, областей руху тощо. (див. п. 6).

Зауваження. Знайдемо вираз для сили, яка формально відповідає відцентровому потенціалу $U_c = \frac{L^2}{2\mu r^2}$:

$$F_c = -\frac{d}{dr} \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} = \frac{\mu v_{\perp}^2}{r},$$

де $v_{\perp} = v_{\varphi} = r\dot{\varphi}$ — кутова складова швидкості. Тут враховано, що $L = \mu r v_{\perp}$. Доданок \vec{F}_c є “відцентровою силою інерції”, звідси і назва потенціалу.

Сила, яка відповідає ефективному потенціалу, має вигляд:

$$\vec{F}_{eff}(r) = -\vec{\nabla}U_{eff}(r) = -\frac{\vec{r}}{r} U'_{eff}(r) = -\frac{\vec{r}}{r} U'(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}(r) + \mu \dot{\varphi}^2 \vec{r}.$$

Цей вираз можна інтерпретувати як вираз для сили у неінерціальній системі відліку, яка обертається разом з частинкою із кутовою швидкістю $\dot{\varphi}$. \square

4. Розв'язок у квадратурах для $r(t)$ та $\varphi(t)$. Як і в задачі про одновимірний рух, залежність $r(t)$ знайдемо за допомогою інтегралу енергії:

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{eff}(r))}.$$

Відокремлюючи змінні у диференціальному рівнянні, отримаємо квадратуру:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}, \quad (4.11)$$

де t_0 — стала інтегрування, а подвійний знак відповідає вибору напрямку початкової радіальної швидкості $\dot{r}(0)$ у початковий момент часу. Інша форма запису — через значення радіуса у деякий момент часу:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}, \quad (4.12)$$

тут t_0 — довільна стала, що відповідає початку відліку часу (часто покладають $t_0 = 0$), а $r_0 = r(t_0)$. Після обчислення інтегралу (4.11) або (4.12) буде отримано залежність $t = t(r)$, обернення якої дає шукану функцію $r = r(t)$.

Залежність $\varphi = \varphi(t)$ знайдемо, інтегруючи вираз (4.8) по часу, вважаючи, що функцію $r(t)$ вже знайдено з виразу (4.11):

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{L}{\mu r^2(t)} dt, \quad (4.13)$$

де φ_0 позначає початок відліку кута — очевидно, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ (t_0 — довільна стала).

Зауваження. З рівняння (4.8) випливає, що $\dot{\varphi} > 0$ (або $\dot{\varphi} < 0$), тобто кут змінюється монотонно (завжди). Кутова швидкість дорівнює нулю тільки при $\vec{L} = 0$ і прямує до нуля при $r \rightarrow \infty$ (великі віддалення від центру поля). Крім того, $\dot{\varphi} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. \square

5. Розв'язок у квадратурах для $r(\varphi)$. У полярних координатах траєкторію частинки можна описати параметрично заданою функцією $r = r(t)$ та $\varphi = \varphi(t)$. Явну функцію $r = r(\varphi)$ можна отримати, якщо виключити параметр t з попередніх двох формул, наприклад, можна знайти $t = t(\varphi)$ і виконати підстановку у радіальну функцію: $r = r(t(\varphi)) := r(\varphi)$.

Інший, загальніший спосіб пошуку рівняння траєкторії $r = r(\varphi)$ полягає у заміні змінної t на φ у виразі для енергії:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \left| \begin{smallmatrix} \text{формула} \\ (4.8) \end{smallmatrix} \right| = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{\mu \dot{r}^2}{2} = \left(\frac{L}{\mu r^2} \right)^2 \frac{\mu r'^2(\varphi)}{2} = E - U_{\text{eff}}(r),$$

виражаючи $r'(\varphi)$ та інтегруючи отримане рівняння, знайдемо:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{[2\mu(E - U_{\text{eff}}(r))]^{1/2}}, \quad (4.14)$$

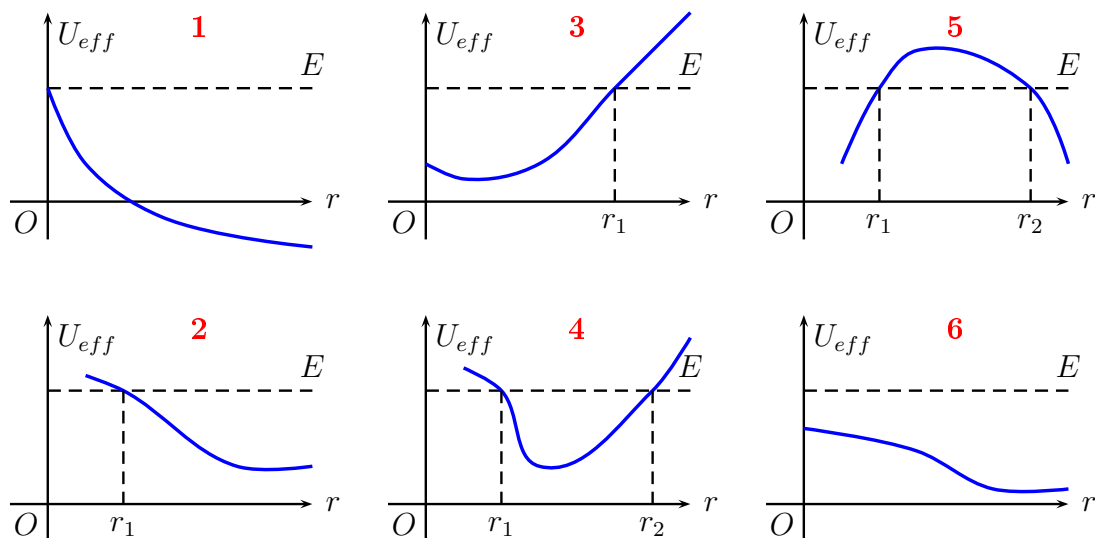
або у формі визначеного інтегралу:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{[2\mu(E - U_{\text{eff}}(r))]^{1/2}}, \quad (4.15)$$

тут $\varphi = \varphi_0$ відповідає значенню $r = r_0$ (формально відповідає початку відліку кута). У багатьох випадках зручно покласти $\varphi_0 = 0$. Стала інтегрування у такому записі виникає на підстановці $r = r_0$ у формулі Ньютона-Лейбніца.

6. Якісний аналіз руху. Радіальна частина кінетичної енергії за означенням є додатною величиною, тому область, у якій відбувається рух системи визначається умовою:

$$T(r) \equiv \frac{\mu \dot{r}^2}{2} = E - U_{\text{eff}}(r) = E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \geq 0.$$

Рис. 4.4. Варіанти поведінки потенціалу $U_{eff}(r)$.

Як і у випадку одновимірного руху, рух можливий у області, де $U_{eff}(r) < E$. Для аналізу характеру руху потрібно побудувати графік ефективного потенціалу і знайти області, де графік $U_{eff}(r)$ лежить нижче заданого рівня енергії. Точки, у яких $U_{eff}(r) = E$ називаються *точками повороту*, але на відміну від одновимірного руху у точці повороту перетворюється в нуль тільки радіальна компонента $\dot{r}\vec{e}_r$ повної швидкості $\vec{\dot{r}}$. Кутова частина $\dot{\varphi}$ скрізь відмінна від нуля і частинка продовжує рух без зупинок (обертаючись). Після проходження точки повороту напрямок радіального руху змінюється на протилежний.

Зауваження. Відстань між графіками $U_{eff}(r)$ та E дає уявлення тільки про значення радіальної швидкості \dot{r} . Повну швидкість $|\vec{\dot{r}}|$ можна описати відстанню між графіками $U(r)$ та E . \lrcorner

Як і для одновимірної задачі, рух називається *фінітним*, якщо відбувається у області, обмеженій двома точками повороту (тобто $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, де допустима рівність $r_{min} = 0$), і *інфінітним* в решті випадків. У випадку фінітного руху між двома точками повороту r_{min} та r_{max} траєкторія частинки розташована всередині області між двома концентричними колами, $r \in [r_{min}, r_{max}]$.

Зауваження. Із виразу квадратури легко бачити, що траєкторія симетрична відносно точки повороту як для фінітного, так і для інфінітного руху (перестановка меж у інтегралі). \lrcorner

Опишемо деякі можливі випадки поведінки ефективного потенціалу та відповідних типів руху (див. рис. 4.4).

Випадок 1, $U_{eff}(r) \rightarrow E$ при $r \rightarrow 0$. Частинка відбивається безпосередньо від силового центру (лобове зіткнення точкових частинок), після чого рухається на нескінченність під іншим кутом.

Випадок 2, $U_{eff}(r) \leq E$ при $r \geq r_1$ (r_1 — точка повороту). Частинка відбивається від силового центру, наближаючись до нього на відстань r_1 після чого рухається на нескінченність під іншим кутом (розсіювання).

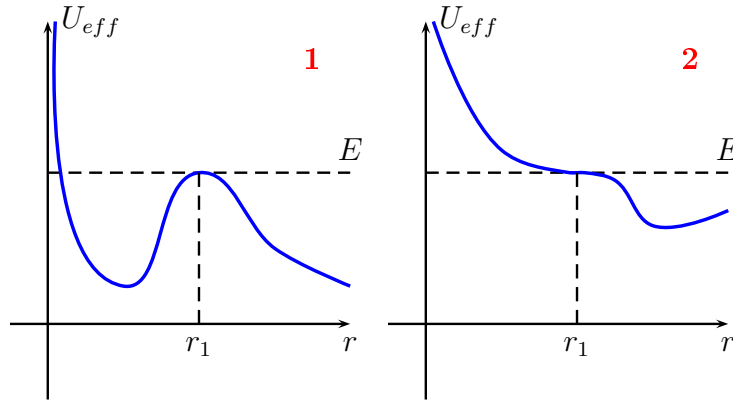


Рис. 4.5. Нескінченні процеси.

Випадок 3, $U_{eff}(r) \leq E$ при $r \in [0, r_1]$. Для одного з варіантів початкових умов, $r(0) = 0$, $\dot{r}(0) > 0$, частинка “виштовхується” з силового центру з деякою радіальною швидкістю і, віддалившись на відстань r_1 (точка повороту), падає назад в центр поля. Якщо $r(0) \in [0, r_1]$, $\dot{r}(0) < 0$ частинка одразу падає в центр. Цей процес не має чіткого пояснення в межах класичної механіки.

Випадок 4, $U_{eff}(r) \leq E$ при $r \in [r_1, r_2]$. Фінітний рух, траєкторія частинки знаходиться всередині кільця, обмеженого колами з радіусами $r_{1,2}$ (точки повороту).

Випадок 5, $U_{eff}(r) \leq E$ при $r \in [0, r_1]$ та $r \in [r_2, \infty]$. Якщо початкова координата вибрана так, що $r(0) < r_1$, то рух описується випадком 3, якщо ж $r(0) > r_2$, то випадком 2.

Випадок 6, $U_{eff}(r) \leq E$ для всіх $r \geq 0$. Падіння в центр поля при $\dot{r}(0) < 0$ з даної відстані (частинка поглинається центром), або рух від центру на нескінченність при $\dot{r}(0) > 0$.

Якщо точки повороту є екстремумами ефективного потенціалу³, то інтеграл (4.11) буде розбіжним у околі точки повороту і частинка зупинятиметься у цій точці протягом нескінченного часу (рухаючись по асимптотичній траєкторії, близькій до кола). Цей асимптотичний рух буде нестійким, оскільки потенціал має максимум або точку перегину (рис. 4.5), то у випадку малої зміни параметрів задачі частинка залишить асимптоту $r = r_1$.

7. УМОВА ПАДІННЯ У ЦЕНТР ПОЛЯ. Ситуація падіння в центр поля забезпечується досяжністю точки $r = 0$, тобто виконується умова $U_{eff}(0) \leq E$ (див. рис. 4.6), у явному вигляді:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \leq E,$$

або

$$r^2 U(r) + \frac{L^2}{2\mu} \leq E r^2,$$

при $r \rightarrow 0$. Переходячи до границі, отримаємо умову на потенціал, у якому можливе падіння в силовий центр:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) \leq -\frac{L^2}{2\mu}. \quad (4.16)$$

³ Іншими словами, рівняння $U_{eff}(r) = E$ має кратні корені.

Така умова, зокрема, виконується для потенціалів, які поведуть себе у околі початку координат як $U(r) \simeq \frac{\alpha}{r^n}$, при $n \geq 2$ та $\alpha < 0$ (умова спадання).

8. ПЕРІОДИ ФІНІТНОГО РУХУ, УМОВА ЗАМКНЕНОСТІ ТРАЄКТОРІЇ. У випадку фінітного руху з двома точками повороту r_{min} та r_{max} знайдемо час, за який частинка проходить відстань між двома сусідніми однотипними точками повороту (рис. (4.7)). Як і у одновимірному випадку, він буде дорівнювати подвоєному часу руху від точки повороту r_{min} до r_{max} ,

$$T_r = 2t(r) \Big|_{r=r_{min}}^{r=r_{max}} = \sqrt{2\mu} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}, \quad (4.17)$$

і називається *періодом радіального руху*.

Зауваження. Орієнтація на точки повороту для означення періоду руху пов'язана з тим, що в них легко визначити механічний стан частинки. Останній визначається набором всіх координат та швидкостей, але якщо частинка перебуває у точці повороту з радіальною координатою r_0 , то радіальна швидкість буде дорівнювати нулю, а кутову швидкість можна знайти із закону збереження моменту імпульсу по відомій координаті: $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r_0^2}$. Тому механічний стан частинки у точці повороту можна однозначно задати тільки положенням (r_0, φ_0) . ┘

Аналогічно можна означити час, за який частинка робить повний оберт навколо силового центру, при цьому координата φ змінюється від 0 до 2π , підставляючи значення $\varphi = 2\pi + \varphi_0$ та $t_0 = 0$ до інтегралу (4.14), отримуємо рівняння для часу T_φ

$$2\pi = \int_0^{T_\varphi} \frac{L}{\mu r^2(t)} dt, \quad (4.18)$$

який називається *періодом кутового руху*.

Зауваження. У означенні (4.18) передбачається, що частинка здійснює періодичний радіальний рух, інакше період T_φ залежатиме від моменту часу, від якого він відраховується: областю інтегрування у означенні (4.18) взагалі кажучи, має бути інтервал $[t_0, t_0 + T_\varphi]$. Саме завдяки такому обмеженню $T_\varphi \neq T_\varphi(t_0)$, це буде очевидно з іншого представлення для періоду T_φ , яке наведено далі (див. вираз (4.22)). ┘

На відміну від одновимірної задачі, у загальному випадку означити “період руху” неможливо. Тільки у випадку, якщо траєкторія є замкнутою кривою, *періодом*

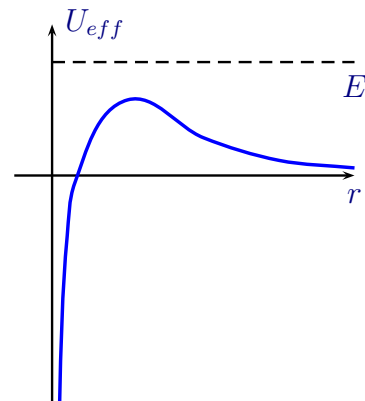


Рис. 4.6. Падіння в центр поля.

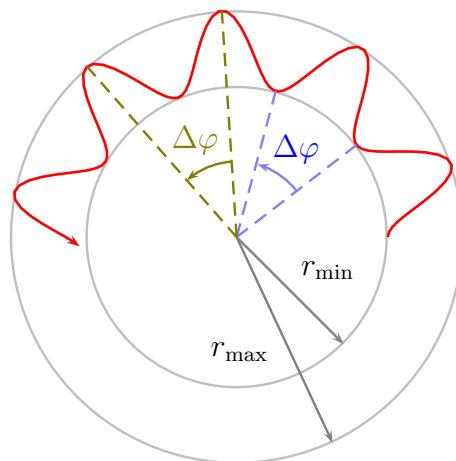


Рис. 4.7. Фінітний рух.

руху T називається час, за який частинка повертається у початковий механічний стан. Очевидно, період T буде кратним до періодів T_r та T_φ :

$$T = nT_r = mT_\varphi, \quad m \text{ та } n — \text{цілі числа.} \quad (4.19)$$

Іншими словами, частинка повертатиметься у початкове положення з тією самою швидкістю після n проходжень однотипних точок повороту (максимального чи мінімального віддалення), та m повних обертів навколо силового центру.

Умова замкненості траєкторії автоматично означає, що періоди T_r та T_φ для руху повинні бути співрозмірними:

$$\frac{T_r}{T_\varphi} = \frac{m}{n}. \quad (4.20)$$

Для перевірки замкненості траєкторії, потрібно знати обидва періоди T_r та T_φ . Досить часто величину T_φ знайти з означення (4.18) важко, а інколи взагалі неможливо. Тому умову (4.20) замінюють на еквівалентну. Якщо траєкторія є замкнутою, то кутова відстань між сусідніми однотипними точками повороту (див. рис. 4.7)

$$\Delta\varphi = 2\varphi(r)|_{r=r_{min}}^{r=r_{max}} = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - U_{eff}(r)]}} \quad (4.21)$$

повинна бути співрозмірна з 2π , і відношення $\Delta\varphi/2\pi$ дорівнює відношенню періодів:

$$\frac{T_r}{T_\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{m}{n}, \quad (4.22)$$

оскільки T_r є проміжком часу, за який кут змінюється на $\Delta\varphi$, а T_φ — проміжок часу, за який кут змінюється на 2π .

Останню умову можна взяти як умову замкненості траєкторії, вона також означає, що за n проходжень однотипних точок повороту частинка робить m повних обертів навколо центру поля. Після того, як знайдено дріб у правій частині (4.22), можна знайти період T_φ по відомому періоду T_r :

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} T_r.$$

Зауваження. У загальному випадку умова замкненості траєкторії суттєво залежить від початкових умов (тобто від L та E у нашому контексті). Тільки у двох потенціалах $U(r) = \frac{kr^2}{2}$ (гармонічний потенціал) та $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ (кулонівський потенціал) траєкторія фінітного руху буде замкнутою завжди. \square

9. ТЕОРЕМА НЬЮТОНА. Оскільки в ефективному потенціалі завжди фігурує доданок, пропорційний до $\frac{1}{r^2}$, то у загальному випадку можна стверджувати, що траєкторії руху у потенціалах $U(r)$ та $\bar{U}(r) = U(r) + \frac{\alpha}{r^2}$ інтегруються у одному класі функцій, оскільки інтеграл траєкторії для $\bar{U}(r)$ після переозначення моменту імпульсу зводиться до інтегралу для $U(r)$.

Дійсно, для $U(r)$ траєкторія дається інтегралом

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} := f(r, L).$$

Аналогічно для $\bar{U}(r)$:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - \bar{U} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}} = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U - \frac{L^2 + 2\mu\alpha}{2\mu r^2} \right)}}.$$

Залежно від значення моменту та параметра α комбінація $L^2 + 2\mu\alpha$ може бути додатньою, від'ємною або рівною нулю. Нехай реалізується перший випадок, тобто виконується нерівність $L^2 + 2\mu\alpha := \bar{L}^2 > 0$, тоді

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U - \frac{\bar{L}^2}{2\mu r^2} \right)}} = \frac{L}{\bar{L}} \int \frac{\bar{L}}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U - \frac{\bar{L}^2}{2\mu r^2} \right)}} = \frac{L}{\bar{L}} f(r, \bar{L}),$$

де $f(r, \bar{L})$ — та ж функція, що і у попередньому випадку, але з іншим значенням моменту. Позначивши $\gamma = \frac{\bar{L}}{L}$, сформулюємо отриманий результат наступним чином:

Якщо $r = r(\varphi, L)$ — траєкторія руху частинки у потенціалі $U(r)$ при заданому моменті імпульсу L , то траєкторія руху у потенціалі $\bar{U}(r) = U(r) + \frac{\alpha}{r^2}$ дається функцією $r = r(\gamma\varphi, \bar{L})$, де $\bar{L}^2 = L^2 + 2\mu\alpha$, $\gamma = \frac{\bar{L}}{L}$ (теорема Ньютона).

Зауваження. Величина \bar{L} має розмірність моменту імпульсу, але не є справжнім моментом (який залишається рівним L). ┘

Задача 4.1. Як зміниться попередній висновок, якщо $L^2 + 2\mu\alpha := -\bar{L}^2 < 0$?

10. ІНТЕГРОВНІСТЬ ЗАДАЧІ У КЛАСАХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ, ГІПЕРБОЛІЧНИХ ТА ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ. Розглянемо випадки, коли траєкторію $r(\varphi)$ руху у потенціалах типу

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$$

можна знайти у класах тригонометричних, гіперболічних та еліптичних функцій.

У даному випадку квадратура має вигляд:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu E - \frac{2\mu\alpha}{r^n} - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

Форма підінтегральної функції, яка відповідає тригонометричним та еліптичним функціям у результаті інтегрування, зводиться до кореня з полінома у знаменнику. Її можна отримати після декількох послідовних замінів

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{P_m(x)}},$$

де $m = 2$ тригонометричних функцій, та $m = 3, 4$ для еліптичних.

Зведення можна провести кількома стандартними підстановками. Розглянемо заміну $u = 1/r$, тоді

$$\varphi - \varphi_0 = -L \int \frac{du}{\sqrt{2\mu E - 2\mu\alpha u^n - L^2 u^2}}. \quad (4.23)$$

Очевидно, при $n = 0, 1, 2$ розв'язок можна знайти у класі тригонометричних функцій (випадок $n = 0$ нецікавий і відповідає вільному руху). Для $n = -2$ після зведення до спільного знаменника прийдемо до повторної заміни:

$$\varphi - \varphi_0 = -L \int \frac{u du}{\sqrt{2\mu E u^2 - 2\mu\alpha - L^2 u^4}} = \left| \begin{smallmatrix} \text{заміна} \\ x = u^2 \end{smallmatrix} \right| = -\frac{L}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{2\mu E x - 2\mu\alpha - L^2 x^2}}$$

Таким чином,

Випадки $n = -2, 1, 2$ допускають розв'язки у класах тригонометричних та гіперболічних функцій.

Зауваження. Відповідні потенціали мають вигляд $U = \frac{\alpha}{r}$ (потенціал Кулона), $U = \frac{\alpha}{r^2}$ та $U = \alpha r^2$ (потенціал просторового осцилятора), детальний аналіз одного з них буде проведено далі. Потенціал, що утворюється як комбінація функцій $\frac{1}{r}$ та $\frac{1}{r^2}$ також інтегрується в тригонометричних функціях, для розв'язку задач з окремо взятими доданками потенціалу використовуються однотипні підстановки. Те саме виконується і для комбінації r^2 з $\frac{1}{r^2}$, але для r^2 з $\frac{1}{r}$ ситуація інша. ▮

Із рівняння (4.23) безпосередньо видно, що при $n = -1, 3, 4$ під радикалом буде поліном третього або четвертого порядку, тому інтеграл можна перетворити за допомогою еліптичних функцій. Винесемо з-під радикалу u^n :

$$\varphi - \varphi_0 = -L \int \frac{u^{-n/2} du}{\sqrt{2\mu E u^{-n} - 2\mu\alpha - L^2 u^{2-n}}}.$$

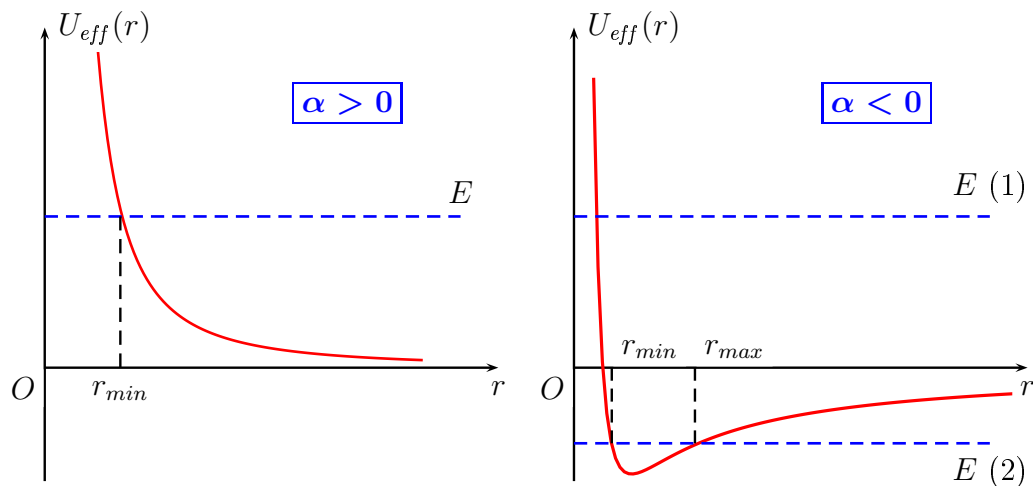
Очевидно, для парного значення $n = -2k$ у чисельнику радикалу не буде, і

$$\varphi - \varphi_0 = -L \int \frac{u^k du}{\sqrt{2\mu E u^{2k} - 2\mu\alpha - L^2 u^{2(k+1)}}} = \left| \begin{smallmatrix} \text{заміна} \\ x = u^2 \end{smallmatrix} \right| = -\frac{L}{2} \int \frac{x^{(k-1)/2} dx}{\sqrt{2\mu E x^k - 2\mu\alpha - L^2 x^{1+k}}}.$$

Цей інтеграл зводиться до еліптичного при $k = 2, 3$ що еквівалентно $n = -4, -6$. Повертаючись до змінної r легко показати, що інтеграл буде еліптичним і для випадку $n = 6$:

$$\varphi - \varphi_0 = -L \int \frac{r dr}{\sqrt{2\mu E r^6 - 2\mu\alpha - L^2 r^4}}, \quad n = -6.$$

Аналогічні висновки можна отримати, домножуючи чисельник і знаменник підінтегрального виразу на u^s , x^s або r^s з подальшим підбором показника s . У результаті,

Рис. 4.8. Потенціал $U_{eff}(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$.

Випадки $n = -6, -4, 3, 4, 6$ допускають розв'язки у класах еліптичних функцій.

Цим вичерпуються випадки, які можна аналізувати наведеним способом, однак існують степені, які можна зводити до еліптичних інтегралів іншими підстановками.

Задача 4.2. Показати, що випадки

$$n = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$$

зводяться до еліптичних інтегралів.

Зауваження. Всі степеневі потенціали відповідають степеневим силам, однак обернене твердження неправильне. Потенціал $U = U_0 \ln(kr)$ також приводить до степеневі сили $F = \frac{U_0}{r}$, але така сила породжується не точковим центром, а лінійним розподілом джерел (взаємодія частинки з масою, що однорідно розподілена вздовж прямої, причому потенціал взаємодії частинки з елементом маси — кулонівський). ▮

11. Рух у потенціалі Кулона. Важливим прикладом руху у центральному полі є рух частинки у потенціалі Кулона $U(r) = \frac{\alpha}{r}$. Графік ефективного потенціалу

$$U_{eff}(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

побудуємо окремо для випадків $\alpha > 0$ (відштовхування) та $\alpha < 0$ (притягання), див. рис. 4.8.

Якісний аналіз. У околі $r = 0$ основний внесок до потенціалу дає другий доданок, тому падіння в центр у даній задачі не реалізується для жодних яких значень показника α . Для $r \rightarrow \infty$ поведінка потенціалу в основному визначається першим доданком.

Опишемо якісно характер руху для обох випадків і знайдемо точки повороту.

Відштовшування, $\alpha > 0$. Рух буде інфінітним і можливий для довільного значення $E > 0$. У даному випадку є одна точка повороту r_{min} :

$$E = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \Rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \frac{\mu\alpha}{L^2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \right] \quad (4.24)$$

(від'ємний корінь квадратного рівняння не має фізичного змісту).

Притягання, $\alpha < 0$. Ефективний потенціал має екстремум:

$$U'_{eff}(r) = \frac{|\alpha|}{r^2} - \frac{L^2}{\mu r^3} = 0 \Rightarrow r_m = \frac{L^2}{\mu|\alpha|}, \quad U_m \equiv U_{eff}(r_m) = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2},$$

тому рух відбуватиметься з допустимими значеннями енергії $E > U_m$. Характер руху залежить від значення E , можливі два типи руху:

- Інфінітний: $E > 0$, одна точка повороту:

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{\mu|\alpha|}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \right]. \quad (4.25)$$

- Фінітний: $-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$, дві точки повороту:

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{\mu|\alpha|}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2}} \right], \quad \frac{1}{r_{max}} = \frac{\mu|\alpha|}{L^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2}} \right]. \quad (4.26)$$

Зауваження. Значення точок повороту можна записати і у іншому вигляді, виражаючи r замість $1/r$. Вибрані позначення мотивуються зручністю подальшої підстановки у межі інтегралів. \lrcorner

Траєкторія $r(\varphi)$. Підставимо потенціал до квадратурної формули для траєкторії, поки не конкретизуючи знак α :

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\left[2\mu \left(E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2}} = \left| \begin{array}{c} \text{заміна:} \\ y = \frac{1}{r} \end{array} \right| = - \int \frac{L dy}{\left[2\mu E - 2\mu\alpha y - L^2 y^2 \right]^{1/2}} \\ &= - \int \frac{dy}{\left[\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu\alpha}{L^2} y - y^2 \right]^{1/2}} = - \int \frac{dy}{\left[\left(\frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2} - \left(y + \frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Інтеграл матиме зміст при $\left(\frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2} > 0$, що еквівалентно $E > U_m$, і виражатиметься через тригонометричну функцію для всіх випадків руху:

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r} + \frac{\mu\alpha}{L^2}}{\sqrt{\left(\frac{\mu\alpha}{L^2} \right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2}}} = \arccos \frac{\frac{1}{r} \frac{L^2}{\mu|\alpha|} + \text{sign}\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}} := \arccos \frac{\frac{p}{r} + \text{sign}\alpha}{\varepsilon}$$

де введено позначення:

$$p = \frac{L^2}{\mu|\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (4.27)$$

Очевидно, ε є дійсною величиною для допустимих значень енергії $E > U_m$, для відштовхування це видно з означення, а для притягання — з виразу $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{U_m}}$. Обертаючи залежність $\varphi(r)$, отримаємо рівняння траєкторії:

$$r(\varphi) = \frac{p}{-\text{sign}\alpha + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.28)$$

Формула (4.28) є канонічним рівнянням конічного перерізу⁴ з ексцентриситетом ε у полярних координатах, початок координат розташований у фокусі кривої, а її тип визначається знаком параметру α та значенням ε .

Таким чином, отримано загальну властивість руху у потенціалі Кулона, що відома як *перший закон Кеплера*⁵:

Частинка рухається у потенціалі Кулона по конічному перерізу, фокус якого (дійсний чи уявний) розташований у центрі силового поля. У випадку фінітного руху траєкторія буде еліпсом.

Далі наведено короткі описи можливих типів конічних перерізів, які показані на рис. 4.9.

Випадок 1 (притягання): $\alpha < 0$, $E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$. Тоді $\varepsilon = 0$ і частинка рухається по колу $r = r_m = p$.

Випадок 2 (притягання): $\alpha < 0$, $-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$. Тоді $0 < \varepsilon < 1$ і траєкторія буде еліпсом:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

фокус якого розташований у початку координат. Точки повороту відповідатимуть значенням кутів $\varphi = \varphi_0$ та $\varphi = \varphi_0 + \pi$,

$$r(\varphi_0) = r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad r(\varphi_0 + \pi) = r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \quad (4.29)$$

Напівосі еліпса (зв'язок за означенням: $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{велика: } a &= \frac{1}{2} [r(\varphi_0) + r(\varphi_0 + \pi)] = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \equiv \frac{|\alpha|}{2|E|}, \\ \text{мала: } b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \equiv \frac{L}{\sqrt{2\mu|E|}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

⁴ Це криві другого порядку — еліпс, гіпербола, парабола. Їх можна отримати на перетині конуса з похилою площиною (звідси назва).

⁵ Формулювання, близьке до оригінального: “планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких розташоване Сонце”.

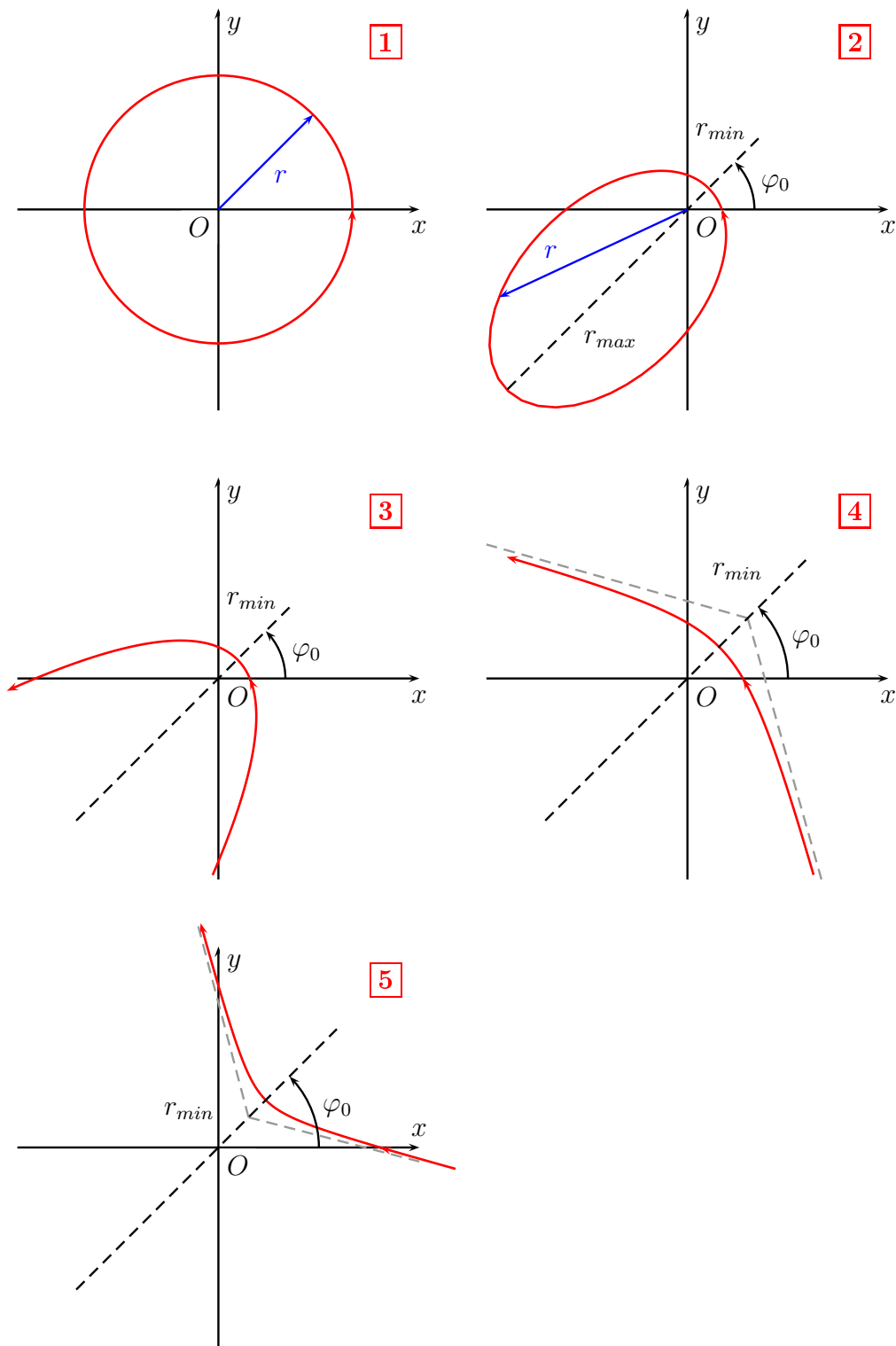


Рис. 4.9. Можливі траєкторії руху у потенціалі $U(r) = \frac{\alpha}{r}$.

Зауважимо, що довжина великої півосі еліпса залежить тільки від енергії (довжина малої півосі залежить також і від моменту). При $L \rightarrow 0$ довжина великої півосі не змінюється, а малої стає рівною нулю (рух вздовж прямої). Із формул (4.30) випливає ще один зв'язок параметрів, які описують еліпс:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon), \quad r_{max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon).$$

Випадок 3 (притягання): $\alpha < 0$, $E = 0$. Тоді $\varepsilon = 1$, рух — інфінітний і траєкторія буде параболою:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.31)$$

Мінімальна відстань до центру досягається при $\varphi = \varphi_0$ і дорівнює

$$r_{min} = \frac{p}{2}. \quad (4.32)$$

У випадку віддалення частинки від центру поля $\dot{\varphi} \rightarrow 0$, $\dot{r} \rightarrow 0$ і частинка зупиняється на нескінченності. Асимптот для такого руху немає.

Випадок 4 (притягання): $\alpha < 0$, $E > 0$. Тоді $\varepsilon > 1$, рух — інфінітний і траєкторія буде частиною гіперболи, для якої початок координат є внутрішнім фокусом (згин кривої в бік центру поля відображає факт притягання):

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \varepsilon > 1. \quad (4.33)$$

Мінімальна відстань до центру відповідає значенню $\varphi = \varphi_0$:

$$r_{min} = r(\varphi_0) = \frac{p}{1 + \varepsilon}. \quad (4.34)$$

Рівняння асимптот можна отримати з умови $r \rightarrow \infty$, що означає прямування знаменника (4.33) до нуля. Тоді

$$\cos(\varphi - \varphi_0) \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 \pm \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (4.35)$$

будуть рівняннями асимптот. Оскільки обернений косинус обчислюється від від'ємного значення, то кут між напрямком симетрії траєкторії $\varphi = \varphi_0$ та асимптотою буде тупим.

Напіввісь гіперболи:

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{|\alpha|}{2E}. \quad (4.36)$$

Випадок 5 (відштовхування): $\alpha > 0$, $E > 0$. Тоді $\varepsilon > 1$, рух — інфінітний і траєкторія буде частиною гіперболи, для якої початок координат є зовнішнім фокусом (що є проявом відштовхування):

$$r(\varphi) = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \varepsilon > 1. \quad (4.37)$$

Мінімальна відстань до центру:

$$r_{\min} = r(\varphi_0) = \frac{p}{\varepsilon - 1}. \quad (4.38)$$

Рівняння асимптот:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (4.39)$$

(кут між напрямком симетрії траєкторії $\varphi = \varphi_0$ та асимптотою буде гострим).

Напіввісь гіперболи:

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}. \quad (4.40)$$

Зауваження*. Раніше було показано, що під час руху у потенціалі Кулона зберігається вектор Рунге-Ленца

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + \frac{\alpha \vec{r}}{r}, \quad U = \frac{\alpha}{r}.$$

За його допомогою траєкторію можна знайти безпосередньо. Очевидно, $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$, тому вектор \vec{A} буде належати площині орбіти. Домножимо \vec{A} на \vec{r} :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) + \alpha r = \frac{L^2}{\mu} + \alpha r.$$

За означенням $\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta$, θ — кут між \vec{r} та \vec{A} , тому

$$Ar \cos \theta = \frac{L^2}{\mu} + \alpha r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{L^2}{\mu} \frac{1}{-\alpha + A \cos \theta}.$$

Очевидно, напрямок \vec{A} є фіксованим і можна ототожнити θ з полярним кутом φ . Оскільки напрямок $\theta = 0$ (вздовж \vec{A}) відповідає мінімуму радіуса, то для фінітного руху \vec{A} напрямлений вздовж великої осі. Згідно з формулою траєкторії, значення A визначає ексцентриситет,

$$r = \frac{L^2}{\mu|\alpha|} \frac{1}{-\text{sign}(\alpha) + \frac{A}{|\alpha|} \cos \varphi} = \frac{p}{-\text{sign}(\alpha) + \varepsilon \cos \varphi},$$

і $\varepsilon = \frac{A}{|\alpha|}$.

Такою властивістю вектора Рунге-Ленца можна користуватись для пошуку частоти прецесії орбіти при збуренні потенціалу (вона є частотою обертання вектора \vec{A}). \square

Залежність $r(t)$. Інтеграл для пошуку залежності від часу має вигляд:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\left[E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{r dr}{\left[Er^2 - \alpha r - \frac{L^2}{2\mu}\right]^{1/2}}.$$

Подальше обчислення полягає у виділенні повного квадрату у підкореновому виразі, результат залежить знаку енергії (результати виражаються через різні табличні інтеграли). Зауважимо, що знак α у даному випадку несуттєвий.

Розглянемо випадок фінітного руху $E < 0$, який реалізується тільки для $\alpha < 0$ (притягання), тому

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\left[-r^2 - \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{L^2}{2\mu|E|}\right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int \frac{(r-a) + a}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r-a)^2}} dr \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \left[-\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r-a)^2} - a \arccos \frac{r-a}{a\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

де $a = \frac{|\alpha|}{2|E|}$, $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2}}$ — відповідно велика піввісь та ексцентриситет еліпса. Для того, щоб звільнитись від радикалу і перейти до параметрично-заданої функції означимо параметр ξ :

$$\frac{r-a}{a\varepsilon} = -\cos \xi \quad \Rightarrow \quad r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad \xi \in [0, 2\pi]$$

(для такого вибору знаку значення $\xi = 0$ відповідає $r = r_{min}$, а $\xi = \pi$ відповідно $r = r_{max}$). Тоді⁶:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} (-a\varepsilon \sin \xi + a\xi) = \sqrt{\frac{\mu a^2}{2|E|}} (-\varepsilon \sin \xi + \xi) \equiv \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (-\varepsilon \sin \xi + \xi),$$

звідки остаточно знайдемо:

$$\begin{cases} r = a(1 - \varepsilon \cos \xi) \\ t = t_0 + \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - \varepsilon \sin \xi) \end{cases} \quad (\text{рівняння Кеплера}). \quad (4.41)$$

Задача 4.3. Знайти $r(t)$ для випадків руху $E = 0$ та $E > 0$.

Періоди для фінітного руху. Розглянемо спочатку питання про замкненість траєкторії. Кутова відстань між сусідніми максимальними значеннями координати r буде

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\left[2\mu E - \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2}} = 2 \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1\right) \Bigg|_{r=p/(1+\varepsilon)}^{r=p/(1-\varepsilon)} = 2\pi,$$

де використане значення інтеграла, який був обчислений при отриманні $r(\varphi)$. Таким чином, $T_r = T_\varphi$, тому одне проходження між сусідніми максимальними відхиленнями відповідає повному оберту (це також зрозуміло з вигляду траєкторії).

⁶ Формально $\arccos[-\cos(\xi)] = \pi - \arccos[\cos(\xi)] = \pi - \xi$, далі можна переозначити сталу t_0 .

Тепер знайдемо період T_r . Оскільки у випадку фінітного руху для параметричного задання траєкторії (покладемо $t_0 = 0$ в (4.41)) мають місце співвідношення:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - \varepsilon \sin \xi),$$

то точкам повороту відповідають такі значення параметру ξ :

$$r = r_{max} = a(1 + \varepsilon) \quad (\text{для } \xi = \pi), \quad r = r_{min} = a(1 - \varepsilon) \quad (\text{для } \xi = 0),$$

тому

$$T_r = \sqrt{2\mu} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\left[E - \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right]^{1/2}} = \left| \begin{smallmatrix} \text{заміна:} \\ t \rightarrow \xi \end{smallmatrix} \right| = 2\sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} (\xi - \varepsilon \sin \xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=\pi} = \pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}}.$$

У результаті, період фінітного руху у потенціалі Кулона має вигляд:

$$T = T_r = T_\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{|\alpha|}} = \pi |\alpha| \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}. \quad (4.42)$$

Із формули (4.42) випливає *третій закон Кеплера*⁷:

Під час фінітного руху однакових частинок у кулонівському потенціалі одного силового центру квадрати їх періодів руху відносяться як куби великих півосей еліптичної орбіти.

Зауваження. Період руху можна знайти простішим способом — за допомогою другого закону Кеплера. Проінтегруємо диференціал площі сектору по періоду:

$$dS = \frac{L}{2\mu} dt \quad \Rightarrow \quad S = \frac{L}{2\mu} T.$$

Оскільки траєкторія є еліпсом, то обмежена нею площа дорівнює πab , тому після підстановки a та b отримаємо попередній результат:

$$T = \frac{2\mu}{L} \pi ab = \pi |\alpha| \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}.$$

┘

Зауваження. Якщо йдеться саме про закон гравітаційної взаємодії, то $\alpha = \gamma m_1 m_2 > 0$, тоді

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu a^3}{|\alpha|} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{m_1 + m_2}.$$

У випадку, коли одна частинка значно важча за іншу, скажімо $m_2 \gg m_1$ можна вважати, що

$$T^2 \simeq \pi^2 \frac{a^3}{m_>}, \quad \text{де } m_> = m_2 \text{ (більша маса).}$$

Таке співвідношення виконується для Сонячної системи, де Сонце має значно більшу масу, ніж планети. Тому для останніх виконується третій закон Кеплера (порівняно з Сонцем їх можна вважати ідентичними частинками, а саме Сонце — нерухомим силовим центром).

┘

⁷ У оригінальному формулюванні йдеться про планети Сонячної системи.

ЛЕКЦІЯ 5

Зіткнення та розсіювання частинок

1.	Постановка задачі.....	99
2.	Пружне зіткнення частинок.....	99
3.	Кути розсіювання.....	100
4.	Графічне зображення процесу розсіювання.....	101
5.	Розсіювання частинок у випадку $\vec{u}_2 = 0$	102
6.	Поняття перерізу для процесів розсіювання, розпаду та захоплення.....	106
7.	Розсіювання у центральному полі (загальний випадок).....	110
8.	Приклад: розсіювання у потенціалі Кулона.....	112

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розсіювання відповідає зустрічному руху частинок з нескінченності і подальшому віддаленню після взаємодії. У випадку, коли при $t \rightarrow \infty$ відстань між частинками прямує до нуля, то говорять про *захоплення* частинки. Для еквівалентної задачі про рух у центральному полі такі рухи називається відповідно *розсіюванням* частинки на силовому центрі та *захопленням* частинки силовим центром (падінням у центр поля). Обернений до захоплення — процес спонтанного розпаду частинки на дві складові, які потім рухаються окремо одна від іншої, взаємодіючи за певним законом.

Для дослідження руху скористаємось законами збереження, вважаючи процес пружним — це означає, що під час розсіювання структура частинок не змінюється і втрат енергії не відбувається.

У задачі розсіювання можна виділити два аспекти. Перший стосується способу опису процесу. Виявляється, що у випадку розсіювання однієї частинки на іншій теоретичні оцінки зручно проводити у системі центру мас, де задача формально зводиться до задачі розсіювання на нерухомому силовому центрі. З іншого боку, експериментальні вимірювання проводяться у системі відліку з нерухомим приладом (лабораторна система). Тому доцільно встановити зв'язки між способами опису у цих двох системах, це складає кінематичний аспект задачі, де не враховується конкретний потенціал взаємодії. Другий аспект стосується обчислення величин, які описують кількісні характеристики розсіювання в одній з систем відліку — зокрема, у системі центру мас.

2. ПРУЖНЕ ЗІТКНЕННЯ ЧАСТИНОК. Нехай потенціал взаємодії $U(r)$ спадає для великих віддалень між частинками, тобто при $r \rightarrow \infty$ буде $U(r) \rightarrow 0$, тобто у випадку великого віддалення частинок їх взаємодією можна знехтувати.

Запишемо закони збереження імпульсу та енергії системи двох частинок для випадків $t \rightarrow -\infty$ (до зіткнення) та $t \rightarrow +\infty$ (після зіткнення) у лабораторній системі

координат (L -системі). Поведінка системи протягом самого процесу зіткнення у даному підході не розглядається. Нехтуючи потенціальною енергією взаємодії при великому віддаленні, отримаємо:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2, \quad \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{u}'_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}'_2^2}{2}, \quad (5.1)$$

де $\vec{u}_{1,2}$ — швидкості частинок до зіткнення, а $\vec{u}'_{1,2}$ — після зіткнення. Збереження кінетичної енергії свідчить про пружність зіткнення.

Перейдемо до системи центру мас (C -системі), де рух можна розглядати як розсіювання однієї частинки на нерухомому силовому центрі. Перетворення швидкості має вигляд:

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i + \vec{V}_c, \quad i = \overline{1,2} \quad \text{де} \quad \vec{V}_c = \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{m_1 + m_2}, \quad (5.2)$$

де \vec{v}_i — швидкості частинок у C -системі, а \vec{V}_c — швидкість центру мас (центр мас рухається зі сталою швидкістю в силу закону збереження імпульса).

Імпульс матиме вигляд:

$$\vec{P} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = M \vec{V}_c, \quad \vec{P}' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \quad (5.3)$$

остання формула дає зв'язок між швидкостями у C -системі).

Відносна швидкість частинок у обох системах однакова:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Тоді, використовуючи (5.3), можна виразити швидкості частинок через відносну швидкість у L та C -системах:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}, \\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{V}_c + \frac{m_2}{M} \vec{v}, \\ \vec{u}_2 = \vec{V}_c - \frac{m_1}{M} \vec{v}, \end{cases} \quad (5.4)$$

де $M = m_1 + m_2$.

Аналогічно, вираз для енергії у L -системі після підстановки формул зв'язку (5.4) буде:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} + \frac{M \vec{V}_c^2}{2} + \underbrace{\vec{V}_c \cdot (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}_{=0} \\ &= \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{M^2} v^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{M^2} v^2 + \frac{M \vec{V}_c^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{M \vec{V}_c^2}{2} = E' + \frac{M \vec{V}_c^2}{2}, \end{aligned}$$

де $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ позначає зведену масу. Таким чином, закон збереження енергії у C -системі зводиться до збереження значення відносної швидкості:

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = v'. \quad (5.5)$$

Розсіювання у C -системі полягає у зміні напрямку вектора відносної швидкості. Кут повороту вектору відносної швидкості не можна визначити з одних тільки законів збереження, для цього потрібно мати інформацію про поведінку системи під час розсіювання.

3. КУТИ РОЗСІЯННЯ. *Кутом розсіювання* називається кут між напрямками швидкості до розсіювання та після (коли вже нехтують взаємодією і частинки рухаються вздовж прямих). Кути розсіювання частинок m_1 та m_2 (або повороту швидкостей) в C -системі, позначаються χ_1 та χ_2 і даються співвідношеннями:

$$\cos \chi_1 = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_1}{v_1 v'_1}, \quad \cos \chi_2 = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}'_2}{v_2 v'_2},$$

У силу формул зв'язку швидкостей $\chi_1 = \chi_2$ і, позначаючи кут розсіювання χ , запишемо остаточно:

$$\cos \chi \equiv \cos \chi_1 = \cos \chi_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{v \cdot v'} := \vec{n} \cdot \vec{n}', \quad (5.6)$$

де \vec{n} — одиничний вектор у напрямку швидкості \vec{v} .

У L -системі кути розсіювання частинок $m_{1,2}$ позначаються $\theta_{1,2}$ відповідно:

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}'_1}{u_1 \cdot u'_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}'_2}{u_2 \cdot u'_2}, \quad (5.7)$$

у загальному випадку $\theta_1 \neq \theta_2$.

4. ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПРОЦЕСУ РОЗСІЮВАННЯ. Для опису процесу розсіювання у L -системі та встановлення зв'язку між кутами розсіювання у різних L та C -системах використовується геометрична побудова, яка називається *діаграмою швидкостей*. Ідея такої побудови дуже проста. У C -системі процес розсіювання — тривіальний: вектор відносної швидкості \vec{v} повертається на кут χ . Для переходу у L -систему потрібно використати формули перетворення швидкостей (5.4). Зображення векторів $\vec{u}_{1,2}$, $\vec{u}'_{1,2}$ та $\vec{v}_{1,2}$, $\vec{v}'_{1,2}$ на одному рисунку і є побудовою, про яку йдеться.

Задача 5.1. Виконати побудову діаграми швидкостей для процесу розсіювання двох частинок.

Процес розсіювання можна описувати також в термінах імпульсів, відповідна геометрична побудова, еквівалентна до щойно описаної, називається *діаграмою імпульсів*. З суто технічних причин побудова імпульсів зручніша, ніж побудова швидкостей. Перш ніж навести схему, запишемо зв'язок між імпульсами частинок в L та C -системах. Домножуючи швидкості після розсіювання (вирази, аналогічні (5.4))

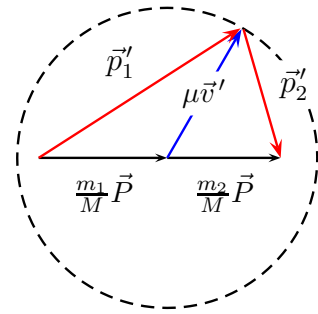


Рис. 5.1. Діаграма імпульсів.

$$\vec{u}'_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}' + \vec{V}_c, \quad \vec{u}'_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}' + \vec{V}_c, \quad \vec{V}_c = \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{M} \equiv \frac{\vec{P}}{M}$$

(тут $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ — імпульс у L -системі) на маси, отримаємо:

$$\vec{p}'_1 = \mu \vec{v}' + m_1 \vec{V}_c, \quad \vec{p}'_2 = -\mu \vec{v}' + m_2 \vec{V}_c.$$

Підставляючи явну формулу для \vec{V}_c через імпульси, знайдемо остаточно:

$$\vec{p}'_1 = \mu \vec{v}' + \frac{m_1}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad \vec{p}'_2 = -\mu \vec{v}' + \frac{m_2}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2). \quad (5.8)$$

Аналогічно для початкових імпульсів:

$$\vec{p}_1 = \mu \vec{v} + \frac{m_1}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad \vec{p}_2 = -\mu \vec{v} + \frac{m_2}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2). \quad (5.9)$$

Геометрична інтерпретація виразів (5.8): побудуємо коло радіуса $\mu v = \mu v'$ і відкладемо напрямом $\mu \vec{v}'$. Через центр кола O проведемо вектор \vec{P} , ділячи його точкою O у відношенні $\frac{m_1}{M} \vec{P}$ та $\frac{m_2}{M} \vec{P}$. З'єднуючи отримані точки, побудуємо вектори \vec{p}'_1 та \vec{p}'_2 — див. рис. 5.1. Точка на колі (кінець вектора $\mu \vec{v}'$) може займати довільне положення і визначається кутом розсіювання, всі інші точки чітко фіксовані. Так само можна побудувати імпульси \vec{p}_1 та \vec{p}_2 , якщо замість напрямку $\mu \vec{v}'$ використовувати напрямом $\mu \vec{v}$.

Зауваження. У діаграмі швидкостей ділиться не вектор $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M \vec{V}_c$, а відносна швидкість \vec{v}' . У діаграмі імпульсів процес описувати зручніше — розсіювання полягає у повороті вектора $\mu \vec{v}$, довжина якого є радіусом кола, а вектори $\vec{p}_{1,2}$ проведено до його кінця.

Для опису розсіювання частинок можна вибрати будь-яку з двох систем відліку, зручність визначається контекстом задачі. За допомогою формул перетворення швидкостей можна виразити характеристики розсіювання в L -системі через аналогічні характеристики в C -системі і навпаки. Далі розглядається найпростіший випадок розсіювання — одна з частинок перебуває у стані спокою до розсіювання (наприклад, $\vec{u}_2 = 0$).

5. Розсіювання частинок у випадку $\vec{u}_2 = 0$. Кути розсіювання χ та $\theta_{1,2}$ можна зв'язати співвідношеннями, які можна отримати з формул, що виражають швидкості у одній системі через швидкості у іншій.

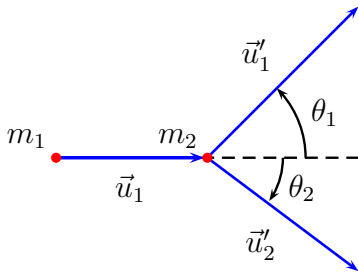


Рис. 5.2. Розсіювання при $\vec{u}_2 = 0$.

Зв'язок кутів розсіювання. Якщо до зіткнення друга частинка не рухається, то $\vec{u}_2 = 0$ і до розсіювання $\vec{v} \equiv \vec{u}_1$, тому:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{u}_1, \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{u}_1, \quad \vec{V}_c = \frac{m_1}{M} \vec{u}_1.$$

Після розсіювання:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}', \quad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}',$$

тому в L -системі:

$$\vec{u}'_1 = \vec{V}_c + \frac{m_2}{M} \vec{v}', \quad \vec{u}'_2 = \vec{V}_c - \frac{m_1}{M} \vec{v}'.$$

Для пошуку кутів $\theta_{1,2}$ домножимо вирази для $\vec{u}'_{1,2}$ скалярно та векторно на $\vec{u}_1 \equiv \vec{v}$ і скористаємось означеннями добутоків. Для \vec{u}_1 матимемо:

$$\begin{cases} u_1 u'_1 \cos \theta_1 = \frac{m_1}{M} u_1^2 + \frac{m_2}{M} \vec{v}' \cdot \vec{u}_1 \equiv \frac{m_1}{M} u_1^2 + \frac{m_2}{M} v^2 \cos \chi, \\ u_1 u'_1 \sin \theta_1 = \frac{m_2}{M} v v' \sin \chi \end{cases}$$

(друга рівність — модуль векторного добутку). Частка цих рівностей дає:

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \gamma} \quad \text{де} \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2}. \quad (5.10)$$

Аналогічно можна виразити кут θ_2 . Оскільки за умовою $\vec{u}_2 = 0$, то вважатимемо, що кут θ_2 є кутом між векторами \vec{u}_1 та \vec{u}'_2 (див. рис. 5.2). Тоді

$$\vec{u}'_2 = \vec{V}_c - \frac{m_1}{M} \vec{v}' = \frac{m_1}{M} (\vec{u}_1 - \vec{v}').$$

Домножаючи скалярно та векторно обидві частини рівності на \vec{u}_1 , матимемо:

$$\begin{cases} u_1 u'_2 \cos \theta_2 = \frac{m_1}{M} (u_1^2 - u_1 v \cos \chi) \\ -u_1 u'_2 \sin \theta_2 = -\frac{m_1}{M} u_1 v \sin \chi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_2 \cos \theta_2 = \frac{m_1}{M} (u_1 - v \cos \chi), \\ u'_2 \sin \theta_2 = \frac{m_1}{M} v \sin \chi. \end{cases}$$

(зазначимо, що кут між векторами \vec{u}_1 та \vec{u}'_2 складає не θ_2 , а $2\pi - \theta_2$, оскільки відкладається від першого множника до другого). Частка дає:

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{\sin \chi}{1 - \cos \chi} = \text{ctg } \frac{\chi}{2} \equiv \text{tg } \frac{\pi - \chi}{2},$$

звідки остаточно

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \quad (5.11)$$

Швидкості, енергії та кут розсіювання χ . За допомогою формул зв'язку між швидкостями можна виразити модулі швидкостей частинок після розсіювання у L -системі. Дійсно, для першої частинки,

$$\vec{u}'_1 = \vec{V}_c + \frac{m_2}{M} \vec{v}' \Rightarrow u_1'^2 = \frac{m_1^2}{M^2} v^2 + \frac{m_2^2}{M^2} v'^2 + 2 \frac{m_1 m_2}{M^2} v^2 \cos \chi,$$

звідки

$$u'_1 = v \left[\frac{m_1^2 + m_2^2}{M^2} + \frac{2\mu}{M} \cos \chi \right]^{1/2}. \quad (5.12)$$

Аналогічно,

$$\vec{u}'_2 = \vec{V}_c - \frac{m_1}{M} \vec{v}' = \frac{m_1}{M} (\vec{v} - \vec{v}') \Rightarrow u_2'^2 = \frac{m_1^2}{M^2} (v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \chi) = \frac{2m_1^2}{M^2} v^2 (1 - \cos \chi)$$

звідки

$$u'_2 = \frac{2m_1}{M} v \sin \frac{\chi}{2}. \quad (5.13)$$

Зауваження. У випадку лобового удару $\chi = \pi$ і $\vec{u}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{M} \vec{v}$ та $\vec{u}'_2 = \frac{2m_1}{M} \vec{v}$. \lrcorner

За допомогою формул (5.12) та (5.13) можна знайти енергію, яку втрачає (отримує) кожна з частинок в процесі зіткнення. Кінетична енергія першої частинки:

$$T'_1 = \frac{m_1 u_1'^2}{2} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{M^2} + \frac{2\mu}{M} \cos \chi \right) u_1^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2\mu M \cos \chi}{M^2} T_1$$

звідки

$$\frac{T'_1}{T_1} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2\mu M \cos \chi}{M^2} \leq 1.$$

Втрата енергії першої частинки:

$$\Delta T_1 = T'_1 - T_1 = \frac{4m_1 m_2}{M^2} T_1 \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Покладаючи $\cos \chi = -1$ отримаємо оцінку частки втраченої енергії знизу:

$$\frac{T'_1}{T_1} \geq \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2.$$

Для другої частинки

$$T'_2 = \frac{m_2 u_2'^2}{2} = \frac{m_2}{2} \cdot \frac{4m_1^2}{M^2} \cdot u_1^2 \sin^2 \frac{\chi}{2},$$

або

$$\frac{T'_2}{T_1} = \frac{4\mu}{M} \sin^2 \frac{\chi}{2}, \quad (5.14)$$

причому $\frac{T'_2}{T_1} \leq \frac{4\mu}{M}$. Очевидно, вираз (5.14) збігається з отриманим вище результатом для втрат енергії першої частинки.

Зауваження*. Середня втрата енергії частинки, що налітає, дорівнює половині максимально можливої втрати.

Формула (5.14) дозволяє зрозуміти, чому в якості уповільнювача в ядерних реакторах використовують середовище, що містить легкі елементи, зокрема водень. При зіткненні нейтронів з ядрами водню (протонами) коефіцієнт акомодатії $\frac{4\mu}{M}$ набуває максимального значення 1. \lrcorner

Аналіз процесу розсіювання. На рис. 5.3 побудовано діаграми імпульсів для різних співвідношень між масами частинок m_1 та m_2 .

Випадок $m_1 < m_2$ (тобто $\gamma < 1$), початок вектора \vec{P} лежатиме всередині кола. З виразу для $\tan \theta_1$ випливає¹, що при $\gamma < 1$ кут θ_1 набуває значень у інтервалі $[0, \pi]$ при $\chi \in [0, \pi]$. Кут розльоту частинок буде тупим, тобто $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$.

Випадок $m_1 = m_2$ (тобто $\gamma = 1$), початок вектора \vec{P} лежатиме на колі, тоді

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \chi}{1 + \cos \chi} = \tan \frac{\chi}{2},$$

¹ $\tan \theta_1$ — зростаюча функція χ .

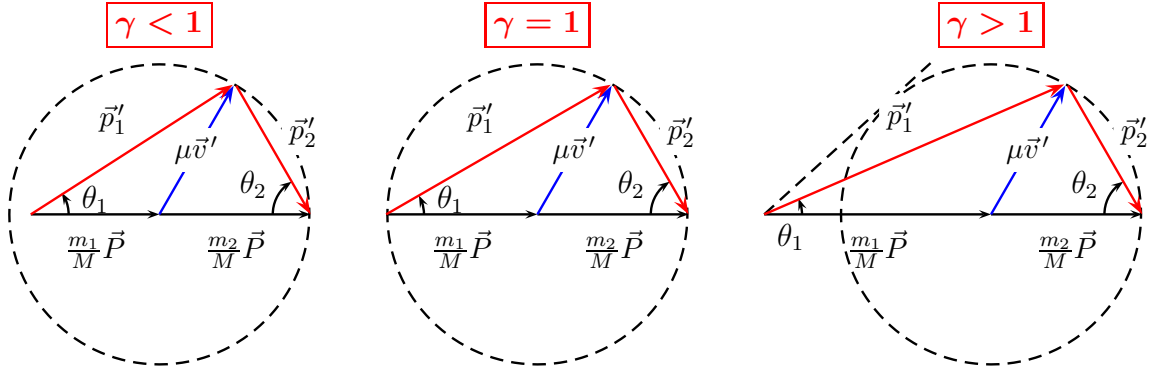


Рис. 5.3. Діаграми імпульсів.

звідки $\theta_1 = \frac{\chi}{2}$ і кут розльоту частинок буде прямим, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Випадок $m_1 > m_2$ (тобто $\gamma > 1$), початок вектора \vec{P} лежатиме поза колом. Кут θ_1 монотонно зростає при зміні χ від куля до максимального значення $\theta_{max} = \arcsin \frac{1}{\gamma}$, після чого монотонно спадає до нуля. Максимум $\theta_1(\chi)$ легко дослідити диференціюванням $\tan \theta_1$ по χ (функції $\theta_1(\chi)$ та $\tan \theta_1(\chi)$ мають однакову монотонність, тому екстремум зручніше шукати дослідженням простішої залежності):

$$\frac{d}{d\chi} \left(\frac{\sin \chi}{\gamma + \cos \chi} \right) = \frac{1 + \gamma \cos \chi}{(\gamma + \cos \chi)^2} = 0$$

звідки $\cos \chi = -\frac{1}{\gamma}$ і $\sin \theta_{max} = \frac{1}{\gamma}$.

Зауваження. Усі співвідношення між кутами можна отримати геометрично з відповідної діаграми швидкостей. \square

Обернені формули зв'язку кутів. Виразимо кут χ через кути розсіювання у L -системі. Підносячи до квадрату обидві сторони співвідношення (5.10) отримаємо рівняння для кута χ :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \gamma} \Rightarrow \cos^2 \chi + 2\gamma \sin^2 \theta_1 \cos \chi + \gamma^2 \sin^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_1 = 0.$$

Залежно від значення параметру γ знаки перед радикалом у розв'язку квадратного рівняння вибираються по-різному. Формально:

$$\cos \chi = -\gamma \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}.$$

Випадок $m_1 < m_2$ (або $\gamma < 1$). Для визначення правильного знаку розглянемо граничні випадки лобового удару та руху без зіткнення,

$$\theta_1 = \pi \Rightarrow \chi = \pi \quad (\text{лобовий удар}) \quad \theta_1 = 0 \Rightarrow \chi = 0 \quad (\text{без зіткнення}).$$

Легко бачити, що для коректного опису розв'язків потрібно вибрати знак “+” перед радикалом:

$$\cos \chi = -\gamma \sin^2 \theta_1 + \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}, \quad \gamma < 1. \quad (5.15)$$

Випадок $m_1 > m_2$ (або $\gamma > 1$). Для граничного випадку руху без зіткнення:

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow \chi = 0, \quad \chi = \pi$$

тому у розв'язку реалізуються обидва знаки (тобто отримано двозначну функцію),

$$\cos \chi = -\gamma \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}, \quad \gamma > 1. \quad (5.16)$$

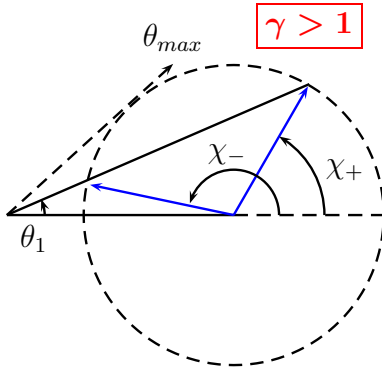


Рис. 5.4. Двозначність функції $\chi(\theta_1)$ при $\gamma > 1$.

Знак “+” відповідає межах зміни $\chi \in [0, \chi_{max}]$ при $\theta_1 \in [0, \theta_{max}]$, а знак “-” відповідно для $\chi \in [\chi_{max}, \pi]$ при $\theta_1 \in [\theta_{max}, 0]$. Двозначність розв'язку ілюструється рис. 5.4. Лобового удару з подальшим рухом частинок у протилежних напрямках у даному випадку не буде, оскільки перша частинка важча за другу.

Швидкості, енергії та кути розсіювання $\theta_{1,2}$.

Тим самим способом, що і раніше для C -системи, можна отримати вирази для швидкостей через кути розсіювання у L -системі. Для частинки m_1 :

$$\vec{u}'_1 = \vec{V}_c + \frac{m_2}{M} \vec{v}' = \frac{m_1}{M} \vec{u}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}'.$$

Перенесемо перший доданок до лівої частини (щоб уникнути скалярних добутків з вектором \vec{v}') і піднесемо до квадрату обидві частини отриманої рівності:

$$m_2 \vec{v}' = M \vec{u}'_1 - m_1 \vec{u}_1 \Rightarrow m_2^2 \vec{v}'^2 \equiv m_2 u_1'^2 = M^2 u_1'^2 + m_1^2 u_1^2 - 2m_1 M u_1 u_1' \cos \theta_1,$$

звідки отримаємо рівняння:

$$\left(\frac{u_1'}{u_1}\right)^2 - \frac{2m_1}{M} \left(\frac{u_1'}{u_1}\right) \cos \theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{M} = 0$$

Формально:

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{m_1}{M} \cos \theta_1 \pm \frac{m_2}{M} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}. \quad (5.17)$$

Як і під час виведення формул зв'язку кутів, для випадку $\gamma < 1$ вибирається знак “+”, а для $\gamma > 1$ швидкість буде двозначною функцією.

Аналогічно для частинки m_2 :

$$\vec{u}'_2 = \frac{m_1}{M} \vec{u}_1 - \frac{m_1}{M} \vec{v}'$$

тому

$$m_1 \vec{v}' = -M \vec{u}'_2 + m_1 \vec{u}_1$$

або

$$m_1^2 u_2'^2 = m_1^2 u_1^2 + M^2 u_2'^2 - 2m_1 M u_1 u_2' \cos \theta_2,$$

звідки

$$u'_2 = 2\gamma v \cos \theta_2. \quad (5.18)$$

6. ПОНЯТТЯ ПЕРЕРІЗУ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ РОЗСІЮВАННЯ, РОЗПАДУ ТА ЗАХОПЛЕННЯ. На практиці часто досліджують не окрему частинку, що розсіюється на іншій частинці як на силовому центрі, а розсіювання пучка ідентичних частинок, що рухаються з однаковими швидкостями і розсіюються на мішені, яка складається з однакових частинок. Причина в тому, що експериментально досить важко створити наперед заданий механічний стан окремої частинки — з певною швидкістю та координатою. Набагато простіше отримати пучок частинок з певною швидкістю, або, іншими словами, енергією (наприклад, прискорити заряджені частинки у області, де створено різницю потенціалів). Інша характеристика частинки у пучку — *прицільна відстань* ρ , яка задає її положення відносно центру пучка — прямої, яка проходить через силовий центр паралельно до напрямку швидкості частинок (тобто ρ — відстань від силового центру до прямої, по якій рухалася б частинка за відсутності взаємодії). Частинки у пучку рухаються паралельно, з певною енергією (однаковою для всіх частинок) та різними прицільними відстанями ρ . Для спрощення будемо вважати, що пучок однорідний, тобто число частинок, які пролітають у одиницю часу через одиничну площу, перпендикулярну до напрямку руху, дорівнює сталій величині n . Взаємодією між частинками пучка та багаторазовими розсіюваннями нехтуватимемо.

Розсіювання пучка на силовому центрі, або на іншому пучку характеризується *диференціальним перерізом розсіювання*. Для його означення розглянемо рис. 5.5. З нього видно, що у тілесний кут $d\Omega$ (або в інтервал кутів $[\chi, \chi + d\chi]$) розсіюються частинки, які мають прицільні відстані у інтервалі $[\rho, \rho + d\rho]$. У C -системі:

$$d\Omega(\chi) = 2\pi \sin \chi d\chi,$$

тут завдяки аксіальній симетрії задачі диференціал тілесного кута, що має вигляд $d\Omega(\chi, \varphi) = \sin \chi d\chi d\varphi$, проінтегрований по азимутальному куту φ , який не зображено на рисунку. Очевидно, площа колового сектора на нескінченності, у якому лежать частинки, що розсіюються у інтервал кутів $[\chi, \chi + d\chi]$ буде

$$d\sigma = \frac{dN(\chi, \chi + d\chi)}{n} \equiv 2\pi\rho d\rho,$$

де $dN(\chi, \chi + d\chi)$ — частка потоку частинок у секторі, n — загальне число (густина потоку) частинок (через одиничну площу в одиницю часу). Величина $d\sigma(\chi)$ називається диференціальним перерізом розсіювання в C -системі. Якщо $\rho = \rho(\chi)$, то означення диференціального перерізу можна записати через диференціал плоского кута χ або тілесного Ω :

$$d\sigma(\chi) = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi, \quad d\sigma(\Omega) = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega. \quad (5.19)$$

Модуль у правій частині записується для коректності означення — переріз $d\sigma$ за своїм змістом є площею і тому $d\sigma > 0$, тоді як функція $\rho(\chi)$ у найбільш поширених випадках є спадною.

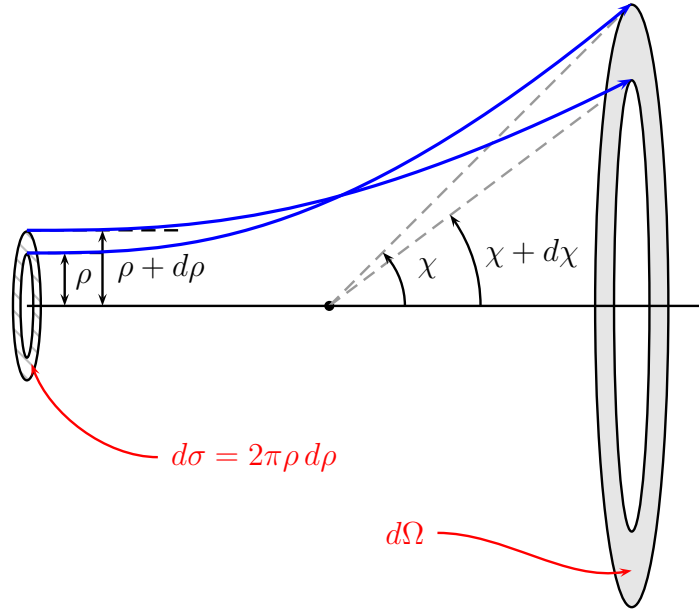


Рис. 5.5. До означення перерізу розсіяння.

Повний переріз розсіяння є інтегралом по всіх можливих кутах розсіяння,

$$\sigma = \int d\sigma(\chi). \quad (5.20)$$

За змістом повний переріз є площею області на нескінченності, яку перетинають частинки (область орієнтована перпендикулярно до швидкості), які взагалі будуть розсіюватись. Якщо потенціал взаємодії — короткодійний, тобто $U(r) = 0$ при $r \geq r_{max}$, то $\sigma = \pi r_{max}^2$, — розсіюються частинки, які попали у радіус дії потенціалу. Для далекодіючих потенціалів буде $\sigma = \infty$.

Для запису диференціального перерізу розсіяння у L -системі потрібно підставити залежності $\chi(\theta_{1,2})$, які можна отримати з діаграми швидкостей, до формули перерізу в C -системі. Тоді диференціальні перерізи розсіяння для частинок обох сортів $m_{1,2}$ мають вигляд:

$$d\sigma_1 = d\sigma(\chi(\theta_1)), \quad d\sigma_2 = d\sigma(\chi(\theta_2)). \quad (5.21)$$

У деяких випадках залежності $\chi(\theta)$ неоднозначні. Якщо функція $\chi(\theta)$ двозначна (χ^* та χ^{**} — гілки однозначності), то

$$\chi(\theta_1) = \begin{cases} \chi^*(\theta_1), \\ \chi^{**}(\theta_1) \end{cases} \quad \text{на різних інтервалах,}$$

тобто в L -системі всі частинки, які розсіюються під одним кутом θ_1 , в C -системі будуть розсіюватись або під кутом $\chi^*(\theta_1)$, або $\chi^{**}(\theta_1)$. Для двозначних функцій повний переріз — сума перерізів, які відповідають гілкам однозначності:

$$d\sigma_1 = d\sigma(\chi^*(\theta_1)) + d\sigma(\chi^{**}(\theta_1)). \quad (5.22)$$

Зауваження. У формулі (5.22) мається на увазі сума модулів, оскільки переріз за означенням є додатною величиною. \square

Аналогічно можна означити *переріз захоплення* частинок силовим центром як відношення числа частинок, які падають у центр поля в одиницю часу, до загальної густини потоку частинок. Очевидно (див. рис. 5.6), для частинок, які падають в центр, прицільна відстань не перевищує деяку величину ρ_{max} , тобто умовою падіння буде нерівність $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$ (при $\rho = \rho_{max}$ падіння ще можливе), тому повний переріз захоплення буде:

$$\sigma = \pi \rho_{max}^2. \quad (5.23)$$

У даному випадку можна означити аналог поняття повного перерізу, “диференціального перерізу” не може бути — частинка або падає в центр, або не падає, тоді як розсіювання (крім факту настання події “розсіяння”) додатково може характеризуватися інтервалом кутів.

Приклад 1. Знайти диференціальний та повний перерізи розсіювання частинок у випадку пружного зіткнення з твердою сферою радіуса a в L - та C -системах.

◀ Удар частинки відбувається за звичайним законом — кут падіння дорівнює куту відбивання. Зовні сфери на частинку не діють жодні сили, тому її траєкторія складатиметься з двох прямих, симетричних відносно нормалі до сфери у точці падіння (рис. 5.7). Мінімальне наближення частинки до центру сфери збігатиметься з її радіусом a , цій точці відповідає значення φ_m азимутального кута. Очевидно, кут розсіювання буде рівним $\chi = \pi - 2\varphi_m$.

Щоб знайти $d\sigma$ потрібно встановити зв'язок між прицільною відстанню ρ та кутом розсіювання χ . З рисунку видно, що

$$\rho = a \sin \varphi_m = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2},$$

тому

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi,$$

при цьому переріз в C -системі буде ізотропним по кутах, як видно з виразу через тілесний кут:

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} d\Omega.$$

Повний переріз, очевидно, збігатиметься з площею екваторіального перерізу сфери:

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^\pi \pi a^2 \sin \chi d\chi = \pi a^2,$$

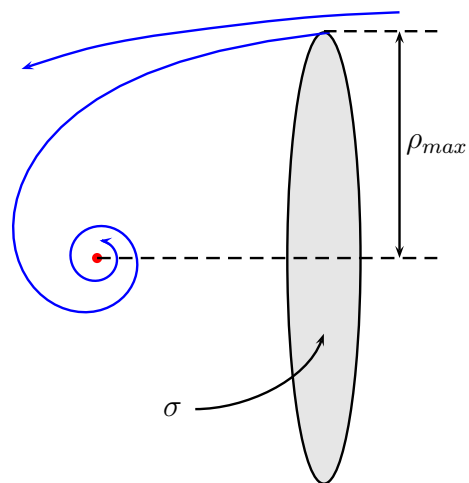
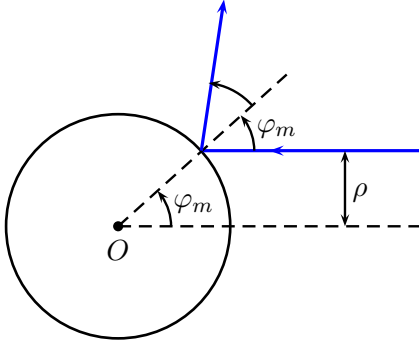


Рис. 5.6. До означення перерізу падіння в центр.

частинки, які пролітають повз сферу, не будуть розсіюватись.



Перейдемо тепер до L -системи. Вважатимемо, що частинка з масою m_1 розсіюється на частинці з масою m_2 , яка перебувала у стані спокою до удару. Для підстановки $\chi(\theta_{1,2})$ скористаємось формулами зв'язку (5.15) та (5.16), залежно від співвідношення між масами $m_{1,2}$ у задачі можливі дві відповіді. Для спрощення підстановки врахуємо, що диференціальний переріз можна записати як

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{\pi a^2}{2} |d(\cos \chi)|.$$

Рис. 5.7. Розсіювання на твердій сфері.
МО:

Випадок $m_1 < m_2$, згідно з (5.15) матимемо:

$$\begin{aligned} d\sigma_1(\theta_1) &\equiv d\sigma(\chi(\theta_1)) = \frac{\pi a^2}{2} \left| d \left(-\gamma \sin^2 \theta_1 + \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1} \right) \right| \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \left[2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \right] \sin \theta_1 d\theta_1 = \frac{a^2}{4} \left[2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \right] d\Omega_1. \end{aligned}$$

Випадок $m_1 > m_2$, розв'язок буде неоднозначним і потрібно враховувати обидві гілки однозначності функції $\chi(\theta_1)$. Позначаючи їх $\chi_{\pm}(\theta_1)$ (знак у індексі відповідає знаку перед радикалом), отримаємо:

$$\begin{aligned} d\sigma_1(\theta_1) &\equiv d\sigma(\chi_+(\theta_1)) + d\sigma(\chi_-(\theta_1)) = \frac{\pi a^2}{2} (|d \cos \chi_+(\theta_1)| + |d \cos \chi_-(\theta_1)|) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} \left(\left| \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} - 2\gamma \cos \theta_1 \right| + \left| \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} + 2\gamma \cos \theta_1 \right| \right) \\ &= \pi a^2 \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \sin \theta_1 d\theta_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} d\Omega_1. \end{aligned}$$

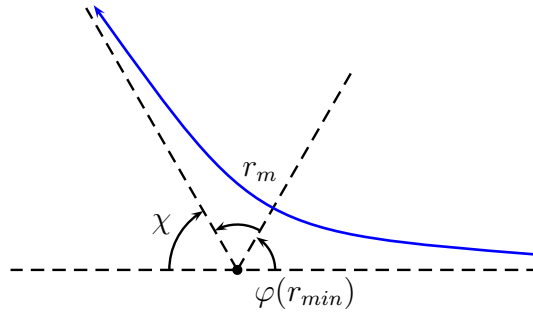
При $m_1 = m_2$ результат буде $d\sigma_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\Omega_1$.

Для частинки m_2 підстановка буде значно простішою, $\chi = \pi - 2\theta_2$, тому

$$d\sigma_2(\theta_2) = \frac{\pi a^2}{2} \sin 2\theta_2 d(2\theta_2) = 2\pi a^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 d\theta_2 = a^2 |\cos \theta_2| d\Omega_2,$$

де $d\Omega_2 = 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2$ (кут θ_2 — гострий). ►

7. Розсіювання у центральному полі (загальний випадок). Отримані раніше висновки про розсіювання частинок на основі законів збереження описують рух частинок в області, де взаємодією можна знехтувати. Ці результати є по суті кінематичними, у даному підході не враховується механізм розсіювання, тому за допомогою одних тільки кінематичних зв'язків знайти кут χ у C -системі не можна.

Рис. 5.9. Характер траєкторії $r(\varphi)$ для розсіювання.

Для визначення кутів розсіювання і, за їх допомогою, перерізів розсіювання (захоплення) потрібно врахувати закон взаємодії частинок. Обмежимося центральною взаємодією точкових частинок. Для переходу до C -системи початок координат вибирається у центрі мас і його можна інтерпретувати як нерухомий силовий центр, на якому розсіюється фіктивна частинка зі зведеною масою μ . Тому далі можна розглядати цю еквівалентну задачу, повертаючись до справжніх частинок в L -системі за допомогою побудованих раніше формул перетворення швидкостей.

Якісно задача розсіювання частинки з масою μ на нерухомому центрі відповідає руху з нескінченно віддаленої точки $r = \infty$ (яку, як і вище, будемо для скорочення називати просто “нескінченністю”) до точки повороту $r = r_{min}$ (мінімальна відстань до центру), причому $U_{eff}(r_{min}) = E$ і подальшому віддаленню на $r = \infty$ під іншим кутом. Нагадаємо, що точка повороту не є точкою повної зупинки, в ній $\dot{r} = 0$, але $\dot{\varphi} \neq 0$. Типовий ефективний потенціал та характер траєкторії наведено на рис. 5.8 та 5.9, відповідно.

Кут розсіювання є кутом між напрямками швидкості при $t \rightarrow \pm\infty$. Оскільки траєкторія симетрична відносно прямої $\varphi = \varphi(r_{min})$, проведеної з центру поля у точку повороту, то з рис. 5.9 легко отримати, що

$$\chi = |\pi - 2\varphi(r_{min})|. \quad (5.24)$$

Для потенціалу відштовхування $2\varphi(r_{min}) < \pi$ і модуль можна опустити, а для потенціалу притягання навпаки $2\varphi(r_{min}) > \pi$. З формули (5.24) випливає, що для пошуку кута розсіювання χ досить знайти кут $\varphi(r_{min})$, який відповідає мінімальній відстані до центру поля. Для задачі руху у центральному полі траєкторію можна описати квадратурою (4.14), яку можна записати у формі визначеного інтегралу:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}},$$

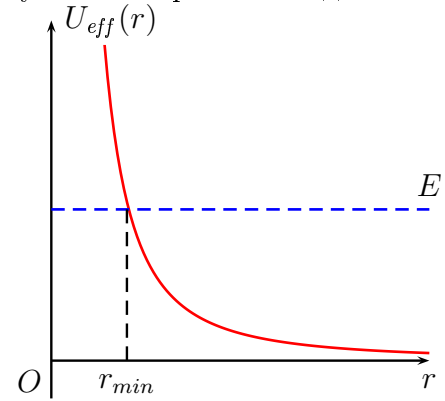


Рис. 5.8. Ефективний потенціал для задачі розсіювання.

де $r_0 = r(\varphi_0)$ (замість сталої інтегрування). При $r_0 = \infty$ кут φ_0 описує напрямок на нескінченно віддалену точку, для простоти запису позначимо його як φ_∞ . Для випадку точки повороту $r = r_{min}$ значення кута $\varphi(r_{min})$ дається виразом:

$$\varphi(r_{min}) = \varphi_\infty \pm \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}}.$$

Подвійний знак перед інтегралом відповідає напрямку початкової швидкості. Знак “+” вибирається тоді, коли при зростанні r кут φ також зростає. У даному контексті, оскільки підінтегральна функція додатня, такий вибір відповідає не наближенню, а віддаленню від центру і реалізується вже при поверненні частинки у нескінченність. Тому у формулі для $\varphi(r_{min})$ вибираємо знак “−” і покладаємо для спрощення $\varphi_\infty = 0$, що можна завжди зробити поворотом системи координат. Остаточно:

$$\varphi(r_{min}) = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}}, \quad (5.25)$$

звідки (для потенціалу відштовхування):

$$\chi = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}}. \quad (5.26)$$

У даному випадку кут розсіяння χ залежить від двох початкових умов, енергії та моменту імпульса, $\chi = \chi(E, L)$. Для задачі розсіювання їх зручно замінити на інші величини — швидкість частинки на нескінченності v_∞ та прицільну відстань ρ . Тоді, вважаючи, що $U(\infty) = 0$:

$$E = \frac{\mu v_\infty^2}{2}, \quad \vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}_\infty = \mu \vec{r}_\perp \times \vec{v}_\infty \Rightarrow L = \mu \rho v_\infty, \quad (5.27)$$

де \vec{r}_\perp — поперечна відносно швидкості \vec{v}_∞ компонента радіус-вектора \vec{r} , довжина якої дорівнює прицільній відстані. Підстановка до ефективного потенціалу дає:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = U(r) + \frac{\mu \rho^2 v_\infty^2}{2r^2} \equiv U(r) + \frac{E \rho^2}{r^2}.$$

Для обчислення диференціального перерізу розсіяння можна дотримуватись наступної послідовності операцій:

- 1) знайти точку повороту $r_{min} = r_{min}(E, L)$ з рівняння $U_{eff}(r) = E$. Підстановка виразу для моменту дає залежність від прицільного параметру, $r_{min} = r_{min}(\rho)$;
- 2) обчислити $\varphi(r_{min})$ (див. (5.25)) в потім $\chi(\rho)$ (див. (5.26));
- 3) обернути цю залежність, $\chi = \chi(\rho) \Rightarrow \rho = \rho(\chi)$;
- 4) підставити функцію $\rho = \rho(\chi)$ до означення диференціального перерізу $d\sigma$ (див. (5.26)).

8. ПРИКЛАД: РОЗСІЮВАННЯ У ПОТЕНЦІАЛІ КУЛОНА. Важливим застосуванням викладеної теорії є задача розсіювання у потенціалі Кулона $U(r) = \frac{\alpha}{r}$.

Розглянемо спочатку задачу розсіювання у C -системі. Траєкторія у полярних координатах дається виразом:

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{p}{r} + \text{sign} \alpha}{\varepsilon}, \quad p = \frac{L^2}{\mu |\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}},$$

де φ_0 є сталою інтегрування.

1) Точку повороту знаходимо з рівняння $E = \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, або

$$\frac{1}{r^2} + \frac{2\mu\alpha}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{L^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{L^2} \left[-1 \pm \frac{|\alpha|}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}} \right].$$

Відкидаючи від'ємний розв'язок та змінюючи позначення, отримаємо:

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{\varepsilon - \text{sign} \alpha}{p}.$$

2) Кут для точки повороту $\varphi(r_{min})$ обчислюємо з квадратури (5.25):

$$\varphi(r_{min}) = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\left[2\mu \left(E - U - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right) \right]^{1/2}} = \arccos \frac{\frac{p}{r} + \text{sign} \alpha}{\varepsilon} \Big|_{r=r_{min}}^{r=\infty} = \arccos \frac{1}{\varepsilon}.$$

Кут розсіювання в C -системі, за означенням має вигляд:

$$\chi = \pi - 2\varphi(r_{min}) \equiv \pi - 2 \arccos \frac{1}{\varepsilon},$$

підставляючи момент як функцію прицільної відстані ρ згідно з (5.27), отримаємо χ як функцію ρ :

$$\chi(\rho) = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2E\rho}{\alpha} \right)^2}}$$

3) Обернену залежність $\rho(\chi)$ знайдемо безпосередньо:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \cos \frac{\pi - \chi}{2} = \sin \frac{\chi}{2},$$

тому

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} = \varepsilon^2 \equiv 1 + \left(\frac{\mu v_{\infty}^2 \rho}{\alpha} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2} = \left(\frac{\mu v_{\infty}^2 \rho}{\alpha} \right)^2,$$

звідки

$$\rho^2(\chi) = \left(\frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2}.$$

4) Обчислення диференціального перерізу $d\sigma$:

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} \equiv \pi \frac{d}{d\chi} [\rho^2(\chi)] = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{4\pi \sin \chi}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Остаточно:

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} \quad \text{або} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (5.28)$$

отриманий результат називається *формулою Резерфорда*.

Зауваження. Значення перерізу не залежить від знаку α , тобто переріз буде одним і тим самим як для потенціалу відштовхування, так і для потенціалу притягання. \square

Іноколи буває корисним вираз для перерізу розсіювання через енергетичні втрати першої частинки у результаті розсіювання. У L -системі частинка m_2 після розсіювання матиме швидкість

$$u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin \frac{\chi}{2},$$

тому її енергія (яка дорівнює енергії, втраченою частинкою m_1) буде

$$\varepsilon = \frac{m_2 u'^2_2}{2} = \frac{2\mu^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Виражаючи кут через енергію ε і підставляючи у формулу для перерізу, знайдемо:

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

Зауважимо, що енергія ε змінюється від 0 (немає розсіювання) до максимального значення $\varepsilon_{max} = \frac{2\mu^2 v_\infty^2}{m_2}$ (лобове зіткнення).

Запишемо вирази для перерізів у L -системі, вважаючи, що частинка маси m_1 налітає на частинку маси m_2 , яка до розсіювання була нерухомою. Для пошуку $d\sigma_1(\theta_1)$ та $d\sigma_2(\theta_2)$ потрібно підставити формули зв'язку кута χ з $\theta_{1,2}$. Для частинок m_2 формула зв'язку (5.11)

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \quad \Rightarrow \quad \chi(\theta_2) = \pi - 2\theta_2, \quad \theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

є досить простою і результат отримується безпосередньо:

$$d\sigma_2(\theta_2) = d\sigma(\chi)|_{\chi=\chi(\theta_2)} = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_2}{\cos^3 \theta_2} d\theta_2. \quad (5.29)$$

Що стосується частинки, що налітає, то перетворення у загальному випадку є досить громіздким і результат залежить від співвідношення між масами, — див (5.15) та (5.16). У тих же позначеннях, при $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$:

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1} - \gamma \sin^2 \theta_1, & \text{при } \gamma < 1 \\ \cos \chi &= \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1} - \gamma \sin^2 \theta_1, & \text{при } \gamma > 1. \end{aligned}$$

У другому випадку, коли частинка, що налітає, важча за нерухому, розв'язок буде неоднозначним і при записі перерізу розсіювання враховуються обидві можливості вибору знаку.

Випадок $\gamma < 1$, або $m_1 < m_2$. Тут $\cos \chi(\theta_1)$ є однозначною функцією і $\chi \in [0, \pi]$ при $\theta_1 \in [0, \pi]$. Для спрощення підстановки попередньо запишемо вираз у C -системі у іншій формі, де під диференціалом стоїть не сам кут χ , а вже відомий вираз для $\cos \chi$:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\sin \chi d\chi}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{d(\cos \chi)}{(1 - \cos \chi)^2},$$

додатково можна також занести множники з кутом χ під диференціал. Після нескладних алгебраїчних перетворень отримаємо вираз:

$$d\sigma_1(\theta_1) = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta_1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}{(1 + \gamma)^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1}. \quad (5.30)$$

Випадок $\gamma > 1$, або $m_1 > m_2$. У формулі для диференціального перерізу потрібно врахувати всі частинки, які розсіюються під кутом θ_1 у L -системі, яким у C -системі відповідають різні кути χ_\pm (індекс відповідає варіанту вибору знаку), аналогічно до попереднього

$$d\sigma_1(\theta_1) = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \left[\frac{|d(\cos \chi_+)|}{(1 - \cos \chi_+)^2} + \frac{|d(\cos \chi_-)|}{(1 - \cos \chi_-)^2} \right],$$

при цьому $\theta_1 \in [0, \theta_{max}]$, де $\sin \theta_{max} = \frac{1}{\gamma}$.

Запишемо диференціали кутів:

$$\begin{aligned} d(\cos \chi_+) &= - \left(2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \right) \sin \theta_1 d\theta_1, \\ d(\cos \chi_-) &= - \left(2\gamma \cos \theta_1 - \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \right) \sin \theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

У даному випадку $2\gamma \geq 2\gamma \cos \theta_1 \geq 2\sqrt{\gamma^2 - 1} > 0$ та $1 + \gamma^2 \geq 1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1 \geq \gamma^2 - 1 > 0$, частка доданків у дужках за модулем не перевищує одиницю при $\theta_1 \in [0, \theta_{max}]$, тому модулі диференціалів мають вигляд:

$$\begin{aligned} |d(\cos \chi_+)| &= \left(2\gamma \cos \theta_1 + \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \right) \sin \theta_1 d\theta_1, \\ |d(\cos \chi_-)| &= \left(2\gamma \cos \theta_1 - \frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \right) \sin \theta_1 d\theta_1, \end{aligned}$$

звідки вираз для перерізу можна записати так:

$$\begin{aligned} d\sigma_1(\theta_1) &= \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \theta_1 d\theta_1}{(1 - \cos \chi_+)^2 (1 - \cos \chi_-)^2} \\ &\times \left[\frac{1 + \gamma^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} [(1 - \cos \chi_+)^2 + (1 - \cos \chi_-)^2] + 2\gamma \cos \theta_1 [(1 - \cos \chi_+)^2 - (1 - \cos \chi_-)^2] \right] \end{aligned}$$

Перетворюючи окремо комбінації

$$\begin{aligned}(1 - \cos \chi_+)(1 - \cos \chi_-) &= (1 + \gamma)^2 \sin^2 \theta_1, \\ (1 - \cos \chi_+)^2 + (1 - \cos \chi_-)^2 &= 2[(1 + \gamma \sin^2 \theta_1) + \cos^2 \theta_1(1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1)], \\ (1 - \cos \chi_+)^2 - (1 - \cos \chi_-)^2 &= 4 \cos \theta_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1} (1 + \gamma \sin^2 \theta_1),\end{aligned}$$

і підставляючи до формули для перерізу, отримаємо після нескладних перетворень:

$$d\sigma_1(\theta_1) = 2 \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta_1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_1}} \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta_1}. \quad (5.31)$$

На завершення розглянемо прості граничні випадки $\gamma \ll 1$ та $\gamma = 1$. При $\gamma \ll 1$, тобто $m_1 \ll m_2$ можна вважати $\mu \simeq m_1$ і $\chi \simeq \theta_1$, тому

$$d\sigma_1(\theta_1) = \left(\frac{\alpha}{4E_1} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}, \quad E_1 = \frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

що, власне, збігається з формулою Резерфорда (5.28). Якщо $\gamma = 1$, то $\mu = \frac{m_1}{2}$ і $\chi = 2\theta_1$, звідки

$$d\sigma_1(\theta_1) = \left(\frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^3 \theta_1} d\Omega_1.$$

Зауваження. Якщо при $m_1 = m_2$ частинки абсолютно тотожні, то після розсіювання їх не має сенсу розрізняти, тому у такій ситуації часто говорять про сумарний переріз розсіювання $d\sigma(\theta) = d\sigma_1(\theta) + d\sigma_2(\theta)$, де кути $\theta_{1,2}$ замінені однаковими значеннями θ . ┘

Випадок $\gamma \gg 1$ залишається як вправа для читача.

ЛЕКЦІЯ 6

Рух зі зв'язками. Рівняння Лагранжа першого роду

1.	Поняття зв'язків.	117
2.	Класифікація зв'язків.	118
3.	Зв'язки та рівняння руху.	119
4.	Дійсні, можливі та віртуальні переміщення.	119
5.	Опис зв'язків.	121
6.	Рівняння Лагранжа першого роду.	122
7.	Інтеграли руху та частинні випадки.	124

1. ПОНЯТТЯ ЗВ'ЯЗКІВ. Рух окремих частинок у системі відбувається під дією двох факторів: сил попарної взаємодії між частинками та зовнішніх сил. У класичній механіці існує клас задач, де на рух системи накладаються геометричні обмеження (на положення частинок), або кінематичні (на швидкості частинок). Для аналізу таких систем вводиться модельне поняття “зв'язку”.

Зв'язки — це обмеження (геометричного або кінематичного походження¹) на координати, швидкості та прискорення частинок системи. Для системи зі зв'язками координати та швидкості частинок задовольняють умови, які не впливають з рівнянь руху. Аналітично вони виражаються у вигляді співвідношень², які задовольняють змінні \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ та $\ddot{\vec{r}}$, а у конкретних системах часто реалізуються у вигляді поверхонь, кривих, об'ємів, які обмежують область руху частинок.

Приклад 1. Приклади рівняння зв'язку для однієї частинки:

- 1) $|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = a$ означає, що частинка по поверхні сфери радіуса a з центром у точці \vec{r}_0 , іншими словами відстань від точки \vec{r}_0 до частинки не змінюється в процесі руху.
- 2) $(\vec{r}(t) - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ означає, що частинка весь час залишається на площині, яку задано рівнянням $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$.
- 3) задача про переслідування: частинка 1 рухається по заданому закону $\vec{r}_1(t)$, а частинка 2 рухається так, що її швидкість напрямлена вздовж прямої, яка з'єднує частинки. Зв'язок, який відображає цей факт, матиме вигляд $(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2) \times \dot{\vec{r}}_2 = 0$.

Зауваження. Зауважимо, що навіть коли зв'язок виражається у вигляді умов на координати, то все одно це передбачає зв'язки і на швидкості, і на прискорення. Наприклад, якщо частинка рухається по сфері радіуса a з центром у початку координат, то диференціюючи рівняння зв'язку отримаємо:

$$r^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{r}^2 = 0, \quad \dots$$

¹ Тобто нединамічні, які безпосередньо не зводяться до сил.

² Рівнянь, нерівностей тощо.

друга рівність означає, що швидкість перпендикулярна до радіус-вектора. Для площини нерухомої:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = 0, \quad \dots$$

тобто швидкість і прискорення є векторами, що належать площині. \square

Поняття зв'язку є модельною ідеалізацією, яку часто досить важко мотивувати фізичними міркуваннями, у деяких випадках його можна уявляти як рух частинки у нескінченному потенціалі з вузьким глибоким мінімумом у околі області, де рухається частинка. Якщо фізичний механізм виникнення зв'язку невідомий, то його можна змодельовувати різними способами.

Для ілюстрації розглянемо рух частинки, з'єднаної з початком координат нерозтяжним та негнучким стержнем (маятник).

Приклад 2. Приклади модельних потенціалів для зв'язку $\vec{r}^2(t) = a^2$ (рух по сфері, або, еквівалентно, маятник довжини a):

1) потенціал $U(r) = U_0 \operatorname{tg}^2\left[\frac{\pi}{l}(r - a)\right]$ (у полярних координатах) має характерну ширину l — період функції, або відстань між сусідніми асимптотами. При $l \rightarrow 0$ область, можлива для руху частинки буде нескінченно малим околom точки $r = a$, тобто частинка рухатиметься по колу. Зв'язком буде співвідношення $r = a$, яке можна сформулювати як “сталість відстані від частинки до початку координат”.

2) потенціал $U(r) = \frac{k}{2}(r - a)^2$ (гармонічний осцилятор) при $k \rightarrow \infty$ рух частинки буде зводитись до з нескінченно малих осциляцій у малому околі кривої $r = a$ (коло) з високою частотою. У такій інтерпретації зв'язок можна замінити на цілком фізичну модель — негнучку пружину нескінченної жорсткості, яка з'єднує частинку з початком координат.

Другий потенціал ближчий до реальної картини взаємодії, ніж перший (походження якого є суто формальним).

2. Класифікація зв'язків. Зв'язки можна класифікувати за кількома ознаками:

- **За типом співвідношення.** Зв'язок називається *утримуючим*, якщо він виражається у вигляді рівності типу $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$, і *неутримуючим*, якщо він формулюється як нерівність типу $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) > 0$ (знак умовний). Прикладом неутримуючого зв'язку можна привести $|\vec{r} - \vec{r}_0| < a$ — математичний маятник з нерозтяжною, але гнучкою ниткою довжини a , підвішений у точці \vec{r}_0 .

Далі буде йти мова тільки про утримуючі зв'язки.

- **За формою співвідношення.** Зв'язок називається *голономним*, якщо він виражається у вигляді рівності типу $f(\vec{r}, t) = 0$, і *неголономним*, якщо він записується у вигляді диференціальної форми Пфаффа

$$\sum_i \vec{A}_i(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}_i + B(\vec{r}, t) dt = 0 \quad (6.1)$$

яка не зводиться до повного диференціалу. У випадку, якщо (6.1) є повним диференціалом, зв'язок зведеться до голономного, $df(\vec{r}, t) = 0$ дає $f(\vec{r}, t) = \text{const}$. Прикладом неголономного зв'язку може служити зв'язок у задачі про переслідування (приклад 1).

Далі в основному йтиметься про голономні зв'язки.

- **За залежністю від часу.** Зв'язок називається *стаціонарним*, якщо він явно не залежить від часу, і *нестационарним*, якщо залежить.

3. ЗВ'ЯЗКИ ТА РІВНЯННЯ РУХУ. Постановка задачі динаміки для систем матеріальних точок зі зв'язками дається набором рівнянь руху та рівнянь голономних зв'язків, які повинні задовольняти розв'язки рівнянь динаміки. Однак якщо на рух частинки накладено зв'язок, то навіть за відсутності зовнішніх сил її рух не буде прямолінійним та рівномірним, оскільки траєкторія повинна належати поверхні зв'язків (де не обов'язково допустимі прямі лінії). Для усунення суперечностей з I законом Ньютона слід модифікувати рівняння руху врахуванням наявності зв'язків.

Таким чином, повна система рівнянь руху складається з N векторних рівнянь динаміки та m скалярних рівнянь зв'язків:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \langle ? \rangle, & i = \overline{1, N}, \\ f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, & \alpha = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (6.2)$$

де $3N > m$ (при $3N = m$ руху не буде і задача є задачею статички). Невідомий доданок $\langle ? \rangle$ у правій частині позначає доданки, де враховують дію зв'язків. У такому підході виникає дві проблеми:

- **математична:** незалежних рівнянь Ньютона буде тепер $3N - m$. Що робити із залежними рівняннями?
- **фізична:** як описати дію зв'язків на частинки у вигляді сил?

Для розв'язку фізичної проблеми приймається постулат:

З боку зв'язків на частинку діє сила реакції \vec{R}_i , яка залежить від параметрів системи, механічного стану та заданих сил взаємодії, тобто $\vec{R}_i = \vec{R}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t, \vec{F}_i)$.

Сили реакції не є ньютонівськими у повному розумінні, оскільки для них не виконується принцип суперпозиції (через залежність від інших сил, вони часто називаються *пасивними* силами на протигагу звичайним, *активним* силам)³. Сили \vec{R}_i є невідомими величинами, і їх потрібно визначати на етапі виключення залежних рівнянь руху.

Перш ніж означити процедуру пошуку сил реакції та виконати аналіз математичної проблеми розглянемо детальніше обмеження на рух системи на геометричному рівні.

4. ДІЙСНІ, МОЖЛИВІ ТА ВІРТУАЛЬНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ. Геометрично набір рівнянь $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$ визначає $3N - m$ -вимірну гіперповерхню у $3N$ -вимірному просторі руху системи, утвореному координатами системи \vec{r}_i . Рух системи відбувається на цій гіперповерхні. Розглянемо обмеження на переміщення, які накладаються зв'язками. У процесі руху на частинки діють два типи сил — сили взаємодії \vec{F}_i (активні) та сили реакції зв'язків \vec{R}_i (пасивні).

³ Для пасивних сил порушується принцип суперпозиції.

1) *Дійсним переміщенням* $d\vec{r}_i$ називається нескінченно мале переміщення частинки, яке здійснюється під дією заданих сил та зв'язків. Таке переміщення відбувається за час dt згідно з рівняннями руху та зв'язків, і може бути знайдене після розв'язку задачі динаміки, — у такому розумінні воно є *динамічним* поняттям. Для побудови дійсного переміщення враховано всі сили, що діють у системі.

Аналіз задачі про рух на поверхні зв'язків можна спростити, якщо з дійсного переміщення виділити частину, яка визначається *одними тільки зв'язками*, тобто означити *кінематично* можливе переміщення (що допускається зв'язками). Очевидно, всі дійсні переміщення є також і кінематично можливими, оскільки автоматично задовольняють умови зв'язків.

2) *Можливим переміщенням* $\Delta\vec{r}_i$ називається нескінченно мале переміщення частинки за час Δt , яке допускається зв'язками.

Таке переміщення відбувається під дією сил реакції, викликаних наявністю зв'язків (за умови відсутності активних сил). Явний вираз для $\Delta\vec{r}_i$ можна отримати, записуючи умови належності векторів \vec{r} та $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ поверхням зв'язків у відповідні моменти часу t та $t + \Delta t$ (якщо зв'язки нестационарні). Маємо:

$$f_\alpha(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{та} \quad f_\alpha(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) = 0$$

або

$$\Delta f_\alpha(\vec{r}, t) = f_\alpha(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{r}, t) = 0.$$

Для малих переміщень праву частину можна розкласти у ряд Тейлора, і у самому грубому наближенні буде дорівнювати диференціалу функції $f_\alpha(\vec{r}, t)$:

$$f_\alpha(\vec{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad df_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i f_\alpha(\vec{r}, t) + \Delta t \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

де $\vec{\nabla}_i$ позначає градієнт функції $f_\alpha(\vec{r}, t)$ по координатах i -ї частинки \vec{r}_i . Вирази для $\Delta\vec{r}_i$ можна отримати, розв'язуючи отриману неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\Delta\vec{r}_i$. Оскільки рівнянь у системі менше за кількість невідомих, то розв'язок буде неоднозначним. Серед набору векторів, що описують можливі переміщення є й вектор дійсного переміщення, але його задано однозначно.

3) *Віртуальним переміщенням* $\delta\vec{r}_i$ називається уявне нескінченно мале переміщення частинки у фіксований момент часу t , яке допускається зв'язками. Віртуальне переміщення є суто геометричним поняттям, воно не відбувається під дією сил і не має продовжуваності у часі. У його означенні ігнорується часова еволюція самих зв'язків (можна сказати, що зв'язки “заморожені”).

Для пошуку віртуального переміщення потрібно побудувати поверхні зв'язків у момент часу t і розглянути можливі переміщення точки по цій поверхні. Рівняння для віртуальних переміщень можна отримати прирівнюванням до нуля диференціалів зв'язків при фіксованому значенні t :

$$f_\alpha(\vec{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad df_\alpha(\vec{r}, t)|_{t=\text{const}} = \delta f_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N \delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i f_\alpha(\vec{r}, t) = 0,$$

Оскільки система рівнянь відносно $\delta\vec{r}_i$ є однорідною, то вектори $\delta\vec{r}_i$ можна знайти з точністю до довільного множника (тобто віртуальні переміщення задають не стільки вектори, скільки напрямки). Віртуальне та можливі переміщення будуть однакові, очевидно, тільки для стаціонарних зв'язків.

Геометричний зміст віртуальних переміщень легко встановити, помітивши, що вектор нормалі до поверхні зв'язку з номером α у точці, де розташована частинка з номером i , буде паралельний до вектора градієнту $\vec{\nabla}f_\alpha(\vec{r}, t)|_{\vec{r}=\vec{r}_i}$, (оскільки градієнт описує зростання функції f_α при відхиленні від поверхні у нормальному напрямку). З точністю до довільної сталої можна ототожнити $\vec{n}_{i\alpha} = \vec{\nabla}_i f_\alpha$, де $\vec{n}_{i\alpha}$ — вектор нормалі до поверхні f_α у точці \vec{r}_i , а $\vec{\nabla}_i$ скорочено позначає градієнт, обчислений у точці \vec{r}_i .

Тоді, за означенням віртуального переміщення $\sum_i \delta\vec{r}_i \cdot \vec{n}_{i\alpha} = 0$ і віртуальні переміщення позначають вектори (малої довжини), які є дотичними до поверхонь зв'язків у фіксований момент часу.

Зауваження. Віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_i$ часто називається також *варіацією* радіус-вектора i -ї частинки. \lrcorner

Зауваження. Таким чином, “переміщення” частинки розбивається на три категорії: динамічне переміщення (дійсне), кінематичне (можливе) та геометричне (віртуальне). Якщо можливі переміщення є розширенням класу дійсних, то віртуальне переміщення не має жодного стосунку до переміщення системи у процесі руху і з'являється у класичній механіці як допоміжне поняття. Віртуальне переміщення є частиною можливого, оскільки рівняння, які вони задовольняють, мають спільну матрицю коефіцієнтів:

$$\sum_{i=1}^N \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i f_\alpha(\vec{r}, t) = -\Delta t \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \sum_{i=1}^N \delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$$

(очевидно, можливе переміщення означено з точністю до віртуального). \lrcorner

5. ОПИС ЗВ'ЯЗКІВ. Розкладемо силу реакції \vec{R}_i на дотичну та нормальну складові по відношенню до гіперповерхні зв'язків⁴:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i^{\parallel} + \vec{R}_i^{\perp}, \quad (6.3)$$

доданок \vec{R}_i^{\perp} називається *силою нормальної реакції*, її роль полягає в утриманні частинки на поверхні зв'язків, а \vec{R}_i^{\parallel} — дотична до гіперповерхні складова сили реакції, вона впливає на закон переміщення частинки по поверхні зв'язку, проти-діючи руху. Прикладом останньої може бути *сила сухого тертя*.

Нормальну складову можна подати у вигляді розкладу по базису нормалей до поверхонь $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$,

$$\vec{R}_i^{\perp} = \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \vec{n}_{i\alpha}, \quad (6.4)$$

⁴ Геометричне місце точок $\{\vec{r} : f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \alpha = \overline{1, m}\}$.

де нормаль $\vec{n}_{i\alpha}$ обчислюється у точці розташування i -ї частинки. Коефіцієнти λ_α , які називаються *невизначеними множниками Лагранжа*, є компонентами вектора \vec{R}_i^\perp у базисі нормалей. Оскільки набір векторів $\vec{n}_{i\alpha}$ є неповним базисом у формальному $3N$ -вимірному просторі руху системи, то розкласти по ньому дотичну складову \vec{R}_i^\parallel , очевидно, не можна.

Таким чином, розклад сили реакції можна записати у вигляді:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i^\parallel + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \equiv \vec{R}_i^\parallel + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \vec{n}_{i\alpha}.$$

Зв'язки називаються *ідеальними*, якщо $\vec{R}_i^\parallel = 0$, тобто дотичні компоненти сили реакції відсутні — так буде завжди при русі по гладенькій поверхні. У такому випадку система не залишає поверхню тільки за рахунок сил утримання. Факт ідеальності зв'язків з рівнянь руху не впливає, а визначається властивостями поверхні.

Зауваження. Нормувати вектори $\vec{n}_{i\alpha}$ на одиницю не прийнято, оскільки інтерес представляє не окремий невідомий множник λ_α , а суми добутків $\sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha$. ┘

Зауваження*. У класичній механіці відсутня проста модель для дотичних компонент сил реакції за виключенням сил сухого тертя. Для останніх існує встановлений експериментально закон пропорційності $|\vec{R}_i^\parallel|$ до $|\vec{R}_i^\perp|$:

$$|\vec{R}_i^\parallel| = k |\vec{R}_i^\perp|$$

зі сталим коефіцієнтом (що залежить від поверхні), який застосовується в обмеженому числі випадків. Сили сухого тертя як правило напрямлені у протилежному до швидкості частинки напрямку і приводять до втрат енергії під час руху.

Природа цих сил досить складна, у першу чергу вони виникають за рахунок електромагнітної взаємодії атомів поверхонь, які дотикаються (гальмування за рахунок утворення та розривів зв'язків між атомами речовини). Точний механізм виникнення таких сил не вкладається в модельні уявлення механіки, тому сили сухого тертя, як і інші типи дотичних сил реакції, у класичній механіці майже не розглядаються. ┘

6. Рівняння Лагранжа першого роду. У випадку ідеальних зв'язків рівняння руху та рівняння зв'язків мають вигляд:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha, & i = \overline{1, N} \\ f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, & \alpha = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (6.5)$$

така система називається *рівняннями Лагранжа першого роду*. Число рівнянь у системі дорівнює загальній кількості невідомих λ_α та \vec{r}_i , тобто $3N + m$, тому задача про пошук закону руху системи поставлена коректно.

Із рівнянь Лагранжа I -го роду отримуємо важливий наслідок:

Якщо $\vec{R}_i^{\parallel} = 0$, то інфінітезимальна робота сил реакції зв'язку при віртуальних переміщеннях дорівнює нулю:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{принцип д'Аламбера}). \quad (6.6)$$

Принцип д'Аламбера впливає з побудови сил реакції та припущення ідеальності зв'язків.

Зауваження. Часто поступають навпаки, означаючи ідеальні зв'язки вимогою $\delta A = 0$ замість $\vec{R}_i^{\parallel} = 0$, тобто постулюючи принцип д'Аламбера. Означення ідеального зв'язку та принцип д'Аламбера — повністю еквівалентні. Такий підхід дозволяє інакше отримати рівняння Лагранжа і допускає узагальнення на випадок неголономних зв'язків.

Дійсно, розглянемо нескінченно малу роботу сил реакції $\vec{R}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i$ при віртуальних переміщеннях:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) = 0$$

Для випадку ідеальних зв'язків. За означенням віртуальних переміщень

$$\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i f_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

ці рівняння є додатковими умовами. Домножимо кожне з них на невизначений множник Лагранжа λ_{α} і знайдемо суму по α . Далі віднімемо цей результат від виразу для роботи:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i f_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \vec{\nabla}_i f_{\alpha} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Якщо підібрати множники Лагранжа так, щоб коефіцієнти при віртуальних переміщеннях залежних координат дорівнювали нулю (тобто це спосіб знайти λ_{α}), то у сумі залишаться тільки переміщення для незалежних координат, це автоматично означатиме рівність нулю коефіцієнтів при них. Разом це дає рівняння Лагранжа для обох типів координат.

У випадку, коли рух системи обмежено як голономними, так і неголономними зв'язками

$$f_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^N \vec{A}_{ai}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}_i + B_a(\vec{r}, t) dt, \quad a = \overline{1, k},$$

то віртуальні переміщення задовольняють рівняння

$$\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i f_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \vec{A}_{ai} \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Домножуючи рівняння на множники Лагранжа λ_{α} та μ_a відповідно, підсумовуючи по вільних індексах та комбінуючи з рівняннями руху, отримаємо

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \vec{\nabla}_i f_{\alpha} - \sum_{a=1}^k \mu_a \vec{A}_{ai} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

якщо підбирати множники так, як і раніше, то рівняння руху матимуть вигляд:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \vec{\nabla}_i f_{\alpha} + \sum_{a=1}^k \mu_a \vec{A}_{ai},$$

це має місце для ідеальних голономних та неголономних зв'язків. \lrcorner

Зауваження. Якщо задано механізм утворення сил тертя, то їх також можна включати до рівнянь руху. \lrcorner

Для розв'язку рівнянь руху (6.5) у першу чергу потрібно виключити невідомі величини $\lambda_{\alpha}(t)$ за допомогою рівнянь зв'язків та залежних рівнянь руху. У загальних рисах процедуру розв'язку можна розбити на дві частини — алгебраїчну (виключення залежних змінних) та аналітичну (інтегрування), і сформулювати так:

- 1) **(алгебраїчний аналіз)** двічі диференціюємо рівняння $f_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0$ по часу t , отримуємо обмеження на швидкості та прискорення, які даються зв'язками:

$$f_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0, \quad \dot{f}_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0, \quad \ddot{f}_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0,$$

виражаємо залежні величини координати і відповідні швидкості та прискорення (позначимо їх x_{α} , \dot{x}_{α} та \ddot{x}_{α} , де $\alpha = \overline{1, m}$);

- 2) **(алгебраїчний аналіз)** з m рівнянь Ньютона для залежних координат виражаємо невідомі множники λ_{α} через залежні координати, швидкості та прискорення, та сили (які фігурують у рівняннях руху):

$$\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(\{x_{\alpha}\}, \{\dot{x}_{\alpha}\}, \{\ddot{x}_{\alpha}\}, \{\vec{F}_{\alpha}\});$$

- 3) **(аналітичний аналіз)** підставляємо $\lambda_{\alpha}(t)$ та залежні координати у $3N - m$ незалежних рівнянь руху та шукаємо їх розв'язок.

Зауважимо, що у процесі розв'язку з'являється єдиний випадок залежності сили від прискорення у класичній механіці (через множники Лагранжа), але така залежність — фіктивна і є наслідком пасивності сил реакції.

Таким чином, у п. 1 та 2 з $3N + m$ рівнянь руху та зв'язків за допомогою $2m$ співвідношень (m зв'язків та m рівнянь руху) виключаються $2m$ залежних величин і залишається $3N - m$ руху для $3N - m$ незалежних координат. У правих частинах рівнянь руху фігуруватимуть також сили реакції, що виражені через механічний стан системи та через активні сили (це і вносить залежність від прискорень). Число незалежних параметрів, які потрібні для опису механічної системи називається *числом ступенів вільності* системи, у даному випадку їх буде $3N - m$.

У конкретних задачах можливі спрощення цієї схеми та відхилення від неї в той чи інший бік — залежно від того, що потрібно знайти. Громіздкість процедури розв'язку породжується характером механіки — законами Ньютона, зокрема першим, який задає систему відліку, та другим, який фіксує векторний апарат. Подальші надбудови над цією теорією пов'язані з переходом до довільних систем відліку і довільних систем координат.

7. ІНТЕГРАЛИ РУХУ ТА ЧАСТИННІ ВИПАДКИ. У загальному випадку закони зміни імпульсу, моменту імпульсу та енергії мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \vec{R}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{R}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha (\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i f_\alpha), \\ \frac{dE}{dt} &= \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{R}_i = \frac{\partial A^{ext}}{\partial t} + \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i f_\alpha) = \frac{\partial A^{ext}}{\partial t} - \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t},\end{aligned}\quad (6.7)$$

їх можна отримати підстановкою всіх сил (активних та пасивних) до правих частин загальних законів зміни імпульсу, моменту імпульсу та енергії.

Розглянемо декілька найбільш поширених частинних випадків:

1) стаціонарні зв'язки: $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$, тоді робота сил зв'язку при дійсних переміщеннях (не тільки при віртуальних) дорівнює нулю. Це означає, що у законі зміни енергії зв'язки відсутні (і не впливають на факт її збереження).

2) центральні зв'язки: $\vec{\nabla}_i f_\alpha \parallel \vec{r}_i$, тоді момент імпульсу змінюється за звичайним законом, який визначається тільки активними силами.

Під час аналізу руху абсолютно твердого тіла ці частинні випадки відіграють важливу роль.

Зауваження. У конкретних задачах для пошуку сил реакції та закону руху можна використовувати закони збереження, як і у звичайній механіці Ньютона. Найчастіше використовується закон збереження енергії для стаціонарних зв'язків. ▮

Приклад 3. Частинка рухається у полі сили тяжіння по сфері радіуса a . Знайти силу реакції як функцію механічного стану частинки.

◀ Розглянемо систему координат, в початку якої знаходиться центр сфери. Тоді:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\vec{n}, \quad f(\vec{r}) = r^2 - a^2 = 0.$$

Очевидно, $\vec{n} = \vec{\nabla}f = 2\vec{r}$, тому рівняння Лагранжа мають вигляд

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + 2\lambda\vec{r}, \quad f(\vec{r}) = r^2 - a^2 = 0.$$

Похідні рівняння зв'язку мають вигляд:

$$\dot{f} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0, \quad \ddot{f} = 2(\dot{\vec{r}}^2 + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) = 0,$$

тому домножаючи рівняння руху скалярно на \vec{r} і використовуючи останнє співвідношення для виключення другої похідної, отримаємо:

$$\lambda = -\frac{m}{2a^2}(\dot{\vec{r}}^2 + \vec{g} \cdot \vec{r}).$$

Швидкість можна виключити за допомогою закону збереження енергії,

$$\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - m\vec{g} \cdot \vec{r} = E,$$

тому остаточно:

$$\lambda = -\frac{1}{2a^2}(2E + 3m\vec{g} \cdot \vec{r}).$$

У частинному випадку, коли частинка скочується з верхньої точки сфери (по зовнішній поверхні) без початкової швидкості, $\vec{r}(0) = a\vec{e}_z$, $\dot{\vec{r}}(0) = 0$. Тоді $E = mga$ і сила реакції перетворюватиметься в нуль при $z = \frac{2}{3}a$ (точка відриву від сфери).

Якщо при $\vec{r}(0) = a\vec{e}_z$ початкова швидкість дорівнює $\dot{r}(0) = \sqrt{ga}$, то частинка одразу відриватиметься від сфери. ►

Приклад 4. Частинка рухається у полі сили тяжіння по гладенькій кривій $y = \varphi(x)$. Знайти функцію $x(t)$ у квадратурах.

◀ Рівняння руху та зв'язку:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\vec{n}, \quad f(x, y) = y - \varphi(x) = 0.$$

Запишемо проекції рівняння руху у системі координат, де $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. Оскільки $\vec{n} = \vec{\nabla}f = (-\varphi'(x), 1)$, то:

$$m\ddot{x} = -\lambda\varphi'(x), \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda, \quad y = \varphi(x),$$

незалежною координатою природно вважати змінну x . Оскільки зв'язок стаціонарний і частинка рухається у потенціальному полі, то має місце закон збереження енергії:

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{const} \equiv mgy(0) \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2g[y(0) - y].$$

Сила реакції не входить до останнього співвідношення, тому з нього можна одразу отримати закон руху без пошуку сили реакцій. Використовуючи вираз похідної рівняння зв'язку $\dot{y} = \varphi'(x)\dot{x}$ для виключення \dot{y} із закону збереження енергії, отримаємо:

$$\dot{x}^2(1 + \varphi'(x)^2) = 2g[y - y(0)] \equiv 2g[\varphi(x) - \varphi(x(0))].$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знайдемо:

$$t = t_0 + \int \left[\frac{1 + \varphi'(x)^2}{2g[\varphi(x) - \varphi(x(0))]} \right]^{1/2} dx.$$

Пошук сили реакції безпосередньо з рівнянь руху залишається як вправа для читача. ►

ЛЕКЦІЯ 7

Механіка Ейлера. Кінематичні величини та рівняння

1.	Модель та число ступенів вільності.	127
2.	Поступальні та орієнтаційні ступені вільності.	128
3.	Орієнтаційні координати. Кути Ейлера.	129
4.	Формула Пуансо. Кутова швидкість.	132
5.	Властивості кутової швидкості.	133
6.	Узагальнена формула Пуансо.	135
7.	Миттєва вісь обертання.	135
8.	Кінематичні рівняння Ейлера.	136
9.	Умови контакту.	137

1. МОДЕЛЬ ТА ЧИСЛО СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ. Абсолютно твердим тілом (для скорочення АТТ) називається механічна система $N > 3$ матеріальних точок з фіксованими відносними відстанями.

Для опису абсолютно твердого тіла потрібно визначити кількість ступенів вільності і ввести узагальнені координати, найбільш зручні для опису його положення. Очевидно, вимога незмінності відстаней між частинками, які утворюють абсолютно тверде тіло, накладає зв'язки на координати. Якщо тіло складається з N частинок, то за рахунок цих зв'язків загальне число ступенів вільності буде менше, ніж $3N$. Дійсно, якщо частинку m_i задано радіус-вектором \vec{r}_i , то сталі відстані від неї до інших частинок $l_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const}$ відповідають $N - 1$ умовам зв'язків і для $i = \overline{1, N}$ повна кількість таких рівнянь буде $C_N^2 = N(N - 1)/2$. У випадку $N \gg 1$ кількість додаткових умов буде перевищувати загальну кількість координат $N(N - 1)/2 \geq 3N$ (це виконується вже для $N > 7$).

Насправді загальне число незалежних додаткових умов $l_{ij} = \text{const}$ буде менше, ніж $N(N - 1)/2$, частина з них зводиться до геометричних тотожностей. Число ступенів вільності абсолютно твердого тіла можна знайти безпосереднім підрахунком, послідовно складаючи список *незалежних* координат частинок, які його утворюють. Для опису положення окремо взятої частинки потрібно 3 координати. Для N частинок загальне число координат $3N$ зменшиться за рахунок зв'язків $l_{ij} = \text{const}$:

- положення частинки 1 задано радіус-вектором \vec{r}_1 (є 3 ступені вільності);
- положення частинки 2 задано радіус-вектором \vec{r}_2 , причому є зв'язок $l_{12} = \text{const}$ (залишається 2 ступені вільності);
- положення частинки 3 задано радіус-вектором \vec{r}_3 , причому є два зв'язки $l_{13} = \text{const}$ та $l_{23} = \text{const}$ (залишається 1 ступінь вільності).

Додавання інших частинок до системи зі збереженням відносних відстаней не змінює загального числа незалежних координат, положення частинки з номером α (при $\alpha > 3$) повністю визначається відстанями $l_{1\alpha}$, $l_{2\alpha}$ та $l_{3\alpha}$. Таким чином,

Для опису положення абсолютно твердого тіла потрібно 6 ступенів вільності, вибір яких є абсолютно довільним.

Вибір незалежних координат можна провести, попередньо аналізуючи можливі рухи системи.

Зауваження. Така система є найпростішою моделлю суцільного середовища, перехід до континууму можна виконати граничним переходом $N \rightarrow \infty$ та $\langle l \rangle \rightarrow 0$ (середня відстань між частинками) за умови фіксованого повного об'єму системи $V \sim N \langle l \rangle^3$. Представлення твердого тіла як системи матеріальних точок дозволяє спростити деякі обчислення за рахунок заміни інтегралів сумами.

Очевидно, модель “абсолютно твердого тіла” є ідеалізованою і може бути використана для опису суцільного середовища тоді, коли зміною форми та розмірів (деформаціями) середовища можна знехтувати. У такому випадку внутрішня структура твердого тіла не має суттєвого значення і рух розглядається “у цілому”. \square

2. ПОСТУПАЛЬНІ ТА ОРІЄНТАЦІЙНІ СТУПЕНІ ВІЛЬНОСТІ. У процесі руху абсолютно твердого тіла відстані між довільними двома точками (які до нього входять) залишаються незмінними протягом всього часу руху:

$$l_{ij}(t) = |\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| = |\vec{r}_i(0) - \vec{r}_j(0)| = l_{ij}(0).$$

Зміну положень окремо взятих точок можна розглядати як просторове перетворення вектора, який їх з'єднує. Існує тільки два типи перетворень, при яких довжини векторів зберігаються¹:

- 1) перетворення паралельного переносу, всі вектори змінюються на однакові величини (зсув початку та кінця без зміни напрямку);
- 2) повороти та відбивання (зміна напрямку вектора з фіксованим початком вектора).

Відбивання не відносяться до класу неперервних перетворень, тому переміщення АТТ можна розглядати як суперпозицію паралельних переносів та поворотів. Відповідний рух розбиватиметься на *поступальний* та *обертальний*.

Найбільш природний опис зміни положення та орієнтації АТТ у просторі полягає у введенні двох систем координат: *лабораторної системи* S , яка є інерціальною і пов'язана зі спостерігачем, та *власної системи* S' , що жорстко зв'язана з АТТ і повністю повторює всі його рухи. Початок координат системи S' пов'язують з деякою точкою P , нерухомою відносно АТТ, яка називається *полюсом*. Як полюс у більшості випадків обирають деяку точку, яка належить АТТ (хоча й це не обов'язково²). Система S' називається також *системою координат полюсу* АТТ, або P -системою. Рух АТТ можна інтерпретувати як неперервне перетворення P -системи координат S' відносно лабораторної системи S .

Положення полюса задано у системі координат S радіус-вектором $\vec{R}_P(t)$, радіус-вектори однієї точки АТТ в системах S та S' пов'язані співвідношенням (див.

¹ Теорема Ейлера про рух АТТ, приймається без доведення (див. [1]).

² Наприклад, для маси, розподіленою по колу $x^2 + y^2 = R^2$ полюс природно вибрати в його центрі.

рис. 7.1):

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_P(t) + \vec{r}'(t). \quad (7.1)$$

Якщо \vec{e}_i та $\vec{e}'_i(t)$ — вектори ортонормованих базисів систем S та S' , то для опису орієнтації системи S' відносно S можна ввести матрицю переходу $\mathbf{A} = \{\alpha_{ij}\}$ як набору коефіцієнтів розкладу векторів базису S по базису S' :

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}(t) \vec{e}'_j(t), \quad \alpha_{ij}(t) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j(t), \quad (7.2)$$

вектори базису системи S' змінюються із часом, як і компоненти матриці переходу.

Перетворення, яке зберігає ортогональність базисних векторів задовольняє умову ортогональності (див. додаток):

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{або} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{1}.$$

Такі рівності накладають 6 обмежень на 9 коефіцієнтів матриці переходу, тому орієнтацію системи координат S' задано трьома незалежними параметрами — це можуть бути самі незалежні компоненти матриці переходу, або інші, еквівалентні їм величини (у більшості випадків це кути, що описують орієнтацію системи координат).

У результаті, 6 ступенів вільності, необхідні для опису положення АТТ, можна розбити на дві групи:

- 1) 3 *поступальні* ступені вільності — координати полюса \vec{R}_P ;
- 2) 3 *орієнтаційні* ступені вільності — компоненти матриці переходу (або 3 незалежні параметри, які її визначають).

У класичній механіці як орієнтаційні ступені вільності використовують кути Ейлера. Крім них широкого застосування у техніці набули параметри Келі-Клейна (див. [1]), кути Крилова та параметри Родрігеса-Гамільтона.

3. ОРІЄНТАЦІЙНІ КООРДИНАТИ. КУТИ ЕЙЛЕРА. Для опису орієнтації АТТ у просторі можна скористатись довільними трьома параметрами, які визначають матрицю переходу від системи S до S' . Найзручнішими у більшості випадків є кути Ейлера.

Для означення кутів Ейлера простіше вказати послідовність перетворень відносно фіксованих напрямків L -системи, які разом утворюють перехід від системи S до S' , їх наведено на рис. 7.2.

- 1) поворот навколо осі z на кут φ , задається матрицею переходу

$$\mathbf{A}_1(z, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вісь z не змінюється, а осі x та y переходять відповідно у x' та y' . Напрямок Ox' називається *лінією вузлів* і позначається ON . У результаті отримаємо систему координат $(x'y'z')$;

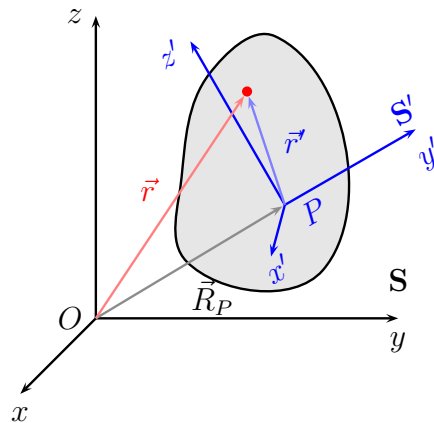


Рис. 7.1. Власна система координат

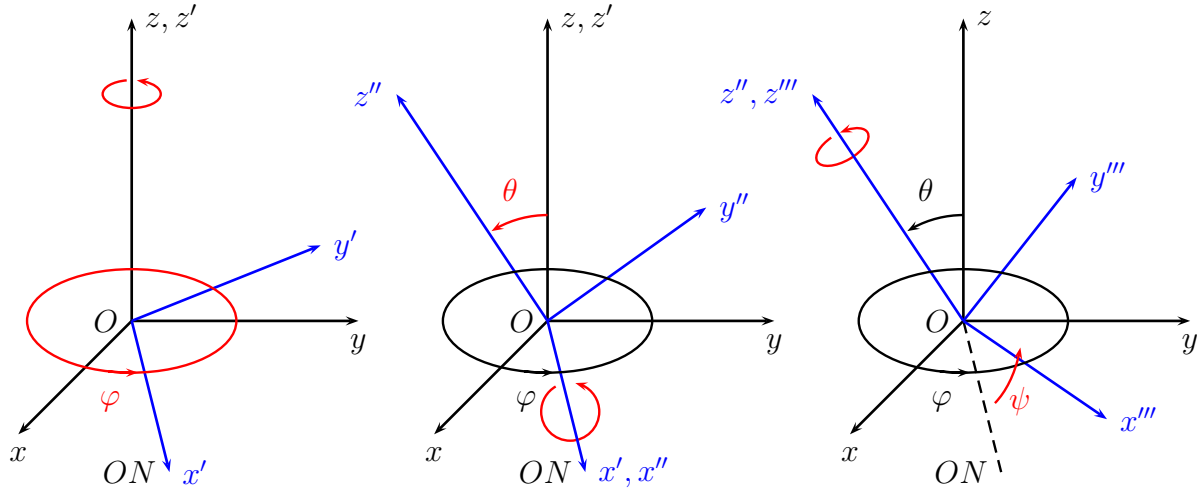


Рис. 7.2. Означення кутів Ейлера.

2) поворот навколо осі x' (лінія вузлів) на кут θ , задається матрицею переходу

$$\mathbf{A}_2(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

вісь x' не змінюється, а осі y' та z' переходять відповідно у y'' та z'' . У результаті отримаємо систему координат $(x''y''z'')$;

3) поворот навколо осі z'' на кут ψ , задається матрицею переходу

$$\mathbf{A}_3(z, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вісь z'' не змінюється, а осі x'' та y'' переходять відповідно у x''' та y''' . У результаті отримаємо систему координат $(x'''y'''z''')$;

Система координат $(x'''y'''z''')$ і є системою S' , жорстко зв'язаною з АТТ. Результуюча матриця перетворення $(xyz) \rightarrow (x'''y'''z''')$ дається добутком:

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}(z, \varphi) \vec{e}'_j = \alpha_{ij}(z, \varphi) \alpha_{ja}(x, \theta) \vec{e}''_a = \alpha_{ij}(z, \varphi) \alpha_{ja}(x, \theta) \alpha_{ab}(z, \psi) \vec{e}'''_b$$

або у матричній формі

$$\mathbf{A}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{A}_1(z, \varphi) \cdot \mathbf{A}_2(x, \theta) \cdot \mathbf{A}_3(z, \psi)$$

(першим на аргумент діє останній множник, тобто виконується перший поворот на кут ψ , оскільки така матриця перетворює нові компоненти у старі). Підстановка матриць послідовних поворотів приводить до громіздкого виразу:

$$\mathbf{A}(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi - c_\theta s_\psi s_\varphi & -s_\psi c_\varphi - c_\theta c_\psi s_\varphi & s_\varphi s_\theta \\ c_\psi s_\varphi + c_\theta s_\psi c_\varphi & -s_\psi s_\varphi + c_\theta c_\psi c_\varphi & -c_\varphi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi & c_\theta \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

де для скорочення позначено $c_\alpha = \cos \alpha$ та $s_\alpha = \sin \alpha$ (для відповідних кутів). Матричні елементи у таблиці задають косинуси кутів між осями старої (нумерація по рядках) та нової систем координат (нумерація по стовпчиках³).

Кути φ , θ та ψ називаються *кутами Ейлера*. Якщо позначити осі власної системи координат АТТ x' , y' та z' , то означення кутів Ейлера можна сформулювати так (рис. ??):

- кут $\theta = \angle(Oz, Oz') = [0, \pi]$ називається кутом *нутації*;
- кут $\varphi = \angle(Ox, ON) = [0, 2\pi]$ називається кутом *прецесії*;
- кут $\psi = \angle(ON, Ox') = [0, 2\pi]$ називається кутом *власного обертання*.

Лінія вузлів ON є перетином площин (Oxy) та $(Ox'y')$.

Зауваження. Послідовність поворотів, яку використано для побудови матриці переходу часто називають послідовністю zxz (по назвах осей, навколо яких здійснюються повороти). Вона не єдина, матрицю поворотів можна будувати за допомогою іншої послідовності, у якій відсутні послідовні повороти навколо однієї й тієї самої осі. Зокрема у квантовій механіці використовується послідовність zyz , у якій відрізняється напрямок другого повороту:

$$\mathbf{A}_1(z, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2(y, -\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3(z, \psi) = \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Повна матриця $A(\varphi, \theta, \psi) = A_1(z, \varphi)A_2(y, -\theta)A_3(z, \psi)$ відрізнятиметься від побудованої раніше. Однак послідовність zyz має певні переваги. Перші два повороти переводять вісь z вихідної системи координат у напрямок, заданий стандартними кутами (θ, φ) сферичної системи координат. Дійсно,

$$\mathbf{A}_1(z, \varphi) \cdot \mathbf{A}_2(y, -\theta) = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\theta & -s_\varphi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta & c_\varphi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}.$$

Вектор з компонентами $(0, 0, 1)$ у нових координатах у старій системі координат матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} c_\varphi c_\theta & -s_\varphi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta & c_\varphi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi s_\theta \\ c_\theta \end{pmatrix},$$

що збігається з компонентами одиничного вектора, напрямок якого задано стандартними сферичними кутами (θ, φ) .

Цей факт дозволяє дати просту інтерпретацію послідовностям поворотів abc ейлерового типу (утворених з x , y та z), які можна взяти за основу для переходу від однієї системи координат до іншої. Взагалі така задача розв'язується у один прийом: потрібно виконати перетворення повороту навколо одиничного вектора (його задають два параметри) на довільний кут (він є третім параметром). У послідовності abc перші два перетворення дозволяють переорієнтувати одну з осей координат довільним чином, а останнє вже

³ Той самий результат можна отримати за допомогою формул сферичної тригонометрії безпосередньо з рисунку.

виконує остаточний поворот навколо неї. Найзручнішою є послідовність zyz , оскільки перетворення мають простий геометричний зв'язок із сферичними координатами⁴.

Аналіз вибору різних параметризацій досить просто можна провести за допомогою комплексного представлення просторових тривимірних поворотів, використовуючи кватерніони.

У деяких прикладних задачах (зокрема, моделювання руху літаків та супутників) застосовується послідовність xyz , де всі осі різні. Це пов'язано з тим, що коли другий поворот у послідовності aba виконується на дуже малий кут, осі a першого та третього поворотів фактично збігаються і кути поворотів навколо них фактично не можна розрізнити (остаточне перетворення дає поворот на сумарний кут і побудова матриці переходу стає неоднозначною). \perp

4. ФОРМУЛА ПУАНСО. КУТОВА ШВИДКІСТЬ. Розглянемо точку АТТ, яку задано вектором \vec{r}' відносно полюса. За означенням моделі АТТ, довжина вектора \vec{r}' , як відстань між полюсом та точкою АТТ, не змінюється у процесі руху, тому у розкладі вектора \vec{r}' по базису системи S' компоненти будуть сталими:

$$\vec{r}'(t) = x'_i \vec{e}'_i(t), \quad x'_i = \text{const},$$

але орієнтація вектора \vec{r}' змінюється з часом за рахунок зміни базисних векторів.

Радіус-вектор точки відносно початку координат системи S має вигляд:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_P(t) + \vec{r}'(t) = \vec{R}_P(t) + x'_i \vec{e}'_i(t). \quad (7.4)$$

Знайдемо швидкість точки АТТ прямим диференціюванням формули (7.4):

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{R}}_P(t) + \dot{\vec{r}}'(t) = \dot{\vec{R}}_P(t) + x'_i \dot{\vec{e}}'_i(t).$$

Перший доданок описує швидкість поступального переміщення АТТ. Для перетворення другого (орієнтаційного) доданку розкладемо вектори $\dot{\vec{e}}'_i(t)$ по базису системи S' :

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \gamma'_{ij} \vec{e}'_j(t), \quad \text{де} \quad \gamma'_{ij} = \dot{\vec{e}}'_i(t) \cdot \vec{e}'_j(t) \quad (\text{компоненти розкладу}).$$

Параметри γ'_{ij} мають розмірність оберненого часу. Оскільки систему координат S' вибрано ортонормованою, то $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}$, звідки диференціюючи це співвідношення по часу, отримуємо:

$$\dot{\vec{e}}'_i \cdot \vec{e}'_j = -\vec{e}'_i \cdot \dot{\vec{e}}'_j, \quad \text{або} \quad \gamma'_{ij} = -\gamma'_{ji},$$

тому матриця γ'_{ij} є антисиметричною. Як відомо, довільний антисиметричний матриці можна поставити у відповідність аксіальний вектор, який є згортою цієї матриці з тензором Леві-Чивіта:

$$\omega'_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \gamma'_{ij}, \quad \text{обернене співвідношення:} \quad \gamma'_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega'_k. \quad (7.5)$$

⁴ Окрім цього, дозволяє записати матрицю повороту навколо напрямку \vec{n} на заданий кут одразу матричній формі, у чому легко пересвідчитись безпосередньо.

У матричному записі формули (7.5) мають вигляд (позначимо $\mathbf{\Gamma}' = \{\gamma'_{ij}\}$):

$$\mathbf{\Gamma}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_3 & -\omega'_2 \\ -\omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \\ \gamma'_{12} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Вектор $\vec{\omega} = \omega'_i \vec{e}'_i$ називається *кутовою швидкістю* системи S' відносно системи S , він означений за допомогою розкладу у системі S' . Очевидно, використовуючи матрицю переходу, його можна описати і за допомогою розкладу у системі S . Якщо вектор звичайної швидкості описує швидкість просторового переміщення точки, то кутова швидкість відповідає швидкості зміни напрямку, у даному випадку — зміни орієнтації базису системи S' відносно нерухомого базису S . Підстановка виразу для γ'_{ij} до формули зміни базисного вектора $\vec{e}'_i(t)$ дає:

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \varepsilon_{ijk} \vec{e}'_j(t) \omega'_k = \varepsilon_{ajk} \delta_{ai} \vec{e}'_j(t) \omega'_k = \varepsilon_{ajk} (\vec{e}'_i)_a \vec{e}'_j(t) \omega'_k$$

У результаті, циклічно переставляючи індекси і використовуючи формулу запису векторного добутку через тензор Леві-Чивіта, отримаємо:

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \quad (\text{формула Пуансо}) \quad (7.7)$$

Похідна радіус-вектора \vec{r}' по часу буде мати вигляд:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_P + x'_i (\vec{\omega} \times \vec{e}'_i(t)) = \dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}', \quad (7.8)$$

ця формула також називається формулою Пуансо. Якщо закон руху системи S' відомий, то $\vec{\omega}(t)$ є заданою функцією часу.

5. Властивості кутової швидкості. Явний вираз для компонент кутової швидкості в системі S' легко отримати з її означення (7.5). Перейдемо до нерухомого базису за допомогою обернених формул переходу $\vec{e}'_i = \alpha_{ji}(t) \vec{e}_j$:

$$\gamma'_{ij} = \dot{\vec{e}}'_i \cdot \vec{e}'_j = \dot{\alpha}_{ki}(t) \vec{e}_k \cdot \alpha_{lj}(t) \vec{e}_l = \dot{\alpha}_{ki}(t) \alpha_{lj}(t) \delta_{kl} = \dot{\alpha}_{ki}(t) \alpha_{kj}(t), \quad \text{або} \quad \mathbf{\Gamma}' = \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}.$$

Звідси

$$\omega'_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{\alpha}_{li}(t) \alpha_{lj}(t). \quad (7.9)$$

Формули (7.9) встановлюють зв'язок між компонентами кутової швидкості у системі S' та орієнтаційними координатами. Компоненти вектора $\vec{\omega}$ у системі S можна знайти за допомогою матриці переходу:

$$\omega_i = \alpha_{ij} \omega'_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{abj} \dot{\alpha}_{la}(t) \alpha_{lb}(t) \alpha_{ij}(t)$$

(вираз далі не спрощується).

Зауваження. З формули (7.9) випливає важлива різниця між кутовою та звичайною лінійною швидкістю: у загальному випадку $\vec{\omega}$ не зводиться до похідної вектора, оскільки $\alpha_{li}(t) \neq \alpha_{lj}(t)$. ┘

Досить просто можна знайти зв'язки кутової швидкості АТТ з параметрами матриці переходу для “циліндроподібного кочення” АТТ, коли у процесі руху одна з осей системи координат S' не змінює орієнтації, а переміщується паралельно сама собі⁵.

Приклад 1. Знайти компоненти кутової швидкості для “циліндроподібного кочення” АТТ, коли вісь z' не змінює орієнтації.

◀ Виберемо системи координат S та S' так, що осі z та z' паралельні. Матриця переходу для перетворення повороту навколо осі z на кут φ має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю $\mathbf{\Gamma}'$:

$$\mathbf{\Gamma}' = \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi & \dot{\varphi} \cos \varphi & 0 \\ \dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формули (7.6), отримаємо $\omega'_1 = \omega'_2 = 0$, $\omega'_3 = \dot{\varphi}$, тобто $\vec{\omega} = \omega'_3 \vec{e}'_3 = \dot{\varphi} \vec{e}'_3$. Оскільки вісь z' паралельна до осі z , то у системі S буде $\vec{\omega} = \omega_3 \vec{e}_3 = \dot{\varphi} \vec{e}_3$. Таким чином, кутову швидкість виражено через параметр, який безпосередньо описує поворот. ►

Із прикладу 1 випливає важливий висновок: *кутова швидкість напрямлена вздовж осі обертання*. Така властивість виконується і в загальному випадку.

Орієнтаційні та поступальні ступені вільності є взаємно незалежними. Покажемо, що

Вибір полюса не впливає на значення кутової швидкості.

□ Доведення проведемо від оберненого: нехай $P_{1,2}$ — два різних полюси з радіус-векторами $\vec{R}_{1,2}$, які зають різні значення кутової швидкості $\vec{\omega}_{1,2}$. Тоді одна й та сама точка АТТ задається радіус-векторами $\vec{r}'_{1,2}$ (рис. 7.4) відносно різних полюсів, у явній формі $\vec{r} = \vec{R}_1 + \vec{r}'_1$ та $\vec{r} = \vec{R}_2 + \vec{r}'_2$, звідси

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2.$$

Її швидкість має вигляд:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_1 = \dot{\vec{R}}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}'_2.$$

тому

$$\dot{\vec{R}}_2 - \dot{\vec{R}}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}'_2.$$

⁵ Назва походить від аналогії з коченням циліндру по поверхні — такою віссю буде його вісь симетрії.

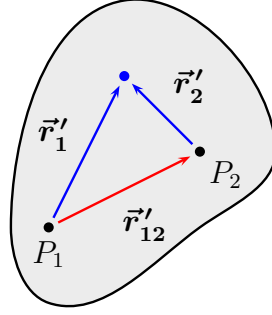


Рис. 7.4. Доведення незалежності значення кутової швидкості від вибору полюса.

Згідно з побудовою моделі АТТ, вектор $\vec{r}'_{12} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$ має сталу довжину (з'єднує полюси). Швидкість зміни цього вектора:

$$\dot{\vec{r}}'_{12} = \dot{\vec{r}}'_1 - \dot{\vec{r}}'_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}'_2 = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{r}'_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_{12},$$

де виконано підстановку $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2 + \vec{r}'_{12}$. З іншого боку, швидкість точки P_2 відносно полюса P_1 буде дорівнювати $\dot{\vec{r}}'_{12} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}'_{12}$. Порівнюючи вирази для $\dot{\vec{r}}'_{12}$ отримаємо $(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{r}'_2 = 0$, тому $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$, оскільки вектор \vec{r}'_2 є довільним. ■

6. УЗАГАЛЬНЕНА ФОРМУЛА ПУАНСО. Розкладемо довільний вектор \vec{A} по базису власної системи АТТ, тоді:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A'_\alpha \vec{e}'_\alpha) = \vec{e}'_\alpha \frac{dA'_\alpha}{dt} + A'_\alpha \frac{d\vec{e}'_\alpha}{dt} = \vec{e}'_\alpha \frac{dA'_\alpha}{dt} + A'_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{e}'_\alpha) = \vec{e}'_\alpha \frac{dA'_\alpha}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A},$$

або

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}, \quad \frac{d'\vec{A}}{dt} = \vec{e}'_\alpha \frac{dA'_\alpha}{dt}. \quad (7.10)$$

Перший доданок у (7.10) описує диференціювання компонент вектора, якщо орти вважати фіксованими, це відповідає змінам вектора у власній системі АТТ. Другий доданок враховує переміщення власної системи, разом вони описують зміну вектора у просторі (у нерухомій системі спостерігача). Частинними випадками (7.10) є формули Пуансо для похідних базисних векторів та компонент радіус-вектора у системі S' (зі сталими координатами). Зокрема, для радіус вектора \vec{r} формули (7.10) дають:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

перший доданок $\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}}{dt}$ є швидкістю частинки АТТ у системі S' .

7. МИТТЄВА ВІСЬ ОБЕРТАННЯ. Якщо полюс P у даний момент часу рухається, то точка P' з радіус-вектором \vec{R}' (відносно системи спостерігача) буде нерухомою, якщо

$$\dot{\vec{R}}' = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{R}' - \vec{R}) = 0.$$

Нехай точку P' вибрано як полюс у даний момент часу, тоді для швидкості у цей момент часу матимемо:

$$\dot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

де вектор \vec{r}' відкладається від P' . Таким чином, рух АТТ у даний момент часу можна розглядати як суто обертальний рух навколо осі, що проходить через полюс P' . Така вісь називається *миттєвою віссю обертання*. Швидкості всіх точок АТТ лежать у площині, перпендикулярній до кутової швидкості (яка напрямлена вздовж миттєвої осі).

Зазначимо, що така інтерпретація матиме місце тільки для даного моменту часу. Під час переміщення АТТ миттєва вісь обертання також буде переміщуватись.

Поняття миттєвої осі зручне для запису модуля швидкості. Якщо \vec{r}' — радіус-вектор відносно нерухомого у даний момент часу полюса P' , то $|\dot{\vec{r}}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}'| = \omega r'$, якщо $\vec{\omega} \perp \vec{r}'$.

8. КІНЕМАТИЧНІ РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА. Вирази для компонент кутової швидкості через кути Ейлера та їх похідні називаються *кінематичними рівняннями Ейлера*. Згідно з розглянутим раніше означенням кутової швидкості (7.9), для пошуку компонент ω'_i в системі S' (або ω_i в системі S) потрібно побудувати комбінації з матрицею переходу та її похідними. Наприклад,

$$\omega'_3 = \gamma'_{12} = \dot{\alpha}_{k1}(t)\alpha_{k2}(t) \equiv \dot{\alpha}_{11}(t)\alpha_{12}(t) + \dot{\alpha}_{21}(t)\alpha_{22}(t) + \dot{\alpha}_{31}(t)\alpha_{32}(t),$$

де елементи α_{ij} означено у (7.3). Існує, однак, простіша геометрична процедура запису компонент кутової швидкості, еквівалентна до безпосередньої підстановки.

Як було показано раніше, кутова швидкість напрямлена вздовж осі обертання у даний момент часу. Розкладемо вектор $\vec{\omega}$ на три доданки, які відповідають елементарним поворотам, що було взято за основу у означенні кутів Ейлера:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi, \quad (7.11)$$

де $\vec{\omega}_\varphi$ — кутова швидкість першого повороту, напрямлена вздовж осі z , $\vec{\omega}_\theta$ — кутова швидкість другого повороту, напрямлена вздовж лінії вузлів ON , $\vec{\omega}_\psi$ — кутова швидкість третього повороту, напрямлена вздовж осі z' (див. рис. 7.5).

Для запису компонент $\vec{\omega}$ у системі S' знайдемо проекції кожного доданку (7.11) на осі x' , y' та z' . Легко бачити, що⁶

$$\begin{cases} (\omega'_\psi)_1 = 0, \\ (\omega'_\psi)_2 = 0, \\ (\omega'_\psi)_3 = \dot{\psi}, \end{cases} \quad \begin{cases} (\omega'_\theta)_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \\ (\omega'_\theta)_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \\ (\omega'_\theta)_3 = 0, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} (\omega'_\varphi)_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ (\omega'_\varphi)_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ (\omega'_\varphi)_3 = \dot{\varphi} \cos \theta. \end{cases}$$

Тоді $\omega'_i = (\vec{\omega}'_\psi)_i + (\vec{\omega}'_\theta)_i + (\vec{\omega}'_\varphi)_i$, звідки

$$\begin{cases} \omega'_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega'_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega'_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (7.12)$$

⁶ Кут між проекцією осі Oz на площину $x'y'$ та лінією вузлів є прямим, оскільки ця проекція збігається з положенням осі Oy до повороту на кут θ у процедурі побудови кутів Ейлера.

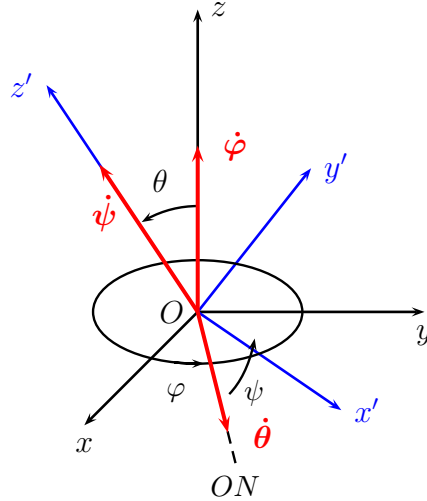


Рис. 7.5. До виведення кінематичних рівнянь Ейлера.

Аналогічно можна отримати компоненти вектора $\vec{\omega}$ у нерухомій системі координат⁷:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_2 = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{cases} \quad (7.13)$$

Задача 7.1. Отримати компоненти кутової швидкості безпосередньо з матриці переходу.

Задача 7.2. Довести формули (7.13) геометричним методом.

Задача 7.3. Побудувати кінематичні рівняння Ейлера для послідовності поворотів zyz .

Зауваження. У механіці матеріальної точки також можна виділити кінематичні рівняння зв'язку швидкостей та координат, зокрема у декартовій системі координат такі рівняння за формою є максимально простими:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z},$$

а для сферичної системи координат більш громіздкі:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \dot{\phi},$$

однак у ньютонівській механіці матеріальної точки, незалежно від вибору координат, формули для компонент швидкості породжуються означенням $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, тобто кінематичні рівняння Ньютона є тривіальними.

У механіці АТТ, кутова швидкість не є похідною від іншої величини, тому встановлення зв'язку між кутами та $\vec{\omega}$ проводиться індивідуально для кожного вибору орієнтаційних ступенів вільності. Кінематичні рівняння Ейлера є найбільш поширеними співвідношеннями такого типу. \lrcorner

⁷ Кут між проекцією осі Oz' на площину xy та лінією вузлів з прямим.

9. УМОВИ КОНТАКТУ. Для руху АТТ по деякій поверхні існують обмеження, які відповідають способу контакту з поверхнею. Ці обмеження дають нові зв'язки між координатами АТТ.

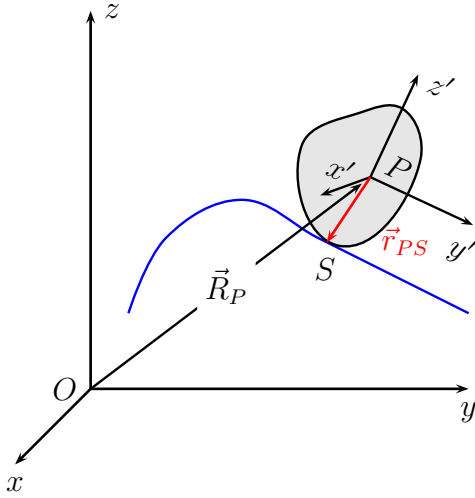


Рис. 7.6. До означення умови контакту.

Характер взаємодії атомів АТТ з атомами поверхні досить складний і приводить до появи сил сухого тертя (які є причиною втрат енергії). Модель, що адекватно описує процес руху з тертям, лежить поза межами застосовності класичної механіки у чистому вигляді. Для простих систем розглядають два граничних випадки — нескінченно слабкого та сильного зчеплення.

У випадках нехтовно малого тертя між обмежуючою поверхнею та АТТ використовується наближення *абсолютно гладенької поверхні*, у якому тертям нехтують і рух АТТ описується як ковзання по поверхні. Факт контакту з поверхнею виражається в суто геометричних обмеженнях на \vec{R}_P .

Якщо ж проковзування є нехтовно малим (протилежний випадок), то використовується наближення *абсолютно шорсткої поверхні*, рух АТТ є коченням. Умовою відсутності проковзування є рівність швидкостей АТТ та самої поверхні у точці контакту S (поверхня може бути рухомою):

$$\vec{r}_S(t) = \vec{r}'|_{\vec{r}=\vec{r}_S},$$

тут $\vec{r}_S(t)$ — швидкість поверхні. Швидкість точки АТТ можна підставити сюди згідно з формулою Пуансо, тому умова контакту може бути записана так:

$$\vec{r}_S(t) = (\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PS})|_{\vec{r}=\vec{r}_S}, \quad (7.14)$$

де \vec{r}_{PS} — вектор, який проведено від полюса P у точку контакту S .

Умова (7.14) є зв'язком на рух АТТ, у загальному випадку неголономним, оскільки у рівності фігурують похідні радіус-вектора центру мас та кутові швидкості, які виражаються через кути Ейлера та їх похідні. Якщо зв'язок зводиться до голономного, то він дозволяє пов'язати орієнтаційні координати із поступальними.

Приклад 2. Кочення сфери по горизонтальній площині (неголономний зв'язок).

◀ Розглянемо сферу радіуса R , що котиться без проковзування по горизонтальній площині. Початок координат введемо у довільній нерухомій точці площини (рис. 7.7), а полюс — у центрі мас C . Якщо (x_C, y_C, z_C) — координати центру мас, то геометричний зв'язок зводиться до умови $z_C = R$.

Оскільки площина нерухома, то умова контакту має вигляд:

$$\dot{\vec{R}}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CS} = 0.$$

Якщо $\vec{n} = \vec{e}_z$ — нормаль до площини, то $\vec{r}_{CS} = -\vec{n}R$, тому

$$\dot{\vec{R}}_C - R\vec{\omega} \times \vec{n} = 0.$$

Позначимо $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, тоді

$$\vec{n} \times \vec{\omega} = \vec{e}_z \times \vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_y - \omega_y \vec{e}_x.$$

Проектуючи рівняння зв'язку

$$\dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{y}_C \vec{e}_y = \omega_x \vec{e}_y - \omega_y \vec{e}_x$$

на осі системи координат і використовуючи кінематичні рівняння Ейлера у лабораторній системі (7.13), отримуємо:

$$\dot{x}_C = -R\omega_y = -R(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi), \quad \dot{y}_C = R\omega_x = R(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi).$$

Ці зв'язки є неінтегровними за винятком випадку $\varphi = 0$ та $\theta = \pi/2$ (циліндроподібний рух, вісь обертання z' паралельна до осі x). ►

Якщо зв'язок, що породжує умову контакту, є голономним, то він дозволяє зменшити число ступенів вільності. До рівнянь таких зв'язків *завжди* входять як поступальні (через $\dot{\vec{R}}_P$), так і орієнтаційні (через $\vec{\omega}$) ступені вільності. Досить часто деякі кути можна виразити через координати полюса, або навпаки.

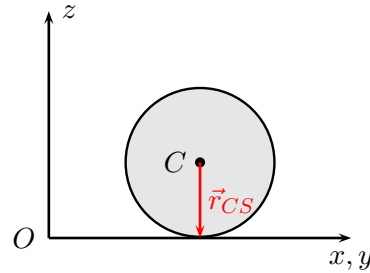


Рис. 7.7. До прикладу 2

ЛЕКЦІЯ 8

Механіка Ейлера. Динамічні величини та тензор інерції

1.	Опис динаміки АТТ.	141
2.	Центр мас АТТ.	141
3.	Імпульс АТТ.	142
4.	Момент імпульсу АТТ.	142
5.	Кінетична енергія АТТ.	144
6.	Потенціальна енергія АТТ.	144
7.	Властивості тензора інерції.	145

1. Опис динаміки АТТ. Модель абсолютно твердого тіла — це система N матеріальних точок, для опису якої у загальному випадку потрібно $3N$ диференціальних рівнянь Ньютона другого порядку. Оскільки ефективне число ступенів вільності (за рахунок зв'язків) насправді дорівнює 6, то для пошуку закону руху можна обмежитись розв'язком шести незалежних рівнянь руху, або використати довільні 6 рівнянь, які є наслідками рівнянь динаміки із врахуванням зв'язків. Для цього найбільш природно скористатись законами зміни класичних інтегралів руху — імпульсу \vec{P} , координат центру мас \vec{R}_C у початковий момент часу, моменту імпульсу \vec{L} та енергії E для системи N частинок, які було означено у лекції 2. Зручність такого підходу полягає у тому, що з одного боку вони описують систему “у цілому”, а з іншого — кількість рівнянь є достатньою для опису даної системи (сумарна кількість незалежних інтегралів руху становить 10).

Таким чином, рівняння Ньютона можна замінити на закони зміни класичних інтегралів руху, попередньо виражаючи останні через поступальні та орієнтаційні координати АТТ. Для отримання необхідних виразів для \vec{P} , \vec{L} , T та U підставимо координати \vec{r}_i швидкості частинок $\dot{\vec{r}}_i$ за формулою Пуансо (яка пов'язує швидкість $\dot{\vec{r}}_i$ з координатами полюса та кутами) до означень цих величин.

2. ЦЕНТР МАС АТТ. Позначимо

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (\text{повна маса системи}).$$

Радіус-вектор центру мас АТТ можна записати у вигляді:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_P + \vec{r}'_i) = \vec{R}_P + \vec{R}'_C, \quad (8.1)$$

де

$$\vec{R}'_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i, \quad (8.2)$$

позначає радіус-вектор центру мас відносно полюса. Якщо полюс збігається з центром мас, то $\vec{R}'_C = 0$.

3. Імпульс АТТ. Підстановка формули Пуансо до означення імпульсу системи частинок дає:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = M \dot{\vec{R}}_P + M \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}'_i}{M},$$

звідки

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}_P + M \vec{\omega} \times \vec{R}'_C. \quad (8.3)$$

Якщо полюс збігається з центром мас АТТ, то $\vec{R}'_C = 0$, у такому випадку імпульс не залежить від орієнтаційних ступенів вільності:

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}_C. \quad (8.4)$$

Цей вираз формально означає, що імпульс АТТ за формою є імпульсом частинки маси M , розташованої у точці з радіус-вектором \vec{R}_C .

4. Момент імпульсу АТТ. Аналогічна підстановка до означення моменту імпульсу системи дає:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R}_P + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= M \vec{R}_P \times \dot{\vec{R}}_P + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}}_P + \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_P \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i). \end{aligned}$$

У другому та третьому доданках правої частини виділяється радіус-вектор центру мас \vec{R}'_C та його швидкість. Розкриємо дужки у останньому доданку, розкладаючи вектори \vec{r}'_i та $\vec{\omega}$ по осях системи S' :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) &= \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega} r_i'^2 - \vec{r}'_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i)] = \left| \begin{array}{l} \text{базис} \\ \text{системи } S' \end{array} \right| \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{e}'_\alpha [\omega'_\alpha r_i'^2 - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \omega'_\beta] = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}) \vec{e}'_\alpha \omega'_\beta \end{aligned}$$

де по грецьких індексах передбачається підсумовування від 1 до 3 (грецькі індекси нумерують компоненти векторів, а латинські — частинки).

