

Навчальний посібник  
«Фізика нерівноважних відкритих систем»  
Частина 2

Андрій ЛЕСЮК,  
Микола КУЛІШ,  
Оксана ДМИТРЕНКО,  
Андрій МОМОТ,  
Олена ПАВЛЕНКО,  
Ірина ДОРОШЕНКО,  
Андрій МІСЮРА

## ЗМІСТ

Анотація .....	3
<b>1. Дисипативні структури .....</b>	<b>4</b>
<b>2. Стійкість стаціонарних станів. Фазові траєкторії. Атрактори.....</b>	<b>13</b>
<b>3. Нерівноважні фазові переходи.....</b>	<b>29</b>
<b>4. Бістабільні системи .....</b>	<b>38</b>
<b>5. Автоколивні процеси у відкритих системах.....</b>	<b>47</b>
<b>6. Просторово-неоднорідні структури .....</b>	<b>57</b>
<b>7. Автохвильові процеси у відкритих системах .....</b>	<b>72</b>
<b>Список використаної літератури .....</b>	<b>91</b>

## Анотація

У другій частині навчального посібника викладені основні положення феноменологічної теорії нерівноважних процесів у відкритих системах, що включають основи синергетики та процесів самоорганізації. Представлений матеріал відповідає навчальній програмі курсу фізики нерівноважних відкритих систем, що читається студентам 1-го курсу магістратури фізичного факультету в рамках освітніх програм «Медична фізика», «Фізика наносистем», «Квантові комп'ютери, обчислення та інформація».

## 1. Дисипативні структури

При значних відхиленнях термодинамічних систем від стану термодинамічної рівноваги підходи лінійної теорії нерівноважної термодинаміки для опису їх поведінки стають незастосовними. Головною особливістю відкритих систем у станах, далеких від рівноваги, є можливість встановлення одного з декількох стаціонарних станів, що супроводжується кооперативною поведінкою системи з утворенням складних просторових, часових або просторово-часових структур. У фізиці існує багато прикладів подібних впорядкованих станів систем, тому в рамках другої половини курсу ми розглядатимемо лише деякі з них, звертаючи увагу, однак, на загальні особливості та спільні характеристики таких станів в незалежності від природи явищ самоорганізації. У розділі 1 Частини 1 зазначалось, що міждисциплінарна наука, що вивчає дані явища, називається синергетикою, а структури самоорганізації – дисипативними.

Формування структур самоорганізації при необоротних (дисипативних) процесах можливе за певних умов, а саме, як і у випадку термодинамічної рівноваги, коли спостерігається якісний стрибок (нерівноважний фазовий перехід) при досягненні порогових значень критичними (керуючими) параметрами: відбувається характерне пониження симетрії системи. При цьому попередній стаціонарний стан (термодинамічна гілка) системи втрачає стійкість, система переходить у один із нових стійких станів з можливим виникненням структур самоорганізації, або у хаотичний режим. Точка, в якій відбувається даний перехід називається точкою біфуркації. В який саме із можливих станів перейде система визначатиметься випадковими флуктуаціями параметрів системи, тому поведінка системи у точці біфуркації має стохастичний характер. Передумовою для виникнення дисипативних структур у відкритих системах є можливість певного співвідношення між вкладом у приріст ентропії системи від внутрішніх, власне, дисипативних процесів та притоком/відтоком ентропії у зовнішнє середовище:

$$dS = d_i S + d_e S, \text{ де } d_i S \geq 0. \quad (1.1)$$

Знак другого доданку у (1.1) може бути довільним, однак суттєвого значення у порівнянні з першим доданком він набуває лише при значному віддаленні системи від стану термодинамічної рівноваги, що загалом веде до зменшення ентропії системи при формуванні структур самоорганізації. Надкритична поведінка системи при цьому описуватиметься нелінійними рівняннями. Тому самоорганізація не є універсальною властивістю матерії та вимагає спеціальних внутрішніх та зовнішніх вимог до фізичної системи [1]. Наведемо декілька прикладів подібних переходів до впорядкованого стану в різних системах. Зокрема, це нестійкості в гідродинамічних системах [2]:

- 1) перехід від ламінарного потоку (течія Куетта, викликана рухом однієї з паралельних площин каналу, течія Пуазейля в циліндричній трубі, викликана різницею тисків тощо) до турбулентного при перевищенні числом Рейнольдса  $Re = \rho v h / \eta$  ( $\nu = \eta / \rho$  – кінематична в'язкість) критичного значення  $Re_{cr}$  (або швидкістю  $v$  критичного значення  $v_{cr}$ , див. рис. 1.1а);

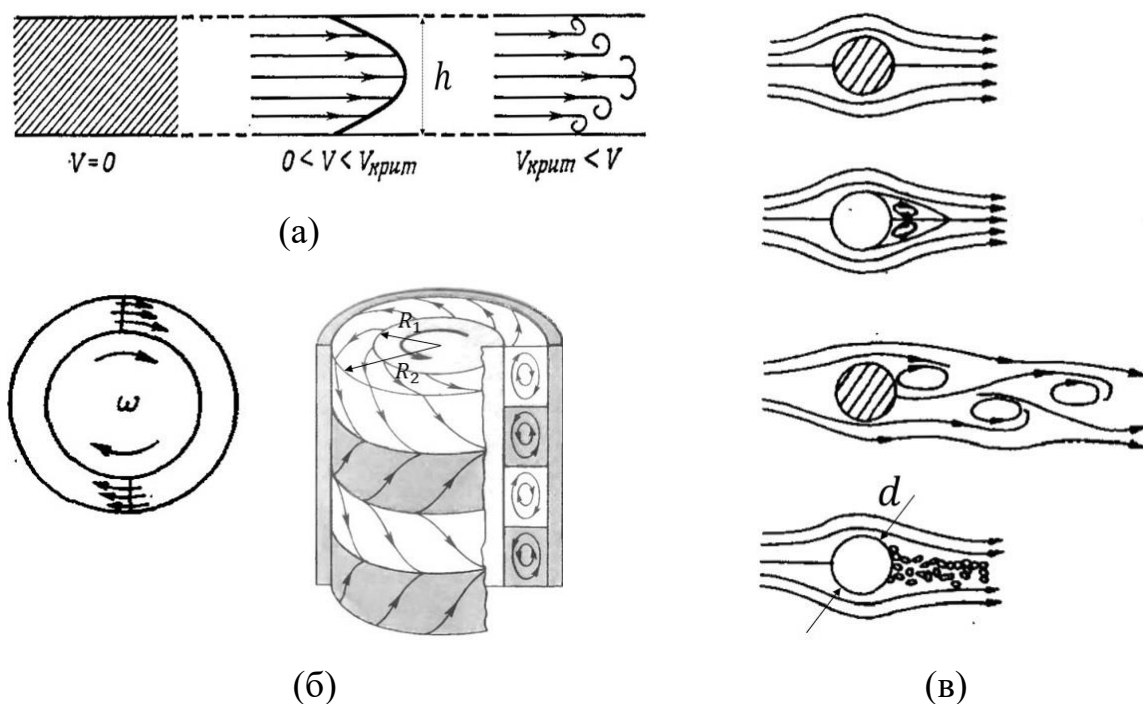


Рис. 1.1. Перехід від ламінарного режиму до турбулентного: а) в течії Пуазейля; б) нестійкість Тейлора; в) при обтіканні циліндра

- 2) нестійкість Тейлора – перехід течії Куетта рідини між коаксіальними циліндрами при обертанні одного з них з кутовою швидкістю  $\omega$  в турбулентний режим з виникненням вихорів Тейлора при перевищенні безрозмірним числом Тейлора  $Ta = (R_2 - R_1)R_1\omega/\nu$  критичного значення (рис. 1.1б);
- 3) при обтіканні циліндра при перевищенні числом Рейнольдса  $Re = vd/\nu$  критичного значення спостерігається виникнення пари вихорів (динамічна дисипативна структура), осцилюючих вихорів та перехід в турбулентний режим (рис. 1.1в);
- 4) ефект Бенара – конвективна нестійкість рідинної системи, що знаходиться у посудині, ширина якої значно перевищує висоту, а поверхні підтримуються при різних температурах  $T_1 > T_2$ . При перевищенні різницею температури критичного значення  $\Delta T > \Delta T_{cr}$  теплопровідний режим (лінійна залежність між переданою системі кількістю тепла за одиницю часу  $Q$  та  $\Delta T$ ) втрачає стійкість, в'язкість системи більше не стримує конвективний рух середовища, спричинений різницею температури. В запороговому режимі конвективний рух середовища набуває вигляду валів коміркової структури<sup>1</sup> (комірки Бенара, див.рис.1.2).

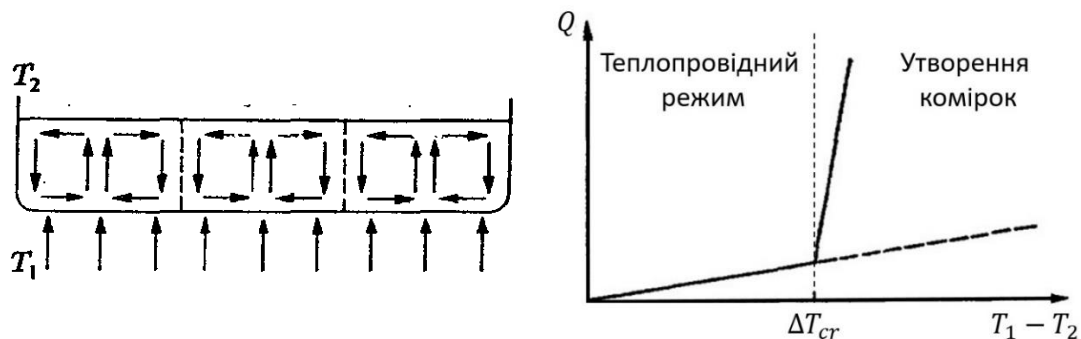


Рис. 1.2. Схема конвективних валів-комірок та перехід від теплопровідності до конвекції в ефекті Бенара

Критичні значення параметрів (числа Рейнольдса, Релея тощо), при яких відбувається перехід до іншого режиму, встановлюються з рівнянь на власні

<sup>1</sup> Поведінка у запороговому режимі досить складна, зокрема на утворення комірок впливає ефект Марангоні, умови на бокових поверхнях тощо.

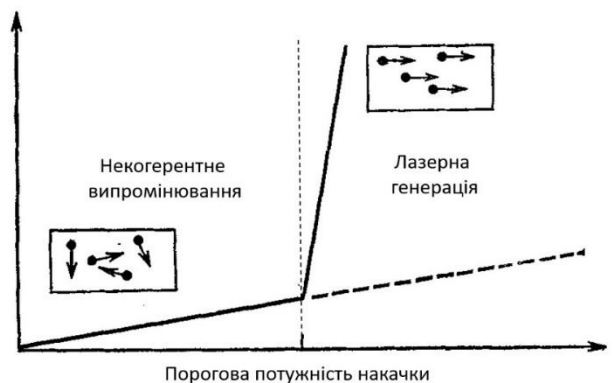
значення, породжені відповідними лінеаризованими рівняннями, що описують стан системи (рівняння Нав'є-Стокса, теплопровідності тощо).

Потік ентропії з системи назовні в такій відносно простій конфігурації є від'ємним

$$\frac{d_e S}{dt} = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = \frac{Q(T_2 - T_1)}{T_2 T_1} < 0, \quad (1.2)$$

тобто система віддає ентропію, вироблену за рахунок необоротних дисипативних процесів всередині (див. розділ 4 у Частині 1 щодо потоку ентропії у стаціонарному стані). Виникнення конвективних комірок спричинене складною кооперативною поведінкою частинок рідини, що є характерною особливістю структур самоорганізації сильно нерівноважних систем [1]. Більш детально умови нерівноважного фазового переходу з наступним утворенням просторових паттернів в ефекті Бенара та переходом до хаотичного турбулентного режиму буде описано в наступних розділах.

Кооперативна поведінка проявляється і в системах генерації лазерного випромінювання. Під дією променя накачки атоми активного середовища переходять в збуджений стан та випромінюють фотони. При незначній потужності накачки переважатиме спонтанна емісія фотонів,



однак при перевищенні критичного значення індукована емісія когерентних фотонів превалюватиме і система переходитиме з так званого лампового режиму у лазерну генерацію [1].

Нелінійні нерівноважні структури типово проявляються в плазмі, де має місце велика кількість різноманітних електромагнітних взаємодій. Так, для плазми з однорідною концентрацією масивних іонів  $n_i = const$  та малим збуренням концентрації електронів  $n_e(x, t)$  з рівнянь руху, неперервності та рівняння

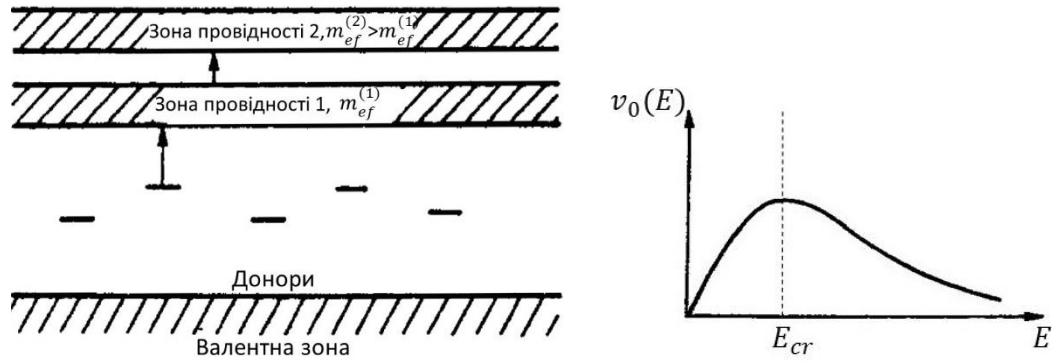


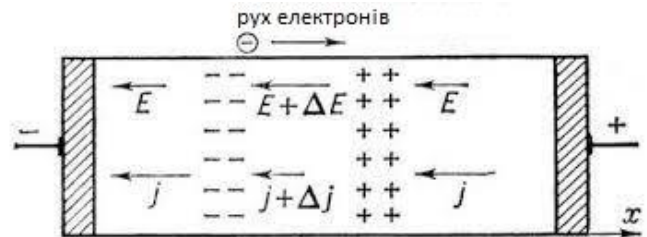
Рис. 1.3. Зонна структура в напівпровіднику та рухомість електронів в ефекті Гана

Пуассона отримаємо рівняння для  $n_e(x, t)$ <sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2 n_e}{\partial t^2} + z \frac{\partial n_e}{\partial t} + \omega_p^2 n_e = \frac{kT_e}{n_i} \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

де  $z$  – частота зіткнень нейтральних частинок,  $T_e$  – температура електронів,  $\omega_p = (4\pi n_e e^2 / m_e)^{1/2}$  – плазмова частота. Рівняння (1.3) телеграфного типу має затухаючий<sup>2</sup> хвильовий розв’язок, що відповідає періодичності концентрації електронів, що встановлюється у плазмі при постійній її накачці електронами (автохвилі) [2].

Плазмова нестійкість є основою ефекту Гана у напівпровідниках з двома зонами провідності, одна з яких з вищою потенціальною енергією відповідає більшій ефективній масі, а тому меншій рухомості електронів (див.рис.1.3), наприклад, Ge чи GaAs. Локальне збурення електронної густини призводить до локального зростання електричного поля над порогом з подальшим переходом електронів із ЗП-1 у ЗП-2. В результаті цього рухомість електронів («важких») падає і вони накопичуються у вигляді електричного домену – області підвищеного опору. Якщо розглянути 1-D зразок, то ліворуч і праворуч



<sup>1</sup> Порівняти з рівняннями теплопровідності в локально-нерівноважних моделях у розділі 6 Частини 1.

<sup>2</sup> Затухання Ландау, що компенсується інжекцією електронів ззовні.

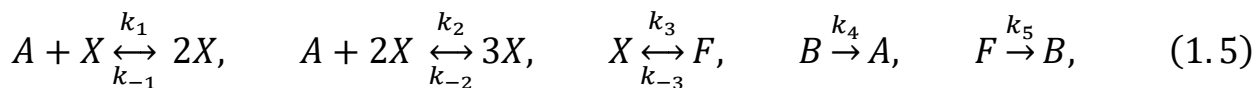


від електронного домену рухатимуться «легкі» електрони з вищою швидкістю, ніж «важкі». Ліворуч вони наганятимуть домен і утворюватимуть область підвищеної концентрації електронів (область негативного заряду), а справа «легкі» електрони будуть йти вперед, утворюючи область, збіднену електронами (область позитивного заряду). При постійній напрузі встановиться динамічна рівновага між швидкостями електронів усередині та поза доменом. При досягненні доменом кінця зразка (анода), домен руйнується, зростає струм, відбувається утворення нового домену, і процес повторюється заново (автохвиля). Хвильовий незатухаючий розв'язок для електричного поля та густини заряду отриманий Хакеном з системи рівнянь для густини струму, рівняння Пуассона та неперервності:

$$\begin{aligned} j_e &= nv = nv_0(E) - D \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{4\pi e}{\varepsilon} (n - n_{im}), \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії електронів провідності,  $n_{im}$  – концентрація домішок [2].

Кінетичні нестійкості порівняно легко реалізуються в хімічних нерівноважних системах, що типово характеризуються сильними нелінійностями внутрішньої динаміки. Проявляються такі нестійкості у зростанні концентрації проміжних компонент багатоступеневих реакцій з можливим переходом у коливальний режим. Серед прикладів відомі реакція Брея, іонний годинник Брігса-Раушера, реакція Білоусова-Жаботинського. Детальна кінетика подібних реакцій складна (див. рис. 1.4), тому для описання характерних особливостей часто використовуються наближені модельні реакції (Лоткі-Вольтерра, «брюсселятор», «орегонатор» тощо). Для отримання осциляційної поведінки, гістерезису, бістабільного режиму в моделі (як і в реальній реакції) має бути присутня автокаталітична складова. При постійній подачі реагентів, зокрема, в модельній реакції



де  $k_i$  позначають швидкості прямих та обернених реакцій, концентрація проміжного продукту  $X(t)$  за умов  $C_A = const$ ,  $C_B = const$ ,  $k_2 = k_{-2} = k_{-3} = 0$  починає зростати при перевищенні концентрацією  $C_A$  як зовнішнім керуючим параметром критичного значення  $C_{A,cr}$ . Пояснюється це зростання превалюючою дією автокаталітичної реакції №2 в (1.5), тобто кооперативним характером явища аналогічно ефекту Бенара чи лазерній генерації. За умов  $C_A = const$ ,  $C_B = const$ ,  $C_F = const$ ,  $k_1 = k_{-1} = 0$  реакція (1.5) демонструє бітсabilità у поведінці при перевищенні критичного значення  $C_{A,cr}$ , що полягає у можливості встановлення одного з двох можливих стаціонарних станів у системі<sup>1</sup>.

При  $C_B = const$ ,  $C_F = const$ ,  $k_{-1} = k_{-2} = k_{-3} = 0$  за відсутності обернених реакцій у системі з реакціями (1.5) виникатимуть узгоджені (у протифазі) самозбуджувані хімічні осциляції  $A(t)$  та  $X(t)$  при перевищенні концентраціями вихідними реагентами критичних значень (автоколивання). Найбільш відомим реальним прикладом такої реакції є реакція Білоусова-Жаботинського (рис. 1.4) –

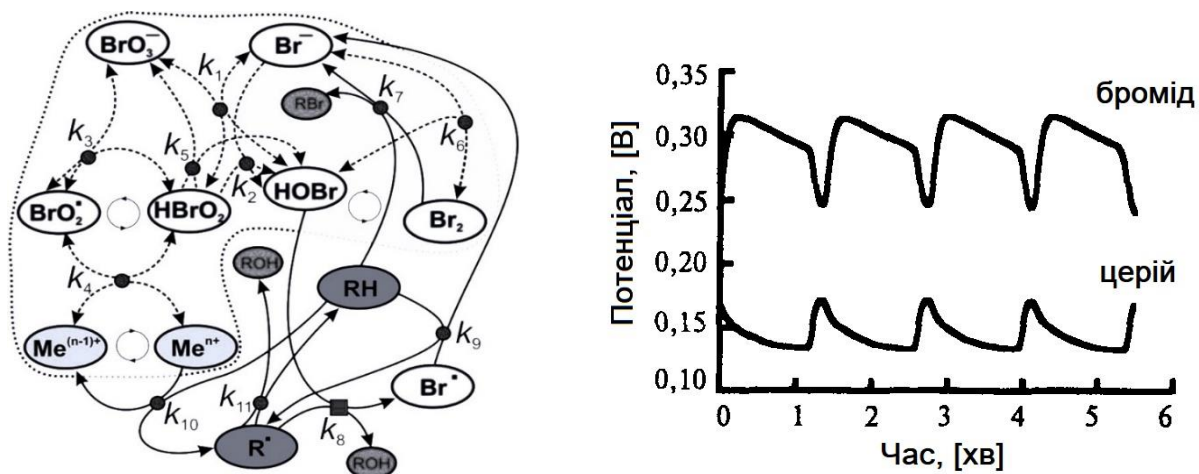


Рис. 1.4. Схема реакції Білоусова – Жаботинського та осциляції концентрацій її компонент (електрохімічний метод вимірювання)

<sup>1</sup> Який саме з стаціонарних станів «вибере» система визначатимуть випадкові флуктуації.

складна система елементарних реакцій з відновленням іонів церію  $\text{Ce}^{+3} \leftrightarrow \text{Ce}^{+4}$  в присутності бромата калію та малонової і сірчаної кислоти. Коливання концентрації різних іонів церію візуалізується з допомогою фероїну: суміш змінює колір з червоного на синій з періодом порядку хвилин (рис.1.4). Якщо дослід з реакцією проводити у посудині з великим поперечним розміром (чашка Петрі) за умови поганого перемішування, то у середовищі спостерігатиметься фронт спіральних хвиль зміни кольору, що пояснюється кооперативною поведінкою системи в зв'язку з тісним контактом між її точками. Динамічні рівняння для концентрацій компонент у такому випадку включають дифузійні доданки. Такі середовища називаються активними<sup>1</sup>[2]. Для них характерними є особливі явища самоорганізації, такі як біжучі фронти та імпульси, спіральні хвилі, ведучі центри.

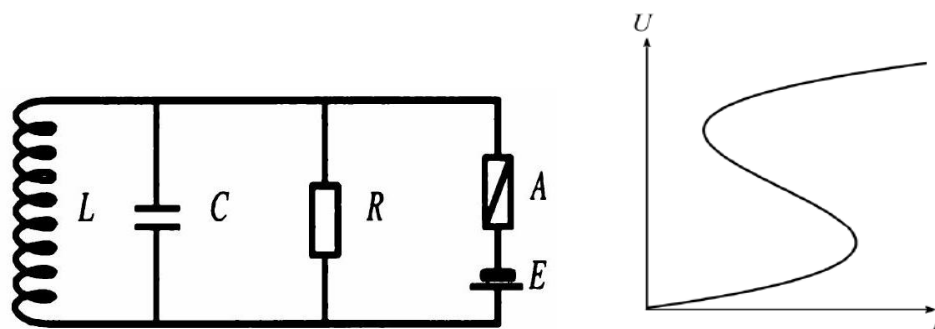


Рис. 1.5. Схема генератора Ван дер Поля з активним елементом А (наприклад, тунельним діодом) з S-подібною ВАХ

Автоколивні процеси можливі також в електричних колах з нелінійними елементами (напівпровідникові діоди, газорозрядні лампи тощо), тобто елементами з S-подібною ВАХ. Класичним прикладом такої електричної схеми є генератор Ван дер Поля (рис.1.5)[2].

Біологічні ритми живих організмів є також прикладом часової організації біологічних підсистем, порушення яких спричиняє дисфункцію тих чи інших органів та тканин [3].

Прикладами самоорганізації з утворенням періодичних структур також є

<sup>1</sup> Початково поняття введене для опису поширення нервових імпульсів в нервових волокнах.

формування фулеренів в полум'ї органічних сполук, шаруватих покриттів при осадженні металорганічних сполук в результаті піролізу та утворенні плівок, структур дислокацій в твердому тілі при пластичних деформаціях, утворення паттернів у наносистемах тощо [4, 5].

Резюмуючи, приведемо основні типи дисипативних структур<sup>1</sup> та умови їх виникнення у відкритих системах далеких від стану термодинамічної рівноваги [1]:

- 1) просторово-неоднорідні структури, або простороні паттерни (структури Тюрінга);
- 2) періодичні в часі структури (автоколивання);
- 3) просторово-часові періодичні структури (автохвилі);
- 4) бістабільні структури.

Виникнення дисипативних структур у зв'язку з когерентною поведінкою системи можливе за наступних умов:

- 1) відкритість системи;
- 2) нелінійність динамічних рівнянь;
- 3) відхилення від рівноваги перевищує критичне значення;
- 4) мікропроцеси відбуваються кооперативно.

### ***Запитання та завдання:***

1. Як з ентропійної точки зору пояснити можливість утворення впорядкованих структур у нерівноважних відкритих системах?
2. Поясніть поняття нерівноважного фазового переходу? Що при цьому відбувається з системою?
3. Що таке дисипативні структури? Чому вони так називаються?
4. Наведіть приклади просторових, часових та просторово-часових дисипативних структур.
5. Які головні умови виникнення дисипативних структур у відкритих системах?

---

<sup>1</sup> Перелік не враховує всі можливі структури та закритичні нестационарні явища (турбулентні потоки, процеси еволюції).

## 2. Стійкість стаціонарних станів.

### Фазові траєкторії. Атрактори

Для аналізу стійкості стану системи потрібно задати параметри, що описуватимуть його. Такі залежні від часу параметри називаються динамічними змінними,  $X_i = X_i(t)$ ,  $\overline{1, N}$ , де  $N$  – кількість ступенів вільності системи. Спочатку розглядатимемо непольові змінні, що не залежать від координати та описують стан системи в цілому. Множина всіх можливих станів називається простором станів, або  $N$ -вимірним фазовим простором системи:  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Таким чином, зміна стану системи описуватиметься траєкторією у фазовому просторі. Поведінка автономної системи задається динамічними диференціальними рівняннями першого порядку [1]:

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X_k, B), \quad i, k = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

де  $B = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  позначає керуючі параметри системи, тобто зовнішні та внутрішні умови. Функції  $f_i(X_k, B)$  є аналітичними та не мають спільного множника, тому система (2.1) у відповідності до теореми Коші має єдиний розв'язок, що задовольняє початковим умовам  $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ . Значення параметрів, що відповідають стаціонарним станам системи, визначаються з системи алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{dX_i}{dt} = 0 \Rightarrow f_i(X_k, B) = 0, \quad i, k = \overline{1, N}. \quad (2.2)$$

Розв'язки (2.2)  $\vec{X}^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_N^{(0)})$  в термінах теорії стійкості диференціальних рівнянь називаються особливими, або стаціонарними точками фазового простору (інші точки називатимемо регулярними). Для аналізу стійкості можна скористатись теоремою Ляпунова [Кривошея], що в рамках лінійного аналізу дозволяє визначити або асимптотичну стійкість, або нестійкість стаціонарних точок. Для цього означимо флуктуації динамічних змінних:  $X_i(t) =$

$X_i^{(0)} + \delta X_i(t)$ . Якщо в початковий момент часу  $t_0$  виникає ненульова флуктуація, то стаціонарний стан є стійким, якщо з часом флуктуація не зростає (залишається в  $\varepsilon$ -трубці), є асимптотично стійким, якщо

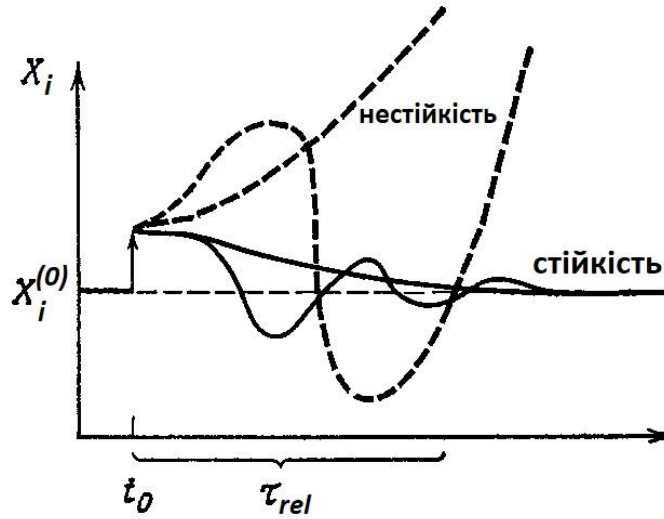


Рис. 2.1. Динаміка стійких та нестійких стаціонарних станів системи

$\delta X_i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ <sup>1</sup> та нестійким, якщо флуктуація з часом зростає (рис.2.1). Відхилення від нестійкого стаціонарного стану продовжується, доки система не займе новий стійкий стан, в околі якого опиниться. Для визначення характеру стійкості стаціонарного стану розкладемо праву частину в (2.1) в околі стаціонарної точки  $\vec{X}^{(0)}$ :

$$f_i(X_k, B) = f_i(X_k^{(0)}, B) + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_0 \delta X_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial X_j \partial X_k} \right)_0 \delta X_j \delta X_k + \dots \quad (2.3)$$

де індекс «0» позначає стаціонарну точку. Тоді в лінійному наближенні (2.1) матиме наступний вигляд:

$$\frac{d\delta X_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} \delta X_j, \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> В фізичному сенсі  $t \rightarrow \infty$  означає  $t - t_0 \gg \tau_{rel}$ , де  $\tau_{rel}$  — характерний час релаксації системи.

