

О. В. БАРАБАШ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ЗІ СПЕЦКУРСУ
"МЕТОДИ ТЕОРІЇ ГРУП В ФІЗИЦІ ЯДРА ТА
ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК"

Київ – 2025

Лекція 1.

Закони збереження та типи взаємодій.

Закони збереження.

1) У всіх взаємодіях зберігаються: енергія; імпульс; кутовий момент; баріонний, лептонний та електричний заряди¹.

2) Кожен тип кварків має своє адитивне квантове число, що зберігається в сильних та електромагнітних взаємодіях:

- u - та d -кварки — проекція ізоспіну: $+1/2$ та $-1/2$ відповідно;
- c -кварк — шарм;
- s -кварк — дивність;
- b - та t -кварки — краса та t -число (t — truth — істина або top — верхній).

Крім перерахованих вище адитивних чисел, в сильних взаємодіях зберігається ізоспін, а також просторова та зарядова парності.

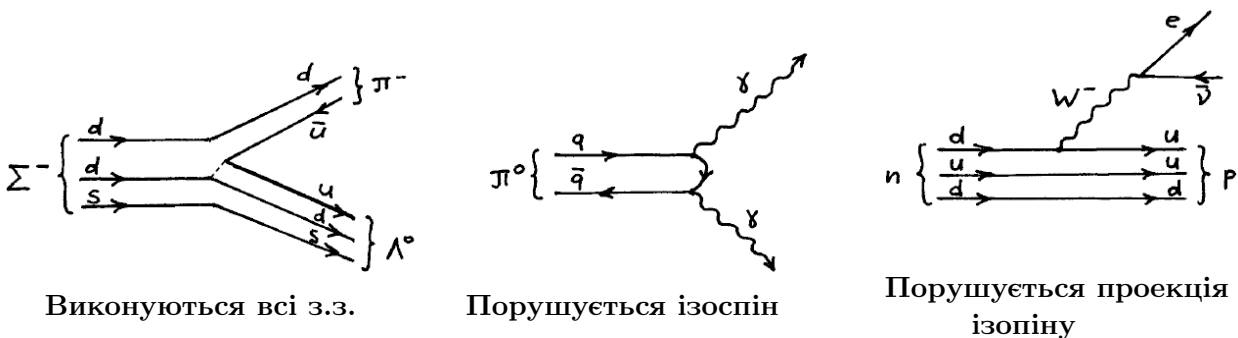
3) В електромагнітних взаємодіях зберігаються всі адитивні квантові числа, зарядова та просторова парності, але порушується ізоспін (але не його проекція).

4) В слабких взаємодіях можуть порушуватися всі закони збереження, крім тих, що перелічені у пункті 1.

З наведених вище законів збереження випливають такі висновки:

а) чим інтенсивніша взаємодія, тим більшу симетрію вона має (більше законів збереження);

б) в сильних та електромагнітних взаємодіях зберігається загальний кварковий склад частинок (при цьому однотипні кварк-антикваркові пари до уваги не беруться). Завдяки цьому такі процеси можна зображати у вигляді діаграм, в яких зберігаються ароматні струми (тобто струми, що переносять певний аромат, а разом із ним і відповідне квантове число). Порівняйте, наприклад, діаграми розпаду $\Sigma^-(1385) \rightarrow \Lambda + \pi^-$ (сильна взаємодія), $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (електромагнітна) та $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ (слабка взаємодія).



Кросинг симетрія. Із законів збереження випливає, що якщо можлива реакція

$$a + b \rightarrow c + d + f + \dots \quad (1)$$

¹С. Вайнберг в книзі "Перші три хвилини" наводить такий приклад електронейтральності Всесвіту: якби заряди електрона і протона відрізнялися на величину $\frac{\Delta q}{q} \geq 10^{-36}$, то електричне відштовхування між Сонцем і Землею було б сильніше гравітаційного притягання. Чому заряд протона в точності дорівнює (по модулю) заряду електрона пояснює Стандартна Модель (див. примітку 28 на стор. 55).

то можливі також і кросинг (перехресні) процеси, в яких одна чи більше частинок переноситься з однієї сторони реакції в іншу з заміною їх на античастинки:

$$a + b + \bar{c} \rightarrow d + f + \dots; \quad a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d + f + \dots \quad \text{і т.п.} \quad (2)$$

Справді, якщо в (1) виконуються все адитивні закони збереження, то всі вони виконуватимуться і в (2), оскільки адитивні квантові числа античастинок протилежні відповідним значенням для частинок. Закони збереження кутового моменту та ізоспіну також будуть виконані, оскільки частинка і античастинка мають однаковий спін (ізоспін). Наприклад

$$(1): \quad \vec{J}_a + \vec{J}_b = \vec{J}_c + \vec{J}_d + \dots \quad (2): \quad \vec{J}_a + (-\vec{J}_c) = (-\vec{J}_b) + \vec{J}_d + \dots$$

Проте, кросинг процеси з перестановкою однієї частинки (або коли в початковому/кінцевому стані залишається одна частинка) можуть бути заборонені за законом збереження енергії:

$$\begin{array}{ll} \text{дозволені:} & \begin{array}{l} K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda \\ n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \end{array} & \text{заборонені:} & \begin{array}{l} p \rightarrow K^+ + \pi^0 + \Lambda \\ \bar{p} \rightarrow \bar{n} + e + \bar{\nu}_e \end{array} \end{array}$$

В той же час кросинг процес до розпаду нейтрона $n + \nu_e \rightarrow p + e$ можливий.

Принцип Паулі. Якщо система складається з тотожних частинок, то її просторово-спіновий стан не може бути довільним, а має задовольняти принципу Паулі: при перестановці місцями просторово-спінових координат хвильова функція системи змінює знак у разі ферміонів і залишається незмінною для бозонів. У випадку пари частинок, симетрія координатної частини хвильової функції дорівнює $(-1)^L$, де L — орбітальний момент пари. Симетрія спінової частини хвильової функції різна для бозонів та ферміонів:

$$(-1)^{S+1} \quad (\text{для ферміонів}) \quad \text{і} \quad (-1)^S \quad (\text{для бозонів})$$

де S — повний спін пари. Таким чином, принцип Паулі дає:

$$\left. \begin{array}{l} \text{бозони:} \quad (-1)^L (-1)^S = +1 \\ \text{ферміони:} \quad (-1)^L (-1)^{S+1} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1)^{L+S} = +1.$$

Наведені міркування справедливі для масивних частинок. Для безмасових частинок аналогічний аналіз є більш складним, оскільки для безмасової частинки поняття спіну (як кутового моменту у стані спокою) не визначено (для таких частинок означений лише повний момент, а не орбітальний та спіновий окремо). Так, наприклад, два фотони не можуть мати повний кутовий момент рівний одиниці (теорема Ландау). Внаслідок цього, анігіляція векторного мезону (що має спін 1) у два фотони/глюони заборонена.

Тип взаємодії. Визначення типу взаємодії, під дією якої йде дана реакція, здійснюється за принципом: все, що не заборонено, то має відбуватися. При цьому слід дотримуватися наступної схеми: спочатку перевіряється можливість протікання реакції під дією сильної взаємодії, потім електромагнітної і в останню чергу — слабкої.

Якщо для даної реакції виконуються всі закони збереження — це сильний процес. Така реакція не може іти під дією слабкої або електромагнітної взаємодії, оскільки сильний процес не заборонений (все, що не заборонено, то відбувається!). Якщо ж сильний процес заборонений, перевіряємо можливість протікання реакції під дією електромагнітної взаємодії і т.д.

Присутність в кінцевих продуктах реакції нейтрино вказує на слабкий характер цього процесу, тоді як поява серед адронів γ -квантів не завжди означає чисто електромагнітний тип взаємодії. Наприклад, розпад $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ відбувається під дією як

електромагнітної, так і слабкої взаємодії. При цьому характерний переріз (час життя) процесу визначається найслабкішою взаємодією. Так, для зазначеного розпаду час життя Ξ^0 -гіперона має типовий для слабких взаємодій порядок $\tau(\Xi^0) = 2.9 \cdot 10^{-10}$ с. В присутності в цій реакції слабого процесу можна також переконатись, виписавши кварковий склад початкових і кінцевих частинок.

Експериментально тип взаємодії легко визначається (як правило) за характерною величиною перерізу/ймовірності процесу.

Типи взаємодій та їхні ймовірнісні характеристики.

	Сильна	Електромагнітна	Слабка
Переріз	$\sim 10^{-26} \text{см}^2$	$\sim 10^{-29} \text{см}^2$	$\sim 10^{-38} \text{см}^2$
Час життя, с	$\sim 10^{-24} - 10^{-21}$	$\sim 10^{-21} - 10^{-16}$	$\sim 10^{-13}$ та більше
Ширина Γ , MeV	≥ 1	≤ 1	—

Нестабільні частинки поділяють на два класи: метастабільні та резонанси. Метастабільні частинки розпадаються під впливом слабкої або електромагнітної взаємодії. Зважаючи на слабкість цих процесів час життя метастабільних частинок великий і допускає прямий вимір по довжині треку, що залишається частинкою в бульбашковій камері або фотоемульсії. На противагу їм частинки резонанси розпадаються під дією сильної взаємодії. Час життя таких частинок малий: $10^{-23} - 10^{-21}$ с. Частинки резонанси не можуть безпосередньо спостерігатися по їх трекам — за час життя вони встигають пройти відстань лише порядку розміру ядра. Резонанси виявляють за характерною резонансною поведінкою перерізу реакції (див. Рис. 4 на стор. 20). Відповідно до цього, експериментально вимірюваними параметрами є енергія (маса) і ширина резонансу Γ , яка пов'язана з часом життя частинки співвідношенням $\Gamma\tau = \hbar$. В енергетичних одиницях $\hbar = 6.58 \cdot 10^{-22}$ MeV c.

Маса нестабільної частинки не є чітко визначеною. Невизначеність маси $\Delta m/m = \Gamma/mc^2$ для частинки резонансу може бути порядку одиниці. Так, наприклад, для ρ -мезона $\Delta m/m = 0.2$, а у κ -мезона $\Delta m/m = 0.3$. Інші характеристики резонансів (спін, ізоспін, парність тощо) обчислюють за кутовими характеристиками продуктів їхнього розпаду та з аналізу законів збереження.

З усіх існуючих частинок стабільними є лише фотон, протон, електрон та електрон-нейтрино. Стабільність цих частинок зумовлена точними законами збереження (що перелічені в пункті 1 на початку лекції): протон — найлегший баріон (розпад його заборонено законом збереження баріонного заряду), електрон — найлегша заряджена частинка, нейтрино — найлегший лептон, а фотон стабільний через свою безмасовість (розпад безмасової частинки заборонений лоренцінваріантністю).

Задачі.

- Під дією якої взаємодії відбуваються наступні процеси (якщо вони можливі):
 а) $\pi^0 + p \rightarrow K^+ + K^0 + n$, б) $d + p \rightarrow 2K^+ + n$, в) $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda$,
 г) $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$, д) $\eta' + \eta \rightarrow \Delta^0 + \bar{n}$, е) $\phi \rightarrow 2\pi^0$.
- Написати найімовірніші канали розпаду π^+ та π^0 -мезонів. Під впливом якої взаємодії вони відбуваються? Порівняйте часи життя π^\pm та π^0 -мезонів.
- Намалюйте кваркові діаграми слабких розпадів:
 а) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$, б) $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$, в) $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$, г) $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$.

Лекція 2.

Дискретні симетрії. Просторова парність (P -парність).

Просторова інверсія. Дія оператора просторової інверсії \hat{P} на неквантоване однокомпонентне поле Ψ дається рівністю:

$$\hat{P}\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(-\mathbf{x}).$$

Оператор \hat{P} — унітарний:

$$\langle \hat{P}\Psi(\mathbf{x}), \hat{P}\Phi(\mathbf{x}) \rangle = \int \Psi^*(-\mathbf{x})\Phi(-\mathbf{x})d^3x = / \text{заміна } \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} / = \langle \Psi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle.$$

З унітарності та рівності $\hat{P}^2 = 1$ випливає, що оператор \hat{P} — ермітів. Значить, йому можна співставити величину, що спостерігається — просторову парність $\varepsilon_P = \pm 1$. Якщо початковий стан мав певну P -парність ($\hat{P}\Psi_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_P\Psi_i(\mathbf{x})$) і $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, то і в кінцевому стані $\hat{P}\Psi_f(\mathbf{x}) = \varepsilon_P\Psi_f(\mathbf{x})$ з тим самим значенням ε_P — закон збереження парності.

Позначимо \mathcal{P} — оператор імпульсу системи. Тоді $\hat{P}\mathcal{P}\hat{P}^{-1} = -\mathcal{P}$, тобто $[\hat{P}, \mathcal{P}] \neq 0$, за винятком випадку, коли $\mathcal{P} = 0$. Це означає, що система може мати певну просторову парність лише у випадку, коли її імпульс дорівнює нулю (система центру мас)².

Розглянемо систему двох частинок: a та b . Їх хвильову функцію Ψ_{ab} можна записати як

$$\Psi_{ab} = \psi_a \psi_b \psi_{\text{відн}},$$

де ψ_a і ψ_b — хвильові функції, що описують внутрішню структуру частинок a і b , а $\psi_{\text{відн}}$ — хвильова функція їх відносного руху. Оскільки $\psi_{\text{відн}} \sim Y_{lm}(\theta, \varphi)$, то $\hat{P}\psi_{\text{відн}} = (-1)^l \psi_{\text{відн}}$. Тому

$$\hat{P}\Psi_{ab} = \varepsilon_a \varepsilon_b (-1)^l \Psi_{ab},$$

де ε_a і ε_b — внутрішні парності частинок a і b , що визначаються рівністю: $\hat{P}\Psi_a = \varepsilon_a \Psi_a$, $\hat{P}\Psi_b = \varepsilon_b \Psi_b$. В нерелятивістській квантовій механіці поняття внутрішньої парності елементарних частинок відсутнє, що пов'язано з тим, що кількість елементарних частинок та їх тип залишаються незмінними в процесі взаємодії. Нерелятивістським аналогом внутрішньої парності є парність складової системи (наприклад, ядра або адрона, що складається з кварків). В релятивістській квантовій теорії безструктурні частинки ("точкові") потрібно розглядати нарівні з складовими, оскільки можливі взаємні перетворення одних частинок в інші (наприклад, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$).

Експериментальне визначення внутрішньої парності. Припустимо, що частинка c утворюється в результаті взаємодії частинок a і b :

$$a + b \rightarrow a + b + c,$$

і нехай повний кутовий момент системи частинок після реакції дорівнює L . Тоді, якщо в цій реакції парність зберігається, то ³

$$\langle \Psi_{ab} | \hat{P} | \Psi_{ab} \rangle = \langle \Psi_{abc} | \hat{P} | \Psi_{abc} \rangle \Rightarrow \varepsilon_a \varepsilon_b (-1)^l = \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c (-1)^L$$

²В зв'язку з цим відмітимо, що для безмасової частинки не існує системи відліку, в якій вона знаходиться у спокою, і тому поняття внутрішньої парності такої частинки невизначене. Для фотона внутрішня парність визначається за дією оператора інверсії на полярний вектор \mathbf{A} (або \mathbf{E}): $\hat{P}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}(-\mathbf{x})$, тобто від'ємна. Визначення парності за аксіальним вектором \mathbf{H} привело б до протилежного результату.

³Просторова парність відносного руху системи трьох частинок може не збігатися з фактором $(-1)^L$, що в даному випадку, несуттєво.

і внутрішня парність частинки дорівнює $(-1)^{L+l}$. Якщо ж народження лише однієї частинки s неможливе, її внутрішню парність визначити не можна. Наприклад, якщо s — ферміон або має електричний заряд. Таким чином, внутрішня парність може бути визначена лише для частинок, які можуть народжуватися поодиноці, тобто для істинно нейтральних бозонів. До таких частинок відносяться, наприклад, π^0 -мезон, фотон та інші. Обмежене застосування поняття внутрішньої парності є наслідком законів збереження.

Відносна парність. Якщо є дві заряджені частинки c^+ і d^+ , для яких можлива реакція

$$a + c^+ \rightarrow a + d^+,$$

то згідно із законом збереження парності

$$\varepsilon_a \varepsilon_c (-1)^{l_1} = \varepsilon_a \varepsilon_d (-1)^{l_2} \Rightarrow \varepsilon_c \varepsilon_d = (-1)^{l_1+l_2},$$

тобто, може бути визначена лише відносна парність частинок c^+ і d^+ . Закон збереження заряду вимагає, щоб $Q_c = Q_d$. Те саме справедливо і для баріонного числа, а також дивності (та інших зарядових квантових чисел, що зберігаються у сильній та електромагнітній взаємодіях). Процеси, в яких дивність змінюється, і які могли б дозволити порівнювати парності дивних і недивних частинок, є слабкими процесами з порушенням парності. Отже, для цього вони даремні. З цих міркувань випливає, що відносна парність може бути визначена лише для частинок з однаковими значеннями зарядів Q , B і S (або, як кажуть, всередині одного зарядового класу).

Щоб просунутися далі потрібно вибрати певні значення парності у частинок з різних зарядових класів. Максимальна кількість частинок у яких ми можемо довільно фіксувати парності не входячи в суперечність з експериментом, не менше трьох (бо існує три заряди Q , B і S). При цьому з'являється можливість визначати парність частинок інших зарядових класів за схемою.

$$A + B \rightarrow C + X_1 \Rightarrow \varepsilon_P(X_1), \quad A + X_1 \rightarrow B + X_2 \Rightarrow \varepsilon_P(X_2), \quad \text{і т.д.} \quad (3)$$

де A, B, C — частинки з фіксованою парністю (еталонні частинки), X_1, X_2 — частинки нових зарядових класів, парності яких визначаються з відповідних реакцій. Аналіз показує, що трьох еталонних частинок достатньо, щоб за ними визначити парності всіх інших частинок⁴. Історично як еталонні частинки було обрано протон, нейтрон і Λ -гіперон, яким приписали позитивну внутрішню парність.

Як приклад реалізації схеми (3) розглянемо процес

$$\pi^- + d \rightarrow 2n,$$

що йде з S -стану атома π -мезодейтерію. Закон збереження парності дає

$$\varepsilon_\pi \varepsilon_d = (\varepsilon_n)^2 (-1)^l \Rightarrow \varepsilon_\pi = (-1)^l, \quad (\varepsilon_d = 1).$$

Значення орбітального моменту l пари нейтронів визначається з принципу Паулі та закону збереження кутового моменту:

$$(-1)^{l+S} = 1, \quad |\vec{L} + \vec{S}| = 1, \quad (4)$$

⁴Наведені міркування відносяться до частинок, що складаються лише з трьох кварків: u , d та s . Кожен новий кварк додає новий адитивний заряд, що зберігається у сильних та електромагнітних взаємодіях. Відповідно, додається число частинок з постульованою парністю.

де $S = 0$ або 1 . Значення $S = 0$ суперечить умовам (4). Отже $S = 1$. Тоді перша з умов (4) дає $l = 1, 3, 5, \dots$, а друга фіксує значення $l = 1$. В результаті, для парності піона отримуємо

$$\varepsilon_\pi = -1.$$

Якщо розглядати частинки, до складу яких входять важкі кварки (c, b, t), то число еталонних частинок має бути розширено до шести (бо додаються три нові заряди). На кварковому рівні достатньо приписати певну просторову парність кваркам кожного аромату. За означенням внутрішні парності всіх кварків приймаються рівними $+1$.

Внутрішні парності лептонів e^- , μ^- і τ^- можуть бути обрані довільно, а їх відносні парності взагалі не спостерігаються, оскільки в процесах із сильною взаємодією лептони участі не беруть, а в електромагнітних процесах число і тип лептонів або взагалі не змінюється, або зміна їх числа відбувається за рахунок народження/анігіляції пар лептон-антилептон: e^-e^+ , $\mu^-\mu^+$ і т.д. Що ж до нейтрино, то для цієї частинки поняття внутрішньої парності позбавлене сенсу, оскільки нейтрино бере участь (і утворюється) лише в слабких процесах, в яких парність не зберігається.

Внутрішні парності частинок та античастинок. Із загальних принципів квантової теорії поля слідує існування певного зв'язку між внутрішньою парністю частинки та її античастинки. Розглянемо два окремі випадки: випадок частинок зі спіном нуль і випадок дираківських частинок зі спіном $1/2$.

Скалярні частинки. Для не квантованого поля дія оператора \hat{P} на функцію $\phi(\mathbf{x}, t)$ дається рівністю: $\hat{P}\phi(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_P\phi(-\mathbf{x}, t)$, де $\varepsilon_P = \pm 1$ — внутрішня парність скалярного (псевдоскалярного) поля ϕ . Аналогічно цьому, визначимо дію оператора \hat{P} на вторинно квантоване поле $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ співвідношенням

$$\hat{P}\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = \varepsilon_P\hat{\phi}(-\mathbf{x}, t), \quad \varepsilon_P = \pm 1.$$

Підставляючи в цю рівність вираз для $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [e^{-ikx}a(\mathbf{k}) + e^{ikx}b^\dagger(\mathbf{k})], \quad kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}, \quad (c = \hbar = 1)$$

знаходимо наступний закон перетворення операторів $a^\dagger(\mathbf{k})$ і $b^\dagger(\mathbf{k})$:

$$\hat{P}a(\mathbf{k})\hat{P}^{-1} = \varepsilon_P a(-\mathbf{k}), \quad \hat{P}b^\dagger(\mathbf{k})\hat{P}^{-1} = \varepsilon_P b^\dagger(-\mathbf{k})$$

і аналогічно для ермітово-спряжених операторів $a^\dagger(\mathbf{k})$ і $b(\mathbf{k})$.

Для встановлення відносної парності частинки та античастинки, подіємо оператором \hat{P} на двочастинковий стан

$$\Psi_{a\bar{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})|\mathbf{k}, -\bar{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k})|0\rangle,$$

який є довільним станом системи частка-античастка в системі її центру мас. Вважаючи просторову парність вакууму позитивною, знаходимо:

$$\hat{P}\Psi_{a\bar{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})\hat{P}a^\dagger(\mathbf{k})\hat{P}^{-1}\hat{P}b^\dagger(-\mathbf{k})\hat{P}^{-1}\hat{P}|0\rangle = \varepsilon_P^2 \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = +\Psi_{a\bar{a}}(-\mathbf{x})$$

звідки слідує рівність внутрішньої парності частинки зі спіном нуль та її античастинки.