Величина, яка не включає кутову швидкість і залежить від мас частинок та їх положень, означених у системі S' (і не залежить від часу)

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}) \quad (8.5)$$

називається *тензором інерції*. Із цього означення видно, що $I'_{\alpha\beta} = I'_{\beta\alpha}$.

У результаті,

$$\vec{L} = M\vec{R}_P \times \dot{\vec{R}}_P + M\vec{R}'_C \times \dot{\vec{R}}_P + M\vec{R}_P \times (\vec{\omega} \times \vec{R}'_C) + I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \vec{e}'_\beta \quad (8.6)$$

Останній доданок можна записати у інваріантному вигляді як згортку тензора $\hat{\mathbf{I}}$ з вектором $\vec{\omega}$:

$$\hat{\mathbf{I}}\vec{\omega} = I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \vec{e}'_\beta,$$

оскільки вектор $\hat{\mathbf{I}}\vec{\omega}$ є інваріантним, то у координатах системи S його розклад буде мати вигляд $\hat{\mathbf{I}}\vec{\omega} = I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \vec{e}_\beta$.

Зауваження. Із запису останнього додатку виразу для моменту імпульсу у детальній формі (де вказано залежності від часу)

$$\hat{\mathbf{I}}\vec{\omega} = I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha(t) \vec{e}'_\beta(t) = I_{\alpha\beta}(t) \omega_\alpha(t) \vec{e}_\beta$$

впливає, що кращою для його запису є власна система АТТ, оскільки у ній тензор інерції не залежить від часу. Тензор інерції у лабораторній системі можна отримати за звичайним законом перетворення тензора по відомій матриці переходу (формально матриця переходу і внесе залежність від часу¹). \lrcorner

У деяких випадках вираз (8.6) можна спростити вдалим вибором полюса. Якщо полюс вибрано у центрі мас, тобто $\vec{R}_P = \vec{R}_C$, то залишається два доданки:

$$\vec{L} = M\vec{R}_C \times \dot{\vec{R}}_C + I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \vec{e}'_\beta \quad (8.7)$$

з яких один відповідає поступальним ступеням вільності $\vec{L}_\parallel = M\vec{R}_C \times \dot{\vec{R}}_C$, а другий — орієнтаційним $\vec{L}_\circ = I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \vec{e}'_\beta$. Перевагою такого запису є очевидна фізична інтерпретація кожного з доданків.

Якщо полюс вибрати у нерухомій точці (миттєва вісь обертання), тобто $\dot{\vec{R}}_P = 0$, то також залишиться два доданки:

$$\vec{L} = M\vec{R}_P \times (\vec{\omega} \times \vec{R}'_C) + I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \vec{e}'_\beta,$$

інтерпретація яких менш очевидна. Тому для опису лише обертального руху користуються першим варіантом.

Тензор моменту інерції відіграє важливу роль у динаміці абсолютно твердого тіла, він описує інерційні властивості тіла щодо обертання і включає інформацію

¹ інша причина, через яку $I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}(t)$ полягає у тому, що у лабораторній системі область інтегрування у означенні тензора інерції (об'єм АТТ) залежить від часу.

не тільки про масу АТТ, а і про характер її розподілу в його об'ємі. Якщо маса розподілена неперервно в об'ємі АТТ, то $N \rightarrow \infty$ і сума заміниться на інтеграл. Якщо $\rho(\vec{r}')$ — об'ємна густина розподілу маси, то перехід до континууму проводиться введенням неперервної координати \vec{r}' (аналог \vec{r}'_i , відкладається від полюсу) замість індексу i , яка відіграє роль номера та дозволяє ідентифікувати елемент об'єму всередині АТТ, і замінами:

$$m_i \rightarrow dm(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dV', \quad \sum_{i=1}^N \rightarrow \int_V dV'$$

де dV' — елемент об'єму АТТ в околі \vec{r}' , а область інтегрування охоплює весь об'єм АТТ. Звідси

$$I'_{\alpha\beta} = \int_V \rho(\vec{r}') [r'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_\alpha x'_\beta] dV'$$

Підкреслимо, що компоненти тензора інерції в системі S' не залежать від часу, оскільки будуються зі стаціонарних величин (зокрема, з відносних відстаней між частинками АТТ, які фіксовані).

Детальніше про властивості тензору інерції буде далі.

5. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ АТТ. Підстановка швидкостей до формули для кінетичної енергії АТТ (як системи частинок) дає:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i]^2 = \frac{M \dot{\vec{R}}_P^2}{2} + M \dot{\vec{R}}_P (\vec{\omega} \times \vec{R}'_C) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2.$$

Останній доданок є кінетичною енергією обертання T_\circ і перетворюється так само, як і для моменту імпульсу. Переходячи до континуального розподілу маси, отримуємо:

$$\begin{aligned} T_\circ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}') (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 dV' \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}') [\omega^2 r'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')^2] dV' = \frac{1}{2} I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \omega'_\beta, \end{aligned}$$

тому остаточно

$$T = \frac{M \dot{\vec{R}}_P^2}{2} + M \dot{\vec{R}}_P (\vec{\omega} \times \vec{R}'_C) + \frac{1}{2} I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \omega'_\beta. \quad (8.8)$$

Якщо полюс вибрано у центрі мас, то кінетична енергія складається з двох доданків:

$$T = T_\parallel + T_\circ = \frac{M \dot{\vec{R}}_C^2}{2} + \frac{1}{2} I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \omega'_\beta \quad (8.9)$$

Орієнтаційний доданок кінетичної енергії є скаляром і однаково виглядає у обох системах координат: $T_{\odot} = \frac{1}{2} I'_{\alpha\beta} \omega'_{\alpha}(t) \omega'_{\beta}(t) = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}(t) \omega_{\alpha}(t) \omega_{\beta}(t)$.

6. ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ АТТ. Оскільки відстані між частинками у АТТ є фіксованими, то взаємодія між частинками вносить до загальної потенціальної енергії сталу величину, яку можна не враховувати:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} U_{ij}(r_{ij}) + U_i^{ext} = \text{const} + U_i^{ext},$$

Тому потенціальна енергія АТТ U складається тільки з енергії взаємодії із зовнішніми джерелами. Якщо зовнішнє джерело задано радіус-вектором $\vec{r}_S(t)$ з відомим законом руху, то

$$U(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}_i - \vec{r}_S(t)) = \sum_{i=1}^N U_i(\vec{R}_P + \vec{r}'_i - \vec{r}_S(t)).$$

У континуальному випадку:

$$U = \int_V u(\vec{R}_P + \vec{r}' - \vec{r}_S(t)) dV',$$

де u — потенціальна енергія взаємодії елементу об'єму АТТ із зовнішнім полем. Якщо джерело є достатньо віддаленим, то $|\vec{R}_P - \vec{r}_S(t)| \gg r'$ і вираз для потенціальної енергії можна розкласти в ряд Тейлора по малій величині r' :

$$U = \int_V u(\vec{R}_P - \vec{r}_S(t)) dV' + \int_V \vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' u(\vec{R}_P - \vec{r}_S(t)) dV' + \dots$$

Перший доданок описує потенціальну енергію АТТ як однієї матеріальної точки з сумарною масою, що зосереджена у полюсі. Останній у більшості випадків вибирається у центрі мас. Якщо обмежитись тільки цим доданком, то така формула буде точною для системи у зовнішньому однорідному і стаціонарному силовому полі.

7. ВЛАСТИВОСТІ ТЕНЗОРА ІНЕРЦІЇ. За означенням компоненти тензора інерції у власній системі координат АТТ мають вигляд:

$$I_{\alpha\beta} = \int_V \rho(\vec{r}) [r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha} x_{\beta}] dV \quad \text{або} \quad I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta}] \quad (8.10)$$

для континуального та дискретного розподілів маси відповідно. Тут і далі під час обговорення властивостей тензора інерції будемо опускати штрихи, маючи на увазі

систему координат S' . У розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_V \rho(\vec{r}) (y^2 + z^2) dV, & I_{12} &= I_{21} = - \int_V \rho(\vec{r}) xy dV, \\ I_{22} &= \int_V \rho(\vec{r}) (x^2 + z^2) dV, & I_{23} &= I_{32} = - \int_V \rho(\vec{r}) yz dV, \\ I_{33} &= \int_V \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2) dV, & I_{31} &= I_{13} = - \int_V \rho(\vec{r}) xz dV, \end{aligned}$$

для дискретного розподілу маси інтеграли потрібно замінити на суми за правилом $\int_V dV \rho(\dots) \rightarrow \sum_{i=1}^N m_i(\dots)$.

Елементарні властивості З формул (8.10) випливають такі властивості тензора $\hat{\mathbf{I}}$:

- компоненти $I_{\alpha\beta}$ утворюють симетричний тензор другого рангу

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha},$$

це очевидно з того, що вони будуються через добутки компонент радіус-вектора, який є тензором першого рангу. У позначеннях зовнішнього добутку:

$$\hat{\mathbf{I}} = \int_V \rho(\vec{r}) (\hat{\mathbf{1}} r^2 - \vec{r} \otimes \vec{r}) dV,$$

де тензор $\vec{r} \otimes \vec{r}$ має компоненти $x_\alpha x_\beta$;

- тензор інерції є адитивною величиною. Якщо розбити АТТ на дві частини з об'ємами V_1 та V_2 , то

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}^{(1)} + I_{\alpha\beta}^{(2)},$$

де $I_{\alpha\beta}^{(1,2)}$ обчислюються інтегруванням по об'ємах $V_{1,2}$ (випливає з властивостей інтегралу Рімана або суми). Така властивість повторює адитивність загальної маси АТТ відносно розбиття системи на частини;

- сума двох довільних діагональних компонент не менша за третю діагональну компоненту. Дійсно, використовуючи явні вирази, отримаємо:

$$I_{11} + I_{22} = \int_V (x^2 + y^2 + 2z^2) dV \geq \int_V (x^2 + y^2) dV = I_{33}.$$

На відміну від кутової швидкості, тензор інерції залежить від вибору полюса. Нехай задано компоненти тензору інерції $I_{\alpha\beta}$ відносно полюса P . Розглянемо вираз для компонент тензора у випадку вибору іншого полюса P' , який можна отримати з вихідного P зсувом на сталий вектор \vec{a} . Це відповідає перетворенню

координат $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$. Тоді, виконуючи заміну, знайдемо:

$$\begin{aligned} I'_{\alpha\beta} &= \int_V \rho'(\vec{r}') [r'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_\alpha x'_\beta] dV' = \left| \begin{array}{c} \text{заміна:} \\ \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a} \end{array} \right| \\ &= \int_V \rho(\vec{r}) [(\vec{r} + \vec{a})^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_\alpha + a_\alpha)(x_\beta + a_\beta)] dV \\ &= I_{\alpha\beta} + M(a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) + 2\delta_{\alpha\beta} \vec{a} \cdot \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV - \int_V \rho(\vec{r}) (a_\alpha x_\beta + a_\beta x_\alpha) dV, \end{aligned}$$

де $\rho(\vec{r}) = \rho'(\vec{r}')$. Виділяючи координати центру мас \vec{R}_{PC} відносно полюса P в останніх двох доданках, отримаємо:

$$I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M(a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) + 2M\delta_{\alpha\beta} \vec{a} \cdot \vec{R}_{PC} - M(x_{PC,\alpha} a_\beta + x_{PC,\beta} a_\alpha). \quad (8.11)$$

Це і є загальним законом перетворення тензора інерції при зміні полюса. Якщо полюс P збігається з центром мас C , то

$$\mathbf{I}'_{\alpha\beta} = \mathbf{I}_{\alpha\beta} + M(\mathbf{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta) \quad \text{при } P = C. \quad (8.12)$$

Вираз (8.12) називається *теоремою Штейнера* і дає спосіб обчислення компонент тензора інерції $I'_{\alpha\beta}$ відносно довільного полюса P' по відомих компонентах $I_{\alpha\beta}$ з полюсом у центрі мас і заданим розташуванням точок P' та C .

Приклад 1. Зсув полюса вздовж осі z на відстань a .

◀ Якщо $\hat{\mathbf{I}}$ — тензор інерції відносно полюсу в центрі мас, то для $\vec{a} = a\vec{e}_z$ в теоремі Штейнера (8.12)

$$\hat{\mathbf{I}}' = \hat{\mathbf{I}} + \begin{pmatrix} Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

змінюються тільки дві діагональні компоненти. ▶

Задача на власні вектори та власні значення. Напрямки осей власної системи координат АТТ можна провести у широких межах, головне щоб осі були нерухомими відносно АТТ у процесі його руху. Перехід від одного вибору власної системи $S^{(1)}$ до іншого $S^{(2)}$ можна здійснити за допомогою сталої матриці переходу \mathbf{A} , змінивши вектори базису за звичайним правилом. Будь-яка векторна чи тензорна характеристика АТТ перетворюватиметься за відповідним законом. Цим можна скористатись, щоб спростити тензор інерції та комбінації, де він фігурує. Якщо для деякого вибору базису власної системи частина компонент тензора інерції стає рівною нулю, то у такій системі зручніше аналізувати рух АТТ. Для пошуку оптимальної орієнтації осей можна скористатись міркуваннями симетрії (див. далі). Найбільш загальний підхід полягає у аналізі спектральної задачі для тензора інерції. Система координат, яку буде отримано у результаті такого аналізу, виявляється найзручнішою (у ній кіоткість відмінних від нуля компонент тензора інерції буде мінімально можливою).

Тензор інерції є симетричним тензором другого рангу. Як і для інших тензорів другого рангу, для нього можна сформулювати задачу на власні вектори та власні значення, яка полягає у розв'язуванні векторного рівняння (або системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь):

$$\hat{\mathbf{I}}\vec{a} = \lambda\vec{a} \quad \text{або} \quad I_{\alpha\beta}a_\beta = \lambda a_\alpha \quad (8.13)$$

із невідомими величинами \vec{a} та λ , які називаються відповідно *власними векторами* та *власними значеннями* тензора $\hat{\mathbf{I}}$.

Розв'язок рівняння (8.13) можна отримати елементарними методами лінійної алгебри. Саме рівняння (8.13) можна записати у вигляді однорідної системи рівнянь відносно компонент вектора \vec{a} з коефіцієнтами, які залежать від λ :

$$(\hat{\mathbf{I}} - \lambda\hat{\mathbf{1}})\vec{a} = 0, \quad \text{або} \quad (I_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta})a_\beta = 0.$$

Якщо матриця системи не вироджена, то єдиним розв'язком рівняння буде тривіальний $\vec{a} = 0$, який не являє інтересу. Нетривіальний розв'язок існує за умови виродженості матриці, іншими словами — лінійної залежності одного або кількох рівнянь від решти:

$$\det(\hat{\mathbf{I}} - \lambda\hat{\mathbf{1}}) = \det \begin{pmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Розкриваючи дужки, одержимо кубічне рівняння відносно λ , яке називається *характеристичним*. Після того, як знайдено корені характеристичного рівняння λ_1 , λ_2 , λ_3 , можна повернутись до пошуку векторів, послідовно підставляючи власні значення до незалежних рівнянь вихідної системи (8.13). Оскільки число незалежних рівнянь менше, ніж кількість невідомих компонент вектора \vec{a} , то розв'язок буде відомо з точністю до множника. Таким чином, результатом розв'язку задачі є власні значення λ та власні напрямки (власні вектори з точністю до довжини). Для однозначності отримані власні вектори нормують на одиницю, щоб позбавитись довільного множника. У випадку дійсного симетричного тензора другого рангу, яким є тензор інерції, задача на власні вектори та значення має властивості:

- 1) власні значення є дійсними числами;
- 2) власні вектори, які відповідають різним власним значенням є ортогональними між собою. У випадку кратного власного значення відповідні напрямки власних векторів можна довільним чином вибирати у площині, яка перпендикулярна до іншого власного вектора.
- 3) у системі координат, де базисні вектори збігаються з власними векторами симетричного тензора, у матриці тензора відмінні від нуля тільки діагональні елементи, які дорівнюють власним значенням:

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Для переходу до такої системи координат будується відповідна матриця переходу зі скалярних добутків векторів вихідного базису та ортонормованих власних векторів. Оскільки вихідний базис — декартів, то у матриці переходу по стовпчиках буде записано компоненти власних векторів.

Власні значення тензора інерції прийнято позначати I_1, I_2, I_3 , вони називаються *головними моментами інерції*. Напрямки власних векторів (або *векторів власного базису*) тензору інерції називають *головними осями інерції*.

Якщо всі головні моменти інерції різні, то тіло називається *асиметричною дзигою*, якщо серед них два є однаковими, то тіло називається *симетричною дзигою*. у випадку трьох однакових головних моментів тіло називається *кульовою дзигою* (саме так буде для кулі).

Властивість діагональності тензора інерції у власному базисі важлива для запису формул моменту імпульсу та енергії у власній системі координат АТТ. Якщо її осі вибрати вздовж головних осей інерції, то тензор інерції стає діагональним і вирази для \vec{L}_O та T_O значно спрощуються:

$$\vec{L}_O = \vec{e}'_\alpha I'_{\alpha\beta} \omega'_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 \vec{e}'_\alpha I'_\alpha \omega'_\alpha, \quad T_O = \frac{1}{2} I'_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \omega'_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 I'_\alpha \omega'^2_\alpha \quad (8.14)$$

(у правих частинах рівностей (8.14) суми вказані явно, оскільки індекс зустрічається тричі).

Властивості симетрії. Досить часто АТТ має деяку властивість просторової симетрії. Це означає, геометрична форма та характер розподілу мас у тілі такими, що при деякому перетворенні тіло переходить саме у себе. Очевидно, довільна фізична характеристика, зокрема тензор інерції, мають бути інваріантними відносно перетворень симетрії. У більшості випадків наявність просторової симетрії накладає обмеження на форму тензора інерції.

Якщо перетворення симетрії є перетворенням координат з матрицею переходу \mathbf{A} , то тензор інерції буде інваріантним, якщо всі компоненти тензора залишаються незмінними при перетворенні

$$I'_{\alpha\beta} = \alpha_{\mu\alpha} \alpha_{\nu\beta} I_{\mu\nu} \equiv I_{\alpha\beta}.$$

Приклад 2. Симетрія відбивання у площині (xy) , тобто заміна напрямку осі z (тоді кажуть, що (xy) є площиною симетрії тіла).

◀ Матриця переходу для перетворення відбивання має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Закон перетворення тензора інерції:

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}}' = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{I}} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & -I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \equiv \hat{\mathbf{I}}.$$

Порівнюючи вирази \hat{I}' та \hat{I} бачимо, що рівність між ними можлива, якщо виконується $I_{31} = I_{13} = 0$ та $I_{23} = I_{32} = 0$. Тому для довільного тіла, симетричного відносно перетворення відбивання у площині (xy) тензор інерції має вигляд:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Кількість незалежних компонент такого тензора складатиме 4 (якщо взяти до уваги його симетричність).

Оскільки елементи третього рядка та стовпчика (крім діагонального) дорівнюють нулю, то вісь z є головною віссю інерції. ►

Задача 8.1. Показати, що для тіла, симетричного відносно поворотів на кут $\frac{\pi}{2}$, тензор інерції має вигляд:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Із умови задачі 8.1 випливає, що вісь z буде головною віссю інерції такого тіла. Крім того, два з власних значень є однаковими.

Мають місце прості властивості, які встановлюють зв'язки між головними напрямками тензора інерції та симетріями:

- якщо у тіла є площина симетрії, то центр мас належить цій площині, а одна з головних осей тензора інерції ортогональна до площини симетрії;
- якщо у тіла є вісь симетрії, то ця вісь є головною віссю тензора інерції, їй належить центр мас. Інші осі — ортогональні до неї;
- якщо порядок осі симетрії вище другого, тобто тіло переходить саме у себе при повороті навколо цієї осі на кут $\frac{2\pi}{n}$, для $n > 2$, то два головні моменти інерції рівні між собою.

Наприклад, головною віссю інерції однорідного циліндру кругового перерізу є його вісь симетрії (поворот на довільний кут). Дві інші — ортогональні до неї, їх розташування — довільне (симетрія відбивання у довільній площині, якій належить вісь циліндру). У однорідної сфери таких осей безліч, довільна вісь, що проходить через геометричний центр, є віссю симетрії.

Задача 8.2. Довести ці властивості, використовуючи означення головних осей інерції.

Приклад 3. Знайти головні моменти інерції однорідного циліндра (радіус R , висота h , маса m).

◀ З міркувань симетрії зрозуміло, що головними осями буде вісь симетрії та дві довільні осі, ортогональні до неї. Помістимо початок координат у центр мас, який розташований на осі симетрії на половині висоти, вісь z напрямлена вздовж осі симетрії. Тоді у циліндричних координатах матимемо:

$$I_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{-h/2}^{h/2} dz r^2 = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4}.$$

Оскільки об'єм циліндра $V = \pi R^2 h$, то $I_{zz} = \frac{mR^2}{4}$. Далі,

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2) dV = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{-h/2}^{h/2} dz (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) = \frac{\pi \rho R^2 h}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right),$$

або $I_{xx} = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$. З міркувань симетрії зрозуміло, що $I_{yy} = I_{xx}$. ►

Задача 8.3. Знайти головні моменти інерції:

- 1) однорідного стержня (довжина l , маса m)
 - 2) однорідного диску (радіус R , маса m)
 - 3) однорідної сфери (радіус R , маса m);
 - 4) однорідного куба (сторона a , маса m)
 - 5) однорідного конуса (радіус R , кут розхилу α , маса m).
- (полюс вибрати у центрі мас).

Зауваження. Часто буває так, що для візуально різних форм об'ємів АТТ тензори моменту інерції є однаковими (у одній системі координат). Наприклад, так буде для куба та сфери для певних розмірів цих тіл у власній системі центру мас. Це означає, що властивості таких тіл щодо обертання однакові, відмінності між ними виявляються в інших характеристиках. ┘

Розглянуті загальні обмеження на форму тензора інерції базуються винятково на аналізі симетрій і не враховують його явного вигляду. У деяких випадках тензор інерції також спрощується через специфічну форму тіла та характер розподілу мас. Наприклад, якщо маса АТТ розподілена тільки у площині (xy) , то об'ємні інтеграли переходять у поверхневі з областю інтегрування у площині $z = 0$ і головні моменти інерції матимуть вигляд:

$$I_1 = \int_S \rho(x, y) x^2 dS, \quad I_2 = \int_S \rho(x, y) y^2 dS, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

ЛЕКЦІЯ 9

Динамічні рівняння Ейлера. Вільне обертання

1.	Динамічні рівняння Ньютона-Ейлера.	153
2.	Вільне обертання. Кутові швидкості.	155
3.	Розв'язок динамічних рівнянь руху.	156
4.	Вільне обертання. Кути.	161
5.	Вільне обертання. Стійкість руху.	162

1. ДИНАМІЧНІ РІВНЯННЯ НЬЮТОНА-ЕЙЛЕРА. Рівняння руху АТТ по суті є прикладом застосування законів Ньютона для системи із голономними зв'язками, тому для опису його руху можна скористатись шістьма рівняннями, які описують закон зміни імпульсу та моменту імпульсу:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{ext}, \quad (9.1)$$

у правих частинах записані сумарна зовнішня сила та сумарний момент зовнішніх сил. Рівняння руху (9.1) називаються *рівняннями Ейлера-Ньютона*. Їх можна записати також за допомогою узагальненої формули Пуансо (7.10):

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P} = \vec{F}^{ext}, \quad \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}^{ext}. \quad (9.2)$$

Рівняння (9.2) — це система шести диференціальних рівнянь для визначення шести невідомих функцій часу: трьох координат полюса \vec{R}_p і трьох кутів Ейлера ψ , φ та θ .

У випадку, коли полюс АТТ вибрано у центрі мас, то

$$M\ddot{\vec{R}}_c = \vec{F}^{ext}, \quad \frac{d}{dt}(M\vec{R}_c \times \dot{\vec{R}}_c) + \frac{d}{dt}(\vec{e}'_\alpha I'_{\alpha\beta} \vec{\omega}'_\beta) = \vec{N}^{ext}. \quad (9.3)$$

Якщо $\vec{F}^{ext} = 0$, то у деякій лабораторній системі відліку полюс буде нерухомим і друге рівняння руху (9.3), описує еволюцію орієнтаційних ступенів вільності. Його можна спростити переходом до головних осей інерції у власній системі координат. Похідну по часу від \vec{L}_O можна перетворити за допомогою формул Пуансо:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\beta=1}^3 I'_\beta \omega'_\beta \vec{e}'_\beta = \sum_{\beta=1}^3 (I'_\beta \dot{\omega}'_\beta \vec{e}'_\beta + I'_\beta \omega'_\beta \dot{\vec{e}}'_\beta) = \sum_{\beta=1}^3 [I'_\beta \dot{\omega}'_\beta \vec{e}'_\beta + I'_\beta \omega'_\beta (\vec{\omega} \times \vec{e}'_\beta)].$$

Проектуючи рівняння для моменту імпульсу на вісь з номером α власної системи координат, отримаємо:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_\alpha \cdot \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= I'_\alpha \dot{\omega}'_\alpha + \sum_{\beta=1}^3 I'_\beta \omega'_\beta (\vec{\omega} \times \vec{e}'_\beta) \cdot \vec{e}'_\alpha = I'_\alpha \dot{\omega}'_\alpha + \sum_{\beta=1}^3 I'_\beta \omega'_\beta \vec{\omega} \cdot (\vec{e}'_\beta \times \vec{e}'_\alpha) \\ &= I'_\alpha \dot{\omega}'_\alpha + \sum_{\beta=1}^3 I'_\beta \omega'_\beta \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \omega'_\gamma = I'_\alpha \dot{\omega}'_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 I'_\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega'_\beta \omega'_\gamma = \vec{N}^{ext} \cdot \vec{e}'_\alpha,\end{aligned}$$

де використано властивості тензора Леві-Чивіта, мішаного добутку та умову ортонормованості векторів власного базису. Якщо задано компоненти моменту у лабораторній системі координат, то $N'^{ext}_\alpha = \vec{N}^{ext} \cdot \vec{e}'_\alpha = (N^{ext}_\beta \vec{e}_\beta) \cdot \vec{e}'_\alpha = N^{ext}_\beta \alpha_{\beta\alpha}$.

Остаточно, рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} I'_1 \dot{\omega}'_1 + (I'_3 - I'_2) \omega'_2 \omega'_3 = N_\alpha \alpha_{\alpha 1}, \\ I'_2 \dot{\omega}'_2 + (I'_1 - I'_3) \omega'_1 \omega'_3 = N_\alpha \alpha_{\alpha 2}, \\ I'_3 \dot{\omega}'_3 + (I'_2 - I'_1) \omega'_1 \omega'_2 = N_\alpha \alpha_{\alpha 3}, \end{cases} \quad (9.4)$$

(друге та третє рівняння можна отримати циклічними перестановками індексів з першого). Рівняння (9.4) називаються *динамічними рівняннями Ейлера*. На відміну від рівнянь Ньютона, рівняння Ейлера є нелінійними відносно швидкостей, і, автоматично, відносно похідних кутів.

Якщо зовнішніх сил та моментів немає, тобто $\vec{F}^{ext} = 0$ та $\vec{N}^{ext} = 0$, то рівняння руху зводяться до законів збереження $\vec{P} = \text{const}$ і $\vec{L} = \text{const}$. Якщо в початковий момент часу поступальні і кутові швидкості дорівнюють нулю, то цей стан називається *статичним* і вивчається в окремому розділі механіки, який називається *статикою*.

У випадку, коли на рух АТТ накладено геометричні зв'язки, замість рівняння Ньютона для імпульсу доведеться використовувати рівняння Лагранжа I роду, а для рівнянь Ейлера записувати моменти імпульсу, враховуючи усі сили (тобто також і сили реакції). Також може з'явитись додаткова умова, що описує спосіб контакту АТТ з поверхнею, у загальному випадку потрібно враховувати сили поздовжньої реакції (тертя). У деяких задачах можна скористатись ідеалізаціями ідеальних поверхонь, однак для практичних застосувань такі ідеалізації виявляються недостатніми. Проілюструємо роль сил тертя на простому прикладі.

Приклад 1. Кулька радіуса a та маси M перебуває у стані спокою на горизонтальній поверхні. Під дією удару, напрямленого горизонтально у центр мас вона набула поступальної швидкості v_0 . Під час руху на кульку діє сила сухого тертя, напрямлена у протилежному до швидкості напрямку. Через який час рух кульки буде коченням без проковзування?

◀ Ця задача описує просту модель гри на більярді¹ Рівняння руху мають вигляд:

$$M\ddot{R}_C = m\vec{g} + \vec{R}, \quad I\dot{\vec{\omega}} = \vec{N},$$

¹ Детальніше див. у [16].

де \vec{R} — сила реакції, $I = \frac{2}{5} Ma^2$ — момент інерції відносно осі обертання, \vec{N} — момент сил. Нехай куля котиться вздовж осі x , а вісь y напрямлена вгору. Рух вважатимемо циліндроподібним, тому $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Крім того, нехай кулька не відривається від площини, тоді $y_C = a$. Для сили реакції маємо:

$$\vec{R} = \vec{R}_{\parallel} + \vec{R}_{\perp}, \quad \vec{R}_{\parallel} = R_{\parallel} \vec{e}_y, \quad \vec{R}_{\perp} = \pm k R_{\parallel} \vec{e}_x,$$

де k позначає коефіцієнт сухого тертя, а знак у виразі для сили потрібно вибирати протилежно до швидкості. Проектуючи рівняння на осі системи координат, отримаємо $R_{\parallel} = Mg$, внесок до моменту сили дає тільки сила тертя, оскільки вона прикладена у точці контакту. Тоді:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{kMg}{I} a \\ \ddot{x}_C = -kg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 - \frac{kMg}{I} at \\ \dot{x}_C = v_0 - kgt, \end{cases}$$

оскільки праві частини рівнянь стали коім того, у початковий момент часу обертання не було через геометрію удару, тому $\omega_0 = 0$. Із формули Пуансо випливає, що для руху без проковзування має місце зв'язок $\dot{x}_C = -\omega a$. Підставляючи сюди початкові швидкості, знайдемо час:

$$t^* = \frac{v_0}{kg} \frac{1}{1 + ma^2/I} = \frac{2}{7} \frac{v_0}{kg}.$$

Повторне інтегрування рівняння руху дає $x_C(t)$, після підстановки t^* можна знайти відстань, яку пройде кулька, перш ніж перейти до режиму кочення.

Більш цікавим є випадок, коли удар відбувається на деякій відстані l по вертикалі від напрямку на центр мас, тоді у початковий момент часу кулька матиме деяку кутову швидкість ω_0 . Її можна знайти знайти умови $I\dot{\omega} = N_{\tau}$, де N_{τ} описує момент сили, яка діє на кульку за час τ удару (який є достатньо коротким). Можна наближено вважати:

$$I\dot{\omega} = \vec{l} \times \vec{F}_{\tau} \Rightarrow I\Delta\omega = l \int_0^{\tau} \vec{F}_{\tau}(t) dt, \quad \Delta P = \int_0^{\tau} \vec{F}_{\tau}(t) dt,$$

де $\Delta P = Mv_0$ та $\Delta\omega = \omega_0$ позначають зміни відповідних величин за час дії сили, а вектор \vec{l} проведено з центру мас до прямої, вздовж якої діє сила. Таким чином,

$$\omega_0 = \frac{Ml}{I} v_0 = \frac{Ma}{I} \frac{l}{a} v_0,$$

якщо $\omega_0 a > v_0$, тобто $\frac{Ma^2}{I} \frac{l}{a} > 1$, то кутова швидкість буде більшою, ніж потрібно для кочення, місце удару буде ближче до верхньої точки кулі. Сила тертя діятиме у напрямку руху кульки (для успішної гри на більярді бажано вдаряти кульку саме так, тоді вона довше рухатиметься). Для $\frac{Ma^2}{I} \frac{l}{a} < 1$ навпаки, $\omega_0 a < v_0$, цей випадок буде аналогічним до розглянутого. Якщо $\frac{Ma^2}{I} \frac{l}{a} = 1$, то рух із самого початку буде коченням. Описати закон руху детальніше залишається як вправа для читача. ►

2. ВІЛЬНЕ ОБЕРТАННЯ. КУТОВІ ШВИДКОСТІ. У загальному випадку розв'язок рівнянь (9.1) пов'язаний з великими математичними труднощами. Відносно просто їх можна розв'язати для кількох окремих випадків, зокрема для вільного обертання АТТ (випадок Ейлера), що розглядається далі.

Вільним (інерційним) обертанням називається рух абсолютно твердого тіла за відсутності зовнішніх сил та їх моментів. Покладаючи $\vec{F}^{ext} = 0$ та $\vec{N}^{ext} = 0$ в рівняннях Ньютона-Ейлера, отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \equiv M\ddot{\vec{R}} = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Перше рівняння має очевидний розв'язок $\dot{\vec{R}}_C = \text{const}$, звідки $\vec{R}_C = \dot{\vec{R}}_C(0)t + \vec{R}_C(0)$, вибираючи систему координат так, що $\vec{R}(0) = 0$ отримаємо, що частина моменту імпульсу, яка відповідає поступальним ступеням вільності, зникає. Для такого випадку закон руху повністю описується рівнянням

$$\frac{d\vec{L}_\odot}{dt} = \frac{d'\vec{L}_\odot}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_\odot = 0, \quad (9.5)$$

яке еквівалентне до динамічних рівнянь Ейлера. Для скорочення будемо далі опускати символ “ \odot ”.

Закони збереження можна отримати з рівнянь руху (9.5) за допомогою такої самої схеми, що і в механіці Ньютона:

1) домножимо обидві частини рівняння (9.5) скалярно на $\vec{\omega}$, у власній системі з осями, вибраними вздовж головних напрямків інерції, отримаємо:

$$\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} \equiv \vec{\omega} \cdot \frac{d'\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \omega'_\alpha \frac{dL'_\alpha}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \omega'_\alpha \frac{d}{dt} (I'_\alpha \omega'_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dt} (I'_\alpha \omega'^2_\alpha) = 0$$

звідки

$$T \equiv T_\odot = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 I'_\alpha \omega'^2_\alpha = \text{const} \quad (9.6)$$

(у механіці Ньютона закон збереження породжувався скалярними добутками рівнянь руху з лінійними швидкостями).

2) домножимо обидві частини рівняння (9.5) скалярно на \vec{L} :

$$\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} \equiv \vec{L} \cdot \frac{d'\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 L'_\alpha \frac{dL'_\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dL'^2_\alpha}{dt},$$

звідки

$$\sum_{\alpha=1}^3 L'^2_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 I'^2_\alpha \omega'^2_\alpha = \text{const}, \quad (9.7)$$

тобто зберігається $L = |\vec{L}|$.

3. Розв'язок динамічних рівнянь руху. Рівняння $\frac{d}{dt} \vec{L} = 0$ у розгорнутій формі має вигляд системи рівнянь Ейлера (9.4), які є нелінійними рівняннями відносно компонент кутової швидкості. Навіть якщо можна їх розв'язати відносно $\vec{\omega}$, то подальший етап у розв'язку задачі — підстановка кінематичних рівнянь Ейлера та пошук закону зміни кутів Ейлера з часом є складною задачею. Навіть для

простої задачі про вільне обертання (на перший погляд це аналог вільного руху для матеріальної точки) ні кутові швидкості, ні кути Ейлера не вдається знайти у класі елементарних функцій за винятком кількох випадків специфічного вибору початкових умов.

Можна розробити кілька стратегій пошуку компонент кутової швидкості у власній системі відліку:

- розв'язок двох рівнянь з системи (9.4) замінити на аналіз законів збереження (9.6) та (9.7), які є алгебраїчними функціями ω'_α ;
- спробувати знайти розв'язок системи (9.4) у параметричному вигляді, зокрема виразити дві компоненти кутової швидкості через третю. Тоді, пошук кутових швидкостей зводиться до розв'язку тільки одного диференціального рівняння (для незалежної компоненти).

Розглянемо реалізацію другого способу розв'язку. Для визначеності вважатимемо, що

$$I_1 < I_2 < I_3 \quad (9.8)$$

(цього можна завжди досягти зміною нумерації осей). Для спрощення запису далі будемо скрізь опускати штрихи, маючи на увазі, що всі величини означено у власній системі координат.

Перепишемо рівняння Ейлера у вигляді:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_1 \omega_2, \quad (9.9)$$

головні моменти інерції у правих частинах згруповані так, що всі дробі — додатні.

Знайдемо частки від ділення першого та третього рівнянь на друге:

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}, \quad \frac{\dot{\omega}_3}{\dot{\omega}_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)},$$

З першого співвідношення, враховуючи тотожність $\frac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2} = \frac{d\omega_1}{d\omega_2}$, отримаємо безпосереднім інтегруванням:

$$\omega_1^2 = -\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)} \omega_2^2 + \text{const} = \frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)} (\alpha^2 - \omega_2^2), \quad (9.10)$$

де введено сталу інтегрування $\alpha^2 > \omega_2^2$. Аналогічно з другого співвідношення маємо:

$$\omega_3^2 = \frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)} (\beta^2 - \omega_2^2), \quad (9.11)$$

де $\beta^2 > \omega_2^2$. Вирази $\omega_1(\omega_2)$ та $\omega_3(\omega_2)$, підставимо до правої частини диференціального рівняння (9.9) для ω_2 . Тоді, після спрощення сталого множника, знайдемо:

$$\dot{\omega}_2 = \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}} \sqrt{(\alpha^2 - \omega_2^2)(\beta^2 - \omega_2^2)}.$$

В цьому рівнянні легко відокремлюються змінні, і розв'язок можна записати у вигляді квадратури:

$$\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}} t = \int_{\omega_{2,0}}^{\omega_2} \frac{d\omega_2}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_2^2)(\beta^2 - \omega_2^2)}},$$

де довільна нижня межа $\omega_{2,0}$ задає сталу інтегрування.

Інтеграл у правій частині останньої рівності зводиться до еліптичного інтегралу першого роду. Залежно від співвідношення між α та β потрібно виконувати різні підстановки. Якщо $\alpha < \beta$, то

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{2,0}}^{\omega_2} \frac{d\omega_2}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_2^2)(\beta^2 - \omega_2^2)}} &= \left| \begin{array}{l} \text{підстановка:} \\ \omega_2 = \alpha \sin \xi \end{array} \right| = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2 \sin^2 \xi}} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin^2 \xi}} = \frac{1}{\beta} \left[F\left(\xi, \frac{\alpha}{\beta}\right) - F\left(\xi_0, \frac{\alpha}{\beta}\right) \right] \end{aligned}$$

оскільки параметр еліптичного інтегралу $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, то результат є дійсною величиною. Вводячи замість довільної сталої $F(\xi_0, \frac{\alpha}{\beta})$ іншу сталу t_0 розмірності часу, запишемо квадратурну формулу у вигляді:

$$\Omega(t - t_0) = F\left(\xi, \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \text{де} \quad \Omega = \beta \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}},$$

де Ω — стала розмірності кутової швидкості (або частоти). Функція, обернена до функції F по аргументу ξ функція є амплітудою Якобі:

$$\xi = \operatorname{am}\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Для пошуку $\omega_2(t)$ використаємо підстановку $\omega_2 = \alpha \sin \xi$. Згадуючи, що тригонометричний синус амплітуди Якобі за означенням є еліптичним синусом, отримаємо остаточно:

$$\omega_2(t) = \alpha \sin\left[\operatorname{am}\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] \equiv \alpha \operatorname{sn}\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Решту компонент кутової швидкості знаходимо з виразів (9.10) та (9.11), де з'являються інші еліптичні функції. Оскільки

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \omega_2^2 &= \alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right) = \alpha^2 \operatorname{cn}^2\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right), \\ \beta^2 - \omega_2^2 &= \beta^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \operatorname{sn}^2\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = \beta^2 \operatorname{dn}^2\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right), \end{aligned}$$

то ω_1 та ω_3 будуть пропорційні до еліптичного косинуса та дельта-амплітуди. Остаточно, компоненти кутової швидкості мають вигляд:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \alpha \sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn}\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right), \\ \omega_2(t) &= \alpha \operatorname{sn}\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right), \\ \omega_3(t) &= \beta \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn}\left(\Omega(t - t_0), \frac{\alpha}{\beta}\right),\end{aligned}\tag{9.12}$$

Розв'язок (9.12) отримано за умови $\alpha < \beta$. Якщо виконується протилежна нерівність, то α та β потрібно поміняти місцями.

Для з'ясування фізичного змісту сталих α та β виразимо їх через інтеграли руху $T_\circ = E$ та L^2 .

Підстановка розв'язків до формули для енергії після нескладних алгебраїчних перетворень дає:

$$E = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1} \alpha^2 + \frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1} \beta^2 \right).$$

Аналогічно для квадрату моменту імпульсу отримаємо:

$$L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = I_2 \left(I_1 \frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1} \alpha^2 + I_3 \frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1} \beta^2 \right)$$

(як для енергії, так і для моменту доцільно після підстановки кутової швидкості виразити всі функції через еліптичний синус, $\operatorname{cn}^2(\dots) = 1 - \operatorname{sn}^2(\dots)$, $\operatorname{dn}^2(\dots) = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \operatorname{sn}^2(\dots)$). З рівнянь

$$I_1 \frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1} \alpha^2 + I_3 \frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1} \beta^2 = \frac{L^2}{I_2}, \quad \frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1} \alpha^2 + \frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1} \beta^2 = \frac{2E}{I_2}$$

легко знайти α^2 та β^2 (послідовно домножуючи друге рівняння на I_1 та I_3 та віднімаючи від першого):

$$\alpha^2 = \frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_1)}, \quad \beta^2 = \frac{L^2 - 2EI_1}{I_2(I_2 - I_1)}.\tag{9.13}$$

Допустимі значення моменту імпульсу задовольняють умови $\alpha^2, \beta^2 > 0$, або

$$2EI_1 \leq L^2 \leq 2EI_3.\tag{9.14}$$

Зауважимо, що

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{2EI_3 - L^2}{I_3 - I_2} \cdot \frac{I_2 - I_1}{L^2 - 2EI_1},$$

при $L^2 = 2EI_2$ цей дріб дорівнює одиниці, при $L^2 > 2EI_2$ буде $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > 1$ і при $L^2 < 2EI_2$ виконується $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1$. Тому розв'язок (9.12) справедливий для $L^2 < 2EI_2$. Запишемо його з явною підстановкою α та β :

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn}(\Omega(t - t_0), k), \\ \omega_2(t) &= \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn}(\Omega(t - t_0), k), \quad k^2 = \frac{(2EI_3 - L^2)(I_2 - I_1)}{(L^2 - 2EI_1)(I_3 - I_2)}, \\ \omega_3(t) &= \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn}(\Omega(t - t_0), k),\end{aligned}\quad (9.15)$$

Всі функції $\omega_i(t)$ є періодичними за часом із періодом

$$T = \frac{4K(k)}{\Omega}, \quad (9.16)$$

але такий період стосується тільки закону зміни кутової швидкості, саме тіло, положення якого задається кутами Ейлера, а не компонентами векторами кутової швидкості, не обов'язково повертається в попереднє положення. Для визначення закону зміни положення АТТ потрібно знайти кути Ейлера (див. далі).

Прості частинні випадки початкових умов:

- 1) $L^2 = 2EI_3$, тоді $k^2 = 0$ і еліптичні функції вироджуються у тригонометричні:

$$\operatorname{sn}(x, 0) = \sin x, \quad \operatorname{cn}(x, 0) = \cos x, \quad \operatorname{dn}(x, 0) = 1,$$

при цьому $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{2E}{I_3}} = \text{const}$, рух відповідає рівномірному обертанню навколо головної осі інерції з моментом I_3 (найбільшим);

- 2) $L^2 = 2EI_1$, тоді також $k^2 = 0$, тільки α та β слід поміняти місцями. Рух також буде рівномірним обертанням навколо головної осі інерції з моментом I_1 (найменшим);

- 3) $L^2 = 2EI_2$, тоді $k^2 = 1$ і еліптичні функції виражаються через гіперболічні:

$$\operatorname{sn}(x, 1) = \operatorname{th} x, \quad \operatorname{cn}(x, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{dn}(x, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

і компоненти кутової швидкості змінюються за експоненціальними законами.

Відмітимо, що ω_i виражаються через елементарні функції також для симетричного тіла з $I_1 = I_2$ (тоді $k^2 = 0$).

Задача 9.1. Знайти ω_i для симетричного тіла з $I_1 = I_2$.

Зауваження. Інший спосіб пошуку кутових швидкостей полягає у використанні законів збереження. Будуючи комбінацію $\sum_i \omega_i \dot{\omega}_i$ з використанням рівнянь руху, отримаємо:

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \left(\frac{I_2 - I_1}{I_1} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} + \frac{I_3 - I_2}{I_3} \right),$$

або

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \omega^2 = -\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{I_1 I_2 I_3} (I_3 - I_2)(I_2 - I_1)(I_1 - I_3).$$

Це рівняння можна розв'язати, якщо виразити праву частину через ω^2 . Вирази для ω_i^2 через ω^2 легко отримати з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2E = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2, \\ L^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2, \\ \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2. \end{cases}$$

┘

Задача 9.2. Знайти розв'язок способом, вказаним у зауваженні.

4. ВІЛЬНЕ ОБЕРТАННЯ. КУТИ. Щоб визначити закон зміни положення АТТ, потрібно задати орієнтацію власної системи координат. Для цього слід підставити знайдені $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ до кінематичних рівнянь Ейлера (7.12). Тоді отримаємо три диференціальні рівняння першого порядку для визначення трьох кутів Ейлера як функцій часу. Потім, за допомогою матриці повороту, можна знайти положення власної системи координат відносно лабораторної системи в будь-який момент часу.

Явний вигляд кутів Ейлера як функцій часу значно спроститься, якщо обрати спеціальну лабораторну систему координат, а саме: її вісь z спрямуємо вздовж вектора моменту імпульсу \vec{L} , величина і напрям якого зберігається. В цій системі вектор \vec{L} має компоненти $(0, 0, L)$. Тоді у власній системі координат кути Ейлера θ та $\frac{\pi}{2} - \psi$ відповідають сферичним координатам вектора \vec{L} :

$$\begin{aligned} L'_1 &= L \sin \theta \sin \psi = I_1 \omega'_1, \\ L'_2 &= L \sin \theta \cos \psi = I_2 \omega'_2, \\ L'_3 &= L \cos \theta = I_3 \omega'_3. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Частки від ділення першого та другого рівняння та третє рівняння дають

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{L'_1}{L'_2} = \frac{I_1 \omega'_1}{I_2 \omega'_2}, \quad \cos \theta = \frac{I_3 \omega'_3}{L}.$$

Підстановка кутових швидкостей:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)}} \frac{\operatorname{cn}(\Omega(t - t_0), k)}{\operatorname{sn}(\Omega(t - t_0), k)}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{I_3(L^2 - 2EI_1)}{L^2(I_3 - I_2)}} \operatorname{dn}(\Omega(t - t_0), k).$$

Для пошуку кута φ скористаємось кінематичними рівняннями у власній системі координат:

$$\omega'_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega'_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi.$$

Домножаючи перше рівняння на $\sin \psi$, друге на $\cos \psi$ і додаючи співвідношення, знайдемо:

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi}{\sin \theta} = \frac{I_1 \omega_1'^2 + I_2 \omega_2'^2}{I_1^2 \omega_1'^2 + I_2^2 \omega_2'^2} L.$$

Розв'язуючи це рівняння, можна знайти $\varphi(t)$, але результат не можна виразити через елементарні функції. Аналіз показує, що $\varphi(t)$ не є періодичною функцією, тому протягом руху АТТ у загальному випадку не повертається у початкове положення.

5. ВІЛЬНЕ ОБЕРТАННЯ. СТІЙКІСТЬ РУХУ. Рівняння Ейлера задовольняє розв'язок $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega = \text{const}$, що відповідає інерційному обертанню навколо однієї з головних осей. Аналогічно можливі обертання зі сталою кутовою швидкістю навколо інших двох головних осей. В нашому випадку кінематичні рівняння Ейлера набудуть вигляду

$$\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi = 0, \quad -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = \omega,$$

звідки легко знайти

$$\theta = \text{const}, \quad \psi = \text{const}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0,$$

тобто абсолютно тверде тіло рівномірно обертається навколо осі z' .

Розглянемо, як рухатиметься АТТ, якщо трохи збурити цей рух, тобто змінити компоненти кутової швидкості:

$$\omega_1 = 0 + \Delta\omega_1; \quad \omega_2 = 0 + \Delta\omega_2; \quad \omega_3 = \omega + \Delta\omega_3. \quad (9.18)$$

Підставляючи (9.18) в рівняння Ейлера і нехтуючи добутками двох малих величин, отримуємо:

$$\begin{cases} I_1 \Delta\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega \Delta\omega_2 = 0, \\ I_2 \Delta\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega \Delta\omega_1 = 0, \\ I_3 \Delta\dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \quad (9.19)$$

Із останнього рівняння (9.19) знаходимо $\Delta\omega_3 = \text{const}$, тобто нескінченно мале збурення проекції частоти обертання на вісь обертання залишається весь час нескінченно малим. Із двох перших рівнянь знайдемо:

$$\Delta\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \Delta\omega_1 = 0, \quad \Delta\ddot{\omega}_2 + \Omega^2 \Delta\omega_2 = 0, \quad (9.20)$$

де

$$\Omega^2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega^2. \quad (9.21)$$

Вигляд розв'язку рівняння (9.20) істотно залежить від знаку Ω^2 : якщо $\Omega^2 > 0$, то розв'язок матиме вигляд:

$$\Delta\omega_1(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t,$$

тобто він є обмеженою функцією часу. Це означає, що нескінченно малі збурення не збільшуватимуться з часом і врешті-решт згаснуть внаслідок наявності тертя. Якщо ж $\Omega^2 < 0$, то вигляд розв'язку буде зовсім іншим, а саме:

$$\Delta\omega_1(t) = C_1 e^{|\Omega|t} + C_2 e^{-|\Omega|t}. \quad (9.22)$$

У цьому випадку малі збурення збільшуватимуться з часом, і рух буде *нестійким*, тобто будь-яке мале збурення істотно змінює характер початкового руху.

Із формули (9.21) випливає, що Ω^2 має від'ємні значення в двох випадках:

$$\text{випадок 1: } I_3 > I_1, I_3 < I_2; \quad \text{випадок 2: } I_3 < I_1, I_3 > I_2.$$

У кожному з них момент інерції відносно головної осі, навколо якої спочатку відбувається обертання, не є ні найбільшим, ні найменшим.

Отже, інерційне обертання навколо головних осей інерції буде стійким, якщо воно відбувається навколо головної осі з найбільшим або найменшим моментом інерції. Обертання навколо осі із середнім значенням моменту інерції буде нестійким, тобто у випадку будь-якого малого збурення вектор кутової швидкості через деякий час зміниться на значну величину.

Підсумки до механіки Ньютона

У побудові векторної схеми класичної механіки (механіки Ньютона) було зроблено такі кроки:

- **означення фізичної системи:** об'єктом розгляду є система N матеріальних точок, які є основними фізичними об'єктами;
- **формалізація фізичної системи:** введений механічний стан для опису такої системи — набір $2N$ векторів $(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$;
- **інтерпретація взаємодії:** означена сила.
- **розроблено методи аналізу формальної системи**, а саме — методи інтегрування рівнянь руху, які описують еволюцію стану. Ці методи виявились досить туманними — за винятком алгоритму отримання 10 інтегралів руху загального значення логічно послідовну процедуру пошуку всіх інших інтегралів знайти не вдалось.

ЧАСТИНА II

Механіка Лагранжа

- ❑ Рівняння Лагранжа другого роду
- ❑ Структура функції та рівнянь Лагранжа
- ❑ Методи інтегрування рівнянь Лагранжа
- ❑ Приклад: математичний маятник
- ❑ Рівняння Лагранжа для абсолютно твердого тіла. Рух дзиги
- ❑ Малі коливання з кількома ступенями вільності. Нормальні координати
- ❑ Коливання молекул та лінійних ланцюжків
- ❑ Нелінійні коливання
- ❑ Варіаційний принцип у механіці Лагранжа
- ❑ Загальна форма першої варіації. Теорема Нетер

ЛЕКЦІЯ 10

Рівняння Лагранжа другого роду

1.	Вступ.	167
2.	Недоліки векторного підходу.	167
3.	Узагальнені координати.	168
4.	Проекція рівнянь руху на дотичні напрямки до поверхні зв'язків.	171
5.	Алгоритм побудови функції Лагранжа.	174
6.	Властивості рівнянь Лагранжа — калібрувальна інваріантність.	176
7.	Властивості рівнянь Лагранжа — заміни координат.	176
8.	Одновимірні малі коливання.	180

1. Вступ. Рівняння Лагранжа першого роду дозволяють описати рух системи зі зв'язками, але їх використання пов'язане з рядом незручностей, які характерні для всієї векторної механіки Ньютона в цілому.

По-перше, в них досить важко відділити залежні координати від незалежних. Крім того, таке відокремлення не має прозорого геометричного змісту. По-друге, сили реакції, які вводяться для врахування зв'язків у рівняннях динаміки, у більшості випадків самі по собі не потрібні — як правило задача полягає у визначенні закону руху.

Головна ідея, яка приводить до більш зручних рівнянь Лагранжа другого роду полягає у записі рівнянь руху одразу у незалежних координатах, де зв'язки вже враховано.

2. НЕДОЛІКИ ВЕКТОРНОГО ПІДХОДУ. Аналіз рівнянь Лагранжа I роду (рівнянь Ньютона зі зв'язками) є задачею комбінованого типу: у цій системі рівнянь одна частина є алгебраїчними співвідношеннями (зв'язки), а інша — диференціальними рівняннями. Відповідно розв'язок розбивається на алгебраїчний аналіз, і подальше інтегрування. З цим і пов'язана складність розв'язку задач зі зв'язками у ньютонівському підході.

Загальне число невідомих у рівняннях Лагранжа I роду складає $3N + m$, вони розділяються на три групи:

$$\langle 3N + m \text{ невідомих} \rangle = \underbrace{\langle 3N - m \rangle}_{\text{незалежних к-т}} + \underbrace{\langle m \rangle}_{\text{залежних к-т}} + \underbrace{\langle m \rangle}_{\text{множників } \lambda_\alpha}$$

Для пошуку $n = 3N - m$ незалежних координат, які *реально* описують рух системи (решта координат виражається із зв'язків) визначення залежних координат та пошук сил реакції є допоміжними процедурами, результати яких не фігурують у

кінцевій відповіді. Тому можна поставити питання про можливість іншого представлення незалежних параметрів, необхідних для опису системи. На це наводять такі міркування:

- 1) декартові координати часто незручні для опису систем зі зв'язками — у багатьох випадках залежні та незалежні змінні досить важко розділити. Як правило, найзручніші незалежні величини — природні внутрішні координати поверхні руху;
- 2) роль сил реакції полягає в утриманні системи на поверхні зв'язків у процесі руху, що по-перше відповідає компенсації проекцій активних сил, ортогональних до поверхні, а по-друге — описує зміну напрямку швидкості під час руху (швидкість має бути дотичною до поверхні).

Проекції рівнянь руху для i -ї частинки у задачі з *ідеальними* зв'язками на дотичні та нормальні напрямки до поверхні зв'язків, мають вигляд:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_i [\ddot{\vec{r}}_i]^\perp = \vec{F}_i^\perp + \vec{R}_i^\perp, \\ m_i [\ddot{\vec{r}}_i]^\parallel = \vec{F}_i^\parallel. \end{cases}$$

Сили реакції, які вводяться для врахування зв'язків у рівняннях динаміки у більшості випадків самі по собі не потрібні, як правило задача полягає у визначенні закону руху $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Інформацію про рух системи по поверхні закладено тільки до дотичної проекції рівнянь руху, куди сили реакції явно не входять. Тому нормальні проекції рівнянь, до яких явно входять сили реакції, можна відкинути.

Зв'язки *неявно* фігурують у рівняннях $m_i [\ddot{\vec{r}}_i]^\parallel = \vec{F}_i^\parallel$ і визначають спосіб проектування.

Виявляється, що ці дві оптимізаційні процедури можна виконати у самому загальному випадку. Розглянемо кожну з них по чергово.

3. УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ. Першим етапом спрощення задачі про рух зі зв'язками є перетворення координат. Обмежимося тільки голономними зв'язками. Аналогічну процедуру можна означити і для неголономних зв'язків, однак вона буде суттєво складнішою.

Оскільки рух системи відбувається на $3N - t$ вимірній гіперповерхні у $3N$ -вимірному просторі, то очевидно, що кількість незалежних параметрів, необхідних для однозначного визначення просторової конфігурації системи буде дорівнювати розмірності гіперповерхні. Число $n = 3N - t$ називається *числом ступенів вільності* механічної системи.

Нехай незалежні параметри, які описують систему, позначено q_i , де $i = \overline{1, n}$. Перехід до незалежних координат відбувається за правилом:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (10.1)$$

Далі, як і раніше, для скорочення позначатимемо набір q_1, \dots, q_n у списках аргументів функцій просто як q .

Формули переходу слід вибирати так, щоб у нових змінних рівняння зв'язків задовольнялись *автоматично*:

$$f_\alpha(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(q,t)} \equiv 0$$

(на підстановці). Незалежні параметри q_i називаються *узагальненими координатами*, а їх похідні по часу — *узагальненими швидкостями*. Простір, який описується узагальненими координатами, називається *конфігураційним простором*.

Зауваження*. Перехід до узагальнених координат у технічному аспекті еквівалентний запису неявної функції у параметричній формі. У контексті механіки $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$ є рівнянням поверхні у неявній формі (серед набору радіус-векторів \vec{r}_i частина є аргументами, а частина — функціями). Співвідношення $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$ є параметричною формою запису рівняння цієї самої поверхні. \lrcorner

Приклад 1. Зв'язок руху по колу: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Якщо вибрати $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, то рівняння зв'язку задовольняється автоматично завдяки основній тригонометричній тотожності. Узагальненою координатою буде кут φ , який легко зобразити на рисунку.

Приклад 2. Зв'язок руху по параболі: $y^2 - ax^2 = 0$.

У даному випадку зручно скористатись вихідними декартовими координатами і вважати незалежною (узагальненою) координатою x . Це еквівалентно параметричному представленню

$$x = \xi, \quad y = a\xi^2$$

зі зміною позначення ξ на x .

Може скластися враження, що у такому підході залежні координати взагалі не виникають, але насправді це не зовсім так. Строго кажучи, йдеться про перетворення координат у $3N$ -вимірному просторі

$$\underbrace{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N}_{3N \text{ величин}} \Rightarrow \underbrace{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m}}_{3N \text{ величин}}, \quad n = 3N - m.$$

Нові координати q вибираються так, щоб після перетворення зв'язки виражалися у формі тривіальних рівностей $q_{n+1} = \text{const}, \dots, q_{n+m} = \text{const}$ і не давали окремих доданків з силами реакції у рівнянні руху:

$$\underbrace{f_1(\vec{r}, t) = 0, \dots, f_m(\vec{r}, t) = 0}_{\text{простір } \vec{r}} \Rightarrow \underbrace{q_{n+1} = \text{const}, \dots, q_{n+m} = \text{const}}_{\text{простір } q}.$$

Тоді залежні координати чітко відділяються від незалежних. За своїм геометричним змістом n координат q_1, \dots, q_n є природними координатами опису положення системи на поверхні зв'язків (тобто координатні лінії $q = \text{const}$ належать цій поверхні), їх зміни описують переміщення системи по поверхні. Координати $q_{n+1}, \dots,$

q_{n+m} (їх всього m) є ортогональними координатами до поверхні, їх координатні лінії ортогональні до поверхні зв'язків, відповідають переміщенням вздовж нормалей до поверхні руху, які не реалізуються. Ці координати є сталими, автоматично замінюються своїми значеннями і явно у формулах переходу не фігурують.

Приклад 3. Зв'язок руху по сфері: $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Перейдемо до сферичної системи координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

У нових координатах рівняння зв'язку має вигляд $r^2 - a^2 = 0$, що відповідає $r = a$, тобто координата r є фіксованою та залежною координатою, а θ і φ — незалежними. Формули переходу від координат x, y, z до узагальнених координат θ і φ можна отримати заміною r на сталу a у формулах заміни координат.

Перетворення координат має бути невиродженим¹, тобто з N функцій $\vec{r}_i(q, t)$ повинні бути незалежними n , тобто

$$\det \left| \frac{\partial x_i(q, t)}{\partial q_j} \right| \neq 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (10.2)$$

Зауваження. Простір координат $\vec{r} \in 3N$ -вимірним метричним простором, а простір координат q — не обов'язково. Тому після переходу до простору q у виразах зі швидкостями часто виникають множники типу параметрів Ламе. ┘

Зауваження. Перетворення (10.1) може перевести інерціальну систему відліку в неінерціальну у просторі координат q . Новий простір часто буває неевклідовим². Закони Ньютона при цьому нічого не втрачають — до евклідового простору, де вони з самого початку були сформульовані, завжди можна повернутися. Далі буде показано, що у механіці Лагранжа, на відміну від ньютонівської теорії, немає чіткого логічного розділення між інерціальними та неінерціальними системами відліку. Перший закон Ньютона необхідний для коректного означення рівнянь руху у просторі координат q . ┘

Зауваження. До узагальнених координат часто переходять і тоді, коли у задачі зв'язків немає (якщо це дозволяє спростити розв'язок задачі). ┘

¹ Оскільки йдеться в першу чергу про звичайну заміну координат $\vec{r} \rightarrow q$, то таке перетворення має бути невиродженим:

$$\frac{\partial(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial(q_1, \dots, q_{n+m})} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \infty \end{bmatrix}.$$

Нові залежні координати неявно фігурують у формулах переходу $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$. Перевірку невиродженості можна провести ще до підстановки зв'язків $q_{n+1} = \text{const}, \dots$ у нових координатах.

² Точніше, n -вимірним неевклідовим підпростором, зануреним у вихідний $3N$ -вимірний евклідовий простір.

Знайдемо зв'язки між швидкостями у декартових та узагальнених координатах. Диференціюючи формули перетворень (10.1), отримаємо:

$$\dot{\vec{r}}_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \vec{r}_i(q, t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i(q, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (\text{сума по } j = \overline{1, n}), \quad (10.3)$$

тобто зв'язок між швидкостями буде лінійним. Частинна похідна по \dot{q}_j дає:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (10.4)$$

Аналогічно, диференціюючи рівність (10.3) по координаті q_k , знайдемо:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_k} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_j \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (10.5)$$

4. ПРОЕКЦІЯ РІВНЯНЬ РУХУ НА ДОТИЧНІ НАПРЯМКИ ДО ПОВЕРХНІ ЗВ'ЯЗКІВ. Другий етап спрощення рівнянь руху — проектування їх на напрямки, що є дотичними до поверхні, по якій рухається частинка. Якщо узагальнені координати вже вибрано, то такі напрямки збігаються з дотичними до координатних ліній q_i , $i = \overline{1, n}$ (природних координат поверхні). Прямий спосіб проведення процедури проектування полягає у побудові добутків рівнянь руху на матрицю переходу до координат $q_1, \dots, q_n, \dots, q_{n+m}$ і виділення тих проекцій, що відповідають напрямкам, уздовж яких змінюються тільки незалежні узагальнені координати q_1, \dots, q_n .

У класичній механіці більш поширена еквівалентна процедура, що базується на принципі д'Аламбера. Запишемо рівняння руху системи у формі рівнянь Лагранжа I роду у q -просторі (аргументами всіх функцій є незалежні координати q):

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \vec{\nabla}_i f_{\alpha}, \quad f_{\alpha}(\vec{r}, t) = 0.$$

Домножимо кожне рівняння на віртуальне переміщення $\delta \vec{r}_i$, яке дотичне до поверхні зв'язків, і знайдемо суму по i :

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

доданки з силами реакції зникатимуть згідно з принципом д'Аламбера.

Перейдемо тепер до узагальнених координат q . Рівняння зв'язків будуть задовольнятися тотожно і їх можна проігнорувати, а віртуальні варіації радіус-векторів виражатимуться через варіації узагальнених координат, які однозначно описують зміщення по поверхні зв'язків, за допомогою функцій переходу³ (10.1):

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (10.6)$$

³ Для віртуальних варіацій координат час не змінюється.

після підстановки у принцип д'Аламбера, знайдемо, враховуючи довільність вибору незалежних варіацій δq_k :

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (10.7)$$

Рівняння (10.7), власне, і є рівняннями руху у q -просторі, оскільки тут передбачається підстановка $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$. Це проекції рівнянь Лагранжа I роду у цей простір, які отримані шляхом множення рівнянь Лагранжа на *неповну* матрицю переходу $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ (вона є $3N \times n$ -вимірною). У такому перетворенні враховується, що рівняння зв'язків виключаються вибором координат q .

Прямокутна матриця $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ називається *проектором*. Її дія на вектор, означений в евклідовому просторі, полягає у визначенні компонент цього вектора у просторі q , дотичних до деякої поверхні. Якщо вектор має також нормальну компоненту, то після проектування вона втрачається. Саме із цієї причини для системи з ідеальними зв'язками після проектування рівнянь руху зникатимуть доданки із силами реакції.

Для зручності використання нових рівнянь руху (10.7) доцільно повністю виключити з них величини \vec{r}_i , які тепер є функціями координат q . Перетворимо окремо перший та другий доданки. Для доданку з прискореннями матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{використаємо} \\ (10.4) \text{ та } (10.5) \end{array} \right| \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \end{aligned}$$

де виділено кінетичну енергію системи T . У отриманій формулі вважається, що вираз для T повністю перетворений до нових координат, тобто виконано підстановку

$$T(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(q,t), \dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}(q,\dot{q},t)}.$$

У другому доданку використаємо розбиття сил на потенціальні та непотенціальні, тоді

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N (-\vec{\nabla}_i U) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(n)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}.$$

Оскільки потенціал залежить тільки від координат⁴ та часу, $U = U(\vec{r}, t)$, то

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \Phi_k^{(n)}, \quad \Phi_k^{(n)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(n)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}.$$

⁴ Потенціали можуть бути як центральними, так і ні. Останні описують зовнішні сили та немеханічні взаємодії.

Величина $\Phi_k^{(n)}(q, \dot{q}, t)$ називається k -ю компонентою *узагальненої непотенціальної сили*. За означенням, $\Phi_k^{(n)}$ будується як добуток сил \vec{F}_i на матрицю проектування на координатні осі у q -просторі, після чого виконується підстановка декартових координат $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ та швидкостей $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(q, \dot{q}, t)$ через узагальнені координати та швидкості. Повна комбінація з потенціальними та непотенціальними силами називається просто *узагальненою силою* і визначається як

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \Phi_k^{(n)}.$$

По суті узагальнені сили є дотичними проекціями ньютонівських сил до поверхонь зв'язків у базисі конфігураційного простору.

Зауваження. Віртуальна робота непотенціальних сил може бути записана у двох еквівалентних формах,

$$\delta A^{(n)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \Phi_k \cdot \delta q_k. \quad (10.8)$$

Легко бачити, що розмірність узагальненої непотенціальної сили може бути виражена через розмірність роботи та відповідної координати, або $[\Phi_k] = \frac{[A]}{[q_k]}$, тому розмірність Φ_k залежить від розмірності q_k .

Тут і далі у аналогічних випадках вираз [...] позначає фізичну розмірність указанної величини. ┘

Підставимо перетворені вирази у рівняння руху (10.7):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \Phi_k^{(n)}.$$

Потенціал U не залежить від швидкостей \dot{r} , це автоматично успадковується його формою і у конфігураційному просторі, $U \neq U(\dot{q})$, тому до лівої частини рівняння можна додати комбінацію з похідною потенціалу $\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \equiv 0$, аналогічну до виразу у правій частині з кінетичною енергією. Збираючи разом однотипні доданки з похідними T та U і вводячи комбінацію

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) \quad (10.9)$$

(з розмірністю енергії), отримаємо остаточно:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Phi_k^{(n)} \quad (10.10)$$

Рівняння (10.10) називаються *рівняннями Лагранжа другого роду* (або просто рівняннями Лагранжа⁵), а функція L — *функцією Лагранжа*⁶. Підкреслимо, що рівняння (10.10) отримано для систем із голономними ідеальними зв'язками. Рівняння Лагранжа повністю визначають динаміку системи, вони еквівалентні до

⁵ Далі під рівняннями Лагранжа будемо розуміти рівняння Лагранжа другого роду.

⁶ Лагранж, 1775.

рівнянь Ньютона і дозволяють описати систему за допомогою тільки однієї⁷ скалярної функції L (у ній зібрано інформацію про систему — зокрема, до неї входять маси частинок і потенціали взаємодії) та заданих початкових умов.

Враховуючи схожість (10.10) із рівняннями Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_i) = \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (\text{Ньютона}), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \Phi_i^{(n)} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (\text{Лагранжа}),$$

означимо *узагальнений імпульс*

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (10.11)$$

тоді рівняння Лагранжа можна переписати у формі:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \Phi_k^{(n)} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \Phi_k^{(n)} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \Phi_k, \quad (10.12)$$

у випадку $T \neq T(q)$ похідна від узагальненого імпульсу дорівнює узагальненій силі. Для систем без зв'язків ці рівняння збігатимуться з рівняннями Ньютона, якщо узагальнені координати є декартовими.

Для замкнених систем частинок та систем у потенціальних зовнішніх полях у рівняннях Лагранжа зникають праві частини:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (10.13)$$

Зауваження*. Якщо необхідно знайти сили реакції зв'язків, то після розв'язку задачі в узагальнених координатах (де реакції зв'язків виключені) можна повернутись назад, до декартових координат та рівнянь Лагранжа I-го роду, виражаючи потрібні сили реакції через прискорення та активні сили:

$$\vec{R}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i.$$

До правої частини цієї рівності потрібно підставити формули переходу $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ та знайдені координати $q_i(t)$ і розкрити дужки. ┘

5. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА. Для побудови функції L та запису рівнянь руху можна дотримуватись такого алгоритму:

⁷ Для рівнянь Ньютона потрібно знати векторні величини — всі сили, які діють у системі (всього $3N$ функцій), тоді як для рівнянь Лагранжа — узагальнені сили $\Phi_k^{(n)}$ (всього n).

- 1) записати $L = T - U$ у декартових координатах, вибираючи інерціальну систему відліку (часто пов'язану з нерухомою точкою);
- 2) записати зв'язки $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$ у декартових координатах;
- 3) вибрати узагальнені координати $\{q_i : i = \overline{1, n}\}$ так, щоб рівняння зв'язків задовольнялися тотожно:

$$f_\alpha(\vec{r}(q, t), t) \equiv 0.$$

Це відповідає запису співвідношень, які описують поверхню зв'язків, у параметричному вигляді;

У багатьох випадках залишається ще деякий елемент довільності у виборі узагальнених координат. Остаточний вибір можна зробити з міркувань зручності та простоти функції Лагранжа. Мотивації вибору узагальнених координат можна розбити за пріоритетами:

- а) вони задовольняють зв'язки;
 - б) вони приводять до простої функції L (якщо ще є можливість вибору);
- 4) виразити швидкості $\dot{\vec{r}}_i$ через узагальнені швидкості та координати;
 - 5) підставити вирази $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ та $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(q, \dot{q}, t)$ до $L = T - U$ і спростити вираз.

Наведена процедура допускає відхилення в той чи інший бік. Досить часто можна визначити число ступенів вільності n як різницю між вихідним числом декартових координат та кількістю зв'язків, і ввести n узагальнених координат так, щоб однозначно описати положення системи, керуючись міркуваннями простоти та зручності. Так часто і поступають у випадках, коли явний запис рівнянь зв'язків у декартових координатах приводить до громіздких виразів — зрештою справа не у формі запису рівнянь зв'язків, а в їх наслідках.

Зауваження*. Вимога початкового формулювання задачі у інерціальній системі відліку є принциповою. Причина у тому, що перехід від декартових координат до узагальнених проводиться з рівняннями ньютонівського типу, які виконуються тільки у такому описі. Забігаючи наперед, відмітимо, що означення функції Лагранжа у формі $L = T - U$ характерне саме для інерціальної системи відліку. ┘

Приклад 4. Двовимірний рух по гіперболі $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ у полі сили тяжіння (вважати $\vec{g} = -g\vec{e}_y$).

◀ Без врахування рівняння зв'язку:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

Якщо вважати узагальненою координатою x , то y можна виразити безпосередньо через неї і функція Лагранжа буде мати вигляд:

$$L = \frac{m}{2} \frac{2x^2 + a^2}{x^2 + a^2} \dot{x}^2 - mg\sqrt{x^2 + a^2}.$$

Інший спосіб полягає у використанні параметричного представлення неявної функції:

$$y^2 - x^2 = a^2, \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad y = a \operatorname{ch} \xi, \quad x = a \operatorname{sh} \xi,$$

звідки

$$L = \frac{m}{2} (2 \operatorname{ch}^2 \xi - 1) \dot{\xi}^2 - mga \operatorname{ch} \xi.$$

Обидві функції описують одну механічну систему у різних змінних, однак друга явно простіша. ►

6. ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА — КАЛІБРУВАЛЬНА ІНВАРІАНТНІСТЬ. Якщо у рівняннях Лагранжа (10.13) домножити функцію Лагранжа на сталу величину, або додати до L сталу, то ці рівняння не зміняться. У зв'язку з цим виникає питання: які перетворення функції L допускаються рівняннями Лагранжа II роду без зміни їх форми?

Розглянемо перетворення, яке полягає у заміні функції Лагранжа:

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t), \quad (10.14)$$

де $F(q, t)$ — довільна функція координат та часу. Перетворення (10.14) називається *калібрувальним*.

Запишемо рівняння Лагранжа для функції L' . Оскільки

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

то узагальнений імпульс для функції Лагранжа L' має вигляд:

$$p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i},$$

звідки

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.$$

Похідна нової функції Лагранжа по координаті матиме вигляд:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.$$

Віднімаючи рівності, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Висновок:

Рівняння Лагранжа не змінюються у результаті додавання до функції Лагранжа повної похідної по часу від довільної функції координат і часу (калібрувальне перетворення).

Іншими словами, якщо у виразі для функції Лагранжа фігурує повна похідна по часу від деякої комбінації $F(q, t)$, то функція F не з'являється у рівняннях руху і

її можна відкинути (це дає спрощення форми функції Лагранжа). Можна сказати також, що функція Лагранжа означена з точністю до повної похідної по часу від довільної функції координат та часу, тому функції L та L' описують одну й ту саму механічну систему. Частинним випадком калібрувальної інваріантності є довільність вибору початку відліку енергії (що відповідає додаванню до функції Лагранжа повної похідної від лінійної функції часу).

7. Властивості рівнянь Лагранжа — заміни координат. Вибір узагальнених координат є неоднозначним на одному з початкових етапів (аналізу рівнянь зв'язків) хоча б тому, що узагальнені координати з самого початку можна вибрати у досить широкому діапазоні — перехід від декартових координат до узагальнених описується співвідношеннями типу $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$, на нові координати накладаються тільки умови незалежності та автоматичного врахування зв'язків.

Очевидно, формули переходу можна означити по-різному, і два перетворення $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ та $\vec{r} = \vec{r}(q', t)$ приводять до рівнянь Лагранжа у просторах q та q' з однаковою структурою. Це дає підстави вважати, що рівняння руху у просторі q' можна отримати за допомогою деякого перетворення з простору q безпосередньо. Таким чином, у конфігураційному просторі можна означити перетворення узагальнених координат $q \rightarrow q' = q'(q, t)$, які називаються *точковими перетвореннями* і геометрично є звичайними замінами координат, що залежать від часу як від параметру.

Розглянемо невинуджену заміну координат у конфігураційному просторі:

$$q_i = q_i(q', t), \quad \text{або обернене} \quad q'_i = q'_i(q, t), \quad (10.15)$$

причому

$$\det \left(\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right) \neq 0 \text{ та } \infty.$$

Зауважимо, що узагальнені швидкості не беруть участі у такому перетворенні. Зрозуміло, що означення функції Лагранжа $L = T - U$ не змінюється в результаті таких перетворень, оскільки вона є скаляром і на вибір координат q з самого початку не накладалось жодних обмежень. Слід очікувати, що після перетворення (10.15) форма рівнянь Лагранжа залишиться тією самою, що і для початкових координат. У таких випадках кажуть, що рівняння Лагранжа є *інваріантними за формою* (або є форм-інваріантними).

Зауваження. У загальному випадку перетворення $q \rightarrow q' = q'(q, t)$ не зводиться до простої заміни координат у конфігураційному просторі. Можна говорити про два класи перетворень різної фізичної природи:

- 1) звичайна заміна координат у *одній системі відліку* (у більшості випадків йдеться про криволінійні координати);
- 2) перехід від координат q до координат q' , означених в *різних системах відліку* (можливо й у неінерціальних), тобто до перетворень, окрім заміни системи координат, входить також і заміна системи відліку. Досить часто так буває у випадках, коли до закону перетворення входить час.

Для другого типу перетворень інваріантність форми рівнянь Лагранжа зовсім не очевидна. \square

Покажемо аналітично інваріантність форми рівнянь Лагранжа відносно заміни системи координат. Підставимо формули перетворення (10.15) до функції Лагранжа:

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t),$$

функцію Лагранжа L' у нових координатах q' буде отримано після розкривання дужок у правій частині. Обернене перетворення функції Лагранжа має вигляд:

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q'(q, t), \dot{q}'(q, \dot{q}, t), t).$$

Запишемо рівняння руху для функції L , виражаючи її похідні через похідні функції L' , маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial q_i},$$

Для запису узагальнених імпульсів скористаємось зв'язком швидкостей та їх похідних (який аналогічний до виразів (10.4) та (10.5)):

$$\dot{q}'_j = \frac{\partial q'_j}{\partial t} + \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \right).$$

Тоді

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \underbrace{\frac{\partial L'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i}}_{\equiv 0} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i}$$

звідси, диференціюючи по часу останній вираз, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) \frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) \frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \frac{\partial \dot{q}'_j}{\partial \dot{q}_i}.$$

В результаті, рівняння руху для функції L матимуть вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} \right] \frac{\partial q'_j}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

За умовою перетворення $q \rightarrow q'$ є невинродженим, тому, після множення рівняння на обернену матрицю переходу отримаємо, що для нової функції Лагранжа L' рівняння руху по формі будуть такими самими, як і для L :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = 0.$$

Сформулюємо висновок:

Рівняння Лагранжа не змінюють форми після точкових перетворень координат конфігураційного простору.

Аналогічно можна побудувати закон перетворення узагальнених сил, який має вигляд:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} = \Phi'_j \cdot \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}. \quad (10.16)$$

Легко бачити, що узагальнені сили перетворюються як вектори з матрицею переходу $\frac{\partial q'_j}{\partial q_i}$ (те саме стосується імпульсів та багатьох інших об'єктів з індексами, у загальному випадку закон перетворення часто є тензорним).

Таким чином, рівняння Лагранжа справедливі у довільній системі координат та у довільній системі відліку, в тому числі й у неінерціальній. Перехід до неінерціальної системи відліку впливає тільки на вигляд самої функції Лагранжа — у ній, крім кінетичної та потенціальної енергій, з'являються доданки, які описують відхилення системи відліку від інерціальної. Передбачити форму тієї частини функції Лагранжа, що визначається системою відліку, досить важко, тому для побудови функції Лагранжа за основу береться інерціальна система, де такі доданки відсутні.

Приклад 5. Знайти перетворення функції Лагранжа $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ системи частинок при перетворенні Галілея.

◀ Підставимо перетворення Галілея

$$\begin{cases} \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t, \\ t \rightarrow t' = t, \end{cases} \quad \text{де } \vec{v} = \text{const}$$

до функції Лагранжа $L = T - U$. Оскільки потенціальна енергія залежить тільки від відносних відстаней, які не змінюються при перетворенні, то $U' = U$. У результаті,

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \rightarrow L'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) &= L(\vec{r}(\vec{r}', t), \dot{\vec{r}}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t), t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\dot{\vec{r}}' - \vec{v})^2}{2} - U \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}'^2}{2} - \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i + \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i - U = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}'^2}{2} - \vec{P} \cdot \vec{v} + \frac{M v^2}{2} - U, \end{aligned}$$

де \vec{P} — повний імпульс системи, а M — повна маса. Доданок $\frac{M v^2}{2}$ можна опустити (це похідна від лінійної функції по часу). Оскільки повний імпульс системи є на означення повною похідною,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i,$$

то добуток $\vec{P} \cdot \vec{v}$ є повною похідною по часу, тому з точністю до повних похідних по часу функція Лагранжа має вигляд:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}) \rightarrow L'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}'^2}{2} - U(\vec{r}'),$$

тобто форма функції Лагранжа зберігається. Таким чином, перетворення Галілея зводиться до калібрувального перетворення функції Лагранжа. ▶

Зауваження. Інваріантність функції та рівнянь Лагранжа відносно перетворення Галілея накладає суттєве обмеження на залежність кінетичної енергії від швидкостей.

Перетворення Галілея є калібрувальним перетворенням, тому для функція Лагранжа вільної матеріальної точки при такому перетворенні повинна змінюватись на повну похідну по часу. Із інваріантності відносно просторових поворотів (властивість ізотропії простору) випливає, що кінетична енергія не залежить від напрямку швидкості, тому можна вважати, що $T = T(v^2)$. Перетворення Галілея, яке описує перехід до інерціальної системи відліку, що рухається відносно даної системи з малою швидкістю $\vec{\varepsilon} = \text{const}$, тобто $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\varepsilon}$,

$$T(v^2) \rightarrow T'(v'^2) = T((\vec{v} + \vec{\varepsilon})^2) = T(v^2) + \langle \text{повна похідна по } t \rangle.$$

Для малої швидкості $\vec{\varepsilon}$ у першому порядку малості $(\vec{v} + \vec{\varepsilon})^2 \simeq v^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}$. Зміна функції Лагранжа у першому порядку по ε буде

$$T'(v'^2) = T(v^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) = T(v^2) + 2(\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \frac{\partial T}{\partial v^2}.$$

Оскільки $2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} \equiv \frac{d}{dt}(2\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon})$, то другий доданок у правій частині буде повною похідною по часу, якщо $\frac{\partial T}{\partial v^2} = \text{const}$ (інакше цей множник, до якого входять швидкості $\frac{d\vec{r}}{dt}$, не можна занести під повну похідну). Це означає, що кінетична енергія у теорії, де справедливий принцип відносності Галілея, повинна бути квадратичною по швидкості. Загальні рівняння Лагранжа будуть інваріантними, оскільки потенціали та сили взаємодії не змінюються при переході до іншої інерціальної системи відліку.

Те саме виконуватиметься і при переході до узагальнених координат. Якою б не була складною залежність функції Лагранжа від узагальнених координат q , завжди існує декартова система координат, у якій кінетична енергія зводиться до суми квадратів (якщо не брати до уваги зв'язки). \square

8. ОДНОВИМІРНІ МАЛІ КОЛИВАННЯ. Розглянемо механічну систему з однією ступінню вільності, для якої кінетична є квадратичною по швидкості, а функція Лагранжа не залежить від часу:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q),$$

де $a(q) > 0$. Для такої системи може існувати положення рівноваги, якщо існує розв'язок рівняння

$$U'(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = q_0$$

(у положення q_0 на систему не діють сили). Якщо система перебуває у малому околі положення рівноваги, то за деяких умов область її рух буде обмежено цим околom (тобто після відхилення від q_0 виникають сили, що протидіють подальшому віддаленню системи), таке положення рівноваги називається стійким. Положення рівноваги відповідає точці екстремуму потенціалу і буде стійким, якщо цей екстремум є мінімумом. Детальніше про малі коливання буде далі.

Дослідити рух у околі стійкого положення рівноваги можна у наближенні малого відхилення від нього. Якщо перейти до нової координати ξ (відхилення від положення рівноваги) за правилом

$$q(t) = q_0 + \xi(t)$$

то функцію Лагранжа можна розкласти у ряд Тейлора по малому параметру ξ :

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} [a(q_0) + a'(q_0)\xi + \dots] \dot{\xi}^2 - U(q_0) - U'(q_0)\xi - \frac{1}{2!} U''(q_0)\xi^2 - \frac{1}{3!} U'''(q_0)\xi^3 - \dots$$

Розкладання можна припинити у наближення деякого порядку. Найпростішим є другий порядок, який коректно описує наближення, якщо $U''(q_0) \neq 0$, тоді функція Лагранжа має вигляд (координату та швидкість вважаємо величинами одного порядку малості):

$$L(\xi, \dot{\xi}) \simeq \frac{1}{2} a(q_0) \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} U''(q_0) \xi^2,$$

де сталу $U(q_0)$ опущено і враховано $U'(q_0) = 0$. У інших позначеннях:

$$L(\xi, \dot{\xi}) \simeq \frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2 - \frac{\varkappa}{2} \xi^2, \quad \mu = a(q_0), \quad \varkappa = U''(q_0) > 0,$$

формально це функція Лагранжа, що описує рух частинки маси μ у гармонічному потенціалі. Рівняння руху збігатиметься з рівнянням гармонічних коливань:

$$\mu \ddot{\xi} = -\varkappa \xi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\xi} + \frac{\varkappa}{\mu} \xi = 0,$$

частота коливань буде $\omega_0^2 = \frac{\varkappa}{\mu}$. Якщо задача полягає у визначенні частота коливань, то у записі рівняння руху немає потреби, частоту можна знайти порівнюючи коефіцієнти у функції Лагранжа:

$$\omega_0^2 = \frac{\varkappa}{\mu} = \frac{\langle \text{коефіцієнт при } \xi^2 \rangle}{\langle \text{коефіцієнт при } \dot{\xi}^2 \rangle}.$$

Приклад 6. Частота малих коливань у випадку руху по гіперболі (приклад 4).

◀ Для параметризації рівняння за допомогою гіперболічних функцій положення рівноваги буде $\xi_0 = 0$. Легко бачити, що воно буде стійким. Розклад функції Лагранжа для малих значень ξ :

$$L = \frac{m}{2} (2 \operatorname{ch}^2 \xi - 1) \dot{\xi}^2 - mga \operatorname{ch} \xi \simeq \frac{m}{2} \dot{\xi}^2 - \frac{mga}{2} \xi^2$$

з точністю до сталого доданку, звідси $\omega_0 = \frac{g}{a}$. Отриманий вираз нагадує формулу для квадрату частоти коливань математичного маятника довжини a (для нього рух відбувається по колу), тому сталу a можна інтерпретувати як радіус кривизни гіперболи у точці $x = 0$ (еквівалентно $\xi = 0$). ►

Зауваження. Якщо $U''(q_0) \neq 0$, то квадратичним наближенням користуватись не можна. У такому випадку розклад потенціалу слід продовжити до першого відмінного від нуля порядку (до якого одночасно потрібно розкласти і кінетичну енергію). Рівняння Лагранжа будуть нелінійними і їх аналіз суттєво ускладниться (про це буде далі). Простим прикладом може бути функція Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{2} x^4$$

(частинка у степеневому потенціалі). Рух буде коливальним і періодичним, але його закон виражатиметься через еліптичні функції. ┘

ЛЕКЦІЯ 11

Структура функції та рівнянь Лагранжа

1.	Розбиття системи на частини.	183
2.	Кінетична енергія в узагальнених координатах.	183
3.	Форма рівнянь Лагранжа.	184
4.	Кінетична енергія частинки у ортогональних криволінійних координатах.	186
5.	Частинка у зовнішньому електромагнітному полі.	188
6.	Узагальнено-потенціальні системи.	192
7.	Дисипативна функція Релея.	195

1. РОЗБИТТЯ СИСТЕМИ НА ЧАСТИНИ. Нехай задано дві механічні системи “ a ” та “ b ” із потенціальною взаємодією. Функція Лагранжа об’єднаної системи “ $a + b$ ” (вважатимемо її замкнутою) буде мати вигляд:

$$L = T - U, \quad T = T_a + T_b, \quad U = U_a + U_b + U_{ab}. \quad (11.1)$$

де T_a, T_b — кінетичні енергії підсистем, U_a та U_b — їх власні потенціальні енергії, а U_{ab} — енергія їх взаємодії. За означенням, кінетична енергія є адитивною величиною і є сумою кінетичних енергій підсистем. Для потенціальної енергії така властивість відсутня, тому у загальному випадку

$$L = T_a + T_b - U_a - U_b - U_{ab} = L_a + L_b - U_{ab}, \quad L_a = T_a - U_a, \quad L_b = T_b - U_b,$$

тут L_a та L_b — функції Лагранжа підсистем. Потенціальна енергія, як і функція Лагранжа, буде адитивною тільки тоді, коли взаємодія між підсистемами відсутня, тобто $U_{ab} = 0$, або нею можна знехтувати у деякому наближенні.

Якщо $U_{ab} \neq 0$, то розбиття на підсистеми можна інтерпретувати так: для системи “ a ” систему “ b ” можна розглядати як зовнішнє джерело, яке вносить залежність від часу до повного потенціалу системи “ a ” через узагальнені координати $q_b(t)$ (і навпаки, для системи “ b ” система “ a ” є зовнішнім джерелом). У деякому розумінні механічний стан джерела відомий, точніше відомі рівняння руху джерела, хоча у даному випадку ситуація суттєво інша, ніж для взаємодії системи з полем (стан якого змінюється за наперед заданим законом, а взаємодія з системою на нього не впливає).

2. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ. Розглянемо вигляд функції кінетичної енергії

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2}. \quad (11.2)$$

в узагальнених координатах. Зауважимо, що за означенням $T > 0$ і є додатно означеною формою швидкостей (як сума квадратів), рівність $T = 0$ виконується тільки при $\vec{r}_i = 0$ для всіх i — всі частинки нерухомі.

Підставимо до означення (11.2) формули переходу та їх похідні по часу:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t), \quad \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Розкриваючи дужки у квадраті швидкості, отримаємо:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (11.3)$$

де

$$\begin{aligned} T_0(q, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ T_1(q, \dot{q}, t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n b_j(q, t) \dot{q}_j, \\ T_2(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j,k=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k, \end{aligned} \quad (11.4)$$

для скорочення введено перепозначення:

$$b_j(q, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j}, \quad a_{ij}(q, t) = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}. \quad (11.5)$$

Очевидно, a_{ij} є симетричною матрицею. Структура доданків кінетичної енергії:

- 1) $T_0(q, t)$ — адитивний доданок, який не залежить від швидкостей \dot{q} ;
- 2) $T_1(q, \dot{q}, t)$ — однорідна по швидкостях \dot{q} лінійна форма;
- 3) $T_2(q, \dot{q}, t)$ — однорідна по швидкостях \dot{q} квадратична форма.

Якщо перетворення $\vec{r} \rightarrow \vec{r}(q, t)$ явно не залежить від часу, як це буває для стаціонарних зв'язків, то $T_0 = T_1 = 0$ і $T = T_2$. У такому випадку величина T_2 буде додатно визначеною квадратичною формою, оскільки будується як сума квадратів:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2.$$

Функція T_2 дорівнює нулю тільки тоді, коли всі швидкості у системі дорівнюють нулю. По цій причині матриця a_{ij} для стандартних механічних систем є невиродженою.

Механічна система, у якій $T = T_2$ (тобто $T_0 = T_1 = 0$) називається натуральною (склерономною). У такій системі кінетична енергія є додатно визначеною однорідною квадратичною формою швидкостей:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

що явно не залежить від часу.

3. ФОРМА РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА. Розглянемо внески до рівнянь Лагранжа (10.10), які породжуються окремими доданками виразу кінетичної енергії. Узагальнений імпульс буде лінійною функцією швидкостей¹:

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T_1 + T_2) = a_{ik} \dot{q}_k + b_i. \quad (11.6)$$

Окремо, для доданку T_0 ліва частина рівнянь Лагранжа матиме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} \equiv - \frac{\partial T_0}{\partial q_i}. \quad (11.7)$$

Аналогічно, для T_1 (у правій частині — німа сума по j):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} b_i - \frac{\partial b_j}{\partial q_i} \dot{q}_j = \frac{\partial b_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial b_i}{\partial q_j} - \frac{\partial b_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j. \quad (11.8)$$

І, нарешті, для T_2 (у правій частині — німа сума по j та k):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{q}_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k = a_{ij} \ddot{q}_j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

Передостанній доданок можна подати у зручнішому вигляді, якщо врахувати симетрію тензора $\dot{q}_j \dot{q}_k$. Запишемо його у іншій формі, розбиваючи на два доданки та переставляючи індекси j та k в останньому з них:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_k \right).$$

Підстановка до попереднього виразу дає:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_i} = a_{ij} \ddot{q}_j + \Gamma_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \dot{q}_j, \quad (11.9)$$

де введено перепозначення:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right). \quad (11.10)$$

Функції $\Gamma_{i,jk}$ називаються *символами Крістоффеля*. Вони з'являються у диференціальній геометрії для опису викривленого простору. У класичній механіці характерні для ріманової геометрії об'єкти виникають абсолютно природно — як правило, частинка рухається по поверхні з деякою кривизною. Сама ж поверхня занурена у евклідовий простір, тому для опису руху загалом використовується апарат евклідової геометрії в межах припущень, у яких з самого початку буда сформульована ньютонівська теорія.

¹ Маємо: $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j) = a_{ij} \delta_{ik} \dot{q}_j + a_{ij} \dot{q}_i \delta_{kj} = a_{kj} \dot{q}_j + a_{ik} \dot{q}_i$, оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, то обидва доданки однакові.

Для натуральної системи рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$a_{ij}\ddot{q}_j + \Gamma_{i,jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = \Phi_i^{(n)} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \equiv \Phi_i. \quad (11.11)$$

Рівняння руху можна переписати у вигляді явної системи диференціальних рівнянь другого порядку, якщо виконати перетворення:

$$a_{ij}\ddot{q}_j = f_i(q, \dot{q}) \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_i = [a^{-1}]_{ij}f_j(q, \dot{q}).$$

Для додатно визначеної форми T_2 матриця a_{ij} є невиродженою, тому у загальному випадку існує обернена матриця $[a^{-1}]_{ij}$. Якщо цю вимогу порушено, то система стає *виродженою*² і описувати її рух досить важко. Досить часто причиною виродженості є наявність нетривіальних симетрій у системі. Наявність виродженості приводить також до неоднозначного розв'язку задачі Коші основної задачі про рух системи.

Зауваження. У диференціальній геометрії аналогом рівняння руху (11.11) є неоднорідне рівняння геодезичних у метриці a_{ij} . Для вільної частинки воно збігається з однорідним рівнянням геодезичних:

$$a_{ij}\ddot{q}_j + \Gamma_{i,jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = 0.$$

Його розв'язки — криві, по яких рухається вільна частинка за відсутності сил (але за наявності зв'язків). Такі криві називаються *геодезичними лініями* і мають у рімановій геометрії той самий зміст, що прямі лінії у евклідовій. Зокрема, найкоротша відстань між точками у викривленому просторі відкладається вздовж геодезичної:

$$S_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dl = \int_{t_1}^{t_2} [a_{ij}(q)\dot{q}_1\dot{q}_2]^2 dt,$$

саме рівняння геодезичних можна отримати як екстремум функціоналу довжини S_{12} . У класичній механіці така ідея отримання рівняння кривої з умови екстремуму деякої величини, яка має безпосередній геометричний зміст, трансформується у спосіб отримання рівняння руху з деякого функціоналу, до якого закладено повну інформацію про систему (крім початкових умов). Про це йтиметься далі. \perp

4. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ЧАСТИНКИ У ОРТОГОНАЛЬНИХ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ. Найпоширенішим є випадок, коли узагальнені координати є частиною ортогональної системи координат, а за відсутності зв'язків вони її породжують. Розглянемо кінетичну енергію частинки у різних криволінійних координатах (не враховуючи можливих зв'язків). Іншими словами, задача полягає у заміні координат у функції Лагранжа для вільної частинки.

Кінетична енергія однієї частинки маси m має вигляд:

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}.$$

² Такі системи досить поширені у теоретичній фізиці.

У декартових координатах, оскільки орти є сталими, то

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z,$$

звідси

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (11.12)$$

Цей результат можна отримати, підносячи до квадрату не швидкість $\dot{\vec{r}}$, а її довжину \dot{r} , оскільки за означенням довжини вектора $\dot{\vec{r}}^2 \equiv \dot{r}^2$. Дійсно, $\dot{r} = \frac{dl}{dt}$, де dl — елемент довжини у евклідовому просторі, і

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Тому

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \frac{(dl)^2}{(dt)^2} = \frac{m}{2} \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(dt)^2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Скористаємось таким представленням кінетичної енергії у криволінійних координатах q . Елемент довжини має вигляд:

$$dl^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2,$$

де H_i — параметри Ламе. Тоді $T = \frac{m}{2} \frac{(dl)^2}{(dt)^2}$ і

$$T = \frac{m}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2). \quad (11.13)$$

Вираз (11.13) можна отримати також за допомогою формул проекції швидкості на осі криволінійної системи координат:

$$\dot{\vec{r}}(q) = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \cdot H_i \dot{q}_i \equiv \sum_i \vec{e}_i v_i, \quad v_i = H_i \dot{q}_i.$$

Цей результат справедливий у довільних ортогональних криволінійних координатах, для запису кінетичної енергії досить знання параметрів Ламе. Зокрема, у циліндричних координатах (r, φ, z) ,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (11.14)$$

і у сферичних координатах (r, θ, φ) :

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (11.15)$$

Зауваження. Перехід до криволінійних координат інколи виконується і у задачах без зв'язків, якщо потрібно виділити доданки кінетичної енергії, які описують обертальний та радіальний рухи. У декартовій системі координат, де всі доданки описують поступальний рух частинки вздовж осей, виділити кінетичну енергію обертального руху як правило незручно. \square

Підхід, який було використано для отримання виразу (11.13) кінетичної енергії далеко не універсальний, а сам результат справедливий тільки у ортогональних криволінійних координатах. У загальному випадку вираз для T можна знайти безпосереднім диференціюванням формул переходу $\vec{r} = \vec{r}(q)$

$$\dot{x} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{y} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{z} = \sum_i \frac{\partial z}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

і підстановкою до формули (11.12) для енергії у декартових координатах (оскільки T є скаляром, то числове значення не зміниться після переходу до інших координат, незважаючи на іншу функціональну форму). Пояснимо цю процедуру на прикладі ортогональних координат, для спрощення обмежимося циліндричними. Диференціюючи по часу формули переходу

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

отримаємо вирази для декартових проекцій швидкостей:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{z} = \dot{z}.$$

Підстановка:

$$T = \frac{m}{2} [(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \dot{z}^2] = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2],$$

що збігається з раніше отриманим результатом (11.14).

Задача 11.1. Вивести цим самим способом формули для кінетичної енергії у сферичних та параболічних координатах.

5. ЧАСТИНКА У ЗОВНІШНЬОМУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ. Розглянемо рух частинки у полі сили Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{H}. \quad (11.16)$$

яка є зовнішньою силою. Для компактного представлення рівнянь Лагранжа спробуємо записати відповідну узагальнену силу у вигляді

$$\Phi_i = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{int}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_{int}}{\partial q_i} \right],$$

де L_{int} — деяка функція, яка визначає взаємодію системи з полем (її потрібно знайти). Якщо це вдасться, то ліву частину рівнянь Лагранжа (10.10) можна об'єднати із правою та формально записати рівняння руху з нульовою правою частиною для функції Лагранжа $L + L_{int}$ (навіть за наявності непотенціальних сил).

Зауваження. Незручність запису рівнянь Лагранжа з узагальненими силами полягає також у тому, що у означенні компоненти узагальненої сили ще залишаються подробиці переходу від декартових до узагальнених координат. ┘

У виразі для узагальненої сили відсутнє диференціювання по координатах та швидкостях, і пряма підстановка \vec{F} до формули для Φ не приводить до бажаного результату, тому електричне та магнітне поля потрібно спочатку записати через похідні інших функцій. Для опису електромагнітного поля у класичній електродинаміці використовуються скалярний та векторний потенціали φ та \vec{A} , для них:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}.$$

Підставимо ці вирази до сили Лоренца, використовуючи для зручності запис векторного добутку та ротора через символ Леві-Чивіта. Для i -ї компоненти матимемо:

$$F_i = eE_i + \frac{e}{c} \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j H_k = -e \left(\nabla_i \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kab} \dot{x}_j \nabla_a A_b.$$

Але $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kab} = \delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ja} \delta_{ib}$, тому, повертаючись до векторного запису, знайдемо:

$$\begin{aligned} F_i &= -e \nabla_i \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ja} \delta_{ib}) \dot{x}_j \nabla_a A_b \\ &= -e \nabla_i \varphi - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \right) A_i + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_i \vec{A}. \end{aligned}$$

У другому доданку автоматично з'являється повна похідна $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}$ від функції координат та часу. Оскільки вектор-потенціал \vec{A} не залежить від швидкостей, то компоненту A_i можна записати у вигляді похідної

$$A_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}),$$

тобто індекс компоненти замінюється на проекцію похідної. Враховуючи це, отримаємо формулу для компоненти сили Лоренца у вигляді:

$$F_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - e\varphi \right).$$

У першому доданку в дужках можна відняти добуток $e\varphi$, не змінюючи правої частини (скалярний потенціал не залежить від швидкостей). У результаті,

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U_{int}}{\partial x_i}, \quad U_{int} = e\varphi - \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}.$$

Отриманий вираз є саме таким, як потрібно, але у декартових координатах. Лінійна по швидкостях форма U_{int} описує енергію взаємодії. Побудуємо тепер узагальнену силу, використовуючи правило переходу до координат q та властивості похідних. Виділяючи повну похідну по часу, знайдемо:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U_{int}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial U_{int}}{\partial x_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial U_{int}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{враховуємо рівності:} \\ \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \end{array} \right| = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial U_{int}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U_{int}}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

У результаті:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Phi_i \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U_{int}}{\partial q_i}.$$

Позначаючи $L_{int} = -U_{int}$ (функція Лагранжа взаємодії), отримаємо:

$$\mathcal{L} = L + L_{int} = L - e\varphi + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (11.17)$$

Для функції \mathcal{L} права частина рівнянь Лагранжа дорівнює нулю, а до самої функції \mathcal{L} входить функція Лагранжа механічної системи L та доданки, які описують взаємодію з полем. Процедура включення поля до функції Лагранжа така сама, як і для потенціальних полів (що було використано при отриманні самих рівнянь руху). Відмітимо, що \mathcal{L} не є повною функцією Лагранжа для системи частинки і поля — в ній не вистачає доданків, які описують ступені вільності самого поля. Рівняння, що описують закон зміни поля при взаємодії з системою, відсутні, і стан поля вважається наперед заданим.

Зауважимо, що вибір потенціалів φ та \vec{A} неоднозначний. Якщо перейти до інших потенціалів φ' та \vec{A}' за правилом

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f,$$

з довільною функцією $f(\vec{r}, t)$ (доданки у правій частині не впливають на обчислення полів, для такого перетворення $\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$ та $\vec{H} \rightarrow \vec{H}' = \vec{H}$), а сама функція Лагранжа (11.17) зміниться на повну похідну:

$$\mathcal{L}' = L - e\varphi' + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}' = \mathcal{L} + \frac{e}{c} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) f \right] = \mathcal{L} + \frac{1}{c} \frac{df}{dt},$$

що відповідає калібрувальній інваріантності функції Лагранжа. У результаті такого перетворення рівняння руху не змінюються, а саме перетворення потенціалів у класичній електродинаміці називається *калібрувальним перетворенням*.

Важливим частинним випадком є однорідні стаціонарні поля \vec{E} та \vec{H} , скалярний та векторний потенціали для яких мають вигляд:

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot \vec{r}, \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r}. \quad (11.18)$$

Наведені вирази (11.18) для потенціалів, які породжують задані поля $\vec{E} = \text{const}$ та $\vec{H} = \text{const}$ не єдині. Існує цілий клас потенціалів, які задають ті самі поля, і будуються з (11.18) за допомогою калібрувальних перетворень.

Відповідний доданок у функції Лагранжа матиме вигляд:

$$\begin{aligned} L_{int} &= -e\varphi + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = -e\vec{E} \cdot \vec{r} + \frac{e}{2c} \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{H} \times \vec{r}) = -e\vec{E} \cdot \vec{r} + \frac{e}{2c} \vec{H} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &\equiv -e\vec{E} \cdot \vec{r} + \frac{e}{2mc} \vec{H} \cdot \vec{L}, \end{aligned} \quad (11.19)$$

де виділено момент імпульсу частинки.

У декартових координатах, якщо $\vec{H} = H\vec{e}_z$, можливі різні варіанти вибору вектор-потенціалу, наприклад

$$\vec{A} = \frac{1}{2} H(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y), \quad \text{або} \quad \vec{A} = -Hy\vec{e}_x.$$

Другий потенціал можна отримати з попереднього за допомогою калібрувального перетворення з функцією $f = -xyH/2$. У циліндричних координатах для $\vec{H} = H\vec{e}_z$ вектор-потенціал, згідно з (11.18), матиме вигляд:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r} = \frac{1}{2} H\vec{e}_z \times (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) = \frac{1}{2} Hr\vec{e}_\varphi.$$

Приклад 1. Побудувати функцію Лагранжа для частинки у потенціалі (циліндрична система координат) $U = U(r, z)$ у сталому магнітному полі $\vec{H} \parallel \vec{e}_z$ (“прецесія Лармора”).

◀ Нехай орієнтацію осей системи координат вибрано так, що $\vec{H} = H\vec{e}_z$. Запишемо доданок взаємодії у циліндричних координатах, беручи до уваги формули для компонент швидкості³:

$$L_{int} = \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = \frac{e}{2c} rH(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{e}{2c} Hr^2\dot{\varphi}.$$

Тому функція Лагранжа для частинки, яка рухається під дією азимутально-симетричного потенціалу у сталому магнітному полі має вигляд:

$$L = T - U + L_{int} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eH}{2c} r^2\dot{\varphi} - U(r, z).$$

Рівняння Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} &\Rightarrow & m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + \frac{eH}{c} r\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} &\Rightarrow & \frac{d}{dt} \left(mr^2\dot{\varphi} + \frac{eH}{2c} r^2 \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \frac{\partial L}{\partial z} &\Rightarrow & m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}$$

Друге рівняння вироджується у закон збереження узагальненого імпульсу для координати φ :

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \left(\dot{\varphi} + \frac{eH}{2mc} \right) \equiv mr^2(\dot{\varphi} + \omega_H) = \text{const},$$

де введено стандартне перепозначення $\omega_H = \frac{eH}{2mc}$. Повний розв’язок задачі можна отримати, виразивши із закону збереження $\dot{\varphi}$ і підставивши у рівняння для r (випадок $U = 0$ залишається як вправа для читача, задача 11.2).

³ Той самий результат можна отримати за допомогою декартових координат,

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} H(xy\dot{y} - y\dot{x})$$

після підстановки формул переходу $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Якісний висновок про рух можна отримати, не розв'язуючи рівняння Лагранжа. Для цього зауважимо, що у функції Лагранжа можна перейти до іншої кутової змінної $\alpha = \varphi - \omega_H t$, доповнюючи доданки з кутовою швидкістю $\dot{\varphi}$ у L до повного квадрату. Така заміна координат $(r, \varphi, z) \rightarrow (r, \alpha, z)$ означає перехід до системи відліку, що обертається з кутовою швидкістю ω_H . Незважаючи на те, що нова система відліку є неінерціальною, рівняння Лагранжа за формою залишаються тими самими. У нових координатах:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}\omega_H^2 r^2 - U(r, z),$$

Якщо магнітне поле є достатньо малим, то $\omega_H^2 \simeq 0$ і другим доданком можна знехтувати⁴, тоді функція Лагранжа у нових координатах за формою збігається з функцією Лагранжа частинки, що рухається у потенціалі U . Це означає, що у новій системі відліку частинка рухається так само, як вона б рухалась у нерухомій системі за відсутності магнітного поля.

Цей висновок часто формулюють у вигляді *теорему Лармора*: за наявності магнітного поля орбіта зарядженої частинки обертається з кутовою частотою ω_H (таке обертання більш коректно назвати прецесією). ►

Задача 11.2. Знайти траєкторію електрона у сталому магнітному полі, використовуючи циліндричні координати.

6. УЗАГАЛЬНЕНО-ПОТЕНЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ. Із аналізу електромагнітних сил випливає, що зовнішні силові поля (не тільки потенціальні) можна включити до функції Лагранжа системи, якщо узагальнену силу можна записати у формі

$$\Phi_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U_{int}}{\partial q_i}, \quad (11.20)$$

де U_{int} можна називати енергією взаємодії з полем. Якщо U_{int} не залежить від швидкостей, то у правій частині формули (11.20), перший доданок відсутній, а другий еквівалентний звичайному градієнту. Тому така сила буде потенціальною, а U_{int} буде потенціалом взаємодії системи та поля.

У загальному випадку добавку $L_{int} = -U_{int}$ можна інтерпретувати як частину функції Лагранжа, яка описує взаємодію системи з полем, але, строго кажучи, функція U_{int} не є потенціалом у прямому розумінні (сила не є потенціальною згідно із прямим означенням). Крім того, у класичній механіці приймається, що стан поля є *заданим*. Повна функція Лагранжа, де враховано дію системи на поле, повинна мати структуру:

$$\mathcal{L}_{total} = L_{system} + L_{int} + L_{field},$$

тут з'являються ступені вільності для поля, яким відповідатимуть свої рівняння руху (у класичній електродинаміці це рівняння Максвелла).

⁴ Другим порядком по полю, але не першим, який визначає формулу переходу координат. Заміною координат досягається те, що у функції Лагранжа фігурує більш високий порядок по малій величині, яким можна вже нехтувати. Такий прийом часто використовується на практиці.

Сумарна функція Лагранжа, де враховано дію поля, у класичній механіці відрізняється від наведеного повного виразу відсутністю останнього доданку:

$$\mathcal{L} = L_{system} + L_{int},$$

тому польові ступені вільності вважаються фіксованими (заданими), і рівняння руху для поля відсутні. Взаємодія механічної системи з полем є односторонньою — вплив системи на джерело поля ігнорується.

Силові поля, які задовольняють умову (11.20), називаються *узагальнено-потенціальними*, а сама функція U_{int} — *узагальненим потенціалом*. Взаємодію системи з узагальнено-потенціальним полем можна описати за допомогою окремого доданку функції Лагранжа L_{int} .

Найбільш цікавий у фізичних застосуваннях є випадок лінійного по швидкостях узагальненого потенціалу (наприклад, для при взаємодії з електромагнітним полем):

$$U_{int}(q, \dot{q}, t) = U_0(q, t) + U_1(q, \dot{q}, t) = U_0(q, t) + A_i(q, t)\dot{q}_i, \quad (11.21)$$

перший доданок є потенціалом у звичайному розумінні. Узагальнена сила має вигляд:

$$\Phi_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U_{int}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U_{int}}{\partial q_i} = \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial U_0}{\partial q_i} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \dot{q}_j = -\frac{\partial U_0}{\partial q_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j,$$

множник при швидкості у останньому доданку є антисиметричною матрицею.

Із виразу для узагальненої сили можна зробити обернений висновок про можливість запису сили Φ_i через узагальнений потенціал першого порядку:

Узагальнену силу Φ_i можна подати у вигляді (11.20), де U_{int} — узагальнений потенціал, лінійний за швидкостями, якщо виконуються вимоги:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad (11.22)$$

згідно із першою умовою, матриця $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j}$ є антисиметричною.

Для узагальненого потенціалу, лінійного по швидкостях, функція Лагранжа, згідно з (11.3) має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &= L(q, \dot{q}, t) + L_{int}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) - U(q, t) - U_{int}(q, \dot{q}, t) \\ &\equiv \underbrace{[T_0(q, t) - U_0(q, t) - U(q, t)]}_{\text{порядок 0}} + \underbrace{[T_1(q, \dot{q}, t) - U_1(q, \dot{q}, t)]}_{\text{порядок 1}} + \underbrace{T_2(q, \dot{q}, t)}_{\text{порядок 2}}, \end{aligned} \quad (11.23)$$

де перша група доданків не залежить від швидкостей, друга група — однорідна форма першого порядку по швидкостях, а останній доданок — однорідна форма другого порядку по швидкостях.

Легко бачити, що доданки $T_0 - U_0 - U$ та $T_1 - U_1$, подібно до окремо взятого потенціалу U , не вносять до рівнянь руху других похідних по часу. Це означає,

що T_0 , U_0 та U з одного боку, і T_1 та U_1 з іншого у деякому розумінні еквівалентні між собою, формально U_0 та U_1 можна об'єднати з доданками кінетичної енергії нульового та першого порядку по швидкостях.

*Зауваження**. Виходячи з цього спостереження, у другій половині XIX століття Г. Герц розробив так звану “безсилову” форму механіки, яка базується на ідеї ототожнення потенціалів з доданками кінетичної енергії (тобто функція Лагранжа просто тотожна до кінетичної енергії). Однак за всієї оригінальності, ця теорія не отримала широкого застосування. Зараз прийнято вважати, що незважаючи на формальну ідентичність, потенціальна та кінетична енергії суттєво відрізняються за фізичному змісту і їх розмежування у функції Лагранжа підкреслює цей факт. \perp

За аналогією з узагальненим потенціалом, лінійного по швидкостях (див. формулу (11.22)), можна сформулювати умови, отримані Гельмгольцем⁵, за яких лінійна по прискоренням узагальнена сила допускає запис (11.20) через узагальнений потенціал:

Лінійна по прискоренням узагальнена сила Φ_i може бути записана за допомогою узагальненого потенціалу $U_{int}(q, \dot{q}, t)$ у вигляді (11.20), якщо виконуються вимоги:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial \Phi_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \ddot{q}_i}, \\ 2) \quad & \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \ddot{q}_i} \right), \\ 3) \quad & \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{q}_i} \right). \end{aligned} \quad (11.24)$$

□ Пересвідчимося, що умови (11.24) мають сенс для потенціалу, який явно не залежить від часу (для спрощення запису). Запишемо вираз узагальненої сили (11.20) для $U_{int}(q, \dot{q})$:

$$\Phi_i = \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial U_{int}}{\partial q_i}.$$

Перша умова (11.24) задовольняється автоматично у силу симетрії похідних:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial \Phi_j}{\partial \ddot{q}_i}.$$

Запишемо другу умову, явно обчислюючи похідну:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial^3 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^3 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right).$$

Перший доданок правої частини є антисиметричним виразом по індексах i та j , а другий доданок — симетричний. Тому у сумі, яка записана у лівій частині другої умови, антисиметричні вирази скорочуються, а симетричні — подвоюються:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{q}_i} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \ddot{q}_i} \right).$$

⁵ Helmholtz, 1896.

Запишемо останню, третю умову. Похідна сили по координаті має вигляд:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^3 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^3 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \right) - \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial q_i \partial q_j}.$$

У різниці симетричний по індексах i та j останній доданок скорочується, тому

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 U_{int}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 U_{int}}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \right) \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} \right),$$

де враховано вираз для похідної $\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}$ (під час обчислення виникає його антисиметрична частина). ■

Зауваження*. Форма законів Ньютона та принцип суперпозиції сил однозначно фіксує функціональну структуру сил взаємодії — сила є функцією механічного стану системи (координат та швидкостей) та часу і не може залежати від прискорення через порушення самого принципу суперпозиції. Однак у механіці Лагранжа *формально* дозволена лінійна залежність узагальненої сили Φ_i від прискорень \ddot{q} , яка допускає інтерпретацію у вигляді узагальненого потенціалу (11.20), тоді $U_{int}(q, \dot{q}, t)$ є довільною, не обов'язково лінійною, функцією швидкостей. Наприклад, для узагальненого потенціалу Вебера⁶

$$U = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{a^2} \right), \quad a = \text{const},$$

який був уведений для опису електромагнітної взаємодії зарядженої матеріальної точки з нерухомим силовим центром, узагальнена сила матиме вигляд:

$$\vec{F} = \frac{\vec{e}_r}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{a^2} \right).$$

┘

Задача 11.3. Показати, що узагальнена сила, яка відповідає узагальнену потенціалу $U_{int}(q, \dot{q})$ не змінюється у результаті перетворення:

$$U_{int}(q, \dot{q}) \rightarrow U_{int}(q, \dot{q}) + \frac{df(q, t)}{dt},$$

де $f(q, t)$ — деяка функція координат та часу.

Задача 11.4. Показати, сила $\vec{F} = \alpha \frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^3}$ може бути описана за допомогою узагальненого потенціалу. Знайти узагальнений потенціал у сферичних координатах.

7. ДИСИПАТИВНА ФУНКЦІЯ РЕЛЕЯ. Розглянемо механічну систему, у якій діють дисипативні сили, лінійні по швидкостях. Для i -тої частинки сила має вигляд:

$$\vec{F}_i^{(d)} = -k_i \dot{\vec{r}}_i, \quad \text{де } k_i > 0.$$

Запишемо узагальнену силу:

$$\Phi_i^{(d)} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^{(d)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} = - \sum_{j=1}^N k_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i} \equiv - \sum_{j=1}^N k_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^N k_j \dot{\vec{r}}_j^2,$$

⁶ W. Weber, 1848.

тобто $\Phi_i^{(d)}$ зводиться до похідної по швидкостях від функції

$$D(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2}, \quad (11.25)$$

яка називається *диссипативною функцією Релея*,

$$\Phi_i^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}. \quad (11.26)$$

За структурою функція $D(q, \dot{q}, t)$ аналогічна до кінетичної енергії в узагальнених координатах. Підставляючи формулу (10.3) для швидкості до означення функції Релея, отримаємо:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^N k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^N k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k, \end{aligned}$$

або

$$D = D_0 + D_1 + D_2, \quad (11.27)$$

де

$$\begin{aligned} D_0(q, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad D_1(q, \dot{q}, t) = \sum_{i,j=1}^N k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ D_2(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^N k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned}$$

є однорідними розкладами по швидкостях нульового, першого та другого порядків відповідно. За означенням, форма D_2 є додатно визначеною.

У результаті, рівняння Лагранжа у системі з силами тертя, лінійними по швидкостях, мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}.$$

Задача 11.5. Знайти функцію Релея для системи матеріальних точок, якщо сили диссипації є силами взаємодії, лінійними по відносних швидкостях.

ЛЕКЦІЯ 12

Методи інтегрування рівнянь Лагранжа

1.	Загальні ідеї.	197
2.	Циклічні координати.	197
3.	Метод Рауса.	200
4.	Інтеграл енергії.	204

1. ЗАГАЛЬНІ ІДЕЇ. Як і рівняння руху у механіці Ньютона, рівняння Лагранжа є диференціальними рівняннями другого порядку відносно узагальнених координат, тому загальним методом для їх інтегрування є пошук інтегралів руху, кожний з яких дозволяє понизити сумарний порядок системи на одиницю. Для механічної системи з n ступенями вільності задача повністю інтегрується у квадратурах, якщо можна знайти n законів збереження¹.

Метод пошуку інтегралів руху а пріорі не задано. Однак якщо у механіці Ньютона єдиний підхід полягає у підборі інтегровувальних множників для вже записаних векторних рівнянь (вони є вихідним пунктом) і схожий більше на вгадування, ніж на загальний підхід, то у механіці Лагранжа засобів пошуку інтегралів руху значно більше. Причина в тому, що тут вихідним поняттям є одна скалярна функція Лагранжа L , форму якої легко змінювати, виконуючи заміни узагальнених координат. Самі рівняння руху можна отримати вже з функції Лагранжа, тому для пошуку інтегралів руху їх можна не використовувати, обмежуючись еквівалентним, але простішим аналізом властивостей функції Лагранжа. Часто наявність інтегралів руху очевидна зі структури функції Лагранжа, використання точкових перетворень дозволяє варіювати функціональну форму L у досить широкому діапазоні, не змінюючи вигляду рівнянь динаміки, тоді як у механіці Ньютона форма рівнянь руху суттєво змінюється у результаті заміни координат, особливо після переходу до неінерціальної системи відліку.

2. ЦИКЛІЧНІ КООРДИНАТИ. Розглянемо випадок потенціальних зовнішніх сил, тобто $\Phi_i^{(n)} = 0$. Циклічною називається координата, від якої функція Лагранжа явно не залежить². Рівняння руху для циклічної координати q_α вироджується у закон збереження відповідного узагальненого імпульсу p_α :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \equiv \frac{d}{dt} p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = \text{const} . \quad (12.1)$$

¹ Грубо кажучи, рівняння другого порядку після врахування закону збереження стає рівнянням першого порядку, яке вже інтегрується у квадратурах.

² Походження терміну: досить часто циклічною координатою є кут.

Оскільки імпульс p_α є функцією координат та швидкостей,

$$p_\alpha = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha(q, \dot{q}, t) \quad (\text{не залежить від } q_\alpha) \quad (12.2)$$

то рівняння $p_\alpha(q, \dot{q}, t) = \text{const}$ є диференціальним рівнянням першого порядку відносно координат, яке можна розв'язати у квадратурах (принаймні принципово). Далі у квадратурній формулі з'явиться ще одна стала інтегрування.

У випадку механічних систем із звичайною кінетичною енергією імпульс буде лінійним по швидкості,

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + b_i(q, t) \dot{q}_i + T_0(q, t) - U(q, t), \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij} \dot{q}_j + b_j$$

і для циклічної координати q_α отримаємо:

$$p_\alpha = a_{\alpha j} \dot{q}_j + b_\alpha := p_{\alpha 0} = \text{const} \quad (\text{не залежить від } q_\alpha). \quad (12.3)$$

Для пошуку формальної квадратури, яка випливає з цього закону збереження, виразимо з правої частини (12.3) швидкість \dot{q}_α :

$$a_{\alpha\alpha} \dot{q}_\alpha = p_{\alpha 0} - \sum_{j \neq \alpha} a_{\alpha j} \dot{q}_j - b_\alpha$$

(у лівій частині рівності суми по α немає). У правій частині вираз не залежить від q_α , тому, якщо інші координати вже відомі, то циклічну координату q_α легко знайти відокремленням змінних та безпосереднім інтегруванням:

$$q_\alpha(t) = \int \frac{1}{a_{\alpha\alpha}(q, t)} \left(p_{\alpha 0} - b_\alpha(q, t) - \sum_{j \neq \alpha} a_{\alpha j}(q, t) \dot{q}_j \right) dt + q_{\alpha 0}, \quad (12.4)$$

де $q_{\alpha 0}$ — стала інтегрування, яка є інтегралом руху (у силу незмінності), а нециклічні координати $q_i(t)$ та швидкості $\dot{q}_i(t)$, $i \neq \alpha$ мають бути відомі.

Таким чином, одна циклічна координата породжує два інтеграли руху, тобто знижує сумарний порядок системи диференціальних рівнянь на 2. Задача повністю інтегруватиметься у квадратурах, якщо кількість інтегралів дорівнює числу ступенів вільності системи. Така ситуація може бути тоді, коли всі координати є циклічними. Обернення залежностей

$$q_{\alpha 0} = q_{\alpha 0}(q, \dot{q}, t), \quad p_{\alpha 0} = p_{\alpha 0}(q, \dot{q}, t)$$

даватиме $q = q(q_0, p_0, t)$ та $\dot{q} = \dot{q}(q_0, p_0, t)$ (еволюція системи у часі).

Приклад 1. Використання збереження узагальненого імпульсу для циклічної координати для задачі про рух у центральному полі.

◀ Для плоского руху функція Лагранжа у полярних координатах має вигляд:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Рівняння руху:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - U'(r), \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0,$$

друге рівняння є законом збереження імпульсу $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ для координати φ . Якщо виразити швидкість $\dot{\varphi}$ із закону збереження, то її можна виключити з рівняння руху для координати r :

$$m\ddot{r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - U'(r),$$

до цього рівняння входить тільки одна координата r . За аналогічним сценарієм можна використовувати закони збереження узагальнених імпульсів — вони дозволяють виключити узагальнені швидкості для циклічних координат з рівнянь руху або інших законів збереження. ►

Зауваження. У багатьох випадках узагальнені імпульси відповідають стандартним ньютонівським інтегралам руху — імпульсу та моменту імпульсу. Відповідні закони збереження, які було розглянуто у ньютонівській механіці, зводяться до існування циклічних ступенів вільності.

Якщо циклічна координата є метричною (має розмірність довжини), то відповідний інтеграл буде імпульсом. Дійсно, у декартових координатах для вільної частинки

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

тому

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

будуть компонентами звичайного імпульсу. Для тієї самої функції Лагранжа у циліндричних координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

отримаємо:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Імпульси p_r та p_z є проєкціями ньютонівського вектора імпульсу \vec{p} на осі r та z відповідно, а p_φ є z -компонентою моменту імпульсу \vec{L} . Це означає, що для кутових координат узагальнені імпульси будуть зводитись до компонент моменту імпульсу відносно осі обертання (або хоча б співпадати з моментом по розмірності). З цього прикладу видно, що циклічні координати не забезпечують явних виразів для всіх ньютонівських інтегралів руху — координат всього три, а інтегралів типу імпульсу буде шість (імпульс та момент імпульсу).

Із наведеного прикладу випливає, чому у механіці Лагранжа окремо не виділяють імпульс та момент імпульсу. Залежно від розмірності узагальненої координати відповідний узагальнений імпульс може бути ньютонівським імпульсом (для метричних координат), ньютонівським моментом імпульсу (для кутових координат), або взагалі може не мати звичної інтерпретації у загальному випадку.

Узагальнені імпульси суттєво відрізнятимуться від ньютонівських у системах, де потенціал залежить від швидкості (тобто є узагальненим). Наприклад, для частинки у стаціонарному магнітному полі у декартових координатах маємо:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}.$$

У загальному випадку у формулах для узагальнених імпульсів, крім стандартних ньютонівських виразів, з'являються похідні від узагальнених потенціалів (у наведеному прикладі — від енергії взаємодії частинки з магнітним полем). \square

На практиці дотримуватись формальних квадратур (12.5) зазвичай незручно. У більшості випадків із законів збереження виражають узагальнену швидкість (ту, що відповідає циклічній координаті) і підставляють до рівняння руху, або до іншого закону збереження, знижуючи тим самим сумарний порядок системи. Інший підхід полягає у виключення циклічної ступені вільності з самої функції Лагранжа (метод Рауса, див. далі).

На відміну від механіки Ньютона, за своєю природою означеної у декартових координатах, у механіці Лагранжа досить просто перейти від однієї системи координат до іншої або навіть змінити систему відліку на неінерціальну. Крім того, є простий критерій існування інтегралу руху — наявність координати, від якої не залежить функція Лагранжа. У ньютонівській механіці такої простої ознаки немає, за формою системи рівнянь та структурою сил досить важко помітити існування законів збереження, крім класичних інтегралів імпульсу, моменту імпульсу та енергії.

За рахунок вдалого вибору узагальнених координат можна збільшити кількість циклічних координат і, відповідно, кількість законів збереження. Таким чином, задача пошуку інтегралів руху у механіці Лагранжа формулюється досить прозоро — вона еквівалентна пошуку такого способу опису механічної системи, який передбачає наявність якомога більшої кількості циклічних координат (в ідеалі всі координати бажано зробити циклічними, тоді задача повністю інтегрується у квадратурах).

3. МЕТОД РАУСА. Описаний раніше підхід використання закону збереження, що відповідає циклічній координаті, суттєво залежить від контексту задачі і типу координати. Раусом³ було запропоновано більш загальний метод виключення циклічної координати та відповідної їй швидкості з самої функції Лагранжа, ще до запису рівнянь руху.

Основна ідея методу Рауса полягає в тому, що рівняння руху для кожної циклічної координати q_α є законом збереження, і з цього співвідношення можна знайти відповідну узагальнену швидкість \dot{q}_α , тобто рівняння

$$p_\alpha = p_\alpha(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$$

можна (принаймні принципово) розв'язати відносно \dot{q}_α :

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{\alpha-1}, \dot{q}_{\alpha+1}, \dots, \dot{q}_n; p_\alpha; t)$$

і виключити з функції Лагранжа безпосередньою підстановкою. Проблема полягає в тому, щоб після виключення циклічної координати для нової функції Лагранжа зберегти стандартну форму рівнянь руху. Підстановка до функції Лагранжа швидкостей, що відповідають циклічним координатам, внесене нові залежності від інших координат, що впливає на вирази з похідними від функції Лагранжа.

³ Routh, 1876.

Розглянемо детальніше процедуру виключення у випадку, коли є k циклічних координат. Розіб'ємо координати на дві групи⁴: циклічні координати (всього k) q_α для $\alpha = \overline{1, k}$, та інші координати (всього $n - k$) q_a для $a = \overline{k+1, n}$.

Запишемо диференціал функції Лагранжа враховуючи, що L не залежить від q_α :

$$\begin{aligned} dL(q, \dot{q}, t) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{\alpha} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{=0} dq_\alpha + \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} dq_a + \sum_{\alpha} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{=p_\alpha} d\dot{q}_\alpha \\ &+ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{\alpha} p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} dq_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Оскільки $p_\alpha = \text{const}$, то $p_\alpha d\dot{q}_\alpha = d(p_\alpha \dot{q}_\alpha)$. Збираючи повні диференціали разом у лівій частині рівності, знайдемо:

$$d(L - p_\alpha \dot{q}_\alpha) = \frac{\partial L}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (12.5)$$

Зі структури доданків у правій частині видно, що комбінація $L - p_\alpha \dot{q}_\alpha$ залежить від координат q_a , швидкостей \dot{q}_a та часу t і не включає циклічних координат і відповідних швидкостей⁵.

Означимо функцію Рауса⁶:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(q_a, \dot{q}_a, t) = \mathbf{L} - p_\alpha \dot{q}_\alpha, \quad (12.6)$$

яку можна отримати підстановкою швидкостей $\dot{q}_\alpha(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t)$ до правої частини. Крім змінних величин q_a, \dot{q}_a, t функція R залежить також від сталих p_α як від параметрів. Порівнюючи формальний диференціал $R(q_a, \dot{q}_a, t)$ з виразом (12.5), отримаємо:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a + \frac{\partial R}{\partial t} dt = \frac{\partial L}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d\dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Тому, у силу незалежності аргументів функцій, множники при однакових диференціалах у правій та лівій частинах рівні між собою:

$$\frac{\partial R}{\partial q_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12.7)$$

⁴ Грецькі індекси α, β, \dots нумеруватимуть циклічні координати, а латинські a, b, \dots з першої частини алфавіту — всі інші. Індекси i та j як і раніше нумеруватимуть всі координати.

⁵ У записі поного диференціалу функції фігуруватимуть диференціали її *реальних* аргументів.

⁶ Часто приймається означення $R = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$ (перетворення Лежандра по швидкостях \dot{q}_α), щоб підкреслити схожість функції Рауса з функцією Гамільтона, яку буде розглянуто далі.

беручи до уваги рівняння Лагранжа для незалежних координат q_a , отримаємо рівняння руху:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_a} = 0, \quad a = \overline{k+1, n} \quad (12.8)$$

у якому циклічні ступені вільності повністю виключено. Функція Рауса і є шуканою редукованою функцією Лагранжа, де враховано закони збереження для циклічних координат, а рівняння динаміки для неї мають стандартну форму. Метод Рауса дозволяє знизити число ступенів вільності системи з n до $n - k$.

Формально функція Рауса залежить від q_a , \dot{q}_a , t та сталих p_α . Похідну по сталому аргументу p_α можна знайти з означення (12.6), вважаючи, що підстановку узагальнених швидкостей $\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t)$ виконано:

$$\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (L - p_\beta \dot{q}_\beta) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} - \dot{q}_\alpha - p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \equiv p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} - \dot{q}_\alpha - p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} = -\dot{q}_\alpha,$$

тому

$$\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = -\dot{q}_\alpha \equiv -\dot{q}_\alpha(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t). \quad (12.9)$$

Із останнього рівняння можна знайти самі циклічні координати, якщо рівняння Рауса (12.8) розв'язано та відомі функції $q_a(t)$:

$$q_\alpha(t) = - \int \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dt + q_{\alpha 0}. \quad (12.10)$$

Сформулюємо загальний алгоритм застосування методу Рауса:

- 1) із рівнянь $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ при $i = \alpha$ виразити $\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t)$;
- 2) побудувати функцію Рауса

$$R(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t) = L(q_a, \dot{q}_\alpha(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t), \dot{q}_a, t) - p_\alpha \dot{q}_\alpha(q_a, \dot{q}_a, p_\alpha, t)$$

розкриваючи дужки у правій частині;

- 3) розв'язати рівняння Рауса (12.8) для незалежних координат q_a ;
- 4) знайти циклічні координати явним інтегруванням із співвідношень (12.10).

Метод Рауса у чистому вигляді у класичній механіці використовується не часто, його роль — суто методологічна. Після редукції число ступенів вільності стає меншим, тобто новий конфігураційний простір має меншу розмірність, у ньому легше знайти перетворення, що породжує циклічні координати, і застосувати метод Рауса повторно. У ідеалі після кількох послідовних редукцій числа ступенів вільності можна домогтись того, що всі координати стануть циклічними і задача стане інтегрованою у квадратурах (повернутися до вихідних координат можна оберненим перетворенням після того, як задачу розв'язано).

Приклад 2. Використання методу Рауса для задачі про рух у центральному полі (приклад 1).

◀ Функція Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Для циклічної координати φ маємо:

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2},$$

будуємо функцію Рауса:

$$R(r, \dot{r}) = [L - p_\varphi \dot{\varphi}]_{\dot{\varphi}=p_\varphi/mr^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

Рівняння руху будуть такими самими, як у прикладі 1. Відмітимо, що останні два доданки можна об'єднати у ефективний потенціал. ▶

Приклад 3. Виключення ступенів вільності центру мас у консервативній системі (перехід до C -системи).

◀ Нехай задано систему N частинок з координатами \vec{r}_i із потенціальними силами взаємодії, що залежать тільки від відносних відстаней між частинками (зв'язки відсутні). Функція Лагранжа має вигляд:

$$L = T - U = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U, \quad U = U(\{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\}).$$

Означимо координати частинок \vec{r}'_i відносно центру мас:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{R}_C, \quad \vec{R}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.$$

Тоді, підставляючи формули переходу, отримаємо:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}}_C)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'^2_i + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i \cdot \dot{\vec{R}}_C + \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}_C^2.$$

Другий доданок у правій частині зникатиме, оскільки $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = 0$ за означенням. Таким чином,

$$T = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'^2_i.$$

Потенціальна енергія залежить від набору $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, тому у нових координатах аргументами будуть відстані $|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|$.

У результаті:

$$L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', \dot{\vec{R}}_C) = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'^2_i - U.$$

Зауважимо, що загальне число ступенів вільності залишається незмінним, координати \vec{r}'_i є лінійно залежними, оскільки $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = 0$ (тобто лінійно незалежних буде $N - 1$ радіус-векторів \vec{r}'_i).

Координати центру мас \vec{R}_C є циклічними, їх можна виключити методом Рауса. Узагальнений імпульс буде мати вигляд:

$$\vec{P}_C = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}_C} = M \dot{\vec{R}}_C = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}}_C = \frac{1}{M} \vec{P}_C,$$

звідки отримаємо функцію Рауса:

$$\begin{aligned} R &= (L - \vec{P}_C \cdot \dot{\vec{R}}_C) \Big|_{\dot{\vec{R}}_C = \dot{\vec{R}}_C(\vec{P}_C)} \\ &= \frac{M}{2} \left(\frac{1}{M} \vec{P}_C \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 - U - \frac{1}{M} \vec{P}_C^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i'^2 - U - \frac{\vec{P}_C^2}{2M}. \end{aligned}$$

Рівняння Рауса збігатимуться із рівняннями Ньютона:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i' = -\vec{\nabla}_i U.$$

Для циклічної координати \vec{R}_C залежність від часу можна знайти одразу:

$$\vec{R}_C = \vec{R}_{C0} - \int \frac{\partial R}{\partial \vec{P}_C} = \vec{R}_{C0} + \frac{\vec{P}_C}{M} t,$$

тобто центр мас рухається прямолінійно та рівномірно (як і має бути для замкненої системи). ►

Задача 12.1. Розв'язати задачу про рух системи з функцією Лагранжа

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1^2}{a + b q_2^2} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - \frac{k q_2^2}{2},$$

використовуючи метод Рауса.

Задача 12.2. Використовуючи метод Рауса, знайти закон зміни координати q_2 для функції Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1^2}{1 + \alpha q_2} + \frac{1}{2} q_2^2 \dot{q}_2 + k q_2.$$

Задача 12.3. Використовуючи метод Рауса, знайти закон зміни координати q_2 для функції Лагранжа

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{1 + \alpha q_2} + \frac{1}{2} \dot{q}_2 + k q_2 + 2 q_2^3.$$

4. ІНТЕГРАЛ ЕНЕРГІЇ. У механіці Лагранжа, за аналогією з механікою Ньютона, можна означити енергію механічної системи і отримати умови її збереження.

Виведення інтегралу енергії. Розглянемо механічну систему, для якої функція Лагранжа явно не залежить від часу, тобто $L = L(q, \dot{q})$. Для отримання інтегралу руху типу енергії домножимо рівняння Лагранжа на інтегровальні множники \dot{q}_i (як і в механіці Ньютона) і знайдемо суму отриманих рівнянь:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Доповнимо праву частину до повної похідної по часу:

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \frac{dL}{dt}.$$

або

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0,$$

звідки випливає, що величина

$$\mathcal{E} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \equiv p_i \dot{q}_i - L \quad (12.11)$$

є інтегралом руху, який називається *енергією*.

Для механічних систем зі звичайною кінетичною енергією $T = T_0 + T_1 + T_2$, згідно з теоремою Ейлера про однорідні функції, має місце рівність:

$$\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T_2 + T_1$$

(множники при $T_{1,2}$ дорівнюють порядкам швидкості). Підстановка до (12.11) дає:

$$\mathcal{E} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = (2T_2 + T_1) - (T_0 + T_1 + T_2 - U) = T_2 - T_0 + U. \quad (12.12)$$

Ньютонівський інтеграл енергії дорівнює $E = T + U = T_0 + T_1 + T_2 + U$. Незбіг цих виразів у загальному випадку приводить до їх розмежування:

$$E = T + U = T_2 + T_1 + T_0 + U \quad \text{називається енергією,}$$

$$\mathcal{E} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = T_2 - T_0 + U \quad \text{називається функцією Гамільтона.}$$

У консервативних системах обидві величини зберігаються, а для натуральних систем (де $T = T_2$) є ідентичними.

Зауваження. 1) Доданок T_1 не з'являється у виразі для енергії у механіці Лагранжа; 2) за рахунок доданку $T_0 = T_0(q, t)$ кінетична енергія може бути відмінною від нуля навіть, якщо всі узагальнені швидкості дорівнюють нулю. Це означає, що умова $\dot{q} = 0$ не задає стан рівноваги, якщо інтерпретувати T_0 як кінетичну енергію. Однак сам цей доданок формально схожий на потенціал, оскільки не залежить від швидкостей і фігурує у виразах функції Лагранжа та енергії з різними знаками. Такі доданки часто з'являються у результаті переходів до неінерціальних систем відліку і, за аналогією з потенціальною енергією, називаються "потенціалами відцентрових сил" (хоча згідно з ньютонівською аксіоматикою такі сили реально не існують). Залежно від способу розстановки дужок у функції Лагранжа доданок T_0 інтерпретується по-різному. Вираз

$$L = (T_2 + T_0) - U$$

відповідає опису руху у *інерціальній* системі відліку з кінетичною енергією $T_2 + T_0$ та потенціалом U , тоді як

$$L = T_2 - (U - T_0)$$

дає картину руху системи у неінерціальній системі з кінетичною енергією T_2 та “ефективним потенціалом” $U_{eff} = U - T_0$, який не відповідає реальній фізичній силі (включає доданок, який викликаний переходом до неінерціальної системи відліку). Відповідна енергія буде $\mathcal{E} = T_2 - T_0 + U = T_2 + U_{eff}$. Таке походження, зокрема, має ефективний потенціал задачі двох тіл. ┘

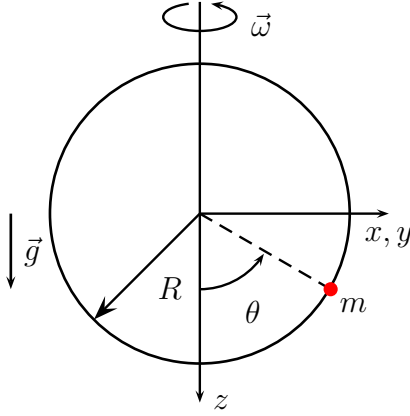


Рис. 12.1. До прикладу 4.

ється у сферичних координатах, у яких $r = R$. Зв'язок на обертання полягає у тому, що полярний кут φ , який також описує розташування кола, змінюється за законом $\varphi = \omega t + \varphi_0$. У сферичних координатах, з врахуванням зв'язків матимемо:

$$L = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega^2) + mgR \cos \theta.$$

Другий доданок у кінетичній енергії не залежить від швидкостей і є величиною типу T_0 (він завжди з'являється, коли формули переходу до узагальнених координат явно залежать від часу). У даній задачі всього одна ступінь вільності — кут θ .

Для інтерпретації доданку T_0 знайдемо енергію:

$$\mathcal{E} = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{mR^2}{2} \sin^2 \theta \omega^2 - mgR \cos \theta,$$

доданок $T_0 = \frac{mR^2}{2} \sin^2 \theta \omega^2$, як і потенціальна енергія, у виразах для функції Лагранжа та енергії з'являється із різними знаками.

У неінерціальній системі відліку, одна з осей якої збігається з віссю r , задача про рух зводиться до одновимірного руху частинки у потенціалі

$$U_{eff} = -\frac{mR^2}{2} \sin^2 \theta \omega^2 - mgR \cos \theta.$$

Аналізуючи вигляд ефективного потенціалу, легко дійти до висновку про можливість малих коливань. Відмітимо, що малими коливання будуть для спостерігача у неінерціальній системі. У нерухомій (інерціальній) системі такий рух буде обертанням з осциляціями.

Перший доданок у виразі U_{eff} відповідає відцентровому потенціалу для рухомого спостерігача і є ефектом неінерціальності системи відліку. В ній кінетична енергія частинки буде $T' = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2$ (для одновимірного руху), а потенціальна — відповідно $U' = -mgR \cos \theta$, тому функція Лагранжа не зводиться до різниці $T' - U'$. ►

Приклад 4. Побудувати функцію Лагранжа для частинки маси m , що розташована на колі радіуса R , яке обертається зі сталою кутовою швидкістю ω у полі сили тяжіння.

◀ Систему координат наведено на рис. 12.1. Без врахування зв'язків, у декартових координатах отримаємо:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz.$$

Стала відстань від початку координат, який збігається з центром кола природно описується

Аналогічно можна отримати вираз для енергії у системах з узагальненим потенціалом, коли $U = U_0(q) + U_1(q, \dot{q})$, де U_1 є лінійною формою по швидкостях. За означенням:

$$\mathcal{E} = (2T_2 + T_1 - U_1) - (T_2 + T_1 + T_0 - U_0 - U_1) = T_2 - T_0 + U_0,$$

тобто енергія Лагранжа не включає лінійних форм швидкостей, на відміну від ньютонівської. Це зайвий раз підкреслює еквівалентність форм T_1 та U_1 .

Закон зміни енергії. У випадку, якщо система є незамкненою, енергія не зберігається і закон її зміни можна знайти з рівнянь Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Phi_i.$$

Як і під час виведення закону збереження, домножимо кожне рівняння на відповідну швидкість і знайдемо суму отриманих рівнянь. Ліва частина:

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t},$$

тому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}_i \Phi_i, \quad \mathcal{E} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (12.13)$$

Таким чином, закон збереження енергії у механіці Лагранжа можна сформулювати так:

Енергія \mathcal{E} зберігатиметься за умов:

$$1) \Phi_i = 0, \quad 2) \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Першу умову можна послабити до $\sum_i \dot{q}_i \Phi_i = 0$ (потужність узагальнених сил дорівнює нулю).

Енергія додатково дає ще один інтеграл руху. За формою вираз \mathcal{E} нагадує функцію Рауса із оберненим знаком.

Зауваження. Якщо у механічній системі є $n - 1$ циклічних координат q_2, \dots, q_n і інтеграл енергії, то задача легко інтегрується у квадратурах підстановкою узагальнених швидкостей (через імпульси) до формули для енергії, це дає рівняння першого порядку відносно координати q_1 (яка не є циклічною):

$$\mathcal{E} = \dot{q}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \dot{q}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - R(q_1, \dot{q}_1, t),$$

останній доданок — функція Рауса, яка залежить тільки від q_1 та \dot{q}_1 . ┘

Дисипативні сили. У спеціальному випадку дисипативних сил, які лінійно залежать від швидкості, для запису потужності узагальнених сил можна використати представлення сили через дисипативну функцію Релея (11.25). Використовуючи теорему Ейлера, отримаємо:

$$\dot{q}_i \Phi_i = -\dot{q}_i \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = -2D_2 - D_1.$$

тому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} - (2D_2 + D_1).$$

Якщо зв'язки стаціонарні, то $D_1 = 0$ і $\mathcal{E} = E$ і кінетична енергія не залежить від часу, звідки

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} - 2D_2.$$

Енергія у неінерціальній системі відліку. Як і функція Лагранжа, енергія у неінерціальній системі відліку S' включатиме інформацію про рух системи. Нехай у інерціальній системі відліку

$$L = \frac{m\vec{r}^2}{2} - U(\vec{r})$$

(частинка у потенціалі).

Якщо перехід система S' обертається з кутовою швидкістю $\omega(t)$ і початок координат рухається за законом $\vec{R}(t)$, то

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'.$$

\vec{r}' — радіус-вектор частинки у системі S' . За формулою Пуансо:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

де $\vec{v}' = \dot{x}'_i \vec{e}'_i$ — швидкість частинки у системі S' без врахування обертання осей (не є повною похідною по часу). На відміну від схожої формули у механіці абсолютно твердого тіла тут потрібно враховувати зміну компонент радіус-вектора у системі S' .

Легко показати, що функція Лагранжа L' у неінерціальній системі S' буде мати вигляд:

$$L'(\vec{r}', \vec{v}', t) = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}' \cdot [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'] + \frac{m}{2} [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}']^2 - m\vec{r}' \cdot \ddot{\vec{R}}(t) - U(\vec{r}', t),$$

тоді для енергії матимемо:

$$\mathcal{E} = \vec{v}' \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} - L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - \frac{m}{2} [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}']^2 + m\vec{r}' \cdot \ddot{\vec{R}}(t) + U(\vec{r}', t).$$

У найпоширенішому випадку $\omega = \text{const}$, $\ddot{\vec{R}} = 0$ (система рівномірно обертається) і $U \neq U(t)$ енергія зберігається і має вигляд:

$$\mathcal{E}' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - \frac{m}{2}[\vec{\omega} \times \vec{r}']^2 + U,$$

неінерціальність системи проявляється у появі доданку $-\frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$, який називається *відцентровим потенціалом*.

У інерціальній системі координат S , початок якої збігається з початком системи S' , швидкість частинки буде дорівнювати $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, тому у системі S' :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \frac{m\vec{v}'^2}{2} - \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + U = \frac{m}{2}(\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 - \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + U \\ &= \frac{m\vec{v}^2}{2} + U - m\vec{v} \cdot (\vec{r}' \times \vec{\omega}) = \mathcal{E} - m(\vec{r}' \times \vec{v}) \cdot \vec{\omega} = \mathcal{E} - \vec{L} \cdot \vec{\omega}, \end{aligned}$$

у даному випадку, оскільки початки координат збігаються, то $\vec{r} = \vec{r}'$. Остання формула легко узагальнюється на випадок системи частинок.

Задача 12.4. Отримати аналог теореми віріала для системи, що рухається у обмеженій області простору, розглядаючи функцію $\mathcal{V} = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

ЛЕКЦІЯ 13

Приклад: математичний маятник

1. Математичний маятник.	211
2. Сферичний маятник.	213

Як приклад інтегрування рівнянь Лагранжа розглянемо рух математичного маятника — частинки маси m , що підвішена на негнучкому та невагомому стержні, який закріплено у нерухомій точці. Рух відбувається у полі сили тяжіння.

1. МАТЕМАТИЧНИЙ МАЯТНИК.

Приклад 1. Плоский математичний маятник.

◀ Систему координат зображено на рис. 13.1. У декартових координатах $\vec{g} = g\vec{e}_y$ і

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U, \quad U = -m\vec{g} \cdot \vec{r} = -mgy.$$

Зв'язок виражається у незмінності довжини маятника, або відстані від частинки до початку координат:

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

його очевидне використання відповідає переходу до полярних координат¹:

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi$$

кут φ описує відхилення маятника від вертикалі. У нових координатах:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi,$$

задача є одновимірною. Рівняння Лагранжа є нелінійним і має вигляд:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Оскільки у даній системі зберігається енергія, задача інтегрується у квадратурах:

$$\mathcal{E} = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left[\frac{2}{ml^2} (\mathcal{E} + mgl \cos \varphi) \right]^{1/2}}.$$

¹ Зв'язок можна розв'язати і у декартових координатах, виражаючи y через x , тобто $y = \pm \sqrt{l^2 - x^2}$, але функція Лагранжа за такого вибору буде складнішою.

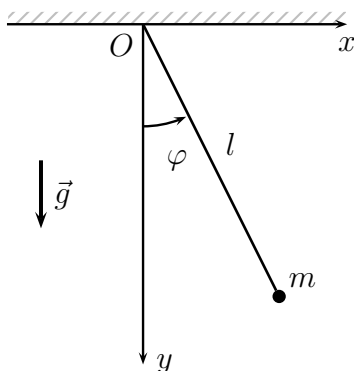


Рис. 13.1. До прикладу 1.

Зауваження. Закон збереження можна отримати безпосередньо, домножуючи обидві частини рівняння руху на $\dot{\varphi}$ і виділяючи повну похідну по часу. \lrcorner

Перейдемо до безрозмірних комбінацій:

$$\omega_0 t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\varepsilon + \cos \varphi)}}, \quad \varepsilon = \frac{\mathcal{E}}{mgl}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Результат обчислення інтегралу залежить від значення ε . Розглянемо окремо випадки $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ та $\varepsilon > 1$.

Випадок $\varepsilon < 1$ (коливальний рух). У такому випадку існує точка повороту $\dot{\varphi} = 0$ і кут φ обмежений максимальним значенням φ_m (його можна знайти з рівняння $\mathcal{E} = U(\varphi_m)$), тому

$$\cos \varphi_m = -\varepsilon.$$

Квадратуру можна перетворити, переходячи до половинних кутів:

$$\omega_0 t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{[2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)]^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{[\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}]^{1/2}}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\varphi_m}{2}.$$

Останній інтеграл зводиться до еліптичного інтегралу першого роду:

$$\begin{aligned} \omega_0 t &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \left| \begin{array}{l} \text{заміна: } \sin \frac{\varphi}{2} = k \sin x \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = k \cos x dx \end{array} \right| = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \\ &= \left(\int_0^x - \int_0^{x_0} \right) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = F(x, k) - F(x_0, k), \end{aligned}$$

де

$$x = \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{k} \right), \quad x_0 = \arcsin \left(\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{k} \right).$$

Для скорочення перепозначимо

$$F(x_0, k) = -\omega_0 t_0$$

(t_0 — стала інтегрування, яка має розмірність часу). Тоді:

$$\omega_0(t - t_0) = F(x, k) \Rightarrow x = \operatorname{am}(\omega_0(t - t_0), k) \Rightarrow \sin x = \operatorname{sn}(\omega_0(t - t_0), k).$$

За означенням, $\sin x = \frac{1}{k} \sin \frac{\varphi}{2}$, тому остаточно:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn}(\omega_0(t - t_0), k) \equiv \sin \frac{\varphi_m}{2} \operatorname{sn}(\omega_0(t - t_0), k).$$

Період коливань можна знайти з властивостей періодичності еліптичних функцій, очевидно $T = 4K(k)/\omega_0$.

Випадок $\varepsilon = 1$, тоді інтеграл обчислюється у класі елементарних функцій:

$$\omega_0 t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi)}} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \ln \operatorname{tg} \left[\frac{\pi + \varphi}{4} \right]_{\varphi_0}^{\varphi} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \varphi}{4} \right) + \omega_0 t_0,$$

де для скорочення введено перепозначення

$$\omega_0 t_0 = -\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \varphi_0}{4} \right).$$

Таким чином,

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} e^{\omega_0(t-t_0)} - \pi.$$

При $t \rightarrow \infty$ кут прямуватиме до значення $\varphi_{\infty} = \pi$, частинка буде зупинятись у точці максимального підйому маятника (положення нестійкої рівноваги).

Випадок $\varepsilon > 1$, тоді точка повороту відсутня і інтеграл одразу зводиться до еліптичного інтегралу переходом до половинного кута:

$$\omega_0 t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\varepsilon + \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{1}{2(1 + \varepsilon)}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2}{\varepsilon+1} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon}} \left[F\left(\frac{\varphi}{2}, k\right) - F\left(\frac{\varphi_0}{2}, k\right) \right].$$

Вводячи змінну t_0 ,

$$\omega_0 t_0 = -F\left(\frac{\varphi_0}{2}, k\right),$$

отримаємо:

$$\omega_0(t - t_0) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + 1}} F\left(\frac{\varphi}{2}, k\right) \equiv k F\left(\frac{\varphi}{2}, k\right) \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_0}{k}(t - t_0), k\right).$$

Період обертання:

$$T = \frac{4K(k)}{\omega_0},$$

тут $K(k)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду (рух інфінітний, але просторове положення повторюється з часом для кутів φ , що відрізняються на 2π).

У результаті, залежність $\varphi(t)$ має вигляд:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(\omega_0(t - t_0), k)] , & \varepsilon < 1, \quad k = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \\ \varphi = 4 \operatorname{arctg} e^{\omega_0(t-t_0)} - \pi, & \varepsilon = 1, \\ 2 \arcsin [\operatorname{sn}(\frac{\omega_0}{k}(t - t_0), k)] , & \varepsilon > 1, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon+1}} \end{cases}$$

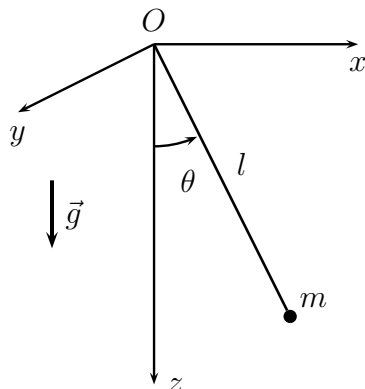


Рис. 13.2. До прикладу 2.

Дослідження поведінки розв'язків при $k \rightarrow 0$ та $k \rightarrow 1$ залишається як вправа для читача. ►

2. СФЕРИЧНИЙ МАЯТНИК.

Приклад 2. Сферичний маятник.

◀ Систему координат зображено на рис. 13.2. У декартових координатах

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz.$$

Зв'язок $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ зручно записати у сферичних координатах, де він має простий вигляд $r = l$, узагальненими координатами будуть кути θ та φ (дві ступені вільності), закон перетворення координат має вигляд:

$$x = l \sin \theta \cos \varphi, \quad y = l \sin \theta \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta.$$

Використовуючи вираз для кінетичної енергії у сферичних координатах, знайдемо:

$$L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \theta.$$

Рівняння Лагранжа:

$$\text{для } \theta: \quad ml^2 \ddot{\theta} = ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - mgl \sin \theta,$$

$$\text{для } \varphi: \quad \frac{d}{dt} (ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$$

Координата φ є циклічною і відповідне рівняння Лагранжа вироджується у закон збереження імпульсу:

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{const}.$$

Завдяки закону збереження швидкість $\dot{\varphi}$ можна виключити з рівняння руху для координати θ . Підставляючи

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2 \sin^2 \theta}$$

до рівняння руху, отримаємо:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \left(\frac{p_{\varphi}}{ml^2} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

(нелінійне рівняння).

Задача інтегрується у квадратурах, оскільки на дві ступені вільності є два закони збереження — імпульсу та енергії. Для отримання розв'язку у квадратурах використаємо інтеграл енергії:

$$\mathcal{E} = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta.$$

Виключаючи швидкість $\dot{\varphi}$ із закону збереження імпульсу, матимемо остаточний вираз:

$$\mathcal{E} = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \quad (13.1)$$

(ефективний потенціал можна ввести за аналогією із задачею про обертання).

Виражаючи з (13.1) швидкість $\dot{\theta}$ і відокремлюючи змінні, одержимо квадратурну формулу:

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} (\mathcal{E} - U_{eff}(\theta))}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left[\frac{2}{ml^2} \left(\mathcal{E} - \frac{p_{\varphi}^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \right) \right]^{1/2}}.$$

Виділяючи частоту $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, перепишемо інтеграл у вигляді

$$\omega_0 t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left[2 \left(\frac{\mathcal{E}}{mgl} - \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 gl^3 \sin^2 \theta} + \cos \theta \right) \right]^{1/2}}.$$

Означимо безрозмірні комбінації енергії та квадрату імпульсу:

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}}{mgl}, \quad \lambda^2 = \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 gl^3},$$

тоді

$$\omega_0 t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{[2(\varepsilon + \cos \theta) \sin^2 \theta - \lambda^2]^{1/2}} = \left| \begin{array}{l} \text{заміна:} \\ x = \cos \theta, \\ x_0 = \cos \theta_0 \end{array} \right| = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{[2(x + \varepsilon)(1 - x^2) - \lambda^2]^{1/2}}.$$

Інтеграл у правій частині не виражається через елементарні функції, але зводиться до еліптичних. Розглянемо попередню структуру підкореневого виразу. За теоремою Вієта

$$2(x + \varepsilon)(1 - x^2) - \lambda^2 = -2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

де x_1 , x_2 та x_3 — корені кубічного полінома. Залежно від значення коефіцієнтів поліном може мати або три дійсні корені, або один дійсний та два комплексних. Для з'ясування ситуації побудуємо графік підкореневого виразу у два етапи: спочатку побудуємо графік функції $f(x) = 2(x + \varepsilon)(1 - x^2)$, а потім віднімемо від неї λ^2 (що відповідає вертикальному зміщенню вниз на λ^2).

Функція $f(x) = 2(x + \varepsilon)(1 - x^2)$ має три дійсні корені $(-\varepsilon)$, (-1) та 1 , розташування яких залежить від значення ε . Зауважимо, що значенню $x = 1$ відповідає $\theta = 0$, а $x = -1$ відповідно $\theta = \pi$. Екстремуми функції $f(x)$ розташовані у точках

$$x_{ext} = \frac{\pm \sqrt{\varepsilon^2 + 1} - \varepsilon}{3}.$$

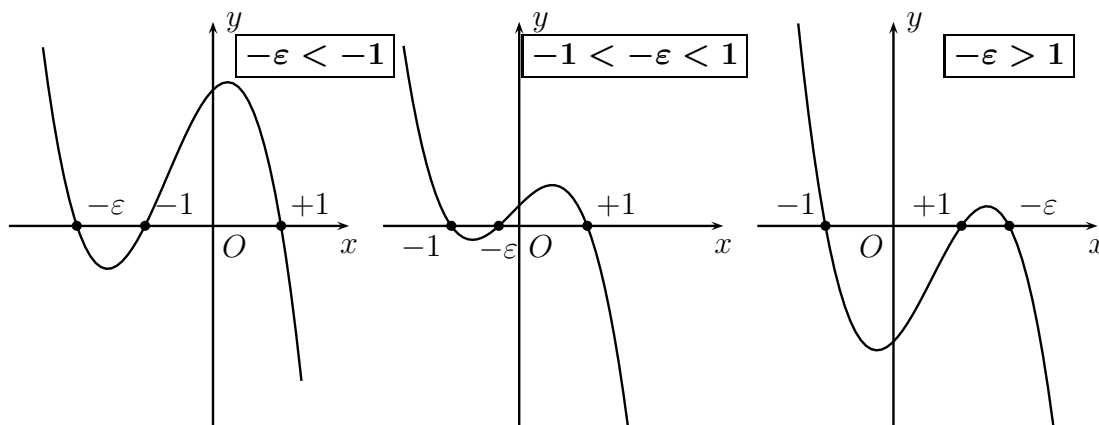


Рис. 13.3. Функція $f(x) = 2(x + \varepsilon)(1 - x^2)$ за різних значень ε .

Рух можливий в областях, де підінтегральний вираз додатний, тобто $f(x) - \lambda^2 > 0$. Для випадків $\varepsilon > 1$ та $-1 < \varepsilon < 1$ така область може бути одна, на інтервалі $-1 < x < 1$ (згідно з виконаною заміною $x = \cos \theta$), при $\varepsilon < -1$ області, можливої для руху не існує. Після віднімання λ^2 корені полінома зміщуватимуться праворуч чи ліворуч залежно від значення ε . Якщо величина λ^2 перевищує максимальне значення $f(x)$ на інтервалі $[-1, 1]$, то корені $f(x)$, розташовані у цій області, перейдуть у комплексні корені функції $f(x) - \lambda^2$ і області, можливої для руху, не буде.

Вважатимемо, що корені функції $f(x) - \lambda^2$ відомі і впорядковані за значеннями як

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Очевидно, що $x_1 < -1$, $x_{2,3} \in [-1, 1]$ і для деякого значення λ можливий випадок виродження $x_2 = x_3$. Перейдемо у інтегралі

$$\omega_0 t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{-2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}$$

до нової змінної

$$x = x_2 + (x_3 - x_2) \sin^2 \varphi, \quad dx = 2(x_3 - x_2) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad \text{інтервал: } [x_0, x] \rightarrow [\varphi_0, \varphi],$$

яка дозволяє позбавитись від двох радикалів з трьох.

Зауваження. Це стандартна заміна у випадку, коли потрібно потрібно позбавитись від радикалу у виразі

$$R(x) = \sqrt{(x - a)(x - b)} = \sqrt{x - a} \cdot \sqrt{x - b}, \quad \text{для визначеності вважатимемо } b > a.$$

Робиться підстановка $x = A + By^2$. У першому множнику радикал зникатиме при виборі $A = a$:

$$R(y) = y \sqrt{-B(a + By^2 - b)} = y \sqrt{B(b - a) - B^2 y^2}.$$

Щоб позбавитись від радикалу у другому множнику, покладемо $B = b - a$ і перейдемо до нової змінної $y = \sin \varphi$ і скористаємось основною тригонометричною тотожністю:

$$R(\varphi) = (b - a) \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \equiv (b - a) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Для інших знаків x у виразі $R(x)$ виконується заміна за допомогою гіперболічних функцій. ┘

Інтеграл набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\omega_0 t &= - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{2(x_3 - x_2) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(-2)[x_2 - x_1 + (x_3 - x_2) \sin^2 \varphi] \cdot [(x_3 - x_2) \sin^2 \varphi] \cdot [(x_2 - x_3) + (x_3 - x_2) \sin^2 \varphi]}} \\ &= -\sqrt{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \sin^2 \varphi}} = -\frac{1}{\beta} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},\end{aligned}$$

де

$$\beta = \sqrt{\frac{x_2 - x_1}{2}}, \quad k^2 = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}.$$

Очевидно, $k^2 < 1$ (у силу вибраного впорядкування коренів). Таким чином, квадратура виражається через еліптичні інтеграли першого роду:

$$\beta \omega_0 t = F(\varphi_0, k) - F(\varphi, k).$$

Перепозначаючи для скорочення сталу інтегрування через

$$F(\varphi_0, k) = \beta \omega_0 t_0,$$

отримаємо

$$F(\varphi, k) = -\beta \omega_0 (t - t_0) \Rightarrow \varphi = -\operatorname{am}(\beta \omega_0 (t - t_0), k) \Rightarrow \sin \varphi = -\operatorname{sn}(\beta \omega_0 (t - t_0), k),$$

де $\operatorname{am}(\dots)$ — амплітуда Якобі (див. додаток). Повертаючись до зонального кута θ , отримаємо остаточний розв'язок:

$$\cos \theta = x = x_2 + (x_3 - x_2) \sin^2 \varphi = x_2 + (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2[\beta \omega_0 (t - t_0), k].$$

Період руху по змінній θ виражається через повний еліптичний інтеграл першого роду і буде дорівнювати

$$T_\theta = \frac{4K(k)}{\omega \beta}.$$

Залежність кута φ від часу описується інтегралом, який випливає з закону збереження узагальненого імпульса p_φ :

$$\varphi = \frac{p_\varphi}{ml^2} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\sin^2 \theta(t)}.$$

Якщо періоди T_θ та T_φ співрозмірні, то траєкторія руху буде замкненою кривою.