де  $\Lambda_{ij} = (\partial f_j / \partial X_i)_0$ . Система лінійних диференціальних рівнянь (2.4) першого порядку має розв'язки у наступному вигляді [6]:

$$\delta \vec{X} = \sum_k c_k \vec{u}_k e^{p_k t}, \quad (2.5)$$

де  $p_k$  та  $\vec{u}_k$  є розв'язками рівняння на власні значення та власні вектори матриці  $\hat{\Lambda}$ :

$$\hat{\Lambda} \vec{u} = p \vec{u} \Rightarrow \det |\Lambda_{ij} - p \delta_{ij}| = 0. \quad (2.6)$$

У відповідності до теореми Ляпунова якщо всі корені рівняння (2.6) мають від'ємні дійсні частини  $\text{Re } p_k < 0$ , то розв'язок  $\vec{X}^{(0)}$  є асимптотично стійким. Якщо принаймні один корінь має додатну дійсну частину, то стаціонарний розв'язок  $\vec{X}^{(0)}$  є нестійким. Параметр  $p_k = p_k(B)$ , тому втрата стаціонарним станом стійкості в момент, коли  $\text{Re } p_k = 0$ , дозволяє встановити критичне значення керуючих параметрів в точці біфуркації. В інших випадках для визначення характеру стійкості стаціонарного розв'язку потрібно врахувати більш високі порядки малості в розкладі (2.3).

Траєкторія системи у фазовому просторі описуватиметься диференціальними рівняннями<sup>1</sup>:

$$\frac{dX_i}{dX_1} = \frac{f_i(X_k, B)}{f_1(X_k, B)}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (2.7)$$

Через регулярні точки проходить лише одна фазова крива, в стаціонарних же точках фазові траєкторії перетинаються, тобто в цих точках порушуватиметься умова теореми Коші єдиності розв'язку системи рівнянь (2.1). Види фазових траєкторій залежать від кількості ступенів вільності динамічної системи. Тому розглянемо наступні частинні випадки.

1. *Динамічна система з одним ступенем вільності.* В даному випадку простором станів є звичайна пряма, динаміка яких описується рівнянням

$$\frac{dX}{dt} = f(X, B). \quad (2.8)$$

<sup>1</sup> Оскільки  $\exists!$  розв'язок (2.1), то завжди існує хоча б один індекс, для якого  $f_i(X_k, B) \neq 0$  в регулярних точках.

Стійкість стаціонарних станів, що є розв'язками рівняння  $f(X^{(0)}, B) = 0$ , визначатиметься в лінійному наближенні знаком похідної  $f'(X^{(0)}, B)$ . Якщо значення похідної нульове, тоді характер стійкості визначається врахуванням вищих порядків малості у розкладі (2.3). Наприклад, на рис. 2.2 точка  $X_1^{(0)}$  є асимптотично стійкою,  $X_2^{(0)}$  – нестійкою. Варто зазначити, що при початковому

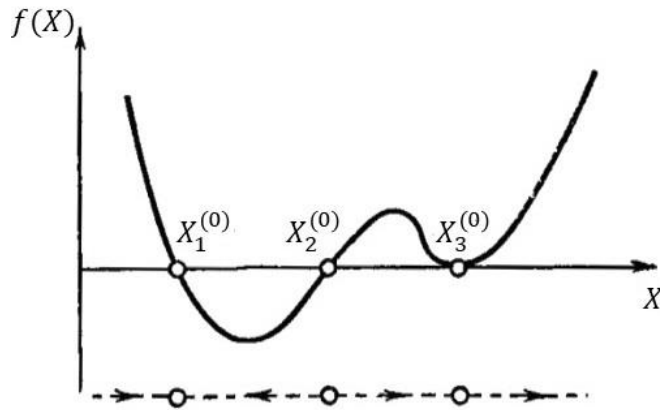


Рис. 2.2. Види стаціонарних точок для системи з одним ступенем вільності

стані системи, відмінному від стаціонарного, система прямуватиме до стаціонарного стану асимптотично при  $t \rightarrow +\infty$ <sup>1</sup>. В іншому випадку система може перебувати в одному з двох можливих станів. Точка  $X_3^{(0)}$  ж потребує детальнішого розгляду:

$$\frac{d(\delta X)}{dt} = \frac{1}{2} f''(X_3^{(0)}) \delta X^2 = a \delta X^2, \quad (2.9)$$

звідки розв'язок для динаміки флуктуації  $\delta X$  має наступний вигляд:

$$\delta X(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\delta X_0}\right) - at}. \quad (2.10)$$

Якщо початкове відхилення  $\delta X_0 < 0$ , то в подальші моменти часу флуктуація лише спадатиме та асимптотично наблизатиметься до нуля. Однак, при  $\delta X_0 > 0$  в певний момент часу  $t_0 = 1/(a\delta X_0)$  флуктуація зростатиме до нескінченності, тому точка

<sup>1</sup> Для виконання умови теореми Коші єдиності розв'язку.



$X_3^{(0)}$  є нестійкою.

Зазначимо також, що для рівняння першого порядку з однією змінною і функцією  $f(X, B)$ , аналітичною в усьому фазовому просторі, періодичних розв'язків не існує.

При зміні значень керуючих параметрів кількість стаціонарних станів та їх стійкість також може змінюватись. Особливо це характерно при переході через критичне значення в точці біфуркації. Наприклад, розглянемо систему з одним керуючим параметром, що описується наступним динамічним рівнянням [7]:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha^3 + \lambda\alpha. \quad (2.11)$$

Дане рівняння має просту симетрію: є інваріантним відносно заміни  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . Тобто якщо  $\alpha(t)$  є розв'язком (2.11), то і  $-\alpha(t)$  також є його розв'язком. Якщо  $\alpha(t) \neq -\alpha(t)$  (несиметричні розв'язки), то (2.11) має два різних розв'язки, тобто кількість розв'язків пов'язана з симетрією рівняння. Стаціонарними розв'язками (2.11) є стани  $\alpha_1^{(0)} = 0$  (симетричний розв'язок) та  $\alpha_{2,3}^{(0)} = \pm\sqrt{\lambda}$  (несиметричні розв'язки). Стійкість стаціонарних станів у лінійному наближенні визначатиметься рівнянням для флуктуації  $\delta\alpha(t)$ :

$$\frac{d(\delta\alpha)}{dt} = -3(\alpha^{(0)})^2 \delta\alpha + \lambda\delta\alpha. \quad (2.12)$$

При  $\lambda < 0$  є лише один стаціонарний і стійкий стан  $\alpha = \alpha_1^{(0)}$ , в якому може знаходитись система. При  $\lambda > 0$  розв'язки розгалужуються (рис. 2.3) і з'являється ще два додаткових стійких стани  $\alpha = \alpha_{2,3}^{(0)}$ , в той час як стан  $\alpha = \alpha_1^{(0)}$  стає нестійким. Таким чином, в точці біфуркації  $\lambda_{cr} = 0$  попередній стаціонарний стан змінює характер стійкості, система займає новий стійкий стан  $\alpha = \alpha_2^{(0)}$  або  $\alpha = \alpha_3^{(0)}$  в залежності від флуктуації динамічної змінної.

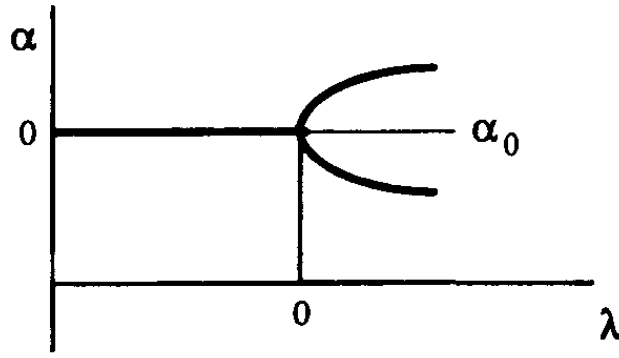


Рис. 2.3. Біфуркаційна діаграма стаціонарних розв'язків рівняння (2.11)

Біфуркаційна діаграма на рис. 2.3 характерна як для рівноважних фазових переходів 2-го роду, так і для нерівноважних фазових переходів типу нестійкості Бенара та Тейлора.

2. *Динамічна система з двома ступенями вільності.* Розглянемо динамічну систему, що описується наступною парою рівнянь [1]:

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, X_2, B), \quad (2.13)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, X_2, B). \quad (2.14)$$

Розкриваючи визначник в (2.6), отримаємо рівняння

$$p^2 - p(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) + \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}\Lambda_{21} = 0, \quad (2.15)$$

коренями якого є

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( T \pm \sqrt{T^2 - 4D} \right),$$

$$T = \text{tr } \hat{\Lambda} = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}, \quad D = \det \hat{\Lambda} = \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}\Lambda_{21}. \quad (2.16)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.4) для збурень в такому разі матиме вигляд:

$$\delta X_1 = a_1 e^{p_1 t} + b_1 e^{p_2 t}, \quad (2.17)$$

$$\delta X_2 = a_2 e^{p_1 t} + b_2 e^{p_2 t}. \quad (2.18)$$

В залежності від значень чисел  $p_{1,2}$  матимемо різну поведінку фазових траєкторій в околі стаціонарних точок (рис. 2.4) [1,6]:

- 1) корені  $p_1$  і  $p_2$  дійсні та одного знаку (додатного або від'ємного) – особлива точка називається вузлом (нестійким або стійким, відповідно). У випадку стійкої точки фазові траєкторії при  $t \rightarrow \infty$  прямують в стаціонарну точку.
- 2) при різних знаках  $p_1$  і  $p_2$  особлива точка називається сідлом ( $D < 0$ ). Сідлова точка є нестійкою.
- 3) корені  $p_1$  і  $p_2$  є комплексно-спряженими з від'ємною або додатною дійсною частиною – особлива точка називається фокусом (стійким або нестійким). Фазові траєкторії наближаються до особливої точки, обертаючись навколо неї. Коли дійсні частини  $\text{Re } p_{1,2} = 0$ , особлива точка називається центром. Траєкторії в околі центра є замкненими кривими, які охоплюють особливу точку. Це відповідає періодичному в часі процесу. Характер стійкості для цієї точки визначається більш високими, ніж лінійні членами розкладу в (2.3).

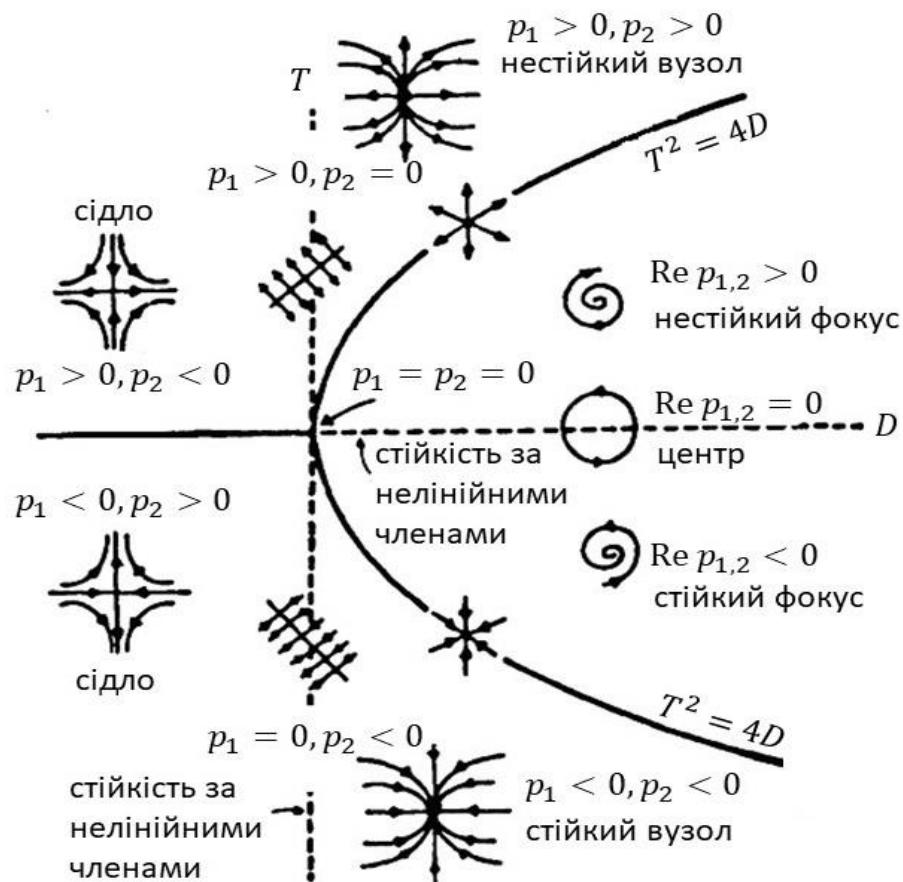


Рис. 2.4. Фазові траєкторії для динамічної системи з двома ступенями вільності

Якщо один з коренів дорівнює нулю, в системі можуть існувати більш складні особливі точки, наприклад сідло-вузол.

Стійкі вузол та фокус є точковими атракторами. Атрактор – множина точок фазового простору до якого прямують фазові траєкторії динамічної системи. Атрактор може бути лінією (стійкий граничний цикл, рис.2.5), поверхнею (граничний тор) та багатовимірною фрактальною структурою (дивний атрактор Лоренца, атрактор Ресслера) [8, 9]. Стійкий граничний цикл – ізольована замкнута крива у фазовій площині, до якої прямують фазові траєкторії з обох сторін. Граничний цикл виникає в нелінійному режимі, досягається системою при виході з нестійкої стаціонарної точки (біфуркація Андронова-Хопфа) та відповідає автоколивним процесам в системі з позитивним відгуком, коли період та амплітуда коливань не залежить від початкових умов. Цикл може бути напівстійким та нестійким (рис. 2.5а).

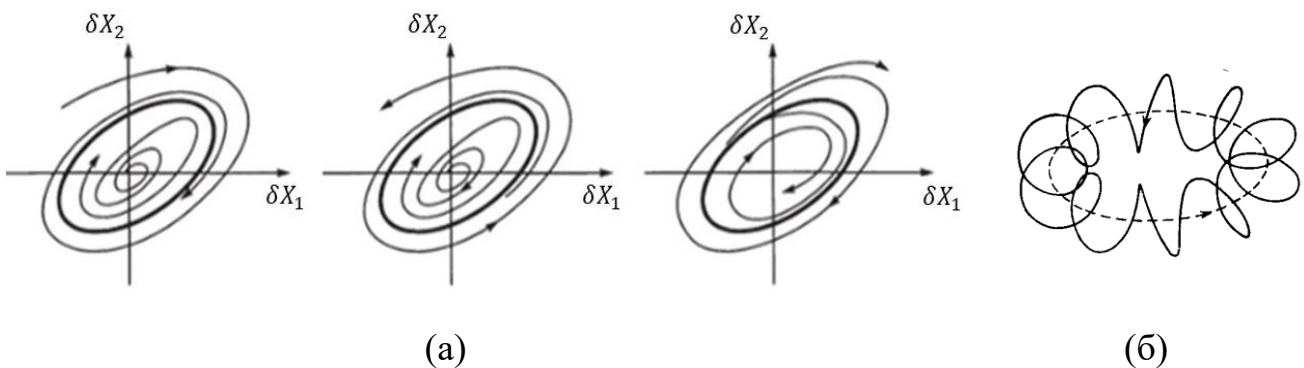


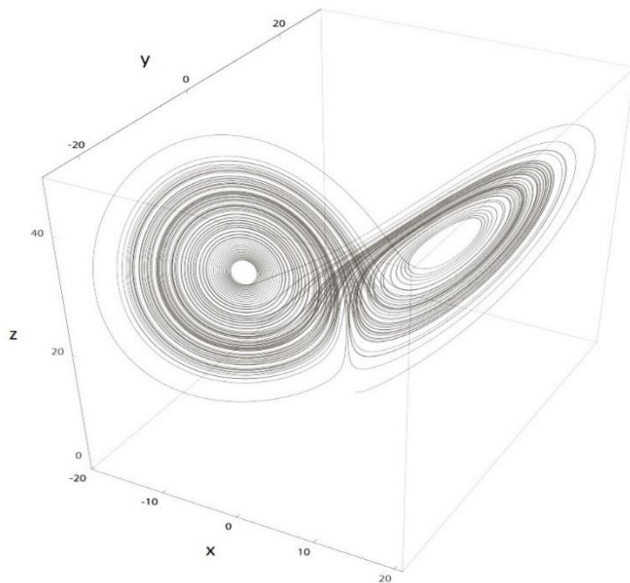
Рис. 2.5. (а) Граничні цикли: стійкий, напівстійкий та нестійкий,  
(б) граничний цикл в 3-D просторі

Загального методу встановлення існування граничних циклів у системі немає. Однак, є особливості системи (на основі робіт Вінера, Пункаре, Бендіксона та Хопфа), що вказують на наявність або відсутність граничних циклів у фазовій площині [3]:

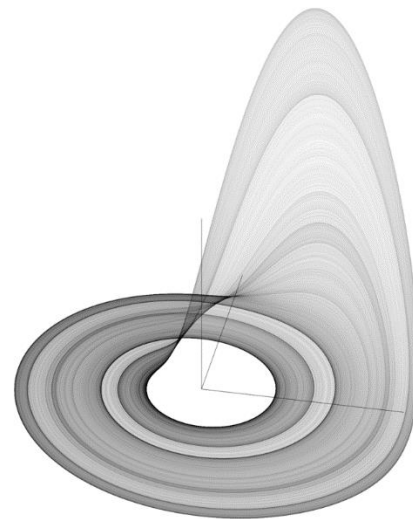
- 1) у системах з двома ступенями вільності граничний цикл має містити всередині принаймні одну особливу точку, що реалізується фізично. Якщо ця

точка єдина, то вона не може бути сідлом ( $D = \det \hat{L} > 0$ ). Якщо всередині особливих точок декілька, то загальне число фокусів, вузлів та центрів повинно перевищувати на одиницю число сідлових точок.

- 2) якщо в деякій однозв'язній області фазової площини  $T = \text{tr } \hat{L}$  не змінює свій знак то в цій області немає граничних циклів (критерій Бендіксона).
- 3) якщо траєкторія завжди залишається всередині скінченної області фазової площини і не наближається до будь-якої особливої точки, то ця траєкторія або сама є граничним циклом або прямує до нього при  $t \rightarrow \infty$  (теорема Пуанкаре-Бендіксона).
- 4) Для динамічних систем з кількістю ступенів вільності  $N > 2$  теорія періодичних розв'язків розроблена недостатньо. Важливі результати для системи довільної розмірності дає біфуркаційна теорема про граничний цикл (теорема Вінера-Хопфа).



(а)



(б)

Рис. 2.6. (а) Дивний атрактор Лоренца при  $\rho = 28, \sigma = 10, \beta = 8/3$ ,

(б) дивний атрактор Ресслера

Згадані атрактори – стійкі стаціонарні точки, стійкі граничні цикли та

інваріантні тори – є простими атракторами. Крім простих атракторів існують атрактори-множини, або дивні атрактори. Дивний атрактор властивий системам в режимі динамічного хаосу. Прикладом є класична система Лоренца, що описується нелінійною системою трьох диференціальних рівнянь, яка була виведена в 1963 р. Лоренцом з рівнянь гідродинаміки і запропонована для пояснення термоконвекції (запороговий режим ефекту Бенара):

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= X(\rho - Z) - Y, \\ \dot{Z} &= XY - \beta Z.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Дану систему можливо проаналізувати лише з використанням чисельних методів. Поведінка динамічних змінних є складною (хаотичною) та неперіодичною (рис.2.6), Хаотичну динаміку системи (2.19) можна представити як хаотичні коливання в одній з потенціальних ям з перекиданням час від часу в другу яму. Локально траєкторії дивного атрактора експоненційно розбігаються, але загалом залишаються в межах складної множини фазового простору. Динамічний хаос є поведінкою детерміністичної системи типу (2.19), яка проявляється через надзвичайно високу чутливість до початкових умов (ефект «метелика») та спостерігається в плазмі, електричних колах, лазерах, хімічних реакціях, рідинах, низці механічних пристроїв, динаміці зростання популяцій, кліматології [10].

Наявність атракторів пов'язане з тим, що фазовий простір статистичного ансамблю дисипативних систем, на відміну від гамільтонових, в процесі руху стискається [9] аналогічного стисканню фазового простору тиску та температури системи при контакті з термостатом до точки  $(p_{ext}, T_{ext})$ . Продемонструємо це в загальному для динамічної системи з  $N$  ступенями вільності, що описується системою диференціальних рівнянь (2.1).

Фазовий об'єм ансамблю станів системи

$$\delta\Gamma = \prod_{i=1}^N (\delta X_i)_{X_j \neq X_i},\tag{2.20}$$

де варіація кожної координати фазового простору в околі точки  $\vec{X}$  здійснюється при фіксованих інших координатах. Зміна об'єму в часі тоді буде рівною

$$\frac{d(\delta\Gamma)}{dt} = \delta\Gamma \sum_i \delta X_i^{-1} \frac{d(\delta X_i)}{dt}. \quad (2.21)$$

Оскільки для динамічної системи (2.1) виконані початкові умови, то точки фазового простору виконано  $\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}(0), t)$ , тому

$$\frac{d(\delta X_i(t))}{dt} = \delta X_i(0) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial X_i(t)}{\partial X_i(0)} \right)_{X_j(0) \neq X_i(0)}, \quad (2.22)$$

звідки при  $t \rightarrow \infty$  знайдемо вираз

$$\sum_i \delta X_i^{-1} \frac{d(\delta X_i)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \sum_i \frac{\delta X_i(0)}{\delta X_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial X_i(0)} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial X_i} = \text{div } \vec{f}. \quad (2.23)$$

Таким чином фазовий об'єм змінюється відповідно рівнянню:

$$\frac{d(\delta\Gamma)}{dt} = \delta\Gamma \text{div } \vec{f}. \quad (2.24)$$

Якщо система є консервативною, то  $\text{div } \vec{f} = 0$  і фазовий об'єм не змінюється. Для динамічних дисипативних систем можливий випадок  $\text{div } \vec{f} < 0$ , що означає поступове зменшення фазового простору траєкторій системи та при  $t \rightarrow \infty$  концентрування всіх розв'язків системи (2.1) у вузькій підмножині фазового простору – аттракторі. У атрактора є область збіжності – басейн атрактора – множина точок, стартуючи з яких система з часом приходить до атрактора.

Якісний аналіз динамічної системи пов'язаний з поняттям структурної стійкості (Андронов, Понтрягін та ін.), що полягає у стійкості структури розбиття фазового простору на траєкторії по відношенню до малих змін диференціальних рівнянь (2.1). Фазовий портрет структурно стійких систем при незначних змінах керуючих параметрів залишається незмінним, наприклад, для систем в області звичайних (неособливих) точок простору керуючих параметрів [11]. Структурна стійкість градієнтних систем досліджена для довільної кількості ступенів вільності:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial X_i} V(X_k(\vec{r}, t), B), \quad i, k = \overline{1, N}, \quad (2.25)$$

де  $V(X_k(\vec{r}, t), B)$  є своєрідним потенціалом. Стаціонарні стани в такому випадку визначаються з умови  $\partial V / \partial X_i = 0$ .

Таб. 2.1

Вигляд потенціалу	Типи катастроф
$X^3 + \lambda X$	Складка
$X^4 + \lambda_1 X^2 + \lambda_2 X$	Збірка
$X^5 + \lambda_1 X^3 + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X$	Хвіст ластівки
$X^6 + \lambda_1 X^4 + \lambda_2 X^3 + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X$	Метелик
$X_1^2 + X_2^2 + \lambda_1 X_1 X_2 - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_1$	Гіперболічна омбіоліка
$X_2^2 - 3X_2^2 X_1^2 + \lambda_1 (X_1^2 + X_2^2) - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_1$	Еліптична омбіоліка
$X_2^2 X_1 + X_1^2 + \lambda_1 X_2^2 + \lambda_2 X_1^2 - \lambda_3 X_2 - \lambda_4 X_1$	Параболічна омбіоліка

Зі зміною значень керуючих параметрів в точці (лінії, площині) біфуркації відбувається зміна кількості особливих точок у фазовому просторі системи. Це знаменує різку зміну поведінки системи (втрата структурної стійкості), тому математик Р. Том запропонував називати такі події катастрофами. Том для систем з кількістю керуючих параметрів не більше 4 дав класифікацію катастроф на 7 можливих типів (див. таб. 2.1) в незалежності від кількості ступенів вільності [Ебелінг]. На рис. 2.7 представлені деякі множини точок, що відповідають біфуркаційним подіям відповідних систем.



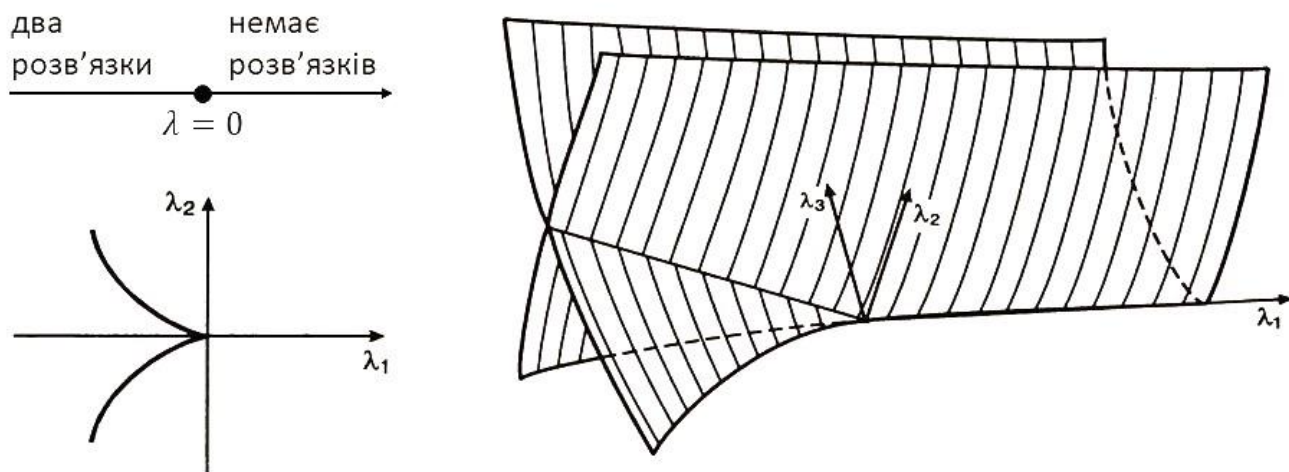


Рис. 2.7. Катастрофи типу складки, збірки та «ластівчиного хвоста»

Досліджуючи фізичні системи, частіше доводиться мати справу не з дискретними системами, що описуються скінченним набором динамічних параметрів, а з неперервними системами, динамічні параметри яких залежать також від просторових координат (наприклад, густина  $\rho(\vec{r}, t)$ , гідродинамічна швидкість  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , температура  $T(\vec{r}, t)$  та ін.). Такі динамічні змінні називатимемо польовими функціями:  $X_i(\vec{r}, t), i = \overline{1, N}$ . В такому разі системи, що описуються польовими функціями, мають нескінченну кількість ступенів вільності. Динамічні рівняння полів в загальному випадку матимуть наступний вигляд [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i(\vec{r}, t) = F[X_k(\vec{r}, t), B], \quad i, k = \overline{1, N} \quad (2.26)$$

де  $F[., B]$  – в загальному нелінійний оператор, що може містити диференціальні операції на полем (не вище 2-го порядку),  $B$  – керуючі параметри задачі, що в загальному також мають розглядатись як функції координат. Прикладом такого рівняння є класичне рівняння теплопровідності, рівняння балансу, розглянуті у Частині 1, де оператор в правій частині (2.26) містить внутрішні джерела змінної  $X_i(\vec{r}, t)$  та дивергентні доданки від потоку цієї фізичної величини. Такі рівняння є нелінійними рівняннями в частинних похідних, тому їх аналіз та розв'язання у більшості випадків вимагає застосування комп'ютера. Відповідно, множина

стаціонарних станів та процесів самоорганізації в таких систем є значно ширшою.