Ферміони зі спіном $1/2$. Для не квантованого спінорного поля ψ оператор інверсії визначається наступним чином: $\hat{P}\psi(\mathbf{x}, t) = \gamma_0\psi(-\mathbf{x}, t)$. Аналогічно цьому, визначимо дію оператора \hat{P} на квантоване поле $\hat{\psi}$ рівністю

$$\hat{P}\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = \varepsilon_P\gamma_0\hat{\psi}(-\mathbf{x}, t), \quad \varepsilon_P = \pm 1. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) явний вигляд оператора $\hat{\psi}$

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [e^{-ikx} u_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) + e^{ikx} u_{\lambda}^{(-)}(-\mathbf{k}) b_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})],$$

і враховуючи, що біспінори $u_{\lambda}^{(\pm)}$ задовольняють рівності

$$\gamma_0 u_{\lambda}^{(\pm)}(-\mathbf{k}) = \pm u_{\lambda}^{(\pm)}(\mathbf{k}),$$

отримуємо такі правила перетворення операторів $a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})$ і $b_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})$:

$$\hat{P} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{P}^{-1} = \varepsilon_P a_{\lambda}^{\dagger}(-\mathbf{k}), \quad \hat{P} b_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{P}^{-1} = -\varepsilon_P b_{\lambda}^{\dagger}(-\mathbf{k}).$$

Аналогічно попередньому випадку, для знаходження відносної парності подіємо оператором \hat{P} на двочастковий стан $\Psi_{a\bar{a}}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \hat{P}\Psi_{a\bar{a}}(\mathbf{x}) &= \hat{P} \sum_{\lambda, \lambda', \mathbf{k}} f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}, \lambda; -\bar{\mathbf{k}}, \bar{\lambda}'\rangle = \\ &= \sum_{\lambda, \lambda', \mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \hat{P} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{P}^{-1} \hat{P} b_{\lambda'}^{\dagger}(-\mathbf{k}) \hat{P}^{-1} \hat{P} |0\rangle = \\ &= - \sum_{\lambda, \lambda', \mathbf{k}} f(\mathbf{k}) a_{\lambda}^{\dagger}(-\mathbf{k}) b_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}) |0\rangle = -\Psi_{a\bar{a}}(-\mathbf{x}), \end{aligned}$$

звідки слідує, що відносні парності частинки та античастинки протилежні.

Узагальнення цього розгляду для полів довільного спіну приводить до наступного висновку: відносні внутрішні парності частинки та античастинки однакові для бозонів та протилежні для ферміонів.

Порушення просторової парності. Просторова парність зберігається в сильних та електромагнітних взаємодіях, але порушується в слабких. Незбереження парності перевіряється шляхом виміру довільної псевдоскалярної величини A . В якості такої зазвичай вибирають величини типу $\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}$, $(\mathbf{p}_1, [\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3])$ і т.п. Якщо початковий стан має певну просторову парність, то середнє значення $\langle A \rangle = 0$. Справді, нехай $\hat{P}\psi = \varepsilon\psi$, $\varepsilon = \pm 1$. Тоді

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \varepsilon \psi | A | \varepsilon \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^{\dagger} A \hat{P} | \psi \rangle = -\langle \psi | A | \psi \rangle = -\langle A \rangle$$

звідки і слідує рівність $\langle A \rangle = 0$. Якщо в результаті взаємодії парність зберігається, то і в кінцевому стані $\langle A \rangle = 0$.

У 1956 році Лі і Янг, проаналізувавши доступні тоді експериментальні дані, дійшли висновку, що не існує жодного експерименту, який би свідчив про збереження (або порушення) парності в слабких процесах. Щоб з'ясувати це питання, Лі та Янг запропонували ідею експериментів, які були незабаром зроблені. Найбільш разючим результатом проведених експериментів було те, що ступінь порушення P -парності є аж ніяк не малою величиною. Більш того, виявилось, що в усіх експериментах незбереження

парності завжди є максимальним, тобто параметр, що визначає ступінь незбереження парності, досягає максимально можливого значення — одиниці⁵. Перше підтвердження незбереження парності було виявлено в експериментах з β -розпаду ядер кобальту: $Co^{60} \rightarrow Ni^{60} + e^- + \bar{\nu}_e$, в яких вимірювалася псевдоскалярна величина $\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}$, де \mathbf{J} — спин орієнтованих магнітним полем ядер кобальту, а \mathbf{p} — імпульс електронів що вилітають. Було виявлено, що електрони вилітають переважно у напрямку, протилежному вектору \mathbf{J} . Численні подальші експерименти підтвердили висновок про максимальне порушення P -парності у слабких взаємодіях.

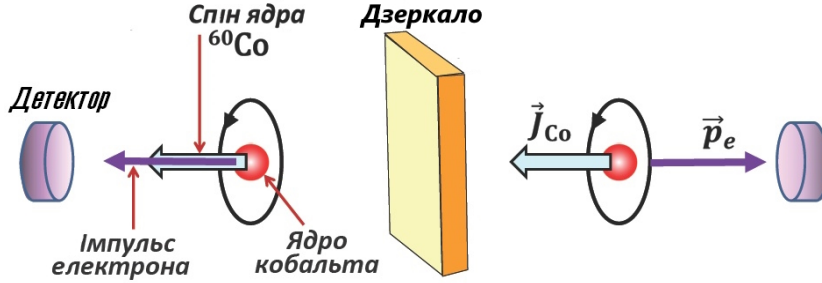
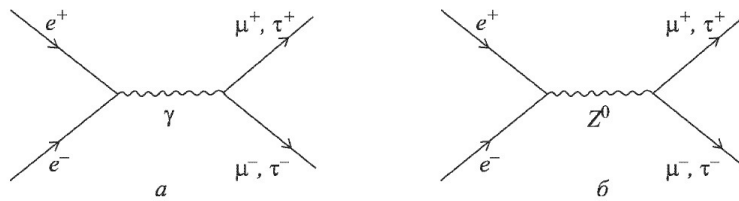


Рис. 1. При дзеркальному відбитті змінюється напрямок імпульсу електрона, але не змінюється напрямок його спіну. Дзеркальний процес не еквівалентний початковому.

Завдання.

- Відновити відсутні нейтральні компоненти продуктів слабого розпаду: а) $\pi^- \rightarrow \mu^-, \pi^+ \rightarrow e^+$; б) $\tau^- \rightarrow e^-$; в) $\Sigma^- \rightarrow \mu^-, \Sigma^+ \rightarrow e^+$; г) $p + p \rightarrow d +$ лептони.
- Розглянути розпад нейтрона $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$. В якому напрямку по відношенню до спіну нейтрона переважно вилітають електрони?
- При високих енергіях в анігіляцію $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ все більший внесок починають вносити процеси з обміном Z^0 -бозоном. Експериментально це проявляється у виникненні асиметрії вперед-назад кутового розподілу мюонів. Визначить, в якому напрямку (у напрямку руху позитронів або проти) буде спостерігатися надлишок мюонів μ^+ , що вилітають.



- Розгляньте слабкі розпади Ω -гіперона: $\Omega \rightarrow \Lambda K^-, \Xi^- \pi^0, \Xi^0 \pi^-$. Намалуйте діаграми цих розпадів. Перевірте збереження просторової парності у цих процесах.
- Розгляньте розпад Λ -гіперона: $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$. У якому напрямку по відношенню до спіну гіперона переважно вилітають протони?

⁵В електро-слабкій теорії оператор взаємодії з порушенням парності має вигляд $\hat{V}_{ab} = \hat{j}^\mu \hat{j}_\mu$, де $\hat{j}^\mu \sim \bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma_5) \psi_b$. Найбільший ступінь порушення просторової парності досягається при рівному вкладі скалярного $\bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b$ і псевдоскалярного $\bar{\psi}_a \gamma^\mu \gamma_5 \psi_b$ членів, тобто при $|\alpha| = 1$.

Лекція 3.

C-парність та обернення часу. *CPT*-теорема.

Зарядова парність. На відміну від просторової парності, операція зарядового спряження має суто квантове походження і зводиться до заміни частинок античастинками і навпаки. Оскільки частинки відрізняються від античастинок знаками всіх адитивних узагальнених зарядів⁶ (позначимо сукупність їх літерою Q), то дію оператора зарядової інверсії \hat{C} на вектор стану $|Q, N\rangle$ (N — сукупність інших квантових чисел, відмінних від Q : енергія, спин, орбітальний момент тощо) запишеться у вигляді

$$\hat{C}|Q, N\rangle = |-Q, N\rangle.$$

За означенням, оператор зарядового спряження діє лише на адитивні заряди і тому не змінює просторово-спінового стану системи. Це означає, що нормування стану при цьому не змінюється, тобто оператор \hat{C} — унітарний. З унітарності оператора \hat{C} і рівності $\hat{C}^2 = 1$ випливає, що цей оператор є і ермітовим. Тому можна ввести квантове число ε_C — зарядову парність, яка приймає значення ± 1 . Оскільки оператор \hat{C} змінює знаки всіх зарядів, то він антикомутує з будь-яким зарядовим оператором \hat{Q} . Як наслідок, система частинок може мати певну зарядову парність тільки в тому випадку, коли у неї всі адитивні квантові числа рівні нулю. Цю властивість мають, наприклад, система $A\bar{A}$ (частка - античастинка), дво- і трипійонні стани $\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$, $\pi^+\pi^0\pi^-$ та інші.

З означення оператора \hat{C} випливають такі правила перетворення операторів народження та знищення:

$$\hat{C}|Q, N\rangle = \hat{C}a_N^\dagger|0\rangle = b_N^\dagger|0\rangle \Rightarrow \hat{C}a_N^\dagger\hat{C}^{-1} = b_N^\dagger, \quad \hat{C}a_N\hat{C}^{-1} = b_N$$

і те ж саме для оператора b , тобто \hat{C} : $a_N \leftrightarrow b_N$, $a_N^\dagger \leftrightarrow b_N^\dagger$.

Якщо $[\hat{C}, \hat{H}] = 0$, то зарядова парність зберігається. Збереження зарядової парності означає, що даний фізичний процес і зарядово-спряжений до нього процес протікають однаково, тобто рівні їх ефективні перерізи, кутові та енергетичні розподіли продуктів розпаду і т.п. Зарядова парність зберігається в сильній та електромагнітній взаємодії, але порушується у слабкій.

При знаходженні зарядової парності системи з кількох істинно нейтральних частинок⁷, потрібно мати на увазі, що *C*-парність — величина мультиплікативна, тобто зарядова парність усієї системи дорівнює добутку зарядових парностей її складових. Що ж до систем $A\bar{A}$, що складаються з частинки та її античастинки, то їх зарядову парність можна легко знайти з узагальненого принципу Паулі, згідно з яким повна хвильова функція має бути симетричною для бозонів і антисиметричною для ферміонів щодо перестановки всіх змінних: просторових, спінових та зарядових (новий ступінь вільності). Перестановка зарядових змінних здійснюється оператором \hat{C} і зводиться до множення на фактор ε_C — зарядову парність.

Доведемо цей принцип для випадку системи з двох ферміонів, що описується хвильовою функцією $\psi(1, \bar{2})$

$$\psi(1, \bar{2}) = \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} f(\mathbf{k}_1, \sigma_1; \mathbf{k}_2, \sigma_2) a_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger b_{\mathbf{k}_2\sigma_2}^\dagger |0\rangle,$$

⁶Узагальненими зарядами називають адитивні квантові числа, значення яких не залежать від системи відліку. До них відносяться: електричний, баріонний, лептонний заряди, дивність, чарівність, шарм, t і b квантові числа, а також проекція ізоспину. Енергія, імпульс і момент імпульсу узагальненими зарядами не є, оскільки їх значення залежить від системи відліку.

⁷Істинно нейтральною називається частинка, що співпадає зі своєю античастинкою.

де $f(\mathbf{k}_1, \sigma_1; \mathbf{k}_2, \sigma_2)$ — хвильова функція системи в імпульсному представленні, $\sigma_{1,2}$ — спінові індекси. Подіємо на вектор стану $\psi(1, \bar{2})$ оператором \hat{P}_{12} перестановки просторових і спінових змінних і оператором \hat{C} — перестановки зарядових координат

$$\hat{P}_{12}\psi(1, \bar{2}) = \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} f(\mathbf{k}_1, \sigma_1; \mathbf{k}_2, \sigma_2) a_{\mathbf{k}_2\sigma_2}^\dagger b_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger |0\rangle = \psi(2, \bar{1}); \quad (6)$$

$$\hat{C}\psi(2, \bar{1}) = \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} f(\mathbf{k}_1, \sigma_1; \mathbf{k}_2, \sigma_2) b_{\mathbf{k}_2\sigma_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger |0\rangle = -\psi(1, \bar{2}). \quad (7)$$

В останній рівності ми врахували антикомутативність операторів a^\dagger і b^\dagger . З (6) і (7) слідує співвідношення (узагальнений принцип Паулі для ферміонів)

$$\hat{C}\hat{P}_{12}\psi(1, \bar{2}) = -\psi(1, \bar{2}).$$

Аналогічно доводиться принцип Паулі для бозонів. Відмінність лише в тому, що тепер оператори a^\dagger і b^\dagger комутують між собою.

Операція обернення часу. В нерелятивістській квантовій механіці операція обернення часу визначається таким чином, щоб перетворений вектор стану ψ' задовольняв рівнянню Шредінгера і відповідав стану з тією ж самою енергією, що і вектор ψ . Цим вимогам можна задовольнити, якщо визначити операцію обернення часу \hat{T} рівністю

$$\hat{T}\psi(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, -t). \quad (8)$$

Визначений таким чином оператор \hat{T} антилінійний і, отже, неермітів⁸. Йому не відповідає жодна величина що спостерігається (аналогічна C - або P - парності). Смысл інваріантності гамільтоніана щодо операції обернення часу полягає в існуванні певного співвідношення між амплітудами переходу прямого та оберненого в часі процесів — принцип детальної рівноваги. Для встановлення цього принципу знайдемо закон перетворення операторів a^\dagger та b^\dagger при оберненні часу. За аналогією з (8) визначимо дію оператора \hat{T} на вторинно квантоване Бозе поле $\hat{\phi}$ співвідношенням

$$\hat{T}\phi(\mathbf{x}, t)\hat{T}^{-1} = \phi^\dagger(\mathbf{x}, -t). \quad (11)$$

З визначення (11) та явного виду польового оператора $\phi(x)$

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [e^{-ikx} a_{\mathbf{k}} + e^{ikx} b_{\mathbf{k}}^\dagger]$$

⁸ Антилінійним називається оператор, для якого $\hat{T}(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha^*\hat{T}\psi + \beta^*\hat{T}\phi$. Антилінійний оператор називається антиунітарним, якщо для нього виконується рівність $(\hat{T}\phi, \hat{T}\psi) = (\phi, \psi)^*$.

Оператор A^\dagger , ермітово спряжений до лінійного оператора A , визначається з умови

$$A — \text{лінійний} : \quad (\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi). \quad (9)$$

Визначений таким чином оператор A^\dagger існує тільки для лінійного оператора, оскільки якщо A — антилінійний, то права частина (9) лінійна по ϕ , а ліва — антилінійна. Тому для антилінійного оператора \hat{T} , спряжений до нього оператор \hat{T}^\dagger визначається інакше

$$T — \text{антилінійний} : \quad (\phi, T^\dagger\psi) = (T\phi, \psi)^*. \quad (10)$$

З врахуванням цього, умова антиунітарності записується звичайним чином $\hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$.

З означення (8) випливає, що $\hat{T}^2 = 1$. Покажемо, що \hat{T} — антиермітів, тобто $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$. Маємо: $(\phi_t, \hat{T}\psi_t) = (\phi_t, \psi_{-t}^*) = f(t)$. З іншого боку $(\hat{T}\phi_t, \psi_t)^* = (\phi_{-t}^*, \psi_t)^* = f(-t)$. Але якщо ϕ_t і ψ_t задовольняють рівнянню Шредінгера, то скалярний добуток (ϕ_t, ψ_{-t}^*) не залежить від часу, тобто $f(t) = f(-t) = \text{const}$. Таким чином, оператор обернення часу задовольняє рівностям: $\hat{T} = \hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$.

слідують прості правила перетворення операторів народження та знищення

$$\hat{T} : \quad a_{\mathbf{k}} \rightleftharpoons a_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad b_{\mathbf{k}} \rightleftharpoons b_{-\mathbf{k}}^\dagger.$$

Якщо бозонне поле ϕ має також ненульовий спін \mathbf{J} , то дія оператора \hat{T} приводить до зміни його напрямку на протилежний, тобто, наприклад,

$$\hat{T} a_{\mathbf{k}, \mathbf{J}} \hat{T}^{-1} = a_{-\mathbf{k}, -\mathbf{J}}^\dagger$$

та аналогічно для інших операторів.

Розглянемо дію оператора \hat{T} на вектор стану $|\mathbf{k}, \mathbf{J}\rangle$

$$\hat{T}|\mathbf{k}, \mathbf{J}\rangle = \hat{T}a_{\mathbf{k}, \mathbf{J}}^\dagger|0\rangle = (\hat{T}a_{\mathbf{k}, \mathbf{J}}^\dagger\hat{T}^{-1})\hat{T}|0\rangle = \langle 0|a_{-\mathbf{k}, -\mathbf{J}} = \langle -\mathbf{k}, -\mathbf{J}|,$$

тобто кет-вектор $|\mathbf{k}, \mathbf{J}\rangle$ переходить у бра-вектор $\langle -\mathbf{k}, -\mathbf{J}|$. Якщо гамільтоніан інваріантний щодо обернення часу, то оператор еволюції $S = e^{-iH_{int}t/\hbar}$ комутує з \hat{T} , тобто $\hat{T}^{-1}S\hat{T} = S$. При цьому

$$\langle \mathbf{k}_f, \mathbf{J}_f | S | \mathbf{k}_i, \mathbf{J}_i \rangle = \langle \mathbf{k}_f, \mathbf{J}_f | \hat{T}^{-1} S \hat{T} | \mathbf{k}_i, \mathbf{J}_i \rangle = \langle -\mathbf{k}_i, -\mathbf{J}_i | S | -\mathbf{k}_f, -\mathbf{J}_f \rangle^*,$$

звідки слідує

$$|\langle \mathbf{k}_f, \mathbf{J}_f | S | \mathbf{k}_i, \mathbf{J}_i \rangle| = |\langle -\mathbf{k}_i, -\mathbf{J}_i | S | -\mathbf{k}_f, -\mathbf{J}_f \rangle|. \quad (12)$$

Рівність (12) називається принципом детальної рівноваги. Він справедливий як для бозонних, так і для ферміонних полів.

***CPT*-теорема.** Хоча лагранжіан слабкої взаємодії не інваріантний щодо операцій \hat{C} , \hat{P} і \hat{T} окремо, він має бути інваріантним щодо комбінованого перетворення $\hat{\Theta} = \hat{T}\hat{C}\hat{P}$. Такий висновок випливає з теореми Людерса-Паулі, яка стверджує, що будь-який лагранжіан, що інваріантний відносно перетворень власної групи Лоренца та є локально комутативним⁹ є також і *CPT*-інваріантним. Таким чином, *CPT*-інваріантність не містить нової інформації про властивості системи, яка б не впливала з релятивістської інваріантності та принципу причинності. Якби існувала взаємодія, яка порушує *CPT*-інваріантність, то довелося б радикально переглядати основні принципи КТП (на відміну від порушення *C*, *P* і *CP*-симетрій, яке хоч і виявилось несподіванкою, але цілком вписувалося у загальну схему КТП).

CPT-теорема дозволяє просто довести деякі твердження, які за іншого підходу менш очевидні. Наприклад, з *CPT*-теореми випливає рівність мас і часу життя частинки та її античастинки, а також рівність за величиною та протилежністю за знаком їх магнітних моментів. З іншого боку, частки і античастинки повинні брати однакову участь у гравітаційній взаємодії, тобто для античастинок не повинно бути антигравітації.

Покажемо, як доводяться перші два наслідка. Для цього розглянемо дію оператора $\hat{\Theta}$ на вектор стану $|\mathbf{k}, \mathbf{J}\rangle$

$$\hat{\Theta}|\mathbf{k}, \mathbf{J}\rangle = \hat{T}\hat{C}\hat{P}a_{\mathbf{k}, \mathbf{J}}^\dagger|0\rangle = \hat{T}\hat{C}a_{-\mathbf{k}, \mathbf{J}}^\dagger|0\rangle = \hat{T}b_{-\mathbf{k}, \mathbf{J}}^\dagger|0\rangle = \langle 0|b_{\mathbf{k}, -\mathbf{J}} = \overline{\langle \mathbf{k}, -\mathbf{J}|},$$

де риска над вектором $\langle \mathbf{k}, -\mathbf{J}|$ означає, що цей стан відноситься до античастинки. Маса частки дорівнює її повної енергії (що ділиться на c^2) у стані спокою. Тому, якщо $[\hat{H}, \hat{\Theta}] = 0$, то

$$mc^2 = \langle 0, \mathbf{J} | \hat{H} | 0, \mathbf{J} \rangle = \langle 0, \mathbf{J} | \hat{\Theta}^{-1} \hat{H} \hat{\Theta} | 0, \mathbf{J} \rangle = \overline{\langle 0, -\mathbf{J} | \hat{H} | 0, -\mathbf{J} \rangle}^* = \overline{mc^2},$$

⁹Польові оператори ϕ і φ називаються локально комутативними, якщо $[\phi(x), \varphi(y)]_\pm = 0$ при $(x - y)^2 < 0$ (комутатор для бозе полів та антикомутатор для фермі). Ця властивість є проявом принципу причинності в КТП — незалежності операторів ϕ і φ на просторовоподібних інтервалах.

звідки і впливає рівність мас частки зі спіном \mathbf{J} та її античастинки зі спіном $-\mathbf{J}$. Залежність енергії від спіну проявляється у разі, коли частка знаходиться в зовнішньому магнітному полі. Для вільної частинки енергія (маса), очевидно, від проекції спіну не залежить.

Дещо складніше доводиться рівність часів життя частинки та античастинки. Доведення проведемо в рамках теорії збурень. Припустимо, що частинка A розпадається під дією слабкої взаємодії H_W . Це означає, що якщо ми знехтуємо дією слабких сил, то частинка буде стабільною і її вектор стану Ψ_A є власним вектором гамільтоніана незбуреної системи \hat{H}_0 (тобто системи з "вимкненою" слабкою взаємодією). Під впливом збурення H_W частинка може розпадатися різними каналами

$$A \rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + \dots & (\Phi_1) \\ b_1 + b_2 + \dots & (\Phi_2) \\ \dots & \dots \end{cases},$$

де $\Phi_i, i = 1, 2, \dots$ позначає вектор стану частинок, що утворилися після розпаду по i -му каналу. В першому порядку теорії збурень ймовірність розпаду частки A по каналу i за одиницю часу пропорційна квадрату модуля матричного елемента H_W :

$$\omega_i \sim |\langle \Phi_i | H_W | \Psi_A \rangle|^2.$$

Оскільки $\hat{\Theta}^{-1} \hat{H}_W \hat{\Theta} = \hat{H}_W$, то

$$\omega_i \sim |\langle \Phi_i | \hat{\Theta}^{-1} \hat{H}_W \hat{\Theta} | \Psi_A \rangle|^2 = |\langle \bar{\Psi}_A | \hat{H}_W | \bar{\Phi}_i \rangle|^2,$$

де риска над вектором стану означає заміну частинок античастинками зі зміною напрямку всіх спінів. Оскільки оператор H_W ермітов, то

$$\langle \bar{\Psi}_A | \hat{H}_W | \bar{\Phi}_i \rangle = \langle \bar{\Phi}_i | \hat{H}_W | \bar{\Psi}_A \rangle^* \Rightarrow |\langle \bar{\Psi}_A | \hat{H}_W | \bar{\Phi}_i \rangle|^2 = |\langle \bar{\Phi}_i | \hat{H}_W | \bar{\Psi}_A \rangle|^2.$$

Таким чином, для середнього часу життя τ отримуємо наступне співвідношення:

$$\tau^{-1} = \sum_i \omega_i \sim \sum_i |\langle \bar{\Phi}_i | \hat{H}_W | \bar{\Psi}_A \rangle|^2 = \sum_i \bar{\omega}_i \sim (\bar{\tau})^{-1},$$

тобто у першому порядку теорії збурень час життя частки та античастинки збігаються. Можна показати, що цей висновок зберігається і при врахуванні вищих порядків теорії збурень.