Розглянемо якісно характер руху маятника. Еліптичний синус набуває значень у інтервалі $[-1, 1]$, тому $\cos \theta \in [x_2, x_3]$, причому $-1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$ для $\varepsilon < -1$, та $-\varepsilon \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$ при $-1 < \varepsilon < 1$ (граничні значення можливі тільки у випадку $p_\varphi = 0$). Частинка осцилює між значеннями кута $\theta = \theta_1$ та $\theta = \theta_2$ (рис. 13.4), траєкторія буде колом при $\theta_1 = \theta_2$. При цьому частинка обертається навколо вертикальної осі із кутовою швидкістю $\dot{\varphi}$, яка набуває максимального та мінімального значення у точках повороту $\theta_{1,2}$. ►

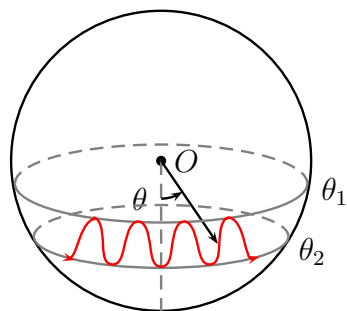


Рис. 13.4. Трасекторія маятника.

ЛЕКЦІЯ 14

Рівняння Лагранжа для абсолютно твердого тіла. Рух дзиги

-
- | | | |
|----|---|-----|
| 1. | Побудова функції Лагранжа для абсолютно твердого тіла. | 219 |
| 2. | Рух дзиги із нерухомою точкою опори. | 224 |
-

1. ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА.

Абсолютно тверде тіло є частинним випадком системи матеріальних точок, тому функція Лагранжа будується за тим же правилом, що й раніше:

$$L = T - U,$$

зв'язки, які входять до формулювання моделі АТТ, вже враховано у виразах для кінетичної та потенціальної енергій.

Функція Лагранжа набуває порівняно простого вигляду, якщо полюс вибрано у центрі мас АТТ і базисні вектори власної системи координат АТТ напрямлені вздовж головних напрямків тензору інерції. Тоді

$$L = T_{\parallel} + T_{\circ} - U, \quad T_{\parallel} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_C^2, \quad T_{\circ} = \frac{1}{2} I'_{\alpha\beta} \omega'_{\alpha} \omega'_{\beta}. \quad (14.1)$$

Доданок кінетичної енергії обертального руху T_{\circ} у більшості випадків зручно записувати у власній системі координат, де тензор інерції має сталі компоненти. Оскільки T_{\circ} є скаляром, то у лабораторній системі формула для T_{\circ} буде аналогічною (без штрихів $I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}(t)$).

Функція Лагранжа залежить від 6-ти ступенів вільності — три з них є поступальними (координати центру мас \vec{R}_C), інші три — орієнтаційні (як правило, кути Ейлера, або еквівалентні величини).

Зауваження. Для суто обертального руху без зв'язків функція Лагранжа у власній системі координат з головними осями має вигляд:

$$L = \frac{1}{2} (I'_1 \omega_1'^2 + I'_2 \omega_2'^2 + I'_3 \omega_3'^2) - U(\theta, \varphi, \psi).$$

Запишемо рівняння Лагранжа для узагальненої координати ψ . Маємо:

$$p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I'_1 \omega_1' \frac{\partial \omega_1'}{\partial \dot{\psi}} + I'_2 \omega_2' \frac{\partial \omega_2'}{\partial \dot{\psi}} + I'_3 \omega_3' \frac{\partial \omega_3'}{\partial \dot{\psi}},$$

та

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = I'_1 \omega_1' \frac{\partial \omega_1'}{\partial \psi} + I'_2 \omega_2' \frac{\partial \omega_2'}{\partial \psi} + I'_3 \omega_3' \frac{\partial \omega_3'}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \psi}.$$

Оскільки з динамічних рівнянь Ейлера випливає, що

$$\frac{\partial \omega'_1}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \omega'_2}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega'_3}{\partial \dot{\psi}} = 1$$

та

$$\frac{\partial \omega'_1}{\partial \psi} = \omega'_2, \quad \frac{\partial \omega'_2}{\partial \psi} = -\omega'_1, \quad \frac{\partial \omega'_3}{\partial \psi} = 0,$$

то рівняння Лагранжа за формою збігатиметься з рівняннями Ейлера:

$$I'_3 \dot{\omega}'_3 + (I'_2 - I'_1) \omega'_1 \omega'_2 = -\frac{\partial U}{\partial \psi},$$

у правій частині з'являється момент сил N'_z відносно осі z' .

Рівняння Лагранжа для кутів θ та φ не збігатимуться з іншими рівняннями Ейлера, оскільки відповідні цим кутам осі не є головними (а саме — це вісь z та лінія вузлів), а компоненти кутової швидкості не є узагальненими швидкостями. Рівняння Ейлера можна отримати циклічними перестановками індексів $(1, 2, 3)$ (що дає моменти N'_x та N'_y у правих частинах). \perp

Для повної побудови функції Лагранжа потрібно розглянути обмеження на рух АТТ, які не зводяться зв'язків, закладених у самій моделі АТТ. Новим, порівняно з механікою системи матеріальних точок, є розбиття можливих зв'язків на два класи:

- *геометричні* обмеження, які відповідають руху по деякій поверхні, тощо. Як правило, це голономні зв'язки на координати центру мас (тобто тільки на поступальні ступені вільності);
- *кінематичні та фізичні* обмеження, які описують спосіб руху АТТ по обмежувчій поверхні і виражають умови контакту. Досить поширеними є випадки, коли такі обмеження описуються неголономними зв'язками, у яких фігурують поступальні та орієнтаційні координати.

Схема побудови функції Лагранжа може бути описана такою послідовністю дій:

- 1) *записати $L = T_{\parallel} + T_{\odot} - U$ у зручних (як правило, декартових) координатах, вибираючи інерціальну систему відліку спостерігача (пов'язану з нерухомою точкою); доданок T_{\odot} доцільно записати у власній системі координат (де компоненти тензора інерції стали), кутову швидкість можна виразити через кути Ейлера за допомогою кінематичних рівнянь (на даному етапі не обов'язково);*
- 2) *записати геометричні зв'язки типу $f(\vec{R}_C, t) = 0$ на положення центру мас (якщо вони є), вибрати узагальнені координати для поступальних ступенів вільності;*
- 3) *записати умови контакту для руху без проковзування (якщо є). В умовах контакту компоненти кутової швидкості зручно записувати у системі спостерігача (оскільки в ній задано швидкість центру мас). Якщо зв'язки інтегровні, виразити залежні координати;*
- 4) *записати функцію Лагранжа в незалежних координатах.*

Зауваження. Якщо орієнтаційні координати фігурують у функції Лагранжа тільки у доданку T_{\odot} , то з рівнянь зв'язків доцільно виражати не кути, а кутові швидкості. ┘

Зауваження. Зауважимо, що кінетичну енергію доцільно записувати за допомогою компонент кутової швидкості у власній системі координат (оскільки компоненти тензора інерції у ній не залежать від часу). Однак в умові контакту компоненти кутової швидкості слід записувати у лабораторній системі координат, оскільки в цій умові фігурують компоненти швидкості полюса. Це вносить додаткові ускладнення під час аналізу зв'язків. ┘

Приклад 1. Записати функцію Лагранжа для однорідного циліндру радіуса a та маси m , що котиться без проковзування по внутрішній стороні нерухомої циліндричної поверхні радіуса R у полі сили тяжіння.

◀ Систему координат наведено на рис. 14.1. Рух, очевидно, буде плоским, тому введемо тільки дві координати центру мас (x_C, y_C) .

Функція Лагранжа без урахування зв'язків:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{I\omega^2}{2} + mgy_C,$$

де I — головний момент інерції відносно осі обертання, що збігається з віссю симетрії z .

Геометричний зв'язок: відстань від C до початку координат завжди дорівнює $R - a$, або

$$x_C^2 + y_C^2 = (R - a)^2 \Rightarrow x_C = (R - a) \sin \varphi, \quad y_C = (R - a) \cos \varphi,$$

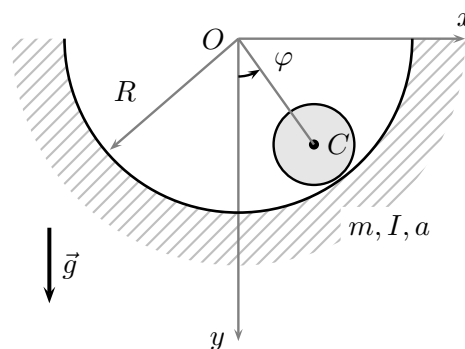


Рис. 14.1. До прикладу 1.

де кут φ є поступальною координатою і має простий геометричний зміст (очевидно з рис. 14.1).

Умова контакту із нерухомою поверхнею:

$$\dot{\vec{R}}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{CS} = 0$$

Оскільки у вибраній системі координат $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\vec{\rho}_{CS} = (a \sin \varphi, a \cos \varphi, 0)$, то у розгорнутій формі умова контакту буде мати вигляд:

$$(R - a)\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_x - (R - a)\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_y + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ a \sin \varphi & a \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник і проектуючи отримане співвідношення на осі системи координат спостерігача, отримаємо:

$$a\omega = (R - a)\dot{\varphi} \Rightarrow \omega = \frac{R - a}{a} \dot{\varphi}.$$

Очевидно, такий зв'язок є інтегровним, оскільки ω є похідною кута, що задає орієнтацію власної системи координат (на рисунку її не зображено). Однак орієнтаційні ступені

вільності фігурують тільки комбінації з кутовою швидкістю, тому з функції Лагранжа можна просто виключити ω :

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2} \left(\frac{R-a}{a} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + mg(R-a) \cos \varphi \\ &= \frac{m(R-a)^2}{2} \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right) \dot{\varphi}^2 + mg(R-a) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Формально цей вираз схожий на функцію Лагранжа у задачі про одновимірний математичний маятник. ►

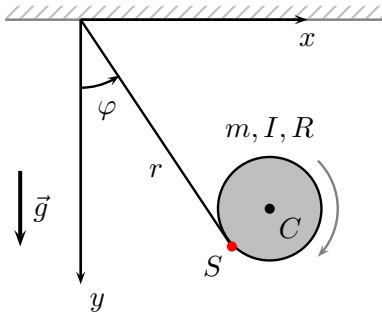
Наступний приклад ілюструє менш тривіальну умову контакту (явно вказаної поверхні тут немає).

Приклад 2. Однорідний диск радіуса a та маси m , на який намотано невагому та нерозтяжну нитку, падає у полі сили тяжіння, залишаючись у вертикальній площині. Вільний кінець нитки закріплено у нерухомій точці. Записати функцію Лагранжа для такої системи.

◀ Виберемо початок координат у точці кріплення нитки (рис. 14.2). Кінетична та потенціальна енергії для полюсу у центрі мас мають вигляд:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{I\omega^2}{2}, \quad U = -mgy_C.$$

Момент інерції відносно осі обертання вважатимемо відомим. Геометричних зв'язків у даній задачі немає, тому поступальні координати можна вибрати довільним чином. Оскільки доведеться враховувати факт натягнутої нитки, виразимо координати центру мас диска через полярні координати (r, φ) точки нитки, яка у даний момент часу відривається від диска:



$$\begin{aligned} x_C &= r \sin \varphi + R \cos \varphi, \\ y_C &= r \cos \varphi - R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тепер запишемо умову контакту, яка полягає у тому, що точка нитки S , яка у даний момент часу відірветься від диска має таку ж швидкість, що і та сама точка на диску. Для точки диска використовуємо формулу Пуансо:

$$[\dot{\vec{r}}_S]_{\text{диск}} = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{y}_C \vec{e}_y + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CS}.$$

Рис. 14.2. До прикладу 2

Якщо говорити про швидкість точки S як точки нитки, то тут потрібно врахувати нерозтяжність. Всі точки, які належать змотаній частині нитки рухаються по колам. Тому під час запису швидкості точки нитки S потрібно зафіксувати відстань r від неї до точки кріплення нитки:

$$[\dot{\vec{r}}_S]_{\text{нитка}} = r \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_x - r \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_y.$$

залишається прирівняти ці вирази, врахувати, що $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, підставити проекції вектора \vec{r}_{CS} та виконати необхідні диференціювання координат центру мас. У результаті отримаємо вираз для кутової швидкості:

$$\omega = \frac{\dot{r}}{R} - \dot{\varphi}.$$

Цей результат можна отримати і за допомогою поняття миттєвої осі обертання, перший доданок описує внесок до кутової швидкості обертання самого тиску відносно власної осі, а другий описує обертання цієї осі у просторі (разом із зміною кута нахилу нитки).

Підстановка до функції Лагранжа дає:

$$L = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + (r^2 + R^2)\dot{\varphi}^2 + 2rR\dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi] + \frac{I}{2} \left(\frac{\dot{r}}{R} - \dot{\varphi} \right)^2 + mg(r \cos \varphi - R \sin \varphi)$$

У даній задачі зберігається енергія, однак циклічних координат немає, тому задача у квадратурах не інтегрується. ►

У останньому простому прикладі вибір узагальнених координат стає зрозумілим після попереднього геометричного аналізу.

Приклад 3. Однорідний диск радіуса R та маси m , котиться без проковзування по нерухомій параболі $y = \frac{x^2}{2a}$ у полі сили тяжіння, залишаючись у вертикальній площині (рух вважатимемо двовимірним). Записати функцію Лагранжа для такої системи.

◀ Систему координат фіксовано рівнянням параболи (рис. 14.3). Кінетична та потенціальна енергії мають вигляд:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad U = mgy_C.$$

Запишемо геометричну умову контакту, яка полягає у тому, що точка контакту S належить параболі, тобто її координати мають задовольняти рівняння

$$y_S = \frac{x_S^2}{2a}.$$

Це має бути єдина спільна точка параболи та диска, тобто це точка дотику кривих. Це означає, що диск та параболі мають спільну дотичну, кут нахилу якої легко визначити диференціюванням, що дає $\tan \varphi = \frac{x_S}{a}$. Тому координати точки S можна виразити через кут нахилу дотичної:

$$x_S = a \tan \varphi, \quad y_S = \frac{a}{2} \tan^2 \varphi.$$

Відрізок CS перпендикулярний до дотичної, має довжину R і нахилений до вертикалі на кут φ . тому координати центру мас можна виразити через проекції цього відрізка та координати точки S . Таким чином, узагальненою поступальною координатою буде кут φ :

$$x_C = a \tan \varphi + R \sin \varphi, \quad y_C = \frac{a}{2} \tan^2 \varphi - R \cos \varphi.$$

Умова контакту у цій задачі стандартна і полягає у вимозі нерухомості точки S у даний момент часу. За формулою Пуансо матимемо:

$$0 = \dot{x}_C \vec{e}_x + \dot{y}_C \vec{e}_y + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CS},$$

оскільки $\vec{r}_{CS} = R \sin \varphi \vec{e}_x - R \cos \varphi \vec{e}_y$ і $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, то після простих обчислень отримаємо:

$$\omega = \dot{\varphi} \left(1 + \frac{a}{R \cos^3 \varphi} \right).$$

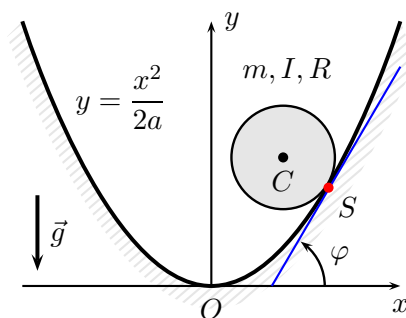


Рис. 14.3. До прикладу 3.

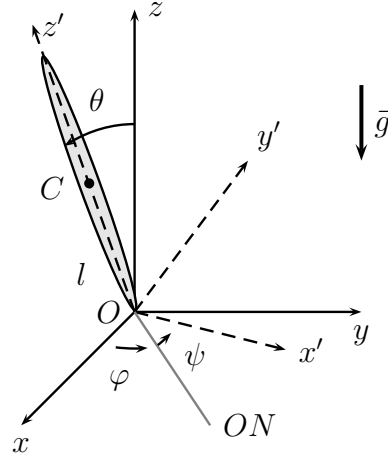


Рис. 14.4. Обертання дзиги із нерухомою точкою опори.

Підстановка до функції Лагранжа дає:

$$L = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} \left(1 + \frac{a}{R\cos^3\varphi}\right)^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) + mg \left(\frac{a}{2}\operatorname{tg}^2\varphi - R\cos\varphi\right).$$

У даній задачі зберігається енергія і існує розв'язок у квадратурах. За деяких умов (достатньо малого радіуса диска) можливі малі коливання. ►

2. Рух дзиги із нерухомою точкою опори. Розглянемо абсолютно тверде тіло з віссю симетрії (симетричний гіроскоп або *дзига*), у якого два з трьох головних моменту інерції однакові, для визначеності нехай $I_1 = I_2$. Розмістимо цей гіроскоп в полі сил тяжіння так, що один з його кінців уздовж осі z' (вістря) є нерухомим (рис. 14.4). Центр мас не збігається з полюсом, однак оскільки полюс нерухомий, його можна обрати за початок координат інерціальної системи відліку.

У власній системі координат, початок якої розташований у центрі мас, а осі напрямлені вздовж головних напрямків інерції тензор інерції є діагональним і має вигляд:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Якщо перейти до полюса у початку координат, то згідно з теоремою Штейнера компоненти тензору інерції зміняться за законом:

$$\hat{I} \rightarrow \hat{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_1 + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

де l — відстань від початку координат (полюсу) до центру мас. Отже, для такого способу вибору полюсу тензор інерції залишається діагональним.

Запишемо функцію Лагранжа для такої системи. Полюс є нерухомим за умовою, тому кінетична енергія зводиться до доданку, що описує обертання:

$$T = T_{\odot} = \frac{1}{2} (\bar{I}_1\omega_1'^2 + \bar{I}_1\omega_2'^2 + \bar{I}_3\omega_3'^2).$$

Підстановка кінематичних рівнянь Ейлера у власній системі

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega'_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega'_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

дає

$$T_{\odot} = \frac{1}{2} [\bar{I}_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \bar{I}_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2].$$

Потенціальна енергія у полі сили тяжіння має вигляд $U = -m\vec{g} \cdot \vec{l}$, де \vec{l} — радіус-вектор центру мас відносно початку координат. Беручи до уваги той факт, що центр мас належить осі Oz' (вісь симетрії), отримаємо остаточно:

$$L = T_{\odot} - U = \frac{1}{2} [\bar{I}_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \bar{I}_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2] - mgl \cos \theta. \quad (14.2)$$

Зауваження. Вираз (14.2) у загальних рисах нагадує функцію Лагранжа для сферичного маятника. \lrcorner

Із формули (14.2) видно, що координати ψ та φ є циклічними і приводять до збереження імпульсів:

$$\begin{aligned}p_{\psi} &= \bar{I}_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const}, \\ p_{\varphi} &= \bar{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \bar{I}_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \equiv \bar{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_{\psi} \cos \theta = \text{const}.\end{aligned} \quad (14.3)$$

Крім того, функція Лагранжа не залежить від часу, тому має місце закон збереження енергії:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{\psi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - L \\ &= \frac{1}{2} [\bar{I}_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \bar{I}_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2] + mgl \cos \theta = \text{const}.\end{aligned} \quad (14.4)$$

Наявність двох циклічних координат та інтегралу енергії у системі з трьома ступенями вільності означає, що задача допускає розв'язок у квадратурах без явного використання рівнянь руху.

Для отримання двох квадратурних формул виразимо швидкості $\dot{\varphi}$ та $\dot{\psi}$ через імпульси із формул (14.3):

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_{\psi}}{\bar{I}_3} - \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{p_{\psi}}{\bar{I}_3} - \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (14.5)$$

Тоді

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} dt, \quad \psi = \psi_0 + \int \left[\frac{p_{\psi}}{\bar{I}_3} - \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \right] dt,$$

де φ_0 та ψ_0 — ще дві сталі інтегрування, окрім p_{φ} , p_{ψ} та \mathcal{E} .

Підстановка швидкостей до формули для енергії після нескладних перетворень дає:

$$\mathcal{E} = \frac{\bar{I}_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2\bar{I}_3} + mgl \cos \theta, \quad (14.6)$$

доданок з імпульсом p_ψ є сталим. Формально такий вираз збігається із законом збереження енергії для одновимірного руху з координатою θ у деякому ефективному потенціалі. Перш ніж записувати квадратурну формулу, перейдемо до безрозмірних комбінацій, об'єднавши деякі доданки та поділивши обидві частини рівності на mgl :

$$\frac{1}{mgl} \left(\mathcal{E} - \frac{p_\psi^2}{2\bar{I}_3} \right) = \frac{\bar{I}_1}{2mgl} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2mgl \bar{I}_1 \sin^2 \theta}$$

Позначимо

$$\varepsilon = \frac{1}{mgl} \left(\mathcal{E} - \frac{p_\psi^2}{2\bar{I}_3} \right), \quad \mathcal{P}_\varphi = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2mgl \bar{I}_1}}, \quad \mathcal{P}_\psi = \frac{p_\psi}{\sqrt{2mgl \bar{I}_1}},$$

де ε — безрозмірна енергія, а \mathcal{P}_ψ та \mathcal{P}_φ — безрозмірні імпульси. Тоді

$$\varepsilon = \frac{\bar{I}_1}{2mgl} \dot{\theta}^2 + \cos \theta + \frac{(\mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\psi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{\bar{I}_1}{2mgl} \dot{\theta}^2 + u_{eff}(\theta).$$

Виражаючи з останнього рівняння швидкість $\dot{\theta}$, відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо:

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2mgl}{\bar{I}_1} [\varepsilon - u_{eff}(\theta)]}} = \sqrt{\frac{\bar{I}_1}{2mgl}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(\varepsilon - \cos \theta) \sin^2 \theta - (\mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\psi \cos \theta)^2}},$$

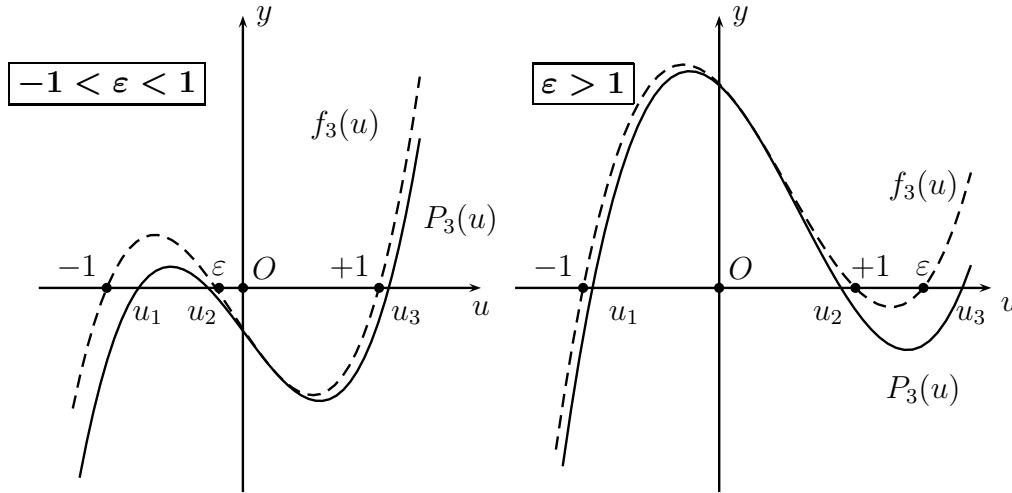
нижня межа θ_0 замінює адитивну сталу інтегрування. Переходячи у інтегралі до нової змінної $u = \cos \theta$, матимемо:

$$\sqrt{\frac{2mgl}{\bar{I}_1}} t = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{P_3(u)}}, \quad P_3(u) = (\varepsilon - u)(1 - u^2) - (\mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\psi u)^2, \quad (14.7)$$

де $u_0 = \cos \theta_0$. У підінтегральному виразі фігурує корінь з поліному третього порядку — це автоматично означає, що у загальному випадку цей інтеграл виражатиметься через еліптичні функції.

Для зведення інтегралу (14.7) до стандартної форми розкладемо поліном $P_3(u)$ на множники за теоремою Вієта. Для цього можна скористатись формулами Кардано, але у нашому випадку відповідь буде досить громіздкою і малоінформативною. Тому доцільніше якісно дослідити поведінку функції $P_3(u)$ і визначити характер розташування коренів, вважаючи, що явні вирази для них завжди можна записати. Підкреслимо, що потрібно звернути увагу на два фактори:

- змінна u за своїм походженням є тригонометричною функцією $\cos \theta$. Межі в інтегралі належать інтервалу $[-1, 1]$;

Рис. 14.5. Функції $f_3(u)$ та $P_3(u)$ для різних значень ε .

- для допустимих значень u (з області між межами інтегрування) $P_3(u)$ повинен набувати невід'ємних значень, тому що результат інтегрування — дійсна величина (час).

Для побудови графіку $P_3(u)$ відмітимо, що він є різницею двох функцій:

$$P_3(u) = (\varepsilon - u)(1 - u^2) - (\mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\psi u)^2 = f_3(u) - (\mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\psi u)^2.$$

причому $f_3(u)$ є поліномом 3-го порядку з коренями ± 1 та ε . Залежно від значення енергії ε можливі три способи впорядкування коренів $f_3(u)$: $\varepsilon < -1$, $-1 < \varepsilon < 1$ та $\varepsilon > 1$.

Для побудови $P_3(u)$ від функції $f_3(u)$ віднімаємо квадрат лінійної функції, тому всі точки графіка $f_3(u)$ зміщуватимуться вниз і тільки одна точка $u^* = \frac{\mathcal{P}_\varphi}{\mathcal{P}_\psi}$ залишиться нерухомою (в ній $(\mathcal{P}_\varphi - \mathcal{P}_\psi u)^2 = 0$). Очевидно, корені $f_3(u)$ також змістяться. У випадку $\varepsilon < -1$ як функція $f_3(u)$, так і $P_3(u)$ набувають від'ємних значень для $u \in [-1, 1]$, тому такі значення ε виключаємо.

Оскільки на кінцях інтервалу $[-1, +1]$ значення полінома $P_3(u)$ від'ємні,

$$P_3(\pm 1) = -(\mathcal{P}_\varphi \mp \mathcal{P}_\psi)^2,$$

то на цьому інтервалі або існує два корені $P_3(u)$ (які можуть збігатися), або немає жодного. У останньому випадку поліном на цьому інтервалі всюди від'ємний, що суперечить фізичному змісту розв'язку (час виходить комплексним).

При $u \gg 1$ буде $P_3(u) > 0$, і значення полінома P_3 на кінцях інтервалу $[1, +\infty[$ мають різні знаки, тому в цій області функція $P_3(u)$ завжди матиме корінь. Випадок $-1 < \varepsilon < 1$ показано на рис. 14.5, де $u^* \in [-1, 0]$.

Зауваження. Якщо $f_3(u) > 0$ у деякій області на інтервалі $[-1, 1]$, то якщо u^* належить цій області, то гарантовано буде існувати область $P_3(u) > 0$ у деякому околі точки u^* . ┘

Таким чином,

рух дзиги буде можливим, якщо початкові умови вибрано так, що існує два корені $u_{1,2}$ полінома $P_3(u)$ на інтервалі $[-1, 1]$ (корінь $u_3 > 1$ існує завжди), для $u \in [u_1, u_2]$ значення полінома $P_3(u) > 0$. У такому випадку $\varepsilon > -1$ і на величини \mathcal{P}_φ та \mathcal{P}_ψ накладено деякі обмеження.

Упорядкуємо корені $P_3(u)$ у порядку зростання:

$$u_1 \leq u_2 < u_3, \quad u_{1,2} \in [-1, 1], \quad u_3 \in [1, +\infty[,$$

і запишемо квадратуру (14.7) за допомогою теореми Вієта у вигляді

$$\sqrt{\frac{2mgl}{\bar{I}_1}} t = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}}.$$

У знаменнику фігурує три радикали (за кількістю множників). Для перетворення такого інтегралу до стандартної форми еліптичного інтегралу першого роду потрібно вибрати таку підстановку, щоб частина з них зникла — у стандартній формі запису еліптичного інтегралу через тригонометричні функції у знаменнику фігурує тільки один радикал.

Розглянемо заміну $u = A + B \sin^2 \xi$, де ξ — нова змінна, а A та B — сталі, значення яких підбираємо для спрощення виразу. Різниці $u - u_1$ та $u - u_2$ будуть точними квадратами, якщо:

$$\begin{aligned} u - u_1 &= A + B \sin^2 \xi - u_1 = \left| \begin{array}{l} \text{покладаємо} \\ A = u_1 \end{array} \right| = B \sin^2 \xi, \\ u - u_2 &= u_1 + B \sin^2 \xi - u_2 = \left| \begin{array}{l} \text{покладаємо} \\ B = u_2 - u_1 \end{array} \right| = -B \cos^2 \xi, \end{aligned}$$

тому, покладаючи $u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \xi$, отримаємо:

$$u - u_1 = (u_2 - u_1) \sin^2 \xi, \quad u - u_2 = -(u_2 - u_1) \cos^2 \xi, \quad u - u_3 = u_1 - u_3 + (u_2 - u_1) \sin^2 \xi,$$

Зауваження. Є сенс перетворювати тільки радикали з $u - u_1$ та $u - u_2$. У області $[u_1, u_2] \subset [-1, 1]$ вираз під коренем додатний, тому межі інтегрування мають їй належати. У результаті заміни для довільного ξ матиме місце $u(\xi) \in [u_1, u_2]$. \square

Таким чином, беручи до уваги, що $du = 2 \sin \xi \cos \xi d\xi$, отримаємо:

$$\sqrt{\frac{mgl}{2\bar{I}_1}} t = - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{u_3 - u_1 - (u_2 - u_1) \sin^2 \xi}} = - \frac{1}{\sqrt{u_3 - u_1}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}},$$

де для вибраного впорядкування коренів параметр еліптичного інтегралу задовольняє умову

$$0 \leq k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} < 1$$

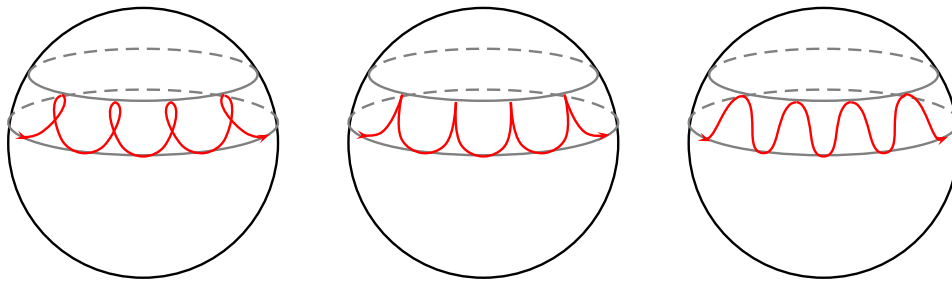


Рис. 14.6. Різні випадки руху дзиги.

Розбиваючи область інтегрування $[\xi_0, \xi]$ точкою 0, маємо:

$$\sqrt{\frac{mgl(u_3 - u_1)}{2\bar{I}_1}} t = F(\xi_0, k) - F(\xi, k).$$

Для зручності замінімо довільний доданок $F(\xi_0, k)$ (з коефіцієнтом) іншою сталою t_0 розмірності часу:

$$F(\xi, k) = -\sqrt{\frac{mgl(u_3 - u_1)}{2\bar{I}_1}} \Omega(t - t_0), \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgl(u_3 - u_1)}{2\bar{I}_1}}. \quad (14.8)$$

Повернемося тепер до старої змінної θ , для цього виразимо ξ через амплітуду Якобі:

$$\xi = \operatorname{am}[\Omega(t - t_0), k],$$

та підставимо у формулу заміни $u(\xi)$, також виражаючи u через θ :

$$\cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2[\Omega(t - t_0), k]. \quad (14.9)$$

Із формули (14.9) видно також, що кут θ є періодичною функцією часу з періодом

$$T = \frac{4K(k)}{\Omega},$$

де $K(k)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду. Далі, використовуючи вже відому залежність $\theta(t)$, можна знайти інші кути, безпосередньо інтегруючи диференціальні рівняння першого порядку (14.5), однак результат буде досить складним.

Навіть без явного розв'язку $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ можна отримати деякі якісні висновки про рух дзиги. Запишемо одне з рівнянь (14.5) у вигляді:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta^* - \cos \theta}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta} p_\psi, \quad \cos \theta^* = u^* = \frac{p_\varphi}{p_\psi} \equiv \frac{\mathcal{P}_\varphi}{\mathcal{P}_\psi}.$$

У загальному випадку кутова швидкість $\dot{\varphi}$ є знакозмінною величиною, і відповідний кут φ змінюється немонотонно. Якщо $\theta_{1,2}$ — кути, які відповідають кореням полінома $u_{1,2}$ (а саме $u_{1,2} = \cos \theta_{1,2}$) і є межами зміни кута θ , то характер руху дзиги залежить від співвідношення між коренями $u_{1,2}$ та значенням u^* :

- якщо $u_1 < u^* < u_2$ (еквівалентно $\theta_2 < \theta^* < \theta_1$), то швидкість у граничних точках $\theta = \theta_{1,2}$ має різні знаки. Крива, яка описується у просторі маківкою дзиги матиме самоперетини;
- якщо $u^* = u_1$ або $u^* = u_2$ (еквівалентно $\theta^* = \theta_1$ або $\theta^* = \theta_2$), то швидкість у точці θ_1 (або θ_2) дорівнює нулю. Крива, яка описується у просторі маківкою дзиги матиме загострення;
- якщо $u^* \notin [u_1, u_2]$ (еквівалентно $\theta^* \notin [\theta_2, \theta_1]$), то швидкість $\dot{\varphi}$ буде монотонною функцією часу, траєкторія маківки дзиги не матиме загострень та самоперетинів.

Такі випадки руху зображено на рис. 14.6.

Окремим частинним випадком є збіг коренів $u_1 = u_2$, або $\theta_1 = \theta_2$, параметр еліптичного інтегралу стає рівним $k = 0$. Така рівність може виконуватись для певним чином підібраних початкових умов. Тоді кут θ буде сталим, і розв'язок виражається через елементарні функції з (14.5):

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \psi = (\omega'_3 - \omega \cos \theta_0)t + \psi_0,$$

де

$$\omega = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta_0}{\bar{I}_1 \sin^2 \theta_0}, \quad \omega'_3 = \frac{p_\psi}{\bar{I}_3},$$

У цьому випадку маківка дзиги рухається по колу зі сталою кутовою швидкістю. Такий рух називається *регулярною прецесією*.

У загальному ж випадку відповідно до трьох кутів ψ , φ і θ рух важкої симетричної дзиги складається з суперпозиції трьох рухів:

- 1) *власного обертання* навколо власної осі z' з кутовою швидкістю $\dot{\psi}$;
- 2) *прецесії* навколо просторової осі z , тобто обертання осі фігури навколо фіксованої точки O з кутовою швидкістю $\dot{\varphi}$;
- 3) *нутації* навколо лінії вузлів, тобто “осцилюючого” руху осі фігури та водночас кута θ між двома граничними кутами θ_1 і θ_2 , які відповідають двом кореням u_1 і u_2 полінома $P_3(u)$.

Зауваження*. Рух математичного маятника (лекція 13) є прикладом одновимірного руху у двовимірному просторі, у методі Лагранжа він описується одним кутом $\varphi(t)$. Рух сферичного маятника є прикладом двовимірного руху у тривимірному просторі і задається двома кутами $\varphi(t)$ та $\theta(t)$. Оскільки рух дзиги задається зміною трьох кутів $\varphi(t)$, $\theta(t)$ та $\psi(t)$ то в цьому розумінні можна вважати, що він є прикладом тривимірного руху у чотиривимірному просторі (четверта, поступальна координата полюса, є фіксованою).
┘

ЛЕКЦІЯ 15

Малі коливання з кількома ступенями вільності. Нормальні координати

1.	Стан рівноваги.	231
2.	Функція Лагранжа для малих відхилень від положення рівноваги.	234
3.	Рівняння Лагранжа.	235
4.	Алгоритм дослідження малих коливань системи.	238
5.	Нормальні координати.	240

1. СТАН РІВНОВАГИ. Розглянемо консервативну механічну консервативну систему з n ступенями вільності. Кінетична енергія є стандартною і функція Лагранжа має вигляд:

$$L(q, \dot{q}) = T_2(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q). \quad (15.1)$$

Станом рівноваги механічної системи називається механічний стан, який за відсутності зовнішніх факторів не змінюється з часом. Він описується набором сталих узагальнених координат q_{i0} , та рівних нулю узагальнених швидкостей. Більш високі похідні координат по часу також дорівнюють нулю:

$$q_i = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = 0, \quad \ddot{q}_i = 0, \quad \dddot{q}_i = 0, \dots$$

Умови на всі похідні координат забезпечують незмінність узагальнених координат у довільний момент часу, на формальному рівні це означає, що всі доданки формули Тейлора розкладу функції $q(t)$ по часу в околі довільного значення t_0 , за винятком першого, дорівнюють нулю.

Встановимо критерій існування стану рівноваги. Як і будь-який інший, такий стан є розв'язком рівнянь руху для деяких початкових умов. Для функції Лагранжа (15.1) рівняння руху мають вигляд:

$$a_{ij} \ddot{q}_j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

або

$$a_{ij}(q) \ddot{q}_j + \Gamma_{i,jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k = - \frac{\partial U(q)}{\partial q_i}, \quad \Gamma_{i,jk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right].$$

Якщо рівняння руху допускають розв'язок у вигляді стану рівноваги, то підстановка $q = q_0$ дає

$$\left. \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} \right|_{q=q_0} = 0. \quad (15.2)$$

Таким чином,

у стані рівноваги консервативної системи потенціальна енергія набуває стаціонарного значення. Рівність (15.2) є необхідною умовою існування положення рівноваги механічної системи.

Отримана умова також означає, що узагальнена сила Φ , яка відповідає потенціалу U , у положенні рівноваги на систему не діє,

$$\Phi_i(q_0) = - \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_0} = 0.$$

Зауваження. Аналогічні міркування можна застосувати і для системи з кінетичною енергією $T(q) = T_0(q) + T_2(q)$. Така кінетична енергія виникає у задачах зі зв'язками, які лінійно залежать від часу. Умова стаціонарності потенціалу U заміниться на умову стаціонарності потенціалу $U_{eff} = U - T_0$, доданок T_0 відіграє роль відцентрового потенціалу (а U_{eff} можна інтерпретувати як потенціал у неінерціальній системі відліку). \perp

Якщо потенціальна енергія U набуває у точці $q = q_0$ стаціонарного значення, то можливі такі ситуації:

- 1) точка $q = q_0$ є точкою екстремуму функції $U(q)$: для довільних малих відхилень $q = q_0 + \delta q$ від q_0 значення функції однозначно збільшується (випадок мінімуму), або зменшується (випадок максимуму);
- 2) точка $q = q_0$ не є точкою екстремуму функції $U(q)$, тоді характер зміни функції при відхиленні від стаціонарної точки залежить від напрямку відхилення (стаціонарна точка типу сідлової).

Тип стаціонарної точки визначає характер поведінки механічної системи у околі стану рівноваги. Для малого відхилення від стану рівноваги $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$ координати системи відповідають значенням з малого околу точки q_0 , а швидкості — малого околу нуля.

Положення рівноваги називається *стійким*, якщо для довільного малого відхилення рух системи буде весь час відбуватись у малому околі положення рівноваги q_0 , і *нестійким*, якщо ця умова порушується і система залишає окіл точки q_0 через деякий час.

Зауваження. Малість відхилення δq передбачає деяке явне порівняння δq з іншою величиною. Це визначається контекстом задачі, де така величина може бути просторовим масштабом системи, характерною шириною потенціалу тощо. \perp

Із загальних міркувань можна показати, що стійким положення рівноваги буде тільки у випадку мінімуму потенціальної енергії. Дійсно, якщо система відхиляється від положення рівноваги за рахунок зміни початкових умов, то повна енергія зміниться і стане рівною \mathcal{E} ,

$$\mathcal{E}_0 = U(q_0) \quad \text{та} \quad \mathcal{E} = T(q_0 + \delta q, \delta \dot{q}) + U(q_0 + \delta q)$$

(для стану рівноваги, очевидно, $T(q_0, 0) = 0$). Віднімаючи рівності, отримаємо зв'язок між змінами потенціальної та кінетичної енергій:

$$\delta T + \delta U = \delta \mathcal{E}, \quad \delta T = T(q_0 + \delta q, \delta \dot{q}), \quad \delta U = U(q_0 + \delta q) - U(q_0), \quad \delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$$

($\delta\mathcal{E} = \text{const}$). Якщо q_0 є мінімумом U , то для довільного малого відхилення δq буде виконуватись $\delta U > 0$. Якщо відхилення збільшується у процесі руху, то раз повна енергія незмінна і дорівнює початковому значенню, кінетична енергія δT зменшується і в деякий момент часу стане рівною нулю (коли $\delta U = \delta\mathcal{E}$), після чого система або повністю зупиниться, або продовжить рух у іншому напрямку (характер руху залежить від вигляду потенціалу). Це вказує на те, що під час руху в околі положення рівноваги швидкості та координати набувають обмежених значень — такий рух є фінітним і відбувається в обмеженій області простору.

Якщо q_0 є максимумом U , то для відхилення $\delta U < 0$. У випадку збільшення відхилення у процесі руху кінетична енергія (а значить і швидкості) будуть зростати і через деякий час система вийде з околу положення рівноваги. Те саме стосується і випадку сідлової точки, де існують такі відхилення, для яких потенціальна енергія зменшується.

Більш точне уявлення про характер поведінки системи у околі положення рівноваги встановлюється під час аналізу рівнянь руху.

Приклад 1. Подвійний маятник.

◀ Розглянемо випадок малих коливань двох зв'язаних математичних маятників з масами m_1 та m_2 , відповідно, що підвішені на невагомим нитках з довжинами l_1 та l_2 , відповідно (рис. 15.1), таким чином, що рух відбувається тільки в площині xy .

Без урахування зв'язків функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2.$$

Рівняння зв'язку відповідають незмінним довжинам маятників, у декартових координатах:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2.$$

Як узагальнених координат зручно вибрати кути $\varphi_{1,2}$, які відкладаються від вертикалі:

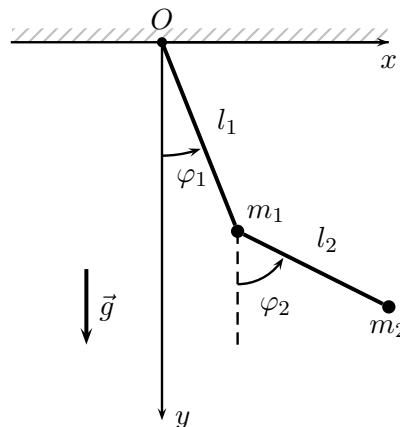


Рис. 15.1. Подвійний маятник.

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, & y_1 &= l_1 \cos \varphi_1, \\ x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, & y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Після підстановки функція Лагранжа буде $L = T - U$, де

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ U &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Положення рівноваги визначимо з умов

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = m_2 g l_1 \sin \varphi_2 = 0,$$

звідки отримаємо набір розв'язків

$$1) \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad 2) \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi, \quad 3) \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0, \quad 4) \varphi_1 = \varphi_2 = \pi.$$

Легко пересвідчитись в тому, що мінімуму потенціальної енергії відповідає тільки перший розв'язок (наприклад за допомогою критерію Сільвестра, або аналізуючи d^2U). ►

2. Функція Лагранжа для малих відхилень від положення рівноваги. Нехай $q = q_0$ — відоме положення рівноваги системи (15.1). Якщо відхилення стану системи від рівноважного є малим, то зручно перейти до відносних координат ξ , які відраховуються від положення рівноваги q_0 :

$$q_i(t) = q_{i0} + \xi_i(t), \quad (15.4)$$

де $q_{i0} \neq q_{i0}(t)$, оскільки потенціальна енергія не залежить від часу. Підкреслимо, що йдеться про мале відхилення стану $(q, \dot{q}) = (q_0 + \xi, \dot{\xi})$ від $(q_0, 0)$, тому функції $\xi(t)$ та $\dot{\xi}(t)$ є малими величинами одного порядку.

Функція Лагранжа в термінах відхилень має вигляд:

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} a_{ij}(q_0 + \xi) \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - U(q_0 + \xi).$$

У загальному випадку для довільних функцій $a_{ij}(q)$ та $U(q)$ провести аналіз руху системи неможливо. Скористаємось малістю величин ξ та $\dot{\xi}$ і розкладемо ці функції за формулою Тейлора, це дозволяє замінити функції довільного класу на більш прості поліноміальні:

$$\begin{aligned} a_{ij}(q) &= a_{ij}(q_0) + \xi_k \left. \frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k} \right|_{q=q_0} + \frac{1}{2!} \xi_k \xi_l \left. \frac{\partial^2 a_{ij}(q)}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{q=q_0} + \dots \\ U(q) &= U(q_0) + \xi_i \left. \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} \right|_{q=q_0} + \frac{1}{2!} \xi_i \xi_j \left. \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0} + \frac{1}{3!} \xi_i \xi_j \xi_k \left. \frac{\partial^3 U(q)}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_{q=q_0} + \dots \end{aligned}$$

У розкладі потенціалу доданок з першою похідною зникає в силу означення положення рівноваги (15.2). Тоді, підставляючи розклади до функції Лагранжа і групуючи доданки одного порядку, отримаємо:

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \underbrace{\frac{1}{2} a_{ij}(q_0) \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(q_0)}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j}_{\text{другий порядок}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}(q_0)}{\partial q_k} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j \xi_k - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U(q_0)}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \xi_i \xi_j \xi_k}_{\text{третій порядок}} + \dots \quad (15.5)$$

Доданок $U(q_0)$, що описує потенціальну енергію системи у положенні рівноваги, відкинуто, оскільки він є повною похідною по часу від лінійної функції і не впливає на запис рівнянь руху. Подальший аналіз полягає у записі рівнянь Лагранжа у деякому наближенні, яке відповідає порядку розкладу $L(\xi, \dot{\xi})$. Очевидно, квадратичні доданки у функції Лагранжа після диференціювання дають внесок першого порядку до рівнянь руху, кубічні — відповідно другого порядку тощо.

Найпростішим є наближення другого порядку у функції Лагранжа, для якого рівняння руху є лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Для скорочення позначимо:

$$m_{ij} = a_{ij}(q_0), \quad k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad \text{причому } m_{ij} = m_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji},$$

тоді з точністю до малих величин другого порядку отримаємо:

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j + o(\xi^2). \quad (15.6)$$

У такому випадку механічна система характеризується двома матрицями: матрицею коефіцієнтів кінетичної енергії $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$, та матрицею коефіцієнтів потенціальної енергії $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}$.

Зауваження. Згідно з означенням коефіцієнтів a_{ij} , матриця \mathbf{M} у випадку системи частинок безпосередньо виражається через маси та матриці переходу до узагальнених координат:

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \left. \frac{\partial \vec{r}_k(q)}{\partial q_i} \right|_{q=q_0} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_k(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0},$$

звідси і позначення. У загальному випадку розмірність m_{ij} не обов'язково є розмірністю маси. Більше того, різні матричні елементи \mathbf{M} можуть мати різні розмірності (вони залежать від природи узагальнених координат). Як і матриця a_{ij} , матриця \mathbf{M} є додатно визначеною, оскільки задає кінетичну енергію системи, яка за означенням є невід'ємною величиною.

Матриця \mathbf{K} часто називається матрицею коефіцієнтів жорсткості — у багатьох випадках вона описує наближення для сили взаємодії між частинками системи за законом Гука. \square

Відмітимо, що квадратичне наближення (15.6) буде законним тільки у випадку, коли $k_{ij} \xi_i \xi_j \neq 0$, тобто хоча б один з елементів $k_{ij} \neq 0$. Якщо це не так, то у розкладі слід врахувати наступні доданки більш високих порядків, які відмінні від нуля (одночасно для кінетичної та потенціальної енергії). Відповідна система рівнянь Лагранжа стане нелінійною і аналіз сильно ускладниться. Будемо вважати, що квадратичне наближення справедливе, — воно виконується для багатьох фізичних систем, які розглядаються у важливих задачах теоретичній фізики. Врахування вищих порядків розкладу буде розглянуто далі.

3. Рівняння Лагранжа. Для функції Лагранжа у квадратичному наближенні (15.6) рівняння руху мають вигляд:

$$m_{ij} \ddot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j = 0, \quad \text{або у матричній формі } \mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (15.7)$$

де $\boldsymbol{\xi}$ — матриця-стовпчик з величин ξ_i . Згідно зі стандартною процедурою, розв'язок такого рівняння будується в кілька етапів:

- 1) вибираємо представлення $\xi_i(t) = A_i e^{i\omega t}$, $A_i = \text{const}$, ω — довільна величина, дійсна чи комплексна розмірності частоти (така форма запису зручна саме для класичної механіки);

2) підставляємо цей вираз до рівняння (15.7):

$$(k_{ij} - m_{ij}\omega^2)A_j = 0, \quad (15.8)$$

де спільну експоненту опущено, як відмінну від тотожного нуля величину;

3) рівняння (15.8) є співвідношенням між невідомими величинами A_i та ω . Відносно A_i — це система однорідних лінійних рівнянь, яка матиме нетривіальний розв'язок $A_i \neq 0$ за умови виродженості матриці коефіцієнтів:

$$\det\{k_{ij} - m_{ij}\omega^2\} = \det|\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2| = \det \begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & \dots & k_{1n} - m_{1n}\omega^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} - m_{n1}\omega^2 & \dots & k_{nn} - m_{nn}\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкривання дужок у визначнику отримаємо алгебраїчне рівняння n -го порядку відносно ω^2 із дійсними коефіцієнтами. Згідно з основною теоремою алгебри, воно має n коренів $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$, дійсних чи комплексних. Корені характеристичного рівняння будемо нумерувати грецькими літерами;

4) повертаємось до рівнянь (15.8) на амплітудні множники A_i . Для кореня ω_α^2 система рівнянь має вигляд:

$$(k_{ij} - m_{ij}\omega_\alpha^2)A_j = 0 \quad \text{або} \quad (\mathbf{K} - \omega_\alpha^2\mathbf{M})\mathbf{A} = 0,$$

серед яких одне чи більше лінійно залежить від решти, має розв'язок $A_i^{(\alpha)}$, визначений з точністю до сталого множника (номер розв'язку позначаємо грецькою літерою у дужках);

5) визначивши амплітуди для всіх коренів ω_α^2 , отримаємо систему n фундаментальних розв'язків $\xi_i^{(\alpha)}(t) = A_i^{(\alpha)}e^{i\omega_\alpha t}$. Загальний розв'язок будується як лінійна комбінація фундаментальних із довільними сталими коефіцієнтами C_α . Оскільки амплітуди $A_i^{(\alpha)}$ визначені з точністю до невідомого сталого множника, то C_α та $A_i^{(\alpha)}$ можна об'єднати. Загальний розв'язок:

$$\xi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)}e^{i\omega_\alpha t}. \quad (15.9)$$

Множники $A_i^{(\alpha)}$ у загальному випадку є комплексними і кожний з них відповідає двом дійсним числам, за формулою Ейлера $A_i^{(\alpha)} = |A_i^{(\alpha)}|e^{i\varphi_\alpha}$ (фаза φ_α є спільною для всіх компонент амплітуди). Всього невідомих величин буде $2n$, вони визначаються з $2n$ початкових умов.

Характер еволюції відхилень ξ_i у часі визначається розв'язком характеристичного рівняння. Для окремого доданку $\xi_i^{(\alpha)}$ суми (15.9) можливі ситуації:

- якщо $\omega_\alpha^2 \in \mathbb{R}$ та $\omega_\alpha^2 > 0$, то $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$, і фундаментальний розв'язок

$$\xi_i^{(\alpha)}(t) \sim e^{\pm i\omega_\alpha t}.$$

За допомогою формули Ейлера цей вираз можна записати в термінах тригонометричних функцій. Функція $\xi_i^{(\alpha)}(t)$ описує гармонічне коливання з частотою ω_α в околі положення рівноваги $\xi_i = 0$;

- якщо $\omega_\alpha^2 \in \mathbb{R}$ та $\omega_\alpha^2 < 0$, то $\omega_\alpha = i\beta_\alpha$ з $\beta_\alpha \in \mathbb{R}$, тому

$$\xi_i^{(\alpha)}(t) \sim e^{\pm\beta_\alpha t}.$$

Такий рух буде аперіодичним і відповідає зростанню (чи спаданню) координати ξ_i з часом за експоненціальним законом;

- якщо $\omega_\alpha^2 \in \mathbb{C}$ то $\omega_\alpha = \beta_\alpha + i\Omega_\alpha \in \mathbb{C}$. Такий розв'язок описує коливання із загасанням або зростанням відхилення (насправді такий розв'язок не реалізується у класичній механіці — див. далі).

У другому та третьому випадках рух для i -ї координати буде інфінітним і відповідатиме відхиленням від нестійкого положення рівноваги.

Таким чином, рух системи при довільних початкових умовах буде фінітним у околі стійкого положення рівноваги, якщо *всі частоти* є дійсними величинами. Якщо хоча б одна з них є комплексною, то загальний рух буде інфінітним, а положення рівноваги — нестійким. Досліджувати такий випадок у квадратичному наближенні немає сенсу, оскільки воно порушиться у деякий момент часу, коли відхилення стане великим. Єдиною корисною інформацією, яку закладено до сталих β_α , є тенденція зміни відхилень у початковий та у близькі до нього моменти часу.

Зауваження. Для нестійкого положення рівноваги також можливі випадки фінітного руху, але для певних початкових умов. У таких випадках доданки зі зростаючими експонентами будуть відсутні у розв'язку (коефіцієнти при зростаючих експонентах дорівнюють нулю). \square

Знайдемо, за яких умов, накладених на матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} , усі частоти є дійсними. Домножимо кожне рівняння

$$k_{ij}A_j^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 m_{ij}A_j^{(\alpha)}$$

на комплексно спряжену амплітуду $\bar{A}_i^{(\alpha)}$ (для спрощення запису будемо позначати спряження рискою) і знайдемо суму по i :

$$\bar{A}_i^{(\alpha)} k_{ij} A_j^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \bar{A}_i^{(\alpha)} m_{ij} A_j^{(\alpha)}, \quad \text{або} \quad \bar{\mathbf{A}}^{(\alpha)T} \mathbf{K} \mathbf{A}^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \bar{\mathbf{A}}^{(\alpha)T} \mathbf{M} \mathbf{A}^{(\alpha)}$$

(суми по α немає). Добутки матриць на вектори у обох частинах рівності є числами, тому з останнього виразу можна явно виразити частоту:

$$\omega_\alpha^2 = \frac{\bar{A}_i^{(\alpha)} k_{ij} A_j^{(\alpha)}}{\bar{A}_i^{(\alpha)} m_{ij} A_j^{(\alpha)}} = \frac{\bar{\mathbf{A}}^{(\alpha)T} \mathbf{K} \mathbf{A}^{(\alpha)}}{\bar{\mathbf{A}}^{(\alpha)T} \mathbf{M} \mathbf{A}^{(\alpha)}} \quad (15.10)$$

(формула (15.10) у загальних рисах нагадує вираз $\omega^2 = \frac{k}{m}$ для частоти одновимірного осцилятора). Оскільки матриця k_{ij} симетрична та дійсна, то подвійна сума у чисельнику є дійсною:

$$\overline{\bar{A}_i^{(\alpha)} k_{ij} A_j^{(\alpha)}} = A_i^{(\alpha)} \overline{\bar{k}_{ij} \bar{A}_j^{(\alpha)}} = A_i^{(\alpha)} k_{ij} \bar{A}_j^{(\alpha)} = \bar{A}_j^{(\alpha)} k_{ji} A_i^{(\alpha)} = \bar{A}_i^{(\alpha)} k_{ij} A_j^{(\alpha)},$$

(у останньому виразі замінено порядок обчислення сум). Те саме стосується матриці m_{ij} . Тому

квадрати частот ω_α^2 завжди є дійсними величинами.

Далі, квадратична форма з матрицею \mathbf{M} додатно визначена¹ за походженням (з кінетичної енергії). Тому знак квадрату частоти ω_α^2 повністю визначається знаком квадратичної форми з матрицею \mathbf{K} . Якщо вона додатно визначена, то $\omega_\alpha^2 > 0$ (гармонічні коливання), якщо від'ємно визначена, то $\omega_\alpha^2 < 0$ (наростання відхилень), якщо знаковизначеність відсутня, то висновок про частоти у загальному випадку зробити не можна.

За походженням $\frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j$ є приростом потенціалу для довільного малого відхилення системи від положення рівноваги. Тому знаковизначеність цієї форми однозначно відповідає типу стаціонарної точки, яку має потенціал у положення рівноваги системи. Таки чином, доведено загальне твердження:

положення рівноваги буде стійким для будь-яких початкових умов, якщо потенціальна енергія досягає в ньому мінімуму.

Далі в основному розглядатиметься рух системи у околі стійкого положення рівноваги. Частоти ω_α називаються *власними частотами* коливань системи, множники $A_i^{(\alpha)}$ — *амплітудно-фазовими*, якщо перейти до дійсного запису

$$A_i^{(\alpha)} = a_i^{(\alpha)} e^{i\varphi_\alpha}, \quad a_i^{(\alpha)} = |A_i^{(\alpha)}|,$$

то $a_i^{(\alpha)}$ є *амплітудою*, а φ_α — *початковою фазою* коливань з частотою ω_α .

Загальний розв'язок задачі на малі коливання у комплексній формі має вигляд:

$$\xi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} = \sum_{\alpha=1}^n a_i^{(\alpha)} e^{i(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)} \quad (15.11)$$

(довільні числові коефіцієнти опущено). Окремий доданок цієї суми описує коливання з окремою частотою ω_α і називається *модою коливань* з номером α . Загальний рух буде складною суперпозицією коливань з різними частотами.

Фізичний зміст має тільки його дійсна частина

$$\xi_i^{phys}(t) = \operatorname{Re} \xi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n a_i^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha).$$

куди і слід підставляти початкові умови. Для обчислень загального характеру, однак, зручніше користуватись комплексною формою запису.

4. АЛГОРИТМ ДОСЛІДЖЕННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ. Дослідження поведінки заданої механічної системи при малих відхиленнях від положення у наближенні другого порядку рівноваги проводиться повторенням процедури, яку у розгорнутій формі було описано раніше. Однак оскільки форма розв'язку рівнянь

¹ Матриця \mathbf{A} є додатно визначеною, якщо $\forall \vec{x} \neq 0$ має місце $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} > 0$.

руху (15.11) у всіх задачах однакова, і потребує тільки підстановки частот ω_α та амплітуд $A_i^{(\alpha)}$, то можна обмежитись, власне, пошуком цих величин. У записі самих рівнянь Лагранжа особливої необхідності немає.

Таким чином, можна запропонувати таку процедуру:

- 1) побудувати функцію Лагранжа $L(q, \dot{q})$ (якщо вона не задана);
- 2) знайти положення рівноваги із системи рівнянь

$$\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = q_{i0} = \text{const},$$

якщо розв'язків кілька, то вибрати стійке положення, яке відповідає мінімуму U ;

- 3) ввести відносні координати ξ_i за правилом $q_i(t) = q_{i0} + \xi_i(t)$.
Розкласти функцію Лагранжа у ряд Тейлора до другого порядку по ξ :

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Якщо квадратичне наближення некоректне, то розв'язок даним способом побудувати не можна;

- 4) з виразу функції Лагранжа $L(\xi, \dot{\xi})$ знайти матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} , записати характеристичне рівняння

$$\det |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0,$$

знайти частоти коливань ω_α , $\alpha = \overline{1, n}$;

- 5) знайти амплітуди коливань (з точністю до множників) з рівнянь

$$\mathbf{K} \mathbf{A}^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \mathbf{M} \mathbf{A}^{(\alpha)}$$

для кожної частоти. На цьому етапі визначаються не скільки амплітуди, стільки загальні амплітудно-фазові характеристики;

- 6) записати загальний розв'язок

$$\xi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}$$

і підставити початкові умови (якщо їх задано);

- 7) якісно проаналізувати характер коливань системи для кожної моди, взятої окремо.

Приклад 2. Подвійний маятник (продовження прикладу 1).

◀ Рівняння руху, які будуються за допомогою функції Лагранжа (15.3), є досить громіздкими, і про розв'язок не може бути й мови (навіть для одного маятника розв'язок виражається через еліптичні функції). Розв'язок у квадратурах побудувати неможливо, оскільки циклічні координати відсутні, і є тільки один закон збереження енергії.

Розкладемо функцію Лагранжа за формулою Тейлора з точністю до другого порядку в околі стійкого положення рівноваги $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, покладаючи для спрощення $l_1 = l_2$. Будемо вважати кути малими величинами, тоді:

$$L = \frac{1}{2} l^2 [(m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 \dot{\varphi}_2^2] - \frac{1}{2} gl [(m_1 + m_2) \varphi_1^2 + m_2 \varphi_2^2].$$

Зі структури функції Лагранжа видно, що

$$\mathbf{M} = l^2 \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = gl \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

Характеристичне рівняння

$$\det |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} (m_1 + m_2)gl - \omega^2(m_1 + m_2)l^2 & -\omega^2 m_2 l^2 \\ -\omega^2 m_2 l^2 & m_2 gl - \omega^2 m_2 l^2 \end{vmatrix} = 0,$$

має розв'язки

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 \pm \alpha}, \quad \alpha^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Відповідні амплітуди даються зворотною підстановкою частот у вихідне рівняння на амплітуди. У введених позначеннях маємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2}(\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0,$$

Для частот $\omega_{1,2}$ з першого рівняння системи отримаємо:

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{1 \pm \alpha} \right) A_1 = \frac{\omega_0^2}{1 \pm \alpha},$$

або $\alpha A_1^{(1)} = A_2^{(1)}$ та $\alpha A_1^{(2)} = -A_2^{(2)}$. Таким чином, вибираючи першу компоненту амплітуди незалежною, отримаємо

$$\mathbf{A}^{(1)} = A_1^{(1)} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = A_1^{(2)} \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

Загальний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A_1^{(1)} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t},$$

де $A_1^{(1,2)}$ відіграють роль довільних сталих. Видно, що для руху з частотою ω_1 маятники коливаються в фазі (знаки амплітуд однакові) а для ω_2 — в протифазі (знаки амплітуд різні). ►

5. НОРМАЛЬНІ КООРДИНАТИ. Частоти та амплітуди можна знайти з рівняння $\mathbf{K}\mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{A}$, яке можна записати як

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{A}. \quad (15.12)$$

Формально це рівняння є задачею на власні вектори та власні значення для симетричної матриці $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ з невідомими ω^2 (власне значення) та \mathbf{A} (власний вектор).

Як відомо, власні вектори симетричної матриці є взаємно ортогональними, а власні значення — дійсними. У базисі власних векторів матриця $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ стає діагональною з квадратами частот по діагоналі. Оскільки матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} мають абсолютно різне походження, то діагональність їх добутку означає, що існує базис, у якому кожний із множників є діагональною матрицею. Тому, якщо виконати перетворення координат $\xi_i \rightarrow \xi'_i$ з матрицею переходу, яка утворюється з нормованих на одиницю власних векторів, то у нових координатах матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} стануть діагональними, що сильно спростить функцію Лагранжа. Такі координати називаються *нормальними координатами*.

Побудуємо таке перетворення на основі вихідного рівняння на частоти та амплітуди $\mathbf{K}\mathbf{A} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{A}$, обминаючи пошук матриці \mathbf{M}^{-1} . Для початку встановимо властивість, аналогічну до властивості ортогональності власних векторів симетричної матриці.

Розглянемо дві різні частоти ω_α та ω_β . Рівняння на амплітуди мають вигляд:

$$\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{K}\mathbf{A}^{(\beta)} = \omega_\beta^2\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\beta)}.$$

Домножимо перше рівняння на $\mathbf{A}^{(\beta)T}$ (матриця-рядок), а друге $\mathbf{A}^{(\alpha)T}$ і віднімемо отримані вирази:

$$\mathbf{A}^{(\beta)T}\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\alpha)} - \mathbf{A}^{(\alpha)T}\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\beta)} = \omega_\alpha^2\mathbf{A}^{(\beta)T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\alpha)} - \omega_\beta^2\mathbf{A}^{(\alpha)T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\beta)}$$

Оскільки матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} є дійсними та симетричними, то амплітудні множники можна переставляти місцями у добутках:

$$\mathbf{A}^{(\beta)T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\alpha)} = \mathbf{A}^{(\alpha)T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\beta)}, \quad \mathbf{A}^{(\beta)T}\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\alpha)} = \mathbf{A}^{(\alpha)T}\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\beta)},$$

тому

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)\mathbf{A}^{(\beta)T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\alpha)} = 0.$$

За припущенням частоти є різними, тому рівність нулю забезпечується останнім множником:

$$\mathbf{A}^{(\beta)T}\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\alpha)} = 0, \quad \text{або} \quad m_{ij}A_i^{(\alpha)}A_j^{(\beta)} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (15.13)$$

Це і буде безпосереднім аналогом умови ортогональності власних векторів для звичайної спектральної задачі. Єдиною відмінністю від звичайного скалярного добутку є наявність матричних елементів у сумі (простий скалярний добуток буде для матриці $m_{ij} = \delta_{ij}$). Крім того, компоненти векторів є комплексними.

У отриманих формулах ортогональності є деякий елемент довільності. Дійсно, умову (15.13) задовольняють вектори $A_i^{(\alpha)}e^{i\varphi_{i\alpha}}$ з довільними фазами. Із рівняння (15.12) випливає, що $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ можуть бути комплексними, але зі спільним фазовим множником для всіх компонент (для симетричної матриці власні вектори мають дійсні компоненти з точністю до множника нормування). Фази завжди можна вибрати так, щоб всі амплітуди $A_i^{(\alpha)}$ були дійсними (інакше кажучи, фазу можна перенести до довільного числового множника, який виникає у записі загального розв'язку). Будемо вважати, що таке перетворення виконано. Це не впливає на

загальний розв'язок задачі, оскільки самі амплітуди як такі відомі з точністю до множника, у якому можна зосередити фазу. Позначимо

$$m_{ij}A_i^{(\alpha)}A_j^{(\beta)} = (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbf{M}}, \quad (15.14)$$

цей вираз можна розуміти як скалярний добуток з вагою \mathbf{M} . Як і звичайний скалярний добуток, цей вираз лінійний, симетричний відносно перестановки множників і є невід'ємною дійсною величиною.

Таким чином,

амплітуди малих коливань, які відповідають різним частотам, ортогональні з вагою \mathbf{M} , тобто $(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbf{M}} = 0$.

Якщо довжини амплітуд нормовані на одиницю у розумінні скалярного добутку з вагою \mathbf{M} , то

$$(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbf{M}} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (15.15)$$

Зауваження*. У просторі комплексних векторів скалярний добуток означено так:

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{C}} = \mathbf{X}^{\dagger} \cdot \mathbf{Y},$$

де $\mathbf{X}^{\dagger} = \bar{X}^T$ позначає ермітово спряжений вектор (комплексне спряження та транспонування). На перший погляд здається, що це означення не узгоджене з (15.14), оскільки власні вектори задачі (15.12) мають бути ортогональними у звичайному розумінні, це впливає на властивостей спектральної задачі для симетричної матриці:

$$(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbb{C}} = \omega_{\beta}^2(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbb{C}} = \omega_{\alpha}^2(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbb{C}},$$

оскільки $(\vec{x}, A\vec{y}) = (A^{\dagger}\vec{x}, \vec{y})$ і для симетричної дійсної матриці $A = A^{\dagger}$. Звідси

$$(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbb{C}} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Насправді означення скалярного добутку з вагою та стандартне означення узгоджені між собою. У останньому з них після переходу до індексної форми запису слід відрізнити верхні та нижні індекси, угода Ейнштейна про суми відповідає випадку, коли індекс повторюється двічі:

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{C}} = \bar{x}^i y_i$$

(верхній індекс нумерує стовпчики, а нижній рядки). Перехід до нижнього індексу здійснюється за допомогою матриці \mathbf{M} :

$$\bar{x}^i = m^{ij} x_j$$

тому $(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{C}} = (\vec{x}, \vec{y})_{\mathbf{M}}$, для добутку з вагою коваріантні та контраваріантні індекси не відрізняють (детальніше про це буде далі). \lrcorner

Розглянемо тепер заміну координат $\xi_i \rightarrow Q_{\alpha}$ за правилом (сума по α):

$$\xi_i = A_i^{(\alpha)} Q_{\alpha}, \quad \text{або} \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \dots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \dots & A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \dots & A_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (15.16)$$

(по стовпчиках² записано компоненти амплітуд, що відповідають різним модам). Для побудови оберненої формули переходу домножимо обидві частини рівності ліворуч на $A_j^{(\beta)} m_{ij}$ (для виділення скалярного добутку з вагою у правій частині) і знайдемо суми по i та j :

$$A_j^{(\beta)} m_{ij} \xi_i = A_j^{(\beta)} m_{ij} A_i^{(\alpha)} Q_\alpha \equiv (\mathbf{A}^{(\alpha)}, \mathbf{A}^{(\beta)})_{\mathbf{M}} Q_\alpha = \delta_{\alpha\beta} Q_\alpha = Q_\beta.$$

Тому, змінюючи індекси, отримаємо:

$$Q_\alpha = A_i^{(\alpha)} m_{ij} \xi_j, \quad \text{або} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\xi}. \quad (15.17)$$

Таким чином, обернене перетворення $Q \rightarrow \xi$ задається матрицею $\mathbf{A}^T \mathbf{M}$ (нагадаємо, що $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$).

Розглянемо умови повноти обох перетворень, які можна отримати підстановкою формул прямого перетворення до оберненого і навпаки:

$$\xi_i = A_i^{(\alpha)} Q_\alpha = A_i^{(\alpha)} (A_k^{(\alpha)} m_{kj} \xi_j) = (A_i^{(\alpha)} A_k^{(\alpha)} m_{kj}) \xi_j$$

звідси знайдемо, що множник при ξ_j у правій частині дорівнює δ_{ij} :

$$A_i^{(\alpha)} m_{jk} A_k^{(\alpha)} = \delta_{ij}. \quad (15.18)$$

Друга умова повноти

$$Q_\alpha = A_i^{(\alpha)} m_{ij} \xi_j = A_i^{(\alpha)} m_{ij} (A_j^{(\beta)} Q_\beta) = (A_i^{(\alpha)} m_{ij} A_j^{(\beta)}) Q_\beta$$

збігатиметься із вже відомою умовою ортогональності

$$A_i^{(\alpha)} m_{ij} A_j^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \text{або} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{1}.$$

Із останнього виразу легко отримати наслідок

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \mathbf{M},$$

що відповідає властивості ортогональності $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ звичайних матриць переходу.

У нових координатах номер моди коливання тепер відіграє роль індексу. Тоді функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}) \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{Q}.$$

Оскільки кінетична та потенціальна енергії є скалярами, то матриці

$$\mathbf{M}' = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \quad (15.19)$$

² У матриці $A_i^{(\alpha)}$ індекс i нумерує рядки і тому вважається першим, а індекс α нумерує стовпчики і є, відповідно другим (упорядкування індексів потрібне для коректного запису формул у матричному вигляді).

є аналогами \mathbf{M} та \mathbf{K} у нових координатах. Формули (15.19) можна інтерпретувати як закони перетворення тензорів. У індексній формі:

$$m'_{\alpha\beta} = [\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}]_{\alpha\beta} = A_i^{(\alpha)} m_{ij} A_j^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$$

згідно з властивістю ортогональності. Для матриці \mathbf{K} скористаємось рівнянням на амплітуді:

$$k'_{\alpha\beta} = [\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}]_{\alpha\beta} = A_i^{(\alpha)} k_{ij} A_j^{(\beta)} = \omega_\alpha^2 (A_i^{(\alpha)} m_{ij} A_j^{(\beta)}) = \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta},$$

де повторно використано властивість ортогональності.

Таким чином, у нових координатах обидві матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} є діагональними:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

і функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2). \quad (15.20)$$

Рівняння руху для різних ступенів вільності Q_α незалежні, кожне за формою є звичайним рівнянням одновимірних гармонічних коливань:

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0 \quad (15.21)$$

зі стандартними розв'язками. Набір нових змінних Q_α і називається *нормальними координатами*.

Приклад 3. Подвійний маятник (закінчення прикладу 1).

◀ У прикладі (2) отримані вирази для амплітуд:

$$\mathbf{A}^{(1,2)} = C_{1,2} \begin{pmatrix} \pm\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

якщо їх нормувати на одиницю, то

$$\mathbf{A}^{(1,2)T} \mathbf{M} \mathbf{A}^{(1,2)} = C_{1,2}^2 (m_1 + m_2) (\pm\alpha, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\alpha \\ 1 \end{pmatrix} = C_{1,2}^2 (m_1 + m_2) (1 \pm \alpha) = 1$$

звідки

$$\mathbf{A}^{1,2} = \frac{1}{\sqrt{M(1 \pm \alpha)}} \begin{pmatrix} \pm\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M = m_1 + m_2.$$

Матриця переходу до нормальних координат:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} & -\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} & \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} Q_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} Q_2 \right) \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} Q_2 \right) \end{cases}$$

перевірити формулу для функції Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_1^2 Q_1^2 - \omega_2^2 Q_2^2)$$

пропонується самостійно. ►

Зауваження*. Властивості матриці переходу до нормальних координат здаються незвичними тільки на перший погляд. Індеси, які нумерують ступені вільності (латинські i, j тощо) та індеси нумерації частот (грецькі α, β і т. д.), які після перетворення нумеруватимуть нові координати, мають абсолютно різне походження і відносяться до просторів різної природи.

Вихідна спектральна задача $\mathbf{K}\mathbf{A} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{A}$ може інтерпретуватись як задача на власні вектори та власні значення матриці \mathbf{K} у просторі з метрикою \mathbf{M} , яка є матрицею скалярних добутків векторів базису. Оскільки вона є недіагональною, то базисні вектори є неортогональними і у тензорів, означених у такому просторі слід відрізняти верхні (контраваріантні) та нижні (коваріантні) індеси.

Для роз'яснення питання змінимо позначення і розглянемо спектральну задачу для тензора \hat{t} у просторі з метрикою η . Угода Ейнштейна про німі індеси тепер передбачатиме також, що один з індесів є верхнім, а інший — нижнім. Скалярні добутки будуються за допомогою метричного тензора

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a^i \vec{e}_i) \cdot (b^j \vec{e}_j) = a^i b^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \eta_{ij} a^i b^j.$$

Перехід від верхнього індесу до нижнього і навпаки здійснюється за допомогою правила опускання та піднімання індесу:

$$a^i \eta_{ij} = a_j, \quad a_i \eta^{ij} = a^j.$$

Скалярний добуток можна записувати у різних формах: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \eta_{ij} a^i b^j = a_i b^i = a^i b_i$. Піднімання одного індесу метричного тензора дає символ Кронекера, $\eta^{ik} \eta_{kj} = \delta_j^i$. Компоненти a^i та a_i описують розклади одного і того самого вектора за різними базисами — прямому \vec{e}_i та взаємному \vec{e}^i , причому

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \eta_{ij}, \quad \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i, \quad \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \eta^{ij}.$$

Повернемося до спектральної задачі для симетричного тензора \hat{t} :

$$\hat{t}\vec{a} = \lambda\vec{a}, \quad \text{або} \quad t_{ij}a^j = \lambda\eta_{ij}a^j \quad \text{або} \quad t^i{}_j a^j = \lambda a^i,$$

це впливає з рівностей

$$\vec{e}_i \cdot \hat{t} x^j \vec{e}_j = \lambda \vec{e}_i \cdot x^j \vec{e}_j,$$

де $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \eta_{ij}$, $\vec{e}_i \cdot \hat{t} \vec{e}_j = t_{ij}$. Якщо λ_α та a_i^α — її розв'язки, то умова нормування має вигляд:

$$\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta = \eta_{ij} a^{i\alpha} a^{j\beta} = \delta^{\alpha\beta}.$$

Перехід у власну систему координат \hat{t} дається матрицею, яка будується з коефіцієнтів a_i^α . Умова ортогональності по формі є законом перетворення метричного тензора:

$$\eta_{ij} \rightarrow a^{i\alpha} a^{j\beta} \eta_{ij} = \delta^{\alpha\beta},$$

у правій частині рівності — метричний тензор простору, у якому задані нові координати. Як видно, це ортогональні координати з метрикою $\delta_{\alpha\beta}$. В них відсутня відмінність між верхніми та нижніми індексами. Оскільки

$$\eta^{ij} \rightarrow (a^{-1})_i^\alpha (a^{-1})_j^\beta \eta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta},$$

то обернена матриця переходу буде $(a^{-1})_i^\alpha = \delta^{\alpha\beta} \eta_{ij} a_\beta^j$. Сам тензор \hat{t} у власній системі буде діагональним:

$$t_i^j \rightarrow t_\alpha^\beta = (a^{-1})_\alpha^j a_i^j t_i^j = \eta_{\alpha\beta} \lambda_\alpha,$$

де потрібно використати рівняння задачі (подробіці опускаємо).

В контексті задачі про малі коливання перехід від простору координат ξ до простору нормальних координат еквівалентний переходу з простору з метрикою m_{ij} у простір з метрикою $\delta_{\alpha\beta}$. Таке перетворення не є ортогональним, що і відображається властивостями матриці переходу. \perp

Принципова можливість запису функції Лагранжа системи з n ступенями вільності як суми функцій Лагранжа незалежних осциляторів дозволяє звести побудову нормальних координат до еквівалентної задачі лінійної алгебри про одночасну діагоналізацію двох квадратичних форм, у нашому контексті — кінетичної та потенціальної енергій. У такому підході форми діагоналізуються по черзі, шляхом розв'язування більш простих спектральних задач для матриць \mathbf{M} та \mathbf{K} . Після зведення функції Лагранжа системи до вигляду (15.21) за допомогою такої процедури частоти отримуються автоматично як коефіцієнти при квадратах координат. Розв'язок характеристичного рівняння для частот $\det |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ (яке часто буває досить громіздким) у такому підході обминається.

Схему задачі діагоналізації матриць \mathbf{M} та \mathbf{K} можна подати у вигляді наступної послідовної дій:

- 1) розв'язати спектральну задачу для матриці \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} \vec{b} = \mu_i \vec{b},$$

побудувати матрицю переходу до власного базису \mathbf{M} за правилом $\mathbf{B} = \{b_i^{(\alpha)}\}$. Виконати перетворення матриці \mathbf{K} та векторів ξ власного базису \mathbf{M} :

$$\xi' = \mathbf{B}^T \xi, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

тут \mathbf{B} — ортогональна матриця;

- 2) виконати перетворення перенормування так, щоб матриця \mathbf{M} стала одиничною:

$$\mathbf{M}'' = \mathbf{N}^T \mathbf{M}' \mathbf{N} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \end{pmatrix},$$

тут \mathbf{N} — діагональна, але не ортогональна матриця. Знайти вектор $\xi'' = \mathbf{N} \xi'$ та матрицю $\mathbf{K}'' = \mathbf{N} \mathbf{K}' \mathbf{N}$;

3) розв'язати спектральну задачу для матриці \mathbf{K}'' :

$$\mathbf{K}''\vec{c} = \omega^2\vec{c},$$

побудувати матрицю переходу до власного базису \mathbf{K}'' за правилом $\mathbf{C} = \{c_i^{(\alpha)}\}$. Виконати перетворення матриці \mathbf{K}'' та векторів ξ'' власного базису

$$\xi''' = \mathbf{C}^T \xi'', \quad \mathbf{K}''' = \mathbf{C}^T \mathbf{K}'' \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix},$$

тут \mathbf{C} — ортогональна матриця, а матриця \mathbf{M} є одиничною і для таких перетворень не змінюється;

4) результуюче перетворення $\mathbf{Q} = \xi''' = \mathbf{C}^T \mathbf{N} \mathbf{B}^T \xi$ і є переходом до нормальних координат, загальна матриця переходу буде $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{N} \mathbf{C}$ (не є ортогональною, оскільки такої властивості немає у другого множника). Матричні елементи \mathbf{K}''' є власними частотами.

Функція Лагранжа в результаті перетворень має вигляд:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^T \mathbf{M} \dot{\xi} - \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{K} \xi = \frac{1}{2} \dot{\xi}'^T \mathbf{M}' \dot{\xi}' - \frac{1}{2} \xi'^T \mathbf{K}' \xi' \\ &= \frac{1}{2} \dot{\xi}''^T \dot{\xi}'' - \frac{1}{2} \xi''^T \mathbf{K}'' \xi'' = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}''' \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

і збігається з (15.21).

ЛЕКЦІЯ 16

Коливання молекул та лінійних ланцюжків

1.	Опис коливального руху молекул.	249
2.	Триатомна молекула.	252
3.	Вплив симетрії молекули на характер руху.	258
4.	Лінійні ланцюжки.	259
5.	Континуальний перехід.	271

1. ОПИС КОЛИВАЛЬНОГО РУХУ МОЛЕКУЛ. Розглянемо замкнену систему N частинок, що взаємодіють за потенціальним законом:

$$L = T - U, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2, \quad U = \sum_{i<j}^N U_{ij}(r_{ij})$$

де U_{ij} — потенціали взаємодії частинок (залежать тільки від відстані). Якщо у такій системі можливий стан рівноваги, то можна розглядати задачу про малі коливання в його околі. Така ситуація характерна для молекул, які не перебувають у зовнішньому полі.

Нехай \vec{a}_i — положення рівноваги атомів, що складають молекулу. Типовий потенціал взаємодії між атомами, що складають молекулу, наведено на рис. 16.1. Тоді для малих відхилень від положень рівноваги можна вважати, що $\vec{r}_i(t) = \vec{a}_i + \delta\vec{r}_i(t)$ і потенціал можна розкласти до другого порядку за формулою Тейлора:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \delta\dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \sum_{\alpha,\beta} \delta x_{ij} \delta x_{kl} \frac{\partial^2 U_{\alpha\beta}(a_{\alpha\beta})}{\partial x_{ij} \partial x_{kl}} + \dots$$

або, позначивши $k_{ijkl} = \frac{\partial^2 U(a)}{\partial x_{ij} \partial x_{kl}}$ (силові сталі, що характеризують сили взаємодії між атомами), запишемо у квадратичному наближенні

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \delta\dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} k_{ijkl} \delta x_{ij} \delta x_{kl}. \quad (16.1)$$

Така функція Лагранжа (з точністю до позначень) є типовою для задачі на малі коливання. Далі можна переходити до рівнянь руху (чи еквівалентного аналізу

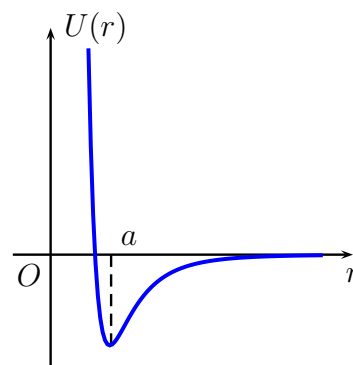


Рис. 16.1. Типовий потенціал взаємодії між атомами.

характеристичного рівняння). Однак у випадку консервативних систем, для яких зберігаються імпульс та момент імпульсу, є кілька особливостей, які можна використати для спрощення аналізу руху. У таких системах не всі ступені вільності відповідають змінам відносних відстаней між частинками (тобто деформації форми молекули порівняно з рівноважним станом). Одна частина ступенів вільності описує поступальне переміщення як цілого, друга частина — обертання як цілого (як для абсолютно твердого тіла, без зміни форми), а третя — власне, коливальний рух, який зводиться до малих деформацій форми. Загальний рух є суперпозицією трьох перерахованих типів. Оскільки абсолютно тверде тіло має 6 ступенів вільності, то у загальному випадку N -атомної молекули число коливальних ступенів вільності складатиме $3N - 6$. У більшості задач, пов'язаних з аналізом руху молекул саме інформація про коливання є найбільш суттєво. У таких випадках ступені вільності, пов'язаних з рухом як цілого доцільно з самого початку виключити. У загальному підході можна розбити функцію Лагранжа на окремі доданки, що описують такі типи руху і потім відкинути непотрібні ступені вільності, використовуючи адитивність, однак він потребує явного виділення ступенів вільності системи “як цілого”, що не завжди зручно. Виявляється, що найпростіше скористатись поняттями механіки Ньютона.

Оскільки імпульс системи зберігається, то центр мас рухається прямолінійно та рівномірно і описує переміщення “як цілого”. Цей рух можна виключити, якщо перейти до системи відліку, у якій центр мас нерухомий

$$\vec{R}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \text{const},$$

будемо вважати, що центр мас (для даних початкових умов) займає те саме положення, що і у стані рівноваги: тоді $\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i$, звідки, переходячи до малих відхилень, знайдемо:

$$\sum_{i=1}^N m_i \delta \vec{r}_i = 0, \quad (16.2)$$

це накладає один векторний зв'язок (або три скалярні зв'язки) на зміщення $\delta \vec{r}_i$, які є основними координатами для опису малих відхилень від рівноважного стану.

Обертання можна виключити, якщо вважати, що за відсутності деформацій молекула не обертається, тоді момент імпульсу рівним нулю (так можна зробити за рахунок вибору системи координат та початкових умов), це означає, що вектори \vec{a}_i не залежать від часу. У загальному випадку це передбачає зв'язок на швидкість, а не на переміщення, однак для наближення малих відхилень момент імпульсу у першому порядку можна записати у вигляді повної похідної по часу:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{a}_i + \delta \vec{r}_i) \times \delta \dot{\vec{r}}_i \simeq \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \times \delta \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \times \delta \vec{r}_i,$$

оскільки $\dot{\vec{a}}_i = 0$ за припущенням. Тоді момент імпульсу буде дорівнювати нулю, якщо функція під похідною у правій частині дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \times \delta \vec{r}_i = 0, \quad (16.3)$$

ця рівність також дає один векторний зв'язок (або три скалярні) на зміщення $\delta \vec{r}_i$.

Зауваження. Зв'язки (16.3) будуть мати місце і у випадку обертання молекули як цілого, тоді момент імпульсу зведеться до аналога виразу для моменту імпульсу абсолютно твердого тіла, де \vec{a}_i стають залежними від часу:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \left| \begin{array}{l} \text{покладемо} \\ \delta \vec{r}_i = \vec{a}_i + \delta \vec{r}_i \end{array} \right| = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{a}_i + \delta \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{a}}_i + \delta \dot{\vec{r}}_i) \\ &\simeq \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \times \dot{\vec{a}}_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \times \delta \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{a}}_i \times \delta \vec{r}_i \end{aligned}$$

де відкинуто величини другого порядку малості. Останні два доданки зводяться до похідної умови (16.3), а перший доданок описує обертання молекули як цілого у випадку, коли атоми розташовані у положенні рівноваги. \lrcorner

Таким чином у загальному випадку число коливальних ступенів вільності N -атомної молекули складає $3N - 6$. За допомогою зв'язків (16.2) та (16.3) можна виключити довільні 6 ступенів вільності з функції Лагранжа¹ і тим самим спростити характеристичне рівняння для частот коливань.

Якщо молекула є плоскою (у положенні рівноваги атоми перебувають у площині), або лінійною (вздовж прямої), то відокремлення різних типів руху можна провести детальніше:

- *просторова молекула*: загалом $3N$ ступенів вільності, з них можна виключити 3 поступальні та 3 обертальні, задача зведеться до $3N - 6$ ступенів вільності²;
- *плоска молекула*: загалом $3N$ ступенів вільності, з них $2N$ описують рух у площині і N — вихід з площини. Якщо рух плоский (у площині), то можна виключити дві поступальні ступені вільності і одну обертальну, залишиться $2N - 3$ ступенів вільності для коливань у цій площині. Для зміщень поза площиною коливальних ступенів вільності буде $N - 3$ (три відповідають поступальним переміщенням площини);
- *лінійна молекула*: N ступенів вільності відповідають переміщенням вздовж осі молекули, з них одна поступальна та $N - 1$ коливальних. Для переміщень, що

¹ У реальних задачах просте вираження одних координат через інші зі зв'язків як правило призводить до громіздкого виразу для функції Лагранжа. Досить часто зручно провести додаткове перетворення координат, вибираючи деякі характерні комбінації у рівняннях зв'язків як нові координати (див. приклад далі).

² Винятком є лінійна молекула у просторі, де обертальних ступенів вільності буде не 3 а 2 (обертання відносно власної осі враховувати не потрібно).

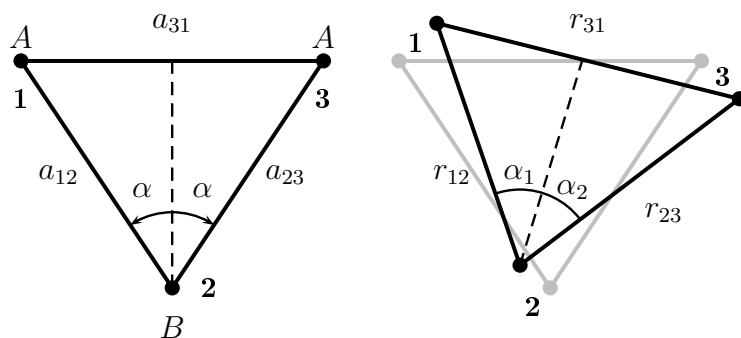


Рис. 16.2. Положення рівноваги та зміщення молекули АВА.

змінюють форму молекули буде $2N-4$ (одну обертальну ступінь вільності відкидаємо, оскільки вона відповідає поворотам навколо осі молекули). Виявляється, однак, що *різних* коливальних ступенів вільності у напрямках, перпендикулярних до осі молекули, буде вдвічі менше (оскільки простір для перпендикулярних коливань двовимірний, а переміщення молекули у двох незалежних ортогональних напрямках будуть однаковими).

2. ТРИАТОМНА МОЛЕКУЛА. Для прикладу розглянемо коливання симетричної молекули АВА (прикладом можуть бути молекули CO_2 та H_2O) Нехай рух відбувається у площині (x, y) , тоді функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(m_A \dot{r}_1^2 + m_B \dot{r}_2^2 + m_A \dot{r}_3^2) - \frac{k_{12}}{2}(r_{12} - a_{12})^2 - \frac{k_{23}}{2}(r_{23} - a_{23})^2 - \frac{k_{31}}{2}(r_{31} - a_{31})^2, \quad (16.4)$$

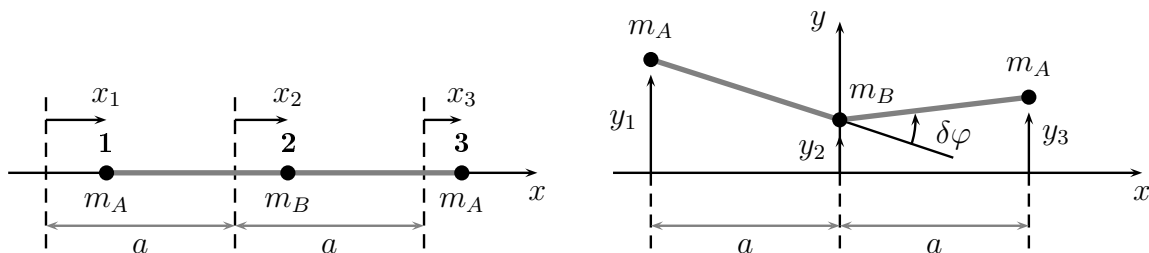
де \vec{r}_i задають положення частинок, а a_{ij} — відстані між ними у положенні рівноваги. Для симетричної молекули жорсткості, що описують гармонічну взаємодію частинок $\langle 1 \rightarrow 2 \rangle$ $\langle 2 \rightarrow 3 \rangle$ будуть однаковими. У положенні рівноваги молекула має форму рівнобедреного трикутника (рис. 2).

Потенціальну енергію потрібно остаточно записати у термінах відхилень від положень рівноваги, для цього запишемо $\vec{r}_i = \vec{a}_i + \delta\vec{r}_i$. У кінетичній енергії з'являться похідні приростів радіус-векторів, потенціальну енергію потрібно розкласти у ряд Тейлора по компонентах приростів $\delta\vec{r}_i$. З точністю до величин першого порядку малості матимемо:

$$r_{ij} - a_{ij} = \sqrt{(\vec{a}_{ij} + \delta\vec{r}_{ij})^2} - a_{ij} = a_{ij} \sqrt{1 + \frac{2\delta\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}}{a_{ij}^2} + \frac{\delta\vec{r}_{ij}^2}{a_{ij}^2}} - a_{ij} \simeq \frac{\delta\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}}{a_{ij}}, \quad (16.5)$$

після підстановки лінійного наближення для зміни довжини до функції Лагранжа отримаємо квадратичні по відхиленнях доданки. У випадку, коли задано дві довжини та кут у положенні рівноваги (як на рис. 2), то видовження r_{31} можна записати інакше (врахуємо симетрію молекули):

$$a_{31} = 2a \sin \alpha, \quad r_{31} = r_{12} \sin \alpha_1 + r_{23} \sin \alpha_2$$

Рис. 16.3. Поздовжні та поперечні коливання молекули CO_2 .

якщо ввести відхилення кутів від рівноважних значень $\alpha_{1,2} = \alpha + \delta\alpha_{1,2}$, то у першому порядку отримаємо:

$$\begin{aligned} r_{31} - a_{31} &= (a + \delta r_{12}) \sin(\alpha + \alpha_1) + (a + \delta r_{23}) \sin(\alpha + \delta\alpha_2) - 2a \sin \alpha \\ &\simeq (\delta r_{12} + \delta r_{23}) \sin \alpha + a \cos \alpha \underbrace{(\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2)}_{2\delta\alpha}. \end{aligned}$$

Після підстановки до функції Лагранжа замість компонент вектора $\delta\vec{r}_{31}$ з'являється інша мала величина $\delta\alpha$. У більшості випадків перехід від координат до кутів не дає відчутного виграшу за винятком лінійної молекули, коли $\alpha = \pi/2$. Тоді видовження $r_{31} - a_{31}$ повністю виражається через кут і можна говорити, що потенціальна енергія залежить від змін довжин між найближчими сусідами та від кута, що відповідає згину молекули. Легко бачити, що доданки потенціальні енергії, що відповідають видовженням та згинам входять до потенціальної енергії як окремі та незалежні доданки і описують поздовжні та поперечні коливання, тому аналізувати ці рухи можна окремо (це дає суттєве спрощення). У загальному випадку трикутної молекули відокремити ці рухи не можна. Цей висновок про особливості руху лінійної молекули матиме місце і для більшої кількості атомів (не обов'язково симетрично розташованих).

Приклад 1. Коливання лінійної молекули ABA (молекула CO_2).

◀ Розділимо коливання на поздовжні (змінюють відстані) та поперечні (змінюють кут між ланками молекули).

Поздовжні коливання. Позначимо відхилення частинок від положень рівноваги x_i (просторову конфігурацію наведено на рис. 16.3, A та B позначають атоми кисню та вуглецю відповідно). Тоді функція Лагранжа для поздовжніх зміщень матиме вигляд:

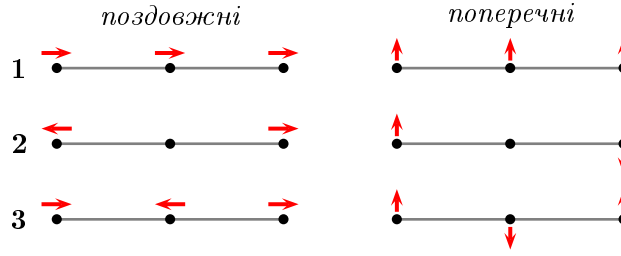
$$L_{\parallel} = \frac{1}{2}(m_A \dot{x}_1^2 + m_B \dot{x}_2^2 + m_A \dot{x}_3^2) - \frac{k_{\parallel}}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2].$$

Виділимо матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_A & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 \\ 0 & 0 & m_A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{\parallel} & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 2k_{\parallel} & -k_{\parallel} \\ 0 & -k_{\parallel} & k_{\parallel} \end{pmatrix},$$

Запишемо рівняння для визначення амплітуд:

$$\begin{pmatrix} k_{\parallel} - m_A \omega^2 & -k_{\parallel} & 0 \\ k_{\parallel} & 2k_{\parallel} - m_B \omega^2 & -k_{\parallel} \\ 0 & -k_{\parallel} & k_{\parallel} - m_A^2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Рис. 16.4. Моді поздовжніх молекули CO_2 .

Обчислення визначника (для спрощення проміжних перетворень доцільно винести k_{\parallel}) дає характеристичне рівняння з розв'язками:

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k_{\parallel}}{m_A}, \quad \omega_3^2 = \frac{k_{\parallel}M}{m_A m_B}, \quad \text{де } M = 2m_A + m_B.$$

Підставляючи частоти назад до однорідних рівнянь для визначення амплітуд (корені характеристичного є однаковими, тому у системі після підстановки можна відкинути одне з рівнянь), знайдемо амплітуди з точністю до множника:

$$\vec{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/M \\ 1 \end{pmatrix},$$

індекс у дужках позначає номер частоти. Загальний розв'язок рівняння руху для малих відхилень є лінійною комбінацією мод з довільними коефіцієнтами, які можна визначити з початкових умов. Відмітимо, що для нульової частоти розв'язок буде не експонентою, а сталою. Оскільки нульова частота виходить двократно виродженою, то згідно із загальною теорією диференціальних рівнянь другим незалежним розв'язком рівняння другого порядку буде лінійна функція³. Для відмінних від нуля частот фундаментальними розв'язками будуть експоненти з різними знаками (або еквівалентні тригонометричні функції). Таким чином,

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1^{(1)} + C_2^{(1)}t), \quad \vec{x}^{(2)} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_2 t}, \quad \vec{x}^{(3)} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/M \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm i\omega_3 t}$$

(для розв'язку з нульовою частотою сталі з амплітуди та лінійної функції записано разом).

Відмітимо характер руху частинок для окремо взятих мод. Для моди з частотою $\omega_1 = 0$ частинки зміщуються вздовж прямої на однакові відстані, що відповідає руху як цілого. У такій моді відхилення від положення рівноваги не відбувається. Для руху з частотою ω_2 центральна частинка нерухома, а дві інші коливаються у різних напрямках. Для третьої моди зміщення центральної частинки буде протилежним до крайніх. Схеми руху наведено на 16.4. Паралельне переміщення молекули можна виключити за допомогою фіксації положення центру мас:

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_A x_3 = 0,$$

³ Це можна побачити безпосередньо з того, що у рівнянні $\mathbf{M}\ddot{\vec{x}} = -\mathbf{K}\vec{x}$ розв'язок типу $\vec{x} = \vec{A}e^{\lambda t}$ з $\lambda = 0$ передбачає $\mathbf{K}\vec{A} = 0$, це означає $\mathbf{M}\ddot{\vec{x}} = 0$, тобто залежність \vec{x} від часу буде лінійною.

тоді задача зведеться до аналізу двох ступенів вільності. Якщо виразити звідси x_2 через $x_{1,3}$ і підставити до функції Лагранжа, то матимемо:

$$L_{red} = \frac{m_A}{2} [(1+\gamma)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + 2\gamma\dot{x}_1\dot{x}_3] - \frac{k}{2} [(\gamma^2 + (1+\gamma)^2)(x_1^2 + x_3^2) + 4\gamma(1+\gamma)x_1x_3], \quad \gamma = \frac{m_A}{m_B}.$$

Поперечні коливання. У випадку малої деформації молекули потенціальна енергія залежатиме від кута, який можна виразити через декартові координати. Введемо коефіцієнт Гука для поперечного зсуву, тоді

$$U = \frac{k_{\perp}}{2} a^2 (\delta\varphi)^2,$$

де a — відстань між частинками у положенні рівноваги, а $\delta\varphi$ — кут деформації молекули (див. рис. 16.3). Розділимо кут $\delta\varphi$ на дві частини $\delta\varphi_1$ та $\delta\varphi_2$, які відповідають згинам кожної ланки, тоді можна наближено записати:

$$\operatorname{tg} \delta\varphi_1 = \frac{y_1 - y_2}{a}, \quad \operatorname{tg} \delta\varphi_2 = \frac{y_3 - y_2}{a}, \quad \delta\varphi = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2.$$

для малих кутів $\operatorname{tg} \varphi \simeq \varphi$, тому $\delta\varphi \simeq (y_1 + y_3 - 2y_2)/2$. Таким чином, функцію Лагранжа для поперечних відхилень можна подати у вигляді:

$$L_{\perp} = \frac{1}{2} (m_A \dot{y}_1^2 + m_B \dot{y}_2^2 + m_A \dot{y}_3^2) - \frac{k_{\perp}}{2} (y_1 - 2y_2 + y_3)^2.$$

Матриці \mathbf{M} , \mathbf{K} мають вигляд:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_A & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 \\ 0 & 0 & m_A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{\perp} & -2k_{\perp} & k_{\perp} \\ -2k_{\perp} & 4k_{\perp} & -2k_{\perp} \\ k_{\perp} & -2k_{\perp} & k_{\perp} \end{pmatrix}.$$

Запишемо рівняння для визначення амплітуд:

$$\begin{pmatrix} k_{\perp} - m_A \omega^2 & -2k_{\perp} & k_{\perp} \\ -2k_{\perp} & 4k_{\perp} - m_B \omega^2 & -2k_{\perp} \\ k_{\perp} & -2k_{\perp} & k_{\perp} - m_A \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначник матриці системи однорідних рівнянь, отримаємо частоти:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^2 = 2k_{\perp} \frac{M}{m_A m_B}, \quad M = 2m_A + m_B.$$

нульова частота буде кратною. Підстановка частот до рівняння з амплітудами дає:

$$\vec{A}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \frac{1}{2}(A_1 + A_3) \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(3)} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -m_B/2m_A \\ 1 \end{pmatrix},$$

Для кратної частоти можна виразити тільки одну компоненту через дві інші, тому значення амплітуд утворюють площину у просторі (x_1, x_2, x_3) . Виберемо у ній незалежних представників, покладаючи $A_1 = A_3 = C_1$ та $A_1 = -A_3 = C_2$, тоді моди коливань матимуть вигляд:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1^{(1)} + C_2^{(1)} t), \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (C_1^{(2)} + C_2^{(2)} t), \quad \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_B/m_A \\ 1 \end{pmatrix} C_3 e^{i\omega_3 t}$$

(у виразах $\vec{x}^{(1,2)}$ довільні числові множники об'єднано зі сталими лінійної функції). Перша та друга моди описують відповідно зсув молекули та її обертання як цілого. Третя мода задає коливальний рух, що супроводжується деформацією молекули, при цьому крайні частинки відхиляються в один бік на однакові відстані, а центральна рухається у протилежному напрямку (рис. 16.4).

Як і для поздовжніх зміщень, обертання та зміщення як цілого можна виключити, якщо зафіксувати центр мас у початку координат

$$m_A y_1 + m_B y_2 + m_A y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -\frac{m_A}{m_B}(y_1 + y_3)$$

і виключити з розгляду обертання:

$$m_A \vec{a}_1 \times \delta \vec{r}_1 + m_B \vec{a}_2 \times \delta \vec{r}_2 + m_A \vec{a}_3 \times \delta \vec{r}_3 = 0,$$

де \vec{a}_i описують положення частинок у стані рівноваги молекули. Оскільки центр мас у стані рівноваги збігається з положенням центральної частинки, то останній вираз для випадку, коли початок координат вибрано у центрі мас буде

$$m_A \vec{e}_x(-a) \times \vec{e}_y y_1 + m_A \vec{e}_x(a) \times \vec{e}_y y_3 = 0$$

звідки $y_1 = y_3$. Таким чином, зв'язки між координатами мають вигляд:

$$y_1 = y_3 := y, \quad y_2 = -2\gamma y, \quad \text{де} \quad \gamma = \frac{m_A}{m_B}.$$

Підстановка до функції Лагранжа дає:

$$L_{red} = m_A(1 + 2\gamma)\dot{y}^2 - 2k(1 + 2\gamma)^2 y^2.$$

Така функція Лагранжа описує систему з однією ступінню вільності, частоту коливань легко знайти, якщо поділити коефіцієнти при y^2 та \dot{y}^2 , результат збігатиметься з попереднім. ►

Приклад 2. Коливання трикутної молекули АВА (молекула Н₂О).

◀ Систему координат наведено на рис. 16.5. Функція Лагранжа має вигляд (16.4), де прирости довжин потрібно виразити у лінійному наближенні (16.5). Силкові сталі позначимо $k_{12} = k_{23} = k_1$ та $k_{31} = k_2$.

Оскільки у даній системі координат

$$\begin{aligned} \vec{a}_{12} &= (-a \sin \alpha, a \cos \alpha), \\ \vec{a}_{23} &= (-a \sin \alpha, -a \cos \alpha), \\ \vec{a}_{31} &= (2a \sin \alpha, 0), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} r_{12} - a_{12} &= -\delta x_{12} \sin \alpha + \delta y_{12} \cos \alpha, \\ r_{23} - a_{23} &= -\delta x_{23} \sin \alpha - \delta y_{23} \cos \alpha, \\ r_{31} - a_{31} &= \delta x_{31}. \end{aligned}$$

Позначимо $\delta x_{ij} = x_i - x_j$ та $\delta y_{ij} = y_i - y_j$ (для скорочення опускаючи символ “ δ ”). Задача матиме 6 ступенів вільності і частоти доведеться шукати з визначника 6×6 матриці, що

приведе до громіздких перетворень. Для спрощення пошуку частот коливань виключимо поступальний та обертальний рухи молекули як цілого. Фіксація положення центру мас дає:

$$m_A(\delta\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_3) + m_B\delta\vec{r}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_A(x_1 + x_3) + m_Bx_2 = 0 \\ m_A(y_1 + y_3) + m_By_2 = 0 \end{cases}$$

(для скорочення позначення δ у проекціях зміщень $\delta\vec{r}_i$ опускатимемо). Умова відсутності обертання:

$$m_A(\vec{a}_1 \times \delta\vec{r}_1 + \vec{a}_3 \times \delta\vec{r}_3) + m_B\vec{a}_2 \times \delta\vec{r}_2 = 0$$

У даній системі координат рівноважні положення $\vec{a}_{1,3}$ з точністю до напрямків збігаються з рівноважними відносними радіус-векторами, а $\vec{a}_2 = 0$, тому проектуємо векторне рівняння на вісь z , отримаємо:

$$(y_1 - y_3) \sin \alpha + (x_1 + x_3) \cos \alpha = 0.$$

Таким чином, використовуючи три рівняння зв'язку, можна зменшити число ступенів вільності з шести до трьох. Очевидно, доцільно буде виключити координати другої частинки та одну з координат першої та третьої частинки. Однак подальша підстановка приведе до громіздкої функції Лагранжа. Щоб спростити обчислення окрім виключення координат виконаємо також їх перетворення, беручи як нові координати комбінації, що фігурують у рівняннях зв'язків:

$$q_1 = x_1 + x_3, \quad q_2 = y_1 + y_3, \quad q_3 = x_1 - x_3$$

перші дві фігурують у зв'язках на центр мас, останній вираз взято як лінійно незалежний від інших (різницю $y_1 - y_3$ брати вже не можна, оскільки вона фігурує у зв'язку на момент імпульсу разом з уже використаною комбінацією). Беручи до уваги зв'язки, маємо вирази для координат через незалежні параметри:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(q_1 + q_3), & x_2 &= -\gamma q_1, & x_3 &= \frac{1}{2}(q_1 - q_3), \\ y_1 &= \frac{1}{2}(q_2 - q_1 \operatorname{ctg} \alpha), & y_2 &= -\gamma q_2, & y_3 &= \frac{1}{2}(q_2 + q_1 \operatorname{ctg} \alpha), \end{aligned}$$

де $\gamma = \frac{m_A}{m_B}$. Зміни довжин через нові координати:

$$\begin{aligned} r_{12} - a_{12} &= -\frac{1}{2} \left(2\gamma + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha q_1 + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha q_2 - \frac{1}{2} \sin \alpha q_3, \\ r_{23} - a_{23} &= +\frac{1}{2} \left(2\gamma + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha q_1 + \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha q_2 - \frac{1}{2} \sin \alpha q_3, \\ r_{31} - a_{31} &= q_3. \end{aligned}$$

Підстановка до функції Лагранжа дає:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_A}{4} \left[\left(2\gamma + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \dot{q}_1^2 + (2\gamma + 1) \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 \right] \\ &\quad - \frac{k_1}{4} \left(2\gamma + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)^2 \sin^2 \alpha q_1^2 - \frac{k_1}{4} [q_2(2\gamma + 1) \sin \alpha - q_3 \sin \alpha]^2 - \frac{k_2}{2} q_3^2. \end{aligned}$$

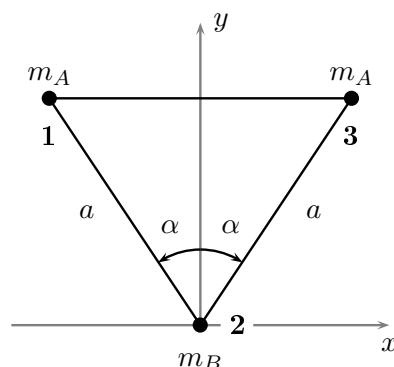
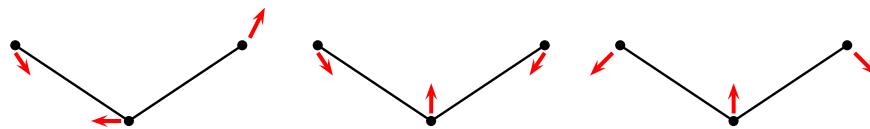


Рис. 16.5. Коливання молекули H_2O .

Рис. 16.6. *Моди коливань молекули H₂O.*

Легко бачити, що доданки з координатою q_1 можна відокремити від інших, тому ця змінна є однією з нормальних координат. Їй відповідатиме окреме рівняння руху, тому частоту легко знайти, поділивши коефіцієнти:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_A}(1 + 2\gamma \sin^2 \alpha).$$

Характер коливання можна визначити, звівши функцію Лагранжа тільки для цієї моди (оскільки вона відповідає нормальній координаті). Для цього потрібно покласти $q_2 = q_3 = 0$, що еквівалентно $x_1 = x_3$ та $y_1 = -y_3$. Вигляд цієї моди наведено на рис. 2 (перша мода). Для лінійної молекули $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ і $\omega_1^2 \rightarrow \frac{k_1 M}{m_A m_B}$, що відповідає одній з частот поздовжніх коливань.

Для координат $q_{2,3}$ запишемо матриці \mathbf{M} та \mathbf{K}

$$\mathbf{M} = \frac{m_A}{2} \begin{pmatrix} 2\gamma + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{k_1}{4} \begin{pmatrix} (2\gamma + 1)^2 \sin^2 \alpha & -(2\gamma + 1) \sin^2 \alpha \\ (2\gamma + 1) \sin^2 \alpha & 1 + \frac{2k_2}{k_1} \end{pmatrix},$$

квадрати частот $\omega_{2,3}^2$ будуть розв'язками відповідного характеристичного рівняння (який запис пропонується як вправа для читача). Моді коливань наведено на рис. 2. ►

3. ВПЛИВ СИМЕТРІЇ МОЛЕКУЛИ НА ХАРАКТЕР РУХУ. У випадках, коли просторове розташування атомів у молекулі має певну симетрію, можна суттєво спростити аналіз за допомогою методів теорії груп (а інколи просто беручи до уваги саму симетрію).

Найпростіший спосіб знайти частоти коливань полягає у вдалому введенні нормальних координат $Q_\alpha = Q_\alpha(\vec{r})$, для яких

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} k_{ij} x_i x_j \quad \Rightarrow \quad L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha} - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2),$$

з форми запису функції Лагранжа одразу можна визначити частоти. Перехід до нормальних координат еквівалентний або розв'язку характеристичного рівняння (з відповідним аналізом амплітуд), або задачі про одночасну діагоналізацію матриць \mathbf{M} та \mathbf{K} . За технічною складністю ці задачі є подібними. Виявляється, що за допомогою аналізу симетрій системи можна знайти вирази для нормальних координат, обминаючи громіздкі процедури розкривання визначників (які зазвичай виникають у спектральних задачах).

Нехай задано перетворення координат

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathbf{U} \vec{r}$$

(\mathbf{U} є деякою матрицею зі сталими коефіцієнтами) для механічної системи, яку задано за допомогою функції Лагранжа $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$. Якщо функція Лагранжа не змінюється у випадку такої заміни координат, то це означає, що система є симетричною

відносно цього перетворення. Спеціальний інтерес являють ортогональні перетворення, для яких

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{1}$$

(наприклад, повороти та відбивання), та перетворення з умовою

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{1}$$

(перестановки та відбивання), у такому випадку повторне перетворення еквівалентне до тотожного. Для перетворень симетрії останнього типу можна отримати прості наслідки, які базуються на такому твердженні: якщо \vec{r} описує деяке нормальне коливання механічної системи, то $\mathbf{U}\vec{r}$ також описує нормальне коливання з тією самою частотою (це випливає з інваріантності функції Лагранжа та рівнянь руху). Зокрема, це означає:

- Якщо частота є невідірженою, то $\mathbf{U}\vec{r} = q\vec{r}$ (q є числовим множником). Оскільки

$$\mathbf{U}\mathbf{U}\vec{r} = q\mathbf{U}\vec{r} = q^2\vec{r} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad q^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad q = \pm 1,$$

тобто коливання, що задано залежностями $\vec{r}(t)$ є або симетричним відносно перетворення (що означає $\mathbf{U}\vec{r} = \vec{r}$), або антисиметричним (тобто $\mathbf{U}\vec{r} = -\vec{r}$).

- Якщо частота є виродженою, то $\mathbf{U}\vec{r}$ не обов'язково пропорційна до \vec{r} , однак комбінації $\vec{r} \pm \mathbf{U}\vec{r}$ будуть нормальними коливаннями з тією самою частотою, причому перше буде симетричним відносно перетворення, а друге антисиметричним.

Простим прикладом є молекула CO_2 , читачу пропонується самостійно сформулювати її симетрії та наслідки з них.

У загальному випадку аналіз симетрій спирається на теорію груп. Її використання виходить далеко за межі курсу механіки, деталі можна знайти, наприклад, у [23] та [24]. Основна стратегія зводиться до пошуку нормальних координат з міркувань симетрії, для цього використовують перетворення

$$Q_\alpha = T_{\alpha i} q_i,$$

матриця $T_{\alpha i}$ визначається властивостями симетрії молекули. Після цього можна знайти частоти записуючи функцію Лагранжа у нормальних координатах (насправді використовують більш просте обчислення саме для визначення частот, оскільки у функції Лагранжа особливої потреби немає).

4. Лінійні ланцюжки. У випадку молекули, що складається з великого числа атомів знайти частота та провести аналіз коливань окремих мод досить важко, оскільки доводиться аналізувати систему лінійних рівнянь великої розмірності (та розв'язувати характеристичне рівняння високого порядку). Найпростішим частинним випадком лінійних коливань системи з великим числом ступенів вільності, який порівняно легко аналізувати, є лінійний ланцюжок, який є набором частинок, розташованих вздовж прямої. Частинок які взаємодіють Сили взаємодії частинок між собою потенціальні і допускають існування положення рівноваги (як для молекул). Тоді можна перейти до гармонічного наближення і враховувати взаємодію тільки між кількома найближчими сусідами.

Така система є найпростішою дискретною моделлю кристалічного твердого тіла, де атоми розташовані у вузлах періодичної просторової структури, яка називається *кристалічною ґраткою*. Вони утримуються поблизу положень рівноваги силами міжатомної взаємодії, які є короткодійними і найбільш суттєвий внесок дається силами дії з боку атомів, розташованими у найближчих вузлах ґратки (таке наближення добре виконується для твердого аргона, див. [33]). Багато фізичних характеристик кристалів можна описати у термінах частот коливань ґратки (викликаних, наприклад, тепловим рухом), гарне уявлення про які можна отримати з простої механічної моделі ланцюжка відповідної розмірності.

Проста дискретна модель грає також важливу роль у квантовій теорії твердого тіла. Дійсно, у такому впорядкованому середовищі як лінійний ланцюжок будуть поширюватись хвилі (деформацій) з певним законом дисперсії $\omega = \omega(\vec{k})$. У квантовій теорії кожному хвильовому процесу співставляється квазічастинка — осцилятор, який коливається з тією самою частотою ω . Згідно з правилами де Бройля, її імпульс буде $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, $E = \hbar \omega$. У русі такої квазічастинки зосереджено інформацію про загальний колективний рух всіх реальних частинок, які складають систему.

Ми розглянемо найпростіші моделі одновимірних кристалів у вигляді лінійних ланцюжків. Детальний огляд коливань у кристалічних структурах можна знайти, наприклад, у [33], [34] та [35].

Розглянемо систему N частинок, розташованих вздовж горизонтальної прямої, координату вздовж якої позначимо ξ . Положення i -ї частинки можна записати як

$$\xi_i(t) = \xi_{i0} + x_i(t),$$

де ξ_{i0} — положення частинки у стані рівноваги системи, а x_i — її відхилення вздовж прямої.

Якщо частинки взаємодіють за однаковим законом $U(\xi_{ij})$, де $\xi_{ij} = |\xi_i - \xi_j|$, то повна потенціальна енергія системи буде

$$U = \frac{1}{2} \sum'_{i,j=1}^N U(\xi_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} U(\xi_{ij}) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i,$$

де U_i — потенціальна енергія взаємодії i -ї частинки з усіма іншими.

У наближенні малих відхилень та короткодійних сил взаємодії можна вважати, що на i -ту частинку діють тільки два найближчі сусіди,

$$U_i \simeq U_{i,i-1} + U_{i,i+1},$$

і потенціали можна розкласти за формулою Тейлора у околі положень рівноваги. На i -ту частинку діє сила

$$F_i = -\frac{\partial U_i}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} [U_{i,i-1} + U_{i,i+1}] = U'(\xi_{i,i+1}) - U'(\xi_{i,i-1}),$$

яка у положенні рівноваги рівна нулю, тому при $\xi_i = \xi_{i0}$ отримаємо зв'язок між похідними:

$$U'(\xi_{0,i+1} - \xi_{0,i}) = U'(\xi_{0,i} - \xi_{0,i-1}).$$

Це означає, що для ланцюжка з однаковими одночастинковими потенціалами взаємодії відстані між сусідніми частинками у положенні рівноваги — скрізь однакові. У загальному випадку аналогічне співвідношення дає рівняння для визначень положень рівноваги.

Розкладаючи у ряд в околі відстані між положеннями рівноваги, яку позначимо $a = |\xi_{0,i\pm 1} - \xi_{0,i}|$, отримаємо:

$$U_{i,i+1} \equiv U(\xi_{i,i+1}) = U(a) + U'(a)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}U''(a)(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots$$

$$U_{i,i-1} \equiv U(\xi_{i,i-1}) = U(a) + U'(a)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}U''(a)(x_i - x_{i-1})^2 + \dots$$

У результаті, беручи до уваги той факт, що у першій та останній частинки немає сусідів, знайдимо сумарну потенціальну енергію системи:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i(r_i) = \sum_{i=1}^N [U_{i,i+1} + U_{i,i-1}] = NU(a) + U'(a)(x_N - x_1) + \frac{1}{2}U''(a) \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Сталі $U(a)$, які у сумі даватимуть потенціальну енергію ланцюжка як абсолютно твердого тіла (тобто енергію системи у положенні рівноваги), можна відкинути. Доданок з $U'(a)$ виражає вплив граничних умов, які накладаються на ланцюжок у першій та останній точці. Величини x_1 та x_N можуть бути відомими і тоді цей доданок можна відкинути. У більш складних випадках межові ефекти враховуються окремо залежно від природи системи.

Таким чином,

$$U = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2 + \langle \text{межові доданки} \rangle, \quad k = U''(a) > 0, \quad (16.6)$$

механічним аналогом такої системи є набір пружинок з жорсткостями k , які з'єднують частинки. Потенціальна енергія i -ї частинки складається з потенціальних енергій пружинок, які її з'єднують з правим та лівим сусідом:

$$U_i = \frac{k}{2} [(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - x_{i-1})^2].$$

Зауважимо, що кожний доданок такого типу дає добавку до потенціальної енергії пружини по відношенню до положення рівноваги (а не деформованого стану). Енергія пружини у положенні рівноваги є сталою величиною і відкидається. У результаті, для аналізу коливального руху ланцюжка інформація про положення рівноваги є несуттєвою.

Аналогічно можна отримати вирази для потенціальних енергій більш загальних неоднорідних ланцюжків (з нерівномірним розподілом мас чи коефіцієнтів пружності). Такий ланцюжок також зведеться до простої механічної моделі з'єднаних осциляторів.

Приклад 3. Поздовжні коливання лінійного одночастинкового ланцюжка із закріпленими кінцями.

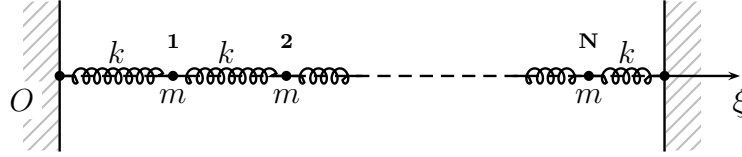


Рис. 16.7. Лінійний одночастинковий ланцюжок.

◀ Розглянемо систему N ідентичних частинок з масами m , розташованих на горизонтальній прямій (рис. 4), які з'єднані однаковими пружинками з жорсткістю k .

Межові умови відповідають закріплення першої та останньої частинки до нерухомих стінок, розташованих у точках з координатами $\xi = 0$ та $\xi = L$ пружинами тієї самої жорсткості. Кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \sum_{n=1}^N \frac{m\dot{x}_n^2}{2} \equiv \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2.$$

Потенціальну енергію системи з точністю до сталих доданків можна записати за допомогою змін довжин пружин відносно стану рівноваги системи (а не відносно недеформованого стану):

$$U = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (x_{n+1} - x_n)^2 + \frac{k}{2} x_N^2,$$

де перший та останній доданок відповідають потенціальним енергіям першої та останньої пружини відповідно. У такому записі межові умови вже враховано — у першій та останній пружин зміщується тільки той кінець, до якого прикріплена частинка.

Функцію Лагранжа можна записати за допомогою матриць масових та пружних сталих:

$$L = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} k_{ij} x_i x_j,$$

де матриці \mathbf{M} та \mathbf{K} мають вигляд:

$$\mathbf{M} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = m\mathbf{1}, \quad \mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

тобто \mathbf{M} є діагональною матрицею, пропорційною до одиничної, а \mathbf{K} — тридіагональною, зі сталими елементами на кожній діагоналі.

Далі розв'язок можна пробовжити стандартним шляхом, скориставшись для пошуку коренів характеристичного рівняння $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ властивостями тридіагональних матриць.

Зауваження. Визначник тридіагональної матриці можна отримати за допомогою рекурентного співвідношення. Якщо

$$D_n(\lambda) = \left(\begin{array}{c|ccc} D_{n-2} & & & 0 \\ \hline 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} - \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{array} \right)$$

то розкриваючи визначник по останньому рядку, отримаємо:

$$|D_n(\lambda)| = |D_{n-1}|(a_{nn} - \lambda) - |D_{n-2}|(\lambda)a_{n,n-1} \cdot a_{n-1,n}, \quad |D_0| = |D_{-1}| = 1, \quad (16.7)$$

це дає рекурентне співвідношення для розкривання визначника. \perp

Очевидним недоліком такого підходу є необхідність розкривання визначника $n \times n$ для пошуку коренів характеристичного рівняння (хоч як раз для лінійного ланцюжка розв'язати таку задачу досить просто). Однак для даної та аналогічних задач існує інший метод пошуку частот, простіший з технічного боку і загальніший за можливостям подальших застосувань. Він полягає у тому, що задачу на пошук частот та амплітуд потрібно сформулювати як межу задачу на основі рівнянь руху (без використання їх формальних наслідків на зразок готового характеристичного рівняння).

Рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{частинка } n = 1: & \quad m\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2), \\ \text{частинки } n = \overline{2, N-1}: & \quad m\ddot{x}_n = -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}), \\ \text{частинка } n = N: & \quad m\ddot{x}_N = -k(2x_N - x_{N-1}), \end{aligned}$$

Для запису системи у вигляді однотипних рівнянь доповнимо ланцюжок двома *фіктивними* частинками з номерами $n = 0$ (ліворуч першої) та $n = N + 1$ (праворуч останньої), які закріплені на відповідних стінках. Це означає, їх що рівняння руху — тривіальні і зводяться до межових умов $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 0$ (маси тут не фігурують і можуть вважатись такими самими, як і інших частинок). Тоді система рівнянь руху матиме вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = -\omega_0^2(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}), & n = \overline{1, N}, \\ x_0 = 0, & x_N = 0, \end{cases} \quad (16.8)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ — стала розмірності квадрату частоти (коливань однієї частинки на пружині). Така процедура дозволяє врахувати межові умови явно у рівняннях руху, цю роль відіграють рівняння для частинки з номерами 0 та $N + 1$.

Для розв'язку цієї системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами виконаємо стандартну підстановку

$$x_n = A_n e^{i\omega t},$$

де A_n — амплітуда коливань n -ї частинки, тоді після підстановки матимемо:

$$(\omega^2 - 2\omega_0^2)A_n + \omega_0^2(A_{n-1} + A_{n+1}) = 0.$$

Таке співвідношення є різницеvim рівнянням другого порядку, яке має два лінійно незалежні розв'язки типу $A_n = Cq^n$, де C та q — деякі сталі, взагалі кажучи, комплексні⁴. Підстановка до рівняння дає

$$q + \frac{1}{q} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 - \omega_0^2 \left(q + \frac{1}{q} \right),$$

⁴ Така форма розв'язку очевидна після запису рівняння у формі

$$\frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{A_n} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}.$$

Число n не входить до правої частини, тому й ліва частина не залежить від n . Це автоматично означає, що залежність A_n від n може бути тільки степеневою і скорочується під час обчислення частки.

Для експоненційної форми запису $q = |q|e^{i\varphi}$. Якщо обмежитись розглядом суто коливальних процесів, то потрібно вимагати $\omega^2 > 0$. Із останнього співвідношення випливає, що це можливо у таких випадках:

- якщо $q < 0$;
- якщо $|q| = 1$, тобто $q = e^{i\varphi}$.

Аналіз першого випадку пропонується як вправа для читача (задача 16.2). Розглянемо другий випадок: $q + q^{-1} = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ і

$$\omega^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos \varphi) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

що дає вираз для частоти через поки що невідомий параметр φ , який має зміст зсуву фаз коливань між сусідніми частинками.

Загальний розв'язок різницевого рівняння має вигляд лінійної комбінації двох фундаментальних розв'язків з довільними сталими:

$$x_n(t) = (A_+ e^{in\varphi} + A_- e^{-in\varphi}) e^{i\omega t}. \quad (16.9)$$

Розв'язок описує дві хвилі, які поширюються у протилежних напрямках. Параметр φ фактично описує різницю фаз між коливаннями сусідніх частинок. Для пошуку A_{\pm} та параметра φ розглянемо межові умови.

Умова 1. Для частинки з $n = 0$ маємо умову нерухомості у довільний момент часу: $x_0(t) = A_+ + A_- = 0$, тому $A_+ = -A_- = A$ і розв'язок можна тепер записати як

$$x_n(t) = 2iA \sin n\varphi e^{i\omega t}.$$

Умова 2. Для частинки з $n = N + 1$ діємо так само:

$$x_{N+1}(t) = 2iA \sin(N+1)\varphi e^{i\omega t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \sin(N+1)\varphi = 0.$$

Це означає, що

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{N+1} := \varphi_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z},$$

тобто з межових умов отримано набір значень можливих параметра φ , і, відповідно, спектр частот ω_α , значення яких визначається цілим числом α . Оскільки φ_α фігурує тільки як аргумент тригонометричних функцій у формулах для частоти та відхилення (а саме як $\cos n\varphi_\alpha$ та $\sin n\varphi_\alpha$), то починаючи з деякого α значення цих виразів почнуть повторюватися. Очевидно,

$$\omega_\alpha = \omega_{\alpha+2(N+1)} \quad \text{і} \quad \omega_\alpha = \omega_{N+1-\alpha},$$

тому можна обмежитись тільки значеннями $\alpha = \overline{1, N}$ (у випадку $\alpha = N + 1$ результат той самий, що і для $\alpha = 0$). Обидва значення можна пропустити, тому вони відповідають значенню⁵ $\omega = 0$). Таким чином,

$$\omega_\alpha = 2\omega_0 \sin \frac{\pi\alpha}{2(N+1)}, \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad (16.10)$$

⁵ А це означає відсутність руху, оскільки у випадку закріпленого ланцюжка поступального руху бути не може.

системі відповідає N власних частот коливань. Ці самі вирази можна отримати безпосередньо у результаті розв'язку характеристичного рівняння.

Моді коливання з номером α відповідає відхилення

$$x_n^{(\alpha)}(t) = 2iA^{(\alpha)} \sin n\varphi_\alpha e^{i\omega_\alpha t}.$$

Повний розв'язок має вигляд лінійної комбінації $x_n^{(\alpha)}$ з довільними коефіцієнтами, які ми об'єднаємо з невідомими амплітудними множниками:

$$x_n(t) = 2i \sum_{\alpha=1}^N A^{(\alpha)} \sin n\varphi_\alpha e^{i\omega_\alpha t}. \quad (16.11)$$

Комплексні амплітуди $A^{(\alpha)}$ виражаються через початкові умови. У дійсній формі розв'язок можна записати після підстановки $A^{(\alpha)} = |A^{(\alpha)}| e^{i\psi_\alpha}$ ($|A^{(\alpha)}|$ та ψ_α — дійсні амплітуда та фаза), і обчислення дійсної частини. Для підстановки початкових умов можна скористатися формулою ряду Фур'є по синусах для функції дискретної змінної:

$$f(\alpha) = \sum_{\beta=0}^{N+1} A_\beta \sin \frac{\pi\alpha\beta}{N+1} \Rightarrow A_\beta = \frac{1}{N+1} \sum_{\mu=0}^{N+1} f(\mu) \sin \frac{\pi\mu\beta}{N+1}.$$

Зауваження. Вираз (16.11) можна записати у вигляді, характерному для біжучої хвилі. Позначимо $\xi_n = na$ (метрична координата n -ї частинки у положенні рівноваги, яка еквівалентна її номеру). Тоді

$$\exp(in\varphi) = \exp\left(i\frac{n\varphi_\alpha}{na} na\right) = \exp(ik_\alpha \xi_n), \quad k_\alpha = \frac{n\varphi_\alpha}{na} \equiv \frac{\varphi_\alpha}{a} = \frac{\pi\alpha}{a(N+1)},$$

тобто $x_n^{(\alpha)} \sim e^{ik_\alpha \xi_n - i\omega_\alpha t}$, як для плоскої хвилі. Таким чином, параметр k_α відіграє роль хвильового вектора, а довжину хвилі можна визначити зі стандартного зв'язку $k_\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_\alpha}$, це дає $\lambda_\alpha = \frac{2a}{\alpha} (N+1)$. Найменша довжина хвилі буде для максимального значення $\alpha = N$, для $N \gg 1$ вона складає подвоєну відстань між частинками. У таких позначеннях частоту можна записати як

$$\omega_\alpha = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_\alpha}{2} = 2\omega_0 \sin \frac{k_\alpha a}{2}, \quad k_\alpha = \frac{\pi\alpha}{(N+1)a}. \quad (16.12)$$

Для малих значень довжини a співвідношення між частотою та хвильовим числом набуває звичайного вигляду: $\omega(k_\alpha) = (a\omega_0)k_\alpha = ck_\alpha$ (c можна ототожнити зі швидкістю).

Зауважимо, що при $k_\alpha \simeq 0$ сусідні частинки коливаються у фазі, а при $k_\alpha \simeq \frac{\pi}{a}$ — у протифазі, оскільки $e^{in\varphi_\alpha} \simeq (-1)^n$. \perp

Зауваження*. У даній задачі визначник характеристичного рівняння можна розкрити безпосередньо за допомогою формули (16.7), для зручності попередньо винесемо k — тоді отримаємо тридіагональну матрицю, у якій на бічних діагоналях знаходяться числа -1 , а на головній — різниці $2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Визначник задовольняє рекурентне співвідношення

$$D_n = D_{n-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - D_{n-2},$$

яке є різницевим рівнянням. В якості початкових умов можна взяти значення D_1 та D_2 , які впливають з явного виразу. Побудувати розв'язок таким способом пропонується як вправа для читача. \perp

Аналогічно можна розглянути інші межові умови. У випадку вільного правого кінця частинку з номером $N + 1$ потрібно вважати безмасовою, тоді вона буде рухатись за тим самим законом, що і сусідня частинка ліворуч. Межова умова полягає в тому, що відстань між частинками з номерами N та $N + 1$ не змінюється в процесі руху: $x_N = x_{N+1}$.

У випадку, коли ланцюжок замкнено у коло, додаткові частинки слід ототожнити з елементами ланцюжка, а саме: точку $n = 0$ з $n = N$ і $n = 1$ з $n = N + 1$, або $x_0 = x_N$ та $x_1 = x_{N+1}$.

Одновимірний ланцюжок є найпростішою моделлю коливань одновимірного кристалу. Для N частинок є N власних частот коливань, графік залежності частоти від номера α показаний на рис 16.8. Відмітимо, що доступні частоти належать обмеженому інтервалу $\omega_\alpha \in [0, 2\omega_0]$.

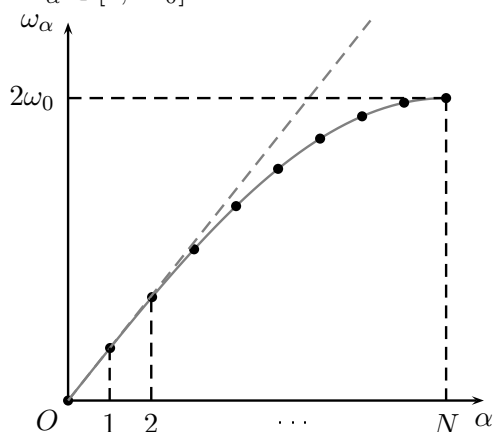


Рис. 16.8. Залежність частоти від номера.

Точки означають значення частот ω_α для послідовних значень α , суцільна крива — неперервну синусоїду $\omega(\alpha)$, а пунктирна — стандартне дисперсійне середовище для необмеженого континууму (лінійна залежність). Для просторово обмеженого середовища, на відміну від необмеженого, хвильовий вектор може набувати значення лише з деякого інтервалу. У даному випадку

$$-\frac{\pi}{a} < k_\alpha < \frac{\pi}{a}.$$

У теорії твердого тіла область значень хвильового числа називається *першою зоною Бріллюєна*.

Задача 16.1. Знайти частоти власних коливань для випадків: 1) ланцюжка з незакріпленим правим кінцем; 2) ланцюжка з незакріпленими обома кінцями; 3) ланцюжка, замкненого у коло.

Вказівка: Для випадку 3 можливі розв'язки у вигляді хвиль, що поширюються вздовж кільця.

Задача 16.2. Розглянути випадок коливань одночастинкового ланцюжка для частот з $q < 0$.

Задача 16.3. Побудувати функцію Лагранжа для малих відхилень від положення рівноваги та дослідити поперечні коливання лінійного одночастинкового ланцюжка з різними межовими умовами (модель поперечних коливань струни).

Якщо межових умов немає, то спектр частот коливань визначити не можна. У таких випадках він може бути неперервним, це характерно для необмежених середовищ. Розглянемо просту ілюстрацію цього факту, модифікуючи попередній розв'язок.

Приклад 4. Коливання необмеженого лінійного одночастинкового ланцюжка.

◀ Рівняння руху частинок мають вигляд:

$$\ddot{x}_n = -\omega_0^2(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1})$$

(межових умов тепер немає). Далі шукаємо розв'язок у стандартній експоненціальній формі $x_n(t) = A_n e^{i\omega t}$. Підстановка такого представлення та аналіз рівнянь аналогічний до попереднього прикладу, у результаті отримаємо $A_n = Cq^n$ і

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 - \omega_0^2 \left(q + \frac{1}{q} \right).$$

Як було зазначено вище, коливальні процеси будуть за умов $q = e^{i\varphi}$ та $q < 0$. Розглянемо ці випадки окремо.

Випадок $|q| = 1$. Аналогічно до попереднього, покладаючи $q = e^{i\varphi}$, отримаємо

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi}{2}$$

Розв'язками будуть хвилі, що поширюються вздовж осі x :

$$x_n = A e^{i(\omega t \pm k n a)}, \quad k = a\varphi.$$

Параметр φ описує різницю фаз коливань сусідніх частинок. Спектр частот для хвиль, що поширюються вздовж лінійного ланцюжка буде неперервним: частоти належать інтервалу $\omega \in [0, 2\omega_0]$.

Випадок $q < 0$. Запишемо q у вигляді $q = e^\psi$, тоді

$$\omega^2 = \omega_0^2 [2 - (e^\psi + e^{-\psi})] = 2\omega_0^2 (1 - \operatorname{ch} \psi) \Rightarrow \omega = 2\omega_0 \operatorname{ch} \frac{\psi}{2}.$$

Розв'язок описує хвилі, амплітуди яких спадають (зростають) з ростом номера:

$$x_n = A_+ e^{i\omega t + n\psi} + A_- e^{i\omega t - n\psi}.$$

Спектр частот у цьому випадку буде необмеженим, $\omega \in [2\omega_0, \infty[$. ►

Зауваження. Для випадку одночастинкового ланцюжка було побудовано розв'язки, які задовольняють властивість

$$x_n = A_n e^{i\omega t}, \quad A_n = q A_{n-1},$$

причому для коливального руху A_n є експонентою. Ця залежність є безпосереднім наслідком періодичності потенціалу взаємодії між частинками (симетрія відносно зсуву на період ґратки). Узагальнення цієї формули на коливання у періодичній структурі є *теоремою Флоке*, яка має важливе значення у теорії твердого тіла. ┘

Більшість твердих тіл має кристалічну структуру — це означає, що атоми а такій системі розташовані у вузлах просторово періодичної ґратки. Її можна побудувати у просторі за допомогою періодичного повтору елементарної комірки (яка має найменший об'єм) по кільком напрямкам. За домовленістю елементарна комірка, всередині або у вузлах якої знаходяться атоми, вибирається у формі паралелепіпеда, сторони якого є періодами ґратки по відповідних напрямках.

Примітивним прикладом одновимірної кристалічної структури є, очевидно, розглянутий вище випадок одновимірного кристалу з одним атомом у елементарній

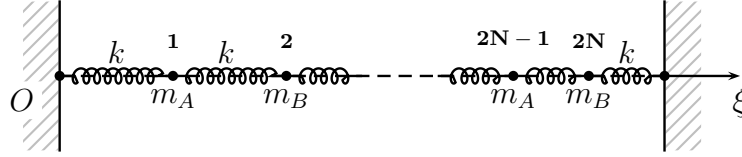


Рис. 16.9. Лінійний двочастинковий ланцюжок.

комірці⁶. Однак більш цікавим є аналіз кристалів з елементарними комірками, які включають кілька різних атомів. Самою простою такою системою є кристал з двома атомами у елементарній комірці. Таку структуру мають, зокрема ґратки NaCl та алмазу. Розглянемо просту механічну модель такої системи.

Приклад 5. Коливання лінійного ланцюжка, що складається з $2N$ частинок з різними масами m_A та m_B , які чергуються одна за одною і з'єднані ідентичними пружинами.

◀ Систему зображено на рис. 16.9. Для випадку жорстко закріплених кінців функція Лагранжа у наближенні взаємодії найближчих сусідів має вигляд:

$$L = T - U, \quad T = \frac{m_A}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{x}_{2k+1}^2 + \frac{m_B}{2} \sum_{k=1}^N \dot{x}_{2k}^2, \quad U = \frac{k}{2} \left(x_1^2 + \sum_{n=1}^N (x_{n+1} - x_1)^2 + x_{2N}^2 \right).$$

де на позиціях з непарними номерами розташовані частинки m_A , а з парними — частинки m_B , x_{2n} та x_{2n+1} — їх відхилення від положень рівноваги. Як і для одностинкового ланцюжка, для врахування межових умов введемо фіктивні частинки з номерами 0 (маса m_B) та $2N + 1$ (маса m_B), які жорстко закріплено до стінок. Тоді рівняння руху для кожного сорту частинок можна записати так:

$$\begin{cases} m_A \ddot{x}_{2n+1} = -k(2x_{2n+1} - x_{2n} - x_{2n+2}), & n = \overline{0, N-1}, \\ m_B \ddot{x}_{2n} = -k(2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}), & n = \overline{1, N}, \end{cases}$$

причому $x_0 = x_{2N+1} = 0$.

Враховуючи результати попередньої задачі, розв'язок рівнянь руху будемо підбирати у вигляді

$$x_{2n+1}(t) = A e^{i\omega t \pm i \cdot (2n+1)\varphi}, \quad x_{2n}(t) = B e^{i\omega t \pm i \cdot 2n\varphi},$$

де наявність частинок різних сортів виражається різними амплітудними коефіцієнтами у відповідних відхиленнях. Вводячи перепозначення $\omega_{A,B}^2 = \frac{k}{m_{A,B}}$ ($\omega_{A,B}$ є величинами розмірності частоти), отримаємо після підстановки до рівнянь руху:

$$\begin{cases} (2\omega_A^2 - \omega^2)A - 2\omega_B^2 B \cos \varphi = 0, \\ -2\omega_A^2 A \cos \varphi + (2\omega_B^2 - \omega^2)B = 0, \end{cases}$$

Система лінійних однорідних рівнянь матиме нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2\omega_A^2 - \omega^2 & -2\omega_B^2 \cos \varphi \\ -2\omega_A^2 \cos \varphi & 2\omega_B^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^4 - 2(\omega_A^2 + \omega_B^2)\omega^2 + 4\omega_A^2 \omega_B^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

⁶ У такому кристалі елементарною коміркою є відрізок довжини a , у центрі якого знаходиться атом з масою m .

Розв'язки бікватратного рівняння:

$$\omega_{\pm}^2 = (\omega_A^2 + \omega_B^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega_A^2\omega_B^2}{(\omega_A^2 + \omega_B^2)^2} \sin^2 \varphi} \right] \equiv \frac{k}{\mu} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_A m_B} \sin^2 \varphi} \right],$$

де враховано формули для $\omega_{A,B}$ і введено зведену масу $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$. Таким чином, на відміну від одночастинкового ланцюжка, у даній системі є дві групи частот, які визначаються одним і тим же параметром φ .

Підстановка знайдених частот назад до одного з рівнянь системи (візьмемо перше) дає співвідношення між амплітудами

$$A = B \frac{2\omega_A^2}{2\omega_A^2 - \omega^2} \cos \varphi.$$

Загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$x_n(t) = C_+ e^{i\omega t + i n \varphi} + C_- e^{i\omega t - i n \varphi},$$

у введених позначеннях для частинок з непарними та парними номерами слід писати A_{\pm} та B_{\pm} відповідно. Для визначення спектру врахуємо межові умови:

Умова 1. Нерухомість лівого кінця $n = 0$ еквівалентна до $x_0(0) = 0$, звідки для амплітуд матимемо $B_+ = -B_- = B$, а у силу пропорційності A та B те саме матимемо і для A . Тому

$$x_n(t) = 2iC e^{i\omega t} \sin n\varphi.$$

для обох типів частинок (де $C = A$ та $C = B$ відповідно).

Умова 2. Нерухомість правого кінця $n = 2N + 1$ еквівалентна до $x_{2N+1}(0) = 0$, звідки

$$\sin(2N + 1)\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi\alpha}{2N + 1} := \varphi_{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки частота коливань виражається через φ і

$$\omega_{N+k}^2 = \omega_{N-k-1}^2,$$

то значення номера частоти α можна обмежити інтервалом $1 \leq \alpha \leq N$, для якого частоти будуть різними.

Для аналізу залежності частоти від номера (або хвильового числа) розглянемо поведінку функції $\omega(\alpha)$ на границях інтервалу $\alpha \in [0, N]$, який відповідає $\varphi \in [0, \pi/2]$. Для визначеності вважатимемо, що $m_B > m_A$.

1) малі значення: $\alpha \rightarrow 0$, тоді $\varphi_{\alpha} \rightarrow 0$ і

$$\omega_{\pm}^2 \simeq \frac{k}{\mu} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4\mu^2}{m_A m_B} \varphi_{\alpha}^2 \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \omega_+^2 \simeq \frac{2k}{\mu}, \quad \omega_-^2 \simeq \frac{2k\mu}{m_A m_B} \varphi_{\alpha}^2 \simeq 0.$$

2) великі значення: $\alpha \rightarrow N$, тоді $\varphi_{\alpha} \rightarrow \frac{\pi}{2}$. У грубому наближенні $\sin \varphi_{\alpha} \simeq 1$ тому, беручи до уваги, що

$$\sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_A m_B}} = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A}, \quad \text{при } m_B > m_A,$$

отримаємо

$$\omega_{\pm}^2 \simeq k \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} \left(1 \pm \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} \right) \Rightarrow \omega_+^2 \simeq \frac{2k}{m_A}, \quad \omega_-^2 \simeq \frac{2k}{m_B},$$

оскільки $m_B > m_A$, то $\omega_+ > \omega_-$.

Загальний розв'язок має вигляд суперпозиції коливань з частотами ω_+ та ω_- :

$$x_{2n+1}(t) = \sum_{i=1}^N [A_+^{(\alpha)} \cos(\omega_{+, \alpha} t + \psi_{\alpha}^{(+)}) + A_-^{(\alpha)} \cos(\omega_{-, \alpha} t + \psi_{\alpha}^{(-)})] \sin(2n+1)\varphi_{\alpha},$$

$$x_{2n}(t) = \sum_{i=1}^N [B_+^{(\alpha)} \cos(\omega_{+, \alpha} t + \psi_{\alpha}^{(+)}) + B_-^{(\alpha)} \cos(\omega_{-, \alpha} t + \psi_{\alpha}^{(-)})] \sin 2n\varphi_{\alpha}.$$

Амплітудні коефіцієнти пов'язані співвідношеннями пропорційності,

$$A_{\pm} = B_{\pm} \frac{2\omega_A^2 \cos \varphi}{2\omega_A^2 - \omega_{\pm}^2},$$

де $2\omega_A^2 - \omega_{\pm}^2 = \omega_A^2 - \omega_B^2 \mp \sqrt{(\omega_A^2 - \omega_B^2)^2 + 2\omega_A^2 \omega_B^2 \cos^2 \varphi}$. За умови $\omega_A < \omega_B$, очевидно, що $2\omega_A^2 - \omega_{\pm}^2 < 0$ тому амплітуди коливань A_+ , B_+ з частотою ω_+ є величинами одного знаку, а A_- , B_- мають різні знаки.

Графіки залежностей частоти від номера моди приведені на рис. 16.10, дисперсійна крива складається з двох гілок, тому у такому середовищі можливе поширення двох типів хвиль. Зі зростанням значення добутку ka криві будуть наближатися одна до іншої. Новою особливістю є відсутність деяких частот у коливаннях молекул (нижче верхньої гілки, але вище нижньої).

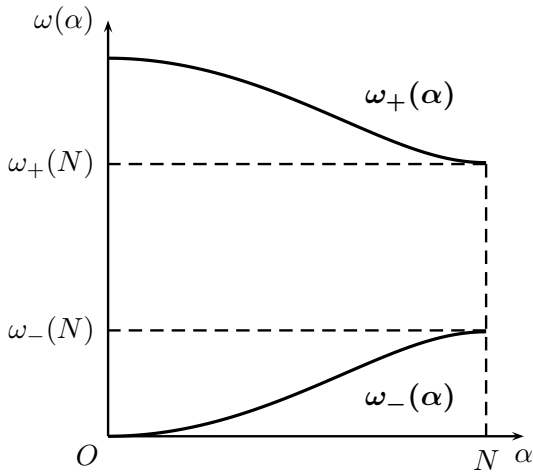


Рис. 16.10. Дисперсійні криві для дво-частинкового ланцюжка.

Верхня гілка, яка відповідає коливанням з більш високими частотами називається *оптичною*, а нижня — *акустичною*. Назви пов'язані з тим, що амплітуди A_+ та B_+ мають різні знаки, і сусідні частинки (різних сортів) завжди коливаються у протифазі, причому їх центр мас не рухається. Якщо частинки електрично заряджені з різними знаками, то це приводить до випромінювання електромагнітних хвиль. Для акустичної моди навпаки, амплітуди A_- та B_- одного знаку і випромінювання не відбувається. Коливальний рух відповідає поширенню механічних збуджень вздовж кристалу (звуку).

Найнижча частота (для $\alpha = 0$) оптичної моди відмінна від нуля⁷, тоді як для акустичної дорівнює нулю.

Зі зростанням номера криві зближуються, але між ними залишається певна відстань, яка є різницею між частотами на границі інтервалу — *заборонена зона* для хвильових чисел $k_{\alpha} \simeq \frac{\pi}{2}$ (означення k_{α} аналогічне випадку одночастинкового ланцюжка). Для значень частот із забороненої зони не існує розв'язків дисперсійного рівняння, точніше вони відповідають комплексним хвильовим числам. Це означає, що коливання з такими частотами

⁷ У цьому випадку ланцюжки з однотипних атомів рухаються у протилежних напрямках майже без деформації. Фактично це означає коливання кожної пари різносортих частинок незалежно від інших.

швидко поглинаються (їх може збудити, зокрема, зовнішнє періодичне електромагнітне поле або механічне збудження).

Врахування поперечних коливань приводить до збільшення числа мод втричі (поперечний напрямок є двовимірним). Якщо елементарна комірка кристалу включає $p > 2$ атомів, то у загальному випадку дисперсійна крива складатиметься з $3p$ гілок, з них 3 відповідатимуть акустичним модам і $3p - 3$ — оптичним. Для одновимірних поздовжніх коливань акустична мода завжди буде одна, а оптичних — на 2 менше числа атомів у комірниці. ►

Зауваження. Для одночастинкового ланцюжка оптична мода відсутня. Але якщо покласти $m_A = m_B$ у результатах, отриманих для двохатомного кристалу, то заборонена зона зникне, і криві на границі зони дотикатимуться. Однак їх взаємне розташування не зміниться і графік частот буде відмінним від аналогічної побудови для одночастинкового ланцюжка. Насправді це не суперечить властивостям одноатомного кристалу, оскільки кількість частинок складає $2N$ і дисперсійна крива має будуватися на інтервалі $[0, 2N]$, тоді як після ототожнення має інтервал залишитися тим самим, що і для двохатомного ланцюжка, тобто $[0, N]$. Перехід до правильної залежності залежності можна отримати симетричним відображенням верхньої кривої відносно осі і перенесенням її на N одиниць праворуч (тобто побудувати на іншому періоді). Формально при $m_A = m_B$ частоти дійсно будуть частинами однієї кривої:

$$\omega_{\pm}^2|_{m_1=m_2} = \frac{k}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_1 m_2} \sin^2 \varphi_{\alpha}} \right) \Big|_{m_1=m_2} = \frac{2k}{m_1} (1 \pm \cos \varphi_{\alpha}) = \frac{4k}{m_1} \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\}^2 \frac{\varphi_{\alpha}}{2}.$$

Оскільки $\varphi_{\alpha} = \frac{\pi\alpha}{2N+1}$, то зміна номера α на $2N+1$ (період) одиниць відповідає зміні кута $\varphi_{\alpha} + \pi$ (при великих N) і синус перейде у косинус. Будуючи криві для двохатомного ланцюжка на симетричному відносно нуля інтервалі і переносячи ліву верхню криву праворуч на $2N+1$ одиниць, отримаємо більш широку акустичну гілку одноатомного кристалу. ┘

Задача 16.4. Дослідити характер руху двохатомного ланцюжка, якщо частота коливань відповідає значенню із забороненої зони.

Вказівка: ці частоти є розв'язками характеристичного рівняння, які відповідають загасанню хвиль (див. попередні приклади).

Задача 16.5. Дослідити коливання необмеженого лінійного двохатомного ланцюжка.

5. КОНТИНУАЛЬНИЙ ПЕРЕХІД. Розглянемо перехід від ланцюжка до неперервного випадку, коли кількість частинок N стає нескінченно великою, це відповідатиме поздовжнім коливанням струни. Таку процедуру можна означити тільки для однорідного ланцюжка з однаковим розподілом жорсткостей, мас та інших параметрів, що описують ланку ланцюжка.

Для коректного переходу $N \rightarrow \infty$ необхідне виконання таких умов:

- 1) маси та відстані між частинками прямують до нуля, $m \rightarrow 0$ та $a \rightarrow 0$, але загальна маса та сумарна довжина системи зберігаються

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, m \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} (Nm) = M, \quad \lim_{\substack{a \rightarrow 0, m \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} (Na) = L,$$

2) лінійна густина та модуль пружності є скінченними:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, m \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{m}{a} = \rho, \quad \lim_{\substack{a \rightarrow 0, m \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} (ak) = \varkappa.$$

Для інших параметрів поступаємо аналогічно. У дискретному описі координатою частинки є її номер або, еквівалентно, метричний номер $\xi_n = na$ — довжина, яка описує положення частинки відносно лівого краю ланцюжка у положенні рівноваги. Відхилення $x_n(t)$ можна розглядати як функцію

$$x_n(t) = x(\xi_n, t).$$

При $a \rightarrow 0$ координата ξ_n стає неперервною змінною, яку будемо позначати ξ .

Приклад 6. Континуальний перехід для одночастинкового ланцюжка.

◀ Для запису континуальної форми функції Лагранжа запишемо суми у вигляді сум Дарбу і потім виконаємо перехід до інтегралу Рімана за правилом:

$$\sum_{n=1}^N F(n) a \equiv \sum_{n=1}^N F(\xi_n) \Delta \xi_n \rightarrow \int_0^L F(\xi) d\xi, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \max_{1 \leq n \leq N} \Delta \xi_n \equiv a \rightarrow 0,$$

де $\Delta \xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ — відстань між сусідніми частинками (переходить у диференціал), а $F(n)$ або $F(\xi_n)$ — деяка функція номера частинки.

Кінетична енергія має вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N+1} m \dot{x}^2(\xi_n, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N+1} \frac{m}{a} \dot{x}(\xi_n, t) a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{x}(\xi, t) d\xi,$$

де враховані фіктивні частинки з номерами 0 та $N+1$. Потенціальна енергія після виділення диференціалу $\Delta \xi = a$:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N+1} k [x(\xi_{n+1}, t) - x(\xi_n, t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N+1} ka \left(\frac{x(\xi_{n+1}, t) - x(\xi_n, t)}{a} \right)^2 a$$

Вираз у дужках при $a \rightarrow 0$ буде переходити у похідку першого порядку по ξ . Дійсно розкладаючи функцію $x(\xi_{n+1}, t)$ у ряд Тейлора в околі точки $\xi = \xi_n$, отримаємо:

$$x(\xi_{n+1}, t) - x(\xi_n, t) = \left. \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} a + O(a^2),$$

тому

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N+1} ka \left(\left. \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} a + O(a) \right)^2 a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^L \varkappa \left(\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi.$$

Остаточно,

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial t} \right)^2 - \varkappa \left(\frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi. \quad (16.13)$$

Цей вираз можна використовувати і для неоднорідного ланцюжка, у якого маса та модуль пружності залежать від ξ .

Аналогічно можна отримати континуальну версію рівнянь руху, попередньо запишемо (16.8) як

$$\frac{m}{a} \ddot{x}(\xi_n, t) = ka \frac{x(\xi_{n+1}, t) - 2x(\xi_n, t) + x(\xi_{n-1}, t)}{a^2}.$$

При $a \rightarrow 0$ у правій частині виділяється друга похідна по ξ . Оскільки

$$x(\xi_{n\pm 1}, t) = x(\xi_n, t) \pm a \left. \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} + \frac{1}{2} a^2 \left. \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\xi_n} + O(a^3),$$

то

$$x(\xi_{n+1}, t) - 2x(\xi_n, t) + x(\xi_{n-1}, t) = a^2 \left. \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\xi_n} + O(a^3),$$

тому границя $a \rightarrow 0$ дає

$$\rho \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial t^2} = \varkappa \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c_{\parallel}^2} \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2},$$

що співпадає з хвильовим рівнянням для поздовжніх хвиль з швидкістю $c_{\parallel} = \sqrt{\frac{\rho}{\varkappa}}$. Постановка задачі описує поширення пружних поздовжніх хвиль у тонкому стержні із закріпленими кінцями:

$$\frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c_{\parallel}^2} \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad x(0, t) = x(L, t) = 0. \quad (16.14)$$

Що стосується дисперсійного співвідношення, то для континуального розподілу його зручно записати в термінах хвильового числа

$$\omega(k_{\alpha}) = 2\sqrt{\frac{ka}{m/a}} \frac{1}{a} \sin \frac{k_{\alpha}a}{2}, \quad k_{\alpha} = \frac{\pi\alpha}{a(N+1)} = \frac{\pi\alpha}{L},$$

оскільки $\alpha = \overline{1, N}$, то при $N \rightarrow \infty$ число α прийматиме натуральні значення. Хвильове число залишиться дискретним, і гранична форма дисперсійного співвідношення

$$\omega(k_{\alpha}) = \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{\frac{ka}{m/a}} \left(\frac{2}{a} \sin \frac{k_{\alpha}a}{2} \right) = \sqrt{\frac{\varkappa}{\rho}} k_{\alpha} \equiv c_{\parallel} k_{\alpha},$$

тобто отримаємо звичайну лінійну залежність (показаною на рис. 16.8 пунктиром). Ефект межових умов проявляється у дискретності спектру частот. ►

Зауваження. Вище був отриманий розв'язок у вигляді біжучих хвиль. Очевидно, це далеко не єдиний розв'язок даної задачі. Різницеве рівняння дає дві групи розв'язків для амплітуд у формі $A_n = Aq^n$, де q є розв'язком квадратного рівняння, причому $q_1 q_2 = 1$. Взагалі кажучи, можна говорити про три випадки: 1) $q_{1,2} \in \mathbb{C}$; 2) 1) $q_1 = q_2 \in \mathbb{R}$ і 3) $q_{1,2} \in \mathbb{R}$, причому зовсім не обов'язково, що для комплексного розв'язку буде $|q_{1,2}| = 0$.

У випадку дійсних розв'язків можна вважати, що $q = e^{\theta}$, де θ є деяким числом (аналог фази φ). Тоді для частоти отримаємо

$$\omega^2 = 2\omega_0^2(1 - \operatorname{ch} \theta) = -4\omega_0^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2},$$

що відповідатиме чисто комплексним частотам, тому при умові закріплення лівого кінця

$$x_n(t) = 2A \operatorname{sh} n\theta e^{i\omega t} \equiv 2A \operatorname{sh} n\theta e^{-|\omega|t}$$

що відповідатиме затуханню. Умова закріплення на правому кінці буде просто некоректною і хвилі з такими показниками у даній системі не існують.

Для загальних комплексних розв'язків також з'являється затухаючі множники. Тоді $q = e^{\theta+i\varphi} = e^{i(\varphi-i\theta)} = e^{i\bar{\varphi}}$, де $\varphi \in \mathbb{C}$ для частот, як і раніше

$$\omega^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos \bar{\varphi}) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\bar{\varphi}}{2},$$

але тепер аргументом тригонометричної функції є комплексна величина. З граничних умов

$$\sin(N+1)\bar{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\varphi} = \frac{\pi\alpha}{N+1}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

При цьому $x_n \sim e^{i\omega t \pm in\bar{\varphi}} = e^{i\omega t \pm in\varphi \mp n\theta}$, тому з ростом номера хвилі будуть затухати за експоненціальним законом. Хвильове число у даному випадку буде комплексним. \lrcorner

Задача 16.6. Записати континуальні рівняння руху одночастинкового ланцюжка з точністю до квадратичного по a доданку.

Задача 16.7. Знайти континуальну версію закону руху з умовами жорсткого кріплення двома способами: 1) розв'язуючи відповідні рівняння руху; 2) виконавши граничний перехід у розв'язку для дискретного випадку.

Задача 16.8. Побудувати функцію Лагранжа для ланцюжка N математичних маятників з масами m та довжинами l у полі сили тяжіння. Перший маятник підвішено до нерухомої точки, а кожен наступний до попереднього. Виконати перехід континууму (нитка).

ЛЕКЦІЯ 17

Нелінійні коливання

1.	Нелінійні доданки у рівняннях руху.	275
2.	Метод Ляпунова-Пуанкаре розкладу у ряд.	276
3.	Зсув частоти періодичного руху.	280
4.	Метод Боголюбова-Крилова розкладання у ряд.	282
5.	Метод повільно змінних амплітуд (усереднення).	285
6.	Нелінійний резонанс.	288
7.	Параметричний резонанс.	297

1. НЕЛІНІЙНІ ДОДАНКИ У РІВНЯННЯХ РУХУ. У лекції 15 розглядалось гармонічне наближення для аналізу руху механічної системи в околі положення рівноваги. Для реальних систем це наближення може бути некоректним з кількох причин. По-перше, можуть бути суто технічні обмеження, наприклад другий порядок у розкладі за формулою Тейлора зникає, тому систему доводиться описувати вищими порядками розкладу. По-друге, відхилення від положення рівноваги можуть не бути достатньо малими порівняно з характерними розмірами системи і квадратичні доданки недостатньо точно описують поведінку системи. По-третє, значний вплив на систему можуть чинити зовнішні фактори, які вносять нелінійності до рівнянь руху. Тому у багатьох практичних задачах гармонічне наближення, що дає лінійні рівняння руху виявляється недостатнім. У таких випадках доводиться або продовжувати розклад далі і використовувати наближені методи, що спираються на малість відхилення від положення рівноваги, або аналізувати механічну систему “як є”. У обох ситуаціях доводиться аналізувати досить громіздку математичну задачу зі складними фізичними висновками про рух. Основу до аналізу нелінійних коливальних систем поклали роботи Пуанкаре, Ляпунова. Згодом їх суто математичні підходи були адаптовані до фізичних задач Боголюбовим та Криловим [25]. У 20-му сторіччі, під впливом успіхів у нелінійній фізиці (у першу чергу це фізика лазерів та нелінійна оптика, а також радіофізика) стрімкого розвитку набула *синергетика* — набір методів¹ до аналізу нелінійних (та дисипативних) систем із самоорганізацією, виявилось, що такі системи трапляються не тільки у фізичних та біологічних науках, а і у економіці та соціології. Єднають їх специфічні рівняння опису з нелінійностями. Деталі можна знайти у книзі автора терміну “синергетика” Хакена² [28].

¹ Про синергетику інколи кажуть про міждисциплінарну галузь науки.

² Він також є одним з авторів сучасної теорії лазера.

Далі буде розглянуто найпростіші нелінійні ефекти для одновимірної механічної системи та методи їх аналізу. У найпростішому випадку консервативної системи нелінійності виникатимуть як у розкладі кінетичної енергії, так і потенціальної. Якщо положення рівноваги відповідає $x = 0$, то в його околі матиме місце розклад (сталі доданки відкинуто):

$$L(x, \dot{x}) = \frac{a(x)}{2} \dot{x}^2 - U(x) = \underbrace{\left[\frac{a(0)}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} x^2 U''(0) \right]}_{\text{другий порядок}} + \underbrace{\left[\frac{a'(0)}{2} x \dot{x}^2 - \frac{1}{3!} x^3 U'''(0) \right]}_{\text{третій порядок}} + \dots$$

Доданки у функції Лагранжа, починаючи з третього порядку вносять нелінійності до рівнянь руху. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що для розв'язку нелінійного рівняння навіть другого порядку загального методу немає.

Якщо зосередитись на фізичних властивостях, то така система є консервативною і допускає розв'язок у квадратурах за допомогою інтегралу енергії, зокрема можна знайти період фінітного руху (період коливань). Однак у більшості випадків сам інтеграл аналізувати важко. Крім того, період фінітного руху (коливань) буде залежати від енергії і, тим самим, від початкових умов, що вносить свої особливості у характер руху. Якщо на систему діють зовнішні сили та наявні втрати енергії, то аналіз руху значно ускладнюються. Незважаючи на сучасні успіхи, на даний час не існує технічно простого підходу до аналізу нелінійних ефектів.

Загальний аналіз впливу нелінійностей на коливальний рух виходить далеко за межі стандартного загального курсу класичної механіки і викладається окремо. Деталі можна знайти у загальних курсах теорії коливань, наприклад в [26] та [27].