Рівняння типу (2.26) дозволяють, зокрема, описувати автохвильові процеси в хімічних системах з перемішуванням та отримувати поширення концентраційних фронтів, як було згадано у розділі 1:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i(\vec{r}, t) = f_i(X_k(\vec{r}, t), B) + \vec{\nabla} \left( \sum_{j=1}^N D_{ij} \vec{\nabla} X_j(\vec{r}, t) \right), \quad i, k = \overline{1, N}, \quad (2.27)$$

де  $\vec{\nabla}_i$  – оператор градієнта за координатами елемента маси  $i$ -ї компоненти,  $D_{ij}$  – дифузійні коефіцієнти. Якщо останні є сталими, рівняння (2.27) матиме вигляд [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i(\vec{r}, t) = f_i(X_k(\vec{r}, t), B) + D_i \Delta X_i(\vec{r}, t), \quad i, k = \overline{1, N}, \quad (2.28)$$

що описує процеси переносу в неоднорідних системах.

Стаціонарний стан системи описуватиметься розподілом польових параметрів  $X_i^{(0)}(\vec{r}, t)$  як розв'язку (2.26) при нульовій лівій частині. Збурення польових функцій також є функцією координат та часу [1]:

$$\delta X_i(\vec{r}, t) = X_i(\vec{r}, t) - X_i^{(0)}(\vec{r}, t). \quad (2.29)$$

Стійкість стаціонарного стану в такому випадку означає незростання початкового збурення польових змінних для довільного мало значення останнього.

Асимптотична стійкість означає  $|\delta X_i(\vec{r}, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Для аналізу на стійкість систем, що описуються польовими функціями, ефективним є метод нормальних мод. Метод базується на розкладі збурення поля в інтеграл або ряд Фур'є за певним<sup>1</sup> повним набором ортогональних функцій (моди) [1]. Наприклад:

1) система однорідна вздовж  $Oy$  та  $Oz$ :

$$\delta X_i(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_k(t) \exp[ikx] dk, \quad (2.30)$$

2) як і в 1-му пункті, тільки система  $\lambda$ -періодична вздовж  $Ox$ :

<sup>1</sup> Вибір базису продиктований симетрією системи.

$$\delta X_i(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t) \exp[2\pi i k x / \lambda], \quad (2.31)$$

3) система однорідна вздовж  $Oz$ :

$$\delta X_i(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\vec{k}}(t) \exp[ik_1 x + ik_2 y] dk_2, \quad \vec{k} = (k_1, k_2), \quad (2.32)$$

4) система має циліндричну симетрію:

$$\delta X_i(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\vec{k}}(r, t) \exp[ikz + im\varphi] dk, \quad \vec{k} = (k, m), \quad (2.33)$$

5) система має сферичну симетрію:

$$\delta X_i(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) A_{lm}(r, t), \quad (2.34)$$

6) загальний випадок:

$$\delta X_i(x, y, z, t) = \int A_{\vec{k}}(t) \exp[i\vec{k}\vec{r}] d\vec{k}, \quad (2.35)$$

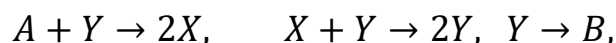
Для дослідження стійкості стаціонарного стану, власне, вже амплітудні множники нормальних мод у розкладах (2.30)-(2.35) представляють у вигляді  $A_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}^{(0)} \exp(p_{\vec{k}} t)$ , де значення параметра  $p_{\vec{k}}$  визначає характер стійкості моди у відповідності до теореми Ляпунова. Перша мода, для якої  $\text{Re } p_{\vec{k}} > 0$  при певному критичному значенні керуючих параметрів, стає нестійкою і збурення з часом починає зростати – стаціонарний стан втрачає стійкість та відбувається нерівноважний фазовий перехід системи в інший режим.

### **Запитання та завдання:**

1. Означте стійкий та нестійкий стаціонарний стан системи.
2. Що таке точка біфуркації? Як змінюються стаціонарні стани системи в точці біфуркації?
3. Які типи стаціонарних точок можливі для системи з двома ступенями вільності?
4. Що таке атрактори? Чому вони виникають в динамічних системах? Які типи

атракторів ви знаєте?

5. Що таке граничний цикл? В яких системах він виникає? Яким процесам самоорганізації динамічної системи відповідає наявність граничного циклу у фазовому просторі? Наведіть приклади.
6. Що таке дивний атрактор? Якому режиму динамічної системи він відповідає? Наведіть приклади.
7. Що таке катастрофа? Які типи катастроф ви знаєте?
8. Означте стійкість та нестійкість стаціонарного стану просторово-неоднорідної динамічної системи.
9. Запишіть систему динамічних рівнянь для хімічної системи, що задається наступними реакціями (модель Лоткі-Вольтерра):



де концентрації речовин А та В підтримуватимуться сталими. Знайти всі стаціонарні стани такої системи та дослідити їх стійкість.

10. Чисельно розрахувати фазову траєкторію системи динамічних рівнянь Лоренца (2.19) для параметрів, заданих в підписі до рис.2.6 з використанням програмних пакетів Maple, Mathematica, Matlab або бібліотек мови програмування Python.

### 3. Нерівноважні фазові переходи

Як було сказано у розділі 1, процеси самоорганізації у відкритих системах в точці біфуркації розглядаються як нерівноважні фазові переходи з одного стаціонарного стану в інший, що викликано зростаючими у системі флуктуаціями («порядок через флуктуації»). При цьому система зазнає різкої симетрійної перебудови з стрибкоподібною зміною її поведінки внаслідок кооперативного руху частинок. Таким чином, нерівноважні фазові переходи мають багато спільного з рівноважними, на що вперше звернув увагу Г. Хакен. У зв'язку з цим, математичний апарат, розроблений для описання останніх, може бути застосований до нерівноважних фазових переходів [1, 3].

Основи теорії рівноважних фазових переходів, розроблені Л. Ландау [12], базуються на понятті параметра порядку та описують поведінку системи в околі критичної точки  $T_c$ , фазових переходів другого та першого роду (при незначному віддаленні від критичної точки). Параметр порядку обирається таким чином, щоб в одній (несиметричній) фазі він мав ненульові значення та нульові в іншій – симетричній фазі. Прикладами такої величини є:

- 1) у критичній точці рідина-газ  $\eta = (\rho - \rho_c)/\rho_c$ , де  $\rho$  – густина речовини,  $\rho_c$  – густина речовини в критичній точці: у фазовому переході рідина-газ параметр порядку описує відхилення густини речовини від критичного значення, є рівним нулю в критичній точці (коли зникає різниця рідиною та газом) та приймає додатне (рідина) або від'ємне (газ) значення поза критичною точкою;
- 2) при переході парамагнетик-феромагнетик параметром порядку є намагніченість;
- 3) спонтанна поляризація при сегнетоелектричних переходах;
- 4) амплітуда хвильової функції куперівської пари в переході провідник-надпровідник.

Теорія Ландау є класичною теорією середнього поля, де кооперативна багато-частинкова взаємодія замінюється ефективним потенціалом, в якому знаходять всі частинки. Вважається, що нерівноважний термодинамічний потенціал (вільна

енергія) системи в околі точки фазового переходу можна представити у вигляді степеневого ряду за параметром порядку:

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + \dots, \quad (3.1)$$

де  $\Phi_0(P, T)$  відповідає значенню потенціалу в симетричній фазі при  $\eta = 0$ , коефіцієнти  $a_i = a_i(p, T)$ . Визначення залежності  $\eta$  в околі критичної температури від температури та інших термодинамічних параметрів (тиск, напруженості електричного та магнітного поля тощо) є однієї з основних задач теорії. Критична температура є точкою, в якій  $\eta(T)$  є неаналітичною, тобто не може бути розкладеною в збіжний степеневий ряд за  $T - T_c$ . Параметр порядку задовольняє рівняння [12]:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\gamma \frac{d\Phi}{d\eta}. \quad (3.2)$$

де коефіцієнт  $\gamma$  слабо залежить від температури, тому цією залежністю в подальшому нехтуватимемо.

Для фазового переходу 2-го роду в розкладі (3.1) залишатимуться лише парні степені параметра порядку з міркувань інваріантності відносно  $\eta \rightarrow -\eta$ . В такому простому випадку матимемо (коефіцієнти перепозначені для зручності)

$$\Phi(P, T, \eta) = \Phi_0(P, T) + a\eta^2 + b\eta^4 + \dots, \quad (3.3)$$

де припускається, що  $a$  і  $b$  у малому околі температури фазового переходу можна розкласти в ряд по степенях  $T - T_c$  і обмежитись найнижчими членами розкладу, при цьому коефіцієнт  $b = b(p) > 0$  не залежить від температури<sup>1</sup>, а  $a$  може набувати різних знаків та визначається формулою:

$$a(p, T) = \alpha(p)(T - T_c), \quad \alpha > 0. \quad (3.4)$$

Власне, зміна останнього коефіцієнта при проходженні через критичну точку визначатиме можливе нове значення параметра порядку, тобто стан системи в цілому. На рис. 3.1 представлена залежність  $\Delta\Phi(\eta) = \Phi(P, T, \eta) - \Phi_0(P, T)$  при зміні значення параметра  $a(p, T)$ . При  $a < 0$  є два стійких стани, розділених

<sup>1</sup> В іншому випадку для стійкості системи необхідно враховувати вищі порядки в розкладі (3.2).

потенціальним бар'єром. Перехід між такими станами є фазовим переходом 1-го роду. Зазначимо, що за наявності у розкладі (3.3) кубічного по  $\eta$  доданку профіль потенціалу буде несиметричним, в зв'язку з чим матимемо один метастабільний

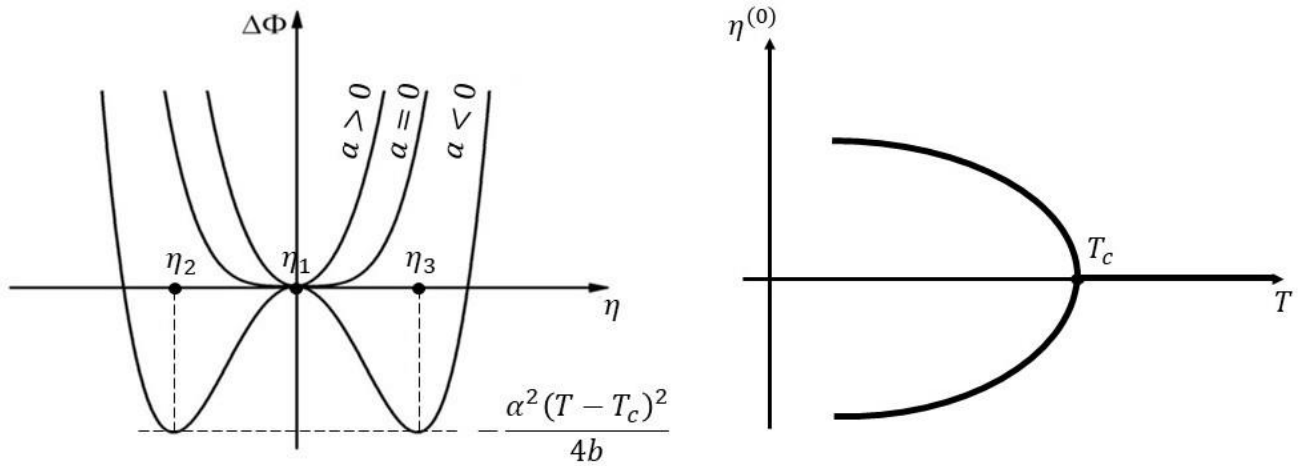


Рис. 3.1. Зміна залежності  $\Delta\Phi(\eta)$  при фазовому переході 2-го роду та залежність  $\eta^{(0)}(T)$  в рівноважному стані в околі критичної точки

стан. Метастабільний стан може при зміні температури стати стабільним, і навпаки. Температура, при якій енергії двох станів будуть рівними, є температурою фазового переходу першого роду. Перехід з одного стану в інший в такому випадку нагадує бістабільність у відкритих системах при переході через точку біфуркації. При  $a = 0$  бар'єр зникає – отримуємо критичний стан системи при фазовому переході 2-го роду. Область  $a < 0$  відповідає так званому закритичному стану. Таким чином, (3.3) можемо записати у наступному вигляді:

$$\Delta\Phi(p, T) = \alpha(p)(T - T_c)\eta^2 + b(p)\eta^4. \quad (3.5)$$

В рівноважному стані потенціал набуває мінімального значення, тому рівноважні значення параметра порядку знайдемо з рівності:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 2\alpha(p)(T - T_c)\eta + 4b(p)\eta^3 = 0, \quad (3.6)$$

звідки, як видно, при  $T > T_c$  матимемо єдиний стійкий дійсний корінь  $\eta_1 = 0$ . При  $T < T_c$   $\eta_1$  стає нестійким, однак з'являються два стійких кореня (рис. 3.1)

$$\eta_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha(T - T_c)}{2b}}, \quad (3.7)$$

що відповідають двом локальним мінімумам потенціалу (рис. 3.1). Як бачимо, залежність параметра порядку в рівноважному стані від температури має неаналітичний вигляд: в критичній точці спостерігається стрибок похідної  $d\eta/dT$ , аналогічний залежності динамічної змінної в стаціонарному стані від керуючого параметра при нерівноважному фазовому переході у точці біфуркації (порівняти з рис. 2.3). Значення вільної енергії та ентропії в рівноважних станах з параметром порядку  $\eta = \eta_{2,3}$

$$\Delta\Phi(\phi_{2,3}) = -\frac{\alpha^2(T - T_c)^2}{4b}, \quad (3.8)$$

$$S - S_0 = \Delta S = -\left(\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial T}\right)_p = \frac{\alpha^2(T - T_c)}{2b}, \quad (3.9)$$

а також отримуємо характерний для фазового переходу 2-го роду стрибок ізобаричної теплоємності

$$\Delta c_p = c_p - c_{p0} = T\left(\frac{\partial\Delta S}{\partial T}\right)_p = \frac{\alpha^2 T_c}{2b}, \quad (3.10)$$

де індекс «0» позначає значення в симетричній фазі при  $\eta = \eta_1 = 0$ .

Для описання релаксації системи до рівноважного стану при фазовому переході потрібно розв'язати динамічне рівняння (3.2):

$$\frac{d\eta}{dt} = -2\gamma(T - T_c)\alpha\eta - 4\gamma b\eta^3. \quad (3.11)$$

Представимо значення параметра порядку як таке, що на незначну флуктуацію відрізняється від рівноважного:  $\eta = \eta^{(0)} + \delta\eta$ . Тоді (3.11) в лінійному наближенні за  $\delta\eta$  з врахуванням (3.6) перепишеться як

$$\frac{d(\delta\eta)}{dt} = -2\gamma(T - T_c)\alpha(\delta\eta) - 12\gamma b\eta^{(0)2}(\delta\eta). \quad (3.12)$$

У випадку  $T > T_c$   $\eta^{(0)} = \eta_1 = 0$ . Тоді з (3.12) отримаємо залежність параметра порядку від часу у наступному вигляді:



$$\delta\eta = \eta_0 e^{-t/\tau_0}, \quad (3.17)$$

де  $\eta_0$  – значення флуктуації параметра порядку в початковий момент часу,  $\tau_0 = [2\gamma\alpha(T - T_c)]^{-1}$  – характерний час релаксації. Аналогічною є залежність параметра порядку від часу в околі рівноважних значень  $\eta^{(0)} = \eta_{2,3}$  з характерним часом  $\tau_0 = [4\gamma\alpha(T_c - T)]^{-1}$ . Експоненційне сповільнення релаксації системи з наближенням до точки рівноваги (точка  $\eta^{(0)}$  досягається при  $t \rightarrow \infty$ ) аналогічне випадку нерівноважного фазового переходу в околі точки біфуркації, розглянутого у попередньому розділі для системи з одним ступенем вільності. В самій критичній точці  $T = T_c$ ,  $\eta^{(0)} = 0$  часова залежність флуктуації параметра порядку має степеневий вигляд  $\delta\eta \sim t^{-1/2}$  (критичне сповільнення релаксації флуктуації).

Теорія Ландау має обмежену область застосування, оскільки базується на малості флуктуацій параметра порядку, що не враховує зростання флуктуацій в близькому околі критичної точки. Тому спостерігається розбіжність теорії з експериментальними результатами, які показують скейлінгову залежність різних фізичних параметрів від  $\tau = (T - T_c)/T_c$  через критичні індекси в околі критичної точки. Зокрема, для параметра порядку в теорії Ландау залежність  $\eta(\tau) \sim (-\tau)^{1/2}$  (критичний індекс  $\beta = 1/2$ ),  $c_p$  має стрибок при  $T = T_c$  в той час як експеримент дає  $\beta \approx 0.33$  та  $c_p(\tau) \sim |\tau|^{-\alpha}$  з критичним індексом  $\alpha < 1$ .

У просторово неоднорідних системах, коли  $\eta = \eta(\vec{r})$ , фазовий перехід описується в рамках теорії Гінзбурга-Ландау [3, 12], де потенціал визначається через його густину з врахування градієнтного доданку:

$$\Phi = \int f(\vec{r}) d\vec{r} = \int [f_0 + \alpha(T - T_c)\eta^2 + b\eta^4 + c(\vec{\nabla}\eta)^2] d\vec{r}. \quad (3.13)$$

Таким чином, вільна енергія є функціоналом поля параметра порядку. Мінімальне значення функціоналу та відповідне рівноважне поле параметра порядку встановлюється методами варіаційного числення з рівняння Ейлера:

$$(\delta\Phi)_{\delta\eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{d}{d\vec{r}} \left( \frac{\partial f}{\partial (\vec{\nabla}\eta)} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Підставивши (3.13) в (3.14), отримаємо рівняння для визначення рівноважного розподілу  $\eta^{(0)}(\vec{r})$ :

$$2\alpha(T - T_c)\eta + 4b\eta^3 - 2c\Delta\eta = 0. \quad (3.15)$$

Динаміка релаксації описуватиметься по аналогії до (3.2) наступним рівнянням:

$$\frac{\partial\eta(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\gamma \frac{\delta\Phi[\eta(\vec{r}, t)]}{\delta\eta(\vec{r}, t)}, \quad (3.16)$$

звідки отримаємо нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних параболічного типу:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = 2\gamma c\Delta\eta - 2\alpha\gamma(T - T_c)\eta - 4b\gamma\eta^3. \quad (3.17)$$

В якості прикладу використання теорії параметра порядку розглянемо нерівноважний фазовий перехід гідродинамічної системи з ламінарного режиму в турбулентний при перевищенні числом Рейнольдса критичного значення (див. розділ 1) [13]. Для цього запишемо рівняння Нав'є - Стокса та умову нестискуваності:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \eta\Delta\vec{v}, \quad (3.18)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (3.19)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт зсувної в'язкості.

Представимо швидкість течії рідини та гідростатичний тиск у вигляді суми їх стаціонарних значень (розв'язків стаціонарних рівнянь (3.18) та (3.19)) та малих флуктуацій, що зникають на межах системи:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}, \quad p = p_0 + \delta p. \quad (3.20)$$

Підставивши (3.20) у (3.18) та (3.19) отримаємо рівняння для флуктуацій в лінійному наближенні:

$$\frac{\partial(\delta\vec{v})}{\partial t} + (\vec{v}_0\vec{\nabla})\delta\vec{v} + (\delta\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta p + \eta\Delta\delta\vec{v}, \quad (3.21)$$

$$\text{div } \delta\vec{v} = 0. \quad (3.22)$$

Невідомі функції  $\delta\vec{v}(\vec{r})$  та  $\delta p(\vec{r})$  описують малі відхилення від ламінарного режиму та задовольняють системі лінійних однорідних диференціальних рівнянь

(3.21), (3.22) з коефіцієнтами, залежними лише від координат. В такому випадку загальний розв'язок рівнянь є суперпозицією частинних розв'язків (мод) типу

$$\delta v = A(t)f(\vec{r}), \quad (3.23)$$

де амплітуда залежить від часу як  $A(t) \sim e^{\gamma t} e^{-i\omega t}$ . Моді, а тому і ламінарний режим, є стійкими при  $\gamma < 0$  ( $Re < Re_c$ ). Коли число Рейнольдса  $Re$  досягне критичного значення, виникне мода з  $\gamma = 0$ , що в подальшому втрачатиме стійкість ( $\gamma > 0$ ) і, як наслідок, спричинятиме перехід від ламінарного до турбулентного руху.

Для більш реалістичного описання процесу переходу між режимами течії зміну амплітуди в часі потрібно доповнити нелінійними доданками:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 - \alpha|A|^4, \quad (3.24)$$

розв'язком якого є

$$|A|^{-2} = \frac{\alpha}{2\gamma} + Ce^{-2\gamma t}. \quad (3.25)$$

Це дозволяє ввести в якості параметра порядку максимальну амплітуду  $|A|_{max}$  флуктуації швидкості від стаціонарного значення у ламінарному режимі:

$$|A|_{max}^2 = \frac{2\gamma}{\alpha} \quad (3.26)$$

Поблизу критичного значення числа Рейнольдса  $Re > Re_c$  залежність параметра  $\gamma(Re)$  можна розкласти по степеням  $Re - Re_c$  та обмежитись першим доданком:

$$\gamma \approx \text{const}(Re - Re_c). \quad (3.27)$$

Коефіцієнт  $\alpha$  також вважається незалежним від числа Рейнольдса. Якщо  $\alpha > 0$  і нелінійний доданок в (3.24) знижує амплітуду, то параметр порядку залежатиме від  $Re - Re_c$  у наступному вигляді

$$|A|_{max} = \left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \sim (Re - Re_c)^{1/2} \quad (3.28)$$

що відповідає «м'якому» режиму збудження коливань по аналогії з

нерівноважними фазовими переходами в автоколиливних системах: генерація починається при щонайменшому значенню  $|A|_{\max}$ . Такий перебіг процесу зародження турбулентності відповідає експериментально спостерігається для деяких типів рідинних систем. Турбулентність, однак, може виникати і в «жорсткому» режимі коли генерація починається при певному скінченному

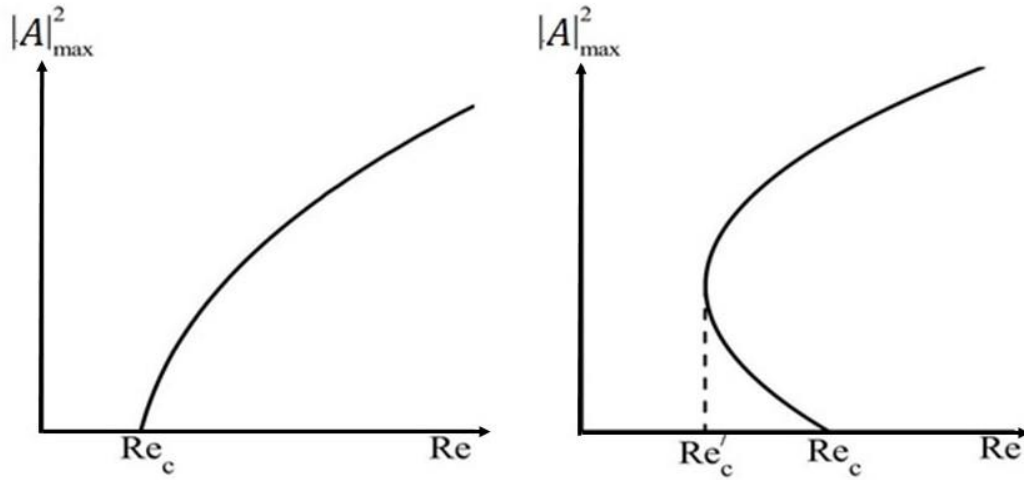


Рис. 3.2. Біфуркаційні діаграми при м'якому та жорсткому переході в турбулентний режим

значенні амплітуди коливань, що характерно для течії Пуазейля. Режим жорсткого збудження можна отримати при  $\alpha < 0$  та  $\beta > 0$  у виразі для динаміки амплітуди

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 - \alpha|A|^4 - \beta|A|^6, \quad (3.29)$$

стаціонарний розв'язок якого має вигляд

$$|A|_{\max}^2 = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[ \frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta} \gamma \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

При м'якому збудженні стаціонарний стан (ламінальний режим) стійкий за будь-яких чисел Рейнольдса  $Re < Re_c$ . При перевищенні числом Рейнольдса критичного значення  $Re > Re_c$  за умови «м'якого» режиму переходу амплітуда наростає плавно зі збільшенням ступеня надкритичності (див. рис. 3.2). При жорсткому збудженні є два критичні числа Рейнольдса (див. рис. 3.2). В області

чисел Рейнольдса  $Re'_c < Re < Re_c$  є два стійких та один нестійкий розв'язок для амплітуди флуктуації  $|A|_{max}$ , тобто рух має бістабільний характер з нерівноважним фазовим переходом між двома стійкими станами  $|A|_{max} = 0$  та  $|A|_{max} > 0$ .

З розглянутих властивостей рівноважних та нерівноважних фазових переходів іможна виявити глибоку аналогію між ними, а саме [3]:

- 1) переходи відбуваються при критичних значеннях зовнішніх параметрів;
- 2) неаналітична залежність параметрів системи від зовнішніх параметрів;
- 3) характерне сповільнення процесів в околі переходів.

Нерівноважні переходи набагато різноманітніші за властивостями, оскільки необмежені областю лише рівноважних процесів.

### ***Запитання та завдання:***

- 1) В чому полягає аналогія між рівноважними та нерівноважними фазовими переходами?
- 2) В чому полягає теорія Ландау рівноважних фазових переходів? Що таке параметр порядку та критичні індекси? Наведіть приклади.
- 3) Врахувавши в (3.3) кубічний доданок, отримайте рівноважні стани в околі критичної точки. Як змінюватиметься характер стійкості цих станів при фазовому переході?
- 4) Наведіть приклад застосування теорії Ландау параметра порядку до нерівноважних фазових переходів.
- 5) В чому полягає теорія Гінзбурга-Ландау рівноважних фазових переходів в просторово неоднорідних системах?

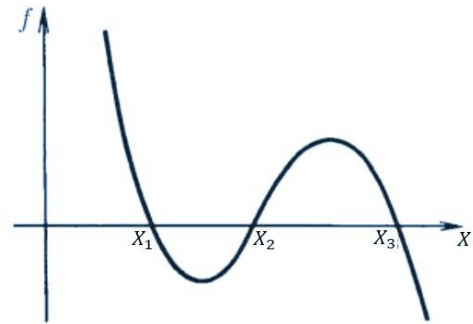
## 4. Бістабільні системи

Бістабільними є системи, що при певному значенні керуючого параметру мають два стійких та один нестійкий стаціонарних станів. При розгляді таких динамічних систем в рамках детерміністичного підходу система може перебувати в одному зі стаціонарних станів нескінченно довго. Перемикання між станами можливе лише завдяки випадковим флуктуаціям та можуть бути отримані лише в рамках стохастичного підходу. Модельне рівняння бістабільної системи вже розглядалось нами у розділі 2 (див. рівняння (2.11)). Розглянемо декілька прикладів реальних фізичних систем, що можуть переходити у бістабільний режим в результаті нерівноважного фазового переходу.