Найбільш точно CPT -теорема перевірена по рівності мас нейтральних каонів K^0 і \bar{K}^0 : відносна різниця їх мас не перевищує 10^{-18} .

Завдання. На прикладах розпадів

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

проілюструвати порушення P - і C -парності, але збереження CP -парності. Чим обумовлено подавлення каналу розпаду $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ (парціальна ширина 10^{-4})?

Лекція 4.

Ізоспін та зарядова симетрія.

Поняття ізотопічного спіну було введено для пояснення зарядової симетрії ядерних сил — інваріантності сильних взаємодій щодо заміни $p \leftrightarrow n$, яке, зокрема, проявляється

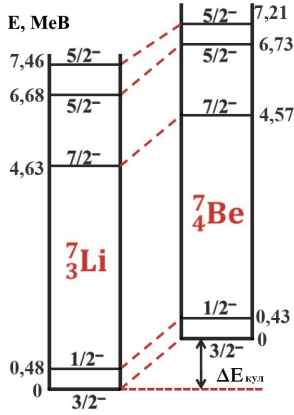


Рис. 3

у властивостях дзеркальних ядер та в експериментах з нуклон-нуклонного розсіювання (див. Рис. 3). У формалізмі ізоспіну протон і нейтрон розглядаються як одна частинка — нуклон, який може перебувати в двох зарядових станах: протонному (проекція ізоспіну $+1/2$) та нейтронному (проекція ізоспіну $-1/2$). Таким чином, нуклон крім просторових та спінових ступенів вільності має додаткову ізоспінову координату, так що хвильова функція нуклону записується у вигляді

$$N = \alpha|p\rangle + \beta|n\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

або просто

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},$$

де $|p\rangle$ і $|n\rangle$ — хвильові функції протона та нейтрона, а числа α і β представляють амплітуди ймовірності знаходження нуклону в протонному та нейтронному станах. Розвиток фізики елементарних частинок призвів до необхідності поширити поняття ізоспіну на інші частинки. При зіткненні нуклонів високих енергій можуть утворюватися різні елементарні частинки: піони, каони, гіперони¹⁰ та ін. Оскільки ці процеси відбуваються під дією сильних взаємодій, то закон збереження ізоспіну приводить до необхідності приписати певні значення ізоспіну (та його проекції) всім адронам. На кварковому рівні наявність ізоспіну у елементарних частинок пояснюється існуванням ізотопічного дублету кварків u і d , аналогічного нуклонному ізодублету.

Усі частинки ізомультиплету повинні мати однакові трансформаційні властивості щодо просторово-часових перетворень. Це, зокрема, означає, що всі вони мають однакові значення спіну та P -парності.

Мультиплет антинуклонів. Позначимо нуклонний ізодублет літерою N . При ізотопічних поворотах спіно́р N перетворюється за законом

$$N \rightarrow N' = \hat{U}(\varphi)N,$$

де

$$\hat{U}(\varphi) = e^{i\varphi I}, \quad I = \frac{1}{2}\tau,$$

τ_i — матриці Паулі. Спіно́р з античастинок $\tilde{N} = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{n} \end{pmatrix}$ перетворюється по комплексно-спряженому представленню, тобто

$$\tilde{N} \rightarrow \tilde{N}' = \hat{U}^*(\varphi)\tilde{N}.$$

¹⁰Гіперонами називають баріони з відміною від нуля дивністю, що розпадаються під дією слабкої (або електромагнітної) взаємодії та мають час життя, що на багато порядків перевищує характерний ядерний час ($\tau \sim 10^{-23}$ с). До гіперонів відносяться Λ (лямбда), Σ (сигма), Ξ (ксі), Ω (омега) частинки та інші.

Оскільки $\tau^* \neq -\tau$, то закон перетворення спінора \tilde{N} відрізняється від закону перетворення N . Можна переозначити дублет античастинок \tilde{N} так, щоб частинки та античастинки перетворювалися однаковим чином. Позначимо такий ізодублет античастинок \bar{N} . Для його знаходження, поступимо так. Знайдемо унітарне перетворення, що переводить матриці τ_i^* у τ_i . Оскільки

$$\tau_i^* = \tau_i \quad i = 1, 3 \quad \text{та} \quad \tau_2^* = -\tau_2,$$

то з властивості $\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}$ випливає, що

$$\tau_i^* = -\tau_2 \tau_i \tau_2 = -\tau_2^{-1} \tau_i \tau_2,$$

причому матриця τ_2 — унітарна. Таким чином,

$$\hat{U}^*(\varphi) = e^{-i\varphi \mathbf{I}^*} = e^{\tau_2^{-1}(i\varphi \mathbf{I})\tau_2} = \tau_2^{-1} \hat{U}(\varphi) \tau_2,$$

звідки отримуємо

$$(\tau_2 \tilde{N})' = \hat{U}(\varphi)(\tau_2 \tilde{N}).$$

З останньої рівності випливає, що з точністю до довільного фазового множника α , спіно́р $\tau_2 \tilde{N}$ співпадає з \bar{N} , тобто

$$\bar{N} = \alpha \tau_2 \tilde{N}, \quad |\alpha| = 1.$$

Зручно покласти $\alpha = i$. Тоді

$$\bar{N} = i\tau_2 \tilde{N} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Мультиплети мезонів. Для побудови мезонних ізомультиплетів скористаємося їх кварковим складом. Кожен мезон складається з кварку та антикварку. За своїми трансформаційними властивостями дублети $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ та $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ абсолютно рівноправні. Що ж до дублету антикварків, то, за аналогією з нуклонами, визначимо цей ізодублет як

$$p \rightarrow u, \quad n \rightarrow d \quad \Rightarrow \quad \bar{q} = -\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Додатковий фазовий множник -1 вибраний для того, щоб означення дублету антикварків узгоджувалося з означенням (13). Дійсно, оскільки $\bar{p} = \bar{u}\bar{d}$, $\bar{n} = \bar{u}\bar{d}$, то при виборі фазового множника як в (14) маємо повну відповідність з (13).

Розглянемо, наприклад, триплет піонів.

$$\begin{aligned} \pi^+ &= u\bar{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = -|1, 1\rangle \\ \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right) = |1, 0\rangle \quad \Rightarrow \quad \pi = \begin{pmatrix} -\pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \\ \pi^- &= d\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = |1, -1\rangle \end{aligned}$$

Тут індекс "1" відноситься до ізотопічного стану кварку, а індекс "2" — до антикварка.

Аналогічно, для мультиплетів ρ , K і \bar{K} -мезонів отримуємо такі вирази

$$\rho = \begin{pmatrix} -\rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^- \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} -\bar{K}^0 \\ \bar{K}^- \end{pmatrix}.$$

Мультиплети баріонів. Оскільки до складу баріонів не входять антикварки, всі компоненти баріонного мультиплету мають той самий відносний фазовий множник "+".

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}.$$

Антибаріони складаються з трьох антикварків. Відносний знак різних компонентів мультиплету залежить від того, скільки разів до нього входить антикварк $\bar{d} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Наприклад

$$\bar{\Delta}^- \equiv \bar{\Delta}^+ = \bar{d}\bar{d}\bar{d} = (-1)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_3 = -|3/2, 3/2\rangle$$

та аналогічно для інших компонентів. В результаті, для антибаріонних ізомultiплетів отримуємо такі вирази:

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} -\bar{\Delta}^+ \\ \bar{\Delta}^0 \\ -\bar{\Delta}^- \\ \bar{\Delta}^{--} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}^+ \\ -\bar{\Sigma}^0 \\ \bar{\Sigma}^- \end{pmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \begin{pmatrix} -\bar{\Xi}^+ \\ \bar{\Xi}^0 \end{pmatrix}.$$

Різний вигляд мультиплетів піонів та Σ -гіперонів пояснюється тим, що піони та антипіони — це ті ж самі частинки. Триплети Σ та $\bar{\Sigma}$ складаються з різних частинок.

Узагальнений принцип Паулі. Розглянемо систему двох частинок, що належать одному ізомultiплету

$$|1, 2\rangle = a_{\tau_1}^\dagger(\alpha) a_{\tau_2}^\dagger(\beta) |0\rangle,$$

де $a_\tau^\dagger(\alpha)$ — оператор народження частинки мультиплету в ізоспінному стані $I_3 = \tau$ і просторово-спінному стані α . Повний ізоспін такої системи можна визначити з узагальненого принципу Паулі, згідно з яким частинки мультиплету розглядаються як тотожні, та відрізняються одна від одної лише проекцією ізоспіну. Перестановка просторових, спінових та ізоспінових координат приводить до перестановки місцями операторів народження, які комутують для бозонів та антикомутують для ферміонів. Таким чином, якщо частинки — бозони, то хвильова функція системи переходить сама у себе, а в разі ферміонів — змінює знак. Наприклад, система $\pi^+\pi^0$ в стані з $l = 2$ (1D стан) має симетричну просторову частину хвильової функції $(-1)^l = +1$ і тому повинна мати симетричну і ізоспінну частину (оскільки π -мезони — бозони). Спінну частину хвильової функції ми не розглядаємо, оскільки спін π -мезонів дорівнює нулю. Ізоспін двопіонної системи може набувати значень $I = 0, 1, 2$. Симетричні ізоспінні стани реалізуються для $I = 0, 2$. Значення $I = 1$ слід виключити, оскільки для даної системи проекція ізоспіну $I_3 = 1$. Отже

$$^1D : \quad I(\pi^+\pi^0) = 2.$$

Лекція 5.

Ізотопічна інваріантність сильних взаємодій.

Численні експериментальні дані говорять про те, що сильна взаємодія інваріантна щодо поворотів в ізотопічному просторі. Тому, якщо знехтувати слабкою і електромагнітною взаємодією, то оператор S -матриці буде комутувати з вектором ізоспіну \mathbf{I} :

$$[S, I_i] = 0 \quad \Rightarrow \quad [S, \mathbf{I}^2] = 0, \quad [S, I_3] = 0, \quad [S, I_{\pm}] = 0.$$

З цих комутаційних співвідношень випливає, що амплітуда переходу між станами з різними значеннями I і I_3 обертається в нуль, а для станів з однаковими I і I_3 — не залежить від I_3 , тобто

$$\langle I, I_3 | S | I', I'_3 \rangle = \mathcal{M}(I) \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3}.$$

Це співвідношення дозволяє встановити зв'язок між перерізами/ймовірностями процесів, що відрізняються один від одного ізотопічними станами частинок, що входять до них. Проілюструємо сказане на деяких прикладах.

Розглянемо процеси піон-нуклонного розсіювання $\pi + N \rightarrow \pi + N$:

$$\begin{array}{ll} \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p, & \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n & (\sigma_1) \\ \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n, & \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p & (\sigma_2) \\ \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, & \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n & (\sigma_3) \\ \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p, & \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n & (\sigma_4) \\ \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n, & \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p & (\sigma_5) \end{array}$$

У дужках вказані перерізи відповідних процесів. Десять каналів реакції розбиті на п'ять пар, в кожену з яких входять процеси з рівними перерізами¹¹. Рівність перерізів для кожної з пар випливає з того, що відповідні реакції ізотопічно дуальні одна одній: одна реакція перетворюється в іншу шляхом заміни кожної з частинок на ізотопічно дуальну, тобто таку, що належить тому ж мультиплету, але має протилежну проекцію ізоспіну. Інакше кажучи, одна реакція перетворюється на іншу шляхом інверсії в ізотопічному просторі. При такому перетворенні гамільтоніан сильних взаємодій залишається незмінним, що забезпечує рівність перерізів.

Для знаходження співвідношень між перерізами $\sigma_1 - \sigma_5$, випишемо ізотопічну частину хвильових функцій початкових та кінцевих станів. Нагадаємо, що

$$\pi^+ = -|1, 1\rangle, \quad \pi^0 = |1, 0\rangle, \quad \pi^- = |1, -1\rangle.$$

За таблицею Клебша-Гордона (див. додаток 2, стор.75) знаходимо:

$$\begin{aligned} |\pi^0 p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, 1/2\rangle, & |\pi^- p\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle, \\ |\pi^+ n\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2\rangle, & |\pi^0 n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle, \\ |\pi^+ p\rangle &= -|3/2, 3/2\rangle, & |\pi^- n\rangle &= |3/2, -3/2\rangle. \end{aligned}$$

В результаті для амплітуд переходу отримуємо такі значення

$$\langle \pi^0 p | S | \pi^0 p \rangle = \frac{2}{3} \mathcal{M}(3/2) + \frac{1}{3} \mathcal{M}(1/2), \quad \langle \pi^- p | S | \pi^- p \rangle = \frac{1}{3} \mathcal{M}(3/2) + \frac{2}{3} \mathcal{M}(1/2),$$

¹¹Переріз реакції, звісно, залежить від енергії частинок, що зіштовхуються, та від їх поляризації. Тому, коли ми говоримо про рівність перерізів різних реакцій, то припускається, що відповідні процеси йдуть за однакових умов.

$$\langle \pi^0 n | S | \pi^- p \rangle = -\langle \pi^+ n | S | \pi^0 p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (\mathcal{M}(3/2) - \mathcal{M}(1/2)), \quad \langle \pi^+ p | S | \pi^+ p \rangle = \mathcal{M}(3/2).$$

Оскільки перерізи процесів пропорційні квадрату модуля амплітуди, то

$$\sigma_1 = A_{3/2}, \quad \sigma_2 = \sigma_5 = \frac{2}{9} (A_{3/2} + A_{1/2} - 2A_c),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{9} (A_{3/2} + 4A_{1/2} + 4A_c), \quad \sigma_4 = \frac{1}{9} (4A_{3/2} + A_{1/2} + 4A_c),$$

де величини $A_{3/2}$, $A_{1/2}$ і A_c пропорційні $|\mathcal{M}(3/2)|^2$, $|\mathcal{M}(1/2)|^2$ і $\Re(\mathcal{M}(3/2)\mathcal{M}^*(1/2))$ відповідно. Виключаючи ці невідомі, знаходимо два співвідношення:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2 + 2\sigma_4, \quad \sigma_2 = \sigma_5.$$

Остання рівність $\sigma_2 = \sigma_5$ є наслідком принципу детальної рівноваги: реакції $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$, $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$ та $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$, $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$ отримуються одна з одної операцією оберненням часу.

Наголосимо зайвий раз, що співвідношення, що отримуються з принципу ізотопічної інваріантності, виконуються лише у випадку сильної взаємодії.

В якості наступного прикладу розглянемо реакції типу $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$:

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\rightarrow \pi^+ + \pi^-, & n + \bar{n} &\rightarrow \pi^+ + \pi^-, & (\sigma_1) \\ p + \bar{p} &\rightarrow \pi^0 + \pi^0, & n + \bar{n} &\rightarrow \pi^0 + \pi^0, & (\sigma_2) \\ n + \bar{p} &\rightarrow \pi^0 + \pi^-, & p + \bar{n} &\rightarrow \pi^+ + \pi^0, & (\sigma_3) \end{aligned} \quad (15)$$

Для піон-піонного та нуклон-нуклонного станів отримуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} |\pi^0 \pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0\rangle, \quad |\pi^- \pi^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|2, -1\rangle - |1, -1\rangle), \quad |\pi^0 \pi^-\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|2, -1\rangle + |1, -1\rangle), \\ |\pi^- \pi^+\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{6}} |2, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0\rangle, \quad |\pi^+ \pi^-\rangle = -\sqrt{\frac{1}{6}} |2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0\rangle, \\ |p\bar{p}\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{2}} (|0, 0\rangle + |1, 0\rangle), \quad |n\bar{p}\rangle = -|1, -1\rangle. \end{aligned}$$

Тут було враховано, що

$$\bar{n} = |1/2, 1/2\rangle, \quad \bar{p} = -|1/2, -1/2\rangle.$$

Взявши скалярні добутки цих станів із оператором S -матриці, отримуємо амплітуди переходу

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle \pi^- \pi^+ | S | p\bar{p} \rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} \mathcal{M}(0) - \frac{1}{2} \mathcal{M}(1), \quad A_2 = \langle \pi^+ \pi^- | S | p\bar{p} \rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} \mathcal{M}(0) + \frac{1}{2} \mathcal{M}(1); \\ B_1 &= \langle \pi^- \pi^0 | S | n\bar{p} \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \mathcal{M}(1), \quad B_2 = \langle \pi^0 \pi^- | S | n\bar{p} \rangle = -\sqrt{\frac{1}{2}} \mathcal{M}(1); \\ C &= \langle \pi^0 \pi^0 | S | p\bar{p} \rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} \mathcal{M}(0). \end{aligned}$$

Оскільки двопіонні стани $|\pi^+ \pi^-\rangle$ та $|\pi^- \pi^+\rangle$ експериментально тотожні (також як і стани $|\pi^0 \pi^-\rangle$ і $|\pi^- \pi^0\rangle$), то повний переріз процесу $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (або $n + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + \pi^-$) дорівнює сумі перерізів переходу в кожний із цих станів. Тому

$$\sigma_1 = |A_1|^2 + |A_2|^2 = \frac{1}{3} |\mathcal{M}(0)|^2 + \frac{1}{2} |\mathcal{M}(1)|^2, \quad \sigma_2 = \frac{1}{6} |\mathcal{M}(0)|^2, \quad \sigma_3 = |B_1|^2 + |B_2|^2 = |\mathcal{M}(1)|^2.$$

Виключивши з цих виразів невідомі $|\mathcal{M}(0)|$ і $|\mathcal{M}(1)|$, отримуємо таке співвідношення

$$2\sigma_1 = 4\sigma_2 + \sigma_3.$$

Це співвідношення на перерізи є наслідком лише ізотопічної інваріантності ядерних сил. Інші закони збереження можуть додати додаткові обмеження. Наприклад, якщо нуклон-антинуклонне зіткнення йде зі стану з $J = 1$, то з принципу Паулі випливає, що реакції другого рядка (15) неможливі, тобто $\sigma_2 = 0$ (чому?). Якщо ж $J = 0$, то із закону збереження просторової та зарядової парності випливає, що реакції з першого рядка (15) можливі лише за $S(N\bar{N}) = 1$, $L(N\bar{N}) = 1$. Зокрема, якщо розпад нуклеонія $N\bar{N}$ походить зі стану 1S , то жодна з реакцій (15) не можлива під дією сильної взаємодії.

Завдання. Вкажіть можливі канали розпаду дельта-резонансу $\Delta \rightarrow \pi + N$ для різних зарядових станів і знайдіть співвідношення для ймовірностей розпадів за одиницю часу за цим каналам. Чому дорівнює відношення повних ймовірностей розпаду Δ^{++} і Δ^0 резонансів?

Відповідь:
$$\frac{\omega(\Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p)}{\omega(\Delta^+ \rightarrow \pi^+ n)} = 3, \quad \frac{\omega(\Delta^0 \rightarrow \pi^0 n)}{\omega(\Delta^+ \rightarrow \pi^+ n)} = 2; \quad \frac{\omega_{tot}(\Delta^{++})}{\omega_{tot}(\Delta^0)} = 1.$$

Доповнення до завдання. Під час вивчення процесу розсіювання π -мезонів на протонах було виявлено, що при енергії $E_\pi \approx 200$ MeV переріз реакції має яскраво виражений пік (див. Рис.4). Е. Фермі припустив,

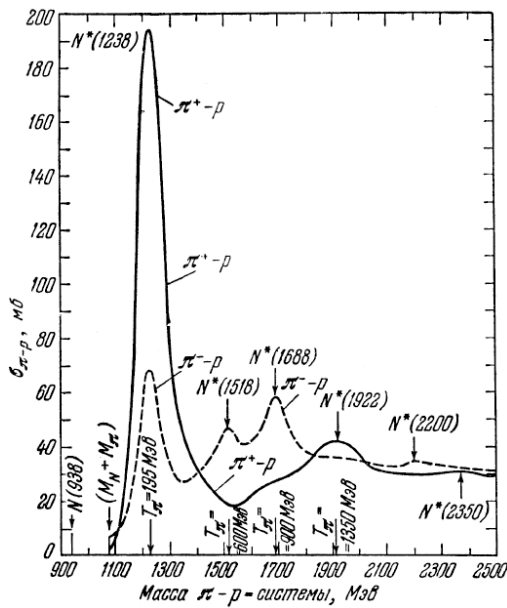


Рис. 4

що великий переріз цього процесу пов'язаний з тим, що розсіювання відбувається через стадію утворення нового (невідомого тоді) резонансу, названого Δ -резонансом¹². Оскільки резонанс спостерігався як для $\pi^- p$ так і для $\pi^+ p$ розсіювання, то зі збереження ізоспіну в сильній взаємодії слідує, що Δ -резонанс повинен мати $I = 3/2$. В цьому випадку, як випливає з результатів завдання, резонанси Δ^{++} і Δ^0 мають однакову повну ймовірність розпаду за одиницю часу. При цьому, оскільки в $\pi^+ p$ і $\pi^- p$ процесах ймовірності утворення Δ^{++} і Δ^0 резонансів відрізняються втричі

$$\frac{\omega(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++})}{\omega(\pi^- p \rightarrow \Delta^0)} = 3$$

то у стільки ж разів повинні відрізнятися і повні перерізи $\pi^+ p$ і $\pi^- p$ реакцій при резонансній енергії, тобто

$$\frac{\sigma(\pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p)} = 3 \quad \text{при } E_\pi \approx 200 \text{ MeV}.$$

Цей висновок добре підтверджується на експерименті.

Ступінь порушення ізотопічної інваріантності. Як відомо, ізотопічна симетрія є порушеною. Це означає, що повний гамільтоніан H системи взаємодіючих частинок не інваріантний щодо поворотів в ізотопічному просторі і представляється у вигляді

$$H = H_0 + H_1,$$

¹²Резонансами називають частинки, що розпадаються під дією сильної взаємодії і тому мають часи життя порядку характерного ядерного часу $\sim 10^{-23}$ с. На експерименті резонанси визначаються за характерним "резонансним" характером кривої перерізу розсіювання.

де H_0 — частина гамільтоніана, що інваріантна відносно групи ізотопічних поворотів $SU_I(2)$, а H_1 — взаємодії, що порушують цю симетрію. Якби симетрія $SU_I(2)$ була б точною, ми б мали $H = H_0$, де

$$[H_0, I_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

З цих рівностей випливає, що оператори H_0 , I^2 і I_3 комутують один з одним і, отже, повинні мати спільний набір власних функцій. Це в свою чергу означає, що всі частинки, що належать одному ізомультиплету, мали б однакову масу (енергію). Доданок H_1 в (16) порушує симетрію $SU_I(2)$ і знімає виродження по масі. Таким чином, міру порушення ізотопічної симетрії можна оцінити за ступенем порушення рівності мас частинок мультиплету. Скориставшись табличними даними, можна зробити висновок, що ступінь порушення симетрії зазвичай становить кілька відсотків. Наприклад,

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} = 0,7 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{m_{\pi^+} - m_{\pi^0}}{m_{\pi^+} + m_{\pi^0}} = 1,7 \cdot 10^{-2}.$$

Приблизно з такою ж самою точністю (помилка в кілька відсотків) слід очікувати виконання наслідків з ізотопічної інваріантності. Зокрема, з такою точністю мають виконуватися співвідношення для перерізів та ймовірностей процесів. Експеримент підтверджує ці висновки.