2. МЕТОД ЛЯПУНОВА-ПУАНКАРЕ РОЗКЛАДУ У РЯД. У випадку, коли нелінійний доданок має вигляд малої поправки до лінійної частини, розв'язок рівняння руху можна побудувати за допомогою методу розкладання в ряд, відомого з теорії диференціальних рівнянь. Для рівняння типу

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t; \varepsilon), \quad (17.1)$$

де ε позначає малий параметр, розв'язок можна побудувати у вигляді степеневого ряду:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + R_{n+1}(t, \varepsilon), \quad (17.2)$$

де $x_i(t)$ — коефіцієнти, що залежать від часу, а $R_{n+1}(t, \varepsilon)$ — залишковий член. Підстановка розкладу (17.2) до рівняння (17.1) після перетворення правої частини дає рівність степеневих рядів:

$$\sum_k \varepsilon^k \ddot{x}_k(t) + \omega_0^2 \sum_k \varepsilon^k x_k(t) = f\left(\sum_k \varepsilon^k x_k(t), \sum_k \varepsilon^k \dot{x}_k(t), t; \varepsilon\right) = \sum_k \varepsilon^k f_k(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t),$$

де коефіцієнти f_k можна знайти шляхом розкладання в ряд по малому параметру правої частини із координатами і швидкостями у вигляді (17.2). Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо ланцюжок диференціальних рівнянь на невідомі величини x_k :

$$\ddot{x}_k(t) + \omega_0^2 x_k(t) = f_k(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t).$$

Якщо початкові умови залежать від параметру ε , то для них також слід записати розклади:

$$x(0, \varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon + \dots, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) = b_0 + b_1 \varepsilon + \dots,$$

значення a_i та b_i будуть початковими умовами для функцій x_i :

$$x_i(0) = a_i, \quad \dot{x}_i(0) = b_i$$

(тобто початкові умови враховуються до того самого порядку, до якого проводиться розкладання).

У більшості випадків рівняння для $x_k(t)$ можна розв'язати послідовно, починаючи з першого, яке збігається з вихідним рівнянням для $\varepsilon = 0$:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = f(x_0, \dot{x}_0, t; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}.$$

Розклад у степеневий ряд буде ефективним, якщо це рівняння (воно називається рівнянням, що породжує ланцюжок) можна порівняно просто розв'язати у явному вигляді.

Збіжність та коректність розв'язку (17.2) забезпечується теоремою:

Якщо функція $f(x, \dot{x}, t; \varepsilon)$ має неперервні та рівномірно обмежені похідні по x, \dot{x}, ε до порядку $n+1$ включно, то існує інтервал $[0, T]$, на якому розв'язок рівняння (17.1) можна подати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = x(t, 0) + \varepsilon \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} \Big|_{\varepsilon=0} + R_{n+1}(t, \varepsilon), \quad (17.3)$$

причому при $\varepsilon \rightarrow 0$ залишковий член $R_{n+1}(t, \varepsilon) \rightarrow 0$ для довільного $t \in [0, T]$. Його залежність від ε для фіксованого n має характер $R_{n+1} \sim \varepsilon^{n+1}$.

Незважаючи на схожість із формулою Тейлора, розклад (17.3) є не степеневим, а асимптотичним розкладом. Прямування до нуля залишкового члена при $\varepsilon \rightarrow 0$ з фіксованим n ще не гарантує довільної точності розкладу, оскільки залишковий член залежить також і від t . Крім того, у реальних задачах параметр ε є малою, але скінченною величиною, тому для фіксованого значення ε цілком може виявитись так, що зі збільшенням кількості доданків n якість наближення може погіршуватись і ряд розбігатиметься,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(t, \varepsilon) = \infty \quad \text{для фіксованого } \varepsilon,$$

тому у асимптотичних розкладах як правило використовують невелику кількість доданків. Ще одним недоліком методу є обмеженість часового інтервалу, де розв'язок є коректним, у більшості цікавих випадків інформацію про рух системи потрібно мати на довільному часовому інтервалі.

Легко показати, що у випадку періодичної по часу функції $f(x, \dot{x}, t; \varepsilon)$ рівняння (17.1) допускає періодичні розв'язки $x(t)$ (див., наприклад, [45]). Для доданків ряду (17.2) це означає, що коефіцієнти $x_i(t)$ мають бути періодичними функціями з періодами, які кратні до періоду правої частини. Це поширюється і на випадок,

коли функція f не залежить від часу, періоди доданків ряду визначатимуться нульовим наближенням, однак, як буде показано далі, цей випадок значно складніше аналізувати. Існування періодичних розв'язків забезпечується теоремами Пуанкаре, в них формулюються обмеження на аналітичні властивості функції $f(x, \dot{x}, t; \varepsilon)$, за яких рівняння (17.1) для періодичної функції f та періодичного нульового наближення x_0 має єдиний періодичний розв'язок³, який при $\varepsilon \rightarrow 0$ прямує до x_0 .

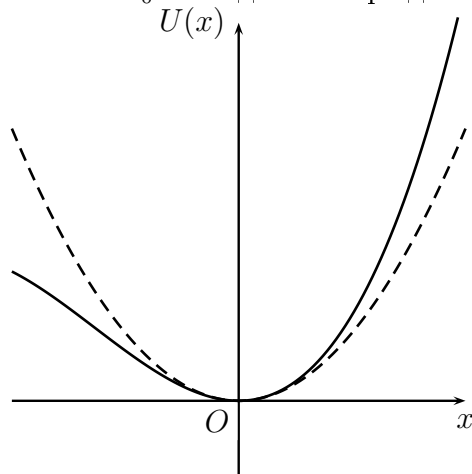


Рис. 17.1. Потенціал $U(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3}$.

Розглянемо приклад застосування методу розкладу по малому параметру (він називається *методом Ляпунова-Пуанкаре*) на прикладі гармонічного осцилятора з кубічною поправкою у потенціалі:

Приклад 1. Метод Ляпунова-Пуанкаре для нелінійного осцилятора:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \left(\frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} \right),$$

де доданок третього порядку вважається малим порівняно з квадратичним.

◀ Потенціал наведено на рис. 17.1 (суцільна крива). Рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x^2,$$

де позначено $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\varepsilon = \frac{\alpha}{m}$. Для спрощення візьмемо початкові умови

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0$$

(не залежать від ε). Розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Підстановка до рівняння руху дає:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \varepsilon^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) + \dots = -\varepsilon(x_0^2 + \varepsilon x_0 x_1 + \dots).$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо ланцюжок рівнянь:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \quad & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \\ \varepsilon^1: \quad & \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2, \\ \varepsilon^2: \quad & \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -2x_0 x_1, \\ & \dots \end{aligned}$$

які можна розв'язувати послідовно: після пошуку доданку $x_0(t)$ права частина рівняння для x_1 стає відомою а саме рівняння перетворюється на рівняння для гармонічного осцилятора зі змущуючою силою, далі так само буде для наступних рівнянь. Знайдемо розв'язки до другого порядку по ε .

³ Зазначимо, що пошук такого періодичного розв'язку не є задачею Коші.

Нульовий порядок: Рівняння $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$ є рівнянням вільного гармонічного осцилятора, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_0(t) = A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t,$$

після підстановки початкових умов отримаємо

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t. \quad (17.4)$$

Перший порядок: підставимо знайдений розв'язок (17.4) для x_0 до рівняння для функції $x_1(t)$:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -A^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння матиме такий самий вигляд, як і в попередньому випадку (з іншими сталими) а для пошуку частинного розв'язку подамо силу у правій частині як суму двох доданків за допомогою розкладу $\cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_0 t)$. У силу лінійності рівняння частинні розв'язки можна шукати для кожного доданку окремо, тому весь розв'язок матиме вигляд:

$$\bar{x}_1(t) = \frac{A^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - 1 \right).$$

Повний розв'язок:

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - 1 \right).$$

Після підстановки початкових умов $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ знайдемо остаточно:

$$x_1(t) = -\frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos \omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - 1 \right). \quad (17.5)$$

Другий порядок: запишемо рівняння для x_2 , перетворюючи праву частину:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -\frac{A^3}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t \left(-\frac{1}{3} \cos \omega_0 t + \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - 1 \right) \\ &\equiv \frac{A^3}{6\omega_0^2} (1 + 5 \cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t). \end{aligned}$$

Однорідне рівняння розв'язуємо так само, як і раніше, У правій частині з'являються змушуючі сили з частотами ω_0 , $2\omega_0$, та $3\omega_0$. Пошук частинних розв'язків можна провести окремо. Другий доданок сили є резонансним до частоти власних коливань, тому відповідний частинний розв'язок з точністю до коефіцієнта матиме вигляд $t \sin \omega_0 t$:

$$\bar{x}_2(t) = \frac{A^3}{6\omega_0^4} + \frac{5A^3}{12\omega_0^3} t \sin \omega_0 t - \frac{A^3}{18\omega_0^4} \cos 2\omega_0 t + \frac{A^3}{48\omega_0^4} \cos 3\omega_0 t$$

Таким чином, розклад $x(t)$ до квадратичного доданку буде коректним тільки для малих проміжків часу, оскільки амплітуда другого доданку пропорційна до t . Підстановка початкових умов для x_2 не змінює цієї особливості розв'язку. Зі збільшенням часу функція $x(t)$ осцилюватиме зі зростанням амплітуди, що призведе до порушення вихідного наближення малих відхилень. Більше того, також порушуватиметься закон збереження

енергії, який мав би виконуватись, оскільки дана система описує частинку у потенціальному полі. Якщо продовжувати розклад далі, доданки з необмеженими при $t \rightarrow \infty$ амплітудами з'являтимуться і в наступних порядках. Із суто фізичних міркувань слід чекати, що фінітний рух консервативної системи (лінійної чи ні) має бути періодичним. ►

Зауваження. Досить часто початкові умови не враховують на етапі розв'язку рівнянь для $x_i(t)$ (якщо задача полягає у визначенні впливу нелінійності або у побудові періодичного розв'язку) і обмежуються тільки частинними розв'язками неоднорідних рівнянь. Однак якщо підставити початкові умови до результату, то коефіцієнт A залежатиме від них досить складним чином, причому також буде функцією малого параметра ε . ┘

Незважаючи на вузьку область існування розв'язку, метод Ляпунова-Пуанкаре демонструє деякі характерні особливості нелінійних коливальних систем, які виникають і у більш досконалих методах розв'язку. Зокрема, у спектрі коливальних виникають частоти, кратні до основної частоти ω_0 , тому коливання не будуть гармонічними (не зводяться до коливання є однією частотою). У кожному порядку розкладу частоти породжуються сумами та різницями частот з попередніх доданків. Такі частоти називаються *комбінаційними*.

Причина некоректності методу Ляпунова-Пуанкаре пов'язана в першу чергу з тим, що він базується на безпосередньому розкладанні *всього* розв'язку (див. формулювання теореми, де це вказано явно) у степеневий ряд по ε . Якщо малий параметр фігурує у комбінації добутку з часом, то після диференціювання час винесеться як множник. Наприклад, якщо $x = A \cos(f(\varepsilon)t)$, то формально

$$x = A \cos(f(0)t) + \varepsilon \cdot A f'(0)t \sin(f(0)t) + \dots$$

Доданок, аналогічний до другого і фігурує у отриманому розв'язку. Таким чином, щоб уникнути появи доданків з нефізичною поведінкою розкладати функцію $x(t)$ в *єдиний* степеневий ряд не можна. Більш послідовний спосіб розкладання по малому параметру, який коректно враховує особливості залежності періодичних розв'язків від малого параметра, сформулював Ван-дер-Поль, остаточного розвитку метод набув у роботах Боголюбова та Крилова. Спочатку розглянемо спрощену версію методу Боголюбова-Крилова, яка дозволяє правильно описати зсув частоти періодичного руху.

3. ЗСУВ ЧАСТОТИ ПЕРІОДИЧНОГО РУХУ. Основна ідея модифікації методу Ляпунова-Пуанкаре полягає у побудові розкладу функції $x(t, \varepsilon)$ у степеневий ряд, коефіцієнти розкладу якого залежать від аргументів, які також є степеневими рядами по ε :

$$x(t) = x_0(\tau(t, \varepsilon)) + \varepsilon x_1(\tau(t, \varepsilon)) + \dots \quad (17.6)$$

де

$$\tau(t, \varepsilon) = t(a_0 + \varepsilon a_1 + \dots), \quad a_0 = 1 \quad (17.7)$$

(τ та t збігаються при $\varepsilon = 0$). Таким чином, будується “ряд, що є функцією іншого ряду”, порядки розкладу розв'язку та його аргументу мають бути взаємно узгодженими. Загалом розв'язок будується за допомогою тієї самої процедури, що і у методі Ляпунова-Пуанкаре, невідомі числові коефіцієнти a_i розкладу аргументу

слід вибирати так, щоб знищити резонансні доданки. Розглянемо використання модифікованого методу розкладу на тому самому прикладі.

Спочатку виразимо похідні по часу через похідні по аргументу τ (позначатимемо штрихами):

$$\dot{x} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dx}{d\tau} = (a_0 + \varepsilon a_1 + \dots) x', \quad \ddot{x} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d\dot{x}}{d\tau} = (a_0 + \varepsilon a_1 + \dots)^2 x''$$

після підстановки розкладу (17.6) та простих алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\dot{x} = [\dot{x}]_0 + \varepsilon [\dot{x}]_1 + \varepsilon^2 [\dot{x}]_2 + \dots, \quad \ddot{x} = [\ddot{x}]_0 + \varepsilon [\ddot{x}]_1 + \varepsilon^2 [\ddot{x}]_2 + \dots,$$

де

$$\begin{aligned} [\dot{x}]_0 &= x'_0, & [\ddot{x}]_0 &= x''_0, \\ [\dot{x}]_1 &= x'_1 + a_1 x'_0, & [\ddot{x}]_1 &= x''_1 + 2a_1 x''_0, \\ [\dot{x}]_2 &= x'_2 + a_1 x'_1 + a_2 x'_0, & [\ddot{x}]_2 &= x''_2 + 2a_1 x''_1 + (a_1^2 + 2a_2) x''_0 \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

У наступному прикладі знайдемо періодичний розв'язок, тоді стала A з розв'язку нульового порядку є амплітудою нульового наближення, а не початковим відхиленням. Загальні розв'язки однорідних рівнянь інших наближень ігноруватимемо (тоді доданок з $\cos \omega \tau$ у сумі фігурує лише один раз).

Приклад 2. Модифікований метод Ляпунова-Пуанкаре для осцилятора з кубічною нелінійністю у потенціалі.

◀ Введемо такі самі позначення, як і у прикладі 1. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε у рівняннях матимемо:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad x''_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \varepsilon^1 : \quad x''_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2a_1 x''_0 - x_0^2, \\ \varepsilon^2 : \quad x''_2 + \omega_0^2 x_2 &= -(a_1^2 + 2a_2) x''_0 - 2a_1 x''_1 - 2x_0 x_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

(відомі функції перенесено до правих частин). Розв'язуємо рівняння як у методі Ляпунова-Пуанкаре.

Нульовий порядок: розв'язок рівняння $x''_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$ має вигляд:

$$x_0(\tau) = A \cos \omega_0 \tau. \quad (17.8)$$

Перший порядок: підставимо знайдений розв'язок (17.8) до наступного рівняння:

$$x''_1 + \omega_0^2 x_1 = 2a_1 A \omega_0^2 \cos \omega_0 \tau - A^2 \cos^2 \omega_0 \tau.$$

Перший доданок правої частини є резонансним, для його усунення покладемо $a_1 = 0$. Оскільки рівняння тепер збігається з рівнянням для першого порядку у методі Ляпунова-Пуанкаре (із заміною t на τ) то частинний розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$x_1(\tau) = \frac{A^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega_0 \tau - 1 \right)$$

(початкові умови до загального розв'язку підставляти не будемо).

Другий порядок: запишемо рівняння для x_2 , враховуючи, що $a_1 = 0$:

$$x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -2a_2 x_0'' - 2x_0 x_1$$

Порівняно з методом Ляпунова-Пуанкаре у правій частині з'являється ще один резонансний доданок є невизначеним коефіцієнтом. Підстановка x_0 та x_1 дає:

$$x_2'' + \omega_0^2 x_2 = \frac{A^3}{6\omega_0^2} \left[\left(5 + \frac{12\omega_0^4}{A^2} a_2 \right) \cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t \right].$$

Якщо покласти $a_2 = -\frac{5A^2}{12\omega_0^4}$, то цей доданок зникне. Рівняння матиме розв'язок:

$$x_2 = \frac{A^3}{48\omega_0^4} \cos 3\omega_0 \tau,$$

Після того, як розв'язок рівняння знайдено до другого порядку, аргументи всіх функцій пропорційні до

$$\omega_0 \tau = \omega_0 \left(1 - \frac{5A^2}{12\omega_0^4} \varepsilon^2 + \dots \right) t = \omega(\varepsilon, A) t \quad (17.9)$$

де $\omega(\varepsilon, A)$ — частота коливань, яка є функцією малого параметра та початкового відхилення. Як і для $x(\tau)$, розклад для частоти відомо також для другого порядку. Хід розв'язку показує сенс заміни $t \rightarrow \tau$: після зміни масштабу часу гармоніки мають частоту, кратну до основної.

Якщо під час побудови розв'язку використати початкові умови $x(0) = A$ та $\dot{x}(0) = 0$, то отримаємо результат:

$$x_0 = A \cos \omega t, \quad x_1 = -\frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos \omega t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega t - 1 \right),$$

$$x_2 = \frac{A^3}{6\omega_0^4} \left(1 - \frac{19}{4} \cos \omega_0 \tau - \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 \tau + \frac{1}{8} \cos 3\omega_0 \tau \right).$$

де ω має вигляд (17.9). ►

Таким чином, частота нелінійних коливань залежить від амплітуди, таке явище називається *неізохронністю* коливань. Поява такої залежності цілком зрозуміла, якщо взяти до уваги факт залежності періоду фінітного руху від енергії у загальному випадку.

4. Метод Боголюбова-Крилова розкладання у ряд. Якщо сила у правій частині рівняння руху залежить від швидкостей та включає дисипативні доданки, то рух вже не буде періодичним у звичайному розумінні, оскільки амплітуда вже залежатиме від часу. Виявляється, що попередній метод, який придатний лише для періодичних розв'язків типу фінітного руху у нелінійному потенціалі, можна модифікувати і на загальніший випадок неконсервативних систем, зберігши основну ідею. Ця модифікація і є формулюванням методу Боголюбова-Крилова у повному обсязі. Розглянемо випадок нелінійності, що явно не залежить від часу.

Нехай

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon),$$

то рівняння нульового наближення лінійне, його розв'язок буде $x_0 = A \cos \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ позначає миттєву фазу. Весь розв'язок будується у вигляді ряду

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_1(A, \varphi) + \varepsilon^2 x_2(A, \varphi) + \dots, \quad x_0 = A \cos \varphi, \quad (17.10)$$

де миттєва фаза амплітуда є функціями часу і задовольняють диференціальні рівняння

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A) + \varepsilon^2 f_2(A) + \dots, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon g_1(A) + \varepsilon^2 g_2(A) + \dots, \quad (17.11)$$

значення функцій $f_i(A)$, $g_i(A)$ фіксують так, щоб амплітуда A була амплітудою основної гармоніки з $\cos \varphi$, тоді у всіх доданках розв'язку (за винятком першого) основна гармоніка відсутня, що еквівалентно до

$$\int_0^{2\pi} x_i(A, \varphi) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17.12)$$

Це означає, що резонансні доданки у правій частині рівнянь не виникають. Вигляд функцій $f_i(A)$, $g_i(A)$ встановлюється у кожному наближенні окремо за виглядом доданку з нелінійністю. Нелінійність та поточне наближення розкладають у ряд Фур'є по базису $\{\cos n\varphi, \sin n\varphi\}$

$$x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (17.13)$$

та порівнюють коефіцієнти після підстановки до рівняння у наближенні n -го порядку,

$$[\ddot{x}]_n + \omega_0^2 x_n = [\varepsilon f(x, \dot{x})]_n$$

(коефіцієнти при ε^n), де під час диференціювання $x(t)$ потрібно використовувати співвідношення (17.11):

$$\dot{x} = [\dot{x}]_0 + \varepsilon [\dot{x}]_1 + \varepsilon^2 [\dot{x}]_2 + \dots$$

де

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \varphi - A \dot{\varphi} \sin \varphi + \varepsilon \left(\dot{A} \frac{\partial x_1}{\partial A} + \dot{\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left(\dot{A} \frac{\partial x_2}{\partial A} + \dot{\varphi} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right) + \dots, \quad (17.14)$$

після підстановки явного вигляду розкладів:

$$\begin{aligned} [\dot{x}]_0 &= -\omega_0 A \sin \varphi, \\ [\dot{x}]_1 &= f_1 \cos \varphi - A g_1 \sin \varphi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi}, \\ [\dot{x}]_2 &= f_2 \cos \varphi - A g_2 \sin \varphi + f_1 \frac{\partial x_1}{\partial A} + g_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \omega_0 \frac{\partial x_2}{\partial \varphi}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (17.15)$$

(доданки до другого порядку). Повторне диференціювання виразу (17.14) дає прискорення:

$$\ddot{x} = [\ddot{x}]_0 + \varepsilon[\ddot{x}]_1 + \varepsilon^2[\ddot{x}]_2 + \dots,$$

де

$$\begin{aligned} [\ddot{x}]_0 &= -\omega_0^2 A \cos \varphi, \\ [\ddot{x}]_1 &= -2\omega_0 g_1 A \cos \varphi - 2\omega_0 f_1 \sin \varphi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2}, \\ [\ddot{x}]_2 &= \left(-2\omega_0 g_2 A - g_1^2 A + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial A} \right) \cos \varphi - \left(2\omega_0 f_2 + 2g_1 f_1 + A f_1 \frac{\partial g_1}{\partial A} \right) \sin \varphi \quad (17.16) \\ &\quad + 2\omega_0 f_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial A \partial \varphi} + 2\omega_0 g_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

У даному формулюванні методу резонансні доданки не виникають, оскільки розв'язок записують *одразу у формі періодичної функції* (ряд Фур'є). Проілюструємо цей підхід на тому самому прикладі осцилятора з кубічною нелінійністю у потенціалі.

Приклад 3. Метод Боголюбова-Крилова для осцилятора з кубічною нелінійністю у потенціалі.

◀ Розклад нелінійності до квадратичного доданку буде тим самим: $-\varepsilon x^2 = -\varepsilon x_0^2 - 2\varepsilon^2 x_0 x_1$. Аналіз нульового порядку розкладу дає тотожність:

$$-\omega_0^2 A \cos \varphi + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega_0^2 A \cos \varphi + \omega_0^2 A \cos \varphi = 0$$

Для першого порядку після підстановки відповідного наближення з прискорення маємо:

$$-2\omega_0 g_1 A \cos \varphi - 2\omega_0 f_1 \sin \varphi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2,$$

звідки

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + x_1 = \frac{1}{\omega_0^2} (2\omega_0 g_1 A \cos \varphi + 2\omega_0 f_1 \sin \varphi - A^2 \cos^2 \varphi).$$

Праву частину слід розкласти у ряд Фур'є, це зведеться до використання формули зниження степеня у останньому доданку. Для x_1 підставляємо розклад (17.13), порівнюючи коефіцієнти у обох частинах рівності, маємо:

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{A^2}{2\omega_0^2}, \quad a_2 = \frac{A^2}{6\omega_0^2}, \quad f_1 = 0, \quad g_1 = 0$$

(останні дві рівності відповідають відсутності доданків з $\cos \varphi$ та $\sin \varphi$ ліворуч). Коефіцієнти a_1 та b_1 не знайдено (вони визначають розв'язок однорідного рівняння), однак їх можна відкинути за допомогою умови (17.12). Таким чином, у першому порядку

$$x_1 = -\frac{A^2}{2\omega_0^2} + \frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\varphi, \quad f_1 = g_1 = 0.$$

Для другого порядку (одразу опустимо доданки з f_1 та g_1 у виразі для прискорення):

$$-2\omega_0 g_2 A \cos \varphi - 2\omega_0 f_2 \sin \varphi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \omega_0^2 x_2 = -2x_0 x_1,$$

або, виконуючи підстановки $x_{0,1}$ та перегруповуючи доданки:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + x_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\left(2\omega_0 g_2 A + \frac{5A^3}{6\omega_0^2} \right) \cos \varphi + 2\omega_0 f_2 \sin \varphi - \frac{A^3}{6\omega_0^2} \cos 3\varphi \right].$$

Знову підставимо ряд Фур'є (17.13) для x_2 , порівняння коефіцієнтів дає:

$$2\omega_0 g_2 A + \frac{5A^3}{6\omega_0^2} = 0, \quad 2\omega_0 f_2 = 0, \quad a_3 = \frac{A^3}{48\omega_0^4}$$

інші коефіцієнти Фур'є зникають. Таким чином, у другому порядку

$$x_2 = \frac{A^3}{48\omega_0^4} \cos 3\varphi, \quad f_2 = 0, \quad g_2 = -\frac{5A^2}{12\omega_0^3}.$$

що відповідає попередньому розв'язку. ►

5. МЕТОД ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ АМПЛІТУД (УСЕРЕДНЕННЯ). Метод Боголюбова-Крилова є досить загальним, але потребує громіздких обчислень. Для деяких класів нелінійних систем (з малим загасанням або малою нелінійністю) розроблено підходи, які можуть давати наближені розв'язки у вигляді єдиного виразу для довільних початкових умов. Одним з таких методів є *метод повільно змінних амплітуд*, запропонований Ван-дер-Поєм.

Розглянемо нелінійний осцилятор

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (17.17)$$

де у правій частині мале нелінійне збурення. Для $\varepsilon = 0$ система перетворюється на лінійний осцилятор з розв'язком

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad \dot{x} = \omega_0 [-a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t] \quad \text{для } \varepsilon = 0.$$

Для малих ε за аналогією з методом варіації сталих Ван-дер-Поля запропонував подати розв'язок у формі

$$x = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t, \quad \dot{x} = -\omega_0 a(t) \sin \omega_0 t + \omega_0 b(t) \cos \omega_0 t \quad \text{для } \varepsilon \neq 0, \quad (17.18)$$

де $a(t)$, $b(t)$ — повільно змінні амплітуди (тобто $\dot{a} \ll \omega_0 a$, $\dot{b} \ll \omega_0 b$).

Запишемо швидкість:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 [-a(t) \sin \omega_0 t + b(t) \cos \omega_0 t] + [\dot{a}(t) \cos \omega_0 t + \dot{b}(t) \sin \omega_0 t],$$

для повільних амплітуд останній доданок є малим у порівнянні з першим. Формула, отримана з методу варіації сталої, не суперечить виразу для швидкості, якщо на функції $a(t)$ та $b(t)$ накладено зв'язок

$$\dot{a}(t) \cos \omega_0 t + \dot{b}(t) \sin \omega_0 t = 0.$$

Перейдемо від (x, \dot{x}) до змінних (a, b) у рівнянні руху. Із означення матимемо:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \\ \dot{x} = \omega_0 [-a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \cos \omega_0 t - \frac{\dot{x}}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ b = x \sin \omega_0 t + \frac{\dot{x}}{\omega_0} \cos \omega_0 t \end{cases}$$

(таке перетворення⁴ формально описує поворот на кут $\omega_0 t$ у фазовій площині $(x, \dot{x}/\omega_0)$). Похідні по часу мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \dot{x} \cos \omega_0 t - \omega_0 x \sin \omega_0 t - \frac{\ddot{x}}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \dot{x} \cos \omega_0 t = -\frac{1}{\omega_0} (\ddot{x} + \omega_0^2 x) \sin \omega_0 t, \\ \dot{b} &= \frac{1}{\omega_0} (\ddot{x} + \omega_0^2 x) \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Використовуючи рівняння руху для x , отримаємо систему рівнянь на (a, b) , яка еквівалентна вихідному рівнянню (17.17):

$$\begin{cases} \omega_0 \dot{a} = -\varepsilon f(a, b, t) \sin \omega_0 t \\ \omega_0 \dot{b} = \varepsilon f(a, b, t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad \text{де} \quad f(a, b, t) = f(x(a, b), \dot{x}(a, b)). \quad (17.19)$$

Відмінністю (17.19) від (17.17) є поява явної залежності від часу. Скористаємось тепер тим, що амплітуди (a, b) є повільними функціями часу (з рівнянь (17.19) видно, що їх швидкості пропорційні⁵ до малого параметра ε). Якщо вони майже не змінюються протягом періоду $2\pi/\omega_0$, то їх швидкості можна замінити на середні значення за цей період:

$$\omega_0 \dot{a} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a, b, \tau) \sin \tau d\tau, \quad \omega_0 \dot{b} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a, b, \tau) \cos \tau d\tau, \quad (17.20)$$

де виконано заміну $\tau = \omega_0 t$ (зручно перейти до безрозмірного часу з самого початку розв'язку, тоді всі функції залежатимуть від τ , а частота буде одиничною). Після інтегрування залежність від часу зникає і залишається система рівнянь з правими частинами, що залежать від невідомих функцій (a, b) . У переході до усереднених швидкостей і полягає *метод повільно змінних амплітуд* (його ще називають *методом усереднення*).

На практиці рівняння (17.19) розв'язують за допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд Фур'є по базису $(\cos n\tau, \sin n\tau)$. Подальше інтегрування дозволяє відкинути періодичні залежності (самі ж функції a, b вважаються сталими протягом періоду і в інтегруванні участі не беруть).

⁴ Підкреслимо, що перетворення описує перехід від однієї пари незалежних функцій до іншої, і нічого більше.

⁵ Пропорційність до малого параметра ε означає, що припущення про повільність амплітуд буде коректне лише за умови, що права частина рівняння руху (безвідносно до типу функції) є достатньо малою величиною. Це стосується також лінійних доданків, які можуть опинитись у виразі для сили.

Використовуючи запис закону руху вільного гармонічного осцилятора через амплітуду та фазу, можна дати інше формулювання методу усереднення⁶. Нехай

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a}.$$

Тоді, як і раніше, у формулах для швидкості та координати вільного осцилятора переходимо від сталих A, φ до повільно змінних функцій $A(t)$ та $\varphi(t)$:

$$x = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \dot{x} = -\omega_0 A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \varepsilon \neq 0 \quad (17.21)$$

(ці вирази аналогічні переходу до полярних координат у площині $(x, \dot{x}/\omega_0)$). Оскільки справжня похідна по часу від x має вигляд

$$\frac{d}{dt}[A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))] = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \dot{\varphi} A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

то для узгодження формули заміни з виразом швидкості на функції (A, φ) потрібно накласти зв'язок

$$\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0.$$

Повторно диференціюючи \dot{x} , маємо з (17.21):

$$\ddot{x} = -\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underbrace{\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{=x} - A \omega_0 \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

звідки

$$\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A \omega_0 \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\varepsilon f(A, \varphi, t),$$

де

$$f(A, \varphi, t) = f(x(A, \varphi, t), x'(A, \varphi, t)).$$

Домножуючи праву частину на $1 = \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$, знайдемо рівняння на амплітуду та фазу:

$$\omega_0 \dot{A} = -\varepsilon f(A, \varphi, t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_0 A \dot{\varphi} = \varepsilon f(A, \varphi, t) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Згідно з методом усереднення залишається замінити праві частини на усереднення по періоду $2\pi/\omega_0$:

$$\omega_0 \dot{A} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(A, \varphi, \tau) \sin(\tau + \varphi) d\tau, \quad \omega_0 A \dot{\varphi} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(A, \varphi, \tau) \cos(\tau + \varphi) d\tau. \quad (17.22)$$

де τ позначає безрозмірний час (для якого частота буде одиничною). У лівих частинах рівняння можна виділити похідні по τ (позначимо штрихом), згідно з правилом диференціювання складної функції: $\omega_0 \dot{A} = A'$, $\omega_0 \dot{\varphi} = \varphi'$. Під інтегралами функції A та φ ввіжються сталими.

Зауваження. Відмітимо, що метод усереднення у наведеному формулюванні фактично збігається з першим порядком методу Боголюбова-Крилова. За аналогією з останнім даний підхід узагальнюють, накладаючи додаткові умови на функцію амплітуду A та фазу φ , розкладаючи її у ряд по параметру ε , так можна досягти більшої точності розв'язку (а також розв'язати задачі, у яких нелінійність дає квадратичні по ε ефекти⁷)

⁶ Наведений підхід запропонували Боголюбов та Крилов.

⁷ Наприклад, так буде для розглянутої раніше квадратичної нелінійності.

Перевагою методу усереднення перед методами розкладання є більш простий аналіз амплітуди нелінійного коливання та зручне дослідження стаціонарних розв'язки, коли $a' = b' = 0$ (або $A' = \varphi' = 0$). Досить поширеним застосуванням методу усереднення є аналіз стійкості стаціонарних розв'язків (обмеженість малих відхилень від них). ▮

Приклад 4. Осцилятор Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \dot{x}, \quad \varepsilon > 0.$$

◀ Перейдемо до безрозмірного часу у правих частинах рівнянь для амплітуди A та фази φ , підставляючи формули переходу (17.21):

$$\begin{aligned} \omega_0 \dot{A} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{A^2}{l^2} \cos^2(\tau + \varphi) \right) A \omega_0 \sin(\tau + \varphi) \cdot \sin(\tau + \varphi) d\tau, \\ \omega_0 A \dot{\varphi} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{A^2}{l^2} \cos^2(\tau + \varphi) \right) A \omega_0 \sin(\tau + \varphi) \cdot \cos(\tau + \varphi) d\tau. \end{aligned}$$

Вважаючи амплітуду та фазу сталими, інтегруємо тригонометричні функції:

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{4l^2} \right), \quad \dot{\varphi} = 0.$$

У отриманому рівнянні елементарно відокремлюються змінні, тому

$$\frac{\varepsilon}{2} (t - t_0) = \int \frac{dA}{\frac{A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{4l^2} \right)} = \left| \begin{array}{l} \text{заміна:} \\ y = A^2 \end{array} \right| = 4l^2 \int \frac{dy}{y(4l^2 - y)} = \ln \frac{y}{4l^2 - y}$$

звідси (покладемо $e^{-\varepsilon t_0} = A_0/2l$):

$$A(t) = \frac{A_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{4l^2} (e^{\varepsilon t} - 1)}}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}.$$

Відмітимо, що при $t \rightarrow \infty$, $A(t) \rightarrow 2l$ і рух описуватиметься законом гармонічних коливань. ▶

Із розглянутого прикладу можна побачити значну перевагу методу Ван дер Поля: наближений розв'язок описує рух системи протягом *усього* часу.

6. НЕЛІНІЙНИЙ РЕЗОНАНС. Нехай нелінійний осцилятор перебуває у полі періодичної зовнішньої сили:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \omega^{ext} t)$$

де ω^{ext} — частота зовнішньої сили. Тоді у спектрі частот з'являтимуться не тільки комбінаційні частоти для власної частоти коливань, а й частоти зовнішньої сили, комбінації матимуть вигляд $m\omega_0 \pm n\omega^{ext}$. Якщо комбінаційна частота виявиться близькою до частоти власних коливань, то коливання, що відповідає цій

гармоніці, матиме велику амплітуду (і такий рух домінуватиме над коливаннями з іншими частотами).

У нелінійних системах під дією зовнішніх сил резонанси у загальному випадку з'являтимуться на частотах вигляду

$$\omega^{ext} \simeq \frac{m}{n} \omega_0,$$

де m та n — цілі числа (взаємно прості). У випадку $m = n = 1$ резонансна частота буде близькою до частоти власних коливань ω_0 , тоді кажуть про *головний* або *звичайний* резонанс. Якщо $n = 1$, то $\omega^{ext} \simeq m\omega_0$ — резонанс на обертонах власної частоти, а при $m = 1$ буде $\omega^{ext} \simeq \omega_0/n$ — резонанс на обертонах частоти зовнішньої сили.

Для прикладу розглянемо нелінійний осцилятор із загасанням у полі зовнішньої сили

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t - \varepsilon x^3.$$

Будемо вважати загасання та кубічну нелінійність слабкими ($\beta \ll \omega_0$). Тоді розв'язок відрізнятиметься від розв'язку еквівалентної лінійної задачі малими поправками і можна обмежитись пошуком лише тієї його частини, яка викликана тільки змущуючою силою. Це означає, що після завершення релаксаційних процесів, пов'язаних із загасанням, коливання відбуватимуться з частотою змущуючої сили:

$$x \simeq A(t) \cos[\omega t + \varphi(t)].$$

У випадку, коли частота ω прямує до частоти власних коливань ω_0 матиме місце основний резонанс. Аналіз першого наближення проілюструємо на прикладі методів усереднення та Боголюбова-Крилова.

Приклад 5. Пошук наближення першого порядку методом усереднення.

◀ Метод усереднення можна застосовувати за умови, коли що загасання є малим (інакше амплітуда може змінюватись швидко). Перепишемо рівняння так, щоб у лівій частині опинилась частота ω , для цього введемо відстроювання $\Delta\omega$ від резонансної частоти:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \quad \text{тоді} \quad \omega_0^2 \simeq \omega^2 - 2\omega\Delta\omega$$

(якщо вважати $\Delta\omega$ малою величиною у порівнянні з власною частотою ω_0), тоді рівняння руху можна подати у вигляді, придатному для використання методу усереднення:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\omega\Delta\omega x - 2\beta\dot{x} - \varepsilon x^3 + f_0 \cos \omega t.$$

Рівняння для повільної амплітуди та фази (17.22) мають вигляд (тут $\tau = \omega t$):

$$\omega_0 \dot{A} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) \sin(\tau + \varphi) d\tau, \quad \omega_0 A \dot{\varphi} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) \cos(\tau + \varphi) d\tau$$

де підінтегральною функцією є

$$F(\tau) = 2\omega\Delta\omega A \cos(\tau + \varphi) + 2A\omega\beta \sin(\tau + \varphi) - \varepsilon A^3 \cos^3(\tau + \varphi) + f_0 \cos \tau.$$

Після інтегрування зі сталими функціями A , φ отримаємо:

$$\omega \dot{A} = -\omega \beta A + \frac{f_0}{2} \sin \varphi, \quad \omega A \dot{\varphi} = -A \omega \Delta \omega + \frac{3}{8} \varepsilon A^3 - \frac{f_0}{2} \cos \varphi. \quad (17.23)$$

Будемо розуміти як основну характеристику резонансу *залежність амплітуди ustalених коливань від частоти змушуючої сили*, у нашому випадку це фактично відстроювання. Для ustalених коливань повільні амплітуда та фаза досягають стаціонарних значень, які можна знайти з умови $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$:

$$\omega \beta A = \frac{f_0}{2} \sin \varphi, \quad -A \omega \Delta \omega + \frac{3}{8} \varepsilon A^3 = \frac{f_0}{2} \cos \varphi.$$

Позбавимось від ustalеної фази, додаючи квадрати стаціонарних рівнянь:

$$\omega^2 \beta^2 A^2 + A^2 \omega^2 \left(\Delta \omega - \frac{3\varepsilon}{8\omega} A^2 \right)^2 = \frac{f_0^2}{4}, \quad (17.24)$$

Це рівняння є кубічним відносно A^2 з дійсними коефіцієнтами, тому формально воно має або один дійсний корінь, або три. Це легко показати графічно, зображаючи корені як перетини горизонталі $y = \frac{f_0^2}{4}$ з функцією $y = F(A^2)$

$$F(A^2) = A^2 \left[\omega^2 \beta^2 + \left(\frac{3\varepsilon}{8} A^2 - \omega \Delta \omega \right)^2 \right]$$

яка перетинає має один дійсний нуль $A^2 = 0$ та два комплексних $A^2 = \frac{8\omega}{3\varepsilon}(\Delta \omega \pm i\beta)$, див. рис. 17.2. Інші дійсні корені можливі лише у спеціальних випадках, наприклад для $\beta = 0$. Характерною особливістю функції є наявність точки перегину, через це залежно від значення f_0 рівняння для пошуку амплітуди може мати один, два або три дійсні корені.

Для спрощення доцільно знайти функцію $\Delta \omega(A)$ і досліджувати обернену залежність:

$$\Delta \omega = \frac{3\varepsilon}{8\omega} A^2 \pm \sqrt{\frac{f_0^2}{4A^2\omega^2} - \beta^2}.$$

(подвійний знак описує різні боки кривої).

Перш ніж аналізувати поведінку резонансних кривих залежно від параметра f_0 розглянемо кілька частинний випадок $\beta = 0$ (відсутність загасання). Якщо відкинути зовнішню силу ($f_0 \rightarrow 0$), то система зведеться до вільного нелінійного осцилятора, а відстроювання

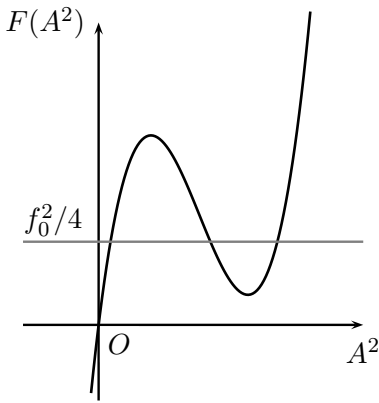
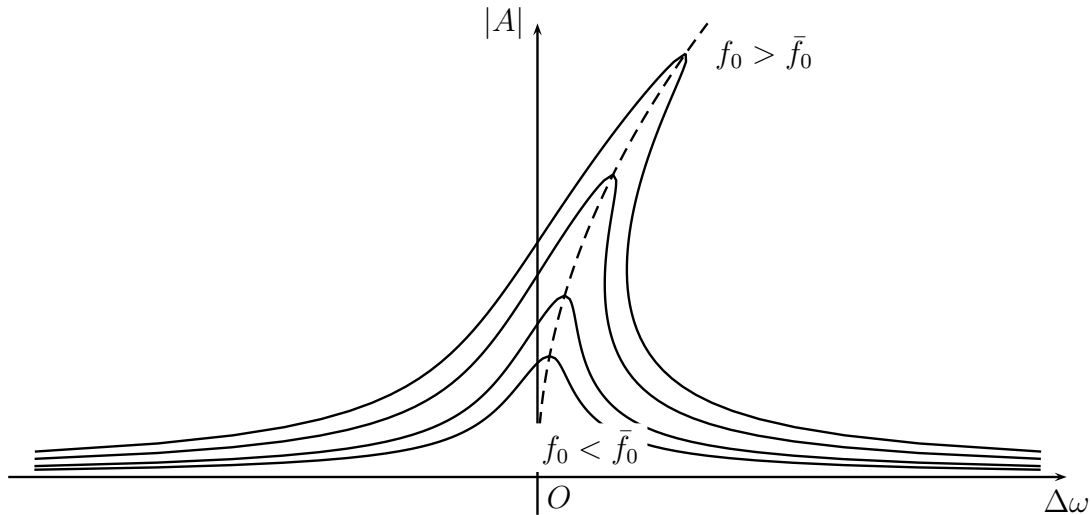


Рис. 17.2. Корені рівняння $F(A^2) = \frac{f_0^2}{4}$.

$$\Delta \omega = \frac{3\varepsilon}{8\omega} A^2$$

описуватиме зсув власної частоти коливань, яка викликана наявністю кубічної нелінійності (залежність частоти від амплітуди у першому порядку). Далі, нехай $\Delta \omega = 0$ і $f_0 \neq 0$, такий вибір відповідає нелінійному осцилятору без загасання у полі резонансної зовнішньої сили. У цьому випадку, на відміну від аналогічної ситуації з лінійним осцилятором, амплітуда коливань буде скінченною, з рівняння (17.24) отримуємо:

$$A_{res}^2 = \sqrt[3]{\frac{4f_0}{3\varepsilon}}, \quad \omega = \omega_0.$$

Рис. 17.3. Резонансні криві для різних значень f_0 .

Причина у тому, що зростання амплітуди приведе до зсуву власної частоти коливань осцилятора, і умова $\omega = \omega_0$ вже не відповідатиме точному резонансу, з'явиться відстроювання між *реальною* власною частотою коливань і частотою зовнішньої сили.

Розглянемо тепер характер резонансних кривих для різних значень амплітуди сили f_0 . Якщо сила достатньо мала, то з рис. (17.2) випливає, що амплітуда однозначно залежить від відстроювання (кубічне рівняння має лише один корінь). Оскільки амплітуда є достатньо малою, то у рівнянні (17.24) можна знехтувати степенями A вище другої:

$$\omega^2 \beta^2 A^2 + A^2 \omega^2 [\Delta\omega + O(A^2)]^2 = \frac{f_0^2}{4} \Rightarrow A^2 \simeq \frac{f_0^2}{4\omega^2} \frac{1}{\Delta\omega^2 + \beta^2}.$$

Сама резонансна крива у загальних рисах нагадує лоренцеву залежність для лінійного осцилятора із загасанням, однак її максимум зміщено праворуч через зсув частоти.

Для більших значень f_0 форма резонансної кривої починає більш суттєво відхилятися від випадку лінійного резонансу, поки не порушиться однозначність виразу амплітуди через відстроювання, спочатку з'явиться два дійсних розв'язки рівняння (17.24) (один з них є кратним), а потім три. Це означає, що існує область частот зовнішньої сили, яким відповідають кілька можливих амплітуд коливань. Така область відповідає інтервалу між точками, де дотичні до графіку $|A|(\Delta\omega)$ є вертикальними, її межі можна визначити, диференціюючи рівняння (17.24) по $\Delta\omega$, у результаті матимемо:

$$\frac{dA^2}{d\Delta\omega} = \frac{2\omega A^2 \left(\frac{3\varepsilon}{8} A^2 - \omega\Delta\omega\right)}{3 \left(\frac{3\varepsilon}{8} A^2 - \omega\Delta\omega\right)^2 + 2\omega\Delta\omega \left(\frac{3\varepsilon}{8} A^2 - \omega\Delta\omega\right) + \beta^2 \omega^2}. \quad (17.25)$$

Із умови нескінченності похідної отримаємо квадратне рівняння відносно $\Delta\omega$ (знаменник дорівнює нулю), це рівняння доведеться розв'язувати разом з (17.24). Відмітимо, що амплітуда досягає максимального значення для відстроювання $\Delta\omega = \frac{3\varepsilon}{8\omega} A^2$ що збігається зі значенням власної частоти нелінійного осцилятора у першому наближенні. Максимальне значення амплітуди, як випливає з (17.24), має вигляд:

$$A_{max} = \frac{f_0}{4\omega\beta}.$$

Крива $\Delta\omega(A)$, що описує власну частоту, називається *скелетною кривою*, її зображено на рис. 17.3 разом з резонансними кривими для різних випадків f_0 пунктирною лінією. (вона вказує положення максимуму амплітуди).

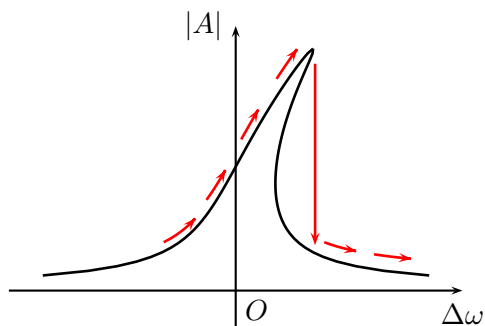


Рис. 17.4. Ефект зриву амплітуди.

Якщо частоту зовнішньої сили змінювати від нульового відстроювання у бік зростання, то амплітуда буде деякий час зростати (рис. 17.4), поки не досягне максимального значення. Після цього, обминаючи нестійку гілку, значення амплітуди рідко змінюється, і подальша залежність описується іншою стійкою гілкою розв'язку (монотонно спадній) поза областю неоднозначності. Це явище називається ефектом *зриву амплітуди*. Якщо змінювати відстроювання від більших значень до нуля, то амплітуда коливань деякий час зростатиме вздовж нижньої гілки резонансної кривої, а потім (у точці, де дотична до кривої вертикальна) відбудеться зрив амплітуди до більших значень на верхній гілці.

Відмітимо, що у випадку $\beta = 0$ амплітудну залежність можна описати виразом

$$\Delta\omega = \frac{3\varepsilon}{8\omega} A^2 \pm \frac{f_0}{2|A|\omega},$$

криві асимптотично наближаються до скелетної кривої для нескінченних відстроювань (див. рис. 17.5). На відміну від лінійного випадку нескінченного зростання амплітуди для жодного значення відстроювання не буде, причиною є суттєвий вплив нелінійності на характер коливань, це в основному викликано залежністю власної частоти коливань від амплітуди — у разі зростання останньої власна частота зміщується. Явище зриву амплітуди для випадку $\beta = 0$ можливе лише при зменшенні відстроювання (стрибок амплітуди у бік збільшення з нижньої гілки на верхню). ►

Зауваження. У прикладі було розглянуто найпростіший випадок аналізу резонансу у нелінійній системі. Насправді резонансна взаємодія з зовнішнім джерелом значно складніша і не зводиться до простого домінування усталеного змусованого руху. Якщо врахувати ще наявні коливання з власною частотою, то у спектрі обов'язково з'являться комбінаційні частоти, деякі з них можуть виявитись близькими до резонансної частоти. ┘

Задача 17.1. Дослідити умови, за яких існує область багатозначних амплітуд (див. рівняння (17.25)). Визначити критичне значення амплітуди \bar{f}_0 зовнішньої сили, для якого стає можливим зрив амплітуди.

Як було зазначено раніше, послідовне врахування нелінійності приводить до появи резонансів як на гармоніках власної частоти, так і на гармоніках зовнішньої

сили. Механізм виникнення таких резонансів зводиться до породження гармонік, кратних частоті ω нелінійними доданками, а самі гармоніки збуджують коливання з відповідними частотами у механічній системі. Для дослідження таких випадків у рівнянні руху потрібно перейти до відповідного відстроювання і потім будувати розв'язок так само, як і для основного резонансу.

Задача 17.2. Дослідити резонанс на частоті $\omega = \omega_0/2$.

Для розгляду нестационарної неоднорідності також придатний метод Боголюбова-Крилова, який потрібно модифікувати врахуванням додаткової залежності від часу, яку вносить зовнішня сила. Основний розклад (17.10) слід замінити на

$$x = A \cos \varphi + \varepsilon x_1(A, \varphi, \omega^{ext}t) + \varepsilon^2 x_2(A, \varphi, \omega^{ext}t) + \dots \quad (17.26)$$

де функції $x_k(a, \varphi, \omega^{ext}t)$ мають бути періодичними по φ та $\omega^{ext}t$ з періодом 2π .

У нерезонансному випадку рівняння для амплітуди та фази залишаються незмінними:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \varepsilon f_1(A) + \varepsilon^2 f_2(A) + \dots, \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 + \varepsilon g_1(A) + \varepsilon^2 g_2(A) + \dots \end{aligned}$$

(не залежать від $\omega^{ext}t$, оскільки за відсутності резонансу фаза коливань не залежить від фази зовнішньої сили). Далі у кожному порядку розкладу праву частину рівняння та поточне наближення розкладають у кратний ряд Фур'є по базисах $\exp(im\omega^{ext}t)$ та $\exp(in\omega_0t)$ (або, еквівалентно, $\exp(in\varphi)$):

$$F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\varphi}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

(для кратних рядів зручно користуватись комплексною формою розкладу) Далі, порівнюючи коефіцієнти при однакових гармоніках, шукають функції f_i та g_i . У спектрі, очевидно, з'являтимуться комбінаційні частоти $m\omega^{ext} + n\omega_0$, тому коефіцієнти розкладу поточного наближення повинні задовольняти умову $m\omega^{ext} + n\omega_0 \neq \pm\omega_0$ (відсутність резонансу).

Якщо ж досягається *випадок резонансу* $\omega^{ext} \simeq \frac{m}{n} \omega_0$, то у розв'язку вплив коливання з цією частотою буде визначальним і рівняння потрібно змінити, вводячи мале відстроювання від резонансу (зручно скористатись квадратичним відстроюванням):

$$\varepsilon \Delta = \omega_0^2 - \omega_{res}^2, \quad \omega_{res} = \frac{m}{n} \omega_0,$$

множник ε забезпечує малість відстроювання. тоді у рівнянні можна виділити визначальну частоту коливань:

$$\ddot{x} + (\omega_{res}^2 + \varepsilon \Delta)x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \omega^{ext}t) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_{res}^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \omega^{ext}t, \Delta)$$

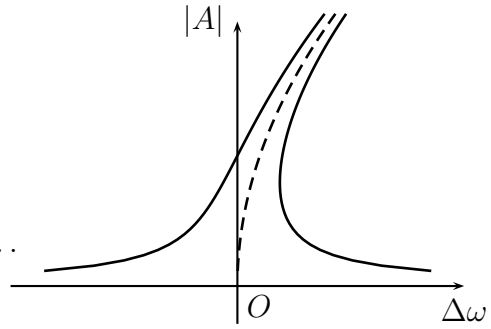


Рис. 17.5. Випадок $\beta = 0$.

де $\varepsilon F(x, \dot{x}, \omega^{ext}t, \Delta) = \varepsilon[f(x, \dot{x}, \omega^{ext}t) - \Delta x]$ позначає модифіковану праву частину рівняння руху. Тоді функцію $x(t)$ шукають у вигляді розкладу (17.26) по періодичних функціях, причому для A та φ будують рівняння

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A, \theta) + \varepsilon^2 f_2(A, \theta) + \dots, \quad \dot{\theta} = \varepsilon g_1(A, \theta) + \varepsilon^2 g_2(A, \theta) + \dots, \quad (17.27)$$

де θ позначає різницю фаз

$$\theta(t) = \varphi - \omega_{res}t,$$

у резонансному випадку ця різниця фаз суттєво впливає на зміну амплітуди та частоти руху, тому її виділяють явно, вона ж є аргументом у правих частинах рівнянь (17.27). Наступні дії аналогічні до попереднього: для кожного порядку наближення розкладають $x_n(t)$ та праву частину рівняння у кратний ряд Фур'є по базисах $\exp(in\varphi)$ та $\exp(in\omega_{ext}t)$ і порівнюють коефіцієнти при однакових гармоніках. У разі появи резонансних гармонік з частотами ω_{ext} накладають додаткові вимоги скінченності розв'язку (коефіцієнти при таких гармоніках дорівнюють нулю). Деталі побудови розкладу у ряд Фур'є розглянуто буде далі на прикладі.

Розглянемо приклад застосування методу Боголюбова-Крилова для основного резонансу осцилятора з кубічною нелінійністю та загасанням. Попередньо за допомогою рівнянь (17.27) запишемо розклади швидкості та прискорення (де на відміну від аналогічних виразів (17.14), (17.15) та (17.16) потрібно врахувати явну залежність функцій x_n від часу). Для зручності вважатимемо незалежною величиною фазовий зсув θ :

$$x(t) = A \cos(\omega_{res}t + \theta) + \varepsilon x_1(A, \theta, t) + \varepsilon^2 x_2(A, \theta, t) + \dots \quad (17.28)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \left(\cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial A} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial A} + \dots \right) \dot{A} \\ & + \left(-A \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \dots \right) \dot{\theta} + \left(-A \omega_{res} \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots \right), \end{aligned}$$

для другої похідної, диференціюючи першу похідну, отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \left(\cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial A} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial A} + \dots \right) \ddot{A} + \left(\varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial A^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial A^2} + \dots \right) \dot{A}^2 \\ & + 2 \left(-\sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta \partial A} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta \partial A} + \dots \right) \dot{\theta} \dot{A} + 2 \left(-\omega_{res} \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial A} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial A} + \dots \right) \dot{A} \\ & + \left(-A \sin \varphi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \dots \right) \ddot{\theta} + \left(-A \cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \theta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \theta^2} + \dots \right) \dot{\theta}^2 \\ & + 2 \left(-A \omega_{res} \cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial \theta} + \dots \right) \dot{\theta} + \left(-A \omega_{res}^2 \cos \varphi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Якщо підставити першу та другу похідні A , θ та їх комбінації на основі рівнянь (17.27),

$$\begin{aligned} \ddot{A} = & \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial A} + g_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right) + \dots, \quad \dot{A}^2 = \varepsilon^2 f_1^2 + \dots, \quad \ddot{\theta} = \varepsilon^2 \left(f_1 \frac{\partial g_1}{\partial A} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \right) + \dots, \\ \dot{\theta}^2 = & \varepsilon^2 g_1^2 + \dots, \quad \dot{A} \dot{\theta} = \varepsilon^2 f_1 g_1 + \dots \end{aligned}$$

то результат можна записати у вигляді:

$$\dot{x} = [\dot{x}]_0 + \varepsilon[\dot{x}]_1 + \varepsilon^2[\dot{x}]_2 + \dots, \quad \ddot{x} = [\ddot{x}]_0 + \varepsilon[\ddot{x}]_1 + \varepsilon^2[\ddot{x}]_2 + \dots,$$

де окремо виділено порядки розкладу швидкості

$$\begin{aligned} [\dot{x}]_0 &= -A\omega_{res} \sin \varphi, \\ [\dot{x}]_1 &= f_1 \cos \varphi - Ag_1 \sin \varphi + \frac{\partial x_1}{\partial t}, \\ [\dot{x}]_2 &= f_2 \cos \varphi - Ag_2 \sin \varphi + f_1 \frac{\partial x_1}{\partial A} + g_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ &\dots \end{aligned}$$

та прискорення:

$$\begin{aligned} [\ddot{x}]_0 &= -A\omega_{res}^2 \cos \varphi, \\ [\ddot{x}]_1 &= -2f_1\omega_{res} \sin \varphi - 2\omega_{res}Ag_1 \cos \varphi + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}, \\ [\ddot{x}]_2 &= -(2\omega_{res}g_2 + g_1^2)A \cos \varphi - 2(f_2\omega_{res} + f_1g_1) \sin \varphi + \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial A} + g_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right) \cos \varphi \\ &\quad - \left(f_1 \frac{\partial g_1}{\partial A} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial \theta}\right) A \sin \varphi + 2f_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial A} + 2g_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

У конкретних прикладах формули для швидкості та прискорення насправді не є такими громіздкими, оскільки після аналізу першого порядку частина доданків другого порядку стає відомою (досить часто взагалі зникає).

Приклад 6. Пошук наближення першого порядку методом Боголюбова-Крилова для нелінійного осцилятора із загасанням:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t - 2\beta \dot{x} - \varepsilon x^3$$

(основний резонанс).

◀ Виділимо у правій частині резонансну частоту $\omega_{res} = \omega$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t - \varepsilon \Delta \cdot x - 2\beta \dot{x} - \varepsilon x^3$$

Підстановка розкладу $x(t)$ до правої частини з точністю до малих величин першого порядку дає:

$$\varepsilon[\ddot{x} + \omega^2 x]_1 = f_0 \cos \omega t - \varepsilon \Delta \cdot x_0 - 2\beta[\dot{x}]_0 - \varepsilon[x^3]_0$$

або

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega^2 x_1 &= F(\varphi, \omega t) + (2\omega Ag_1 - \Delta \cdot A) \cos \varphi + 2f_1 \omega \sin \varphi, \\ F(\varphi, \omega t) &= \frac{f_0}{\varepsilon} \cos \omega t - \frac{3A^3}{4} \cos \varphi + \frac{2\beta \omega A}{\varepsilon} \sin \varphi - \frac{A^3}{4} \cos 3\varphi \end{aligned}$$

(з функції F вилучено доданки, які породжуються похідними). Якщо

$$x_1 = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{mn} e^{i(m\varphi + in\omega t)},$$

то з врахуванням зв'язку $\varphi = \omega t + \theta$ знайдемо ліву частину:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega^2 x_1 = \sum_{m,n} [1 - (m+n)^2] \omega^2 \alpha_{mn} e^{i(m\varphi + in\omega t)},$$

Розклад правої частини можна не проводити, оскільки її вже виражено через тригонометричні функції (залишається перейти до комплексного представлення). Порівняння коефіцієнтів розкладів показує, що значення α_{mn} з $(m+n)^2 = 1$ будуть нескінченними. Для уникнення розбіжних коефіцієнтів вважатимемо, комбінація з аналогічними гармоніками у правій частині рівняння зникає. Якщо

$$F(\varphi, \omega t) = \sum_{m,n} F_{mn} e^{i(m\varphi + n\omega t)}, \quad F_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d(\omega t) F(\varphi, \omega t) e^{-i(m\varphi + n\omega t)},$$

то

$$\left[\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \right]_{(m+n)^2=1} F_{mn} e^{i(m\varphi + n\omega t)} = -(2\omega A g_1 - \Delta \cdot A) \cos \varphi - 2f_1 \omega \sin \varphi \quad (17.29)$$

(тоді порівняння коефіцієнтів дасть замість нескінченних значень α_{mn} нульові). У такій сумі фігурують доданки з експонентами

$$e^{im\varphi + in\omega t} = e^{im(\omega t + \theta) + n\omega t} = e^{i(m+n)\omega t + im\theta} = e^{\pm i\omega t + im\theta} = e^{\pm i(\omega t + \theta) + i(m \mp 1)\theta} = e^{\pm i\varphi + i(m \mp 1)\theta},$$

(знаки відповідають вибору $m+n = \pm 1$), тому вона зведеться до двох сум по індексу m :

$$e^{i\varphi} \sum_m F_{m,-m+1} e^{i(m-1)\theta} + e^{-i\varphi} \sum_m F_{m,-m-1} e^{i(m+1)\theta} = e^{i\varphi} \sum_n F_{n+1,-n} e^{in\theta} + e^{-i\varphi} \sum_n F_{n-1,-n} e^{in\theta}$$

(у останньому виразі змінено лічильники). Перейдемо за допомогою формули Ейлера $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ перейдемо до сум з дійсними множниками:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \right]_{(m+n)^2=1} F_{mn} e^{i(m\varphi + n\omega t)} \\ &= \cos \varphi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_{n+1,-n} + F_{n-1,-n}] e^{in\theta} + \sin \varphi \sum_{n=-\infty}^{\infty} i[F_{n+1,-n} - F_{n-1,-n}] e^{in\theta}. \end{aligned}$$

З побудови розкладу $F(\varphi, t)$ випливає, що

$$\begin{aligned} F_{n+1,-n} + F_{n-1,-n} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d(\omega t) F(\varphi, \omega t) e^{in\theta} \cos \varphi, \\ i[F_{n+1,-n} - F_{n-1,-n}] &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d(\omega t) F(\varphi, \omega t) e^{in\theta} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Таким чином, порівнюючи коефіцієнти при $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$ у (17.29), отримаємо:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{4\pi^2\omega} \sum_n e^{in\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d(\omega t) F(\varphi, \omega t) e^{in\theta} \sin \varphi, \\ g_1 &= \frac{\Delta}{2\omega} - \frac{1}{4\pi^2\omega A} \sum_n e^{in\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d(\omega t) F(\varphi, \omega t) e^{in\theta} \cos \varphi \end{aligned} \quad (17.30)$$

(під час обчислення інтегралів потрібно врахувати зв'язок $\varphi = \omega t + \theta$). У даній задачі підстановка функції F дає:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\beta\omega A}{\varepsilon} - \frac{f_0}{2\varepsilon} \sin \theta \right), \\ g_1 &= \frac{\Delta}{2\omega} - \frac{1}{\omega A} \left(-\frac{3A^3}{8} + \frac{f_0}{2\varepsilon} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

(відмінні від нуля результати будуть тільки для $n = 0, \pm 1$). Таким чином, рівняння для амплітуди та фази у першому порядку матимуть вигляд:

$$\dot{A} = -\beta A + \frac{f_0}{2\omega} \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega} + \frac{3\varepsilon A^2}{8\omega} - \frac{f_0}{2\omega A} \cos \theta,$$

ці рівняння еквівалентні (17.23), для частот, близьких до резонансних можна покласти

$$\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega\Delta\omega,$$

де $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — лінійне відстроювання. ►

Незважаючи на громіздкість у використанні метод Боголюбова-Крилова дозволяє послідовно враховувати резонанси на гармоніках та субгармоніках. Крім того, його можна сформулювати ще загальніше для детального дослідження перехідного режиму (див. [25]).

7. ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС. Крім *силового* (безпосередньо за допомогою сили, що прикладена до системи і безпосередньо виконує роботу) існує ще один спосіб впливу на механічну систему. Він зводиться до змін внутрішніх параметрів системи за допомогою зовнішніх факторів і називається *параметричним* збудженням. Простим прикладом може служити математичний маятник, у якого точка підвісу рухається за періодичним законом по вертикалі (рис. 17.6).

Функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy,$$

де x, y — декартові координати частинки. Беручи до уваги зв'язок (який зводиться до фіксованої довжини підвісу), перейдемо до кута:

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi + a \sin \omega t,$$

останній доданок є координатою точки підвісу. Підставляючи координати до функції Лагранжа та відкидаючи повну похідну, отримаємо:

$$L = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 - 2al\omega\dot{\varphi} \sin \omega t \sin \varphi) + mgl \cos \varphi.$$

Рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(t) \sin \varphi = 0, \quad \omega^2(t) = \frac{g}{l} + \frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t,$$

формально таке рівняння описує математичний маятник, у якого частота змінюється періодично з частотою ω .

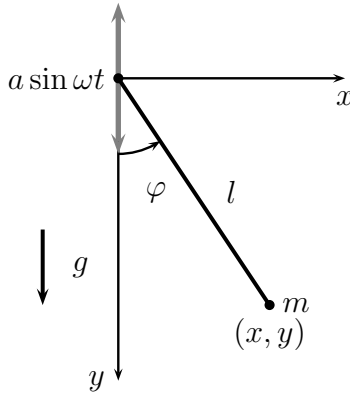


Рис. 17.6. Маятник з рухомим підвісом

Оцінимо положення можливого резонансу для малих відхилень за допомогою послідовних наближень. Якщо $a \ll l$, то у рівнянні

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = -\frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t \varphi$$

праву частину можна замінити на розв'язок $\varphi^{(0)} = A \cos \omega t$ (без параметричного збудження). Тоді у правій частині опиняється відома функція часу і формально вона описує змушуючу силу F . Її середня потужність за час Δt пропорційна до

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F \dot{\varphi}^{(0)} dt &= -\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{a}{l} \omega^2 \sin(\omega t) \varphi^{(0)} \right) \dot{\varphi}^{(0)} dt \\ &= \frac{a\omega_0\omega^2 A^2}{2l\Delta t} \left[\frac{\sin(\omega + 2\omega_0)t}{\omega + 2\omega_0} - \frac{\sin(\omega - 2\omega_0)t}{\omega - 2\omega_0} \right]_t^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

Знаменник другого доданку буде близьким до нуля, якщо $\omega \simeq 2\omega_0$ навіть для малого часу Δt . у інших випадках для довільного часу Δt середня потужність приводить до незначних змін енергії. Такий резонанс за рахунок параметричного збудження параметра системи називається *параметричним резонансом*, він зводиться до зростання амплітуди коливань системи з частотою, пов'язаною з частотою зовнішнього процесу.

У загальному випадку суто параметричне збудження системи (навіть у лінійному випадку) з частотою ω приводить до появи резонансів на частотах $\omega \simeq 2\omega_0/n$, де n — ціле число. Характерною особливістю параметричного збудження є обмеженість набору резонансних частот, тоді як для силового випадку резонансна частота всього одна для лінійної системи і може набувати як завгодно великого значення для нелінійної (є приблизно пропорційною до власної з раціональним коефіцієнтом). Крім того, якщо система дисипативна, то для появи параметричного резонансу необхідно, щоб амплітуда зовнішнього впливу перевищувала деяке порогове значення (на відміну від випадку силового резонансу).

Розглянемо для прикладу нелінійний осцилятор із загасанням, коди його власна частота змінюється періодично з часом. Для аналізу обмежимося першим порядком методу Боголюбова-Крилова.

Приклад 7. Параметричний резонанс для нелінійного осцилятора із загасанням:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = -2\beta\dot{x} - \varepsilon x^3, \quad \omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \alpha \sin 2\omega t),$$

де $\alpha, \beta, \varepsilon$ — малі величини.

◀ Як було зазначено раніше, для такої системи можливий резонанс на частоті $\omega \simeq \omega_0$, тому для дослідження поведінки системи у околі резонансу шукатимемо розв'язок нульове наближення

$$x_0 = A \cos(\omega t + \theta) + \varepsilon x_1(A, \theta, \omega t) + \dots$$

і означимо квадратичне відстроювання від резонансу $\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \omega^2$. За методом Боголюбова-Крилова рівняння руху потрібно подати у формі

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -(\varepsilon\Delta + \alpha\omega_0^2 \sin 2\omega t)x - 2\beta\dot{x} - \varepsilon x^3.$$

Як і у попередньому прикладі, рівняння для першого наближення отримаємо підстановками нульового наближення до правої частини:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega^2 x_1 &= F(\varphi, \omega t) + (2\omega A g_1 - \Delta \cdot A) \cos \varphi + 2f_1 \omega \sin \varphi, \\ F(\varphi, \omega t) &= -\frac{\alpha\omega_0^2 A}{\varepsilon} \sin 2\omega t \cos \varphi - \frac{3A^3}{4} \cos \varphi + \frac{2\beta\omega A}{\varepsilon} \sin \varphi - \frac{A^3}{4} \cos 3\varphi \end{aligned}$$

Далі потрібно виконати розклади у кратний ряд Фур'є і порівняти коефіцієнти вимагаючи, щоб нескінченні коефіцієнти розкладу зникли. Однак оскільки резонансна частота формально така сама, як і раніше (завдяки позначенню в умові прикладу), то можна скористатись готовим результатом (17.30). Обчислення інтегралів дає:

$$f_1 = -\frac{1}{\omega} \left(\beta\omega A - \frac{\alpha\omega_0^2 A}{4\varepsilon} \cos 2\theta \right), \quad g_1 = \frac{\Delta}{2\omega} - \frac{1}{\omega A} \left(-\frac{3A^3}{8} + \frac{\alpha\omega_0^2 A}{4\varepsilon} \sin 2\theta \right).$$

звідки отримаємо рівняння для амплітуди та фази:

$$\dot{A} = -\beta A + \frac{\alpha\omega_0^2 A}{4\omega} \cos 2\theta, \quad \dot{\theta} = \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega} + \frac{3A^2}{8\omega} - \frac{\alpha\omega_0^2}{4\omega} \sin 2\theta. \quad (17.31)$$

Зауважимо, що для розв'язку $x = A \cos(\omega t + \theta)$ метод усереднення дає те саме.

Дослідимо стійкість руху для малих амплітуд, нехтуючи квадратичним доданком з амплітудою. Доцільно перейти від “полярних координат” (A, θ) до “декартових” (u, v) за правилом

$$u = A \cos \theta, \quad v = A \sin \theta.$$

Тоді

$$\dot{u} = \dot{A} \cos \theta - A \dot{\theta} \sin \theta = \left(-\beta A + \frac{\alpha\omega_0^2}{4\omega} A \cos 2\theta \right) \cos \theta - \left(\frac{\varepsilon\Delta}{2\omega} A - \frac{\alpha\omega_0^2}{4\omega} A \sin 2\theta \right) \sin \theta.$$

У правій частині легко виділити змінні (u, v) . Так само можна поступити з похідною \dot{v} , у результаті:

$$\dot{u} = \left(\frac{\alpha\omega_0^2}{4\omega} - \beta \right) u - \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega} v, \quad \dot{v} = \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega} u - \left(\frac{\alpha\omega_0^2}{2\omega} + \beta \right) v.$$

Розв'язок цієї лінійної системи можна знайти за стандартною процедурою, виконуючи підстановку $u = u_0 e^{\lambda t}$ та $v = v_0 e^{\lambda t}$, для показника λ отримаємо квадратне характеристичне рівняння з розв'язком:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \frac{1}{2\omega} \sqrt{\left(\frac{\alpha\omega_0^2}{2} \right)^2 - (\varepsilon\Delta)^2}.$$

Корінь λ_+ за деяких умов буде додатнім, тоді розв'язки (u, v) експоненціально зростатимуть, що відповідає ситуації резонансу⁸. Це можливо, якщо

$$\left(\frac{\alpha\omega_0^2}{2} \right)^2 - (\varepsilon\Delta)^2 > 2\omega^2\beta^2$$

звідки, вводячи квадратичне відстроювання у правій частині, маємо умову на частоту ω :

$$(\varepsilon\Delta)^2 + 2\beta^2(\varepsilon\Delta) + 2\omega_0^2\beta^2 - \left(\frac{\alpha\omega_0^2}{2} \right)^2 < 0,$$

тому резонанс можливий для частот, що задовольняють нерівність:

$$\varepsilon\Delta_{min} < \varepsilon\Delta < \varepsilon\Delta_{max}, \quad \varepsilon\Delta_{max,min} = -\beta^2 \pm \sqrt{\beta^4 - 2\omega_0^2\beta^2 + \frac{\alpha^2\omega_0^4}{4}}.$$

Нерівність матиме сенс, якщо підкореневий вираз додатний (інакше у неї немає розв'язків). Це накладає обмеження на параметр α :

$$\alpha^2 > \frac{4\beta^2}{\omega_0^2} \left(2 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2} \right) = \alpha_c^2,$$

тобто резонанс буде можливим, якщо α перевищує знайдене критичне значення α_c . Зауважимо, що у системі без дисипації поріг відсутній.

Для побудови резонансної характеристики розглянемо стаціонарний випадок $\dot{A} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ у рівняннях (17.31). Тоді після виключення фази знайдемо рівняння для пошуку амплітуди:

$$\left(\frac{\varepsilon\Delta}{2} + \frac{3A^2}{8} \right)^2 + \omega^2\beta^2 = \left(\frac{\alpha\omega_0^2}{4} \right)^2,$$

звідки

$$A^2 = \frac{8}{3} \left[-\frac{\varepsilon\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\omega_0^2}{4} \right)^2 - \omega^2\beta^2} \right].$$

Залежно від значення відстроювання матиме сенс або корінь зі знаком “+”, або зі знаком “−”. Для малого відстроювання можна вважати, що $\Delta \simeq -2\omega_0\Delta\omega$. Для побудови графіку відстроювання слід виділити також і у підкореному виразі, поклавши $\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\Delta$, поблизу резонансу $\omega^2 \simeq 2\omega_0\Delta\omega + \omega_0^2$. ►

⁸ Зростання амплітуди триватиме лише деякий час. Через нелінійні ефекти амплітуда все одно буде обмеженою (див. вираз для амплітуди далі.)

Нелінійні коливальні процеси природним чином виникають не лише у механічних задачах, вони типові для великого класу процесів у довільному розділі фізики та хімії (детальніше див. [28]). Зокрема у 50-60 роки минулого століття розвиток аналізу нелінійних коливальних процесів стимулював розвиток радіофізики ([26], [27]) та нелінійній оптиці.

ЛЕКЦІЯ 18

Варіаційний принцип у механіці Лагранжа

1.	Інтегральна форма принципу д'Аламбера.	303
2.	Основи варіаційного числення.	306
3.	Варіаційний принцип Гамільтона для консервативних систем.	315
4.	Постановка варіаційної задачі.	317
5.	Висновки.	318

1. ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМА ПРИНЦИПУ Д'АЛАМБЕРА. Рівняння класичної механіки у формі рівнянь Лагранжа раніше було отримано як проекції рівнянь векторної механіки Ньютона на напрямки, дотичні до поверхонь зв'язків, по яких рухається система. Для побудови рівнянь Лагранжа був використаний еквівалентний підхід на основі принципу д'Аламбера, який формулюється як рівність нулю роботи сил реакції при віртуальних переміщеннях системи для ідеальних зв'язків. Для системи N частинок:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

де $\delta \vec{r}_i$ позначає віртуальні переміщення (варіації) радіус-векторів частинок (кінематично можливе переміщення у даний момент часу).

Незважаючи на те, що рівняння Лагранжа є наслідками принципу д'Аламбера, останній не є універсальним принципом, з якого безпосередньо випливають всі закони механіки із кількох причин:

- 1) величини, які фігурують у принципі д'Аламбера породжуються ньютонівською схемою механіки, з усіма недоліками, характерними для векторного опису системи (зокрема, кількість рівнянь руху може бути більшою за кількість ступенів вільності системи);
- 2) принцип д'Аламбера є *локальним* твердженням, у ньому йдеться про варіації координат механічної системи *у даний момент часу*, а для різних моментів часу віртуальні переміщення будуються по-різному і не пов'язані між собою.

Перший недолік легко усунути, переходячи до узагальнених координат у виразі для принципу д'Аламбера. Тоді $\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i(q,t)}{\partial q_k} \delta q_k$ і віртуальні переміщення в даний момент часу будуть описуватись набором незалежних параметрів δq_k .

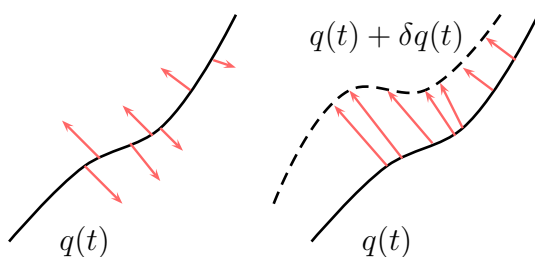
Щодо другого недоліку, то його причиною є формальне означення способу ва-

ріювання. Віртуальні переміщення є суто *геометричними* поняттями¹, не залежать від часу і не стосуються реального переміщення системи. Вони описують можливі *положення* системи поряд із дійсним (на траєкторії), які допускаються зв'язками — тобто всі точки $q + \delta q$, побудовані у момент часу t , належать поверхні зв'язків. При цьому інформація про механічну систему у зміщеному положенні є неповною, оскільки відсутні дані про швидкості. Інакше кажучи, варіаційний принцип не описує можливого механічного стану.

Розглядаючи одні тільки віртуальні переміщення δq_i , визначити швидкість, яка передбачає знання координат у близькі моменти часу, не можна як раз через локальність. Більше того, віртуальні переміщення у різні моменти часу є абсолютно незалежними і набір зміщених положень системи у різні моменти часу є набором чисел $(q + \delta q, t)$, які разом можуть не утворювати неперервної кривої у конфігураційному просторі. У загальному випадку “крива” $(q + \delta q, t)$ є скрізь розривною, до неї не можна побудувати дотичні, а отже не можна означити напрямки швидкостей. Тому для віртуальних переміщень поняття механічного стану системи відсутнє.

Винятком буде спеціальний випадок, коли точки $(q + \delta q, t)$ утворюють неперервну криву $q(t) + \delta q(t)$, тобто їх координати у кожний момент часу отримано як значення деякої довільної функції. Тоді віртуальні переміщення визначатимуть не тільки можливе положення, а й можливий механічний стан, який однозначно можна встановити за відомим положенням системи на траєкторії (диференціюванням формули $q(t) + \delta q(t)$). У механіці Лагранжа траєкторія є глобальним поняттям — вона дає повну інформацію про рух системи та про характер зміни механічного стану із часом.

Для побудови такої глобальної версії принципу д'Аламбера потрібно обмежити клас віртуальних варіацій випадком, коли варіації координат у різні моменти часу узгоджені між собою і разом описують криву $q(t) + \delta q(t)$, яка близька до дійсної траєкторії системи $q(t)$. У такій інтерпретації віртуальні переміщення будуються як значення довільної малої функції в різні моменти часу (а не породжуються довільним набором чисел в різні моменти часу t), і елемент неоднозначності у їх побудові частково усувається. Геометричну відмінність цих способів варіювання зображено на рис. 18.1.



Якщо узагальнені координати вводяться за допомогою співвідношень

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t),$$

то віртуальні варіації радіус-векторів можна виразити через варіації узагальнених координат у першому порядку формули Тейлора як

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i(q, t)}{\partial q_k} \delta q_k(t),$$

Рис. 18.1. Варіації як довільні числа та як значення довільної функції.

де час не змінюється під час обчислення віртуальної варіації, а символ $\delta q_k(t)$ означає нескінченно малу функцію часу, на відміну від нескінченно малого числа δq_k , яке в різні моменти часу вибирається абсолютно по-різному.

¹ Нагадаємо, що у формулюванні принципу д'Аламбера “віртуальна робота” сил реакції має таку назву лише через подібність виразу до означення роботи, віртуальні переміщення $\delta \vec{r}$ не є реальними переміщеннями на час δt .

Тепер після виконеної конкретизації віртуальних переміщень як функцій часу над ними можна виконувати аналітичні операції. Так само, як у виведенні рівнянь Лагранжа, перехачи до узагальнених координат, виділимо явно кінетичну енергію:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \delta \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right).$$

Якщо означити роботу сил для віртуального переміщення $\partial A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$, отримаємо:

$$\delta T + \partial A - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) = 0.$$

Для формулювання глобального результату проглянемо рух системи вздовж деякої дійсної траєкторії при зміні часу від t_1 до t_2 . Віртуальні переміщення, згідно з введеним обмеженням, відповідають варіації дійсної траєкторії, яка розглядається у часовому інтервалі $[t_1, t_2]$, тобто $\delta \vec{r}(t)$. Якщо проінтегрувати останню рівність по t на інтервалі $[t_1, t_2]$, то у третьому доданку залишиться залежність тільки від початкової та кінцевої точки траєкторії:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \partial A) dt = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Якщо точки траєкторії у початковий та кінцевий моменти часу фіксовані, тобто $\delta q(t_{1,2}) = 0$ (і автоматично $\delta \vec{r}_i(t_{1,2}) = 0$), то

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \partial A) dt = 0. \quad (18.1)$$

Це і є загальний вираз для глобальної форми принципу д'Аламбера, де йдеться про зміщення траєкторії як цілого. У окремому випадку системи з потенціальними силами взаємодії:

$$\partial A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \delta \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U = -\delta U,$$

звідки отримуємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \partial A) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Інтеграл

$$S[q, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

називається *інтегралом (функціоналом) дії Гамільтона*.

Таким чином, для віртуальних варіації траєкторії в цілому (які відповідають заміні дійсної траєкторії на довільну близьку криву, з тим самим початком та кінцем) варіація функціоналу дії дорівнює нулю. Це виконується, очевидно, тільки у першому порядку по δq , оскільки для віртуальних переміщень $\delta \vec{r}$ було використано перший доданок формули Тейлора по δq , тому насправді повна зміна функціоналу дії при варіації траєкторії включає доданки другого та більш високого порядку по δq . Схожа ситуація виникає у класичному аналізі у означенні екстремуму функції, тому і у даному випадку можна стверджувати, що функціонал дії набуває стаціонарного (а можливо й екстремального) значення на дійсній траєкторії у тому розумінні, що у лінійному по варіації наближення він не змінюється. У цьому і полягає варіаційний принцип Гамільтона.

Рівняння Лагранжа закладено до принципу д'Аламбера, їх можна отримати як його безпосередній наслідок. При цьому побудова рівнянь руху на основі принципу д'Аламбера зводиться до перетворення його виразу. Оскільки принцип Гамільтона є наслідком принципу д'Аламбера, то можна сподіватись, що крім загальної інформації про систему, яку закладено до функції Лагранжа, принцип Гамільтона включає як рівняння руху, так і спосіб їх отримання. Для принципу Гамільтона дійсна траєкторія відповідає стаціонарності функціоналу дії у першому порядку по варіації координати. Тому отримання рівнянь руху є процедурою, яка еквівалентна до задачі дослідження $S[q, t_1, t_2]$ на екстремум відносно функції $q(t)$, тобто у деякому розумінні пошук екстремуму до зводиться до “диференціювання” $S[q, t_1, t_2]$ по функції $q(t)$. У класичному математичному аналізі, де центральним поняттям є числова змінна, таку процедуру диференціювання неозначено. Пошук екстремумів функцій, що залежать від інших функцій, є предметом *варіаційного числення*, основні поняття якого розглянуті далі.

Зауваження. Формально не можна стверджувати, що принцип Гамільтона цілком еквівалентний до принципу д'Аламбера. Для його отримання було виконано обчислення визначеного інтегралу, який після дії на функцію дає число — це незворотна дія, за значенням визначеного інтегралу, взагалі кажучи, не можна відновити функцію, яку проінтегровано. Тому слід очікувати деяких відмінностей у постановці задачі про рух системи, яку закладено до принципу Гамільтона від вихідного принципу д'Аламбера. ▮

2. ОСНОВИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. Центральним об'єктом у варіаційному численні є *функціонал*.

Означення 18.1. *Функціоналом називається відображення з простору функцій деякого класу \mathcal{F} у множину дійсних чисел \mathbb{R} :*

$$\begin{aligned} I: \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow I[f]. \end{aligned}$$

Іншими словами, функціонал є функцією, для якої роль незалежної змінної відіграє інша функція. Залежно від контексту елементами простору \mathcal{F} можуть бути функції, неперервні на деякому відрізку (клас $C[a, b]$), нескінченно диференційовні функції (клас $C^\infty[a, b]$), кусково-неперервні функції на інтервалі (клас $\mathcal{PC}[a, b]$), тощо. Приклади функціоналів:

- 1) $I[f] = \int_a^b f(x) dx$ — функціонал у класі функцій $\mathcal{R}[a, b]$, інтегровних за Ріманом на інтервалі $[a, b]$;
- 2) $\delta_a : f(x) \rightarrow f(a)$ — функціонал, дія якого зводиться до співставлення функції $f(x)$ її значення у точці a (δ -функція Дірака).

Аналіз функціоналів багато в чому близький аналізу звичайних функцій, однак безпосередньої аналогії з методами класичного математичного аналізу у теорії функціоналів немає. Найбільш послідовно розробленою у теорії функціоналів є задача пошуку екстремуму, відповідний розділ називається *варіаційним численням*. Основи варіаційного числення були закладені Ейлером та Бернуллі у XVII ст.

У задачах, які виникають у теоретичній фізиці, найбільш поширеними є функціонали типу

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (18.2)$$

де F — інтегровна функція, неперервна разом з кількома першими похідними по всіх аргументах. У загальному випадку аргументами функції F можуть бути похідні від функції $y(x)$ другого та вищих порядків.

Означення екстремуму. Для постановки задачі про екстремум функціоналу з класичного аналізу запозичуються терміни “екстремуму” та “похідної”, які адаптуються до специфіки нового об’єкту.

Аналіз функцій

функція $f(x)$ має екстремум у точці x_0 , якщо для всіх точок x , близьких до x_0 , виконується одна з умов:

$$\begin{aligned} f(x_0) &> f(x) \quad (\text{максимум}), \\ f(x_0) &< f(x) \quad (\text{мінімум}). \end{aligned}$$

Аналіз функціоналів

функціонал $I[y]$ має екстремум для функції $y_0(x)$, якщо для всіх функцій $y(x)$, “близьких” до $y_0(x)$, виконується одна з умов:

$$\begin{aligned} I[y_0] &> I[y] \quad (\text{максимум}), \\ I[y_0] &< I[y] \quad (\text{мінімум}). \end{aligned}$$

У класичному аналізі основним об’єктом є число, і близькість точок x та x_0 має простий геометричний зміст малої відстані між ними, тобто $|x - x_0| < \varepsilon$. У такому випадку кажуть, що точка x належить малому ε -околу точки x_0 .

Аналогічну інтерпретацію можна прийняти і для функціоналів, означивши поняття відстані (метрики) ρ у відповідному класі функцій². За аналогією з точками на дійсній

² найбільш часто використовуються метрики:

- 1) у класі функцій, неперервних на інтервалі $[a, b]$: $\rho(y_1, y_2) = \sup_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|$;
- 2) у класі функцій, інтегровних з квадратом на інтервалі $[a, b]$:

$$\rho(y_1, y_2) = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]^2 dx.$$

осі, функції будуть належати деякому околу, якщо вони віддалені не далі, ніж на відстань ε від його центру:

Аналіз функцій

функція $f(x)$ має екстремум у точці x_0 , якщо:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x : |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \\ f(x) > f(x_0) \quad (\text{або } f(x) < f(x_0))$$

Аналіз функціоналів

функціонал $I[y]$ має екстремум для функції $y_0(x)$, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall y(x) : \rho(y, y_0) < \varepsilon \Rightarrow \\ I[y] > I[y_0] \quad (\text{або } I[y] < I[y_0])$$

Означення відхилення (варіації). У класичному аналізі належність точки \bar{x} деякому ε -околу точки x можна описати інакше, розкриваючи модуль:

$$|\bar{x} - x| < \varepsilon \Rightarrow x - \varepsilon < \bar{x} < x + \varepsilon,$$

або $\bar{x} = x + \delta x$, де δx описує відхилення від центру інтервалу x , причому $|\delta x| < \varepsilon$.

Схоже формулювання можна дати для “відхилення” і у функціональному просторі, використовуючи поняття метрики. Однак у даному випадку “відхилення” (або варіацію) змінної $y(x)$ зручніше звести до форми, яка близька до класичного аналізу.

Розглянемо однопараметричне сімейство кривих $y(x, \alpha)$, форма яких визначається неперервним параметром α , причому вибору $\alpha = 0$ відповідає функція $y(x)$:

$$\bar{y}(x) = y(x, \alpha)|_{\alpha=0} = y(x).$$

Першою варіацією будемо називати відхилення значення функції $y(x, \alpha)$ від $y(x)$ з точністю до малих першого порядку по α :

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x) = \alpha \left. \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \dots, \quad (18.3)$$

для скорочення позначимо

$$\delta y = \alpha \eta(x), \quad \eta(x) = \left. \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (18.4)$$

У більшості випадків цим доданком розкладу і обмежуються, тоді перша варіація називається просто *варіацією* функції $y(x)$. Очевидно, поняття першої варіації по суті є першим диференціалом по змінній α . Якщо $y(x, \alpha)$ — функція, неперервна та обмежена разом з першою похідною по α , то умову малого приросту δy можна замінити на умову малості параметру α . У загальному випадку першу варіацію можна означити як різницю

$$\delta(\dots) = (\dots) - (\dots)|_{\alpha=0}.$$

Зауваження. Можна розглянути більш загальне бегатопараметричне сімейство функцій, однак на чуть викладу це не впливає. \square

Приклад 1. Варіація:

$$y(x, \alpha) = \sin(\alpha + 1)x, \quad \delta y = \alpha x \cos x, \quad \eta(x) = x \cos x.$$

У нашому контексті не має значення, яку з них вибрати для побудови відхилення.

Означення приросту. Для функції однієї змінної приріст значення при малій зміні аргументу $x \rightarrow x + \delta x$ дається формулою Тейлора

$$f(x + \delta x) = f(x) + \delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \delta x^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots = f(x) + \delta f(x) + \delta^2 f(x) + \dots$$

Для функціоналу можна отримати аналогічний вираз, підставивши як аргумент однопараметричне сімейство траєкторій і з малим параметром α :

$$I[y(x, \alpha)] \equiv I(\alpha) = \int_a^b F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx,$$

формально після інтегрування та спрощення виразу залишається функція тільки одного параметру α , до якої застосовні методи звичайного математичного аналізу. Перші доданки розкладу в ряд по α матимуть вигляд:

$$I(\alpha) = I(0) + \delta I(0) + \delta^2 I(0) + \dots = I(0) + \alpha \left. \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \alpha^2 \left. \frac{d^2 I(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} + \dots \quad (18.5)$$

Таким чином, аналіз приросту функціоналу зводиться до аналізу проросту функції $I(\alpha)$ від числового аргументу.

Зауваження. Для запису правильного виразу для $I(\alpha)$ з точністю до заданого порядку по α саму функцію $y(x, \alpha)$ потрібно також розкласти до того самого порядку. \square

У більшості випадків найцікавішими є перші доданки розкладу, які потрібні для аналізу екстремумів. Очевидно:

$$I(0) = \int_a^b F(x, y, y') dx \equiv I[y].$$

Перша похідна, отримана диференціюванням інтегралу по параметру, має вигляд:

$$I'(0) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \int_a^b F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx = \int_a^b \left(\left. \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) dx.$$

Враховуючи тотожність $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x}$ (варіація стосується тільки *форми* функції y , але не її аргументу), та перепозначення $\eta(x) = \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$ матимемо:

$$I'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx.$$

У результаті, у першому порядку по α для варіації функціоналу отримаємо:

$$I(\alpha) - I(0) \simeq \delta I = \alpha \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx \equiv \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) \right) dx.$$

Інтегруючи частинами останній доданок (щоб позбавитись похідної по x від варіації), знайдемо:

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \, dx. \quad (18.6)$$

Перший доданок у правій частині залежить тільки від значень варіації функції y на кінцях інтервалу, а другий за аналогією із функцією однієї змінної, має структуру добутку приросту змінної y на похідну функціоналу I по y . Позначимо

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad (18.7)$$

такий вираз називається *варіаційною (функціональною) похідною* функціоналу $I[y]$ по змінній y . Таким чином, перша варіація функціоналу має вигляд:

$$\delta I[y] = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\delta I}{\delta y} \delta y \, dx, \quad (18.8)$$

другий доданок аналогічний до $\delta f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \delta x$ і може інтерпретуватись як перший диференціал функціоналу.

Зауваження*. Варіаційна похідна відіграє роль оператора диференціювання для функціоналів, але на відміну від функцій дійсної змінної її не можна безпосередньо означити як границю частки приростів значень функції та аргументу. Причина в тому, що аргумент функціоналу (функція) належить простору нескінченної розмірності, у якому не можна означити приріст як число (можна говорити лише про “довжину”, або норму приросту, яка є числом і може з’являтися у знаменнику).

Аналогічна ситуація виникає у скінченновимірних векторних просторах, де виникає необхідність диференціювати по векторному аргументу за допомогою векторного диференціального оператора (який зводить процедуру до обчислення похідних по компонентах вектора). Найпростішою скінченновимірною аналогією функціонального простору є простір функцій дискретного аргументу, у якому функція визначається значеннями для скінченної множини аргументів (у декартовій площині це набір точок (x_i, y_i)). Для означення диференціювання можна скористатись тією самою процедурою, що і для векторного простору, інтерпретуючи набір значень $\{y_i\}$ як вектор.

Розглянемо означення варіаційної похідної, записуючи функціонал у дискретній формі (замінюючи інтеграл сумою Дарбу), а потім виконаємо граничний перехід до неперервного представлення. Розглянемо рівномірне розбиття інтервалу $[a, b]$ точками $\{x_i\}$, причому $i = \overline{1, N}$:

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x.$$

Тоді функціонал має вигляд:

$$I_N[y] = \sum_{k=1}^{N-1} F \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \Delta x,$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ та $n \rightarrow \infty$ (з обмеженням $x_1 = a$, $x_N \rightarrow b$) набір значень $\{x_i\}$ буде описувати неперервний аргумент x і

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \rightarrow y'(x), \quad I_N[y] \rightarrow I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

У дискретному записі $I_N[y]$ є звичайною функцією N змінних y_1, \dots, y_n , які утворюють вектор. Знайдемо похідні $I_N[y]$ по y_k , а потім розглянемо їх граничні форми для неперервного випадку.

Оскільки компонента y_k фігурує тільки у двох доданках суми з номерами k та $k-1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_N[y]}{\partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial y} \bigg|_{y=y_k} F \left(x_k, y, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \Delta x + \frac{\partial F(x_k, y_k, y')}{\partial y'} \bigg|_{y'=\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}} \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \Delta x \\ &\quad + \frac{\partial F(x_{k-1}, y_{k-1}, y')}{\partial y'} \bigg|_{y'=\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}} \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \right) \Delta x, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial I_N[y]}{\partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial y} F \left(x_k, y, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial}{\partial y'} F \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) - \frac{\partial}{\partial y'} F \left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Після переходу до неперервної змінної у правій частині з'являється похідна функції $\frac{\partial F}{\partial y'}$ по змінній x :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial I_N[y]}{\partial y_k} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \equiv \frac{\delta I}{\delta y}$$

Похідну $\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \hat{I}[y]}{\partial y_k}$ можна розуміти як диференціювання по площі $\Delta S_k = \Delta x \partial y_k$, яка описує зміну площі під графіком $y(x)$ на інтервалі $[x, x + \Delta x]$ при зміщенні кривої $y \rightarrow y + \partial y$ (це формально відповідає варіації). \lrcorner

Зауваження. З отриманого результату видно, що означення відхилення за допомогою однопараметричного сімейства функцій відігравало допоміжну роль. Той самий результат можна отримати одразу, записуючи варіацію функціоналу у вигляді

$$I[y + \delta y] - I[y] = \delta I + \dots,$$

де δI включає величини першого порядку малості по δy . У подальших обчисленнях з функціоналами цей спосіб в основному і буде використовуватись. \lrcorner

Задача 18.1. Знайти вираз для першої варіації функціоналу

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx,$$

та означити варіаційну похідну $\frac{\delta I}{\delta y}$.

Задача пошуку екстремуму. Розглянемо постановку найпростішої задачі на пошук екстремуму функціоналу: знайти екстремум функціоналу $I[y]$ для функцій, які набувають заданих значень при $x = a$ та $x = b$ (тобто для всіх кривих, які проходять через задані точки $(a, y(a))$ та $(b, y(b))$). У даному випадку $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, кінці кривої задані і не варіюються, тому, враховуючи вказані граничні умови на варіації, отримаємо:

$$I[y + \delta y] - I[y] = \int_a^b \frac{\delta I}{\delta y} \delta y dx + \dots$$

Аналогічно до випадку функції однієї змінної, функціонал $I[y]$ досягатиме екстремуму на $y(x)$, якщо для довільного малого відхилення $y \rightarrow y + \delta y$ значення приросту функціоналу $I[y + \delta y] - I[y]$ матиме певний знак.

Дійсно, для задачі мінімуму має бути $I[y + \delta y] - I[y] > 0$. У загальному випадку з точністю до величин першого порядку

$$I[y + \delta y] - I[y] = \delta I[y] + o(\|\delta y\|).$$

Якщо $\delta I \neq 0$, то приріст функціоналу I не буде знаковизначеною величиною, оскільки δI є непарною функцією δy . Аналогічні міркування можна провести і для максимуму. Таким чином, має місце

ТЕОРЕМА 18.1. *Необхідною умовою того, що функціонал $I[y]$ досягає екстремуму на кривій $y(x)$ є виконання умови $\delta I[y] = 0$.*

Для функції однієї змінної умова $\delta f(x) = 0$ автоматично передбачає $f'(x) = 0$. У випадку функціоналу аналогічне рівняння для екстремуму безпосередньо отримати не можна через інтегральний характер першої варіації. Для пошуку рівняння кривої, яка реалізує екстремум функціоналу доведемо наступне твердження (яке називається *основною лемою варіаційного числення*).

ЛЕМА 18.1 (ДЮБУА-РЕЙМОНДА). *Якщо:*

- 1) функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$;
- 2) $\varphi(x)$ — довільна функція, яка неперервна на інтервалі $[a, b]$ разом з першою похідною і задовольняє умову $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$;
- 3) виконується рівність

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$ на інтервалі $[a, b]$.

□ Це твердження очевидне. Функція $f(x)$ має заданий вигляд на $[a, b]$ і відмінна від нуля, то існують області, де вона є знаковисталою. Оскільки $\varphi(x)$ — довільна, то виберемо її так, що зміни знаку $\varphi(x)$ відбуваються в тих самих точках, що і $f(x)$, причому $f(x)\varphi(x) \geq 0$. Наприклад, можна взяти $\varphi(x) = \alpha(x)f(x)$ (де $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) = 0$ і $\alpha(x) > 0$ у інших точках інтервалу $[a, b]$ — наприклад, парабола $\alpha(x) = (a - x)(x - b)$). Згідно з властивостями інтегралу Рімана, інтеграл від невід'ємної функції $f(x)\varphi(x)$ є невід'ємною величиною, що суперечить умові. Тому $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. ■

Зауваження. Деякі з умов леми Дюбуа-Реймонда насправді є дещо надлишковими, зокрема рівність нулю $\varphi(x)$ на кінцях інтервалу та неперервність першої похідної, вони взяті з попереднього контексту (неперервність похідної забезпечує однозначність дотичної до кривої). Досить того, що інтеграл, про який йдеться у лемі, існує для функцій з указаними властивостями. \square

Оскільки варіації, які розглядалися при побудові першої варіації функціоналу є довільними, то згідно з лемою Дюбуа-Реймонда

$$\text{з умови} \quad \delta I[y] = \int_a^b \frac{\delta I}{\delta y} \delta y(x) dx = 0 \quad \text{випливає} \quad \frac{\delta I}{\delta y} = 0.$$

Таким чином,

Необхідною умовою екстремуму функціоналу

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

на кривій $y(x)$ з фіксованими значеннями на границях є виконання рівняння

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (18.9)$$

Рівняння (18.9) вперше було отримано Л. Ейлером і називається *рівнянням Ейлера*³.

Тип екстремуму, як й у математичному аналізі, визначається з вигляду другої варіації (другого диференціалу). У загальному випадку така задача є досить складною і виводить далеко за межі даного підручника. Слід відмітити, що для використання методів варіаційного числення у класичній механіці, тип екстремуму звичайно не відіграє суттєвого значення і не впливає на фізичні висновки про механічну систему.

Для випадку кількох змінних варіація будується аналогічно, кількість рівнянь Ейлера дорівнюватиме кількості змінних.

Приклад 2. Знайти криву у двовимірному евклідовому просторі, яка з'єднає дві задані точки (a, y_a) та (b, y_b) , довжина якої є мінімально можливою.

◀ Функціонал довжини кривої між точками (1) та (2) має вигляд

$$L = \int_{(1)}^{(2)} dl = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

де $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ — елемент довжини між точками (x, y) та $(x + dx, y + dy)$.

Таким чином, $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'(x)^2}$, і рівняння Ейлера-Лагранжа матимуть вигляд:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0,$$

³ Властивості рівняння (18.9) були найбільш широко досліджені у процесі розвитку класичної механіки, тому його часто називають рівнянням Ейлера-Лагранжа.

інтегрування дає:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c = \text{const},$$

звідки

$$y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = c_1 = \text{const} \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2,$$

де c_2 — також стала інтегрування. Беручи до уваги крайові умови, отримаємо:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 x_1 + c_2, \\ y_2 = c_1 x_2 + c_2, \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Останнє рівняння є рівнянням прямої, яка з'єднує точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) . ►

Приклад 3. Частика маси m ковзає у полі сили тяжіння (без початкової швидкості) по кривій, яка з'єднує дві задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) . Знайти рівняння кривої, для якої час руху буде мінімальним (задача про “брахістохрону”⁴).

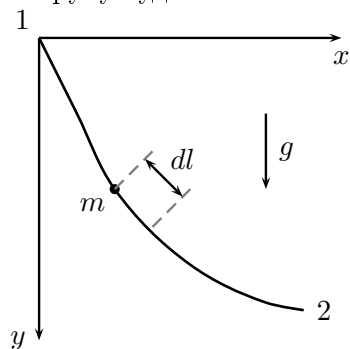


Рис. 18.2. До прикладу 3.

◀ Систему координат зображено на рис. 18.2, для спрощення виберемо початок координат у точці (x_1, y_1) . Тоді час руху між близькими точками на траєкторії буде дорівнювати

$$dt = \frac{dl}{v}, \quad \text{звідки повний час руху: } T = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dl}{v}.$$

Нехай траєкторію задано рівнянням $y = y(x)$, тоді, відкладаючи потенціальну енергію від нульового рівня, який помістимо у початок координат, і беручи до уваги, що частинка в початковий момент часу була нерухомою, запишемо закон збереження енергії для моменту часу t :

$$mgy = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v(y) = \sqrt{2gy},$$

останній вираз дозволяє знайти швидкість частинки на даній висоті. Вибираючи координату x як незалежну і використовуючи теорему Піфагора для запису відстані вздовж кривої (див. рис. 18.2), отримаємо:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx,$$

тобто задача зводиться до пошуку екстремуму функціоналу

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx, \quad \text{де } F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}.$$

у вибраній системі координат $x_1 = 0$.

⁴ це грецьке слово, власне, і означає “крива найшвидшого спуску”. Метод розв’язку цієї задачі, який було знайдено І. Бернуллі у 1696 році, став основою варіаційного числення.

Розв'язок рівнянь Ейлера можна спростити, якщо скористатись першим інтегралом, який аналогічний до енергії. Домножимо обидві частини рівняння на y' і виділимо повну похідну по часу, враховуючи, що підінтегральна функція не залежить від змінної x :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dx} - y'' \frac{\partial F}{\partial y'},$$

звідки

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \alpha = \text{const}.$$

Підстановка функції $F(y, y')$ дає:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \alpha \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1-\alpha^2 y}{y}}.$$

Вибір знаку відповідає вибору частини площини xy , де розташована крива $y(x)$. Для зростаючої кривої (у вибраних координатах, рис. 18.2) візьмемо знак “+”. Відокремлюючи змінні в отриманому диференціальному рівнянні, знайдемо:

$$x = \alpha \int \sqrt{\frac{y}{1-\alpha^2 y}} dy = \left| \begin{smallmatrix} \text{заміна:} \\ \alpha^2 y = \cos^2 \varphi \end{smallmatrix} \right| = -\frac{1}{\alpha^2} \int \text{ctg } \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -\frac{2}{\alpha^2} \int \cos^2 \varphi d\varphi,$$

звідки маємо (у параметричному вигляді):

$$x(\varphi) = x_0 - \frac{1}{2\alpha^2} (2\varphi + \sin 2\varphi), \quad y(\varphi) = \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2\alpha^2} (1 + \cos 2\varphi),$$

де x_0 є сталою інтегрування. Таким чином, шукана крива є циклоїдою з параметром 2φ . Перепозначаючи для спрощення $\theta = 2\varphi$ та $a = 1/2\alpha^2$ запишемо остаточний результат:

$$x(\theta) = x_0 - a(\theta + \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 + \cos \theta).$$

Значення $y = 0$ відповідає вибору $\theta = \pi$, тоді для початкової точки траєкторії покладемо

$$x(\pi) = x_0 - \pi a = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

звідки

$$x(\theta) = a(\pi - \theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 + \cos \theta).$$

Параметр a визначається положенням кінцевої точки (і відповідає за ширину кроку кривої). Очевидно, випадку мінімуму відповідатиме частина одного періоду циклоїди. ►

3. Варіаційний принцип Гамільтона для консервативних систем. Розглянемо детальніше формулювання принципу Гамільтона, який було отримано раніше.

Нехай задано консервативну механічну систему, яка допускає звичайні або узагальнені потенціали, і характеризується функцією Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$. У кожний момент часу стан системи задається набором значень координат та швидкостей, або траєкторією $q_i(t)$. Еквівалентно, положення точки можна описати координатами n -вимірного конфігураційного простору⁵ \mathcal{Q} , з часом положення змінюється і точка рухається по кривій, яка задається рівняннями $q_i = q_i(t)$ (параметрично задана функція).

⁵ Конфігураційний простір має суто формальне походження і не відповідає реальній геометричній картині руху за винятком випадку руху однієї частинки (де він є тривимірним і може збігатись з евклідовим простором).

Розглянемо рух системи протягом часу з інтервалу $[t_1, t_2]$. Інтеграл

$$S[q, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (18.10)$$

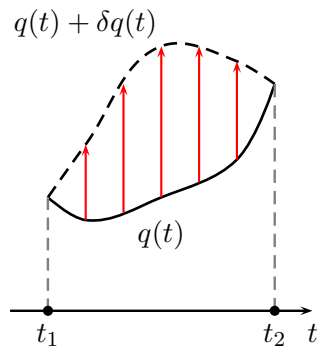
де $q = q(t)$, називається *функціоналом дії* (або просто *дією*), він визначається відрізком траєкторії з початком в момент часу t_1 і кінцем в момент t_2 .

Формулювання варіаційного принципу Гамільтона⁶:

Дійсний рух механічної системи між двома заданими положеннями $q(t_1)$ та $q(t_2)$ конфігураційного простору \mathcal{Q} відбувається вздовж траєкторії, для якої функціонал дії $S[q, t_1, t_2]$ набуває стаціонарного значення.

У наведеному формулюванні йдеться про відхилення від дійсної траєкторії, яке відповідає переходу до близької до неї *кінематично можливої траєкторії*, що допускається зв'язками. Підкреслимо, що функціонал дії не обов'язково максимальний чи мінімальний. Може бути так, що для малих ділянок траєкторії значення інтегралу може бути мінімальним, тоді як для великих — максимальним (приклад — гармонічний осцилятор для проміжку часу, що більший за період), тому варіаційний принцип часто називають принципом *стаціонарної дії*.

Дійсні траєкторії відрізняються від усіх інших тим, що частинка рухається по них згідно з рівняннями руху — рівняннями Лагранжа другого роду. Згідно з результатами варіаційного числення, це дійсно так, розв'язки варіаційної задачі з фіксованими границями з точністю до позначень даються рівняннями Лагранжа. Заради означення прийнятої у теоретичній фізиці термінології розглянемо доведення варіаційного принципу (яке по суті повторює виведення рівнянь Ейлера-Лагранжа), користуючись менш строгими позначеннями, ніж ті, які прийняті у математичному викладі.



Розглянемо дві близькі траєкторії $q(t)$ та $q(t) + \delta q(t)$ (у розумінні $\delta q(t)$ — мала функція-добавка на інтервалі $[t_1, t_2]$), які мають спільний початок $q(t_1)$ і кінець $q(t_2)$ (це означає, що $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$). Обидві траєкторії схематично зображено на рис. 18.3 (для однієї ступені вільності). Оскільки час не змінюється при переході до іншої траєкторії, то

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta q(t),$$

Рис. 18.3. *Варіація траєкторії.* тобто порядок обчислення варіації і похідної по часу (як і будь-якої іншої операції, яка стосується цієї змінної) можна поміняти місцями. Такі варіації називаються *синхронними*.

Запишемо зміну функціоналу дії в результаті переходу до іншої траєкторії у першому порядку по δq . Приріст S у першому порядку називається *першою варіацією* і позначається δS :

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt.$$

⁶ W. Hamilton, 1834. Незалежно від Гамільтона, але пізніше, варіаційний принцип довів також Остроградський.

Очевидно, $S[q + \delta q] - S[q] = \delta S[q]$ з точністю до малих другого порядку по δq . Враховуючи умову синхронності варіацій, отримаємо, виділяючи повну похідну по часу:

$$\delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt.$$

Комбінація

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (18.11)$$

є варіаційною (функціональною) похідною функціоналу дії. Остаточно, відділяючи позаінтегральний доданок, знайдемо

$$\delta S[q] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q_i} \delta q_i dt. \quad (18.12)$$

Якщо кінці траєкторії фіксовані, то перший доданок зникає за рахунок граничних умов $\delta q(t_{1,2}) = 0$.

Тепер, за допомогою виразу (18.12), можна довести варіаційний принцип.

□ (\Rightarrow) Якщо інтеграл набуває стаціонарного значення, тобто $\delta S = 0$, то для фіксованих кінців траєкторії маємо:

$$\delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q_i} \delta q_i dt = 0,$$

отже, через довільність варіацій δq_i з леми Дюбуа-Реймонда випливає, що

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

тобто виконуються рівняння руху Лагранжа.

(\Leftarrow) Якщо виконуються рівняння Лагранжа, то автоматично $\delta S[q] = 0$ для фіксованих кінців траєкторії. ■

4. ПОСТАНОВКА ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ. Рівняння Лагранжа можна отримати як *формальні* наслідки варіаційного принципу, однак постановка задачі про рух механічної системи буде принципово іншою.

Стан механічної системи у момент часу t задається набором функцій $(q(t), \dot{q}(t))$. Задача Лагранжа формулюється як задача Коші розв'язку рівнянь руху із заданими початковими умовами, тобто досліджується еволюція системи *із заданим початковим станом*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_i(t_0), \dot{q}_i(t_0) \text{ — задані.}$$

У варіаційному принципі йдеться не про задані стани, а про *задані положення системи* для початкового і кінцевого моменту часу, і відповідна задача розв'язку рівнянь руху буде крайовою:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_i(t_1), q_i(t_2) \text{ — задані.}$$

У цьому випадку розв'язок рівнянь Лагранжа може бути неоднозначним, тобто допустиме існування двох чи більше траєкторій (до нескінченного числа), які проходять через дві задані точки. Такі траєкторії будуть відрізнятись початковими швидкостями $\dot{q}_i(t_1)$. Простим наочним прикладом може бути задача про скочування частинки по поверхні сфери у полі сили тяжіння з верхньої точки $q(t_1)$. Якщо кінцевою точкою $q(t_2)$ є діаметрально протилежна нижня точка, то можливих траєкторій буде безліч — розв'язком крайової задачі є довільний меридіан. У той самий час у випадку заданої початкової швидкості, яка задає напрям скочування, траєкторія буде одна.

5. Висновки. Незважаючи на те, що варіаційний принцип Гамільтона є частинним випадком принципу д'Аламбера, він відіграє ту саму роль — дозволяє отримати рівняння механіки. Крім того, в порівнянні з принципом д'Аламбера, він має такі переваги:

- основним поняттям є скаляр $S[q]$ (а не комбінація з векторами);
- схема отримання рівнянь руху є простішою, тому що не вимагає перетворення координат;
- породжує рівняння руху методами, які розроблені у варіаційному численні. Тому його застосування виходять далеко за межі класичної механіки; процедура отримання та аналізу “рівнянь руху” для немеханічних систем буде незмінною.

Зауваження. Варіаційний принцип можна застосувати і для неконсервативних систем, якщо у принципі д'Аламбера залишити також і непотенціальні сили, тоді їх робота для віртуальних переміщень матиме вигляд:

$$\partial A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_k \Phi_k \delta q_k, \quad \Phi_k(q, t) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \frac{\partial \vec{r}_i(q, t)}{\partial q_k} \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(q, t)},$$

і вираз (18.1) набуває вигляду:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \sum_{k=1}^n \Phi_k \delta q_k \right) dt = 0, \quad (18.13)$$

де $\delta q_k(t)$ задовольняють додаткові умови $\delta q_k(t_{1,2}) = 0$. Взагалі кажучи, *записати цей вираз у вигляді варіації інтегралу не можна*, оскільки неможливо змінити порядок обчислення інтеграла та варіації, коли робота ∂A не є повним диференціалом. ┘

ЛЕКЦІЯ 19

Загальна форма першої варіації. Теорема Нетер

1.	Означення несинхронних варіацій.	319
2.	Зв'язок варіацій форми та значення.	319
3.	Варіація функціоналу дії.	321
4.	Розширений конфігураційний простір.	322
5.	Принцип Мопертюї.	324
6.	Перетворення симетрії.	325
7.	Теорема Нетер.	329
8.	Групи перетворень симетрії.	330
9.	Закони збереження для циклічних координат.	331
10.	Фундаментальні закони збереження механіки.	332
11.	Висновки.	335

1. ОЗНАЧЕННЯ НЕСИНХРОННИХ ВАРІАЦІЙ. Розглянемо більш загальний тип варіацій траєкторії системи, для яких передбачається зміна як положень системи, так і часу проходження цих положень. Нехай задано дві траєкторії q та q' , причому точки на незміщеній траєкторії q досягаються в момент часу t , а на зміщеній q' — у момент часу $t' = t + \Delta t(t)$.

Будемо вважати, що траєкторія q починається та закінчується в точках $(q_{1,2}, t_{1,2})$ відповідно, а q' — в точках $(q'_{1,2}, t'_{1,2})$ (рис. 19.1). Нехай $q'_{1,2} = q_{1,2} + \Delta q_{1,2}$, $t'_{1,2} = t_{1,2} + \Delta t_{1,2}$. Введемо позначення для варіацій:

$$\Delta q(t) = q'(t') - q(t), \quad \delta q(t) = q'(t) - q(t), \quad t' = t + \Delta t(t). \quad (19.1)$$

Варіація, яку позначено символом “ Δ ”, дає відхилення траєкторій у різні моменти часу, а “ δ ” — у той самий, як показано на рис. 19.1 (на графіку траєкторія q' зміщується праворуч на Δt і потім обчислюється різниця координат, тоді як для “ δ ” обчислення безпосередньо).

ОЗНАЧЕННЯ 19.1. Варіація довільної величини $\Delta(\dots)$ називається варіацією значення цієї величини (або дійсною варіацією), а $\delta(\dots)$ називається варіацією Лі (або варіацією форми).

2. ЗВ'ЯЗОК ВАРІАЦІЙ ФОРМИ ТА ЗНАЧЕННЯ. За означенням, оскільки $t' = t + \Delta t$, то з точністю до величин першого порядку по Δt :

$$\Delta q = q'(t') - q(t) = q'(t + \Delta t) - q(t) \simeq q'(t) - q(t) + \Delta t \frac{dq'(t)}{dt} \simeq \delta q + \Delta t \frac{dq(t)}{dt},$$

у правій частині під похідною q замінено на q' (це вносить похибку другого порядку малості).

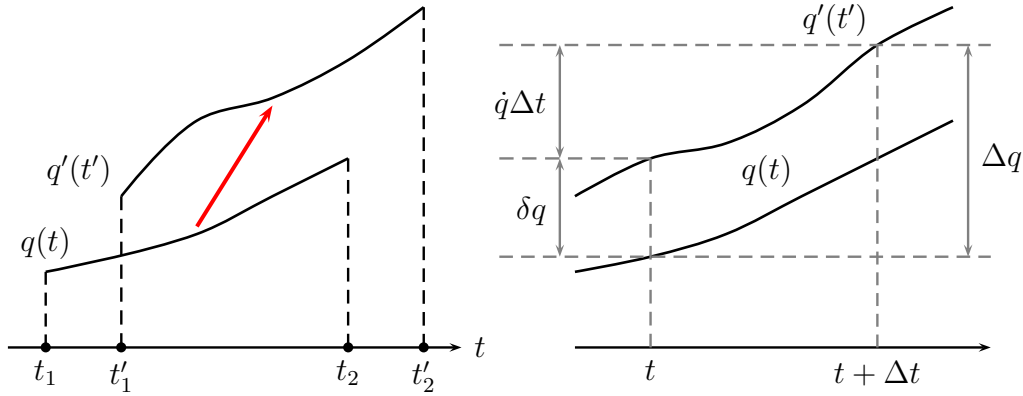


Рис. 19.1. Варіація траєкторії.

Аналогічно для швидкостей отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{q} &= \frac{dq'(t')}{dt'} - \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dt}{dt'} \frac{dq'(t')}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = \left| \frac{t' = t + \Delta t(t)}{\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d\Delta t}{dt}} \right| \\ &\simeq \left(1 - \frac{d\Delta t}{dt} \right) \frac{dq'(t')}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [q'(t') - q(t)] - \frac{d\Delta t}{dt} \frac{dq'(t')}{dt} \simeq \frac{d}{dt} \Delta q - \frac{dq(t)}{dt} \frac{d\Delta t}{dt},\end{aligned}$$

як і у попередньому випадку згідно з лінійним наближенням у останньому доданку q замінено на q' . Очевидно, варіація “ Δ ” є несинхронною, тобто $\frac{d}{dt} \Delta q \neq \Delta \frac{d}{dt} q$. Для варіації “ δ ” властивість синхронності зберігається:

$$\delta\dot{q} = \frac{dq'(t)}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [q'(t) - q(t)] = \frac{d}{dt} \delta q.$$

Таким чином, зв'язки між варіаціями форми та значення можна записати у вигляді рівностей:

$$\begin{aligned}\Delta q &= \delta q + \dot{q} \Delta t, \\ \Delta\dot{q} &= \frac{d}{dt} \Delta q - \dot{q} \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q + \ddot{q} \Delta t, \quad \delta\dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q.\end{aligned}\tag{19.2}$$

Аналогічні властивості варіацій мають місце і у загальному випадку. Розглянемо варіації довільної функції координат, швидкостей та часу $F(q, \dot{q}, t)$. Для варіації δ , за означенням, матимемо:

$$\delta F(q, \dot{q}, t) = F(q', \dot{q}', t) - F(q, \dot{q}, t) = F(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - F(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta\dot{q}.$$

Для варіації Δ , беручи до уваги $q' = q + \Delta q$, $\dot{q}' = \dot{q} + \Delta\dot{q}$, $t' = t + \Delta t$ та зв'язки між варіаціями, отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta F(q, \dot{q}, t) &= F(q + \Delta q, \dot{q} + \Delta\dot{q}, t + \Delta t) - F(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \Delta\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t \\ &= \delta F + \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \delta F + \Delta t \frac{dF}{dt},\end{aligned}$$

звідки остаточно

$$\Delta F(q, \dot{q}, t) = \delta F(q, \dot{q}, t) + \Delta t \frac{dF(q, \dot{q}, t)}{dt}.\tag{19.3}$$

Символічно цей результат можна записати у операторній формі

$$\Delta = \delta + \Delta t \frac{d}{dt}, \quad (19.4)$$

оператор у правій частині може діяти на довільний об'єкт, що залежить від механічного стану та часу. Вираз (19.4) означає, що у першому порядку зміна значення відбувається за рахунок зміни форми та зсуву часу, ці прирости є незалежними.

Зауваження. Для самого часу $\delta(t) = t - t \equiv 0$, $\Delta(t) = 0 + \Delta t \frac{dt}{dt} = \Delta t$, тому зсув по часу позначається саме Δt . \lrcorner

3. ВАРІАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛУ ДІЇ. Оскільки функціонал дії $S[q, t_1, t_2]$ залежить від форми траєкторії q та значень $t_{1,2}$, то варіювати потрібно також і границі:

$$\Delta S[q, t_1, t_2] = S[q', t'_1, t'_2] - S[q, t_1, t_2].$$

Підставляючи явно інтегральну форму та позначаючи змінні інтегрування у обох доданках через t , отримаємо:

$$\Delta S[q, t_1, t_2] = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q', \dot{q}', t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Розіб'ємо перший інтеграл на три доданки, виділяючи інтеграл на інтервалі $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \Delta S[q, t_1, t_2] &= \left(\int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_1} \right) L(q', \dot{q}', t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t)] dt + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} L(q', \dot{q}', t) dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} L(q', \dot{q}', t) dt. \end{aligned}$$

Останні доданки перетворимо за допомогою теореми про середнє у першому порядку по Δt , тоді:

$$\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} L(q', \dot{q}', t) dt \simeq \int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} L(q, \dot{q}, t) dt \simeq L(q(t_i), \dot{q}(t_i), t_i) \Delta t_i, \quad \text{де } t_i = t_{1,2}.$$

У результаті з точністю до першого порядку матимемо:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + L \Delta t \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L + \frac{d}{dt}(L \Delta t) \right] dt.$$

Враховуючи зв'язок (19.3) між варіаціями Δ та δ , отримаємо дві еквівалентні форми варіації дії:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta L + \frac{d}{dt}(L \Delta t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\Delta L + L \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt.$$

За аналогією з принципом Гамільтона врахуємо синхронність варіацій δ і виділимо повну похідну по часу:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \frac{d}{dt} (L \Delta t) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{d}{dt} (L \Delta t) \right) dt = \left|_{\substack{\text{синхронність:} \\ \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q}} \right| \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + L \Delta t \right) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q} \delta q dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + L \Delta t \right]_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}$$

Виражаючи варіацію Лі у позаінтегральному доданку через повну варіацію за правилом $\delta q = \Delta q - \dot{q} \Delta t$, отримаємо остаточно у першому порядку по Δq та Δt :

$$\Delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) \Delta t \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q_i} \delta q_i dt. \quad (19.5)$$

4. РОЗШИРЕНИЙ КОНФІГУРАЦІЙНИЙ ПРОСТІР. Будемо вважати час незалежною узагальненою координатою з номером $n+1$, а положення системи на траєкторії задаватимемо за допомогою деякого параметру τ (тобто координати q_i та $q_{n+1} \equiv t \in$ функціями τ).

Функціонал дії за Гамільтоном у таких позначеннях матиме вигляд:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(q_i, \frac{q'_i}{q'_{n+1}}, q_{n+1} \right) \frac{dq_{n+1}}{d\tau} d\tau,$$

де штрихом позначено похідну по τ і використано формула заміни

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{q'_i(\tau)}{q'_{n+1}(\tau)}.$$

Підінтегральний вираз є новою функцією Лагранжа

$$\bar{L}(\bar{q}, \bar{q}') = L \left(q_i, \frac{q'_i}{q'_{n+1}}, q_{n+1} \right) q'_{n+1} \quad (19.6)$$

у *розширеному* $(n+1)$ -вимірному конфігураційному просторі $\bar{\mathcal{Q}}$ з координатами $\bar{q} = (q_1, \dots, q_{n+1})$.

Узагальнені імпульси для координат q_1, \dots, q_n мають вигляд:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_i} = q'_{n+1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{\dot{q}_i = q'_i/q'_{n+1}} \cdot \frac{1}{q'_{n+1}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad (19.7)$$

тобто за значенням дорівнюють імпульсам у звичайному просторі \mathcal{Q} , а для координати q_{n+1} маємо:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{n+1} &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial q'_{n+1}} \left[L \left(q_i, \frac{q'_i}{q'_{n+1}}, q_{n+1} \right) q'_{n+1} \right] \\ &= - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{\dot{q}_i = q'_i/q'_{n+1}} \cdot \frac{q'_i}{q'_{n+1}} + L = -p_i \dot{q}_i + L = -\mathcal{E}, \quad (19.8)\end{aligned}$$

що є енергією (з точністю до знаку) у механіці Лагранжа. Таким чином,

узагальнений імпульс, який формально відповідає часовій координаті у розширеному просторі $\overline{\mathcal{Q}}$ є лагранжевою енергією з оберненим знаком.

У варіаційному принципі Гамільтона варіації координат будуються для фіксованого часу, що відповідає фіксованій координаті q_{n+1} у нових позначеннях. Однак у розширеному просторі $\overline{\mathcal{Q}}$ роль параметру еволюції відіграє τ , тому цілком доречно перейти до більш широкого класу варіацій $\bar{\delta}$, синхронних відносно τ :

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\delta} \bar{q}_\alpha = \bar{\delta} \bar{q}'_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, n+1}.$$

У старих позначеннях варіації узагальнених швидкостей, означених у просторі \mathcal{Q} мають вигляд:

$$\bar{\delta} \dot{q}_i = \bar{\delta} \left(\frac{q'_i}{q'_{n+1}} \right) = \frac{1}{q'_{n+1}} \frac{d}{d\tau} \bar{\delta} q_i - \frac{q'_i}{q'_{n+1}{}^2} \frac{d}{d\tau} \bar{\delta} q_{n+1} = \frac{d}{dt} \bar{\delta} q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \bar{\delta} t,$$

що відповідає властивості (19.2) Δ -варіації.

Для функціоналу дії у просторі $\overline{\mathcal{Q}}$

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{L}(\bar{q}, \bar{q}') d\tau$$

варіаційний принцип можна сформулювати так:

$$\bar{\delta} \bar{S} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\delta} \bar{q}_\alpha(\tau_{1,2}) = 0, \quad (19.9)$$

що відповідає фіксованим положенням початку і кінця траєкторії, а також моментам часу. Рівняння Ейлера-Лагранжа набувають вигляду:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}'_\alpha} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n+1},$$

або у старих позначеннях для змінних q_i :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_i} = q'_{n+1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = q'_{n+1} \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

тобто рівняння Лагранжа простору $\overline{\mathcal{Q}}$ будуть такими самими, що і у просторі \mathcal{Q} , і для координати q_{n+1} маємо:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q'_{n+1}} = - \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_{n+1}} = q'_{n+1} \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t},$$

що є законом зміни енергії.

Зауваження. Той факт, що форма рівнянь руху зберігається при довільних варіаціях координат та часу (які зникають на кінцях траєкторії) впливає безпосередньо з формули (19.5). ┘

Відмітимо, що за побудовою функція Лагранжа \bar{L} не залежить явно від параметра τ , тому у розширеному просторі зберігатиметься енергія:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{q}'_\alpha \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}'_\alpha} - \bar{L} = \bar{q}'_\alpha \bar{p}_\alpha - \bar{L}.$$

У просторі \mathcal{Q} величину \mathcal{E} можна записати як

$$\bar{\mathcal{E}} = q'_i \bar{p}_i + q'_{n+1} \bar{p}_{n+1} - \bar{L} = q'_{n+1} \dot{q}_i p_i - q'_{n+1} \mathcal{E} - q'_{n+1} L = q'_{n+1} (\dot{q}_i p_i - L - \mathcal{E}) \equiv 0.$$

Незважаючи на те, що розширений простір $\bar{\mathcal{Q}}$ є надлишковим поняттям для пошуку розв'язку практичних задач, у формальній структурі класичної механіки можливість його побудови відіграє винятково важливу роль. У такому просторі геометричні координати та час виступають як математично рівноправні змінні (але принципово різні фізично). Опис фізичної системи у просторі такого типу характерний для спеціальної (і загальної) теорії відносності, яка значно ширша по застосовності, ніж класична теорія Ньютона. Це означає, що структура механіки Лагранжа та загальні ідеї, які закладено до її форми (варіаційний принцип тощо) мають *універсальний характер для всієї теоретичної фізики взагалі*. Будь-яка інша теорія будується за сценарієм класичної механіки, але з іншою функцією Лагранжа (не квадратичною по швидкостях), до якої закладено її вихідні постулати та межі застосовності.

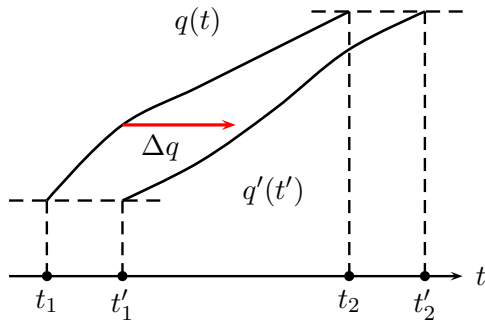


Рис. 19.2. Варіація траєкторії (принцип Мопертюї).

5. ПРИНЦИП МОПЕРТЮІ. Частинним випадком варіаційного принципу є *принцип найменшої дії*, або принцип Мопертюї. Розглянемо загальну форму першої варіації (19.5) у системах, де зберігається енергія. На дійсних траєкторіях $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$, тому

$$\Delta S = [p_i \Delta q_i - \mathcal{E} \Delta t]_{t_1}^{t_2}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

де

$$\mathcal{E} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

позначає повну енергію системи.

Якщо варіації задовольняють крайові умови $\Delta q|_{t=t_{1,2}} = 0$, то остання рівність набуває вигляду:

$$\Delta S \equiv \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -[\mathcal{E} \Delta t]_{t_1}^{t_2},$$

Оскільки $\mathcal{E} = \text{const}$, то $\delta \mathcal{E} = 0$ і до лівої частини можна додати довільний вираз, пропорційний до $\delta \mathcal{E}$:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -[\mathcal{E} \Delta t]_{t_1}^{t_2} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{E} dt}_{\equiv 0} \equiv -\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E} dt, \quad \text{або} \quad \Delta \int_{t_1}^{t_2} (L + \mathcal{E}) dt = 0.$$

Оскільки за означенням $\mathcal{E} = p_i \dot{q}_i - L$, то остаточно

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0, \quad \mathcal{E} = \text{const}. \quad (19.10)$$

У результаті, функціонал

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = \int_{(1)}^{(2)} p_i dq_i \quad (19.11)$$

набуває стаціонарного значення на дійсних траєкторіях системи, якщо енергія системи зберігається (ця умова зводиться до $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) (тут (1) та (2) позначають початок та кінець траєкторії системи).

Інтеграл (19.11) називається *вкороченою дією* (або характеристичною функцією Гамільтона), а сам варіаційний принцип — *принципом Мопертюї*¹.

Відмітимо, що оскільки варіація Δ пов'язана не тільки із зміною координат, а також і часу (на відміну від варіації δ), то характер зміни часу вздовж різних траєкторій, які будуються за допомогою Δ -варіацій, не буде однаковим, тому що для збереження енергії потрібно прискорювати (сповільнювати) рух системи. Із цієї причини час буде варіюватись навіть на кінцях траєкторії.

У класичній механіці принцип Мопертюї широко не використовується, однак він був історично першим варіаційним принципом. Його детальне обговорення можна знайти в [1] та [17].

6. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИМЕТРІЇ. Розв'язок рівнянь Лагранжа часто проводиться за допомогою загальної процедури, яка спирається на знання інтегралів руху. У найпростішому випадку їх породжують циклічні координати. Загального підходу до пошуку інтегралів руху у механіці Лагранжа немає. Однак оскільки вся інформація про механічну систему зосереджена у функції Лагранжа, то нею ж визначається і форма інтегралів руху. Одним із способів аналізу функції Лагранжа є підхід на основі теореми Нетер, який встановлює зв'язок між симетріями функції Лагранжа та законами збереження.

Нехай задано механічну систему з функціоналом дії

$$S[q, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (19.12)$$

Розглянемо перетворення узагальнених координат та часу

$$q' = q'(q, t), \quad t' = t'(q, t), \quad (19.13)$$

¹ Слід відмітити, що в оригінальній формі принцип Мопертюї (1747) був далекий від виразу (19.10) і мав досить віддалене відношення до фізики. Сучасне формулювання та строге доведення були отримані Ейлером та Лагранжем.

будемо вважати, що перетворення (19.13) є невідродженим, тобто для нього можна означити обернене

$$q = q(q', t'), \quad t = t(q', t').$$

Перетворення типу (19.13) можна інтерпретувати двома способами. У *пасивній інтерпретації* воно описує звичайну заміну координати та параметру еволюції, яке приводить до зміщення осей системи координат у просторі. Точка конфігураційного простору залишається на місці, змінюється тільки спосіб її опису (“спостерігач” пов’язаний з цією точкою).

У *активній інтерпретації* система координат залишається тою самою, перетворення $(q, t) \rightarrow (q', t')$ переводить точку з координатами q в момент часу t у точку q' в момент часу t' (“спостерігач” пов’язаний із системою координат). Формули заміни (19.13) на рівні траєкторії означають $q'_i(t'(q, t)) = q'_i(q(t), t)$, у правій частині — реальна залежність, у лівій — задана у (19.13) функція. У такій інтерпретації перетворення (19.13) переводить криву C , задану рівняннями $q = F(t)$ у іншу криву C' вигляду $q' = F'(t')$, рівняння якої можна отримати підстановкою закону перетворення:

$$q = F(t) \Rightarrow q(q', t') = F(t(q', t')) \Rightarrow q' = F'(t').$$

Якщо крива $q = F(t)$ задає траєкторією механічної, то крива $q' = F'(t')$ не обов’язково буде траєкторією тієї самої системи, але вона з’єднуватиме інші точки $q'(t_{1,2})$ (початок та кінець траєкторії $q = F(t)$ змістяться разом із самою траєкторією при перетворенні, однак функція Лагранжа може суттєво змінитись). На рівні функціоналу дії, якщо крива C є екстремаллю функціоналу $S[q]$, то C' буде екстремаллю $S'[q']$:

$$S'[q', t'_1, t'_2] = \int_{t'_1}^{t'_2} L' \left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) dt' \quad (19.14)$$

(функція Лагранжа матиме іншу форму). Розглянемо детально закон перетворення функціоналу дії при заміні координат та часу. У пасивній інтерпретації йдеться про звичайну заміну координат, у результаті якої значення функціоналу не змінюється (у силу скалярності). Маємо, підставляючи закон перетворення координат та часу:

$$\begin{aligned} S[q, t_1, t_2] &= \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L \left(q(q', t'), \frac{dq(q', t')}{dt(q', t')}, t'(q', t') \right) \frac{dt(q', t')}{dt'} dt' \\ &= \int_{t'_1}^{t'_2} L' \left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) dt' := S'[q', t'_1, t'_2], \quad t'_{1,2} = t'(q(t_{1,2}), t_{1,2}), \end{aligned}$$

де введено перепозначення

$$L'(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = L(q, \dot{q}, t) \frac{dt}{dt'} \Big|_{\substack{q=q(q', t') \\ t=t(q', t')}} \quad (19.15)$$

нова функція Лагранжа L' будується шляхом розкривання дужок у правій частині. Вважається, що перехід до нових змінних виконано повністю підстановкою формул переходу:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{dq_i(q', t')}{dt(q', t')} = \frac{\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \frac{dq'_j}{dt'} + \frac{\partial q_i}{\partial t'}}{\frac{\partial q'_j}{\partial q'_j} \frac{dt'}{dt} + \frac{\partial t}{\partial t'}} , \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{\partial t(q', t')}{\partial q'_i} \frac{dq'_i}{dt'} + \frac{\partial t(q', t')}{\partial t'} .$$

У результаті

$$S[q, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \equiv S'[q', t'_1, t'_2] = \int_{t'_1}^{t'_2} L'(q', \dot{q}', t') dt' ,$$

де S' — функціонал дії, який породжується новою функцією Лагранжа. За означенням, варіація значення функціоналу дії дорівнює нулю.

ОЗНАЧЕННЯ 19.2. Функціонал дії називається інваріантним відносно перетворення (19.13), якщо

$$S'[q, t_1, t_2] = S[q, t_1, t_2] , \quad (19.16)$$

тобто варіація форми S дорівнює нулю, тобто S' та S ідентичні як функції своїх аргументів (мають однакову форму).

Останнє твердження можна переформулювати інакше за допомогою нульової варіації значення:

$$0 \equiv S'[q', t'_1, t'_2] - S[q, t_1, t_2] = \underbrace{(S'[q', t'_1, t'_2] - S[q', t'_1, t'_2])}_{=0 \text{ з (19.16)}} + (S[q', t'_1, t'_2] - S[q, t_1, t_2])$$

звідки для інваріантного функціоналу

$$S[q', t'_1, t'_2] = S[q, t_1, t_2] . \quad (19.17)$$

Зауваження. Умова інваріантності не залежить від обраної інтерпретації перетворення (активної чи пасивної). У випадку активної інтерпретації вона читається також як

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q', \dot{q}', t') dt' ,$$

тобто має місце (19.17). ┘

На рівні функції Лагранжа умова (19.16) означає, що

$$L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = L(q, \dot{q}, t) \Big|_{\substack{q=q(q', t') \\ t=t(q', t')}} , \quad (19.18)$$

обидві частини рівності записані у нових змінних, у старих змінних вимога має вигляд:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') \frac{dt'}{dt} \Big|_{\substack{q'=q(q,t) \\ t'=t'(q,t)}}.$$

На відміну від закону перетворення (19.15) права та ліва частини у рівності (19.18) будуються за допомогою однієї і тієї самої функції Лагранжа. В інших позначеннях ліва частина є новою функцією Лагранжа,

$$L'(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t'),$$

тобто при перетворенні симетрії *форма функції Лагранжа не змінюється* (у різних частинах рівності підстановка ідентичних аргументів, тому варіація Лі функції L дорівнює нулю).

Геометрично інваріантність означає, що траєкторія системи $q(t)$, яка відповідає функції L під дією перетворення переходить у траєкторію $q'(t')$ для тієї самої функції Лагранжа (з іншими початковими умовами). Інакше кажучи, *перетворення інваріантності переводять простір розв'язків рівнянь Лагранжа сам у себе*², оскільки для однакових за формою функцій Лагранжа рівняння руху ідентичні.

ОЗНАЧЕННЯ 19.3. *Перетворення (19.13) з властивістю (19.18) називається варіаційною симетрією.*

Очевидно, варіаційні симетрії, так само як і заміни координат у конфігураційному просторі, залишають незмінними форму рівнянь руху. У випадку варіаційних симетрій вимоги сильніші, оскільки крім збереження форми рівнянь руху зберігається також форма функції Лагранжа (і, автоматично, значення інтегралу дії), тоді як у випадку загальної заміни координат змінюватиметься як форма, так і значення функції Лагранжа³.

Класом варіаційних симетрій не вичерпуються перетворення, які переводять одну екстремаль функціонала дії у іншу. Найпоширенішими є два типи перетворень, які можна означити шляхом послаблення вимоги (19.18).

ОЗНАЧЕННЯ 19.4. *Перетворення (19.13) називається калібрувальною симетрією, якщо*

$$L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') + \frac{dK(q, q', t)}{dt} = L(q, \dot{q}, t) \frac{dt'}{dt} \Big|_{\substack{q=q(q',t') \\ t=t(q',t')}} , \quad (19.19)$$

де $K(q, q', t)$ — деяка функція (у кінцевому рахунку виражена через старі або нові змінні).

² Тривіальна геометрична аналогія — перетворення симетрії геометричної фігури, при якому точки зміщуються, але об'єкт суміщається сам із собою.

³ Не слід вважати, що перетворення симетрії є частинними випадками замін координат, у останніх час не змінюється. Ці типи перетворень перекриваються лише частково.

Для калібрувального перетворення варіація Лі функції Лагранжа відмінна від нуля, оскільки вимога (19.19) у інших позначеннях має вигляд

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t) + \frac{dK}{dt},$$

але наявність повної похідної по часу не впливає на форму (а значить, і на розв'язок) рівнянь руху.

ОЗНАЧЕННЯ 19.5. Перетворення (19.13) називається конформною симетрією, якщо

$$L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') = c L(q, \dot{q}, t) \frac{dt}{dt'} \Big|_{\substack{q=q(q', t') \\ t=t(q', t')}}}, \quad (19.20)$$

де c — деяка стала.

Рівняння Лагранжа для потенціальних систем є однорідними відносно функції Лагранжа, тому наявність сталого множника при L не впливає на їх запис розв'язок.

7. ТЕОРЕМА НЕТЕР. Теорема Нетер встановлює зв'язок між перетвореннями варіаційних симетрій та інтегралами руху.

ТЕОРЕМА 19.1 (НЕТЕР). Кожному перетворенню інваріантності функціоналу дії відповідає перший інтеграл рівнянь Лагранжа.

□ Зміна функціоналу дії при перетворенні (19.13) за означенням дорівнює нулю:

$$S'[q', t'_1, t'_2] - S[q, t_1, t_2] = \int_{t'_1}^{t'_2} L'(q', \dot{q}', t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

За умовою перетворення (19.13) є варіаційною симетрією, тому $L'(\dots) = L(\dots)$ і $S'[\dots] = S[\dots]$, тому цей вираз можна розглядати як зміну значення функціоналу дії S при підстановці різних аргументів.

Розглянемо варіацію дії при перетворенні (19.13). У першому порядку по варіації

$$\Delta q = q'(t') - q(t), \quad \Delta t = t' - t,$$

згідно із загальним виразом для першої варіації, отримаємо:

$$\Delta S = [p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q_i} \delta q_i dt.$$

Тоді, оскільки $\Delta S = 0$ отримаємо для дійсних траєкторій, на яких виконуються рівняння руху Лагранжа $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$:

$$[p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

У силу довільності вибору моментів часу $t_{1,2}$ це означає, що величина $p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t$ не залежить від часу і є інтегралом руху. ■

Таким чином, перетворення симетрії (19.13) породжує закон збереження величини

$$G = p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t, \quad (19.21)$$

яка називається *генератором* цього перетворення.

Теорему Нетер легко узагальнити на випадок калібрувальних симетрій. Дійсно, у цьому випадку за означенням матимемо:

$$S'[q', t'_1, t'_2] - S[q, t_1, t_2] = \int_{t'_1}^{t'_2} L'(q', \dot{q}', t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \Delta S + \int_{t'_1}^{t'_2} \frac{dK}{dt} dt = 0,$$

тому, підставляючи вираз для ΔS , знайдемо

$$[p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t + K]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q_i} \delta q_i dt = 0,$$

звідки

$$p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t + K = \text{const}. \quad (19.22)$$

8. ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИМЕТРІЇ. У більшості випадків перетворення симетрії (19.13) залежить від одного чи декількох параметрів, малість яких використовується у побудові варіацій Δq та Δt . Нехай задано однопараметричне сімейство перетворень

$$q' = q'(q, t, \alpha), \quad t' = t'(q, t, \alpha), \quad (19.23)$$

де α — параметр. Для виконання теореми Нетер перетворення (19.23) має задовольняти прості обмеження:

1) для перетворення (19.23) завжди існує обернене:

$$q = q(q', t', \alpha), \quad t = t(q', t', \alpha);$$

2) перетворення (19.23) включає тотожне⁴ при $\alpha = 0$:

$$q'_i(q, t, \alpha)|_{\alpha=0} = q_i, \quad t'(q, t, \alpha)|_{\alpha=0} = t;$$

3) повторно виконане перетворення (19.23) з різними параметрами є перетворенням того самого типу (з деяким іншим параметром α).

Із такими вимогами формули (19.23) визначають *групу перетворень*. Очевидно, у випадку симетрії явна залежність від параметру α не вноситься до функціоналу дії при перетворенні (19.23), оскільки значення інтегралу дії зберігається при замінах координат.

⁴ Можна вибрати й інше значення α , вибір $\alpha = 0$ є найзручнішим.

Малі варіації Δq та Δt можна означити розкладом формул (19.23) у ряд Тейлора по α у першому порядку в околі тотожного перетворення:

$$\begin{aligned}\Delta q_i(q, t, \alpha) &= q'(q, t, \alpha) - q'(q, t, 0) = \alpha \left. \frac{\partial q'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \\ \Delta t(q, t, \alpha) &= t'(q, t, \alpha) - t'(q, t, 0) = \alpha \left. \frac{\partial t'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}.\end{aligned}\quad (19.24)$$

Тоді, якщо перетворення (19.23) є перетворенням варіаційної симетрії, то згідно з теоремою Нетер буде зберігатись величина

$$G = p_i \Delta q_i - (p_i \dot{q}_i - L) \Delta t = \alpha \left[p_i \left. \frac{\partial q'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - (p_i \dot{q}_i - L) \left. \frac{\partial t'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right] = \alpha Q,$$

де незалежний від параметру множник називається *зарядом*:

$$Q = p_i \left. \frac{\partial q'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - (p_i \dot{q}_i - L) \left. \frac{\partial t'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const}. \quad (19.25)$$

Цей результат легко узагальнити на випадок багатопараметричної групи перетворень. У випадку n параметрів α_a , $a = \overline{1, n}$ генератор матиме вигляд

$$G(\alpha) = \alpha_a Q_a, \quad Q_a = p_i \left. \frac{\partial q'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha_a=0} - (p_i \dot{q}_i - L) \left. \frac{\partial t'(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha_a=0} = \text{const}.$$

Для ілюстрації розглянемо приклад з симетрією перетворення масштабу (вона здається екзотичною тільки на перший погляд).

Приклад 1. Знайти закон збереження, що породжується перетворенням масштабу для функції Лагранжа

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{a} = \text{const}$$

(заряд у полі диполя).

◀ Легко бачити, що при перетворенні зміни масштабу

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \alpha \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \alpha^2 t,$$

функція Лагранжа є інваріантною:

$$L\left(\vec{r}', \frac{d\vec{r}'}{dt'}\right) \equiv L\left(\alpha \vec{r}, \frac{1}{\alpha} \dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{\alpha^2} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \equiv L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \frac{dt}{dt'}.$$

Для нескінченно малого перетворення $\alpha = 1 + \varepsilon$, де $\varepsilon \ll 1$ тому варіації координат та часу матимуть вигляд:

$$\Delta \vec{r} = \varepsilon \vec{r}, \quad \Delta t = 2\varepsilon t$$

і, згідно з теоремою Нетер, має місце закон збереження величини

$$m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} - 2\varepsilon t = \text{const},$$

у даній системі енергія \mathcal{E} зберігається. Відмітимо, що закон збереження забезпечується тільки степеневою поведінкою потенціалу, а не його конкретним виглядом. Так само можна отримати аналогічний закон збереження для потенціалу $U = \frac{\alpha}{r^2}$ та поля магнітного монополя. ►

9. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ДЛЯ ЦИКЛІЧНИХ КООРДИНАТ. З теореми Нетер легко отримати прості наслідки про закони збереження, які відповідають циклічним координатам у механіці Лагранжа. Дійсно, якщо координата q_α є циклічною, то функція Лагранжа від неї не залежить і не змінюється при перетворенні зсуву

$$q'_i = q_i \quad (\text{при } i \neq \alpha), \quad q'_\alpha = q_\alpha + \varepsilon_\alpha, \quad t' = t.$$

Очевидно, умова інваріантності при цьому виконується:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t')$$

і, оскільки $\Delta q_\alpha = \varepsilon_\alpha$, $\Delta q_i = 0$ (при $i \neq \alpha$) та $\Delta t = 0$, то зберігається генератор

$$G = \varepsilon_\alpha p_\alpha = \text{const} \quad \Rightarrow \quad p_\alpha = \text{const},$$

тобто відповідним зарядом є узагальнений імпульс.

Аналогічно розглядається випадок функції Лагранжа, яка не залежить від часу. Якщо $L = L(q, \dot{q})$, то функція Лагранжа не змінюється при перетворенні зсуву по часу

$$q'_i = q_i, \quad t' = t + \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const},$$

і таке перетворення є варіаційною симетрією:

$$L(q', \dot{q}') = L(q, \dot{q}),$$

оскільки $\frac{dt'}{dt} = 1$ і $\frac{dq'}{dt'} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{dt'} = \dot{q}$. Тоді $\Delta q_i = 0$ і $\Delta t = \varepsilon$ і

$$G = -\varepsilon(p_i \dot{q}_i - L) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad Q = -\mathcal{E} = -(p_i \dot{q}_i - L),$$

генератор є енергією у механіці Лагранжа. Детальніше геометричний зміст перетворення зсуву по часу обговорюється далі.

10. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІКИ. Розглянемо застосування теореми Нетер для механічної системи N частинок з функцією Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U,$$

де потенціальна енергія U залежить тільки від відносних відстаней $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ між частинками (запис у декартових зручний для розгляду перетворень зсуву та поворотів).

Перетворенням просторового повороту та зсуву. Перетворення повороту та зсуву траєкторії має вигляд:

$$\vec{r}'_i(t') = \vec{r}_i(t) + \vec{a} + (\mathbf{A} - \mathbf{1})\vec{r}_i, \quad t' = t, \quad (19.26)$$

де \vec{a} — сталий вектор, який відповідає перетворенню паралельного переносу траєкторії, \mathbf{A} — матриця повороту на заданий кут. Перетворення повороту на кут ε навколо осі, яка задається одиничним напрямком \vec{n} можна описати так:

$$\mathbf{A}\vec{r} = \vec{n}(\vec{r} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{r} \times \vec{n}) \cos \varepsilon + (\vec{n} \times \vec{r}) \sin \varepsilon.$$

Для повороту на малий кут ε у лінійному наближенні можна записати

$$\mathbf{A}\vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i(t), \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{n}.$$

Очевидно, що у даному випадку варіації Δ та δ однакові і

$$\delta \vec{r}_i = \vec{a} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i, \quad \delta \dot{\vec{r}}_i = \vec{\varepsilon} \times \dot{\vec{r}}_i.$$

Знайдемо зміну функції Лагранжа при такому перетворенні. Зрозуміло, що при паралельних переносах та просторових поворотах довжини векторів не змінюються, тому одразу можна стверджувати, що і кінетична, і потенціальна енергії залишаться незмінними. У випадку, коли розглядаються перетворення з малими параметрами незмінність функції Лагранжа буде виконуватись з відповідною точністю у довільному порядку по малих параметрах (тобто якщо варіації незалежних змінних записані у першому порядку, то збереження форми $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ також виконується у першому порядку). Продовжуючи розклад у ряд Тейлора, можна перевірити цей факт для довільного порядку, або, що те саме, довести інваріантність відносно довільного перетворення.

Для кінетичної енергії маємо:

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} \rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i'^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i + \vec{\varepsilon} \times \dot{\vec{r}}_i)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} + O(\varepsilon^2),$$

тому у першому порядку кінетична енергія не змінюється. Аналогічно можна розглянути потенціальну енергію, аргументами якої є відносні відстані:

$$\begin{aligned} r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| &\rightarrow r'_{ij} = |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j| = [\vec{r}'_{ij} \cdot \vec{r}'_{ij}]^{1/2} \\ &= [(\vec{r}_{ij} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{ij}) \cdot (\vec{r}_{ij} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{ij})]^{1/2} = [r_{ij}^2 + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{ij})^2]^{1/2} = r_{ij} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

звідки $U(r'_{ij}) = U(r_{ij})$.

Таким чином,

$$L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) = \frac{dt}{dt'} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}'(\vec{r}', t)} = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

і у силу інваріантності має місце закон збереження генератора

$$G = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{a} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{p}_i + \vec{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), \quad \vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

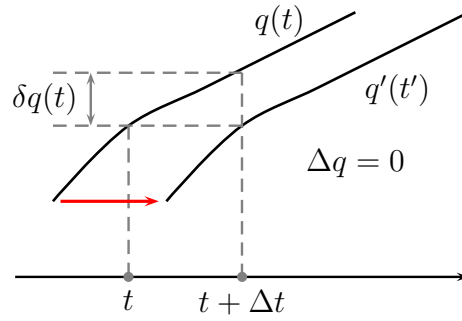


Рис. 19.3. Перетворення зсуву часу (криву $q'(t')$ побудовано у іншій шкалі часу паралельним переносом по горизонталі).

Зважаючи на довільність вибору параметрів \vec{a} та $\vec{\varepsilon}$ отримаємо закони збереження зарядів

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i,$$

які у даному випадку будуть імпульсом та моментом імпульсу системи відповідно.

Перетворення зсуву та повороту формально незалежні одне від іншого, і були розглянуті разом із міркувань зручності. Закон збереження імпульсу забезпечується інваріантністю функції Лагранжа відносно перетворення зсуву. Цей факт можна сформулювати як властивість *однорідності простору* (однакові властивості системи у всіх точках). Аналогічно, момент імпульсу зберігається для систем, інваріантних відносно поворотів на довільний кут відносно довільної осі і забезпечується *ізотропією простору* (однакові властивості системи у всіх напрямках). Якщо зберігаються проекції векторів \vec{P} або \vec{L} , то йтиметься про зсув або поворот у напрямку проекції.

Закони збереження будуть порушуватись у випадку дії сил з боку зовнішніх джерел, які приводять до виникнення у просторі виділених точок та напрямків (наприклад, вектора сили або векторної характеристики системи).

Зауваження. При переході від метричних координат до кутових перетворення повороту теж описується як зсув. Наприклад, для вільної частинки функція Лагранжа у сферичних координатах є циклічною по змінній φ , що автоматично означає інваріантність відносно перетворення зсуву $\varphi' = \varphi + \varepsilon$ (поворот навколо осі z на кут ε). Як відомо, таке перетворення приводить до збереження узагальненого імпульсу p_φ , який насправді відповідає z -компоненті ньютонівського моменту імпульсу:

$$\begin{aligned} L_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m \left[(r \sin \theta \cos \varphi) \frac{d}{dt} (r \sin \theta \sin \varphi) - (r \sin \theta \sin \varphi) \frac{d}{dt} (r \sin \theta \cos \varphi) \right] \\ &= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \equiv p_\varphi. \end{aligned}$$

┘

Перетворення зсуву часу. Нехай функція Лагранжа явно не залежить від часу, розглянемо перетворення, при якому змінюється тільки час:

$$\vec{r}_i'(t') = \vec{r}_i(t), \quad t' = t + \Delta t, \quad (19.27)$$

параметр Δt далі будемо вважати малим. Перетворення (19.27) описує зміщення точки, яка задає положення системи у момент часу t , вздовж траєкторії $\vec{r}(t)$ на Δt , тобто відповідає положенню системи у наступний момент часу $t + \Delta t$. Легко бачити, що функції $\vec{r}'(t')$ та $\vec{r}(t)$ описують одну і ту саму криву з різною параметризацією (див. рис. 19.3). Варіації мають вигляд:

$$\Delta \vec{r}_i(t) = \vec{r}'_i(t') - \vec{r}_i(t) = 0, \quad \delta \vec{r}_i(t) = \vec{r}'_i(t) - \vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t - \Delta t) - \vec{r}_i(t) \simeq -\dot{\vec{r}}_i \Delta t.$$

Оскільки за умовою функція Лагранжа явно не залежить від часу, і параметр перетворення Δt є сталим, то

$$L(\vec{r}'(t'), \dot{\vec{r}}'(t'), t') \equiv L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t + \Delta t) = L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t),$$

звідки випливає закон збереження генератора

$$G = -\mathcal{E} \Delta t = \text{const}, \quad \mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - L,$$

або заряду \mathcal{E} , який відповідає енергії у механіці Лагранжа. Таким чином, закон збереження енергії виконується для систем, у яких функція Лагранжа явно не залежить від часової координати і забезпечується властивістю однорідності часу. Такі механічні системи є консервативними.

Задача 19.1. Побудувати закон збереження, який відповідає перетворенню Галілея.

11. Висновки. Важливе значення теореми Нетер у класичній механіці — встановлення зв'язку між симетріями функціоналу дії та законами збереження. Не зважаючи на загальність концепції, у контексті механіки теорема Нетер реалізує ту саму ідею циклічності, що і звичайна механіка Лагранжа. Інтеграл руху є імпульсом, і породжується деякою циклічною координатою, яка з'являється після вдалої заміни координат. Замість пошуку формул переходу у теоремі Нетер реалізується інша процедура безпосереднього пошуку такого імпульсу в обхід заміни координат.

Підсумки до механіки Лагранжа

У побудові аналітичної схеми класичної механіки (механіки Лагранжа) було зроблено такі кроки:

- **формалізація фізичної системи:** механічний стан — набір $2n$ функцій (q_i, \dot{q}_i) ; вся інформація про систему входить до скалярної функції Лагранжа. Реальне розбиття системи на окремі частинки замінюється розбиттям на формальні “ступені вільності”;
- **інтерпретація взаємодії:** означена узагальнена сила;
- **методи аналізу формальної системи** — методи інтегрування рівнянь руху, які описують еволюцію стану. На відміну від механіки Ньютона, є чітка “стратегія” пошуку інтегралів руху. Вона зводиться до заміни координат у конфігураційному просторі, у результаті яких частина координат стає циклічною, що породжує закони збереження. Однак правила побудови таких перетворень не задано (відсутня конкретна реалізація у формі алгоритму).

ЧАСТИНА III

Механіка Гамільтона

- ❑ Перетворення Лежандра. Канонічні рівняння Гамільтона
- ❑ Варіаційний принцип у фазовому просторі
- ❑ Канонічні перетворення
- ❑ Дужки Пуассона. Теорема та рівняння Ліувілля
- ❑ Рівняння Гамільтона-Якобі

ЛЕКЦІЯ 20

Перетворення Лежандра. Канонічні рівняння Гамільтона

1.	Форми рівнянь руху.	339
2.	Означення та властивості перетворення Лежандра.	340
3.	Побудова перетворення Лежандра через диференціал.	343
4.	Перетворення Лежандра функції Лагранжа.	344
5.	Частинні випадки функцій Гамільтона.	348
6.	Методи інтегрування рівнянь Гамільтона.	350
7.	Висновки.	352

1. ФОРМИ РІВНЯНЬ РУХУ. Рівняння Лагранжа є диференціальними рівняннями другого порядку. Для зручності аналізу¹ їх зручно подати у вигляді системи рівнянь першого порядку, подвоюючи кількість змінних. Легко вказати два прості способи виконання такої процедури. По перше, рівняння руху можна переписати у ньютонівській формі, виділяючи імпульси як функції швидкостей та координат, по-друге, можна провести формальну заміну змінної $v = \dot{q}$, використовуючи цю формулу як окреме рівняння. Таким чином, рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

еквівалентні кожній із систем рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} p_i(q, v, t) = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{p}_i(q, v, t) = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial q_i} \end{cases} \quad (\text{I}) \quad \begin{cases} \dot{q}_i = v_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} \right) = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial q_i} \end{cases} \quad (\text{II}).$$

У обох системах незалежними змінними є координати та швидкості. Обидва представлення незручні для застосування та використання до формального зведення до системи першого порядку у методах обчислень, оскільки включають похідні незалежних змінних (q, v) у неявній формі.

Інший метод перетворення рівняння другого порядку до системи рівнянь першого порядку базується на математичній процедурі, яка називається *перетворенням Лежандра*.

Перетворення Лежандра було введено Лежандром² у XVIII ст. для спрощення інтегрування деяких класів звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у

¹ Також і для чисельного розв'язку.

² Legendre, 1789.

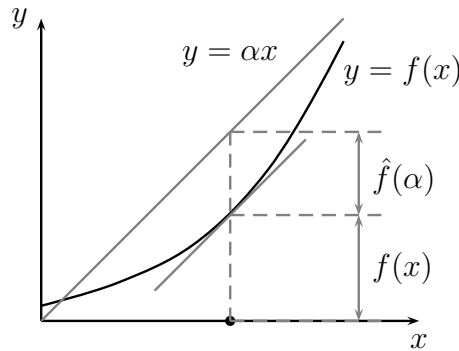


Рис. 20.1. Перетворення Лежандра.

частинних похідних. У теоретичній фізиці воно широко використовується у термодинаміці для заміни змінних та у класичній механіці для побудови іншої форми рівнянь руху.

Спочатку розглянемо властивості перетворення Лежандра, а потім опишемо його застосування у механіці.

2. ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛЕЖАНДРА. Нехай задано опуклу функцію $y = f(x)$, для визначеності вважатимемо, що $f''(x) > 0$. Означимо параметр

$$\alpha = f'(x),$$

який має зміст тангенса кута нахилу дотичної до графіку функції $f(x)$ у точці x . Оскільки за вибором

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = f''(x) > 0 \quad (\text{тобто } \neq 0),$$

то за теоремою про неявну функцію рівняння $\alpha = f'(x)$ має однозначний розв'язок відносно x , який можна знайти переходом до оберненої залежності $x = x(\alpha) \equiv [f']^{-1}(\alpha)$. Очевидно, кутовий параметр α є свого роду дотичною координатою і може використовуватись для опису точок на графіку функції $f(x)$, кожній з яких можна однозначно поставити у відповідність дотичну³. Дійсно, для заданого значення α побудуємо пряму $y = \alpha x$. Якщо пряма перетинає графік $y = f(x)$ у двох точках, то за теоремою Лагранжа про скінченні прирости для функції $f(x)$ існує дотична до графіку $y = f(x)$, яка паралельна до цієї прямої, причому єдина (в силу опуклості функції). Тому параметр α однозначно описує точку, у якій дотична до графіку функції $f(x)$ має нахил α .

Зауваження. У випадку, якщо перетику немає, можна перейти до функції $f(x) - f(a)$ для деякої точки a (щоб перетини були). Така заміна не змінить нахилу дотичної і не змінює розташування графіка відносно осі x . \square

ОЗНАЧЕННЯ 20.1. Перетворенням Лежандра називається перехід від змінної x та функції $f(x)$ до змінної α та функції $\hat{f}(\alpha)$, що здійснюється за правилом (його ілюструє рис. 20.1)

$$f(x) \rightarrow \hat{f}(\alpha) = \alpha \cdot x(\alpha) - f(x(\alpha)), \quad (20.1)$$

де $x(\alpha)$ — розв'язок рівняння $\alpha = f'(x)$.

³ За наявності точок перегину співставлення неоднозначне, що легко показати за допомогою простої побудови.

Якщо перетворення Лежандра означене на деякому інтервалі $[x_1, x_2]$, на якому функція $f(x)$ є опуклою, то образ існуватиме на інтервалі $[\alpha_1, \alpha_2] = [f']^{-1}([x_1, x_2])$ на осі α .

Геометрично значення $\hat{f}(\alpha)$ з точністю до знаку задає відстань по вертикалі від прямої $y = \alpha x$ до графіка функції $y = f(x)$ у точці x .

Найпростіші властивості перетворення Лежандра (вважатимемо, що $f''(x) > 0$):

- 1) при перетворенні Лежандра опуклість оригіналу успадковується образом. Дійсно,

$$\frac{d\hat{f}(\alpha)}{d\alpha} = x(\alpha) + \alpha \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x(\alpha)} \cdot \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} \equiv x(\alpha),$$

тому, оскільки $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x(\alpha)} \equiv \alpha$, отримаємо

$$\frac{d^2 \hat{f}(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{f''(x)} \Big|_{x=x(\alpha)} > 0,$$

оскільки за умовою $f''(x) > 0$. Тому образ $\hat{f}(\alpha)$ матиме таку саму опуклість, що і оригінал $f(x)$. Таким чином, перетворення Лежандра можна проводити повторно у області його існування.

- 2) двократне перетворення Лежандра еквівалентне тотожному. Оскільки $\hat{f}''(\alpha) > 0$, то для функції $\hat{f}(\alpha)$ існує перетворення Лежандра. Нова змінна:

$$\frac{d\hat{f}(\alpha)}{d\alpha} = x(\alpha) := x,$$

нова функція:

$$\hat{\hat{f}}(x) = x \cdot \alpha(x) - \hat{f}(\alpha(x)) = x f'(x) - [x f'(x) - f(x)] \equiv f(x),$$

тобто дорівнює вихідній функції.

Таким чином, оригінал та образ у перетворенні Лежандра є взаємно дуальними у тому розумінні, що їх можна отримати за допомогою одного і того самого перетворення один з одного.

Завдяки останній властивості перетворення Лежандра властивий дуалізм, характерний для багатьох перетворень, що застосовуються у теоретичній фізиці. У випадку перетворення Лежандра “нові” змінні є частинними похідними “старої” функції по “старих” змінних, а “старі” змінні є частинними похідними “нової” функції по “нових” змінних. Перетворення, очевидно, є повністю симетричним, а системи “старих” та “нових” змінних і функцій є формально еквівалентними.