Спочатку розглянемо динамічні системи з одним ступенем вільності. Найпростіший бістабільний елемент описуватиметься рівнянням

$$\dot{X} = f(X, \lambda) \quad (4.1)$$

з одним керуючим параметром  $\lambda$ . Типово функція  $f(X)$  в бістабільному режимі системи має три корені, один з яких нестійкий та знаходиться між двома іншими стійкими. При зміні керуючого параметра крива зміщуватиметься та деформуватиметься і, як наслідок, кількість стаціонарних розв'язків та характер їх стійкості також змінюватиметься.



1. *Комірка горіння.* Розглянемо комірку, всередині якої може проходити процес горіння [14]. Кількість палива залишається постійною за рахунок постійної його подачі ззовні (відкрита система). Нехай при горінні за одиницю часу виділяється кількість тепла  $q(T)$ , що залежить від температури системи. Залежність  $q(T)$  природньо має погорову залежність (рис. 4.1a), оскільки горіння неможливе при температурі нижчої  $T_c$ . Система віддає частину тепла назовні. Таким чином, рівняння для зміни температури комірки матиме наступний вигляд:

$$\dot{T} = c^{-1}q(T) - \gamma(T - T_{ext}), \quad (4.2)$$

де  $c$  – теплоємність елемента горіння,  $T_{ext}$  – температура зовнішнього середовища,  $\gamma$  – коефіцієнт теплообміну.

Стаціонарні стани визначатимуться з рівності нулю правої частини в (4.2). Стан з температурою  $T \approx T_{ext}$  є стійким та відповідає відсутності горіння, коли температура елемента дорівнює температурі зовнішнього середовища. Стан  $T = T_1 > T_c$  відповідає стану горіння, коли теплота горіння комірки віддається назовні. Обидва стани стійкі до малих збурень, однак при суттєвому збуренні система може перейти в інший стан (бістабільність), тобто комірку можна як «запалити», так і «погасити» (рис. 4.1б). При інших співвідношеннях керуючих параметрів (коефіцієнт теплообміну, температура зовнішнього середовища) у системи може реалізовуватись лише один стаціонарний стан. Наприклад, якщо тепловиділення занадто мале, або тепловідведення занадто велике, система перебуватиме в стані з  $T \approx T_{ext}$  без горіння (рис. 4.1в). Якщо  $T_{ext} > T_c$ , спостерігатиметься єдиний стан самозагорання (рис. 4.1г). Якщо маємо послідовність зв'язаних елементів, процес горіння поширюватиметься у вигляді автохвилі перемикування відповідно рівнянню

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.3)$$

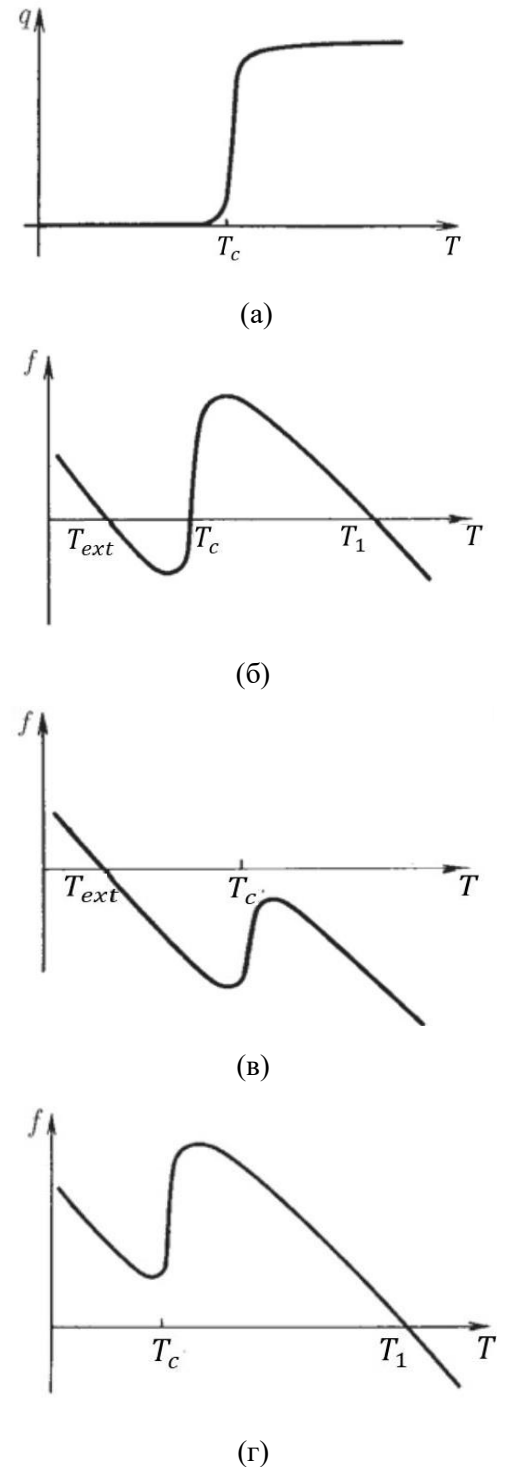


Рис. 4.1. (а) Потужність горіння, (б) бістабільний режим, (в) відсутність горіння, (г) самозаймання

2. *Оптична бістабільність.* Система є оптично бістабільною, якщо при заданому зовнішньому оптичному опромінюванні вона може перебувати у одному із двох можливих стійких станів [15]. Завдяки цій властивості бістабільні оптичні пристрої можуть використовуватись для багатьох цифрових операцій, зокрема як перемикачі, пам'ять, регістри, тригери тощо. Як було сказано у розділі 1, для самоорганізації системи необхідна нелінійність середовища. Однак, оптичної нелінійності недостатньо для отримання бістабільності: необхідна монотонна залежність пропускну характеристики системи від інтенсивності променя накачки, тобто позитивний зворотний зв'язок (активне середовище як в хімічних системах з автокаталізом). Оптична бістабільність поділяється на дисперсну та поглинальну в залежності від того, яка саме частина нелінійної оптичної сприйнятливості середовища – дійсна чи уявна – спричиняє бістабільність.

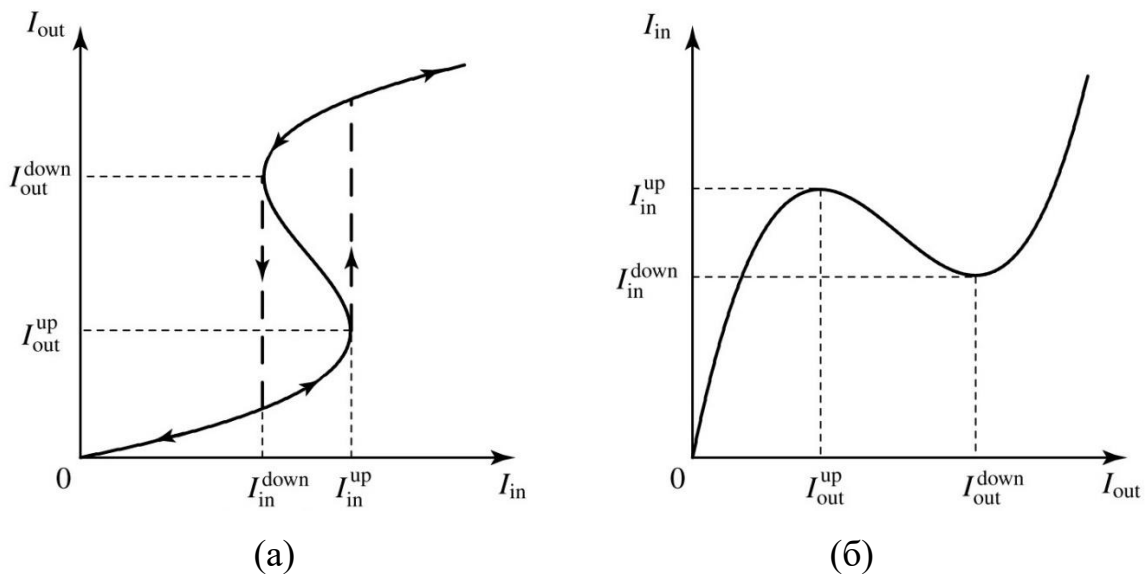


Рис. 4.2. Схематична залежність між інтенсивностями вхідного та вихідного променями при оптичній бістабільності

Для інтенсивності вхідного променя в інтервалі між  $I_{in}^{down}$  та  $I_{in}^{up}$  (рис. 4.2) є три інтенсивності вихідного променя, два значення з яких відповідають стійким станам системи, інше – нестійкому. При поступовому зростанні з нуля інтенсивності вхідного променя інтенсивність вихідного променя визначається



нижньою гілкою на кривій рис.4.2а. При досягненні значення  $I_{in}^{up}$  інтенсивність вихідного променя стрибкоподібно переходить на верхню гілку кривої. При зворотньому зменшенні інтенсивності вхідного променя перехід на нижню гілку відбувається вже при  $I_{in} = I_{in}^{down}$ . Таким чином, стаціонарний стан системи з відповідним значенням інтенсивності вихідного світла залежить від історії її зміни. Дана гістерезисна поведінка системи тісно пов'язана з явищем бістабільності та має широке практичне застосування. З рис. 4.2б слідує, що наявність області бістабільності можливе за умови можливості  $dI_{in}/dI_{out} < 0$  (аналогічно від'ємному диференціальному опору в ефекті Гана). Тому, в основі бістабільності можуть лежати різні нелінійні ефекти, однак типово для дисперсної бістабільності використовують непоглинаюче середовище з ефектом Керра, для поглинальної – насичувані поглиначі (матеріали зі зменшенням поглинання при збільшенні інтенсивності світла).

В основі більшості бістабільних систем є резонатор Фабрі-Перо, заповнений нелінійним середовищем (рис. 4.3). Напруженість електричного і магнітного полів в такому середовищі є розв'язком рівнянь Максвелла для проходження світла через проскопаралельну пластину.

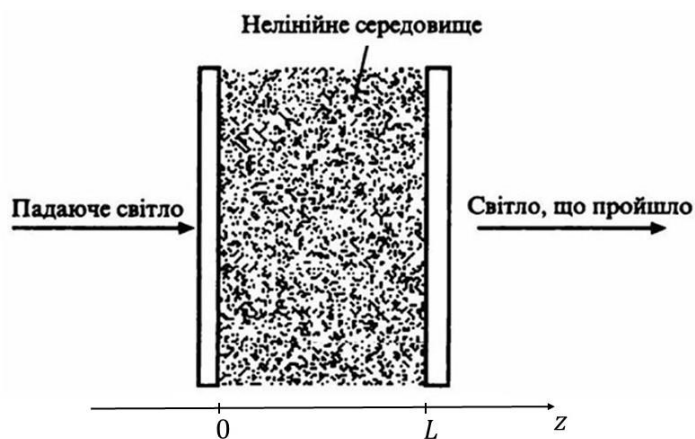


Рис. 4.3. Схема спостереження оптичної бістабільності

У резонаторі світлова хвиля проходить двічі через середовище, формуючи стоячу хвилю. Дзеркала вважатимемо однаковими з коефіцієнтом відбиття  $r \in \mathbb{R}$  та

проходження  $t \in \mathbb{C}$ . Коефіцієнти відбиття та проходження для інтенсивності відповідно  $R = r^2$  та  $T = |t|^2 = 1 - R$ . Також вважатимемо, що нелінійне середовище з коефіцієнтом поглинання  $\alpha$  заповнює весь простір між дзеркалами товщиною  $L$ . Розглядатимемо лише плоскі монохроматичні хвилі. У стаціонарному стані електричні компоненти хвиль, що поширюються вперед  $E_f$  і назад  $E_b$ , у точці  $z = 0$  мають наступні значення:

$$E_f(0) = tE_{in} + rE_b(0), \quad (4.4)$$

$$E_b(0) = rE_f(0) \exp(2kLi - \alpha L), \quad (4.5)$$

де  $k = n\omega/c$  – хвильове число,  $n$  – показник заломлення в нелінійному середовищі,  $\omega$  – частота електромагнітної хвилі. На виході з резонатора при  $z = L$  матимемо:

$$E_{out} = tE_f(L). \quad (4.6)$$

З рівнянь (4.4)-(4.6) отримаємо співвідношення між інтенсивностями вхідного та вихідного променя:

$$I_{out} = |E_{out}|^2 = \frac{(1 - R)^2 e^{-\alpha L}}{(1 - Re^{-\alpha L})^2 + 4Re^{-\alpha L} \sin^2 kL} I_{in}, \quad (4.7)$$

звідки в наближенні тонкого шару  $\alpha L \ll 1$  отримаємо співвідношення [Lugiato]

$$I_{out} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2\omega nL/c)} I_{in} \quad (4.8)$$

Останній доданок у знаменнику (4.8) описує інтерференцію електромагнітних хвиль всередині резонатора. Усереднена інтенсивність в резонаторі  $I \approx I_f + I_b = 2I_{out}/(1 - R)$ . Оскільки в нелінійних середовищах  $n = n(I)$ :

$$n(I) = n_0 + n_2 I \approx n_0 + \frac{2n_2 I_{out}}{1 - R}, \quad (4.9)$$

де  $n_0$  і  $n_2$  – сталі, то для знаходження значення  $I_{out}$ , що відповідає заданому значенню  $I_{in}$ , потрібно розв'язати систему трансцендентних рівнянь (4.8) та (4.9). Для наочності демонстрації існування бістабільного режиму роботи резонатора розв'язок системи шукатимемо графічно (рис. 4.4). Червоними точками позначено корені рівняння (4.8), що відповідають трьом можливим значенням  $I_{out}$  в оптично бістабільному режимі роботи резонатора [3]. Криві, зображені вище та нижче,

відповідають переходу до одного стаціонарного стану при значеннях інтенсивності вхідного променя  $I_{in} = I_{in}^{up}$  та  $I_{in} = I_{in}^{down}$ .

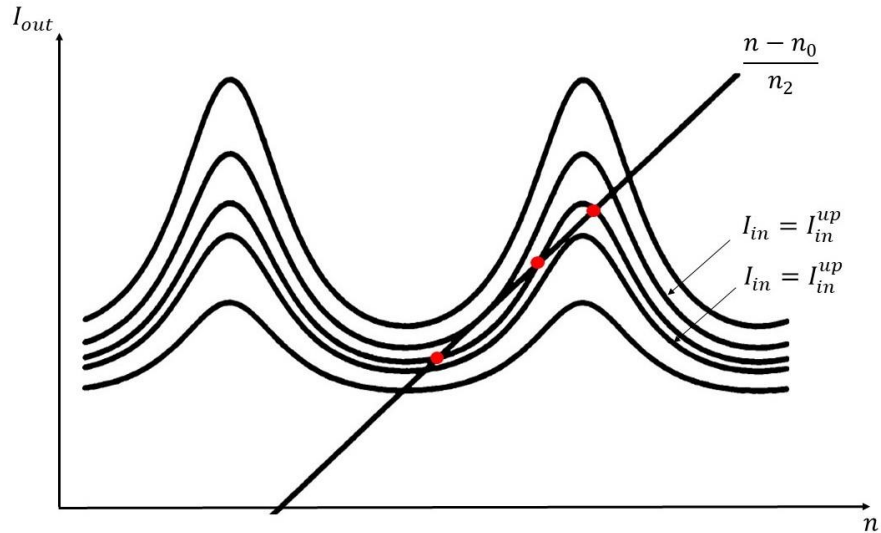


Рис. 4.4. Графічний розв'язок рівняння (4.18)

3. *Електричний тригер*. Розглянемо приклад бістабільної системи з двома ступенями вільності. Тригер - це електрична бістабільна система (рис. 4.5а), що складається із спеціальним чином підключених двох підсилювачів (напівпровідниковими тріодами або електронними лампами) так, що вихідний сигнал кожного з них інвертується і з'єднується з входом іншого [1, 3]. Вольтамперна характеристика підсилювачів забезпечує ненульовий струм на кожному з підсилювачів при подачі інвертованого сигналу з іншого (рис. 4.5б) [Сутаков].

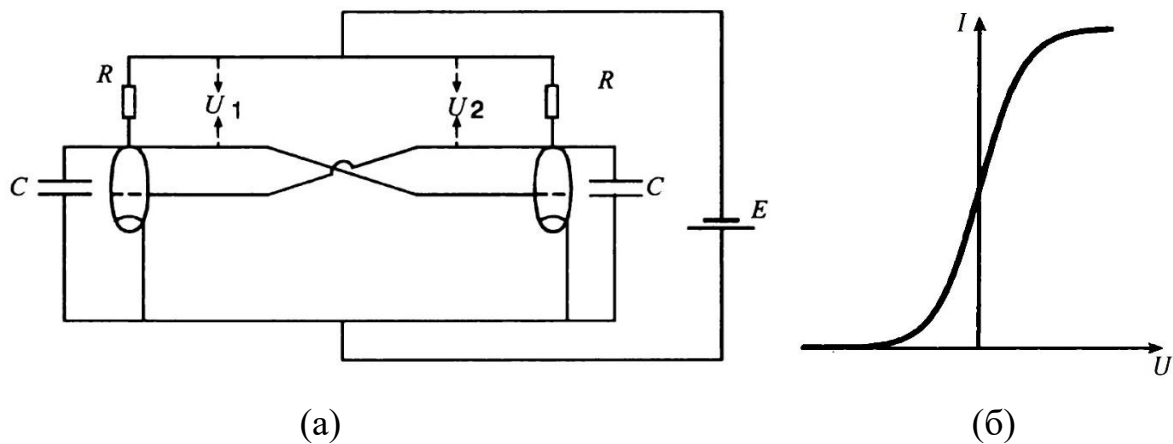


Рис. 4.5. Схема тригера та ВАХ підсилювача

В одному із стаціонарних станів струм на 1-му підсилювачі мінімальний, на 2-му – максимальний; у іншому стані навпаки. У фазовому просторі  $(U_1, U_2)$  дані стійкі стаціонарні стани представлені стійкими вузлами, а нестійкий стан, що їх розділяє, – сідловою точкою. Переключати систему з одного стану в інший можна подаючи імпульс на один з підсилювачів.

Для точок 1 і 2 запишемо 1-й закон Кірхгофа, де струм на конденсаторі  $I_c = dQ/dt = CdU/dt$ , струм на опорі  $I_R = U/R$  (дисипація в системі), анодний струм  $I = f(U)$  (при подачі струму на один з підсилювачів на іншому виникатиме запірний потенціал, тому  $I_1 = f(E - U_2), I_2 = f(E - U_1)$ ):

$$-C \frac{dU_1}{dt} = -\frac{U_1}{R} + f(E - U_2) \quad (4.10)$$

$$-C \frac{dU_2}{dt} = -\frac{U_2}{R} + f(E - U_1) \quad (4.11)$$

Стаціонарні стани системи визначаються з рівнянь:

$$-\frac{U_1^{(0)}}{R} + f(E - U_2^{(0)}) = 0 \quad (4.12)$$

$$-\frac{U_2^{(0)}}{R} + f(E - U_1^{(0)}) = 0 \quad (4.13)$$

При визначеній залежності  $f(U)$  система рівнянь (4.10), (4.11) має один (рис.4.6а) або три розв'язки (рис.4.6б). Розв'язок, який завжди існує, та у бістабільному режимі втрачає стійкість

$$U_1^{(0)} = U_2^{(0)} = U_0: -\frac{U_0}{R} + f(E - U_0) = 0. \quad (4.14)$$

Точка біфуркації визначається з умови рівності нахилу кривих в точці  $U_1^{(0)} = U_2^{(0)} = U_0$  на рис.4.6а:

$$R \left( \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right)_{X=E-U_0} = 1. \quad (4.15)$$

Відповідно лінійному аналізу стійкості стаціонарних точок системи (4.10), (4.11) характер стійкості визначається знаком показників часових експонент:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=E-U_1^{(0)}} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=E-U_2^{(0)}}}. \quad (4.16)$$

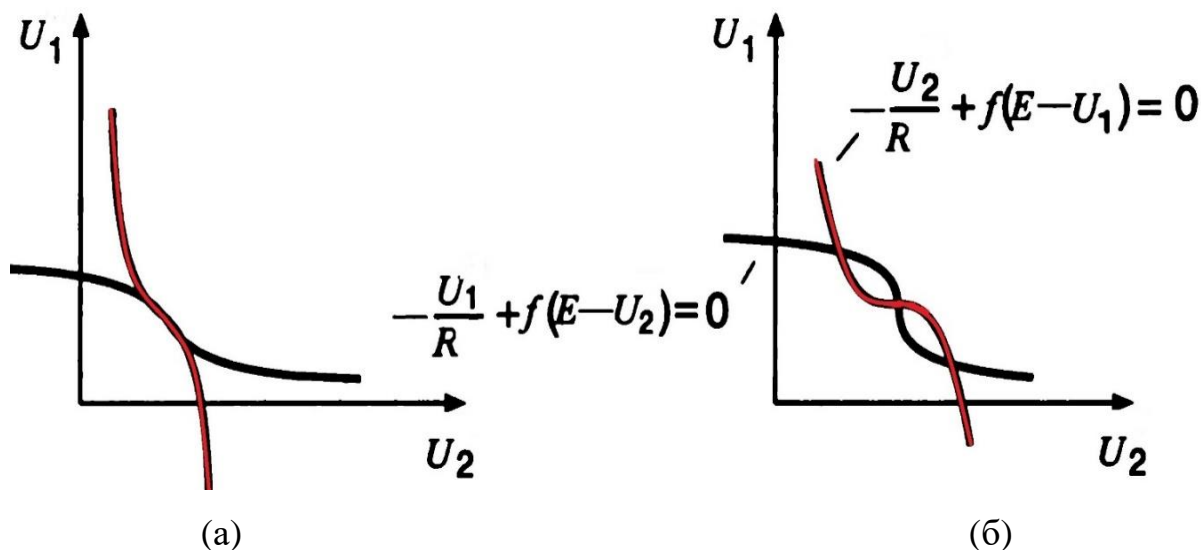


Рис. 4.6. Криві стаціонарних розв'язків електричного тригера

Стаціонарна точка в (4.14) при  $R(\partial f / \partial X)_{X=E-U^0} < 1$  є стійким вузлом. При  $R(\partial f / \partial X)_{X=E-U^0} > 1$  ця точка переходить в сідлову (різні знаки дійсних показників) і з'являються два нових стаціонарних вузла, в одному з яких може знаходитись система.

### Запитання та завдання:

1. Що таке бістабільність? Які умови існування бістабільного режиму щодо фізичної системи та динамічних рівнянь, що її описують?
2. Наведіть приклади бістабільних динамічних систем. Як пов'язана бістабільність з явищем гістерезису?
3. Розглянути бістабільність у хімічній системі, описаній в розділі 1 в реакції (1.5) при  $C_A = const$ ,  $C_B = const$ ,  $C_F = const$ ,  $k_1 = k_{-1} = 0$  (модель Шлегля). Записати систему динамічних рівнянь для концентрації проміжної компоненти  $X$ , визначити стаціонарні точки системи, дослідити характер їх стійкості,

визначити точку біфуркації системи відносно безрозмірного параметра  $\beta = k_3 k_{-2} / (k_2^2 C_A^2)$ . Прослідкувати аналогію між отриманими біфуркаційними діаграмами та кривими Ван дер Ваальса та, відповідно, переходом в бістабільний режим та рівноважним фазовим переходом 1-го роду.

## 5. Автоколивні процеси у відкритих системах

Автоколивання – самозбуджені незатухаючі коливання у нелінійних дисипативних системах, що виникають за наявності постійного (неперіодичного) джерела енергії або речовини та нелінійного позитивного оберненого зв'язку, що посилюватиме початкове збурення (автокаталітична реакція, від'ємний диференціальний опір тощо). Прикладів таких систем існує досить багато, найпростішими є механічні системи: коливання струни при проведенні по ній смичка, флатерінг крила літака під дією потоку повітря, скрип крейди при проведенні одним краєм по дошці тощо. Деякі механічні системи використовуються на практиці, наприклад, у годинникових механізмах. Аналогічна поведінка спостерігається в системах іншої природи: електричних (генератор Ван дер Поля), хімічних (реакція Білоусова – Жаботинського), біологічних (цикли популяцій видів) тощо [16]. Період та амплітуда встановлених автоколивань у системі не залежить від початкових умов та визначається виключно внутрішніми характеристиками системи, на відміну від звичайних коливань під дією зовнішньої періодичної дії. Автоколивання можуть мати як практичну цінність, так і бути небажаними й призводити до руйнування конструкцій та механізмів [1].

Математично автоколивання в динамічних системах проявляються як атрактори типу граничних циклів у фазовому просторі динамічних змінних (див. розділ 2). Наявність граничного циклу можна встановити виключно аналізуючи нелінійні динамічні рівняння, тому ця задача є складною і часто вимагає використання обчислюваної техніки. Для виходу системи на граничний цикл з встановленням автоколивального режиму початково система має перебувати у нестійкому стаціонарному стані типу нестійкого вузла або фокуса (біфуркація Андронова-Хопфа) [16].

В даному розділі спочатку розглянемо класичний приклад електричного генератора Ван дер Поля, для якого можна наближеними аналітичними методами отримати періодичний розв'язок відповідного нелінійного диференціального

рівняння Ван дер Поля [3]. Електричне коло на рис.5.1а складається з індуктивності  $L$ , ємності  $C$ , активного опору контура  $R$ , електрорушійної сили  $E$  та активного елемента (тунельний діод)  $A$  з нелінійною вольт-амперною характеристикою (рис. 5.1б).