Вище вважалося, що ізотопічна інваріантність є точною симетрією КХД і порушується лише електромагнітною і слабкою взаємодіями. Однак, як показують експерименти з глибоко непружного розсіювання лептонів, маси u і d кварків різні, причому $m_d > m_u$. Принципово важливо, що ця різниця має не електромагнітне походження. Отже, вже на рівні сильних взаємодій ізотопічна симетрія порушена. Експериментальним підтвердженням цьому є реакція взаємодії двох дейтронів з утворенням ${}^4\text{He}$ і π^0 -мезона:

$$I : \quad \begin{array}{ccccc} d + d & \rightarrow & {}^4\text{He} & + & \pi^0 \\ 0 + 0 & \neq & 0 & + & 1 \end{array},$$

Ця реакція йде під дією сильних взаємодій, але з явним порушенням ізоспіну. Всі подібні реакції сильно подавлені навіть в порівнянні з електромагнітними процесами, що також порушують ізоспін. Наприклад, переріз розглянутої вище реакції має порядок $\sigma \sim 10^{-35} \text{см}^2$ і лежить в області, характерній для слабких взаємодій. Теоретична причина близькості мас u і d кварків (а значить і ізотопічної симетрії) невідома і тому вважається "випадковою".

Лекція 6.

Метод Шмушкевича. Шпуріон.

Метод Шмушкевича. Простий спосіб виведення співвідношень між перерізами реакцій запропонував І.М.Шмушкевич. Цей метод ґрунтується на розгляді так званих ізотопічно неполяризованих пучків частинок. Ізотопічно неполяризований пучок має бути інваріантним щодо будь-яких поворотів в ізотопічному просторі. Зокрема, такий пучок повинен містити однакову кількість частинок одного мультиплету з усіма можливими значеннями I_3 . Так, наприклад, ізотопічно неполяризований пучок піонів складається з рівного числа π^+ , π^0 і π^- -мезонів. Ізотопічна інваріантність сильних взаємодій приводить до того, що при зіткненні двох ізотопічно неполяризованих пучків можуть утворюватися лише ізотопічно неполяризовані пучки. Але з рівності числа частинок з різними значеннями I_3 випливають певні співвідношення на перерізи реакцій, у яких утворюються частинки цього мультиплету.

Розглянемо, наприклад, реакції виду $N + \pi \rightarrow N + \pi$. Починаємо з того, що випишемо всі можливі ізотопічні канали реакції:

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p, & \pi^- + n &\rightarrow \pi^- + n & (\sigma_1) \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n, & \pi^+ + n &\rightarrow \pi^0 + p & (\sigma_2) \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, & \pi^+ + n &\rightarrow \pi^+ + n & (\sigma_3) \\ \pi^0 + p &\rightarrow \pi^0 + p, & \pi^0 + n &\rightarrow \pi^0 + n & (\sigma_4) \\ \pi^0 + p &\rightarrow \pi^+ + n, & \pi^0 + n &\rightarrow \pi^- + p & (\sigma_5) \end{aligned} \quad (17)$$

У разі ізотопічної неполяризованості початкових піонів число π^+ і π^- -мезонів, що утворюються в реакції, пропорційно величині $\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5$, а кінцеве число π^0 -мезонів пропорційно $2(\sigma_2 + \sigma_4)$. Таким чином, умова ізотопічної неполяризованості кінцевих піонів приводить до співвідношення

$$\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5 = 2(\sigma_2 + \sigma_4). \quad (18)$$

Умова ізотопічної неполяризованості кінцевих нуклонів виконується автоматично. Щоб отримати додаткові співвідношення на перерізи, розглянемо обернені в часі реакції (17). За принципом детальної рівноваги перерізи прямих і обернених в часі процесів (17) однакові, тому достатньо змінити напрямок всіх стрілок на протилежний. Умова неполяризованості кінцевих піонів тепер зводиться до рівності

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2(\sigma_4 + \sigma_5). \quad (19)$$

З (18) та (19) отримуємо

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2 + 2\sigma_4, \quad \sigma_2 = \sigma_5.$$

Слабкі нелептонні розпади з $\Delta I = 1/2$. Шпуріон. В слабких взаємодіях ізоспін (і його проекція) не зберігаються. Проте аналіз ізоспінних станів може бути корисним для встановлення співвідношень між ймовірностями розпадів по різних каналах. Розглянемо, наприклад, нелептонний¹³ розпад Ω -гіперона

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^- \quad (\omega_1), \quad \Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0 \quad (\omega_2). \quad (20)$$

¹³Слабкі процеси зазвичай поділяють на три групи: лептонні — в яких беруть участь тільки лептони, напівлептонні — за участю як лептонів, так і адронів, і нелептонні — без участі лептонів.

В обох випадках кінцевий стан є суперпозицією амплітуд з $I = 1/2$ та $I = 3/2$:

$$|\Xi^- \pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle, \quad |\Xi^0 \pi^-\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle. \quad (21)$$

Припустимо, що гамільтоніан слабкої взаємодії влаштований так, що можливі лише переходи з $\Delta I = 0, 1/2$. В цьому випадку (ізоспін Ω -гіперону дорівнює нулю):

$$\langle \Xi^0 \pi^- | S | \Omega^- \rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{M}(1/2), \quad \langle \Xi^- \pi^0 | S | \Omega^- \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \mathcal{M}(1/2).$$

Таким чином, ми б мали $\omega_1/\omega_2 = 2$. Порівнюючи цю величину з результатами експериментів $\omega_1/\omega_2 = 2.7 \pm 0.1$, бачимо, що наше передбачене помітно відрізняється від експериментальної величини. Це означає, що нехтувати переходами з $I = 3/2$, взагалі кажучи, не можна. Однак, в більшості випадків вклад переходів з $\Delta I = 3/2$ сильно подавлений (в 10 - 100 разів) в порівнянні з основним переходом з $\Delta I = 1/2$. В таких випадках подібний розгляд приводить до цілком задовільного узгодження з експериментом.

Замість розгляду амплітуд (21) можна скористатися формальним прийомом, аналогічним до методу Шмушкевича. Для цього введемо в розгляд деяку гіпотетичну (неспостережувану) частинку χ (так званий шпуріон), який має нульові значення енергії, імпульсу, спіна та інші квантові числа, але відмінний від нуля ізоспін $I_\chi = 1/2$. З врахуванням шпуріону процеси (20) можна подати у вигляді реакцій, що йдуть зі збереженням ізоспіну:

$$\Omega^- + \chi^0 \rightarrow \Xi^0 + \pi^- \quad (\omega_1), \quad \Omega^- + \chi^0 \rightarrow \Xi^- + \pi^0 \quad (\omega_2).$$

Шпуріон χ^0 має $I_3 = -1/2$. Для застосування методу Шмушкевича нам потрібно розглянути ізотопічно неполяризований початковий пучок. Для цього доповнимо шпуріон χ^0 його ізотопічним партнером χ^+ з $I_3 = 1/2$.

$$\Omega^- + \chi^+ \rightarrow \Xi^- + \pi^+ \quad (\omega_1), \quad \Omega^- + \chi^+ \rightarrow \Xi^0 + \pi^0 \quad (\omega_2).$$

Умова ізотопічної неполяризованості кінцевих піонів відразу дає $\omega_1 = 2\omega_2$.

Шпуріон можна ввести і інакше, вважаючи, що Ω^- -баріон розпадається на три частинки:

$$\begin{aligned} \Omega^- &\rightarrow \chi^0 + \Xi^0 + \pi^- & (\omega_1), & \quad \Omega^- \rightarrow \chi^0 + \Xi^- + \pi^0 & (\omega_2); \\ \Omega^- &\rightarrow \chi^- + \Xi^- + \pi^+ & (\omega_1), & \quad \Omega^- \rightarrow \chi^- + \Xi^0 + \pi^0 & (\omega_2); \end{aligned}$$

що також приводить до співвідношення $\omega_1 = 2\omega_2$.

Лекція 7.

G -парність.

Певну зарядову парність мають тільки істинно нейтральні частинки. Це сильно обмежує сферу застосування C -парності. Проте, у разі часток, які разом зі своїми анти-частинками входять в один ізомультиплет, операція C -парності може бути узагальнена так, що відносно нового перетворення будуть мати певну парність всі члени мультиплету. Таке перетворення називають узагальненою зарядовою парністю або G -парністю.

За припущенням, всі члени мультиплету $|I, I_3\rangle$ повинні мати певну G -парність. Це можливо, якщо оператори \hat{G} , \hat{I}_3 та \hat{I}^2 попарно комутують (і тому мають спільну систему власних функцій). Для цього достатньо, щоб комутували оператори \hat{G} та \mathbf{I} . В той же час оператор зарядового спряження \hat{C} не комутує з ізоспіном (за винятком випадку $I = 0$). Щоб показати це, розглянемо дію оператора \hat{C} на кварковий ізодублет:

$$\hat{C} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \hat{C}(\alpha u + \beta d) = \alpha \bar{u} + \beta \bar{d} = \begin{pmatrix} -\bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що для ізодублету ми можемо визначити оператор \hat{C} рівністю

$$\hat{C} = -i\tau_2 W,$$

де W — оператор, який змінює знаки всіх адитивних квантових чисел, крім I_3 . Таким чином, отримуємо такі правила комутації

$$\hat{C}I_i\hat{C}^{-1} = \tau_2 I_i \tau_2 = -I_i, \quad i = 1, 3; \quad \hat{C}I_2\hat{C}^{-1} = \tau_2 I_2 \tau_2 = I_2. \quad (22)$$

Такі ж самі комутаційні співвідношення виходять і для інших ізомультиплетів. Справді, стани з ізоспіном I рівним, наприклад, одиниці можна представити у вигляді білінійної комбінації двох ізоспінорів. При цьому

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2, \quad \hat{C} = \hat{C}_1\hat{C}_2, \quad [\hat{C}_1, \hat{C}_2] = 0,$$

звідки випливає, що

$$\hat{C}I_i\hat{C}^{-1} = \hat{C}_1\hat{C}_2(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)_i\hat{C}_1^{-1}\hat{C}_2^{-1} = \hat{C}_1(\mathbf{I}_1)_i\hat{C}_1^{-1} + \hat{C}_2(\mathbf{I}_2)_i\hat{C}_2^{-1} = \varepsilon_i(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)_i = \varepsilon_i I_i,$$

де $\varepsilon_i = -1$ для $i = 1, 3$ і $\varepsilon_i = 1$ для $i = 2$.

Визначимо оператор \hat{G} рівністю: $\hat{G} = \hat{C}\hat{T}$, де \hat{T} — деякий унітарний оператор. Оскільки $\hat{G}I_i\hat{G}^{-1} = \hat{C}(\hat{T}I_i\hat{T}^{-1})\hat{C}^{-1}$, то для комутативності \hat{G} з \mathbf{I} потрібно, щоб оператор \hat{T} задовольняв таким самим комутаційним співвідношенням, як і \hat{C} . Це буде виконано, якщо покласти

$$\hat{T} = e^{i\pi I_2}$$

тобто \hat{T} — оператор повороту в ізотопічному просторі на кут π відносно осі I_2 . При цьому напрямок I_2 залишається незмінним, а два інших змінюються на протилежні: $I_1 \rightarrow -I_1$, $I_3 \rightarrow -I_3$, тобто

$$\hat{T}I_{1,3}\hat{T}^{-1} = -I_{1,3}, \quad \hat{T}I_2\hat{T}^{-1} = I_2.$$

Ці рівності можна перевірити і прямим розрахунком, якщо скористатися формулою

$$e^{\alpha \hat{A}} \hat{B} e^{-\alpha \hat{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \underbrace{[\hat{A}, [\hat{A}, \dots [\hat{A}, \hat{B}] \dots]]}_k$$

і врахувати комутаційні співвідношення $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k$. Таким чином, визначимо операцію G -парності наступною рівністю

$$\hat{G} = \hat{C}e^{i\pi I_2} = e^{i\pi I_2}\hat{C} \Rightarrow [\hat{G}, \mathbf{I}] = 0.$$

Розглянемо тепер дію оператора \hat{G} на піонний триплет. Для цього скористаємося кварковим складом π -мезонів. Оскільки для ізодублету

$$\hat{T} = e^{i\pi\tau_2/2} = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix},$$

то

$$\hat{T}: \quad u \rightarrow -d, \quad d \rightarrow u; \quad \bar{u} \rightarrow -\bar{d}, \quad \bar{d} \rightarrow \bar{u}.$$

Таким чином, під дією перетворення G -парності u і d кварки перетворюються за правилом:

$$\hat{G}: \quad u \rightarrow -\bar{d}, \quad d \rightarrow \bar{u}; \quad \bar{u} \rightarrow -d, \quad \bar{d} \rightarrow u.$$

Аналогічним чином перетворюються і оператори народження та знищення кварків у різних ізотопічних станах

$$\hat{G}a_u^\dagger\hat{G}^{-1} = -b_d^\dagger, \quad \hat{G}b_u^\dagger\hat{G}^{-1} = -a_d^\dagger, \quad \hat{G}a_d^\dagger\hat{G}^{-1} = b_u^\dagger, \quad \hat{G}b_d^\dagger\hat{G}^{-1} = a_u^\dagger.$$

Використовуючи ці співвідношення, знаходимо

$$\hat{G}\pi^+ = \hat{G}a_u^\dagger(\alpha)b_d^\dagger(\beta)|0\rangle = -b_d^\dagger(\alpha)a_u^\dagger(\beta)|0\rangle = a_u^\dagger(\beta)b_d^\dagger(\alpha)|0\rangle. \quad (23)$$

В останній рівності ми врахували антикомутативність ферміонних операторів a та b . Індeksi α, β позначають просторово-спінові стани кварків.

Подіємо на рівність (23) оператором Π_{12} перестановки просторових і спінових координат двох кварків.

$$\Pi_{12}\hat{G}\pi^+ = \Pi_{12}a_u^\dagger(\beta)b_d^\dagger(\alpha)|0\rangle = a_u^\dagger(\alpha)b_d^\dagger(\beta)|0\rangle = \pi^+.$$

З іншого боку, враховуючи комутативність операторів Π_{12} і \hat{G} , маємо

$$\Pi_{12}\hat{G}\pi^+ = \hat{G}\Pi_{12}\pi^+ = \hat{G}[(-1)^{l+S+1}\pi^+] = \pi^+,$$

звідки слідує

$$\hat{G}\pi^+ = (-1)^{l+S+1}\pi^+. \quad (24)$$

Аналогічно,

$$\hat{G}\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{G}[a_u^\dagger(\alpha)b_u^\dagger(\beta) - a_d^\dagger(\alpha)b_d^\dagger(\beta)]|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[b_d^\dagger(\alpha)a_d^\dagger(\beta) - b_u^\dagger(\alpha)a_u^\dagger(\beta)]|0\rangle.$$

$$\Pi_{12}\hat{G}\pi^0 = \pi^0 \Rightarrow \hat{G}\pi^0 = (-1)^{l+S+1}\pi^0 \quad (25)$$

і таке ж співвідношення для π^- -мезона. Те, що для всіх частинок піонного триплету G -парність має одне й те ж значення не є випадковим: у межах одного мультиплету всі частинки завжди мають однакову G -парність (якщо вона визначена). Це наслідок комутативності операторів \hat{G} і \mathbf{I} . Справді, нехай для деякої частинки $a = |I, I_3\rangle$ мультиплету G -парність дорівнює g_a , тобто $\hat{G}|I, I_3\rangle = g_a|I, I_3\rangle$. Тоді, з $[\hat{G}, I_\pm] = 0$ знаходимо

$$\hat{G}I_\pm|I, I_3\rangle = I_\pm\hat{G}|I, I_3\rangle \quad \text{або} \quad \hat{G}|I, I_3\pm 1\rangle = g_a|I, I_3\pm 1\rangle,$$

тобто сусідні частинки мультиплету мають ту саму G -парність.

Розглянемо тепер частинку з ізоспіном нуль, наприклад, ω -мезон.

$$\hat{G}\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{G}[a_u^\dagger(\alpha)b_u^\dagger(\beta) + a_d^\dagger(\alpha)b_d^\dagger(\beta)]|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_d^\dagger(\alpha)a_d^\dagger(\beta) + b_u^\dagger(\alpha)a_u^\dagger(\beta)]|0\rangle.$$

$$\Pi_{12}\hat{G}\omega = -\omega \Rightarrow \hat{G}\omega = (-1)^{l+S}\omega. \quad (26)$$

З співвідношень (24) - (26) випливає, що для G -парності π -, ω -, а також ρ -, η -, η' - і ϕ -мезонів виконується рівність

$$\hat{G} = (-1)^{l+S+I}, \quad (27)$$

де слід покласти $l = 0$, $S = J$. Істинно нейтральні мезони (π^0 , ρ^0 , ω , η -, η' - і ϕ) інваріантні щодо операцій \hat{C} і \hat{T} окремо. Оскільки для них $\hat{T}\psi = (-1)^I\psi$ (це співвідношення називається теоремою Кролла - Фолді), то з (27) для зарядової парності отримуємо наступний вираз

$$\varepsilon_C = (-1)^{l+S}. \quad (28)$$

Формулу (28) нескладно отримати і безпосередньо з узагальненого принципу Паулі для істинно нейтрального мезону.

Замість кваркового дублету $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ ми могли б розглянути нуклонний дублет $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$.

Аналогом розглянутих вище мезонних станів тепер є система $N\bar{N}$ в станах з певними значеннями I та I_3 :

$$|1, 1\rangle = p\bar{n}, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} - n\bar{n}), \quad |1, -1\rangle = -n\bar{p}, \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} + n\bar{n}).$$

Вираз (27), очевидно, залишається вірним і в цьому випадку.

G -парність, як і зарядова парність — величина мультиплікативна. Наприклад, у випадку двох частинок a і b

$$\hat{C} = \hat{C}_a\hat{C}_b, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b \Rightarrow G = \hat{C}e^{i\pi I_2} = \hat{C}_a\hat{C}_be^{i(I_2)_a}e^{i\pi(I_2)_b} = \hat{G}_a\hat{G}_b.$$

Тому, наприклад, G -парність системи з n піонів дорівнює $(-1)^n$.

Оскільки електромагнітна взаємодія не інваріантна щодо ізотопічних поворотів, то G -парність зберігається лише у випадку сильної взаємодії. При цьому ми отримуємо деякі додаткові правила відбору по G -парності. Як приклад розглянемо анігіляцію нуклеонія $N\bar{N}$ в n піонів.

Для збереження G -парності необхідно виконання умови

$$(-1)^{l+S+I} = (-1)^n.$$

Доповнивши це співвідношення законами збереження P -парності та кутового моменту, отримуємо наступні обмеження на мінімальну кількість піонів, що утворюються при анігіляції нуклеонія зі стану 1S :

$$N\bar{N} \rightarrow \begin{cases} 3\pi & , \quad I = 1 \\ 4\pi & , \quad I = 0 \end{cases}. \quad (29)$$

Лекція 8.

Група $SU(3)$ та її незвідні представлення.

Огляд груп $SU(n)$. $SU(n)$ — спеціальна унітарна група, елементами якої є унітарні матриці порядку n з детермінантом одиниця (S — спеціальна, визначник одиниця; U — унітарна). Будь-яка унітарна матриця U може бути представлена у вигляді $U = e^{-iH}$, де H — ермітова матриця. Тоді з умови $\det U = 1$ випливає, що $\text{Tr } H = 0$. Оскільки існує $n^2 - 1$ незалежних ермітових матриць $n \times n$ з нульовим слідом, то довільний елемент групи $SU(n)$ можна записати у вигляді

$$U = \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^{n^2-1} \varphi_k F_k \right\}$$

де φ_k — дійсні числа, а F_k — лінійно незалежні ермітові матриці з нульовим слідом. Найменша кількість дійсних параметрів, за допомогою яких можна задати будь-який елемент групи називається порядком (розмірністю) групи. В даному випадку такими параметрами є величини φ_k , отже порядок групи $SU(n)$ дорівнює $n^2 - 1$. Матриці F_k називаються генераторами групи, а максимальне число генераторів, що попарно комутують, називається рангом групи. В теорії груп доводиться, що ранг групи $SU(n)$ дорівнює $n - 1$. З генераторів групи можна побудувати такі оператори C_i , які комутують з усіма генераторами. Ці оператори називають операторами Казиміра. Число операторів Казиміра дорівнює рангу групи. З лема Шура¹⁴ слідує, що для будь-якого незвідного представлення оператори Казиміра C_i кратні одиничному, тобто $C_i = \lambda_i E$, де E — одиничний оператор. Константи λ_i для різних представлень різні. Ці константи визначають представлення групи з точністю до ізоморфізму. Наприклад, в групі $SU(2)$ існує лише один оператор Казиміра

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = j(j+1)E$$

де J_i — оператори моменту (генератори групи $SU(2)$). Базисні функції незвідних представлень є водночас і власними функціями оператора Казиміра \mathbf{J}^2 . Тому, вказавши значення $j(j+1)$ (або, що те ж саме, j), ми однозначно фіксуємо незвідне представлення. В загальному випадку незвідне представлення групи $SU(n)$ задається $n-1$ числами.

Група $SU(3)$. Визначальне представлення цієї групи задається матрицями Гелл-Мана λ_i порядку 3×3 :

$$U(\varphi_1, \dots, \varphi_8) = \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^8 \varphi_k F_k \right\}$$

де $F_i = \frac{1}{2} \lambda_i$ — генератори групи $SU(3)$, λ_i — матриці Гелл-Мана (див. Таблицю 1), що нормовані умовою

$$\text{Tr} (\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}.$$

Генератори групи задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[F_i, F_j] = if_{ijk} F_k, \quad \{F_i, F_j\} = \frac{1}{3} \delta_{ij} + d_{ijk} F_k,$$

¹⁴Лема Шура. Нехай T_g — довільне незвідне представлення групи $G = \{g\}$. Тоді, якщо матриця A комутує з усіма матрицями T_g , то вона кратна одиничній, тобто $A = \lambda E$.

де f_{ijk} і d_{ijk} — структурні константи групи $SU(3)$, що утворюють повністю антисиметричний (f_{ijk}) і симетричний (для d_{ijk}) тензори. Їхні ненульові компоненти наведено у таблиці 2.