Область застосовності перетворення Лежандра можна розширити, допустивши залежність оригіналу від деякого параметру. Нехай $y = f(x, u)$ залежить від параметру u (або набору параметрів). Очевидно, образ також залежить від цього параметру: рівняння $\alpha = \frac{df(x, u)}{dx}$ має розв’язок $x = x(\alpha, u)$ і образ будується за формулою

$$\hat{f}(\alpha, u) = \alpha \cdot x(\alpha, u) - f(x(\alpha, u), u).$$

Тоді має місце зв’язок між похідними:

$$\frac{\partial \hat{f}(\alpha, u)}{\partial u} = - \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x(\alpha, u)}.$$

□ Перевірку проведемо безпосередньо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}(\alpha, u)}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} [\alpha \cdot x(\alpha, u) - f(x(\alpha, u), u)] = \alpha \frac{\partial x(\alpha, u)}{\partial u} - \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=x(\alpha, u)} \cdot \frac{\partial x(\alpha, u)}{\partial u} \\ &\quad - \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=x(\alpha, u)} = - \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=x(\alpha, u)}. \end{aligned}$$

■

Означимо функцію двох змінних

$$F(x, \alpha) = \alpha x - \hat{f}(\alpha), \quad (20.2)$$

де $\hat{f}(\alpha)$ — образ функції $f(x)$ при перетворенні Лежандра. Очевидно, в силу означення перетворення,

$$F(x, \alpha)|_{\alpha=\alpha(x)} = f(x).$$

Зв'язок функцій $F(x, \alpha)$ та $f(x)$ можна встановити іншим шляхом:

Якщо $f''(x) > 0$, то

$$f(x) = \max_{\alpha} F(x, \alpha) \quad (20.3)$$

(для $f''(x) < 0$ буде мінімум).

□ Необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} = x - \frac{d\hat{f}(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \hat{f}'(\alpha).$$

Екстремум буде максимумом, оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}|_{\alpha=\alpha(x)} = -\hat{f}''(\alpha(x)) < 0$. Відмітимо, що екстремум по змінній x відсутній, оскільки $F(x, \alpha)$ є лінійною по x . ■

Функція $F(x, \alpha)$ має тривіальний геометричний зміст: вона описує y -координату дотичної до графіку $y = f(x)$ в точці x , тангенс кута нахилу якої складає α . У силу опуклості функції $f(x)$ всі такі дотичні будуть лежати нижче графіку $y = f(x)$, а сама функція $f(x)$ буде огинаючою сімейства лінійних (по x) функцій $F(x, \alpha)$.

Аналогічно можна ввести дуальну функцію

$$\hat{F}(x, \alpha) = \alpha x - f(x), \quad (20.4)$$

для якої виконується

$$\hat{F}(x, \alpha)|_{x=x(\alpha)} = \hat{f}(\alpha) \quad \text{та} \quad \hat{f}(\alpha) = \max_x \hat{F}(x, \alpha). \quad (20.5)$$

Властивість (20.5) можна взяти як означення перетворення Лежандра. Очевидно, геометрично функція $\hat{F}(x, \alpha)$ описує відстань від прямої $y = \alpha x$ до графіку $y = f(x)$ по вертикалі для заданого x , максимальному по x значенню відстані відповідатиме $\hat{f}(\alpha)$.

Із властивостей (20.3) та (20.5) випливає:

$$F(x, \alpha) \leq \max_{\alpha} F(x, \alpha) \equiv f(x), \quad \hat{F}(x, \alpha) \leq \max_x \hat{F}(x, \alpha) \equiv \hat{f}(\alpha),$$

або

$$f(x) + \hat{f}(\alpha) \geq \alpha x, \quad (20.6)$$

нерівність (20.6) називається *нерівністю Юнга*, а самі функції $f(x)$ та $\hat{f}(\alpha)$ — двоїстими за Юнгом.

Формули перетворення легко узагальнити на випадок скалярної функції векторного аргументу. Для функції $f(\vec{x})$ для побудови перетворення Лежандра потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\vec{\alpha} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \quad (20.7)$$

відносно змінних \vec{x} . Така задача еквівалентна побудові оберненої функції і має розв'язок за умови, що матриця, що утворена з других похідних функції $f(\vec{x})$, є невиродженою:

$$\det \left| \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right| \neq 0.$$

У області, де виконується ця умова, квадратична форма

$$d^2 f(\vec{x}) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

є знаковизначеною і функція $f(\vec{x})$ матиме певний напрямок опуклості. Для визначеності можна вважати, що $d^2 f(\vec{x}) > 0$.

Образ $f(\vec{x})$ будується за правилом

$$\hat{f}(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{x}(\vec{\alpha}) - f(\vec{x}(\vec{\alpha})), \quad (20.8)$$

де $\vec{x}(\vec{\alpha})$ — розв'язок системи рівнянь (20.7).

Всі основні властивості перетворення Лежандра, доведені для функції однієї змінної, матимуть місце і у багатовимірному випадку (з очевидними змінами у позначеннях).

3. ПОБУДОВА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛЕЖАНДРА ЧЕРЕЗ ДИФЕРЕНЦІАЛ. У класичній механіці та термодинаміці зручно будувати перетворення Лежандра і записувати зв'язки між похідними по параметрах одночасно. Процедура базується на записі першого диференціалу функції $f(\vec{x}, \vec{u})$ і підстановці розв'язку $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\alpha}, \vec{u})$ рівняння переходу $\vec{\alpha} = \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{u})}{\partial \vec{x}}$.

Перший диференціал за означенням має вигляд:

$$df(\vec{x}, \vec{u}) = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial u_k} du_k,$$

за означенням похідна функції $f(\vec{x})$ по x_i позначається α_i (поки що це функція \vec{x}), тому

$$df(\vec{x}, \vec{u}) = \alpha_i(\vec{x}, \vec{u}) dx_i + \frac{\partial f}{\partial u_k} du_k.$$

Доповнимо перший доданок правої частини до повного диференціалу і зберемо обидва повні диференціали у лівій частині:

$$d[f(\vec{x}, \vec{u}) - \alpha_i(\vec{x}, \vec{u})x_i] = -x_i d\alpha_i(\vec{x}, \vec{u}) + \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{u})}{\partial u_k} du_k.$$

За структурою диференціалів правої частини видно, що функція під диференціалом у лівій частині залежить від параметрів \vec{u} та змінних \vec{x} так, що останні

зібрані у комбінації $\vec{\alpha}(\vec{x}, \vec{u})$. Вважаючи, що співвідношення $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\vec{x}, \vec{u})$ допускає перехід до оберненої залежності $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\alpha}, \vec{u})$, перейдемо у обох частинах рівності до змінної $\vec{\alpha}$ за допомогою безпосередньої підстановки:

$$d[f(\vec{x}(\vec{\alpha}, \vec{u}), \vec{u}) - \alpha_i x_i(\vec{\alpha}, \vec{u})] = -x_i(\vec{\alpha}, \vec{u}) d\alpha_i + \left. \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{u})}{\partial u_k} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{\alpha}, \vec{u})} du_k.$$

Легко бачити, що у лівій частині рівності фігурує образ за Лежандром із оберненим знаком, тому останнє співвідношення можна записати у вигляді:

$$d\hat{f}(\vec{\alpha}, \vec{u}) = x_i(\vec{\alpha}, \vec{u}) d\alpha_i - \left. \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{u})}{\partial u_k} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{\alpha}, \vec{u})} du_k.$$

Звідси автоматично впливають вирази для перших похідних образу по його аргументах:

$$\frac{\partial \hat{f}(\vec{\alpha}, \vec{u})}{\partial \alpha_i} = x_i(\vec{\alpha}, \vec{u}), \quad \frac{\partial x_i(\vec{\alpha}, \vec{u})}{\partial u_k} = - \left. \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{u})}{\partial u_k} \right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{\alpha}, \vec{u})}.$$

Очевидно, перший вираз задає стандартне співвідношення між змінними \vec{x} та $\vec{\alpha}$ (рівняння, яке визначає обернене перетворення), а друге збігається з наведеними раніше формулами зв'язку похідних по параметру оригіналу та образу.

4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛЕЖАНДРА ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА. Функція Лагранжа залежить від двох груп змінних — координат та швидкостей, тому перетворення Лежандра можна виконати по будь-якій з них.

Розглянемо перетворення Лежандра функції Лагранжа по швидкостях. Для його побудови перейдемо від конфігураційного простору $\{q\}$ до простору швидкостей $\{q, v\}$ з коректною фізичною розмірністю $2n$, кожна точка якого позначає *механічний стан системи*. Рівняння руху у ньому формально еквівалентні рівнянням Лагранжа із подвоєною кількістю змінних:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = v \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial t} \end{cases} \quad \text{де} \quad L = L(q, v, t).$$

Першу рівняння є також рівнянням руху у просторі швидкостей.

Означимо нові змінні, які формально є узагальненими імпульсами, і з отриманих співвідношень виразимо узагальнені швидкості:

$$p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} \Rightarrow v_i = v_i(q, p, t). \quad (20.9)$$

Перетворення Лежандра можна виконати, якщо неявне рівняння $p_i = p_i(q, v, t)$ має розв'язки відносно швидкостей, за теоремою про неявну функцію це означає, що

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \right) \neq \begin{bmatrix} 0, \\ \infty \end{bmatrix}$$

Відмітимо, що за такого самого обмеження задача Коші для рівнянь Лагранжа формулюється однозначно. Механічні системи, у яких неможливо виконати перетворення Лежандра називаються *виродженими*.

Перетворення Лежандра для функції L по змінних v приводить до функції координат, імпульсів та часу, яка називається *функцією Гамільтона*, яку позначають символом H :

$$\begin{aligned} (q, v, t) &\rightarrow (q, p, t), \quad \text{де} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, v, t) \\ L(q, v, t) &\rightarrow H(q, p, t) := \left[\sum_{i=1}^n p_i v_i - L(q, v, t) \right]_{v=v(q, p, t)}, \end{aligned} \quad (20.10)$$

Роль перетворення зводиться до заміни змінних v_i на p_i , а координати q та час t є параметрами.

Розглянемо зв'язок функцій L та H , аналізуючи диференціал функції Лагранжа. Оскільки $L = L(q, \dot{q}, t)$, то у просторі швидкостей

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Скористаємось означенням узагальненого імпульсу, тоді

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i dv_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (20.11)$$

Виділяючи повний диференціал у другому доданку за правилом $p_i dv_i = d(p_i v_i) - v_i dp_i$ і збираючи всі повні диференціали у одній частині, отримаємо:

$$d(p_i v_i - L) = -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + v_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Поки що це співвідношення записане у термінах координат та швидкостей, імпульс у правій частині є функцією $p_i = p_i(q, v, t)$. Якщо підставити формули перетворення Лежандра $v_i = v_i(q, p, t)$, то у правій частині з'являється функція Гамільтона, а імпульси стають незалежними змінними:

$$dH(q, p, t) = -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \Big|_{v=v(q, p, t)} + v_i(q, p, t) dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{v=v(q, p, t)} dt. \quad (20.12)$$

Формальна структура функції визначається виразом першого диференціалу, тому порівнюючи вираз

$$dH(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

з (20.12), знайдемо:

$$\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} = v_i(q, p, t), \quad \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{v=v(q, p, t)}, \quad \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{v=v(q, p, t)},$$

це стандартний зв'язок образу та оригіналу (зокрема похідних по параметрах), про який було раніше. Скористаємось тепер рівняннями Лагранжа у формі $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ та $v_i = \dot{q}_i$, отримаємо форму рівнянь руху після перетворення Лежандра:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t} \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)} \quad (20.13)$$

отримані рівняння називаються *канонічними рівняннями Гамільтона*, вони повністю еквівалентні до рівнянь Лагранжа. Система рівнянь (20.13) є системою диференціальних рівнянь першого порядку з явною залежністю від похідних. Відмітимо, що умова $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ автоматично приводить до $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Крім того, функція Гамільтона є лагранжевою енергією, яку виражено через координати та імпульси:

$$\mathcal{E} = p_i(q, \dot{q}, t)\dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad H = p_i\dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t).$$

Зауваження. Часто для побудови перетворення Лежандра явне подвоєння змінних для скорочення опускають позначаючи фізично незалежну величину швидкість v_i як похідну координати \dot{q}_i , далі використовуватимуться саме такі позначення у випадках, якщо це не призводить до непорозумінь. Варто зазначити, що саме перетворення Лежандра не дає збільшення розмірності простору, який використовується для опису механічної системи. Це потрібно робити до перетворення, як було показано вище. Подвоєну розмірність заховано і до рівнянь Лагранжа у самих початкових умовах, яких має бути саме $2n$. \perp

У рівняннях Гамільтона похідна координати по часу виражається через похідну функції Гамільтона по відповідному імпульсу і навпаки. Координати q_i та імпульси p_i фігурують у теорії Гамільтона парами, їх часто називають *спряженими змінними*. Простір, утворений координатами (q, p) називається *фазовим простором*, його розмірність вдвічі більша за розмірність конфігураційного простору.

Зауваження. Координати (q, p) у початковий момент часу t_0 описують початкові умови для рівнянь Гамільтона. На відміну від рівнянь Лагранжа, де $q(t_0)$ є координатами простору (початкове положення), а $\dot{q}(t_0)$ — додаткові параметри (початкові швидкості), набір змінних $(q(t_0), p(t_0))$ є координатами простору, де означено рівняння руху. \perp

Зауваження. Наявність мінусу у одному з рівнянь Гамільтона має універсальний характер і визначає геометричні властивості фазового простору. Розділ математики, у якому досліджуються ці питання, називається *симплектичною геометрією*. \perp

Для побудови функції Гамільтона по заданій функції Лагранжа можна скористатись наступною послідовністю дій:

- 1) знайти узагальнені імпульси $p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$;
- 2) з рівнянь $p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$ виразити узагальнені швидкості $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$;
- 3) підставити узагальнені швидкості до означення функції Гамільтона:

$$H(q, p, t) = [p_i\dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)]_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)}$$

і спростити отриманий вираз.

Зауваження. Повторне перетворення Лежандра функції Гамільтона по імпульсах приводить назад до функції Лагранжа. Дійсно, стартовими співвідношеннями будуть вирази, які збігаються з рівняннями Гамільтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \Rightarrow p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$$

звідки

$$L(q, \dot{q}, t) = p_i(q, \dot{q}, t)\dot{q}_i - H(q, p(q, \dot{q}, t), t),$$

після спрощення цього виразу буде отримано функцію Лагранжа. \square

Перетворення Лежандра по іншій групі змінних (по координатах q) не приводить до бажаного результату. Нові змінні є похідними функції Лагранжа по координатах, в силу рівнянь руху це будуть похідні імпульсів:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \Rightarrow q_i = q_i(\dot{q}, \dot{p}, t),$$

перетворення зводиться до заміни аргументів q на \dot{p} . Для його побудови виділимо повний диференціал у виразі (20.11) іншим способом:

$$d(\dot{p}_i q_i - L) = q_i d\dot{p}_i - p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Функція $K(\dot{q}, \dot{p}, t) = [\dot{p}_i q_i - L]_{q=q(\dot{q}, \dot{p}, t)}$ є образом функції Лагранжа. Із співвідношень

$$dK = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial K}{\partial \dot{p}_i} d\dot{p}_i + \frac{\partial K}{\partial t} dt = q_i d\dot{p}_i - p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

впливають рівняння

$$q_i = \frac{\partial K(\dot{q}, \dot{p}, t)}{\partial \dot{p}_i}, \quad p_i = -\frac{\partial K(\dot{q}, \dot{p}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial K(\dot{q}, \dot{p}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t} \Big|_{q=q(\dot{q}, \dot{p}, t)},$$

які є рівняннями руху для змінних (\dot{q}, \dot{p}) . Це також рівняння першого порядку, але вони повністю неясні відносно похідних нових змінних. Це є причиною, чому таке перетворення не використовується у класичній механіці. Для ілюстрації розглянемо простий приклад.

Приклад 1. Побудувати перетворення Лежандра для функції Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (\text{гармонічний осцилятор}).$$

◀ 1) Побудуємо перетворення по швидкості. Із виразу для імпульсу знаходимо швидкість:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}.$$

Підстановка до означення функції Гамільтона дає:

$$H(x, p) = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

Рівняння руху: $\dot{x} = \frac{p}{m}$, $\dot{p} = -kx$.

2) Побудуємо перетворення по координаті. Із виразу для похідної імпульсу знаходимо координату:

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\dot{p}}{k}.$$

Підстановка до функції K дає:

$$K(\dot{x}, \dot{p}) = -\dot{p} \cdot \frac{\dot{p}}{k} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2} \left(\frac{\dot{p}}{k} \right)^2 = -\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\dot{p}^2}{2k}.$$

Рівняння руху: $x = \frac{\partial K}{\partial \dot{p}} = -\frac{\dot{p}}{k}$, $p = -\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ (що еквівалентно попереднім рівнянням у силу лінійності). ►

Задача 20.1. Виконати перетворення Лежандра функції Лагранжа по обох групах змінних (двократне перетворення):

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow M(p, \dot{p}, t).$$

Показати, що рівняння руху можна звести до вигляду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial M}{\partial p_i}$$

(аналог рівнянь Лагранжа для імпульсів).

5. ЧАСТИННІ ВИПАДКИ ФУНКЦІЙ ГАМІЛЬТОНА. Розглянемо вирази для функції Гамільтона, які характерні для найбільш поширених випадків, які зустрічаються у класичній механіці.

Неконсервативна система. Для побудови перетворення Лежандра за основу було взято рівняння Лагранжа для систем із потенціальними силами. У випадку наявності непотенціальних сил також можна отримати рівняння Гамільтона, використовуючи рівняння Лагранжа з узагальненими силами:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \Phi_i.$$

Тоді рівняння перетворення Лежандра (20.11) заміниться на

$$dL = (\dot{p}_i - \Phi_i) dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (20.14)$$

звідки

$$d(p_i \dot{q}_i - L) \equiv dH = -(\dot{p}_i - \Phi_i) dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Тому до правих частин рівнянь Гамільтона для такої системи будуть входити узагальнені сили:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \Phi_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (20.15)$$

Стандартна механічна система. Для суто механічних систем кінетична енергія має вигляд суми трьох доданків $T = T_2 + T_1 + T_0$ відповідного порядку по швидкостях. Запишемо функцію Гамільтона для такої системи. Оскільки

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + b_i(q, t) \dot{q}_i + T_0(q, t) - U(q, t),$$

то з формули для імпульсу за умови, що матриця $\{a_{ij}\}$ є невідірженою випливає, що

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij}(q, t) \dot{q}_j + b_i(q, t) \Rightarrow \dot{q}_i = [a^{-1}]_{ij}(p_j - b_j).$$

Підстановка до функції Гамільтона після нескладних перетворень дає:

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} [a^{-1}]_{ij}(p_i - b_i(q))(p_j - b_j(q, t)) + U(q, t) - T_0(q, t). \quad (20.16)$$

Частинка у електромагнітному полі. Для такої системи функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - e\varphi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t),$$

де φ та \vec{A} — скалярний та векторний потенціали відповідно. З формули для узагальненого імпульсу знаходимо швидкість:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right],$$

підстановка до функції Гамільтона дає:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + e\varphi(\vec{r}, t). \quad (20.17)$$

Функція Гамільтона для частинки в ортогональних криволінійних координатах. Нехай частинка рухається у потенціалі $U(\vec{r})$, функція Лагранжа має вигляд:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}).$$

У результаті переходу до ортогональних криволінійних координат q_1, q_2, q_3 у кінетичній енергії, як відомо, з'являються узагальнені швидкості та параметри Ламе:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} [H_1^2(q) \dot{q}_1^2 + H_2^2(q) \dot{q}_2^2 + H_3^2(q) \dot{q}_3^2] - U(q).$$

З узагальнених імпульсів виражаємо швидкості:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = H_i^2 \dot{q}_i \quad (\text{суми по } i \text{ немає}) \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{p_i}{H_i^2},$$

після підстановки до означення функції Гамільтона отримаємо:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_1^2}{H_1^2} + \frac{p_2^2}{H_2^2} + \frac{p_3^2}{H_3^2} \right) + U(q). \quad (20.18)$$

У функції Гамільтона, на відміну від функції Лагранжа, квадрати параметрів Лапе та маса з'являються у знаменниках, а потенціальна енергія змінює знак.

Зокрема, для частинки у циліндричних координатах (r, φ, z) :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z) \Rightarrow H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z) \quad (20.19)$$

у сферичних координатах (r, θ, φ) :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi) \Rightarrow H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi) \quad (20.20)$$

6. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ГАМІЛЬТОНА. Рівняння Гамільтона еквівалентні рівнянням Лагранжа, тому підходи до їх розв'язку у загальних рисах будуть в цілому тими самими, тобто так чи інакше зводитимуться до пошуку законів збереження. Однак у зв'язку зі специфічною формою самих рівнянь Гамільтона (першого порядку) існує кілька методів виділення інтегралів руху, яких немає у лагранжевій схемі. У першу чергу це пов'язано з тим, що у механіці Гамільтона кількість змінних вдвічі більша.

Енергія. Якщо функція Лагранжа не залежить від часу, то ця властивість успадковується функцією Гамільтона. Енергія, яка зберігається у механіці Лагранжа, зберігатиметься і у механіці Гамільтона, де вона за значенням дорівнює функції Гамільтона. Явна перевірка:

$$\frac{d}{dt}H(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv 0,$$

де використано рівняння руху. Таким чином,

Якщо функція Гамільтона механічної системи явно не залежить від часу, то у такій системі зберігатиметься енергія $\mathcal{E} \equiv H(q, p)$.

Відсутність часу серед аргументів функції Гамільтона можна назвати “циклічністю” H по часу, цю властивість можна використати для редукції змінних у функції Гамільтона переходом до іншої параметризації траєкторії. Припустимо, що залежність однієї координат від часу задано, наприклад $q_1 = q_1(t)$, і виразимо час через координату q_1 . У формулах для похідних потрібно виконати заміну змінних:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dq_1} \frac{dq_1}{dt} = q'_i(q_1) \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad i = \overline{2, n},$$

де використано рівняння Гамільтона для q_1 , штрих позначає похідну по цій змінній. Аналогічно для імпульсів:

$$\dot{p}_i = p'_i(q_1) \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad i = \overline{1, n},$$

Підставимо похідні до рівнянь руху для змінних q_2, \dots, q_n та до рівнянь для імпульсів p_1, \dots, p_n (де $i \geq 2$):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H / \partial p_i}{\partial H / \partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H / \partial q_1}{\partial H / \partial p_1}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H / \partial q_i}{\partial H / \partial p_1}, \quad i = \overline{2, n}.$$

Координата q_1 є новим параметром еволюції. Розв'язки нових рівнянь приводять до $2n - 1$ інтегралів руху C_1, \dots, C_{2n-1} (сталіх інтегрування), що не залежать від часу — сам час не входить до рівнянь Гамільтона завдяки циклічності.

Єдиний інтеграл руху консервативної системи, який явно залежить від часу, породжується рівнянням Гамільтона для координати q_1 , у якому формально відокремлюються змінні:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_1} \Rightarrow t - t_0 = \int_{q_{10}}^{q_1(t)} \frac{dq_1}{\partial H(q, p) / \partial p_1}$$

або (якщо $q_i(q_1)$ та $p_i(q_1)$ вже знайдено):

$$C_{2n} \equiv t_0 = t - \int_{q_{10}}^{q_1(t)} \frac{dq_1}{\partial H(q, p) / \partial p_1} = \text{const}.$$

Висновок:

У консервативній системі інтеграли руху можна вибрати так, що явно залежить від часу тільки один інтеграл руху, причому ця залежність — лінійна.

Комбінації змінних. Часто буває так, що залежність функції Гамільтона від узагальненої координати та відповідного імпульсу вказана у вигляді стійкої комбінації, що явно не залежить від часу. Наприклад, координата q_1 та імпульс p_1 входять до функції Гамільтона у комбінації $\varphi(q_1, p_1)$, тобто

$$H = H(\varphi(q_1, p_1); q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, t).$$

Знайдемо похідну функції φ по часу:

$$\frac{d}{dt} \varphi(q_1, p_1) = \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1.$$

Згідно з рівняннями руху

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1},$$

тому підстановка до похідної φ дає:

$$\frac{d}{dt} \varphi(q_1, p_1) = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) = 0.$$

Таким чином,

Якщо координата q_i та імпульс p_i входять до функції Гамільтона у стійкій комбінації $\varphi(q_i, p_i)$, що явно не залежить від часу, то функція $\varphi(q_i, p_i)$ є інтегралом руху.

Стійку комбінацію, очевидно, легко побачити з формули для функції Гамільтона. Наприклад для тривимірного ізотропного осцилятора

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k\vec{r}^2}{2} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{ky^2}{2} \right) + \left(\frac{p_z^2}{2m} + \frac{kz^2}{2} \right)$$

є три стійкі комбінації, які взято у круглі дужки. Кожна з них зберігається і відповідає частці енергії, яка припадає на відповідну ступінь вільності.

Отриманий закон збереження відіграє винятково важливу роль у методі відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона-Якобі.

Циклічні координати. На відміну від механіки Лагранжа, у механіці Гамільтона є дві групи незалежних змінних, які можуть породжувати інтеграли руху за сценарієм циклічних координат. Якщо функція Гамільтона не залежить від координати чи імпульсу з номером i , то відповідні рівняння Гамільтона вироджуються у закони збереження:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \text{або} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

Висновок:

Якщо H не залежить від координати q_i , то відповідний імпульс p_i є інтегралом руху. Якщо H не залежить від імпульсу p_i , то відповідна координата q_i є інтегралом руху.

Відмітимо, що у механіці Гамільтона закон збереження для циклічної координати або імпульсу є алгебраїчним співвідношенням (тоді як у механіці Лагранжа закон збереження породжує диференціальне рівняння першого порядку).

7. Висновки. У механіці Лагранжа є прості ознаки наявності інтегралів руху — циклічні координати (їх може бути не більше n) та незалежність функції Лагранжа від часу (дає ще один інтеграл). Всього може бути щонайбільше $n + 1$ законів збереження, хоча формально для довільної механічної системи завжди є $2n$ інтегралів руху (за кількістю сталих інтегрування). У механіці Гамільтона циклічних координат щонайбільше $2n$, незалежність від часу дає ще один інтеграл руху, тобто із загальних ознак можна отримати $2n + 1$ інтегралів руху (серед них один залежить від інших). Якщо провести вдалу заміну координат з максимальною кількістю циклічних, то у механіці Гамільтона можна отримати *всі* інтеграли руху, які є суто алгебраїчними співвідношеннями.

ЛЕКЦІЯ 21

Варіаційний принцип у фазовому просторі

1.	Конфігураційний простір та простір швидкостей.	353
2.	Модифікований варіаційний принцип.	354
3.	Варіаційний принцип у просторі швидкостей.	356
4.	Варіаційний принцип у фазовому просторі.	358
5.	Енергія та час як спряжені змінні.	359

1. КОНФІГУРАЦІЙНИЙ ПРОСТІР ТА ПРОСТІР ШВИДКОСТЕЙ. Варіаційний принцип у механіці Лагранжа формулюється у конфігураційному просторі \mathcal{Q} , який утворюється узагальненими координатами системи і описує поверхню зв'язків. Рух системи зображується у вигляді кривої в цьому просторі $q(t) = \{q_i(t)\}$, яка є траєкторією руху (за винятком випадку однієї частинки траєкторія має формальний характер і не описує безпосередню геометричну картину руху).

Точка конфігураційного простору \mathcal{Q} відповідає кінематично можливому положенню системи, яке допустиме зв'язками, але значень координат q недостатньо для визначення механічного стану системи. Одній точці конфігураційного простору відповідає нескінченна кількість механічних станів, які відрізняються швидкостями \dot{q} . Для постановки задачі про рух інформацію про початкове положення системи потрібно доповнити додатковими параметрами — значеннями початкових швидкостей. Варіаційний принцип Гамільтона було отримано як частинний випадок більш загального принципу д'Аламбера для спеціального класу віртуальних переміщень, він описує варіацію траєкторії системи в цілому. Внаслідок цього варіації швидкостей узгоджені з варіаціями координат і відповідають варіаціям векторів, що дотичні до траєкторії у заданий момент часу.

Іншими словами, у варіаційному принципі розглядаються тільки такі зміни механічних станів, які разом утворюють деяку можливу траєкторію руху як до, так і після варіації.

Повний опис механічної системи у класичній механіці передбачає задання механічного стану у даний момент часу. Це можна зробити двома способами:

- 1) задати всю траєкторію системи $q = q(t)$ як функцію часу t . Координати визначаються підстановкою часу до формули траєкторії, а швидкості — диференціюванням цієї формули. Саме так механічний стан фігурує у варіаційному принципі Гамільтона у конфігураційному просторі, де варіації швидкостей задовольняють рівності $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$;
- 2) задати координати q та швидкості \dot{q} у момент часу t (тобто механічний стан). Тоді логічно поставити питання не тільки про допустимі положення системи

(як у принципі д'Аламбера), а про допустимі механічні стани, які можна отримати малою зміною дійсного стану механічної системи.

Другий спосіб опису системи є *локальним*, він описує механічний стан набором координат та швидкостей (q, v) у даний момент часу. Різні механічні стани утворюють *простір швидкостей*, який позначається¹ $T\mathcal{Q}$. Цей підхід є більш фізичним, оскільки точка такого формального простору повністю визначає механічний стан системи. Траєкторія системи у просторі $T\mathcal{Q}$ складається з послідовності механічних станів, у яких послідовно перебуває система протягом руху². Початкова точка (початковий стан) траєкторії однозначно задається своїми координатами (q, v) у просторі швидкостей.

Зауваження. Слід підкреслити, що фізичну незалежність швидкостей та координат неявно закладено і до самого формулювання задачі пошуку закону руху — у рівняннях Лагранжа початкові швидкості та координати задаються незалежно одна від іншої (у варіаційному принципі задача замінюється на крайову). \perp

З іншого боку, у гамільтоновій формі механіки рівняння руху мають вигляд системи рівнянь першого порядку відносно $2n$ формально незалежних змінних — імпульсів та координат. Для узгодженості обох форм механіки потрібно розглянути форму варіаційного принципу, яка породжує рівняння Гамільтона. У такому варіаційному принципі варіація буде описувати зміни всього механічного стану, а не тільки до його геометричної частини.

2. МОДИФІКОВАНИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП. Варіаційний принцип у просторі швидкостей має у кінцевому рахунку приводити до рівнянь Лагранжа. Для його отримання спочатку запишемо стандартні рівняння Лагранжа у конфігураційному просторі \mathcal{Q} у термінах змінних (q, v) як систему рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i - v_i = 0. \end{cases}$$

У даному випадку, оскільки за основу взято рівняння у конфігураційному просторі, останнє рівняння є рівнянням зв'язку на змінні v_i .

Варіаційний принцип, який приводить до таких рівнянь є задачею на умовний екстремум функціоналу дії, у якому аргументами функції Лагранжа є змінні (q, v) із додатковими умовами:

$$\begin{cases} \delta S[q, v] = 0, \\ \dot{q}_i - v_i = 0, \end{cases} \quad \text{де} \quad S[q, v] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, v, t) dt,$$

¹ Позначення запозичено з диференціальної геометрії, де такий простір називається дотичним. Через відсутність загальноприйнятого позначення для простору швидкостей ми будемо користуватись символом $T\mathcal{Q}$, не вдаючись подробиці формальних геометричних властивостей цього простору.

² Формально така траєкторія є фазовим портретом — як у диференціальних рівняннях.

додаткові умови обмежують варіації швидкостей рівностями $\delta v_i = \delta \dot{q}_i$. У такій формі запису наявність швидкостей є простим перепозначенням, змінні (q, v) не є рівноправними і варіаційний принцип збігається з принципом Гамільтона у просторі \mathcal{Q} .

Як відомо з математичного аналізу, довільну задачу на умовний екстремум можна переформулювати у вигляді задачі на безумовний екстремум у просторі більшої кількості змінних. Із цією метою використовується метод невизначених множників Лагранжа. Для звичайних функцій задача пошуку екстремуму функції $f(\vec{r})$ з додатковою умовою $\varphi(\vec{r}) = 0$ (геометрично це крива або поверхня, якій належить екстремум) зводиться до задачі пошуку безумовного екстремуму функції змінних λ та \vec{r} :

$$F(\vec{r}, \lambda) = f(\vec{r}) + \lambda \varphi(\vec{r}),$$

де λ — множник Лагранжа, який є новою незалежною змінною. Рівняння зв'язку з'являтиметься як одна з необхідних умов екстремуму такої функції.

Для функціоналів можна використати ту саму ідею. Розглянемо модифікований функціонал дії, до якого зв'язки входять як доданки з невизначеними множниками Лагранжа λ_i , які є новими змінними:

$$S_{mod}[q, v, \lambda] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q, v, t) + \lambda_i(\dot{q}_i - v_i)] dt,$$

або

$$S_{mod}[q, v, \lambda] = \int_{t_1}^{t_2} L_{mod}(q, v, \lambda, \dot{q}, t) dt, \quad \text{де} \quad L_{mod}(q, v, \lambda, \dot{q}, t) = L(q, v, t) + \lambda_i(\dot{q}_i - v_i).$$

Рівняння руху можна отримати як екстремалі функціоналу S_{mod} з умовою незалежності варіацій змінних q , v та λ . Число змінних складатиме тепер $3n$ (по n змінних у кожній групі).

Дійсно, запишемо рівняння Ейлера-Лагранжа екстремуму функціоналу S_{mod} . Рівняння для λ_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mod}}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) = \frac{\partial L_{mod}}{\partial \lambda_i} \Rightarrow 0 = v_i - \dot{q}_i, \quad (21.1)$$

рівняння для q_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mod}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L_{mod}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \lambda_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (21.2)$$

рівняння для v_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{mod}}{\partial \dot{v}_i} \right) = \frac{\partial L_{mod}}{\partial v_i} \Rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial v_i} - \lambda_i. \quad (21.3)$$

Співвідношення (21.1) збігається з додатковою умовою, а (21.3) є рівняннями зв'язків. Перше них виникає автоматично, як і у будь-якій задачі з множниками Лагранжа, а з другого випливає, що за формою множники Лагранжа збігаються з імпульсами. Підстановка зв'язків (21.1) та (21.3) у рівняння руху (21.2) дає стандартні рівняння Ейлера-Лагранжа у просторі \mathcal{Q} .

Таким чином, доведено, що

Рівняння Лагранжа можна отримати з варіаційного принципу у $3n$ -вимірному просторі з незалежними координатами (q, v, p) , який відповідає задачі на екстремум модифікованого функціоналу дії

$$S_{mod}[q, v, p] = \int_{t_1}^{t_2} L_{mod} dt, \quad L_{mod} = L(q, v, t) + p_i(\dot{q}_i - v_i) \quad (21.4)$$

за умов $\delta q_i(t_{1,2}) = 0$.

Зауваження. У варіаційному принципі вимагається тільки фіксація координат q на кінцях кривої, оскільки у виразі для варіації функціоналу дії з'являється лише один позаінтегральний доданок $p_i \delta q_i|_{t_1}^{t_2}$. \square

Модифікований варіаційний принцип описує рух системи у фіктивному $3n$ -вимірному просторі. Сам по собі він не являє інтересу для класичної механіки, оскільки число змінних перевищує число незалежних параметрів системи. Однак з нього випливають важливі наслідки, які можна отримати зменшенням числа змінних, яких має бути $2n$.

Еволюція системи у часі описується послідовним набором механічних станів, які однозначно задаються або набором координат та швидкостей (q, v) , або еквівалентним набором координат та імпульсів (q, p) . Тому в описі системи за допомогою набору змінних (q, v, p) або швидкості, або імпульси зайві і їх потрібно виключити.

Зменшити число змінних можна виразивши частину змінних із додаткових умов (21.1) або рівнянь зв'язків (21.3) та підставивши отримані вирази до функціоналу. Якщо скористатись виразами для швидкостей $v_i = \dot{q}_i$, то ми повернемось знову до варіаційного принципу у конфігураційному просторі — число змінних складатиме n (множники Лагранжа $\lambda = p$ зникнуть після підстановки формул $v_i = \dot{q}_i$).

Використання рівняння зв'язку $p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i}$ приводить до варіаційного принципу або у просторі швидкостей (q, v) , якщо виключити імпульси прямою підстановкою, або у фазовому просторі (q, p) , якщо з рівнянь зв'язку виразити швидкості через імпульси та координати. Така процедура зводить пошук траєкторії системи на $2n$ -вимірній гіперповерхні (її розмірність дорівнює розмірності простору станів механічної системи) у $3n$ -вимірному просторі.

Ідея використання множників Лагранжа для модифікації варіаційного принципу є досить простою і відома давно, але її послідовне використання було проведено Діраком³ для аналізу вироджених систем⁴ та пошуку способів їх квантування.

³ Р. А. М. Dirac, 1948.

⁴ Виродженою є система, яка може бути описана або тільки методом Лагранжа, або

3. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП У ПРОСТОРІ ШВИДКОСТЕЙ. Підставимо зв'язок $p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i}$ до формули для функціоналу дії $S_{mod}[q, v, p]$, отриманій в результаті редукований функціонал має вигляд:

$$S_{red}[q, v] = \int_{t_1}^{t_2} L_{red}(q, v, t) dt, \quad L_{red}(q, v, t) = L(q, v, t) + \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} (\dot{q}_i - v_i). \quad (21.5)$$

Для пошуку рівнянь руху будується варіація $S_{red}[q, v]$ з незалежними приростами по координатах та швидкостях у $2n$ -вимірному просторі TQ . Такі варіації належать гіперповерхні у формальному $3n$ -вимірному просторі, з рівняннями $p_i = p_i(q, v, t) = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i}$ (звичайні формули для імпульсів). Варіації цих змінних є залежними — вони виражаються через δq та δv , і враховуються прямою підстановкою імпульсів до інтегралу дії.

Таким чином, варіаційний принцип у просторі швидкостей можна побудувати врахуванням зв'язків на імпульси $p = p(q, v, t)$. Цей підхід було запропоновано К. Ланцошем, а сам варіаційний принцип на основі функціоналу дії (21.5) називається *варіаційним принципом Ланцоша*.

Покажемо, що рівняння руху еквівалентні звичайним рівнянням Лагранжа. Згідно зі стандартним рівнянням Ейлера для екстремалі функціоналу, рівняння для змінних v має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{red}}{\partial \dot{v}_i} \right) = \frac{\partial L_{red}}{\partial v_i} \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} (\dot{q}_j - v_j),$$

якщо матриця з других похідних $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}$ не вироджена, то ці рівняння еквівалентні зв'язкам $\dot{q}_i = v_i$. Аналогічно, для змінних q отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{red}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L_{red}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial v_j} (\dot{q}_j - v_j)$$

Врахування зв'язків $v_i = \dot{q}_i$ дає:

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} \right|_{v=\dot{q}} = \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{v=\dot{q}},$$

що збігається з рівняннями Лагранжа у конфігураційному просторі.

Зазначимо, що еквівалентність отриманих рівнянь руху рівнянням Лагранжа виконується для невиродженої механічної системи, тобто $\det \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \neq 0$. За такої самої умови можлива постановка задачі Коші для рівнянь Лагранжа. Якщо цю умову порушено, то механічна система є виродженою і її опис можна коректно провести тільки у просторі швидкостей (у такому випадку зв'язки $\dot{q}_i = v_i$ порушуються).

Зауваження. Перегрупуваючи доданки, редуковану функцію Лагранжа можна записати так:

$$L_{red}(q, v, t) = \dot{q}_i \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} - \left(v_i \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} - L(q, v, t) \right) = p_i(q, v, t) \dot{q}_i - \mathcal{E}(q, v, t),$$

тільки методом Гамільтона. Характерною ознакою виродженості є

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0 \quad \text{або} \quad \det \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = 0$$

(неможливо провести або пряме, або обернене перетворення Лежандра).

де $\mathcal{E}(q, v, t)$ — енергія. Така формула формально нагадує зв'язок функції Лагранжа (із заміною її на L_{red}) з функцією Гамільтона (енергія \mathcal{E}). Насправді, вираз $L_{red}(q, v, t)$ є перетворенням Лежандра функції Гамільтона по імпульсах. Функція $L_{red}(q, v, t)$ збігається з $L(q, \dot{q}, t)$ при $v_i = \dot{q}_i$. \square

4. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП У ФАЗОВОМУ ПРОСТОРИ. Якщо з формули зв'язку $p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i}$ можна виразити швидкості через координати, імпульси та час, то підстановка $v_i = v_i(q, p, t)$ приводить до запису функціоналу дії у підпросторі $3n$ -вимірному просторі з незалежними змінними (q, p) . Такий підпростір збігається з $2n$ -вимірним фазовим простором. Маємо:

$$S_{red}[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} L_{red}(q, p, t) dt, \quad L_{red}(q, p, t) = [L(q, v, t) + p_i(\dot{q}_i - v_i)]_{v=v(q, p, t)}. \quad (21.6)$$

або, перегруповуючи доданки:

$$L_{red}(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - [p_i v_i - L(q, v, t)]_{v=v(q, p, t)} \equiv p_i \dot{q}_i - H(q, p, t), \quad (21.7)$$

у останньому доданку, згідно з означенням перетворення Лежандра з'являється функція Гамільтона, побудована за вихідною функцією Лагранжа. Редукована функція $L_{red}(q, p, t)$ відрізняється від функції Лагранжа $L(q, v, t)$ тільки тим, що вона виражена у інших змінних. Формально (21.7) є оберненим перетворенням Лежандра від H до L без виконаної підстановки виразів імпульсів через швидкості.

Розглянемо детальніше варіацію функціоналу дії $S_{red}[q, p]$ з незалежними координатами (q, p) . Маємо:

$$\begin{aligned} \delta S_{red}[q, p] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} [\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \delta H(q, p, t)] dt \\ &= p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p_i \dot{q}_i - \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt \\ &= p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt, \end{aligned}$$

де використано умову $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ (у фазовому просторі \dot{q}_i є просто похідною координати, а не швидкістю, остання виражається з рівнянь руху через імпульси). Якщо $\delta q_i(t_{1,2}) = 0$ то з умови $\delta S_{red}[q, p] = 0$ та леми Дюбуа-Реймонда для довільного вибору варіацій δq та δp впливають рівняння Гамільтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

(інформацію про характер залежності H від часу варіаційний принцип не дає, оскільки час не бере участі у варіюванні). Таким чином,

На дійсних траєкторіях системи з фіксованими кінцями функціонал дії у фазовому просторі

$$S_{red}[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt$$

набуває стаціонарного значення.

Зауваження. Підкреслимо, що редукція набору змінних (q, v, p) до (q, p) можлива, якщо рівняння $p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i}$ має розв'язки відносно швидкостей v . Це повторює вимогу застосовності перетворення Лежандра до функції Лагранжа і означає, що $\det \frac{\partial^2 L(q, v, t)}{\partial v_i \partial v_j} \neq 0$.
┘

5. ЕНЕРГІЯ ТА ЧАС ЯК СПРЯЖЕНІ ЗМІННІ. Розглянемо інший параметр еволюції системи τ , означений у вигляді монотонної заміни $t = t(\tau)$. Тоді всі координати автоматично стають функціями нового часу τ після підстановки $q_i(t)|_{t=t(\tau)} := q_i(\tau)$. Після переходу до нової змінної в інтегралі дії отримаємо:

$$S_{red}[q, p] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p_i \frac{dq_i}{d\tau} - H(q, p, t) \right] \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p_i \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} - H(q, p, t) \frac{dt(\tau)}{d\tau} \right] d\tau.$$

У останньому доданку тепер також фігурує похідна по параметру еволюції. Враховуючи схожість цього доданку з попередніми, формально означимо додаткову координату та відповідний узагальнений імпульс:

$$q_{n+1} = t, \quad p_{n+1} = -H,$$

тоді функціонал дії у фазовому просторі можна записати як

$$S_{red}[q, p] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i d\tau, \quad q'_i(\tau) = \frac{dq_i(\tau)}{d\tau}. \quad (21.8)$$

Координати q_1, \dots, q_n та $q_{n+1} = t$ (час) та імпульси p_1, \dots, p_n та $p_{n+1} = -H$ (функція Гамільтона або енергія з оберненим знаком) утворюють розширений фазовий простір розмірності $2n+2$. В ньому геометричні координати та час *формально* виступають як рівноправні змінні. Відмітимо, що енергія системи у такому просторі завжди дорівнює нулю, оскільки підінтегральний вираз записується в термінах імпульсів та диференціалів координат.

У класичній механіці цей факт має суто пізнавальний характер, однак у теорії відносності математична рівноправність часу та геометричних координат покладена до основи теорії як узагальнення експериментальних фактів.

ЛЕКЦІЯ 22

Канонічні перетворення

1.	Постановка проблеми.	361
2.	Клас канонічних перетворень.	362
3.	Твірна функція $F_1(q, q', t)$	365
4.	Твірна функція $F_2(p, q', t)$	365
5.	Твірна функція $F_3(q, p', t)$	366
6.	Твірна функція $F_4(p, p', t)$	367
7.	Висновки.	368
8.	Приклади канонічних перетворень.	368
9.	Матриця переходу для канонічних перетворень.	371

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ. У механіці Лагранжа рівняння руху не змінюють форми при довільному перетворенні координат q конфігураційного простору \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned} \text{координати } q_i &\rightarrow \text{координати } q'_i = q'_i(q, t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} &\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} \right) = \frac{\partial L'}{\partial q'_i}, \end{aligned}$$

де нову функцію Лагранжа можна отримати підстановкою формул перетворення у $L(q, \dot{q}, t)$ та спрощенням виразу. Така властивість використовується для зміни форми функції Лагранжа та вигляду рівнянь руху в бік спрощення, зокрема так можна породжувати циклічні координати, які приводять до інтегралів руху.

Координати фазового простору (q, p) формально є рівноправними. Якщо виконати заміну

$$\begin{cases} q_i = -p'_i, \\ p_i = q'_i, \end{cases} \quad \text{то} \quad \dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i},$$

де $H'(q', p', t) = H(-p, q, t)$. У нових координатах рівняння Гамільтона зберігають форму незважаючи на те, що нова координата за фізичним змістом є імпульсом, а новий імпульс — координатою.

Таким чином, у фазовому просторі також можна говорити про перетворення канонічних змінних (q, p) , у яких беруть участь як координати q , так і імпульси p . Оскільки тепер змінних удвічі більше, то заміну координат $(q, p) \rightarrow (q', p')$ можна задати набором $2n$ співвідношень:

$$\begin{cases} q'_i = q'_i(q, p, t), \\ p'_i = p'_i(q, p, t), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} q_i = q_i(q', p', t), \\ p_i = p_i(q', p', t), \end{cases} \quad (22.1)$$

де старі та нові координати фазового простору є наборами незалежних величин. Якщо закон перетворення функції Гамільтона та форма рівнянь руху у нових координатах відомі, то такими перетвореннями можна скористатись як заміною координат, яка проводиться з метою спрощення аналізу задачі.

У загальному випадку виявляється, що на відміну від рівнянь Лагранжа, які є інваріантними відносно довільних перетворень координат у конфігураційному просторі, рівняння Гамільтона будуть змінювати форму при довільному перетворенні (22.1). Передбачити вигляд рівнянь Гамільтона у нових координатах важко (у кожному конкретному випадку це встановлюється окремо), тому для спрощення аналізу задачі доцільно обмежитись перетвореннями, для яких форма рівнянь руху зберігається. Така вимога означає, що на формули переходу (22.1) слід накласти певні обмеження.

Таким чином, інтерес являють перетворення координат фазового простору, для яких форма рівнянь Гамільтона не змінюється. Такі перетворення називаються *канонічними*.

2. КЛАС КАНОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ. Канонічні перетворення є частинним випадком перетворень заміни координат фазового простору (22.1), для яких рівняння Гамільтона зберігають форму:

$$\begin{array}{lcl} \text{простір} & (q_i, p_i) & \rightarrow (q'_i = q'_i(q, p, t), p'_i = p'_i(q, p, t)), \\ \text{рівняння} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{array} \right. & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \\ \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i}. \end{array} \right. \end{array}$$

Основна задача аналізу перетворень координат розбивається на дві частини: 1) пошук критерію виділення класу канонічних перетворень; 2) пошук закону зміни функції Гамільтона в результаті такого перетворення.

Для визначення умов, які має задовольняти канонічне перетворення, можна запропонувати два підходи:

- 1) буквально виконати заміну координат (22.1) у самих рівняннях руху (як це було зроблено раніше у рівняннях Лагранжа) і вимагати збереження їх форми. Це приведе до низки обмежень на матрицю переходу перетворення координат $(q, p) \rightarrow (q', p')$;
- 2) закласти умову незмінності до більш загальної конструкції — варіаційного принципу, який породжує рівняння руху способом, який не залежить від способу вибору координат фазового простору. Якщо після перетворення форма принципу Гамільтона у фазовому просторі не змінюється, то рівняння руху автоматично збігатимуться з рівняннями Гамільтона.

У класичній механіці користуються другим способом для встановлення критерію канонічності перетворення, і не тільки тому, що він зручний у застосуванні. Виявляється, що канонічні перетворення можна побудувати специфічним способом, у якому основним поняттям є не набір формул переходу, а деяка загальна процедура, яка їх породжує.

Таким чином, будемо вважати, що перетворення є канонічним, якщо у координатах (q, p) та (q', p') форма варіаційного принципу однакова:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0, \\ \delta q_i(t_{1,2}) = 0, \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta \int_{t_1}^{t_2} [p'_i \dot{q}'_i - H'(q', p', t)] dt = 0, \\ \delta q'_i(t_{1,2}) = 0, \end{array} \right. \quad (22.2)$$

рівняння руху будуть автоматично зберігатись, оскільки на вибір координат фазового простору у варіаційному принципі не накладається жодних обмежень (крім незалежності).

Віднімаючи рівності з варіаціями інтегралів, отримаємо:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [(p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) - (p'_i \dot{q}'_i - H'(q', p', t))] dt = 0,$$

де вважається, що вираз під інтегралом записано в одних змінних¹ (q, p) або (q', p') . У загальному випадку така рівність можлива, якщо вираз під варіацією є функцією координат q та q' у початковий та кінцевий моменти часу, які фіксовані згідно з умовами варіаційного принципу, а також самих цих моментів часу:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(p_i \dot{q}_i - H) - (p'_i \dot{q}'_i - H')] dt = \Phi(q(t_{1,2}), q'(t_{1,2}), t_{1,2}).$$

Далі, моменти часу $t_{1,2}$ є незалежними і їх можна бути вибрати довільно, тому вираз $\Phi(q(t_{1,2}), q'(t_{1,2}), t_{1,2})$ має розпадатись на два доданки, один з яких залежить від $(q(t_1), q'(t_1), t_1)$, а другий — від $(q(t_2), q'(t_2), t_2)$. У загальному випадку цей вираз можна записати як інтеграл від повної похідної по часу від довільної функції координат q та q' :

$$\Phi(q(t_{1,2}), q'(t_{1,2}), t_{1,2}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q, q', t)}{dt} dt.$$

Функція F спільна для обох моментів часу через симетрію $t_1 \leftrightarrow t_2$. Тоді, у силу довільності вибору меж інтегрування $t_{1,2}$ отримаємо:

$$[p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] - [p'_i \dot{q}'_i - H'(q', p', t)] = \frac{dF(q, q', t)}{dt} \quad (22.3)$$

(вважаємо, що ліву частину рівності записано у змінних (q, q') за допомогою підстановки необхідних формул переходу). Це і є умова, яку повинні задовольняти

¹ Для цього можна виконати підстановку прямих $q'(q, p)$ та $p'(q, p)$, або обернених $q(q', p')$ та $p(q', p')$ формул переходу відповідно.

формули переходу (22.1) канонічного перетворення — їх підстановка до лівої частини рівності (22.3) повинна приводити до виразу, що зводиться до повної похідної по часу.

На умову канонічності (22.3) можна дивитись інакше (читаючи навпаки): якщо відомо функцію під повною похідною по часу у правій частині, то формули канонічного перетворення у вигляді заміни координат (22.1) можна побудувати, аналізуючи це співвідношення.

Функція $F(q, q', t)$ називається *твірною функцією канонічного перетворення*, її назва і зумовлена тим, що з виразу (22.3) можна побудувати канонічне перетворення $q(q', p')$, $p(q', p')$ та знайти $H'(q', p', t)$, задавши *абсолютно довільну* функцію $F(q, q', t)$ ².

Відмітимо, що залежність твірної функції саме від координат є досить умовною. Перетворюючи ліву частину рівності, виділяючи повні диференціали, можна досягти того, що аргументами твірної функції можуть бути довільні $2n$ величин з набору (q, p, q', p') .

З іншого боку, формально у обох частинах рівності (22.3) фігурують $4n+1$ аргументи, які зв'язані $2n$ рівностями — формулами переходу (22.1). Якщо виключити частину змінних підстановкою виразів (22.1) (частини прямих, та частини обернених формул переходу), то загальна кількість змінних буде складати $2n+1$ — довільна вибірка $2n$ величин з набору (q, p, q', p') та час t . Вони і будуть аргументами твірної функції.

Співвідношення (22.3) дає інформацію про перетворення тоді, коли частина аргументів твірної функції відноситься до старих змінних (q, p) , а інша — до нових. У загальному випадку твірна функція має структуру:

$$F = F(\langle n \text{ аргументів з набору } (q, p) \rangle, \langle n \text{ аргументів з набору } (q', p') \rangle, t).$$

Найпростіші варіанти запису твірної функції можна отримати у випадку, коли її аргументи є наборами однотипних змінних — всіх координат q та всіх координат q' тощо. Замінюючи по чергово координати на імпульси, отримуємо основні форми твірних функцій:

$$F_1 = F_1(q, q', t), \quad F_2 = F_2(p, q', t), \quad F_3 = F_3(q, p', t), \quad F_4 = F_4(p, p', t). \quad (22.4)$$

Якщо вибрати тип твірної функції (фіксуючи набір її аргументів), то формули переходу буде неявно закладено до співвідношень (22.3).

Таким чином, аналіз виразу (22.3) дозволяє відбудувати формули переходу (22.1) для заданої твірної функції. Це означає, що *канонічне перетворення повністю визначається твірною функцією* — у цій властивості і проявляється специфіка опису канонічних перетворень.

Зауваження. Відмітимо, що комбінація $p_i \dot{q}_i - H$ за формою збігається з оберненим перетворенням Лежандра, яке відповідає переходу від функції Гамільтона до функції Лагранжа, але без виконаної підстановки виразів імпульсів через швидкості, тобто функція

$$L(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$$

² На форму твірної функції існують деякі обмеження суто технічного характеру (наприклад, диференційовність).

є функцією Лагранжа, що виражена через імпульси. Умова канонічності означає, що

$$L(q, p, t) - L'(q', p', t) = \frac{dF}{dt}.$$

У деякому розумінні канонічні перетворення є формальним узагальненням калібрувальних перетворень, однак суттєво відрізняються від останніх за змістом. \lrcorner

Зауваження*. Із того, що варіаційний принцип $\delta S[q, p] = 0$ переходить у $\delta S'[q', p'] = 0$ насправді впливає більш загальна умова:

$$\int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt - c \int_{t_1}^{t_2} [p'_i \dot{q}'_i - H'(q', p', t)] dt = \Phi(q(t_{1,2}), q'(t_{1,2}), t_{1,2}),$$

де c — деяка стала, і, відповідно

$$[p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] - c[p'_i \dot{q}'_i - H'(q', p', t)] = \frac{dF}{dt}.$$

Стала c завжди відмінна від нуля, оскільки вираз $p_i dq_i - H(q, p, t) dt$ не зводиться до повного диференціалу. Канонічні перетворення з $c = 1$ найбільш поширені. \lrcorner

Встановимо зв'язок між формулами заміни координат (22.1) та найбільш поширеними формами твірних функцій.

3. ТВІРНА ФУНКЦІЯ $F_1(q, q', t)$. Розглянемо твірну функцію типу $F_1 = F_1(q, q', t)$, і запишемо тотожність (22.3) у вигляді диференціалів:

$$p_i dq_i - p'_i dq'_i + (H' - H) dt = dF_1(q, q', t) \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Порівнюючи коефіцієнти при диференціалах dq , dq' та dt у правій та лівій частині, отримуємо:

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial q'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial t}. \quad (22.5)$$

Співвідношення (22.5) повністю визначають канонічне перетворення як заміну координат (q, p) .

Для запису канонічного перетворення у явній формі потрібно вказати формули заміни координат та функцію Гамільтона у нових змінних. Для цього можна використати такий алгоритм:

- 1) виражаємо $q_i = q_i(q', p', t)$ з рівності $p'_i = -\frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial q'_i}$;
- 2) підставляємо знайдені вирази до правої частини рівності $p_i = \frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial q_i}$ і знаходимо $p_i = p_i(q', p', t)$;
- 3) знаходимо нову функцію Гамільтона H' підстановкою формул переходу до третього співвідношення (22.5), яке у розгорнутій формі має вигляд:

$$H'(q', p', t) = \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial t} \right]_{q=q(q', p', t), p=p(q', p', t)}.$$

Тепер, знаючи вираз для функції Гамільтона у нових координатах, можна записати стандартні рівняння Гамільтона і продовжити аналіз руху механічної системи в нових координатах.

4. ТВІРНА ФУНКЦІЯ $F_2(p, q', t)$. Для виділення твірної функції такого типу перетворимо співвідношення

$$p_i dq_i - p'_i dq'_i + (H' - H) dt = dF_1(q, q', t)$$

так, щоб у лівій частині фігурували диференціали аргументів $F_2(p, q', t)$:

$$-q_i dp_i - p'_i dq'_i + (H' - H) dt = d[F_1(q, q', t) - p_i q_i]$$

зі структури диференціалів видно, що у правій частині записано диференціал функції, що залежить від p, q', t . Позначимо її $F_2(p, q', t)$, тоді:

$$-q_i dp_i - p'_i dq'_i + (H' - H) dt = \frac{\partial F_2}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F_2}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt.$$

Порівнюючи множники при диференціалах у обох частинах рівності, знайдемо:

$$q_i = -\frac{\partial F_2(p, q', t)}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_2(p, q', t)}{\partial q'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (22.6)$$

Отримані співвідношення задають канонічне перетворення з твірною функцією $F_2(p, q', t)$, яке будується аналогічно розглянутому вище перетворенню F_1 :

- 1) виражаємо $p_i = p_i(q', p', t)$ з неявного рівняння $p'_i = -\frac{\partial F_2(p, q', t)}{\partial q'_i}$;
- 2) підставляємо знайдені вирази до правої частини рівності $q_i = -\frac{\partial F_2(p, q', t)}{\partial p_i}$ і знаходимо $q_i = q_i(q', p', t)$;
- 3) знаходимо нову функцію Гамільтона H' :

$$H'(q', p', t) = \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F_2(p, q', t)}{\partial t} \right]_{q=q(q', p', t), p=p(q', p', t)}.$$

Зауваження. Перетворення з твірною функцією F_2 можна отримати уявною підстановкою формул переходу (22.1) в основне співвідношення (22.3) так, щоб незалежними змінними були (p, q', t) .

Однак спосіб, за допомогою якого було побудоване канонічне перетворення з функцією F_2 , з точністю до знаку може розглядатись як перетворення Лежандра функції F_1 . Дійсно, перехід виконується заміною набору змінних та функції за правилом

$$\begin{aligned} (q, q', t) &\rightarrow (p, q', t) \\ F_1(q, q', t) &\rightarrow [-F_2(p, q', t)] = p_i q_i - F_1(q, q', t) \end{aligned}$$

з підстановкою $q_i = q_i(p, q', t)$ як розв'язку рівняння $p_i = \frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial q_i}$.

Відмітимо, така інтерпретація можлива, якщо перетворення Лежандра існує, тобто рівняння $p_i = \frac{\partial F_1(q, q', t)}{\partial q_i}$ має розв'язок відносно q . За теоремою про неявну функцію це означає, що матриця $\frac{\partial^2 F_1(q, q', t)}{\partial q_i \partial q_j}$ є невідродженою. \square

5. ТВІРНА ФУНКЦІЯ $F_3(q, p', t)$. Як і для твірної функції F_2 , розглянемо перетворення Лежандра функції $F_1(q, q', t)$ по змінних q' , перетворюючи вираз із диференціалами:

$$p_i dq_i + q'_i dp'_i + (H' - H) dt = d[F_1(q, q', t) + p'_i q'_i],$$

У правій частині записано диференціал функції $F_3(q, p', t)$, який можна отримати після формальної підстановки $q'_i = q'_i(q, p', t)$ як розв'язків рівняння $p'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q'_i}$.

Тоді,

$$p_i dq_i + q'_i dp'_i + (H' - H) dt = \frac{\partial F_3}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_3}{\partial p'_i} dp'_i + \frac{\partial F_3}{\partial t} dt,$$

звідки

$$p_i = \frac{\partial F_3(q, p', t)}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_3(q, p', t)}{\partial p'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (22.7)$$

Алгоритм побудови перетворення аналогічний до попереднього:

- 1) виражаємо $q_i = q_i(q', p', t)$ з неявного рівняння $q'_i = \frac{\partial F_3(q, p', t)}{\partial p'_i}$;
- 2) підставляємо знайдені вирази до правої частини рівності $\frac{\partial F_3(q, p', t)}{\partial q_i}$ і знаходимо $q_i = q_i(q', p', t)$;
- 3) знаходимо нову функцію Гамільтона H' :

$$H'(q', p', t) = \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F_3(q, p', t)}{\partial t} \right]_{q=q(q', p', t), p=p(q', p', t)}.$$

6. ТВІРНА ФУНКЦІЯ $F_4(p, p', t)$. Останню твірну функцію отримаємо двократним перетворенням Лежандра функції F_1 :

$$-q_i dp_i + q'_i dp'_i + (H' - H) dt = d[F_1(q, q', t) - p_i q_i + p'_i q'_i],$$

у правій частині виникає функція $F_4(p, p', t) = F_1(q, q', t) - p_i q_i + p'_i q'_i$ після підстановки $q_i = q_i(p, p', t)$ та $p_i = p_i(p, p', t)$ як розв'язків системи рівнянь $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ та $p'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q'_i}$. Тоді,

$$-q_i dp_i + q'_i dp'_i + (H' - H) dt = \frac{\partial F_4}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F_4}{\partial p'_i} dp'_i + \frac{\partial F_4}{\partial t} dt,$$

звідки отримаємо:

$$q_i = -\frac{\partial F_4(q, p', t)}{\partial p_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_4(q, p', t)}{\partial p'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (22.8)$$

Алгоритм використання той самий:

- 1) виражаємо $p_i = p_i(q', p', t)$ з неявного рівняння $q'_i = \frac{\partial F_4(q, p', t)}{\partial p'_i}$;
- 2) підставляємо знайдені вирази у праву частину рівності $q_i = -\frac{\partial F_4(q, p', t)}{\partial p_i}$ і знаходимо $q_i = q_i(q', p', t)$;
- 3) знаходимо нову функцію Гамільтона H' :

$$H'(q', p', t) = \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F_4(q, p', t)}{\partial t} \right]_{q=q(q', p', t), p=p(q', p', t)}.$$

7. Висновки. Для побудови канонічного перетворення досить задання твірної функції, яка залежить від n старих координат фазового простору, n нових координат та часу. Правила, за якими по заданій твірній функції будується канонічне перетворення як заміна координат (q, p) , можна встановити однозначно для кожного типу твірної функції.

З формул (22.5) – (22.8) легко помітити наступні закономірності:

- у формулах, які зв'язують твірну функцію із перетворенням координат, одна канонічна змінна завжди виражається через похідну твірної функції по канонічно спряженій змінній того самого набору (старих чи нових координат фазового простору);
- якщо твірна функція залежить від координати q_α (або імпульсу p_α), то відповідне рівняння матиме вигляд

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \quad \left(\text{або} \quad q_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right);$$

- якщо твірна функція залежить від координати q'_α (або імпульсу p'_α), то відповідне рівняння матиме вигляд

$$p'_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial q'_\alpha} \quad \left(\text{або} \quad q'_\alpha = \frac{\partial F}{\partial p'_\alpha} \right).$$

Ці правила зручні для загального випадку, коли твірна функція залежить не від всього набору старих координат чи імпульсів, а від частини координат q та імпульсів p — всього n змінних (це стосується і нових координат та імпульсів).

Зауваження. Досить запам'ятати формулу $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ для функції $F_1(q, q', t)$, інші твірні функції мають інші аргументи, по яких здійснюється диференціювання для побудови формул перетворень. Якщо у формулі F_1 замінити місцями спряжені змінні (по одній здійснюється диференціювання, іншу виражаємо), то у формулі зміниться знак. Якщо замінити старі спряжені змінні на нові (додати штрихи), то вираз також змінить знак. ▮

У більшості випадків одне і те саме канонічне перетворення можна описати цілим набором твірних функцій, які виражаються одна через іншу за допомогою перетворення Лежандра по кількох змінних. Кількість різних твірних функцій залежить від існування відповідних перетворень Лежандра.

Зауваження. Можна отримувати різні типи твірних функцій, комбінуючи у їх аргументах набори старих та нових змінних. Загальна кількість різних твірних функцій буде 4^n , де n — число ступенів вільності системи. Наприклад, для вільної частинки їх буде 64 типи. \square

8. ПРИКЛАДИ КАНОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ. Розглянемо спочатку елементарні приклади твірних функцій, деякі з яких відповідають перетворенням загального характеру.

Приклад 1. Елементарні твірні функції.

- 1) $F_3(q, p') = q_i p'_i$ описує тотожне перетворення $q_i = q'_i$, $p_i = p'_i$. Відмітимо, що таке перетворення не можна записати за допомогою твірної функції F_1 , оскільки рівняння $q'_i = \frac{\partial F_3}{\partial p'_i}$ є тотожністю, яка не має розв'язків відносно p'_i (які потрібні для запису перетворення Лежандра $F_3 \rightarrow F_1$);
- 2) $F_3(q, p') = p'_i \varphi_i(q)$ (φ_i — деякі функції) описує точкову заміну координат у конфігураційному просторі: $q'_i = \varphi_i(q)$, $p'_i = p_j \frac{\partial \varphi_j(q)}{\partial q_i}$. Це означає, що точкові перетворення координат у конфігураційному просторі є частинними випадками канонічних перетворень;
- 3) $F_2(p, q') = -p_i \varphi_i(q')$ також описує точкову заміну координат у конфігураційному просторі, але в інших позначеннях;
- 4) $F_1(q, q') = q_i q'_i$ описує перетворення заміни імпульсів на координати: $p_i = q'_i$, $p'_i = -q_i$;
- 5) $F_4(p, p') = p_i p'_i$ описує те саме перетворення, що $F_1(q, q') = q_i q'_i$ (твірні функції пов'язані перетворенням Лежандра і задають одне канонічне перетворення);
- 6) $F_3(q, p') = q_i p'_i - f(q, t)$ відповідає формулам $q'_i = q_i$, $p'_i = p_i - \frac{\partial f}{\partial q_i}$. Для з'ясування змісту такого перетворення розглянемо зміну функції Лагранжа:

$$L - L' = \frac{dF_1}{dt},$$

переходячи до твірної функції F_3 за допомогою перетворення Лежандра $[-F_1] = F_3 - q'_i p'_i$ отримаємо:

$$L - L' = -\frac{d}{dt}(F_3 - q'_i p'_i) = -\frac{d}{dt}[q_i p'_i - q'_i p'_i - f(q, t)] = \frac{d}{dt} f(q, t),$$

оскільки $q_i = q'_i$ при такому перетворенні. Таким чином, це перетворення відповідає калібрувальному перетворенню у конфігураційному просторі.

Приклад 2. Для одновимірного гармонічного осцилятора з функцією Гамільтона

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

побудувати канонічне перетворення, яке описується твірною функцією

$$F_1(x, x') = \alpha x^2 \operatorname{ctg} x'$$

(α — вільний параметр, який слід підбирати для спрощення H').

◀ Із формул (22.5) маємо:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2\alpha x \operatorname{ctg} x', \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial x'} = \frac{\alpha x^2}{\sin^2 x'}.$$

Виражаючи з другої рівності x та виконуючи підстановку отриманого результату в першу, отримуємо формули заміни координат:

$$x = \sqrt{\frac{p'}{\alpha}} \sin x', \quad p = 2\sqrt{\alpha p'} \cos x'.$$

Функція Гамільтона у нових координатах має вигляд:

$$H'(x', p') = \frac{m\omega^2 p'}{2\alpha} \left[\frac{4\alpha^2}{m^2\omega^2} \cos^2 x' + \sin^2 x' \right].$$

Якщо покласти $\alpha = \frac{m\omega}{2}$, то

$$H'(x', p') = \omega p'.$$

нова функція Гамільтона простіша, ніж $H(x, p)$, тому що залежить тільки від імпульсу. Рівняння руху мають вигляд:

$$\dot{x}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \omega, \quad \dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial x'} = 0.$$

Розв'язки які легко знайти елементарним шляхом, мають вигляд:

$$x' = \omega t + x'_0, \quad p' = p'_0, \quad \text{де } x'_0 = \text{const та } p'_0 = \text{const}.$$

У координатах (x, p) розв'язок можна отримати підстановкою значень нових координат до формул переходу:

$$x = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin(\omega t + x'_0), \quad p = 2\sqrt{\frac{m\omega p'_0}{2}} \cos(\omega t + x'_0).$$

Фізичний зміст нової змінної x' очевидний з останньої рівності — це початкова фаза коливань. Новий імпульс p' виражається через енергію. ▶

Із наведеного прикладу зрозумілий сенс проведення канонічного перетворення — у нових координатах функція Гамільтона помітно спрощується і розв'язок рівнянь руху можна знайти досить елементарно. Для отримання розв'язку у старих координатах використовуються формули оберненого перетворення. Це означає, що розв'язок задачі частково підмінюється на заміну координат.

Зауваження. Із розглянутих прикладів легко бачити, що фазовий простір значно ширший за конфігураційний. Дійсно, після канонічного перетворення у прикладі 2 функція Гамільтона змінюється як

$$2H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \rightarrow H' = \omega p'.$$

Для функції H' , на відміну від H , на можна побудувати перетворення Лежандра, а отже й означити функцію Лагранжа. Однак це не означає, що механічна система стає

виродженою. Простір, який еквівалентний конфігураційному простору є підпростором у фазовому просторі, за допомогою канонічного перетворення можна означити нові змінні у системі так, що для них не буде аналога у механіці Лагранжа. Це можна пояснити простою геометричною аналогією. Нехай задано двовимірний вектор у площині $\vec{a} = (a_1, a_2)$, про перетворення поворотів у площині сам вектор як геометричний об'єкт не змінюватиметься і буде описуватись новими компонентами (a'_1, a'_2) . Площина є підпростором тривимірного простору, де той самий вектор задається трьома компонентами $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$, одна у тривимірному просторі задано перетворення, в результаті яких у описі вектора з'явиться відмінна від нуля третя компонента, для якої немає відповідника у плоских координатах, хоча при цьому вектор як геометричний об'єкт не зміниться.

Аналогічна ситуація у формалізмі Гамільтона. У конфігураційному просторі імпульси є допоміжними об'єктами і не беруть участі у перетвореннях, тоді як у фазовому є незалежними координатами (аналог третьої компоненти двовимірного вектора, яка може змінитись після перетворення). У просторі вищої розмірності більше можливостей перетворень, а тому й більше властивостей геометричних об'єктів. \square

Задача 22.1. Побудувати канонічне перетворення, яке описує перетворення Галілея у декартових координатах для функції Гамільтона вільної частинки.

9. МАТРИЦЯ ПЕРЕХОДУ ДЛЯ КАНОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ. Канонічне перетворення є заміною координат у фазовому просторі з матрицею переходу

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q', p')} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial q'} & \frac{\partial p}{\partial q'} \\ \frac{\partial q}{\partial p'} & \frac{\partial p}{\partial p'} \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial(q', p')}{\partial(q, p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial p'}{\partial q} \\ \frac{\partial q'}{\partial p} & \frac{\partial p'}{\partial p} \end{pmatrix},$$

де $\frac{\partial q}{\partial q'}$ позначає матрицю, утворену з похідних $\frac{\partial q_i}{\partial q'_j}$ тощо.

Вимога збереження форми рівнянь Гамільтона виділяє канонічні перетворення як клас замін координат і накладає певні обмеження на матрицю перетворення, які можна знайти за допомогою формул (22.5)–(22.8). Для спрощення будемо вважати, що дане канонічне перетворення може бути описане за допомогою будь-якої твірної функції типу F_1, \dots, F_4 . Диференціюючи повторно співвідношення (22.5) для функції F_1 та використовуючи симетрію других похідних, отримаємо:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q'_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial q'_j} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial q'_i} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q'_i \partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial q'_i},$$

Далі, якщо перетворення можна записати у термінах твірної функції $F_2(p, q', t)$, то аналогічна процедура дає:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q'_j \partial p_i} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_i \partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial p_j \partial q'_i} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial q'_i \partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial q'_i},$$

у обох випадках отримано пари ідентичних співвідношень. Записуючи аналогічні співвідношення для функції F_3 та F_4 , будемо одержувати аналогічні результати, тому, основними обмеженнями на матрицю переходу будуть отримані вище рівності та обернені до них:

$$\frac{\partial p'_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial q'_i}, \quad \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial p'_i}, \quad \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial q'_i}, \quad \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial p'_i}. \quad (22.9)$$

У термінах матриці переходу в цілому це означає, що

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q', p')} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial q'} & \frac{\partial p}{\partial q'} \\ \frac{\partial q}{\partial p'} & \frac{\partial p}{\partial p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p'}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial q'}{\partial p}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial p'}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial q'}{\partial q}\right)^T \end{pmatrix} \quad (22.10)$$

Можна показати, що співвідношення (22.9) мають більш універсальний характер і виконуються для канонічних перетворень, які задано твірними функціями довільної структури.

Формули (22.9) можна використовувати як критерій канонічності перетворення:

Перетворення є канонічним, якщо має місце одна з двох властивостей:

- *перетворення можна описати за допомогою твірної функції;*
- *для перетворення координат $(q, p) \rightarrow (q', p')$ виконуються співвідношення (22.9).*

У випадку, коли до закону перетворення не входить час, перетворення функції Гамільтона можна отримати підстановкою формул заміни координат фазового простору. Якщо ж канонічне перетворення явно залежить від часу, то для побудови функції Гамільтона у нових координатах потрібне знання твірної функції, тому другий критерій канонічності перетворення є вужчими за можливостями застосування, ніж спосіб опису за допомогою твірної функції.

Матриця переходу канонічного перетворення задовольняє просту властивість, аналогічну до матриці переходу ортогонального перетворення.

Для канонічного перетворення $\frac{\partial(q, p)}{\partial(q', p')} = 1$.

□ Для доведення скористаємось властивостями якобіана. Оскільки він є визначником, то з правила множення визначників та формули диференціювання складної функції випливає

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q', p')} = \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, p')} \frac{\partial(q, p')}{\partial(q', p')}$$

(як для звичайних похідних). Якобіан із однаковими аргументами можна редукувати до матриці меншої розмірності:

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q, p')} = \frac{\partial(p)}{\partial(p')} = \det \left(\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \right), \quad \frac{\partial(q, p')}{\partial(q', p')} = \frac{\partial(q)}{\partial(q')} = \det \left(\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right)$$

(позадіагональні блоки є нульовими матрицями, один з діагональних блоків — одинична матриця). Для матриці переходу, яка описує канонічне перетворення як заміну координат має місце зв'язок $\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}$, тому $\frac{\partial(q, p)}{\partial(q', p')} = 1$. ■

ЛЕКЦІЯ 23

Дужки Пуассона. Теорема та рівняння Ліувілля

1.	Означення дужок Пуассона.	373
2.	Математичні властивості дужок Пуассона.	373
3.	Дужки Пуассона та інтеграли руху.	375
4.	Дужки Пуассона та канонічні перетворення.	377
5.	Нескінченно малі канонічні перетворення.	378
6.	Нескінченно малі канонічні перетворення та варіаційний принцип.	380
7.	Теорема Ліувілля.	382
8.	Рівняння Ліувілля.	383

1. Означення дужок Пуассона. Дужки Пуассона є формальною комбінацією з похідними двох функцій, яка природно виникає у виразі похідної по часу від функції механічного стану $F(q, p, t)$:

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Використовуючи рівняння Гамільтона для похідних, отримаємо:

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Вираз із похідними по координатах та імпульсах у правій частині досить часто виникає у класичній механіці. З метою скорочення запису формул для нього вводять спеціальне позначення, яке називається дужками Пуассона.

У загальному випадку *дужками Пуассона* для функцій механічного стану $A(q, p, t)$ та $B(q, p, t)$ називається комбінація з першими похідними:

$$[A, B] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right). \quad (23.1)$$

Формула для похідної по часу може бути записана за допомогою такого позначення у більш компактному вигляді:

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial F(q, p, t)}{\partial t} + [F(q, p, t), H], \quad (23.2)$$

де у правій частині виникають дужки Пуассона для функцій F та H .

2. Математичні властивості дужок Пуассона. Розглянемо прості властивості дужок Пуассона, які впливають безпосередньо з їх означення.

- 1) **Лінійність по аргументах.** Вираз (23.1) є лінійним відносно похідної першого порядку по кожному аргументу. Тому, якщо один з них розбити на кілька доданків, то дужки Пуассона також розпадуться на відповідну кількість доданків:

$$[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B], \quad (23.3)$$

у справедливості такого розкладу можна переконатись безпосередньою підстановкою $A = A_1 + A_2$ до означення;

- 2) **антисиметричність.** Із означення безпосередньо випливає, що

$$[A, B] = -[B, A] \quad (23.4)$$

(доданки міняються місцями після заміни $A \leftrightarrow B$);

- 3) **формула Лейбніца.** Якщо один з аргументів є добутком інших функцій, то

$$[A_1 A_2, B] = A_1 [A_2, B] + [A_1, B] A_2, \quad (23.5)$$

те саме виконується і для другого аргументу. Для доведення потрібно виконати підстановку $A = A_1 A_2$ і скористатись формулою Лейбніца для похідної добутку при перетворенні похідних по q та p ;

- 4) **тотожність Якобі.** Для повторних підстановок у дужки Пуассона виконується тотожність:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (23.6)$$

другий та третій доданки є циклічними перестановками функцій A, B, C . Доведення цієї властивості також безпосереднє, комбінація з похідними виходить рівною нулю за рахунок скорочень.

Зауваження. Відмітимо, що властивості лінійності, антисиметричності та тотожність Якобі для дужок Пуассона формально мають такий же вигляд, що і для векторного добутку. Насправді такий зв'язок має фундаментальний характер і встановлюється в теорії груп неперервних перетворень. \square

Зручність використання дужок Пуассона у класичній механіці полягає в тому, що вони включають саме такі похідні, які виникають під час проміжних обчислень у гамільтоновій формі механіки. Відносно кожного аргументу дужки Пуассона є похідною першого порядку по всіх змінних, тому у деякому розумінні дужки Пуассона можна інтерпретувати як узагальнення диференціювання по координатах фазового простору (тобто дужки Пуассона задовольняють загальні властивості похідної для кожного аргументу).

Так само, як і для похідної у математичному аналізі, дужки Пуассона задовольняють прості тотожності, які можна використати для зведення обчислення дужок до більш простих процедур. Зокрема, використання властивостей лінійності та формули Лейбніца зводить пошук дужок Пуассона від складного аргументу до операцій з його частиною. Крім того, легко отримати аналог формули для похідної складної функції: якщо $A(q, p, t)$ та $B(q, p, t)$ — функції механічного стану, то для довільної функції $f(A)$ маємо, згідно з властивостями похідної:

$$[f(A), B] = \frac{\partial f(A)}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial f(A)}{\partial p_i} = \frac{df(A)}{dA} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) = \frac{df(A)}{dA} [A, B],$$

тобто правило диференціювання суперпозиції успадковується дужками Пуассона. Легко довести узагальнення цієї формули для m аргументів:

$$[f(A_1, \dots, A_m), B] = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial A_k} [A_k, B]. \quad (23.7)$$

Як і для звичайної похідної, обчислення довільних дужок Пуассона за допомогою правил диференціювання можна звести до найпростіших дужок, які відіграватимуть роль табличних. Найпростішими аргументами є самі координати та імпульси. Для двох координат дужки мають вигляд:

$$[q_i, q_j] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = 0,$$

оскільки координати та імпульси є взаємно незалежними величинами, то похідна координати по імпульсу дорівнює нулю. Аналогічно обчислюються дужки з двома імпульсами. У випадку аргументів різного типу отримаємо:

$$[q_i, p_j] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

Таким чином,

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}. \quad (23.8)$$

Дужки Пуассона (23.8) називається *фундаментальними*. Відмітимо, до дужки імпульс-координата відмінні від нуля тільки для величин з однаковими індексами, тобто для спряжених змінних.

Обчислення будь-яких дужок Пуассона можна звести до фундаментальних. Зокрема, якщо одним з їх аргументів є координата чи імпульс, то згідно з формулою диференціювання складної функції маємо:

$$\begin{aligned} [q_i, f(q, p)] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} [q_i, q_k] + \frac{\partial f}{\partial p_k} [q_i, p_k] \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_k} \delta_{ik} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ [p_i, f(q, p)] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} [p_i, q_k] + \frac{\partial f}{\partial p_k} [p_i, p_k] \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_k} \delta_{ik} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Для частинного випадку $f = H$ у правій частині з'являються похідні функції Гамільтона по канонічних змінних, які згідно з рівняннями руху є похідними імпульсів та координат по часу. Таким чином, канонічні рівняння Гамільтона можна записати в термінах дужок Пуассона у простій та компактній формі:

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H] \quad (23.10)$$

(те саме впливає із загальної формули для похідної (23.2)).

Задача 23.1. Довести формули:

$$[x_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad [p_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad [L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k,$$

де ε_{ijk} — тензор Леві-Чивіта, x_i та p_i — декартові координати та компоненти імпульсу частинки, L_i — декартові компоненти моменту імпульсу.

Вказівка: скористатись представленням для векторного добутку $L_k = (\vec{r} \times \vec{p})_k = \varepsilon_{ijk} x_i p_j$ та властивостями тензора Леві-Чивіта.

3. Дужки Пуассона та інтеграли руху. У класичній механіці за допомогою дужок Пуассона можна коротко записувати досить громіздкі співвідношення з похідними¹.

У першу чергу можна дати інше означення інтегралів руху: якщо функція $I(q, p, t)$ є інтегралом руху, то $\frac{dI}{dt} = 0$, або, використовуючи (23.2),

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + [I, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad [I, H] = -\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Найбільш простої форми це співвідношення набуває для інтегралу руху, що явно не залежить від часу:

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad [I, H] = 0 \text{ при } I = I(q, p). \quad (23.11)$$

Умову $[I, H] = 0$ у багатьох випадках можна отримати суто алгебраїчним шляхом (згідно з правилами обчислень дужок Пуассона), що технічно простіше, ніж безпосередній пошук похідної по часу.

Таким чином, можна сформулювати простий критерій:

Функція механічного стану $I = I(q, p)$ є інтегралом руху, якщо її дужки Пуассона з функцією Гамільтона дорівнюють нулю.

Зокрема, якщо $H = H(q, p)$, то автоматично $[H, H] = 0$ і зберігатиметься енергія, що збігається з функцією Гамільтона:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] \equiv 0, \quad \text{якщо } H \neq H(t).$$

Отриманий критерій має цікавий формальний наслідок:

Якщо функції механічного стану $A = A(q, p)$ та $B = B(q, p)$ є інтегралами руху, то їх дужки Пуассона $[A, B]$ також є інтегралом руху.

□ Дійсно, оскільки A та B — інтеграли руху, що не залежать від часу, то

$$\frac{dA}{dt} = [A, H] = 0, \quad \frac{dB}{dt} = [B, H] = 0.$$

Похідна по часу від $[A, B]$ має вигляд:

$$\frac{d}{dt} [A, B] = [[A, B], H] = -[[B, H], A] - [[H, A], B] = 0,$$

¹ Це виявляється у тому, що частина обчислень передбачається структурою виразу для дужки Пуассона і виконується автоматично.

де використано тотожність Якобі. ■

Доведена властивість формально дозволяє отримувати нові інтеграли руху із вже відомих. Відмітимо, що її практичне використання насправді являє обмежений інтерес. Досить часто новий інтеграл руху $[A, B]$, що будується з дужок Пуассона для інтегралів руху A та B , має вигляд комбінації інтегралів руху A та B і зводиться до констатації тривіального факту, що комбінація констант є константою.

Зауваження. Наведемо приклад ефективного використання цієї властивості. Як відомо, дужки Пуассона для двох компонент моменту імпульсу є третьою компонентою моменту: $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$. Тому, якщо дві компоненти вектора \vec{L} є інтегралами руху, то автоматично і третя компонента є інтегралом руху.

Звідси також випливає, що у вектора \vec{L} можуть зберігатись одна або всі компоненти (або не зберігається жодна). ┘

4. Дужки Пуассона та канонічні перетворення. Найбільш корисним є використання дужок Пуассона для дослідження канонічних перетворень. Доведемо твердження:

Фундаментальні дужки Пуассона не змінюються в результаті канонічних перетворень у фазовому просторі.

□ Розглянемо деяке канонічне перетворення, що відповідає заміні координат у фазовому просторі $(q, p) \rightarrow (q', p')$. Використовуючи доведені раніше властивості матриці переходу канонічного перетворення як заміни координат фазового простору

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} = -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i},$$

запишемо фундаментальні дужки Пуассона для нових змінних $[q'_i, p'_j]_{q,p}$ у старих змінних, виконуючи підстановку формул переходу:

$$\begin{aligned} [q'_i, p'_j]_{q,p} &\equiv [q'_i(q, p, t), p'_j(q, p, t)]_{q,p} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} + \frac{\partial p_k}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial q'_i}{\partial q'_j} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Аналогічно можна показати інваріантність інших фундаментальних дужок Пуассона. ■

Доведене твердження дає більш простий критерій канонічності перетворення:

Канонічним є перетворення заміни координат $(q, p) \rightarrow (q', p')$ у фазовому просторі, у результаті якого фундаментальні дужки Пуассона не змінюються.

Таким чином, для перевірки канонічності досить знайти дужки для формул перетворення, обминаючи пошук самої твірної функції.

Зауваження. Як було зазначено вище, якщо до формул переходу $q' = q'(q, p)$ та $p' = p'(q, p)$ явно не входить час, то за умови канонічності такого перетворення, яку можна довести за допомогою дужок Пуассона, функцію Гамільтона у нових змінних можна знайти без твірної функції (яка не залежить від часу і не дає явного внеску у вираз для H'). \square

Із інваріантності дужок фундаментальних Пуассона випливає більш загальне твердження:

У результаті канонічного перетворення значення дужок Пуассона для довільних функцій зберігаються:

$$[A, B]_{q,p} = [A, B]_{q',p'}$$

(у правій частині рівності функції A та B записані у нових координатах, як і самі дужки Пуассона).

□ Для доведення зведемо вираз до фундаментальних дужок, розкриваючи похідні функції $B(q, p)$ (аргументи якої виражені через нові змінні) за правилом диференціювання складної функції:

$$\begin{aligned} [A, B]_{q',p'} &= \frac{\partial A}{\partial q'_k} \frac{\partial B}{\partial p'_k} - \frac{\partial B}{\partial q'_k} \frac{\partial A}{\partial p'_k} = \frac{\partial A}{\partial q'_k} \left(\frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p'_k} + \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p'_k} \right) \\ &\quad - \frac{\partial A}{\partial p'_k} \left(\frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} + \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k} \right) = \frac{\partial B}{\partial q_j} [A, q_j]_{q',p'} + \frac{\partial B}{\partial p_j} [A, p_j]_{q',p'}. \end{aligned}$$

Далі,

$$[A, q_j]_{q',p'} = -[q_j, A]_{q',p'} = -\frac{\partial A}{\partial q_k} [q_j, q_k]_{q',p'} - \frac{\partial A}{\partial p_k} [q_j, p_k]_{q',p'} = -\frac{\partial A}{\partial p_k} \delta_{jk} = -\frac{\partial A}{\partial p_j} \equiv [A, q_j]_{q,p},$$

де використано інваріантність фундаментальних дужок. Аналогічно,

$$[A, q_j]_{q',p'} = \frac{\partial A}{\partial q_j} = [A, p_j]_{q,p}.$$

Таким чином,

$$[A, B]_{q',p'} = \frac{\partial B}{\partial q_j} [A, q_j]_{q',p'} + \frac{\partial B}{\partial p_j} [A, p_j]_{q',p'} = \frac{\partial B}{\partial q_j} [A, q_j]_{q,p} + \frac{\partial B}{\partial p_j} [A, p_j]_{q,p} \equiv [A, B]_{q,p},$$

що і потрібно було довести. \blacksquare

5. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ КАНОНІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. Розглянемо канонічне перетворення, яке відрізняється від тотожного на малу величину. Твірна функція має вигляд:

$$F(q, p', t) = q_i p'_i + G(q, p', t),$$

де $G(q, p', t)$ — мала добавка², яка називається *генератором* перетворення.

² Звичайно малість означає пропорційність до малого параметру.

Рівняння, що задають перетворення, мають вигляд:

$$q'_i = \frac{\partial F}{\partial p'_i} = q_i + \frac{\partial G}{\partial p'_i}, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = p'_i + \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Виразимо зміни координат та імпульсів, з точністю до малих величин другого порядку. Імпульси p'_i у аргументах твірної функції можна замінити на p_i :

$$\delta q_i = q'_i - q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = p'_i - p_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad (23.12)$$

або у термінах дужок Пуассона:

$$\delta q_i = [q_i, G(q, p, t)], \quad \delta p_i = [p_i, G(q, p, t)]. \quad (23.13)$$

Приклад 1. Приклади нескінченно малих перетворень:

- 1) $G = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}$, відповідає просторовому зсуву: $\delta \vec{r} = \vec{\varepsilon}$, $\delta \vec{p} = 0$.
- 2) $G = \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$ відповідає просторовому повороту: $\delta \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $\delta \vec{p} = \vec{\varepsilon} \times \vec{p}$.
- 3) $G = \varepsilon H$ відповідає зсуву часу (з точністю до першого порядку по ε):

$$\delta \vec{r}(t) = \varepsilon [\vec{r}(t), H] = \varepsilon \dot{\vec{r}}(t) \simeq \vec{r}(t + \varepsilon) - \vec{r}(t), \quad \delta \vec{p} = \varepsilon \dot{\vec{p}} = \vec{p}(t + \varepsilon) - \vec{p}(t).$$

Таке перетворення може інтерпретуватись як перетворення переходу до наступного моменту часу, тобто відповідатиме генерації динаміки. Зауважимо, що самі величини \vec{r}' та \vec{p}' побудовані для моменту часу t і зсув часу виникає після використання формули Тейлора.

У загальному випадку перетворення з генератором $G = H(q, p)$ також відповідає переходу до наступного моменту часу. Підкреслимо, що у результаті канонічного перетворення час не змінюється, генерація динаміки відповідає перетворенню $q'(t) = q(t + \delta t)$.

Для довільної функції $F(q, p, t)$ зміна значення після нескінченно малого перетворення має вигляд:

$$\delta F = F(q + \delta q, p + \delta p, t) - F(q, p, t) \simeq \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} [q_i, G] + \frac{\partial F}{\partial p_i} [p_i, G] = [F, G].$$

Для перетворення з генератором $G = H \delta t$:

$$\delta F = [F, H] \delta t = \left(\frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) \delta t.$$

Якщо функція F є інтегралом руху, що не залежить від часу, то

$$\delta F = [F, H] \delta t = 0.$$

Комбінація $[F, H]$ виникає також у формулі, що описує зміну функції Гамільтона при нескінченно малому канонічному перетворенні з генератором F :

$$\delta H = [H, F] \equiv \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{dF}{dt},$$

якщо $F \neq F(t)$, то перший доданок у правій частині відсутній.

Таким чином, приходимо до нового означення інтегралу руху, яке еквівалентне до безпосереднього:

Функція $F(q, p)$ є інтегралом руху, якщо породжене нею нескінченно мале канонічне перетворення є симетрією функції Гамільтона, тобто $\delta H = 0$.

Таке формулювання є одним із варіантів теореми Нетер. Зокрема, симетрії функції Гамільтона відносно трансляцій та поворотів породжуються імпульсом та моментом імпульсу.

6. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ КАНОНІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП. Розглянемо варіацію функціоналу дії у випадку, коли варіації спряжених змінних породжуються нескінченно малими канонічними перетвореннями. У загальному випадку

$$\delta S[q, p] = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) dt = p_i \delta q_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[- \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt.$$

На дійсних траєкторіях системи останній інтеграл можна опустити завдяки рівнянням руху, тоді варіація зведеться до доданку, що залежить від початку та кінця часового інтервалу:

$$\delta S[q, p] = p_i \delta q_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Виділимо окремо у функціоналі дії доданок, який включає похідну від координати:

$$S_{kin}[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} L_{kin} dt, \quad L_{kin} = p_i \dot{q}_i.$$

Вираз L_{kin} називається кінематичною частиною функції Лагранжа (вираженої через імпульси), а $S_{kin}[q, p]$ називається кінематичною частиною функціоналу дії. Для випадку варіацій, що породжуються нескінченно малим канонічним перетворенням має місце властивість:

Варіація кінематичної частини функції Лагранжа для нескінченно малого канонічного перетворення, що не залежить від часу, є повною похідною.

□ \Rightarrow Розглянемо нескінченно мале канонічне перетворення з генератором G :

$$\delta q_i = [q_i, G] = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = [p_i, G] = -\frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Покажемо, що варіація L_{kin} є повною похідною. Оскільки варіації комутують з диференціюванням по часу, то матимемо:

$$\delta L_{kin} = \delta(p_i \dot{q}_i) = \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i = -\dot{q}_i \frac{\partial G}{\partial q_i} + p_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = -\dot{q}_i \frac{\partial G}{\partial q_i} - \dot{p}_i \frac{\partial G}{\partial p_i} + \frac{d}{dt} \left(p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \right).$$

Якщо генератор перетворення явно не залежить від часу, то перші два доданки є повною похідною від G , а у останньому доданку можна повернутись до позначення через варіацію:

$$\delta L_{kin} = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i - G).$$

[\Leftarrow] Доведемо обернене твердження: якщо варіація L_{kin} є повною похідною по часу, то відповідне нескінченно мале перетворення є канонічним. Нехай

$$\delta L_{kin} = -\frac{d}{dt} K$$

Цей вираз у явному записі матиме вигляд:

$$\delta L_{kin} = \dot{q}_i \delta p_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \dot{q}_i \delta p_i + p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k,$$

оскільки варіація δq_i є функцією канонічних змінних. З іншого боку

$$\delta L_{kin} = -\frac{d}{dt} K(q, p) = -\frac{\partial K}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial K}{\partial p_k} \dot{p}_k.$$

Порівнюючи коефіцієнти при похідних у отриманих виразах, отримаємо:

$$\delta p_k + p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial K}{\partial q_k}, \quad p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_k} = -\frac{\partial K}{\partial p_k},$$

тому, оскільки канонічні змінні є незалежними, з першого рівняння можна записати

$$\delta p_k = -\frac{\partial}{\partial q_k} (p_i \delta q_i + K) = -\frac{\partial G}{\partial q_k}, \quad G = p_i \delta q_i + K,$$

такий вираз типовий для нескінченно малих канонічних перетворень. У другому рівнянні виділимо у лівій частині повну похідну:

$$-\frac{\partial K}{\partial p_k} = p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} (p_i \delta q_i) - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \delta q_i = \frac{\partial}{\partial p_k} (p_i \delta q_i) - \delta q_k \Rightarrow \delta q_k = \frac{\partial G}{\partial p_k}$$

що і потрібно було довести. ■

Доведена властивість зручна визначення канонічності конкретного нескінченно малого канонічного перетворення. Більше того можна знайти генератор перетворення досить простим способом: Якщо відома функція K , то генератор автоматично матиме вигляд $G = p_i \delta q_i + K$.

Покажемо, що, отримані властивості узгоджуються з виразом для загальної варіації функціоналу дії. Для цього розглянемо варіацію всього підінтегрального виразу функціоналу дії для варіацій, що породжуються генератором G :

$$\delta L = \delta(p_i \dot{q}_i - H) = -\frac{dK}{dt} - \delta H.$$

Для варіації функції Гамільтона матимемо:

$$\delta H = [G, H] = -\frac{dG}{dt} \Rightarrow \delta L = \frac{d}{dt}(G - K) \equiv \frac{d}{dt}(p_i \delta q_i),$$

як і повинно бути завдяки встановленому зв'язку між G та K .

Зауваження. Аналіз симетрій кінематичної частини дії є досить зручним інструментом у деяких формулюваннях квантової теорії поля (див., наприклад, [29]), оскільки дозволяє за одну дію визначити рівняння руху та комутаційні співвідношення для динамічних змінних. \square

7. ТЕОРЕМА ЛІУВІЛЛЯ. Для механічної системи, що складається з великої кількості частинок (порядку числа Авогадро 10^{23}) стан як набір значень координат та імпульсів визначити з рівнянь руху технічно неможливо. Для опису таких систем використовують середні величини, які визначають стан системи “в цілому”. Центральним поняттям при означенні таких характеристик є концепція статистичного ансамблю.

Статистичним ансамблем називається набір фізично ідентичних механічних систем (з однаковою функцією Гамільтона) з різними початковими умовами. Якщо одну механічну систему можна зобразити точкою у фазовому просторі (з координатами (q, p) у даний момент часу), то статистичний ансамбль можна описати набором таких точок. У випадку великої кількості систем ансамблю точки, що зображають його елементи, заповнюють деяку область фазового простору, яку можна назвати *об'ємом ансамблю*.

Для опису об'єму ансамблю означимо елемент об'єму в околі точки (q, p) фазового простору:

$$d\Gamma(q, p) = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = dq dp \quad (23.14)$$

(для скорочення в елементі об'єму вживатимемо один символ без індексу), dq_i , dp_i — відхилення від даної точки, які використовуються для означення елементарного об'єму. Повний об'єм статистичного ансамблю дається інтегралом по області простору, яку він займає:

$$\Gamma(t) = \int_{V(t)} dq dp \quad (23.15)$$

де межа інтегрування $V(t)$ — об'єм ансамблю як геометричний об'єкт (область).

Розглянемо зміну об'єму в процесі руху систем ансамблю за час δt . Таке переміщення еквівалентне канонічному перетворенню з генератором $H\delta t$, тому перехід до наступного моменту часу відповідає заміні координат $(q, p) \rightarrow (q', p')$ (означених в один момент часу, але формально пов'язаних як $q(t + \delta t) = q'(t)$). Тоді, оскільки для канонічних перетворень у зв'язку з обмеженнями на матрицю переходу має місце

$$dq' dp' = \frac{\partial(q', p')}{\partial(q, p)} dq dp = dq dp, \quad \frac{\partial(q', p')}{\partial(q, p)} = 1$$

що означає незмінність елементу об'єму фазового простору, інтеграл $\Gamma(t)$ також не буде змінюватись після довільного канонічного перетворення. Таким чином,

Фазовий об'єм статистичного ансамблю не змінюється у результаті довільного канонічного перетворення.

Зсуви по часу є частинними випадками канонічних перетворень. Такі міркування приводять до *теорема Ліувілля*:

Фазовий об'єм статистичного ансамблю не змінюється в процесі руху системи, тобто $\Gamma(t) = \text{const}$.

□ Розглянемо приріст фазового об'єму за час δt і доведемо $\frac{d\Gamma(t)}{dt} = 0$ за допомогою прямого означення похідної. Якщо (q, p) позначають координати системи в момент часу t у об'єму $V(t)$, то у наступний момент часу, перехід до якого визначається рівняннями Гамільтона, координати будуть даватись набором $(q', p') = (q(t + \delta t), p(t + \delta t))$ і відповідати об'єму $V(t + \delta t)$. Запишемо $\Gamma(t + \delta t)$, переходячи до змінних (q, p) за допомогою якобіану:

$$\Gamma(t + \delta t) = \int_{V(t + \delta t)} dq' dp' = \int_{V(t)} I(q, p) dq dp, \quad I(q, p) = \frac{\partial(q', p')}{\partial(q, p)}.$$

Із точністю до малих величин першого порядку по δt :

$$q'_i(t) = q_i(t + \delta t) = q_i(t) + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta t, \quad p'_i(t) = p_i(t + \delta t) = p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta t,$$

тому, виконуючи підстановку до якобіану, отримаємо:

$$I(q, p) = \left| \begin{array}{cc} \left\{ \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} \right\} & \left\{ \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} \right\} & \left\{ \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} \right\} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \left\{ \delta_{ij} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \delta t \right\} & \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \delta t \right\} \\ \left\{ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \delta t \right\} & \left\{ \delta_{ij} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \delta t \right\} \end{array} \right|,$$

де фігурними дужками позначено блокові матриці. Очевидно, доданок, пропорційний до δt , виникає у результаті розкривання визначника у доданку, який є добутком діагональних елементів, тому:

$$I(q, p) = \prod_i \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \delta t \right) \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \delta t \right) + O(\delta t^2) = 1 + 0 \cdot \delta t + O(\delta t^2),$$

оскільки у множнику при δt доданки скорочуються. Тому

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(t + \delta t) - \Gamma(t)}{\delta t} = 0,$$

що і потрібно було довести. ■

Зауваження. Властивість, що дається теоремою Ліувілля, характерна тільки для фазового простору — у просторі швидкостей вона не виконується. ┘

8. Рівняння Ліувілля. У статистичній механіці приймається інша форма теорема Ліувілля. Вважається, що системи ансамблю розподілені у фазовому просторі з густиною $F(q, p, t)$. Це означає, що імовірність перебування системи у елементі об'єму $dq dp$ у околі точки (q, p) в момент часу t складає $F(q, p, t) dq dp$. Тоді повна імовірність перебування системи у ансамблі буде дорівнює одиниці:

$$\int_V F(q, p, t) dq dp = 1$$

(інтеграл по довільному об'єму V фазового простору, якому належить ансамбль). Диференціюючи по часу, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \int_V F(q, p, t) dq dp = \int_V \frac{dF}{dt} dq dp = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] \right) dq dp = 0,$$

звідки у силу довільності фазового об'єму V матимемо:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0 \quad (\text{рівняння Ліувілля}). \quad (23.16)$$

У класичній механіці цей результат безпосередньо не використовується, але є відправною точкою статистичної механіки — як класичної, так і квантової.

ЛЕКЦІЯ 24

Рівняння Гамільтона-Якобі

1.	Ідея інтегрування у класичній механіці.	385
2.	Рівняння Гамільтона-Якобі.	386
3.	Повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі.	387
4.	Схема пошуку твірної функції.	389
5.	Рівняння Гамільтона-Якобі для консервативних систем.	390
6.	Метод відокремлення змінних для консервативних систем.	391
7.	Відокремлення змінних ортогональних координатах.	392
8.	Приклади.	394

1. ІДЕЯ ІНТЕГРУВАННЯ У КЛАСИЧНІЙ МЕХАНІЦІ. Роль канонічних перетворень у механіці Гамільтона така сама, як і точкових перетворень у механіці Лагранжа. Їх суть зводиться до заміни координат фазового простору, а сенс проведення полягає у вдалому виборі нових координат, у яких функція Гамільтона (і, відповідно, рівняння руху) спрощуються.

Кінцева мета спрощення рівнянь Гамільтона — отримання такої форми рівнянь руху, для якої можна провести безпосереднє інтегрування.

Стандартна ознака спрощення функції Гамільтона після деякої заміни координат фазового простору — отримання однієї чи більше циклічних координат чи імпульсів. Для них рівняння руху переходять у закони збереження, які у механіці Гамільтона є суто алгебраїчними співвідношеннями і зводяться до фіксації самої координати або імпульсу.

Зауваження. Відмітимо, що у механіці Лагранжа за допомогою точкових перетворень $q \rightarrow q'$, що приводять до появи циклічних координат, можна отримати лише половину інтегралів руху з $2n$ можливих а саме — n законів збереження імпульсів у формі диференціальних рівнянь першого порядку $p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$. Інші інтеграли руху з'являються у процесі розв'язку цих диференціальних рівнянь, однак загальний аналіз форми *всіх* законів збереження виконати не можна. У механіці Гамільтона змінних удвічі більше, тому наявність $2n$ циклічних координат, які можуть з'явитись після вдало проведеного канонічного перетворення $(q, p) \rightarrow (q', p')$ дозволяє отримати *всі* інтеграли руху механічної системи. Тому, на відміну від механіки Лагранжа, у механіці Гамільтона є підстави для розробки загального методу побудови оптимального канонічного перетворення, що дозволяє максимально спростити аналіз законів руху (за рахунок інтегралів руху). ▮

Рівняння руху стануть максимально простими, якщо *всі* координати та імпульси після заміни $(q, p) \rightarrow (q', p')$ за законом

$$q_i = q_i(q', p', t), \quad p_i = p_i(q', p', t) \quad \text{або} \quad q'_i = q'_i(q, p, t), \quad p'_i = p'_i(q, p, t) \quad (24.1)$$

стануть циклічними, тоді $H' \neq H'(q', p')$ і рівняння руху матимуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} \end{array} \right. \xrightarrow{(q, p) \rightarrow (q', p')} \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}'_i = \frac{\partial H'(t)}{\partial p'_i} \equiv 0, \\ \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'(t)}{\partial q'_i} \equiv 0 \end{array} \right.$$

їх розв'язки:

$$q'_i(t) = \alpha_i = \text{const}, \quad p'_i(t) = \beta_i = \text{const}. \quad (24.2)$$

Нові координати є сталими у довільний момент часу, зокрема й у початковий. Розв'язки рівнянь руху у старих координатах можна отримати за допомогою формул оберненого перетворення (24.1):

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t).$$

Сталі α та β у останніх рівностях можна інтерпретувати як величини, які еквівалентні початковим умовам $q(t_0) = q_0$ та $p(t_0) = p_0$ (насправді це й є початкові умови, тільки для інших змінних). Точний зв'язок можна отримати підстановкою початкового моменту часу t_0 :

$$q_{i0} = q_i(\alpha, \beta, t_0), \quad p_{i0} = p_i(\alpha, \beta, t_0).$$

Таким чином,

Канонічне перетворення $(q, p) \rightarrow (q', p')$, у результаті якого всі аргументи функції Гамільтона стають циклічними, формально відповідає перетворенню, у результаті якого нові координати та імпульси є сталими і дорівнюють своїм початковим умовам. Еволюцію системи від початкового моменту часу t_0 до даного t можна інтерпретувати як обернене канонічне перетворення $(q', p') \rightarrow (q, p)$.

Зауваження. Наведене твердження є інтерпретацією. Насправді при канонічному перетворенні час не змінюється, тому у оберненому перетворенні $(q', p') \rightarrow (q, p)$ залежність від часу у $q(t)$ та $p(t)$ вноситься формулою заміни координат (але формально змінні (q, p) та (q', p') означені в один момент часу). \perp

Такий погляд на еволюцію системи дозволяє розглядати процес пошуку розв'язку рівнянь руху як пошук канонічного перетворення, що описує рух системи як окремий випадок заміни координат фазового простору, в яку входить залежність від часу. Іншими словами, еволюція системи еквівалентна канонічному перетворенню, яке послідовно розгортається у часі.

2. Рівняння Гамільтона-Якобі. Розв'язок основної задачі механіки можна звести до пошуку канонічного перетворення, в результаті якого функція Гамільтона стає циклічною по всіх змінних. Найбільш суттєвою особливістю канонічних перетворень є те, що вони повністю описуються за допомогою заданої твірної функції F . Формули заміни координат та функції Гамільтона можна отримати на основі простих правил з твірної функції.

Якщо твірну функцію задано, то можна виконати перехід до нових, наперед невідомих координат фазового простору та функції Гамільтона (тим самим визначити ці величини за допомогою формул перетворення). Але таку схему можна обернути, якщо вимагати переходу до *заданих* координат фазового простору та функції Гамільтона, які є сталими, — тоді невідомою буде твірна функція, яка описує цей перехід.

Таким чином, задача побудови такого канонічного перетворення зводиться до пошуку твірної функції. У нових (циклічних) координатах фазового простору функція Гамільтона H' стала, без зменшення загальності покладемо¹ $H' = 0$. Тоді закон перетворення функції Гамільтона має вигляд:

$$H'(q', p', t) = \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \right]_{\substack{q=q(q', p', t) \\ p=p(q', p', t)}} \equiv 0,$$

після підстановки формул заміни координат така рівність повинна перетворюватися на тотожність. Ця умова і є основним співвідношенням, яке повинна задовольняти твірна функція, що залежить від n старих змінних (з набору (q, p)), n нових змінних (з набору (q', p')) та часу.

Рівняння, яке задовольняє твірна функція, можна отримати, якщо у наведеній вище тотожності відмінити підстановку формул заміни координат (які є, власне, розв'язком задачі). Для визначеності будемо розглядати твірну функцію типу $F_1(q, q', t)$, для якої

$$p_i = \frac{\partial F(q, q', t)}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F(q, q', t)}{\partial q'_i}. \quad (24.3)$$

Оскільки після перетворення нові координати та імпульси будуть сталими величинами, то насправді твірна функція залежить від змінних величин (q, t) та фіксованих параметрів $q'_i = \alpha_i$, які можна не вказувати у аргументах, тому формула заміни функції Гамільтона має вигляд:

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F(q, t)}{\partial t} = 0,$$

або, виражаючи імпульси через похідні твірної функції на основі (24.3), отримаємо остаточно:

$$\frac{\partial F(q, t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) = 0. \quad (24.4)$$

Рівняння (24.4) є рівнянням у частинних похідних і називається *рівнянням Гамільтона-Якобі*. Його розв'язок, який залежить від координат q та часу, називається *головною функцією Гамільтона* і традиційно позначається $S(q, t)$.

Задача 24.1. Як зміниться рівняння Гамільтона-Якобі, якщо за основу взяти твірну функцію іншого типу? Чи є в цьому сенс?

¹ Якщо $H' \neq 0$, то замість твірної функції F візьмемо $\bar{F} = F - H' t$, яка приводить до бажаного результату.

3. Повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі. Рівняння (24.4) є диференціальним рівнянням першого порядку у частинних похідних, як незалежні змінні виступають n координат q_i та час t . Повний інтеграл² такого рівняння буде залежати від $n + 1$ сталих інтегрування c_1, \dots, c_{n+1} . Оскільки невідома функція фігурує у рівнянні (24.4) тільки під похідними, то розв'язок означено з точністю до сталої, яка є однією зі сталих інтегрування. Таким чином, загальна структура повного інтегралу рівняння Гамільтона-Якобі буде мати вигляд:

$$F = S(q_1, \dots, q_n; c_1, \dots, c_n; t) + c_{n+1},$$

де c_{n+1} — адитивна стала інтегрування. Її можна покласти рівною нулю, оскільки кінцевою метою є пошук формул канонічного перетворення, які будуються шляхом диференціювання твірної функції. Всі інші сталі інтегрування є неадитивними.

Таким чином, у результаті розв'язку рівняння Гамільтона-Якобі буде знайдено твірну функцію канонічного перетворення, яка залежить від старих координат q_i . Про нові координати q'_i відомо лише, що вони є сталими величинами і фігурують у виразі твірної функції як параметри. Очевидно, що n сталих інтегрування c_i певним чином пов'язані з новими координатами $\alpha_i = \text{const}$ і можуть вважатись їх функціями, тобто $c_i = c_i(\alpha)$.

Вибір нових координат у фазовому просторі багато в чому довільний³, тому нові координати α_i можна просто ототожнити зі сталими інтегрування, покладаючи $c_i = \alpha_i$. Покажемо, що це не суперечить умовам сталості імпульсів. Згідно з формулами канонічного перетворення (24.3), нові імпульси виражаються через похідні твірної функції по нових координатах, тому:

$$\frac{dp'_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \right) = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t},$$

згідно з рівнянням Гамільтона-Якобі маємо $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$, тому використовуючи рівняння руху для старих координат q і беручи до уваги, що функція Гамільтона залежить від параметрів α через імпульси, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dp'_i}{dt} &= -\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_k} \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_k} \bigg|_{p=\frac{\partial S}{\partial q}} + \frac{\partial}{\partial \alpha_i} H(q, p, t) \bigg|_{p=\frac{\partial S}{\partial q}} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_k} \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_k} \bigg|_{p=\frac{\partial S}{\partial q}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_k} \bigg|_{p=\frac{\partial S}{\partial q}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

² Повним інтегралом рівняння у частинних похідних

$$f \left(x_1, \dots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0$$

називається функція $u(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_n)$, яка задовольняє рівняння і залежить від n незалежних сталих інтегрування c_i (їх стільки, скільки незалежних змінних у самому рівнянні).

³ Нові координати та імпульси можна змінити за допомогою канонічного перетворення, яке не залежить від часу і замість одних сталих ввести інші. Функція Гамільтона залишиться циклічною по всіх координатах.

у останньому доданку використано першу з формул перетворення (24.3).

У результаті, ототожнення нових координат із сталими інтегрування не суперечить початковим припущенням про характер канонічного перетворення. Нові координати не обов'язково збігаються з початковими умовами (q_0, p_0) , але однозначно через них виражаються.

Зауваження. Вибір нових координат $\alpha_i = c_i$ не завжди є оптимальним. Користуючись довільністю зв'язку сталих інтегрування з новими координатами, останні можна вибирати за довільним законом $\alpha_i = \alpha_i(c)$, який зручний за контекстом. Нові імпульси будуть сталими незалежно від способу ототожнення. \lrcorner

Відмітимо також важливу формальну властивість розв'язку рівняння Гамільтона-Якобі, яка хоч і не допомагає процесу розв'язку рівняння, але дозволяє дати інтерпретацію функції S . Запишемо вираз для повної похідної по часу, використовуючи рівняння Гамільтона-Якобі та формули перетворень (24.3):

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) = L(q, p, t),$$

де функцію Лагранжа виражено через імпульси, тому

$$S = \int L(q, p, t) dt + \text{const}.$$

У результаті, головна функція Гамільтона $S(q, t)$ має форму невизначеного інтегралу дії (звідси й позначення). Сам інтеграл дії є визначеним, тому його не можна ототожнити з розв'язком рівняння Гамільтона-Якобі. У практичних застосуваннях цей результат нічого не дає, тому що невизначений інтеграл по часу не можна обчислити, поки залежності координат та імпульсів від часу є невідомими.

Зауваження. Те саме впливає з означення твірної функції:

$$\frac{dS}{dt} = (p_i \dot{q}_i - H) - (p'_i \dot{q}'_i - H') \equiv (p_i \dot{q}_i - H),$$

оскільки у нових координатах $H' = 0$ та $q'_i = \text{const}$. \lrcorner

4. СХЕМА ПОШУКУ ТВІРНОЇ ФУНКЦІЇ. Основною задачею механіки є дослідження еволюції механічного стану з часом, тобто пошук функцій $q_i(t)$ та $p_i(t)$. Сформулюємо алгоритм її розв'язку методом Гамільтона-Якобі:

- 1) знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі $S = S(q, \alpha, t)$;
- 2) ототожнити нові координати зі сталими інтегрування, $q'_i = \alpha_i$. Виразити старі координати з рівнянь канонічного перетворення:

$$\beta_i = -\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \Rightarrow q_i = q_i(\alpha, \beta, t),$$

де $p'_i = \beta_i$ — сталі величини, які позначають нові імпульси;

- 3) знайти старі імпульси підстановкою $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ до рівняння канонічного перетворення:

$$p_i = \left. \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \right|_{q=q(\alpha, \beta, t)} \Rightarrow p_i = p_i(\alpha, \beta, t);$$

- 4) у формулах $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ та $p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$, які задають обернене канонічне перетворення до старих змінних (і розв'язок задачі), визначити фізичний зміст сталих α та β , або виразити їх через початкові умови.

Найскладнішим є перший етап, якщо розв'язок диференціального рівняння отримано, інші дії в цілому зводяться до алгебраїчних перетворень. Відмітимо, що при такій схемі використання потрібна не скільки функція $S(q, \alpha, t)$, стільки її похідні по аргументах. Тому досить часто повний інтеграл $S(q, \alpha, t)$ записують у квадратах, а остаточне обчислення проводять з його похідними по параметрах α .

5. Рівняння Гамільтона-Якобі для консервативних систем. Розглянемо поширений випадок, коли функція Гамільтона у старих координатах не залежить від часу. Тоді система є консервативною і має місце закон збереження енергії. Рівняння Гамільтона-Якобі набуває вигляду:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \quad (24.5)$$

Оскільки енергія збігається з функцією Гамільтона, то другий доданок є сталим і тому повний інтеграл можна записати у формі:

$$S(q, t) = W(q) - \mathcal{E}t, \quad (24.6)$$

де \mathcal{E} — енергія системи. Підстановка (24.6) до рівняння (24.5) приводить до

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \mathcal{E} = \text{const}. \quad (24.7)$$

Таким чином, у випадку консервативної системи головна функція Гамільтона залежить від часу лінійно. Залежності від координат та часу відокремлюються одна від іншої і задача зводиться до пошуку функції $W(q)$ з рівняння (24.7), яка залежить тільки від координат. Функція $W(q)$, у якій зосереджено залежність твірної функції від координат, називається *характеристичною функцією Гамільтона*.

Енергія \mathcal{E} є сталою інтегрування α_1 , з нею можна ототожнити одну з нових координат. Рівняння для функції (24.7), як і вихідне рівняння Гамільтона-Якобі,

є рівнянням у частинних похідних. Його розв'язок залежатиме від $n - 1$ сталих інтегрування $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ (адитивна стала не береться до уваги, оскільки зникає після диференціювання).

Зауваження. Характеристична функція Гамільтона W має самостійний фізичний зміст. Запишемо її похідну:

$$\frac{dW(q)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_k} \dot{q}_k \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k, \quad \text{звідки} \quad W = \int \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k dt + \text{const},$$

цей вираз відрізняється від функціоналу дії принципу Мюпертюї тільки тим, що у останній формулі інтеграл є невизначеним. \lrcorner

6. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ.

У загальному випадку для консервативної системи розв'язок рівняння у частинних похідних (24.7) досить складний і метод Гамільтона-Якобі не дає особливих переваг порівняно з безпосереднім інтегруванням рівнянь руху. Однак у деяких частинних випадках рівняння (24.7) розв'язується за допомогою простої процедури, і це сильно спрощує аналіз основної задачі.

Спростити інтегрування рівняння для функції $W(q)$ можна у випадках, коли на структуру функції Гамільтона $H(q, p)$ накладено деякі загальні обмеження.

Якщо координата q_k та імпульс p_k входять до функції Гамільтона у вигляді комбінації $\varphi_k(q_k, p_k)$, яка не залежить від інших координат, імпульсів та часу, то функція φ_k є інтегралом руху. Тоді, підставляючи вираз для імпульсу через твірну функцію, отримаємо:

$$\varphi_k \left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k} \right) = \alpha_k = \text{const}.$$

Рівняння Гамільтона-Якобі має структуру:

$$\Phi \left(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; \varphi_k \left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k} \right) \right) = 0,$$

причому останній аргумент є сталим в силу закону збереження. Якщо замінити комбінацію φ_k сталою α_k , то отримане рівняння не буде явно залежати від координати q_k (залежність від q_k зосереджено у окремому доданку $S(q, t)$, що зникає після диференціювання по q_i , якщо $i \neq k$). Це означає, що

$$S(q, t) = \hat{S}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n; t) + S_k(q_k), \quad (24.8)$$

і змінна q_k відокремлюється від інших. Саме рівняння Гамільтона-Якобі розщеплюється на два рівняння, одне з яких не включає частинних похідних:

$$\begin{aligned} \varphi_k \left(q_k, \frac{dS_k}{dq_k} \right) &= \alpha_k, \\ \hat{\Phi} \left(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{k-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n} \right) &= 0, \end{aligned}$$

Друге рівняння залишається диференціальним рівнянням у частинних похідних, але з меншим числом змінних. Якщо в ньому деяка координата та відповідна похідна функції \hat{S} по ній фігурують у вигляді комбінації, то процес відокремлення можна продовжити.

Якщо всі змінні можна відокремити у такий спосіб, то рівняння Гамільтона-Якобі можна проінтегрувати у квадратурах. Це можливо тільки для консервативної системи, де відокремлюється час:

$$S(q, t) = -\mathcal{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t + W(q, \alpha), \quad W(q, \alpha) = W_1(q_1, \alpha) + \dots + W_n(q_n, \alpha),$$

де α — сталі відокремлення. Функції $W_i(q_i, \alpha)$ можна знайти простим інтегруванням звичайних диференціальних рівнянь.

Частинним випадком відокремлення змінних є наявність циклічної координати. Якщо функція Гамільтона не залежить від координати q_k , то похідна $S(q, t)$ по координаті q_k буде імпульсом p_k , який є інтегралом руху. Тоді

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \equiv \frac{dS_k}{dq_k} = \alpha_k \quad \Rightarrow \quad S_k(q_k) = \alpha_k q_k,$$

і входження координати q_k до головної функції Гамільтона зводиться до лінійного доданку:

$$S(q, t) = \hat{S}(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n; t) + \alpha_k q_k.$$

Стала α_k має простий фізичний зміст — вона збігається з імпульсом, який відповідає циклічній координаті q_k .

Відмітимо, для процедури відокремлення змінних потрібна наявність хоча б одного інтегралу руху типу $\varphi_k(q_k, p_k) = \alpha_k$. Його підстановки до рівняння Гамільтона-Якобі можуть породжувати нові комбінації імпульсів та координат (яких не було у вихідній функції Гамільтона), що дає можливість продовжувати процедуру відокремлення змінних. В цьому сенсі метод на основі рівняння Гамільтона-Якобі є найбільш загальним підходом до розв'язування рівнянь руху.

Можливість відокремлення змінних суттєво залежить від вибору вихідних координат q . Часто буває так, що в одних координатах змінні відокремлюються, а у інших — ні (аналогічною є ситуація з наявністю циклічними координатами у всіх формах механіки). Тому у методі Гамільтона-Якобі важливо вдало вибрати вихідні координати для спрощення подальшого розв'язку задачі.

7. Відокремлення змінних ортогональних координатах. Розглянемо процедуру відокремлення змінних для системи з однієї частинки у кількох ортогональних системах координат.

1) Декартові координати. Функція Гамільтона має вигляд:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

Координати та відповідні імпульси будуть фігурувати у вигляді стійких комбінацій, якщо

$$U(x, y, z) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z).$$

Тоді рівняння для характеристичної функції Гамільтона має вигляд:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + U_x(x) \right] + \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + U_y(y) \right] + \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + U_z(z) \right] = \mathcal{E},$$

де стійкі комбінації взято у квадратні дужки, вони є інтегралами руху. У такому випадку змінні відокремлюються,

$$W(x, y, z) = W_x(x) + W_y(y) + W_z(z),$$

і рівняння у частинних похідних розпадається на три звичайних диференціальних рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x(x)}{dx} \right)^2 + U_x(x) &= \alpha_x, & \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y(y)}{dy} \right)^2 + U_y(y) &= \alpha_y, \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z(z)}{dz} \right)^2 + U_z(z) &= \alpha_z. \end{aligned}$$

Отримані рівняння легко інтегруються у квадратурах.

Сталі α_x , α_y та α_z не є незалежними і задовольняють співвідношення:

$$\mathcal{E} = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z.$$

Якщо як незалежні сталі інтегрування вибрано α , то енергія стає залежною величиною, тому:

$$\begin{aligned} S(x, y, z; \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z; t) &= -(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)t + \int \sqrt{2m[\alpha_x - U_x(x)]} dx \\ &+ \int \sqrt{2m[\alpha_y - U_y(y)]} dy + \int \sqrt{2m[\alpha_z - U_z(z)]} dz. \end{aligned}$$

За фізичним змістом сталі α описують розподіл повної енергії по ступенях вільності.

2) Циліндричні координати. Функція Гамільтона:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z).$$

Змінні будуть відокремлюватись, якщо потенціал розпадається на три доданки, причому у кожному з них виділяється квадрат параметру Ламе у знаменнику (в основному це стосується доданку, який залежить від φ):

$$U(r, \varphi, z) = A(r) + \frac{B(\varphi)}{r^2} + C(z),$$

Тоді рівняння для $W(r, \varphi, z)$ буде мати вигляд:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + A(r) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + B(\varphi) + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + C(z) = \mathcal{E}.$$

Змінні зручно відокремлювати по черзі. Спочатку для φ : $W(r, \varphi, z) = W_{rz}(r, z) + W_\varphi(\varphi)$, підстановка дає можливість розщепити рівняння на два:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\varphi(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 + B(\varphi) = \alpha_\varphi, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_{rz}}{\partial r} \right)^2 + A(r) + \frac{\alpha_\varphi}{r^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_{rz}}{\partial z} \right)^2 + C(z) = \mathcal{E},$$

далі аналогічна процедура для r та z . Поклавши $W_{rz}(r, z) = W_r(r) + W_z(z)$ після підстановки отримаємо у лівій частині суму двох груп функцій, які залежать від різних незалежних змінних r та z . Це автоматично означає, що вони є сталими величинами і, вводячи сталу відокремлення α_z , матимемо:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z(z)}{dz} \right)^2 + C(z) = \alpha_z, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_r(r)}{dr} \right)^2 + A(r) + \frac{\alpha_\varphi}{r^2} + \alpha_z = \mathcal{E}.$$

У результаті з'являються три сталі \mathcal{E} , α_φ та α_z . Інтегруючи рівняння для окремих доданків W у квадратурах, знайдемо:

$$S(r, \varphi, z; \mathcal{E}, \alpha_\varphi, \alpha_z; t) = -\mathcal{E}t + \int \sqrt{2m \left[\mathcal{E} - \alpha_z - A(r) - \frac{\alpha_\varphi}{r^2} \right]} dr + \int \sqrt{2m [\alpha_\varphi - B(\varphi)]} d\varphi + \int \sqrt{2m [\alpha_z - C(z)]} dz$$

3) Сферичні координати. Функція Гамільтона:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

Змінні будуть відокремлюватись, якщо

$$U(r, \theta, \varphi) = A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2} + \frac{C(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Тоді рівняння Гамільтона-Якобі набуває вигляду:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + A(r) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + B(\theta) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + C(\varphi) \right] = \mathcal{E}.$$

Спочатку доцільно відокремити змінну φ покладаючи $W(r, \theta, \varphi) = W_{r\theta}(r, \theta) + W_\varphi(\varphi)$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\varphi(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 + C(\varphi) &= \alpha_\varphi, \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_{r\theta}}{\partial r} \right)^2 + A(r) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_{r\theta}}{\partial \theta} \right)^2 + B(\theta) \right] + \frac{\alpha_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} &= \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Далі, в останньому рівнянні відокремлюємо θ , покладаючи $W_{r\theta}(r, \theta) = W_r(r) + W_\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\theta(\theta)}{d\theta} \right)^2 + B(\theta) + \frac{\alpha_\varphi}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta$$

після чого залишається рівняння для $W_r(r)$:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_r(r)}{dr} \right)^2 + A(r) + \frac{\alpha_\theta}{r^2} = \mathcal{E}.$$

Кожне з рівнянь для W_r , W_θ та W_φ інтегрується у квадратурах, тому остаточно:

$$S(r, \theta, \varphi; \mathcal{E}, \alpha_\theta, \alpha_\varphi; t) = -\mathcal{E}t + \int dr \sqrt{2m \left[\mathcal{E} - A(r) - \frac{\alpha_\theta}{r^2} \right]} + \int d\theta \sqrt{2m \left[\alpha_\theta - B(\theta) - \frac{\alpha_\varphi}{\sin^2 \theta} \right]} + \int d\varphi \sqrt{2m [\alpha_\varphi - C(\varphi)]}$$

Залежно від контексту сталі відокремлення можна замінити іншими величинами, якщо вони мають безпосередній фізичний зміст.

8. ПРИКЛАДИ.

Приклад 1. Дослідити рух тривимірного ізотропного гармонічного осцилятора

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2}$$

(декартові координати).

◀ Оскільки у даній системі зберігається енергія, то

$$S(\vec{r}, t) = -\mathcal{E}t + W(\vec{r}).$$

У прямокутній декартовій системі координат рівняння для функції $W(\vec{r})$ має вигляд:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right] + \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \frac{m\omega^2 y^2}{2} \right] + \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \frac{m\omega^2 z^2}{2} \right] = \mathcal{E}.$$

Вирази у квадратних дужках є комбінаціями координат та відповідних імпульсів. Очевидно, у такому випадку змінні відокремлюються і можна покласти

$$W(x, y, z) = W_x(x) + W_y(y) + W_z(z).$$

Підставляючи цей розклад у рівняння і вводячи сталі відокремлення, отримаємо набір однотипних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x(x)}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} &= \alpha_x, & \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y(y)}{dy} \right)^2 + \frac{m\omega^2 y^2}{2} &= \alpha_y, \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z(z)}{dz} \right)^2 + \frac{m\omega^2 z^2}{2} &= \alpha_z, \end{aligned}$$

а енергія виражається як $\mathcal{E} = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$. Тому розв'язок у квадратурах буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} S(\vec{r}, t) &= -(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)t + \int dx \sqrt{2m \left(\alpha_x - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)} \\ &\quad + \int dy \sqrt{2m \left(\alpha_y - \frac{m\omega^2 y^2}{2} \right)} + \int dz \sqrt{2m \left(\alpha_z - \frac{m\omega^2 z^2}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Пошук явного вигляду $S(\vec{r}, t)$ не обов'язковий, інтерес являють похідні твірної функції по параметрах α , які є новими імпульсами β . Маємо:

$$\beta_x = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = t - \frac{1}{\omega} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega^2} - x^2}} = t - \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha_x}} x \right),$$

для сталих α_y та α_z вирази будуть аналогічними. Виражаючи координати, отримаємо:

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega^2}} \sin[\omega(t - \beta_x)], \quad y = \sqrt{\frac{2\alpha_y}{m\omega^2}} \sin[\omega(t - \beta_y)], \quad z = \sqrt{\frac{2\alpha_z}{m\omega^2}} \sin[\omega(t - \beta_z)].$$

З отриманих розв'язків випливає фізичний зміст сталих інтегрування: сталі α є частинами енергії, які відповідають окремим ступеням вільності (і задають амплітуди коливань), а сталі ω/β з точністю до знаку є початковими фазами.

Для пошуку імпульсів \vec{p} потрібно продиференціювати твірну функцію по координатах. Оскільки $S(\vec{r}, t)$ будується за допомогою невизначених інтегралів, то такі похідні будуть збігатися з відповідними підінтегральними виразами. Наприклад, для імпульсу p_x маємо:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2m \left(\alpha_x - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)} = \sqrt{2m\alpha_x} \cos[\omega(t + \beta_x)].$$

►

Приклад 2. Дослідити рух частинки у постійному однорідному магнітному полі

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2, \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r}$$

(циліндричні координати).

◀ У циліндричних координатах, де $\vec{H} = H\vec{e}_z$, вектор-потенціал має вигляд $\vec{A} = \frac{rH}{2} \vec{e}_\varphi$, тому⁴:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m} r \right)^2 + \frac{p_z^2}{2m}.$$

Енергія зберігається, тому $S = -\mathcal{E}t + W(r, \varphi, z)$. Запишемо рівняння для функції W :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{eH}{2m} r \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 = \mathcal{E}.$$

Координати φ та z є циклічними, тому ці змінні можна відокремити:

$$W(r, \varphi, z) = W_r(r) + \alpha_\varphi \varphi + \alpha_z z,$$

сталі α_φ та α_z збігаються з відповідними імпульсами, які є інтегралами руху. Після відокремлення залишається рівняння для функції $W_r(r)$:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_r(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\alpha_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m} r \right)^2 + \frac{\alpha_z^2}{2m} = \mathcal{E},$$

яке легко інтегрується у квадратурах. Таким чином,

$$S = -\mathcal{E}t + \alpha_\varphi \varphi + \alpha_z z + \int dr \sqrt{2m \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha_z^2}{2m} \right) - \left(\frac{\alpha_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m} r \right)^2}$$

⁴ У циліндричних координатах імпульси p_r , p_φ , p_z мають різну розмірність і разом не утворюють просторового вектора \vec{p} . Звичайний імпульс, який фігурує у інваріантному виразі для функції Гамільтона, можна отримати з часток узагальнених імпульсів та параметрів Ламе.

Нові імпульси:

$$\begin{aligned}\beta_E &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha_E} = t - m \int \frac{dr}{\sqrt{2m\mathcal{E} - \alpha_z^2 - \left(\frac{\alpha_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m}r\right)^2}} \\ \beta_\varphi &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = -\varphi + \alpha_\varphi \int \frac{\left(\frac{\alpha_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m}r\right) dr}{\sqrt{2m\mathcal{E} - \alpha_z^2 - \left(\frac{\alpha_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m}r\right)^2}}, \\ \beta_z &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = -z + 2m\alpha_z \int \frac{dr}{\sqrt{2m\mathcal{E} - \alpha_z^2 - \left(\frac{\alpha_\varphi}{r} - \frac{eH}{2m}r\right)^2}}\end{aligned}$$

Інтегрування першого виразу дає залежність $r(t)$, а інших двох — приводить до $\varphi(r)$ та $z(r)$, з яких можна знайти $\varphi(t)$ та $z(t)$ підстановкою знайденої функції $r(t)$.

Завершення розв'язку задачі пропонується як самостійна вправа для читача. ►

Приклад 3. Дослідити рух частинки у потенціалі Кулона

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e^2}{r}$$

(сферичні координати).

◀ У сферичних координатах функція Гамільтона має вигляд:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{e^2}{r}.$$

У даній задачі внаслідок структури потенціалу змінні будуть відокремлюватись. Оскільки енергія зберігається, то $S = -\mathcal{E}t + W(r, \theta, \varphi)$ і

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{e^2}{r} = \mathcal{E}.$$

Координата φ є циклічною, тому:

$$W(r, \theta, \varphi) = W_{r\theta}(r, \theta) + \alpha_\varphi \varphi, \quad \alpha_\varphi = p_\varphi.$$

Звідси

$$\left(\frac{\partial W_{r\theta}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left[\left(\frac{\partial W_{r\theta}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] + \frac{e^2}{r} = \mathcal{E}.$$

Тепер змінна θ та похідна $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ фігурують у одній комбінації. Відокремлюючи цю змінну і вводячи ще одну сталу, отримаємо $W_{r\theta}(r, \theta) = W_r(r) + W_\theta(\theta)$ і

$$\left(\frac{dW_\theta(\theta)}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_r(r)}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta}{2mr^2} + \frac{e^2}{r} = \mathcal{E}.$$

Вираз для твірної функції у квадратурах матиме вигляд:

$$S(r, \theta, \varphi; \mathcal{E}, \alpha_\theta, \alpha_\varphi; t) = -\mathcal{E}t + \alpha_\varphi \varphi + \int dr \sqrt{2m \left(\mathcal{E} - \frac{e^2}{r} - \frac{\alpha_\theta}{2mr^2} \right)} + \int d\theta \sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}.$$

Відмітимо, що інтегрування значно спроститься, якщо покласти $p_\varphi = 0$ (це можливо за рахунок вибору початкових умов). Тоді координата θ також буде циклічною, — така ситуація відповідає руху частинки у площині, якій належить вісь z (p_φ є z -компонентою ньютонівського моменту імпульсу).

Завершити розв'язок пропонується як вправа для читача. ►

Підсумки до аналітичної механіки

Рівняння Гамільтона-Якобі і метод розв'язку основної задачі механіки на його основі є завершальним етапом побудови формальної структури класичної механіки, яка розроблялась з метою інтегрування рівнянь руху за допомогою законів збереження. Такий метод є найбільш загальним та універсальним. Взявши за необхідність опис руху системи законами збереження, ми розглядали розвиток ідеї інтегрування з поступовим зростанням рівнем абстракції:

- *механіка Ньютонна*: координати \vec{r} задаються системою відліку. Крім кількох загальних інтегралів руху підхід до пошуку законів збереження невідомий. Єдиним рецептом їх отримання є підбір інтегровувальних множників для рівнянь руху, однак загальна “стратегія” їх пошуку відсутня;
- *механіка Лагранжа*: координати q можна вибирати довільним чином після врахування зв'язків. Всі інтеграли руху породжуються циклічними координатами функції Лагранжа (крім інших аргументів, часом як її циклічним аргументом). Кількість циклічних координат (яких може бути щонайбільше n , і, можливо, час) можна змінювати точковими перетвореннями $q \rightarrow q' = q'(q, t)$ — замінами координат у абстрактному конфігураційному просторі (самі координати в усьому довільні).

Основна задача вибору координат — спрощення функції Лагранжа з метою збільшення кількості циклічних координат, але метод побудови перетворення невідомий. У механіці Лагранжа є прозора сформульована “стратегія”, однак відсутня загальна схема її використання;

- *механіка Лагранжа (варіаційний принцип)*: інтеграли руху можна знайти, аналізуючи симетрії механічної системи (теорема Нетер). Насправді це та сама загальна ідея циклічності по змінній, але сформульована в іншій формі;
- *механіка Гамільтона*: незалежні змінні (q, p) однозначно задають механічний стан і є координатами абстрактного $2n$ -вимірного фазового простору. Рівняння руху є системою рівнянь першого порядку, інтеграли руху породжуються циклічними координатами q , або імпульсами p — можливостей отримати закон збереження у формі циклічної змінної вдвічі більше, ніж у механіці Лагранжа (кількість незалежних змінних — подвоєна).

Кількість циклічних змінних (яких може бути щонайбільше $2n$, і, можливо, час) можна змінювати замінами координат $(q, p) \rightarrow (q', p')$ в абстрактному фазовому просторі. Важливе значення має частинний випадок таких перетворень, у результаті яких не змінюється форма рівнянь руху — канонічні перетворення, які не в усьому довільні, але залишають достатньо велику свободу вибору координат. Для задання перетворення такого типу досить вказання однієї твірної функції, за якою правило заміни $(q, p) \rightarrow (q', p')$ відбудовується автоматично.

Мета заміни координат — така сама як і в механіці Лагранжа, метод побудови перетворення також невідомий.

- *механіка Гамільтона (метод Гамільтона-Якобі)*: мета канонічного перетворення — максимально спростити рівняння руху. У методі Гамільтона-Якобі будувється таке перетворення, після якого рівняння руху зводяться до простих тото-

жностей і розв'язок задачі про рух системи полягає у побудові заміни координат у фазовому просторі.

Результатом розв'язку рівняння Гамільтона-Якобі є твірна функція канонічного перетворення до таких координат фазового простору, де руху взагалі немає, координати та імпульси є сталими, а функція Гамільтона дорівнює нулю.

Такий підхід дозволяє не тільки прозоро сформулювати схему побудови розв'язку (замість загального бажання мати якомога більшу кількість циклічних координат), а і переосмислити інтерпретацію явища руху системи взагалі в термінах більш абстрактних теоретичних понять.

Слід зазначити, що метод Гамільтона-Якобі, окрім того, що він був завершальним етапом еволюції структури класичної механіки, відіграв визначну роль на початковому етапі становлення квантової механіки. Одна з гілок розвитку цієї принципово нової на той час теорії будувалась Шредінгером, який сформулював закон руху квантової системи за прямою аналогією з рівнянням Гамільтона-Якобі. Інший шлях побудови квантової механіки розвивали Дірак та Гейзенберг, які спирались на узагальнення канонічних рівнянь руху Гамільтона та дужок Пуассона.

ЧАСТИНА IV

Механіка суцільного середовища

- ❑ Основні поняття. Кінематика суцільного середовища
- ❑ Закони збереження і динаміка
- ❑ Повна система рівнянь. Моделі суцільного середовища
- ❑ Теорія пружності. Закон Гука
- ❑ Стаціонарні та нестаціонарні задачі теорії пружності
- ❑ Гідродинаміка. Рівняння Нав'є-Стокса
- ❑ Звук у рідинах та газах

ЛЕКЦІЯ 25

Основні поняття. Кінематика суцільного середовища

1.	Два підходи до опису суцільного середовища.	403
2.	Макроскопічний підхід.	403
3.	Фізично нескінченно мала частинка.	404
4.	Кінематика фнм-частинки.	405
5.	Висновки.	415
6.	Мікроскопічний підхід.	416

1. Два підходи до опису суцільного середовища. *Суцільним середовищем* називається механічна система, яка має незліченну кількість ступенів вільності, що утворюють континуум. У фізичному розумінні всі механічні системи мають внутрішню структуру і складаються з мікроскопічних об'єктів, які взаємодіють між собою (наприклад, атоми, електрони, іони). У багатьох випадках цю взаємодію вдається описати за допомогою понять і методів класичної механіки, хоча відомі речовини, поведінка яких не повністю їм підлягає. Тому, принаймні принципово, рівняння руху суцільного середовища можна отримати з мікроскопічних рівнянь руху окремих складових — в цьому полягає так званий *мікроскопічний підхід*. Однак системи, які є предметом розгляду класичної механіки у чистому вигляді, мають зліченну і скінченну кількість ступенів вільності. Механічний континуум у природі не існує, це поняття можна розглядати тільки як граничний перехід до механічної системи із нескінченною кількістю ступенів вільності, за умови, що і кількість складових системи також прямує до нескінченності, але густина системи залишається сталою (так званий термодинамічний перехід). Прикладом фізичного континууму є електромагнітне поле. Тому, з іншого боку, можна отримати рівняння руху суцільного середовища, оперуючи поняттями, характерними для термодинаміки та теорії поля — так званий *макроскопічний підхід*.

2. Макроскопічний підхід. Основні поняття та методи макроскопічного (або феноменологічного) підходу до опису суцільного середовища було створено протягом XVIII – XX століть в роботах Бернуллі, Ейлера, Нав'є, Стокса, Ламе, Афанасьєвої-Еренфест та багатьох інших. Цей підхід передбачає:

- 1) означення та правила виділення об'єкту дослідження із усього суцільного середовища;
- 2) метод опису його характеристик;
- 3) виведення рівнянь руху для суцільного середовища.

Якщо отримані таким шляхом рівняння не залежать від способу виділення об'єкту, то вони вважаються достовірними, а якщо і розв'язки задач збігаються з результатами експерименту, то — правильними. Саме на такому підході буде зосереджено подальший розгляд суцільного середовища.

3. ФІЗИЧНО НЕСКІНЧЕННО МАЛА ЧАСТИНКА. У феноменологічному підході, замість всього суцільного середовища, основним елементарним об'єктом є *фізично нескінченно мала частинка*, яку далі для скорочення будемо називати скорочено фнм-частинкою, або просто частинкою. Її найпростіше означення можна дати користуючись мікроскопічними поняттями:

фнм-частинка — це сукупність великої кількості одних і тих самих мікро-частинок, які можна уявно обмежити в просторі однозв'язною замкненою поверхнею, яка може змінювати форму і об'єм.

У цьому означенні:

- 1) вимога “*велика кількість*” означає, що мікрочастинок (молекул, атомів, електронів, іонів і тощо) достатньо для того, щоб всередині фнм-частинки були несуттєвими всі флуктуації типу броунівського руху і її можна було описати як термодинамічно рівноважну систему, що має свою густину, температуру, внутрішню енергію, тощо;
- 2) вимога “*одні й ті самі мікрочастинки*” забороняє хімічні та ядерні реакції у середовищі;
- 3) вимога “*однозв'язна замкнена поверхня*” забороняє дифузію мікрочастинок та руйнування середовища.

У складніших моделях суцільного середовища ці вимоги можуть бути ослаблені, або взагалі зняті.

Із означення видно, що виділення фнм-частинки є уявним і багато у чому залежить від наших суб'єктивних уявлень про об'єкт, тому необхідною умовою достовірності отриманих рівнянь повинна бути їх незалежність від проведеного розбиття середовища на частинки.

Для розбиття середовища на елементарні об'єкти розглянемо таку процедуру. Нехай в момент часу t_0 задано область V у просторі, зайняту суцільним середовищем. Як і в механіці матеріальної точки, побудуємо довільну інерціальну систему відліку із довільно вибраним початком координат, базисом трьох ортів та годинником, яку назовемо *лабораторною системою відліку*, скорочено L -системою. Довільним чином, без пропусків і перекриттів, розбиваємо цей об'єм на частини ΔV_i сума яких дорівнює V (див. рис. 25.1).

Ототожнимо отримані об'єми з фізично нескінченно малими частинками. У контексті цієї процедури розміри ΔV_i повинні бути малими порівняно з загальним об'ємом V (“... нескінченно малі”), але достатньо великими порівняно з між-атомними відстанями (“фізично...”), достатніми для того, щоб знехтувати всіма флуктуаціями, які пов'язані з мікроскопічною структурою окремої фнм-частинки:

$$\langle l_{\text{atom}} \rangle^3 \ll \Delta V_i \ll V.$$

Об'єми ΔV_i , які задовольняють ці вимоги, також називають фізично нескінченно малими. Це означає, що фнм-частинку можна охарактеризувати як єдине ціле для розгляду механічних, електромагнітних, термодинамічних та інших явищ. Для спрощення майбутніх рівнянь будемо також вважати, що якісний склад на мікроскопічному рівні залишається незмінним (хімічні та ядерні реакції відсутні), кількісний склад також залишається незмінним (відсутні дифузія та випаровування). Також вважається, що температура лежить достатньо далеко від точок фазових переходів.

У результаті такої уявної побудови та припущень, аналіз руху всього суцільного середовища, яке не перебуває в рівновазі, не має однієї густини, температури, тиску тощо, замінюється на розгляд деякої “частинки” із внутрішньою структурою, яка може розглядатися як термодинамічно рівноважна система із своєю густиною, температурою, тиском тощо, які відрізняють її від сусідніх фнм-частинок. Це дозволяє використати для її опису відомі рівняння класичної механіки, електро- та термодинаміки.

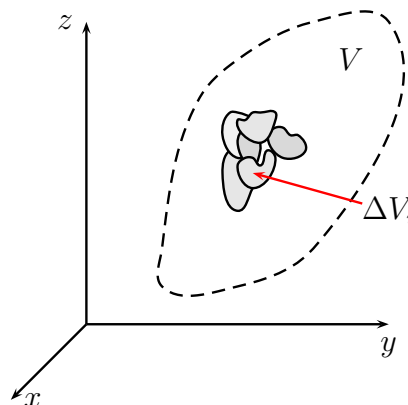


Рис. 25.1. Розбиття суцільного середовища.

4. КІНЕМАТИКА ФНМ-ЧАСТИНКИ. Після виділення фнм-частинки опишемо її механічний стан. У класичній механіці він задається координатами і швидкостями матеріальних точок системи, кожна з яких не має внутрішніх степенів вільності. У фнм-частинки такі ступені вільності є, вони описують новий тип руху, який відсутній для безструктурної матеріальної точки, тому механічний стан фнм-частинки доведеться задавати більш складними величинами.

Координати фнм-частинки. Опис фнм-частинки у загальних рисах нагадує опис матеріальної точки у механіці Ньютона з тією суттєвою відмінністю, що фнм-частинка має внутрішню структуру. Для задання матеріальної точки потрібно обрати систему відліку та ідентифікатор, який дозволяє відрізнити цю частинку від інших. У випадку фнм-частинки, що відповідає малому об'єму ΔV_i згідно з проведенням розбиття, роль ідентифікатора відіграватиме умовний номер i елементу об'єму, який присвоєно їй в момент часу розбиття t_0 , цей номер залишається незмінним у майбутньому.

Ідентифікатор фнм-частинки, очевидно, краще вибрати тривимірним, щоб відображати просторове положення відповідного малого об'єму в момент часу t_0 , коли було виконано розбиття. Тому для індивідуалізації фнм-частинок зручно використовувати координати деякої *точки-маркера*¹, яка обирається за однією домовленістю в кожній із фнм-частинок в момент часу t_0 :

¹ Цей термін не є загальноприйнятим.

Радіус-вектор $\vec{\xi}$ точки-маркера у вибраній системі відліку в момент часу розбиття t_0 відіграє роль ідентифікатора фнм-частинки.

Точка-маркер може бути, наприклад, центром мас, але найважливішим є те, що вона нерозривно зв'язана з частинкою й рухається разом з нею, не залишаючи її об'єму — образно кажучи, “вморожена” в цю частинку. На мікроскопічному рівні можна вважати що це деяка молекула, яка виділена серед інших за деякою ознакою². Якщо вибрати іншу молекулу всередині тієї самої фнм-частинки, то ця координата буде іншою, але також весь час незмінною. Таким чином, тривимірний індекс $\vec{\xi}$ завжди залишається сталим і відіграє роль імені частинки з одного боку, а з іншого боку його можна вважати неперервним для позначення різних частин всередині кожної фнм-частинки.

У довільний момент часу $t > t_0$ положення фнм-частинки у L -системі можна описати за допомогою радіус-вектора точки-маркера $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$, які, у силу вибору цієї точки, змінюються з часом, а в початковий момент часу збігаються з $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi} = \vec{r}(\vec{\xi}, t)|_{t=t_0}.$$

Для самої точки-маркера її координати в момент часу розбиття t_0 відіграють *буквально* ту саму роль, що номер частинки у механіці Ньютона, тобто потрібні для того, щоб відрізнити різні точки-маркери.

Далі вважається, що розбиття виконано і вектори $\vec{\xi}$ та $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$ будуть відноситись до всієї фнм-частинки. Сталі координати $\vec{\xi}$, що ідентифікують всі фнм-частинки (і фіксують розбиття середовища), називаються *координатами Лагранжа* суцільного середовища. Змінні координати $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$ описують положення фнм-частинок (для вже вибраної нумерації) у наступні після розбиття моменти часу.

Таким чином, для опису стану суцільного середовища в термінах координат Лагранжа в момент t потрібно знати:

- 1) координати фнм-частинки $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$;
- 2) її швидкість $\vec{v}(\vec{\xi}, t)$;
- 3) інші механічні характеристики: наприклад, прискорення $\vec{a}(\vec{\xi}, t)$, деякі термодинамічні характеристики, наприклад, густину $\rho(\vec{\xi}, t)$, температуру $T(\vec{\xi}, t)$, тиск $p(\vec{\xi}, t)$, ентропію $S(\vec{\xi}, t)$ тощо, та, можливо, інші величини — наприклад, діелектричну проникність $\varepsilon(\vec{\xi}, t)$.

Зауваження. Відмітимо, що у механіці матеріальної точки ідентифікатор завжди можна вибрати незалежно від системи відліку, тоді як для суцільного середовища (у даному підході) це не так. Для означення координат точки-маркера обов'язково потрібно спершу задати систему відліку.

Сама точка-маркер є допоміжним поняттям і не має жодного стосунку до матеріальної точки. Аналогом матеріальної точки є вся фнм-частинка. ┘

На практиці простежити за рухом окремої фнм-частинки складно, оскільки потрібно проводити вимірювання в одному і тому самому рухомому малому об'ємі

² Наприклад, фнм-частинка включає стабільний ізотоп іншої маси, що відрізняється від інших молекул з її складу.

не збурюючи його стан. Тому всі виміри характеристик середовища проводять (звичайно, намагаючись внести найменші збурення) у фіксованій точці простору \vec{r} , через яку проходять різні фнм-частинки в різні моменти часу. Отже, обчислення доцільно проводити для характеристик середовища в таких координатах.

Незалежні від часу координати \vec{r} називаються *координатами Ейлера*, їх буде розглянуто нижче. Для опису середовища в цих координатах потрібно знати швидкість фнм-частинки, інші механічні характеристики (наприклад, прискорення), термодинамічні характеристики (густину та інші) — за винятком координати, це ті самі величини, що і в описі Лагранжа, які залежать, однак, не від індексу фнм-частинки, а від координат точки простору \vec{r} .

Деформація фнм-частинки. У процесі руху суцільного середовища змінюються не тільки просторові положення фнм-частинок, на які умовно розбито середовище, а також орієнтація та форма відповідних їм об'ємів. Як і в механіці абсолютно твердого тіла, для опису зміни орієнтації цих об'ємів у часі можна ввести власну (або локальну) систему координат всередині кожної з фнм-частинок, що рухається разом з нею невіддільно, повторюючи всі її рухи ("вморожені" до неї). Однак із плином часу змінюється не лише орієнтація осей власної системи координат відносно осей лабораторної (як у механіці АТТ), але і їх взаємна орієнтація, що відбувається внаслідок зміни форми та об'єму фнм-частинки. Це приводить до того, що кути між векторами базису власної системи координат і елементи довжини є змінними, що приводить до зміни метричного тензора. Новий, порівняно з АТТ, тип руху, який виявляється у внутрішніх змінах власної системи координат, називається *деформаційним*.

Таким чином, фнм-частинка здійснює три типи руху:

- *поступальний* як цілого (зміна положення точки-маркера в просторі, або об'єму фнм-частинки як цілого);
- *обертальний* як абсолютно твердого тіла (зміна орієнтації фнм-частинки);
- *деформаційний* як зміна форми та об'єму фнм-частинки.

Перші два типи руху можна описати тими самими методами, які було використано раніше для матеріальної точки та АТТ.

Для характеристики деформаційного руху необхідно ввести поняття початкового, *недеформованого стану*, який може існувати реально, а може бути уявним. Прикладом останнього може бути уявний недеформований стан планети за відсутності її гравітації, яка, однак, існує завжди і стискає її. Вектор переміщення фнм-частинки із недеформованого стану в деякий момент часу t_0 у стан в момент t називається *вектором деформації*:

$$\vec{u}(\vec{\xi}, t) = \vec{r}(\vec{\xi}, t) - \vec{r}(\vec{\xi}, t_0) = \vec{r}(\vec{\xi}, t) - \vec{\xi}, \quad (25.1)$$

до цього нього входять переміщення, викликані всіма трьома типами руху. Ця характеристика не завжди буває зручною, наприклад у випадку, коли задача полягає у аналізі тільки одного з трьох типів руху.

Швидкість фнм-частинки вводиться згідно зі звичайним означенням швидко-

сті матеріальної точки у класичній механіці:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{\xi}, t) = \vec{v}(\vec{\xi}, t) \equiv \dot{\vec{u}}(\vec{\xi}, t), \quad (25.2)$$

тим самим способом можна означити другу і вищі похідні. Звідси видно, що до швидкості фнм-частинки входять швидкості усіх трьох типів руху, аналогічно до координат. Підкреслимо, що швидкість і прискорення фнм-частинки визначаються так само, як у механіці Ньютона, або Лагранжа, тобто вони не є незалежними змінними, на противагу імпульсам в механіці Гамільтона.

У описі Ейлера швидкість середовища $\vec{v}(\vec{\xi}, t)$ відноситься не до конкретної фнм-частинки із фіксованим індексом $\vec{\xi}$, а до тієї фнм-частинки, яка в даний момент t проходить через точку \vec{r} , тобто це швидкість $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{\xi}(\vec{r}, t), t)$, де $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ є розв'язком рівняння $\vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$, (підстановка вносить залежності від \vec{r} і t).

Тензор деформації фнм-частинки. Ми побудували координати і швидкості фнм-частинки, які включають всі типи руху. Але поступальний і обертальний рухи описуються рівняннями Ньютона та Ейлера, яких недостатньо для опису деформаційного руху, оскільки він є відносним рухом різних частин всередині одної фнм-частинки.

Для характеристики відносних положень частинок всередині фнм-частинки можна обрати відносне видовження деякого відрізка всередині фнм-частинки, відносну зміну її об'єму тощо. Але з математичних міркувань очевидно, що найкраще вибрати деяку скалярну характеристику, яка б залишилась інваріантною відносно трансляцій та поворотів — тоді поступальний і обертальний рухи не будуть впливати на її значення. Найпростішою характеристикою є квадрат елемента довжини між двома точками всередині фнм-частинки:

$$dl^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dl_i dl_j, \quad dl = |d\vec{r}|. \quad (25.3)$$

де \vec{e}_i — вектори базису власної системи координат, а dl_i — елементи довжини вздовж відповідних координатних ліній (у прямокутних декартових координатах $dl_i = dx_i$). Якщо базис є ортонормованим, то $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, у загальному випадку косокутних координат матриця

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

називається *метричним тензором*, він визначає вираз для елемента довжини у вибраних координатах. Якщо базис є локальним, тобто напрямки \vec{e}_i залежать від точки \vec{r} , то метричний тензор також залежить від точки \vec{r} .

Розглянемо фнм-частинку, у якій виділимо дві довільні точки A та B з радіус-векторами $\vec{r}_A = \vec{r}$ та $\vec{r}_B = \vec{r} + d\vec{r}$ (див. рис. 25.2). Відповідний елемент довжини дається виразом (25.3).

У процесі руху фнм-частинка деформується і точки A та B переходять у точки A' та B' з радіус-векторами \vec{r}' та $\vec{r}' + d\vec{r}'$ відповідно. Тоді:

$$dl'^2 = d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j) dl'_i dl'_j,$$

де dl'_i — елементи довжини у власних координатах фнм-частинки. У результаті деформації довжини та орієнтація власних векторів змінюються, але елементи довжини, як проекції вектора $d\vec{r}$, залишаються сталими (як число одиниць у новому масштабі, який визначається довжиною вектора базису). Тому зміна відстані між точками A та B , що відбувається у результаті деформації, матиме вигляд:

$$dl'^2 - dl^2 = (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j - \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dl_i dl_j = (g'_{ij} - g_{ij}) dl_i dl_j, \quad (25.4)$$

таким чином, зміна квадрату елемента довжини цілком описується зміною компонент метричного тензора. Введемо перепозначення $2u_{ij} = g'_{ij} - g_{ij}$, тоді

$$dl'^2 - dl^2 = 2u_{ij} dl_i dl_j, \quad u_{ij} = \frac{1}{2} (g'_{ij} - g_{ij}). \quad (25.5)$$

Тензор другого рангу u_{ij} називається *тензором деформації*³. За своїм походженням він описує тільки деформаційний рух фнм-частинки, оскільки будується з величин, які є інваріантними відносно паралельних переносів та поворотів.

У прямому означенні тензора деформації через метричний тензор доданки g'_{ij} та g_{ij} задані у різних координатах. Для того, щоб отримати явний вираз для u_{ij} потрібно другий доданок записати у системі відліку першого або навпаки.

Нехай точки A та B відповідають початковому (недеформованому) стану фнм-частинки. Перетворимо до нього метричний тензор g'_{ij} , який відповідає деформованому стану. Для простоти виберемо A як точку-маркер, тому $\vec{r} = \vec{\xi}$. Орти власної системи координат напрямлені вздовж дотичних до координатних ліній, тому

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_i}$$

(dl_i позначає елемент довжини, проведений від точки $\vec{\xi}$). У деформованому стані кожна координата \vec{r} збільшується на величину деформації \vec{u} , тому $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}$. За означенням, орт власної системи в деформованому стані має вигляд:

$$\vec{e}'_i = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial l_i} = \frac{\partial (\vec{r} + \vec{u})}{\partial l_i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i}, \quad (25.6)$$

звідси

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \left(\vec{e}_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i} \right) \cdot \left(\vec{e}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j} \right)$$

тому

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j} \right), \quad (25.7)$$

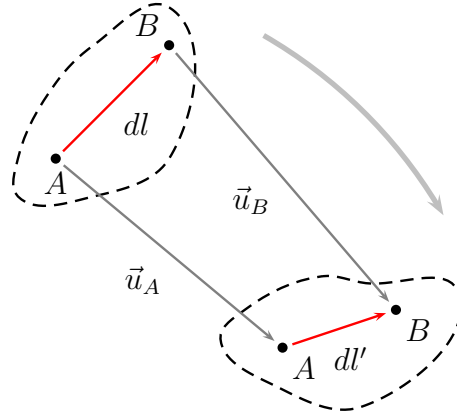


Рис. 25.2. До означення тензора деформації.

³ Це дійсно тензор згідно з оберненою тензорною ознакою.

де \vec{u} — вектор деформації в точці \vec{r} в момент t в L -системі, \vec{e}_i — орти L -системи, dl_i — елемент довжини вздовж i -ої координати, який у випадку криволінійних координат дорівнює добутку параметру Ламе на диференціал координати.

Згідно з цим означенням він має такі властивості: 1) це симетричний тензор другого рангу, який має шість незалежних компонент; 2) це безрозмірна величина, тому його числові значення можна порівнювати із одиницею. Оскільки ми завжди будемо залишатися в межах лінійної теорії з малими деформаціями, то квадратичними доданками можна знехтувати і одержуємо:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i} \right). \quad (25.8)$$

Для практичних використань цю формулу варто спростити, заносючи орти під знак похідної і відняти відповідну похідну від орту:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial l_j} + \frac{\partial u_j}{\partial l_i} - \vec{u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial l_j} + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial l_i} \right) \right]. \quad (25.9)$$

Перевага цієї формули полягає в тому, що орти \vec{e}_i криволінійних систем залежать не від усіх координат l_j тому частина похідних зникає. На практиці замість індексів i та j в основному використовують номінальні позначення координат за певною домовленістю.

Зауваження. Переміщення точок A та B легко пов'язати безпосередньо із введеним раніше вектором деформації не використовуючи метричного тензора і розгляду недеформованого стану. Для кращого усвідомлення поняття деформації розглянемо інший спосіб пошуку тензора деформації, який приводить до еквівалентного результату. Очевидно, різниця $\vec{r}' - \vec{r}$ радіус-векторів положення точки A є приростом вектора деформації ф-м-частинки, якщо цю точку вибрати як маркер. Те саме стосується і точки B (положення якої відрізняється на $d\vec{r}$), тому

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}' - \vec{r}, \quad \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) = (\vec{r}' + d\vec{r}') - (\vec{r} + d\vec{r}),$$

Відмінність між деформаціями точок A та B буде:

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) = d\vec{r}' - d\vec{r},$$

тому

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}(\vec{r}) \Rightarrow dl'^2 = dl^2 + 2d\vec{r} \cdot d\vec{u}(\vec{r}) + [d\vec{u}(\vec{r})]^2.$$

У загальному випадку

$$dl'^2 - dl^2 = 2d\vec{r} \cdot d\vec{u}(\vec{r}) + [d\vec{u}(\vec{r})]^2. \quad (25.10)$$

Зв'язок з тензором деформації можна отримати, якщо розкласти приріст деформації у ряд Тейлора. У наближенні першого порядку по вектору деформації:

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(\vec{r}) + \dots, \quad \text{де} \quad \vec{\nabla} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial l_i},$$

і, враховуючи, що $d\vec{r} = \vec{e}_i dl_i$ та $\vec{u} = \vec{e}_i u_i$, знайдемо у наближенні першого порядку:

$$dl'^2 - dl^2 \simeq 2d\vec{r} \cdot d\vec{u}(\vec{r}) = 2dl_i dl_j \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j}. \quad (25.11)$$

Порівнюючи цей вираз з означенням тензора деформації, отримаємо, симетризуючи по індексах i та j :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l_i} \right), \quad (25.12)$$

у загальному випадку вектори базису підлягають диференціюванню.

Інваріантний вираз $2u_{ij}dl_idl_j = 2d\vec{r} \cdot d\vec{u}$ зручний для пошуку компонент тензора деформації у заданих координатах. \lrcorner

Приклад 1. Декартові координати.

◀ Якщо замість $i, j = 1, 2, 3$ використати символи відповідних координат x, y, z , одразу ж знаходимо

$$u_{11} \equiv u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (25.13)$$

оскільки декартові орти глобальні і не залежать від координат. Для позадіагональної компоненти:

$$u_{12} = u_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (25.14)$$

виведення виразів для інших компонент аналогічне. \blacktriangleright

Приклад 2. Сферичні координати.

◀ Вводимо перепозначення $1 \rightarrow r$, $2 \rightarrow \theta$ і $3 \rightarrow \varphi$, використовуємо значення параметрів Ламе $H_1 = 1$, $H_2 = r$ і $H_3 = r \sin \theta$ і очевидне означення вектора

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z. \quad (25.15)$$

Згідно означення орта (25.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial l_\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Оскільки орти не залежать від координати r , то одразу одержуємо:

$$u_{11} \equiv u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (25.16)$$

а після диференціювання орта та нескладних перетворень матимемо:

$$u_{12} \equiv u_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \vec{u} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (25.17)$$

Аналогічно можна знайти всі інші компоненти. \blacktriangleright

Для довідок наведемо вирази для компонент тензора деформації у найбільш поширених ортогональних системах координат:

- у циліндричних координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad 2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r},$$

- у сферичних координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta,$$

$$2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r},$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.$$

Тензор швидкості деформації. Знайдемо вираз, який характеризує швидкість деформаційного руху. Очевидно, що вона повинна залежати від стану системи в два нескінченно близькі моменти часу, на відміну від тензора деформації, який описує різницю координат у два довільні моменти часу (як переміщення протягом довільного часу). Тому найпростіше ввести тензор швидкості деформації аналогічно до означення швидкості, тобто:

$$du_{ij} = v_{ij} dt, \quad (25.18)$$

du_{ij} — переміщення за час $[t, t + dt]$. Звідси

$$v_{ij} = \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{1}{2dt} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial d\vec{u}}{\partial l_i} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial d\vec{u}}{\partial l_j} + \frac{\partial d\vec{u}}{\partial l_i} \cdot \frac{\partial d\vec{u}}{\partial l_j} \right), \quad (25.19)$$

і після підстановки $d\vec{u} = \vec{v} dt$, спрощень та нехтування нескінченно малою dt отримуємо такий вираз для тензору швидкостей деформації:

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial l_j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial l_i} \right). \quad (25.20)$$

Згідно з цим означенням він має такі властивості: 1) це симетричний тензор другого рангу, що має шість незалежних компонент; 2) це величина розмірності $[t]^{-1}$. Тому для аналізу його числові значення компонент v_{ij} потрібно порівнювати із деякою характеристикою суцільного середовища розмірності частоти, або оберненого часу. У газах такою характеристикою є час вільного пробігу між зіткненнями молекул між собою і зі стінками посудини. В рідинах це час осілого життя молекул між стрибками в інше положення. В твердих тілах це частоти власних коливань атомів навколо положень рівноваги, які мають порядок 10^{13} с^{-1} . У рідинах і газах вказані частоти набагато менші, тому величини v_{ij} відіграють суттєву роль у їх русі на відміну від твердих тіл.