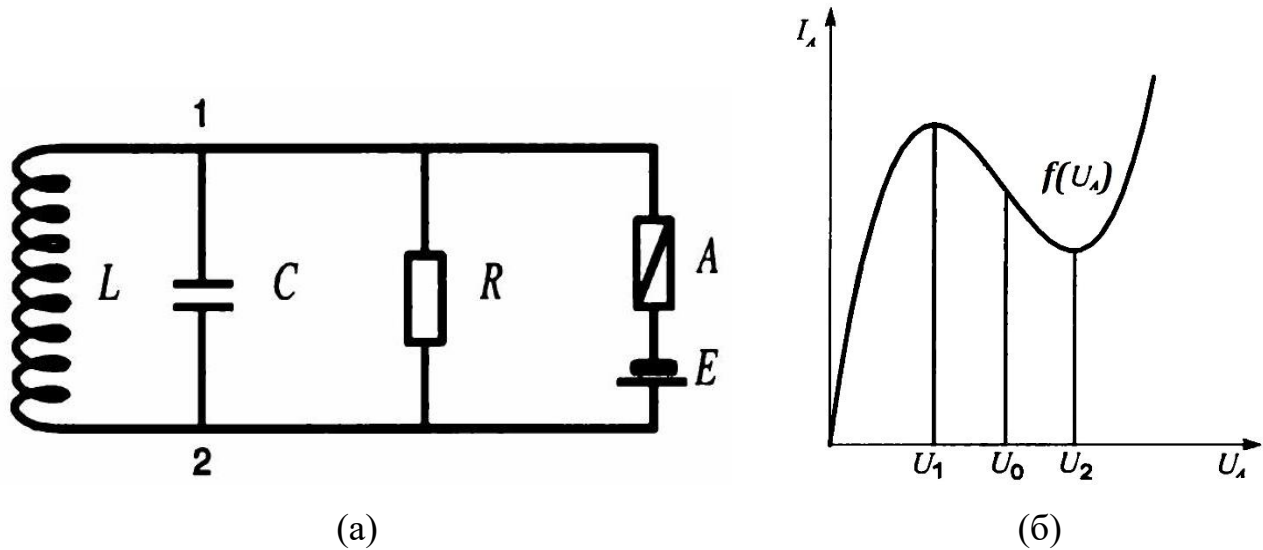


Рис. 5.1. (а) Схема автоколивного електричного кола та  
(б) ВАХ активного елемента кола

Нелінійна ВАХ в області  $U_1 < U < U_2$  має від'ємний диференціальний опір  $dU/dI < 0$ . Для точки 1 кола запишемо 1-й закон Кірхгофа:

$$I_L + I_C + I_R + I_A = 0, \quad (5.1)$$

де струми на елементах кола  $I_R = U/R$ ,  $I_C = CdU/dt$ ,  $LdI_L/dt = U$ ,  $I_A = f(U_A) = f(E + U)$ ;  $U$  – різниця потенціалів між точками 1 та 2. Продиференціювавши (5.1) по часу отримаємо наступне рівняння:

$$CL \frac{d^2 U}{dt^2} + L \left( \frac{1}{R} + f'(E + U) \right) \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad (5.2)$$

У другому доданку в (5.2) множник перед похідною враховує дисипацію за рахунок активного опору та нелінійний відгук активного елемента. З точки зору рівняння коливань цей множник описує зміну амплітуди з часом. Тому, для втрати стійкості стаціонарного стану системи та виходу в автоколивальный режим необхідно, щоб початкова амплітуда збурення  $U$  почала зростати в точці біфуркації, що можливо



при  $f'(E + U) < -1/R$ . Судячи з рис. 5.1б це можливо при подачі на активний елемент такої напруги  $U$ , щоб точка  $E + U$  відповідала області  $[U_1, U_2]$  на рис. 5.1б з від'ємним диференціальним опором. Оскільки нас цікавить мале збурення  $U$ , при якому система почне втрачати стійкість, можемо функцію  $f(E + U)$  представити у вигляді розкладу в ряд в околі точки  $E = U_0$  перегину функції  $f(U)$ :

$$f(E + U) = f(U_0) - \alpha U + \gamma U^3 + \dots, \quad (5.3)$$

де коефіцієнти  $\alpha = f'(U_0)$ ,  $\gamma = f'''(U_0)/6$ . Для одержання автоколивань достатньо врахувати лише один нелінійний доданок у розкладі. Тоді, підставивши (5.3) в (5.2) отримаємо наступне рівняння:

$$U + CL \frac{d^2 U}{dt^2} + L \left( \frac{1}{R} - \alpha + 3\gamma U^2 \right) \frac{dU}{dt} = 0 \quad (5.4)$$

Ввівши параметри  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\varepsilon = \sqrt{L/C}(\alpha - 1/R)$  та безрозмірні час  $\tau = \omega_0 t$  і напругу  $u = U \left( \frac{3\gamma}{\alpha - 1/R} \right)^{1/2}$  отримаємо в результаті відоме рівняння Ван дер Поля:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{d\tau} + u = 0 \quad (5.5)$$

Зазначимо, що саме параметр  $\varepsilon$  визначатиме можливість виникнення автоколивань. Щоб показати це детальніше, перепишем рівняння 2-го порядку (5.5) у систему диференціальних рівнянь 1-го порядку, поклавши  $X_1 = U$ ,  $X_2 = dU/d\tau$ :

$$\frac{dX_1}{d\tau} = X_2, \quad (5.6)$$

$$\frac{dX_2}{d\tau} = -X_1 + \varepsilon(1 - X_1^2)X_2. \quad (5.7)$$

Стаціонарною точкою системи рівнянь (5.6), (5.7) є точка  $X_1 = X_2 = 0$ . Корені характеристичного рівняння для матриці лінеаризованої системи

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \right). \quad (5.8)$$

При  $\varepsilon < 0$  ( $f'(E + U) > -1/R$ ) точка  $(0, 0)$  є стійким фокусом і система не покидає стаціонарний стан. Як тільки щонайменше  $\varepsilon > 0$  ( $f'(E + U) < -1/R$ ) особлива точка втрачає стійкість (нестійкий фокус). Таким чином, точка  $\varepsilon = 0$  є

біфуркаційною. В точці біфуркації система буде нестійкою щодо виникнення коливань з частотою  $\omega_0$ : при  $\varepsilon = 0$   $p_{1,2} = \pm i$ , тому  $X_{1,2} \sim \exp(p_{\pm}\tau) = \exp(\pm i\tau) = \exp(\pm i\omega_0 t)$ .

Для отримання амплітуди та періоду автоколивань потрібно розглянути нелінійне рівняння Ван дер Поля. З цією метою скористаємось методом усереднення, або методом Ван дер Поля [1] – асимптотичним методом, що ґрунтується на наявності у динаміці системи двох часових масштабів: швидкого, що визначається основною частотою коливань, і повільного, що описує характерний час зміни амплітуди цих коливань. Аналізуючи повільний рух, величини можна замінити усередненими по періоду, що власне і дозволяє знайти наближено розв’язок нелінійного рівняння.

Розглянемо рівняння (5.5) в загальному як рівняння динаміки автономної<sup>1</sup> системи:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + u = \varepsilon(1 - u) \frac{du}{d\tau} = \varepsilon \Phi\left(u, \frac{du}{d\tau}\right). \quad (5.9)$$

Нас цікавить вихід в автоколивальний режим при щонайменшому перевищенні керуючим параметром  $\varepsilon$  критичного значення, тому вважатимемо, що виконується умова  $\varepsilon \ll 1$ . Швидкий процес у (5.9) описує коливання з частотою  $\omega_0$ , повільний – модуляцію амплітуди цих коливань. При  $\varepsilon = 0$  рівняння (5.9) є однорідним лінійним рівнянням коливань, розв’язок якого має вигляд  $u(\tau) = a_0 \cos(\tau + \varphi_0)$ , де  $a_0, \varphi_0$  – амплітуда і початкова фаза гармонічних коливань. Тому розв’язок нелінійного рівняння (5.9) шукатимемо у вигляді

$$u(\tau) = a(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)) \quad (5.10)$$

з амплітудою та фазовим доданком  $a(\tau)$  і  $\varphi(\tau)$  - функції часу такі, що  $a(\tau, \varepsilon = 0) = a_0$  і  $\varphi(\tau, \varepsilon = 0) = \varphi_0$ . Вибір вигляду даних функцій, однак, є неоднозначним, оскільки рівняння (5.9), що їх пов’язує, одне. Тому накладемо додаткову умову:

---

<sup>1</sup> Права частина не залежить явно від часу.

$$\frac{da}{d\tau} \cos(\tau + \varphi) - a \frac{d\varphi}{d\tau} \sin(\tau + \varphi) = 0. \quad (5.11)$$

Тоді

$$\frac{du}{d\tau} = -a \sin(\tau + \varphi). \quad (5.12)$$

Підставивши (5.10) в (5.9) і враховуючи додаткову умову (5.11) отримаємо

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon \Phi\left(u, \frac{du}{dt}\right) \sin(\tau + \varphi) \sim \varepsilon, \quad (5.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a} \Phi\left(u, \frac{du}{dt}\right) \cos(\tau + \varphi) \sim \varepsilon, \quad (5.14)$$

що означає повільну зміну  $a(\tau)$  і  $\varphi(\tau)$ . Тоді праві частини рівнянь (5.13) та (5.14) можна наближено замінити усередненими по періоду  $T = 2\pi$  величинами. Отже, враховуючи (5.10) і (5.12), отримаємо при усередненні<sup>1</sup>:

$$\langle \varepsilon a \sin^2(\tau + \varphi) (1 - a^2 \cos^2(\tau + \varphi)) \rangle \stackrel{\varphi=\text{const}}{\underset{a=\text{const}}{\approx}} \frac{1}{2} \varepsilon a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad (5.15)$$

$$\langle \varepsilon a \sin(\tau + \varphi) \cos(\tau + \varphi) (1 - a^2 \cos^2(\tau + \varphi)) \rangle \stackrel{\varphi=\text{const}}{\underset{a=\text{const}}{\approx}} 0. \quad (5.16)$$

З (5.13) та (5.14) тоді отримаємо диференціальні рівняння для  $a(\tau)$  і  $\varphi(\tau)$ :

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = 0, \quad (5.17)$$

звідки отримаємо

$$a(\tau) \approx 2 \left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\varepsilon\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 2, \quad (5.18)$$

$$\varphi(\tau) \approx \varphi_0. \quad (5.19)$$

Таким чином, наближений розв'язок рівняння Ван дер Поля (5.9) має вигляд

$$u(\tau) \approx 2 \left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right) e^{-\varepsilon\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos \tau. \quad (5.20)$$

Як бачимо, амплітуда коливань в (5.20) асимптотично наближається до значення

---

<sup>1</sup> При усередненні зміною повільних функцій з часом нехтується.

$a = 2$ . Таким чином, амплітуда встановлених автоколивань не залежить від початкових умов (див. рис.5.2б). На фазовій площині траєкторія системи починається у нестійкому фокусі та виходить на граничний цикл, що наближено має форму кола з радіусом 2 (рис. 5.2а)

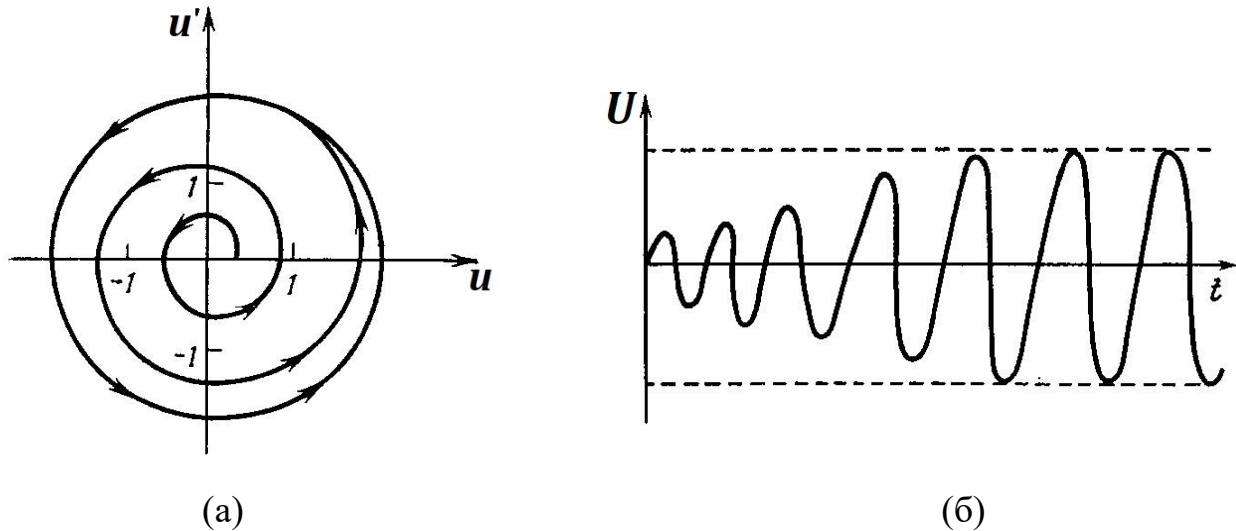


Рис.5.2. (а) Фазова траєкторія та (б) зміна амплітуди з часом в генераторі Ван дер Поля

Постійність амплітуди автоколивань у стаціонарному стані вказує на дисипацію енергії, що надходить з джерела (ЕРС) в систему, тобто у перетворення її в теплову. Крім того, самозбуджені системи мають ще одну унікальну властивість – здатність до синхронізації. Часто такого роду системи представлені в сукупності, і при достатньо сильному зв'язку між ними можуть самозбуджуватись синхронно. Такі задачі виникають при вивченні коливань зв'язаних генераторів, лазерів, хімічних та біологічних автоколивальних систем.

На кінець зазначимо, що більш точний асимптотичний розв'язок рівняння Ван дер Поля отримується методом Боголюбова-Крилова-Митропольського, однак через громіздкість тут не приводиться.

В якості другого прикладу розглянемо хімічну автоколивальну системи у реакції Білоусова-Жаботинського [18]. У 1950 році Б. Жаботинський відкрив коливальну хімічну реакцію в гомогенному розчині – окиснення лимонної кислоти

броматом калію, що каталізується парою іонів  $\text{Ce}^{4+}$  та  $\text{Ce}^{3+}$ . А. Жаботинський пізніше показав, що в якості каталізатора можна також використовувати марганець та ферум, а замість лимонної кислоти малонову та броммалонову кислоти. В рамках реакції спостерігається періодична зміна кольору розчину з жовтого на прозорий (фероїн додається для більш яскравого прояву коливання кольору). Реакція зручна

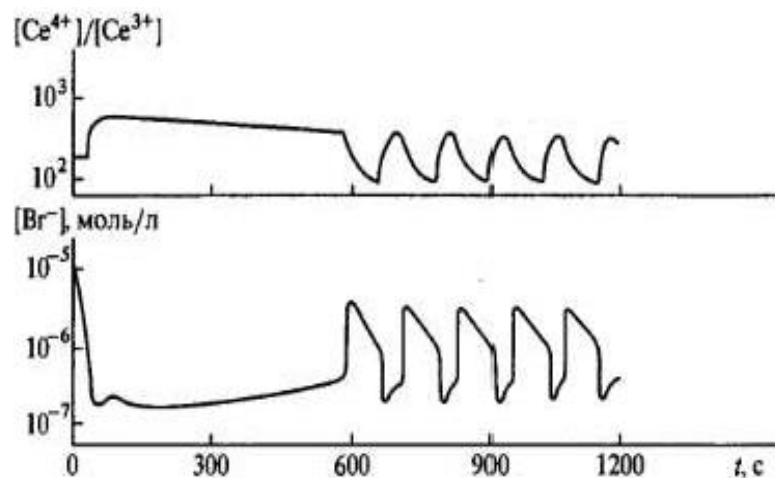


Рис. 5.3. Потенціометричні експериментальні криві  $\lg([Ce^{4+}]/[Ce^{3+}])$  та  $\lg[Br^-]$  [Філд, Керес, Нойес]

для лабораторних досліджень, оскільки період хімічних коливань 10-100 с, що дозволяє спостерігати їх візуально без додаткового обладнання (рис. 5.3). Однак, початкові роботи Білоусова постійно відхилялись від публікування, оскільки хіміки вважали неможливим осциляцію концентрації хімічних компонент в закритих гомогенних системах. Осциляції пояснювались лише можливою наявністю процесів переносу чи фазоутворення в гетерогенних стадіях реакцій. Дійсно, інтуїтивно будь-які коливальні процеси у фізико-хімічних системах пов'язувались з періодичним рухом (коливання маятника, перезарядка конденсатора тощо) та створеної ним неоднорідністю розподілу енергії, заряду, речовини тощо. Щодо хімічної реакції, то можливою причиною хімічної осциляції вважався неоднорідний перерозподіл реагентів та продуктів реакції: в гетерогенній системі реагенти з об'єму підходять по поверхні поділу, де протікає реакція, а продукти відходять навпаки в об'єм, що може спричинити тимчасове призупинення протікання реакції

та періодичність поведінки концентрації компонент. Помилковість твердження неможливості осциляцій була виправдана монотонністю динаміки концентрацій поблизу положення термодинамічної рівноваги закритої системи та монотонністю її ентропії, що слідували з практичного досвіду дослідників того часу. Однак,

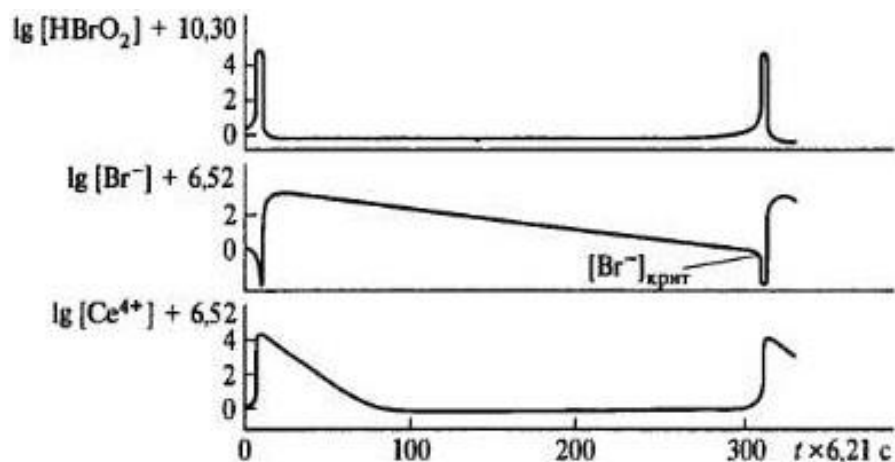
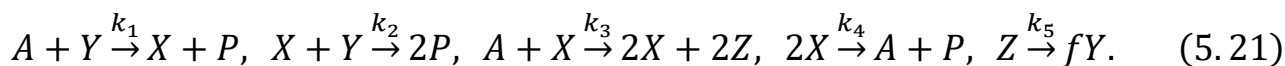


Рис. 5.4. Розрахункові криві хімічних осциляцій в моделі «орегонатор» (критичне значення  $[Br^-]$  відповідає переходу до нової стадії реакції)

фізично це не заперечує можливості хімічних осциляцій у станах далеких від термодинамічної рівноваги, що було показано Білоусовим.

Реакція Білоусова-Жаботинського є досить складною (див. рис. 1.4), однак для аналітичного дослідження та одержання типових характеристик можна скористатись запропонованою у роботі [19] моделлю «орегонатор» ізотермічних необоротних реакцій:

$$X = [HBrO_2], Y = [Br^-], Z = [Ce^{4+}], A = [BrO_3^-], P = [HOBr],$$



Ввівши безрозмірні параметри та концентрації:

$$\tilde{t} = k_1 A t; \quad \varepsilon = \frac{k_1}{k_3}; \quad p = \frac{k_1 A}{k_5}; \quad q = \frac{2k_1 k_4}{k_2 k_3};$$

$$\tilde{X}(\tilde{t}) = \frac{k_2}{k_1 A} X; \quad \tilde{Y}(\tilde{t}) = \frac{k_2}{k_3 A} Y; \quad \tilde{Z}(\tilde{t}) = \frac{k_2 k_5}{2k_1 k_3 A^2} Z,$$

перебіг реакції (5.21) описуватиметься системою динамічних рівнянь

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}}{d\tilde{t}} = \tilde{X} + \tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{Y} - q\tilde{X}^2, \quad (5.22)$$

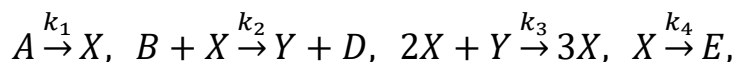
$$\frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{t}} = 2f\tilde{Z} - \tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{Y}, \quad (5.23)$$

$$p \frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{t}} = \tilde{X} - \tilde{Z}. \quad (5.24)$$

Чисельний розв'язок системи (5.22)-(5.24) показує можливість переходу в автоколивальний режим (рис. 5.4). Зазначимо, що виникнення автоколивань пов'язане з автокаталітичною стадією у послідовності реакцій (5.21), що створює нелінійність у рівнянні (5.22). Зазначимо також, що нелінійні рівняння (5.22)-(5.24) описують поведінку динамічної системи з 3-ма ступенями вільності, тому у даній системі можливий перехід у хаотичний режим.

### **Запитання та завдання:**

1. Що таке автоколивання? Які особливості та чим автоколивання відрізняються від звичайних коливань?
2. Які умови виникнення автоколивань у дисипативній системі? Наведіть приклади.
3. Як проявляються автоколивання у фазовій траєкторії дисипативної системи?
4. Завдяки чому виникають автоколивання у генераторі Ван дер Поля?
5. В чому полягає наближений метод Ван дер Поля, або усереднення?
6. Чому реакції з хімічними осциляціями у гомогенних системах вважались неможливими? Опишіть реакцію Білоусова-Жаботинського та умови виникнення автоколивань.
7. Розглянути систему реакцій без перемішування у моделі Ніколеса-Пригожина-Лефевра («брюсселятор»):



де концентрації компонент А, В та Е підтримуються постійними. Записати

динамічні рівняння для  $X(t)$  та  $Y(t)$ , встановити стаціонарні стани та дослідити характер їх стійкості. Показати (чисельно) можливість виникнення автоколивань у системі з появою граничного циклу у фазовому просторі (коливання у протифазі проміжних компонент  $X$  та  $Y$ ).



## 6. Просторово-неоднорідні структури

У розділі 1 ми коротко привели основні типи дисипативних структур та їх характеристики. Одним із типів є просторово-неоднорідні дисипативні структури, або структури Тьюрінга (автопаттерни). А. Тьюрінг у своїй роботі з теоретичної біології «Хімічні основи морфогенезу» (1952 р.) [20] запропонував хімічний механізм утворення періодичних структур у будові та тканинах живих організмів завдяки неоднорідному розподілу хімічних речовин – морфогенів. Існування морфогенів не встановлено остаточно, однак модель Тьюрінга дозволяє пояснити багато експериментальних результатів на основі пари ідей: морфогени реагують між собою та здатні дифундувати крізь клітини (реакційно-дифузійна модель). Динамічні рівняння зміни концентрації морфогенів описуються диференціальними рівняннями 2-го порядку типу (2.28), що враховують процеси дифузії в неоднорідній системі. За відсутності дифузії в результаті реакції система досягає однорідного стаціонарного стану. При однаковій характерній швидкості дифузії різних морфогенів однорідний стаціонарний стан є стійким, однак при різних швидкостях та певних зовнішніх умовах однорідний розподіл може виявитись нестійким (дифузійна нестійкість). Прикладом аналогічної розподіленої хімічної системи є реакція типу «брюсселятор» (див. завд. №6 розд. 5) з врахування дифузійних доданків. Зазначимо, що для стійкості неоднорідного стану кількість реагуючих компонент у системі при цьому має бути не менше двох [3]. Для системи з однією змінною динаміка описується рівнянням

$$\frac{\partial X(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\Delta X(\vec{r}, t) + f(X), \quad (6.1)$$

або, аналогічно (3.16), через функціональну похідну у вигляді

$$\frac{\partial X}{\partial t} = - \frac{\delta U[X(\vec{r}, t)]}{\delta X(\vec{r}, t)} \quad (6.2)$$

де  $U[X(\vec{r}, t)]$  – функціонал, що визначається наступним чином:

$$U(X) = \int \left\{ V[X(\vec{r})] + \frac{1}{2} D(\vec{\nabla} X)^2 \right\} d\vec{r}, \quad (6.3)$$

$$V(X) = - \int_0^X f(X') dX'. \quad (6.4)$$

Стаціонарним станам рівняння (6.1) відповідають екстремуми функціонала  $U(X)$ , стійким станам - мінімуми функціонала. Припустимо, що функція  $f(X)$  має вигляд як на рис.6.1, граничні умови до рівняння (6.1)  $\vec{\nabla} X = 0$  з відсутністю потоку на межі системи. Точки  $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}$  є стаціонарними точками рівняння (6.1) та описують однорідний стан. Функція  $V(X)$  з (6.4), має мінімуми в стійких точках  $X_1^{(0)}$  та  $X_3^{(0)}$ . При довільному просторовому збуренню стійкого

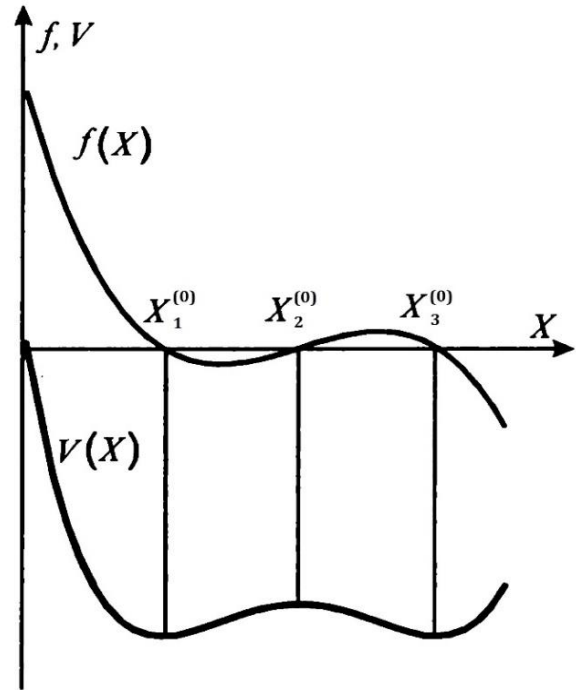


Рис. 6.1. Залежності  $f(X)$  і  $V(X)$

однорідного стану функція  $U(X)$  лише зростатиме, оскільки 1-й доданок в (6.3) зростає з мінімального значення, а 2-й доданок при неоднорідному збуренню набуватиме ненульового (додатного) значення. Тому стаціонарні однорідні стани є стійкими, а неоднорідний стаціонарний стан в околі  $X_1^{(0)}$  чи  $X_3^{(0)}$  буде нестійкими.

Розглянемо просторово-неоднорідні структури в гідродинамічній системі з теплопровідністю на відомому прикладі ефекту Бенара [1, 21]. Ефект, досліджуваний Бенаром в 1900 р. полягає у виникненні вільної конвекції в рідині, що попередньо знаходилась у стані спокою, під дією різниці температур на протилежних обмежуючих поверхнях. Початково при недостатній різниці температур в системі присутня лише теплопровідність, оскільки рух речовини тримується внутрішньою в'язкістю. Тільки коли досягається критичне значення

температурного градієнта, виникає конвективний потік, що має характерну шести-

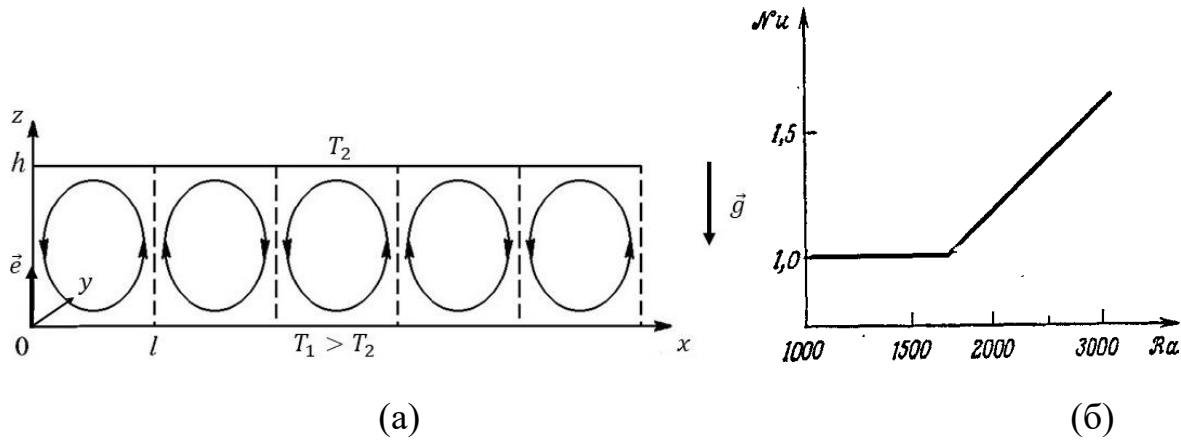


Рис. 6.2. Схема ефекту Бенара з утвореними конвективними потоками

шестикутну комірчасту структуру у паралельному основі посудини перерізі. Напрямок руху рідини на межі конвективних комірок співнаправлений (рис. 6.2а): в центрі комірки рідина рухається вгору, а на межах комірок – униз. Більш строго критичність явища описується числами Релея та Нуссельта (рис. 6.2б):

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T}{\kappa\nu} h^3, \quad Nu = \frac{|q|}{|q_0|} = \frac{|q|h}{\kappa_0\Delta T}, \quad (6.5)$$

де  $\alpha, \kappa, \nu = \eta/\rho$  – коефіцієнти об'ємного розширення, теплопровідності та кінематичної в'язкості рідини,  $\rho$  – густина рідини,  $\Delta T = T_1 - T_2$ ,  $q$  – повний тепловий потік,  $q_0 = -\kappa_0\Delta T/h$  – потік тепла, викликаний лише теплопровідністю,  $\kappa_0$  – статичне значення коефіцієнта теплопровідності. Для твердих обмежуючих рідину поверхонь критичне значення числа Релея  $Ra_{cr} \approx 1700 \pm 51$ , а поведінка кривої на рис. 6.2б в околі критичного значення відповідає неаналітичній залежності при нерівноважному фазовому переході (див. розділ. 4). Виникнення шестикутних комірок є винятково унікальним кооперативним явищем. При чому, шестикутна форма комірок не залежить від форми посудини, а тому обумовлена внутрішніми закономірностями процесу – самоорганізацією середовища. Така високоорганізована структура практично неможлива в стані термодинамічної рівноваги та характеризується порівняно значно нижчим значенням ентропії.

Для кількісного дослідження ефекту будемо характеризувати рідину полем

швидкостей  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  і температурою  $T(\vec{r}, t)$ . Основними рівняннями, що описують систему:

1) рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (6.6)$$

2) рівняння Нав'є-Стокса

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \quad (6.7)$$

де тензор тиску визначається формулою

$$P_{ij} = p \delta_{ij} + p_{ij}, \quad (6.8)$$

$$p_{ij} = -\eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (6.9)$$

$p$  – тиск,  $\eta$  – зсувна в'язкість,  $\vec{f} = (0, 0, -g)$  – сила тяжіння.