Таблиця 1. Матриці Гелл-Мана

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таблиця 2. Структурні константи f_{ijk} та d_{ijk} групи $SU(3)$

ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}
123	1	246	$\frac{1}{2}$	367	$-\frac{1}{2}$	118	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	247	$-\frac{1}{2}$	355	$\frac{1}{2}$	558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
147	$\frac{1}{2}$	257	$\frac{1}{2}$	458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	146	$\frac{1}{2}$	256	$\frac{1}{2}$	366	$-\frac{1}{2}$	668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
156	$-\frac{1}{2}$	345	$\frac{1}{2}$	678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	157	$\frac{1}{2}$	338	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	377	$-\frac{1}{2}$	778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
						228	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	344	$\frac{1}{2}$	448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	888	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Структурні константи мають такі властивості (за індексами що повторюються виконується підсумовування)

$$f_{ijk}f_{lmk} + f_{jlk}f_{imk} + f_{lik}f_{jmk} = 0, \quad d_{ijk}f_{lmk} + d_{jlk}f_{imk} + d_{lik}f_{jmk} = 0, \quad f_{ijk}f_{ijl} = 3\delta_{kl}.$$

Ранг групи $SU(3)$ дорівнює двом. Це означає, що існує два генератора, що комутують між собою (для матриць Гелл-Мана це F_3 і F_8), які можна одночасно привести до діагонального виду. Крім того, в групі є два оператори Казимира $C_{1,2}$, що комутують з будь-яким генератором групи:

$$C_1 \equiv \sum_i F_i^2 = -\frac{2i}{3} \sum_{ijk} f_{ijk} F_i F_j F_k, \quad C_2 \equiv \sum_{ijk} d_{ijk} F_i F_j F_k.$$

Замість операторів F_i зручно ввести наступні оператори зсуву, згідно означення:

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2, \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5, \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7,$$

$$I_3 = F_3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8.$$

Оскільки оператори I_3 і Y комутують, вони мають спільний набір власних функцій $|m, y\rangle$:

$$I_3|m, y\rangle = m|m, y\rangle, \quad Y|m, y\rangle = y|m, y\rangle.$$

Комутаційні співвідношення для операторів I_{\pm} , V_{\pm} , U_{\pm} , I_3 і Y мають вигляд:

$$[I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm}, \quad [Y, I_{\pm}] = 0, \quad [I_+, I_-] = 2I_3; \quad (30)$$

$$[I_3, U_{\pm}] = \mp \frac{1}{2} U_{\pm}, \quad [Y, U_{\pm}] = \pm U_{\pm}, \quad [U_+, U_-] = \frac{3}{2} Y - I_3 \equiv 2U_3; \quad (31)$$

$$[I_3, V_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} V_{\pm}, \quad [Y, V_{\pm}] = \pm V_{\pm}, \quad [V_+, V_-] = \frac{3}{2} Y + I_3 \equiv 2V_3; \quad (32)$$

$$[I_+, V_+] = [I_+, U_-] = [U_+, V_+] = 0, \quad [I_+, V_-] = -U_-, \quad [I_+, U_+] = V_+, \quad [U_+, V_-] = I_-. \quad (33)$$

З комутаційних співвідношень (30) слідує, що оператори I_{\pm} змінюють m на одиницю, але залишають незмінним y , тобто¹⁵

$$I_{\pm}|m, y\rangle \sim |m \pm 1, y\rangle. \quad (34)$$

Дійсно, діючи на перше співвідношення (30) вектором $|m, y\rangle$, отримуємо

$$I_3(I_{\pm}|m, y\rangle) = (m \pm 1)(I_{\pm}|m, y\rangle),$$

тобто стан $I_{\pm}|m, y\rangle$ є власною функцією оператора I_3 з власним значенням $m \pm 1$. Аналогічно, друге співвідношення (30) приводить до умови

$$Y(I_{\pm}|m, y\rangle) = y(I_{\pm}|m, y\rangle).$$

Таким чином, вектор $I_{\pm}|m, y\rangle$ є власним вектором операторів I_3 і Y з власними значеннями $(m \pm 1)$, y і тому збігається з вектором $|m \pm 1, y\rangle$ (з точністю до нормувального множника).

Аналогічно, з (31) і (32) випливають співвідношення

$$V_{\pm}|m, y\rangle \sim |m \pm 1/2, y \pm 1\rangle, \quad (35)$$

$$U_{\pm}|m, y\rangle \sim |m \mp 1/2, y \pm 1\rangle. \quad (36)$$

Дію операторів зсуву можна зобразити графічно у вигляді діаграми (Рис. 5). Всі ці оператори, діючи на функції $|m, y\rangle$, переводять їх у себе. Значить функції $|m, y\rangle$

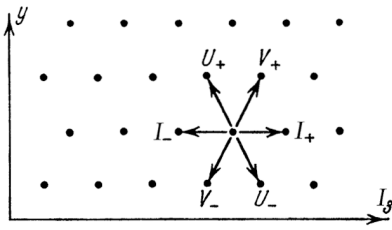


Рис. 5

утворюють базис деякого представлення. Будемо зображати незвідні представлення у вигляді точок на діаграмі (m, y) . Тоді, якщо представлення скінченновимірне, то йому буде відповідати скінченне число точок. Представлення буде визначено, якщо ми вкажемо на діаграмі точки, що йому відповідають, і знайдемо скільки разів займається кожна з них (одній точці на діаграмі може відповідати декілька функцій).

Незвідному представленню відповідає опукла фігура на діаграмі (m, y) ¹⁶. Справді, припустимо, що це не так, і що границя має вигляд як на Рис. 6 (внутрішня область лежить зліва). Позначимо ψ_A стан, що відповідає точці A : $\psi_A = V_- \psi_B$. Якщо існує стан ψ_C , то ми будемо мати $U_+ \psi_C = \lambda \psi_A$. Тому

$$\lambda(\psi_A, \psi_A) = (V_- \psi_B, U_+ \psi_C) = (\psi_B, V_+ U_+ \psi_C) = (\psi_B, [V_+, U_+] \psi_C) = 0,$$

оскільки $[V_+, U_+] = 0$ і $V_+ \psi_C = 0$. Це означає, що стану, що відповідає точці C , не існує, тобто зовнішня межа діаграми може бути лише опуклою. При доведенні ми припускали, що кожній точці на границі області відповідає єдиний стан. Щоб показати це розглянемо стан ψ_M з найбільшим значенням m . Такий стан єдиний, тобто не може бути двох різних значень y , для яких $m = m_{max}$ (інакше діаграма була б опуклою). Застосування

¹⁵Символ \sim означає "з точністю до нормувального множника".

¹⁶З незвідності представлення випливає, що всі точки діаграми можуть бути отримані з однієї (довільної) точки дією на неї операторів зсуву. Зокрема неможливі "острівні" діаграми, що складаються з декількох незв'язних частин.

оператора V_- до стану ψ_M дає стан ψ_N . Цей стан єдиний: стан $U_-I_- \psi_M$ не є лінійно незалежним, оскільки

$$U_-I_- \psi_M = [U_-, I_-] \psi_M = V_- \psi_M = \psi_N.$$

Можна показати, що яку б траєкторію на ґратці ми б не взяли, результат залишається тим самим. Аналогічно доводиться, що стан ψ_B також єдиний, як і взагалі всі стани, що знаходяться на межі діаграми.

Межу діаграми можна визначити, якщо до стану ψ_M багаторазово застосовувати оператор V_- . Цим оператором діятимемо доти, доки не отримаємо нуль. Нехай $(V_-)^{p+1} \psi_M = 0$. Після того, як досягнуто стан $(V_-)^p \psi_M$, ми можемо рухатися вздовж нижньої межі діаграми, послідовно застосовуючи до стану $(V_-)^p \psi_M$ оператор I_- , поки не досягнемо наступного кута, де $(I_-)^{q+1} = V_-$. В теорії груп доводиться, що завдання чисел p і q однозначно визначає межу області. Діаграма, що при цьому отримується, має наступні властивості:

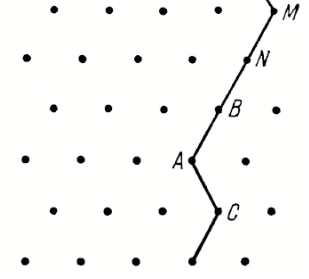


Рис. 6

1. Область може бути шестикутником, який визначається значеннями p і q , або трикутником, якщо p або $q = 0$.
2. Діаграма симетрична відносно осі OY і симетрична відносно поворотів на кут 120° навколо точки O (центр діаграми), Рис. 7.
3. Кожній граничній точці відповідає один стан; кожній точці першого після межі шару — по два стани; наступному за ним шестикутнику — по три стани і т.д., доки не дійдемо до трикутного шару. Далі, при просуванні вглиб, кратність станів не змінюється і залишається рівною $a + 1$, де $a = \min(p, q)$, Рис. 8.

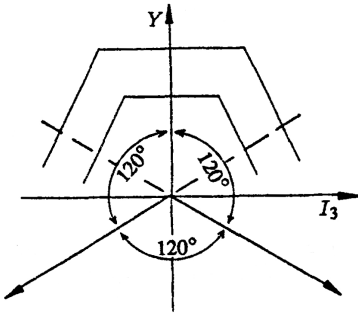


Рис. 7

Таким чином, незвідні представлення групи $SU(3)$ задаються парою чисел p, q (за кількістю операторів Казіміра), причому розмірність N цього представлення визначається формулою

$$N = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2).$$

Внутрішнім точкам діаграми відповідає, взагалі кажучи, кілька станів. Щоб розрізняти різні функції, що відповідають одній точці на діаграмі, потрібно ввести додаткові позначення. Для цього скористаємося такою обставиною. Як відомо, група $SU(2)$ є підгрупою групи $SU(3)$. З комутаційних співвідношень для генераторів F_i групи $SU(3)$ слідує, що оператори F_1, F_2 і F_3 мають комутаційні співвідношення виду

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k, \quad I_i \equiv F_i, \quad i = 1, 2, 3$$

тобто такі ж, як для генераторів групи $SU(2)$. Будемо називати цю підгрупу групою I -спіну. Аналогічно операторам I_i ми можемо ввести ще два набори операторів U_i і V_i :

$$U_i : U_1 = F_6, U_2 = F_7, U_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}F_8 + F_3) \Rightarrow [U_i, U_j] = i\epsilon_{ijk} U_k;$$

$$V_i : V_1 = F_4, V_2 = F_5, V_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}F_8 - F_3) \Rightarrow [V_i, V_j] = i\epsilon_{ijk} V_k;$$

які є генераторами ще двох підгруп $SU(2)$. Будемо називати ці підгрупи групами U - та V -спіну. Зокрема, введені раніше оператори U_\pm, V_\pm і I_\pm є зсувними операторами для груп U -, V - і I -спіну.

Розглянемо тепер вироджені стани, що мають однакові значення m і y . Візьмемо якийсь горизонтальний ряд діаграми (p, q) (тобто точки з однаковими значеннями y , але різними m). Всі ці базисні функції під дією операторів I_{\pm} і I_3 перетворюються одна через одну, а значить утворюють деяке представлення групи I -спіна. Позначимо через M — максимальне значення m для цього рядка діаграми. Оскільки величина m є власним значенням оператора I_3 , то стан ψ_M , що відповідає граничній точці з $m = M$, має бути власною функцією оператора I^2 з $I = M$ і $I_3 = M$.¹⁷ Подіявши на цю функцію зсувним оператором I_- , отримаємо $2M + 1$ функцій з $I = M$ та $I_3 \in [-M, M]$. Відкинемо ці $2M + 1$ станів. Якщо ряд не був граничним, то стани, що залишилися, будуть утворювати внутрішній (по відношенню до початкового) ряд зі значеннями m в межах від $-M + 1$ до $M - 1$, причому крайнім точкам (з $m = \pm(M - 1)$) тепер буде відповідати один стан (спочатку ці точки були двократно вироджені). Ці стани мають значення проекції $I_3 = \pm(M - 1)$. Оскільки ці крайні стани не можуть мати значення I -спіне рівне M ¹⁸, то вони повинні мати $I = M - 1$ (позначимо цей стан $\psi_{M-1, M-1}$). Далі повторюється виконана раніше процедура: діючи на функцію $\psi_{M-1, M-1}$ оператором I_- виділяємо $2(M - 1) + 1$ станів з $I = M - 1$ і $I_3 \in [-M + 1, M - 1]$. Відкинемо ці стани. Якщо даний рядок діаграми спочатку містив триразово вироджені стани, то функціям, що залишилися, будуть відповідати точки ряду з $m \in [-M + 2, M - 2]$. Функція з $m = M - 2$ (єдина) повинна мати $I = M - 2$. Діючи на неї операторами I_- виділяємо $2(M - 2) + 1$ функцій з $I = M - 2$ і т.д. Процедура триває доти, доки не вичерпуються усі стани. Таким чином, вироджені стани, що відповідають внутрішнім точкам деякого ряду з $Y = Y_0$ можна відрізняти за величиною I -спіну (Рис. 9). Замість I -спіну ми могли б відрізняти вироджені стани за величиною U - або V -спіну. Для цього потрібно було б розглядати діагональні ряди (рядки, вздовж яких діють оператори зсуву U_{\pm} або V_{\pm}).

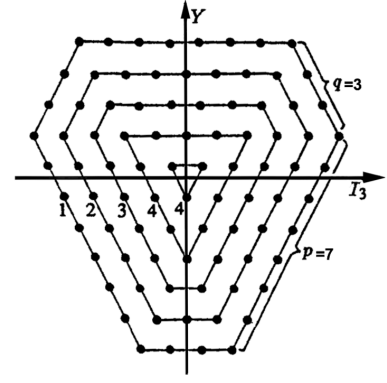


Рис. 8

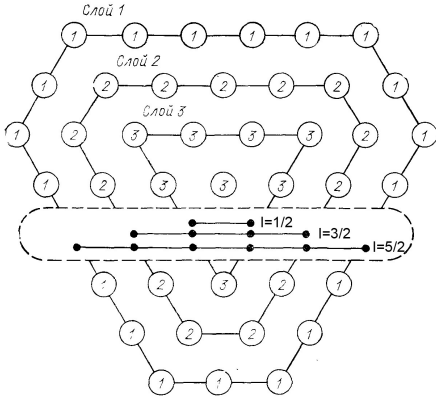


Рис. 9

Спряжене представлення. Як відомо з теорії груп, з будь-якого представлення з матрицями D можна отримати інше представлення (іноді еквівалентне початковому), матрицями якого будуть матриці D^* (комплексно спряжені до D). Таке представлення називається спряженим до представлення D . Для групи $SU(3)$ представлення, що спряжене до діаграми (p, q) , дається діаграмою (q, p) . Дійсно, якщо $|m, y\rangle$ — власні функції операторів I_3 і Y з власними значеннями m, y , то $|m, y\rangle^*$ будуть власними функціями операторів I_3^* і Y^* з тими ж власними значеннями. При цьому оператори $(I_{\pm})^*$, $(U_{\pm})^*$, $(V_{\pm})^*$ будуть діяти на стани $|m, y\rangle^*$

аналогічно (34) – (36). Однак, генератори \tilde{F}_i у новому представленні не співпадають з

¹⁷Оскільки $[I^2, Y] = [I^2, I_3] = 0$, то всі власні функції можна вибрати так, щоб вони були також і власними функціями оператора I^2 .

¹⁸Дійсно, нехай серед функцій внутрішнього ряду є стан з $\tilde{\psi}_{M, m}$ з $I = M$ і $I_3 = m$. Подіємо на цей вектор оператором I_+ , доки не отримаємо стан $\tilde{\psi}_{M, M}$ з $I = M$ і $I_3 = M$. Стан з $\tilde{\psi}_{M, M}$ відмінне від $\psi_{M, M}$ і належить граничній точці діаграми. Отже, якщо стан з $\tilde{\psi}_{M, M}$ існує, то граничній точці має відповідати принаймні два різні (лінійно незалежні) стани, що невірно.

F_i^* . За означенням, вектор перетворюється за законом

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i \sum \varphi_i F_i} \psi. \quad (37)$$

Взявши комплексне спряження від (37), отримаємо

$$\tilde{\psi}' = e^{i \sum \varphi_i F_i^*} \tilde{\psi} = e^{-i \sum \varphi_i \tilde{F}_i} \tilde{\psi}$$

де $\tilde{\psi} = \psi^*$, $\tilde{F}_i = -F_i^*$ — генератори в спряженому представленні. Таким чином, $\tilde{F}_i = -F_i^*$ і, відповідно

$$\tilde{I}_3 |m, y\rangle^* = -m |m, y\rangle^*, \quad \tilde{Y} |m, y\rangle^* = -y |m, y\rangle^*.$$

Діаграма спряженого представлення отримується з діаграми (p, q) перетворенням інверсії. Оскільки будь-яка діаграма симетрична відносно осі Y , то інверсія еквівалентна відображенню відносно горизонтальної осі I_3 . Діаграма, що отримується при цьому, збігається з діаграмою представлення (q, p) :

$$(p, q)^* = (q, p).$$

Представлення виду (p, p) при цьому не змінюються, що означає еквівалентність представлень (p, p) та $(p, p)^*$.

Іноді зручно представлення (p, q) позначати їх розмірностями \mathbf{N} . При цьому комплексно спряжене представлення позначається як \mathbf{N}^* . Прийнято позначати через \mathbf{N} представлення (p, q) з $p > q$. Наприклад, $(3, 0) = \mathbf{10}$, а $(0, 3) = \mathbf{10}^*$.

Розклад прямого добутку представлень на незвідні складові. Для розкладання прямого добутку представлень на незвідні складові скористаємося графічним методом. Для того щоб виконати добуток представлення a (якому відповідає діаграма A) на представлення b (з діаграмою B) потрібно на кожную точку діаграми

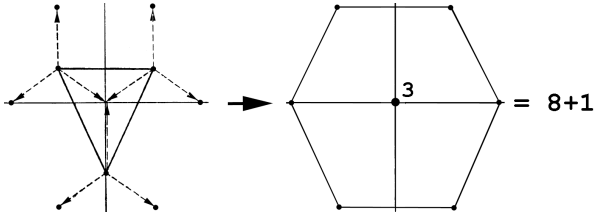


Рис. 10

A накласти на всю діаграму B таким чином, щоб її центр збігався з цією точкою. При цьому на точки діаграми A з кратністю k діаграма B накладається k разів. В результаті отримаємо деяку сукупність точок, що породжується всіма точками діаграми B з урахуванням їхньої кратності (точки вихідної діаграми A при цьому не враховуються). Після цього, з фігури, що

утворилася, послідовно виділяються найбільші за величиною шестикутники (трикутники) і відкидаються точки (з урахуванням їхньої кратності), що відповідають даній шестикутній (трикутній) діаграмі. Ця процедура триває доти, доки не будуть відкинуті всі точки. Представлення, що відповідають відкинутим діаграм, і є шуканими компонентами розкладу. Зазначимо, що результат розкладу на незвідні складові не залежить від того, яке з двох представлень (A чи B) використовувати для накладення.

Пояснимо сказане на прикладі добутку представлень $\mathbf{3} \times \mathbf{3}^*$. Фігура, що відповідає даному добутку, зображена на Рис. 10. Зовнішні шість точок утворюють шестикутник, що відповідає представленню розмірності $\mathbf{8}$. Відкидаючи ці вісім точок (шість на межі діаграми та дві в центрі) отримаємо одну центральну точку, яка відповідає синглетному представленню $(0, 0)$. Таким чином $\mathbf{3} \times \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

Лекція 9.

Кварки як незвідне представлення групи $SU_f(3)$.

Гіпотеза кварків. Ще до введення кварків було виявлено (Гелл-Ман, Неєман 1961), що всі відомі на той час мезони з однаковими значеннями спіну і парності та близькими за величиною масами можна поєднати у вигляді схем, що нагадують діаграми октетних

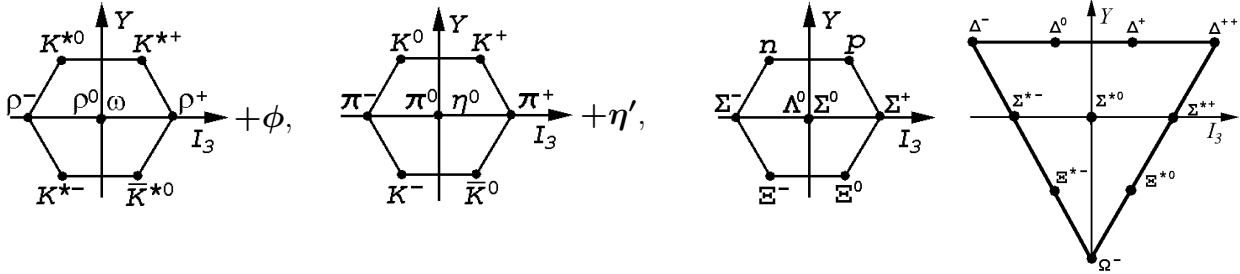


Рис. 11: Мезони $J^P = 1^-$ та 0^-

Баріони $J^P = 1/2^+$ та $3/2^+$

незвідних представлень групи $SU(3)$, у якій оператор Y потрібно ототожнити з гіперзарядом, а I_3 — з проекцією ізоспіну. Що ж до баріонів, то вони також об'єднувалися в групи октетних і декуплетних представлень, проте при цьому одна з комірок декуплетного представлення, що відповідає стану $Y = -2$ і $I_3 = 0$, виявилася порожньою. Це дало підставу Гелл-Ману передбачити існування нової частки — Ω^- -баріона, що має дивність $S = -3$ і розпадається під дією слабкої взаємодії по каналам $\Omega^- \rightarrow \Lambda K^-, \Xi^0 \pi^-, \Xi^- \pi^0$. Крім того, проаналізувавши розподіл за масами частинок у декуплеті, було помічено, що при переході від одного ізотопічного мультиплету до сусіднього маса частинок збільшується приблизно на одну і ту ж величину — 150 MeV. Якщо ця закономірність зберігається і для Ω^- -баріону, то його маса повинна бути близька до 1680 MeV. Незабаром (1964 р) частка з такими властивостями та масою 1672 MeV була знайдена. З її відкриттям віра фізиків у справедливість схеми $SU(3)$ класифікації частинок значно зросла.

Природним розвитком цих ідей стала гіпотеза про існування кварків: велика кількість адронів та складний характер їх електричних та магнітних формфакторів (Рис. 12) вказувало на те, що адрони не є точковими частинками, а складаються з більш елементарних об'єктів, названих кварками. При цьому для пояснення $SU(3)$ симетрії адронів необхідно припустити, що кварки, як і адрони, перетворюються за деяким незвідним представленням групи $SU(3)$. Розмірність цього представлення має бути такою, щоб із їх прямих добутків можна було утворити октетні $(1, 1)$ та декуплетні $(3, 0)$ представлення адронів. Найменше (за розмірністю) представлення, що має такі властивості, є триплетне представлення $(1, 0)$. Відповідні три стани називатимемо u , d і s -кварками (Рис. 13).