Інші характеристики фнм-частинки. Кожну величину, що відноситься до фнм-частинки, позначатимемо додатковим символом Δ перед її традиційним позначенням. Наприклад: $\Delta m(\vec{\xi}, t)$ — маса фнм-частинки з індексом $\vec{\xi}$, $\Delta \vec{P}(\vec{\xi}, t)$ та $\Delta \vec{L} = \vec{r}(\vec{\xi}, t) \times \Delta \vec{P}(\vec{\xi}, t)$ — імпульс та момент імпульсу тієї самої фнм-частинки, а $\Delta T(\vec{\xi}, t)$ — її температура.

Картини руху фнм-частинки. Внаслідок руху фнм-частинки її координати $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$ змінюються. Існує два підходи до інтерпретації цієї залежності.

Картина Лагранжа полягає у спостереженні за рухом виділеної фнм-частинки з номером $\vec{\xi}$ (фіксована координата Лагранжа), залежність $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$ описує її просторове переміщення з часом. Картина Лагранжа природно з'являється у феноменологічному підході на етапі адаптації стандартних понять механіки матеріальної точки до такого складного об'єкту, як суцільне середовище. Всі характеристики суцільного середовища будуть залежати від координати Лагранжа $\vec{\xi}$, що ідентифікує частинку, та моменту часу:

$$F = F(\vec{\xi}, t).$$

Такий опис руху зручний для загального аналізу, для експерименту він неефективний, оскільки слідкувати за переміщеннями малого об'єму суцільного середовища, який було виділено уявно, досить важко.

У картині Ейлера спостереження проводяться не з окремо взятою фнм-частинкою, а зі значеннями характеристик середовища (швидкості, деформації, температури тощо) у даній точці простору \vec{r} , яка фіксована у лабораторній системі координат. Ці характеристики вимірюються нерухомим приладом, і відповідають різним фнм-частинам, які опиняються у цій точці протягом часу вимірювання. У картині Ейлера основну увагу зосереджено на тому, що відбувається у даній точці простору, рух самих фнм-частинок не розглядається. Усі характеристики суцільного середовища у підході Ейлера будуть залежати від координат точки \vec{r} та моменту часу:

$$F = F(\vec{r}, t).$$

Наприклад, швидкість, прискорення, температура та інші величини мають бути визначені у кожній точці простору. У такому контексті координата \vec{r} називається *координатою Ейлера* суцільного середовища. У випадку фіксованого \vec{r} та змінного t функція $F(\vec{r}, t)$ описує зміну характеристики F з часом у даній точці простору, а для змінного \vec{r} та фіксованого t — розподіл характеристики у просторі у даний момент часу ("миттєвий знімок" розподілу у об'ємі). Такий підхід має очевидні переваги для аналізу експериментальних даних.

На формальному рівні відмінність між картинами Лагранжа та Ейлера полягає в тому, що у першому випадку незалежними величинами є $(\vec{\xi}, t)$, а у другому — (\vec{r}, t) . Вирази $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$ дають не тільки інформацію про рух, а і визначають зв'язок між картинами Лагранжа та Ейлера, перехід від однієї картини до іншої можна здійснити так:

- **картина Лагранжа \rightarrow картина Ейлера:** із співвідношень $\vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$ знайдемо вираз $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t)$. Для фіксованого \vec{r} ця функція вказує, яка фнм-частинка

проходить через дану точку простору у момент часу t . Якщо $F = F(\vec{\xi}, t)$ — деяка характеристика у картині Лагранжа, то

$$F = F(\vec{\xi}(\vec{r}, t), t) = F(\vec{r}, t)$$

буде її аналогом у картині Ейлера і буде відноситись до даної точки простору.

- **картина Ейлера \rightarrow картина Лагранжа:** якщо задано розподіл деякої характеристики у просторі, зокрема, швидкості $\vec{v}(\vec{r}, t)$, у картині Ейлера, то для переходу до картини Лагранжа відмітимо, що швидкість у даний момент часу t у точці \vec{r} є швидкістю деякої фнм-частинки, яка у наступний момент часу заміниться на іншу фнм-частинку. Якщо продовжувати за нею слідкувати, то співвідношення

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

дають систему диференціальних рівнянь, розв'язок яких залежатиме від трьох сталих інтегрування $\vec{\xi}$, які і будуть координатами Лагранжа, тобто $\vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$. Маючи цей вираз, можна знайти закон руху $F(\vec{\xi}, t) = F(\vec{r}(\vec{\xi}, t), t)$ для фнм-частинки (просторова координата залежить від часу і визначає положення фнм-частинки у даний момент часу).

Диференціювання характеристик середовища по часу. Як в картині Лагранжа, так і в картині Ейлера у зв'язку з рухом фнм-частинок характеристики суцільного середовища (густина, температура, тощо) будуть змінюватись. Для визначення швидкості такої зміни потрібно обчислити повну похідну по часу відповідної характеристики.

У картині Лагранжа співвідношення, що дає закон зміни характеристики, описується функцією $F = F(\vec{\xi}, t)$ (для скорочення будемо опускати символ “ Δ ”). Оскільки координата Лагранжа $\vec{\xi}$ є сталою, то швидкість зміни матиме вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\vec{\xi}} \equiv \frac{\partial F(\vec{\xi}, t)}{\partial t} \Big|_{\vec{\xi}=\text{const}}$$

У картині Ейлера закон зміни тієї самої характеристики задається функцією з іншими незалежними аргументами $F = F(\vec{r}, t)$. Для визначення похідної F у картині Ейлера скористаємось таким прийомом:

- 1) перейдемо до координат Лагранжа у функції $F(\vec{r}, t)$, не спрощуючи виразу;
- 2) знайдемо похідну по часу з фіксованим $\vec{\xi}$;
- 3) повернемося до координат \vec{r} підстановкою до результату диференціювання формул $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t)$.

Така послідовність дій пов'язана з тим, що первинною є картина Лагранжа і в ній будувати похідні зручніше, тоді як картина Ейлера означена вже через неї.

Якщо \vec{r} — фіксована точка простору, то функція $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ дає ідентифікатор фнм-частинки, яка розташована в точці \vec{r} у даний момент часу t . Для цього запишемо тотожність

$$F(\vec{r}(\vec{\xi}, t), t) \equiv F(\vec{\xi}, t), \quad \text{де } \vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t) \text{ або } \vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t),$$

обидві частини рівності виражено або через координати Лагранжа $\vec{\xi}$, або через координати Ейлера \vec{r} .

Запишемо похідну тотожності по часу, вважаючи, що до правої виконано підстановку $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$, але вираз не спрощено. Використовуючи формулу диференціювання складної функції, маємо:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}(\vec{\xi}, t)}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}}.$$

Оскільки у картині Лагранжа $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{\xi}, t)}{\partial t}$ (швидкість фнм-частинки у даний момент часу), то

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})F.$$

Повертаючись до змінних Ейлера, виконаємо підстановку $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t)$ і введемо позначення:

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} \Big|_{\text{підстановка } \vec{\xi}=\vec{\xi}(\vec{r}, t)}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{r}} \Big|_{\text{підстановка } \vec{\xi}=\vec{\xi}(\vec{r}, t)}.$$

Похідна $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}}$ характеризує швидкість зміни F із часом для даної фнм-частинки, а після підстановки — швидкість зміни, яка враховує переміщення фнм-частинок, і називається *повною*, або *субстанціональною похідною* і позначається просто $\frac{dF}{dt}$. Похідна $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\vec{r}}$ описує зміну F як такої у даній точці простору \vec{r} і називається *локальною похідною* і позначається просто $\frac{\partial F}{\partial t}$. Нарешті, останній доданок $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})F$ називається *конвективною похідною*, його поява викликана переміщенням фнм-частинки, що приводить до відмінності між локальною та субстанціональною похідними. Після переходу до картини Ейлера \vec{v} позначає швидкість у даній точці простору. Остаточно,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})F. \quad (25.21)$$

У формальному операторному записі:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}. \quad (25.22)$$

Таким чином, зміна довільної характеристики F суцільного середовища у фіксованій точці простору викликана двома причинами: 1) її зміною у часі у тієї фнм-частинки, що перебуває в цій точці в даний момент часу; 2) припливом фнм-частинок із іншими її значеннями внаслідок їх просторового переміщення.

5. Висновки. На першому етапі макроскопічного підходу було побудовано означення фнм-частинки і кінематику її руху. У цілому цей етап звівся до наступного:

- 1) кожен фнм-частинку можна ідентифікувати тривимірною лагранжевою координатою-індексом $\vec{\xi}$, яка залишається незмінною впродовж всього її руху;

- 2) положення фнм-частинки можна описати в лабораторній системі відліку за допомогою ейлерової координати $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$, або вектора деформації $\vec{u}(\vec{\xi}, t)$, до якого входять складові, що викликані її переміщенням, обертанням і деформацією;
- 3) рух фнм-частинки характеризується її швидкістю $\vec{v}(\vec{\xi}, t)$, або швидкістю деформацій $\dot{\vec{u}}(\vec{\xi}, t)$, до яких також дають внески швидкості переміщення, обертання і деформації;
- 4) для опису деформації та деформаційного руху означено тензори деформацій u_{ij} та швидкості деформацій v_{ij} відповідно, які симетричні, мають другий ранг і розмірність одиниці та $[t]^{-1}$ відповідно;
- 5) зміна характеристики суцільного середовища у фіксованій точці простору визначається зв'язком між повною, локальною та конвективними похідними.

Задача 25.1. Знайти тензор деформації в декартових координатах з урахуванням нелінійних доданків.

Задача 25.2. Знайти тензор деформації в циліндричних і сферичних координатах у лінійному наближенні.

Задача 25.3. Показати, що тензор деформації не змінюється, якщо до деформації явно включити довільний вектор трансляції $\vec{u}_t \equiv \vec{r}_0$ та довільний поворот $\vec{u}_r \equiv A_{ij}r_i\vec{e}_j$ де матриця A_{ij} антисиметрична.

Задача 25.4. Показати, що тензор швидкості деформації не змінюється, якщо до швидкості деформації явно включити довільний вектор поступальної швидкості $\vec{v}_{\parallel} \equiv \vec{v}_0$ та довільну швидкість обертального руху $\vec{v}_{\circ} \equiv \vec{\omega} \times \vec{r}$ де $\vec{\omega}$ — кутова швидкість.

Задача 25.5. Довести безпосередньою перевіркою, що для тензора деформації в декартових координатах в лінійному наближенні виконуються так звані умови Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 u_{ni}}{\partial x_j \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{mj}}{\partial x_i \partial x_n} = \frac{\partial^2 u_{mi}}{\partial x_j \partial x_n} + \frac{\partial^2 u_{nj}}{\partial x_i \partial x_m}. \quad (25.23)$$

6. Мікроскопічний підхід. Згідно з законом великих чисел, флуктуації різних характеристик системи (густина, тиск, температура і т.п.) із N частинок пропорційні $\frac{1}{\sqrt{N}}$ і спадають із збільшенням числа частинок. Тому при $N \rightarrow \infty$ вплив дискретності повинен зникати. На основі цих міркувань в 20 – 50-х роках XX століття було розвинуто мікроскопічний підхід до опису суцільного середовища. Його основні положення описуються такою схемою:

Крок 1. Будується функція Гамільтона для N мікроскопічних частинок з яких складається суцільне середовище, у вигляді

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) \equiv H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (25.24)$$

де $U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ — потенціал міжчастинкової взаємодії.

Крок 2. Допускається, що у фазовому просторі системи існує функція розподілу

$$F(\vec{r}, \vec{p}, t) \equiv F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t),$$

є такою, що величина $F d\Gamma$ задає ймовірність того, що в момент часу t частинки системи перебувають в околі $d\Gamma \equiv d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N$ навколо точки фазового простору з координатами (\vec{r}, \vec{p}) . Для неї записується рівняння Ліувілля:

$$\frac{\partial F(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + [H, F] = 0, \quad (25.25)$$

де $[H, F]$ — дужки Пуассона для функцій H і F .

Крок 3. Вводиться означення фізичних (вимірюваних експериментально) величин, як середніх значень у фазовому просторі, у припущенні, що всі частинки мають однакову поведінку в цілому. Наприклад, для густини середовища справедливий вираз:

$$\rho(\vec{r}, t) = m \int F(\vec{r}, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N, \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N, t) d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N \equiv m \int F(\vec{r}, \vec{p}, t) d\Gamma_1, \quad (25.26)$$

де Γ_1 — неповний фазовий простір, в якому відсутні координати вектора \vec{r}_1 , m — маса молекули (елементарного об'єкту). Для середнього імпульсу і середньої швидкості справедливо:

$$\langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle \equiv \langle \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle = \int \vec{p}_1 F(\vec{r}, \vec{p}, t) d\Gamma_1. \quad (25.27)$$

Повністю аналогічно можна побудувати більш складні вирази: кінетичну енергію, внутрішню енергію, тиск, ентропію і, у принципі, будь-яку іншу конструкцію.

Крок 4. Виходячи із введених означень фізичних величин і рівняння Ліувілля отримуємо рівняння для них таким чином:

- 1) домножуємо рівняння (25.25) на відповідні величини, що входять до інтегралів вигляду (25.26) та (25.27);
- 2) інтегруємо, як означено в попередньому пункті;
- 3) виражаємо отриманий результат через введені раніше означення для фізичних величин.

Наприклад, виведення рівняння для густини середовища буде таким:

1,2) домножаємо рівняння Ліувілля на 1 (у даному випадку) та інтегруємо по неповному фазовому простору, явно розкривши дужки Пуассона:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \right) d\Gamma_1 = 0, \quad (25.28)$$

3) беремо до уваги, що згідно з означеннями виконуються такі рівності:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\vec{p}_i}{m}, \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} \cdot \vec{\nabla}_i U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (25.29)$$

і далі для інтегрування по неповному фазовому простору використовуємо теорему Остроградського-Гаусса. Вона дозволяє кожен інтеграл по об'єму у звичайному просторі

$\int \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i$ та у просторі імпульсів $\int \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} d\vec{p}_i$ перетворити до інтегралів по поверхнях, які обмежують ці простори. На межі системи у фазовому просторі $F = 0$, тому інтеграли від усіх доданків у дужках Пуассона дадуть нуль, за винятком $\int \vec{p}_1 \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_1} d\Gamma_1$, оскільки інтегрування по змінній \vec{r}_1 відсутнє. Тепер перетворюємо цей вираз врахувавши, що

$$\int \vec{p}_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{r}_1} d\Gamma_1 \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \cdot \int \vec{p}_1 F d\Gamma_1 = \operatorname{div} \langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle \equiv \operatorname{div} \langle \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle, \quad (25.30)$$

і отримуємо рівняння неперервності у вигляді:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (25.31)$$

Виведення рівнянь для інших величин дещо складніше і потребує знання функцій розподілу не тільки для N частинок а й для всіх менших значень N починаючи із одиниці. Рівняння для вказаних функцій було отримано в 50-і роки ХХ століття, вони називаються *ланцюжком ББГКІ*, від імен його авторів Боголюбова, Борна, Гріна, Кірвуда та Івона. Якщо використати процедуру обривання нескінченного ланцюжка таких рівнянь, запропоновану Боголюбовим, то вони втрачають симетрію заміни знаку часу, і набувають властивості необоротності — своєрідної пам'яті. Наприклад рівняння Ліувілля та рівняння неперервності є оборотними, а рівняння для теплопровідності та дифузії — ні. До необоротних рівнянь руху будуть входити різноманітні коефіцієнти (в'язкість, пружні сталі, коефіцієнти дифузії, теплопровідності тощо), які будуть виражатися через мікроскопічні характеристики системи і зокрема через потенціал взаємодії. На жаль, указана схема може бути повністю реалізована лише для модельного потенціалу твердих сфер:

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \quad (25.32)$$

а для більш реалістичних потенціалів вдається отримати лише нульові, досить неточні наближення.

Основне значення мікроскопічного підходу полягає у вирішенні проблеми необоротності у фізиці і в побудові загальної схеми виведення рівнянь теорії суцільного середовища із перших принципів. У зв'язку з великими складнощами технічного характеру, цінність його застосування для практичних розрахунків незначна.

ЛЕКЦІЯ 26

Закони збереження і динаміка

1.	Закони збереження і динаміка фнм-частинки.	419
2.	Сили, що діють на фнм-частинку.	420
3.	Момент сил, що діють на фнм-частинку.	422
4.	Закон збереження маси фнм-частинки. Рівняння неперервності.	423
5.	Закон збереження імпульсу фнм-частинки. Рівняння руху.	425
6.	Закон збереження моменту імпульсу. Симетрія тензора механічних напружень.	427
7.	Закон збереження енергії. Рівняння для внутрішньої енергії.	428
8.	Висновки.	431

1. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ І ДИНАМІКА ФНМ-ЧАСТИНКИ. Раніше було пройдено перший етап феноменологічного підходу до вивчення суцільного середовища, а саме, виділено об'єкт дослідження у моделі суцільного середовища і введено величини, що описують його положення і рух взагалі та деформації зокрема.

На другому етапі потрібно зробити припущення стосовно природи виділеного об'єкта та застосувати для його опису відомі закони фізики. Будемо вважати, що фнм-частинка є класичним об'єктом, який можна описати 1) класичними законами механіки, 2) електродинаміки, 3) термодинаміки та 4) лінійної кінетичної теорії. Підкреслимо, що це є набором припущень справедливості яких можна підтвердити лише після порівняння результатів обчислень з експериментом. У результаті:

- перше припущення дає можливість використовувати закони Ньютона, зокрема їх найбільш загальну форму у вигляді законів зміни класичних інтегралів руху;
- друге припущення дозволить використати закони електродинаміки суцільного середовища для опису його відгуку на зовнішнє електромагнітне поле (поляризація і намагнічення);
- третє припущення дозволить використати закони рівноважної термодинаміки для опису його відгуку на зміну зовнішніх термодинамічних параметрів (температури, тиску тощо);
- четверте припущення дозволяє використати закони лінійної кінетики для опису процесів переносу, які спрямовані на повернення системи до рівноваги при малих збуреннях (потік тепла, дифузійний потік, електричний струм, тощо).

Наголосимо, що згадана вище умова незалежності рівнянь руху від розбиття суцільного середовища на фнм-частинки є критерієм достовірності, з виконання якого випливає, що на отримані рівняння не вплинула процедура їх побудови. Цим другий етап феноменологічного підходу вичерпується.

На третьому етапі потрібно побудувати рівняння руху суцільного середовища, виходячи із відомих рівнянь, які на другому етапі взято за основу опису фнм-частинки. Спочатку розглянемо закони зміни інтегралів руху механічних величин. Для їх побудови потрібно знати механічний стан фнм-частинки, а також сили і моменти сил, які діють на неї. Механічний стан вже було розглянуто, тому знайдемо останні.

2. Сили, що діють на фнм-частинку. Щоб побудувати вирази для сили, треба зважити на те, що вона є рівнодіючою всіх сил, прикладених до мікроскладових фнм-частинки. На мікročастинку можуть діяти сили з боку зовнішніх полів та з боку сусідніх фнм-частинок середовища, які можна розділити відповідно на *зовнішні* та *внутрішні* за аналогією з механікою системи матеріальних точок.

Зовнішня сила, що прикладена до фнм-частинки з боку зовнішніх полів дорівнює сумі сил, які діють на мікročастинки всередині фнм-частинки і пропорційна їх кількості, тому для неї можна записати

$$\Delta \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}(\vec{r}'_i) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{f}_i(\vec{r}'_i), \quad \vec{r}'_i \in \Delta V(\vec{\xi}), \quad (26.1)$$

де N умовно позначає число мікročастинок, i — номер мікročастинки, а \vec{r}'_i — її координата, $\vec{F}_i^{ext}(\vec{r}'_i)$ — сила, яка до неї прикладена, $\vec{f}(\vec{r})$ — масова густина сили (у загальному випадку означена як $\vec{f}(\vec{r}) = \frac{d\vec{F}}{dm}$).

Якщо вважати об'єм мікročастинки $dV' = \frac{\Delta V}{N}$ малим, а їх кількість — достатньо великою, то масу мікročастинки m_i можна замінити на $\rho(\vec{r}')dV'$, її координату \vec{r}'_i (яка еквівалентна індексу підсумовування i) — на неперервну змінну \vec{r}' , що описує положення мікročастинки (або об'єму dV'), і виконати граничний перехід від отриманої суми Дарбу до інтегралу:

$$\Delta \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i(\vec{r}'_i) m_i \rightarrow \Delta \vec{F}_V^{ext} = \int_{\Delta V(\vec{\xi})} \rho(\vec{r}') \vec{f}(\vec{r}') dV',$$

Далі такий прийом буде використовуватися часто. Зовнішня сила діє у всьому об'ємі $\Delta V(\vec{\xi})$ фнм-частинки і називається *об'ємною силою*. Вона завжди вважається заданою функцією координат і часу, а величина \vec{f} (масова густина об'ємної сили) має розмірність прискорення. У випадку гравітаційного поля Землі вона дорівнює прискоренню вільного падіння, тобто $\vec{f} = \vec{g}$.

Зауваження*. Процедура заміни m_i на $\rho(\vec{r}') dV'$ потребує деякого уточнення. У класичній механіці найпростішим мікроскопічним об'єктом є атом, який має малий, але скінченний об'єм. Перехід від суми Дарбу до інтегралу по об'єму передбачає $dV' \rightarrow 0$, що не зовсім коректно — атомарний об'єм є цілком реальним і про його нескінченну малість можна говорити тільки у деякому наближенні.

У даному контексті краще вважати так: величина $\rho(\vec{r}') dV'$ може бути отримана як середнє значення деякої функції $\rho(\vec{r})$ по атомарному об'єму dV' (тобто густина ρ “розмазана” по цьому об'єму за деяким законом). \square

Сума всіх внутрішніх сил взаємодії між мікрочастинками всередині фнм-частинки дорівнює нулю згідно з III законом Ньютона, але з боку інших фнм-частинок вона відмінна від нуля. Мікрочастинки із сусідніх фнм-частинок, внаслідок короткодії міжмолекулярних сил, діють лише на тонкий шар поблизу поверхні фнм-частинки, тому внутрішні сили називаються *поверхневими силами*.

Поверхнева сила $\Delta \vec{F}_S$ має:

- 1) нормальну складову до елементу площі поверхні фнм-частинки dS , яка аналогічна силам нормальної реакції в класичній механіці і створює тиск на поверхню фнм-частинки з боку її сусідів;
- 2) тангенціальну складову, яка напрямлена в площині dS і інтерпретується як сила зсуву і внутрішнього тертя між сусідніми фнм-частинками.

Елемент площі поверхні dS має тільки один виділений напрямок — нормаль \vec{n} , якої недостатньо для побудови локального ортогонального базису і розкладу по ньому поверхневої сили з трьома компонентами. Тому, щоб побудувати вектор з трьома компонентами, маючи лише один орт, потрібно: 1) домножити цей орт на деяке число, для отримання потрібної нормальної складової, 2) повернути цей орт і домножити на число, щоб отримати необхідний напрям і величину тангенціальних складових. Формально такі операції виконуються за допомогою матриць або тензорів. Тому для опису \vec{F}_S введемо нову феноменологічну величину p_{ij} — *тензор механічних напружень*, який повертає j -ту компоненту нормалі до поверхні фнм-частинки в точці \vec{r}' навколо i -го орту і змінює її величину (як матриця повороту). Її діагональні компоненти описують сили тиску, а недіагональні — сили тертя і зсуву. Тепер, після підсумовування по всій однозв'язній замкненій поверхні фнм-частинки маємо:

$$\Delta \vec{F}_S = \oint_{\Delta S(\vec{\xi})} \vec{e}_i p_{ij}(\vec{r}', t) n_j(\vec{r}') dS'. \quad (26.2)$$

де $n_j(\vec{r}')$ — нормаль до поверхні в точці \vec{r}' , $p_{ij}(\vec{r}', t)$ — тензор механічних напружень, $\Delta S(\vec{\xi})$ — поверхня фнм-частинки із індексом $\vec{\xi}$, що обмежує об'єм $\Delta V(\vec{\xi})$. Добуток $d\vec{F}_S = \vec{e}_i p_{ij} n_j dS$ має зміст сили, прикладеної до елементу поверхні dS фнм-частинки.

У результаті, повна сила, що діє на фнм-частинку, має вигляд:

$$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_V + \Delta \vec{F}_S,$$

де $\Delta \vec{F}_V$ — об'ємна сила, $\Delta \vec{F}_S$ — поверхнева сила. Підстановка отриманих виразів дає:

$$\Delta \vec{F} = \int_{\Delta V} \rho \vec{f} dV + \oint_{\Delta S(\Delta V)} \vec{e}_i p_{ij} n_j dS. \quad (26.3)$$

Скористаємося теоремою Гаусса-Остроградського у вигляді:

$$\oint_{S(V)} n_i(\dots) dS = \int_V \nabla_i(\dots) dV, \quad (26.4)$$

де ∇_i — i -та компонента градієнту у криволінійній системі координат, а три крапки в дужках позначають довільний підінтегральний вираз¹. Тоді вираз (26.3) можна звести до такого вигляду:

$$\Delta \vec{F} = \int_{\Delta V} \rho \vec{f} dV + \oint_{\Delta S(\Delta V)} \vec{e}_i p_{ij} n_j dS = \int_{\Delta V} [\rho \vec{f} + \nabla_j (\vec{e}_i p_{ij})] dV. \quad (26.5)$$

Зауваження. Вираз для $\Delta \vec{F}_S$ можна пояснити інакше. Очевидно, що поверхнева сила прикладена до фнм-частинки як цілого, тобто дається об'ємним інтегралом:

$$\vec{F}_S = \int_{\Delta V} \vec{f}_S(\vec{r}) dV.$$

Однак відомо, що ефективно внутрішні взаємодії діють тільки у приповерхневому шарі, тому такий інтеграл повинен зводитись до інтегралу по поверхні $\Delta S(\Delta V)$, так може бути тільки тоді, коли i -та компонента густини сили є дивергенцією деякої величини, тобто $f_{S,i} = \nabla_j p_{ij}$, тоді за теоремою Гаусса-Остроградського

$$\vec{F}_S = \int_{\Delta V} \nabla_j (\vec{e}_i p_{ij})(\vec{r}) dV = \oint_{\Delta S(\Delta V)} n_j \vec{e}_i p_{ij}(\vec{r}) dS.$$

┘

Зауваження. Слід особливо підкреслити, що саме наявність короткодійчих сил між мікрочастинками, яка характеризується тензором p_{ij} , робить їх сукупність суцільним середовищем. Так, у статистичній фізиці доведено теореми, згідно яких сукупність частинок, які взаємодіють лише далекодіючими силами, що описуються законом Кулона, або законом всесвітнього тяжіння Ньютона, не можуть утворювати термодинамічну систему і стати суцільним середовищем (газ, рідина, тверде тіло, плазма тощо), оскільки в них нескінченно малі флуктуації мають тенденцію наростати з часом і система буде руйнуватись. Зокрема сукупність зірок не може утворити суцільне середовище тому, що там діють закони Ньютона для окремих частинок.

┘

3. Момент сил, що діють на фнм-частинку. Сили, що діють на фнм-частинку, створюють відповідний момент поверхневих і об'ємних сил. Оскільки він також залежить від плеча сили, тобто від взаємного положення фнм-частинки і точки відносно якої він розраховується, то будемо вважати її початком L -системи. Тоді за означенням моменту маємо:

$$\Delta \vec{N} = \int_{\Delta V} \vec{r} \times \rho \vec{f} dV + \oint_{\Delta S} \vec{r} \times \vec{e}_i n_j p_{ij} dS = \int_{\Delta V} [\vec{r} \times \rho \vec{f} + \nabla_j (\vec{r} \times p_{ij} \vec{e}_i)] dV. \quad (26.6)$$

Точний вираз для моменту сили потрібно отримувати підсумовуванням моментів сил, які діють на мікроскопічні частинки. Оскільки фнм-частинка складається з

¹ Таке узагальнення легко отримати, якщо розглянути у звичайній теоремі Гаусса-Остроградського спеціальну функцію $\vec{a}f(\vec{r})$, де \vec{a} — довільний сталий вектор.

атомів і молекул, а ці мікрочастинки мають внутрішню структуру, то дія зовнішніх полів у загальному випадку може створювати момент сил прикладений до кожної мікрочастинки. Його можна врахувати так само, як під час виведення виразу для об'ємної сили:

$$\Delta \vec{N}_m = \int_{\Delta V(\vec{\xi})} \rho(\vec{r}', t) \vec{\eta}(\vec{r}', t) dV', \quad (26.7)$$

де $\vec{\eta}(\vec{r}', t)$ — масова густина мікроскопічних моментів сил прикладених до мікрочастинок. Цей момент ми не будемо враховувати далі, хоча він може бути суттєвим для таких ситуацій: 1) феромагнетик у магнітному полі; 2) рідкий кристал під дією поляризованого світла; 3) середовище, мікрочастинки якого мають яскраво виражені векторні властивості. Наприклад, для феромагнетиків $\vec{\eta} \sim \vec{m} \times \vec{H}$, де \vec{m} — магнітний момент одиниці об'єму феромагнетика, який не залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля \vec{H} .

Таким чином, вирази для сили та моменту сил, що діють на фнм-частинку побудовано, і тепер можна використати десять загальних законів збереження класичної механіки для побудови її рівнянь руху. Але виявляється, що внаслідок означення фнм-частинки як об'єкта із внутрішньою структурою, для неї притаманний ще один закон збереження — закон збереження маси, який в класичній механіці вважався завжди виконаним, оскільки маси частинок m_i вважалися параметрами системи, а не динамічними змінними.

4. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МАСИ ФНМ-ЧАСТИНКИ. РІВНЯННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ. Згідно з означення маса фнм-частинки з номером $\vec{\xi}$ залишається сталою, тому можна записати:

$$\frac{d}{dt} \Delta m(\vec{\xi}, t) = 0. \quad (26.8)$$

У явному вигляді маса фнм-частинки $\vec{\xi}$ у момент часу t має вигляд:

$$\Delta m(\vec{\xi}, t) = \int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \rho(\vec{r}, t) dV,$$

від часу залежить підінтегральна функція та об'єм області інтегрування.

Запишемо похідну від $\Delta m(\vec{\xi}, t)$, для скорочення запису опускаючи ідентифікатор фнм-частинки $\vec{\xi}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta m(t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\Delta V(t+\delta t)} \rho(\vec{r}, t+\delta t) dV - \int_{\Delta V(t)} \rho(\vec{r}, t) dV \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\Delta V(t+\delta t)} [\rho(\vec{r}, t+\delta t) - \rho(\vec{r}, t)] dV + \left(\int_{\Delta V(t+\delta t)} - \int_{\Delta V(t)} \right) \rho(\vec{r}, t) dV \right] \\ &= \int_{\Delta V(t)} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\Delta V(t+\delta t) - \Delta V(t)} \rho(\vec{r}, t) dV. \end{aligned}$$

Останній доданок у правій частині можна записати у вигляді інтегралу по різниці об'ємів фнм-частинки у два близькі моменти часу. Із геометричних міркувань очевидно, його можна представити як інтеграл по всій її поверхні від підінтегрального виразу, домноженого на товщину тонкого шару, який виник внаслідок руху поверхні за час δt :

$$\int_{\Delta V(t+\delta t)-\Delta V(t)} (\dots) dV = \oint_{\Delta S(t)} (\vec{v} \delta t) \cdot \vec{n}(\dots) dS,$$

де елемент об'єму dV замінюється на $dh dS \equiv (\vec{v} \delta t) \cdot \vec{n} dS$ (див. рис. 26.1). У даному випадку:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\Delta V(t+\Delta t)-\Delta V(t)} \rho(\vec{r}, t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \oint_{\Delta S(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS \delta t = \oint_{\Delta S(t)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \rho(\vec{r}, t) dS,$$

і, згідно з теоремою Остроградського

$$\oint_{\Delta S(t)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \rho(\vec{r}, t) dS = \int_{\Delta V(t)} \operatorname{div}(\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)) dV.$$

Остаточно, закон збереження маси фнм-частинки можна записати у вигляді:

$$\frac{d\Delta m}{dt} = \int_{\Delta V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (26.9)$$

Оскільки наше розбиття було довільним, то значення $\Delta V(\vec{\xi}, t)$ — також довільне. Якщо інтеграл по довільній області дорівнює нулю, то це означає, що сама підінтегральна функція дорівнює нулю. Таким чином, одержуємо перше рівняння руху суцільного середовища:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)] = 0, \quad (26.10)$$

яке називається *рівнянням неперервності* і є наслідком закону збереження маси фнм-частинки. Воно не залежить від способу розбиття суцільного середовища на допоміжні об'єкти — фнм-частинки, тому вважатимемо його достовірним. Величина $\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$ називається *потокм маси*, а рівняння неперервності фактично стверджує, що зміна густини суцільного середовища може бути викликана лише потоком маси.

Рівняння неперервності базується на законі збереження маси фнм-частинки $\frac{d\Delta m}{dt} = 0$, який сформульовано у картині Лагранжа. Остаточний результат отримано в термінах картини Ейлера, у рівнянні (26.10) функція $\vec{v}(\vec{r}, t)$ описує поле швидкостей, а $\rho(\vec{r}, t)$ — поле густин. Перехід відбувається за рахунок того, що у картині Лагранжа маса Δm має вигляд інтегралу від розподілу густини, означеного у картині Ейлера по області, які займає фнм-частинка.

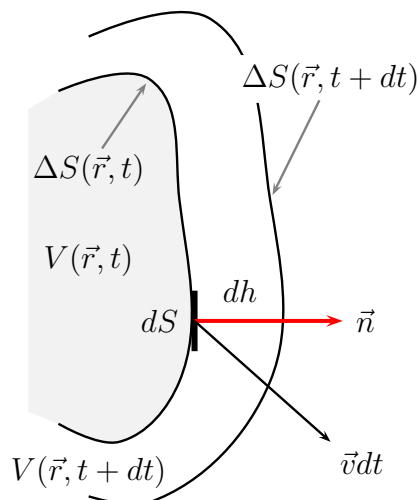


Рис. 26.1. До закону збереження маси.

Зауваження. Із виведення рівняння неперервності можна сформулювати правило диференціювання інтегралу від довільної величини (...) по об'єму фнм-частинки:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V(t)} (...) dV = \int_{\Delta V(t)} \frac{d}{dt} (...) dV + \oint_{\Delta S(\Delta V)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) (...) dS,$$

останній доданок можна звести до об'ємного інтегралу за теоремою Гаусса-Остроградського. Це правило буде широко використовуватись далі. ┘

Зауваження. Взагалі, у теорії поля рівнянням неперервності для величини F називається рівняння в частинних похідних вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div } \vec{q}_F = w_F \quad (26.11)$$

де F — досліджувана величина, \vec{q}_F — потік величини F , w_F — густина джерел величини F . Це рівняння записане для скалярної величини F , тому \vec{q}_F — вектор, а w_F — скаляр. У загальному випадку, коли F має довільну тензорну розмірність (у скаляра вона дорівнює 0, у вектора — 1, у тензора 2-го рангу — 2 тощо), потік q_F має тензорну розмірність на 1 вищу, а w_F — таку саму тензорну розмірність. Наприклад, якщо F є тензором 2-го рангу, то q_F буде тензором 3-го рангу, а w_F — також тензором 2-го рангу. ┘

Зауваження. Відмітимо, що рівняння (26.9) можна записати у вигляді

$$\int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \left[\frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \rho \right] dV = 0, \quad (26.12)$$

звідки випливає формула (26.10) з використанням (25.22). Тому для виведення (26.10) можна використати це співвідношення, але у запропонованому викладі чіткіше видно роль фнм-частинки. ┘

5. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ ФНМ-ЧАСТИНКИ. РІВНЯННЯ РУХУ. За означенням імпульсу, можемо записати імпульс фнм-частинки як суму імпульсів усіх мікрочастинок

$$\Delta \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_i^{ch}) \rightarrow \int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \rho(\vec{r}', t) \vec{v}(\vec{r}', t) dV', \quad (26.13)$$

де $\langle \vec{v} \rangle$ — середня швидкість мікрочастинок, яка є швидкістю фнм-частинки як цілого, а \vec{v}_i^{ch} — швидкість хаотичного теплового руху кожної мікрочастинок. Сума останніх в середньому дорівнює нулю для великого N , оскільки у випадку хаотичного розподілу швидкостей теплового руху завжди можна знайти кілька частинок, сумарний імпульс яких дорівнює нулю.

Рух фнм-частинки описується законами механіки, тому другий закон Ньютона матиме вигляд:

$$\frac{d\Delta \vec{P}}{dt} = \Delta \vec{F}.$$

Після підстановки до цієї формули виразів для імпульсу (26.13) обчислення похідної по часу аналогічне до попереднього, звідки одержуємо таку рівність:

$$\frac{d\Delta \vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \vec{v} dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{\Delta S(\Delta V)} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \rho \vec{v} dS$$

або, переходячи до інтегралів по об'єму і підставляючи вираз для повної сили (26.5):

$$\int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \rho \vec{v} \right) dV = \int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} [\rho \vec{f} + \nabla_j (\vec{e}_i p_{ij})] dV.$$

Оскільки розбиття на фнм-частинки довільне, і межі інтегрування в обох інтегралах однакові, то підінтегральні вирази рівні і ми отримуємо рівняння руху у формі рівняння неперервності:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla_j [(\rho v_i v_j - p_{ij}) \vec{e}_i] = \rho \vec{f}. \quad (26.14)$$

У цьому рівнянні величина $\rho \vec{v}$ є *густиною імпульсу* суцільного середовища, величина $\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - p_{ij}$, через яку виражається другий доданок в лівій частині, називається *тензором потоку імпульсу*, а доданки в правій частині відіграють роль джерел, або стоків для густини імпульсу. За аналогією з рівнянням неперервності, другий доданок в лівій частині $\nabla_i \Pi_{ij} \vec{e}_j$ можна називати дивергенцією потоку імпульсу, а той факт, що ця величина виявляється вектором, зумовлений дією векторного оператора $\vec{\nabla}$ на тензор другого рангу $\Pi_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ після обчислення згортки з першим множником².

² Тобто $\vec{\nabla} \cdot \Pi_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_i) \Pi_{ij} \vec{e}_j = \nabla_i \Pi_{ij} \vec{e}_j$ у декартових координатах, $\hat{t} = \vec{a} \otimes \vec{b}$ позначає тензорний добуток векторів, за означенням $t_{ij} = a_i b_j$.

Якщо розкрити похідну по часу, врахувати рівняння неперервності і рівність $(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(\rho \vec{v}) = \nabla_i(v_i \rho \vec{v}) = \nabla_i[(v_i \rho) \vec{v}] = \vec{v} \nabla_i(\rho v_i) + \rho v_i \nabla_i \vec{v} = \vec{v} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$,

то отримуємо рівняння руху у вигляді

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{f} + \nabla_j(p_{ij} \vec{e}_i). \quad (26.15)$$

Воно не залежить від способу розбиття, тому є достовірним.

6. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ. СИМЕТРІЯ ТЕНЗОРА МЕХА-НІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ. Аналогічно до попереднього, виписуємо означення для моменту імпульсу фнм-частинки, в якому вважаємо, що вектор \vec{r} відраховується від початку L -системи, так само як і в означенні моменту сили:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{L} &= \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i \times m \vec{v}_i + \vec{\ell}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i \times m \langle \vec{v} \rangle + \vec{r}_i \times m \vec{v}_i^{ch} + \vec{\ell}_i \right) \\ &\rightarrow \int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \left[\vec{r}' \times \rho(\vec{r}', t) \vec{v}(\vec{r}', t) + \rho(\vec{r}', t) \vec{\lambda}(\vec{r}', t) \right] dV', \end{aligned} \quad (26.16)$$

де $\vec{\ell}_i$ — внутрішній момент імпульсу мікрочастинки, зумовлений рухом по її внутрішніх ступенях вільності, а $\vec{\lambda}(\vec{r}', t)$ — масова густина цього моменту. Для спрощення виразу взято до уваги, що сума $\vec{r}_i \times \vec{v}_i^{ch}$ рівна нулю. Величину $\vec{\lambda}$ потрібно врахувати у випадку середовищ з мікроструктурою, у яких момент сил може бути прикладений безпосередньо до мікрочастинки. Тоді момент сил $\vec{\eta}$, введений в (26.7), буде змінювати цей момент і момент всієї фнм-частинки. Прикладом є феромагнетик у магнітному полі, яке змінює орієнтацію спінів і, внаслідок цього, і механічний момент. Надалі такі середовища розглядатись не будуть.

Тепер, за законом збереження моменту імпульсу маємо:

$$\frac{d\Delta \vec{L}}{dt} = \Delta \vec{N}. \quad (26.17)$$

Похідна від моменту імпульсу (без врахування $\vec{\lambda}$) має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \vec{L}}{dt} &= \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{r} \times \vec{v}) dV + \oint_{\Delta S(\Delta V)} (\vec{v} \cdot \vec{n})(\rho \vec{r} \times \vec{v}) dS \\ &= \int_{\Delta V} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{r} \times \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(\rho \vec{r} \times \vec{v}) \right] dV. \end{aligned}$$

Підставляючи у рівняння (26.17) вираз для моменту сили (26.6), отримаємо наступний вираз (без врахування $\vec{\eta}$):

$$\int_{\Delta V} \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{r} \times \vec{v}) \right] dV = \int_{\Delta V} [\vec{r} \times \rho \vec{f} + \nabla_j(\vec{r} \times \vec{e}_i p_{ij})] dV.$$

Оскільки розбиття довільне, то з рівності інтегралів випливає рівність підінтегральних виразів, запишемо це у вигляді рівняння неперервності:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \rho \vec{v}) + \nabla_j [v_j (\vec{r} \times \rho \vec{v}) - p_{ij}(\vec{r} \times \vec{e}_i)] = \vec{r} \times \rho \vec{f} \quad (26.18)$$

оскільки координата точки простору і час є незалежними змінними. В цьому рівнянні величина $\vec{r} \times \rho \vec{v}$ є *густиною моменту імпульсу* суцільного середовища. Величина у квадратних дужках у лівій частині описує потік моменту імпульсу. Як у аналогічній комбінації, розглянутої вище для випадку імпульсу, вона може бути виражена через тензор другого рангу після запису векторних добутків за допомогою тензору Леві-Чивіта:

$$\rho v_j (\vec{r} \times \vec{v}) - p_{ij}(\vec{r} \times \vec{e}_i) = \rho v_j \varepsilon_{aik} x_a v_i \vec{e}_k - p_{ij} \varepsilon_{aik} x_a \vec{e}_k = \varepsilon_{aik} x_a (\rho v_i v_j - p_{ij}) \vec{e}_k = \mathcal{L}_{jk} \vec{e}_k,$$

де тензор

$$\mathcal{L}_{ij} = \varepsilon_{ikl} x_k (\rho v_j v_l - p_{lj})$$

називається *тензором потоку моменту імпульсу*, а доданки в правій частині (26.18) відіграють роль джерел, або стоків для густини моменту імпульсу.

Беручи до уваги, що

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(\rho \vec{r} \times \vec{v}) = (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v})(\vec{r} \times \vec{v}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{r} \times \vec{v}),$$

і враховуючи рівняння неперервності, отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{r} \times \vec{v}) \right] &= \vec{r} \times \rho \vec{f} + \nabla_j (\vec{r} \times \vec{e}_i p_{ij}) \\ &= \vec{r} \times \rho \vec{f} + (\nabla_j \vec{r}) \times (\vec{e}_i p_{ij}) + \vec{r} \times \nabla_j (\vec{e}_i p_{ij}) = \vec{r} \times \rho \vec{f} + \vec{e}_j \times (\vec{e}_i p_{ij}) + \vec{r} \times \nabla_j (\vec{e}_i p_{ij}), \end{aligned}$$

де враховано, що $(\nabla_j \vec{r}) = \vec{e}_j$. Перетворюючи так само ліву частину, знайдемо:

$$\rho \vec{r} \times \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \vec{r} \times [\rho \vec{f} + \nabla_j (\vec{e}_i p_{ij})] + \vec{e}_j \times (\vec{e}_i p_{ij})$$

Підстановка рівняння руху (26.15) у ліву частину і спрощення виразу дає:

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) p_{ij} = \varepsilon_{ijk} p_{ij} \vec{e}_k = 0, \quad (26.19)$$

У цій сумі доданки із $i = j$ рівні нулю в силу властивості векторного добутку. Добуток різних ортів зустрічається по два рази в парах індексів (1,2), (1,3), і (2,3) та (2,1), (3,1), і (3,2), відповідно. Знаки добутків у двох відповідних парах будуть різними, оскільки орти міняються місцями у векторному добутку. Звідси випливає, що рівність (26.19) може виконатися лише за умови

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_{ji}, \quad (26.20)$$

для довільних i, j і в довільній системі координат. Таким чином, тензор механічних напружень для суцільних середовищ із безструктурними мікрочастинками симетричний в будь-якій системі координат.

7. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ. РІВНЯННЯ ДЛЯ ВНУТРІШНЬОЇ ЕНЕРГІЇ. На відміну від попередніх законів збереження, які є функціями координат та швидкостей мікрочастинки (і фнм-частинки) не вище першої степені, енергія має кінетичну компоненту, квадратичну по швидкостях, і потенціальну енергію, залежну від відстаней між мікрочастинками. Тому маємо такий вираз для енергії фнм-частинки:

$$\Delta E = \Delta K_m + \Delta U_m = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U_{ij}(\vec{r}_{ij}) + \sum_{i=1}^N U^{ext}(\vec{r}_i), \quad (26.21)$$

де ΔK_m — кінетична, ΔU_m — потенціальна енергії³ системи мікрочастинок, що утворюють дану фнм-частинку. Якщо врахувати, що $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i^{ch}$, де \vec{v} — швидкість фнм-частинки, \vec{v}_i^{ch} — хаотична компонента швидкості i -ої мікрочастинки відносно фнм-частинки, і розкрити квадрат у виразі кінетичної енергії:

$$\Delta K_m = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}^2}{2} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v} \cdot \vec{v}_i^{ch}}_{=0} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{v}_i^{ch})^2}{2},$$

то сума кінетичних енергій хаотичного руху мікрочастинок буде відмінною від нуля, оскільки сума квадратів невід'ємна. Тому до балансу енергії фнм-частинки ввійде енергія мікроскопічного хаотичного руху, яка характеризує температуру суцільного середовища. Також дасть невідомий внесок і сума потенціальних енергій, яка відмінна від нуля. Ці обидва внески об'єднують в одну термодинамічну характеристику середовища, яка називається *внутрішньою енергією* термодинамічно рівноважної фнм-частинки і позначається ΔU .

Слід наголосити, що все суцільне середовище може не перебувати у стані термодинамічної рівноваги внаслідок таких факторів:

- 1) механічного руху під дією прикладених сил;
- 2) переносу тепла, маси та електричного заряду під дією зовнішніх теплових, концентраційних та електромагнітних полів;
- 3) поляризації та намагнічення під дією електромагнітного поля

та інших. Але побудована фнм-частинка настільки мала, що всередині неї цими процесами можна знехтувати, а враховувати їх лише між різними фнм-частинками. Саме тому можна стверджувати, що фнм-частинка є термодинамічно рівноважною системою і підлягає законам термодинаміки. Зокрема, закону збереження енергії у формі першого начала термодинаміки для термодинамічно рівноважних систем:

$$d\mathcal{U} = \partial Q + \partial \mathcal{A} \quad (26.22)$$

тут \mathcal{U} — внутрішня енергія макроскопічно нерухомої термодинамічної системи, $d\mathcal{U}$ — її повний диференціал, $\partial \mathcal{A}$, ∂Q — елементи роботи зовнішніх сил⁴ і тепло-

³ Позначення для кінетичної енергії змінене, щоб уникнути непорозумінь — символом T позначена температура.

⁴ Для повільних процесів робота внутрішніх сил дорівнює роботі зовнішніх сил із оберненим знаком.

ти, відповідно, які є неповними диференціалами і залежать від шляху, по якому система прийшла в задану точку у просторі своїх аргументів. Їх називають також простором термодинамічних параметрів системи. Наприклад, для газу їх три: температура T , тиск p і кількість частинок N . Фнм-частинка є рухомою термодинамічною системою і елементарна робота та елементарна теплота можуть змінювати не тільки внутрішню, а й кінетичну енергію. Таким чином, у першому началі термодинаміки для фнм-частинки слід покласти $\mathcal{U} = \Delta E$ (повна енергія), $\mathcal{A} = \Delta A$ та $\mathcal{Q} = \Delta Q$ тому:

$$\frac{d}{dt}(\Delta U + \Delta K) = \frac{\partial \Delta A}{\partial t} + \frac{\partial \Delta Q}{\partial t}. \quad (26.23)$$

Для внутрішньої енергії фнм-частинки, яка включає дві згадані вище складові, та для її кінетичної енергії можна записати такі вирази

$$\Delta U = \int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \rho u dV, \quad \Delta K = \int_{\Delta V(\vec{\xi}, t)} \frac{\rho v^2}{2} dV \quad (26.24)$$

$u(\vec{r}, t)$ — густина внутрішньої енергії. Вираз для ΔA і ΔQ записати немає можливості, оскільки ці величини залежать від шляху, по якому система прийшла в даний стан. Але значення похідних по часу від них можна записати, оскільки

$$\frac{\partial \Delta A}{\partial t} = \Delta \Pi, \quad (26.25)$$

де Π — потужність сил, прикладених до фнм-частинки, а

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial t} = \Delta \sigma \quad (26.26)$$

де σ — потужність теплових джерел-стоків всередині фнм-частинки та потоків тепла через її поверхню. Згідно з означенням потужності механічних сил, маємо:

$$\Delta \Pi = \int_{\Delta V} \vec{v} \cdot \rho \vec{f} dV + \oint_{\Delta S(\Delta V)} \vec{v} \cdot p_{ij} \vec{e}_i n_j dS = \int_{\Delta V} [\rho \vec{v} \cdot \vec{f} + \nabla_j (p_{ij} v_i)] dV. \quad (26.27)$$

Зміна кількості теплоти всередині фнм-частинки може бути викликана лише наявними в ній джерелами стоками та потоком тепла через її поверхню, тому

$$\Delta \sigma = - \oint_{\Delta S(\Delta V)} \vec{n} \cdot \vec{q} dS + \int_{\Delta V} \rho w dV. \quad (26.28)$$

У цій формулі введено такі феноменологічні величини:

- 1) потік тепла через поверхню фнм-частинки \vec{q} ;
- 2) масову густину джерел-стоків теплоти всередині фнм частинки w .

Також врахували, що кількість теплоти у фнм-частинці зростає, коли потік напрямлений проти зовнішньої нормалі, тому перед поверхневим інтегралом взято знак мінус.

Після підстановки всіх означень до формули (26.23) та переходу до інтегралів по об'єму, одержуємо таке рівняння:

$$\int_{\Delta V} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) dV = \int_{\Delta V} \left(\vec{v} \cdot \rho \vec{f} + \nabla_j (p_{ij} v_i) - \nabla_j q_j + \rho w \right) dV, \quad (26.29)$$

яке справджується для будь-якого об'єму фнм-частинки. Звідси маємо закон збереження енергії у формі рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\vec{r}, t) + \nabla_j [\varepsilon(\vec{r}, t) v_j - p_{ij} v_i + q_j] = \rho \vec{v} \cdot \vec{f} + \rho w, \quad (26.30)$$

де $\varepsilon(\vec{r}, t) \equiv \frac{\rho v^2}{2} + \rho u$ — масова густина повної енергії суцільного середовища, $\Pi_j = \varepsilon v_j - p_{ij} v_i + q_j$ — компоненти вектору потоку енергії суцільного середовища, який називається *вектором Умова-Пойтінга*. Звідси видно, що до потіку енергії дає внесок не лише доданок вигляду εv_j , як було в попередніх випадках, а ще й механічні напруження та потік тепла.

Якщо тепер в рівнянні (26.30) розкрити похідні по часу, врахувати попередні вирази для них, а у співвідношенні $\nabla_j (p_{ij} v_i) = v_i \nabla_j p_{ij} + p_{ij} \nabla_j v_i$ перетворити останній доданок наступним чином

$$p_{ij} \nabla_j v_i = \frac{1}{2} p_{ij} \nabla_j v_i + \frac{1}{2} p_{ji} \nabla_i v_j = \frac{1}{2} p_{ij} (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) \equiv p_{ij} v_{ij},$$

і провести алгебраїчні спрощення, то одержуємо рівняння для внутрішньої енергії суцільного середовища:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + p_{ij} v_{ij} + \rho w. \quad (26.31)$$

Таким чином, до виразу для закону збереження енергії входять три феноменологічні величини: густина внутрішньої енергії u , вектор потоку тепла \vec{q} та масова густина внутрішніх джерел стоків w , яка завжди задається. Звідси видно, що внутрішня енергія в даній точці суцільного середовища може змінюватися внаслідок конвективного переносу (другий доданок ліворуч), потоку тепла, роботи внутрішніх напружень та джерел, якими можуть бути поглинання світла, джоулеві втрати під час проходження електричного струму, ядерні та хімічні реакції за умови, що виділення енергії велике, а зміна складу середовища мала.

8. Висновки. Таким чином, на третьому етапі макроскопічного підходу вдалося побудувати рівняння руху суцільного середовища, які не залежать від його розбиття на фнм-частинки. Вони описують залежність густини, швидкості і внутрішньої енергії суцільного середовища від координат і часу. Також вдалося показати, що тензор механічних напружень є симетричним у всіх середовищах, де сумарний внутрішній момент мікрочастинок рівний нулю. Отже, згідно з наведеною вище схемою макроскопічного підходу, можна стверджувати, що побудовано достовірні рівняння руху суцільного середовища.

Оскільки такі рівняння не є фундаментальними, а отримані завдяки припущенню про застосовність рівнянь механіки, електро- та термодинаміки для опису руху фінм-частинки, то результати їх розв'язку вимагають експериментальної перевірки. Але виявляється, що у межах мікроскопічного підходу, який є фундаментальним, можна отримати точно таку саму форму цих рівнянь руху, але вже з явними виразами для p_{ij} , u та \vec{q} , які залежать від параметрів функції Гамільтона. Тому отримані рівняння також можна вважати не лише несуперечливими, а й вірними.

Задача 26.1. Знайти явний вигляд тензора потоку імпульсу в трьох основних системах координат (декартові, циліндричні, сферичні).

Задача 26.2. Знайти явний вигляд тензора потоку моменту імпульсу в трьох основних системах координат.

Задача 26.3. Знайти явний вигляд тензор потоку енергії в трьох основних системах координат.

ЛЕКЦІЯ 27

Повна система рівнянь. Моделі суцільного середовища

1.	Повна система рівнянь. Початкові та крайові умови.	433
2.	Реологія суцільного середовища. Тензор механічних напружень.	435
3.	Внутрішня енергія.	440
4.	Вектор потоку тепла.	441
5.	Висновки.	442

1. Повна система рівнянь. Початкові та крайові умови. Вище було встановлено, що рух суцільного середовища описується такими рівняннями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] &= \rho \vec{f} + \nabla_i (p_{ij} \vec{e}_j), \\ p_{ij} &= p_{ji} \\ \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u \right] &= p_{ij} v_{ij} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho w,\end{aligned}\tag{27.1}$$

Ця система складається з 5-ти диференціальних рівнянь для 5-ти невідомих величин (густини середовища ρ , вектора його швидкості \vec{v} , густини внутрішньої енергії u), та 3-х алгебраїчних рівнянь для компонент тензора механічних напружень.

До цих рівнянь входять чотири відомі величини: вектор густини зовнішніх сил \vec{f} та густина джерел тепла w , які задають дію зовнішніх факторів на суцільне середовище. Крім того, у рівняннях фігурують ще дві невідомі характеристики суцільного середовища: тензор механічних напружень p_{ij} , який залежить від короткодіючої взаємодії між частинками середовища, та вектор потоку тепла \vec{q} , який описує обмін теплотою. Тому система рівнянь (27.1) є незамкненою, оскільки невідомих величин більше ніж рівнянь.

Вирази для двох останніх невідомих величин через ρ, \vec{v}, v_{ij} , внутрішню енергію u , вектор деформації \vec{u} , тензор деформації u_{ij} потрібно задавати для кожного типу середовища на основі експериментальних законів або теоретичних оцінок.

У експериментах внутрішня енергія не піддається вимірюванню, у той час як температура T вимірюється. Тому названі вище величини зручно виражати через T замість внутрішньої енергії u , а саму величину u також виразити через ρ, T, \vec{v} та інші характеристики. Отже, для побудови замкненої системи рівнянь руху для величин, що доступні для експериментальних вимірювань, потрібно знати такі

вирази:

$$p_{ij}(\rho, T, \vec{u}, u_{ij}, \vec{v}, v_{ij}), \quad \vec{q}(\rho, T, \vec{u}, u_{ij}, \vec{v}, v_{ij}) \quad \text{та} \quad u(\rho, T, \vec{u}, u_{ij}, \vec{v}, v_{ij}).$$

Тоді залежність цих величин буде однозначно описувати деяке конкретне суцільне середовище, наприклад: ідеальний газ, нестисливу рідину, в'язку рідину, пружне середовище, термопружне середовище тощо. Якщо включити до аргументів зовнішні електромагнітні поля, то можна отримати рівняння руху для діелектриків, п'єзоелектриків, діа- та парамагнетиків тощо.

Для аналізу задач і порівняння з експериментом зручно використати систему рівнянь руху, записаної у вигляді рівнянь неперервності. До неї явно входять густини і потоки різних величин, що вимірюються на дослідах. Збираючи разом отримані раніше рівняння, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho v_j) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla_j [(\rho v_j v_i - p_{ij}) \vec{e}_i] &= \rho \vec{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \times \rho \vec{v}) + \nabla_j [v_j (\vec{r} \times \rho \vec{v} - (\vec{r} \times \vec{e}_i) p_{ij})] &= \vec{r} \times \rho \vec{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) + \nabla_j \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) v_j - p_{ij} v_i + q_j \right] &= \vec{v} \cdot \rho \vec{f} + \rho w. \end{aligned} \tag{27.2}$$

Якщо задано явні вирази для p_{ij} , \vec{q} та u , то для розв'язку конкретної задачі до цих рівнянь потрібно додати початкові та крайові умови.

Як правило, нестационарні задачі надзвичайно складні для розв'язку, за винятком кількох простих моделей (ідеальний газ, абсолютно тверде тіло, нестислива рідина), для яких можна розв'язати лише однорідні рівняння. Тому початкові умови не завжди бувають необхідні у механіці суцільного середовища, за винятком розв'язку прикладних задач на комп'ютері. Якщо середовище обмежене, або складається з кількох різних середовищ, розділених поверхнею розділу фаз (газ – рідина, тверде тіло – рідина), то на цих поверхнях потрібно задавати крайові умови для невідомих ρ , \vec{v} , u або T . Ці крайові умови визначаються фізичними обставинами на поверхні. Найбільш типовими є ситуації, коли:

- ідеальна рідина, або газ без тертя не проходять через тверду поверхню, тому нормальна компонента швидкості на поверхні задовольняє рівняння $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$;
- в'язка рідина або газ із тертям прилипають до нерухомої твердої поверхні, отже на цій поверхні для всієї швидкості має місце умова $\vec{v} = 0$;
- поверхня твердого суцільного середовища вільна, тобто до неї не прикладено сили, тому $dF = p_{ij} \vec{e}_i n_j dS = 0$ (швидкість середовища поблизу поверхні дорівнює швидкості поверхні);
- поверхню твердого суцільного середовища зафіксовано, тому для вектора деформації на поверхні $\vec{u} = 0$ (деформація середовища поблизу поверхні дорівнює деформації поверхні).

Якщо в задачі є незакріплені тверді поверхні, або поверхня рідини на границі з газом, то їх положення під час руху буде змінюватись за невідомим законом, в

той час, як ми на них повинні задати крайові умови. Такі задачі найбільш складні для дослідження і розв'язку.

Висновки. Таким чином, для заданої моделі суцільного середовища, при заданих початкових та крайових умовах система з 5-ти диференціальних рівнянь в частинних похідних для 5-ти невідомих величин стає замкненою і доступною для розв'язку в принципі, а для простих задач — у дійсності.

Задача 27.1. Виписати рівняння руху в трьох основних системах координат — прямокутній, циліндричній та сферичній.

2. РЕОЛОГІЯ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА. ТЕНЗОР МЕХАНІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ. *Реологією* називається розділ теорії суцільного середовища, в якому розглядаються методи побудови явних виразів для феноменологічних величин, що входять до рівнянь руху (матеріальних рівнянь). Для пошуку таких виразів широко використовується друге начало термодинаміки для рівноважних та нерівноважних процесів, та кінетична теорія, а також оцінки, отримані в рамках мікроскопічного підходу. Знайдемо вирази для величини p_{ij} , виходячи з якісних фізичних міркувань.

Формально тензор механічних напружень описує короткодіючу або контактну взаємодію між фнм-частинками суцільного середовища. Фізично вона зумовлена взаємодією мікрочастинок (молекули, атоми, іони, електрони тощо) у суцільному середовищі, деталі якої можна дослідити засобами квантової механіки. Детальний аналіз показав, що потенціал взаємодії між атомами на великих відстанях спадає за експоненціальним законом:

$$U_{ij}(r) \sim U_0 e^{-r/a_s}, \quad (27.3)$$

де U_0 — деяка стала, а a_s — радіус екранування. Внаслідок цього квантовомеханічний повний переріз розсіяння S_{total} двох частинок завжди обмежений, тобто:

$$S_{total} \equiv \pi R_{int}^2 < \infty, \quad (27.4)$$

де R_{int} — характерний радіус взаємодії. Оскільки повний переріз розсіяння скінченний, то в якісних міркуваннях можна вважати, що на відстанях більших за R_{int} частинки не взаємодіють між собою. Для суцільного середовища R_{int} , приблизно дорівнює кілька десятків радіусів Бора a_B , тобто $(0.5 \sim 5)$ нм. У класичній механіці повний переріз розсіяння на будь-якому спадному потенціалі завжди нескінченний за винятком простих потенціалів типу потенціалу твердих сфер (із скінченням радіусом взаємодії переріз буде скінченим і матиме порядок площі круга πR_{int}^2).

Виходячи з цих міркувань, випишемо, від яких характеристик мікрочастинок буде залежати p_{ij} . Очевидно, що ця взаємодія залежить від зарядового їх стану $\langle q \rangle$ (маємо на увазі їх електричний заряд, електричний і магнітний дипольні моменти, квадрупольний момент тощо) та середньої відстані між ними $\langle l \rangle$. Оскільки короткодіючі потенціали характеризуються радіусами взаємодії R_{int} , то молекули будуть взаємодіяти між собою лише коли вони наближаються на відстань меншу, ніж R_{int} . Чим частіше відбуваються ці події, тим більшою буде взаємодія. Тому

на мікроскопічному рівні величина p_{ij} повинна залежати від частоти зіткнень $\langle \nu \rangle$. Ці аргументи у залежностях $p_{ij}(\langle q \rangle, \langle l \rangle, \langle \nu \rangle)$ не входять до рівнянь руху і є новими феноменологічними величинами. Тому встановимо, від яких макроскопічних характеристик фнм-частинки будуть залежати ці нові величини.

Так, зарядовий стан може змінюватися під дією електричного і магнітного поля, тому $\langle q \rangle = \langle q \rangle(\vec{E}, \vec{H})$. Середня відстань між мікроскопічними частинками залежить від густини середовища і може змінюватися в результаті його розтягу та стиску, тому $\langle l \rangle = \langle l \rangle(\rho, u_{ij})$. Частота зіткнень залежить від середньої відстані між частинками (тобто від ρ і u_{ij}), від середньої швидкості теплового руху, а тому і від температури, а також від тензора швидкості деформацій, який показує, наскільки швидко сусідні частинки середовища переміщуються одна відносно одної. Тому $\langle \nu \rangle = \langle \nu \rangle(\rho, u_{ij}, T, v_{ij})$. Таким чином, виходячи з якісних фізичних міркувань можна стверджувати, що

$$p_{ij} = p_{ij}(\rho, T, u_{ij}, v_{ij}, E_k, H_k).$$

Для отримання більш конкретної залежності, також феноменологічної, можна розкласти величину p_{ij} в ряд Тейлора по її аргументах, якщо це можливо (тобто існує оцінка для збіжності такого розкладу). Із цією метою можна порівняти значення кожної змінної із відповідним характерним параметром середовища. Для густини немає виділених характерних значень, тому розклад можна провести тільки навколо деякого, наперед заданого в умові задачі значення, відхилення від якого будуть малі, у загальному випадку по густині розкладати недоцільно. Для температури такі характерні значення є — це точки фазових переходів, але у загальному випадку краще поступити так само, як з густиною. Для u_{ij} характерне значення — це одиниця, тому по u_{ij} можна розкладати, якщо $|u_{ij}| \ll 1$. Тензор v_{ij} також має характерне значення — це частота зіткнень ν , яку він може змінювати лише на незначну величину. Якщо ці зміни несуттєві, то по v_{ij} теж можемо розкласти в ряд Тейлора і обмежитись найнижчими членами. Зовнішні електричне та магнітне поля потрібно порівнювати з внутрішніми полями, які діють всередині мікрочастинок та між ними і утримують незмінною як мікроструктуру так і саме суцільне середовище як єдине ціле, тому по цих полях можна теж розкласти в ряд Тейлора. Таким чином, можна записати:

$$\begin{aligned} p_{ij}(\rho, T, u_{kl}, v_{kl}, E_k, H_k) = & p_{ij}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) + \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) u_{kl} \\ & + \frac{\partial p_{ij}}{\partial v_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) v_{kl} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial E_k}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) E_k \\ & + \frac{\partial p_{ij}}{\partial H_k}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) H_k + o(u_{kl}, v_{kl}, E_k, H_k). \end{aligned} \quad (27.5)$$

Кожен доданок цього ряду описує певні механічні напруження, що виникають у суцільному середовищі. Цей розклад є лінійним по тензорах деформації та по полях, тому його можна застосовувати лише в лінійній теорії суцільних середовищ. Для нелінійних теорій потрібно враховувати доданки вищого порядку.

З'ясуємо фізичний зміст кожного доданку.

Перший доданок $p_{ij}(\rho, T, 0, 0, 0, 0)$ описує механічні напруження, що існують у середовищі без деформації і зовнішніх полів. Це так звані внутрішні напруження, які відіграють суттєву роль у газах та рідинах, де діагональні компоненти тензора збігаються з тиском. Наприклад, для цих середовищ (газ, рідина) закон Торрічеллі стверджує, що $p_{ij}(\rho, T, 0, 0, 0, 0)$ є ізотропним тензором, тобто

$$p_{ij}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) = -p(\rho, T)\delta_{ij}, \quad (27.6)$$

а знак мінус виникає внаслідок того, що тиск в аеро- та гідродинаміці діє на елемент площі проти нормалі, а ми тензор механічних напружень розкладали вздовж нормалі. Функція $p(\rho, T)$ визначається будовою середовища. Наприклад для ідеального газу це рівняння Менделєєва-Клапейрона, яке для фінм-частинки можна записати у вигляді:

$$p \Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT \Rightarrow p(\rho, T) = \frac{R}{\mu} \rho T. \quad (27.7)$$

Для реальних газів можна використати рівняння Ван-дер-Ваальса, або складніші вирази, побудовані на основі експериментальних даних. Менш відомі рівняння існують і для твердого тіла, наприклад, рівняння Мурнагана. Як правило, для твердих тіл цей доданок ніколи не враховується, за винятком ситуацій з так званими напруженими конструкціями. Це такі середовища, всередині яких, у процесі їх виготовлення, створено достатньо великі механічні напруження, настільки великі, що зовнішні механічні напруження, які виникають внаслідок деформації, залишаються малими у порівнянні з ними, і конструкція зберігає свою форму, витримуючи великі зовнішні навантаження. Їх застосовують в будівництві, але такий стан середовища метастабільний і з часом наступає розвантаження (тим швидше, чим більшою є температура).

Другий доданок $\frac{\partial p_{ij}}{\partial u_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0)u_{kl}$ описує механічні напруження, які виникають внаслідок деформацій. Ці напруження називають пружними, а тензор

$$\lambda_{ijkl} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) \quad (27.8)$$

називається *тензором пружних сталей суцільного середовища*, компоненти тензора — *пружними сталими середовища*. Компоненти λ_{ijkl} залежать від густини і температури, причому залежність від густини для газів є суттєвою. Це тензор четвертого рангу, має 81 компоненту. У зв'язку з симетричністю p_{ij} та u_{kl} тензор пружних сталей симетричний по кожній парі індексів,

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl}, \quad \lambda_{ijkl} = \lambda_{ijlk},$$

тому, оскільки кожна симетрична пара дає 6 незалежних компонент, то насправді в цьому тензорі незалежних компонент 36. Пізніше буде показано, що він симетричний відносно перестановки першої та другої пар індексів, тому насправді незалежних компонент не більше ніж 21, а решта 60 виражаються через них. Внаслідок симетрії в середині пар замість тензора λ_{ijkl} в практичних застосуваннях використовують матричне позначення C_{AB} , в якому двом тензорним індексам ставиться у відповідність один матричний індекс A (велика латинська літера) за таким правилом:

A	\parallel	1	2	3	4	5	6
ij	\parallel	11	22	33	23	13	12

Внаслідок симетрії внутрішньої структури суцільного середовища кількість незалежних компонент завжди менша 21, а кількість рівних нулю компонент зростає із ростом симетрії. Так для ізотропного середовища незалежних буде лише 2 компоненти, а відмінних від нуля — 18.

Третій доданок $\frac{\partial p_{ij}}{\partial v_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0)v_{kl}$ описує механічні напруження, які виникають внаслідок швидкого деформування середовища і називаються *в'язкими напруженнями*. Тензор четвертого рангу

$$\eta_{ijkl} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial v_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) \quad (27.9)$$

називається *тензором в'язких сталей*. Як правило, він відмінний від нуля в рідинах, може бути відчутний в газах і знехтовно малий в твердих тілах, хоча саме він відповідає за загасання звуку. Його властивості симетрії такі самі, як у тензора пружних сталей з тим акцентом, що рідини і гази завжди ізотропні, тому їх в'язкі властивості характеризуються лише двома коефіцієнтами в'язкості.

Четвертий доданок $\frac{\partial p_{ij}}{\partial E_k}(\rho, T, 0, 0, 0, 0)E_k$ описує механічні напруження, які виникають у середовищі за наявності зовнішнього електричного поля і називаються *п'єзоелектричними напруженнями*. Тензор третього рангу

$$e_{ijk} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial E_k}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) \quad (27.10)$$

називається *тензором п'єзоелектричних сталей*. Він має 27 компонент, симетричний по парі із першого і другого індексів і має не більше 18 незалежних компонент. Якщо середовище допускає інверсію, то цей тензор автоматично дорівнює нулю. На практиці замість цього тензора використовують матричне позначення $e_{A,k}$. Якщо його враховувати, то до рівнянь руху суцільного середовища потрібно додати відповідні рівняння Максвела для електромагнітного поля.

П'ятий доданок $\frac{\partial p_{ij}}{\partial H_k}(\rho, T, 0, 0, 0, 0)H_k$ описує механічні напруження, які виникають в середовищі під дією магнітного поля і називаються *п'єзوماгнітними напруженнями*. Тензор третього рангу

$$\beta_{ijk} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial H_k}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) \quad (27.11)$$

називається *тензором п'єзوماгнітних сталей*. Оскільки всі магнітні ефекти пропорційні $\frac{v^2}{c^2}$, то він малий для всіх середовищ, які не мають магнітної структури. Відмітимо, що внаслідок специфічної симетрії магнітного поля, яке описується аксіальним вектором, симетрія цього тензора набагато складніша, ніж п'єзоелектричного тензора. Після робіт Ландау та Дзялошинського в 50-х роках XX століття було встановлено групи магнітної симетрії магнітних кристалів, які допускають існування п'єзوماгнітного ефекту, і незабаром його було відкрито. При його врахуванні до рівнянь руху суцільного середовища також потрібно додати рівняння для електромагнітного поля.

Таким чином, ми врахували вплив на тензор механічних напружень шести різних характеристик суцільного середовища і по чотирьох із них вдалося зробити лінійну оцінку їх впливу. Вона описується чотирма тензорами, які носять загальну назву *матеріальних тензорів*. Їх ранг не менший ніж 2 і визначається тензорним рангом параметру (для скалярного параметра він буде 2, векторного — 3 тощо); симетрія матеріальних тензорів визначається симетрією кристалічної будови (таке співставлення називається *принципом Кюри*), а числові значення — міжатоною взаємодією. Залежно від внеску кожного з розглянутих доданків можна побудувати багато різних моделей суцільних середовищ.

Зауважимо, що рівняння, які пов'язують відгук середовища на зовнішній вплив, називаються *матеріальними рівняннями*. Наприклад:

- 1) лінійне пружне середовище, яке задовольняє *закон Гука*:

$$p_{ij} = \lambda_{ijkl}(\rho, T)u_{kl};$$

- 2) ідеальна рідина:

$$p_{ij} = -p(\rho, T)\delta_{ij};$$

- 3) лінійна в'язка рідина, яка задовольняє *закон Нав'є-Стокса*:

$$p_{ij} = -p(\rho, T)\delta_{ij} + \eta_{ijkl}(\rho, T)v_{kl};$$

- 4) п'єзопружне середовище

$$p_{ij} = \lambda_{ijkl}(\rho, T)u_{kl} + e_{ij,k}(\rho, T)E_k.$$

У випадку, коли зміна температури є значною, проводиться розклад всіх розглянутих вище тензорів по температурі, наприклад, до першого порядку. Найчастіше використовують *модель термопружного середовища*:

$$p_{ij} = \alpha_{ij}(T_0)(T - T_0) + \lambda_{ijkl}(T_0)u_{kl}$$

де коефіцієнт *термічних напружень* $\alpha_{ij}(T_0)$ визначається із умови

$$\alpha_{ij}(T_0) \equiv \frac{\partial p_{ij}}{\partial T}(\rho, T_0, 0, 0, 0, 0).$$

Якщо розклад в (27.5) продовжити далі, то будуть отримані вирази для матеріальних тензорів вищого порядку, наприклад тензор квадратичної пружності $\lambda_{ijklmn}^{(2)}$, який має шостий ранг; тензор, квадратичний по електричному полю $e_{ijkl}^{(2)}$, який має четвертий ранг. Існують і більш громіздкі моделі, в яких враховуються перехресні ефекти типу нелінійної п'єзопружності із тензором $e_{ijklm}^{(2)}$, який має п'ятий ранг і так далі. Підкреслимо, що в даній феноменологічній моделі відгук середовища в момент часу t в точці \vec{r} визначається його станом $(\rho, T, u_{ij}, v_{ij}, E_k, H_k)$ у той самий момент і в тій самій точці.

У багатьох ситуаціях це не так, тому матеріальне рівняння повинне враховувати передісторію та вплив оточення. Вплив попередніх станів — це фактично “пам'ять”

середовища про них, а врахування оточення приводить до нелокальності моделі. Математично це означає, що p_{ij} в момент часу t в точці \vec{r} повинен бути інтегралом по часу від $-\infty$ до t і по простору всередині об'єму, від точок якого може дійти сигнал в точку \vec{r} на момент часу t , тобто

$$p_{ij}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega(\vec{r}, t)} \alpha(\vec{r} - \vec{r}', t - t') p_{ij}(\rho', T', u'_{kl}, v'_{kl}, E'_k, H'_k, \vec{r}', t') dt' dV',$$

$$\Omega(\vec{r}, t) = \{(\vec{r}', t') : |\vec{r} - \vec{r}'| \leq V(t - t')\},$$

де функція $\alpha(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ задає вплив оточення та минулих станів на стан у даній просторовій точці \vec{r} у даний момент часу t , а всі штриховані аргументи під інтегралом залежать від \vec{r}' та t' . Для розглянутої раніше моделі $\alpha(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$, де $\delta(x)$ — δ -функція Дірака. У теоріях з передісторією можна врахувати складні внутрішні характеристики середовища, пов'язані з його релаксацією, яка, власне, і формує пам'ять на мікроскопічному рівні.

Зауваження. Саме таким чином у класичній електродинаміці враховується частотна дисперсія матеріального тензора діелектричної проникності, для нього отримано співвідношення Крамерса-Кроніга. Цей тензор задає відгук системи — поляризацію, дипольний момент одиниці об'єму, яка створюється зовнішнім електричним полем. Моделі такого типу і більш складні є предметом дослідження сучасної теорії суцільного середовища. ▮

Отже, виходячи із фізичних міркувань та аналізу відомих законів і явищ, можна встановити залежність тензора механічних напружень від механічного стану середовища, температури та електромагнітного поля в ньому. Її потрібно використати в рівняннях руху (27.1) для вибраної моделі середовища.

3. Внутрішня енергія. За означенням до внутрішньої енергії ΔU включено енергію всіх мікроскопічних рухів та взаємодій:

- кінетична енергія хаотичного руху молекул;
- потенціальна енергія взаємодії молекул між собою;
- кінетична та потенціальна енергія внутрішньомолекулярних складових: атомів, ядер, електронів, нуклонів, електромагнітного та сильного полів (описуються кварками та глюонами) тощо — тобто всіх внутрішніх компонент молекул.

Однак, якщо енергія макроскопічного руху в перерахунку на одну молекулу набагато менша за енергії взаємодії молекул або їх внутрішніх складових, то перехід енергії макроруху на відповідні ступені вільності мікроруху не відбувається. Тому можна очікувати, що з усіх складових внутрішньої енергії найбільш чутливою до зовнішніх макровпливів є кінетична енергія хаотичного руху, яка визначається температурою T . Щоб знайти її зв'язок із внутрішньою енергією і виключити останню із рівнянь руху, використаємо перше начало термодинаміки для рівноважних процесів у фнм-частинці (опустимо символ Δ перед всіма величинами, щоб вирази були менш громіздкими):

$$\begin{cases} dU(S, V) = T(S, V) dS - p(S, V) dV \\ dU(S, A) = T(S, A_1, A_2, \dots, A_L) dS + a_k(S, A_1, A_2, \dots, A_L) dA_k, \end{cases} \quad (27.12)$$

яке записане для газу, температура T і тиск p якого залежать від ентропії S і об'єму V , і для загальної термодинамічної системи із L зовнішніми параметрами A_k та внутрішніми a_k . Формальний перехід до диференціалу температури замість ентропії елементарний, оскільки $dS = S'_T dT$, а добуток $T(S'_T)_\beta \equiv C_\beta(T, A_1, A_2, \dots, A_L)$ є просто теплоємністю процесу із заданими зовнішніми параметрами A_1, A_2, \dots, A_L . Для газів найбільш важливими є теплоємності при сталому об'ємі $C_V(T, V)$ та сталому тиску $C_p(T, p)$, а для твердих тіл їх кількість набагато більша. Тому для диференціалу густини внутрішньої енергії в лівій частині рівняння (26.31) можна використати вираз:

$$du = C(T)|_{u_{ij}} dT,$$

де $C(T)|_{u_{ij}}$ — теплоємність середовища за умови сталості деформацій. Не невеликих інтервалах температур і деформацій вона є сталою і тому її можна винести з під похідних.

Отже, із аналізу першого начала термодинаміки встановлено залежність внутрішньої енергії суцільного середовища від температури та його стану.

Можна одержати ще деякі спрощення, якщо знайти явний вигляд функцій $a_k(S, A_1, A_2, \dots, A_L)$, що описують відгук системи на зміну зовнішніх параметрів. Це можна зробити під час розгляду закону збереження енергії (26.31) для заданої системи. Наприклад, для пружного середовища у випадку відсутності потоку тепла та його джерел, із (26.31) випливає $dU = p_{ij}v_{ij}dt \equiv p_{ij}du_{ij}$, тому:

$$\left. \frac{\partial U(S, u_{ij})}{\partial u_{ij}} \right|_{S=\text{const}} = p_{ij}.$$

Звідси одразу випливає співвідношення

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_{kl} \partial u_{ij}} = \frac{\partial p_{kl}}{\partial u_{ij}}, \quad (27.13)$$

яке після підстановки закону Гука $p_{ij} = \lambda_{ijkl}u_{kl}$ приводить до умови симетрії:

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{klij}.$$

4. ВЕКТОР ПОТОКУ ТЕПЛА. Оскільки U — характеристика термодинамічної рівноваги, то вона не залежить від швидкостей. Отже у випадку в'язких середовищ, які підкорюються закону Нав'є-Стокса, доданок вигляду $\eta_{ijkl}v_{ij}v_{kl}$, що з'явиться в правій частині (26.31), не описується першим началом термодинаміки. Доданок із потоком тепла також потрібно описати не в межах рівноважної термодинаміки. Послідовне означення та явний вираз для потоків через зовнішні параметри системи отримані в рамках кінетичної теорії розвинутої в роботах Онзагера. Її основні положення:

- 1) якщо в системі є потоки, то вони виражаються через градієнти від зовнішніх параметрів і температури:

$$\vec{q}_l = L_{l,T}(T, A_1, A_2, \dots, A_L) \vec{\nabla} T + L_{l,k}(T, A_1, A_2, \dots, A_L) \vec{\nabla} A_k, \quad l = 1, 2, \dots, L+1 \quad (27.14)$$

де \vec{q}_i — термодинамічні потоки, A_k — узагальнені термодинамічні потенціали. Якщо в системі створена неоднорідність лише одного термодинамічного потенціалу, то виникне лише один потік, який прагнучиме вирівняти створену неоднорідність. Наприклад:

- а) неоднорідний електричний потенціал φ створює струм $\vec{q}_e = -\sigma \nabla \varphi$, де σ — провідність середовища;
- б) неоднорідна температура — потік тепла $\vec{q}_t = -\kappa \vec{\nabla} T$, де κ — коефіцієнт теплопровідності;
- в) неоднорідна концентрація частинок C — дифузійний потік $\vec{q}_d = -D \vec{\nabla} C$, де D — коефіцієнт дифузії.

- 2) квадратна матриця Онзагера $L_{k,l}$ — симетрична матриця кінетичних коефіцієнтів. Це означає, що “перехресні” потоки завжди виникають попарно. За наявності двох неоднорідних потенціалів виникне два взаємопов’язаних потоки. Наприклад, неоднорідні φ і T створюють потоки $\vec{q}_e = -\sigma \nabla \varphi - L_{et} \vec{\nabla} T$ і $\vec{q}_t = -\kappa \vec{\nabla} T - L_{te} \vec{\nabla} \varphi$, звідки видно, що у випадку існування термоструму є і обернений ефект, а саме: потік температури внаслідок градієнту електричного потенціалу. У різних середовищах таких ефектів існує багато (близько десяти), але вони завжди існують парами (прямий + обернений). Зазвичай ми будемо користуватись моделлю середовищ, де є потік тепла лише за рахунок теплопровідності, тому

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T. \quad (27.15)$$

5. Висновки. Таким чином, використовуючи класичну та квантову механіку, термодинаміку, електродинаміку, статистичну фізику та кінетичну теорію, вдалося виразити явно p_{ij} , \hat{u} , q через макроскопічні характеристики суцільного середовища, для яких побудовані рівняння руху, а саме — через густину середовища ρ , вектор деформації \vec{u} і температуру середовища T , тобто через 5 величин. У випадку наявності електромагнітного поля до рівнянь руху ще треба додати рівняння Максвелла для суцільного середовища. У обох випадках система буде замкненою. Зважаючи на це, ми можемо виписати таку загальну схему побудови рівнянь руху для конкретного суцільного середовища:

- 1) записуємо рівняння руху в самому загальному випадку через тензор механічних напруг p_{ij} , густину внутрішньої енергії u і вектор потоку тепла \vec{q} ;
- 2) задаємо модель середовища, виписуючи явні вирази для p_{ij} , u , \vec{q} через макроскопічні характеристики середовища: ρ , \vec{u} , \vec{v} , u_{ij} , v_{ij} , T , а також, можливо, електромагнітне поле \vec{E} , \vec{H} ;
- 3) підставляємо 2 в 1, проводимо перетворення і спрощення з метою запису в довільній криволінійній системі координат.

Задача 27.2. Записати феноменологічний розклад тензора $p_{ij}(\rho, T, u_{kl}, v_{kl}, E_k, H_k)$ до квадратичних доданків по u_{kl}, v_{kl}, E_k, H_k .

ЛЕКЦІЯ 28

Теорія пружності. Закон Гука

1.	Закон Гука.	443
2.	Тензор пружних сталих для кубічної симетрії.	444
3.	Тензор пружних сталих ізотропного середовища.	446
4.	Рівняння Ламе для ізотропного середовища.	447
5.	Висновки.	449

1. ЗАКОН ГУКА. Використовуючи наведену раніше схему, побудуємо систему рівнянь руху для моделі пружного середовища. Спочатку дослідимо тензор пружних сталих для кількох середовищ високої симетрії. *Пружним середовищем* називають середовище, у якому тензор механічних напружень залежить лише від деформацій. Пружні середовища бувають лінійні та нелінійні. Ми розглянемо лише лінійну модель, тобто

$$p_{ij} = \lambda_{ijkl}(\rho, T)u_{kl}. \quad (28.1)$$

Такий зв'язок між тензорами напружень та деформацій називається *лінійним законом Гука*. Пружними середовищами є тверді тіла, тому залежність p_{ij} від ρ дуже слабка, і майже до самої температури плавлення вони залишаються такими самими, як і при кімнатних температурах. На практиці найближчими до цієї моделі є тверді тіла, що руйнуються крихко, тобто після склеювання частин вони не втрачають форму (скло, фарфор, плавлений кварц, кераміка, чавун). На мікроскопічному рівні тип міжатомних зв'язків у них, як правило, ковалентний або іонний. У матеріалів із металевим міжатомним зв'язком присутня значна доля пластичності, хоча вони також підкорюються закону Гука в широкому діапазоні механічних навантажень.

Будемо вважати λ_{ijkl} сталими, тобто $p_{ij} = \lambda_{ijkl}(\rho_0, T_0)u_{kl}$ і в усіх інших рівняннях також будемо нехтувати квадратичними доданками. Окрім того, будемо також вважати середовище нестисливим і тому $dU = C_p dT$, де $C_p = C_V$, а для вектору потоку тепла візьмемо $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$.

Повна кількість компонент тензора λ_{ijkl} у D -вимірному просторі визначається за правилом D^4 , і у 3-вимірному просторі для тензора 4-го рангу маємо 81 компоненту. Внаслідок симетрії по 1-й та 2-й парах та симетрії між перестановками 1-ї та 2-ї парами індексів тензор пружних сталих має не більше, ніж 21 незалежну компоненту. Усі інші 60 компонент тензора виражаються через ці 21, або дорівнюють нулю. Так буде у середовищі, у якому відсутня симетрія. Пружними середовищами є кристали, полікристали, аморфні тіла, рідини і гази. Згідно з принципом Кюрі, симетрія атомної будови середовища визначає симетрію його матеріальних

тензорів. Внаслідок цього кількість незалежних компонент зменшується, а кількість рівних нулю збільшується. Знайти нульові та зв'язані між собою компоненти тензора пружних сталей можна за допомогою алгоритму, який зводиться до усереднення по групі:

$$\lambda_{ijkl} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{G}_n \lambda_{ijkl}^{(n)} \quad (28.2)$$

де \mathbf{G}_n із $n = 1, 2, \dots, N$ — сукупність матриць всіх перетворень симетрії, які допускає дане середовище. У цій формулі кількість операцій може бути дуже велика. Тому для практичних досліджень більш ефективним є алгоритм, в якому для заданої \mathbf{G}_k шукаються нульові, або лінійно зв'язані між собою компоненти тензора, а для \mathbf{G}_{k+1} досліджується тензор із властивостями, знайденими на k -му кроці. Це значно скорочує кількість обчислень.

Ізотропне середовище можна розглядати як середовище з кубічною симетрією, у якому є додаткова симетрія відносно поворотів на будь-який кут навколо трьох координатних осей. Тому спочатку дослідимо середовище з кубічною симетрією.

2. ТЕНЗОР ПРУЖНИХ СТАЛЕЙ ДЛЯ КУБІЧНОЇ СИМЕТРІЇ. Випишемо матрицю пружних сталей разом зі значеннями пар тензорних індексів, які відповідають одному матричному:

ij	11	22	33	23	13	12
11	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
22	c_{12}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
33	c_{13}	c_{23}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}
23	c_{14}	c_{24}	c_{34}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
13	c_{15}	c_{25}	c_{35}	c_{45}	c_{55}	c_{56}
12	c_{16}	c_{26}	c_{36}	c_{46}	c_{56}	c_{66}

(28.3)

і кількість компонент тензора, які відповідають кожному елементу матриці залежно від типу індексів:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &\Rightarrow \lambda_{1111}, & (1 \text{ елемент}); \\
 c_{12} &\Rightarrow \lambda_{1122} = \lambda_{2211}, & (2 \text{ елементи}); \\
 c_{14} &\Rightarrow \lambda_{1123} = \lambda_{1132} = \lambda_{2311} = \lambda_{3211}, & (4 \text{ елементи}); \\
 c_{44} &\Rightarrow \lambda_{2323} = \lambda_{2332} = \lambda_{3223} = \lambda_{3232}, & (4 \text{ елементи}); \\
 c_{56} &\Rightarrow \lambda_{1312} = \lambda_{1321} = \lambda_{3112} = \lambda_{3121} = \lambda_{1213} = \lambda_{1231} = \lambda_{2131} = \lambda_{2113}, & (8 \text{ елементів}).
 \end{aligned}$$

Знайдемо нульові, залежні та незалежні компоненти цього тензора. Кубічний кристал симетричний відносно поворотів на $\pi/2$, π , $3\pi/2$, 2π та низки інших перетворень. Ми розглянемо лише повороти.

1,2) Повороти на кут π навколо осей Oz та Ox задаються матрицями

$$\alpha_{ij}(Oz, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij}(Ox, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

відповідно, а закон перетворення тензора має вигляд:

$$\lambda'_{ijkl} = \alpha_{ii'}\alpha_{jj'}\alpha_{kk'}\alpha_{ll'}\lambda_{i'j'k'l'}. \quad (28.4)$$

Вигляд матриці $\alpha_{ij}(Oz, \pi)$ показує, що індекси 1 і 2 переходять самі у себе, але перед тензором з'являється знак мінус. Тому всі компоненти λ_{ijkl} із непарною кількістю індексів 1 і 2 будуть дорівнювати нулю, а в матриці c_{AB} також всі елементи $c_{14}, c_{15}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{46}, c_{56} = 0$. Аналогічно з вигляду матриці $\alpha_{ij}(Ox, \pi)$ випливає, що компонента $\lambda_{ijkl} = 0$, якщо у ній непарна кількість індексів 2 і 3, тому $c_{16}, c_{26}, c_{36}, c_{45} = 0$. Поворот на кут π навколо осі Oy вже нічого нового не дає, тому маємо матрицю:

ij	11	22	33	23	13	12
11	c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
22	c_{12}	c_{22}	c_{23}	0	0	0
33	c_{13}	c_{23}	c_{33}	0	0	0
23	0	0	0	c_{44}	0	0
13	0	0	0	0	c_{55}	0
12	0	0	0	0	0	c_{66}

(28.5)

3) Повороти на кут $\pi/2$ навколо осей Oz та Ox задаються матрицями

$$\alpha_{ij}(Oz, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij}(Ox, \pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Після перетворення за допомогою першої матриці індекс $1 \rightarrow 2$ без зміни компонент тензора, $2 \rightarrow 1$ зі зміною знаку, а індекс 3 — не змінюється. Тому $c_{11} = c_{22}$, $c_{13} = c_{23}$, $c_{44} = c_{55}$. Для другої матриці індекс 1 не змінюється, $2 \rightarrow 3$ без зміни тензора, а $3 \rightarrow 2$ зі зміною знаку. Звідси випливає, що $c_{22} = c_{33}$, $c_{12} = c_{23}$, $c_{11} = c_{22}$, $c_{55} = c_{66}$. Поворот на кут $\pi/2$ навколо осі Oy вже нічого нового не дає, тому ми встановили, що для кубічного кристалу матриця пружних сталей має всього 3 незалежних компоненти: c_{11}, c_{12}, c_{44} , 12 відмінних від нуля компонент, і 24 нульових. Їм відповідає три незалежні компоненти тензора λ_{ijkl} , 21 відмінну від нуля компоненту і 58 нульових компонент.

Таким чином, матриця пружних сталей для кристалу кубічної симетрії має вигляд:

$$\{c_{AB}\} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

Закон Гука для кубічного кристалу запишемо для однієї діагональної і однієї недиагональної компонент, а решту отримаємо заміною індексів. У матричному вигляді маємо $p_A = c_{AB}u_B$ де матричний індекс $A = \overline{1, 6}$, тому $p_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{12}u_3$,

що з урахуванням правил відповідності між матричними і тензорними індексами дає співвідношення у декартових координатах:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \lambda_{1111}u_{11} + \lambda_{1122}u_{22} + \lambda_{1122}u_{33} \\ &= (\lambda_{1111} - \lambda_{1122})u_{11} + \lambda_{1122}(u_{11} + u_{22} + u_{33}) \\ &= (c_{11} - c_{12})\frac{\partial u_1}{\partial x} + c_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) \\ &= (c_{11} - c_{12})u_{11} + c_{12} \operatorname{div} \vec{u}. \end{aligned}$$

Тепер для недіагонального елемента $p_4 = c_{44}u_4$, звідки аналогічно до попереднього отримуємо:

$$p_{23} = \lambda_{2323}u_{23} + \lambda_{2332}u_{32} = c_{44}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 2c_{44}u_{23} \quad (28.6)$$

Решту компонент p_{ij} можна отримати відповідною заміною індексів.

3. ТЕНЗОР ПРУЖНИХ СТАЛИХ ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА. Знайдемо явний вираз для матриці пружних сталих ізотропного середовища, зважаючи на той факт, що останнє було отримано з кубічного кристалу за умови його інваріантності відносно повороту на будь-який кут. Для цього побудуємо матрицю повороту на кут φ навколо осі Oz :

$$\alpha_{ij}(Oz, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і розглянемо перетворення λ_{1111} за формулою (28.4). Після нескладного, але громіздкого перемноження чотирьох матриць $\alpha_{ij}(Oz, \varphi)$, та врахування явних виразів для λ_{ijkl} через c_{AB} одержуємо:

$$c_{11} \equiv \lambda_{1111} = c_{11} + (c_{12} + 2c_{44} - c_{11}) 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

Ця рівність буде виконуватись для довільних кутів φ , якщо вираз в круглих дужках дорівнює нулю. Звідси, для ізотропного тіла одержимо умову $c_{11} = c_{12} + 2c_{44}$. Традиційно використовують позначення $c_{44} \equiv \mu$, $c_{12} \equiv \lambda$, вони називаються *параметрами Ламе* для ізотропного тіла. Тоді матриця пружних сталих ізотропного середовища набуває вигляду:

$$\{c_{AB}\} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (28.7)$$

Так само будуємо закон Гука для ізотропного пружного тіла. Спочатку для діагональної компоненти:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \lambda_{11kl}u_{kl} = (\lambda + 2\mu)u_{11} + \lambda u_{22} + \lambda u_{33} \\ &= \lambda(u_{11} + u_{22} + u_{33}) + 2\mu u_{11} = \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu u_{11}. \end{aligned}$$

Аналогічно для недіагональної:

$$p_{23} = \lambda_{23kl} u_{kl} = \mu u_{23} + \mu u_{32} = 2\mu u_{23}.$$

Решту виразів можна отримати простою заміною індексів, тому

$$p_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu u_{ij}. \quad (28.8)$$

Це і є закон Гука для ізотропного пружного середовища. Перший доданок відмінний від нуля для діагональних компонент і описує частину нормальних компонент механічних напружень. Зокрема він відмінний від нуля в тому випадку, коли деформації приводять до зміни об'єму.

Іноді явно виділяють потенціальну і вихорову компоненти деформацій і тоді закон Гука записують у вигляді:

$$p_{ij} = \delta_{ij} \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \left(u_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} \right), \quad (28.9)$$

де другий доданок описує тільки зсувні напруження, а перший — лише напруження, які впливають на зміну об'єму. Існують й інші форми запису закону Гука з використанням інших пар констант замість λ та μ — наприклад через модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона σ ,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

або через модуль всебічного стиску K та модуль зсуву G :

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad G = \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

Задача 28.1. Побудувати явний вигляд тензора термopужних сталих α_{ij} для кубічного кристалу та ізотропного середовища.

Задача 28.2. Показати безпосередніми обчисленнями, що тензор п'єзопружних сталих e_{ijk} для них дорівнює нулю.

4. Рівняння ЛАМЕ для ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА. Знайдемо рівняння руху ізотропного середовища в лінійному наближенні. Для цього виходимо із повної системи рівнянь, беремо до уваги закон Гука, а також вирази для потоку тепла $q_i = -\kappa_{ij}(\rho, T) \nabla_j T$, диференціалу внутрішньої енергії $dU = C_v(\rho, T) dT$ та швидкості $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$. Для їх спрощення припускаємо що всі матеріальні тензори — λ_{ijkl} , κ_{ij} тощо та теплоємність C_V є сталими величинами, тому їх можна виносити за знак похідної. Тоді рівняння неперервності набуває вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \dot{\vec{u}}) = 0, \quad (28.10)$$

звідки видно, що в другому доданку буде добуток двох невідомих величин, який робить це рівняння нелінійним. Щоб уникнути цього вважатимемо, що $\rho = \rho_0 + \rho'$

і $|\rho'| \ll \rho_0$. Тоді можна знехтувати доданком $|\rho' \dot{\vec{u}}|$, якщо швидкості не дуже великі, звідки:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \dot{\vec{u}} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho' + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}) = 0.$$

Це означає, що під знаком похідної може бути функція тільки координат:

$$\rho' = f(\vec{r}) - \rho_0 \operatorname{div} \vec{u}.$$

Якщо в початковий момент часу деформація дорівнює нулю, то тоді $\vec{u} = 0$, $\rho' = 0$, а значить і $f(\vec{r}) = 0$. Тому завжди виконується умова, яка дає розв'язок рівняння неперервності:

$$\rho'(\vec{r}, t) = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{u}(\vec{r}, t), \quad (28.11)$$

звідси випливає, що зміна густини пружного середовища виникає лише в результаті деформацій розтягу-стиску.

Аналогічно поступаємо для виведення рівняння руху. Тоді маємо

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + (\dot{\vec{u}} \cdot \vec{\nabla}) \dot{\vec{u}} \right) = \nabla_j (p_{ij} \vec{e}_i) + (\rho_0 + \rho') \vec{f}.$$

Нехтуємо всіма малими квадратичними доданками із невідомими функціями і отримуємо:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \nabla_j (p_{ij} \vec{e}_i) + \rho \vec{f}.$$

Перший доданок у правій частині перетворимо в декартовій системі координат і виразимо результат через інваріантні операції $\vec{\nabla}$, div , rot , Δ тощо. Тоді у одержаному виразі явно не фігуруватимуть орти і його можна використати в довільній системі координат знаючи вирази для вказаних операцій.

$$\begin{aligned} \nabla_i (p_{ij} \vec{e}_i) &= \vec{e}_i [\delta_{ij} \nabla_j \operatorname{div} \vec{u} + \mu \nabla_j (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)] \\ &= \lambda \vec{e}_i \nabla_i \operatorname{div} \vec{u} + \mu \vec{e}_i \nabla_i \nabla_j u_j + \mu \nabla_j \nabla_j (\vec{e}_i u_i) \\ &= (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}. \end{aligned}$$

Тепер цей вираз не залежить від ортів системи координат, тому остаточне рівняння руху пружного середовища буде справедливе у довільній системі координат:

$$\rho_0 \ddot{\vec{u}} = \rho \vec{f} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}, \quad (28.12)$$

Це рівняння називається *рівнянням Ламе* і описує залежність вектора малих деформацій від координат та часу. У силу зроблених нами припущень стосовно ρ , λ та μ , рівняння Ламе (28.12) не залежить від температури.

Повністю аналогічні підстановки і спрощення в рівнянні теплопровідності дають:

$$\rho_0 C_V \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\vec{e}_i \kappa_{ij} \nabla_j T) + \rho \omega + p_{ij} v_{ij}. \quad (28.13)$$

Оскільки рівняння для температури в лінійному наближенні не залежить від деформацій, то в механічних задачах останній доданок можна ігнорувати (нагріванням внаслідок деформації нехтуємо). Цей доданок можна врахувати у першому

наближенні, якщо середовище неоднорідно і стаціонарно деформоване (це дає велике значення p_{ij}) і в ньому поширюються звукові хвилі. Тоді у цьому доданку можна виділити лінійну по тензору швидкостей деформації комбінацію, яка відповідає за нагрівання середовища звуковими хвилями. Саме така передача енергії механічного руху звукової хвилі в теплову енергію є основним джерелом їх загасання.

Крайові умови до рівняння Ламе найчастіше бувають такими:

- 1) закріплена поверхня S із заданими деформаціями $\vec{u}^{(S)}(\vec{r} \in S, t)$,

$$\vec{u}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S} = \vec{u}^{(S)}(\vec{r} \in S, t);$$

- 2) вільна поверхня S із заданими механічними напруженнями $p_{ij}^{(S)}(\vec{r} \in S, t)$,

$$p_{ij}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S} = p_{ij}^{(S)}(\vec{r} \in S, t);$$

- 3) змішані крайові умови:

$$\vec{u}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S_1} = \vec{u}^{(S)}(\vec{r} \in S, t), \quad p_{ij}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S_2} = p_{ij}^{(S)}(\vec{r} \in S, t),$$

де S, S_1, S_2 — поверхня пружного середовища, або її частини.

Очевидно, що часові похідні в рівнянні Ламе фігурують лише у парній степені, тому воно оборотне відносно зміни знаку часу. Диференціальний оператор має гіперболічний тип, оскільки знак перед другими часовими і просторовими координатами різний. Це означає, що його розв'язками можуть бути хвилі.

Задача 28.3. Записати рівняння Ламе в трьох основних системах координат.

Задача 28.4. Виразити вектор деформації у вигляді суми потенціальної і вихорової складових $\vec{u} = -\vec{\nabla}\varphi + \text{rot } \vec{A}$, де вектор \vec{A} задовольняє умові вихоровості $\text{div } \vec{A} = 0$, і одержати рівняння для скалярного і векторного потенціалів деформації.

Задача 28.5. Знайти рівняння для потенціалу Папковича-Найбера $\vec{\Psi}(\vec{r}, t)$, який вводиться із умови $\vec{u} = \vec{r} \times \vec{\Psi}(\vec{r}, t)$.

5. Висновки. Таким чином, рівняння теорії лінійної пружності звелися до рівнянь Ламе для вектора деформацій та виразу для зміни густини, а рівняння для температури і цьому наближенні стає незалежним від механічного руху.

ЛЕКЦІЯ 29

Стаціонарні та нестаціонарні задачі теорії пружності

1.	Стаціонарні задачі теорії пружності.....	451
2.	Нестаціонарні задачі теорії пружності.....	454
3.	Поширення звуку у необмеженому середовищі.....	455
4.	Поширення звуку у обмеженому середовищі.....	456

1. СТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ. Для формулювання стаціонарних рівнянь теорії пружності, необхідно всі похідні по часу в загальних рівняннях Ламе покласти рівними нулю (всі величини не залежать від часу). Це не змінить перше рівняння системи — рівняння неперервності (28.11), а рівняння Ламе набуває вигляду:

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{f} = 0. \quad (29.1)$$

Третє рівняння системи — рівняння теплопровідності, яке було незалежне від цих двох, ми не будемо розглядати.

Оскільки пружні сталі $\lambda > 0$, $\mu > 0$, то перед всіма другими похідними у стаціонарному рівнянні Ламе будуть додатні вирази. Тому ми маємо еліптичний тип диференціального оператора. У зв'язку з цим, для розв'язування задач теорії пружності широко використовують метод потенціалу. Крім того, у всіх задачах теорії пружності потрібно максимально використовувати симетрію задачі.

Розглянемо для прикладу кілька типових задач.

Приклад 1. Знайти деформації плоского однорідного пружного нескінченного шару товщини $2h$, до верхньої і нижньої поверхні якого прикладено протилежно напрямлені нормальні однорідні навантаження, що створюють тиск p_0 (задача про однорідний стиск нескінченного шару).

◀ Вісь Oz системи відліку направляємо по нормалі до поверхні, а площину Oxy розташуємо симетрично всередині шару. Із трансляційної симетрії в площині Oxy та поворотної навколо осі Oz можна зробити висновок, що \vec{u} не залежить від змінних x та y . Оскільки прикладені до поверхні напруги орієнтовані вздовж осі Oz , і середовище ізотропне, то у ньому не виникнуть напруги, перпендикулярні напрямку осі Oz . У випадку анізотропного середовища, ця властивість втрачається. Виходячи із симетрії задачі можна записати:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{e}_z u_z(z)$$

Об'ємні сили відсутні, є лише тиски на поверхню. Із рівняння Ламе отримуємо:

$$\vec{e}_z (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z(z)}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z''(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z(z) = C_1 + C_2 z.$$

Сталі можна визначити із крайових умов при $z = \pm h$. Однак зважаючи на симетрію задачі, ці крайові умови можна замінити іншими, а саме: $u_z(0) = 0$, і тоді одразу ж маємо $C_1 = 0$, і умова на верхній поверхні, яка задає величину поверхневої сили $p_{ij}(z)|_{z=h} \vec{e}_i n_j = -p_0 \vec{e}_z$. У силу закону Гука маємо:

$$p_{zz}(z)|_{z=h} = (\lambda \delta_{zz} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu u_{zz})|_{z=h} = \lambda C_2 + 2\mu C_2 = C_2(\lambda + 2\mu) = -p_0.$$

Звідси $C_2 = -\frac{p_0}{\lambda + 2\mu}$ і можемо записати остаточний результат для деформації:

$$\vec{u}(\vec{r}) = -\vec{e}_z \frac{p_0 z}{\lambda + 2\mu}.$$

Із цього розв'язку можна побачити, що відносна зміна товщини шару внаслідок стиску, в межах лінійної теорії, буде складати:

$$|u_{zz}| = \left| \frac{2\vec{u}(h)}{2h} \right| = \frac{p_0}{\lambda + 2\mu},$$

ця величина повинна бути малою порівняно із одиницею. Якщо таку умову порушено, то деформації не є малими і потрібно враховувати вищі порядки у тензорі деформацій u_{ij} , розкладі (27.5) та в рівняннях руху.

У випадку від'ємних напружень пластина буде розтягуватися. Фактично ця задача пояснює роботу пружини, для якої виконується закон Гука в елементарному формулюванні: *видовження пружини прямо пропорційне до прикладеної сили*. ►

Приклад 2. Знайти деформацію однорідної пружної кулі радіуса R , масою m під дією її власної гравітації (деформація самогравітуючої кулі).

◀ Початок відліку вибираємо в центрі кулі, де деформація рівна нулю. Із умов симетрії зрозуміло, що деформації мають лише компоненту напрямлену вздовж радіусу кулі. Цей висновок можна зробити зі спрямованості дії гравітаційної сили, яку створює куля. Властивістю потенціалу обернено пропорційного до відстані є той факт, що для сферично симетричного розподілу мас (аналогічно електричного заряду) сила, прикладена до стороннього заряду на відстані r від центру, створюється лише масою всередині сфери цього ж радіуса. Тому для окремої фінм-частинки всередині такої кулі справедливо:

$$\Delta \vec{F} = -\gamma \frac{M(r)\rho \Delta V}{r^3} \vec{r} = -\gamma \frac{(4\pi r^3 \rho)(\rho \Delta V)}{3r^3} \vec{r} = -\frac{4}{3} \gamma \pi \rho^2 \vec{r} \Delta V,$$

і звідси отримуємо вираз для густини сили, яка діє всередині середовища

$$\rho \vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} = -\frac{4}{3} \pi \rho^2 \gamma \vec{r}.$$

Зі сферичної симетрії задачі випливає, що $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{e}_r u_r(r)$. У сферичних координатах рівняння Ламе має вигляд:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right] + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{2u_r}{r^2} \right] = \frac{4}{3} \pi \rho^2 \gamma r.$$

Явний запис обох диференціальних операторів дає однакові результати¹, тому доданки з похідними можна об'єднати. Для спрощення процедури розв'язку оператор представляємо у тому вигляді, який він має у першому доданку. Таким чином, отримуємо рівняння

¹ Оскільки для центрально-симетричного поля $\vec{u} = \vec{e}_r u_r(r)$ має місце $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$, то з означення оператора Лапласа випливає $\Delta \vec{u} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u}$.

другого порядку і до нього додаємо крайові умови:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] = \frac{4}{3} \pi \rho^2 \gamma r \\ u_r(0) = 0; \quad (p_{rr} n_r)_{r=R} = 0, \end{cases}$$

де компонента p_{rr} тензора механічних напружень у сферичних координатах має вигляд

$$p_{rr} = \lambda \delta_{rr} \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu u_{rr} = \lambda \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) + 2\mu \frac{du_r}{dr}.$$

Перше інтегрування дає:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho^2 \gamma}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{r^2}{2} + C_1 \right),$$

і, після множення на r^2 , повторного інтегрування, та ділення на r^2 , одержуємо:

$$u_r = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho^2 \gamma}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{r^3}{10} + \frac{C_1}{3} r + \frac{C_2}{r^2} \right).$$

Із умови $u_r(0) = 0$ знаходимо, що $C_2 = 0$. Щоб знайти іншу сталу, підставимо розв'язок до другої крайової умови:

$$0 = \left[\lambda \frac{d}{dr} (r^2 u_r) + 2\mu \frac{du_r}{dr} \right]_{r=R} = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho^2 \gamma}{\lambda + 2\mu} \left[\lambda \left(\frac{R^2}{2} + C_1 \right) + 2\mu \left(\frac{3}{10} R^2 + \frac{C_1}{3} \right) \right]$$

(відмітимо, що $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r)$ відомо з проміжного інтегрування), звідси знаходимо:

$$C_1 = -\frac{3R^2}{10} \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}.$$

Тепер для деформації можна одержати:

$$u_r(r) = -\frac{2\pi \rho^2 \gamma}{15(\lambda + 2\mu)} r \left(\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} R^2 - r^2 \right).$$

Оскільки $\lambda > 0$, $\mu > 0$, то коефіцієнти перед R^2 змінюються в межах від $5/3$ до 3 , таким чином завжди $u_r(r) < 0$ і деформація від'ємна, тобто самогравітуюча куля стискується. Відмітимо, що в реальній речовині завжди виконується умова $\mu < \lambda$.

Проаналізуємо цю задачу. Очевидно, що після вимкнення гравітаційної взаємодії така куля збільшить радіус. Знайдемо радіус r_m , на якому деформація максимальна. Із умови $u_r(r_m) = 0$ маємо:

$$r_m = R \sqrt{\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}} < R.$$

Якщо проаналізувати значення λ і μ для реальних речовин, то виявляється, що r_m буде ближче до поверхні ніж до центру кулі. Звідси видно, що $u_r < 0$ при $r < r_m$, тобто тут середовище стиснуте, і $u_r > 0$ при $r > r_m$, тобто тут середовище розтягнуте. Це є однією із причин того, що у випадку гравітаційного колапсу зірки частина її маси колапсує, а верхня оболонка розлітається. Для механічного напруження можна знайти:

$$p_{rr} = \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu u_{rr} = -\frac{4\pi \rho^2 \gamma}{3} \frac{5\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} (R^2 - r^2),$$

звідки видно, що механічні напруження максимальні у центрі сфери і рівні нулю на поверхні. ►

Задача 29.1. Знайти деформації однорідного пружного нескінченного шару товщиною $2h$, до верхньої і нижньої поверхні якого прикладені однорідні, протилежно напрямлені навантаження під кутом $+\alpha$ до відповідних нормалей.

Задача 29.2. Знайти деформації однорідної пружної товстостінної сфери з радіусами R_1, R_2 під дією тиску газу p_1 та p_2 всередині і зовні.

Задача 29.3. Знайти деформації однорідного пружного стержня розмірами $a \times a \times H$, нижня основа якого закріплена, а до верхньої прикладено рівномірно розподілену нормальну силу \vec{F} .

Задача 29.4. Знайти деформацію однорідного пружного циліндричного стержня з радіусом основи R та довжиною h , де $h > R$, нижню основу якого закріплено, а верхню повернуто на кут φ відносно положення рівноваги (деформація кручення).

Задача 29.5. Знайти деформацію однорідного пружного круглого диска розмірами R та H , де $H \ll R$, що обертається навколо осі з кутовою швидкістю ω (деформація під дією відцентрової сили).

Задача 29.6. Знайти деформацію нескінченного однорідного пружного циліндричного стержня з радіусом основи R , що обертається навколо осі з кутовою швидкістю ω (деформація під дією відцентрової сили).

2. НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ. Якщо у деформованому тілі відбувається рух, то у загальному випадку температура тіла не буде сталою у часі і може змінюватися від точки до точки тіла. Ця обставина може сильно ускладнювати рівняння руху і відповідні розв'язки. Але у багатьох випадках можна вважати, що передача тепла внаслідок теплопровідності відбувається дуже повільно, принаймні набагато повільніше, ніж коливальні рухи в тілі, тому рух можна розглядати адіабатичним.

Таким чином, при деформації внаслідок удару або іншій дії певної області суцільного середовища, в ньому можуть виникати локальні зміщення частинок від їх рівноважного стану, і потім це збурення може поширюватися у вигляді звукових хвиль. Для реальних суцільних середовищ навіть у випадку великих навантажень зміна густини є дуже малою величиною. Тому, нехтуючи об'ємними силами, для опису поширення звуку можна користуватися рівнянням Ламе:

$$\rho \ddot{\vec{u}} = (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}. \quad (29.2)$$

У цьому рівнянні також не враховано загасання (поглинання) звуку, оскільки в ньому відсутні сили в'язкості.

Будемо вважати, що густина середовища мало відрізняється від сталого значення у стані рівноваги,

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t), \quad |\rho'| \ll \rho_0,$$

тоді, вважаючи деформації та швидкості малими і нехтуючи малими величинами другого порядку малості, запишемо рівняння неперервності та рівняння Ламе у вигляді:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \rho_0 \ddot{\vec{u}} = (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}. \quad (29.3)$$

3. ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ У НЕОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ. Диференціальні оператори, що відносяться до різних незалежних змінних, в рівняннях (29.3) є лінійними і представлені у вигляді суми, то розв'язок можна шукати у вигляді *плоскої хвилі*:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \rho'(\vec{r}, t) = a e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (29.4)$$

де \vec{k} — хвильовий вектор, ω — частота і \vec{A} , a — амплітуди (всі величини сталі). Фаза двох сусідніх плоских хвиль відрізняється на кут 2π і відстань між ними визначає *довжину хвилі* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, $k = |\vec{k}|$.

Знайдемо деформації \vec{u} , густину можна знайти потім, виконуючи підстановку розв'язку \vec{u} до першого рівняння (29.3). Оскільки

$$\vec{\nabla} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = i\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad \Delta e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = -k^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$$

то

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \operatorname{div} (\vec{A} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}) &= \vec{\nabla} [i(\vec{k} \cdot \vec{A}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}] = -\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{A}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \\ \Delta (\vec{A} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{\nabla} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}) = \vec{A} \Delta e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = -k^2 \vec{A} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \end{aligned}$$

і рівняння Ламе набуває вигляду:

$$\rho_0 \omega^2 \vec{A} = (\lambda + \mu) (\vec{k} \cdot \vec{A}) \vec{k} + \mu k^2 \vec{A},$$

де опущено експоненціальний множник. Це однорідне рівняння відносно комплексної амплітуди, яке можна розв'язати за допомогою стандартного підходу, однак у даному випадку зручніше поступити інакше.

Розкладемо амплітуду \vec{A} на поздовжню та поперечну складові по відношенню до напрямку поширення хвилі, який задається хвильовим вектором:

$$\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}, \quad \vec{A}_{\parallel} = \frac{\vec{k}}{k} A_{\parallel}, \quad \vec{A}_{\perp} = \frac{\vec{k} \times (\vec{A} \times \vec{k})}{k^2},$$

тоді

$$\rho_0 \omega^2 (\vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}) = (\lambda + \mu) k^2 \vec{A}_{\parallel} + \mu k^2 (\vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}).$$

або

$$[\rho_0 \omega^2 - (\lambda + 2\mu) k^2] \vec{A}_{\parallel} + [\rho_0 \omega^2 - 2\mu k^2] \vec{A}_{\perp} = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при \vec{A}_{\parallel} та \vec{A}_{\perp} до нуля (оскільки вектори незалежні), отримаємо дисперсійні рівняння, які зв'язують довжину хвильового вектора та частоту:

$$\begin{aligned} \text{для } \vec{A}_{\parallel}: \quad \rho_0 \omega^2 &= (\lambda + \mu) k^2 + \mu k^2, \\ \text{для } \vec{A}_{\perp}: \quad \rho_0 \omega^2 &= \mu k^2, \end{aligned}$$

У результаті, у пружному середовищі можуть поширюватись два типи хвиль: поздовжні хвилі з фазовою швидкістю

$$c_{\parallel} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad (29.5)$$

та поперечні з фазовою швидкістю

$$c_{\perp} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (29.6)$$

Оскільки $\lambda > 0$, то $c_{\parallel} > c_{\perp}$. У поздовжній хвилі вектор деформації (напрямок коливань частинок) паралельний до напрямку поширення хвилі, а у поперечній — перпендикулярний.

4. ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ У ОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ. ...

ЛЕКЦІЯ 30

Гідродинаміка. Рівняння Нав'є-Стокса

1.	Закон Нав'є. Тензор в'язких сталих.	457
2.	Система рівнянь руху.	458
3.	Модель ідеальної рідини.	460
4.	Модель в'язкої нестисливої рідини.	464

1. ЗАКОН НАВ'Є. ТЕНЗОР В'ЯЗКИХ СТАЛИХ. У рідинах та газах можливі зсувні деформації без виникнення напруг. Така властивість називається *текучістю*. Напруги виникають у результаті швидкого переміщення рідини, або тіла в рідині чи газі. Внаслідок цього у феноменологічному підході вважається, що тензор пружних сталих рідини дорівнює нулю, а тензор в'язких сталих відмінний від нуля. Закони Торрічеллі і Паскаля стверджують, що у рівноважному стані в рідині або газі завжди існує тиск, який не залежить від напрямку поверхні, до якої він прикладений. Отже, у феноменологічному розкладі для тензора механічних напружень можна залишити лише доданки нульового та першого порядків:

$$p_{ij} = p_{ij}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) + \frac{\partial p_{ij}}{\partial v_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) v_{kl}. \quad (30.1)$$

У силу ізотропії рідин і газів для першого доданку маємо:

$$p_{ij}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) = -p(\rho, T) \delta_{ij},$$

де p — звичайний гідростатичний тиск, який вважається додатнім, коли сила направлена проти нормалі до поверхні рідини або газу. Для ідеального газу рівняння стану має вигляд

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT,$$

а для газу Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{\rho RT}{\mu} \frac{\rho_1}{\rho - \rho_1} - p_0 \frac{\rho_2^2}{\rho^2},$$

де ρ_1, ρ_2 — деякі сталі розмірності густини, а p_0 — сталі розмірності тиску. Для реальних рідин і газів є свої рівняння станів, які пов'язують тиск з температурою і густиною.

Другий доданок в (30.1), який за формою аналогічний закону Гука, визначається тензором в'язкості

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial v_{kl}}(\rho, T, 0, 0, 0, 0) = \eta_{ijkl}(\rho, T).$$

Цей тензор, очевидно, симетричний по першій та другій парам індексів. Що стосується його симетрії відносно перестановки першої і другої пар індексів, то її не можна довести так само як для тензора Гука, оскільки в'язкі напруження пропорційні швидкості і не можуть входити до будь-якого термодинамічного потенціалу, оскільки вони характеризують процес, а не стан. Така його симетрія обумовлена принципом Онзагера симетрії кінетичних коефіцієнтів. Тому, хоч формально ізо-тропія рідин та газів і приводить до такої ж симетрії тензора η_{ijkl} як у тензора λ_{ijkl} , фізичні причини цього виявляються зовсім різними. Отже, формально аналогічно закону Гука для пружного ізотропного середовища запишемо

$$\eta_{ijkl}v_{kl} = \tilde{\lambda}\delta_{ij}\operatorname{div}\vec{v} + 2\tilde{\mu}v_{ij}, \quad (30.2)$$

де $\tilde{\lambda}$ і $\tilde{\mu}$ — відмінні від нуля сталі тензора в'язкості, аналогічні до компонент тензора пружних сталей. У гідродинаміці, у силу історичних і певних фізичних причин замість $\tilde{\lambda}$ використовується стала $\xi - \eta$, а замість $\tilde{\mu}$ — стала η , тому закон Нав'є має вигляд:

$$p_{ij} = -p(\rho, T)\delta_{ij} + (\xi - \eta)\delta_{ij}\operatorname{div}\vec{v} + 2\eta v_{ij}. \quad (30.3)$$

На відміну від тиску, параметри в'язкості ξ і η для рідин можна вважати сталими, для газів їх залежність від ρ є практично лінійною, а залежність від температури відчутна тільки в широкому її інтервалі.

2. СИСТЕМА РІВНЯНЬ РУХУ. На відміну від теорії пружності в рідині всі ефекти пов'язані зі швидкістю, тому не можна нехтувати жодними її порядками, оскільки швидкості руху можуть досягати до- і надзвукових значень, коли обмін між механічним і тепловим рухом стає суттєвим. Отже, рівняння неперервності залишається незмінним

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0. \quad (30.4)$$

Підставимо рівняння Нав'є до рівняння руху і врахуємо формальну аналогію із законом Гука для перетворення доданку $\nabla_j p_{ij}\vec{e}_i$. Тоді права частина буде аналогічною до рівняння Ламе:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \xi\vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{v} + \eta\Delta\vec{v}. \quad (30.5)$$

Це рівняння руху рідини (або газу) називається *рівнянням Нав'є-Стокса*.

Оскільки тензор теплопровідності є ізотропним, то вважаючи його і теплоємність сталими, одержуємо рівняння для температури:

$$\rho C_V\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)T = -\kappa\Delta T + p_{ij}v_{ij} + \rho\omega. \quad (30.6)$$

Другий доданок в правій частині перетворимо, беручи до уваги рівняння Нав'є-Стокса:

$$p_{ij}v_{ij} = -p(\rho, T)\operatorname{div}\vec{v} + (\xi - \eta)(\operatorname{div}\vec{v})^2 + 2\eta v_{ij}v_{ij}. \quad (30.7)$$

Для реальних рідин і газів другий та третій доданки у цій сумі звичайно менші за перший. Всі три доданки описують перетворення енергії механічного руху у енергію теплового руху. Тепер запишемо всі три рівняння:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (30.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p(\rho, T) + \xi \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}, \quad (30.9)$$

$$\rho C_V \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) T = \varkappa \Delta T - p(\rho, T) \operatorname{div} \vec{v} + (\xi - \eta)(\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\eta v_{ij} v_{ij} + \rho \omega. \quad (30.10)$$

Це повна система рівнянь гідродинаміки (та аеродинаміки). Вона складається з п'яти диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно п'яти невідомих величин ρ , \vec{v} і T . Рівняння стану $p(\rho, T)$ рідини, або газу вважається заданим. Для ідеального газу це рівняння Менделєєва-Клапейрона, для реального газу — рівняння Ван-дер-Ваальса, для рідин — якесь інше. У випадку невеликих відхилень від положень рівноваги часто використовується лінійне наближення, яке називається ізобаричним:

$$p(\rho, T) = p(\rho_0 + \rho', T_0 + T') \approx p(\rho_0, T_0) + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0, T_0) \rho' + \frac{\partial p}{\partial T}(\rho_0, T_0) T'. \quad (30.11)$$

Тоді рівняння руху характеризується лише коефіцієнтами p'_ρ і p'_T . В таких рівняннях коефіцієнти в'язкості ξ , η , теплопровідність \varkappa та теплоємність C_V вважаються сталими величинами, які також визначаються лише значеннями ρ_0 і T_0 . У випадку великої зміни температури або густини таке наближення непридатне.

Відомими в цих рівняннях є зовнішні сили \vec{f} і джерела тепла ω . Якщо до цих рівнянь додати початкові та крайові умови, то у математичному розумінні задача стає однозначно сформульованою. Характерною математичною особливістю цих рівнянь є їх нелінійність і в першу чергу за рахунок конвективних похідних $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho$ та $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T$. Математичні дослідження показали, що доданок $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$, незважаючи на його малість для малих швидкостей руху порівняно зі швидкістю звуку, відповідає за генерацію поперечних рухів по відношенню до напрямку основного руху, коли ламінарний рух втрачає стійкість.

Залежно від величини та співвідношень між параметрами ξ , η та \varkappa і від рівняння стану $p(\rho, T)$, у гідродинаміці використовуються такі моделі:

- 1) *ідеальна рідина*: $\xi = \eta = 0$, $\varkappa = 0$, а $p(\rho, T)$ задовольняє рівняння адіабати, оскільки теплопровідність відсутня. Найчастіше використовується в аеродинаміці на дозвукових швидкостях. Відхилення характеристик повітря від характеристик ідеального газу порядку 10% і менше;
- 2) *в'язка нестислива рідина*: $\xi, \eta \neq 0$, $\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$, а також $T \equiv T_0 = \text{const}$ і $\varkappa = 0$. Наприклад, вода на дозвукових швидкостях задовольняє ці умови з точністю до кількох відсотків;
- 3) *баротропна рідина*: $T = \text{const}$, $p = p(\rho)$, $\xi = \eta = 0$. Ця модель використовується, наприклад, для дослідження поширення звуку в океанах.

Таким чином, встановлено вираз для тензору механічних напружень у рідинах і газах та отримано рівняння їх механічного руху та теплопровідності.

Задача 30.1. Записати систему рівнянь руху гідродинаміки в трьох основних системах координат.

3. МОДЕЛЬ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ. У випадку ідеальної рідини можна знехтувати в'язкістю та теплопровідністю, тобто покласти $\xi = \eta = 0$ та $\varkappa = 0$. Тоді система рівнянь руху суцільного середовища набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p \\ \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u \right] = -p \operatorname{div} \vec{v}. \end{cases} \quad (30.12)$$

Друге рівняння (рівняння руху) називається *рівнянням Ейлера*. Перетворимо рівняння для енергії, яке можна записати у вигляді повної похідної по часу:

$$\rho \frac{du}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v},$$

використовуючи рівняння неперервності у формі

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Виражаючи з останнього співвідношення $\operatorname{div} \vec{v}$ і підставляючи до виразу для енергії, отримаємо:

$$\rho \frac{du}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

звідки

$$\frac{d}{dt} \left(u + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}.$$

Оскільки $h = u + \frac{p}{\rho}$ є масовою густиною ентальпії¹, то останній вираз можна записати як

$$dh = \frac{1}{\rho} dp. \quad (30.13)$$

Беручи до уваги зв'язок із масовою густиною ентропії

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp,$$

отримаємо

$$T ds = 0 \quad \Rightarrow \quad ds = 0. \quad (30.14)$$

¹ Аналог співвідношення $H = U + pV$.

Це означає, що рух ідеальної рідини є адіабатичним процесом, який проходить зі сталим значенням ентропії.

Закон Бернуллі. Рівняння руху можна записати у вигляді:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p.$$

Оскільки згідно з (30.13) $\vec{\nabla} h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$, то

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} h.$$

Перетворимо ліву частину рівності. Оскільки $\frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$, то

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$$

У результаті, рівняння Ейлера можна записати у формі:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + h \right) = \vec{f} + \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$$

У випадку потенціального зовнішнього поля $\vec{f} = -\vec{\nabla} \varphi$ отримаємо

$$\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \varphi + h \right) = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (30.15)$$

Для стаціонарній течії $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ останній доданок у правій частині зникає.

Лінією течії називається крива, дотична до якої у кожній точці паралельна до швидкості, тобто у випадку малого зміщення $d\vec{r}$ вздовж таких ліній буде $d\vec{r} \parallel \vec{v}$. У декартових координатах:

$$\frac{dx}{v_x(\vec{r}, t)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}, t)}.$$

Якщо функція $\vec{v}(\vec{r}, t)$ відома, то останні рівняння дають набір кривих у просторі, які відповідають лініям течії рідини з різними початковими точками. У випадку нестационарного руху просторове положення ліній течії змінюються.

Спроекуємо рівняння (30.15) на лінію течії, скалярно домножуючи обидві частини рівняння на зміщення $d\vec{r}$ вздовж цієї лінії і використовуючи умову $d\vec{r} \times \vec{v} = 0$:

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \varphi + h \right) = 0,$$

звідки

$$\frac{v^2}{2} + \varphi + h = \text{const} \quad \text{вздовж лінії течії.} \quad (30.16)$$

Рівняння (30.16) виражає *закон Бернуллі*, який є однією з форм закону збереження енергії. Стала величина у правій частині рівності визначається у довільній точці лінії течії і для різних ліній буде різною.

Приклад 1. Формула Торрічеллі.

◀ Для нестисливої рідини $\rho = \text{const}$ і $dh = d\left(\frac{p}{\rho}\right)$, тому $h = \frac{p}{\rho}$, тому для двох точок на лінії течії

$$\frac{v_1^2}{2} + \varphi_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \varphi_2 + \frac{p_2}{\rho}.$$

Якщо рідину поміщено у однорідне поле сили тяжіння, то $\varphi = gz$ (вектор \vec{g} паралельний до осі Oz), точка 1 розташована на вільній поверхні шару рідини у посудині висоти l , а точка 2 є отвором на глибині l , тобто

$$\text{точка 1: } v_1 = 0, \quad z_1 = l, \quad p_1 = p_0$$

$$\text{точка 2: } v_2 = v, \quad z_2 = 0, \quad p_2 = p_0$$

де p_0 — атмосферний тиск, то з закону Бернуллі отримаємо $v = \sqrt{2gl}$ — швидкість витікання рідини з отвору. ▶

Гідростатика. Найбільш простий вигляд мають рівняння руху ідеальної рідини у випадку, коли рідина перебуває в стані спокою, тобто $\vec{v} = 0$. Тоді система (30.12) зводиться до *рівняння гідростатики*

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}, \quad (30.17)$$

яке описує механічну рівновагу середовища.

Розглянемо декілька простих розв'язків цього рівняння. Якщо знехтувати об'ємними силами ($\vec{f} = 0$), то тиск p буде однаковим в усіх точках середовища (*закон Паскаля*). Якщо рідина є нестислою ($\rho = \text{const}$) і розташована в однорідному полі тяжіння ($\vec{f} = \vec{g}$), то в системі координат з початком на поверхні рідини і віссю Oz , що спрямована вниз по вертикалі, рівняння (30.17) набуде вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g,$$

звідки випливає, що

$$p = p_0 + \rho g z,$$

де p_0 — зовнішній тиск на поверхню рідини.

Розглянемо ще один приклад рівноважного стану, ідеальний газ в однорідному полі тяжіння, якщо в усіх точках газу має місце теплова рівновага ($T = \text{const}$). У цьому випадку можна використати рівняння стану для ідеального газу (Менделєєва-Клайперона) $p = \rho \frac{kT}{m}$ (тут k — стала Больцмана, m — маса молекули газу) і спрямувати вісь Oz вертикально вгору. Тоді рівняння (30.17) можна записати так:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{kT}{m} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g.$$

Звідси знайдемо вираз для розподілу густини з висотою

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{mg}{kT}(z - z_0) \right],$$

який називається *барометричною формулою*.

Циркуляція швидкості. Важливою характеристикою руху рідин (газів) є скалярна величина $\operatorname{div} \vec{v}$, яка характеризує зміну елементу об'єму під час руху. Іншою важливою величиною є векторна величина $\operatorname{rot} \vec{v}$, яка описує зміну його орієнтації у процесі руху.

Визначимо циркуляцію швидкості по деякому замкнутому контуру $L(t)$ в момент часу t :

$$\Gamma(t) = \oint_{L(t)} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (30.18)$$

Знайдемо похідну функції $\Gamma(t)$ за прямим означенням. В момент часу $t+dt$ частинка рідини перебуватиме в точках з координатами $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} dt$ і матиме швидкість $\vec{v}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt)$. Аналогічно до об'ємних інтегралів, які виникали під час аналізу законів збереження, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\oint_{L(t+dt)} \vec{v}(\vec{r}, t+dt) \cdot d\vec{r} - \oint_{L(t)} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{заміна:} \\ \text{перехід до контуру } L(t) \end{array} \right| \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \oint_{L(t)} \frac{\vec{v}(\vec{r}(t+dt), t+dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} \cdot d\vec{r} = \oint_{L(t)} \frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} \cdot d\vec{r} \\ &= - \oint_{L(t)} \vec{\nabla}(h + \varphi) \cdot d\vec{r} \equiv 0 \end{aligned}$$

як інтеграл від повного диференціалу по замкнутому контуру. Таким чином,

Для довільного контуру L , який рухається разом з рідиною, циркуляція швидкості вздовж нього залишається незмінною:

$$\Gamma(t) = \oint_{L(t)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{const} \quad (\text{теорема Томсона}).$$

Згідно з теоремою Стокса вираз (30.18) можна записати як інтеграл по площі, яка спирається на цей контур:

$$\Gamma(t) = \int_{S(L)} \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} dS.$$

Використовуючи таке представлення, теорему Томсона можна сформулювати так: у ідеальній рідині функція $\operatorname{rot} \vec{v}$ є сталою вздовж довільного замкнутого контуру, який рухається разом з рідиною:

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}, t)|_{L(t)} = \text{const}.$$

Якщо у деякий момент часу рідина перебувала у стані спокою, то $\Gamma(t) = 0$, оскільки $\vec{v} = 0$. У наступні моменти часу рідина може рухатись, але циркуляція швидкості залишається незмінною. Оскільки поверхня інтегрування є довільною, то звідси випливає

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \Phi,$$

тобто поле швидкостей можна виразити як градієнт деякої функції. Функція Φ називається *потенціалом швидкостей*, а рух, для якого $\text{rot } \vec{v} = 0$ — *потенціальним (безвихровим) рухом*.

Якщо рідина є нестисливою, то рівняння неперервності можна записати як і

$$\text{div } \vec{v} = \text{div } \vec{\nabla} \Phi = \Delta \Phi = 0,$$

тобто потенціал швидкостей задовольняє рівняння Лапласа. До цього рівняння потрібно додати граничні умови, у випадку контакту рідини з нерухомою твердою поверхнею нормальна по відношенню до поверхні компонента швидкості рідини дорівнює нулю, тобто $\vec{n} \cdot \vec{v} = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \Phi = 0$.

Розподіл тиску в цьому випадку можна знайти за допомогою закону Бернуллі:

$$\vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right] = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi,$$

або

$$\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t),$$

де $F(t)$ — довільна функція часу, яку можна покласти рівною нулю замінивши Φ на $\Phi + \int F(t) dt$ (це не впливає на значення швидкості та рівняння для Φ).

4. Модель в'язкої нестисливої рідини.

Рівняння руху. Розглянемо в'язку нестисливу рідину, нехтуючи тепловими ефектами, тобто вважаємо $T = T_0 = \text{const}$ і $\kappa = 0$. Тоді достатньо розглянути лишень рівняння неперервності та рівняння руху:

$$\rho_0 \text{div } \vec{v} = 0, \tag{30.19}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = \rho_0 \vec{f} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v}. \tag{30.20}$$

Зважаючи на те, що ρ_0 і T є сталими, то на перший погляд доданок із градієнтом p повинен бути рівний нулю. Але це не так, оскільки у нестисливій рідині зміна тиску зумовлена законом Паскаля, згідно з яким перепад тиску при зміні глибини на Δh задається виразом $\Delta p = \rho_0 g \Delta h$, де g — прискорення вільного падіння. У випадку стаціонарної течії рівняння руху спрощується, оскільки $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$, але все одно вони залишаються нелінійними внаслідок наявності конвективного доданку. У деяких високосиметричних задачах цей доданок може бути рівним нулю внаслідок скалярного множення “перпендикулярних” векторів \vec{v} і $\vec{\nabla}$ і рівняння руху стають лінійними. Але і в цьому випадку їх розв’язок потрібно перевіряти на предмет стійкості щодо виникнення часово- і просторовозалежних флуктуацій, які можуть виникати спонтанно і для нестійкого розв’язку наростати і порушувати симетрію задачі. Схема цих досліджень така.

I) Рівняння (30.19) приводять до безрозмірного вигляду, вводячи: 1) безрозмірну координату $\vec{\xi} = \vec{r}/R_0$, де R_0 може бути, наприклад, радіусом труби в якій тече рідина, чи розміром тіла, яке рухається в рідині; 2) безрозмірну швидкість $\vec{u} = \vec{v}/v_0$, де v_0 може бути, наприклад, середньою швидкістю рідини в трубі, або швидкістю тіла в рідині. Далі розглядають його стаціонарний варіант:

$$\tilde{\Delta}\vec{u} - \frac{\rho_0 v_0 R_0}{\eta} (\vec{u} \cdot \tilde{\nabla})\vec{u} = -\frac{\rho_0 R_0^2}{v_0 \eta} \vec{f} + \frac{R_0}{v_0 \eta} \tilde{\nabla} p, \quad (30.21)$$

де знак $\tilde{}$ позначає відповідні оператори диференціювання по безрозмірних координатах.

II) Якщо безрозмірний множник $\frac{\rho_0 v_0 R_0}{\eta} \equiv \text{Re}$, який називається *числом Рейнольдса*, значно менший за одиницю, то нелінійним доданком $(\vec{u} \cdot \tilde{\nabla})\vec{u}$ нехтують і розв'язують лінійну задачу. Таку течію $\vec{u}_l(\vec{\xi})$ в'язкої рідини називають *ламіна́рною*.

III) Отриманий розв'язок разом із малою флуктуацією вигляду $\delta\vec{u} \exp(i\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, де $|\delta\vec{u}| \ll |\vec{u}_l|$, підставляють у точне нестационарне рівняння і досліджують його на стійкість стандартними методами, змінюючи величину Re . Розв'язок стійкий, якщо частота ω малих флуктуацій дійсна і перестає бути стійким, якщо ω стає комплексною. Значення числа Re , для якого це відбувається є верхньою межею (на осі чисел Рейнольдса) суто ламинарної течії і початком області, де течія поступово починає втрачати властивості ламинарної. Для $\text{Re} \sim 10^3$ і більших значеннях течія стає *турбулентною*, тобто в ній разом із середньою швидкістю переміщення існує неперервний спектр частот ω , на яких відбувається хаотичний, неупорядкований рух рідини. Дослідження турбулентності течії рідини є однією із найскладніших проблем гідродинаміки і математики взагалі.

Таким чином ми встановили вираз для тензору механічних напружень в рідинах і газах та отримали рівняння їх механічного руху та теплопровідності.

Простим прикладом розв'язку рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої в'язкої рідини є задача про ламинарну течію у круглій трубі.

Приклад 2. Дослідити стаціонарний рух в'язкої нестисливої рідини в круглій трубі, який створюється внаслідок перепаду тиску на її краях, що приводить до його сталого градієнту $p'_z = \text{const}$ вздовж труби.

◀ Спрямуємо вісь Oz циліндричної системи координат вздовж труби, тоді швидкість матиме лише z -компоненту, яка залежатиме від відстані точки від осі труби r . Таким чином, рівняння руху (30.19) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z = 0, \\ \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (30.22)$$

звідки $p = p(z)$. Отже, задача зводиться до розв'язку рівняння

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right),$$

або в циліндричних координатах

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}. \quad (30.23)$$

За рахунок симетрії задачі останній доданок в правій частині дорівнює нулю, і внаслідок незалежності змінних r і z рівняння (30.23) розпадається на два рівняння:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = C, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{C}{\eta}. \quad (30.24)$$

Розв'язок цих рівнянь має вигляд:

$$p = Cz + p_0 \quad \text{та} \quad v_z = \frac{1}{4} \frac{Cr^2}{\eta} + C_1 \ln r + C_2. \quad (30.25)$$

Перша гранична умова є наслідком загальнофізичної вимоги про скінченність розв'язку у всій області. Знайдений розв'язок включає функцію $\ln(r)$, яка прямує до нескінченності при $r \rightarrow 0$, тому покладемо $C_1 = 0$. Оскільки рідина в'язка, то вважається, що її приповерхневий шар прилипає до поверхні труби, що обмежує область течії, тому гранична умова при $r = R$ має вигляд $v_z(R) = 0$, тобто $C_2 = -\frac{1}{4} \frac{CR^2}{\eta}$.

Стала p_0 визначає тиск на початку труби (де $z = 0$), а стала C визначається тиском в кінці труби:

$$C = \frac{p_1 - p_0}{l} = -\frac{\Delta p}{l},$$

тобто C визначає перепад тиску на одиницю довжини. Отже, поле швидкостей має вигляд:

$$v_z = \frac{\Delta p}{4l\eta} (R^2 - r^2), \quad (30.26)$$

а тиск лінійно спадає вздовж труби:

$$p = p_0 - \frac{\Delta p}{l} z. \quad (30.27)$$

Знайдемо масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби

$$Q = \frac{dm}{dt} = \int_{r \leq R} \rho v_z dS = \frac{\Delta p \rho}{4l\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\varphi = \frac{\pi \rho \Delta p R^4}{8l\eta}. \quad (30.28)$$

Формула (30.28) називається *формулою Пуазейля*. Видно, що витрати рідини пропорційні четвертій степені радіуса труби. ►

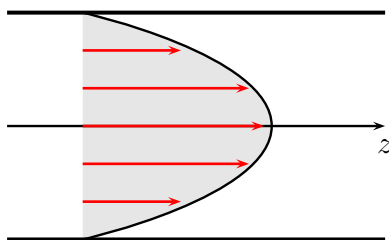


Рис. 30.1. До прикладу 2.

Ламінарне обтікання кульки. Аналогічно розглядається інша точно інтегрована у лінійному наближенні задача про ламінарне обтікання кульки радіуса R в'язкою нестисливою рідиною, яка на нескінченності рухається зі швидкістю v_0 . Тут, на відміну від течії в круглій трубі, у силу сферичної симетрії кульки і осової симетрії течії, є дві компоненти швидкості: радіальна й азимутальна. Тому задача стає помітно складнішою.

Введемо сферичну систему координат із початком в центрі кульки і віссю Oz вздовж вектора \vec{v}_0 . Тоді стаціонарні рівняння руху і крайові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \Delta \vec{v} &= \frac{\rho_0}{\eta} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} p, \\ \vec{v}(\vec{r})_{r=R} &= 0, \quad \vec{v}(\vec{r})_{r \rightarrow \infty} = \vec{e}_z v_0, \quad p(\vec{r})_{r \rightarrow \infty} = p_0. \end{aligned} \quad (30.29)$$

Згідно з наведеною вище схемою досліджень, будемо вважати число Рейнольдса малим, тобто $\operatorname{Re} = \frac{\rho_0 v_0 R}{\eta} \ll 1$, відкидаємо перший доданок у правій частині рівняння руху і переходимо до безрозмірних змінних.

Для зменшення викладок з цього моменту всі безрозмірні змінні позначатимемо тими ж самими літерами що і розмірні змінні, і користуватимемося лише першими, аж до оберненого переходу. Тоді система (30.29) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, & \Delta \vec{v} &= \vec{\nabla} p, \\ v_r(r, \theta)_{r=1} &= 0, & v_\theta(r, \theta)_{r=1} &= 0, \\ v_r(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} &= \cos \theta, & v_\theta(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} &= -\sin \theta, \\ p(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} &= \tilde{p}_0 \equiv \frac{p_0 R \eta}{v_0}. \end{aligned} \quad (30.30)$$

Якщо тепер на друге рівняння подіяти оператором div і врахувати перше, то отримаємо рівняння Лапласа для тиску $\Delta p = 0$, яке у відкритій області з нескінченною точкою має розв'язок

$$p(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (30.31)$$

де A_l — довільні сталі, а $P_l(x)$ — поліноми Лежандра порядку l . Для пошуку сталих A_l потрібно використати крайові умови, звідки одразу отримаємо $A_0 = p_0$ (у безрозмірних позначеннях). Поліноми Лежандра утворюють ортогональний базис, тому поліном порядку k може з'явитися в розв'язку задачі лише за наявності в її умовах полінома такого ж порядку або його похідних. У крайових умовах маємо $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, тому розв'язок для тиску має вигляд:

$$p(r, \theta) = p_0 + \frac{A_1}{r^2} P_1(\cos \theta) = p_0 + \frac{A_1}{r^2} \cos \theta, \quad (30.32)$$

в якому стала A_1 залишається невідомою. Тепер, беручи до уваги явний вигляд дії оператора Лапласа на векторну функцію у сферичних координатах, отримуємо

таку систему рівнянь для швидкості:

$$\begin{aligned}\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) &= -\frac{2}{r^3} A_1 \cos \theta, \\ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} &= -\frac{1}{r^3} A_1 \cos \theta,\end{aligned}\quad (30.33)$$

де

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Виконаємо заміну змінних $v_r(r, \theta) = X(r) \cos \theta$ і $v_\theta(r, \theta) = -Y(r) \sin \theta$, підставимо її до (30.33) і проведемо спрощення та скорочення. У результаті отримаємо систему неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dX}{dr} \right) - 4X + 4Y = -\frac{2}{r} A_1, \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dY}{dr} \right) - 2Y + 2X = \frac{1}{r} A_1. \quad (30.34)$$

Однорідний розв'язок шукаємо у вигляді $X_h = \frac{B}{r^\alpha}$, $Y_h = \frac{C}{r^\alpha}$, де сталі B , C і α — невідомі. Після підстановки в (30.34) для B і C отримуємо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\alpha(\alpha + 1)B - 4B + 4C = 0, \quad \alpha(\alpha + 1)C - 2C + 2B = 0. \quad (30.35)$$

Вона має нетривіальний розв'язок лише коли її визначник рівний нулю. Звідси знаходимо $\alpha = -2, 0, 1, 3$, а щоб швидкість не зростала на нескінченності, залишаємо $\alpha = 0, 1, 3$. Тепер для кожного α відкидаємо одне рівняння, а з другого знаходимо: $C_0 = B_0$, $C_1 = B_1$ і $C_3 = -B_3/2$, де індекс внизу вказує значення α . Оскільки права частина (30.34) пропорційна r^{-1} , то неоднорідний розв'язок матиме таку саму залежність, тому покладаємо $X_n = D/r$, $Y_n = E/r$, де сталі D , E невідомі, а їх значення шукаємо після підстановки в (30.34). Оскільки $\alpha = 1$ є розв'язком однорідної системи, то отримана неоднорідна система рівнянь для D і E виявляється виродженою, але сумісною і з неї знаходимо $E = D - A_1/2$. Тому безрозмірний розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned}v_r &= \left(B_0 + \frac{B_1}{r} + \frac{B_3}{r^3} \right) \cos \theta, \\ v_\theta &= - \left[B_0 + \frac{1}{r} \left(B_1 - \frac{1}{2} A_1 \right) - \frac{B_3}{2r^3} \right] \sin \theta, \\ p &= p_0 + \frac{A_1}{r^2} \cos \theta.\end{aligned}\quad (30.36)$$

Для визначення чотирьох невідомих сталих $B_{0,1,3}$, та A_1 є п'ять крайових умов, але всі три умови на нескінченності задовольняються лише однією сталою $B_0 = 1$, тому залишається дві умови і три невідомі. Для пошуку зв'язку між сталими підставляємо (30.36) до першого рівняння системи $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Після спрощень і перетворень знаходимо, що воно перетворюється в тотожність лише за умови $A_1 = B_1$. Нарешті, тепер із крайових умов при $r = 1$ знаходимо $B_1 = -3/2$, $B_3 = 1/2$.

Таким чином, повертаючись до розмірних змінних, можемо записати результат справедливий у нульовому наближенні по конвективному доданку:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= v_0 \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= -v_0 \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta, \\ p &= p_0 - \frac{3R}{2r^3} v_0 \eta \cos \theta, \end{aligned} \quad (30.37)$$

де v_0 — швидкість течії рідини на нескінченності при нерухомій кульці, r — відстань від центру кульки, θ — кут між швидкістю і напрямком на точку вимірювання.

Із формули для тиску видно, що в лобовій області кульки $\theta \rightarrow \pi$, на яку налітає потік рідини, тиск більший ніж на нескінченності, а в області тіні позаду кульки при $\theta \rightarrow 0$ він менший і при $v_0 > 2p_0 R^2 / 3\eta$ він взагалі стає від'ємним на поверхні кульки при $\theta = 0$. Рідина в таку область буде затягуватися і це створить в ній протитечію по відношенню до основного потоку, яка стає початком вихорового руху і руйнування ламінарного. Це тільки якісне пояснення утворення так званих вихорових доріжок Кармана при обтіканні тіл, оскільки не враховує впливу на течію і тиск, яку внесе зміна числа Рейнольдса для більших значень швидкості v_0 .

Формула Стокса. Знайдемо силу, яка діє на поверхню кульки з боку рідини. За означенням поверхневої сили:

$$\vec{F} = \oint_{r=R} p_{ij}(\vec{r}) \vec{e}_i n_j dS.$$

У силу осової симетрії течії, лише компонента сили вздовж осі Oz відмінна від нуля, а за рахунок сферичної симетрії поверхні кульки $\vec{n} = \vec{e}_r$, тому маємо:

$$F_z = 2\pi R^2 \int_0^\pi p_{ir} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_i \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \int_0^\pi (p_{rr} \cos \theta - p_{\theta r} \sin \theta) \sin \theta d\theta.$$

Тепер враховуємо закон Нав'є для тензора в'язких механічних напружень у нестиглий рідині $p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta v_{ij}$, підставляємо сюди знайдені вище тиск і швидкості, обчислюємо похідні, покладаємо $r = R$ та інтегруємо. Після нескладних обчислень отримуємо формулу:

$$F_z = -6\pi R \eta v_0, \quad (30.38)$$

яка називається *формулою Стокса*. Із неї випливає, що для малих чисел Рейнольдса опір рідини або газу прямо пропорційний швидкості руху тіла і його лінійному розміру.

Задача 30.2. Знайти силу яка діє на одиницю довжини круглої труби з боку ламінарного потоку рідини.

Задача 30.3. Дослідити ламінарний потік рідини між двома коаксіальними трубами.

Задача 30.4. Дослідити ламінарний потік рідини у трубі квадратного перерізу.

ЛЕКЦІЯ 31

Звук у рідинах та газах

1. Звук у ідеальній рідині.	471
2. Звук у в'язкій баротропній рідині.	473

1. ЗВУК У ІДЕАЛЬНІЙ РІДИНІ. Поширення збурень (звуку) в рідинах і газах має практично таку саму природу, як і в пружному середовищі. Але в рідині зсув одних шарів відносно інших не викликає появи сил, що намагалися б повернути елемент рідини в початкове положення. Тому в рідині немає поперечних звукових хвиль, а є тільки поздовжні, що уявляють собою поширення періодичних стисків і розширень.

Якщо знехтувати масовими об'ємними силами та силами в'язкості (тобто не враховувати загасання хвиль), то рівняння руху та неперервності, будуть мати вигляд:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (31.1)$$

До них потрібно також додати рівняння стану ідеальної рідини $p = p(\rho, T)$. Вище було показано що для ідеальної рідини (за відсутності внутрішнього тертя) зміна ентропії $dS = 0$ і процес поширення звуку в рідинах і в газах відбувається адіабатично. Для ідеальних газів рівняння адіабати має вигляд:

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = \text{const},$$

або, враховуючи зв'язок $\rho = \frac{m}{V}$, можна записати

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \quad (31.2)$$

де p_0 і ρ_0 — рівноважні значення тиску і густини для нерухомої рідини (ідеального газу) відповідно.

Будемо вважати відхилення густини та тиску від рівноважних значень малими:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad |\rho'| \ll \rho_0, \quad |p'| \ll p_0.$$

Тоді, вважаючи швидкості \vec{v} малими, у лінійному наближенні можна знехтувати конвективною похідною $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ і замінити $\rho \vec{v} \approx \rho_0 \vec{v}$, після чого рівняння (31.1) матимуть вигляд:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}. \quad (31.3)$$

Отже, поширення малих збурень описується лінійними рівняннями.

У загальному випадку з рівняння адіабати $p = p(\rho)$ випливає, що

$$\delta p(\rho) = \left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right)_S \Rightarrow p' \simeq \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho',$$

де індекс S підкреслює диференціювання при сталій ентропії, тому:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \frac{\partial \rho'}{\partial t},$$

для малих збурень похідну $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S$ можна замінити її значенням у стані рівноваги $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{S,0}$ з $\rho = \rho_0$.

Зауваження. Оскільки $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S > 0$, то при збільшенні густини тиск зростає. \lrcorner

Виконуючи підстановку похідної густини у рівняння неперервності, отримаємо систему рівнянь для швидкості та тиску у лінійному наближенні:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S,0} \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}.$$

Для виключення однієї з функцій знайдемо дивергенцію від першого рівняння і, використовуючи вираз для $\operatorname{div} \vec{v}$ з другого рівняння, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\Delta p'}{\rho_0} \Rightarrow \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{S,0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\Delta p'}{\rho_0},$$

у результаті, для тиску матимемо хвильове рівняння:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S,0} \quad (31.4)$$

де c — швидкість поширення хвиль. Легко показати, що рівняння для швидкості буде повністю аналогічним.

Будемо шукати його розв'язок у вигляді плоских хвиль

$$p = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}. \quad (31.5)$$

Підставляючи цей вираз до (31.4) та (31.3), послідовно дістанемо дисперсійне рівняння:

$$-\omega^2 A = -k^2 c^2 A \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

та вираз для фазової швидкості:

$$v_{phase} = \frac{\omega}{k} \equiv c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S,0}}.$$

Швидкість суцільного середовища \vec{v} можна знайти з рівняння Ейлера підставкою вже знайденого тиску:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = -\frac{i\vec{k}}{\rho_0} A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

інтегруючи, отримаємо:

$$\vec{v} = \frac{A\vec{k}}{\omega\rho_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (31.6)$$

Співвідношення (31.6) означає, що $\vec{v} \parallel \vec{k}$, тому хвилі є поздовжніми.

Для отримання явного виразу швидкості у випадку ідеального газу виразимо тиск з рівняння стану:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \Rightarrow p(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma.$$

Тоді

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \gamma \rho^{\gamma-1} \left. \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right|_{\rho=\rho_0} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0},$$

звідки

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

Цей вираз можна записати у іншій формі за допомогою рівняння стану $p = \frac{\rho}{\mu} kT$, де μ — молекулярна маса газу. Тоді

$$c_{\parallel} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{\mu}}. \quad (31.7)$$

Для повітря у звичайних умовах (кімнатна температура) ця величина дорівнює приблизно 332 м/с, що добре узгоджується з експериментом. Відмітимо, що: 1) має місце залежність $c_{\parallel} \sim \sqrt{T}$ та 2) швидкість c_{\parallel} не залежить від тиску.

Зауваження. Підкреслимо, що було використане припущення про малі значення швидкостей і малі зміни густини, що виражається умовами

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \gg |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|; \quad |\rho - \rho_0| = |\rho'| \ll \rho_0.$$

Якщо позначити $\frac{\vec{k}A}{\omega\rho_0} = v_0$ — амплітуда швидкості, то за допомогою (31.6) знаходимо

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| = \omega v_0 \gg |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| = v_0^2 k,$$

або

$$\frac{\omega}{k} = c \gg v_0. \quad (31.8)$$

Якщо ввести *число Маха* як відношення характерної швидкості руху рідини (це є амплітуда швидкості коливань v_0) до швидкості поширення звуку, то умовою справедливості лінійного наближення буде $M = \frac{v_0}{c} \ll 1$. \square

2. ЗВУК У В'ЯЗКІЙ БАРОТРОПНІЙ РІДИНІ. Рівняння руху в'язкої рідини мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + (\xi - \eta) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + 2\eta \Delta \vec{v}, \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u \right) = \operatorname{div}(\kappa \vec{\nabla} T) - p \operatorname{div} \vec{v} + (\xi - \eta)(\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\eta v_{ij} v_{ij}. \end{cases}$$

причому $u = C_V T$. Для спрощення вважатимемо, що $\kappa = \text{const}$.

Систему рівнянь руху потрібно доповнити рівнянням стану $p = p(\rho, T)$. Як і для розглянутого вище випадку ідеальної рідини, розглянемо малі відхилення густини, температури та швидкості від стану спокою:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, t) = T_0 + T'(\vec{r}, t), \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}'(\vec{r}, t),$$

де $|\rho'| \ll \rho_0$, $|T'| \ll T_0$ і \vec{v}' — мала величина (для скорочення запису штрих будемо опускати). У лінійному наближенні рівняння стану можна записати як

$$p(\rho, T) = p(\rho_0, T_0) + \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial T} T'.$$

Для скорочення позначатимемо

$$p_0 = p(\rho_0, T_0), \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 = \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial \rho}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_0 = \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial T}.$$

Тоді, враховуючи вираз для внутрішньої енергії, можна записати рівняння руху у наближенні першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + (\xi - \eta) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + 2\eta \Delta \vec{v}, \\ \rho_0 C_V \frac{\partial T'}{\partial t} = \kappa \Delta T - p_0 \operatorname{div} \vec{v}. \end{cases} \quad (31.9)$$

Розглянемо розв'язки рівнянь руху у вигляді хвиль:

$$\rho' = A e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t}, \quad T' = B e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t}, \quad \vec{v} = \vec{C} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t}, \quad (31.10)$$

де A , B та \vec{C} — сталі амплітуди.

Підстановка (31.10) до рівняння (31.9) приводить до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \omega A - \rho_0 (\vec{C} \cdot \vec{k}) = 0, \\ i\omega \rho_0 \vec{C} = i\vec{k} A \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial \rho} - \xi \vec{k} (\vec{C} \cdot \vec{k}) - \eta k^2 \vec{C} + i\vec{k} B \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial T}, \\ i\omega \rho_0 C_V B = -\kappa k^2 B - ip_0 (\vec{k} \cdot \vec{C}), \end{cases} \quad (31.11)$$

де експоненціальні множники відкинуто.

Як і для хвиль у пружному середовищі, розкладемо вектор \vec{C} на поздовжню та поперечну складові відносно напрямку поширення хвилі:

$$\vec{C} = \vec{C}_{\parallel} + \vec{C}_{\perp}, \quad \vec{C}_{\parallel} = \frac{\vec{k}}{k} C_{\parallel},$$

тоді систему (31.11) можна переписати у іншому вигляді, розбиваючи векторне рівняння на поздовжню та поперечну проекції:

$$\begin{cases} \omega A - \rho_0 k C_{\parallel} = 0, \\ i\omega \rho_0 C_{\parallel} = ikA \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial \rho} - (\xi + \eta)k^2 C_{\parallel} + ikB \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial T}, \\ i\omega \rho_0 \vec{C}_{\perp} = -\eta k^2 \vec{C}_{\perp}, \\ i\omega \rho_0 C_V B = -\kappa k^2 B - ip_0 k C_{\parallel}. \end{cases} \quad (31.12)$$

Легко бачити, що система (31.12) розщеплюється на дві незалежні системи рівнянь, які описують поздовжні та поперечні хвилі.

Для поперечних хвиль з третього рівняння системи (31.12) знаходимо дисперсійне рівняння

$$i\omega \rho_0 + \eta k^2 = 0,$$

звідки

$$\omega_{\perp} = i \frac{\eta k^2}{\rho_0}, \quad (31.13)$$

тобто частота буде суто уявною, що приводить до загасання хвилі:

$$\vec{v}_{\perp}(\vec{r}, t) = \vec{C}_{\perp} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t} = \vec{C}_{\perp} \exp \left[-\frac{\eta k^2}{\rho_0} t - i\vec{k} \cdot \vec{r} \right].$$

Це означає, що у поперечному напрямку хвилі поширюватись не будуть. Причиною є наявність коефіцієнту в'язкості η , який для звичайних температур (при $T = 20^\circ C$) для води складає приблизно $0.01 \frac{M^2}{c}$, а для повітря $0.15 \frac{M^2}{c}$.

Поздовжні хвилі описуються першим, другим та четвертим рівняннями системи (31.12), характеристичне рівняння буде мати вигляд:

$$\begin{vmatrix} \omega & -\rho_0 k & 0 \\ ik \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 & -(i\omega \rho_0 + (\xi + \eta)k^2) & ik \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_0 \\ 0 & ip_0 k & i\omega \rho_0 C_V + \kappa k^2 \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи цей визначник, отримаємо кубічне рівняння відносно частоти:

$$\begin{aligned} \omega \left[\omega^2 \rho_0^2 C_V - i\omega \rho_0 k^2 (\kappa + C_V (\xi + \eta)) - k^4 \kappa (\xi + \eta) + k^2 p_0 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_0 \right] \\ + \rho_0 k^2 \left[-\omega \rho_0 C_V \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 + i\kappa k^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (31.14)$$

У випадку ідеальної рідини, де $\xi = \eta = 0$, $\varkappa = 0$ та $p \neq p(\rho)$ (процес адіабатичний), рівняння (31.14) суттєво спрощується, і після кількох скорочень набуває вигляду:

$$\omega \left(\omega^2 \rho_0^2 C_V - k^2 \rho_0^2 C_V \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \right) = 0$$

з першим тривіальним розв'язком $\omega = 0$ (відсутність хвиль), та другим

$$\omega^2 = k^2 \frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial \rho}$$

Оскільки похідна тиску по густині при фіксованій температурі еквівалентна похідній $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{const}}$, то отримаємо попередній результат, згідно з яким у ідеальній рідині поширюються поздовжні хвилі з фазовою швидкістю

$$c_{\parallel} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\partial p(\rho_0, T_0)}{\partial \rho}},$$

причому загасання відсутнє.

У загальному випадку дисперсійне рівняння для частоти як функції k має три корені, всі вони є комплексними і неспряженими один одному, оскільки коефіцієнти рівняння (31.14) є комплексними. Тому поздовжні хвилі завжди затухатимуть.

Однак відомо, що у рідинах та газах звук може поширюватись, тому постає питання про швидкість затухання поздовжніх хвиль та порівняння результату з вже встановленим законом затухання поперечних хвиль. Перегрупуємо доданки у рівнянні (31.14), збираючи разом однакові степені частоти:

$$\begin{aligned} \omega^3 - \omega k^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 + \frac{\varkappa(\xi + \eta)}{\rho_0^2 C_V} - \frac{p_0}{\rho_0^2 C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_0 \right] \\ = i \left[\omega^2 k^2 \left(\frac{\varkappa}{\rho_0 C_V} + \frac{\xi + \eta}{\rho_0} \right) - \frac{k^4 \varkappa}{C_V \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \right]. \end{aligned}$$

Знайдемо наближений розв'язок цього рівняння для малих коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності. Будемо шукати частоту у вигляді

$$\omega = \omega_a + i\varepsilon,$$

де $\omega_a = kc_{\parallel}$ — частота поздовжніх хвиль за відсутності загасання (для ідеальної рідини), а ε — доданок, який визначає загасання із врахуванням малих коефіцієнтів ξ , η та \varkappa . Тоді, нехтуючи доданками другого та більш високих порядків по ε та по коефіцієнтах ξ , η , \varkappa отримаємо після нескладних обчислень:

$$\varepsilon = k^2 \left[\frac{\xi + \eta}{2\rho_0} - \frac{\varkappa p_0}{2c_{\parallel}^2 C_V^2 \rho_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_0 \right].$$

Це означає, що $\varepsilon \sim k^2$, тобто хвилі загасають обернено пропорційно до квадрату довжини хвилі. У першому наближенні коефіцієнт затухання пропорційний до в'язкості та теплопровідності рідини.