3) рівняння теплопровідності

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \Delta T. \quad (6.10)$$

Граничні умови для температури та z-компоненти вектора швидкості мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{при } z = 0, \\ T &= T_2 \quad \text{при } z = h, \\ v_z &= 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ та } z = h. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Граничні умови для  $v_x, v_y$  при  $z = 0, h$  залежить від умов зчеплення на поверхнях, що обмежують систему (вільні поверхні, тверді з ідеальним прилипанням тощо), та будуть визначені пізніше.

У випадку нестисливої рідини рівняння (6.6)-(6.10) можна суттєво спростити. Для цього ми знехтуємо відхиленням густини рідини  $\delta \rho$  від його середнього значення  $\rho_0$  всюди, крім доданка з об'ємною силою у рівнянні (6.7), що відповідатиме за конвективну нестійкість (наближення Бусінеска). Саму густину

вважатимемо залежною лише від температури:  $\rho = \rho(T)$ . Тоді з (6.6) та (6.7) матимемо наступні рівняння:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \equiv \text{div } \vec{v} = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) f_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i. \quad (6.13)$$

Залежність густини від температури можна наближено представити як

$$\rho(T) \approx \rho_0(1 - \alpha(T - T_1)) \quad (6.14)$$

Стаціонарний стан системи описуватиметься стаціонарним розв'язком рівнянь (6.10), (6.12) та (6.13)

$$T_0(z) = T_1 - \beta z, \quad (6.15)$$

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad (6.16)$$

$$p_0(z) = p_1 - \rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 \alpha \beta g z^2. \quad (6.17)$$

Вважатимемо збурення стаціонарного розподілу температури, тиску та швидкості поправками однакового порядку малості:

$$T = T_0(z) + \theta = T_1 - \beta z + \theta \quad (6.18)$$

$$p = p_0 + \delta p \quad (6.19)$$

Тоді, підставивши (6.18) та (6.19) у рівняння Нав'є-Стокса (6.10) і теплопровідності (6.13), з точністю до лінійних доданків отримаємо

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \alpha \theta g \vec{e} - \vec{\nabla} \frac{\rho}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta(\vec{v} \vec{e}) = \kappa \Delta \theta, \quad (6.21)$$

де  $e = (0,0,1)$ .

Застосувавши до рівняння (6.20) операцію  $\text{rot rot}(\cdot)$  та враховуючи умову (6.12) і  $\text{rot } \vec{\nabla}(\cdot) = \vec{0}$  отримаємо рівняння для z-компоненти швидкості  $w = v_z$  та  $\theta$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w = \nu \Delta \Delta w + \alpha g \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta w = \kappa \Delta \theta. \quad (6.23)$$

Рівняння (6.22) є рівнянням 4-го порядку для  $w$ , (6.23) – рівняння 2-го порядку для

$\theta$ , тому для них потрібна відповідна кількість граничних умов. В (6.11) кількість умов недостатня: потрібна ще пара граничних умов для  $w$ , що залежать від природи зчеплення з обмежуючими поверхнями. У випадку твердих поверхонь з ідеальним прилипанням на поверхнях  $z = 0, h$  компоненти вектора швидкості  $v_x = v_y = 0$ . Це еквівалентно  $\partial v_x / \partial x = 0$  та  $\partial v_y / \partial y = 0$ , що у комбінації з (6.12) дасть дві додаткових умови для  $w$  у випадку твердих поверхонь :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ та } z = h. \quad (6.24)$$

У випадку вільної поверхні компоненти  $p_{xz} = 0$  та  $p_{yz} = 0$ . Тоді, враховуючи (6.9) та (6.12) за умови  $w = 0$  при  $z = 0, h$  отримаємо  $\partial v_x / \partial z = 0$  та  $\partial v_y / \partial z = 0$ . Диференціюючи (6.12) по  $z$ , отримаємо додаткову пару умов для вільних поверхонь:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ та } z = h. \quad (6.25)$$

Стійкість збурення стаціонарного розв'язку (6.15)-(6.17) досліджуватимемо методом нормальних мод. У випадку системи, однорідної у напрямку  $Ox$  та  $Oy$  окремі нормальні моди для збурення  $z$  – компоненти швидкості та температури  $\theta$ :

$$w = W(z) \exp(ik_x x + ik_y y + pt), \quad (6.26)$$

$$\theta = \tilde{\theta}(z) \exp(ik_x x + ik_y y + pt). \quad (6.27)$$

Після підстановки (6.26) та (6.27) в (6.22), (6.23) отримаємо пару звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь для амплітуд нормальних мод:

$$p \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_{\perp}^2 \right) W = \nu \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_{\perp}^2 \right)^2 W - \alpha g k_{\perp}^2 \tilde{\theta}, \quad (6.28)$$

$$p \tilde{\theta} = \beta W + \kappa \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_{\perp}^2 \right) \tilde{\theta}, \quad (6.29)$$

де  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Разом з граничними умовами для  $W$  та  $\tilde{\theta}$ :

$$\begin{aligned}
W = \tilde{\theta} = 0, \quad \frac{dW}{dz} = 0 \quad & \text{при } z = 0, h \text{ для твердих поверхонь,} \\
W = \tilde{\theta} = 0, \quad \frac{d^2W}{dz^2} = 0 \quad & \text{при } z = 0, h \text{ для вільних поверхонь,}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

рівняння (6.28) та (6.29) представляють собою крайову задачу. При  $p < 0$  розв'язок цієї задачі є стійким, при  $p > 0$  – нестійким, тому біфуркаційні умови визначаються значеннями параметрів, при яких крайова задача з відповідними граничними умовами має власне значення  $p = 0$ . Тоді, поклавши у (6.28), (6.29)  $p = 0$  та виключивши  $\tilde{\theta}$  з рівнянь отримаємо рівняння 6-го порядку для  $W$ :

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k_{\perp}^2 \right)^3 W = -Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4} W \tag{6.31}$$

Частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння (6.31) з сталими коефіцієнтами має наступний вигляд:

$$W = A \exp(ik_z z), \tag{6.32}$$

підставивши який у (6.31) отримаємо рівняння для  $k_{\perp}$  і  $k_z$ :

$$(-k_z^2 - k_{\perp}^2)^3 = -Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4}. \tag{6.33}$$

Його розв'язок має вигляд

$$k_z^2 = -k_{\perp}^2 - \left( Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{(2l+1)\pi i}{3}\right), \tag{6.34}$$

де  $l = 0, 1, 2$ . Тоді загалом матимемо 6 коренів  $k_z$ :

$$k_{z1\pm} = \pm \sqrt{\left( Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{1/3} - k_{\perp}^2}, \tag{6.35}$$

$$k_{z2\pm} = \pm i \sqrt{k_{\perp}^2 + \left( Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{\frac{1}{3}} (1 + i\sqrt{3})/2}, \tag{6.36}$$

$$k_{z3\pm} = \pm i \sqrt{k_{\perp}^2 + \left( Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{\frac{1}{3}} (1 - i\sqrt{3})/2}. \tag{6.37}$$

Загальний розв'язок представляється у вигляді суперпозиції частинних розв'язків з різними значеннями  $k_z$

$$W(z) = \sum_{i,\pm} A_{i\pm} \exp(ik_{zi\pm}z), \quad (6.38)$$

де амплітудні коефіцієнти  $A_{i\pm}$  визначаються з граничних умов. Зокрема, у випадку вільних поверхонь після підстановки (6,38) у граничні умови (6.30) отримаємо

$$A_{1+} = -A_{1-} = A_1, \quad A_{2\pm} = A_{3\pm} = 0, \quad k_{z1} = \frac{\pi n}{h}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.39)$$

Тоді із (6.38) отримаємо

$$W(z) = a_1 \sin k_{z1}z = a_1 \sin \frac{\pi n z}{h}, \quad (6.40)$$

а для  $k_{\perp}$  із (6.35) отримаємо співвідношення

$$h^2 \left[ \left( Ra \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{1/3} - k_{\perp}^2 \right] = \pi^2 n^2 \quad (6.41)$$

Найнижче власне значення та відповідне найменше число Релея (найменша різниця температури) реалізується при  $n = 1$ :

$$Ra = \frac{h^4}{k_{\perp}^2} \left( \frac{\pi^2}{h^2} + k_{\perp}^2 \right)^3$$

Знову ж, число Релея є функцією  $k_{\perp}$ , тому критичне найменше значення  $Ra_{cr}$  та відповідне значення  $k_{\perp,cr}$  знайдемо з умови:

$$\frac{d(Ra)}{dk_{\perp}} = 0 \Rightarrow k_{\perp,cr} = \frac{\pi}{h\sqrt{2}}, \quad Ra_{cr} = \frac{27}{4} \pi^4 = 657,5. \quad (6.42)$$

У випадку твердих межових умов власні значення в (6.32) отримуються з трансцендентних рівнянь, а мінімальне значення числа Релея в такому випадку  $Ra_{cr} \approx 1707.8$ , що є досить близьким до отриманого експериментального значення на рис. 6.2б. Тобто, наближення Бусінеска виявляється досить точним для аналізу нестійкості Бенара.

Отже, стаціонарний безконвективний стан системи втрачає стійкість з наростаючою модою, проекція хвильового вектора якої в площині  $XU$  задовольняє



умові  $k_{\perp} = k_{\perp,cr}$ , що відповідає спостережуваним в експерименті конвективним валам (рис. 6.2а). У рамках лінійного аналізу можливо отримати лише умову нестійкості (біфуркації). Форма конвективних комірок просторово-неоднорідної структури визначається при розрахунку нелінійної задачі [3]. Для конвективних валів функції  $\theta(x, z)$ ,  $v_x(x, z)$  та  $v_z(x, z)$  шукатимемо у вигляді розкладу за певною повною системою базисних функцій (метод Гальоркіна). В якості базису для даної геометрії візьмемо тригонометричні функції

$$\begin{aligned} &\sin(max)\sin(nbz), \quad \sin(max)\cos(nbz), \\ &\cos(max)\sin(nbz), \quad \cos(max)\cos(nbz), \end{aligned} \quad (6.43)$$

де  $a = \pi/l$ ,  $b = \pi/h$ . Враховуючи виконання межових умов (6.11), симетрію конвективного руху в комірках на рис. 6.2а, однакову парність по  $x$  та  $z$  функцій  $\theta(x, z)$  та  $v_z(x, z)$ , збурення температури шукатимемо у вигляді розкладу

$$\theta(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\theta}_{mn}(t) \cos(max) \sin(nbz). \quad (6.44)$$

Оскільки виконана умова (6.12), то для вектора швидкості зручно ввести функцію потоку таку, що  $v_x = \partial\Psi/\partial z$ ,  $v_z = -\partial\Psi/\partial x$ . Для випадку вільної поверхні, який розглядався детально вище, компонента тензора тиску  $p_{xz} = 0$ , тому якщо функція  $v_z$  є парною по  $x$  та непарною по  $z$ , то компонента  $v_x$  – навпаки. В такому разі функцію течії можемо записати у вигляді

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(t) \sin(max) \sin(nbz). \quad (6.45)$$

Рівняння (6.6)-(6.10) в такому разі матимуть наступний вигляд:

$$\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta\Psi = \alpha g \frac{\partial\theta}{\partial x} + \nu \Delta\Delta\Psi, \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \beta = \kappa \Delta\theta. \quad (6.47)$$

Компоненти вектора швидкості як наслідок з (6.45) можуть бути представлені у вигляді:

$$v_x(x, y, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} nb\psi_{mn}(t)\sin(max)\cos(nbz), \quad (6.48)$$

$$v_z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ma\psi_{mn}(t)\cos(max)\sin(nbz), \quad (6.49)$$

Підставивши (6.44) та (6.45) в (6.46)-(6.47), отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу  $\tilde{\theta}_{mn}(t)$  та  $\psi_{mn}(t)$ . На практиці раціонально «обрізати» ряд і таким чином врахувати лише найголовніші гармоніки. Так система Лоренца (див. рівняння (2.19)) отримується, якщо вважати суттєвими та відмінними від нуля лише  $\psi_{11}$ ,  $\tilde{\theta}_{11}$  та  $\tilde{\theta}_{02}$ . Запишемо функцію течії та збурення температури у наступному вигляді:

$$\Psi = \frac{\kappa(1+c^2)\sqrt{2}}{c} X \sin(ax) \sin(bz), \quad (6.50)$$

$$\theta = \frac{Ra_{cr}\Delta T}{\pi c Ra} \sqrt{2} Y \cos(ax) \sin(bz) - Z \sin(2bz), \quad (6.51)$$

де  $c = h/l$ . Амплітудні множники  $X, Y, Z$  в результаті підстановки (6.50) та (6.51) в (6.46)-(6.47) задовольнятимуть динамічним рівнянням системи Лоренца:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= \dot{Y} = -XZ + \lambda X - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= \dot{Z} = XY - \xi Z, \end{aligned} \quad (6.52)$$

де  $\tau = b^2(1+c^2)\kappa t$ ,  $\sigma = \nu/\kappa$ ,  $\xi = 4(1+c^2)^{-1}$ ,  $\lambda = Ra/Ra_{cr} \approx \Delta T$  – зовнішній керуючий параметр. Фізичний смисл динамічних змінних  $X, Y$  та  $Z$  зрозумілий з (6.44), (6.48) та (6.49): змінна  $X$  характеризує швидкість обертання конвекційних валів,  $Y$  та  $Z$  характеризують розподіл температури по горизонталі та вертикалі.

Опишемо зміну режимів руху системи (6.52) в залежності від значень керуючого параметра. Стаціонарними точками динамічної системи є наступна трійка значень:

$$\begin{aligned}
X_1^{(0)} &= 0, Y_1^{(0)} = 0, Z_1^{(0)} = 0; \\
X_2^{(0)} &= \sqrt{\xi(\lambda - 1)}, Y_2^{(0)} = \sqrt{\xi(\lambda - 1)}, Z_2^{(0)} = \lambda - 1 \\
X_3^{(0)} &= -\sqrt{\xi(\lambda - 1)}, Y_3^{(0)} = -\sqrt{\xi(\lambda - 1)}, Z_3^{(0)} = \lambda - 1,
\end{aligned} \tag{6.53}$$

де перший стаціонарний стан відповідає безконвективному режиму, а два інших – режиму з конвективними валами, при чому протилежний знак перед коренями відповідає обертанню валів у протилежному напрямку.

Розглянемо характер стійкості стаціонарних точок в (6.53) в залежності від значень параметрів системи. Нехай  $(X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)})$  – стаціонарна точка, відхилення від якої позначимо  $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$ . Тоді в рамках лінійного аналізу стійкості перепишемо систему (6.53) для збурень:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\delta X)}{dt} &= \sigma(\delta Y - \delta X), \\
\frac{d(\delta Y)}{dt} &= \lambda \delta X - \delta Y - X^{(0)} \delta Z - Z^{(0)} \delta X, \\
\frac{d(\delta Z)}{dt} &= -\xi \delta Z + X^{(0)} \delta Y + Y^{(0)} \delta X.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Розв'язок (6.54)  $\delta x, \delta y, \delta z \sim \exp(pt)$ . Характеристичне рівняння для пошуку власних значень  $p$  в загальному для довільної точки матиме наступний вигляд:

$$(p + \sigma) \left[ (p + 1)(p + \xi) + X^{(0)2} \right] + \sigma \left[ (p + \xi)(Z^{(0)} - \lambda) + X^{(0)} Y^{(0)} \right] = 0. \tag{6.55}$$

Для стаціонарної точки, що описує теплопровідний режим  $(X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)}) = (X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}, Z_1^{(0)})$ , матимемо три кореня рівняння (6.55)

$$p_1 = -\xi, p_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(\lambda - 1)}. \tag{6.56}$$

Як видно з (6.56), стаціонарна точка  $(0, 0, 0)$  є стійким вузлом при  $\lambda < 1$ . Значення  $\lambda = 1$  є біфуркаційним, оскільки при  $\lambda > 1$  стаціонарна точка стає нестійкою (сідло-вузол).  $\lambda = Ra/Ra_{cr}$ , тому дана точка біфуркації відповідає переходу від теплопровідного режиму до конвективного.

Тепер розглянемо дві інші стаціонарні точки. В результаті підстановки їх координат в рівняння в (6.55) отримаємо кубічне рівняння:

$$p^3 + (\sigma + \xi + 1)p^2 + (\lambda + \sigma)\xi p + 2\sigma\xi(\lambda - 1) = 0. \quad (6.57)$$

Графічний аналіз коренів рівняння (6.57) показує, що при незначному перевищенні керуючим параметром  $\lambda$  одиниці всі власні значення є дійсними та від'ємними, тобто 1-й стаціонарний стан втрачає стійкість, а 2-й та 3-й у такому вже конвективному режимі є стійкими вузлами у фазовому просторі системи Лоренца та відповідають утворенню конвективних валів. При подальшому збільшенні  $\lambda$  два з трьох значень стають комплексно спряженими і стаціонарні точки переходять у стійкі фокуси. Однак, зі зростанням  $\lambda$  вище певного критичного значення стійкість стаціонарних станів втрачається. Для пошуку цього другого (першим є  $\lambda_{cr,1} = 1$ ) критичного значення зробимо заміну  $p = ik, k \in \mathbb{R}$  в (6.57)<sup>1</sup>:

$$-ik^3 - (\sigma + \xi + 1)k^2 + i\xi(\sigma + 1)k + 2\sigma\xi(\lambda - 1) = 0, \quad (6.58)$$

звідки, прирівнявши нулю окремо дійсну та уявну частини, отримаємо критичне значення:

$$\lambda_{cr,2} = \frac{\sigma(\sigma + \xi + 3)}{\sigma - \xi - 1} \quad (6.59)$$

При перевищенні керуючим параметром другого критичного значення (6.59) всі стаціонарні точки втрачають стійкість і фазова траєкторія динамічної системи набуває складного заплутаного вигляду, що називається дивним атрактором. Дивний атрактор проявляється у стягуванні фазових траєкторій до граничної множини зжатого фазового простору диссипативної динамічної системи<sup>2</sup>. потрапивши в фазову область атрактора Лоренца, система залишається там назавжди. У самому атракторі локально рух є нестійким: будь-які дві траєкторії системи експоненційно швидко розбігаються, але при цьому залишаються в області

<sup>1</sup> У критичній точці дійсні частини коренів (6.57), що відповідають стійким фокусам, дорівнюють нулю.

<sup>2</sup> Дійсно,  $\text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -(\xi + \sigma + 1) < 0$  (див. 2.24 в розділі 2).

атрактора. Динаміка системи з дивним атрактором є хаотичною: описуючись детермінованою системою диференціальних рівнянь типу (6.52) стан системи є надзвичайно чутливим до початкових умов (детермінований, або динамічний хаос) [22]. Для дослідження такої поведінки потрібно чисельно інтегрувати систему рівнянь Лоренца (див. завд. №10 розділу 2). При  $\sigma = 10, \xi = 8/3$  критичне значення  $\lambda_{cr,2} \approx 24.7368$ , при перевищенні якого стаціонарний конвективний рух рідини у вигляді валів є нестійким. В роботі Лоренца [23] приведено розрахунки часових залежностей динамічних змінних для параметрів  $\sigma = 10, \xi = 8/3, \lambda = 28$  (рис. 6.3).

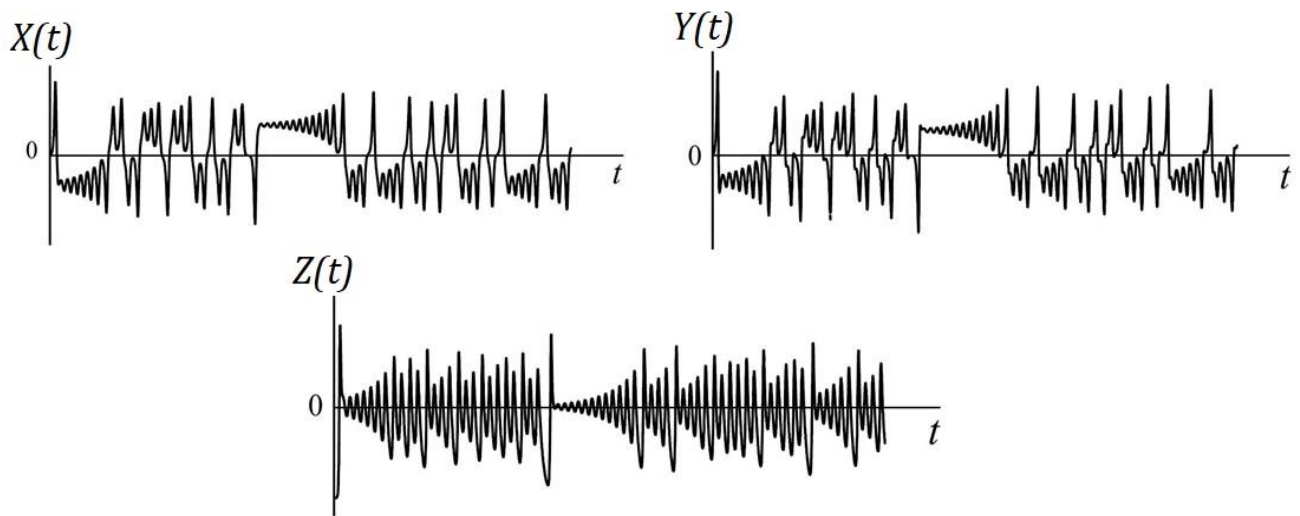


Рис. 6.3. Динамічні змінні в режимі динамічного хаосу ефекту Бенара

На рис. 6.4 приведені фазові траєкторії динамічної системи в різних проекціях в координатах  $X - Z, Y - Z, X - Y$ . Зображення на рис. 6.3 та 6.4 демонструють, що амплітуда швидкості обертання конвективних валів  $X(t)$  при середньому значенні в околі  $X_2^{(0)}$  та  $X_3^{(0)}$  осцилюють з поступовим зростанням амплітуди, що в результаті призводить до можливого перетину нульового значення швидкості та перескоку траєкторії в область іншої стаціонарної точки (рис. 6.4) з протилежним напрямком обертання валів. Амплітуда осциляцій є дуже чутливою до початкових умов, а тому має хаотичний характер.

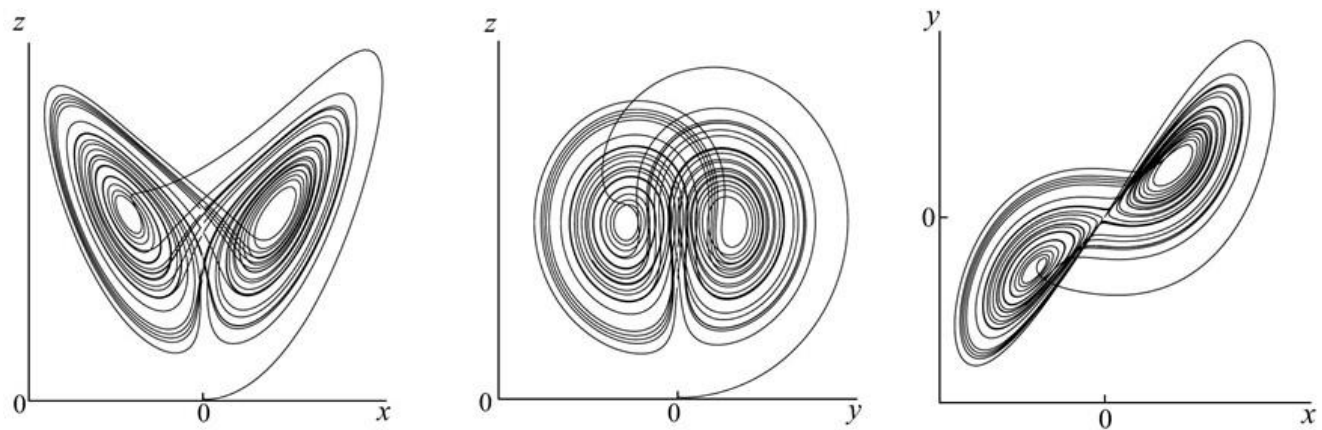


Рис.6.4. Проекції хаотичної траєкторії дивного атрактора Лоренца на фазові площини  $X - Z$ ,  $Y - Z$ ,  $X - Y$

Хаотичний режим в динамічній системі Лоренца при тих же  $\sigma = 10, \xi = 8/3$  має місце до значення керуючого параметра  $\lambda \approx 148.4$ , вище якого система переходить у регулярний<sup>1</sup> режим автоколивань з граничним циклом у фазовому просторі. При певних значеннях  $\lambda$  можливий знову перехід до хаотичного режиму за різними сценаріями [Хакен].

Зазначимо, що модель одномодового лазера як ще одного прикладу просторово-неоднорідної системи з кооперативною поведінкою також описується рівняннями Лоренца (6.52) [Сугаков, Хакен]. Дана модель являє собою резонатор, у якому може порушуватися лише одна мода коливання електромагнітного поля з частотою  $\omega_0$ . Амплітуда коливань залежить від втрат та взаємодії поля з активним середовищем, яке складається з атомів з двома енергетичними рівнями з  $\Delta E = \hbar\omega_0$ . В системі передбачається наявність механізму створення інверсного заселення рівнів. Рівняння, що описують динаміку такої системи, збігаються з (6.52), де динамічні змінні  $X$  відповідає амплітуді поля,  $Y$  – поляризації,  $Z$  – інверсії заселеності рівнів. Керуючим параметром при цьому замість числа Релея  $Ra$  виступає інтенсивність накачки.

<sup>1</sup> Характерні відмінності між регулярним та хаотичним рухами приведені у [9]

### ***Запитання та завдання:***

1. Які умови утворення просторово-неоднорідних структур у дисипативних системах? Чи можливе їх виникнення у системі з однією польовою функцією?
2. В чому полягає ефект Бенара? Що таке наближення Бусінеска?
3. Що таке система Лоренца, як вона отримується в ефекті Бенара? Що виступає в якості динамічних змінних в системі Лоренца для ефекту Бенара? Наведіть інші приклади виникнення системи Лоренца.
4. Як змінюється поведінка системи при зростанні числа Релея у ефекті Бенара? Як ця зміна проявляється у фазовій траєкторії для системи Лоренца?
5. Що таке дивний атрактор? Чому він виникає? Що таке динамічний, або детермінований хаос?
6. Змодельуйте ефект Бенара в системі мультифізичного моделювання на зразок COMSOL Multiphysics з використанням модулів гідродинаміки та теплопровідності. Проаналізуйте поведінку системи в околі критичної точки переходу у конвективний режим.
7. Розглянути розподілену (з перемішуванням) модель хімічної системи «брюсселятор» (див. завд. №7 розділу 5). У моделі врахувати дифузійні доданки для проміжних компонент реакції. Вважати концентрації (або потоки) проміжних компонентів реакції на границях системи фіксованими. Знайти критичне значення керуючого параметра (концентрація одного з вихідних реагентів), при якому однорідний стан втрачає стійкість.
8. Розглянути систему одномодового лазера. Побудувати систему динамічних рівнянь з врахуванням впливу накачки активного середовища, рівноймовірних вимушених переходів між рівнями та наявності безрадіаційних переходів, нехтуючи спонтанним випромінюванням та поглинанням. Визначити точку біфуркації (керуючий параметр – інтенсивність накачки) переходу від лампового до лазерного режиму [3,10]. Отримати систему динамічних рівнянь Лоренца для такої системи.