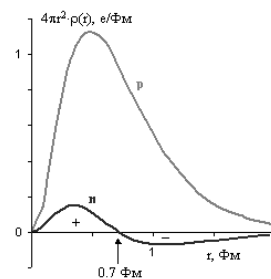


Рис. 12

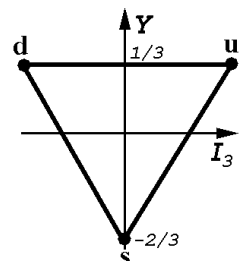


Рис. 13

Властивості кварків. З якої кількості кварків можуть складатися мезони та баріони? З такої, щоб відповідні прямі добутки представлень включали в себе синглетне, октетне та декуплетне представлення. Розглянемо двокваркові системи:

$$qq \Rightarrow 3 \times 3 = 6 \oplus 3^* \quad (\text{не підходить});$$

$$q\bar{q} \Rightarrow 3 \times 3^* = 8 \oplus 1 \quad (\text{підходить}).$$

Оскільки в розкладі $q\bar{q}$ немає декуплетного представлення, то розглянемо трикваркові стани:

$$qqq \Rightarrow 3 \times 3 \times 3 = 3 \times (6 \oplus 3^*) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (\text{підходить});$$

$$qq\bar{q} \Rightarrow 3 \times 3 \times 3^* = 3 \times (8 \oplus 1) = 15 \oplus 6^* \oplus 3 \oplus 3 \quad (\text{не підходить}).$$

Таким чином, нам підходять лише дві комбінації: qqq та $q\bar{q}$. Якщо розглядати кварки як реальні частинки¹⁹, то їм потрібно приписати певний спін (очевидно $J = 1/2$) і парність $\varepsilon_P(q) = +1$. З іншого боку, всі кварки повинні мати однакову характеристику J^P , оскільки вони належать одному $SU(3)$ мультиплету. Таким чином, комбінація $q\bar{q}$, що відповідає частинці з цілим спіном, повинна відповідати мезонам, а комбінація qqq — баріонам. Тоді внутрішня парність антикварків (як ферміонів) буде від'ємною. Для баріонів, що складаються з трьох кварків, внутрішня парність дорівнює $\varepsilon_P = (-1)^L(\varepsilon_P(q))^3 = (-1)^L$, а для мезонів отримуємо $\varepsilon_P = (-1)^L\varepsilon_P(q)\varepsilon_P(\bar{q}) = (-1)^{L+1}$, де $(-1)^L$ — фактор, що визначає симетрію координатної частини хвильової функції. Для мезонів L збігається з орбітальним моментом пари кварк-антикварк. Для трикваркових систем це, взагалі кажучи, вже не так²⁰. Однак, стан з мінімальною енергією (а отже, і мінімальною масою) є, як відомо, симетричним. Отже, при фіксованому кварковому складі та спіновій конфігурації найлегші баріони повинні мати додатну внутрішню парність, а мезони — від'ємну (див. Додаток 1 на сторінці 74).

Квантові числа кварків можна одержати з таких міркувань. Оскільки баріонне число мезонів дорівнює нулю, то з рівностей

$$B(u\bar{d}) = 0, \quad B(u\bar{s}) = 0, \quad B(d\bar{s}) = 0; \quad B(\bar{q}) = -B(q)$$

слідуює, що $B(u) = B(d) = B(s)$. А з рівності $B(qqq) = 1$ випливає, що $B(q) = 1/3$ для всіх кварків. Далі, щоб емпірична формула Гелл-Мана - Нішиджіми

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \quad (38)$$

виконувалася для всіх адронів, необхідно, щоб вона виконувалася для кварків

$$Q(q) = I_3(q) + \frac{1}{2}Y(q), \quad \text{де } Y = B + S.$$

Звідси одержуємо такі характеристики кварків (див. Таблицю 1).

Таблиця 1. Властивості кварків.

	J^P	I	I_3	Q	S	Y	B
u	$1/2^+$	$1/2$	$1/2$	$2/3$	0	$1/3$	$1/3$
d	$1/2^+$	$1/2$	$-1/2$	$-1/3$	0	$1/3$	$1/3$
s	$1/2^+$	0	0	$-1/3$	-1	$-2/3$	$1/3$

¹⁹Спочатку кварки розглядалися як деякі формальні математичні символи, за допомогою яких можна зробити класифікацію адронів.

²⁰Наприклад, тричастинкова система може мати антисиметричну (стосовно будь-якої пари частинок) координатну хвильову функцію і при цьому перебувати в стані з повним орбітальним моментом $L = 0$. Загальна структура такої хвильової функції має вигляд

$$\Psi(1, 2, 3) = (r_{12} - r_{23})(r_{23} - r_{31})(r_{31} - r_{12})f(r_1^2, r_2^2, r_3^2),$$

де $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ — відносна відстань між i -м і j -м кварками, а $f(r_1^2, r_2^2, r_3^2)$ — довільна функція, що симетрична за будь-якою парою аргументів. Функція $\Psi(1, 2, 3)$, очевидно, антисиметрична. Крім того, вона не змінюється при просторових поворотах (оскільки залежить лише від скалярів), а значить відповідає повному орбітальному моменту $L = 0$.

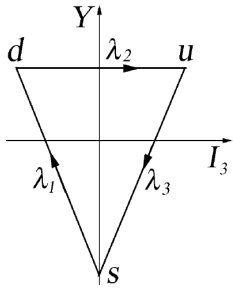
Існування лінійної залежності між зарядовими числами Q , I_3 , B і S (формула Гелл-Мана - Нішиджіми) є прямим наслідком того, що кількість зарядових змінних на одиницю менше за кількість кварків. Отже, має існувати одне лінійне співвідношення на зарядові числа кварків (а значить і будь-яких адронів). При додаванні нових ароматів кварків додаються і відповідні їм адитивні числа, так що завжди число кварків на одиницю менше від числа адитивних величин.

Формулу Гелл-Мана - Нішиджіми можна отримати і з групового аналізу, якщо помітити, що для будь-якого з представлень, зображених на Рис.11, значення електричного заряду частинок однаково вздовж діагоналі U -спіна і збігається з величиною "гіперзаряду" Y_U по відношенню до U -спіну. При цьому для $Y_U \equiv Q$ отримується співвідношення

$$Y_U = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Зупинимося тепер на питанні про хвильові функції кварків. Визначимо фазові множники станів u , d і s таким чином, щоб дія на них зсувних операторів V_{\pm} , U_{\pm} та I_{\pm} мала б найпростіший вигляд. Позначимо λ_1 , λ_2 , λ_3 — фазові множники, які виникають від дії операторів U_+ , I_+ і V_- на стани s , d і u , тобто

$$U_+s = \lambda_1 d, \quad I_+d = \lambda_2 u, \quad V_-u = \lambda_3 s.$$



Добуток цих множників визначається дією циклічного оператора $V_-I_+U_+$ на s -кварк:

$$V_-I_+U_+s = V_-[I_+, U_+]s = V_-V_+s = [V_-, V_+]s = -(3/2Y + I_3)s = s.$$

Таким чином, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Тому, визначимо стани u і d кварків наступним чином:

$$d \equiv U_+s, \quad u \equiv I_+d = I_+U_+s. \quad (39)$$

При цьому хвильова функція s -кварка вважається нормованою на одиницю, тобто $\langle s|s \rangle = 1$. Введені таким чином стани u , d і s мають властивість, що дія на них будь-яких зсувних операторів (як по-, так і проти годинникової стрілки) переводить один стан в сусідній з коефіцієнтом одиниця. Дійсно, для переходів за годинниковою стрілкою це безпосередньо випливає з означення (39). Тому розглянемо, наприклад, дію I_- на u :

$$I_-u = I_-I_+d = [I_-, I_+]d = -2I_3d = d.$$

Аналогічно перевіряються дії операторів U_- та V_+ .

Стани u , d , s ортонормовані. Наприклад

$$\langle d|d \rangle = \langle U_+s|U_+s \rangle = \langle s|U_-U_+|s \rangle = \langle s|[U_-, U_+]|s \rangle = \langle s|I_3 - 3/2Y|s \rangle = 1;$$

$$\langle d|s \rangle = \langle U_+s|s \rangle = \langle s|U_-s \rangle = 0 \quad \text{і т.п.}$$

Якщо вектори станів u , d і s кварків прийняти за базисні орти деякого представлення

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

то для генераторів F_i отримується стандартне представлення через матриці Гелл-Мана: $F_i = 1/2\lambda_i$. При $SU(3)$ поворотах кварки перетворюються за законом

$$q_i \rightarrow q'_i = U_{ij}q_j, \quad U = e^{-i\varphi_k F_k}. \quad (41)$$

Розглянемо тепер стани антикварків \bar{u} , \bar{d} і \bar{s} , які утворюють спряжене представлення $\mathbf{3}^* = (0, 1)$. В цьому випадку

$$V_+ I_- U_- \bar{s} = -\bar{s}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1.$$

Тому ми можемо визначити фазові множники антикварків так, що для будь-якого оператора зсуву Q буде $Q\bar{q}_i = -\bar{q}_j$ (як при зміщенні по-, так і проти годинникової стрілки). Для цього треба покласти

$$\bar{d} \equiv -U_- \bar{s}, \quad \bar{u} \equiv -I_- \bar{d}.$$

При цьому стани \bar{u} , \bar{d} і \bar{s} будуть ортонормованими. Якщо прийняти стан антикварків \bar{u} , \bar{d} і \bar{s} за базисні орти

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

то для генераторів групи \bar{F}_i отримаємо представлення:

$$\bar{F}_i = -1/2\lambda_i^*.$$

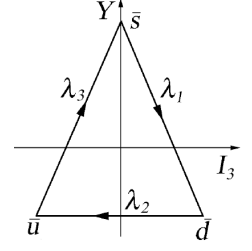
При $SU(3)$ перетвореннях антикварки перетворюються по комплексно спряженому представленню

$$\bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{U} \bar{q}, \quad \text{де} \quad \bar{U} \equiv U^* = e^{-i\varphi_i \bar{F}_i}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\bar{q}'_i = \bar{U}_{ij} \bar{q}_j = (U^*)_{ij} \bar{q}_j = \bar{q}_j (U^\dagger)_{ji} = \bar{q}_j (U^{-1})_{ji}. \quad (43)$$

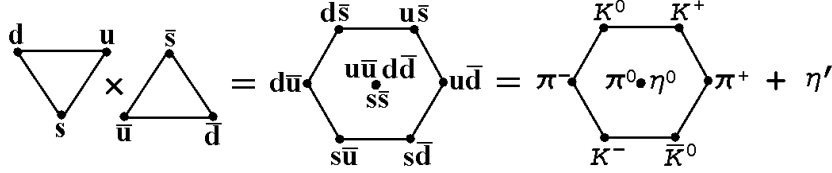
де $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})^T$ — трикомпонентний стовпчик антикварків. На відміну від групи $SU(2)$ матриці \bar{U} не є унітарно-еквівалентними матрицям U , тобто закон перетворення кварків та антикварків різний.



Лекція 10.

Хвильові функції адронів у наближенні $SU_f(3)$ симетрії.

Мезони 0^- -октету. Мезони складаються з двох кварків і мають кваркову структуру виду $q\bar{q}$. Виконуючи добуток представлень $3 \times 3^*$, отримуємо (див. Рис.). Кожній точці на межі діаграми відповідає один стан $d\bar{s}$, $u\bar{s}$, $d\bar{u}$, $u\bar{d}$, $s\bar{u}$ та $s\bar{d}$, які відповідають



частинкам K^0 , K^+ , π^- , π^+ , K^- і \bar{K}^0 відповідно. В центр діаграми потрапляють три лінійно незалежні комбінації $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ і $s\bar{s}$, з яких повинні будуватися частинки π^0 , η^0 і η' (η' — $SU(3)$ синглет). Запис виду $K^0 = d\bar{s}$ потрібно розглядати як ароматну частину хвильової функції K^0 -мезона, при цьому під буквеним позначенням частинки потрібно розуміти відповідну хвильову функцію. Запис $K^0 = d\bar{s}$ означає, що кварк q знаходиться в ароматному стані d , а антикварк \bar{q} в ароматному стані \bar{s} . Неважко виписати ще й спінову частину хвильової функції. Оскільки спин K^0 -мезона дорівнює нулю, то ароматно-спінова частина хвильової функції матиме вигляд

$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (d(\uparrow)\bar{s}(\downarrow) - d(\downarrow)\bar{s}(\uparrow)),$$

де стрілка в дужках вказує на спіновий стан кварку (проекції $\pm 1/2$ на вісь z); множник $1/\sqrt{2}$ введено для нормування хвильової функції на одиницю.

Перейдемо тепер до побудови хвильових функцій частинок π^0 , η^0 і η' . π^0 -мезон належить до ізотопічного триплету і отримується з π^- -мезона дією на його хвильову функцію оператором зсуву I_+ , тобто

$$I_+|1, -1\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle$$

або

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_+^{(q)} + I_+^{(\bar{q})}) d\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}).$$

де $I_+^{(q)}$ і $I_+^{(\bar{q})}$ — оператори зсуву для кварка і антикварка. На відміну від K^0 -мезону, для π^0 -мезону як кварк, так і антикварк може бути в двох ароматних станах u і d з рівною ймовірністю $1/2$. Зрозуміло, така суперпозиція різних ароматних станів кварків можлива тільки у випадку тотожності всіх типів кварків, як тотожні між собою електрон зі спіном вгору та електрон зі спіном вниз, тільки тепер роль проекції спіну грає квантове число аромат. Зокрема, у разі точної $SU(3)$ симетрії всі типи кварків повинні мати однакові маси. Різниця в масах кварків різних ароматів вказує на порушення унітарної симетрії, що ми поки що будемо ігнорувати.

Мезон η' належить $SU(3)$ синглету, і тому дія на його хвильову функцію будь-якого із зсувних операторів має давати нуль. Записав η' -мезон у вигляді лінійної комбінації станів $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$

$$\eta' = \alpha u\bar{u} + \beta d\bar{d} + \gamma s\bar{s} \quad (44)$$

і подіавши на (44) оператором I_+ , знаходимо

$$I_+ \eta' = -\alpha u\bar{d} + \beta u\bar{d} = 0, \quad \text{тобто} \quad \alpha = \beta. \quad (45)$$

Далі, подіявши на (44), з врахуванням (45), наприклад, оператором U_+ , отримаємо

$$U_+[\alpha(u\bar{u} + d\bar{d}) + \gamma s\bar{s}] = -\alpha d\bar{s} + \gamma d\bar{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma = 1/\sqrt{3} \quad (\text{з нормування}).$$

Таким чином

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}). \quad (46)$$

Неважко перевірити, що дія на (46) будь-якого оператора зсуву дає нуль. Значить стан (46) дійсно описує $SU(3)$ -синглет. Це можна показати і безпосередньо, розглянувши перетворення η' -мезону при довільних $SU(3)$ перетвореннях (див. (41) і (43))

$$\begin{aligned} \eta' &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(u'\bar{u}' + d'\bar{d}' + s'\bar{s}') = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 q'_i \bar{q}'_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 U_{ij} q_j \bar{q}_k (U^{-1})_{ki} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 \underbrace{(U^{-1})_{ki} U_{ij}}_{\delta_{kj}} q_j \bar{q}_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 q_i \bar{q}_i = \eta'. \end{aligned}$$

Хвильову функцію частинки, що залишилася, η^0 можна знайти різними способами. Найпростіше скористатися співвідношенням ортогональності для станів π^0 , η^0 і η'

$$\eta^0 = \alpha u\bar{u} + \beta d\bar{d} + \gamma s\bar{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\pi^0, \eta^0) = 0 & \Rightarrow \quad \alpha = \beta \\ (\eta', \eta^0) = 0 & \Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

тобто

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}). \quad (47)$$

Якби хвильова функція η' -мезона була б нам не відома, то хвильову функцію η^0 частинки можна було б знайти за допомогою наступного прийому. Подіємо оператором U_- на K^0 . В результаті отримаємо стан, що відповідає центральній точці діаграми октету, тобто стан, що є лінійною комбінацією частинок π^0 і η^0 (але не η' , що належить синглету)

$$U_- K^0 = \lambda_1 \pi^0 + \lambda_2 \eta^0,$$

де λ_1 і λ_2 — деякі коефіцієнти. З іншого боку, $K^0 = d\bar{s}$ і тому

$$U_- K^0 = U_- d\bar{s} = s\bar{s} - d\bar{d},$$

тобто

$$\lambda_1 \pi^0 + \lambda_2 \eta^0 = s\bar{s} - d\bar{d}. \quad (48)$$

Домножимо (48) скалярно на π^0 і враховуючи ортогональність станів π^0 і η^0 , знаходимо коефіцієнт λ_1 :

$$\lambda_1 = \langle \pi^0 | s\bar{s} - d\bar{d} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u\bar{u} - d\bar{d} | s\bar{s} - d\bar{d} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином

$$\lambda_2 \eta^0 = s\bar{s} - d\bar{d} - \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 = -\frac{1}{2}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}),$$

звідки і слідує (47) з точністю до фазового множника.

Мезони 1^- -октету. Ці мезони мають, звісно, такий самий кварковий склад (ароматну частину хвильової функції), що і мезони 0^- -октету. Відмінність полягає лише у спіновій частині хвильової функції. Наприклад, ароматно-спінова частина хвильової функції K^{*0} -мезона матиме такий вигляд:

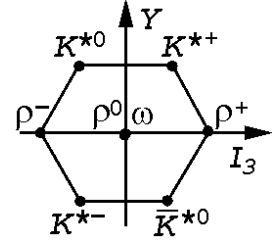
$$K^{*0} = d(\uparrow)\bar{s}(\uparrow)$$

(припускається, що частинка перебуває у стані з проекцією спіну $+1$ на вісь z). Роль

η' -частинки тепер грає ϕ -мезон. В таблиці елементарних частинок для кваркового складу ω - і ϕ -мезонів наведені вирази

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \phi = s\bar{s},$$

які відрізняються від (47) і (46). Причина цього полягає в існуванні так званого ефекту змішування частинок (про цей ефект буде розказано в лекції 12).



Хвильові функції баріонів. Баріони мають кваркову структуру qqq . Розписавши прямий добуток представлень $3 \times 3 \times 3$, отримаємо наступний кварковий склад для частинок декуплету та октету

$$3 \times \left(\begin{array}{c} d \quad u \\ \diagdown \quad \diagup \\ s \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} d \quad u \\ \diagdown \quad \diagup \\ s \end{array} \right) = 3 \times \left(\begin{array}{c} dd \quad du \quad uu \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ ds \quad us \quad ss \end{array} + \begin{array}{c} du \\ \diagdown \quad \diagup \\ ds \quad us \end{array} \right) = \begin{array}{c} ddd \quad ddu \quad duu \quad uuu \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ dds \quad dss \quad uds \quad uss \quad sss \end{array} + \begin{array}{c} ddu \quad duu \\ \diagdown \quad \diagup \\ dds \quad dss \quad dus \quad uus \end{array}$$

а) **Декуплет $3/2^+$.** Оскільки спін баріонів цього декуплету дорівнює $3/2$, то в стані $J_z = +3/2$ спінова частина хвильової функції будь-якої з частинок буде мати вигляд $q(\uparrow)q(\uparrow)q(\uparrow)$. Тому будемо виписувати лише ароматну частину хвильової функції. Для Δ^- баріону ситуація проста

$$\Delta^- = ddd.$$

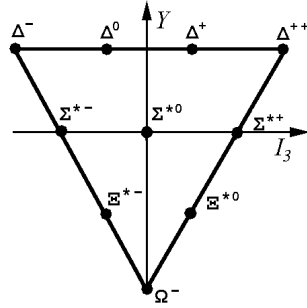


Рис. 17

Щоб отримати хвильові функції решти частинок Δ -мультиплету скористаємося зсувним оператором I_+ :

$$\Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} I_+ \Delta^- = \frac{1}{\sqrt{3}} (I_+^{(1)} + I_+^{(2)} + I_+^{(3)}) ddd = \frac{1}{\sqrt{3}} (udd + dud + ddu);$$

$$\Delta^+ = \frac{1}{2} I_+ \Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (uud + udu + duu);$$

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_+ \Delta^+ = uuu.$$

Тут $I_+^{(1)}$, $I_+^{(2)}$, $I_+^{(3)}$ — зсувні оператори ізоспіну, що діють на перший, другий та третій кварк відповідно. Хвильові функції інших частинок декуплету також легко отримати з вже знайдених хвильових функцій за допомогою дії на них відповідних зсувних операторів. Наприклад:

$$\Sigma^{*-} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_- \Delta^- = \frac{1}{\sqrt{3}} (dds + dsd + sdd);$$

$$\Sigma^{*0} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_- \Delta^- = \frac{1}{\sqrt{6}} (uds + usd + dus + sdu + dsu + sud);$$

і т.д. Надалі у нас часто зустрічатиметься симетризована комбінація із трьох кварків. Тому для скорочення запису введемо такі позначення. Позначимо симетризовані суми виду $ddu + dud + udd$ символом $(udd)_3$, де індекс внизу вказує на кількість доданків (це буде зручно для подальших викладок). Так, наприклад, виписані вище хвильові функції в скороченому запису набувають вигляду

$$\Delta^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (udd)_3, \quad \Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} (uud)_3, \quad \Sigma^{*-} = \frac{1}{\sqrt{3}} (dds)_3, \quad \Sigma^{*0} = \frac{1}{\sqrt{6}} (uds)_6.$$

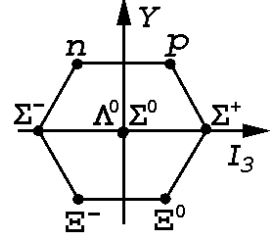
б) **Октет $1/2^+$.** Знайдемо хвильові функції частинок октету у стані з $J_z = +1/2$. Почнемо побудову з нейтрону. Нейтрон має кварковий склад $n = udd$. Оскільки проекція спіну нейтрону дорівнює $+1/2$, то два кварки з трьох повинні бути у стані зі спіном вгору. Таким чином, можливі лише дві комбінації ароматно-спінових станів

кварків (з точністю до перестановки кварків місцями):

$$u(\uparrow)d(\uparrow)d(\downarrow) \quad \text{і} \quad u(\downarrow)d(\uparrow)d(\uparrow).$$

Щоб не ускладнювати подальші записи нагромадженням дужок та стрілок, застосуємо такі позначення

$$q(\uparrow) \equiv q^+, q(\downarrow) \equiv q^-.$$



Будемо шукати хвильову функцію нейтрону у вигляді

$$n = \alpha(u^+d^+d^-)_6 + \beta(u^-d^+d^+)_3 \quad (49)$$

з деякими коефіцієнтами α і β . Ці коефіцієнти мають бути обрані таким чином, щоб хвильова функція (49) описувала стан з $I = 1/2$ та $J = 1/2$. Почнемо з ізоспіну.

В загальному випадку вираз (49) є суперпозицією станів з $I = 1/2$ та $I = 3/2$ (і проекцією $I_3 = -1/2$). Щоб виключити стан з $I = 3/2$ достатньо вимагати, щоб $I_-n = 0$:

$$I_-n = I_-[\alpha(u^+d^+d^-)_6 + \beta(u^-d^+d^+)_3] = (2\alpha + \beta)(d^+d^+d^-)_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -2\alpha.$$

Таким чином, нормована хвильова функція нейтрону має вигляд

$$n = \frac{1}{\sqrt{18}} [(u^+d^+d^-)_6 - 2(u^-d^+d^+)_3]. \quad (50)$$

Неважко перевірити, що вираз (50) задовольняє також умові $J = 1/2$, оскільки для нього $J_+n = 0$, що виключає домішок стану з $J = 3/2$.

Хвильові функції інших частинок октету отримуються з виразу (50) за допомогою дії на нього відповідних зсувних операторів. Хвильові функції частинок Λ^0 і Σ^0 знаходяться аналогічно до того, як це робилося для частинок мезонного октету 0^- . В результаті отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\sqrt{18}} [2(u^+u^+d^-)_3 - (u^+u^-d^+)_6]; \\ \Sigma^- &= \frac{1}{\sqrt{18}} [(d^+d^-s^+)_6 - 2(d^+d^+s^-)_3]; \\ \Sigma^0 &= \frac{1}{6} [(u^+d^-s^+)_6 + (u^-d^+s^+)_6 - 2(u^+d^+s^-)_6]; \\ \Sigma^+ &= \frac{1}{\sqrt{18}} [(u^+u^-s^+)_6 - 2(u^+u^+s^-)_3]; \\ \Xi^- &= \frac{1}{\sqrt{18}} [2(d^-s^+s^+)_3 - (d^+s^+s^-)_6]; \\ \Xi^0 &= \frac{1}{\sqrt{18}} [2(u^-s^+s^+)_3 - (u^+s^+s^-)_6]; \\ \Lambda^0 &= \frac{1}{\sqrt{12}} [(u^+d^-s^+)_6 - (u^-d^+s^+)_6]. \end{aligned}$$

Лекція 11.