ЧАСТИНА V

Додаткові питання аналітичної механіки

- ☐ Вироджені механічні системи
- ☐ Метод Лагранжа та Гамільтона для неперервних систем
- ☐ Релятивістська кінематика
- ☐ Релятивістська динаміка
- ☐ Поля

ЛЕКЦІЯ 32

Вироджені механічні системи

1.	Виродженість у механічних системах.....	479
2.	Первинні зв'язки	480
3.	Вирази для швидкостей і рівняння Гамільтона.....	481
4.	Варіаційний принцип у виродженій теорії.....	483
5.	Аналіз зв'язків у виродженій теорії.....	486
6.	Вироджені системи зі зв'язками другого роду.....	489
7.	Вироджені системи зі зв'язками першого роду.....	491

1. ВИРОДЖЕНІСТЬ У МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ. Раніше було розглянуто побудову аналітичної механіки для широкого класу механічних систем, від рівнянь Лагранжа та принципу д'Аламбера можна перейти до варіаційного принципу, побудувати канонічні рівняння і фактично знайти рецепт для розв'язку довільної механічної задачі (за допомогою вдало виконаних перетворень або з використанням рівняння Гамільтона-Якобі). Однак переважна більшість таких можливостей буде доступною, якщо функція Лагранжа задовольняє деякі обмеження. Для формулювання проблеми розглянемо рівняння руху, які будуються безпосередньо з принципу д'Аламбера:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

де для зручності позначено $v_i = \dot{q}_i$. У розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \dot{v}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial q_j} v_j.$$

Такі рівняння із заданими початковими умовами (задача Коші) мають однозначний розв'язок, якщо з отриманого виразу можна виразити старші похідні $\ddot{q}_i = \ddot{q}_i$. Саме це передбачалось за замовчуванням раніше. Аналіз механічної системи суттєво ускладниться, якщо цього зробити не можна, у такому випадку матриця з других похідних функції Лагранжа по швидкостях є виродженою. Введемо позначення

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}, \quad (32.1)$$

ця матриця називається *гессіаном*. Механічна система є *виродженою*, якщо $\det \Gamma = 0$. Для такої системи не можна однозначно розв'язати основну задачу механіки без додаткового аналізу.

Інша ситуація, де проявляється виродженість є перехід від механіки Лагранжа до механіки Гамільтона. Перший крок перетворення Лежандра полягає у вираженні швидкостей через імпульси із співвідношення

$$p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i} = p_i(q, v, t),$$

з подальшою підстановкою до означення функції Гамільтона $H = p_i v_i - L$. За теоремою про неявну функцію, таке рівняння можна розв'язати відносно швидкостей, якщо $\det \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \neq 0$, що еквівалентно умові невиродженості теорії. Крім того, гессіан є якобіаном переходу до фазового простору:

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q, v)} = \det \Gamma.$$

Якщо теорія вироджена, то провести перетворення Лежандра неможливо. Досить часто це проявляється у тому, що деякі швидкості не фігурують у виразах для імпульсів. Таким чином,

- у виродженій теорії не можна однозначно знайти закон руху системи засобами механіки Лагранжа;
- у виродженій теорії не можна не можна перейти до гамільтонового формулювання.

На перший погляд може видатись, що виродженість є екзотичним окремим випадком, але це не зовсім так. Дійсно, серед суто механічних систем досить важко знайти вироджені, але їх досить багато серед польових, які було розглянуто у попередній лекції. Оскільки методи Лагранжа та Гамільтона фактично без змін можна використовувати у теоріях поля, то проблема виродженості виникне там у аналогічному до викладеного контексті. Усі фізичні взаємодії доводиться описувати виродженими теоріями (у першу чергу це стосується електромагнітного та гравітаційного полів). Крім того, перехід до квантової теорії здійснюється на основі гамільтонового формулювання, яке для виродженої теорії безпосередньо побудувати не можна.

Уперше послідовний аналіз вироджених механічних та польових теорій провів Дірак як раз у зв'язку з проблемою квантування. У даній лекції буде розглянуто стислий огляд проблеми виродженості, більш детально з цими та іншими питаннями можна ознайомитись, наприклад, у [30], [31] або [32]. Для спрощення виразів розглянемо випадок, коли функція Лагранжа явно не залежить від часу.

2. ПЕРВИННІ ЗВ'ЯЗКИ. Якщо $\det \Gamma = 0$, то прискорення у рівняннях Лагранжа не можна знайти однозначно. У системі лінійних рівнянь вигляду

$$\Gamma_{ij} \dot{v}_j = -\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_j} v_j.$$

змінні \dot{v}_j можна знайти тільки з точністю до довільних доданків. Дійсно, для виродженої матриці з рангом m , що менший за її розмірність n , існують вектори τ_i з властивістю

$$\Gamma_{ij} \tau_j^a = 0, \quad a = \overline{m, n},$$

тоді, якщо $\eta_i(q, v)$ — частинний розв'язок рівнянь руху відносно прискорень, то загальний розв'язок матиме вигляд:

$$\dot{v}_i = \eta_i(q, v) + u_a(t)\tau_i^a,$$

де $u_a(t)$ — довільні коефіцієнти. Очевидно, $\Gamma_{ij}\dot{v}_j = \Gamma_{ij}\eta_j$.

Така сама неоднозначність виникає і у перетворенні Лежандра. У більшості випадків виявляється, що частина рівнянь $p_i = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_i}$ не залежить від швидкостей і зводяться до виразів типу

$$\Phi_a^{(1)}(q, p) = 0. \quad (32.2)$$

Ці рівняння називаються *первинними зв'язками*. Оскільки підстановка вихідних рівнянь $p_i = p_i(q, v)$ до первинних зв'язків дає тотожності

$$\Phi_a^{(1)}(q, p(q, v)) \equiv 0,$$

то диференціюючи їх по швидкостях, матимемо:

$$0 = \frac{\partial \Phi_a^{(1)}}{\partial v_i} = \frac{\partial \Phi_a^{(1)}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j(q, v)}{\partial v_i} = \Gamma_{ij} \frac{\partial \Phi_a^{(1)}}{\partial p_j}$$

тобто вектори τ_i^a можна ототожнити з похідними первинних зв'язків:

$$\tau_i^a = \frac{\partial \Phi_a^{(1)}}{\partial p_i}. \quad (32.3)$$

Аналогічно можна знайти похідну по координатах.

Таким чином, у виродженій теорії імпульси не можна вважати однозначними функціями швидкостей, а координати фазового простору не можна вважати незалежними.

3. ВИРАЗИ ДЛЯ ШВИДКОСТЕЙ І РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА. Як і для рівнянь руху, у перетворенні Лежандра швидкості не можна однозначно виразити через імпульси з виразів $p_i = p_i(q, v)$. У такому випадку загальні вирази для швидкостей матимуть вигляд:

$$v_i = v_i(q, p) - \lambda_a \tau_i^a \quad (32.4)$$

де $v_i(q, p)$ — частинний розв'язок рівнянь $p_i = p_i(q, v)$, а λ_a — довільні множники. Розглянемо структуру імпульсів та функції Лагранжа у такій ситуації. Якщо

$$v_i \rightarrow \bar{v}_i = v_i - \lambda_a \tau_i^a,$$

то імпульс матиме вигляд:

$$\begin{aligned} p(q, \bar{v}) &= p(q, v - \lambda\tau) = \left| \begin{array}{l} \text{формула} \\ \text{Тейлора} \end{array} \right| = p_i(q, v) - \lambda_a \tau_j^a \frac{\partial p_i}{\partial v_j} + \frac{1}{2} (\lambda_a \tau_j^a)(\lambda_b \tau_k^b) \frac{\partial^2 p_i}{\partial v_j \partial v_k} + \dots \\ &= p_i(q, v) - \lambda_a \tau_j^a \Gamma_{ij} + \frac{1}{2} \lambda_a \lambda_b \tau_j^a \tau_k^b \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial v_k} + \dots \end{aligned}$$

Другий доданок зникає у силу означення векторів τ , для перетворення третього скористаємось тим, що $\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial v_k}$ є третьою похідною функції Лагранжа і, відповідно, симетричним по всіх індексах об'єктом. Тому

$$\tau_j^a \tau_k^b \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial v_k} = \tau_j^a \tau_k^b \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial v_i} = \tau_j^a \frac{\partial}{\partial v_i} [\Gamma_{jk} \tau_k^b] - \tau_j^a \Gamma_{jk} \frac{\partial \tau_k^b}{\partial v_i} = 0,$$

усі доданки зникають за рахунок згорток з матрицею Γ . Аналогічно можна довести, що всі доданки у формулі Тейлора дорівнюють тулю. Таким чином,

$$p_i(q, \bar{v}) = p_i(q, v).$$

Так само можна перетворити аргументи функції Лагранжа:

$$L(q, \bar{v}) = L(q, v - \lambda \tau) = L(q, v, t) - \lambda_a \tau_i^a \frac{\partial L}{\partial v_i} + (\lambda_a \tau_i^a) \lambda_b \tau_j^b \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} + \dots$$

Як у попередньому обчисленні, доданки у сумі, починаючи з третього зникатимуть. Остаточо:

$$L(q, \bar{v}) = L(q, v) - \lambda_a \tau_i^a \frac{\partial L}{\partial v_i} \equiv L(q, v) - \lambda_a \tau_i^a p_i(q, v), \quad (32.5)$$

у останньому доданку виникає означення імпульсу у формалізмі Лагранжа.

Для енергії аналогічне обчислення дає:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q, \bar{v}) &= \bar{v}_i p_i(q, \bar{v}) - L(q, \bar{v}) \\ &= p_i(q, v)(v_i - \lambda_a \tau_i^a) - [L(q, v) - \lambda_a \tau_i^a p_i(q, v)] = \mathcal{E}(q, v), \end{aligned}$$

тобто \mathcal{E} не залежить від неоднозначності швидкостей.

Якщо дотримуватись стандартної процедури побудови функції Гамільтона, то довільні множники λ виникатимуть і у виразі для H . Дійсно, позначивши $v_i(q, p)$ частинний розв'язок для швидкостей і вважаючи імпульси незалежними параметрами, матимемо:

$$\begin{aligned} H = p_i v_i - L(q, v) &= \left| \begin{array}{l} \text{підстановка} \\ v_i = v_i(q, p) - \lambda_a \tau_i^a \end{array} \right| \\ &= p_i v_i(q, p) - L(q, v(q, p)) + \lambda_a \tau_i^a \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} - p_i \right), \end{aligned}$$

у останньому доданку похідну функції Лагранжа не було замінено імпульсом, оскільки ця величина за походженням є підстановкою швидкостей до функції $p_i(q, v)$ і у виродженому випадку для частини швидкостей відрізнятиметься від p_i як незалежного параметру. Сума у цій комбінації неповна, у ній фігуруватимуть тільки доданки, які відповідають первинним зв'язкам, тому із означення останніх випливає:

$$H(q, p; \lambda) = \underbrace{p_i v_i(q, p) - L(q, v(q, p))}_{=H(q, p)} + \lambda_a \Phi_a^{(1)}(q, p). \quad (32.6)$$

Таким чином, функція Гамільтона також включає довільні невідомі множники. Останні доданки зникатимуть тільки на первинних зв'язках. Запишемо рівняння Гамільтона, які *формально* випливають з (32.6), якщо (q, p) вважати незалежними змінними:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H(q, p; \lambda)}{\partial p_i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} + \lambda_a \frac{\partial \Phi_a^{(1)}(q, p)}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(q, p; \lambda)}{\partial q_i} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} - \lambda_a \frac{\partial \Phi_a^{(1)}(q, p)}{\partial q_i}.\end{aligned}\quad (32.7)$$

Рівняння руху у такій формі були записані Діраком. Оскільки у цих рівняннях фігурують довільні множники, то без детального аналізу нових зв'язків їх розв'язати, очевидно, не можна.

4. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП У ВИРОДЖЕНІЙ ТЕОРІЇ. Для з'ясування фізичного змісту невизначених множників розглянемо варіаційний принцип у формальному $3n$ -вимірному просторі (див. лекцію 21):

$$S_{mod}[q, v, p] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q, v) + p_i(\dot{q}_i - v_i)] dt.$$

Врахування рівнянь $p_i = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i}$ у безпосередньому вигляді дає варіаційний принцип у просторі швидкостей (q, p) (виключаємо імпульси), а у вигляді обернених співвідношень $v_i = v_i(q, p)$ — у фазовому просторі (q, p) . Зараз актуальним є другий підхід, у якому потрібно врахувати, що не всі швидкості можна виразити через імпульси. Також необхідно взяти до уваги появу первинних зв'язків.

Якщо позначити

$$L_{mod}(q, v, p) = L(q, v) + p_i(\dot{q}_i - v_i), \quad H_{mod}(q, v, p) = p_i v_i - L(q, v)$$

то функціонал дії можна подати у формі

$$S_{mod}[q, v, p] = \int_{t_1}^{t_2} L_{mod} dt = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H_{mod}] dt.$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} = -\frac{\partial L_{mod}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} = p_i - \frac{\partial L_{mod}}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} = v_i. \quad (32.8)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа матимуть вигляд:

$$\frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} = 0. \quad (32.9)$$

Для невиродженої теорії така система повністю еквівалентна до систем рівнянь Лагранжа або Гамільтона (залежно від того, як виключити зайві змінні за допомогою зв'язків $\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} = 0$).

У виродженій теорії для спрощення занумеруємо координати q_i так, щоб у гесіані відмінний від нуля мінор був розташований у лівому верхньому кутку, тоді

$$q = (q_\alpha, q_a), \quad \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \right) \neq 0.$$

Для індексів $\alpha = \overline{1, N}$ рівняння зв'язків можна розв'язати:

$$p_\alpha - \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\alpha = v_\alpha(q, v, p_\alpha).$$

Для іншої групи швидкостей у рівняннях зв'язків можна виконати підстановку знайдених швидкостей:

$$\left[p_a - \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_a} \right]_{v_\alpha = v_\alpha(q, v, p_\alpha)} := \Phi_a^{(1)} = 0, \quad a = \overline{N+1, n}.$$

У результаті буде отримано вираз, який повністю не залежить від швидкостей v_α (якби залежав, то можна було б виразити ще частину швидкостей). Така функція і буде первинним зв'язком $\Phi_a^{(1)}$ на координати та імпульси (імпульси входять до всіх рівнянь). Це збігається з попередніми позначеннями, де слід покласти

$$\tau_i^a = \delta_{ia}$$

завдяки введеній нумерації (компоненти вектора будуть або одиницями, або нулями завдяки означенню функції, нулі будуть там, де компоненту швидкості знайдено).

Підстановка знайдених швидкостей до функції Гамільтона дає функцію, у якій частково залишаються швидкості:

$$H_{red}(q, p, v_a) = H_{mod}(q, p, v_\alpha(q, p_\alpha), v_a).$$

Очевидно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{red}}{\partial p_i} &= \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} + \underbrace{\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_i}}_{=0} = \frac{\partial H_{mod}}{\partial p_i} \Big|_{v_\alpha = v_\alpha(q, p_\alpha)}, \\ \frac{\partial H_{red}}{\partial q_i} &= \frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial H_{mod}}{\partial v_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial q_i}}_{=0} = \frac{\partial H_{mod}}{\partial q_i} \Big|_{v_\alpha = v_\alpha(q, p_\alpha)}, \end{aligned}$$

тому після підстановки частини швидкостей рівняння руху (32.9) набудуть вигляду:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_{red}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H_{red}}{\partial p_i}, \quad \Phi_a^{(1)}(q, p) = 0. \quad (32.10)$$

Вигляд функції H_{red} можна знайти детальніше, якщо скористатись другою з тождеств (32.8):

$$H_{red}(q, p, v_a) = [p_i v_i - L(q, v)]_{v_\alpha = v_\alpha(q, p_\alpha)} = \left[v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L + v_i \frac{\partial H_{mod}}{\partial v_i} \right]_{v_\alpha = v_\alpha(q, p_\alpha)}.$$

Перші два доданки описують енергію у механіці Лагранжа, а у останньому доданку виникають первинні зв'язки:

$$H_{red}(q, p, v_a) = H(q, p) + v_a \Phi_a^{(1)}, \quad H(q, p) = \left[v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L \right]_{v_\alpha = v_\alpha(q, p_\alpha)}$$

Функція $H(q, p)$ є енергією, яку виражено через імпульси підстановкою швидкостей v_α . У невиродженій теорії вона і є функцією Гамільтона. У виродженій теорії вона насправді не залежить від швидкостей v_a . Щоб встановити характер функціональних залежностей, розглянемо варіацію енергії \mathcal{E} при незалежних змінах швидкостей та координат:

$$\delta \mathcal{E}(q, v) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} \delta v_i = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} \delta q_i + v_i \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \delta v_j.$$

Виразимо останній доданок через варіації імпульсів, які стануть аргументами енергії після переходу до фазового простору:

$$\delta p_i(q, v) = \delta \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \delta v_j,$$

для виродженої теорії безпосередньо виразити δv_i через δp_i не можна через виродженість гессіану, але у даному перетворенні у цьому немає потреби, оскільки у формулі для δp_i варіації швидкостей фігурують разом з матрицею, тому

$$\delta \mathcal{E}(q, v) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_j} - v_i \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial q_i} \right) \delta q_j + v_i \delta p_i(q, v)$$

Після підстановки швидкостей v_α у останньому доданку імпульси p_i стануть незалежними змінними¹. Оскільки варіації швидкостей зникають у цьому виразі, то швидкості не є реальними аргументами функції H . Крім того, з побудови функції H випливає, що вона не залежить від імпульсів p_a , оскільки швидкості v_α вносять залежності тільки від p_α .

Таким чином, функція Гамільтона, що визначає динаміку виродженої системи, має вигляд:

$$H_{red}(q, p, v_a) = H(q, p_\alpha) + v_a \Phi_a^{(1)}(q, p) \quad (32.11)$$

де $H(q, p_\alpha)$ є енергією Лагранжа, вираженою через імпульси. Саме функцію і будемо називати функцією Гамільтона виродженої системи, тоді як весь вираз (32.11) — повною функцією Гамільтона. Порівняння з виразом (32.6) дозволяє встановити фізичний зміст невизначених множників λ_a : вони є швидкостями, які не можна виразити під час перетворення Лежандра.

Рівняння руху для H_{red} мають такий самий вигляд, як раніше (див. (32.7)). Для скорочення запису використаємо дужки Пуассона

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i},$$

¹ Незалежність енергії від неоднозначності швидкостей було показано раніше, зараз розглянуто інший спосіб цього доведення.

де імпульси та координати *формально* вважаються незалежними. Тоді

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= [q_i, H_{red}] = [q_i, H] + v_a [q_i, \Phi_a^{(1)}], \\ \dot{p}_i &= [p_i, H_{red}] = [p_i, H] + v_a [p_i, \Phi_a^{(1)}],\end{aligned}\tag{32.12}$$

до цих рівнянь потрібно додати рівняння зв'язків $\Phi^{(1)} = 0$. Зауважимо, що користуватись рівняннями зв'язків до обчислення дужок Пуассона (тобто відкидати їх у H_{red}) *не можна*, оскільки означення дужок Пуассона взято з теорії, де (q, p) є незалежними змінними, а первинні зв'язки задають співвідношення між координатами та імпульсами. Тому підставляти первинні зв'язки слід тільки після всіх виконаних обчислень. Роль дужок Пуассона полягає тут тільки у скороченні записів.

Для подальшого аналізу виродженої теорії потрібно провести детальний аналіз ролі первинних зв'язків. Виявляється, що це дозволяє позбавитись від частини невідомих множників у рівняннях руху та з'ясувати фізичний зміст тих множників, що залишаються.

5. АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКІВ У ВИРОДЖЕНІЙ ТЕОРІЇ. Подальший аналіз рівнянь руху виродженої системи полягає в узгодженні зв'язків з динамікою системи. Оскільки рух системи відбувається із обмеженнями, які накладають зв'язки, то останні мають виконуватись у довільний момент часу, тобто

$$\frac{d}{dt} \Phi_a^{(1)} = 0.$$

Таку умову часто називають умовою несуперечливості. Використовуючи запис повної похідної за допомогою дужок Пуассона, матимемо:

$$\frac{d}{dt} \Phi_a^{(1)} = [\Phi_a^{(1)}, H + v_b \Phi_b^{(1)}] = [\Phi_a^{(1)}, H] + v_b [\Phi_b^{(1)}, \Phi_b^{(1)}] = 0.\tag{32.13}$$

Зауважимо, що дужку Пуассона $[\lambda_a, H]$ неозначено. Однак у правій частині вона буде домножуватись на зв'язок $\Phi_a^{(1)}$, який зараз *можна* покласти рівним нулю, оскільки в умові вважається, що рух системи відбувається без порушення зв'язків $\Phi_a^{(1)}$ (тобто на поверхні фазового простору, яку вони визначають).

Згідно з термінологією Дірака співвідношення, які дорівнюють нулю тільки на поверхнях зв'язків називаються *слабкими рівностями* на протигагу *сильним рівностям*, які виконуються скрізь у фазовому просторі.

Обчислення у правій частині приводять до одного з наслідків:

- 1) буде отримано рівність типу $0 = 0$ (можливо, з врахуванням самих рівнянь зв'язків);
- 2) буде отримано рівність типу $1 = 0$, тоді функція Лагранжа некоректна;
- 3) буде отримано деяке співвідношення з координатами та імпульсами, але без параметрів v_a , яке не зводиться до зв'язків $\Phi^{(1)}$ та їх комбінацій;
- 4) буде отримано деяке співвідношення з координатами та імпульсами та параметрами v_a . Так буде у випадку, коли ранг матриці $[\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}]$ менший за n .

Перший випадок означає, що подальшого аналізу зв'язків проводити не потрібно і зв'язки повністю узгоджені з рівняннями руху. Другий випадок ігноруватимемо, вважаючи теорію фізично правильно. У третьому випадку з'являються нові обмеження на координати фазового простору, які є новими зв'язками, які називаються *вторинними*. У останньому випадку, якщо деякі з невідомих коефіцієнтів v_a фігурують у рівнянні несуперечливості, то їх можна знайти з системи лінійних рівнянь (або принаймні виразити через інші невідомі коефіцієнти) і підставити до повної функції Гамільтона. Цей випадок найбільш загальний і включає попередній як граничний (коли не можна знайти жоден з параметрів v_a). Розглянемо детальніше пошук невідомих швидкостей. Рівняння (32.13) можна записати так:

$$[\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}]v_b = -[\Phi_a^{(1)}, H], \quad \gamma_{ab}^{(1)} = [\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}]$$

(цифра у дужках та підіндекси у індексах позначають номер етапу). Якщо матриця $\{\gamma_{ab}^{(1)}\}$ вироджена, то швидкості v_a можна знайти з точністю до довільних величин, які позначимо $v_{a_1}^{(1)}$ (межі зміни a_1 визначаються рангом лінійної системи рівнянь, для спрощення записів не будемо вводити додаткових позначень для цього):

$$v_b = v_b(q, p) + \tau_b^{(1)a_1} v_{a_1}^{(1)}, \quad \text{де } \gamma_{ab}^{(1)} \tau_b^{(1)a_1} = 0,$$

де $v_b(q, p)$ — частинний розв'язок системи лінійних рівнянь. Підстановка до функції Гамільтона:

$$H_{red} = H + v_a \Phi_a^{(1)} = \underbrace{[H + v_a(q, p) \Phi_a^{(1)}]}_{=H^{(1)}} + v_{a_1} \tau_{a_1}^{(1)a_1} \Phi_{a_1}^{(1)}.$$

Співвідношення, які не залежать від швидкостей і є вторинними зв'язками можна отримати, домножаючи рівняння узгодженості на вектори $\tau^{(1)a_1}$:

$$\tau_a^{(1)a_1} [H, \Phi_a^{(1)}] = 0.$$

Ті з співвідношень, які не зводяться до тривіальних рівностей та комбінацій первинних зв'язків є вторинними зв'язками, які позначимо

$$\Phi_{a_1}^{(2)} = \tau_{a_1}^{(1)a_1} [H, \Phi_{a_1}^{(1)}] = 0$$

Таким чином, перший етап процедури узгодження дає можливість уточнити функцію Гамільтона підстановкою частини невідомих швидкостей (як правило, одну частину швидкостей виражають через іншу), яка тепер має вигляд

$$H_{red} = H^{(1)} + v_{a_1} \Phi_{a_1}^{(1)}$$

(вектори $\tau_a^{(1)a_1}$ можна об'єднати з невідомими величинами не змінюючи позначень) і знайти нові обмеження на рух системи у вигляді вторинних зв'язків. Рівняння руху з уточненою функцією Гамільтона можна записати так само, як і для вихідної функції H .

Зауваження. Відмінність між сильними та слабкими рівностями проявляється під час варіювання: слабка рівність у загальному випадку порушиться для довільних варіацій δq та δp (вони можуть виводити за поверхню зв'язків), а сильна — ні. Саме з цієї причини зв'язки не відкидались у варіаційному принципі та у рівняннях руху: як бачимо, не обов'язково на всій поверхні $\Phi_a^{(1)}$ похідні цих зв'язків дорівнюють нулю, а тільки на тій частині, що додатково обмежується вторинними зв'язками $\Phi^{(2)}$. \lrcorner

Якщо у теорії з'явилися вторинні зв'язки, то їх слід також узгодити з динамікою, тобто потрібно вимагати

$$\frac{d}{dt} \Phi_{a_1}^{(2)} = [\Phi_{a_1}^{(2)}, H^{(1)}] + v_{b_1} [\Phi_{a_1}^{(2)}, \Phi_{b_1}^{(1)}] = 0.$$

Висновки з цих рівностей аналогічні до попередніх: або зв'язки вже узгоджені з динамікою, або дозволяють знайти деякі невідомі швидкості та отримати нові (третинні) зв'язки $\Phi_{a_3}^{(3)}$. Знайдені швидкості слід підставити їх до функції Гамільтона, тоді

$$H_{red} = H^{(2)} + v_{a_2} \Phi_{a_2}^{(1)}$$

(межі зміни у останній сумі визначаються рангом лінійної системи рівнянь на швидкості).

Процедура узгодження продовжується скінченну кількість кроків² доти, поки в узгодженні є потреба (тобто з'являються нові зв'язки та можливість знайти частину швидкостей). На завершення процедури матимемо повний набір узгоджених зв'язків, які остаточно обмежують область руху системи, та вираз для повної функції Гамільтона (позначимо H^*), де виключено невідомі швидкості (всі або частину). Розділяти зв'язки за номером етапу, на якому вони з'явилися (вторинні, третинні тощо), немає потреби, всі нові зв'язки є рівноправними і їх можна позначати однаково. Серед інших тільки первинні зв'язки є особливими, оскільки можуть залишитись у повній функції Гамільтона разом з невираженими швидкостями. Будемо позначати усі зв'язки Φ_A , а для окремо взятих первинних збережемо старе позначення $\Phi_a^{(1)}$.

Якщо всі зв'язки узгоджені з динамікою, то їх похідні по часу на поверхнях руху системи дорівнюють нулю, іншими словами похідна довільного зв'язку є лінійною комбінацією інших:

$$\frac{d}{dt} \Phi_A = \sum_B C_B \Phi_B := \{\Phi\},$$

у правій частині введено позначення для скороченого запису лінійної комбінації зв'язків. Вирази для функцій Φ_A можна спростити врахувавши, що на всіх проміжних етапах явно використовувались первинні зв'язки (одразу після запису дужок Пуассона). Системи вторинних зв'язків Φ_A та $\bar{\Phi}_A$ еквівалентні, якщо

$$\bar{\Phi}_A = M_{AB} \Phi_B + \{\Phi^{(1)}\},$$

де M_{AB} — деякі коефіцієнти (не можна змінювати тільки первинні зв'язки).

² Оскільки число ступенів вільності скінченне.

Незважаючи на громіздкість у загальному формулюванні, наведена процедура є досить ефективною у конкретних задачах (де не потрібно вводити додаткових позначень). Для спрощення фізичного аналізу вироджених теорій Дірак запропонував додаткову класифікацію всіх функцій динамічних змінних (q, p) . Функція $F(q, p)$ називається *величиною першого роду*, якщо її дужка Пуассона з довільним зв'язком є лінійною комбінацією зв'язків:

$$[F, \Phi_A] = \{\Phi\}$$

(тобто дорівнює нулю на поверхні зв'язків). Відповідно функція $F(q, p)$ буде *величиною другого роду*, якщо ця властивість не виконується. Виявляється, що дужка Пуассона зберігає належність до першого роду:

Якщо F_1 та F_2 є величинами першого роду, то $[F_1, F_2]$ також є величиною першого роду.

□ За означенням $[F_{1,2}, \Phi_A] = C_{AB}^{(1,2)} \Phi_B$. Знайдемо дужки Пуассона $[F_1, F_2]$ з довільним зв'язком, використовуючи тотожність Якобі:

$$[\Phi_C, [F_1, F_2]] = -[F_1, [F_2, \Phi_C]] - [F_2, [\Phi_C, F_1]] = -C_{CD}^{(2)}[F_1, \Phi_D] + C_{CD}^{(1)}[F_2, \Phi_D] = \{\Phi\},$$

що і потрібно було довести. ■

Таку класифікацію можна застосувати і до самих зв'язків. Якщо матриця $[\Phi_A, \Phi_B]$ невироджена, то кажуть, що Φ_A є системою зв'язків другого роду. Якщо ж це не так, то Φ_A — система зв'язків другого роду. Виявляється, що аналізувати механічну систему зі зв'язками кожного типу простіше.

6. ВИРОДЖЕНІ СИСТЕМИ ЗІ ЗВ'ЯЗКАМИ ДРУГОГО РОДУ. Опускаючи детальні доведення (вони досить громіздкі), наведемо загальну схему аналізу систем, у яких всі зв'язки є змінними другого роду. Тоді

$$\det[\Phi_A, \Phi_B] \neq 0 \quad (\text{також на поверхнях } \Phi_A = 0).$$

У такому випадку кажуть, що система має зв'язки другого роду, всі невідомі швидкості можна знайти з умов узгодженості:

$$\frac{d\Phi_A}{dt} = [\Phi_A, H^*] + v_a[\Phi_A, \Phi_a^{(1)}] = 0,$$

де H^* — функція Гамільтона, модифікована після всіх стадій узгодження. Звідси випливає, що

$$v_a = -[\Phi, \Phi]_{aA}^{-1}[\Phi_A, H] + \{\Phi\}$$

(комбінація $\{\Phi\}$ не включає первинних зв'язків, H^* замінено на H , оскільки ці величини відрізняються тільки на комбінацію зв'язків). Таким чином, після аналізу умов узгодженості функції $v_a(q, p)$ у рівняннях руху можна вважати відомими ще *обчислення дужок Пуассона*. Квадратичні по зв'язках доданки у функції Гамільтона можна одразу покласти рівними нулю на тому самому етапі, оскільки

результат обчислення буде знову пропорційним до зв'язків. Підстановка знайдених швидкостей до повної функції Гамільтона дає:

$$H_{red} = H + v_a \Phi_a^{(1)} = H - \Phi_a^{(1)} [\Phi, \Phi]_{aA}^{-1} [\Phi_A, H].$$

Не змінюючи виразу на поверхні зв'язків, у лівій частині можна додати відняти квадратичну по Φ комбінацію

$$\Phi_A [\Phi, \Phi]_{AB}^{-1} [\Phi_B, H]$$

(у першому множнику первинні зв'язки відсутні), тоді матимемо:

$$H_{red} \rightarrow H_{red} = H - \Phi_A [\Phi, \Phi]_{AB}^{-1} [\Phi_B, H] = H + v_A \Phi_A,$$

тепер у правій частині фігурують усі зв'язки зі своїми множниками v_A . Для нової функції Гамільтона з умов узгодженості випливає

$$v_A = -[\Phi, \Phi]_{AB}^{-1} [\Phi_B, H] + \{\Phi\}$$

а рівняння руху матимуть вигляд:

$$\dot{q}_i = [q_i, H_{red}], \quad \dot{p}_i = [p_i, H_{red}], \quad H_{red} = H + v_A \Phi_A,$$

ці рівняння на поверхні зв'язків еквівалентні рівнянням з вихідною функцією Гамільтона, яка включає тільки первинні зв'язки. Таким чином, у теорії зі зв'язками другого роду до функції Гамільтона можна внести усі зв'язки (завдяки чому вони стають рівноправними).

Для скорочення запису замість дужки Пуассона зручно означити іншу комбінацію

$$[A, B]^* = [A, B] - [A, \Phi_A] \cdot [\Phi, \Phi]_{AB}^{-1} \cdot [\Phi_B, B], \quad (32.14)$$

яка називається *дужками Дірака*, тоді рівняння руху можна записати так:

$$\dot{q}_i = [q_i, H]^*, \quad \dot{p}_i = [p_i, H]^*, \quad \Phi_A = 0.$$

Легко показати, що алгебраїчні властивості дужки Дірака такі самі, як і у дужки Пуассона:

- 1) $[A, B]^* = -[B, A]^*$,
- 2) $[A, BC]^* = B[A, C]^* + [A, B]^* C$,
- 3) $[A, [B, C]^*]^* + [B, [C, A]^*]^* + [C, [A, B]^*]^* = 0$,
- 4) $[A, \Phi_A]^* = 0$ для довільного зв'язку Φ_A (рівність нулю буде скрізь).

З останньої властивості випливає, що зв'язки можна покладати рівними нулю до обчислення дужки Дірака.

Таким чином, теорія зі зв'язками першого роду фактично аналогічна до невиродженої теорії із заміною дужок Пуассона на дужки Дірака, а сама функція Гамільтона збігається з енергією (її не потрібно модифікувати, відповідні зміни

вже враховано у виразі для дужок Дірака). Для неї можна побудувати аналоги канонічних перетворень (для таких перетворень дужки Дірака, як і дужки Пуассона не змінюються) і максимально спростити функцію Гамільтона та зв'язки. Найчастіше шукають таке перетворення, для якого зв'язки еквівалентні рівності нулю частини координат (які можна виключити з рівнянь).

Задача 32.1. Типовим прикладом виникнення виродженості є функція Лагранжа, лінійна по швидкостях. У фізичних задачах вона може породжуватись граничним переходом. Наприклад, нехай частинка перебуває у сталому магнітному полі $\vec{H} = H\vec{e}_z$, тоді для руху у площині (x, y)

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eH}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}) - U(x, y).$$

У випадку дуже сильного магнітного поля кінетичною енергією можна знехтувати. Побудувати функцію Гамільтона, визначити зв'язки, знайти дужки Дірака для канонічних змінних.

7. ВИРОДЖЕНІ СИСТЕМИ ЗІ ЗВ'ЯЗКАМИ ПЕРШОГО РОДУ. У випадку, коли

$$\det[\Phi_A, \Phi_B] = 0,$$

то не всі множники Лагранжа можна виразити через координати (q, p) і кажуть, що дана механічна система є системою зі зв'язками першого роду. У такому випадку частина первинних зв'язків залишається у формулі для повної функції Гамільтона разом з деякими швидкостями, які є довільними невідомими функціями часу:

$$H_{red} = H^* + v_\alpha \Phi_\alpha^{(1)},$$

де H^* позначає функцію Гамільтона, у якій враховано знайдені швидкості (і, тим самим, частина зв'язків), а підсумовування ведеться тільки по частині швидкостей. Розв'язок рівнянь руху буде залежати від довільних величин $v_\alpha(t)$ і механічний стан системи буде знайдено неоднозначно. У механіці Лагранжа така ситуація відповідатиме аналогічній залежності координат $q_i(t)$, оскільки задача Коші для виродженої теорії не має однозначного розв'язку.

Таким чином, заданих початкових умов, які повністю задають початковий стан у системі зі зв'язками першого роду не можна однозначно виразити механічні стани у наступні моменти часу як набори координат (q, p) . Однак це не означає, що задачу про рух такої системи розв'язати не можна: насправді шукати усі координати (q, p) і не потрібно, оскільки рух відбувається на поверхні зв'язків і координати на поверхні руху задовольняють рівняння $\Phi_A = 0$. У даній ситуації було б доцільно провести перетворення координат так, щоб чітко відділити залежні координати від незалежних. Цілком можливо, що неоднозначно визначатимуться ті ступені вільності, які реально не беруть участі у динаміці. Сам механічний стан системи у загальнофізичному розумінні не повинен залежати від довільних величин. Це і є характерною особливістю систем зі зв'язками першого роду: у результаті розв'язку рівнянь руху для *всіх* координат (q, p) буде отримано не еволюцію одного механічного стану від початкового моменту часу, а еволюцію набору станів, які нумеруються довільними функціями і включають одну й ту саму *фізичну*

інформацію про рух системи, яку закладено у механічному стані, обмеженому на поверхню руху. На поверхнях зв'язків такі стани будуть еквівалентними (можливо, з точністю до простої заміни координат).

Розглянемо роль зв'язків першого роду у динаміці системи. У першу чергу відмітимо, що за рахунок означення величин першого роду

$$[\Phi_A, \Phi_\alpha^{(1)}] = \{\Phi\},$$

для довільних зв'язків Φ_A (незалежно від того, первинних, чи ні). Тоді, оскільки зв'язки вже узгоджені з динамікою, то

$$\frac{d}{dt} \Phi_A = [\Phi_A, H^*] + v_\alpha [\Phi_\alpha^{(1)}, \Phi_A] = \{\Phi\} \Rightarrow [\Phi_A, H^*] = \{\Phi\},$$

тобто функція Гамільтона H^* є величиною першого роду, її дужка Пуассона пропорційна до зв'язків і зникає на їх поверхні. Якщо побудувати довільну лінійну комбінацію первинних зв'язків першого роду з малими коефіцієнтами ε_α , то

$$[\varepsilon_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, H^*] = \{\Phi\}.$$

Цей вираз аналогічний формулі для зміни функції Гамільтона у результаті нескінченно малого канонічного перетворення, яке задано за допомогою генератора $G = \varepsilon_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}$ (див. лекцію 23). Таким чином, первинні зв'язки першого роду можна розглядати як генератори нескінченно малих канонічних перетворень, які є симетріями функції Гамільтона H^* на поверхні зв'язків (оскільки δH^* є лінійною комбінацією зв'язків). Нескладно показати, що додавання до функції Гамільтона всіх зв'язків першого роду (не тільки первинних) не змінює рівнянь руху³.

Розглянемо дію таких перетворень на довільну функцію повного механічного стану $F(q, p)$:

$$\delta F = [G, F].$$

Таке перетворення не змінює фізичних величин у момент часу t і називається *калібрувальним перетворенням*.

Якщо послідовно виконати два такі перетворення з параметрами $\varepsilon^{(1)}$ та $\varepsilon^{(2)}$, то отримаємо:

$$F \rightarrow F_1 = F + [G_1, F] \rightarrow F_{12} = F_1 + [G_2, F_1] = F + [G_1, F] + [G_2, F] + [[F, G_1], G_2],$$

якщо послідовність перетворень обернена (спочатку друге, а потім перше), то аналогічно:

$$F \rightarrow F_{21} = F + [G_2, F] + [G_1, F] + [[F, G_2], G_1],$$

Результати різних послідовностей перетворень відрізнятимуться, різниця між ними складатиме

$$\delta_{[12]} F = F_{12} - F_{21} = [[F, G_1], G_2] - [[F, G_2], G_1] = [[G_2, G_1], F],$$

³ Нові доданки з вторинними зв'язками дають у рівняннях руху комбінації, пропорційні до зв'язків, що зникають на поверхні руху.

де використано тотожність Якобі для дужок Пуассона. Оскільки генератори перетворень є лінійними комбінаціями зв'язків першого роду, то їх дужка Пуассона також є лінійною комбінацією цих зв'язків, причому тільки першого розу згідно з доведеним твердженням про дужки Пуассона, однак до неї тепер можуть входити інші зв'язки першого роду (не тільки первинні). Таким чином, канонічні перетворення, що не змінюють фізичної інформації про стан системи на поверхні зв'язків є всі зв'язки першого роду.

Для часової еволюції довільної функції динамічних змінних на інтервалі часу $[t, t + dt]$ матимемо:

$$\begin{aligned} F(t + dt) &= F(t) + dt \frac{dF}{dt} + \dots = F(t) + dt[F, H_{red}] + \dots \\ &= F(t) + dt[F, H^*] + v_\alpha dt[F, \Phi_\alpha^{(1)}] + \dots \end{aligned}$$

у правій частині швидкості є довільними. Якщо записати те саме для іншого вибору невідомих швидкостей v'_α , то отримаємо інше значення $F'(t + dt)$. Різниця між ними складатиме:

$$F'(t + dt) - F(t + dt) = dt(v'_\alpha - v_\alpha)[F, \Phi_\alpha^{(1)}] + \dots = \varepsilon_\alpha[F, \Phi_\alpha^{(1)}],$$

де $\varepsilon_\alpha = dt(v'_\alpha - v_\alpha)$. У правій частині виникає зміна функції F у результаті канонічного перетворення з генератором $\varepsilon_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}$. Це означає, що неоднозначність у описі еволюції механічного стану викликана тим, що зміна координат у часі супроводжується канонічними перетвореннями з довільними параметрами, які змінюють стан в цілому у фазовому просторі, однак на поверхні зв'язків стани, що породжуються різними перетвореннями є еквівалентними, оскільки там вони є симетріями функції Гамільтона.

Залишилося деталізувати, що саме визначає “фізичну інформацію” у наборі (q, p) для виродженої теорії. Зрозуміло, що це мають бути функції координат фазового простору, що не змінюються у результаті канонічних перетворень, що породжуються зв'язками, тобто

$$[F_{phys}(q, p), \Phi_A] = \{\Phi\},$$

де у лівій частині фігурують зв'язки першого роду. Як і у механіці Лагранжа, було б доцільно провести перетворення координат простору так, щоб зв'язки описувались максимально простими рівняннями вигляду $\Phi = q = 0$ або $\Phi = p = 0$. Таке відокремлення дійсно можна зробити, будуючи перетворення

$$(q, p) \rightarrow (Q, P; z; \dots)$$

Координати фазового простору, для яких не введено позначені еквівалентні до зв'язків. Зазначимо, що кількість нових координат та імпульсів тут може бути, тому позначимо (Q, P) саме спряжені пари змінних, а z — залишок координат, для яких немає відповідних імпульсів (точніше останні описують зв'язки). Тоді фізичними змінними є незалежними координатами (Q, P) , що описують рух системи по поверхні зв'язків та довільні функції від них. Ці величини не змінюються

у результаті перетворень зі зв'язками як з генераторами. Можна показати, що фізична функція Гамільтона H_{phys} , яку можна отримати підстановкою зв'язків до H^* у нових координатах, не буде залежати від змінних z . Виходить, що всі неоднозначності розв'язку рівнянь руху і зосереджено у координатах z , від яких не залежить жодна фізична величина.

У більшості випадків провести аналіз координат досить складно, тому використовують еквівалентну процедуру, яка зводиться до введення додаткових обмежень таким чином, щоб отримати фізично еквівалентну невироджену теорію. Фактично це зводиться до того, що для даних початкових умов з класу механічних станів, що описують подальшу еволюцію, відбирають по одному представнику. Фізичні висновки про рух не повинні залежати від способу вибору такого представника, ця вимога називається *калібрувальною інваріантністю* фізичних величин, а сама процедура зняття виродженості — яка називається *фіксацією калібровки* виродженої теорії. Вироджені теорії із зв'язками першого роду часто називають калібрувальними. Прикладом фіксації калібровки у введених координатах є постулювання конкретних виразів $z = z(Q, P)$ (фактично введення нових зв'язків) і подальшого виключання нефізичних змінних z , які не проявляються у спостережуваних ефектах. У деякому розумінні це аналогічно до виключення циклічних координат у невироджених теоріях. У загальному випадку, коли перетворення координат не виконується, йдеться про додаткові умови типу зв'язків (їх пошук досить складний і фактично еквівалентний перетворенню координат):

$$\chi_\alpha(q, p) = 0,$$

умови узгодженості для яких дозволяють визначити всі невідомі швидкості. Тим самим кількість незалежних координат (q, p) стає рівною $2n - 2m$, де m — число зв'язків та додаткових умов. За рахунок такого додаткового обмеження траєкторія еволюції механічного стану буде єдиною. Новий фазовий простір називається *редукованим*.

Для суто механічних систем досить важко знайти змістовні приклади теорій за зв'язками першого роду, однак таких прикладів достатньо у теорії поля. Електромагнітне та гравітаційне поля є типовими прикладами вироджених калібрувальних теорій. Деякі властивості електромагнітного поля у зв'язку з цим буде розглянуто далі.

Зауваження. У більшості випадків ознакою виродженості теорії є наявність нетривіальної симетрії функціоналу дії, яка впливає з природи змінних та способу його побудови. У класичній електродинаміці виродженість з'являється за рахунок калібрувального перетворення потенціалів (звідси й назва для загального випадку). ┘

ЛЕКЦІЯ 33

Метод Лагранжа та Гамільтона для неперервних систем

1.	Функція Лагранжа.	495
2.	Варіаційний принцип для неперервних систем.	499
3.	Калібрувальна інваріантність.	501
4.	Закон зміни енергії.	502
5.	Хвильовий імпульс.	503
6.	Момент хвильового імпульсу.	504
7.	Функція Гамільтона та канонічні рівняння.	504
8.	Дужки Пуассона.	506
9.	Висновки.	508

1. Функція Лагранжа. Раніше було розглянуто методи для системи N частинок, які вважались матеріальними точками. У деяких випадках, якщо розподіл речовини має певну структуру, можна було виконати граничний перехід $N \rightarrow \infty$, це описує неперервний розподіл речовини. Саме так було для абсолютно твердого тіла та для лінійних ланцюжків. Виявляється, що не тільки результати, а і загальні методи класичної механіки можна майже без змін поширити на випадок системи з нескінченним та незліченим числом ступенів вільності¹. Такі системи можна називати *неперервними системами* (або середовищами). Крім того, до таких систем можна віднести також і поля у широкому розумінні: як неперервний розподіл деякої характеристики у просторі (наприклад, поле зміщень струни як функція відхилення від рівноважного положення). Модифікації стандартних методів Лагранжа та Гамільтона широко використовуються як у класичній, так і у квантовій теорії поля.

Для формулювання загального підходу візьмемо за основу задачу про лінійний ланцюжок (див. лекцію 16, граничний перехід до струни було виконано у прикладі 6). Нагадаємо основні результати граничного переходу до неперервного розподілу. У інших позначеннях функція Лагранжа для ланцюжка з однакових частинок, з'єднаних однаковими пружинами, має вигляд:

$$L = \frac{1}{2} \sum_n m \dot{u}_n^2 - \frac{1}{2} \sum_n k (u_{n+1} - u_n)^2,$$

де $u_n(t)$ позначає відхилення від положення рівноваги для n -ї частинки, межові умови у даному випадку несуттєві, тому їх проігноруємо. Рівняння руху:

$$m \ddot{u}_n = -k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}).$$

¹ Причому так можна зробити не тільки для систем суто механічного походження.

Якщо відстань між частинками у стані рівноваги складає a , то координати n -ї частинки у стані рівноваги можна записати як $x_n = na$, Граничний перехід зводиться до $a \rightarrow 0$ (ця величина відігравала роль диференціалу), $x_n = x$ (неперервний “номер” частинки), підсумовування по всіх частинках потрібно було замінити на інтеграли,

$$L = \sum_n a(\dots) \rightarrow \int dx(\dots)$$

і ввести густину та модуль пружності:

$$\frac{m}{a} \rightarrow \rho, \quad ka \rightarrow \varkappa.$$

Функцію Лагранжа доцільно записати у вигляді

$$L = \sum_n aL_n, \quad L_n = \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{u}_n^2 - \frac{1}{2} ka \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{a} \right)^2,$$

Тоді граничний перехід дає:

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \varkappa \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] = \int dx \mathcal{L}(u, \dot{u}, u'_x),$$

де \mathcal{L} є густиною функції Лагранжа. Граничний перехід для рівнянь руху дає:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Змінна $u(x, t)$ описує поле поздовжніх зміщень струни. Простим узагальненням одновимірної функції Лагранжа на тривимірний випадок є

$$L = \frac{1}{2} \int dV \left[\rho \left(\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)^2 - \varkappa (\vec{\nabla} u(\vec{r}, t))^2 \right] \quad (33.1)$$

з рівнянням

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varkappa \Delta u,$$

що збігається із звичайним хвильовим рівнянням у просторі.

Аналогічно можна знайти граничні переходи і для інших характеристик, але з деякими змінами, які викликані особливостями континуального розподілу. Розглянемо узагальнений імпульс, для дискретної системи

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n} = m \dot{u}_n = a \cdot \frac{m}{a} \dot{u}(x_n, t),$$

у границі $a \rightarrow 0$ з'явиться нескінченно малий множник, тому доведеться ввести густину імпульсу (так само, як для маси):

$$\frac{p_n}{a} = \frac{m}{a} \dot{u}(x_n, t) \rightarrow \pi(x, t) = \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Те саме стосується енергії, за означенням:

$$E = \dot{u}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n} - L = \sum_n a \left(\dot{u}_n \frac{\partial L_n}{\partial \dot{u}_n} - L_n \right),$$

звідки

$$\frac{E}{a} \rightarrow \mathcal{E} = \dot{u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} - \mathcal{L},$$

повна енергія системи є інтегралом по x .

Відмітимо характерні особливості, які виникають у результаті континуального переходу:

- замість ідентифікатора частинки (номера) з'являється неперервна координата, що описує просторове положення;
- функція Лагранжа є інтегралом, а підінтегральна функція у її записі залежить також і від просторових похідних польової змінної (L є функціоналом);
- частина характеристик неперервної системи (що суттєво залежали від дискретного розподілу маси до переходу) потрібно описувати густинами.

Зазначення. Для лінійного ланцюжка граничний перехід дає

$$m\ddot{u}_n = -k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) \longrightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

де $c^2 = \frac{z}{\rho}$ має розмірність квадрату швидкості і відповідає швидкості поширення хвиль вздовж струни. Відмітимо суттєву різницю для величин, що описують дискретний та неперервний випадки. Функція $u_n(t)$ описує відхилення n -ї частинки від положення рівноваги у даний момент часу t , якщо до $u_n(t)$ додати координату a_n , то отримаємо положення частинки у даний момент часу у деякій системі відліку. На континуальну версію $u(x, t)$ можна дивитись по-різному:

- 1) якщо $x = \text{const}$, то $u(x, t)$ описує поведінку відхилення елемента довжини струни з часом, це аналогічно до дискретного випадку;
- 2) якщо $t = \text{const}$, то $u(x, t)$ описує набір відхилень усіх точок струни у даний момент часу, тобто у деякому розумінні “миттєвий знімок” профілю струни.

Для класичної механіки системи частинок така подвійна інтерпретація такої функції є якісно новим поняттям. Вона описує *поле* — деяку характеристику, яка неперервно розподілена у області простору (яку займає струна) та часі. Рівняння руху для поля є рівнянням у частинних похідних, властивості таких рівнянь і функцій, які вони описують, на фізичному рівні суттєво відрізняються від рівнянь Ньютона для частинок.

Насамперед це стосується узгодженості інтерпретації полів та основних положень класичної механіки. Згідно з принципом відносності Галілея, рівняння Ньютона мають бути інваріантними відносно вибору системи відліку. Математично це виражається правилом переходу до іншої системи відліку, що рухається відносно даної зі сталою швидкістю v . Для ланцюжка перетворення має вигляд (X_n є координатою частинки у даний момент часу):

$$X_n \rightarrow X'_n = X_n - vt, \quad t' = t,$$

Оскільки $X_n(t) = a_n(t) + u_n(t)$ то

$$a'_n(t) + u'_n(t) = a_n(t) + u_n(t) - vt,$$

у нерухомій системі координат $a_n = \text{const}$. Положення рівноваги у рухомій системі координат рухаються зі швидкістю v , це означає, що $a'_n = a_n - vt$ але відносні відстані між ними зберігаються². Однак якщо у старих координатах можна вибрати початок так, щоб $a_n = na$ (якщо відстані a між сусідніми частинками у стані рівноваги однакові), то у нових координатах такого зв'язку не буде. Звідси $u'_n(t) = u_n(t)$ рівняння руху будуть однакові у обох системах відліку.

У випадку поля $u(x, t)$ (якщо не обрати до уваги виконаний граничний перехід) просторовий параметр x відіграє роль координати, яка вимірюється за допомогою заданої у системі відліку операції вимірювання, і саме ця величина змінюватиметься у результаті переходу до іншої системи відліку:

$$x \rightarrow x' = x - vt, \quad t \rightarrow t' = t.$$

(аналог перетворення для a_n). Поле є скалярною характеристикою і

$$u(x', t') = u(x, t).$$

(так само, як для дискретного випадку з фіксованим номером n). Однак виявляється, що хвильове рівняння *не є інваріантним* відносно перетворення Галілея, у чому можна пересвідчитись безпосередньо (див. задачу 33.1). Причина полягає у континуальній природі поля, яка потребує іншого опису, ніж дискретно розподілені точкові частинки. Поле існує скрізь (можливо, у межах деякої області), а частинки займають протягом руху послідовні положення. На відміну від частинок, поле не рухається, а лише змінюється з часом. Зміни поля можуть переносити інформацію про збудження у одній точці до іншої³ (тобто переносити енергію, імпульс і взагалі взаємодію), а механічний стан частинки може змінюватись тільки за рахунок взаємодії з іншими об'єктами.

Причину втрати перетворення Галілея можна пояснити заміною дискретного номера частинки (або еквівалентної характеристики, дискретного набору положень рівноваги) на неперервний індекс x . Фактично перетворення Галілея для рівнянь Ньютона у завуальованій формі проводиться по дискретному номеру (тобто для скінченного набору положень), тоді як у хвильовому рівнянні — по неперервній координаті. Якщо для дискретної частинки є сусіди, номери яких відрізняються на одиницю (вони фігурують у правих частинах рівнянь руху), то для неперервного елемента струни поняття сусіднього стає розмитим через невизначеність його розміру та положення, саме це і породжує частинну похідну по координаті у рівнянні поля.

Виявляється, що граничні переходи від дискретних систем до неперервних і подальше запозичення методів Лагранжа та Гамільтона⁴ дають правильні (тобто математично коректні) рівняння поля. Однак основні припущення та закони класичної механіки потребують суттєвого перегляду для коректного опису неперервних систем та полів. Слід зазначити, що з самого початку коло питань класичної механіки було обмежено саме

² Фактично перетворення просторового зсуву.

³ Причому із швидкістю, яка є обмеженою. У випадку струни вона збігається з параметром c .

⁴ Із незначними змінами, пов'язаними з неперервністю просторових індексів, які стають повноцінними координатами.

дискретною матерією, тому включення полів до задачі дослідження руху дає теорію, яка за областю застосовності значно ширша, ніж стандартна класична механіка. ┘

Задача 33.1. Виконати перетворення Галілея для хвильового рівняння.

Перейдемо до узагальнення результатів граничного переходу. Розглянемо найпростіший випадок неперервної системи, яку задано одним полем $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$. У загальному тривимірному випадку функція Лагранжа, має вигляд:

$$L = \int_V \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial\varphi, \vec{r}, t) dV \quad (33.2)$$

(тобто є функціоналом польових змінних). У даному записі $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ є елементом об'єму, для скорочення позначатимемо

$$\partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Функція \mathcal{L} є об'ємною густиною функції Лагранжа, її часто називають *лагранжианом*. Під полем розумітимемо неперервний розподіл деякої характеристики у просторі. Для лінійного ланцюжка поле описує розподіл зміщень, а зміни поля — поширення хвиль.

За аналогією з лінійним ланцюжком означимо густина узагальненого імпульсу:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}. \quad (33.3)$$

та енергії

$$\mathcal{E} = \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L}. \quad (33.4)$$

Рівняння руху неперервної системи одразу записати не вийде, оскільки функція Лагранжа є функціоналом, однак їх можна отримати граничним переходом від дискретного розподілу речовини, але у загальному випадку так робити недоцільно, оскільки не у всіх неперервних систем є дискретні аналоги. Як правило, функцію Лагранжа для конкретної системи записують одразу, керуючись загальними фізичними міркуваннями.

Інший шлях запису рівнянь руху полягає у використанні континуальної форми варіаційного принципу Гамільтона, який буде породжувати рівняння руху так само, як і для систем частинок.

2. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ. У формулюванні варіаційного принципу Гамільтона форма функції Лагранжа фактично не використовується, тому його з мінімальними змінами⁵ можна використати і для неперервних систем. Вважатимемо, що для дійсної еволюції системи варіаційний принцип має вигляд:

$$\delta S[\varphi] = 0$$

⁵ По суті, термінологічними.

(для межових умов, форму яких встановимо далі), де $S[\varphi]$ позначає інтеграл дії:

$$S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial\varphi, \vec{r}, t). \quad (33.5)$$

Розглянемо зміну інтегралу дії у першому порядку у результаті варіації поля $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$. Час та просторову область інтегрування вважатимемо фіксованими. Беручи до уваги структуру аргументів лагранжиану, отримаємо:

$$\delta S[\varphi] = \iint dt dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \delta\partial_i \varphi \right].$$

Варіації вважатимемо синхронними та однорідними, тобто $\delta\dot{\varphi} = \frac{d}{dt} \delta\varphi$ та відповідно $\delta\partial_i \varphi = \partial_i \delta\varphi$, тоді після виділення повних похідних отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta S[\varphi] = \iint dt dV & \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta\varphi \right) + \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \delta\varphi \right) \right] \\ & + \iint dt dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \right] \delta\varphi \end{aligned}$$

(повні похідні по координатах та по часу означають, що під час диференціювання потрібно враховувати також і явні залежності лагранжиану від цих величин). Перші два доданки можна перетворити за допомогою формули Ньютона-Лейбніца та теореми Гаусса-Остроградського, тоді

$$\delta S[\varphi] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta\varphi \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \oint_{S(V)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \delta\varphi n_i dS + \iint dt dV \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} \right) \right] \delta\varphi$$

Тут $S(V)$ — поверхня, що обмежує об'єм V . Для скорочення запису під інтегралом означено варіаційні (функціональні) похідні функції Лагранжа по φ та $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \quad (33.6)$$

вони описують зміну функції Лагранжа у результаті зміни φ (або $\dot{\varphi}$) у околі даної просторової точки для фіксованого часу (функція Лагранжа не залежить від просторових похідних функції $\dot{\varphi}$, тому останній вираз простіший). Якщо вважати, що межові умови мають вигляд

$$\delta\varphi(\vec{r}, t_{1,2}) = 0 \quad \text{та} \quad \delta\varphi(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S(V)} = 0$$

(не варіюються значення поля у початковий та кінцевий моменти часу, а також значення у довільний момент часу на поверхні), то з континуального аналога леми Дюбуа-Реймонда випливатимуть рівняння руху:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} = 0, \quad (33.7)$$

які є аналогами класичних рівнянь Лагранжа. Зауважимо, що незважаючи на те, що система має нескінченне число ступенів вільності, рівняння руху всього одне. Це пов'язано з тим, що воно є диференціальним рівнянням у частинних похідних. Якщо зафіксувати просторові параметри, то формально це означає, що ми маємо нескінченну кількість звичайних диференціальних рівнянь, які занумеровано координатами x .

Зауваження. У розгорнутому записі рівняння Лагранжа (33.7) мають вигляд:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi)} = 0.$$

Звідси та з характеру аргументів лагранжиану випливає, що час та просторові координати фігурують у теорії поля рівноправно, хоч і мають різний фізичний зміст та розмірності. У теорії відносності ця рівноправність є не просто формальною, а має принциповий характер.

Функціональні похідні використовуються тільки для скорочення запису і для надання рівнянням руху подібності зі звичайними рівняннями Лагранжа. У квантовій теорії поля доданки у рівняннях руху групують інакше. ┘

Варіаційний даватиме правильні рівняння руху, якщо результати його використання узгоджуються з висновками, які отримано іншими методами (зокрема, за допомогою континуального переходу). Для прикладу розглянемо рівняння руху для поздовжніх коливань струни.

Приклад 1. Рівняння руху для поздовжніх коливань струни.

◀ Знайдемо похідні функції Лагранжа

$$L = \int dx \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Тоді:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x u} = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0,$$

підстановка до рівнянь Лагранжа (33.7) дає раніше отриманий результат. ►

Так само, як і у механіці частинок можна розглянути загальну форму першої варіації і пов'язати симетрії функціоналу дії із законами збереження (теорема Нетер). Оскільки цей аналіз ідентичний до обчислень у чотиривимірній теорії поля, то його буде наведено далі (див. лекцію 36).

3. КАЛІБРУВАЛЬНА ІНВАНІАНТНІСТЬ. Як і для механіки частинок, існують перетворення, які полягають у зміні густини функції Лагранжа, що не змінюють рівнянь руху. Розглянемо перетворення вигляду

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_0 + \frac{d}{dx_i} \mathcal{F}_i, \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\varphi, \vec{r}, t), \quad \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(\varphi, \vec{r}, t).$$

Запишемо рівняння руху для лагранжиану \mathcal{L}' . У явному записі:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \varphi} \partial_i \varphi.$$

Тоді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial t \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial x_i \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial \varphi^2} \partial_i \varphi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_i \varphi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Повторне диференціювання цих виразів по часу та координатах дає:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial \varphi \partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_i \varphi)} &= \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial \varphi \partial x_i} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial \varphi^2} \partial_i \varphi.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_i \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} = 0,$$

тобто для густин \mathcal{L} та \mathcal{L}' рівняння поля будуть однаковими. Таким чином, додавання до густини функції Лагранжа похідної по часу довільної функції \mathcal{F}_0 від координат, часу, поля та дивергенції довільного вектору \mathcal{F}_i з такими самими аргументами не змінює рівнянь руху. Формально такі перетворення незалежні між собою⁶.

4. ЗАКОН ЗМІНИ ЕНЕРГІЇ. Розглянемо повну похідну по часу від густини енергії:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \dot{\pi}\dot{\varphi} + \pi\ddot{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \partial_i \dot{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \left(\underbrace{\dot{\pi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{=0} \right) \dot{\varphi} - \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},\end{aligned}$$

де було використано означення густини імпульсу та рівняння Лагранжа. Введемо позначення для густини, що виникає під знаком похідної:

$$\mathcal{S}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \quad (33.8)$$

тоді похідна густини енергії матиме вигляд:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{d\mathcal{S}_i}{dx_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Якщо густина функції Лагранжа явно не залежить від часу, то останнє рівняння набуває вигляду, характерного для рівнянь неперервності:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} \quad (33.9)$$

⁶ У чотиривимірній теорії відносності можливо тільки одночасно обидва перетворення.

Для з'ясування фізичного змісту густини \mathcal{S} розглянемо інтеграл від цього рівняння по об'єму V :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_V \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} dV = - \oint_{S(V)} \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{n} dS,$$

де $E = \int_V \mathcal{E} dV$ позначає енергію середовища у об'ємі V . Права частина рівності описує потік енергії через поверхню $S(V)$, що обмежує об'єм V . У випадку системи, що повністю перебуває всередині об'єму потік дорівнює нулю (зокрема, так буде завжди для нескінченного об'єму з періодичними межевими умовами на поле φ). Вектор потоку густини енергії $\vec{\mathcal{S}}$ називається *вектором Пойтинга*.

Зауваження. Перетворення $\vec{\mathcal{S}} \rightarrow \vec{\mathcal{S}} + \vec{\nabla} f$, де f є довільною функцією координат, не змінює рівняння неперервності для густини енергії, тому вектор $\vec{\mathcal{S}}$ означено з точністю до довільного градієнту. \lrcorner

5. ХВИЛЬОВИЙ ІМПУЛЬС. Для полів можна означити диференціальні характеристики, для яких відсутні аналоги у механіці частинок, такі характеристики пов'язані з *процесами*, які описує поле. Розглянемо для прикладу поздовжні одновимірні коливання струни. Виділимо *фіксовані* площини з координатами x та $x+dx$ (поперечні відносно струни). Якщо функція $\varphi(x, t)$ описує відхилення елементів довжини струни від положення рівноваги, то у результаті руху через площину з координатою x переміститься маса $\Delta m(x) = \rho \varphi(x)$, а через площину $x + dx$ відповідно $\Delta m(x + dx) = \rho \varphi(x + dx)$, загальна зміна маси між цими площинами буде

$$dm(x, dx) = \Delta m(x) - \Delta m(x + dx) = \rho [\varphi(x) - \varphi(x + dx)] \simeq -\rho \partial \varphi dx.$$

Якщо домножити цю величину на $\dot{\varphi}$, то отримаємо зміну імпульсу на одиницю довжини (якщо середовище має товщину у поперечному напрямку, то ще й на одиницю площі). Відповідна густина (після ділення на dx) матиме вигляд:

$$\mathcal{G} = -\rho \dot{\varphi} \partial \varphi = -\pi \delta \varphi,$$

де π — густина узагальненого імпульсу. Така величина називається *хвильовим імпульсом* і описує потік енергії вздовж струни завдяки хвильовому руху.

У загальному випадку, користуючись означенням узагальненого імпульсу, означимо хвильовий імпульс як вектор, i -та компонента якого має вигляд:

$$\mathcal{G}_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial_i \varphi = -\pi \partial_i \varphi. \quad (33.10)$$

Розглянемо похідну по часу від хвильового імпульсу:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial_i \varphi \right) = - \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \right)}_{=\dot{\pi}} \partial_i \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial_i \dot{\varphi} \right] \\
 &= - \left[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \partial_i \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \partial_i \partial_k \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \partial_i \dot{\varphi}}_{\text{частина похідної по } x_i} \right] + \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \partial_i \varphi \right) \\
 &= -\frac{d\mathcal{L}}{dx_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \partial_i \varphi \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \partial_i \varphi - \mathcal{L} \delta_{ik} \right).
 \end{aligned}$$

Якщо густина функції Лагранжа явно не залежить від координат, то матимемо рівняння неперервності:

$$\frac{d\mathcal{G}_i}{dt} = \frac{d}{dx_k} T_{ki}, \quad T_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \varphi)} \partial_i \varphi - \mathcal{L} \delta_{ik}. \quad (33.11)$$

Тензор T_{ik} називається *тензором напружень поля*. Його фізичний зміст легко зрозуміти з інтегрального формулювання закону зміни хвильового імпульсу:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \int_V \frac{d}{dx_k} T_{ki} dV = \oint_{S(V)} \vec{e}_i T_{ki} n_k dS$$

де $\vec{G} = \int_V \vec{\mathcal{G}} dV$ описує хвильовий імпульс у об'ємі V . Таким чином, тензор T_{ij} описує потік густини імпульсу (точніше компоненти густини у напрямку компоненти нормалі через поверхню).

Задача 33.2. Побудувати тензор напруг для скалярного поля (33.1) у тривимірному просторі.

6. МОМЕНТ ХВИЛЬОВОГО ІМПУЛЬСУ. Аналогічно до механіки частинок означимо аналог моменту імпульсу для поля, беручи до за основу хвильовий імпульс:

$$\mathcal{M}_{ij} = x_i \mathcal{G}_j - x_j \mathcal{G}_i, \quad (33.12)$$

вектор моменту імпульсу є згорткою з тензором Леві-Чивіта: $\mathcal{M}_k = \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_{ij}$. Похідна по часу:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{ij} = x_i \frac{d\mathcal{G}_j}{dt} - x_j \frac{d\mathcal{G}_i}{dt} = x_i \frac{dT_{kj}}{dx_k} - x_j \frac{dT_{ki}}{dx_k} = \frac{d}{dx_k} (x_i T_{kj} - x_j T_{ki}) - (T_{ij} - T_{ji}).$$

У випадку, коли система повністю належить об'єму V , то інтеграл від першого доданку дорівнює нулю. Тоді похідна по часу від $\mathcal{M}_{ij} = \int_V \mathcal{M}_{ij} dV$ визначатиметься антисиметричною частиною тензора T_{ij} . Якщо момент імпульсу об'єму зберігається, то тензор напруг має бути симетричним:

$$T_{ij} = T_{ji}. \quad (33.13)$$

Такої властивості можна досягти, виконуючи калібрувальні перетворення з функцією Лагранжа.

7. ФУНКЦІЯ ГАМІЛЬТОНА ТА КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ. Розглянемо аналог перетворення Лежандра для неперервної системи, означеної у (??). Як і для механіки частинок, перехід від функції Лагранжа до функції Гамільтона зведеться до двох етапів: 1) виразити швидкості через імпульси; 2) підставити швидкості до формули перетворення Лежандра функції Лагранжа по швидкостях. Суттєвою відмінністю від механіки частинок є поява густин замість функцій. Таким чином, потрібно з формули для густини імпульсу виразити похідні польових змінних по часу:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial \varphi, \vec{r}, t)}{\partial \dot{\varphi}} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi, \pi, \partial \varphi, \vec{r}, t),$$

а потім побудувати густину функції Гамільтона:

$$\mathcal{H} = [\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}]_{\dot{\varphi}=\dot{\varphi}(\pi)}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(\varphi, \pi, \partial \varphi, \vec{r}, t), \quad (33.14)$$

новим порівняно з механікою частинки є поява просторових похідних. Сама функція Гамільтона буде об'ємним інтегралом:

$$H[\varphi, \pi, t] = \int dV \mathcal{H}(\varphi, \pi, \partial \varphi, \vec{r}, t), \quad (33.15)$$

і за структурою є функціоналом польової змінної, імпульсу та часу.

Рівняння руху можна вивести так само, як і у механіці частинок, аналізуючи диференціал функції Гамільтона. Згідно з означенням

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \dot{\varphi} d\pi + \pi d\dot{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} d\partial_i \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \dot{\varphi} d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} d\partial_i \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

де враховано означення густини імпульсу. З іншого боку,

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \varphi)} d\partial_i \varphi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt,$$

звідси, порівнюючи множники при однакових диференціалах, отримаємо:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \varphi)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

останні два співвідношення встановлюють зв'язки між похідними по параметрах, а перше співвідношення фактично є рівнянням Гамільтона. Використовуючи рівняння Лагранжа

$$\dot{\pi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \varphi)}$$

отримаємо друге рівняння Гамільтона, таким чином у позначеннях функціональних похідних знайдемо остаточно:

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi} \quad (33.16)$$

(у першому співвідношенні функціональна похідна зведеться до одного доданку, оскільки гамільтоніан не залежить від $\partial\pi$). У такому записі рівняння Гамільтона подібні до канонічних рівнянь у механіці частинок, однак суттєво відрізняються тим, що є рівняннями у частинних похідних.

8. Дужки Пуассона. Розглянемо похідну по часу від довільного функціоналу динамічних змінних:

$$F = \int_V \mathcal{F}(\varphi, \partial\varphi, \pi, \vec{r}, t) dV,$$

де \mathcal{F} є об'ємною густиною цієї величини. Безпосереднє диференціювання дає:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \varphi)} \partial_i \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi} \dot{\pi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) dV \\ &= \int_V \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \varphi)} \right) \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi} \dot{\pi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right] dV + \int_V \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \right) dV. \end{aligned}$$

У першій групі підінтегральних доданків виділимо функціональні похідні від F та підставимо рівняння Гамільтона (33.16), останній доданок з об'ємним інтегралом можна записати у формі поверхневого інтегралу

$$\int_V \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \right) dV = \int_{S(V)} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \right) n_i dS$$

де $S(V)$ позначає поверхню, що обмежує об'єм V , а \vec{n} — її вектор нормалі і відкинути, якщо йдеться про інтегрування по нескінченному об'єму (де φ зникає на межі), або на поле накладено періодичні межові умови. Тоді матимемо:

$$\frac{dF}{dt} = \int_V \left[\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi} \right] dV + \int_V \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dV.$$

Перший доданок є безпосереднім аналогом дужки Пуассона, якщо її означити як

$$[A, B] = \int_V \left[\frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta B}{\delta \varphi} \frac{\delta A}{\delta \pi} \right] dV, \quad (33.17)$$

де під інтегралом фігурують густини, а другий є частинною похідною F по часу, тому похідну довільної функції по часу можна задати так:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (33.18)$$

що повністю збігається з аналогічним виразом у механіці частинок. Більшість суто алгебраїчних властивостей дужки Пуассона (антисиметричність, тотожність Якобі) матиме місце і для полів.

Незважаючи на подібність дужок Пуассона для поля та для системи частинок, повної відповідності між ними означити не можна. Насамперед це стосується фундаментальних дужок Пуассона. Для того, щоб побудувати дужки Пуассона для найпростіших змінних φ та π потрібно побудувати з них функціонали за допомогою інтегрування по просторових змінних, які після цього перестануть бути параметрами поля та густини імпульсу. Щоб уникнути цього, запишемо інтеграли у формі (для спрощення розглянемо одновимірний випадок)

$$\varphi(x', t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, t) \delta(x - x') dx, \quad \pi(x'', t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x, t) \delta(x - x'') dx,$$

де $\delta(x - x')$ позначає δ -функцію Дірака⁷ з властивостями

$$\delta(x - x') = 0 \quad \text{для} \quad x \neq x', \quad \text{але} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x'),$$

для довільної функції $f(x)$ без особливостей. Функцію Дірака можна уявляти як функцію, яка скрізь дорівнює нулю за винятком початку координат, де має гострий та вузький пік (причому площа під її графіком дорівнює одиниці). Тут не будуть детально розглядатись властивості δ -функції, суттєвим є те що δ -функція є аналогом символу Кронекера для величин з неперервними індексами, підсумовування по яких еквівалентне до інтегрування:

$$\sum_i f_i \delta_{ij} = f_j \quad \text{аналогічне до} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x).$$

Якщо роль символу Кронекера у сумі зводиться до заміни індексу, то δ -функція замінює аргумент під інтегралом.

Таким чином, просторові аргументи у полів є параметрами, а самі поля записані у вигляді просторових інтегралів. Знайдемо тепер функціональні похідні:

$$\frac{\delta \varphi(x', t)}{\delta \varphi(x, t)} = \delta(x - x'), \quad \frac{\delta \pi(x'', t)}{\delta \pi(x, t)} = \delta(x - x''), \quad \frac{\delta \varphi(x', t)}{\delta \pi(x, t)} \frac{\delta \pi(x'', t)}{\delta \varphi(x, t)} = 0.$$

Звідси згідно з означенням дужок Пуассона отримаємо:

$$[\varphi(x'), \pi(x'')] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') \delta(x - x'') dx = \delta(x' - x''),$$

⁷ δ -функція є математичним об'єктом зі специфічними властивостями, які відрізняють її від звичайних функцій, які розглядають у математичному аналізі. Такі об'єкти називають *узагальненими функціями*. У фізиці (окрім теорії поля у чистому вигляді) особливо широкого застосування вони набули у електродинаміці та квантовій механіці.

що є аналогом виразу для дужок Пуассона для канонічно спряжених змінних:

$$[\varphi_i, p_j] = \delta_{ij}$$

Аналогічно можна довести формули для інших аналогів фундаментальних дужок. Остаточно маємо:

$$[\varphi(x'), \varphi(x'')] = 0, \quad [\pi(x'), \pi(x'')] = 0, \quad [\varphi(x'), \pi(x'')] = \delta(x' - x''), \quad (33.19)$$

Зауваження. Для задачі про поздовжні коливання струни у дискретному випадку канонічно спряженою змінною до відхилення u_i є імпульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial u_i}, \quad \text{причому} \quad [u_i, p_j] = \delta_{ij}.$$

Для граничного переходу доцільно імпульс замінити на густину імпульсу $\pi_i = \frac{p_i}{a}$, звідки

$$[u_i, \pi_j] = \frac{1}{a} \delta_{ij}$$

Граничний перехід до континууму $u_i \rightarrow u(x')$, $\pi_j \rightarrow \pi(x'')$, $a \rightarrow 0$ (стає аналогом диференціалу dx'') передбачатиме, що права частина дужки Пуассона для однакових індексів ставатиме нескінченною, символічно можна записати так:

$$[u(x'), \pi(x'')] = \frac{1}{dx''} \delta(x', x'')$$

Вираз у правій частині у деякому розумінні і буде δ -функцією, хоча таке обчислення не є коректним граничним переходом: формальний інтеграл від правої частини по x'' безглуздий, оскільки скорочується диференціал. Крім того, у лівій частині записані похідні змінної по змінній, для такої комбінації потрібно коректно означити відповідну структуру у континуальному випадку. Однак інтуїтивно зрозуміло, що результатом інтегрування має бути одиниця, оскільки для дискретного випадку це еквівалентне до суми

$$\sum_j [u_i, p_j] = \sum_j \delta_{ij} = 1,$$

для якої можна виконати коректний граничний перехід у правій частині. \lrcorner

Дужки Пуассона для функціоналів динамічних змінних та фундаментальні дужки не відіграють особливо корисної ролі у класичній версії теорії поля для розуміння чи розв'язків задач. Однак у квантовій теорії поля їх беруть за основу під час побудови квантового аналога класичної теорії.

9. Висновки У даній лекції були розглянуті основні поняття теорії поля на прикладі скалярного поля. Теорію легко узагальнити на випадок довільного набору полів $\varphi_a(x, t)$, де a — індекс, що нумерує поля. Частина логічного апарату класичної механіки легко переноситься на поле, яке можна розглядати як систему з незчисленим числом ступенів вільності. У свій час це мало важливе значення для побудови квантової теорії поля.

Також можна говорити про скалярні, векторні, тензорні поля, однак на функцію Лагранжа буде накладено обмеження інваріантності відносно перетворень у просторі, де ці поля набувають значень. Аналогії з точковими перетвореннями класичної механіки тут вже не буде, оскільки для поля є дві групи перетворень: по аргументах (координатах та часу), та по польових індексах, оскільки поля конкретної природи є не просто набором функцій, а задовольняють певні властивості відносно перетворень у просторі, де вони означені (наприклад, компоненти вектора у випадку просторових поворотів мають змінюватись за відомим законом, який можна означити за допомогою матриці переходу). Із цієї причини у теорії поля немає безпосереднього аналогу для канонічних перетворень та методу Гамільтона-Якобі. Основні паралелі між механікою частинок та законами зміни полів можна провести тільки у контексті варіаційного принципу та його наслідків. Детальніше розгляд цих та інших питань можна знайти у літературі з квантової чи класичної теорії поля.

ЛЕКЦІЯ 34

Релятивістська кінематика

1.	Основні положення теорії відносності.	511
2.	Перетворення Лоренца.	512
3.	Швидкість.	519
4.	Простір та час.	519
5.	Чотиривимірні позначення. Властивості перетворень Лоренца.	524
6.	Швидкість частинки.	527

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ. Історію питання можна знайти у курсах електродинаміки, наприклад у [36]. У теорії відносності частково зберігаються основні припущення, які закладено у механіці Ньютона, а сама теорія будується як уточнення та узагальнення класичної схеми. Область дослідження стає ширшою:

- 1) *простір (евклідовий і тривимірний) є однорідним та ізотропним, а час — однорідним (але не обов'язково абсолютним);*
- 2) *об'єктом дослідження є матерія (як речовина, так і поле);*
- 3) *вплив одного матеріального тіла (як речовини, так і поля) на інше має характер взаємодії,*

Центральним поняттям залишається інерціальна система відліку, а перший закон Ньютона, який констатує факт їх існування, приймається у повному формулюванні. Без змін залишається і означення системи відліку як системи координат із заданими процедурами вимірювання довжин та часу, однак у теорії відносності наявність фізичних процесів вимірювання, пов'язаних із системою відліку, відіграють значно важливішу роль, ніж у механіці Ньютона.

Принцип відносності Галілея розширюється на всі без винятку фізичні явища, які досліджуються у інерціальних системах відліку, зокрема, у першу чергу це стосується законів електродинаміки:

Усі фізичні явища відбуваються в інерціальних системах відліку однаково (принцип Пуанкаре);

Це означає, що за характером фізичних процесів не можна відрізнити рухому інерціальну систему відліку від нерухомої, можна лише констатувати факт їх відносного руху.

Зауваження. Загальні вимоги до простору часу є більш рівноправними, ніж у механіці Ньютона. Абсолютність часу фактично вимагала формою основного рівняння механіки

(другого закону Ньютона). Зовсім не обов'язково, що рівняння для полів потребують такого припущення. ┘

Новим є принцип Ейнштейна, який є узагальненням експериментальних фактів, пов'язаних з поширенням світла. Він звужує принцип далекодії, який прийнято у механіці Ньютона. Будь-які швидкості руху матеріальних тіл та передачі взаємодії між ними у інерціальних системах відліку обмежені значенням швидкості світла:

Швидкість світла у вакуумі в усіх інерціальних системах відліку однакова і дорівнює

$$c = 299\,792\,458 \pm 1 \text{ м/сек}$$

(постулат Ейнштейна).

Постулат Ейнштейна можна сформулювати у іншій, більш універсальній формі, яка об'єднує його з принципом Пуанкаре¹:

Усі фізичні закони та числові сталі, які з'являються у їх математичному формулюванні, однакові у інерціальних системах відліку (принцип Пуанкаре-Ейнштейна).

Зокрема, швидкість світла є не просто швидкістю поширення електромагнітних хвиль, вона є сталою, що визначає електромагнітну взаємодію².

Для узгодження з положеннями теорії відносності всі закони механічного руху потребують змін, оскільки вони суттєво спираються на принцип далекодії. Крім того, правило переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої потрібно узгодити з постулатом Ейнштейна, оскільки звичайне перетворення Галілея не накладає жодних обмежень на швидкості. Закони механіки Ньютона, які надійно перевірені у своїй області застосовності залишаються там правильними. Вони мають бути граничним випадком законів руху теорії відносності для $c \rightarrow \infty$ (або, еквівалентно, для малих швидкостей частинок порівняно зі швидкістю світла).

2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА. Розглянемо детальніше поширення світла, у різних системах відліку для цього потрібно скористатись рівняннями електродинаміки, які у різних інерціальних системах відліку мають виглядати однаково. Для спрощення використаємо не самі рівняння Максвелла, і їх наслідок — хвильове рівняння, яке описує процес поширення хвиль із швидкістю c :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (34.1)$$

де $u(x, t)$ — деяка скалярна характеристика, що описує хвилю у інерціальній системі відліку S (обмежимося напрямком поширення вздовж осі x). Згідно з принципом Пуанкаре, у системі відліку S' , що рухається із швидкістю V вздовж осі x хвильове рівняння (як фізичний закон) має зберігати форму. Якщо перехід здійснюється за допомогою перетворення Галілея, тобто

$$x' = x - Vt, \quad t' = t, \quad u'(x', t') = u(x, t)$$

¹ Сам Ейнштейн у першій роботі з теорії відносності інтерпретував сталу c згідно з першим формулюванням.

² Висновок про існування та швидкість поширення електромагнітних хвиль вже є наслідком аналізу рівнянь руху.

(зміну поля $u(x, t)$ не враховуємо, оскільки вважаємо скаляром³) то згідно із стандартною процедурою заміни змінної

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -V \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial t'}.$$

Повторне диференціювання дає

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2},$$

підстановка до рівняння у системі S дає:

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = -\frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial t'} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2},$$

тобто форма рівняння зберігатись не буде через появу множника у лівій частині та доданку з мішаною похідною (обидва залежать від швидкості V). Це означає, що перетворення Галілея некоректно описує перехід до іншої системи відліку у випадку, коли йдеться про поле. Причина у тому, що форму перетворення Галілея встановлено для випадків руху, якими обмежується класична механіка Ньютона (де еволюція поля взагалі не розглядається) та формою законів Ньютона, а їх було перевірено лише для механічних систем невеликих розмірів та руху з достатньо малими швидкостями (значно меншими за швидкість світла). Оскільки розгляду руху дискретних частинок, що взаємодіють з полем (і можуть змінювати його стан) потрібно одночасно розв'язувати і рівняння для частинок, і рівняння для поля, то обидві групи рівнянь мають бути інваріантними відносно заміни системи відліку. Якщо вважати закони електродинаміки правильними, то змінювати доведеться правило переходу до іншої системи відліку та механічні рівняння.

Розглянемо спочатку закон переходу від S до іншої системи відліку S' . У загальному випадку для однієї просторової координати він матиме вигляд:

$$x' = x'(x, t), \quad t' = t'(x, t).$$

(швидкість v входить як параметр). Процедури вимірювання координат та часу в них вважатимемо однотипними. На перетворення накладемо загальні вимоги:

1) перетворення має бути невиродженим, тобто

$$\frac{\partial(x', t')}{\partial(x, t)} = \det \begin{pmatrix} \partial x' / \partial x & \partial t' / \partial x \\ \partial x' / \partial t & \partial t' / \partial t \end{pmatrix} \neq 0.$$

Це забезпечує існування оберненого перетворення (таке перетворення обов'язково має існувати, оскільки всі інерціальні системи відліку є рівноправними);

³ Якщо u є потенціалом або напруженістю поля, то ця величина буде змінюватись у результаті перетворень. У даному нестрогому викладі це ігнорується.

- 2) перетворення дає нову систему відліку, у якій вільна частинка рухається зі сталою швидкістю, або перебуває у спокої (тобто має бути узгоджене з означенням такої системи). Для одновимірного руху вздовж x це означає:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x'(t')}{dt'^2} = 0, \quad (34.2)$$

де $x(t)$ та $x'(t')$ позначають траєкторії руху вільної частинки у системах S та S' . Рівняння (34.2) не є рівняннями руху (їх ми поки не знаємо), вони лише констатують сталість швидкостей, зв'язок між якими зараз несуттєвий;

- 3) у обох інерціальних системах відліку S та S' простір та час мають бути однорідними. Зсув початку системи координат (без зміни системи відліку) та початку відліку часу на сталі значення не впливає на фізичні висновки про просторові положення та еволюцію у часі.
- 4) якщо $x' = 0$ (початок координат системи S'), то у системі S має бути еквівалентно $x = Vt + \text{const}$, оскільки у системі S закон руху системи S' відомий. Така вимога дає можливість врахувати інформацію про швидкість руху S' відносно S ;
- 5) системи S та S' відліку є рівноправними для опису явищ;
- 6) для швидкостей, достатньо малих порівняно зі швидкістю світла перетворення системи відліку має наближено відповідати перетворенню Галілея.

Строгий аналіз передбачає аналіз симетрій рівняння (34.1) (або, точніше, рівнянь Максвелла⁴), тобто пошук перетворень координат та часу, у результаті яких рівняння не змінює форми. Серед них обов'язково буде і модифіковане перетворення Галілея, яке можна відрізнити від інших за допомогою наведених вимог.

Розглянемо спрощений варіант аналізу перетворень заміни системи відліку, враховуючи вимоги, які накладено на одновимірні перетворення. Остання вимога корисна для перевірки коректності побудови закону перетворення.

Однорідність простору та часу. Ця умова означає, що всі просторові точки рівноправні, тому якщо змістити початок координат на довільну сталу величину, формули переходу $(x, t) \rightarrow (x', t')$ мають давати *ту саму* інерціальну систему відліку, що і без зміщення (можливо, також зі зміщеним початком). Те саме стосується зміщення часу. Це означає, що

$$\begin{aligned} x'(x + \Delta x, t + \Delta t) - x'(x, t) &= \langle \text{не залежить від } x \text{ та } t \rangle \\ t'(x + \Delta x, t + \Delta t) - t'(x, t) &= \langle \text{не залежить від } x \text{ та } t \rangle \end{aligned}$$

де Δx , Δt є сталими величинами, функції у правих частинах як раз і означають зміщення у системі S , які мають бути однакові для всіх просторових точок та моментів часу. Якщо продиференціювати ці вирази по x та t , то отримаємо, що функції $\frac{\partial x'(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial x'(x, t)}{\partial t}$, $\frac{\partial t'(x, t)}{\partial x}$ та $\frac{\partial t'(x, t)}{\partial t}$ періодичні по обох аргументах з довільними періодами Δx та Δt відповідно, а це можливо тільки для сталих. Це означає, що функції $x'(x, t)$ та $t'(x, t)$ лінійними:

$$x' = a_1x + a_2t + a_3, \quad t' = b_1x + b_2t + b_3.$$

⁴ Саме так свого часу зробив Пуанкаре, який вперше математично послідовно отримав вирази для перетворень.

Якщо у початковий момент часу $t = 0$ початки координат та покази годинників у системах S та S' збігались, то можна вважати $a_3 = 0$ та $b_3 = 0$. Умова невинорженості перетворення означає, що

$$\frac{\partial(x', t')}{\partial(x, t)} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0.$$

Властивість інерціальності. Розглянемо зв'язки похідних від координати по часу у обох системах відліку. Згідно з правилом заміни змінної матимемо:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial t} dt}{\frac{\partial t'}{\partial x} dx + \frac{\partial t'}{\partial t} dt} = \frac{\frac{\partial x'}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial x'}{\partial t}}{\frac{\partial t'}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial t'}{\partial t}} = \frac{a_1 \dot{x} + a_2}{b_1 \dot{x} + b_2},$$

повторне диференціювання дає:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{1}{\frac{\partial t'}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial t'}{\partial t}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{(b_1 \dot{x} + b_2)^3} \ddot{x},$$

оскільки перетворення є невинордженим, то з умови $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$ випливає $\frac{d^2 x'}{dt'^2} = 0$, тому лінійні перетворення узгоджені з властивістю інерціальності.

Задача 34.1. Якщо у цьому обчисленні виконати підстановку загальних перетворень, то для другої похідної буде досить громіздкий вираз, з якого випливає

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} \sim \frac{\partial(x', t')}{\partial(x, t)} \ddot{x} + F(\dot{x}),$$

перший доданок зникне за рахунок нульового прискорення, а другий є квадратним тричленом по швидкості. Оскільки швидкість, хоч і стала для вільної частинки, є довільною, то прискорення у рухомій системі координат може набувати цілком довільного значення за винятком випадку, коли функція $F(\dot{x})$ є тотожним нулем, тобто коефіцієнти квадратного тричлена дорівнюють нулю. У явному записі це означає зв'язки на перші та другі похідні формул перетворення. Виконати це обчислення, чи можна звідси отримати висновки про лінійність перетворення не звертаючись до умов однорідності⁵?

Закон руху системи відліку. Початок координат системи S' рухається зі швидкістю v відносно початку координат S , тому для $x' = 0$ матимемо:

$$0 = a_1 x + a_2 t \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{a_2}{a_1} t \equiv V t$$

звідси $a_2 = -a_1 V$ (те саме можна отримати, розглядаючи вільну частинку у системі S , що рухається зі швидкістю V , вона має бути нерухомою у системі S').

Інваріантність хвильового рівняння. Виконаємо лінійне перетворення з хвильовим рівнянням. Виконуючи заміну змінних, матимемо:

$$\left(a_1^2 - \frac{a_2^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = -2 \left(a_1 b_1 - \frac{1}{c^2} a_2 b_2 \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial t'} + \left(\frac{b_2^2}{c^2} - b_1^2 \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2}.$$

⁵ Іншими словами: чи передбачає І закон Ньютона однорідність простору та часу автоматично?

Враховуючи зв'язок $a_2 = -a_1 V$, прирівняємо коефіцієнт при мішаній похідній до нуля, тоді $b_1 = -\frac{V}{c^2} b_2$. У результаті рівняння набуде вигляду:

$$a_1^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2} b_2^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2}.$$

Це рівняння має ту саму форму, що і вихідне хвильове рівняння, якщо $a_1^2 = b_2^2$. На цьому етапі вже відомо, що

$$x' = a_1(x - Vt), \quad t' = b_2 \left(t - \frac{V}{c^2} x\right) \quad \text{і} \quad a_1^2 = b_2^2.$$

Рівноправність систем відліку. Залишається знайти невідомі коефіцієнти a_1 та b_2 . Для цього скористаємось фізичним змістом процесу, яке описує хвильове рівняння. Відомо, що розв'язком задачі Коші для хвильового рівняння у системі S є вираз

$$\text{система } S: \quad u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct),$$

де $u_{\pm}(\xi)$ — функції, які визначаються початковими умовами при $t = 0$. За фізичним змістом доданок u_+ описує хвилю, що поширюється у додатному напрямку осі x , а u_- — у від'ємному. Оскільки у системі S' хвильове рівняння таке саме, то і розв'язки будуть аналогічними:

$$\text{система } S': \quad u'(x', t') = u'_+(x' - ct') + u'_-(x' + ct').$$

Якщо у початковий момент часу осі координат обох систем збігались, то початкові умови для обох рівнянь однакові, тобто $u_{\pm}(\xi) = u'_{\pm}(\xi)$. Це означає, що у випадку реєстрація значення амплітуди хвилі $u_+(0)$ у напрямку осі проводиться у системі S у точці x у момент часу t , а у системі S' у точці x' у момент часу t' , причому

$$x = ct \quad \text{разом з} \quad x' = ct'.$$

Підстановка до формул перетворення дає:

$$x' = a_1(x - Vt) \Big|_{x=ct} = a_1 t(c - V), \quad t' = b_2 \left(t - \frac{V}{c^2} x\right) \Big|_{x=ct} = \frac{1}{c} b_2 t(V - c),$$

з умови $x' = ct'$ випливає $a_1 = b_2 := \gamma$ (при цьому зовсім не обов'язково $t = t'$). Аналогічний аналіз хвилі у від'ємному напрямку дає

$$x = -ct \quad \text{разом з} \quad x' = -ct'.$$

Висновок буде тим самим. Таким чином,

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x\right).$$

Тепер скористаємось рівноправністю систем. Якщо виразити (x, t) через (x', t') із останніх виразів як з системи рівнянь, то

$$x = \frac{1}{\gamma} \frac{x' + Vt'}{1 - V^2/c^2}, \quad t = \frac{1}{\gamma} \frac{t' + Vx'/c^2}{1 - V^2/c^2}.$$

З першого співвідношення видно, що початок системи координат S (точка з координатою $x = 0$) рухається за законом $x' = -Vt'$, тобто система координат S рухається відносно S' із швидкістю $(-V)$. Оскільки системи координат є *рівноправними*, то закони переходу $S \rightarrow S'$ та $S' \rightarrow S$ мають бути однотипними із заміною знаку швидкості та перестановкою штрихованих величин з нештрихованими. Це означає, що

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right).$$

Порівнюючи дві версії оберненого перетворення знайдемо, що

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - V^2/c^2}.$$

звідси одразу видно що $v < c$, інакше перетворення дає комплексні координати та час. Залишається з'ясувати знаки коефіцієнту γ . Якщо $V = 0$, то системи S та S' ідентичні, що має відповідати $x' = x$ та $t' = t$, тому у виразі для γ корінь потрібно брати зі знаком “+”.

Таким чином, перетворення інваріантності одновимірного хвильового рівняння після врахування додаткових вимог має вигляд:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Відповідність до перетворення Галілея. У випадку $V \ll c$ праві частини можна розкласти у ряд Тейлора по степенях частки V/c :

$$x' = x - Vt + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} (x - Vt) + \dots}_{\text{малі доданки}}, \quad t' = t - \underbrace{\frac{V}{c^2} x + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \left(t - \frac{V}{c^2} x\right) + \dots}_{\text{малі доданки}}.$$

Якщо обмежитись доданками, які не залежать від $V/c \ll 1$, то отримаємо перетворення Галілея. Таким чином, у класичній механіці фактично вважається, що $c \rightarrow \infty$.

Комбінації з квадратним коренем та швидкістю у правих частинах отриманих перетворень досить часто виникають у теорії відносності, тому для них вводять спеціальні позначення:

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

за фізичним змістом $\beta < 1$ є безрозмірною швидкістю руху однієї системи відносно іншої у одиницях швидкості світла.

Аналогічний аналіз тривимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

дає перетворення всіх координат, які мають бути лінійними згідно з вимогою однорідності. У випадку руху S' відносно S вздовж осі x матимемо:

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \quad (34.3)$$

Перетворення (34.3) заміни інерціальної системи відліку називаються *перетворенням Лоренца*. Поперечні відносно напрямку швидкості координати (у даному випадку це y та z) не змінюються і не впливають на перетворення часу. У випадку, коли у початковий момент часу $t = 0$ осі системи координат займали різні просторові положення, формули перетворень потребують незначних змін. Якщо у момент часу t_0 положення (x_0, y_0, z_0) (системи S) збігається з положенням (x'_0, y'_0, z'_0) з відповідним моментом часу t'_0 (системи S'), то

$$x' - x'_0 = \gamma[x - x_0 - V(t - t_0)], \quad y' - y'_0 = y - y_0, \quad z' - z'_0 = z - z_0, \\ t' - t'_0 = \gamma\left[t - t_0 - \frac{V}{c^2}(x - x_0)\right].$$

Задача 34.2. Отримати перетворення (34.3) за допомогою аналізу інваріантності тривимірного хвильового рівняння.

Зауваження. Для виведення перетворення Лоренца постулат Ейнштейна було використано у іншій формі: швидкість світла у даному підході означає сталу, якою визначається електромагнітна взаємодія. Ця стала, як і будь-який інший універсальний параметр, який описує взаємодію, має бути однаковим у всіх інерціальних системах відліку. ┘

Зауваження. Під час аналізу інваріантності хвильового рівняння системи координат у S та S' вважались однотипними, тобто осі збігались у початковий момент часу. Якщо координати у цих системах вибрати по-різному або замінити декартові координати на інші, то закон перетворення ускладниться. Ознак аналіз можна спростити, якщо спочатку змінити систему відліку, не змінюючи координат, а потім провести заміну координат у системі S' (скажімо, від декартових координат перейти до сферичних). Форма хвильового рівняння зміниться, але це відбуватиметься за правилами заміни змінних для диференціальних операторів. Саме хвильове рівняння за допомогою методів диференціальної геометрії можна записати у такій загальній формі, яка зберігається у всіх координатах. ┘

Перетворення (34.3) легко узагальнити на випадок довільного напрямку швидкості руху, розбиваючи радіус-вектор на поздовжню та поперечну відносно швидкості складові. Тоді:

$$\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t), \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2}\right),$$

де $\vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{V}(\vec{r} \cdot \vec{V})}{V^2}$, $\vec{r}_{\perp} = \frac{\vec{V} \times (\vec{r} \times \vec{V})}{V^2} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$ (для доведення досить записати формули (34.3) у інваріантному вигляді через \vec{r}_{\parallel} та \vec{r}_{\perp}).

Задача 34.3. Розглянути перетворення пари хвильових рівнянь для плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі x . Компоненти полів вибрати так, що $\vec{E} = E\vec{e}_y$, $\vec{H} = H\vec{e}_z$. Разом із заміною координат побудувати формули для перетворення полів (скористатись властивостями плоскої електромагнітної хвилі).

3. ШВИДКІСТЬ. Знайдемо формули зв'язків швидкості частинки у системах координат S та S' . За означенням, швидкість є похідною координати, тому

$$\text{система } S: \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \text{система } S': \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}.$$

Для спрощення скористаємось перетворенням (34.3). Тоді для декартових компонент матимемо:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}. \quad (34.4)$$

У границі $c \rightarrow \infty$ отримаємо перетворення швидкостей Галілея. Згідно з (34.4), якщо у системі S швидкість частинки має компоненти $(c, 0, 0)$, то і у довільній іншій системі відліку вона матиме такі самі компоненти. У такому випадку йдеться, власне, про світло, це узгоджується з постулатом Ейнштейна. У інших випадках у жодній системі координат швидкість частинки не може перевищувати швидкість світла. Дійсно, якщо для руху вздовж осі x систему відліку S' підібрано так, що $\vec{v}' = c\vec{e}_x$, то то це автоматично передбачатиме лише можливість $\vec{v} = c\vec{e}_x$.

Як і для координат, ці вирази легко узагальнити на випадок довільного напрямку швидкості системи відліку:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}_{\parallel} - \vec{V}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2}, \quad \vec{v}_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{v}_{\perp}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2},$$

де \vec{v}_{\parallel} та \vec{v}_{\perp} позначають поздовжні та поперечні компоненти вектора \vec{v} відносно \vec{V} відповідно.

Задача 34.4. Записати перетворення компонент прискорення $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ за подати закон перетворення у інваріантному вигляді.

4. ПРОСТІР ТА ЧАС. З формул перетворення Галілея у механіці частинок випливало, що під час переходу до іншої інерціальної системи відліку зберігались відносні величини (відстані, швидкості, прискорення) і часові інтервали (причому не тільки відносні, а й абсолютні). Перетворення Лоренца має іншу структуру. Розглянемо зв'язок відносних відстаней та проміжків часу у різних системах відліку, пов'язаних за допомогою перетворення Лоренца. Вважатимемо, що процедури вимірювання цих величин у обох системах ідентичні і вважаються нерухомими відносно цих систем. Важливим поняттям у теорії відносності є *подія*, яка означає

вимірювання або просто існування довільного фізичного ефекту у заданій просторовій точці \vec{r} у момент часу t , подію позначають парою значень (\vec{r}, t) , а значення координат та часу вимірюють процедурами та приладами у відповідній системі відліку.

У кожній системі відліку послідовність дії для процедури виміру довжин та проміжків часу може бути своєю. Розглянемо їх послідовно. Для спрощення вважатимемо, що система S' рухається відносно S зі швидкістю $\vec{V} = V\vec{e}_x$.

Перетворення просторового масштабу. Нехай у системі S' на осі x' зафіксовано нерухомі точки A та B , відстань між ними складає $\Delta x_{AB} = x'_A - x'_B$. Якщо положення точок вимірюються *одночасно* у системі S у момент часу t , то виміри дадуть x_A, x_B . Зв'язок координат дається перетворенням Лоренца

$$x'_{A,B} = \gamma(x_{A,B} - Vt) \quad \Rightarrow \quad \Delta x'_{AB} = \gamma \Delta x_{AB},$$

якщо вважати x'_{AB} довжиною відрізка у стані спокою, то оскільки $\gamma > 1$, то у нерухомій системі довжина відрізка AB буде меншою, тобто під час руху просторовий масштаб вкорочується. Це стосується лише просторових масштабів, орієнтованих вздовж напрямку руху. Поперечні масштаби, очевидно, не змінюються. Тоді зміну елементу об'єму $dV = dx dy dz$ можна записати так:

$$dV = \gamma dV',$$

рухомий об'єм стискується у напрямку руху.

Отриманий ефект зміни довжини масштабу пов'язаний зі специфічною процедурою виміру його довжини. Насправді довжину можна вимірювати і у різні моменти часу, наприклад у момент t_1 виміряти положення A , а в момент t_2 відповідно B , а потім відняти результати. Події, які відповідають вимірам довжини (x_A, t) та (x_B, t) у системі S у рухомій системі S' одночасними не будуть:

$$t'_1 = \gamma(x_A - Vt), \quad t'_2 = \gamma(x_B - Vt).$$

Таким чином, події вимірювання довжини інтервалу у системі S будуть неодноразовими у системі S' , така процедура вимірювання довжин є природною для нерухомого масштабу.

Зауваження. У силу рівноправності систем відліку властивість зміни масштабу є симетричною. Якщо вимірювання нерухомого в S масштабу проводяться одночасними подіями у системі S' , то

$$x_{A,B} = \gamma(x'_{A,B} - Vt') \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{AB} = \gamma \Delta x'_{AB},$$

однак тепер масштаб рухається відносно системи S' і тому матиме меншу довжину. \square

Перетворення часового масштабу. Нехай у системі S' у одній і тій самій точці x' вимірюється інтервал часу $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. У системі S подіям $(x', t'_{1,2})$ відповідатимуть моменти часу

$$t_{1,2} = \gamma \left(t'_{1,2} + \frac{V}{c^2} x' \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta t',$$

тобто проміжок часу буде довшим. Просторові точки, які відповідають цим подіям матимуть різні координати:

$$x_{1,2} = \gamma(x' + Vt'_{1,2}) \Rightarrow x_2 - x_1 = \gamma V \Delta t'.$$

Таким чином, часовий інтервал між двома послідовними подіями з деяким об'єктом буде найменшим у системі координат, де цей об'єкт нерухомий. Час, який вимірюється у цій системі називається *власним* і позначається τ . Годинник у будь-якій іншій системі відліку вимірює *координатний час*, пов'язаний зі способом спостереження об'єкту у цій системі.

Якщо об'єкт рухається нерівномірно, то системи відліку, у якій вимірюється власний час не існує, однак можна говорити про систему відліку, яка протягом нескінченно малого часу (поки швидкість об'єкту можна вважати сталою). Зв'язок приростів координатного часу та власного часу пов'язані співвідношенням:

$$dt = \gamma(t) d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}},$$

де $v(t)$ позначає швидкість об'єкту у нерухомій системі у момент часу t , яка є також миттєвою швидкістю руху власної системи відліку об'єкту відносно нерухомої системи. Для руху протягом інтервалу координатного часу $[t_1, t_2]$ власний час зміниться на величину

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt.$$

Відмінність координатного часу від власного пояснює, чому елементарні частинки з коротким часом життя (порядку 10^{-8} sec) можуть проходити значні відстані (десятки та сотні метрів). Час життя $\Delta\tau$ є часом, який проходить між народженням та зникненням частинки у системі координат, де вона нерухома. Якщо частинка рухається зі швидкістю V відносно лабораторної системи координат, то час між подіями народження та зникнення частинки складатиме $\Delta t = \gamma \Delta\tau > \Delta\tau$, за цей час частинка проходить відстань $\Delta l = V \Delta t = \gamma \Delta\tau$, яка залежить від швидкості руху V і може набувати великих значень.

Одночасність подій. Нехай у системі координат S' у різних точках відбулись дві одночасні події (x'_A, t') та (x'_B, t') . У системі S їм відповідатимуть моменти часу

$$t_A = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x'_A \right), \quad t_B = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x'_B \right),$$

звідки проміжок часу у S між цими подіями становитиме

$$\Delta t_{AB} = \gamma \frac{V \Delta x'_{AB}}{c^2},$$

тобто у S вони у загальному випадку не будуть одночасними за винятком ситуації, коли йдеться про одну просторову точку (тобто $x'_A = x'_B$).

Інтервал. Розглянуті прості ефекти, пов'язані з перетвореннями Лоренца не означають, що плин часу в одній системі відліку об'єктивно є повільнішим, ніж у іншій або матеріальні об'єкти у різних системах мають різні форми та розміри. Зміни просторових та часових інтервалів у першу чергу пов'язані з відмінністю у способах опису одних і тих самих подій, які використовуються у різних системах відліку. Виявляється, описати всі ці ефекти можна за допомогою єдиного підходу, який полягає у аналізі величин, які є інваріантними відносно перетворень Лоренца.

Розглянемо дві події “1” та “2”, які системі відліку S можна описати наборами значень $(t_{1,2}, \vec{r}_{1,2})$ а у системі S' , що рухається зі швидкістю $\vec{V} = V\vec{e}_x$ відповідно $(t'_{1,2}, \vec{r}'_{1,2})$. На відміну від класичної механіки, у основі якої є принцип Галілея, відносні величини $\Delta t = t_2 - t_1$ та $\Delta r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ у системі S' будуть іншими:

$$\Delta x' = \gamma[\Delta x + V\Delta t], \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma\left[\Delta t + \frac{V}{c^2}\Delta x\right].$$

Однак можна показати безпосереднім обчисленням, що

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2, \quad \Delta l^2 = \Delta \vec{r}^2, \quad \Delta l'^2 = \Delta \vec{r}'^2,$$

де $\Delta l^2 = \Delta \vec{r}^2$ та $\Delta l'^2 = \Delta \vec{r}'^2$ позначають квадрати просторових відстаней між подіями у відповідній системі відліку. Це означає, що комбінація просторових та часових проміжків між подіями

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 \tag{34.5}$$

не змінюється у результаті перетворень Лоренца, тому вона є універсальною для всіх систем відліку характеристикою зв'язків між двома подіями. Значення Δs називається *інтервалом* між подіями.

Інтервали між подіями⁶ можна розбити на три класи за знаком величини Δs^2 :

Випадок $\Delta s^2 > 0$: інтервал називається *часовим*. Можна знайти таку систему відліку, у якій події відбуваються у одній просторовій точці (тобто $\Delta l' = 0$):

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 > 0,$$

у такій системі S' часовий проміжок $\Delta t'$ між подіями буде найменшим.

Випадок $\Delta s^2 = 0$: у такому випадку у довільній системі відліку інтервал дорівнює нулю,

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 = 0,$$

або $c^2\Delta t^2 = \Delta l^2$ і $c^2\Delta t'^2 = \Delta l'^2$. Події описують поширення світла від однієї точки до іншої. Інтервал з цією властивістю називається *ізотропним*.

Випадок $\Delta s^2 < 0$: інтервал називається просторовим, оскільки можна знайти таку систему відліку, у якій події відбуваються одночасно (тобто $\Delta t' = 0$):

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = -\Delta l'^2 < 0,$$

у такій системі S' просторова відстань $\Delta l'$ між подіями буде найменшою.

⁶ У класичній механіці такого поділу немає.

Зауваження. Якщо у початковий момент часу осі систем S та S' збігались і у початку координат відбувся короткий спалах світла, то поширення світла матиме вигляд сферичної хвилі у обох системах матиме вигляд сферичної хвилі, оскільки для інтервалу між подіями $(0,0)$ і (t, \vec{r}) в S та (t', \vec{r}') в S'

$$c^2 t^2 - \vec{r}^2 = 0, \quad c^2 t'^2 - \vec{r}'^2 = 0,$$

а з іншого боку ці рівняння задають поширення сферичного фронту хвилі у просторі. Часто таку властивість беруть за основу для виведення перетворень Лоренца. Однакову форму фронту у різних системах легко пояснити неодноразовістю подій його детектування у цих системах. \square

Розглянемо це раз зв'язки між подіями у різних системах за допомогою перетворення Лоренца, беручи до уваги значення інтервалу. Для спрощення вважатимемо, що події відбувались на осі x , тоді, згідно з перетвореннями Лоренца:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V \Delta t) = \Delta x \cdot \gamma(1 - V/U), \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - V \Delta x/c^2) = \Delta t \cdot \gamma(1 - VU/c^2), \quad (34.6)$$

де $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ (аналогічно в S') і $U = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (величина розмірності швидкості). Для визначеності вважатимемо, що у системі S має місце $x_2 > x_1$ та $t_2 > t_1$ (подія “2” відбувається *після* події “1”). Залежно від знаку квадрату інтервалу $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ між подіями матимемо такі випадки:

1) інтервал часовий, тобто $\Delta s^2 > 0$. Тоді $U < c$ і з умови $\Delta t > 0$ та (34.6) впливає $\Delta t' > 0$, тобто порядок слідування подій (причинність) зберігатиметься. Значення проміжку часу в S' залежатиме від характеру подій, з (34.6) маємо:

$$\Delta t' > \Delta t \quad \text{якщо} \quad U < \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right), \quad \Delta t' < \Delta t \quad \text{якщо} \quad U > \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

У частинному випадку $U/c \rightarrow 0$ отримаємо формулу $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Для просторового інтервалу знаки можуть змінюватись:

$$\Delta x' > 0 \quad \text{якщо} \quad U > V, \quad \Delta x' < 0 \quad \text{якщо} \quad U < V.$$

У випадку $U = V$ події відбуваються у одній точці S' , оскільки $\Delta x' = 0$ (як для вимірювання власного часу). Таким чином, часові інтервали відповідають подіям, між якими є причинний зв'язок.

2) інтервал просторовий, тобто $\Delta s^2 < 0$. Тоді $U > c$ і з умови $\Delta x > 0$ впливає $\Delta x' > 0$. Сам просторовий інтервал може збільшуватись та зменшуватись:

$$\Delta x' > \Delta x \quad \text{якщо} \quad U > V \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \Delta x' < \Delta x \quad \text{якщо} \quad U < V \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

У випадку $U < V \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ просторові довжини будуть однакові. Зокрема для $U/c \rightarrow \infty$ матимемо $\Delta x' = \gamma \Delta x$. Що стосується часового проміжку, то він може мати довільний знак:

$$\Delta t' > 0 \quad \text{якщо} \quad U > \frac{c^2}{V}, \quad \Delta t' < 0 \quad \text{якщо} \quad U < \frac{c^2}{V}.$$

У випадку $U = c^2/V$ події відбуваються одночасно і інтервал є суто просторовим (як для вимірювання власної довжини). Таким чином, просторові інтервали описують події, які упорядковані у просторі, але для них немає причинного зв'язку. Часто це формулюють як неможливість пов'язати такі події світловим сигналом.

Задача 34.5. Виконати аналогічний аналіз для ізотропного інтервалу.

У результаті, просторові та часові відстані між подіями після переходу до іншої системи відліку можуть як збільшуватись, так і зменшуватись, тому говорити про “скорочення довжини” чи “сповільнення часу” можна тільки для спеціально підібраних умов вимірювання (як було вказано раніше). Ці умови фіксують знак інваріантного інтервалу.

5. Чотиривимірні позначення. Властивості перетворень Лоренца. Вираз Δs^2 має спільну форму з квадратом довжини dl^2 у тривимірному просторі, це також комбінація квадратів, але з різними знаками. Координати (t, \vec{r}) , які описують подію, хоч і не є фізично еквівалентними, однак рівноправно беруть участь у перетворенні Лоренца. Розглянемо уявний чотиривимірний простір, утворений такими координатами:

$$\{x^\mu\} = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mu = \overline{0, 4},$$

чотиривимірні координати нумеруватимемо грецькими літерами, індекс 0 відповідає часовій координаті. Тривимірні координати, як і раніше, нумеруватимемо латинськими літерами від 1 до 3. Час взято з множником c , щоб усі координати мали однакові розмірності. Причина використання верхніх індексів у компонентах буде зрозуміла далі, угода Ейнштейна про підсумовування по німим індексах використовується тоді, коли один є верхнім (контраваріантним) а інший — нижнім (коваріантним). Такий простір називається *простором Мінковського*. Інтервал можна записати так:

$$\Delta s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

де $\eta_{\mu\nu}$ позначає діагональну матрицю коефіцієнтів:

$$\{\eta_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (34.7)$$

Перетворення Лоренца для випадку $\vec{V} = V\vec{e}_x$ у таких позначеннях матиме вигляд:

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0), \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3,$$

якщо розуміти $x = \{x^\mu\}$ як чотиривимірний радіус-вектор події в уявному просторі, то у матричній формі закон перетворення матиме вигляд:

$$x^\mu = L^\mu{}_\nu x'^\nu, \quad L = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34.8)$$

Для побудови оберненого перетворення у матриці L потрібно змінити знак безрозмірної швидкості β . Із такого запису легко встановити геометричний зміст перетворення Лоренца помітивши, що у першому та другому рядках різниця квадратів елементів дорівнює одиниці, тобто $\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$. Це означає, що такі елементи можна параметризувати гіперболічними функціями:

$$\gamma = \text{ch } \psi, \quad \beta\gamma = \text{sh } \psi, \quad \text{причому} \quad \text{th } \psi = \beta.$$

Тоді у площині $(x^0 x^1)$ перетворення має вигляд:

$$x^0 = x'^0 \text{ch } \psi + x'^1 \text{sh } \psi, \quad x^1 = x'^0 \text{sh } \psi + x'^1 \text{ch } \psi,$$

що формально відповідає тривимірному повороту на комплексний кут⁷. Виходячи з цієї аналогії Мінковський запропонував інтерпретувати перетворення Лоренца як повороти у псевдоевклідовому чотиривимірному просторі, де квадрат довжини вектора x задано виразом

$$\|x\|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

ця величина не змінюється у результаті чотиривимірних поворотів. Таку властивість можна поширити на інші об'єкти з чотирма компонентами, якщо вважати вектором набір чисел A^μ , які перетворюються при переході до іншої системи відліку за тим самим законом, що і радіус-вектор, причому довжина (за тією самою формулою, що і для радіус-вектора x) зберігається:

$$A^\mu = L^\mu{}_\nu A'^\nu, \quad \|A\|^2 = \|A'\|^2.$$

Тензором буде об'єкт з кількома індексами, який за кожним індексом перетворюється як вектор. Для другого рангу матимемо:

$$T^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta T'^{\alpha\beta}.$$

За аналогією з тривимірним простором, де квадрат довжини має вигляд $l^2 = \delta_{ij} x_i x_j$ і породжується скалярним добутком (евклідовою структурою) $l^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$ можна означити псевдоскалярний добуток (псевдоевклідову структуру) і у просторі Мінковського, який позначається⁸ $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$(A, B) = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \quad (34.9)$$

Матриця $\eta_{\mu\nu}$, за допомогою якої будуються скалярні добутки та елементи довжини називається *метричним тензором* простору Мінковського. Для спрощення записів з метричним тензором означимо операції піднімання та опускання індексів для перетворення ко- та контраваріантних компонент:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$$

⁷ Оскільки $\text{ch } \psi = \cos(i\psi)$ та $\text{sh } \psi = -i \sin(i\psi)$, повної аналогії можна досягти введенням комплексної координати $\bar{x}^0 = ix^0$.

⁸ У позначенні простору цифри означають кількість знаків “+” та “-” у доданках виразу для інтервалу.

де $\eta^{\mu\nu}$ позначає обернену до $\eta_{\mu\nu}$ матрицю (ці матриці, очевидно, однакові). Піднімання індексу самого метричного тензора дає символ Кронекера $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ (за правилом множення матриці на обернену). Легко показати безпосереднім обчисленням, що компоненти з просторовими номерами змінюють знак після піднімання (опускання) індексу:

$$\{A^\mu\} = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A}), \quad \{A_\mu\} = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) = (A^0, -\vec{A}),$$

тому у теорії відносності відрізняють верхні та нижні індекси. Використовуючи обидва типи компонент, скалярні добутки векторів можна записати у вигляді:

$$(A, B) = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu.$$

У тривимірному просторі (для прямокутних декартових координат) роль метричного тензору відіграє символ Кронекера, тому у такій відмінності немає потреби.

Під час перетворень Лоренца метричний тензор є інваріантним (за формою):

$$\eta_{\mu\nu} = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu \eta'_{\alpha\beta} \equiv L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta},$$

те саме стосується оберненого тензора $\eta^{\mu\nu}$ та символу Кронекера. останнє співвідношення за формою нагадує умову ортогональності у близьких за властивостями перетвореннях тривимірного простору. Міняючи порядок розташування індексів за допомогою операцій піднімання та опускання, матимемо:

$$\delta_\nu^\mu = L_\alpha{}^\mu L^\alpha{}_\nu,$$

тобто матриця $\{L_\alpha{}^\mu\}$ є оберненою до $\{L^\alpha{}_\nu\}$ (аналог транспонування для тривимірних перетворень).

Нарешті, розглянемо форму основних диференціальних операцій у 4-вимірному просторі. Як і у тривимірному просторі, вони будуються за допомогою оператора “набла”, утвореного з операторів диференціювання. Враховуючи вирази для перетворення Лоренці, матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = L_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu},$$

тобто вектор $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ перетворюється як коваріантний вектор (з нижніми компонентами). У явній формі:

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} \right).$$

Комбінації цих векторів з тензорами даватимуть тензори. Основні операції:

- 1) 4-градієнт від скаляра: $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$ (вектор);
- 2) похідні від вектора: $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}, \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ (тензори другого рангу різної структури);

- 3) 4-дивергенція від вектора: $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$ (самозгортка похідної, скаляр);
- 4) 4-ротатор від вектора: $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$ (антисиметрична комбінація похідних, тензор другого рангу).

Дивергенція від градієнту даватиме оператор Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) = (\partial^\mu \partial_\mu) \varphi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \varphi.$$

Зауваження. У принципі Пуанкаре неявно йдеться про деяку інваріантність фізичних законів, уточнимо, про яку саме. Часто говорять про *коваріантність* та *інваріантність* форми співвідношення. Закон природи, сформульований мовою векторів чи тензорів, буде коваріантним, якщо у новій системі координат x' матиме таку саму форму для перетворених змінних, хоча останні як функції координат будуть змінювати форму. Вимога коваріантності є суто математичною, оскільки самі аргументи перетворюються за тензорним законом, то і коректні співвідношення з ними також мають задовольняти такі закони перетворень. Метричний тензор, який фігурує у них, задовольняє закон перетворення тензора другого рангу. У випадку перетворень Лоренца крім загальної коваріантності рівнянь є додаткове обмеження — збереження функціонального вигляду метричного тензора, тобто інваріантність його форми, тобто вирази $\eta_{\mu\nu}(x)$ у старих координатах такі самі, як і вирази $\eta'_{\mu\nu}(x')$ у нових (єдина відмінність між ними у появі штрихів).

Таким чином, математичним формулюванням фізичного закону є коваріантний відносно перетворення Лоренца вираз (диференціальне рівняння чи просто співвідношення), ознакою того, що відповідне явище відбувається однаково у системах відліку S та S' є інваріантність форми метричного тензора. Сам метричний тензор у інерціальних системах відліку не зобов'язаний бути діагональним, оскільки допустимі довільні заміни координат у межах однієї системи відліку. ┘

6. ШВИДКІСТЬ ЧАСТИНКИ. У евклідовому просторі класичної механіки швидкість було означено як

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{або} \quad v_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

Геометрично ця величина описує, зокрема, вектор, який є дотичним до траєкторії частинки $\vec{r}(t)$ у даний момент часу. У результаті перетворення Галілея швидкості змінюються на величину швидкості системи відліку, але відносні швидкості (від яких залежать фізичні величини, що описують рух та взаємодію) залишаються інваріантними.

Розглянемо зв'язок тривимірних швидкостей у двох системах відліку, пов'язаних перетворенням Лоренца. Для спрощення вважатимемо, що система S' рухається відносно S зі швидкістю $\vec{V} = V\vec{e}_x$. Тоді:

$$\text{У системі } S: \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{у системі } S': \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}.$$

У явній формі, обчислюючи диференціали координат та часу, отримаємо:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + Vdt')}{\gamma(dt' + Vdx'/c^2)} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad (34.10)$$

аналогічно

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (34.11)$$

Розбиваючи швидкість частинки на поздовжню та поперечну складові відносно напрямку руху системи відліку та враховуючи, що у даних координатах $v'_x V$ збігається з $\vec{v}' \cdot \vec{V}$, отримаємо:

$$\vec{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma(\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}) + \vec{v}'_{\perp}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{v}' + (\gamma - 1)\vec{v}'_{\parallel} + \gamma\vec{V}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2}, \quad \vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{V}(\vec{v}' \cdot \vec{V})}{V^2}. \quad (34.12)$$

Перетворення (34.12) не зберігають відносні швидкості частинок але переходять до перетворення Галілея у випадку малих швидкостей частинок та системи координат (тобто $c \rightarrow \infty$).

Відмітимо, що формально закон перетворення швидкості узгоджений з твердженням про сталість швидкості світла в усіх інерціальних системах відліку. Дійсно, якщо у системі S має місце $|\vec{v}| = c$, то нескладно показати, що у системі S' буде $|\vec{v}'| = c$ і навпаки.

Задача 34.6. Нехай $\vec{v} = (\pm c, 0, 0)$ та $\vec{V} = (c, 0, 0)$. Якою буде швидкість \vec{v}' ?

З суто геометричного погляду у чотиривимірному просторі величини $\frac{dx^i}{dt}$ не є компонентами вектора. По-перше, через нестачу ще однієї компоненти, по-друге через особливість закону перетворення.

Таким чином тривимірне означення швидкості, яке береться з кривої у евклідовому просторі та параметру еволюції t (який не є скалярним) буде незручним для формулювання закону руху у теорії відносності у інваріантній формі, до якої мають входити скаляри, вектори тощо. Означення швидкості легко модифікувати так:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (34.13)$$

ця величина називається *чотиривимірною швидкістю частинки*. Очевидно, така величина є вектором, оскільки будується як частка вектора на скаляр. Параметром еволюції формально є власний час, який легко пов'язати з інтервалом згідно з означенням $ds = cd\tau$. Як і у тривимірному просторі, це альтернативний вибір параметра еволюції системи у вигляді довжини пройденого шляху, тільки тепер для чотиривимірної траєкторії.

Квадрат вектора u є сталим:

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{(ds)^2}{(d\tau)^2} = c^2.$$

а його компоненти є нелінійними функціями тривимірної швидкості:

$$\{u^\mu\} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right).$$

У випадку $c \rightarrow \infty$ просторові компоненти цього 4-вектора дають тривимірну швидкість, чого достатньо для відповідності цих величин.

Аналогічно можна означити 4-прискорення повторним диференціюванням по власному часу:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (34.14)$$

диференціюючи вираз $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$ отримаємо $\eta_{\mu\nu}u^\mu w^\nu = 0$.

ЛЕКЦІЯ 35

Релятивістська динаміка

1.	Побудова закону руху.....	531
2.	Функція Лагранжа для вільної частинки.	532
3.	Функція Гамільтона для вільної частинки.....	534
4.	Варіаційний принцип.	535
5.	Рівняння руху Пуанкаре.	539
6.	Взаємодія з електромагнітним полем.....	541
7.	Рівняння Гамільтона-Якобі.	546

1. ПОБУДОВА ЗАКОНУ РУХУ. Для побудови рівнянь руху для частинки у теорії відносності, на відміну від класичної механіки безпосередні експериментальні закони відсутні. Тому теорію доцільно будувати, керуючись найзагальнішим принципом класичної механіки — варіаційним принципом, до якого потрібно закласти дві загальнофізичні вимоги:

- *Принцип відносності:* усі механічні явища відбуваються однаково в інерціальних системах відліку, тому рівняння руху мають зберігати форму у результаті перетворень Лоренца. На рівні варіаційного принципу це означає, що функціонал дії має бути інваріантним відносно перетворень Лоренца (перетворюватись як скаляр). Властивості рівнянь руху, отриманих з варіаційного принципу за допомогою загальної процедури будуть виконуватись автоматично.
- *Принцип відповідності:* класична механіка є граничною формою релятивістської для випадку рухів з малими швидкостями. Рівняння руху та будь-які фізичні твердження мають переходити до відповідних тверджень класичної механіки у випадку малих швидкостей, оскільки у цій області закони класичної механіки справедливі з достатньою достовірністю.

У класичній механіці вся фізична інформація про систему зосереджена у функціоналі дії, який має вигляд інтегралу

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L dt$$

між двома фіксованими просторовими положеннями механічної системи у відомі моменти часу, на дійсних траєкторіях системи, що з'єднують ці просторово-часові точки, функціонал S набуває стаціонарного значення, це зручно записати у вигляді $\delta S = 0$.

Розглянемо випадок вільної частинки, для неї

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}.$$

Із закону перетворення швидкості випливає, що інтеграл дії з такою функцією Лагранжа є інваріантним відносно перетворень Галілея (з'являться позаінтегральні доданки, які можна відкинути) але не буде інваріантним відносно перетворень Лоренца. Тому у теорії відносності функціонал потрібно належним чином модифікувати, або одразу зконструювати з інваріантних величин, перевіривши у обох випадках виконання принципу відповідності.

2. ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВІЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ. Для вільної частинки єдиною інваріантною величиною є інтервал ds (та будь-які функції від нього), який характеризує переміщення частинки між близькими точками. У функціоналі дії як у однократному інтегралі має бути лише один символ диференціалу, тому з інтервалу можна побудувати тільки один функціонал, який з точністю до сталого множника задає довжину світової лінії, вздовж якої рухається частинка:

$$S = \alpha \int_{(1)}^{(2)} ds. \quad (35.1)$$

Варіаційний принцип означатиме стаціонарність довжини траєкторії частинки у 4-вимірному просторі. Керуючись означенням інтервалу, підінтегральний вираз можна виразити за допомогою тривимірних позначень:

$$S = \alpha \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2} dt.$$

Таким чином, з точністю до коефіцієнта функцію Лагранжа можна записати так:

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}.$$

Невідомий коефіцієнт можна визначити з нерелятивістського наближення великої швидкості світла:

$$L \simeq \alpha c \left(1 + \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2c^2} + \dots \right) = \alpha c - \frac{\alpha}{c} \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} + \dots$$

Порівнюючи з функцією Лагранжа вільної частинки у класичній механіці $L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}$ (ігноруючи несуттєвий для закону руху сталий доданок) знайдемо $\alpha = -mc$, звідки остаточно

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}. \quad (35.2)$$

Розглянемо стандартні для механіки Лагранжа вирази узагальненого імпульсу та енергії. За означенням

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}}, \quad (35.3)$$

на відміну від класичної механіки 3-вимірний імпульс є нелінійною функцією 3-вимірної швидкості, однак для $c \rightarrow \infty$ буде переходити у звичне означення $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$.

Для енергії матимемо:

$$\mathcal{E} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}}, \quad (35.4)$$

для $c \gg |\dot{\vec{r}}|$ матимемо $\mathcal{E} \simeq mc^2 + \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \dots$. На перший погляд здається, що наявність сталого доданку призводить до некоректного переходу до класичної механіки, оскільки для класичної вільної частинки повна енергія збігається з кінетичною і у випадку відсутності руху дорівнює нулю (на відміну від потенціальної, кінетична енергія не має довільного початку відліку). Однак іншого боку цей доданок жодним чином не порушує класичні закони збереження та перетворення енергії (оскільки маса частинки стала) і у всіх співвідношеннях буде зникати. Більш того, означення кінетичної та повної енергії давались аналізом співвідношень під диференціалами, і можливі сталі доданки у таких співвідношеннях просто не з'являлись. Тому новий сталий доданок у виразі для класичної енергії може мати важливий фізичний зміст і описує властивості речовини, які були повністю відсутні у класичній механіці.

Зауваження. Якщо рух частинки відсутній, то згідно з виразом (35.4)

$$E_0 = mc^2,$$

її Ейнштейн назвав *енергією спокою* частинки. Некласичні властивості енергії спокою з'являться, якщо розглядати частинки із внутрішньою структурою, тоді енергію спокою можна пов'язати із взаємодією складових частинки, яка дозволяє утримувати останню як єдине ціле. У такому розумінні маса може інтерпретуватись як енергетична характеристика. Якщо нерухома частинка маси m розпадається на дві незалежні частинки з масами m_1 та m_2 з іншим складом, то енергія спокою вихідної частинки розпадається на енергії спокою нових частинок (на утворення їх мас), на енергію можливого руху цих частинок і на можливий обмін енергією з оточуючим середовищем (виділення випромінювання або навпаки, його поглинання). Головне у тому, що сумарна маса нових частинок $m_1 + m_2$ не обов'язково складає m , частина енергії спокою (маси) може перейти у інші форми енергії, не обов'язково типові для речовин у формі матерії.

Такі взаємоперетворення різних форм матерії (речовини та поля) не можуть бути описані засобами класичної механіки. Більш того, згідно з принципом далекодії енергія спокою класичної частинки має бути взагалі нескінченною, що у даній інтерпретації свідчить про її принципову неподільність. Для реальних об'єктів, які лише за розмірами подібні до класичних матеріальних точок перетворення енергії, яку закладено у речовину (масу) у енергію поля цілком реальні. Типовим прикладом є процес вибуху атомної

бомби, або навіть звичайне непружне зіткнення частинок (виділення енергії за рахунок зміни мас).

З формули для імпульсу можна зробити висновок про доцільність введення позначення

$$m_* = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}},$$

таку величину називають релятивістською масою, що залежить від швидкості частинки. Тоді імпульс набуває звичної форми, а формула для енергії стає схожою на вираз для енергії спокою:

$$\vec{p} = m_* \dot{\vec{r}}, \quad \mathcal{E} = m_* c^2.$$

Масу m_* часто використовують для скорочення записів, однак самостійного фізичного змісту вона не має хоча б тому, що не є інваріантом відносно перетворень Лоренца (тобто у різних системах відліку маса m_* однієї й тієї самої частинки буде різною).

Зазначимо, що у теорії відносності часто зручніше користуватись імпульсом та енергією замість швидкості та маси. \perp

З явних виразів для енергії та імпульсу (по однакових знаменниках) легко бачити, що ці величини можна об'єднати у 4-вектор:

$$p^\mu = m u^\mu \quad (35.5)$$

у явному записі

$$\{p^\mu\} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}}, \frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}} \right) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right), \quad (35.6)$$

який називається *вектором енергії-імпульсу* (або 4-імпульсом). Як і 4-вектор швидкості, 4-імпульс має сталу довжину:

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = m^2 c^2.$$

3. Функція Гамільтона для вільної частинки. Для побудови функції Гамільтона виразимо швидкість через імпульс. Для цього попередньо перепишемо означення узагальненого імпульсу так:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}},$$

підносячи цей вираз до квадрату знайдемо $\dot{\vec{r}}^2$ і підставимо до попередньої формули:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}},$$

Тепер, згідно з означенням функції Гамільтона, отримаємо:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (35.7)$$

Для малих швидкостей

$$H \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

тобто, як і для енергії, класичний вираз доповнюється сталим доданком.

Зауваження. Структура функції Гамільтона (35.7) у теорії відносності передбачає ще одну властивість, якої не було у класичній механіці. Якщо покласти $m = 0$, то функція Лагранжа зникне (не може описувати частинку без маси), а функція Гамільтона набуде вигляду

$$H = c|\vec{p}|. \quad (35.8)$$

Для системи з такою функцією Гамільтона не можна побудувати функцію Лагранжа, оскільки з виразу для швидкості, який задає обернене перетворення Лежандра

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = c \frac{\vec{p}}{p}$$

не можна виразити імпульс. Очевидно, для такої системи $|\dot{\vec{r}}| = c$, тобто йдеться про об'єкт, що рухається зі швидкістю світла (власне, про світло). Аналіз світла з класичним розумінням імпульсу та швидкості не має сенсу, оскільки процес його поширення є хвильовим. Однак з іншою інтерпретацією вираз (35.8) цілком має сенс. Згідно з гіпотезою де Бройля хвилі з хвильовим вектором \vec{k} у деякому розумінні¹ можна поставити у відповідність частинку з імпульсом $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ (\hbar позначає сталу Планка), тоді враховуючи зв'язок частоти хвилі та хвильового вектора, отримаємо:

$$H = c|\vec{p}| = \hbar c|\vec{k}| = \hbar \omega, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

це відома формула Бора, яка пов'язує енергію фотона з його частотою.

Зауважимо, що функція Гамільтона $H = c|\vec{p}|$ також використовується як наближена для частинок, що рухаються з великими швидкостями ($p \gg mc$). \square

4. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП. Розглянемо процедуру пошуку для рівнянь руху для вільної за допомогою безпосереднього варіювання функціоналу дії

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds = -mc \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

без переходу до тривимірних позначень. Маємо:

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_{(1)}^{(2)} \delta \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}{2ds} = \left| \begin{array}{c} \text{симетрія} \\ \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} \end{array} \right| \\ &= -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu)}{ds} = -m \int_{(1)}^{(2)} \eta_{\mu\nu} u^\mu d(\delta x^\nu), \end{aligned}$$

¹ У якому саме є предметом вивчення квантової механіки.

де враховано синхронність варіацій та означення 4-швидкості. Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\delta S = -m\eta_{\mu\nu}u^\mu\delta x^\nu\Big|_{(1)}^{(2)} + m\int_{(1)}^{(2)}\eta_{\mu\nu}\delta x^\nu du^\mu.$$

Оскільки кінці траєкторії фіксовано, то $\delta x^\mu = 0$ в точках (1) та (2). Переходячи до власного часу як до параметра еволюції, отримаємо:

$$\delta S = m\int_{(1)}^{(2)}\eta_{\mu\nu}\delta x^\nu\frac{du^\mu}{d\tau}d\tau,$$

звідки в силу довільності варіацій δx^ν отримаємо рівняння руху

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = 0,$$

що означає, що для вільної частинки 4-прискорення дорівнює нулю.

Функціонал (4) не єдиний, який задовольняє принципи відносності та відповідності. Розглянемо інший функціонал дії, який максимально подібний до класичного:

$$S = -\frac{mc}{2}\int_{(1)}^{(2)}\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu d\tau \quad (35.9)$$

(з квадратом 4-швидкості). Легко показати, що його екстремалі такі самі, як і для (4). Його відмінність у тому, що параметр еволюції у інтегралі обов'язково має бути власним часом, тоді як для (4) змінну інтегрування можна вибрати довільною.

Повний функціонал дії для частинки у зовнішньому полі матиме вигляд

$$S = -mc\int_{(1)}^{(2)} ds + S_{int},$$

де S_{int} позначає частину функціоналу, яка відповідає за взаємодію з полем. Найпростішим є випадок потенціальної взаємодії.

Приклад 1. Знайти закон руху частинки у потенціалі Кулона.

◀ Функція Лагранжа має вигляд:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2} - \frac{\alpha}{|\vec{r}|}.$$

У даній задачі доцільно перейти до циліндричних координат. Замінюючи квадрат швидкості та відстань до початку координат відповідними виразами, отримаємо:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Координата φ є циклічною, рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} : \frac{d}{dt} \left[\frac{m\dot{r}}{\sqrt{(\dots)}} \right] = \frac{mr\dot{\varphi}^2}{\sqrt{(\dots)}} + \frac{\alpha r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} : \frac{d}{dt} \left[\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{(\dots)}} \right] = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \frac{\partial L}{\partial z} : \frac{d}{dt} \left[\frac{m\dot{z}}{\sqrt{(\dots)}} \right] = \frac{\alpha z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

тут для скорочення запису підкореневий вираз з швидкостями позначено (\dots) . З другого рівняння видно, що зберігатиметься узагальнений імпульс $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$. Останнє рівняння допускає тривіальний розв'язок $z = 0$, це означає, що систему координат можна вибрати так, щоб рух відбувався у площині (xy) . Таким чином, з трьох рівнянь залишиться одне диференціальне рівняння та закон збереження:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m\dot{r}}{\sqrt{(\dots)}} \right] = \frac{mr\dot{\varphi}^2}{\sqrt{(\dots)}} + \frac{\alpha}{r^2}, \quad p_\varphi = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{(\dots)}}, \quad \text{де } (\dots) = 1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{c^2}.$$

Оскільки функція Лагранжа явно не залежить від часу, то має місце закон збереження енергії²:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{(\dots)}} + \frac{\alpha}{r}.$$

Оскільки на дві ступені вільності (r, φ) є два закони збереження, то дану задачу можна розв'язати у квадратурах. У даному контексті законом збереження енергії доцільно скористатись, щоб виразити всю комбінацію з швидкостями (\dots) через координати,

$$\frac{1}{\sqrt{(\dots)}} = \frac{1}{mc^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right).$$

Обмежимося пошуком траєкторії руху частинки. Для цього у рівнянні руху для r перейдемо від диференціювання по часу до диференціювання по φ за правилом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \left| \begin{array}{l} \text{використаємо} \\ \text{з-н збереження} \end{array} \right| = \frac{p_\varphi}{mr^2} \sqrt{(\dots)} \frac{d}{d\varphi}.$$

Тоді

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{\sqrt{(\dots)}} \frac{d}{dt} r \right] = \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \sqrt{(\dots)} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) = -\frac{p_\varphi^2}{mr^2} \sqrt{(\dots)} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Таким чином, доданок зі старшою похідною суттєво спроститься, якщо перейти до функції $u = \frac{1}{r}$. Позбавляючись від комбінації (\dots) швидкості $\dot{\varphi}$ у правій частині рівняння за допомогою законів збереження, отримаємо рівняння траєкторії для функції u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2 p_\varphi^2} \right) u = -\frac{\alpha \mathcal{E}}{c^2 p_\varphi^2}$$

² З виразу для енергії видно, що провести якісний аналіз руху за рахунок відокремлення кінетичної енергії радіального руху у теорії відносності не можна, оскільки ефективний потенціал не виділяється.

Це рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке легко розв'язати. Одну зі сталих інтегрування можна визначити потім з формули для енергії.

Можна поступити інакше, як у задачі про рух у центральному полі: у виразі для закону збереження енергії відокремити доданок з \dot{r} і замінити похідну у ньому, а $\dot{\varphi}$ підставити із закону збереження. Тоді

$$\frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2 c^4}{(\mathcal{E} - \alpha/r)^2}$$

звідки після вказаних перетворень отримаємо:

$$\frac{r'^2 + r^2}{r^4} = \frac{(\mathcal{E} - \alpha/r)^2 - m^2 c^4}{c^2 p_\varphi^2},$$

тут штрих означає похідну по φ . Як і для диференціального рівняння, тут доцільно перейти до функції u , тоді квадратуру легко записати:

$$u'^2 + u^2 = \frac{(\mathcal{E} - \alpha u)^2 - m^2 c^4}{c^2 p_\varphi^2} \Leftrightarrow \varphi - \varphi_0 = c p_\varphi \int \frac{du}{\sqrt{(\mathcal{E} - \alpha u)^2 - m^2 c^4 - c^2 p_\varphi^2 u^2}}.$$

Після перегрупування доданків у підкореневому виразі маємо:

$$\varphi - \varphi_0 = c p_\varphi \int \frac{du}{\sqrt{(\alpha^2 - c^2 p_\varphi^2) u^2 - 2\alpha \mathcal{E} u + (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4)}}.$$

Такий інтеграл обчислюється стандартною процедурою виділення повного квадрату, однак на відміну від аналогічного перетворення у класичній механіці результат залежить від знаку коефіцієнту при старшій степені. Тому розглянемо окремі випадок $\alpha^2 - c^2 p_\varphi^2 < 0$. Виносимо коефіцієнт та виділяємо повний квадрат, вводячи позначення:

$$\gamma = \frac{\sqrt{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}}{c p_\varphi}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{m^2 c^4}{\mathcal{E}^2}\right), \quad p = \frac{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}{|\alpha| \mathcal{E}}$$

тоді

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\gamma} \int \frac{du}{\sqrt{\varepsilon^2/p^2 - [u + (\text{sign} \alpha)/p]^2}} = -\frac{1}{\gamma} \arccos \frac{pu + \text{sign} \alpha}{\varepsilon},$$

Інтеграл матиме сенс, якщо $\varepsilon^2 > 0$, що дає обмеження на енергію частинки:

$$\mathcal{E}^2 > \frac{m^2 c^4}{1 + \alpha^2/(\gamma^2 c^2 p_\varphi^2)} \equiv \gamma^2 m^2 c^4 \Rightarrow |\mathcal{E}| > \gamma m c^2$$

енергія може бути меншою за енергію спокою частинки (оскільки у даному випадку виконується $\gamma < 1$). У випадку досягнення рівності $|\mathcal{E}| = \gamma m c^2$ буде $\varepsilon = 0$.

Остаточно, повертаючись до змінної r , отримаємо:

$$r = \frac{p}{-\text{sign} \alpha + \varepsilon \cos \gamma(\varphi - \varphi_0)}.$$

Цей вираз подібний до класичного, але з суттєвою відмінністю: період r по змінній φ може бути неспіврозмірним з 2π . Крім того, значення ε може бути довільним. Якщо $\varepsilon < 1$ то

траєкторія фінітна, але у загальному випадку незамкнена. Для $\varepsilon \geq 1$ траєкторія буде інфінітною. Пошук умов замкненості та асимптот пропонується як вправа.

У класичному наближенні малих швидкостей та енергій можна вважати c великою величиною, при цьому стала p_φ збігатиметься з моментом імпульсу L , а енергію можна записати як $\mathcal{E} = E + mc^2$, причому класична енергія руху $|E| \ll mc^2$:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 p_\varphi^2}} \simeq 1, \quad p = \frac{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}{|\alpha| \mathcal{E}} = \frac{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}{|\alpha| (mc^2 + E)} \simeq \frac{L^2}{m|\alpha|}$$

і, нарешті

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \cdot \frac{(\mathcal{E} + mc^2)(\mathcal{E} - mc^2)}{m^2 c^4} \simeq 1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2},$$

що відповідає класичним виразам. Значення енергії може мати довільний знак, це легко помітити для ситуації руху по колу з $\varepsilon = 0$. Енергія задовольняє умову:

$$|\mathcal{E}| = \gamma mc^2 \Rightarrow E = (\gamma - 1)mc^2 = mc^2 \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 p_\varphi^2}} - 1 \right) \simeq -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$$

(як і має бути). Для більших значень енергій тому рух може бути як фінітним, так і інфінітним.

В ультрарелятивістському випадку великих енергій $\mathcal{E} \gg mc^2$, тоді для параметру ε матимемо

$$\varepsilon^2 \simeq 1 + \frac{c^2 p_\varphi^2 - \alpha^2}{\alpha^2} = \frac{c^2 p_\varphi^2}{\alpha^2} > 1$$

що означає незамкненість траєкторії (нею буде крива, схожа на гіперболу).

Аналіз випадків $\alpha^2 - c^2 p_\varphi^2 = 0$ та $\alpha^2 - c^2 p_\varphi^2 > 0$ пропонується як вправа для читача. У обох ситуаціях корисно дослідити падіння частинки у центр поля (у класичній механіці воно не реалізується за винятком випадку $\alpha < 0$ та $L = 0$), розглянути граничні переходи до класичного та ультрарелятивістського рухів. ►

5. РІВНЯННЯ РУХУ ПУАНКАРЕ. У теорії відносності первинним об'єктом є варіаційний принцип, з якого випливають рівняння руху і інші властивості системи. Незважаючи на це, для кращого розуміння відмінностей між класичною та релятивістською векторними теоріями розглянемо аналогі класичних понять імпульсу, прискорення та сили у релятивістській механіці. Якщо частинка перебуває у зовнішньому полі, то рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}},$$

де \vec{p} позначає 3-вимірний релятивістський імпульс (35.3). Така форма запису закону руху подібна до другого закону Ньютона, тому праву частину рівнянь Лагранжа природно ототожнити з силою \vec{F} , що діє на частинку, тоді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{рівняння Пуанкаре}).$$

Безпосередній зв'язок сили з тривимірним прискоренням досить складний і суттєво залежить від швидкості, явне диференціювання імпульсу дає:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\dot{\vec{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{\vec{v}(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v})}{c^2}. \quad (35.10)$$

Перегруповуючи доданки, отримаємо інший вираз

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\dot{\vec{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} + \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})}{c^2}, \quad (35.11)$$

Розглянемо прості частинні випадки руху. З виразу (35.10) видно, що коли швидкість частинки змінюється тільки за напрямком, то $\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \text{const}$ і $\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 0$, тоді

$$\vec{F} = \frac{m\dot{\vec{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad \vec{F} \perp \vec{v}.$$

Якщо у швидкості змінюється тільки значення, то $\vec{v} \times \dot{\vec{v}} = 0$ і з (35.11) випливає, що

$$\vec{F} = \frac{m\dot{\vec{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad \vec{F} \parallel \vec{v}.$$

Таким чином, у теорії відносності не можна говорити про пропорційність прискорення до прикладеної сили, користуючись 3-вимірними уявленнями.

Зауваження. Коефіцієнти при прискоренні у цих граничних випадках часто позначають

$$m_l = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \quad m_t = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

і називають *поздовжньою* та *поперечною* масами відповідно. Як і маса, що залежить від швидкості, ці величини самостійного фізичного змісту не мають і використовуються з міркувань зручності у громіздких виразах. \square

За аналогією з означенням 4-швидкості модна означити 4-силу так:

$$G^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau},$$

оскільки $u^\mu u_\mu = \text{const}$, то $u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = 0$ і відповідно $u_\mu G^\mu = 0$. Виконуючи диференціювання 4-імпульсу, можна виразити 4-силу через 3-вимірну силу. Для часової компоненти:

$$G^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \left[\frac{mc}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \frac{1}{c} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}},$$

з виразу (35.11) випливає, що останній множник збігається з $\vec{F} \cdot \vec{v}$. Для просторових компонент результат можна записати одразу, тому остаточно матимемо:

$$\{G^\mu\} = \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right),$$

часова компонента пов'язана з потужністю, а просторові — безпосередньо з силою.

Зауваження. Аналізуючи закон перетворення 4-вектора G^μ можна отримати зв'язок між 3-вимірними силами у різних системах відліку:

$$\vec{F} = \frac{1}{\gamma} \vec{F}' + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\vec{V}(\vec{F}' \cdot \vec{V})}{V^2}, \quad \vec{F}' = \gamma \vec{F} + (1 - \gamma) \frac{\vec{V}(\vec{F} \cdot \vec{V})}{V^2},$$

ці вирази навіть не симетричні відносно заміни $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$. ┘

6. Взаємодія з електромагнітним полем. Як відомо з електродинаміки, рівняння Максвелла є інваріантними відносно перетворення Лоренца (одна з причин у тому, що вони допускають поширення хвиль). У явній 4-вимірній формі їх можна записати, якщо поля об'єднати у 4-вимірний антисиметричний тензор електромагнітного поля:

$$\{F^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & H_x \\ E_z & -H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді рівняння електромагнітного поля без джерел у правих частинах матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0$$

і для рівнянь з джерелами поля

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

де $\{j^\mu\} = (c\rho, \vec{j})$ описує джерела поля і називається 4-вектором струму.

Як і у 3-вимірній теорії, зручно використовувати потенціали для опису полів. У теорії відносності скалярний та векторний потенціали є компонентами 4-вектора

$$\{A^\mu\} = (\varphi, \vec{A})$$

а тензор електромагнітного поля виражається через них подібно до компонент ротора:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Інваріантність законів електродинаміки відносно заміни інерціальної системи відліку дозволила Пуанкаре узагальнити принцип відносності Галілея і поширити його на всі фізичні явища.

Зауваження. Закони перетворення полів можна знайти, аналізуючи закон перетворення тензора $F'^{\mu\nu} = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}\vec{E}_\parallel &= \vec{E}'_\parallel, & \vec{E}_\perp &= \gamma \left(\vec{E}'_\perp - \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}' \right) \\ \vec{H}_\parallel &= \vec{H}'_\parallel, & \vec{H}_\perp &= \gamma \left(\vec{H}'_\perp + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{E}' \right)\end{aligned}$$

(поздовжня компонента поля не перетворюється). Закон перетворення електромагнітного поля свідчить про те, що поділ полів на електричне та магнітне є умовним. Оскільки вони перетворюються разом при переході до іншої системи відліку, то фактично описують цілісне явище. Навіть якщо існує система відліку, у якій є тільки електричне поле, а магнітне поле відсутнє, у довільній іншій системі відліку воно обов'язково з'явиться. \perp

Детально про основні властивості електромагнітного поля та основи релятивістської електродинаміки можна знайти у довільному підручнику класичної електродинаміки (див., наприклад [6], [36], [37]). У зв'язку з класичною механікою найцікавішим є форма запису основних співвідношень, які характеризують взаємодію частинки з електромагнітним полем у релятивістському випадку та основні особливості її руху.

У класичній механіці частина функції Лагранжа, що відповідає за взаємодію з електромагнітним полем мала вигляд (див. лекцію 11):

$$L_{int} = -e\varphi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t).$$

Розглянемо підінтегральний вираз разом з диференціалом у функціоналі дії і спробуємо виразити його через 4-вимірні величини:

$$L_{int} dt = -e\varphi dt + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{r} = -\frac{e}{c} A_0 dx^0 - \frac{e}{c} A_i dx^i = -\frac{e}{c} A_\mu dx^\mu.$$

Таким чином, класичний вираз для функції Лагранжа взаємодії з електромагнітним полем задовольняє умові логренц-інваріантності, оскільки зводиться до скалярного добутку. Таким чином, інтеграл дії, що описує рух частинки у електромагнітному полі має вигляд:

$$S = - \int_{(1)}^{(2)} \left(mc ds + \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right), \quad (35.12)$$

параметр еволюції можна вибрати довільним чином, для звичайного методу Лагранжа зручно взяти координатний час. У тривимірній формі рівняння руху можна отримати з функції Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2} - e\varphi + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}.$$

Узагальнений імпульс:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A},$$

звідки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = -e \vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e}_i,$$

оскільки

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \vec{e}_i$$

то рівняння руху можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \dot{x}_j (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) \vec{e}_i,$$

комбінацію у останньому доданку легко перетворити за допомогою символу Леві-Чивіта:

$$(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) \vec{e}_i = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abk} \nabla_a A_b \vec{e}_i = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \vec{e}_i = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}),$$

тому остаточно

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left(\vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

У останніх двох доданках утворюються електричне та магнітне поля за означенням, тому права частина рівності має вигляд звичайної сили Лоренца:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{H}. \quad (35.13)$$

З проміжного виразу для узагальненого імпульсу можна отримати вираз для швидкості частинки та побудувати функцію Гамільтона:

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e \varphi, \quad (35.14)$$

де $\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$ позначає узагальнений імпульс частинки, отриманий за означенням.

Задача 35.1. Побудувати функцію Гамільтона (35.14) та отримати з неї рівняння руху (35.13).

Зауваження. У лоренц-інваріантній формі рівняння руху можна записати за допомогою варіаційного принципу. Розглянемо варіацію функціоналу дії (35.12):

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left(mc \delta ds + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu + \frac{e}{c} A_\mu \delta dx^\mu \right).$$

Варіацію першого доданку було знайдено раніше, тому

$$\delta S = - \int_{(1)}^{(2)} \left[\left(m u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta dx^\mu + \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right].$$

Використовуючи умову синхронності $\delta dx^\mu = d\delta x^\mu$ та інтегруючи частинами перший доданок, матимемо:

$$\delta S = -\left(mu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right) \delta x^\mu \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \left[\left(m du_\mu + \frac{e}{c} dA_\mu\right) \delta x^\mu - \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right].$$

Використовуючи вираз $\delta A_\mu = \delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu$, перейдемо у підінтегральному виразі до інтегрування по власного часу:

$$\delta S = -\left(mu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right) \delta x^\mu \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \left[m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{e}{c} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) u^\nu \right] \delta x^\mu d\tau,$$

у дужках виділяється тензор електромагнітного поля $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. Використовуючи фіксованість точок (1) та (2) та довільність варіацій δx^μ , отримаємо:

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu.$$

Вираз у правій частині можна розуміти як узагальнену силу. У тривимірному записі просторова частина цих рівнянь збігається з (35.13), а часова частина має вигляд

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}$$

і виражає закон зміни енергії частинки (магнітне поле у правій частині відсутнє, оскільки не виконує роботи). \square

Розглянемо прості випадки руху частинки у сталому електромагнітному полі.

Приклад 2. Знайти закон руху частинки у сталому електричному полі.

◀ Виберемо систему координат так, щоб поле було напрямлене вздовж осі x . Нехай у початковий момент часу частинка перебувала у початку координат, також вважатимемо, що вектор початкової швидкості належить площині xy , саме в ній і відбуватиметься рух. Тоді 3-вимірні у 3-вимірному записі матимемо:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = eE, \\ \dot{p}_y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_x = eEt + p_{0x}, \\ p_y = p_{0y}. \end{cases}$$

Відносно швидкостей це нелінійна система рівнянь, однак через незалежність правих частин рівнянь від координат розв'язок можна знайти з простих міркувань. З обох рівняння можна явно виразити швидкості через праві частини та релятивістський множник:

$$\dot{x} = \frac{eEt + p_{0x}}{m} \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/c^2}, \quad \dot{y} = \frac{p_{0y}}{m} \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/c^2}.$$

З іншого боку, згідно з отриманими розв'язками для імпульсів

$$p_x^2 + p_y^2 = \frac{m^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/c^2} = (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2,$$

тому суму квадратів швидкостей можна виразити як явну функцію часу. Функція, що потрібна для продовження розв'язку має вигляд³:

$$\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2}}.$$

Для залежності $x(t)$ матимемо:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= c \int \frac{(eEt + p_{0x})dt}{\sqrt{m^2c^2 + (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{заміна:} \\ \xi = eEt + p_{0x} \end{array} \right| \\ &= \frac{c}{eE} \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}} = \frac{c}{eE} \sqrt{\xi^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2} \equiv \frac{c}{eE} \sqrt{m^2c^2 + (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2}. \end{aligned}$$

Стала інтегрування x_0 не є початковою координатою $x(0) = 0$, її можна знайти підстановкою $t = 0$ до розв'язку. Остаточно маємо:

$$x(t) = \frac{c}{eE} \left[\sqrt{m^2c^2 + (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2} - \sqrt{m^2c^2 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2} \right].$$

Аналогічно для функції $y(t)$:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= cp_{0y} \int \frac{dt}{\sqrt{m^2c^2 + (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{заміна:} \\ \xi = eEt + p_{0x} \end{array} \right| \\ &= \frac{cp_{0y}}{eE} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}} = \frac{cp_{0y}}{eE} \operatorname{arsh} \frac{\xi}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}} \equiv \frac{cp_{0y}}{eE} \operatorname{arsh} \frac{eEt + p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}}. \end{aligned}$$

Після підстановки початкової умови:

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE} \left[\operatorname{arsh} \frac{eEt + p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}} - \operatorname{arsh} \frac{p_{0x}}{\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2}} \right].$$

Рівняння траєкторії можна побудувати, якщо знайти $t(y)$ (для скорочення запису відновимо позначення x_0 та y_0):

$$t = \frac{1}{eE} \left[\sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2} \operatorname{sh} \left(\frac{eE}{cp_{0y}} (y - y_0) \right) - p_{0x} \right]$$

та підставити до $x(t)$, у результаті отримаємо

$$x - x_0 = \frac{c}{eE} \sqrt{m^2c^2 + p_{0y}^2} \operatorname{ch} \left[\frac{eE}{cp_{0y}} (y - y_0) \right]$$

³ Той самий результат випливає з двох виразів для кінетичної енергії:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2},$$

до правої частини потрібно підставити розв'язки.

(початковий імпульс p_{0x} не знак, від нього залежать комбінації x_0 та y_0). Таким чином, у загальному випадку частинка рухається по ланцюговій лінії у площині xy .

У класичному випадку великих значень c розв'язки мають вигляд:

$$x(t) \simeq \frac{p_{0x}}{m} t + \frac{eE}{2m} t^2, \quad y(t) \simeq \frac{p_{0y}}{m} t$$

(за формулою Тейлора, для $y(t)$ функцію arsh потрібно записати через логарифм). Траєкторією буде парабола.

В ультрарелятивістському випадку матимемо:

$$x(t) \simeq \frac{cp_{0x}}{eE} \ln \frac{2eEt}{mc}, \quad y(t) \simeq ct,$$

траєкторією буде логарифмічна крива.

Якщо $t \rightarrow \infty$, то для класичного руху швидкість стає нескінченною. У загальному випадку це не так. Дійсно, за допомогою одного з проміжних результатів можна знайти модуль швидкості:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = c \sqrt{\frac{(eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2}{m^2 c^2 + (eEt + p_{0x})^2 + p_{0y}^2}},$$

тому при $t \rightarrow \infty$ буде $v \rightarrow c$. ►

Приклад 3. Знайти закон руху частинки у сталому магнітному полі.

◀ Нехай магнітне поле напрямлене вздовж осі z . Виберемо систему координат так, щоб у початковий момент часу частинка перебувала у початку координат, а початкова швидкість належала площині xy . Тоді рівняння руху мають вигляд (рух відбувається у площині xy):

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} H \dot{y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{e}{c} H \dot{x}.$$

У даній задачі доцільно скористатись законом збереження енергії (магнітне поле не виконує роботи). Тоді, оскільки $\mathcal{E} = \text{const}$ можна імпульс виразити через швидкість зі сталим коефіцієнтом:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}$$

і записати рівняння руху в термінах швидкостей:

$$\dot{v}_x = \frac{ec}{\mathcal{E}} H \dot{y}, \quad \dot{v}_y = -\frac{ec}{\mathcal{E}} H \dot{x}.$$

Переходячи до координат та означаючи частоту Лармора $\omega_H = \frac{ecH}{\mathcal{E}}$ отримаємо рівняння

$$\dot{v}_x = \omega_H \dot{y}, \quad \dot{v}_y = -\omega_H \dot{x}$$

які повністю ідентичні до класичних (див. приклад 2). Для малих швидкостей можна вважати $\mathcal{E} \simeq mc^2$ і частота Лармора збігатиметься з класичним виразом. ►

7. Рівняння Гамільтона-Якобі. Оскільки у релятивістському випадку можна скористатись методом Гамільтона, то у деяких задачах може бути ефективним найзагальніший метод класичної механіки — метод Гамільтона-Якобі.

Його загальна схема переноситься у теорію відносності без жодних модифікацій, зміниться лише структура рівняння Гамільтона-Якобі, яка визначається формою функції Гамільтона.

Для частинки у електромагнітному полі функція Гамільтона має вигляд (35.14). Задача зводиться до пошуку твірної функції канонічного перетворення $S(\vec{r}, t)$, яка робить гамільтоніан циклічним по всіх змінних. Для (35.14) функція S задовольняє рівняння, яке будується з функції Гамільтона заміною узагальненого імпульсу на $\vec{\nabla}S$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{r}, \vec{\nabla}S, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{\nabla}S + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi = 0.$$

Після того, як повний інтеграл знайдено, сталі інтегрування $\vec{\alpha}$ ототожнюються з новими координатами (сталими), а нові імпульси (сталі) задовольняють співвідношення

$$\beta_i = -\frac{\partial S(\vec{r}, \vec{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i}.$$

Оскільки набори сталих $\vec{\alpha}$ та $\vec{\beta}$ фактично еквівалентні до початкових умов, то з цих співвідношень можна повністю визначити залежності координат від часу.

Приклад 4. Знайти закон руху частинки у потенціалі Кулона методом Гамільтона-Якобі.

◀ Функція Гамільтона має вигляд:

$$H = c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} + \frac{\alpha}{|\vec{r}|}.$$

Розглянемо для спрощення рух у площині xy , тоді після переходу до полярних координат запишемо рівняння Гамільтона-Якобі:

$$H = c\sqrt{m^2 c^2 + p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2} + \frac{\alpha}{r}. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2} + \frac{\alpha}{r} = 0,$$

або

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Оскільки координата φ циклічна, то функція S буде залежати від неї лінійно, тому як і для класичної механіки розв'язок можна записати у вигляді

$$S = -\mathcal{E}t + p_\varphi \varphi + W(r),$$

де \mathcal{E} та p_φ позначають сталі відокремлення (позначення збігається з їх фізичним змістом). Після підстановки отримаємо рівняння на W :

$$\left(\frac{dW}{dr} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - m^2 c^2,$$

яке легко розв'язати у квадратурах, тому

$$S = -\mathcal{E}t + p_\varphi \varphi + \int \left[\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - m^2 c^2 \right]^{1/2} dr.$$

Стали, які за змістом є формальними новими імпульсами задовольняють умови:

$$\beta_{\mathcal{E}} = -\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}, \quad \beta_{\varphi} = -\frac{\partial S}{\partial p_{\varphi}}.$$

До останнього співвідношення не входить час, тому з нього випливатиме вираз для траєкторії. У явній формі:

$$\beta_{\varphi} = \varphi + \int \frac{p_{\varphi}}{r^2} \frac{dr}{\left[\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} - m^2 c^2 \right]^{1/2}}$$

або, після заміни $u = \frac{1}{r}$:

$$\varphi - \beta_{\varphi} = c p_{\varphi} \int \frac{du}{[(\mathcal{E} - \alpha u)^2 - p_{\varphi}^2 c^2 u^2 - m^2 c^4]^{1/2}}.$$

Цей інтеграл збігається з аналогічним інтегралом з прикладу 1, тому подальший аналіз аналогічний (із заміною β_{φ} на φ_0). ►

ЛЕКЦІЯ 36

Поля

1.	Поняття поля.	549
2.	Варіаційний принцип.	550
3.	Загальна форма першої варіації та теорема Нетер.	552
4.	Просторові перетворення. Типи полів.	555
5.	Внутрішні перетворення.	557
6.	Приклади полів у методі Лагранжа.	558
7.	Формалізм Гамільтона.	560

1. Поняття поля. Теорія поля у математичному розумінні виникла з механічного континуального переходу, де поле розумілось як неперервно розподілена у просторі характеристика механічної системи, характерною особливістю поля є його хвильова природа. Фізичні передумови подальшого розвитку теорії поля пов'язані з електромагнітною взаємодією, електричне та магнітне поля були введені для опису взаємодії заряджених матеріальних об'єктів на відстані: поле ними породжується, заповнює простір і переносить взаємодію. За рахунок неперервно розподіленого електромагнітного поля вдалось уникнути негативних наслідків класичного принципу далекодії, оскільки реально взаємодії поширюються зі скінченною (хоч і великою) швидкістю. Електромагнітне поле не є спостережуваним саме по собі, його можна вимірювати по дії на інші об'єкти. З квантової теорії електромагнітного поля було отримано, що воно може існувати у порожньому просторі, без джерел, що його мали б породжувати (як вимагає класична теорія).

З подальшим розвитком фізичних уявлень виявилось, що електромагнітне поле окрім властивостей, характерних для хвиль має додаткові властивості, подібні до властивостей частинок, які називаються фотонами. Таке спостереження має і зворотний бік: у частинок є властивості, типові до властивостей хвиль, які описуються полями. У сучасній теорії побудовано моделі для великої кількості елементарних частинок та виконано багато експериментів по їх спостереженню. Виявилось, що багато з них має виражені хвильові властивості і відповідає за утворення деяких типів взаємодій. Найзручнішим у такій ситуації (навіть на класичному рівні) є опис таких частинок за допомогою методів теорії поля. Польові функції можуть мати складну природу і включати інформацію про деякі властивості частинки, експериментально такі поля досліджуються не безпосередньо, а по дії на інші матеріальні системи.

Для більшості полів закон руху можна сформулювати на основі варіаційного принципу, який аналогічний до класичного. У теорії поля функціонал дії є основ-

ним поняттям, з якого випливають рівняння руху і загальні фізичні властивості системи.

Якщо розглядати поле φ у вільному просторі і не враховувати зовнішніх факторів (які вносять до функціоналу дії залежність від координат та часу), то функціонал дії у чотиривимірних позначеннях можна записати так:

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi), \quad d^4x = dt dV, \quad (36.1)$$

інтегрування відбувається у 4-вимірній області Ω , яку обмежують дві просторово-подібні поверхні $\sigma_{1,2}$, у самих поширених випадках лагранжиан не залежить від других та вищих похідних поля. Весь набір змінних (t, \vec{r}) у аргументах функцій позначатимемо просто x . Взагалі кажучи, поле може описуватись кількома компонентами, які позначатимемо латинськими індексами a, b, \dots (початку алфавіту). У більшості перетворень для спрощення розглядатимемо однокомпонентне поле.