## 7. Автохвильові процеси у відкритих системах

В даному розділі розглянемо просторово-часові дисипативні структури, а саме автохвильові процеси. Автохвилі є самопідтримувані нелінійні хвилі в активних (здуджуваних) середовищах, що зберігають свої характеристики (період, довжину хвилі, амплітуду та форму) постійними завдяки розподіленому джерелу енергії або речовини в системі. У стаціонарному режимі характеристики автохвиль залежать лише від локальних властивостей середовища та не залежать від початкових умов та лінійних розмірів системи (у віддаленій від її границь області). Тому для автохвиль не працює принцип суперпозиції (на відміну від звукових чи електромагнітних хвиль в лінійних середовищах), вони можуть повністю зникати при взаємодії (анігілювати)<sup>1</sup>, для них відсутнє відбивання, проте спостерігається явище дифракції. Серед автохвильових процесів виділяють біжучі фронти (автохвиля переключення), біжучі імпульси (хвиля збудження сталого профілю з подальшою релаксацією середовища до початкового стану), ведучі центри (автономні локалізовані джерела хвиль), стоячі автохвилі, ревербератори (ехо), синхронні автоколивання у середовищі тощо. Автохвилі проявляються у напівпровідниках, плазмі, магнітних плівках, хімічних системах тощо. Найвідомішим прикладом автохвильового процесу є нервовий імпульс, що поширюється по нервовому волокну – явище досліджуване Гельмгольцом ще в середині XIX ст. Поширення автохвилі зміни електричного потенціалу на межах мембран клітин серцевого м'яза, що призводить до скорочення останнього, є ще одним прикладом подібних процесів у біологічних тканинах [3,24,25]. Розглянемо декілька прикладів автохвиль різного типу та природи [24].

*1. Біжучі фронти.* При поширенні біжучого фронту стан системи до фронту та після нього відрізняються – система при проходженні хвилі «перемикається» з одного стану в інший [3]. Найпростішим випадком такої системи є активне

---

<sup>1</sup> На відміну від солітонів – поодиноких хвиль в нелінійному консервативному середовищі, що форма яких визначається початковими умовами та зберігається при взаємодії.



середовище, що описується єдиним динамічним рівнянням з дифузійним доданком для врахування взаємодії між активними елементами системи:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + D\Delta X. \quad (7.1)$$

Рівняння (7.1) є диференціальним рівнянням в частинних похідних параболічного типу з нелінійним  $f(X)$  джерелом, унікальність якого полягає у можливості існування розв'язку у вигляді хвилі перемикання. Можливість виникнення та поширення автохвиль залежить від вигляду нелінійного джерела. Покажемо це в загальному випадку поширення хвилі перемикання в 1-D середовищі (без обмеження загальності покладемо для зручності  $D = 1$ ):

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}. \quad (7.2)$$

Як було сказано у попередньому розділі, стаціонарні стани такої системи з однією польовою функцією може бути лише однорідним, тому знаходиться з рівняння  $f(X^{(0)}) = 0$ . На протилежних кінцях система знаходиться в різних станах:  $X = X^{(0)}$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Автохвильовий розв'язок (7.2) відповідає залежності динамічної змінної від координат та часу у вигляді  $X(z, t) = X(\xi)$ , де  $\xi = z - vt$ . Тоді (7.2) набуде вигляду рівняння

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + v \frac{dX}{d\xi} + f(X) = 0, \quad (7.3)$$

або, ввівши динамічні змінні  $X_1(\xi) = X, X_2(\xi) = dX/d\xi$ , вигляду динамічної системи в системі відліку відносно автохвилі:

$$\frac{dX_1}{d\xi} = X_2, \quad (7.4)$$

$$\frac{dX_2}{d\xi} = -vX_2 - f(X_1). \quad (7.5)$$

В такому випадку стан системи можна описувати у фазовому просторі  $(X_1, X_2)$ , для якого замість змінної часу  $t$  виступатиме змінна  $\xi$ . Поширення автохвилі у середовищі відповідатиме скінченна (гетероклінічна) траєкторія між стаціонарними точками  $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . У випадку найпростішої хвилі

перемикання функція  $f(X)$  має два кореня, один з яких  $X_1^{(1)}$  стійкий, інший  $X_1^{(2)}$  – нестійкий (рис. 7.1а). Лінійний аналіз коренів на стійкість показує, що автохвильовий розв’язок для такої системи буде стійким лише при переході з сідлової точки  $X_1^{(2)}$  у стійкий вузол  $X_1^{(1)}$  (рис. 7.1б) за траєкторією, що визначатиметься рівнянням

$$X_2 \frac{dX_2}{dX_1} + vX_2 + f(X_1) = 0 \quad (7.6)$$

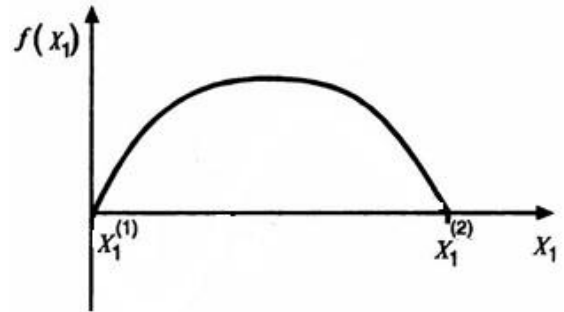
та відповідає хвилі перемикання на рис.7.1в (стрілками вказаний напрямок зміщення фронту при відповідній зміні часу та координати). Це встановлює обмеження на значення швидкості:

$$v > v_{\min} = 2\sqrt{f'(X_1^{(1)})},$$

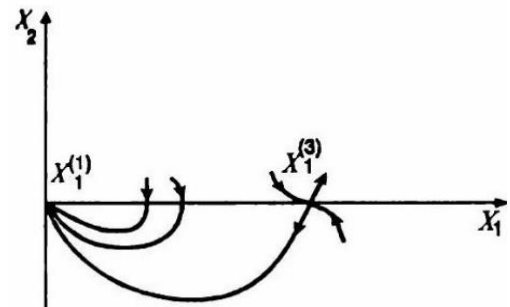
тобто автохвиля може поширюватись у такому активному середовищі лише при швидкостях більших за  $v_{\min}$ .

Перемикання системи відбувається по принципі доміно: початкове збурення стану ззовні «запускає» ланцюгову хвилю, що поширюється у середовищі завдяки зв’язку між елементами системи.

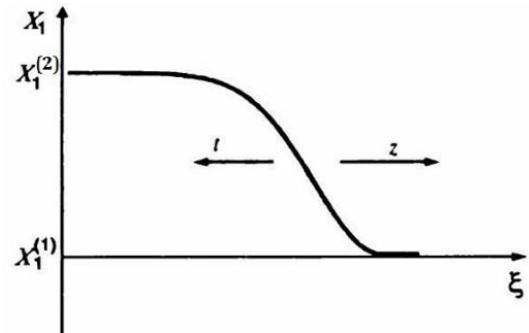
Розглянемо інший випадок залежності  $f(X)$ , що відповідає бістабільним середовищам (рис. 7.2а). Нагадаємо, що характерною особливістю таких систем є наявність одного нестійкого та двох<sup>1</sup> стійких стаціонарних станів для одного



(а)



(б)



(в)

Рис. 7.1. (а) Нелінійна функція в (7.4), (б) фазові траєкторії та (в) автохвиля перемикання

<sup>1</sup> Можливо і більше, тоді говорять про мультистабільність.

значення керуючого параметра. Процес поширення автохвилі в такому випадку

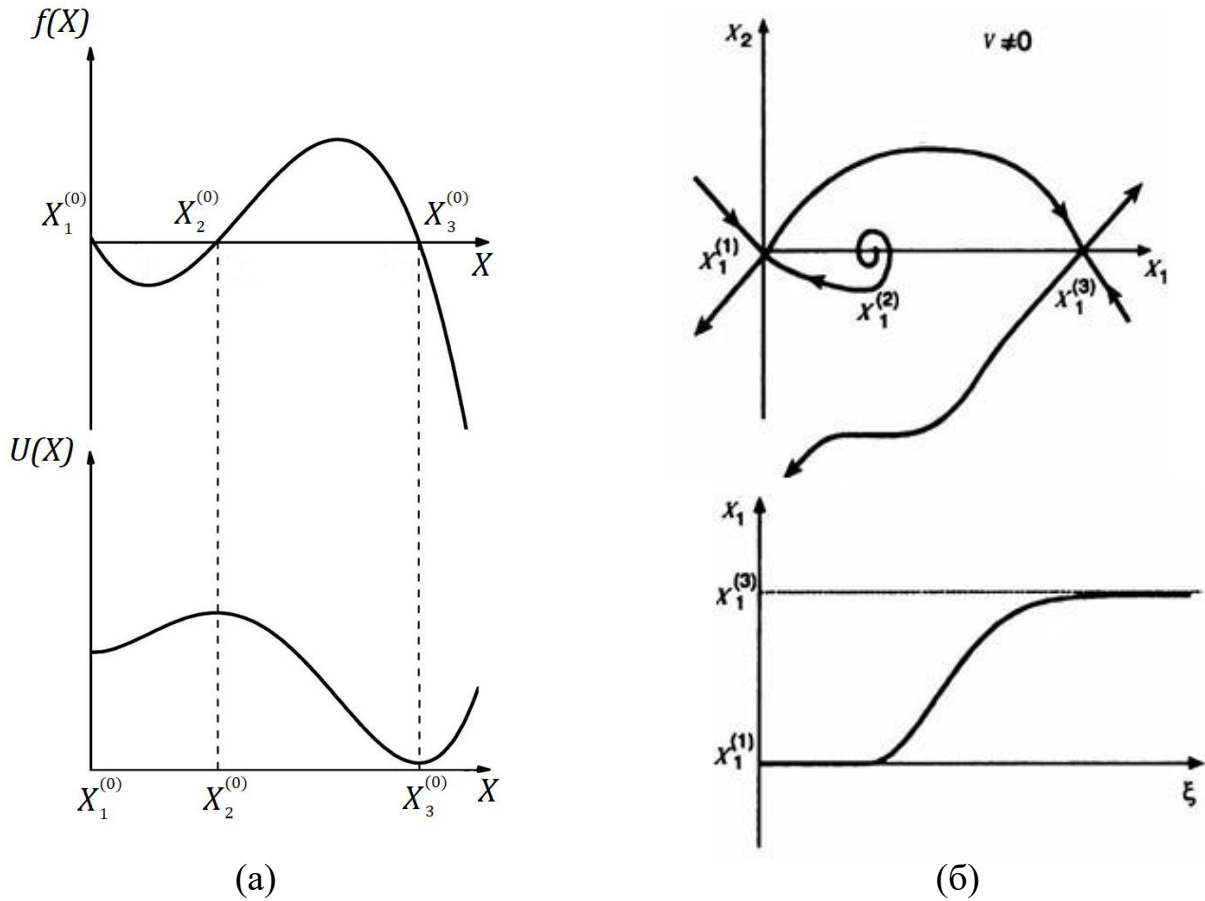


Рис. 7.2. (а) Нелінійна функція для бістабільного активного середовища, (б) фазовий портрет стійкого автохвильового режиму у бістабільній системі

полягає у перемиканні бістабільних елементів з одного стійкого стану в інший під дією зовнішнього збурення. Послідовність зв'язаних бістабільних елементів у сукупності формують активне неперервне середовище, в якому збурення передається від границі по всій системі за принципом доміно. Аналіз системи (7.4), (7.5) на стійкість показує, що стійкий режим з ненульовою швидкістю поширення автохвилі відповідає гетероклінічній траєкторії між двома сідловими точками (рис. 7.2б). Швидкість поширення автохвилі при цьому залежить від профілю  $f(X)$ . Для граничних умов  $X = X_1^{(0)}$ ,  $dX/d\xi = 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  та  $X = X_3^{(0)}$ ,  $dX/d\xi = 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , домноживши рівняння (7.3) на  $dX/d\xi$  та проінтегрувавши його в межах  $(-\infty, +\infty)$ , для швидкості отримаємо

$$v = \left[ U(X_3^{(0)}) - U(X_1^{(0)}) \right] \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dX}{d\xi} \right)^2 d\xi \right)^{-1}, \quad (7.7)$$

де введена функція потенціалу  $U(x) = -\int_0^x f(X)dX$ , що має два мінімуми в стійких стаціонарних точках (див. рис. 7.2а). Напрямок поширення автохвилі визначається різницею  $U(X_3^{(0)}) - U(X_1^{(0)})$ . При  $U(X_3^{(0)}) = U(X_1^{(0)})$  (бінодаль у випадку звичайного фазового переходу) швидкість поширення рівна нулю і матимемо стоячу хвилю перемикання. В частинних випадках малих або великих значень різниці мінімумів потенціалу  $U(x)$  в порівнянні з  $U(X_1^{(0)})$  можна знайти наближені вирази для швидкості автохвилі. Розглянемо декілька фізичних прикладів автохвиль перемикання.

*а. Автохвиля горіння.* Розглянемо приклад теплового<sup>1</sup> горіння [14, 24] – процес, що підтримується накопичування в активному середовищі тепла. Рівняння, що описуватиме динаміку температури ми вже розглядали у розділі 4:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = Q(T) - W(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (7.8)$$

де  $c_v$  – теплоємність одиниці об'єму,  $Q(T)$ ,  $W(T)$

$W(T) = \gamma(T - T_0)$  – потужність тепловідведення у зовнішнє середовище з температурою  $T_0$  та коефіцієнтом тепловіддачі  $\gamma$ ,  $Q(T) = wG(T)$  – потужність тепловиділення при горінні з питомою теплотою горіння  $w$  та швидкістю реакції горіння  $G(T) = \exp(-\Delta E/RT)$  (закон Арреніуса,  $\Delta E$  – енергія активації) (рис. 7.3).

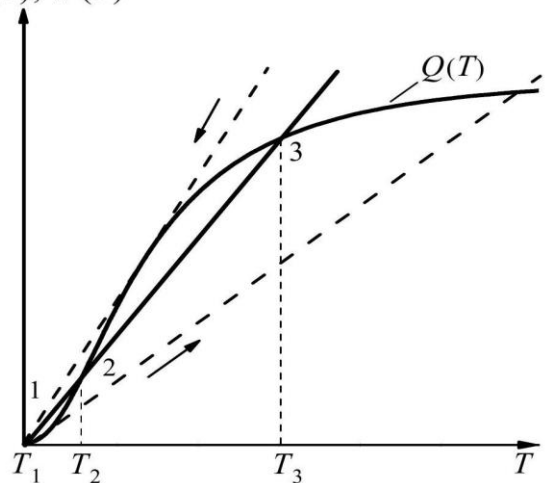


Рис. 7.3. Бістабільність горіння

При значеннях коефіцієнта тепловіддачі  $\gamma$  в області між пунктирними лініями на рис. 7.3 система знаходитиметься у бістабільному режимі з стійкими

<sup>1</sup> Можливе і автокаталітичне горіння в результаті утворення каталізуючих продуктів реакції.

температурами  $T_1$  та  $T_3$ . Нижня лінія відповідатиме межі самозапалення при температурі  $T_1$ , верхня – межі гасіння пального. В рівнянні (7.8) теплопровідний доданок описує поширення тепла з області горіння у сусідню холодну область активного середовища. Таким чином, при переході у стан  $T_3$  в результаті локального нагріву до температури  $T > T_2$  пальне займається, а виділене тепло поширюється далі у систему, спричиняючи подальше підвищення температури та переведення активних елементів з стану  $T_1$  без горіння у  $T_3$  та поширення автохвилі горіння.

б. *Теплове руйнування надпровідності.* Розглянемо бістабільний процес руйнування надпровідного стану [24] за присутності транспортного струму. Даний процес по суті нагадує поширення хвилі горіння у попередньому прикладі: у надпровіднику при температурі нижчій критичної точки при проходженні струму не виділяється теплота Джоуля-Ленца (опір нульовий), однак при невеликому тепловому збуренні система опиняється

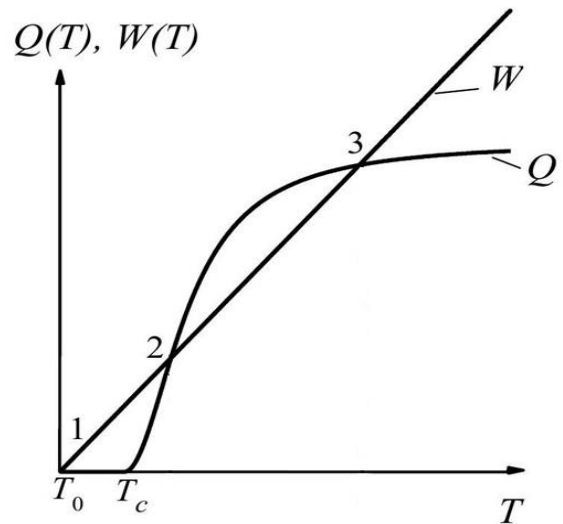


Рис. 7.4. Бістабільність при руйнуванні надпровідного стану

над критичною температурою і виділена теплота поширюється далі в середовищі надпровідника, спричиняючи його послідовне автохвильове перемикання в режим провідності. Рівняння динаміки температури виглядає аналогічно (7.8):

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(T) - W(T) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + j^2 \rho(T) - \alpha \frac{A}{V} (T - T_0), \quad (7.9)$$

де  $j$  – густина транспортного струму;  $\rho(T)$  – питомий електричний опір. При  $T < T_c$  ( $T_c$  – температура переходу в надпровідний стан) опір  $\rho = 0$ , тому теплота Джоуля-Ленца  $Q(T < T_c) = 0$ . Тепловідведення в охолоджувач з температурою  $T_0$  в найпростішому випадку аналогічне попередньому прикладу горіння:  $W(T) = \alpha A(T - T_0)/V$ , где  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $A$  – площа поверхні тепловіддачі,  $V$

– об’єм надпровідника. Залежності  $Q(T)$  та  $W(T)$  схематично приведені на рис. 7.4. На рис. 7.4 для певного значення транспортного струму  $j$  (керуючий параметр) є два стійких стаціонарних стани (точки 1 та 3), один з яких при температурі  $T_0 < T_c$  (напровідний стан), інший – провідний стан з температурою вище  $T_c$ <sup>1</sup>. Такому надпровіднику відповідає S-подібна ВАХ, аналогічна рис.1.5. В реальному експерименті в якості бістабільних елементів використовується короткі надпровідникові тонкоплівні мостики з приблизно однорідною температурою вздовж зразка.

*в. Сегнетоелектрична та магнітна плівки.* Розглянемо тонку плівку сегнетоелектрика [24] з спонтанною поляризацією  $\vec{P}$  та прикладеним до плівки електричним полем  $\vec{E} \updownarrow \vec{P}$ . За наявності електричного поля дипольні моменти у плівці намагаються напруженості. Тому якщо дипольний момент на межі плівки перевернути, то завдяки електростатичній взаємодії між сусідніми доменами наступні диполі спрямуватись вздовж вектора також самовільно перевертатимуться, формуючи фронт переполаризації (рис. 7.5). Доменна стінка рухатиметься з постійною швидкістю  $v$ , перемикаючи систему з одного метастабільного стану в інший. Залежність енергії плівки від поляризації має вигляд як на рис. 7.5 та описується функцією

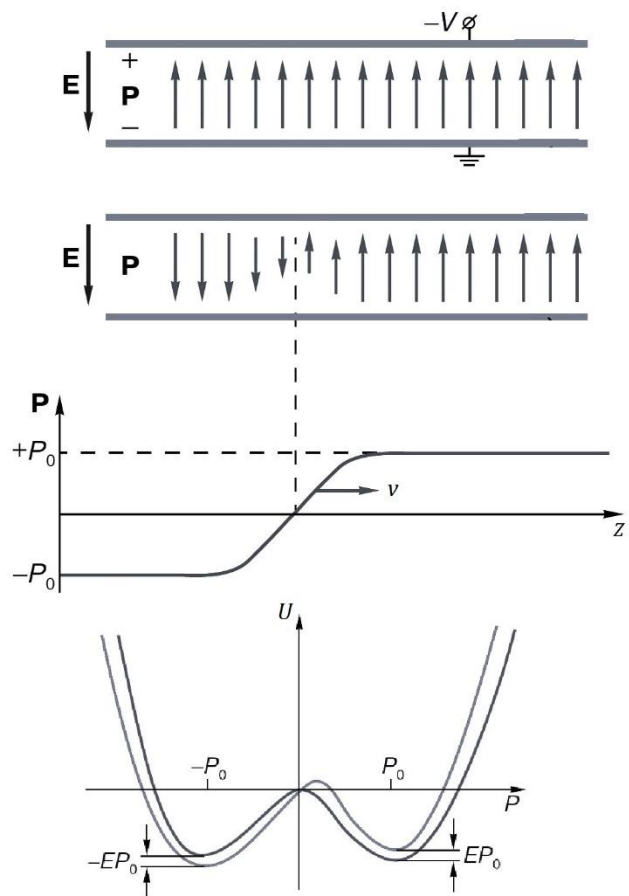


Рис. 7.5. Автохвиля в сегнетоелектричній плівці та профіль її енергії

<sup>1</sup> Характер стійкості визначається побудовою функції  $f(T) = Q(T) - W(T)$ .

$$U = -\frac{1}{2}\alpha P^2 + \frac{1}{4}\beta P^4 - EP, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (7.10)$$

За відсутності поля потенціал  $U(P)$  має симетричний вигляд з двома мінімумами у точках  $P = \pm P_0, P_0 = (\alpha/\beta)^{1/2}$ , що відповідають рівноможливим фазам з протилежно напрямленими поляризаціями плівки. За наявності різниці потенціалів на обкладках плівки виникає додаткова енергія взаємодії дипольних моментів з електричним полем  $\Delta U \simeq -EP_0$  ( $E \ll P_0$ ), що понижуватиме один з мінімумів на рис. 7.5 (той, що відповідає поляризації  $\vec{P}_0 \uparrow \downarrow \vec{E}$ ). Тоді початковий стан з  $\vec{P}_0 \uparrow \uparrow \vec{E}$  стає метастабільним. В області фронту (доменної стінки) енергія переходу  $\approx 2\Delta U$  переходитиме у теплову, що сприятиме подальшій переорієнтації електричних доменів під дією електричного поля та переорієнтованого диполя. Рух доменної стінки описуватиметься рівнянням

$$\tau \frac{\partial P}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \alpha P - \beta P^3 - E, \quad (7.11)$$

де  $\tau$  та  $l$  – характерні час та масштаб процесу переорієнтації.

Зазначимо, що аналогічний автохвильовий процес спостерігатиметься в магнітних плівках, де магнітний момент  $\vec{M}$  переорієнтовується магнітним полем  $\vec{H}^1$ .

2. *Напівпровідникова плівка.* Розглянемо напівпровідникову плівку, нанесену на масивну підкладку (термостат) [24]. До плівки прикладена різниця потенціалів  $V$ , тому під дією електричного поля  $E = V/d$  у плівці протікатиме електричний струм  $j = \sigma E$ . Як наслідок, виділятиметься теплота Джоуля-Ленца  $W = jE$  (густина потужності), що нагріватиме плівку до температури  $T_h \neq T_0$ . Частково ця теплота віддаватиметься термостату з тепловим опором  $R_T$ . Температурна динаміка та поширення тепла у зразку описуватиметься рівнянням, аналогічним до (7.9):

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q(T) - W(T) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + E^2 \sigma(T) - \frac{T - T_0}{R_T}. \quad (7.12)$$

Температура стаціонарного стану зразка меться з рівняння:

при проходженні струму визначати-

<sup>1</sup> Рух стінки в магнітній плівці є більш складним та може бути пов'язано також з обертанням магнітного моменту.

$$\sigma(T)E^2 = \frac{T_h - T_0}{R_T}. \quad (7.13)$$

Для напівпровідників характерним є суттєве зростання провідності при певній температурі  $\sigma(T) \sim \exp(-\Delta/T)$  (рис. 7.6б, крива 1), аналогічно матеріалам з фазовим переходом діелектрик-метал при критичній температурі  $T = T_c$ . Внаслідок цього із (7.13) залежність температури плівки від прикладеного до неї поля матиме S-подібний вигляд: при одному значенні поля  $E_0 \in (E_m, E_c)$  система може знаходитись у трьох стаціонарних нерівноважних станах з температурами  $T_{\min}$ ,  $T_m$  або  $T_{\max}$ , два з

яких  $T_{\min}$  та  $T_{\max}$  – стійкі. Стійкість даних станів зрозуміла з фізичної точки зору: при  $T = T_{\min}$  в низькоомному режимі теплота Джоуля-Ленца мала і система залишається при тій же температурі і, навпаки, при  $T = T_{\max}$  провідність суттєво зростає і відповідна теплота Джоуля-Ленца підтримуватиме задану температуру.

Припустимо, що плівка знаходиться при  $T = T_{\min}$ . Розігрівши її на границі так, щоб провідність суттєво зросла, в системі виділиться значне джоулеве тепло, що призведе завдяки процесу теплопровідності до переходу у стан  $T = T_{\max}$  усієї плівки. Таким чином, у плівці пробігатиме автохвиля перемикання у «гарячий» низькоомний режим.

д. Система з двома динамічними змінними. Поширення біжучих фронтів спостерігається у реакції Білоусова-Жаботинського у розподіленій системі (юез

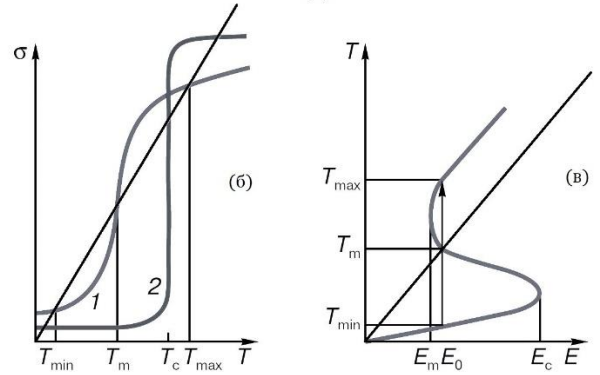
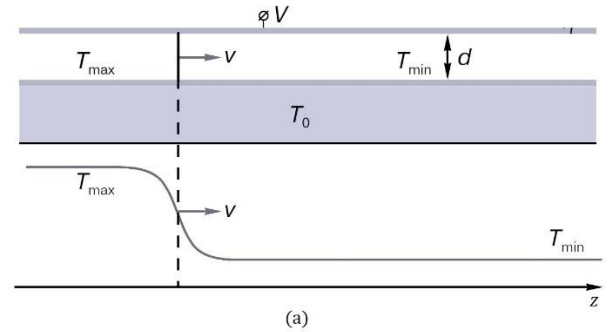


Рис. 7.6. (а) Автохвиля перемикання з «холодного» високоомного в «гарячий» низькоомний стан, (б) залежність провідності від температури, (в) залежність температури від прикладеного до плівки поля



перемішування). Для простоти розглянемо дану реакцію у рамках моделі «орегонатор», описаної у розділі 5, з домінуючою першою стадією, коли іон церію знаходиться в стані  $\text{Ce}^{3+}$ . Тоді  $Z = 0$  і система (5.22)-(5.24) в безрозмірних величинах з врахуванням дифузійних доданків матиме наступний вигляд:

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} = \tilde{X}(1 - \tilde{X} - r\tilde{Y}) + \frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial z^2}, \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} = -b\tilde{X}\tilde{Y} + \frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial z^2}, \quad (7.15)$$

де  $r, b$  – додатні параметри,  $\tilde{X} \in [0,1], \tilde{Y} \in [0,1]$ . Концентрації компонент на протилежних кінцях зразка  $\tilde{X}(-\infty, t) = \tilde{Y}(+\infty, t) = 0$ ,  $\tilde{X}(+\infty, t) = \tilde{Y}(-\infty, t) = 1$ . Ввівши хвильову змінну  $\xi = z - vt$ , для хвильових розв’язків  $\tilde{X}(\xi)$  та  $\tilde{Y}(\xi)$  рівнянь (7.14) та (7.15) отримаємо рівняння:

$$\frac{d^2 \tilde{X}}{d\xi^2} + v \frac{d\tilde{X}}{d\xi} + \tilde{X}(1 - \tilde{X} - r\tilde{Y}) = 0, \quad (7.16)$$

$$\frac{d^2 \tilde{Y}}{d\xi^2} + v \frac{d\tilde{Y}}{d\xi} - b\tilde{X}\tilde{Y} = 0, \quad (7.17)$$

та межові умови  $\tilde{X}(\xi \rightarrow -\infty) = \tilde{Y}(\xi \rightarrow +\infty) = 0$ ,  $\tilde{X}(\xi \rightarrow +\infty) = \tilde{Y}(\xi \rightarrow -\infty) = 1$ . Характерний вигляд біжучих концентраційних фронтів величин  $\tilde{X}$  та  $\tilde{Y}$  представлений на рис. 7.7. Зазначимо, що швид-

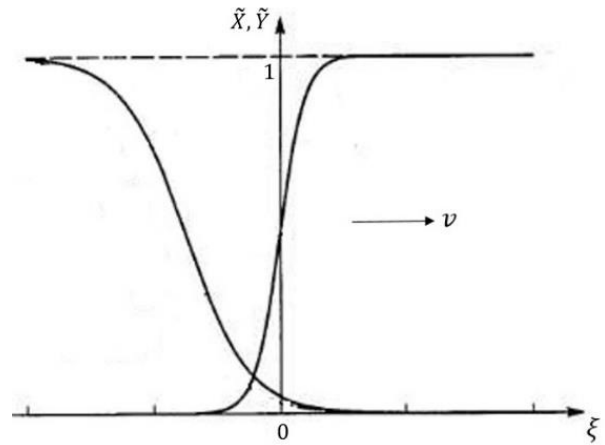


Рис. 7.7. Подвійний біжучий фронт

кість поширення фронту в даному випадку також залежить від характеру нелінійності в рівняннях (7.16) і (7.17) і в даному випадку виконано [25]

$$\left[ \left( r^2 + \frac{2}{3}b \right)^{1/2} - r \right] [2(b + 2r)]^{-1/2} \leq v \leq 2.$$

2. *Біжучі імпульси.* Даний тип автохвиль представляє собою хвилю перемикання в активному середовищі з поверненням збуджених елементів у початковий незбуджений стан після її проходження [3]. Для цього у активному середовищі має бути механізм, що сприятиме релаксації системи у початковий стан. Таким чином, система динамічних рівнянь, що допускає утворення біжучого імпульсу, має

містити щонайменше дві динамічні змінні у наступному вигляді:

$$\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = f(X, Y) + D_X \Delta X, \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = g(X, Y) + D_Y \Delta Y, \quad (7.19)$$

де параметр  $\varepsilon \ll 1$ ,  $X$  та  $Y$  швидка та повільна змінні, що можуть бути потенціалом мембрани та провідністю іонного струму, концентраціями реагентів, кількістю клітин та волокон в активному стані на одиницю об'єму нейронної мережі тощо. Розглянемо декілька прикладів.