Магнітні моменти баріонів.

Магнітний момент адрона обумовлений двома факторами: власними магнітними моментами кварків, що входять в його склад, та їх орбітальним рухом. Оскільки ми розглядаємо найлегший баріонний октет, то вважатимемо, що всі три кварки перебувають у стані з орбітальним моментом $l = 0$ ²¹. Таким чином, магнітний момент частинок буде зумовлений лише власними магнітними моментами кварків.

За сучасними уявленнями кварки є точковими (безструктурними) ферміонами. Такі частинки повинні задовольняти рівнянню Дірака, яке передбачає для частинки з масою m і зарядом q магнітний момент

$$\mu = \frac{q\hbar}{2mc}. \quad (51)$$

Модель унітарної $SU(3)$ -симетрії вимагає $m_u = m_d = m_s$. Насправді ж унітарна симетрія є порушеною і $m_u \approx m_d < m_s$. Тому для обчислення магнітних моментів частинок приймемо наступну наближену схему: при розрахунку середніх значень будемо користуватися хвильовими функціями, знайденими раніше в припущенні точної $SU(3)$ -симетрії. В той же час, для власних магнітних моментів кварків використовуватимемо вираз (51), вважаючи $m_u = m_d \neq m_s$. Таким чином, ми частково врахуємо ефект порушення $SU(3)$ -симетрії.

Оскільки баріони складаються з трьох кварків, то для оператора магнітного моменту частинки маємо наступний вираз:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3,$$

де $\hat{\mu}_i$ — оператор магнітного моменту i -го кварку. Кожен із кварків може знаходитися в трьох ароматних станах u, d, s , для яких оператор магнітного моменту матиме вигляд $\hat{\mu}_q = \mu_q \sigma_z$, де

$$\begin{aligned} \mu_u &= \frac{2}{3} \frac{e\hbar}{2m_u c} = \frac{2}{3} \frac{m_p}{m_u} \mu_{\text{Я}} = \frac{2}{3} \lambda_1 \mu_{\text{Я}}, \\ \mu_d &= -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_u c} = -\frac{1}{3} \lambda_1 \mu_{\text{Я}}, \\ \mu_s &= -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_s c} = -\frac{1}{3} \frac{m_p}{m_s} \mu_{\text{Я}} = -\frac{1}{3} \lambda_2 \mu_{\text{Я}}, \end{aligned}$$

$\lambda_1 = m_p/m_u$, $\lambda_2 = m_p/m_s$, e — заряд електрона по модулю, $\mu_{\text{Я}} = \frac{e\hbar}{2m_p c}$ — ядерний магнетон. Таким чином, для оператора $\hat{\mu}_i$ ми можемо записати наступний вираз (в одиницях ядерного магнетону)

$$\hat{\mu}_i = \left(\frac{2}{3} \lambda_1 \hat{P}_u^{(i)} - \frac{1}{3} \lambda_1 \hat{P}_d^{(i)} - \frac{1}{3} \lambda_2 \hat{P}_s^{(i)} \right) \sigma_z^{(i)},$$

де $\hat{P}_q^{(i)}$ — проекційний оператор на ароматний стан q . За визначенням магнітний момент частинки дорівнює середньому значенню від оператора $\hat{\mu}$ в стані з $J_z = J$:

$$\mu = \langle \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_3 \rangle_{J_z=J} = 3 \langle \hat{\mu}_1 \rangle.$$

²¹ Як відомо, сильна взаємодія має нецентральний характер. Тому, поряд з основним s -станом може бути і мала домішка станів з $l = 2, 4, \dots$ (здайте, наприклад, теорію магнітного моменту дейтрона). Оцінки показують, що внесок у магнітний момент станів із $l \neq 0$ не перевищує, як правило, 5%.

В останній рівності ми врахували той факт, що знайдені раніше хвильові функції всіх баріонів симетричні щодо перестановки місцями будь-яких двох кварків, тобто кожен із кварків (перший, другий або третій) вносить однаковий вклад в магнітний момент.

Обчислимо магнітний момент нейтрону.

$$\begin{aligned}\mu_n &= \langle n | \hat{\mu} | n \rangle = 3 \langle n | \hat{\mu}_1 | n \rangle = \left\langle n = \frac{1}{\sqrt{18}} \left[\underbrace{(u^+ d^+ d^-)_6}_a - 2 \underbrace{(u^- d^+ d^+)_3}_b \right] \right\rangle = \\ &= \frac{3}{18} \langle a - 2b | \hat{\mu}_1 | a - 2b \rangle = \frac{1}{6} [\langle a | \hat{\mu}_1 | a \rangle + 4 \langle b | \hat{\mu}_1 | b \rangle - 2 \langle a | \hat{\mu}_1 | b \rangle - 2 \langle b | \hat{\mu}_1 | a \rangle]. \quad (52)\end{aligned}$$

Будь-яка з функцій udd , що входить до складу виразів a або b , є власною функцією операторів $P_q^{(1)} \sigma_z^{(1)}$. Крім того, будь-яка функція з a ортогональна до будь-якої функції з b . Тому, недіагональні матричні елементи (52) обертаються в нуль, тобто

$$\langle a | \hat{\mu}_1 | b \rangle = \langle b | \hat{\mu}_1 | a \rangle = 0.$$

Обчислимо діагональні елементи.

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 | a \rangle &= \hat{\mu}_1 | u^+ d^+ d^- + d^- d^+ + d^+ u^+ d^- + d^+ d^- u^+ + d^- u^+ d^+ + d^- d^+ u^+ \rangle = \\ &= \lambda_1 \left| \frac{2}{3} u^+ d^+ d^- + \frac{2}{3} u^+ d^- d^+ - \frac{1}{3} d^+ u^+ d^- - \frac{1}{3} d^+ d^- u^+ + \frac{1}{3} d^- u^+ d^+ + \frac{1}{3} d^- d^+ u^+ \right\rangle.\end{aligned}$$

$$\langle a | \hat{\mu}_1 | a \rangle = \lambda_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \lambda_1.$$

Аналогічно,

$$\langle b | \hat{\mu}_1 | b \rangle = -\frac{4}{3} \lambda_1.$$

Таким чином,

$$\mu_n = \frac{1}{6} (\langle a | \hat{\mu}_1 | a \rangle + 4 \langle b | \hat{\mu}_1 | b \rangle) = -\frac{2}{3} \lambda_1.$$

Аналогічно обчислюються магнітні моменти інших частинок октету. Наведемо остаточні вирази (в ядерних магнетонах)

$$\begin{aligned}\mu_n &= -\frac{2}{3} \lambda_1, \quad \mu_p = \lambda_1 \quad (\mu_n / \mu_p = 2/3, \text{ відносна похибка } 2.6\%), \\ \mu_\Lambda &= -\frac{1}{3} \lambda_2, \quad \mu_\Omega = -\lambda_2, \quad \mu_{\Sigma^-} = \frac{1}{9} (\lambda_2 - 4\lambda_1), \quad \mu_{\Sigma^0} = \frac{1}{9} (2\lambda_1 + \lambda_2), \\ \mu_{\Sigma^+} &= \frac{1}{9} (8\lambda_1 + \lambda_2), \quad \mu_{\Xi^0} = -\frac{2}{9} (\lambda_1 + 2\lambda_2), \quad \mu_{\Xi^-} = \frac{1}{9} (\lambda_1 - 4\lambda_2).\end{aligned}$$

Експериментальні значення магнітних моментів частинок в ядерних магнетонах рівні

$$\mu_p = 2.79, \quad \mu_n = -1.91, \quad \mu_\Lambda = -0.613 \pm 0.004, \quad \mu_\Omega = -1.94 \pm 0.22, \quad \mu_{\Sigma^+} = 2.46 \pm 0.01,$$

$$\mu_{\Sigma^-} = -1.16 \pm 0.025, \quad \mu_{\Xi^0} = -1.25 \pm 0.01, \quad \mu_{\Xi^-} = -0.6507 \pm 0.0025.$$

Якщо взяти за основу магнітні моменти протону і Λ -гіперону, то для коефіцієнтів λ_1 і λ_2 отримаємо такі значення:

$$\lambda_1 = 2.79, \quad \lambda_2 = 1.84 \pm 0.01, \quad (53)$$

що дає для мас u і s кварків величини

$$m_u = 336 \text{ Mev}, \quad m_s = 513 \text{ Mev}.$$

Наведені тут маси називають блоковими (або конститuentними). Блокова маса перевищує масу "голого" кварка (струмову масу) на величину ~ 300 MeV, що обумовлено наявністю навколо кожного з кварків хмари віртуальних глюонів. Струмові маси на сьогоднішній день відомі досить приблизно (див. таблицю на сторінці 74).

Розраховані за наведеними вище формулами магнітні моменти частинок, з використанням значень (53), дорівнюють

$$\mu_n = -1.86 \text{ (похибка } 2.6\%), \quad \mu_{\Sigma^+} = 2.68 \text{ (похибка } 8\%), \quad \mu_{\Sigma^-} = -1.04 \text{ (похибка } 10\%),$$

$$\mu_{\Omega} = -1.84 \text{ (у межах похибки)}, \quad \mu_{\Xi^0} = -1.43 \text{ (похибка } 12\%),$$

$$\mu_{\Xi^-} = -0.51 \text{ (похибка } 22\%).$$

За винятком Ξ^- -гіперона, узгодження з експериментом треба визнати цілком задовільною.

Лекція 12.

Масові формули.

"На підставі припущення, що порушення $SU(3)$ симетрії можна розглядати як мале обурення, отримано цілу низку співвідношень між масами членів даного мультиплету. У фізиці сильних взаємодій ці співвідношення напрочуд добре підтверджуються дослідом, складаючи, мабуть, найпереконливіше свідчення на користь унітарної симетрії" (А. Салам, 1964р.)

Запишемо гамільтоніан взаємодії у вигляді

$$H = H_S + H_{MS} + H_{EM},$$

де H_S описує $SU(3)$ -симетричну частину сильних взаємодій, для якої всі частинки, що входять до одного $SU(3)$ мультиплету, мають однакові маси. Член H_{MS} характеризує частину сильних взаємодій, що порушує унітарну симетрію, але зберігає I -спін та гіперзаряд Y (так звана напів-сильна взаємодія). Ця взаємодія частково знімає виродження за масами, розщеплюючи $SU(3)$ мультиплет частинок на ізотопічні субмультиплети, всередині яких маси частинок рівні. Член H_{EM} представляє електромагнітну взаємодію, що порушує ізотопічну інваріантність та розщеплює частинки по масах всередині ізомультиплету. Щоб зрозуміти, яким чином змінюються маси частинок, ми повинні зробити деякі припущення про те, як впливає електромагнітна взаємодія на унітарну симетрію.

Як відомо, всі частинки в одному U -спіновому мультиплеті мають однаковий електричний заряд. Тому ми зробимо припущення, що електромагнітна взаємодія зберігає U -спін, тобто вона діє однаково на всі члени U -спінового мультиплету. Таким чином, дія на унітарний мультиплет оператора H_{EM} аналогічна до дії H_{MS} — кожна з цих взаємодій знімає виродження за масами для різних субмультиплетів по U -спіну (для H_{EM}) та I -спіну (для H_{MS}).

Для оцінки внеску кожного з доданків (H_{MS} і H_{EM}) в масу адронів розглянемо, наприклад, баріонний октет $1/2^+$. При нехтуванні електромагнітною взаємодією маси частинок у межах одного ізомультиплету були б рівні. Насправді експеримент дає

n, p	\rightarrow	$\Delta M = 1.3 \text{ МэВ}$	$(M_N \simeq 940 \text{ МэВ})$	0.1%
$\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$	\rightarrow	$\Delta M = 8 \text{ МэВ}$	$(M_\Sigma \simeq 1190 \text{ МэВ})$	0.6%
Ξ^-, Ξ^0	\rightarrow	$\Delta M = 7 \text{ МэВ}$	$(M_\Xi \simeq 1320 \text{ МэВ})$	0.5%

Як видно з наведених даних, ізотопічна симетрія є слабко порушеною з похибкою менше 1%. Таким чином, відносний вклад H_{EM} у масу $\leq 1\%$. Аналогічно розглянемо вплив H_{MS} . Розщеплення мас в межах одного U -мультиплету

Σ^-, Ξ^-	\rightarrow	$\Delta M = 124 \text{ МэВ}$	$\simeq 10\%$
n, Ξ^0	\rightarrow	$\Delta M = 374 \text{ МэВ}$	$\simeq 30\%$
p, Σ^+	\rightarrow	$\Delta M = 251 \text{ МэВ}$	$\simeq 20\%$

складає $\geq 10\%$. Інший прояв збереження U -спіну в електромагнітній взаємодії — близькість магнітних моментів частинок U -мультиплету:

$\mu_p = 2.79,$	$\mu_{\Sigma^+} = 2.46,$
$\mu_n = -1.91,$	$\mu_{\Xi^0} = -1.25,$
$\mu_{\Sigma^-} = -1.16,$	$\mu_{\Xi^-} = -0.65.$

Якщо характеризувати кожен із доданків H_S , H_{MS} і H_{EM} безрозмірною константою зв'язку, то для них матимемо:

$$g(H_S) \sim 1, \quad g(H_{MS}) \sim 1/10, \quad g(H_{EM}) \sim 1/137.$$

Виходячи із зроблених припущень про характер порушення $SU(3)$ симетрії кожним із доданків, що входять в гамільтоніан, спробуємо знайти співвідношення на маси частинок, що виконуються в будь-якому порядку як по H_{MS} , так і по H_{EM} , але нехтуючи інтерференційними членами типу $H_{MS} \cdot H_{EM}$. Іншими словами, отримані формули повинні бути точними, якщо знехтувати однією з взаємодій — H_{MS} або H_{EM} . Для цього розглянемо якийсь паралелограм на діаграмі (Рис. 19). Якщо знехтувати H_{EM} , то в будь-якому порядку H_{MS}

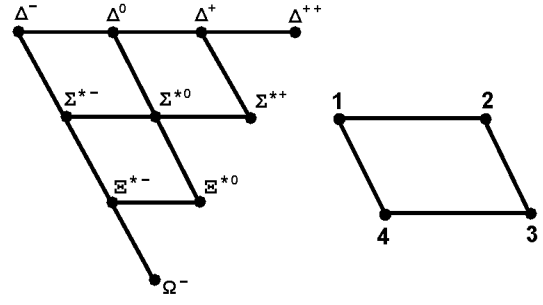


Рис. 19

$$m(1) = m(2); m(3) = m(4) \Rightarrow m(1) - m(2) + m(3) - m(4) = 0.$$

Якщо ж знехтувати H_{MS} , то в будь-якому порядку по H_{EM}

$$m(1) = m(4); m(2) = m(3) \Rightarrow m(1) - m(2) + m(3) - m(4) = 0.$$

Ясно, що в будь-якому порядку по H_{MS} і в будь-якому порядку по H_{EM} (але нехтуючи всіма інтерференційними членами), ми маємо співвідношення

$$m(1) - m(2) + m(3) - m(4) = 0. \quad (54)$$

Метьюс та Фельдман назвали його правилом паралелограма. Нехтування $H_{MS} \cdot H_{EM}$ членами повинно вносити похибку порядку $g(H_{MS}) \cdot g(H_{EM}) \sim 10^{-3}$. Таким чином, правило паралелограма має бути одним із найчутливіших методів перевірки $SU(3)$ симетрії. Для баріонного декуплета правило паралелограма дає три співвідношення:

$$m(\Delta^-) - m(\Delta^0) + m(\Sigma^{*0}) - m(\Sigma^{*-}) = 0$$

$$m(\Sigma^{*-}) - m(\Sigma^{*0}) + m(\Xi^{*0}) - m(\Xi^{*-}) = 0$$

$$m(\Delta^0) - m(\Delta^+) + m(\Sigma^{*+}) - m(\Sigma^{*-}) = 0$$

що чудово узгоджуються з експериментом.

У центрі баріонного октету виявляються дві частинки Λ і Σ^0 . Тому правило паралелограма у вигляді (54) не застосовно. Для октету скористаємося наступним прийомом. Будь-який оператор, що діє на хвильову функцію $SU(3)$ мультиплету, можна подати як функцію від генераторів групи. Зроблене припущення про характер симетрії H_{EM} і H_{MS} можна записати у вигляді наступних комутаційних співвідношень:

$$[H_S, F_i] = 0, \quad \forall i; \quad [H_{MS}, \mathbf{I}] = 0, \quad [H_{MS}, Y] = 0; \quad [H_{EM}, \mathbf{U}] = 0, \quad [H_{EM}, Q] = 0,$$

де $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ — оператор електричного заряду. Зважаючи на те, що

$$[Y, \mathbf{I}] = 0, \quad [Q, \mathbf{U}] = 0,$$

ми можемо записати для гамільтоніана такий вираз

$$\hat{H} = E_0 + E_1(\hat{I}^2, \hat{Y}) + E_2(\hat{U}^2, \hat{Q}). \quad (55)$$

Нехтуючи інтерференційними доданками для такого гамільтоніана знаходимо наступні значення для мас частинок $1/2^+$ баріонного мультиплету (хвильові функції всіх частинок мультиплету, крім Σ^0 і Λ , є власними функціями цього гамільтоніана)

$$\left. \begin{aligned} m(n) &= m_0 + m_1(1/2, 1) + m_2(1, 0) \\ m(p) &= m_0 + m_1(1/2, 1) + m_2(1/2, 1) \end{aligned} \right\} m(n) - m(p) = m_2(1, 0) - m_2(1/2, 1),$$

$$\left. \begin{aligned} m(\Sigma^+) &= m_0 + m_1(1, 0) + m_2(1/2, 1) \\ m(\Sigma^-) &= m_0 + m_1(1, 0) + m_2(1/2, -1) \end{aligned} \right\} m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-) = m_2(1/2, 1) - m_2(1/2, -1),$$

$$\left. \begin{aligned} m(\Xi^-) &= m_0 + m_1(1/2, -1) + m_2(1/2, -1) \\ m(\Xi^0) &= m_0 + m_1(1/2, -1) + m_2(1, 0) \end{aligned} \right\} m(\Xi^-) - m(\Xi^0) = m_2(1/2, -1) - m_2(1, 0),$$

де m_0 , m_1 і m_2 — функції, що пропорційні E_0 , E_1 і E_2 відповідно. Додавши ці вирази, отримуємо формулу Колмана - Глешоу

$$m(n) - m(p) + m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-) + m(\Xi^-) - m(\Xi^0) = 0. \quad (56)$$

Аналогічним чином з гамільтоніану (55) легко отримується правило паралелограма для декуплету. Очевидно, що співвідношення, аналогічне (56), повинно виконуватися і для мезонних октетів. Однак у цьому випадку ми маємо тотожну рівність $0 = 0$ через рівність мас частинки та античастинки, яка є наслідком CPT -інваріантності.

Розглянемо тепер масові співвідношення, які отримуються при врахуванні лише H_{MS} . Позначимо

$$m_u = m_d = m_1 \quad (\text{наслідок ізотопічної інваріантності}), m_s = m_2$$

і припустимо, що енергія (маса), що пов'язана з утворенням зв'язаного стану кварків, однакова для всіх частинок в мультиплеті і дорівнює m_0 . Тоді можна визначити маси всіх частинок. При цьому ми будемо використовувати хвильові функції частинок, що були отримані у припущенні точного виконання $SU(3)$ симетрії. Врахування напів-сильної взаємодії зводиться до зняття виродження по масам m_1 і m_2 .

η^0 -октет. Розглянемо, наприклад, η^0 -мезон. Його хвильова функція має вигляд

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}).$$

З цього виразу випливає, що з ймовірністю $1/6$ η -мезон складається з двох u -кварків, з ймовірністю $1/6$ — з двох d -кварків і з ймовірністю $4/6 = 2/3$ — з двох s -кварків. Таким чином, для маси η^0 -кварка отримуємо

$$m(\eta^0) = 2 \cdot 1/6 \cdot (2m_1 + m_0) + 2/3 (2m_2 + m_0) = 2/3 m_1 + 4/3 m_2 + m_0.$$

Аналогічно обраховуються маси інших частинок мультиплету:

$$m(K) = m_1 + m_2 + m_0, \quad m(\pi) = 2m_1 + m_0.$$

Виключаючи з цих співвідношень невідомі m_0 , m_1 і m_2 , знаходимо

$$m(K) = \frac{1}{4} (3m(\eta^0) + m(\pi)) \quad (\text{відносна похибка } 9\%). \quad (57)$$

1^- -октет. Аналогічні обчислення дають

$$m(K^*) = \frac{1}{4} (3m(\omega) + m(\rho)) \quad (\text{відносна похибка } 14\%). \quad (58)$$

Похибка в 14% досить велика. Тому можна припустити, що ці мезони не утворюють справжнього октету. Як це може статися? Відповідь криється в існуванні ϕ -мезона, який має ті ж квантові числа, що і ω , але належить до $SU(3)$ синглету та має іншу масу.

Уявімо загальну ситуацію, коли є дві частинки з однаковими J^P, B, I, Y, S , але з різними масами, так що одна з них належить октету, а інша — синглету. Велика похибка в (58) означає, що унітарна симетрія насправді не є точною, тобто існує частина сильної взаємодії, яка порушує симетрію і яка може змішувати стани, що належать октету і синглету та мають однакові квантові числа. Застосуємо цю ідею до ω - і ϕ -мезонів. Припустимо, що в $SU(3)$ симетричному світі октету і синглету належать деякі ω_1 і ϕ_1 стани. Тепер "включимо" сили, що порушують симетрію. Тоді частинки змішуються і утворюють реальні ω - і ϕ -мезони:

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 \cos \theta + \phi_1 \sin \theta \\ \phi = -\omega_1 \sin \theta + \phi_1 \cos \theta \end{cases},$$

де

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \end{aligned}$$

Тепер співвідношення (58) запишеться як

$$m(K^*) = \frac{1}{4} (3m(\omega_1) + m(\rho)).$$

Маса ω_1 -мезона пов'язана з масами ω - і ϕ -мезонів співвідношенням:

$$\omega_1 = \omega \cos \theta - \phi \sin \theta \quad \Rightarrow \quad m(\omega_1) = m(\omega) \cos^2 \theta + m(\phi) \sin^2 \theta = m(\omega) + \sin^2 \theta (m(\phi) - m(\omega)).$$

Параметр θ підбирається так, щоб досягти узгодження з експериментом. При цьому виявляється, що значення θ таке, що

$$\sin \theta \approx \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos \theta \approx \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

У цьому випадку, для кваркового складу ω -і ϕ -мезонів отримуємо такі прості вирази

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \phi = s\bar{s},$$

а формула (58) набуває вигляду

$$m(K^*) = \frac{1}{4} (2m(\phi) + m(\omega) + m(\rho)) \quad (\text{відносна похибка } 0.3\%).$$

Чи можна цю ідею застосувати до 0^- -мезонів? Ні²². Це видно з того, що існує одне співвідношення, яке має виконуватися для ω - і ϕ -мезонів незалежно від кута змішування. Справді, із співвідношень

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \cos \theta - \phi \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \phi_1 = \omega \sin \theta + \phi \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \end{cases},$$

²²Щоб уникнути непорозуміння зауважимо, що 0^- -мезони η^0 і η' змішуються, однак одним лише змішуванням зменшити відносну помилку співвідношення (57) не вдасться.