Функціонал дії та варіаційний принцип є загальною математичною конструкцією для дослідження властивостей системи, яка не залежить від типу поля та структури функції Лагранжа. Саму функцію Лагранжа, що описує конкретну систему не можна зафіксувати математичними процедурами, її доводиться будувати, керуючись загальними фізичними міркуваннями. Досить часто можна знайти кілька лагранжианів які правдоподібно описують поле, хоча до фізичної реальності має стосунок лише один. Висновки, які буде отримано з аналізу дії мають узгоджуватись з експериментом.

Загальні вимоги до функціоналу дії:

- функціонал дії має бути інваріантним відносно просторово-часових перетворень групи Пуанкаре (згідно з принципом Пуанкаре);
- функціонал дії має бути дійсним, щоб коректно описувати відомі фізичні процеси;
- лагранжиан залежить від полів та їх перших похідних у одній просторово-часовій точці (вимога локальності, яку можна зняти, ознак отримати значно складнішу теорію); лагранжиан явно не залежить
- лагранжиан не залежить других та вищих похідних полів, це дає рівняння поля другого порядку (порушення такої вимоги призводить до законів зміни поля з неправильними причинними зв'язками);
- лагранжиан явно не залежить від координат та часу (інакше порушуватиметься вимога однорідності простору та часу).

Інші вимоги, якими можна керуватись під час побудови функції \mathcal{L} залежать від специфіки системи. Найефективнішим є аналіз симетрій системи, які, згідно з теоремою Нетер, повинен задовольняти функціонал дії. Досить часто у поля є додаткові ступені вільності, або характеристики (наприклад, заряд), які які відповідають специфічним правилам перетворення (відносно яких функціонал дії має бути інваріантним) або законам збереження (які мають забезпечуватись рівняннями руху).

2. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП. Для звичайних варіацій форми поля $\delta\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x)$, які комутують з операторами диференціювання, матимемо варіацію функціоналу дії:

$$\begin{aligned}\delta S[\varphi] &= \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi} \delta \partial_{\mu} \varphi \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \right) \delta\varphi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \delta\varphi \right) \right],\end{aligned}$$

де вважається, що границі області не варіюються. За допомогою інтегрування частинами у виразі для повної похідної можна записати:

$$\delta S[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \right) \delta\varphi + \left(\int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_1} \right) d\sigma n_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \delta\varphi$$

де $d\sigma$ позначає елементи площі на поверхнях $\sigma_{1,2}$, а n_{μ} — напрямок векторі нормалі (у найпростішому випадку це можуть бути поверхні $t = t_{1,2}$, тоді елементом площі буде звичайний об'єм $d\sigma = dV$ і $n_{\mu} = \delta_{\mu}^0$).

Аналогічно до механічного варіаційного принципу можна вважати, що для реальної еволюції поля¹ функціонал дії набуває стаціонарного значення, якщо варіації поля на границях області дорівнюють нулю, тобто $\delta\varphi(x)|_{x \in \sigma_{1,2}} = 0$. Тоду у виразі для δS позаінтегральний доданок зникатиме, а з умови стаціонарності $\delta S = 0$ та довільності варіацій $\delta\varphi$ випливатимуть рівняння руху:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} = 0. \quad (36.2)$$

Це рівняння у частинних похідних є аналогом рівнянь Лагранжа і за формою точно збігається з рівняннями для неперервних середовищ (які, однак, вважались тривимірними просторово з окремою часовою координатою). У випадку багатокomпонентного поля φ^a результат аналогічний:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^a)} = 0. \quad (36.3)$$

тобто для всіх компонент, незалежно від їх природи рівняння поля однакові. Легко бачити, що рівняння руху зберігають форму у результаті переходу до іншої інерціальної системи відліку, оскільки у нових координатах $\partial'_{\mu} = L_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}$.

Зауваження. У теорії поля часто вводять функціональну похідну дії по польовій змінній

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)}$$

за аналогією з класичною механікою. ┘

¹ Зміна поля може не відповідати руху, тому аналог механічного руху як зміни величин, що характеризують систему називатимемо “еволюцією”.

Як і для механіки частинок, рівняння руху не зміняться у результаті додавання до лагранжиану похідної довільної функції поля:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{\delta S'}{\delta \varphi}.$$

Сам функціонал дії змінюватиметься лише на поверхневий доданок, варіація якого дорівнює нулю (за умови, що варіації поля дорівнюють нулю на поверхні, що обмежують область інтегрування).

3. ЗАГАЛЬНА ФОРМА ПЕРШОЇ ВАРІАЦІЇ ТА ТЕОРЕМА НЕТЕР. Розглянемо варіацію поля, яка відповідає як зміні функції, так і її аргументів:

$$\Delta \varphi = \varphi'(x') - \varphi(x),$$

так само, як і для механіки частинок означимо варіацію тільки форми функції (варіацію Лі):

$$\delta \varphi = \varphi'(x) - \varphi(x).$$

Побудуємо загальну форму першої варіації, дотримуючись тієї самої процедури, що у механіці Лагранжа для системи частинок. Введемо позначення для зміщень координат та часу:

$$\Delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu.$$

Перш ніж розглядати варіацію функціоналу дії, встановимо зв'язки між повною варіацією та варіацією форми у першому порядку по малих величинах:

$$\Delta \varphi = \varphi'(x) + \Delta x^\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial x^\mu} + \dots - \varphi(x),$$

для наближення першого порядку відкинемо квадратичні доданки та доданки з вищими степенями, а у другому доданку можна замінимо φ' на φ , тоді

$$\Delta \varphi = \delta \varphi + \Delta x^\mu \partial_\mu \varphi. \quad (36.4)$$

Аналогічно можна поступити для похідних по часу та координатах, повна варіація не комутуватиме з операціями диференціювання:

$$\Delta \partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi'(x')}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \Delta \varphi - \frac{\partial \Delta x^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu \varphi \quad (36.5)$$

(див. виведення формул (19.2)), а варіації форми з похідними комутують:

$$\delta \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \delta \varphi. \quad (36.6)$$

За допомогою (36.4) та (36.6) рівності (36.5) можна подати так:

$$\Delta \partial_\mu \varphi = \delta \partial_\mu \varphi + \Delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi.$$

Для довільної густини $\mathcal{F}(\varphi, \partial\varphi, x, t)$ матимемо:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{F} &= \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \Delta\partial_\mu\varphi + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu \\ &= \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\partial_\mu\varphi + \Delta x^\mu \frac{d\mathcal{F}}{dx^\mu} \equiv \delta\mathcal{F} + \Delta x^\mu \frac{d\mathcal{F}}{dx^\mu},\end{aligned}$$

зокрема, так буде і для густини функції Лагранжа.

Перейдемо тепер до варіації функціоналі дії

$$S[\varphi, \Omega] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x),$$

вважаючи, що змінюються не тільки поля, а і межі області інтегрування:

$$\Delta S = S[\varphi', \Omega'] - S[\varphi, \Omega].$$

Для перетворення такого виразу доцільно скористатись іншим прийомом, ніж у механіці частинок: виконаємо заміну змінних у першому інтегралі так, щоб межі інтегрування були такими самими, як і у першому доданку. Це відповідає перетворенню координат та часу з появою якобіану переходу:

$$x \rightarrow x', \quad d^4x' = I d^4x \quad \text{де} \quad I = 1 + \partial_\mu \Delta x^\mu.$$

Тоді доданки у варіації дії можна записати під спільним знаком інтегралу:

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x [\mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial\varphi'(x'), x')(1 + \partial_\mu \Delta x^\mu) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x)].$$

Об'єднуючи густини функції Лагранжа у повну варіацію, маємо:

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x (\Delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu \Delta x^\mu),$$

у останньому доданку поля замінено на неварійовані значення, оскільки множник з варіаціями координат є малим. Виконуючи підстановку явного вигляду варіації повної варіації через варіацію \mathcal{L}

$$\Delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L} + \Delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$$

та інтегруючи частинами так само, як під час виведення рівнянь руху, матимемо:

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\delta S}{\delta\varphi} \delta\varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi + \mathcal{L}\Delta x^\mu \right) \right].$$

У доданку під інтегралом можна виділити повну варіацію поля за допомогою підстановки $\Delta\varphi = \delta\varphi - \Delta x^\nu \partial_\nu \varphi$, тоді отримаємо остаточно:

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x \frac{\delta S}{\delta\varphi} \delta\varphi + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \Delta\varphi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\nu \varphi - \mathcal{L}\delta_\nu^\mu \right) \Delta x^\nu \right] \quad (36.7)$$

Цей вираз є безпосереднім аналогом формули для повної варіації (19.5) функціоналу дії у механіці частинок.

Розглянемо перетворення симетрії функціоналу дії. Це означає, що для таких перетворень з варіаціями $\Delta\varphi$ та Δx одна дійсна траєкторія переходить у іншу, а значення функціоналу дії не змінюється. Якщо перетворення залежить від деякого набору параметрів ε^A (будемо нумерувати параметри великими літерами), то для малих варіацій можна записати:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varepsilon^A} \Delta\varepsilon^A, \quad \Delta x^\mu = \frac{\partial\Delta x^\mu}{\partial\varepsilon^A} \Delta\varepsilon^A,$$

де $\Delta\varepsilon^A$ позначають малі прирости параметрів. Оскільки на дійсних траєкторіях виконуються рівняння руху, то перший доданок у (36.7) можна відкинути. Тоді:

$$\Delta S = \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varepsilon^A} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\nu\varphi - \mathcal{L}\delta_\nu^\mu \right) \frac{\partial\Delta x^\nu}{\partial\varepsilon^A} \right] \Delta\varepsilon^A.$$

Якщо для такого перетворення дія інваріантна, то $\Delta S = 0$ і у силу незалежності приростів $\Delta\varepsilon^A$ отримаємо, що всі підінтегральні вирази дорівнюють нулю. Це можна записати так:

$$\partial_\mu J_A^\mu = 0, \quad (36.8)$$

де

$$J_A^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varepsilon^A} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\nu\varphi - \mathcal{L}\delta_\nu^\mu \right) \frac{\partial\Delta x^\nu}{\partial\varepsilon^A}. \quad (36.9)$$

Вираз, що виникає у другому доданку

$$\mathbf{T}^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\nu\varphi - \mathcal{L}\delta_\nu^\mu \quad (36.10)$$

називається *тензором енергії-імпульсу*. Повертаючись до просторових та часових змінних, вираз (36.8) можна записати у вигляді рівняння неперервності:

$$\frac{d}{dt} J_A^0 + \frac{d}{dx^i} (c J_A^i) = 0 \quad (36.11)$$

або у більш звичній формі:

$$\frac{d\rho_A}{dt} + \operatorname{div} \vec{j}_A = 0,$$

де за аналогією з електродинамікою $\rho_A = J_A^0$ позначає формальну густину заряду, а $j_A^i = c J_A^i$ — густину струму. Якщо проінтегрувати рівняння неперервності по об'єму V , то отримаємо

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j}_A \equiv - \oint_{S(V)} \vec{j}_A \cdot \vec{n} dS,$$

де $S(V)$ — поверхня, що обмежує об'єм V . У випадку достатньо великого об'єму поверхневий інтеграл обертається в нуль і матиме місце звичайний закон збереження:

$$\frac{dQ_A}{dt} = 0, \quad Q_A = \int_V \rho_A dV. \quad (36.12)$$

Величина Q_A називається *зарядом*. Таким чином, у теорії поля для перетворень інваріантності функціоналу дії матимуть місце рівняння неперервності, які еквівалентні до законів збереження зарядів. Це складає зміст теореми Нетер для полів (та неперервних середовищ, де виведенні теореми Нетер буде таким самим, тільки похідні по часу та координатах будуть фігурувати окремо).

Перш ніж перейти до прикладів функціоналів дії для полів потрібно визначити їх поведінку під час перетворень Лоренца, оскільки на функціонал дії накладено обмеження інваріантності при переході до інших інерціальних систем відліку. Виявляється, що аналіз перетворення Лоренца дозволяє визначити класи функцій, які можуть описувати поля.

4. ПРОСТОРОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. ТИПИ ПОЛІВ. Нагадаємо, що перетворення, які описують симетрії простору-часу (залишають інваріантним чотиривимірний інтервал) мають вигляд:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

перший доданок описує 4-повороти (туди входять перетворення Лоренца), інваріантність відповідає ізотропії простору та еквівалентності різних інерціальних систем відліку. Другий доданок описує 4-трансляції, відповідна інваріантність є однорідністю простору та часу. Разом вони утворюють групу Пуанкаре, яка залежить від 10 незалежних параметрів (див. лекцію 34). У групі Пуанкаре можна відокремити підгрупу, яка відповідає тільки перетворенням Лоренца, для неї

$$\det L = 1, \quad L^0{}_0 = 1.$$

Розглянемо функції поля $\varphi_a(x)$, які означено у інерціальній системі відліку S . У іншій інерціальній системі S' , перехід до якої здійснюється за допомогою перетворення Лоренца з матрицею L поле буде описуватись функціями $\varphi'_a(x')$, які можна пов'язати з компонентами у системі S за допомогою виразів

$$\varphi'_a(x') = U(L)_a{}^b \varphi_b(x) \quad (36.13)$$

де $U(L)$ — матриця перетворень, яка залежить від матриці L перетворення Лоренца та природи поля, зв'язок компонент поля вважається лінійним та однорідним. Очевидно, що для двох послідовних перетворень Лоренца

$$x \xrightarrow{L_1} x' \xrightarrow{L_2} x'' \quad \text{матимемо} \quad \varphi(x) \xrightarrow{U(L_1)} \varphi'(x') \xrightarrow{U(L_2)} \varphi''(x'')$$

і сумарне перетворення $x \rightarrow x''$ та $\varphi(x) \rightarrow \varphi''(x'')$ буде відповідати добуткам:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \varphi''_a(x'') = U(L)_a{}^b \varphi_b(x) \quad \text{де} \quad L = L_2 L_1, \quad U(L) = U(L_2) U(L_1),$$

тобто перетворення компонент поля, так само, як і координат, має групові властивості і послідовні перетворення Лоренца L_1 та L_2 еквівалентні одному перетворенню L . У теорії груп кажуть, що матриці $U(L)$ утворюють *лінійне представлення* групи Лоренца у просторі польових функцій. Аналогічно можна говорити про лінійні представлення групи Пуанкаре.

Типи фізичних полів можна класифікувати різними представленнями групи Лоренца. Якщо компоненти поля не змінюються у результаті перетворень, то $U(L)$ є одиничною матрицею і φ_a утворюють набір *скалярних* полів, які нумеруються польовим індексом:

$$\varphi'_a(x') = \varphi_a(x) \quad (\text{набір скалярних полів}).$$

Якщо $U(L) = L$, то закон перетворення компонент буде таким самим, як і закон перетворення координат, відповідне поле називається *векторним*, польовий індекс a еквівалентний до координатного μ :

$$\varphi'_\mu(x') = L_\mu{}^\nu \varphi_\nu(x) \quad (\text{векторне поле}).$$

Аналогічно з'являється *тензорне* поле, де польовий індекс a еквівалентний до набору координатних індексів $\mu_1\mu_2\dots$, а закон перетворення по кожному індексу є векторним. Для другого рангу:

$$\varphi'_{\mu_1\mu_2}(x') = L_{\mu_1}{}^{\nu_1} L_{\mu_2}{}^{\nu_2} \varphi_{\nu_1\nu_2}(x) \quad (\text{тензорне поле}).$$

Лінійні представлення групи Лоренца не вичерпуються перетвореннями тільки тензорного типу. Можна означити поля з комплексними компонентами, які називаються *спінорними*, за допомогою яких можна описувати польові системи з напівцілим квантовомеханічним спіном. Саме поняття спіну природно виникає з класифікації різних представлень групи Лоренца, які нумеруються парою напівцілих чисел, сума яких і називається спіном. Зокрема, спін полів тензорного типу є цілим, а спінорного — напівцілим. Детальний аналіз представлень груп Лоренца та Пуанкаре² можна знайти у курсах теорії груп (наприклад, [46], [46] та [48]) та квантової теорії поля ([38], [39]). У нашому розгляді обмежимося простими випадками скалярного та векторного полів, які мають простий інтуїтивно зрозумілий зміст.

Для використання теореми Нетер потрібна нескінченно мала версія просторових перетворень. У випадку трансляцій:

$$x'^\mu = \varepsilon^\mu, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^\nu} = \delta_\nu^\mu,$$

для чотиривимірних поворотів

$$x'^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \varepsilon^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} (\delta_\beta^\mu x_\alpha - \delta_\alpha^\mu x_\beta),$$

у останньому доданку вираз антисиметризовано по нижніх індексах, оскільки матриця поворотів $\varepsilon^{\mu\nu}$ є антисиметричною.

² Вперше цей аналіз провів Ю.Вігнер.

За аналогією з квантовомеханічним описом закон перетворення координат для нескінченно малих поворотів та трансляцій можна подати у операторній формі:

$$\delta x^\mu = \hat{F} x^\mu, \quad \hat{F} = i\varepsilon^\nu \hat{P}_\nu + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \hat{M}_{\mu\nu}$$

де

$$\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu, \quad \hat{M}_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \equiv x_\nu \hat{P}_\mu - x_\mu \hat{P}_\nu,$$

оператори \hat{P}_μ та $\hat{M}_{\mu\nu}$ аналогічні до імпульсу та моменту імпульсу, вони називаються *генераторами* перетворень (імпульс генерує трансляції, а момент — повороти).

Задача 36.1. Довести, що

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0, \quad [\hat{P}_\mu, \hat{M}_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha} \hat{P}_\beta - \eta_{\mu\beta} \hat{P}_\alpha),$$

ці властивості відображають комутативність перетворень трансляцій та некомутативність трансляцій з поворотами. Знайти $[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\alpha\beta}]$.

Вказівка: Знайти $[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu]f(x)$, виконуючи безпосередні диференціювання.

Для нескінченно малих перетворень Лоренца перетворення поля мають вигляд:

$$\varphi'_a(x') = U(L)_a{}^b \varphi_b(x), \quad U(L)_a{}^b = 1 + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} [S_{\mu\nu}]_a{}^b,$$

де $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ є матрицею, яка визначається природою поля.

5. ВНУТРІШНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ. Ланранжиян та дія можуть бути інваріантними відносно перетворень поля, для яких координати та час фіксовані. Такі перетворення описують *внутрішні симетрії* і відповідають змінам компонент у просторі значень поля. Для лінійних перетворень:

$$\varphi'_a(x) = U_a{}^b \varphi_b(x),$$

матриця U у більшості випадків залежить від деяких неперервних параметрів λ . При цьому

$$\mathcal{L}(\varphi', \partial\varphi') = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \quad \text{та} \quad S[\varphi', \Omega] = S[\varphi, \Omega].$$

Згідно з теоремою Нетер, такі перетворення породжують інтеграли руху.

Перетворення внутрішніх симетрій, як і просторових, утворюють групу. Для послідовних перетворень з незалежними наборами параметрів $\lambda_{1,2}$:

$$\varphi(x) \xrightarrow{U(\lambda_1)} \varphi'(x) = U(\lambda_1)\varphi(x) \xrightarrow{U(\lambda_2)} \varphi''(x) = U(\lambda_2)\varphi'(x)$$

сумарне перетворення дається добутком:

$$\varphi''(x) = U\varphi(x), \quad U = U(\lambda_2)U(\lambda_1),$$

де можна вважати, що U є перетворенням того самого типу з новим параметром $\lambda = \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$. Нескінченно мала версія перетворення породжується розкладом матриці у ряд Тейлора

$$U(\delta\lambda) = U(0) + \delta\lambda_A \left. \frac{\partial U}{\partial \lambda_A} \right|_{\lambda=0} + \dots = 1 + i\delta\lambda_A T_A + \dots$$

де перший доданок задає тотожне перетворення, а матриці $T_A = -i \frac{\partial U(0)}{\partial \lambda_A}$ називаються *генераторами перетворень*. Тоді перетворення поля матиме вигляд:

$$\delta \varphi_a(x) = i \delta \lambda_A [T_A]_a^b \varphi_b(x)$$

Зауваження. Беручи до уваги групові властивості перетворень симетрії можна показати, що

$$[T_a, T_b] = i C_{ab}^c T_c,$$

де C_{ab}^c є сталими які характеризують групу перетворень (їх називають *структурними сталими* групи).

У теорії груп неперервних перетворень (або груп Лі) нескінченно мала версія перетворення групи породжує математичну структуру, яка називається *алгеброю Лі* відповідної групи Лі. Базисними елементами алгебри Лі і будуть генератори T_A . Апарат теорії груп та алгебр Лі широко використовується у теорії поля, простий вступ можна знайти, наприклад, у [47]. Генератори для групи Лоренца, які було означено раніше, мають те саме походження. \lrcorner

6. ПРИКЛАДИ ПОЛІВ У МЕТОДІ ЛАГРАНЖА. Розглянемо структуру функціоналу дії для найпростіших полів.

Приклад 1. Скалярне поле.

◀ Скалярне поле задається однією функцією $\varphi(x)$ (яка може бути дійсною чи комплексною). У випадку просторових перетворень $x \rightarrow x'$ таке поле змінюється за законом:

$$\varphi'(x') = \varphi(x).$$

Прикладом функції Лагранжа (для дійсного поля), що залежить від поля та його похідних і є інваріантною відносно перетворень Лоренца є

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (\text{поле Клейна-Гордона}), \quad (36.14)$$

доданок з похідними є інваріантним, оскільки описує чотиривимірний скалярний добуток градієнтів. Таке поле можна використовувати для опису нейтральних частинок (у класичній теорії замість останнього доданку можна використати довільну функцію φ). Відмітимо, що у такого лагранжиану є дискретна симетрія заміни знаку поля на протилежний. Рівняння руху:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0,$$

оператор $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ називається оператором д'Аламбера і позначається символом \square .

Тензор енергії-імпульсу:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L},$$

тому густина енергії та імпульсу матимуть вигляд:

$$\mathcal{E} = T^{00} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{m^2}{2} \varphi^2, \quad \mathcal{G}^i = T^{0i} = -\partial^0 \varphi \partial^i \varphi.$$

Для комплексного поля лагранжиан буде аналогічним:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^* \varphi \quad (36.15)$$

оскільки комплексна величина є комбінацією двох дійсних, то незалежних компонент поля буде дві — дійсна та уявна частини поля. Зручніше, однак, користуватись лінійними комбінаціями цих величин — самим полем φ та його комплексним спряженням φ^* . Рівняння руху можна записати аналогічно до попереднього:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* = 0.$$

Оскільки функція Лагранжа інваріантна відносно перетворення

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x), \quad \varphi^*(x) \rightarrow \varphi'^*(x) = e^{-i\alpha} \varphi^*(x)$$

то за теоремою Нетер це дає додатковий закон збереження. У даному випадку нескінченно малою версією перетворення зсуву фази є

$$\delta\varphi = i\varepsilon\varphi, \quad \delta\varphi^* = -i\varepsilon\varphi^*,$$

(ε позначає малу зміну фази), тому згідно з означенням струму (36.9) матимемо:

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \frac{\partial \delta\varphi^*}{\partial \varepsilon} = i(\varphi \partial_\mu \varphi^* - \varphi^* \partial_\mu \varphi)$$

Таким чином, комплексне скалярне поле описує заряджені частинки (а дійсне нейтральні). ►

Приклад 2. Масивне векторне поле.

◀ Розглянемо поле з компонентами A^μ , яке у випадку просторових перетворень змінюється за векторним законом:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = L^\mu{}_\nu A^\nu(x), \quad \text{причому } x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Найпростіший варіант лагранжиану, інваріантного відносно перетворень Лоренца можна отримати виконуючи згортки у тензорах вигляду інваріантні вирази типу

$$\partial_\mu A^\alpha \partial_\nu A^\beta, \quad A^\mu A^\nu, \quad A^\mu A^\nu \partial_\alpha A^\beta, \quad A^\mu A^\nu A^\alpha A^\beta, \dots$$

Оскільки такі згортки виконуються за допомогою метричного тензора, то автоматично буде отримано інваріантні величини. Наприклад, можна взяти

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu A^\alpha \partial_\nu A^\beta + \frac{m^2}{2} \eta_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta.$$

У розгорнутому вигляді така функція Лагранжа еквівалентна лінійній комбінації чотирьох функцій Лагранжа для скалярних полів, які є компонентами A^μ . Рівняння руху збігатимуться з рівняннями Клейна-Гордона. Оскільки комбінації компонент поля входять до загального лагранжиану з різними знаками, то енергії, що їм відповідають, також матимуть різні знаки. Інший варіант полягає у заміні $\partial_\mu A^\alpha$ у згортках на антисиметризовані комбінації $\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu$. Для самозгортки цієї комбінації матимемо:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (36.16)$$

для спрощення метричний тензор замінено піднятими та опущеними індексами. Якщо розкрити дужки у комбінації з похідними, то видно, що (36.16) відрізняється від попереднього варіанту одним доданком. Неоднозначність вибору доданку з похідними пов'язана з існуванням кількох інваріантних комбінацій для перетворень Лоренца, однак у деяких випадках відмінність між інваріантами є 4-дивергенцією, яку можна опустити з лагранжиану. Зручнішим є вибір (36.16), це мотивується аналізом відповідної квантової теорії.

Дійсне векторне поле описує масивні частинки. Рівняння руху:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -m^2 A^\nu, \quad \text{де покладено} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0.$$

Якщо накласти додаткову вимогу $\partial_\mu A^\mu = 0$, то другий доданок у рівнянні руху зникає і компоненти поля задовольняють такі самі рівняння, як і скалярне поле.

У випадку комплексного поля рівняння руху аналогічні, але додатково є симетрія зміни фази, що дає нетерівський струм, пошук явного виразу для якого пропонується як вправа. ►

Приклад 3. Безмасове векторне поле.

◀ У частинному випадку $m = 0$ векторне поле є електромагнітним, і у лагранжиану з'явиться додаткова інваріантність:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \quad \Rightarrow \quad F'_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = F_{\mu\nu}.$$

Ця специфічна симетрія (порівняно з масивним полем) призводить до неоднозначності у означенні поля A^μ . Під час розв'язування рівнянь руху її можна усунути, якщо накласти на поле додаткову умову, яка має бути інваріантною відносно перетворення Лоренца, як правило беруть

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{умова Лоренца}), \quad (36.17)$$

тоді з чотирьох компонент поля незалежними будуть тільки три.

Лагранжиан вільного поля (з точністю до розмірного множника) можна записати так:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (36.18)$$

Існують і інші варіанти, які приводять до тих самих рівнянь руху:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2.$$

Функціонали дії для них однакові, самі лагранжиани відрізняються на дивергенції, які зникають під час інтегрування по великому об'єму. ►

7. ФОРМАЛІЗМ ГАМІЛЬТОНА. За аналогією з класичною механікою дискретних та неперервних систем можна означити густину імпульсу

$$\pi_a(\vec{r}, t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi_a(\vec{r}, t))} = \frac{\delta}{\delta(\partial_0 \varphi_a(\vec{r}, t))} \int d^3 x' \mathcal{L}(\vec{r}', t). \quad (36.19)$$

і виконати перетворення Лежандра з функцією Лагранжа, виражаючи похідні по часу $\partial_0\varphi$ (це можливо, якщо теорія не є виродженою) через густини імпульсів π , тоді густина функції Гамільтона матиме вигляд:

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi, \partial_i\varphi) = \left[\sum_a \pi_a \partial_0\varphi_a - \mathcal{L}(\varphi, \partial_0\varphi, \partial_i\varphi) \right]_{\partial_0\varphi = \partial_0\varphi(\pi, \partial_i\varphi)}, \quad (36.20)$$

Сама функція Гамільтона буде інтегралом:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi, \pi, \partial_i\varphi).$$

Аналогічно до неперервних середовищ можна побудувати рівняння руху, які матимуть вигляд:

$$\partial_0\varphi_a = \frac{\delta H}{\delta\pi_a}, \quad \partial_0\pi_a = -\frac{\delta H}{\delta\varphi_a}. \quad (36.21)$$

Дана форма запису рівнянь має суттєвий недолік нековаріантності відносно перетворень Лоренца. Зазначимо, що аналіз функції Гамільтона суттєво ускладниться для вироджених теорій (він проводиться так само, як і у звичайній класичній механіці, див. лекцію 32). Найпростішим прикладом виродженої теорії є електромагнітне поле (див. далі).

Аналогічно можна означити структуру на типу дужки Пуассона (яка відіграє велику роль під час побудови квантової теорії).

$$[A, B] = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta\varphi_a(\vec{r}, t)} \frac{\delta B}{\delta\pi_a(\vec{r}, t)} - \frac{\delta B}{\delta\varphi_a(\vec{r}, t)} \frac{\delta A}{\delta\pi_a(\vec{r}, t)} \right),$$

зокрема

$$[\varphi_a(\vec{r}, t), \varphi_b(\vec{r}', t)] = 0, \quad [\pi_a(\vec{r}, t), \pi_b(\vec{r}', t)] = 0, \quad [\varphi_a(\vec{r}, t), \pi_b(\vec{r}', t)] = \delta_{ab}\delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

За допомогою дужки Пуассона рівняння руху можна подати у компактній формі:

$$\partial_0\varphi_a = [\varphi_a, H], \quad \partial_0\pi_a = [\pi_a, H].$$

Приклад 4. Масивне скалярне поле.

◀ Із функції Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \int d^3x (\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^2)$$

отримаємо:

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta\partial_0\varphi} = \partial^0\varphi,$$

звідки функцію Гамільтона можна побудувати одразу за означенням:

$$H = \int d^3x \left(\pi\partial_0\varphi - \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 - \partial^i\varphi\partial_i\varphi + m^2\varphi^2).$$

Рівняння руху мають вигляд:

$$\partial_0 \varphi = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \pi, \quad \partial_0 \pi = -\frac{\delta H}{\delta \varphi} = -m^2 \varphi - \partial_i \partial^i \varphi,$$

Підстановка одного до іншого приводить до стандартних рівнянь руху, отриманих раніше. Аналогічно можна розглянути комплексне скалярне поле. ►

Приклад 5. Безмасове векторне поле.

◀ Із означення

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

та простих властивостей

$$\frac{\delta A_\mu(\vec{r}, t)}{\delta A_\alpha(\vec{r}', t)} = \delta_\mu^\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \frac{\delta \partial_\mu A_\nu(\vec{r}, t)}{\delta A_\alpha(\vec{r}', t)} = \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

отримаємо:

$$\pi^\mu(\vec{r}, t) = \int d^3x' \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{r}', t)}{\partial \partial_0 A_\mu(\vec{r}, t)} = -F^{0\mu}(\vec{r}, t),$$

звідки $\pi^0 = 0$, $\pi^i = -F^{0i}$, тому можна виразити часові похідні $\partial_0 A_i$ через імпульси:

$$\pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 A_i = -\pi_i + \partial_i A_0,$$

але для нульової компоненти $\partial_0 A^0$ це неможливо. Таким чином, дана теорія буде виродженою. Формальна побудова функції Гамільтона дає:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left(\pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \int d^3x \left[\pi^0 \partial_0 A_0 + \pi^i (\partial_i A_0 - \pi_i) + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right] \\ &= \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \pi^i \partial_i A_0 + \pi^0 \partial_0 A_0 \right), \end{aligned}$$

або у тривимірних позначеннях $\pi^i = -F^{0i} = -E^i$, $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ та $B_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij}$:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \pi^i \partial_i A_0 + \pi^0 \partial_0 A_0 \right].$$

Із означення зв'язків випливає, що рівняння

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 A_0)} = 0$$

є первинним зв'язком, а з умови узгодження з динамікою матимемо:

$$\partial_0 \pi^0 = [\pi^0, H] = \partial_i F^{0i} = -\partial_i \pi^i \quad \text{або} \quad \text{div } \vec{E} = 0,$$

що дає вторинний зв'язок, дужки Пуассона означено звичайним чином:

$$[A_\mu(\vec{r}, t), \pi^\nu(\vec{r}', t)] = \delta_\mu^\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Відмітимо, що отриманий вторинний зв'язок збігається з нульовою компонентою рівняння руху у формалізмі Лагранжа. Для безмасового поля більше зв'язків немає, оскільки

$$[\pi^0, \partial_i F^{0i}] = 0,$$

тому дана теорія має зв'язки першого роду:

$$\pi^0 = 0 \quad (\text{первинний}), \quad \partial_i \pi^i = 0 \quad (\text{вторинний})$$

(для масивного векторного поля другого роду, у правій частині виразу для дужки Пуассона $[\pi^0, H]$ з'явиться маса). У виразі для функції Гамільтона легко виділити явно обидва зв'язки, інтегруючи доданок $\pi^i \partial_i A_0$ частинами та відкидаючи поверхневий інтеграл:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) - A_0 \partial_i \pi^i + \pi^0 \partial_0 A_0 \right], \quad (36.22)$$

де невідомі величини A_0 та $\partial_0 A_0$ інтерпретуються як множники Лагранжа. Інтегруючи частинами другий член і відкидаючи позаінтегральний доданок, можна виділити вторинний зв'язок:

Причиною виродженості функції Лагранжа у класичній електродинаміці є наявність калібрувальної симетрії, перетворення

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f(x)$$

змінює потенціали, але приводить до фізично еквівалентної функції Лагранжа (з незмінними станами електромагнітного поля). Калібрувальне перетворення породжується обома зв'язками як генераторами канонічних перетворень. Дійсно, для нескінченно малих перетворень з генераторами обох рівнянь зв'язків:

$$\begin{aligned} \delta_1 A_\mu &= [A_\mu, G_1] = \delta_\mu^0 \varepsilon_1, \quad \text{для} \quad G_1 = \int d^3x \varepsilon_1 \pi_0, \\ \delta_2 A_\mu &= [A_\mu, G_2] = \delta_\mu^i \partial_i \varepsilon_2, \quad \text{для} \quad G_2 = - \int d^3x \varepsilon_2 \partial_i \pi^i, \end{aligned}$$

якщо $\varepsilon_2 = \varepsilon$ і $\varepsilon_1 = \partial_0 \varepsilon$, то отримаємо звичайне калібрувальне перетворення:

$$\delta A_\mu = [A_\mu, G] =, \quad G = \int d^3x [\varepsilon \pi^0 - \varepsilon \partial_i \pi^i].$$

Останні два доданки з (36.22), фактично описують це описують калібрувальне перетворення, їх можна видалити функції Гамільтона фіксує калібрування. Найпростіше вважати умову $A^0 = 0$ додатковим зв'язком, формально це відповідає спеціальному калібрувальному перетворенню

$$A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 + \partial_0 f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = - \int_0^{x^0} dx_0 A_0(x),$$

тоді з рівняння руху $\partial_i F^{0i} = 0$ випливає (у новому калібруванні)

$$\partial_0 \partial_i A^i = 0.$$

Можна виконати ще одне перетворення і вибрати потенціал так, що $\partial_i A^i = 0$. Для цього потрібно взяти

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}' \vec{A}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x',$$

Легко показати, що компонента $A^0 = 0$ змінюватись не буде (а вираз для A_i потрібно взяти як результат попереднього перетворення). Таким чином, після фіксації калібрування маємо зв'язки:

$$\pi^0 = 0, \quad \partial_i \pi^i = 0, \quad A^0 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Теорія зі зв'язками першого роду за рахунок додаткових обмежень перетворюється в теорію зі зв'язками другого роду, до якої можна застосувати формалізм Дірака. ►

ДОДАТКИ

- ❑ Матриця переходу ортогональних перетворень.
- ❑ Перетворення векторів та тензорів.
- ❑ Символ (тензор) Леві-Чивіта
- ❑ Криволінійні ортогональні координати
- ❑ Еліптичні функції та інтеграли
- ❑ Диференціальні операції з векторами
- ❑ Кватерніони

ДОДАТОК А

Матриця переходу ортогональних перетворень.

1.	Означення матриці переходу.	567
2.	Властивості матриці переходу.	568

1. ОЗНАЧЕННЯ МАТРИЦІ ПЕРЕХОДУ. Перехід від одного *ортонормованого* базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ системи S до іншого *ортонормованого* базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ системи S' називається *ортгональним перетворенням* і описується набором співвідношень¹:

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij} \vec{e}'_j, \quad \text{де } i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1})$$

(розклад векторів старого базису по векторах нового (штрихованого) базису).

Коефіцієнти розкладу

$$\alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = \cos \angle(\vec{e}_i, \vec{e}'_j) \quad (\text{A.2})$$

утворюють *матрицю переходу* $\mathbf{A} = \{\alpha_{ij}\}$.

Очевидно, пошук матриці переходу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

зручно проводити, зображаючи її у вигляді “таблиці Піфагора”

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ \hline \vec{e}_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \vec{e}_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \vec{e}_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \quad (\text{A.3})$$

де номер вектора (або координатної осі) старого базису визначає номер рядка матриці переходу, а номер вектора (або осі) нового (штрихованого) базису — номер стовпчика. Елементи рядків/стовпчиків матриці переходу мають простий зміст:

Рядки матриці переходу — суть компоненти нештрихованих базисних векторів у штрихованому базисі, а стовпчики — компоненти штрихованих базисних векторів відносно нештрихованих.

¹ Тут і далі індекси змінюються від 1 до 3.

Це легко бачити з таких рівностей: $\alpha_{ij} = (\vec{e}_i)'_j$ (для фіксованого i індекс j нумерує компоненти, записані у рядок) та $\alpha_{ij} = (\vec{e}'_j)_i$ (для фіксованого j індекс i нумерує компоненти, записані у стовпчик). Схематично це можна зобразити так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \longrightarrow & \\ \vec{e}_2 & \longrightarrow & \\ \vec{e}_3 & \longrightarrow & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

2. ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦІ ПЕРЕХОДУ. З умов ортонормованості обох базисів $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}$ випливає

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = (\alpha_{ia} \vec{e}_a) \cdot (\alpha_{jb} \vec{e}_b) = \alpha_{ia} \alpha_{jb} (\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b) = \alpha_{ia} \alpha_{jb} \delta_{ab} = \alpha_{ia} \alpha_{ja} = \delta_{ij},$$

або у матричній формі

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (\text{A.4})$$

тому перетворення, обернене до (A.1), має вигляд

$$\vec{e}'_i = \alpha_{ji} \vec{e}_j. \quad (\text{A.5})$$

Матриця \mathbf{A} з такими властивостями називається *ортogonalною*, а відповідне перетворення — *ортogonalним*.

Співвідношення (A.3) для матриці переходу у компонентному представленні має вигляд:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.6})$$

Звідси випливають наступні властивості рядків та стовбчиків матриці переходу:

- 1) сума квадратів елементів кожного рядка (стовбчика) матриці переходу дорівнює одиниці;
- 2) різні рядки (стовбчики) матриці переходу — ортогональні між собою.

Ці властивості дозволяють перевірити вірність побудови матриці переходу, або знайти її елементи за мінімальним числом заданих. Матриця переходу однозначно визначається трьома *незалежними* матричними елементами (або еквівалентними до них трьома незалежними параметрами) та одним знаком (знаком величини $\det \mathbf{A}$). Якщо $\det \mathbf{A} > 0$, то відповідне перетворення (A.1) системи координат є просторовим поворотом і переводить праву систему координат у праву, а ліву — у ліву. Якщо ж $\det \mathbf{A} < 0$, то перетворення (A.1) системи координат є суперпозицією деякого просторового повороту та відбивання в площині, або інверсії, і переводить праву систему координат в ліву, а ліву — в праву.

Зауважимо, що декартові координати точки при переході від однієї прямокутної декартової системи координат до іншої перетворюються так само, як і базисні вектори (вирази (A.1) та (A.4), відповідно), а саме:

$$x_i = \alpha_{ij} x'_j \quad \text{та} \quad x'_i = \alpha_{ji} x_j. \quad (\text{A.7})$$

Для пошуку елементів матриці переходу можна скористатись будь-яким із співвідношень (A.1) – (A.7). Найбільш раціональний спосіб залежить від того, які саме величини є заданими.

Якщо відомі кути між осями двох систем координат, то елементи α_{ij} матриці переходу зручно знаходити за формулою (A.2) як косинуси відповідних кутів. Можна також виразити базисні вектори нештрихованої системи координат як лінійні комбінації векторів штрихованого базису.

Нарешті, для пошуку матриці переходу можна скористатись законом перетворення компонент радіус-вектора при заміні базису (A.7).

ДОДАТОК Б

Перетворення векторів та тензорів.

1.	Перетворення вектора.	571
2.	Перетворення тензора.	571

1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВЕКТОРА. Закон перетворення компонент вектора (прямий та обернений) при ортогональних перетвореннях системи координат має вигляд:

$$a_i = \alpha_{ij} a'_j, \quad a'_i = \alpha_{ji} a_j, \quad \text{де } i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{Б.1})$$

тобто, компоненти вектора перетворюються за тим самим правилом, що і відповідні базисні вектори, або декартові координати. Закон перетворення вектора зручно записувати у матричній формі:

$$\vec{a} = \mathbf{A} \vec{a}', \quad \vec{a}' = \mathbf{A}^{-1} \vec{a}. \quad (\text{Б.2})$$

2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ТЕНЗОРА. Закон перетворення тензора другого рангу $\hat{t} = \{t_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) при ортогональних перетвореннях системи координат має вигляд:

$$t_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} t'_{kl}, \quad t'_{ij} = \alpha_{ki} \alpha_{lj} t_{kl}. \quad (\text{Б.3})$$

У матричній формі закон перетворення тензора другого рангу можна представити так:

$$\hat{t} = \mathbf{A} \hat{t}' \mathbf{A}^{-1}, \quad \hat{t}' = \mathbf{A}^{-1} \hat{t} \mathbf{A}. \quad (\text{Б.4})$$

Для тензорів вищих рангів закон перетворення компонент при ортогональних перетвореннях систем координат записується аналогічним чином, зокрема для тензора третього рангу маємо:

$$\lambda_{ijk} = \alpha_{ia} \alpha_{jb} \alpha_{kc} \lambda'_{abc}, \quad \lambda'_{ijk} = \alpha_{ai} \alpha_{bj} \alpha_{ck} \lambda_{abc}. \quad (\text{Б.5})$$

Компоненти тензора другого рангу у новій системі координат можна знаходити, перемножаючи матриці за однією з формул (Б.4). Для тензорів вищих рангів такої можливості, взагалі кажучи, немає. Тому залишається покомпонентно розписувати суми типу (Б.5).

Однак існує і інша можливість¹, яка особливо ефективна тоді, коли задача полягає в знаходженні лише деяких компонент тензора, або коли матриця переходу

¹ Характерна саме для декартових координат.

проста і має велику кількість нульових елементів. Маючи закон перетворення декартових координат, складаємо відповідні добутки штригованих координат, виражаючи їх через добутки нештригованих (зберігаючи той порядок множників, який виник після розкриття дужок). Закон перетворення компонент тензора записуємо по аналогії, замінивши добутки декартових координат на компоненти тензора з *відповідними* індексами. Зауважимо, що при цьому немає потреби у побудові матриці переходу.

ДОДАТОК В

Символ (тензор) Леві-Чивіта

1. Означення.	573
2. Властивості.	573

1. ОЗНАЧЕННЯ. Символ Леві-Чивіта у тривимірному випадку вводиться як мішаний добуток ортів прямокутної декартової системи координат:

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k),$$

тобто

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } i, j, k \text{ складають циклічну перестановку з } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{якщо } i, j, k \text{ складають} \\ & \text{антициклічну перестановку з } 1, 2, 3; \\ 0, & \text{якщо серед } i, j, k \text{ є однакові числа.} \end{cases}$$

Символ Леві-Чивіта є найпростішим абсолютно антисиметричним псевдотензором третього рангу, що має 6 відмінних від нуля компонент

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1.$$

2. ВЛАСТИВОСТІ. Властивості символу Леві-Чивіта безпосередньо впливають із означення:

- 1) об'єкт ε_{ijk} змінює знак при перестановці довільних двох індексів;
- 2) об'єкт ε_{ijk} не змінюється при циклічній перестановці індексів.

Довільний антисиметричний тензор рангу меншого трьох можна представити у вигляді згортки символу Леві-Чивіта з іншим тензором (не обов'язково антисиметричним). Як ілюстрацію, можна вказати представлення антисиметричного тензора \hat{t} другого рангу через аксіальний вектор $\vec{\omega}$: $t_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$. Інше стандартне застосування символу Леві-Чивіта — у обчисленнях, пов'язаних із визначниками.

За допомогою символу Леві-Чивіта, векторний $\vec{a} \times \vec{b}$ та мішаний $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ добуток, які відповідно є псевдовектором та псевдоскаляром, можна записати так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k, \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Зокрема для ортонормованих базисних векторів:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k, \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk}.$$

Зручність використання символу Леві-Чивіта у задачах пов'язана з рядом тождеств, які він задовольняє. Для випадку тривимірного евклідового простору зовнішній добуток тензора Леві-Чивіта самого на себе та згортки цього добутку мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} &= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha i} & \delta_{\alpha j} & \delta_{\alpha k} \\ \delta_{\beta i} & \delta_{\beta j} & \delta_{\beta k} \\ \delta_{\gamma i} & \delta_{\gamma j} & \delta_{\gamma k} \end{vmatrix}; & 2) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha\beta k} &= \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}; \\
 3) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\alpha jk} &= 2\delta_{i\alpha}; & 4) \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6.
 \end{aligned}$$

Для їх доведення необхідно явно розкрити визначник і обчислити необхідні згортки.

ДОДАТОК Г

Криволінійні ортогональні координати

1.	Означення.	575
2.	Локальний базис та параметри Ламе.	577
3.	Елементи довжини, площі та об'єму.	580

1. ОЗНАЧЕННЯ. Для опису положення точки у тривимірному евклідовому просторі потрібні три незалежні параметри (координати). У прямокутних декартових координатах (x, y, z) для радіус-вектора \vec{r} використовується розклад

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

де одиничні вектори \vec{e}_x , \vec{e}_y та \vec{e}_z задають *глобальний* (однаковий для всіх точок простору) базис.

У багатьох задачах (як правило у задачах із симетрією) розв'язок отримується значно простіше, якщо замість декартових координат (x, y, z) перейти до інших узагальнених криволінійних координат (q_1, q_2, q_3) , які є більш природними для даної задачі. Наприклад, для задач з аксіальною симетрією такими є циліндричні координати, які автоматично її враховують.

Перетворення координат задається набором співвідношень

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \quad (\text{Г.1})$$

або

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z), \quad (\text{Г.2})$$

(обернених до (Г.1)). Заміна $(x, y, z) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ має бути невиродженою, тобто

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases},$$

що забезпечує взаємну незалежність нових та старих координат. Радіус-вектор \vec{r} точки з координатами (q_1, q_2, q_3) задається розкладом

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_x + y(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_y + z(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_z.$$

Координатними поверхнями у криволінійній системі координат називаються поверхні, які у декартових координатах задаються рівняннями $q_i(x, y, z) = \text{const}$, $i = \overline{1, 3}$ (тобто на i -й координатній поверхні значення q_i — фіксоване). Через кожну точку простору проходить три незалежні координатні поверхні, їх попарні

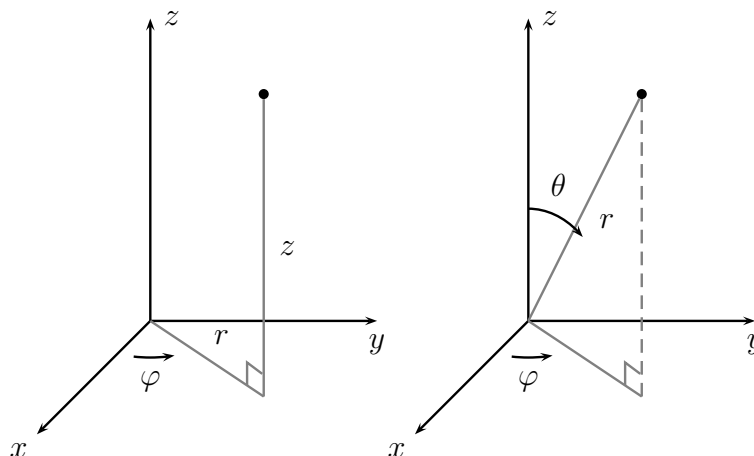


Рис. Г.1. Циліндричні та сферичні координати.

перетини називаються *координатними лініями*. Очевидно, вздовж координатної лінії (з номером 3), утвореної перетинами поверхонь $q_1 = \text{const}$ та $q_2 = \text{const}$ змінюється тільки q_3 ¹. Будемо позначати координатні поверхні вказанням змінних координат q : на координатній поверхні (i, j) змінюються q_i та q_j .

Приклад 1. Означення циліндричних координат.

◀ Циліндричні координати (r, φ, z) вводяться набором співвідношень

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (\text{Г.3})$$

За геометричним змістом координата z описує висоту перпендикуляра, опущеного з точки на площину (x, y) , r — відстань від початку координат до точки проекції, φ — кут між віссю Ox та радіус-вектором проекції (рис. 1). Очевидно, $(r, \varphi) \in$ звичайними полярними координатами.

Обернені вирази:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (\text{Г.4})$$

Координатні поверхні:

поверхня $r = \text{const}$: відповідає $x^2 + y^2 = r^2 = \text{const}$ і описує циліндр радіуса r з віссю симетрії z ;

поверхня $\varphi = \text{const}$: відповідає $\frac{y}{x} = \text{tg } \varphi = \text{const}$ і описує площину, що проходить через вісь z і пряму $y = x \text{tg } \varphi$ у площині xy .

поверхня $z = \text{const}$: описує горизонтальну площину, паралельну до площини xy , яка проходить на відстані z від неї.

Координатні лінії:

лінія r : перетин поверхонь $z = \text{const}$ (горизонтальна площина) та $\varphi = \text{const}$ (вертикальна площина), відповідає горизонтальному променю, що починається на осі z на висоті z і проходить паралельно площині xy у напрямку φ ;

¹ У декартових координатах всі координатні поверхні $z = \text{const}$ — паралельні площині xy , всі координатні лінії x, y — паралельні координатній площині (xy) . Те саме стосується інших випадків.

лінія φ : перетин поверхонь $z = \text{const}$ (горизонтальна площина) та $r = \text{const}$ (циліндр), горизонтальне коло радіуса r з центром на осі z , яке перебуває на відстані z від площини xy ;

лінія z : перетин поверхонь $r = \text{const}$ (циліндр) та $\varphi = \text{const}$ (вертикальна площина), вертикальна пряма, яка проходить через точку на площині xy з полярними координатами (r, φ) .

Якобіан переходу:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r,$$

циліндричні координати є виродженими, оскільки якобіан перетворюється в нуль при $r = 0$ (точки на осі z). ►

Приклад 2. Означення сферичних координат.

◀ Сферичні координати (r, θ, φ) вводяться набором співвідношень

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (\Gamma.5)$$

За геометричним змістом r описує відстань від початку координат до точки, θ — кут між віссю Oz та радіус-вектором точки, φ — кут між віссю Ox та радіус-вектором проекції (рис. 1). Очевидно, кут φ має той же зміст, що і в циліндричних координатах.

Обернені вирази:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (\Gamma.6)$$

Координатні поверхні:

поверхня $r = \text{const}$: відповідає $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const}$ і описує сферу радіуса r з центром у початку координат;

поверхня $\theta = \text{const}$: відповідає $x^2 + y^2 = z^2 \text{tg}^2 \theta$ і описує конус з центром у початку координат, віссю симетрії z і кутом розхилу θ ;

поверхня $\varphi = \text{const}$: відповідає $\frac{y}{x} = \text{tg} \varphi = \text{const}$ і описує площину, що проходить через вісь z і пряму $y = x \text{tg} \varphi$ у площині xy .

Координатні лінії (рис. 1):

лінія r : перетин поверхонь $\theta = \text{const}$ (конус) та $\varphi = \text{const}$ (вертикальна площина), відповідає променю, що починається у початку координат і проходить через дану точку;

лінія θ : перетин поверхонь $r = \text{const}$ (сфера) та $\varphi = \text{const}$ (вертикальна площина), вертикальне коло радіуса $r \sin \theta$, яке проходить через вісь z з центром у початку координат (меридіан);

лінія φ : перетин поверхонь $r = \text{const}$ (сфера) та $\theta = \text{const}$ (конус), горизонтальне коло радіуса $r \sin \theta$ з центром на осі z , яке перебуває на відстані $r \cos \theta$ від площини xy (паралель).

Якобіан переходу:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta,$$

сферичні координати є виродженими, оскільки якобіан перетворюється в нуль при $r = 0$ (початок координат) та $\theta = 0, \pi$ (точки на осі z). ►

2. ЛОКАЛЬНИЙ БАЗИС ТА ПАРАМЕТРИ ЛАМЕ. Для опису геометричних об'єктів (векторів та тензорів) у криволінійних координатах вводяться три вектори базису, які визначаються напрямками дотичних до координатних ліній у даній точці простору. На відміну від декартового, такий базис є *локальним*, тобто залежить від точки, в якій він будується.

Напрямки дотичних до координатних ліній у точці з криволінійними координатами (q_1, q_2, q_3) задаються похідними від радіус-вектора \vec{r} по q_i :

$$\vec{E}_i(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} = \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} \vec{e}_x + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} \vec{e}_y + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} \vec{e}_z$$

(оскільки координати q_i — незалежні, то отримані вектори \vec{E}_i є лінійно незалежними). Довжини цих векторів називаються *параметрами Ламе*:

$$H_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (\text{Г.7})$$

Базисні вектори криволінійної системи з одиничною довжиною можна записати як

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}. \quad (\text{Г.8})$$

Тут \vec{e}_i — базисний вектор, дотичний до i -ї координатної лінії. Вираз (Г.8) встановлює також зв'язок між ортогональними базисами $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ та $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Найбільш широко застосовуються *ортогональні криволінійні координати*, в яких вектори базису є попарно ортогональними:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k,$$

Зауважимо, що в загальному випадку у записі компонент тензорів верхні індекси відрізняють від нижніх. Тільки в ортогональних системах координат верхні та нижні індекси — еквівалентні.

Вектор є інваріантним об'єктом (незалежним від вибору координат), тому в ортогональних криволінійних координатах, як і в декартових має місце розклад

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (\text{Г.9})$$

Зв'язок між компонентами вектора \vec{a} у декартовому та криволінійному базисах встановлюється шляхом порівняння (Г.8) з $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$, очевидно

$$a_i = a_x (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_i) + a_y (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_i) + a_z (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_i), \quad i = \overline{1, 3}.$$

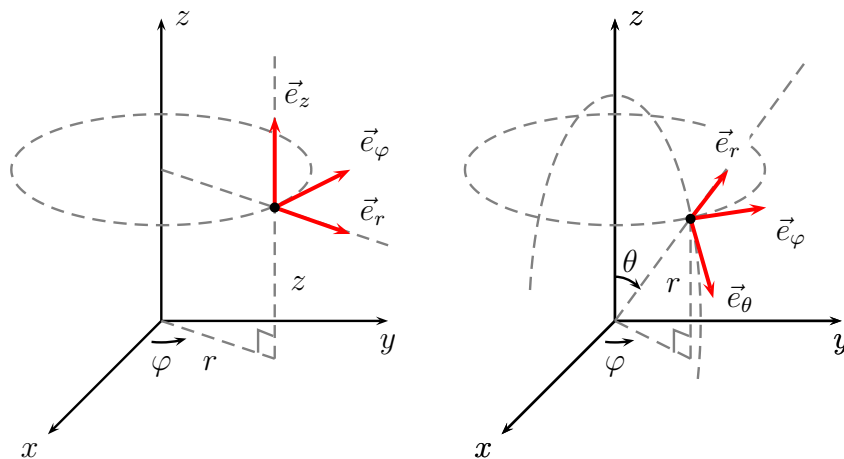


Рис. Г.2. Циліндричні та сферичні координати, базис.

Легко бачити, що перехід від декартової до криволінійної системи координат може бути описаний за допомогою матриці переходу

$$\mathbf{A}(q) = \begin{pmatrix} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix},$$

тоді для векторів базису

$$\vec{e}_x = (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3 = \alpha_{xj}\vec{e}_j, \quad \dots,$$

а для компонент довільного вектора

$$a_i = (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_i)a_x + (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_i)a_y + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_i)a_z.$$

Приклад 3. Базис та параметри Ламе циліндричної системи координат.

◀ Знайдемо похідні за означенням:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_z.$$

Тоді параметри Ламе мають вигляд:

$$H_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad H_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r, \quad H_z = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1, \quad (\text{Г.10})$$

а вектори базису напрямлені вздовж координатних ліній (див. рис. 2):

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -r \sin \varphi \vec{e}_x + r \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z.$$

Матриця переходу має вигляд матриці поворотів навколо осі z .

Радіус-вектор точки можна подати у вигляді:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$$

вираз складається з двох доданків на відміну від декартових координат. Зауважимо, що $|\vec{r}| = r$, для уникнення конфлікту з позначеннями циліндричну координату часто позначають ρ . ►

Приклад 4. Базис та параметри Ламе сферичної системи координат.

◀ Похідні за означенням:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + r \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + r \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned}$$

Параметри Ламе мають вигляд:

$$H_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad H_\theta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r, \quad H_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta, \quad (\text{Г.11})$$

а вектори базису напрямлені вздовж координатних ліній (див. рис. 2).

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y\end{aligned} \quad (\text{Г.12})$$

Радіус-вектор точки можна подати у вигляді:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r,$$

тобто розклад зводиться до одного доданку.

Зв'язок між компонентами вектора у декартовій та сферичній системах координат встановлюється за допомогою матриці переходу:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

аналогічна формула зв'язку буде і для векторів базису. ►

3. ЕЛЕМЕНТИ ДОВЖИНИ, ПЛОЩІ ТА ОБ'ЄМУ. Розглянемо приріст $d\vec{r}$ радіус-вектора $\vec{r}(q_i)$ при переході від точки з координатами (q_1, q_2, q_3) до точки з координатами $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$:

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} dq_i = H_1 \vec{e}_1 dq_1 + H_2 \vec{e}_2 dq_2 + H_3 \vec{e}_3 dq_3 = \vec{e}_1 dl_1 + \vec{e}_2 dl_2 + \vec{e}_3 dl_3,$$

де dl_i позначають проекції $d\vec{r}$ на координатні лінії q_i , та задають відповідні елементи довжини вздовж координатних ліній q_i . Легко бачити, що

$$dl_i = H_i dq_i \quad (\text{підсумовування по } i \text{ немає}), \quad (\text{Г.13})$$

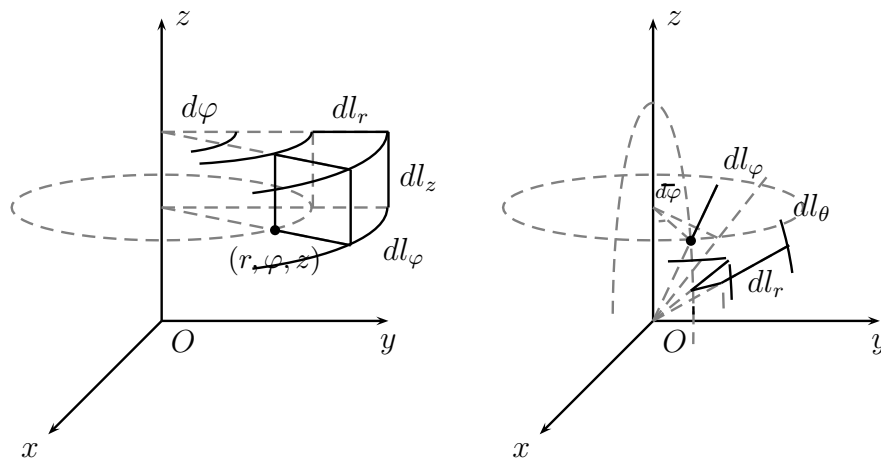


Рис. Г.3. Циліндричні та сферичні координати, елементарні довжини.

роль параметрів Ламе полягає у наданні елементам довжини вірної фізичної розмірності (метричної). Якщо q_i є безрозмірною величиною (кут), то H_i обов'язково матиме розмірність довжини.

Квадрат елемента довжини має вигляд:

$$dl^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2$$

(у декартових координатах $dl_x = dx$, $dl_y = dy$, $dl_z = dz$ і $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$).

Паралелограм, побудований на векторах $dl_i \vec{e}_i$ та $dl_j \vec{e}_j$, задає природні елементи площі на координатній поверхні (i, j) , його значення визначається векторним добутком

$$\vec{dS}_{ij} = (\vec{e}_i dl_i) \times (\vec{e}_j dl_j) = H_i H_j dq_i dq_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (\text{підсумовування по } i \text{ та } j \text{ немає}). \quad (\text{Г.14})$$

Таким чином, для його побудови потрібно провести координатні криві q_i , $q_i + dq_i$, q_j та $q_j + dq_j$. Природний елемент площі виникає на їх перетині.

Аналогічно, природний для координат q_i елемент об'єму є об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{e}_1 dl_1$, $\vec{e}_2 dl_2$, $\vec{e}_3 dl_3$:

$$dV = \vec{e}_1 dl_1 \cdot \vec{dS}_{23} = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{Г.15})$$

У простих випадках елементарні довжини, площі та об'єми визначаються з чисто геометричних міркувань, і формули (Г.13)–(Г.15) можна застосувати для пошуку параметрів Ламе.

Приклад 5. Елементи довжини для циліндричних координат.

◀ Зміна r на $r + dr$ при фіксованих φ та z відповідає переміщенню вздовж координатної лінії r (рис. 3), тому $dl_r = dr$, аналогічно $dl_z = dz$. При зміні φ на $\varphi + d\varphi$ точка переміщується по колу радіуса r , тому довжина відрізка дорівнює довжині дуги кола і $dl_\varphi = r d\varphi$. В результаті

$$dl_r = dr, \quad dl_\varphi = r d\varphi, \quad dl_z = dz,$$

що автоматично дає $H_r = 1$, $H_\varphi = r$ та $H_z = 1$. Площі:

$$\begin{aligned} dS_{r\varphi} &= dl_r dl_\varphi = r dr d\varphi & (\text{площина } z = \text{const}) \\ dS_{rz} &= dl_r dl_z = dr dz & (\text{площина } \varphi = \text{const}) \\ dS_{\varphi z} &= dl_\varphi dl_z = r d\varphi dz & (\text{циліндр } r = \text{const}) \end{aligned}$$

Елемент об'єму:

$$dV(r, \varphi, z) = dl_r dl_\varphi dl_z = r dr d\varphi dz,$$

як і слід чекати, $dV = 0$ при $r = 0$ і для точок на осі z побудувати елемент об'єму не можна. ►

Приклад 6. Елементи довжини для сферичних координат.

◀ Зміна r на $r + dr$ при фіксованих θ та φ відповідає переміщенню вздовж координатної лінії r (рис. 3), тому $dl_r = dr$. При зміні θ на $\theta + d\theta$ точка переміщується по вертикальному колу радіуса r (мередіан), довжина відрізка дорівнює довжині дуги кола $dl_\theta = r d\theta$, а при зміні φ на $\varphi + d\varphi$ точка переміщується по колу радіуса $r \sin \theta$ (паралель) і $dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi$. В результаті

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi,$$

що автоматично дає $H_r = 1$, $H_\theta = r$ та $H_\varphi = r \sin \theta$. Площі:

$$\begin{aligned} dS_{r\theta} &= dl_r dl_\theta = r dr d\theta & (\text{площина } \varphi = \text{const}) \\ dS_{r\varphi} &= dl_r dl_\varphi = \sin \theta dr d\varphi & (\text{конус } \theta = \text{const}) \\ dS_{\theta\varphi} &= dl_\theta dl_\varphi = r d\theta d\varphi & (\text{сфера } r = \text{const}) \end{aligned}$$

Елемент об'єму:

$$dV(r, \theta, \varphi) = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

при цьому, $dV = 0$ при $r = 0$ та $\sin \theta = 0$, тому для точок на осі z побудувати елемент об'єму не можна. ►

ДОДАТОК Д

Еліптичні функції та інтеграли

1.	Еліптичні інтеграли.	583
2.	Розклади у ряди повних інтегралів.	585
3.	Асимптотика при $k \rightarrow 1$	586
4.	Еліптичні функції Якобі	586

1. ЕЛІПТИЧНІ ІНТЕГРАЛИ. Еліптичним інтегралом називається інтеграл вигляду

$$\int R(x, y(x)) dx, \quad y(x) = \sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}, \quad (\text{Д.1})$$

де $R(x, y)$ — раціональна функція своїх аргументів. Виконуючи алгебраїчні перетворення та відділяючи доданки, які виражаються через елементарні табличні інтеграли, в кінцевому рахунку можна звести обчислення інтегралу (Д.1) до обчислення

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}}. \quad (\text{Д.2})$$

Інтеграли типу I_1 (з поліномом четвертого порядку) породжують *нормальні* канонічні форми Якобі запису еліптичних інтегралів.

Довільний інтеграл типу (Д.2) за рахунок перетворень підінтегральної функції та підстановок можна звести до комбінації інтегралів від раціональних функцій та еліптичних інтегралів 1-го, 2-го та 3-го родів.

Неповним еліптичним інтегралом першого роду називається інтеграл

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}. \quad (\text{Д.3})$$

Еліптичний інтеграл I роду породжується диференціальним рівнянням

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}, \quad (\text{Д.4})$$

одним з його розв'язків буде $F(\arcsin t, k)$.

Неповним еліптичним інтегралом другого роду називається інтеграл

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx. \quad (\text{Д.5})$$

Еліптичний інтеграл II роду породжується диференціальним рівнянням

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}, \quad (\text{Д.6})$$

одним з його розв'язків буде $E(\arcsin t, k)$.

Неповним еліптичним інтегралом третього роду називається інтеграл

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{(1 + nt^2)\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1 + n \sin^2 x)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (\text{Д.7})$$

Число k називається *модулем* еліптичного інтегралу, а межа інтегрування φ — *амплітудою*.

Якщо $0 < k < 1$, то еліптичні інтеграли будуть дійсними, а при $k > 1$ — комплексними.

Запис інтегралів у вигляді (Д.3)-(Д.7) називається *нормальною формою* еліптичних інтегралів. Еліптичні інтеграли визначені для довільного значення межі φ при $k < 1$.

У класичній механіці в основному зустрічається еліптичний інтеграл першого роду, тому далі розгляд буде обмежено саме цим випадком.

У найпростіших частинних випадках інтеграли $F(\varphi, k)$ та $E(\varphi, k)$ зводяться до елементарних:

1) модуль $k = 0$,

$$F(\varphi, 0) = E(\varphi, 0) = \int_0^{\varphi} dx = \varphi,$$

2) модуль $k = 1$,

$$F(\varphi, 1) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

та

$$E(\varphi, 1) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \sin \varphi$$

(при розкриванні модулів вважається, що $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, у такому інтервалі функції $\sin x$ та $\cos x$ є додатними величинами).

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ інтеграл (Д.3) називається *повним* і позначається як

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (\text{Д.8})$$

Очевидно, що $K(0) = \frac{\pi}{2}$ та $K(1) = \infty$.

З означення (Д.3) випливає, що

$$F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k), \quad F(\pi n \pm \varphi, k) = 2nK(k) \pm F(\varphi, k). \quad (\text{Д.9})$$

У класичній механіці часто з'являється необхідність перетворення інтегралу вигляду

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \sin^2 x}}.$$

до стандартної форми. На відміну від функції (Д.3) такий інтеграл визначений для довільного значення φ при $k > 1$, а для $k < 1$ тільки при $\sin \varphi < k$.

Якщо $k < 1$, то приведення до стандартної форми можна зробити за допомогою підстановки

$$\sin \theta = \frac{1}{k} \sin x, \quad dx = k \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

(підстановка є законною, якщо φ належить області визначення інтегралу, де $\frac{\sin x}{k} \leq 1$), тоді

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \sin^2 x}} = \int_0^{\arcsin \frac{\sin \varphi}{k}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = F\left(\arcsin \frac{\sin \varphi}{k}, k\right), \quad k < 1.$$

При $k > 1$ приведення до стандартної форми отримується простим винесенням k за знак радикалу:

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \sin^2 x}} = \frac{1}{k} \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - (1/k)^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k} F\left(\varphi, \frac{1}{k}\right), \quad k > 1.$$

При $k = 1$ інтеграл зводиться до елементарного:

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \int_0^\varphi \frac{dx}{\cos x} = \int_0^\varphi \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = - \int_0^\varphi \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = -\operatorname{arth}(\sin \varphi).$$

Таким чином,

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \sin^2 x}} = \begin{cases} F\left(\arcsin \frac{\sin \varphi}{k}, k\right), & k < 1, \\ -\operatorname{arth}(\sin \varphi), & k = 1, \\ \frac{1}{k} F\left(\varphi, \frac{1}{k}\right), & k > 1. \end{cases} \quad (\text{Д.10})$$

2. Розклади у ряди повних інтегралів. Розклад у ряд Тейлора функції $K(k)$ отримуються безпосереднім розкладом підінтегральної функції за допомогою табличних рядів:

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n,$$

тому

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right). \quad (\text{Д.11})$$

Розклади у ряди неповного інтегралу отримується тим же способом, що і у випадку повного інтегралу.

$$F(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} K(k) \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left(a_0(k) + \frac{2}{3} a_1(k) \sin^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2(k) \sin^4 \varphi + \dots \right), \quad (\text{Д.12})$$

де

$$a_0(k) = \frac{2}{\pi} K(k) - 1, \quad a_n(k) = a_{n-1}(k) - \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n}.$$

3. АСИМПТОТИКА ПРИ $k \rightarrow 1$ має вигляд:

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right) k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) k'^4 + \dots, \quad (\text{Д.13})$$

де $k' = \sqrt{1 - k^2}$. У самому грубому наближенні,

$$K(k) \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - k^2}. \quad (\text{Д.14})$$

4. ЕЛІПТИЧНІ ФУНКЦІЇ ЯКОБІ вводяться за допомогою обернення функції $F(\varphi, k)$ відносно амплітуди φ :

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = F(\varphi, k), \quad \varphi = \text{am}(x, k). \quad (\text{Д.15})$$

Функція $\text{am}(x, k)$ називається *амплітудою Якобі*. Очевидно, функції $F(\varphi, k)$ та $\text{am}(x, k)$ є взаємно оберненими:

$$\text{am}(F(\varphi, k), k) = \varphi, \quad F(\text{am}(x, k), k) = x,$$

або у розгорнутому вигляді

$$x = \int_0^{\text{am}(x, k)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x'}}.$$

Означення еліптичних функцій Якобі:

$$\text{sn}(x, k) = \sin \text{am}(x, k), \quad \text{cn}(x, k) = \cos \text{am}(x, k), \quad \text{dn}(x, k) = [1 - k^2 \sin^2 \text{am}(x, k)]^{1/2}. \quad (\text{Д.16})$$

називаються відповідно *синусом амплітуди*, *косинусом амплітуди* та *дельтою амплітуди*. Очевидно, $\text{am}(-x, k) = -\text{am}(x, k)$, тому

$$\text{sn}(-x, k) = -\text{sn}(x, k), \quad \text{cn}(-x, k) = \text{cn}(x, k), \quad \text{dn}(-x, k) = \text{dn}(x, k).$$

Періодичність тригонометричних функцій, які породжують функції Якобі, успадковуються і останніми. Дійсно, якщо $F(\varphi, k) = x$, то

$$F(\varphi + 2\pi, k) = F(\varphi, k) + 4K = x + 4K, \quad \text{тому} \quad \varphi + 2\pi = \operatorname{am}(x + 4K, k)$$

або $\operatorname{am}(x, k) + 2\pi = \operatorname{am}(x + 4K, k)$, звідки для еліптичного синуса

$$\operatorname{sn}(x, k) = \sin(\operatorname{am}(x, k)) = \sin[\operatorname{am}(x + 4K, k) - 2\pi] = \sin[\operatorname{am}(x + 4K, k)] = \operatorname{sn}(x + 4K, k).$$

Для дійсного аргументу x та модуля $0 \leq k \leq 1$ період $4K$ буде дійсною величиною (і логічно замінює період 2π тригонометричних функцій, число $K(k)$ грає роль $\pi/2$ у тому ж контексті).

З означення еліптичних функцій випливає, що їх коренями будуть вирази:

$$\operatorname{sn}(2Kn_1 + 2iK'n_2) = 0, \quad \operatorname{cn}((2n_1 + 1)K + 2iK'n_2) = 0,$$

що аналогічно $\sin(\pi n_1) = 0$ та $\cos[(2n_1 + 1)\frac{\pi}{2}] = 0$.

• **Граничні випадки:**

Випадок $k = 0$: тоді $\operatorname{am}(x, 0) = x$ і

$$\operatorname{sn}(x, 0) = \sin x, \quad \operatorname{cn}(x, 0) = \cos x, \quad \operatorname{dn}(x, 0) = 1, \quad (\text{Д.17})$$

функції співпадають з тригонометричними, період буде $4K(0) = 2\pi$.

Випадок $k = 1$: тоді $\operatorname{am}(x, 1) = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2}$ і

$$\operatorname{sn}(x, 1) = \operatorname{th} x, \quad \operatorname{cn}(x, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{dn}(x, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad (\text{Д.18})$$

функції виражаються через гіперболічні. Період буде нескінченним, $4K(1) = \infty$. На графіку границя $k \rightarrow \infty$ виражається тим, що перший корінь $\operatorname{sn}(x, k)$ прямує до нескінченності (інші не означені на дійсній осі). У тригонометричних функціях прямування періоду до нескінченності неможливе (точніше некоректне).

• **Формули диференціювання.** Похідні еліптичних функцій Якобі по аргументу легко отримати з прямого означення:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{sn}(x, k) &= \operatorname{cn}(x, k) \operatorname{dn}(x, k), \\ \frac{d}{dx} \operatorname{cn}(x, k) &= -\operatorname{sn}(x, k) \operatorname{dn}(x, k), \\ \frac{d}{dx} \operatorname{dn}(x, k) &= -k^2 \operatorname{sn}(x, k) \operatorname{cn}(x, k). \end{aligned} \quad (\text{Д.19})$$

Очевидно, еліптичні функції Якобі задовольняють диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} \text{рівняння для } \operatorname{sn}(x, k): \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \\ \text{рівняння для } \operatorname{cn}(x, k): \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= (1 - y^2)(k'^2 + k^2 y^2), \\ \text{рівняння для } \operatorname{dn}(x, k): \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= (1 - y^2)(y^2 - k'^2). \end{aligned}$$

• **Ряди Тейлора по x .** Розклади у ряди Тейлора функцій $\operatorname{sn}(x, k)$, $\operatorname{cn}(x, k)$ та $\operatorname{dn}(x, k)$, згідно з прямим означенням (Д.16), отримуються за допомогою розкладу $\operatorname{am}(x, k)$ за правилом розкладу суперпозиції функцій.

$$\operatorname{am}(x, k) = x - \frac{k^2}{3!}x^3 + \frac{k^2(1+k^2)}{5!}x^5 - \dots \quad (\text{Д.20})$$

Такий же результат можна отримати послідовним обчислення похідних $\operatorname{am}(x, k)$.

Для еліптичних функцій Якобі отримаємо, згідно з їх означеннями:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x, k) &= x - \frac{1+k^2}{3!}x^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}x^5 - \dots, \\ \operatorname{cn}(x, k) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1+4k^2}{4!}x^4 - \dots, \\ \operatorname{dn}(x, k) &= 1 - \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^2(1+k^2)}{4!}x^4 - \dots \end{aligned} \quad (\text{Д.21})$$

ДОДАТОК Е

Диференціальні операції з векторами

1.	Означення диференціальних операцій у декартових координатах.	589
2.	Диференціальні операції другого порядку.	591
3.	Перетворення та обчислення виразів з похідними.	592
4.	Диференціальні операції у криволінійних координатах	593

1. ОЗНАЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ У ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ. Основні диференціальні операції у прямокутних декартових координатах мають вигляд

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{градієнт}) \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{похідна по напрямку } \vec{v}) \quad (\text{E.2})$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{дивергенція}) \quad (\text{E.3})$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{ротор}) \quad (\text{E.4})$$

Тут аргументом векторного поля \vec{A} та скалярної функції f є компоненти радіус-вектора $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Записуються основні диференціальні операції через векторний диференціальний оператор “набла”

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

дія якого на різні об’єкти визначається як їх функціональними властивостями, так і способом множення на оператор $\vec{\nabla}$ (для скалярних функцій множення — числове, для векторнозначних — скалярне, векторне або тензорне). Якщо не зазначено обернене, то вважається, що оператор $\vec{\nabla}$ діє на найближчий справа від себе аргумент. Якщо неможливо впорядкувати множники саме в такий спосіб, то аргумент $\vec{\nabla}$ прийнято підкреслювати, наприклад $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \underline{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla}$. Такої домовленості зручно дотримуватись для виконання проміжних алгебраїчних перетворень.

Оскільки оператор $\vec{\nabla}$ є похідною першого порядку, то дія оператора $\vec{\nabla}$ на добуток довільної природи є узагальненням відомого з математичного аналізу правила Лейбніца для диференціювання добутків функцій. До такого запису завжди

можна прийти, вибравши систему координат. У математичному аналізі у випадку функцій однієї змінної правило Лейбніца записується у вигляді

$$\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = f(x) \frac{d g(x)}{d x} + g(x) \frac{d f(x)}{d x},$$

або, керуючись уведеною вище домовленістю,

$$\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = \frac{d}{dx} [\underline{f(x)} g(x) + f(x) \underline{g(x)}]$$

(кількість доданків у правій частині співпадає з числом множників у лівій). При такій формі запису не підкреслений множник вважається сталим і його можна винести за оператор похідної.

Аналогічно поступають і у випадку оператора $\vec{\nabla}$, приймаючи до уваги тип множення (числовий, скалярний чи векторний) при винесенні сталого множника за оператор диференціювання. Потім виконуються алгебраїчні перетворення, метою яких є приведення похідної та її операнда до стандартного виду (так, щоб у підкресленні операнда не було необхідності). Зміст цієї процедури полягає у розбиванні перетворення на дві дії:

- використання правила Лейбніца “з підкресленням”;
- алгебраїчне перетворення виразу.

Приведемо найбільш поширені форми правила Лейбніца. Результатом добутку функцій є функція, дія оператора $\vec{\nabla}$ зводиться до множення вектора $\vec{\nabla}$ на число. Правило Лейбніца таке ж, як і для звичайної похідної:

$$\vec{\nabla}(\varphi f) = f \vec{\nabla} \varphi + \varphi \vec{\nabla} f. \quad (\text{E.5})$$

Для добутку функції φ на вектор \vec{A} , оскільки результатом є вектор, то оператор діятиме за допомогою векторного або скалярного добутку:

$$\text{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi, \quad (\text{E.6})$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} \varphi. \quad (\text{E.7})$$

Добуток векторів \vec{A} та \vec{B} може бути двох типів. Для векторного добутку можна говорити про два способи множення на оператор $\vec{\nabla}$:

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}, \quad (\text{E.8})$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (\text{E.9})$$

Для скалярного добутку спосіб дії один:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (\text{E.10})$$

зокрема,

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{A}^2 = \vec{A} \times \text{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}. \quad (\text{E.11})$$

Похідна за напрямком $\frac{\partial}{\partial A} = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ є скалярним оператором і її дія на добутки описується стандартним правилом Лейбніца, наприклад

$$\frac{\partial}{\partial A}(\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\frac{\partial}{\partial A} \vec{B} \right) \times \vec{C} + \vec{B} \times \left(\frac{\partial}{\partial A} \vec{C} \right) \equiv -\vec{C} \times \frac{\partial}{\partial A} \vec{B} + \vec{B} \times \frac{\partial}{\partial A} \vec{C},$$

і т. п.

Векторне поле з властивостями

$$\operatorname{div} \vec{A} \neq 0, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = 0,$$

називається *потенціальним*, а поле

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{A} \neq 0,$$

— *вихоровим*. Згідно з теоремою Гельмгольца довільне поле можна розкласти на суму потенціального та вихорового. Довільне потенціальне поле може бути записане у вигляді градієнта деякої скалярної функції (потенціалу).

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. Повторна дія оператора $\vec{\nabla}$ на об'єкт приводить до похідної другого порядку. Векторна природа диференціального оператора $\vec{\nabla}$ накладає певні обмеження на конструювання різних похідних другого порядку через спосіб множення. Якщо аргументом оператора є число, то похідна може бути тільки градієнтом. Для вектора диференціювання дає ротор чи дивергенцію. У обох випадках можлива також похідна за напрямком деякого вектора, але це питання краще аналізувати окремо.

Таким чином, після повторного диференціювання функції φ отримаємо:

$$\varphi \rightarrow \vec{\nabla} \varphi \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \equiv \operatorname{div} \vec{\nabla} \varphi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \varphi, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) \equiv \operatorname{rot} \vec{\nabla} \varphi = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \varphi = 0 \end{cases}$$

Якщо перша похідна вектора \vec{A} була дивергенцією, то наступне диференціювання можливе за правилом градієнта:

$$\vec{A} \rightarrow \operatorname{div} \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A},$$

для ротора є дві можливості:

$$\vec{A} \rightarrow \operatorname{rot} \vec{A} \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \equiv 0 \\ \vec{\nabla} \times (\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}. \end{cases}$$

Повторне диференціювання за правилом похідної по напрямку відповідатиме звичайному правилу Лейбніца.

Скалярний диференціальний оператор другого порядку $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, який виникає після повторного диференціювання скаляру називається *оператором Лапласа* і позначається

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2.$$

У прямокутній декартовій системі координат має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оскільки оператор Δ є по суті похідною по напрямку самого себе, то у декартових координатах він однаково діятиме на скаляри та вектори:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta\vec{A} = \vec{e}_x\Delta A_x + \vec{e}_y\Delta A_y + \vec{e}_z\Delta A_z,$$

тому що у декартових координатах базис є сталим, у правій частині останньої формули кожна компонента вектора диференціюється як скалярна функція.

Інваріантна форма запису оператора Лапласа у вигляді повторного диференціювання для скалярів та векторів буде різною. У першому випадку

$$\Delta\varphi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) = \operatorname{div} \vec{\nabla}\varphi. \quad (\text{E.12})$$

Для векторного аргументу перетворимо формулу для повторного ротора:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta\vec{A},$$

тому

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (\text{E.13})$$

3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ВИРАЗІВ З ПОХІДНИМИ. Пошук похідних (градієнта, ротора, дивергенції та їх комбінацій) від явно заданих функцій можна проводити, записуючи їх у декартових координатах і безпосередньо здійснюючи диференціювання. Однак для об'єктів, які можна подати у вигляді добутків, доцільно спочатку скористатися відповідною векторною тотожністю (правилом Лейбніца) і звести задачу пошуку похідної до явного диференціювання максимально простих функцій. Відмітимо, що у більшості випадків доцільно не стільки використовувати векторну тотожність, скільки повторювати частину дій по її виведенню.

При такому підході процедура пошуку градієнта, ротора та дивергенції аналогічна звичайному диференціюванню з використанням таблиці похідних елементарних функцій. Останні обчислюються попередньо, згідно з прямим означенням диференціальних операцій у декартових координатах. До “елементарних” похідних можна віднести, наприклад, $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r})$, $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$, $\vec{\nabla}r$, $\operatorname{div} \vec{r}$, $\operatorname{rot} \vec{r}$, а також деякі вирази, коли функція під похідною залежить лише від $r = |\vec{r}|$, а саме: $\varphi(r)$, $\operatorname{div} \vec{A}(r)$, $\operatorname{rot} \vec{A}(r)$, $\Delta\varphi(r)$, $\Delta\vec{A}(r)$.

Згідно з означенням у прямокутних координатах,

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3, \quad \operatorname{rot} \vec{r} = 0. \quad (\text{E.14})$$

Очевидно, ці результати будуть справедливими і у загальному випадку.

Аналогічно для сталого вектора \vec{a} :

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(xa_x + ya_y + za_z).$$

У прямокутних координатах сталий вектор має сталі компоненти, тому $\vec{\nabla}(xa_x) = a_x \vec{\nabla}x = a_x \vec{e}_x$ і

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const}. \quad (\text{E.15})$$

Таким самим способом можна показати, що

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{a} \quad (\text{E.16})$$

для довільного вектора \vec{a} .

Розглянемо похідні комбінацій, які залежать тільки від модуля радіус-вектора. Для градієнта матимемо:

$$\vec{\nabla}\varphi(r) = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dr} \left(\vec{e}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial r}{\partial z} \right).$$

За означенням $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тому $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ та $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$, звідки

$$\vec{\nabla}\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \left(\vec{e}_x \frac{x}{r} + \vec{e}_y \frac{y}{r} + \vec{e}_z \frac{z}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r} \varphi'(r). \quad (\text{E.17})$$

Аналогічно можна отримати формулу для пошуку градієнта складної функції:

$$\vec{\nabla}f(g(\vec{r})) = \left. \frac{df(g)}{dg} \right|_{g=g(\vec{r})} \cdot \vec{\nabla}g(\vec{r}). \quad (\text{E.18})$$

Вираз (E.17) є її частинним випадком, $\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}$.

Тим же способом доводяться тотожності для інших похідних першого порядку:

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{A}'(r), \quad \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{A}'(r). \quad (\text{E.19})$$

Більш загальне правило диференціювання складної функції має вигляд:

$$\text{div } \vec{A}(g(\vec{r})) = \vec{\nabla}g(\vec{r}) \cdot \vec{A}'(g)|_{g=g(\vec{r})}, \quad \text{rot } \vec{A}(g(\vec{r})) = \vec{\nabla}g(\vec{r}) \times \vec{A}'(g)|_{g=g(\vec{r})}. \quad (\text{E.20})$$

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ У КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ Основні властивості диференціальних операцій у криволінійних координатах суттєво не відрізняються від операцій у декартових координатах. Насамперед, зберігаються всі інваріантні співвідношення (незалежні від вибору базису), зокрема правила диференціювання добутків. По цій причині основні підходи до розв'язування задач — ті самі, що і у випадку векторних полів, заданих у декартовому базисі.

Єдина відмінність криволінійного базису від декартового полягає в тому, що криволінійний базис — локальний (залежить від точки простору) і використовувати формули (E.1)–(E.4), які є справедливими для декартових координат, не можна. Базисні вектори \vec{e}_i залежать від координат q_i і разом з координатами векторів підлягають диференціюванню. Наприклад для дивергенції векторного поля $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$, використовуючи векторну тотожність, можна записати:

$$\text{div } \vec{A} = \text{div} \sum_{i=1}^3 A_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \text{div} (A_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (A_i \text{div } \vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla} A_i),$$

у декартових координатах перший доданок відсутній. Аналогічно для ротора

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \operatorname{rot}(A_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (A_i \operatorname{rot} \vec{e}_i - \vec{e}_i \times \vec{\nabla} A_i).$$

Для отримання вигляду дивергенції та ротора у ортогональних криволінійних координатах потрібно мати вираз для градієнта функції, а також дивергенцію та ротор базисних векторів. Нижче приведена найпростіша з процедур виведення, яка характерна саме для ортогонального базису.

Розглянемо градієнт координати q_i за означенням. Вважаючи, що $q_i = q_i(\vec{r})$, отримаємо у декартових координатах:

$$\vec{\nabla} q_i(\vec{r}) = \vec{e}_x \frac{\partial q_i(\vec{r})}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial q_i(\vec{r})}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial q_i(\vec{r})}{\partial z}.$$

У криволінійних координатах

$$\vec{\nabla} q_i(\vec{r}) = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3, \quad \alpha_i = \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla} q_i.$$

Компоненти розкладу, згідно з означенням вектора базису та властивостями ортогональності, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \vec{e}_k \cdot \vec{\nabla} q_i = \frac{1}{H_k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \cdot \left(\vec{e}_x \frac{\partial q_i(\vec{r})}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial q_i(\vec{r})}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial q_i(\vec{r})}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{H_k} \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial z} \right) = \frac{1}{H_k} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \frac{1}{H_i} \delta_{ik}, \end{aligned}$$

У результаті,

$$\vec{\nabla} q_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{e}_k}{H_k} \delta_{ik} = \frac{\vec{e}_i}{H_i}. \quad (\text{E.21})$$

Формула для градієнта, згідно з правилом диференціювання складної функції:

$$\vec{\nabla} \varphi(q(\vec{r})) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \vec{\nabla} q_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}.$$

Для пошуку $\operatorname{rot} \vec{e}_i$ та $\operatorname{div} \vec{e}_i$ скористаємось відомим виразом для $\vec{\nabla} q_i$. Обчислюючи ротор градієнта, маємо:

$$\operatorname{rot} \vec{\nabla} q_i = \operatorname{rot} \frac{\vec{e}_i}{H_i} = \frac{1}{H_i} \operatorname{rot} \vec{e}_i - \vec{e}_i \times \vec{\nabla} \frac{1}{H_i} = \frac{1}{H_i} \operatorname{rot} \vec{e}_i + \vec{e}_i \times \frac{\vec{\nabla} H_i}{H_i^2} = 0,$$

звідки

$$\operatorname{rot} \vec{e}_i = \frac{\vec{\nabla} H_i \times \vec{e}_i}{H_i}.$$

Дивергенцію можна отримати по відомій формулі ротора та властивості ортогональності базису. Оскільки $\vec{e}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_j \times \vec{e}_k$, то

$$\operatorname{div} \vec{e}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \operatorname{div}(\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\vec{e}_k \cdot \operatorname{rot} \vec{e}_j - \vec{e}_j \cdot \operatorname{rot} \vec{e}_k)$$

Підстановка виразу для ротора дає:

$$\operatorname{div} \vec{e}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left[\frac{1}{H_j} \vec{e}_k \cdot (\vec{\nabla} H_j \times \vec{e}_j) - \frac{1}{H_k} \vec{e}_j \cdot (\vec{\nabla} H_k \times \vec{e}_k) \right].$$

Результат зручно записати для різних векторів окремо:

$$\operatorname{div} \vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right),$$

інші вирази отримуються циклічними перестановками.

Підстановка $\operatorname{rot} \vec{e}_i$ та $\operatorname{div} \vec{e}_i$ приводить до загальних формул, які мають вигляд:

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\vec{e}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}, \quad (\text{E.22})$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1 A_2 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_3)}{\partial q_3} \right), \quad (\text{E.23})$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{e}_1}{H_2 H_3} & \frac{\vec{e}_2}{H_1 H_3} & \frac{\vec{e}_3}{H_1 H_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 H_1 & A_2 H_2 & A_3 H_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{pmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 H_1 & A_2 H_2 & A_3 H_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.24})$$

Оператор Лапласа для скалярних функцій:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{E.25})$$

Зручність використання криволінійної системи координат (порівняно з декартовою) у деяких задачах викликана особливістю заданого векторного поля. Наприклад, центрально-симетричне поле у координатах (x, y, z) має вигляд $\vec{A}(x, y, z) = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot f(r)/r$, (три компоненти), тоді як у сферичних координатах (r, θ, φ) : $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \vec{e}_r f(r)$ (одна компонента). Кількість доданків у виразах для ротора та дивергенції такого поля визначається числом відмінних від нуля його компонент.

Наведемо основні векторні операції у найбільш поширених системах координат.

1) циліндричні координати:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (\text{E.26})$$

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{E.27})$$

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - r \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z, \quad (\text{E.28})$$

$$\Delta f(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (\text{E.29})$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi + \Delta A_z \vec{e}_z, \quad (\text{E.30})$$

де операція ΔA_α обчислюється за формулою (E.29);

2) сферичні координати:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (\text{E.31})$$

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\text{E.32})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = & \frac{\vec{e}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ & + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

$$\Delta f(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{E.34})$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}(\vec{r}) = & \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\theta \\ & + \left[\Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \text{ctg } \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \right] \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

де операція ΔA_α обчислюється за формулою (E.34).

Загальна формула для оператора Лапласа векторного поля досить громіздка і тут не наводиться.

ДОДАТОК Є

Кватерніони

1.	Комплексні числа.	598
2.	Комплексні числа та евклідова геометрія.	600
3.	Узагальнення комплексних чисел.	601
4.	Означення простору кватерніонів.	602
5.	Особливості добутку кватерніонів.	604
6.	Спряження та модуль для кватерніонів.	606
7.	Матрична реалізація алгебри кватерніонів.	608
8.	Тригонометрична форма запису та формула Ейлера.	610
9.	Просторові кватерніони, вектори та тривимірні повороти.	612
10.	Група поворотів у просторі \mathbb{R}^3	615

Кватерніони було введено Гамільтоном у 50-х роках XIX століття¹ як узагальнення ідеї комплексного числа, однак у 80-х роках XIX століття відомий фізик Гіббс показав, що вони однозначно відповідають алгебраїчним властивостям тривимірних векторів. Більш того, операція множення кватерніонів прямо відповідала новій на той час операції векторного добутку. Саме тоді і було означено звичні зараз векторний та скалярний добутки, і більшість фізичних законів були сформульовані у векторному вигляді.

Не зважаючи на природність та інтуїтивну простоту векторної форми запису співвідношень, кватерніонна форма інколи зручніша, особливо у проміжних обчисленнях. У класичній механіці її можна застосовувати у випадках, коли розглядається перетворення повороту системи координат відносно довільної осі. На відміну від матриці переходу, яка складається з косинусів кутів між осями старої та нової системи координат, кватерніонний варіант перетворення у явній формі включає інформацію про вісь та кут повороту. Зокрема, у механіці абсолютно твердого тіла як орієнтаційні координати можна використати матриці повороту на кути Ейлера у кватерніонній формі (інакше кажучи, параметри Келі-Клейна).

За своєю природою кватерніони є чотиривимірними об'єктами, що дозволяє сформулювати механіку теорії відносності у простій та компактній формі. Для тривимірної механіки Ньютона також можна застосувати кватерніонний формалізм, але у більшості випадків зручніше користуватися евклідовими векторами як базовими об'єктами.

У цьому додатку дається означення кватерніонів та розглядаються їх основні властивості. Наведений огляд жодним чином не претендує на математичну строгість, його мета — поверхневе ознайомлення та тому рівні, на якому кватерніонний формалізм можна використовувати у елементарних задачах теоретичної фізики (на так званому “фізичному рівні строгості”), зокрема у класичній та релятивістській механіці. Щоб не

¹ W. Hamilton, 1843.

заглиблюватись у математичний бік теорії, будемо обережно використовувати псевдо-терміни “співставлення” і “відповідність” для відображень множин та просторів замість прийнятих у математичній літературі гомео-, ізоморфізмів та інших, точніших за змістом понять. Більш послідовний і строгий виклад та аналіз широкого кола задач (які тут не розглядаються) можна знайти в наведеній літературі.

Для зручності спочатку згадаємо формальне означення комплексного числа як надбудову над полем дійсних чисел, і потім за тією самою схемою означимо кватерніони.

Література для додаткового читання: [49], [?], [51], [52], [53].

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА. Комплексним числом z називається впорядкована пара² дійсних чисел (x, y) з наступними операціями додавання та множення на дійсні числа:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{Є.1})$$

а також та внутрішнього множення

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (\text{Є.2})$$

Комплексні числа утворюють *поле* \mathbb{C} . Із означення випливає комутативність операцій додавання та множення:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

їх асоціативність:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3,$$

а також дистрибутивність:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Число $x \in \mathbb{R}$ називається *дійсною* частиною числа $z \in \mathbb{C}$, а $y \in \mathbb{R}$ — *уявною*. Беручи до уваги властивості операції додавання, розіб'ємо число z на дві частини:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1). \quad (\text{Є.3})$$

Числа $(1, 0)$ та $(0, 1)$ є базисними елементами на множині \mathbb{C} . Оскільки для чисел вигляду $(x, 0)$ добуток є числом того самого типу, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$, то такі числа утворюють поле, а операції додавання та множення повністю збігаються з аналогічними операціями для дійсних чисел, тому $(x, 0)$ можна ототожнити з дійсним числом $x \in \mathbb{R}$. Зокрема, базисний елемент $(1, 0)$ ототожнюється з дійсним числом 1 і називається *дійсною одиницею*. Другий базисний елемент $(0, 1)$ позначається i й називається *уявною одиницею*. Розклад числа z по базисних елементах множини \mathbb{C} називається *алгебраїчною формою запису* комплексного числа:

$$z = x + iy. \quad (\text{Є.4})$$

² Тобто два елементи, для яких вказаний порядок, змінювати який не можна.

Операції множення можна означити за допомогою базисних елементів

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = (1, 0), \quad (1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1), \quad (0, 1) \cdot (0, 1) = -(1, 0), \quad (\text{Є.5})$$

або

$$1 \cdot 1 = 1^2 = 1, \quad 1 \cdot i = i, \quad i \cdot i = i^2 = -1,$$

а потім поширити на довільні числа за допомогою дистрибутивного закону множення (який дає правило розкривання дужок) та властивостей операції додавання:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Так само, як і для дійсних чисел, у алгебрі комплексних чисел можна задати поняття модуля числа (довжини, норми) та означити операцію ділення. Для цього введемо операцію спряження числа z , для якої немає аналога у множині \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} * : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ z &\rightarrow z^* = (x + iy)^* = x - iy, \end{aligned}$$

спряження зводиться до зміни знаку уявної одиниці. На рівні базису спряження означає:

$$1^* = 1, \quad i^* = -i,$$

спряження дійсного числа x збігається з x , тому за своїм означенням така операція стосується тільки уявних частин.

Очевидно, операція спряження комутує з операціями множення та додавання:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

Добуток числа z на спряжене z^* є дійсною величиною, що можна показати явно:

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2,$$

за аналогією з дійсними числами *модулем комплексного числа* називається величина $|z|$, означена як

$$|z|^2 = z \cdot z^* \quad (\text{для дійсних чисел } |x|^2 = x \cdot x). \quad (\text{Є.6})$$

Легко перевірити, що для такого означення виконуються всі стандартні властивості модуля як довжини, зокрема нерівність трикутника $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Крім того,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (\text{Є.7})$$

За допомогою операції спряження можна отримати вираз для числа z^{-1} , оберненого до z , яке означене як

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1.$$

домножаючи обидві частини рівності на z^* ліворуч, отримаємо:

$$z^* \cdot (z \cdot z^{-1}) = (z^* \cdot z) \cdot z^{-1} = |z|^2 z^{-1} = z^* \Rightarrow z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad (\text{Є.8})$$

тобто обернення числа можна означити для у всіх випадках, крім $z = (0, 0)$.

У теоретичній фізиці, навіть у таких “суто дійсних” теоріях, як ньютонівська механіка (де з самого початку є тільки дійсні величини), комплексні числа широко і успішно використовуються, не тільки тоді, коли вони виникають природним чином (тобто у процесі розв’язку рівнянь типу $x^2 = -1$), а і у випадках, коли можна скористатись їх геометричною інтерпретацією.

2. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЕВКЛІДОВА ГЕОМЕТРІЯ. Кожному комплексному числу можна співставити точку декартової площини \mathbb{R}^2 з координатами (x, y) , яка теж є впорядкованою парою дійсних чисел. Якщо комплексному числу $z = (x, y)$ відповідає вектор $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, то сумі чисел $z_1 + z_2$ відповідатиме вектор $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

Для побудови аналогії добутку $z_1 z_2$ у просторі векторів можна перейти до полярних координат (r, φ) у площині xy , тоді

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

і записати комплексне число z у тригонометричній формі

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r^2 = |z|^2 = x^2 + y^2. \quad (\text{Є.9})$$

Для числа одиничної довжини (з $r = 1$) можна користуватись формулою Ейлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

це породжує експоненційну форму запису у загальному випадку:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}. \quad (\text{Є.10})$$

Тоді добуток $z_1 z_2$ можна записати так:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r e^{i\varphi}, \quad r = r_1 r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

тобто добутку $z_1 z_2$ відповідає вектор з довжиною $r_1 r_2$ та кутом $\varphi_1 + \varphi_2$ (сумарним).

Серед лінійних операцій векторного аналізу та лінійної алгебри немає операції з двома векторами, яка приводить до такого результату за винятком випадку, коли модуль одного з множників дорівнює одиниці. Дійсно, добуток комплексних чисел $z_\alpha = e^{i\alpha}$ та $z = r e^{i\varphi}$, який має вигляд

$$z_\alpha \cdot z = r e^{i(\varphi + \alpha)},$$

результат добутку можна інтерпретувати як вектор, який отримано з \vec{r} поворотом на кут α навколо початку координат проти годинникової стрілки.

Для векторів це перетворення записується у матричній формі:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathbf{A} \vec{r}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

або, після обчислення добутку:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Відповідне комплексне число в термінах полярних координат матиме вигляд:

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = r(\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) + ir(\cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha) \\ &= r[\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)] = re^{i(\varphi + \alpha)}. \end{aligned}$$

Слід підкреслити, що аналогія між двовимірними векторами та комплексними числами не є повною хоча б за тією причиною, що для векторів не можна означити операцію ділення, тим більше, що операція множення у них просто відсутня — алгебраїчним добутком векторів як елементів поля має бути вектор (у \mathbb{R}^2 є тільки скалярний добуток, який є числом, а не вектором — це суто геометричне, а не алгебраїчне поняття, яке фактично задає кут між векторами). Схожість в основному спирається на однакові операції покомпонентного додавання.

3. Узагальнення комплексних чисел. Поле комплексних чисел \mathbb{C} за своєю структурою є більш багатим, ніж простір \mathbb{R}^2 , саме через означену операцію множення. Серед комплексних чисел є не тільки самі вектори (x, y) з \mathbb{R}^2 , а і об'єкти, які визначають ортогональні перетворення (повороти) у площині xy . Дія повороту зводиться у множини \mathbb{C} до операції множення, яку задано у цій же множині.

Поворот не можна означити в термінах одних тільки векторів, оскільки матриці поворотів є зовнішніми по відношенню до елементів множини \mathbb{R}^2 об'єктами. Операція множення векторів на матрицю якраз і компенсує відсутність операцій множення та ділення самих векторів (операцію ділення для матриць можна розуміти як множення на обернену матрицю).

Із останнього зауваження можна зрозуміти, за рахунок чого, власне, відбулося узагальнення після переходу від векторів до комплексних чисел. Як множини, простори \mathbb{R}^2 та \mathbb{C} тотожні, оскільки будуються за допомогою одного набору елементів декартового добутку $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (впорядкованих пар), але суттєво відрізняються за математичною структурою. Остання задається *операціями* на множині.

Дійсно, простір \mathbb{R}^2 є лінійним простором, оскільки в ньому задано операцію додавання та множення на число. Окрім лінійних операцій у ньому задано також евклідову структуру за допомогою операції скалярного добутку (лінійний простір \mathbb{R}^2 з евклідовою структурою перетворюється на евклідовий простір). Простір \mathbb{C} також є лінійним простором, але на ньому задається не евклідова, а мультиплікативна структура, тобто операція добутку (алгебраїчного, добуток елементів \mathbb{C} — знову елемент \mathbb{C}), яка перетворює множину \mathbb{C} у поле. Зауважимо, що вихідний простір \mathbb{R} , з якого будуються \mathbb{R}^2 та \mathbb{C} через декартів добуток та доозначення операцій, є полем.

Зауваження. У просторі \mathbb{C} можна ввести евклідову структуру, яка збігається за формою з \mathbb{R}^2 :

$$(z_1, z_2) = \frac{1}{2} (z_1^* z_2 + z_1 z_2^*) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \equiv \vec{r}_i \cdot \vec{r}_2,$$

але, на відміну від \mathbb{R}^2 , наочної форми “теорема Піфагора” такий скалярний добуток у просторі \mathbb{C} , звичайно, не передбачає (як і зображення “кута” між комплексними числами). ┘

Зауваження. На множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ можна означити добуток інакше, наприклад для дійсної одиниці взяти знову $(1, 0)^2 = (1, 0)$ і

$$(0, 1)^2 = (1, 0) \quad \text{або} \quad (0, 1)^2 = (0, 0)$$

для уявної. Отримана множина називається множиною подвійних та дуальних чисел відповідно. Однак у цих множинах не можна означити обернений елемент, тому вони не являють особливого інтересу для теоретичної фізики. \lrcorner

Задача 7.1. Побудувати множини подвійних та дуальних чисел, означити в них добутки за допомогою правил множення базисних елементів (за аналогією з комплексними числами).

Викладені вище спостереження наводять на думку, що процедуру отримання нового простору з лінійних просторів A та B можна сформулювати так:

- 1) Задати декартів добуток $C = A \times B$ як набір впорядкованих пар $c = (a, b)$.
- 2) Перенести лінійні операції над $a \in A$ та $b \in B$, які означені у окремих просторах на елементи $(a, 0)$ та $(0, b)$ і поширити на всі елементи $c = (a, b)$.
- 3) Якщо у просторах A та B є операція множення, то задати операцію множення у просторі C , використовуючи вже існуючі добутки в A та B причому так, що $c_1 \cdot c_2 \in C$. Тоді множина C стає полем.

Інший варіант — задання евклідової структури на C , якщо простори A та B евклідові. Тоді множина C стає евклідовим простором.

Очевидно, найпростішим узагальненням комплексних чисел за цією процедурою є задання операції добутку на просторах типу $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ тощо, для певного способу означення добутку будуть отримані *гіперкомплексні числа*. На перший погляд здається, що простір $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ після належного доозначення добутку буде аналогічним \mathbb{R}^3 і відповідатиме діям з тривимірними векторами, але при детальному розгляді виявляється, що це не так. У отриманій множині, незалежно від того, як означено добуток, у загальному випадку не можна побудувати обернений елемент.

Задання мультиплікативної структури на просторі $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ породжує кватерніони.

4. ОЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРУ КВАТЕРНІОНІВ. Кватерніом³ \mathbf{q} називається впорядкований набір чотирьох дійсних чисел (q_0, q_1, q_2, q_3) з поелементними операціями додавання і множення на дійсні числа:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_0, a_1, a_2, a_3) + (b_0, b_1, b_2, b_3) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \\ \alpha \mathbf{a} &= (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \quad (\text{де } \alpha \in \mathbb{R} \text{ та } a_i, b_i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

та своєрідною операцією множення, яку зручно означити через базисні елементи.

Враховуючи правило додавання, виділимо базисні елементи за аналогією з (Є.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0(1, 0, 0, 0) + q_1(0, 1, 0, 0) + q_2(0, 0, 1, 0) + q_3(0, 0, 0, 1) \\ &= q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

³ Від лат. quaterni — по чотири.

де введено базисні елементи

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Означимо добутки базисних елементів так:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i, \quad (\text{Є.11})$$

або, використовуючи означення символу Леві-Чивіта:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_1 = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i, \quad (\text{Є.12})$$

де латинські індекси набувають значень від 1 до 3 (по індексах, що повторюються, передбачається сума). Для однакових елементів:

$$\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_0. \quad (\text{Є.13})$$

Означення добутків можна записати у вигляді “таблиці Піфагора”:

	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_0	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	$-\mathbf{e}_0$	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_2$
\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	\mathbf{e}_1
\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$

(порядок множення — елемент стовпчика ліворуч риски на елемент рядка над рискою).

Для довільних двох кватерніонів матимемо (вважаючи, що дужки можна розкривати як звичайно):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \left(a_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(b_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j \right) \\ &= a_0 b_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^3 a_i b_0 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_0) + \sum_{i=1}^3 b_i a_0 (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= \left(a_0 b_0 - \sum_{i=1}^3 a_i b_i \right) \mathbf{e}_0 + \sum_{k=1}^3 (a_0 b_k + a_k b_0 + \varepsilon_{ijk} a_i b_j) \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

У результаті, добутком двох кватерніонів \mathbf{a} та \mathbf{b} є кватерніон $\mathbf{q} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ з компонентами

$$q_0 = a_0 b_0 - a_i b_i, \quad q_k = a_0 b_k + a_k b_0 + \varepsilon_{ijk} a_i b_j, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (\text{Є.14})$$

Множина кватерніонів утворює простір з операціями додавання та множення, який позначається \mathbb{H} .

Так само, як і у випадку поля \mathbb{C} , базисний елемент \mathbf{e}_0 еквівалентний дійсній одиниці і часто позначається просто 1. Інші елементи \mathbf{e}_i відіграють роль уявних одиниць,

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1, \quad \text{причому } \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = -1.$$

Таким чином, кватерніони утворюються лінійними комбінаціями типу

$$\mathbf{a} = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i := a_0 + a_i \mathbf{e}_i \quad (\text{Є.15})$$

(надалі у таких виразах знак суми опускатиметься).

Отримана структура і є узагальненням множини \mathbb{C} , де замість однієї уявної одиниці виникає три. Як і у випадку комплексних чисел, кватерніон $\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0$ ототожнюється з дійсним числом q_0 . Кожний кватерніон можна розбити на суму дійсної q_0 та уявної $q_i \mathbf{e}_i$ величин, які у даному випадку називаються *скалярною* та *векторною* частинами кватерніона⁴ (спеціальних загальноприйнятих позначень для них немає). Скалярна частина породжується першим множником декартового добутку $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, а векторна — другим. Множина сучасних кватерніонів замкнена відносно операцій множення та додавання і збігається з простором дійсних чисел \mathbb{R} .

Довільний кватерніон \mathbf{q} можна записати у вигляді суми скалярного та векторного кватерніонів:

$$\mathbf{q} = (q_0) + (q_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{q}^{(s)} + \mathbf{q}^{(v)},$$

тому у множині \mathbb{H} можна виділити дві підмножини таких елементів:

$$\mathbb{H}_s = \{q \in \mathbb{H} : q_i = 0\} \quad (\text{скалярні}), \quad \mathbb{H}_v = \{q \in \mathbb{H} : q_0 = 0\} \quad (\text{векторні})$$

всі елементи \mathbb{H} відбудовуються сумами елементів \mathbb{H}_s та \mathbb{H}_v . У такому випадку кажуть, що простір \mathbb{H} є *прямою сумою* підпросторів \mathbb{H}_s та \mathbb{H}_v :

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_s \oplus \mathbb{H}_v.$$

Оскільки векторні кватерніони породжуються елементами \mathbb{R}^3 , то трійку чисел (q_1, q_2, q_3) зручно позначати за допомогою одного вектора \vec{q} . З такою домовленістю запис

$$\mathbf{q} = (q_0, \vec{q}) \quad \text{означає} \quad \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3),$$

і добуток \mathbf{a} та \mathbf{b} має вигляд:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}). \quad (\text{Є.16})$$

Таких позначень ми будемо дотримуватись і далі.

Для зручності введемо нумерацію компонент кватерніона та базисних елементів за допомогою грецьких індексів, які набувають значень від 0 до 3, тоді

$$\mathbf{a} = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu \mathbf{e}_\mu = a_\mu \mathbf{e}_\mu,$$

такі позначення зручні при використанні кватерніонів у теорії відносності.

⁴ У теорії відносності скалярна частина називається *часовою*, а векторна — *просторовою*.

Зауваження. Базисні елементи часто позначають $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, однак у нашому випадку зручніше дотримуватись інших позначень, щоб відрізнити базисний елемент \mathbb{H} від уявної одиниці (це різні речі). \lrcorner

5. ОСОБЛИВОСТІ ДОБУТКУ КВАТЕРНІОНІВ. На відміну від комплексних чисел, добуток у просторі \mathbb{H} не комутативний, тому такий простір називається *тілом* (тіло з комутативним добутком утворює поле), однак асоціативність зберігається:

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1, \quad q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3) = (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3,$$

а співвідношень дистрибутивності потрібно вказувати два, залежності від положення зовнішнього множника:

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3, \quad (q_2 + q_3) \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 + q_3 \cdot q_1.$$

Ці властивості легко довести прямою підстановкою. Покажемо, наприклад, некомутативність:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + (a_0 b_k + a_k b_0 + \varepsilon_{ijk} a_i b_j) \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + (a_0 b_k + a_k b_0 - \varepsilon_{ijk} a_i b_j) \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

відмінність буде у останнього доданку (знак змінюється за рахунок властивостей символу Леві-Чивіта). Тільки добуток суто скалярних кватерніонів комутативний:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{для } \mathbf{a} = a_0 \mathbf{e}_0 \text{ та } \mathbf{b} = b_0 \mathbf{e}_0,$$

а для добутку векторних кватерніонів немає певної властивості (анти)комутативності:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k, \quad \text{для } \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \text{ та } \mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i.$$

Добуток кватерніонів різних типів (скалярного на векторний) є векторним кватерніоном:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_0 b_i) \mathbf{e}_i, \quad \text{для } \mathbf{a} = a_0 \mathbf{e}_0 \text{ та } \mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$$

Таким чином,

$$\mathbb{H}_s \cdot \mathbb{H}_s \subset \mathbb{H}_s, \quad \mathbb{H}_v \cdot \mathbb{H}_v \subset \mathbb{H} = \mathbb{H}_s \oplus \mathbb{H}_v, \quad \mathbb{H}_s \cdot \mathbb{H}_v \subset \mathbb{H}_v.$$

Некомутативність добутку кватерніонів свідчить про те, що елементи \mathbb{H} потрібно уявляти більше за аналогією з матрицями або тензорами (для добутку яких характерна некомутативність), а не зі звичайними числами. У дійсності алгебру \mathbb{H} можна однозначно реалізувати у матричному вигляді (див. далі).

Задача 7.2. Довести властивості асоціативності та дистрибутивності.

Зауваження. З означення добутків елементів базису випливає, що

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = -2\delta_{ij} \mathbf{e}_0, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Множина базисних елементів з такою властивістю породжує *алгебру Кліффорда*⁵, яка широко використовується у квантовій теорії поля. У загальному означенні алгебри Кліффорда у правій частині записується подвоєна метрика простору:

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta}\mathbf{e}_0, \quad \alpha, \beta = \overline{0, 3},$$

у нашому випадку матриця η — діагональною з елементами $(1, -1, -1, -1)$ на головній діагоналі. Така метрика описує простір Мінковського.

Алгебра, для якої $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0$ називається *алгеброю Грассмана*⁶, це природний “антипод” звичних нам з класичного аналізу числових алгебр.

Ці математичні структури виникли значно пізніше робіт Гамільтона (у 60 – 70-і роки XIX століття), і після створення квантової механіки стали відігравати визначну роль у фізиці елементарних частинок. Зокрема антикомутуючими грассмановими числами описуються елементарні частинки з напівцілим спіном (електрон та інші). Для антикомутуючих алгебр побудовано свій аналіз, який багато в чому повторює звичайний — там теж можна означити похідну, границю, інтеграл, але досить своєрідним способом (див., зокрема, роботи Ф. Березіна). \lrcorner

6. СПРЯЖЕННЯ ТА МОДУЛЬ ДЛЯ КВАТЕРНІОНІВ. За аналогією з комплексними числами, означимо операцію спряження кватерніонів як зміну знаку просторової частини:

ОЗНАЧЕННЯ Є.1. *Спряженням у просторі \mathbb{H} називається перетворення:*

$$\begin{aligned} \dagger : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H}, \\ \mathbf{q} &\rightarrow \mathbf{q}^\dagger = (q_0 + q_i \mathbf{e}_i)^\dagger = q_0 - q_i \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

Перехід до спряженого кватерніона — зміна знаку при всіх уявних одиницях⁷. Очевидно, спряження стосується тільки векторних кватерніонів:

$$\mathbb{H}_s^\dagger = \mathbb{H}_s, \quad \mathbb{H}_v^\dagger = -\mathbb{H}_v.$$

Таки поведінка елементів \mathbb{H}_s та \mathbb{H}_v дозволяє дати більш просте означення цих підпросторів, без вказання координат:

$$\mathbb{H}_s = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q}\}, \quad \mathbb{H}_v = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \mathbf{q}^\dagger = -\mathbf{q}\}.$$

Операція спряження у просторі \mathbb{H} (як і в \mathbb{C}) лінійна,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^\dagger = \mathbf{a}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger, \quad (\alpha \mathbf{a})^\dagger = \alpha \mathbf{a}^\dagger \quad (\text{при } \alpha \in \mathbb{R}),$$

однак через некомутативність добутку є одна відмінність:

ЛЕМА Є.1. *Має місце рівність:*

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^\dagger = \mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{a}^\dagger. \tag{Є.17}$$

⁵ W. K. Clifford, 1878.

⁶ H. Grassmann, 1862

⁷ Де б вони не були.

□ Дійсно, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^\dagger = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}) - [a_0 b_i + a_i b_0 + (\vec{a} \times \vec{b})_i] \mathbf{e}_i$, а права частина (Є.17) рівна

$$b^\dagger \cdot a^\dagger = (b_0 - b_i \mathbf{e}_i) \cdot (a_0 - a_i \mathbf{e}_i) = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}) - (a_0 b_i + a_i b_0 + (\vec{a} \times \vec{b})_i) \mathbf{e}_i \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^\dagger,$$

що і треба було довести. ■

Добуток кватерніона на спряжений є дійсним числом:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\dagger = (q_0 + q_i \mathbf{e}_i) \cdot (q_0 - q_i \mathbf{e}_i) = q_0^2 + \vec{q}^2,$$

і може бути взятий як означення модуля (довжини):

ОЗНАЧЕННЯ Є.2. Модулем кватерніона називається дійсне число $|\mathbf{q}|$, означене як

$$|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q}^\dagger \cdot \mathbf{q}. \quad (\text{Є.18})$$

Очевидно, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^\dagger = \mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, звідки

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|. \quad (\text{Є.19})$$

Зауваження. Для суто векторного кватерніона $\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{H}_v$,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\dagger = \vec{q}^2 > 0, \quad \text{однак} \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\dagger = -\vec{q}^2 < 0.$$

це означає, що квадрат суто векторного кватерніона — дійсна, але від’ємна величиною, і навпаки, якщо $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} < 0$, то \mathbf{q} — суто векторний кватерніон.

Таку особливість квадрату можна використовувати як критерій належності кватерніона \mathbf{q} до однієї з множин \mathbb{H}_s та \mathbb{H}_v :

$$\mathbb{H}_s = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \mathbf{q}^2 > 0\}, \quad \mathbb{H}_v = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \mathbf{q}^2 < 0\}.$$

┘

Зауваження. Простір \mathbb{H} можна перетворити у евклідовий, задавши скалярний добуток. Легко перевірити, що

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^\dagger)$$

задовольняє всі аксіоми скалярного добутку. ┘

Як і у випадку комплексних чисел, означимо обернений кватерніон як

$$\mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q} = 1.$$

Для пошуку вигляду \mathbf{q}^{-1} домножимо обидві частини рівності праворуч на \mathbf{q}^\dagger , тоді:

$$\mathbf{q}^\dagger = (\mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q}^{-1} \cdot (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\dagger) = \mathbf{q}^{-1} |\mathbf{q}|^2,$$

звідки

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^\dagger}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{q_0 - q_i \mathbf{e}_i}{q_0^2 + \vec{q}^2}, \quad (\text{Є.20})$$

що відповідає формулі (Є.8) для комплексних чисел. Очевидно, такий самий результат можна отримати і з формули $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = 1$.

Задача 7.3. Довести, що $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{-1}$.

Означення частки кватерніонів неоднозначне, оскільки вираз $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ можна розуміти як $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{-1}$, так і $\mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}$ (взагалі кажучи, це не одне і те саме). Введемо поняття лівої та правої частки:

Означення Є.3. Лівою часткою кватерніонів \mathbf{a} та \mathbf{b}^{-1} називається кватерніон \mathbf{q} такий, що $\mathbf{b} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a}$, тоді $\mathbf{q} = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}$ (знаменник — ліворуч).

Правою часткою кватерніонів \mathbf{a} та \mathbf{b}^{-1} називається кватерніон \mathbf{q} такий, що $\mathbf{q} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}$, тоді $\mathbf{q} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{-1}$ (знаменник — праворуч).

Використовуючи означення оберненого кватерніона, отримаємо:

$$\mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{-1} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\dagger}{|\mathbf{b}|^2}.$$

7. МАТРИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГЕБРИ КВАТЕРНІОНІВ. Розглянемо реалізацію кватерніонів у вигляді двовимірних комплексних матриць. Покажемо, що відображення

$$\begin{aligned} U : \mathbb{H} &\rightarrow M(2, \mathbb{C}) \\ \mathbf{q} &\rightarrow A(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad \text{де} \quad U(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & q_2 + iq_1 \\ -q_2 + iq_1 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix} \quad (\text{Є.21})$$

задає у просторі квадратних двовимірних комплексних матриць $M(2, \mathbb{C})$ алгебраїчну структуру, яка тотожна структурі \mathbb{H} .

Для цього потрібно знайти образ елементів базису при такому перетворенні і перевірити правила множення. Очевидно,

$$U(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Образи базисних елементів виражаються через матриці

$$\sigma_x = -iU(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = -iU(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = -iU(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

які були введені В. Паулі у 1925 році для опису спіну електрона у квантовій механіці і називаються *матрицями Паулі*.

Легко показати, що для представлення базису \mathbf{e}_α у просторі матриць виконуються ті самі правила множення, що і для кватерніонів. На рівні матриць Паулі:

$$\sigma_i^2 = \mathbf{1}, \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{при } i \neq j). \quad (\text{Є.22})$$

Оскільки елементи базису з точністю до множника збігаються з матрицями Паулі, то твердження правильне.

Рівність (Є.22) часто записують за допомогою комутатора та антикомутатора матриць:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}.$$

Задача 7.4. Довести властивості (Є.22) матриць Паулі.

Задача 7.5. Довести рівності:

$$\text{Sp } \sigma_i = 0, \quad \text{Sp } (\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij}, \quad \text{Sp } (\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2i\varepsilon_{ijk}.$$

Задача 7.6. Довести рівність:

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_k = \delta_{ij} \sigma_k - \delta_{ik} \sigma_j + i\varepsilon_{ijk},$$

зокрема $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i$.

Таким чином, алгебра кватерніонів однозначно відповідає звичайним операціям додавання та множення двовимірних комплексних матриць вигляду (Є.21) і навпаки, довільній матриці (Є.21) можна однозначно співставити кватерніон. Простори з такою відповідністю називають *ізоморфними* (тотожними за своєю внутрішньою структурою). Це означає, що всі обчислення з кватерніонами можна виконувати в термінах матриць і навпаки. Матриці, яким відповідають кватерніони, мають вигляд:

$$U = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad \forall u, v \in \mathbb{C}. \quad (\text{Є.23})$$

Матриці Паулі разом з одиничним елементом задають базис у просторі таких матриць.

Відповідність кватерніону та матриці зручно записувати за допомогою матриць Паулі. Обернені вирази для базисних елементів через матриці σ_i :

$$U(\mathbf{e}_1) = i\sigma_1, \quad U(\mathbf{e}_2) = i\sigma_2, \quad U(\mathbf{e}_3) = i\sigma_3,$$

тоді

$$U(\mathbf{q}) = q_0 U(1) + q_1 U(\mathbf{e}_1) + q_2 U(\mathbf{e}_2) + q_3 U(\mathbf{e}_3) = q_0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{q}, \quad (\text{Є.24})$$

де $\vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z$ — вектор з матричними компонентами, для нього:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = 3, \quad \vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}. \quad (\text{Є.25})$$

Задача 7.7. Довести “магічну” властивість матриць Паулі: $\vec{\sigma} = -\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2$.

Розглянемо зміст інших понять, які було означено для кватерніонів у просторі матриць. Перехід до спряженого виразу:

$$U(\mathbf{e}_i^\dagger) \equiv -U(\mathbf{e}_i) = i\sigma_i,$$

але така операція не зводиться до простого комплексного спряження, оскільки $\sigma_i^* \neq \sigma_i$. У просторі комплексних матриць існує близька за змістом операція *ермітового спряження*, що означена як перехід до транспонованої комплексно спряженої матриці:

$$A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T.$$

Матриці з властивістю $A^\dagger = A$ називаються *ермітовими*, або *самоспряженими*⁸. Легко показати, що матриці Паулі ермітові,

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i,$$

тому

$$U(\mathbf{e}_i^\dagger) = i\sigma_i = -(i\sigma_i)^\dagger = U(\mathbf{e}_i)^\dagger,$$

тобто спряження у просторі кватерніонів відповідає ермітовому спряженню у просторі матриць, з цієї причини обидві операції позначені одним символом. Таким чином,

$$U(\mathbf{q}^\dagger) = U(\mathbf{q})^\dagger, \quad \text{або} \quad (q_0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{q})^\dagger = q_0 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{q}. \quad (\text{Є.26})$$

Модуль кватерніона безпосередньо виражається через визначник відповідної матриці:

$$|\mathbf{q}|^2 = q_0^2 + \vec{q}^2 = \det U(\mathbf{q}). \quad (\text{Є.27})$$

Дійсно,

$$\det U(\mathbf{q}) = (q_0 + iq_3)(q_0 - iq_3) + (q_2 + iq_1)(q_2 - iq_1) = q_0^2 + q_3^2 + q_2^2 + q_1^2.$$

8. ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА ЗАПИСУ ТА ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА. Побудуємо форму запису, аналогічну тригонометричній формі представлення комплексних чисел, для кватерніонів, модуль яких дорівнює одиниці:

$$q_0^2 + \vec{q}^2 = 1.$$

Такі кватерніони утворюють підмножину в \mathbb{H} , яку позначимо \mathbb{H}_1 . Остання формула означає, що кожний з доданків дорівнює квадрату тригонометричної функції, тобто існує кут φ , для якого

$$q_0 = \cos \varphi, \quad |\vec{q}| = \sin \varphi,$$

тоді $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ має вигляд:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_i \mathbf{e}_i = q_0 + |\vec{q}| \frac{q_i}{|\vec{q}|} \mathbf{e}_i = \cos \varphi + \sin \varphi \frac{q_i}{|\vec{q}|} \mathbf{e}_i.$$

Нехай $\vec{n} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ — одиничний вектор у напрямку вектора \vec{q} , у цих позначеннях

$$\mathbf{q} = \cos \varphi + (n_i \mathbf{e}_i) \sin \varphi = \cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi, \quad (\text{Є.28})$$

де \mathbf{n} — просторовий кватерніон. Це є аналог формули $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ для кватерніонів одиничної довжини; у матричному представленні матимемо:

$$U(\mathbf{q}) = \cos \varphi + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \varphi. \quad (\text{Є.29})$$

⁸ У квантовій механіці ермітові матриці є найближчими аналогами класичних спостережуваних (дійсних) величин.

Одиничний кватерніон характеризується кутом та одиничним напрямком у тривимірному просторі.

У звичайній формулі Ейлера фігурує експонента, виражена через тригонометричних функцій. Щоб отримати її аналог для кватерніонів візьмемо за основу звичайну формулу Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

яка зводить обчислення до комбінації з степенями і підставимо в якості аргументу векторний кватерніон $\alpha \mathbf{n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ дійсним числом). Оскільки кватерніон $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ є чисто векторним, то

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^\dagger = -1, \quad \mathbf{n}^3 = \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^4 = \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = 1, \dots$$

тобто парні степені \mathbf{n} є числами, а непарні — пропорційні до \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}^{2k} = (-1)^k, \quad \mathbf{n}^{2k+1} = (-1)^k \mathbf{n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \mathbf{n}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \mathbf{n})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \mathbf{n}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \mathbf{n}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \mathbf{n}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} \mathbf{n}^{2k} + \mathbf{e}_k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо формулу Ейлера:

$$\exp(\alpha \mathbf{n}) = \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha. \quad (\text{Є.30})$$

Доведений вираз є узагальненням формули Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Більш явно це проявляється у представленні матриць Паулі.

Задача 7.8. Довести безпосередньо, що для матриць Паулі

$$\exp[\alpha (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})] = \cosh \alpha + (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sinh \alpha, \quad \exp[i\alpha (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})] = \cos \alpha + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin \alpha.$$

Зауваження. Оскільки $\mathbf{n}^2 = -1$, то одиничний векторний кватерніон можна інтерпретувати як тривимірне узагальнення уявної одиниці, але, на відміну від числа i , “уявна одиниця” \mathbf{n} характеризується не тільки від’ємним квадратом, а і напрямком у тривимірному просторі. Сума $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ є розкладом по базису уявних одиниць простору \mathbb{H} .

Добуток двох різних векторних “уявних одиниць” \mathbf{n}_a та \mathbf{n}_b має вигляд:

$$\mathbf{n}_c = \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = -\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b + (\vec{n}_a \times \vec{n}_b)_k \mathbf{e}_k,$$

кватерніон \mathbf{n}_c також має одиничну довжину, але у загальному випадку не є “уявною одиницею” за винятком випадку $\vec{n}_a \perp \vec{n}_b$, коли вектори \vec{n}_a , \vec{n}_b та \vec{n}_c утворюють праву трійку. Така властивість свідчить про відносність вибору базису уявних елементів у просторі \mathbb{H} , які можна пов’язати з довільною трійкою взаємно ортогональних векторів у просторі \mathbb{R}^3 . Крім того, для переходу до іншого базису можна використати довільну ортогональну заміну координат. \square

Кватерніон довільної довжини можна звести до елементу \mathbb{H}_1 винесенням множника $|\mathbf{q}|$ за дужки. Тоді:

$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}| [\cos \varphi + \sin \varphi (n_i \mathbf{e}_i)] = |\mathbf{q}| e^{\mathbf{n}\varphi}, \quad (\text{Є.31})$$

де

$$\cos \varphi = \frac{q_0}{|\mathbf{q}|}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{q}|}{|\mathbf{q}|}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad \mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i.$$

На рівні матриць Паулі:

$$U(\mathbf{q}) = q_0 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{q} = |\mathbf{q}| (\cos \varphi + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin \varphi) = |\mathbf{q}| e^{i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\varphi}.$$

Задача 7.9. Нехай одиничний вектор \vec{n} задано сферичними кутами (θ, φ) . Показати, що:

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Задача 7.10. Побудувати (формально) розклад вектора $\vec{\sigma}$ по ортам сферичної системи координат.

9. ПРОСТОРОВІ КВАТЕРНІОНИ, ВЕКТОРИ ТА ТРИВИМІРНІ ПОВОРОТИ. Просторові кватерніони $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{H}_v$ утворюють підмножину у просторі \mathbb{H} , яка будується з елементів простору \mathbb{R}^3 . Можна стверджувати і обернене, таким елементам однозначно можна співставити тривимірні векторам $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Як було показано вище, модулі просторових кватерніонів дорівнюють модулям відповідних векторів.

Особливе місце при розгляді просторових кватерніонів займають інші елементи \mathbb{H} , які мають одиничну довжину:

$$\mathbb{H}_1 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : |\mathbf{q}| = 1\}.$$

Виявляється, що як і у випадку комплексних чисел, одиничні кватерніони задають деякі перетворення у просторі, що породжує \mathbb{H} . Має місце наступне важливе твердження:

ЛЕМА Є.2. Перетворення підпростору \mathbb{H}_v , яке задається одиничним кватерніоном $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ і має вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_q : H_v &\rightarrow H_v \\ \mathbf{a} &\rightarrow \alpha_q(\mathbf{a}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1} \end{aligned}$$

зберігає довжину кватерніона \mathbf{a} , тобто $|\alpha_q(\mathbf{a})| = |\mathbf{a}|$.

□ Покажемо спочатку, що кватерніон $\alpha_q(\mathbf{a})$ належить підмножині \mathbb{H}_v . Дійсно, оскільки $\mathbf{a}^\dagger = -\mathbf{a}$, то

$$(\alpha_q \mathbf{a})^\dagger = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1})^\dagger = (\mathbf{q}^{-1})^\dagger \cdot \mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{q}^{-1} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1} = -\alpha_q(\mathbf{a}),$$

оскільки для елементів \mathbb{H}_1 , згідно з (Є.20), обернений елемент рівний спряженому, тобто $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^\dagger$.

Враховуючи властивість $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, отримаємо:

$$|\alpha_q \mathbf{a}| = |\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1}| = |\mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}| = |\mathbf{a}|,$$

що і треба було довести. ■

У тривимірному просторі \mathbb{R}^3 перетворення, які зберігають довжину векторів, є або поворотами навколо осі, або відбиваннями у площині. У дійсності для перетворень, про які йдеться у доведеному твердженні, реалізується друга властивість.

Для доведення цього факту знайдемо добуток $\mathbf{a}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1}$ у явній формі. Нехай

$$\mathbf{q} = \cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi, \quad \mathbf{n} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad \text{та} \quad \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i.$$

Для спрощення обчислень розкладемо вектор \vec{a} на поздовжню та поперечну компоненти по відношенню до напрямку \vec{n} :

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}, \quad \vec{a}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}), \quad \vec{a}_{\perp} = \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}).$$

Тоді

$$\mathbf{a}' = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}^{-1} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{q}^{-1}.$$

Розглянемо спочатку перший доданок з поздовжньою компонентою. За означенням:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\parallel} &= (\cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi) \cdot \mathbf{a}_{\parallel} = -\sin \varphi (\vec{n} \cdot \vec{a}_{\parallel}) + [\cos \varphi a_i^{\parallel} + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_{\parallel})]_i \mathbf{e}_i \\ &\equiv -\sin \varphi (\vec{n} \cdot \vec{a}_{\parallel}) + \cos \varphi \mathbf{a}_{\parallel} = -\sin \varphi (\vec{a} \cdot \vec{n}) + \cos \varphi \mathbf{a}_{\parallel}. \end{aligned}$$

Враховуючи останній множник $\mathbf{q}^{-1} = \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}^{-1} &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\parallel}) \cdot \mathbf{q}^{-1} = [-\sin \varphi (\vec{a} \cdot \vec{n}) + \cos \varphi \mathbf{a}_{\parallel}] \cdot [\cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi] \\ &= [\sin^2 \varphi n_i (\vec{a} \cdot \vec{n}) + a_i^{\parallel} \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi (\vec{a}_{\parallel} \times \vec{n})_i] \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{a}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n})$ та $\vec{a}_{\parallel} \times \vec{n} = 0$, то

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{a}_{\parallel},$$

тобто доданок з поздовжньою компонентою не змінюється в результаті перетворення.

Розглянемо так само перетворення поперечної компоненти векторного кватерніону. Матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{\perp} &= (\cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi) \cdot \mathbf{a}_{\perp} = -\sin \varphi (\vec{n} \cdot \vec{a}_{\perp}) + [\cos \varphi \vec{a} + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_{\perp})]_i \mathbf{e}_i \\ &= [\cos \varphi a_i^{\perp} + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_{\perp})_i] \mathbf{e}_i = \cos \varphi \mathbf{a}_{\perp} + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_{\perp})_i \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

У результаті обчислення добутку отримаємо чисто просторовий кватерніон, який відповідає вектору

$$\vec{x} = \cos \varphi \vec{a}_{\perp} + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_{\perp}).$$

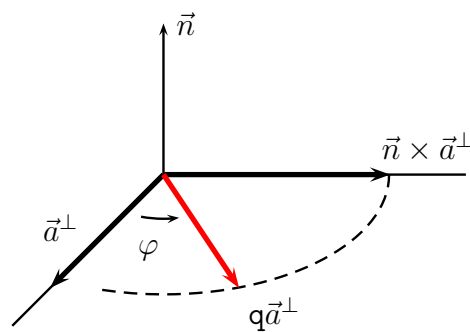


Рис. Є.1. Геометричний зміст перетворення $\mathbf{a}_\perp \rightarrow \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_\perp$.

Геометрично ця рівність означає розклад вектора \vec{x} по ортогональному базису \vec{a}^\perp та $(\vec{n} \times \vec{a}^\perp)$ у площині, перпендикулярній вектору \vec{n} (рис. Є.1). Очевидно, довжина вектора \vec{x} дорівнює $|\vec{a}^\perp|$, і кінці всіх трьох векторів \vec{x} , \vec{a}^\perp та $(\vec{n} \times \vec{a}^\perp)$ належать колу. Оскільки кут між векторами \vec{x} та \vec{a}^\perp дорівнює φ , то перетворення $\mathbf{a}_\perp \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_\perp$ еквівалентне повороту вектора \vec{a}^\perp на кут φ навколо напрямку \vec{n} .

Аналогічно обчислюється добуток $\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_\perp$ з останнім множником \mathbf{q}^{-1} . Отримаємо, тимчасово позначивши знайдений добуток через \mathbf{x} (векторний кватерніон):

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_\perp) \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{x} \cdot (\cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi) = (\vec{x} \cdot \vec{n}) + [x_i \cos \varphi - \sin \varphi (\vec{x} \times \vec{n})_i] \mathbf{e}_i.$$

Оскільки $\vec{x} \perp \vec{n}$, то перший доданок зникає і результат множення буде векторним кватерніоном, який відповідає вектору

$$\vec{y} = \vec{x} \cos \varphi - (\vec{x} \times \vec{n}) \sin \varphi \equiv \vec{x} \cos \varphi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \varphi.$$

Як і вище, вектор \vec{y} отримаємо з вектора \vec{x} поворотом на кут φ навколо осі \vec{n} у тому є напрямку, у якому відбувався поворот вектора \vec{a}_\perp для отримання вектора \vec{x} . Підстановка виразу для вектора \vec{x} дає:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \cos \varphi [\cos \varphi \vec{a}_\perp + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_\perp)] + \sin \varphi (\vec{n} \times [\cos \varphi \vec{a}_\perp + \sin \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_\perp)]) \\ &= \cos^2 \varphi \vec{a}_\perp + 2 \sin \varphi \cos \varphi (\vec{n} \times \vec{a}_\perp) + \sin^2 \varphi \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a}_\perp), \end{aligned}$$

враховуючи, що $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a}_\perp) = \vec{n}(\vec{a}_\perp \cdot \vec{n}) - \vec{a}_\perp \equiv -\vec{a}_\perp$, отримаємо остаточно:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a}'_\perp, \quad \vec{a}'_\perp \rightarrow \cos 2\varphi \vec{a}_\perp + \sin 2\varphi (\vec{n} \times \vec{a}_\perp), \quad (\text{Є.32})$$

тобто вектор \vec{a}'_\perp , який описує повне перетворення є поворотом вектора \vec{a}_\perp на кут 2φ навколо напрямку \vec{n} (рис. Є.2).

Остаточно, перетворення $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1}$ для відповідного вектора \vec{a} має вигляд:

$$\vec{a} \rightarrow \vec{a}' = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \cos 2\varphi \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}) + \sin 2\varphi (\vec{n} \times \vec{a}).$$

Висновок:

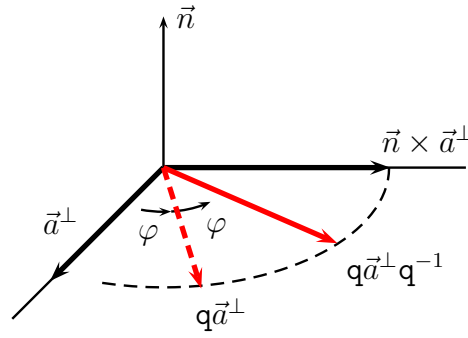


Рис. Є.2. Геометричний зміст перетворення $\mathbf{a}_\perp \rightarrow \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{q}^{-1}$.

Дія одиничного кватерніона

$$\mathbf{q} = \cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi = e^{\mathbf{n}\varphi} \in \mathbb{H}_1$$

на векторний кватерніон $\mathbf{a} \in \mathbb{H}_v$ за правилом

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1} = e^{\mathbf{n}\varphi} \cdot \mathbf{a} \cdot e^{-\mathbf{n}\varphi}$$

однозначно відповідає повороту вектора \vec{a} навколо напрямку \vec{n} на кут 2φ .

Таким чином, серед кватерніонів \mathbb{H} разом з елементами \mathbb{H}_v , які відповідають тривимірним векторам, є також і елементи \mathbb{H}_1 , що відповідають ортогональним перетворенням векторів. Перетворення зводяться до звичайних добутків кватерніонів (аналогічна ситуація була з комплексними числами та двовимірними векторами).

Задача 7.11. Отримати той самий результат у матричній формі за допомогою матриць Паулі.

10. ГРУПА ПОВОРОТІВ У ПРОСТОРИ \mathbb{R}^3 . Повороти у просторі \mathbb{R}^3 описуються за допомогою ортогональних матриць переходу $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ і діють на вектори за звичайним правилом:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathbf{A}\vec{r}.$$

Два послідовно виконані перетворення повороту також можна подати у вигляді перетворення повороту відносно деякої осі. Дійсно, сумарне перетворення

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathbf{A}_1\vec{r} \rightarrow \vec{r}'' = \mathbf{A}_2\vec{r}' = \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\vec{r}) = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)\vec{r}$$

описується матрицею $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, яка теж є ортогональною,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^T \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{1},$$

і може розглядатись як матриця деякого іншого повороту. Тому тривимірні ортогональні повороти утворюють групу, яка називається *спеціальною ортогональною групою* і позначається $\text{SO}(3)$. Матриці поворотів утворюють матричне представлення цієї групи:

$$\text{SO}(3) = \{\mathbf{A} : \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{1}\}.$$

Для заданих поворотів $\mathbf{A}_{1,2}$ можна визначити напрямок та величину результуючого повороту, аналізуючи структуру матриці $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$. Технічно інколи це зробити досить важко, оскільки потрібна інформація закладено до матриці повороту в неявній формі.

Розглянемо, як проявляються групові властивості поворотів у кватерніонному представленні, де поворот *явно* задається через напрямок \vec{n} та величину кута повороту φ у вигляді одиничного кватерніона. Виконаємо послідовно два перетворення повороту, що задаються кватерніонами $\mathbf{q}_{1,2} \in \mathbb{H}_1$:

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}_1^{-1} \rightarrow \mathbf{a}'' = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a}' \cdot \mathbf{q}_2^{-1} = \mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}_1^{-1}) \cdot \mathbf{q}_2^{-1}.$$

Перегруповуючи множники без зміни порядку, отримаємо:

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}'' = (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{q}_1^{-1} \cdot \mathbf{q}_2^{-1}).$$

Але $\mathbf{q}_1^{-1} \cdot \mathbf{q}_2^{-1} = (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1)^{-1}$, послідовність двох перетворень $\mathbf{q}_{1,2}$ можна записати у вигляді одного перетворення з кватерніоном $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1$:

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}'' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}^{-1}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1.$$

Кватерніон \mathbf{q} , очевидно, також буде одиничним. В результаті,

Перетворення у просторі \mathbb{H} , які задаються елементами $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$, утворюють групу, яка відповідає групі тривимірних ортогональних поворотів $SO(3)$ у просторі \mathbb{R}^3 .

Для прикладу побудуємо сумарний поворот (визначимо напрямок та величину) для двох послідовних поворотів навколо осей \vec{a} та \vec{b} з кутами φ_a та φ_b відповідно. Загальний поворот відповідає добутку

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\varphi_b}{2} + \mathbf{b} \sin \frac{\varphi_b}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{\varphi_a}{2} + \mathbf{a} \sin \frac{\varphi_a}{2} \right) = e^{\mathbf{b}\varphi_b/2} e^{\mathbf{a}\varphi_a/2}$$

(спочатку поворот \vec{a} , потім \vec{b}) і описує деякий поворот навколо осі \vec{c} на кут φ_c , тобто

$$e^{c\varphi_c/2} = e^{\mathbf{b}\varphi_b/2} e^{\mathbf{a}\varphi_a/2}.$$

Для визначення \vec{c} та φ_c знайдемо добуток у правій частині:

$$\begin{aligned} e^{c\varphi_c/2} &= \left(\cos \frac{\varphi_b}{2} + \mathbf{b} \sin \frac{\varphi_b}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{\varphi_a}{2} + \mathbf{a} \sin \frac{\varphi_a}{2} \right) = \cos \frac{\varphi_a}{2} \cos \frac{\varphi_b}{2} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \sin \frac{\varphi_a}{2} \sin \frac{\varphi_b}{2} \\ &\quad + \left[\vec{a} \sin \frac{\varphi_a}{2} \cos \frac{\varphi_b}{2} + \vec{b} \sin \frac{\varphi_b}{2} \cos \frac{\varphi_a}{2} - (\vec{a} \times \vec{b}) \sin \frac{\varphi_a}{2} \sin \frac{\varphi_b}{2} \right]_i \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Звідси, порівнюючи праву та ліву частини, отримаємо систему рівнянь на величини \vec{c} та φ_c :

$$\begin{cases} \cos \frac{\varphi_c}{2} = \cos \frac{\varphi_a}{2} \cos \frac{\varphi_b}{2} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \sin \frac{\varphi_a}{2} \sin \frac{\varphi_b}{2}, \\ \vec{c} \sin \frac{\varphi_c}{2} = \vec{a} \sin \frac{\varphi_a}{2} \cos \frac{\varphi_b}{2} + \vec{b} \sin \frac{\varphi_b}{2} \cos \frac{\varphi_a}{2} - (\vec{a} \times \vec{b}) \sin \frac{\varphi_a}{2} \sin \frac{\varphi_b}{2} \end{cases}$$

як легко розв'язати послідовно (виразивши спочатку кут φ_c з першого рівняння).

Про повну тотожність груп тривимірних поворотів та групи, яка утворюється кватерніонами, строго кажучи, говорити не можна. Дійсно, у просторі \mathbb{R}^3 тотожним перетворенням буде довільний поворот з кутом, кратним 2π . У кватерніонній формі запису кути поворотів подвоєні, тому перетворення \mathbb{H}_v з кутами, кратними π відповідають тотожним перетворенням у просторі \mathbb{R}^3 . Для ілюстрації запишемо перетворення повороту навколо осі z на кут φ обома способами. Матриця повороту буде мати вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а відповідний кватерніон запишеться як

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\varphi}{2},$$

або у матричному представленні

$$U(\mathbf{q}) = \cos \frac{\varphi}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, повороту на кут $\varphi = 2\pi$ відповідає одинична ортогональна матриця $\mathbf{A} = 1$, але для кватерніонної версії $U = -1$. Для кута $\varphi = 4\pi$ обидві матриці будуть одиничними. Це означає, що одній ортогональній матриці \mathbf{A} можна співставити два кватерніона у матричному представленні: U та $(-U)$. На результати це ніяк не впливає, оскільки у законі перетворення є два множники U і знак компенсується.

Зауваження. Одна з причин полягає в тому, що така група перетворень описує зміну не тільки векторів, які у фізиці описують частинки з цілим спіном, а і деяких специфічних об'єктів, які називаються *спінорами* і використовуються для опису частинок з напівцілим спіном (електронів та інших)⁹. Повний поворот для спінорів — це кватерніонний поворот на кут 2π , або просторовий на 4π .

У дійсності елементи $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ утворюють групу лінійних перетворень двовимірного комплексного простору \mathbb{C}^2 (його елементи називаються *спінорами*). Група представляється матрицями типу

$$U(q) = \cos \varphi + U(\mathbf{n}) \sin \varphi, \quad \det U(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^2 = 1,$$

тобто це матриці з одиничними визначниками. У іншій формі:

$$U = U(q) = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{C}, \quad |u|^2 + |v|^2 = 1.$$

Дія на елементи \mathbb{C}^2 задається звичайним добутком

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uz_1 + vz_2 \\ -v^*z_1 + u^*z_2 \end{pmatrix}.$$

⁹ Звідси і двійка.

Як і у дійсному випадку, норма елемента \mathbb{C}^2 при такому перетворенні зберігається:

$$|z'_1|^2 + |z'_2|^2 = z'^*_1 z'_1 + z'^*_2 z'_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

(як раз за рахунок того, що визначник матриці перетворення дорівнює одиниці).

Такі перетворення у комплексному просторі \mathbb{C}^2 , що за змістом близькі до ортогональних перетворень у \mathbb{R}^3 , називаються *унітарними перетвореннями*, а відповідні матриці — *унітарними*. Умову ортогональності замінює умова унітарності (її легко перевірити для матриць, що зараз розглядаються):

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \quad \text{або} \quad U^{-1} = U^\dagger.$$

Унітарні перетворення утворюють групу, яка називається *спеціальною унітарною групою* і позначається

$$SU(2) = \{U : U^\dagger U = 1\}$$

Група $SU(2)$ включає, грубо кажучи, “вдвічі більше” перетворень, ніж $SO(3)$.

Що стосується тривимірних векторів, то їм, як було показано вище, співставляються двовимірні матриці із специфічною структурою (еквіваленти векторних кватерніонів). У послідовному розгляді виявляється, що у просторі \mathbb{C}^2 вони є тензорами другого рангу (тому у законі їх перетворення фігурують два множники з матрицями переходу). Спін об'єкту однозначно відповідає рангу тензора, який його описує у просторі \mathbb{C}^2 . Тензори непарного рангу відповідають полям з напівцілим спіном, а парного — з цілим (подвоєний спін збігається з рангом тензора, числом незалежних індексів у \mathbb{C}^2).

Література: [54], [?].

┘

Предметний покажчик

- Абсолютно тверде тіло, 127
Амплітуда коливань, 67
- Базис
 власний, АТТ, 149
 глобальний, 575
 локальний, 578
- Варіаційна (функціональна) похідна, 310
Варіаційний принцип
 Ланцоша, 357
Варіація, 308
 Лі (форми), 319
 значення (дійсна варіація), 319
 перша, 316
 синхронна, 316
- Вектор
 Пойтинга, 503
 Рунге-Ленца, 55
 Рунге-Ленца, 55
 Умова-Пойтинга, 431
 біномалі, 35
 деформації, 407
 енергії-імпульсу, 534
- Величина
 операціональна, 18
 формально-логічна, 18
- Взаємодія, 16
Віріал Клаузіуса, 52
Вісь інерції
 головна, 149
- Генератор перетворення, 330, 378
Гессіан, 479
- Густина
 масова, 420
 масова, енергії, 431
- Дзига
 асиметрична, 149
 кульова, 149
 симетрична, 149
Дзига, 224
Діаграма імпульсів, 101
Діаграма швидкостей, 101
Довжина
 хвилі, 455
Дужки Пуассона, 373
 фундаментальні, 375
Дужки
 Дірака, 490
- Еліптична функція
 Якобі, 586
Еліптичний інтеграл I роду, 583
Еліптичний інтеграл II роду, 583
Еліптичний інтеграл III роду, 584
Енергія
 внутрішня, 429
 кінетична, 48
 повна, 50
 потенціальна, 49
 потенціальна, повна, 50
 спокою, 533
 у механіці Лагранжа, 205
- Закон
 Бернуллі, 462

- Гука, 439, 443, 447, 452
- Кеплера, другий, 81, 98
- Кеплера, перший, 93
- Кеплера, третій, 98
- Нав'є-Стокса, 439
- Нав'є, 458
- Ньютона, другий, 22
- Ньютона, перший, 21
- Ньютона, третій, 23
- Паскаля, 457, 462
- Торрічеллі, 437, 457
- Заряд, 331, 555
- Захоплення частинки, 99
- Збудження системи
 - параметричне, 297
 - силове, 297
- Зв'язок, 117
 - вторинний, 487
 - голономний, неголономний, 118
 - ідеальний, 122
 - первинний, 481
 - стаціонарний, нестаціонарний, 119
 - утримуючий, неутримуючий, 118
- Змінна
 - спряжена, 346
- Ізобаричне наближення, 459
- Імпульс
 - густина, 426
 - системи частинок, 42
 - узагальнений, 174
 - хвильовий, 503
 - частинки, 42
- Інваріантність
 - за формою, 177
- Інтеграл руху, 40
- Інтервал, 522
 - ізотропний, 522
 - просторовий, 522
 - часовий, 522
- Інтерпретація
 - активна, 326
 - пасивна, 326
- Картина
 - Ейлера, 413
- Ейлера, 413
- Лагранжа, 413
- Кватерніон, 602
 - векторна частина, 604
 - модуль, 607
 - скалярна частина, 604
 - спряжений, 606
- Коефіцієнт
 - акомодації, 104
 - термічних напружень, 439
- Коливання
 - акустичні, 270
 - оптичні, 270
 - усталені, 76
- Конфігураційний простір
 - розширений, 322
- Координата
 - Ейлера, 407, 413
 - Лагранжа, 406
 - узагальнена, 169
 - циклічна, 197
 - нормальні, 241
 - ортогональні криволінійні, 578
- Крива
 - скелетна, 292
- Кручення кривої, 36
- Кути Ейлера, 129
- Кут Ейлера
 - власного обертання, 131
 - нутації, 131
 - прецесії, 131
- Кут розсіяння, 101
- Лагранжиан, 499
- Лема Дюбуа-Реймонда (основна лема ва-
ріаційного числення), 312
- Лінія течії, 461
- Лінія
 - вузлів, 129
 - геодезична, 186
 - координатна, 576
- Маса, 22
 - зведена (ефективна), 80
 - поздовжня, 540
 - поперечна, 540

- Матеріальна точка
вільна, 21
- Матерія, 16
- Матриці
Паулі, 608
Паулі, 608
ермітова, 610
переходу, 567
проектор, 172
- Метод
Боголюбова-Крилова, 280
Ляпунова-Пуанкаре, 278
повільно змінних амплітуд, 285
- Механічна система
вироджена, 345, 479
- Миттєва вісь обертання, 136
- Множник
Лагранжа, невизначений, 122
- Мода коливань, 238
- Момент імпульсу
густина, 428
- Момент інерції
головний, 149
- Момент
імпульсу, 45
сили, 46
хвильового імпульсу, 504
- Неізохронність, 282
- Неперервна система, 495
- Нерівність
Юнга, 343
- Нутація, 230
- Обертання
власне, 230
- Оператор
Лапласа, 592
- Параметри
Ламе, 578
Ламе, 446
- Переміщення
віртуальне, 120
дійсне, 120
дійсне, 120
- можливе, 120
- Переріз
захоплення, 109
розсіяння, диференціальний, 107
розсіяння, повний, 108
- Перетворення
Галілея, 26
Лежандра, 340, 341
Лоренца, 518
калібрувальне, 176
калібрувальне, 176, 190
канонічне, 362
ортогональне, 567
точкове, 177
- Період
кутового руху, 87
радіального руху, 87
- Поверхня
абсолютно гладенька, 138
абсолютно шорстка, 138
координатна, 575
- Повна система незалежних операціональ-
них величин, 19
- Подія, 520
- Поле, 16
- Поліус, АТТ, 128
- Постулат
Ейнштейна, 512
- Потенціал, 47
Вебера, 195
відцентровий, 82, 209
ефективний, 82
узагальнений, 193
швидкостей, 464
- Потік
маси, 424
- Потужність, 49
- Похідна
варіаційна, 317
конвективна, 415
локальна, 415
субстанціональна, 415
- Прецесія, 230
регулярна, 230
- Принцип

- Кюрі, 439, 444
- Лапласа, 39
- Мопертюї, 325
- Мюпертюї, 391
- Онзагера, 441, 458
- Пуанкаре, 511
- відносності Галілея, 26
- відносності Пуанкаре, 26
- далекодії, 23
- д'Аламбера, 123
- суперпозиції, 23
- Прицільна відстань, 107
- Простір, 16
 - Мінковського, 524
 - конфігураційний, 169
 - фазовий, 346
 - швидкостей, 354
- Радіус кривизни кривої, 35
- Радіус-вектор, 18
- Резонанс, 70
 - головний (звичайний), 289
 - параметричний, 298
- Реологія, 435
- Реологія, 435
- Речовина, 16
- Рівняння Ейлера
 - динамічні, 154
 - кінематичні, 137
- Рівняння
 - ББГКІ, 418
 - Ван-дер-Ваальса, 437
 - Гамільтона, 346
 - Гамільтона-Якобі, 387
 - Ейлера, 313, 460
 - Кеплера, 97
 - Лагранжа другого роду, 173
 - Лагранжа першого роду, 122
 - Ламе, 448, 451
 - Ліувілля, 384
 - Менделєєва-Клапейрона, 437
 - Мещерського, 44
 - Мурнагана, 437
 - Нав'є-Стокса, 458
 - Френе, 36
 - гідростатики, 462
 - матеріальні, 439
 - неперервності, 418, 424
 - характеристичне, 148
- Рідина
 - баротропна, 459, 474
 - ідеальна, 459, 471
 - нестислива, 459
- Робота
 - інфінітезимальна, 49
- Робота, 50
- Розсіювання частинки, 99
- Рух
 - аперіодичний, 72
 - деформаційний, 407
 - інфінітний, 59, 85
 - інфінітний, 85
 - механічний, 16
 - обертальний, 128, 407
 - одновимірний, 58
 - поступальний, 128, 407
 - фінітний, 53, 59, 85
 - фінітний, період, 60
 - фінітний, 85
- Середовище
 - пружне, 443
 - п'єзопружне, 439
 - суцільне, 403
 - термопружне, 439
- Сила, 18, 19
 - активна, 119
 - внутрішня, 420
 - гіроскопічна, 47
 - дисипативна, 47
 - зовнішня, 420
 - механічної взаємодії, 47
 - механічної взаємодії (ньютонівська), 23
 - нестаціонарна, 47
 - нормальної реакції, 121
 - об'ємна, 420
 - пасивна, 119
 - поверхнева, 421
 - потенціальна, 47

- реактивна, 44
- стаціонарна, 47
- сухого тертя, 121
- узагальнена, 173
- узагальнена непотенціальна, 173
- Символ
 - Крістоффеля, 185
- Симетрія
 - варіаційна, 328
 - калібрувальна, 329
 - конформна, 329
- Система відліку, 18
 - інерціальна, 21
 - лабораторна, 404
 - лабораторна, АТТ, 128
 - полюсу, АТТ, 128
 - центру мас, 45
- Система координат
 - власна, 407
 - лабораторна (*L*-система), 100
 - локальна, 407
- Система центру мас (*C*-система), 100
- Система частинок
 - замкнена, 42
 - ізолювана, 42
- Система
 - вироджена, 186
 - натуральна (склерономна), 185
- Стан
 - механічний, 25
 - механічної системи, 19
 - недеформований, 407
 - рівноваги, 231
 - рівноваги, нестійкий, 232
 - рівноваги, стійкий, 232
 - статичний, 154
- Статистичний ансамбль, 382
- Текучість, 457
- Тензор енергії-імпульсу, 554
- Тензор
 - в'язких сталих, 438
 - деформації, 409
 - інерції, 143, 145
 - матеріальний, 439
 - метричний, 408
 - механічних напружень, 421
 - механічних напружень, 421
 - напружень поля, 504
 - потoku імпульсу, 426
 - потoku моменту імпульсу, 428
 - пружних сталих, 437
 - п'єзоелектричних сталих, 438
 - п'єзомагнітних сталих, 438
- Теорема
 - Лармора, 192
 - Ліувілля, 417
 - Нетер, 555
 - Ньютона, 89
 - Томсона, 463
 - Штейнера, 147
 - віріала, 51
- Терема
 - Ліувілля, 383
 - Ліувілля, 383
- Течія
 - ламінарна, 465
 - турбулентна, 465
- Тіло відліку, 18
- Точка
 - зупинки, 59
 - маркер, 405
 - матеріальна, 17
 - повороту, 59, 85
- Траєкторія, 20
- Фаза, 238
- Фаза коливань, 67
- Формула
 - Пуазейля, 466
 - Пуансо, 133
 - Резерфорда, 114
 - Стокса, 469
 - барометрична, 463
- Функціонал, 306
 - кінематична частиною, 380
 - дії, 316, 389
 - дії, вкорочений, 325
- Функція
 - Гамільтона, 205, 345

Гамільтона, головна, 387
Гамільтона, характеристична, 325, 390
Лагранжа, 173
Рауса, 201
Релея, диссипативна, 196
твірна, 364

Хвиля

плоска, 455

Центр мас

системи частинок, 44

Час, 16

Частинка, 17

фізично нескінченно мала, 404

Частота коливань

власна, 66

Частота

власна, 238

комбінаційна, 280

Час

власний, 521

координатний, 521

Число ступенів вільності, 124

Число ступенів вільності системи, 168

Число

Маха, 473

Рейнольдса, 465

Швидкість

кутова, 133

секторіальна, 81

узагальнена, 169

чотиривимірна, 528

Література

- [1] Г. Голдстейн, *Классическая механика*, М.: Наука, 1975.
- [2] Э. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, М.: ОНТИ, 1937.
- [3] Д. тер Хаар, *Основы гамильтоновой механики*, М.: Наука, 1974.
- [4] Дж. У. Лич, *Классическая механика*, ИЛ, 1961.
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика*, т.1, М.: Наука, 1988.
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, т.2, М.: Наука, 1988.
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, т.6, М.: Наука, 1988.
- [8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, т.7, М.: Наука, 1988.
- [9] Г.Л.Коткин, В.Г.Сербо, *Сборник задач по классической механике*, М.: Наука, 2001.
- [10] И.И.Ольховский, *Курс теоретической механики для физиков*, М.: Наука, 1970.
- [11] И.И.Ольховский, Ю.Г.Павленко, Л.С.Кузьменков, *Задачи по теоретической механике для физиков*, М.: Изд-во МГУ, 1977.
- [12] Ю.Г.Павленко, *Лекции по теоретической механике*, М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [13] Ю.Г.Павленко, *Задачи по теоретической механике*, М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [14] Л. Парс, *Аналитическая динамика*, М.: Наука, 1972.
- [15] Ф.Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, М.: Физматгиз, 1960.
- [16] А. Зоммерфельд, *Механика*, М.: ГИИЛ, 1947.
- [17] К. Ланцош, *Вариационные принципы механики*, М.: "Мир", 1965.
- [18] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1986.
- [19] Л.И. Седов, *Механика сплошной среды*, т. 1, М.: Наука, 1973, т. 2, М.: Наука, 1973.
- [20] Федорченко А.М. Теоретична фізика. т.1. *Класична механіка і електродинаміка*, К.: Вища школа, 1993.
- [21] Гречко Л.Г. , Сугаков В.Й., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М., *Сборник задач по теоретической физике*, М.: Высшая школа, 1984.

Додаткова література

- [22] М. Джеммер, *Понятие массы в классической и современной физике*, М.: Прогресс, 1967.
- [23] Дж. Эллиот, П. Добер, *Симметрия в физике*, Т.1, М.: Мир, 1983.
- [24] Г.Я. Любарский, *Теория групп и физика*, М.: Наука, 1986.
- [25] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М.: Физматгиз, 1964.
- [26] Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н., *Основы теории колебаний*, М.: Наука, 1988.

- [27] Рабинович М.И., Трубецков Д.И., *Введение в теорию колебаний и волн*, М.: Наука, 1984.
- [28] Хакен Г., *Синергетика*, М.: Мир, 1980.
- [29] Швингер Ю., *Квантовая кинематика и динамика*, М.: Наука, 1992.
- [30] Дирак П.А.М., *К созданию квантовой теории поля*, М.: Наука, 1990.
- [31] Дирак П.А.М., *Лекции по квантовой механике*, М.: Мир, 1968.
- [32] Гитман Д.М., Тютин И.В., *Каноническое квантование полей со связями*, М.: Наука, 1986.
- [33] Займан Дж., *Принципы теории твердого тела*, М.: Мир, 1966.
- [34] Киттель Ч., *Введение в физику твердого тела*, М.: Наука, 1978.
- [35] Киттель Ч., *Квантовая теория твердых тел*, М.: Наука, 1967.
- [36] Джексон Дж., *Классическая электродинамика*, М.: Мир, 1965.
- [37] Пановский, Филлипс, *Классическая электродинамика*, М.: Мир, ????
- [38] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., *Квантовая теория поля*, т.1, М.: Мир, 1984.
- [39] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., *Введение в теорию квантованных полей*, М.: Наука, 1984.

Математика

- [40] Морс Ф., Фешбах Г., *Методы теоретической физики, I*, ИЛ, 1958.
- [41] Уиттекер Э.Т., Ватсон Г.Н., *Курс современного анализа, I, II*, ИЛ, 1964.
- [42] Метьюз Дж., Уокер Р., *Математические методы физики*, “Мир”, 1958.
- [43] Курант Р., *Дифференциальные уравнения в частных производных*, “Мир”, 1964.
- [44] Гельфанд И. М., Фомин С. В., *Вариационное исчисление*, М., ГИФМЛ, 1961.
- [45] Эльсгольц Л.Э., *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, М., Наука, 1969.
- [46] Барут, Рончка *Теория представлений групп и ее приложения*, М., Мир, 1980.
- [47] Голод, Клімик *Математические основы теории симметрии*, “Наука”, 2001.
- [48] Федоров Ф.И., *Группа Лоренца*, М., “Наука”, 1979.
- [49] Казанова Г., *Векторная алгебра*, “Мир”, 1979.
- [50] Арнольд В. И., *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спиноров*, МЦН-МО, 2002.
- [51] Курош А.Г., *Курс высшей алгебры*, М.: “Наука”, 1975; Фадеев Д.К., *Лекции по алгебре*, М.: Наука, 1984.
- [52] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А., *Кватернионы в релятивистской физике*, М.: УРСС, 2003.
- [53] Мальцев А.И., *Алгебраические системы*, М.: “Наука”, 1970.
- [54] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия: методы и приложения*, М.: “Наука”, 1986.

Довідники

- [55] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм и произведений*, М., ФМ, 1962.
- [56] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции*, М., “Наука”, 1977.