*а. Хвиля горіння.* Найпростішим прикладом системи з біжучим фронтом є розподілене середовище комірок горіння, де за рахунок виділення інгібітора в реакції горіння відбуватиметься процес гасіння палива [14].

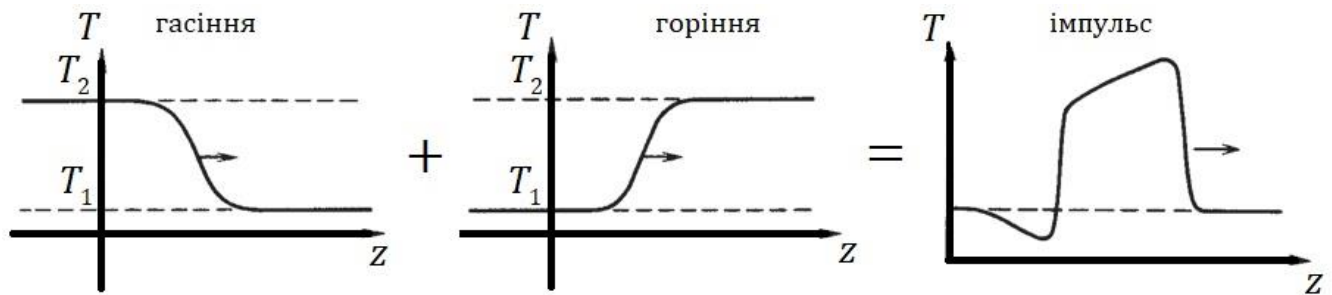


Рис. 7.8. Утворення біжучого імпульсу у комірці горіння

Система динамічних рівнянь такого процесу складається з рівняння (7.8) з потужністю теплоти горіння  $Q(T, n)$  як функції температури і також концентрації інгібітора та рівняння зміни останньої (повільно змінювана динамічна змінна):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (n - n_{eq}(T)), \quad (7.20)$$

де  $n_{eq}(T)$  – рівноважна концентрація інгібітора при підтримуванні постійної температури  $T$  (монотонна функція),  $\tau$  – характерний час встановлення рівноважної концентрації інгібітора, що значно перевищує характерний час процесу перемикавання у комірці горіння. Рівняння (7.18) враховує як накопичення інгібітора в процесі реакції горіння, так і його розпад або відведення назовні. Відповідно формули (7.7) напрямок перемикавання стану системи тепер залежить і від

концентрації інгібітора: фронт може бути як горіння (інгібітор поступово накопичується в процесі реакції горіння), так і гасіння (вироблений інгібітор призупиняє реакцію горіння), накладання яких і формує біжучий імпульс у системі (рис.7.8). Зазначимо, що для формування біжучого імпульсу система динамічних рівнянь має містити щонайменше дві динамічні змінні.

*б. Нервовий імпульс.* Досліджуваний з середини XIX ст. процес поширення нервового збудження в нейронах є класичним прикладом автохвильових процесів у живих тканинах, пояснення якого вимагало мультидисциплінарного підходу та стало одним і найвидатніших досягнень в області біофізики [26].

Аксон – довгий відросток нейрона – канал передачі збудження між нейронами, що представляє собою циліндр з мембраною («кабель з ізоляцією»). Напруга між поверхнями мембрани у стані спокою становить близько -60 мВ (потенціал зовнішньої поверхні вищий). Всередині та зовні мембрани існує інверсія концентрації іонів  $\text{Na}^+$  та  $\text{Cl}^-$  (вища ззовні),  $\text{K}^+$  (вища всередині). При пониженні напруги до -45 мВ провідність мембрани різко зростає (виникає потенціал дії) – відкриваються іонні канали для  $\text{Na}^+$  (деполяризація мембрани, збудження) і потенціал змінює свій знак на протилежний (до +55 мВ), що закриває натрієві канали (період рефрактерності) та відкриває калієві канали. В подальшому система під дією градієнта концентрації іонів релаксує до початкового стану (реполяризація мембрани). Даний цикл і являє собою нервеве збудження, що поширюється в розподіленій системі нервового волокна [26].

Еквівалентна електрична схема, що моделює зміну напруги на поверхнях мембрани та іонний струм крізь неї, містить чотири динамічні змінні (модель Ходжін-Хакслі), тому для спрощеного аналізу поширення нервового імпульсу Фітц-Хью-Нагумо запропонували систему динамічних рівнянь для напруги на мембрані та калієвої провідності

$$C \frac{\partial U}{\partial t} = -I(U) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \left( \sigma - \sigma_{eq}(U) \right), \quad (7.22)$$

де  $I(U) = I_K(U) - I_{Na}(U, \sigma)$  – нелінійна N-подібна функція густини іонного струму,  $C$  – ємність мембрани на одиницю довжини волокна,  $R$  – питомий опір аксоплазми, що заповнює мембрану,  $I_{Na}$  та  $I_K$  – значення локального натрієвого та калієвого струмів,  $\sigma_{eq}(U)$  – провідність калієвого струму, що встановилась при заданій рівниці потенціалів на мембрані. Встановлення калієвої провідності є повільним процесом та відбувається за характерний час  $\tau$ , що значно перевищує характерний час відкриття натрієвих каналів з активацією потенціалу дії.

Система динамічних рівнянь в безрозмірних змінних для конкретизованого вигляду нелінійної функції в рівнянні (7.21) [27, 28]

$$\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - Y + D_X \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = X - bY + a, \quad (7.24)$$

де  $F(X) = -X^3/3 + X$ , параметри  $a, b \in (0; 1)$ . Ввівши автохвильову змінну  $\xi = z - vt$  та додаткову динамічну змінну  $W = \partial X / \partial \xi$ , поширення імпульсу у фазовому просторі  $(X, Y, W)$  матиме вигляд гомоклінічної траєкторії на рис. 7.9а (крива, що виходить з сідлової точки та повертається в неї ж).

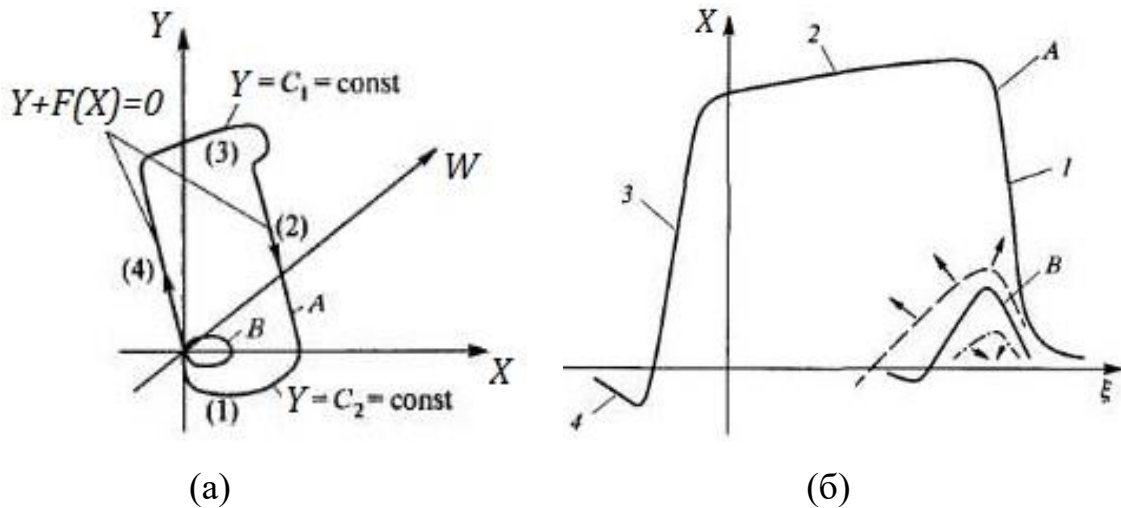


Рис. 7.9. (а) Фазова траєкторія біжучого імпульсу: А – стійкий імпульс (поява потенціалу дії), В – миттєва релаксація без генерації імпульсу (потенціал дії не з'являється); (б) профіль біжучого нервового імпульсу

На рис. 7.9б фрагмент кривої 1 відповідає збудженню системи з відкриттям

натрієвих каналів, 2 – область рефрактерності з відкриттям калієвих каналів (система не відповідає на збудження), 3 – закриття калієвих каналів, 4 – релаксація системи у початковий стан.

Мережа елементів з послідовністю властивостей збудження-рефрактерність-спокій складають аксіоматичну модель активного середовища (Н.Вінер, А. Розенблют, 1946р.). Відповідно даної моделі кожен елемент активного середовища може знаходитись в одному із 3-х станів, час збудження значно перевищує період рефрактерності, збудження поширюється до елементів в стані спокою з певною швидкістю, елементи можуть спонтанно переходити у збуджений стан. Модель була запропонована для пояснення деяких видів аритмій, зокрема, фібриляції шлуночків серця – неупорядковане аперіодичне локальне збудження нервових волокон.

3. *Автохвилі у напівпровідниках.* Розглянемо ефект Гана генерації та поширення електричного домену (дисипативна структура) у напівпровідниках як автохвилі [29, 30]. Утворення дисипативних структур у напівпровідниках відбувається в біль-шості випадків за рахунок нелінійної об'ємної ВАХ N-типу, що вже розглядалась нами у генераторі Ван дер Поля при вивченні автоколивань (рис.7.10а).

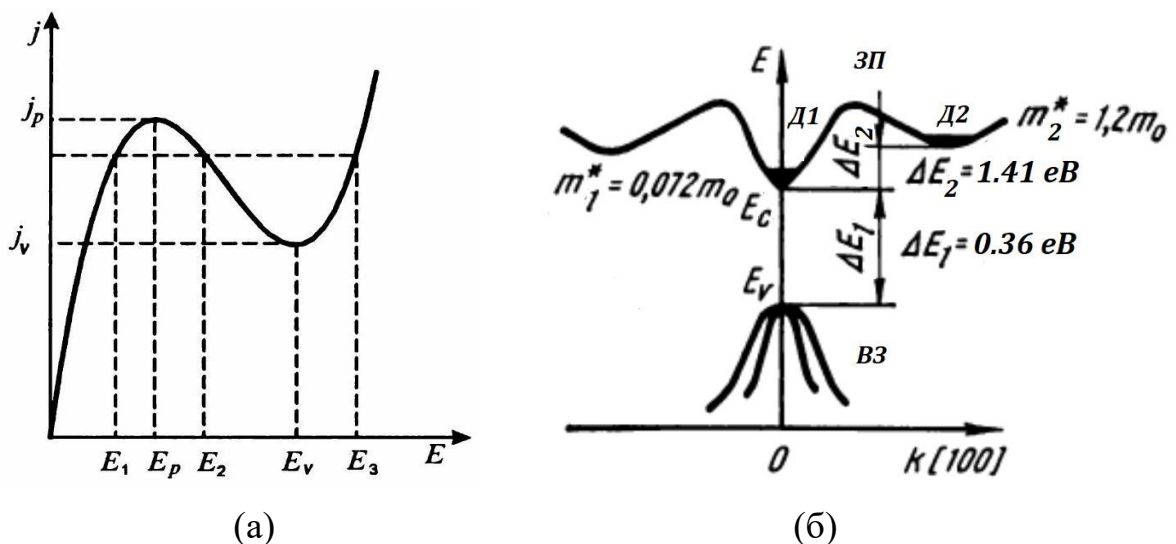


Рис. 7.10. (а) ВАХ напівпровідника, (б) зонна структура GaAs в напрямку [100]  
В області значень густини струму  $j_v < j < j_p$  при певній її величині система

може знаходитись в одному з 3-х стаціонарних станів з відповідними значеннями напруженості електричного поля  $E_i, i = 1, 2, 3$ . В області напруженостей  $E_p < E < E_v$  напівпровідник характеризується від'ємною диференційною провідністю  $\sigma = dj/dE < 0$ . Виникнення даної області з від'ємним  $\sigma$  можливе у дводолинному напівпровіднику, наприклад, GaAs n-типу, з основним більш глибоким мінімумом, що визначає ширину забороненої зони, та відповідно нижчою ефективною масою електрона, та побічним пологим мінімумом з значно більшою ефективною масою  $m_2^* \gg m_1^*$  електрона при вищій його енергії (рис. 7.10б). Рухомість електронів провідності  $\mu = j/(\rho E)$ , де  $\rho$  – густина носіїв струму, таким чином буде значно вищою (на порядок) в околі Д1. При невеликих температурі  $kT \ll \Delta E_1$  та напруженості електричного поля переважна більшість електронів провідності займають енергетичні рівні в околі глибокого мінімуму («легкі» електрони) і тому зі зростанням поля провідність зростатиме. Однак, при певних значеннях напруженості електрони переходять на рівні енергії в околі Д2 («важкі» електрони), де в зв'язку з великою ефективною масою характеризуються малою рухомістю  $\mu_2 \ll \mu_1$ , а тому провідність спадатиме.

Густина струму у такому напівпровіднику:

$$\vec{j} = (\rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2) \vec{E} - D \vec{\nabla} \rho = \rho \mu(E) \vec{E} - D \vec{\nabla} \rho, \quad (7.25)$$

де  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  – густина заряду,  $\mu$  – ефективна рухомість електронів. Таким чином, система характеризується провідністю  $\vec{j}$ , густиною заряду  $\rho$  та напруженістю електричного поля  $\vec{E}$ . Перші дві величини задовольняють рівняння неперервності, остання задовольняє рівняння Максвелла:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (7.26)$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad (7.27)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad (7.28)$$

де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища,  $\rho_0$  – густина позитивного заряду, що визначається концентрацією домішок та не залежить від координати і часу. В 1-D випадку для  $E = E(z), \rho = \rho(z), j = j(z)$  рівняння (7.26)-(7.28) дають наступне

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\rho - \rho_0), \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \mu(E) E - \frac{\partial}{\partial z}(\rho D) \right). \quad (7.30)$$

Однорідний розв'язок системи  $E = E_0, \rho = \rho_0, j = j_0 = \rho_0 \mu(E_0) E_0$  є стійким, однак втрачає стійкість при певній напруженості та відповідному значенні провідності  $\sigma = \partial(\rho \mu(E) E) / \partial E$ . Проаналізуємо збурення стаціонарного стану:  $\delta \rho = \rho - \rho_0, \delta E = E - E_0$ . В лінійному наближенні система (7.29), (7.30)

$$\frac{\partial \delta E}{\partial z} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \delta \rho, \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial \delta E}{\partial z} + D \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial z^2} - \mu(E_0) E_0 \frac{\partial \delta \rho}{\partial z}. \quad (7.32)$$

Збурення представляють собою суперпозицію різних мод (див. розділ 2), тому нестійкість однорідного стану системи розвиватиметься при втраті стійкості першої моди:  $\rho = \delta \rho_0 \exp(ikz + p_k t), \delta E = \delta E_0 \exp(ikz + p_k t)$ . Розв'язок характеристичного рівняння

$$\text{Re } p_k = -k^2 D - \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma \quad (7.33)$$

показує, що саме завдяки від'ємному диференціальному опору  $|\sigma| < \varepsilon k^2 D / (4\pi)$  можливе наростання флуктуації густини заряду та електричного поля, що призводить до виникнення так званого електричного домену у напівпровіднику. Найменше  $k_{\min} \sim \pi/d$ , тому для великих зразків для утворення домену достатньо, щоб  $\sigma \lesssim 0$ .

Дослідження напівпровідникових зразків n-типу показало, що інтенсивний міждолинний перехід Д1-Д2 електронів відбувається не по всьому обсягу зразка, а в деяких областях, в першу чергу там, де є неоднорідності. Навіть у хімічно однорідних зразках через наявність омичних контактів (анода та катода на рис. 7.11) виникатимуть області з підвищеними значеннями напруженості поля, а тому саме поблизу контактів (головним чином, біля катода) насамперед виникає міждолинний перехід електронів. Зі збільшенням електричного поля поблизу катода відбувається

перехід електронів у верхню долину з одночасним різким зменшенням їх дрейфової швидкості (спад рухомості). Це в свою чергу веде до збільшення опору цієї ділянки зразка, що спричиняє подальше збільшення електричного поля на цій ділянці та зменшення поля зліва та праворуч від ділянки (оскільки різниця потенціалів підтримується постійною). Швидкі електрони ліворуч від домену на рис. 7.11 наздоганяють його, «наповнюючи» область від'ємного заряду. Область праворуч навпаки «бідніє» на електрони, і як наслідок локально напруженість поля продовжує наростати, збільшуючи кількість повільних електронів. Цей процес триває до тих пір, поки не відбудеться вирівнювання дрейфових швидкостей електронів, що рухаються у складі домену та поза ним. Вирівнювання відбувається за рахунок значного ослаблення електричного поля за межами домену. Після вирів-

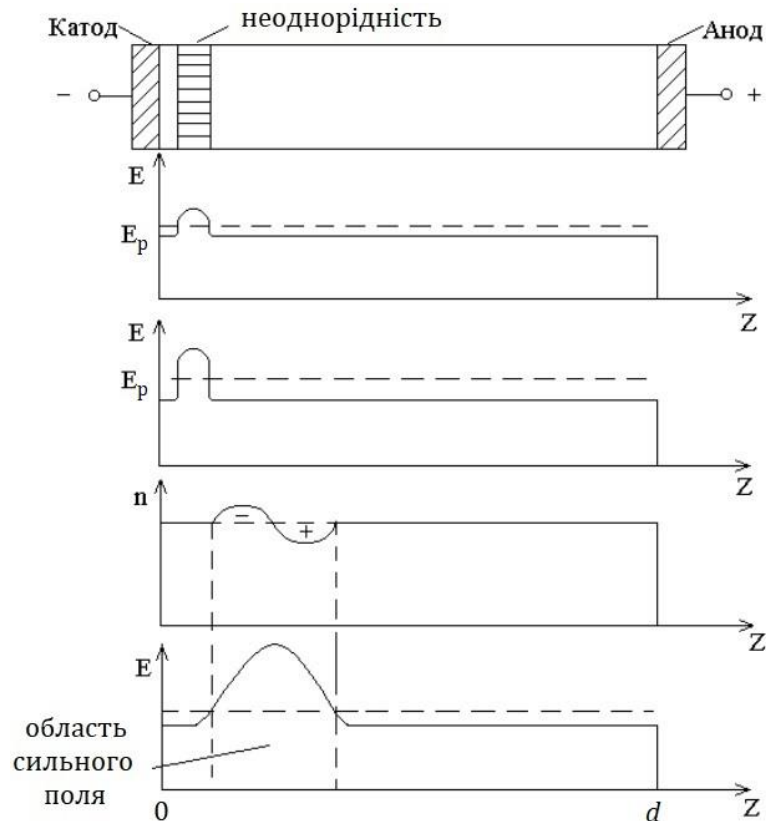


Рис. 7.11. Виникнення електричного домену в ефекті Гана

нювання швидкостей концентрація електронів і дрейфова швидкість не змінюються, тобто формування домену закінчилося (за час  $\sim 10^{-12} - 10^{-13}$  с). Струм у ланцюзі напівпровідникового зразка протягом усього часу руху домену від



катода до анода залишається практично постійним. При досягненні анода домен «розсмоктується», загальний опір зразка зменшується і струм зростає, проте «розсмоктування» домену на аноді створює можливість формування нового домену біля катода і процес повторюється (автохвиля). В результаті струм через зразок зазнаватиме періодичних змін з частотою  $\nu = \nu_{dr}/d$  (ефект Гана).

Розглянемо автохвильові розв'язки системи (7.29), (7.30)  $E(\xi), \rho(\xi), \xi = z - vt$  за умови  $\rho = \rho_0, \rho_0 \mu(E_0) E_0 = j_0$ :

$$\frac{dE}{d\xi} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad (7.34)$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\rho(\mu(E)E - v) - j_0 + \rho_0 v}{D}. \quad (7.35)$$

Нас цікавить поведінка фазової траєкторії у площині  $(\rho - \rho_0, E)$  в околі особливих точок  $\rho^{(0)} = \rho_0$  та  $\mu(E^{(0)})E^{(0)}\rho_0 = j_0$ , кількість яких залежить від значення  $j$  (див. рис. 7.10а). Тому, представивши значення змінних в околі особливих точок як  $E = E^{(0)}(1 + x_1(\xi))$  та  $\rho = \rho_0(1 + x_2(\xi))$ , де  $x_1, x_2 \approx \exp(k\xi)$  (знак  $\text{Re } k$  вказує на напрямок фазової траєкторії відносно особливої точки) з (7.34), (7.35) отримаємо

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu(E^{(0)})E^{(0)} - v}{D} \pm \sqrt{\frac{(\mu(E^{(0)})E^{(0)} - v)^2}{D^2} + \frac{16\pi\sigma}{\varepsilon D}} \right]. \quad (7.36)$$

Середнє значення напруженості електричного поля у зразку

$$\frac{1}{d} \int_0^d E d\xi = \bar{E} \quad (7.37)$$

є скінченним, що з врахуванням (7.34) вимагає наявності хоча б однієї з особливих точок як кінцевої для фазової траєкторії розв'язку (7.34), (7.35). Одна із одержаних траєкторій [Сугаков] відповідає поширенню домену з швидкістю  $v = j/\rho_0$ .

### **Запитання та завдання:**

1. Що таке автохвиля? Які її фізичні особливості? Які приклади автохвильових процесів вам відомі?
2. Що таке біжучий фронт? В яких системах він можливий? Як біжучий імпульс проявляється у фазовій площині? Наведіть приклади.
3. Розглянути автохвилю фазового переходу 1-го роду у системі в околі критичної температури  $T = T_c$ : при  $T < T_c$  фаза 1 є стабільною, фаза 2 – метастабільною, при  $T > T_c$  навпаки. Стан системи в околі критичної точки описується параметром порядку  $X(\vec{r}, t)$ , що задовольняє рівняння Ландау (3.13), яке в 1-D випадку аналогічне (7.2). Знайти автохвильовий розв'язок  $X(\xi)$ ,  $\xi = z - vt$  при граничних умовах  $X \stackrel{\xi \rightarrow \mp \infty}{=} X_{1,3}^{(0)}$  та швидкість  $v$  поширення фронту фазового переходу у випадках:

а) *несиметричного потенціалу*, коли нелінійна функція

$$f(X) = -b \left( X - X_1^{(0)} \right) \left( X - X_2^{(0)} \right) \left( X - X_3^{(0)} \right), \quad b > 0;$$

б) *симетричного потенціалу*, коли нелінійна функція

$$f(X) = -cX \left( X^2 - X_1^{(0)2} \right) \left( X^2 - X_2^{(0)2} \right), \quad c > 0$$

(стаціонарні стани  $X_i^{(0)}(T)$ ,  $i = 1, 2, 3$  є функціями температури).

4. Що таке біжучий імпульс? Що потрібно для його виникнення у активній системі? Як він проявляється у фазовому просторі? Наведіть приклад.
5. Опишіть процес поширення нервового імпульса. В чому полягає і для чого потрібна модель активного середовища?
6. Опишіть ефект Гана. Завдяки чому він можливий?
7. Проінтегрувати рівняння (7.34), (7.35) та отримати можливі фізичні траєкторії у фазовій площині  $(\rho - \rho_0, E)$ . Яка з траєкторій відповідає генерації та поширенню електричного домену у напівпровіднику?

## Список використаної літератури

1. Ebeling, V. (1979) The Formation of Structures during Irreversible Processes. Mir, Moscow.
2. Physik der Evolutionsprozesse (Ebeling, W., Engel, A., and Feistel, R.), Akademie-Verlag Berlin, 1990
3. Сугаков В. Й. Основи синергетики. - Київ: Обереги, 2001. - 287 с.
4. Ivanova, V. S., Balankin, A. S., Bunin, I. Z., & Oksogoev, A. A. (1994). Synergetics and fractals in materials science.
5. Golovin, Alexander A., and Alexander A. Nepomnyashchy, eds. Self-Assembly, Pattern Formation and Growth Phenomena in Nano-Systems: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Held in St. Etienne de Tinee, France, August 28-September 11, 2004. Vol. 218. Springer Science & Business Media, 2006.
6. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник /. С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. - К.: Либідь, 2004. 408 с.
7. Kondepudi, Dilip, and Ilya Prigogine. Modern thermodynamics: from heat engines to dissipative structures. John Wiley & Sons, 2014.
8. Haken, H. Synergetics : an introduction : nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry, and biology. Berlin New York: Springer-Verlag, 1978.
9. Haken, H. Advanced synergetics : instability hierarchies of self-organizing systems and devices. Berlin New York: Springer-Verlag, 1983.
10. Graham, R.; Wunderlin, A., eds. Lasers and synergetics : a colloquium on coherence and self-organization in nature. Berlin New York: Springer-Verlag (1987).
11. R. Gilmore. Catastrophe theory for Scientists and engineers .John Wiley & Sons, New York, 1981.
12. Ландау Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2002. Ч.1. 615 с.

13. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2003. 736 с.
14. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени // Журнал физической химии. — 1948. — Т. 22. — № 1. — С. 27-48.
15. Luigi A. Lugiato (1983) Optical bistability, Contemporary Physics, 24:4, 333-371.
16. Андронов А. А., Бат А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, М., 1959.
17. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М., «Наука», стр. 1-179, 1974 г.
18. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986.—148 с.
19. Field, R.J., Koros, E. and Noyes, R.M. (1972) Oscillations in Chemical Systems. 2. Thorough Analysis of Temporal Oscillation in Bromate-Cerium-Malonic Acid System. Journal of the American Chemical Society, 94, 8649-8664.
20. Turing, A.M. (1952) The chemical basis of morphogenesis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B, 237, 37-72.
21. Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Courier Corporation, 2013.
22. Шустер, Г. Детерминированный хаос: введение. (1988).
23. Lorenz, Edward Norton (1963). Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences. 20 (2): 130–141.
24. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240с.
25. Murray, J.D., 2002. Mathematical biology: I. An introduction. Interdisciplinary applied mathematics. Mathematical Biology, Springer, 17.
26. Біофізика: Підручник/П. Г. Костюк, В. Л. Зима, І. С. Магура За ред. П. Г. Костюка. – К.: Обереги, 2001. – 544с.
27. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane (англ.) // Biophys. J. : журнал. – 1961. – Vol. 1. – P. 445-466.

28. Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. (1962) An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. Proceedings of the IRE, 50, 2061-2070.
29. J.B. Gunn, IBM J. Res. and Dev. 8, 141 (1964).
30. Дж. Ганн, “Эффект Ганна”, УФН, 89:1 (1966), 147–160.