знаходимо

$$\begin{aligned} m(\omega_1) &= m(\omega) \cos^2 \theta + m(\phi) \sin^2 \theta = \frac{2}{3} m_1 + \frac{4}{3} m_2 + m_0, \\ m(\phi_1) &= m(\omega) \sin^2 \theta + m(\phi) \cos^2 \theta = \frac{4}{3} m_1 + \frac{2}{3} m_2 + m_0. \end{aligned}$$

Додавши ці рівняння, отримуємо

$$m(\omega) + m(\phi) = 2m(K^*) \quad (\text{відносна похибка } 5\%). \quad (59)$$

Аналог формули (59) для 0^- -мезонів дає

$$m(\eta^0) + m(\eta') = 2m(K) \quad (\text{відносна похибка більше } 30\%).$$

$3/2^+$ -декуплет. Для мас частинок виходять такі співвідношення:

$$\begin{aligned} m(\Delta) &= 3m_1 + m_0, \quad m(\Sigma^*) = 2m_1 + m_2 + m_0, \\ m(\Xi^*) &= m_1 + 2m_2 + m_0, \quad m(\Omega) = 3m_2 + m_0. \end{aligned}$$

Звідки отримуємо правило інтервалів

$$m(\Sigma^*) - m(\Delta) = m(\Xi^*) - m(\Sigma^*) = m(\Omega) - m(\Xi^*) \quad (\text{відносна похибка менше } 1\%). \quad (60)$$

$1/2^+$ -октет. В цьому випадку

$$\begin{aligned} m(N) &= 3m_1 + m_0, \quad m(\Sigma) = 2m_1 + m_2 + m_0, \\ m(\Lambda) &= 2m_1 + m_2 + m_0, \quad m(\Xi) = m_1 + 2m_2 + m_0, \end{aligned}$$

звідки знаходимо

$$\begin{aligned} 2(m(N) + m(\Xi)) &= 3m(\Lambda) + m(\Sigma) \quad (\text{відносна похибка } 0.5\%) \quad (61) \\ m(\Sigma) &= m(\Lambda) \quad (\text{відносна похибка } 6.5\%). \end{aligned}$$

Формула Гелл-Мана - Окубо. Формули (57), (60) і (61) можна отримати з однієї загальної формули Гелл-Мана - Окубо

$$m = M_0 + M_1 Y + M_2 \left(I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right), \quad (62)$$

де M_0 , M_1 і M_2 — деякі сталі, свої для кожного $SU(3)$ -мультиплету. Ця формула враховує лише напів-сильну взаємодію та може бути отримана з наступних емпіричних міркувань.

Як зазначалося раніше, гамільтоніан напів-сильного взаємодії H_{MS} в загальному випадку є функцією від операторів \hat{Y} та \mathbf{I}^2 . Перші члени розкладу в ряду мають вигляд

$$H_{MS} = a\hat{Y} + b\mathbf{I}^2 + c\hat{Y}^2 + \dots \quad (63)$$

Якщо обмежитися лише першим членом розкладу, то для мас частинок у першому порядку теорії збурень будемо мати

$$M = M_0 + aY.$$

Цей вираз приводить до правила інтервалів (60) для баріонного декуплету, яке добре узгоджується з експериментом. В той же час, для баріонного октету $1/2^+$ формула дає $m_\Sigma = m_\Lambda$, що є поганим наближенням. Для уточнення формули врахуємо наступні два члени розкладу в (63).

$$M = M_0 + aY + bI(I + 1) + cY^2.$$

Проте, при довільних b і c порушується правило інтервалів. Тому, підберемо коефіцієнти b і c так, щоб зберегти рівність (60) для декуплету. Це дає $b = -4c$. В результаті приходимо до формули (62).

Формулу (62) можна узагальнити, прийнявши до уваги спіни частинок. Це дозволяє об'єднати формули для октету та декуплету (з однаковою парністю). Група симетрії тепер розширюється до $SU_J(2) \times SU(3)$. Взаємодія, що порушує симетрію, має бути функцією від \mathbf{J}^2 . Найпростіше узагальнення (62) має вигляд

$$m = M_0 + M_1Y + M_2\left(I(I + 1) - \frac{1}{4}Y^2\right) + M_3J(J + 1). \quad (64)$$

Для баріонів найлегшого октету та декуплету константи M_i рівні

$$M_1 = 1065.5 \text{ MeV}, \quad M_2 = -193 \text{ MeV}, \quad M_3 = 32.5 \text{ MeV}, \quad M_4 = 67.5 \text{ MeV}.$$

Для всіх частинок похибка обчислення не перевищує 0.5%, що відповідає електромагнітним поправкам, які не враховуються формулою (64).

Частинка	Маса з (64)	Експеримент
N($1/2^+$)	939 MeV	939 MeV
$\Lambda(1/2^+)$	1116 MeV	1116 MeV
$\Sigma(1/2^+)$	1181 MeV	1189 MeV
$\Xi(1/2^+)$	1325 MeV	1318 MeV
$\Delta(3/2^+)$	1239 MeV	1234 MeV
$\Sigma(3/2^+)$	1384 MeV	1385 MeV
$\Xi(3/2^+)$	1528 MeV	1533 MeV
$\Omega(3/2^+)$	1672 MeV	1672 MeV

Лекція 13.

Принцип калібрувальної інваріантності.

Принцип локальної калібрувальної інваріантності (разом з вимогою перенормованості теорії) є одним з найбільш продуктивних методів у сучасній фізиці, що сильно обмежує різноманітність можливих теорій. З іншого боку, цей принцип конструктивний, тобто він дає алгоритм, за допомогою якого за заданою групою симетрії можна побудувати лагранжіан із взаємодією.

Означення 1. Теорія називається інваріантною відносно групи перетворень G якщо її лагранжіан $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_i \psi)$ залишається інваріантним при перетвореннях

$$\psi \rightarrow \psi' = \hat{g}\psi, \quad \partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi' = \partial_\mu (\hat{g}\psi), \quad \hat{g} \in G$$

де матриці \hat{g} утворюють деяке представлення групи G .

Означення 2. Перетворення симетрії називаються глобальними, якщо елементи \hat{g} не залежать від просторово-часових координат, і локальними, якщо $\hat{g} = \hat{g}(x)$.

Група $U(1)$. Матрицями \hat{g} є матриці 1×1 виду $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. В цьому випадку ми маємо наступний закон перетворення

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x). \quad (65)$$

Лагранжіан вільного спінорного поля²³

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (66)$$

є, очевидно, інваріантним щодо глобальних калібрувальних перетворень (65).

Будемо вимагати тепер, щоб лагранжіан залишався інваріантним і щодо локальних перетворень, для яких $\alpha = \alpha(x)$. Похідна поля ψ перетворюється за правилом

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{i\alpha} \psi) = e^{i\alpha} (\partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha) \psi).$$

Для компенсації додаткового доданку, пропорційного $\partial_\mu \alpha$, введемо так звану коваріантну похідну D_μ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x),$$

де $A_\mu(x)$ — деяке векторне поле. Для інваріантності лагранжіану необхідно, щоб

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi \quad (67)$$

тобто

$$(\partial_\mu + ieA'_\mu) e^{i\alpha} \psi = e^{i\alpha} (\partial_\mu + ieA'_\mu + i(\partial_\mu \alpha)) \psi = e^{i\alpha} D_\mu \psi.$$

Звідки знаходимо

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} (\partial_\mu \alpha). \quad (68)$$

Таким чином, лагранжіан

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (69)$$

²³Тут і в усіх наступних лекціях використовується система одиниць, у якій $\hbar = c = 1$.

є калібрувально інваріантним щодо локальної групи $U(1)$ якщо калібрувальне поле A_μ перетворюється за законом (68).

Поле A_μ , що входить в (69), не є динамічним, тобто його динаміка не визначається лагранжіаном (69), а вважається заданою. Для побудови динамічної теорії потрібно додати до (69) лагранжіан цього поля, який би був лоренцінваріантним, білінійним по полях A_μ , $\partial_\mu A_\nu$ та інваріантним щодо перетворення (68). Цим вимогам задовольняє лише величина $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, тобто ми приходимо до лагранжіану²⁴

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

де $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор, інваріантний відносно перетворення (68).

Існує загальний метод побудови калібрувально-інваріантного тензора $F_{\mu\nu}$. Для цього розглянемо вираз

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi.$$

Комутатор коваріантних похідних є антисиметричним тензором другого рангу, який позначимо $F_{\mu\nu}$, тобто за означенням

$$[D_\mu, D_\nu]\psi \equiv ieF_{\mu\nu}\psi.$$

При калібрувальних перетвореннях (див. (67))

$$D'_\mu D'_\nu \psi' = D'_\mu (D'_\nu e^{i\alpha}\psi) = D'_\mu e^{i\alpha} \underbrace{(D_\nu \psi)}_\chi = D'_\mu \chi' = e^{i\alpha} D_\mu \chi = e^{i\alpha} D_\mu D_\nu \psi.$$

Тому,

$$[D_\mu, D_\nu]\psi \rightarrow [D'_\mu, D'_\nu]\psi' = e^{i\alpha}[D_\mu, D_\nu]\psi = e^{i\alpha}(ieF_{\mu\nu}\psi).$$

З іншого боку

$$[D'_\mu, D'_\nu]\psi' = ieF'_{\mu\nu}\psi' = ieF'_{\mu\nu}e^{i\alpha}\psi,$$

тобто $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Отже, калібрувально-інваріантний тензор $F_{\mu\nu}$ пропорційний комутатору коваріантних похідних. Для групи $U(1)$

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu] = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (70)$$

тобто

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Незалежно від явного вигляду, оператори D_μ задовольняють тотожності Якобі

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] + [D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] = 0, \quad (71)$$

в справедливості якої можна переконатися прямим розкриттям комутаторів.

$$\begin{aligned} & D_\mu D_\nu D_\lambda - D_\mu D_\lambda D_\nu - D_\nu D_\lambda D_\mu + D_\lambda D_\nu D_\mu + D_\nu D_\lambda D_\mu - D_\nu D_\mu D_\lambda - \\ & - D_\lambda D_\mu D_\nu + D_\mu D_\lambda D_\nu + D_\lambda D_\mu D_\nu - D_\lambda D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu D_\lambda + D_\nu D_\mu D_\lambda \equiv 0. \end{aligned}$$

²⁴Вираз $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}$ також задовольняє всім переліченим вимогам, але являє собою повну дивергенцію: $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma} = 4\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\nu \partial_\lambda A_\sigma)$, і тому не дає внеску в рівняння руху (теж саме має місце і в неабелевому випадку). Але навіть якщо це було не так, доданок $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma} \sim (\mathcal{E}\mathcal{H})$ приводить до порушення P і T інваріантності і тому має бути виключеним.

Тотожність Якобі є стандартним прийомом отримання диференціальних тотожностей на калібрувальний тензор $F_{\mu\nu}$. Підставляючи комутатори (70) в (71) отримуємо наступні співвідношення (друга пара рівнянь Максвелла):

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0.$$

Вимога локальної калібрувальної інваріантності приводить до необхідності введення калібрувального поля A_μ — переносника взаємодії. Спосіб введення взаємодії поля ψ з полем A_μ за допомогою заміни $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ називається мінімальною взаємодією. Всі відомі на сьогоднішній день калібрувальні взаємодії (сильна, слабка, електромагнітна) є мінімальними²⁵. Інші калібрувально-інваріантні взаємодії (як, наприклад, $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$) не є перенормованими.

Наслідком калібрувальної симетрії є безмасовість калібрувального бозона — кванта поля A_μ . Справді, масовий доданок $m^2 A_\mu A^\mu$ не є інваріантним щодо перетворення (68) і не може входити в лагранжіан, тобто $m = 0$. Абелев характер групи фізично проявляється у тому, що фотон є незарядженим бозоном, тобто у лагранжіані відсутні члени із самодією (рівняння поля лінійні). Для неабелевої групи симетрії це вже не так. Теорії електрослабких і сильних взаємодій, що засновані на неабелевих групах $SU(2) \times U_Y(1)$ та $SU(3)$, є суттєво нелінійними.

Група $SU(2)$. В цьому випадку поле ψ є ізотопічним мультиплетом. Для фундаментального представлення поле ψ є дублет $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ з лагранжіаном (66) та законом перетворення

$$\psi' = \hat{U}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\hat{U}^{-1}, \quad \hat{U} = e^{i\alpha\tau/2},$$

де α — дійсний вектор, що задає "поворот" у просторі $SU(2)$, τ — матриці Паулі, які задовольняють співвідношенням

$$[\tau_i/2, \tau_j/2] = i\epsilon_{ijk}\tau_k/2, \quad \text{Tr}(\tau_i\tau_j) = 2\delta_{ij}.$$

Лагранжіан (66) інваріантний щодо глобальних перетворень групи $SU(2)$, оскільки $[U, \gamma^\mu] = 0$ ²⁶. При локальних перетвореннях

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' = \partial_\mu(U\psi) = (U\partial_\mu + (\partial_\mu U))\psi,$$

тобто лагранжіан (66) не інваріантний. Введемо коваріантну похідну

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu, \tag{72}$$

де \hat{A}_μ — деяке операторне (матричне) поле, g — заряд, що характеризує взаємодію поля ψ з калібрувальними полями A_μ^i (не плутати g з електричним зарядом e). Для інваріантності лагранжіана необхідно, щоб

$$D_\mu\psi \rightarrow D'_\mu\psi' = UD_\mu\psi, \tag{73}$$

²⁵Це твердження відноситься до "первинного" лагранжіана з непорушеною симетрією. Після спонтанного порушення симетрії, ті симетрії, що залишилися, можуть реалізовувати вже не мінімальні взаємодії. Прикладом цього може бути взаємодія бозонів W^\pm з фотоном (див. стор. 73).

²⁶Оператори U та γ_μ діють на різні компоненти поля ψ : матриці γ_μ діють на внутрішні компоненти полів $\psi_{1,2}$

$$\gamma_\mu\psi = \begin{pmatrix} \gamma_\mu\psi_1 \\ \gamma_\mu\psi_2 \end{pmatrix},$$

в той час, як U переміщує компоненти дублета, не змінюючи їх внутрішньої структури.

тобто

$$(\partial_\mu + ig\hat{A}'_\mu)U\psi = (U\partial_\mu + (\partial_\mu U) + ig\hat{A}'_\mu U)\psi = UD_\mu\psi,$$

звідки знаходимо закон перетворення

$$\hat{A}'_\mu = U\hat{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (74)$$

При інфінітезимальних перетвореннях

$$U = e^{i\hat{\alpha}} \approx \mathbb{1} + i\hat{\alpha}, \quad U^{-1} = e^{-i\hat{\alpha}} \approx \mathbb{1} - i\hat{\alpha}; \quad \hat{\alpha} \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}/2.$$

$$U\hat{A}_\mu U^{-1} = \hat{A}_\mu + i[\hat{\alpha}, \hat{A}_\mu], \quad (\partial_\mu U)U^{-1} = i(\partial_\mu \hat{\alpha}),$$

і для закону перетворення калібрувального поля отримуємо

$$\hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu + i[\hat{\alpha}, \hat{A}_\mu] - \frac{1}{g}(\partial_\mu \hat{\alpha}). \quad (75)$$

З'ясуємо тепер структуру поля \hat{A}_μ . Оскільки оператор iD_μ — ермітовий, то і \hat{A}_μ — також ермітовий оператор і може бути розкладений по чотирьох лінійно незалежних матрицях $\mathbb{1}, \boldsymbol{\tau}$ з дійсними (через ермітність) коефіцієнтами — полями A_μ^a

$$\hat{A}_\mu = A_\mu^0 \cdot \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 A_\mu^i \cdot \frac{\tau^i}{2}$$

Як видно з (75) (або (74)) поле A_μ^0 при $SU(2)$ поворотах змінюється лише на градієнтну (калібрувальну) добавку, тобто є $SU(2)$ скаляром і немає відношення до групи, що розглядається. Тому, фізично цікавими є лише три компоненти поля A_μ^i (за кількістю генераторів групи $SU(2)$), отже можна записати²⁷

$$\hat{A}_\mu = \sum_{i=1}^3 A_\mu^i \cdot \frac{\tau^i}{2}. \quad (76)$$

З урахуванням цього

$$[\hat{\alpha}, \hat{A}_\mu] = \alpha^i A_\mu^j [\tau^i/2, \tau^j/2] = i\epsilon^{ijk} \alpha^i A_\mu^j \frac{\tau^k}{2}$$

і інфінітезимальне перетворення (75) набуває вигляду

$$(A_\mu^k)' = A_\mu^k - \epsilon^{ijk} \alpha^i A_\mu^j - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^k), \quad k = 1, 2, 3$$

або у векторних позначеннях

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu - [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{A}_\mu] - \frac{1}{g}(\partial_\mu \boldsymbol{\alpha}). \quad (77)$$

²⁷З точки зору теорії груп структура поля \hat{A}_μ впливає з таких міркувань. З вимоги калібрувальної інваріантності слідує, що коваріантна похідна D_μ перетворюється за приєднаним представленням групи (див. (73))

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = UD_\mu U^{-1},$$

отже \hat{A}_μ повинні належати алгебрі цієї групи. Цієї вимоги достатньо. Можна показати, що величини $(\partial_\mu U)U^{-1}$ належать алгебри, а тому і $\hat{A}'_\mu = U\hat{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$ також елемент з алгебри. Оскільки алгебра Лі утворює дійсний векторний простір, будь-який елемент з алгебри можна розкласти по базису (генераторам групи) в цьому просторі — матрицям Паулі. Таким чином, ми приходимо до (76).

Два перших доданки (77) збігаються із законом перетворення вектора при $SU(2)$ поворотах. Останній доданок — калібрувальна добавка. Зауважимо також, що калібрувальні перетворення не змінюють дійсний характер полів A_μ^i .

Таким чином, ми приходимо до лагранжіана (69). Щоб зробити теорію динамічною, потрібно додати до (69) лагранжіан вільних полів A_μ^i . Для цього застосуємо стандартну схему. Розглянемо комутатор

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + ig\hat{A}_\mu, \partial_\nu + ig\hat{A}_\nu] = ig[(\partial_\mu \hat{A}_\nu) - (\partial_\nu \hat{A}_\mu)] - g^2[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] \equiv ig\hat{F}_{\mu\nu}$$

тобто

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + ig[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (78)$$

де (аналогічно (76)) введено позначення

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^3 F_{\mu\nu}^i \cdot \frac{\tau^i}{2} = \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}/2.$$

В явному вигляді

$$[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] = A_\mu^i A_\nu^j [\tau^i/2, \tau^j/2] = i\epsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j \tau^k/2. \quad (79)$$

Рівність (78) набуває вигляду

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - g\epsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j$$

або у векторних позначеннях

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - g[\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu]. \quad (80)$$

Знайдемо закон перетворення полів $\hat{F}_{\mu\nu}$. Маємо

$$[D'_\mu, D'_\nu]\psi' = [D'_\mu, D'_\nu]U\psi = U[D_\mu, D_\nu]\psi = igU\hat{F}_{\mu\nu}\psi.$$

З іншого боку

$$[D'_\mu, D'_\nu]\psi' = ig\hat{F}'_{\mu\nu}\psi' = ig\hat{F}'_{\mu\nu}U\psi,$$

тобто величини $\hat{F}_{\mu\nu}$ перетворюються за приєднаним представленням

$$\hat{F}'_{\mu\nu} = U\hat{F}_{\mu\nu}U^{-1}.$$

Аналогічно перетворюється величина $\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}$

$$\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \rightarrow \hat{F}'_{\mu\nu}\hat{F}'^{\mu\nu} = U\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}U^{-1}. \quad (81)$$

Оскільки під час взяття сліду ми можемо виконувати циклічну перестановку матриць, то величина $\text{Tr } \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}$ залишається інваріантною. Обчислимо її:

$$\text{Tr } \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu j} \text{Tr} \left(\frac{\tau^i}{2} \cdot \frac{\tau^j}{2} \right) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu j} \delta_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}.$$

Остаточно, отримуємо наступний калібрувально-інваріантний лагранжіан

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}. \quad (82)$$

Тотожність Якобі (71) для даної групи дає таке рівняння:

$$D_\mu \hat{F}_{\nu\lambda} + D_\nu \hat{F}_{\lambda\mu} + D_\lambda \hat{F}_{\mu\nu} = 0,$$

де оператор коваріантної похідної D_μ визначається як

$$D_\mu \hat{F}_{\nu\lambda} = \partial_\mu \hat{F}_{\nu\lambda} + ig[\hat{A}_\mu, \hat{F}_{\nu\lambda}]$$

і аналогічно для будь-якого оператора \hat{Q} , що діє у цьому просторі.

Узагальнення на групу $SU(n)$. У випадку фундаментального представлення поле ψ є n -компонентним стовпчиком із законом перетворення

$$\psi' = \hat{U}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\hat{U}^{-1}, \quad \hat{U} = e^{i\alpha_i T_i} \equiv e^{i\hat{\alpha}},$$

де T_i — генератори групи $SU(n)$. Отримані раніше формули (74), (75), (78), (81), в які входять лише величини зі шляпками, залишаються без змін і для групи $SU(n)$. Відмінність полягає лише в тому, що тепер замість трьох полів A_μ^i буде $n^2 - 1$ калібрувальних полів. Формули (77) і (80) змінюють свій вигляд, оскільки при їх виведенні використовувалися комутаційні співвідношення для матриць Паулі. Для групи $SU(n)$

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k, \quad \text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij},$$

де f_{ijk} — структурні константи групи $SU(n)$, що антисиметричні за будь-якою парою індексів. Замість формул (77) і (80) тепер матимемо

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^{i'} = A_\mu^i - f_{ijk}\alpha^j A_\mu^k - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i),$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - gf_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k.$$

Як і для групи $SU(2)$ величина $\text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}$ залишається інваріантною, а лагранжіан має вигляд (82).

Особливістю теорій з неабелевою групою симетрії є їх суттєво нелінійний характер по відношенню до калібрувальних полів A_μ^i . Дійсно, тензор $F_{\mu\nu}^i$ квадратичний по полях A_μ , а значить рівняння руху будуть містити нелінійності квадратичні та кубічні по A_μ . Такі поля називаються полями із самодією, оскільки для них не виконується принцип суперпозиції.

Інша особливість неабелевої групи пов'язана з ефектом "квантування" заряду. У випадку абелевої взаємодії заряди e різних полів можуть бути довільними, ніяк між собою не пов'язаними. Справді, нехай є два комплексні поля ψ і φ , що перетворюються при калібрувальних перетвореннях як

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = e^{iq\alpha(x)}\varphi,$$

причому кожне з цих полів входить в лагранжіан зі своєю коваріантною похідною

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad D_\mu \varphi = (\partial_\mu + iqeA_\mu)\varphi.$$

Тут e і qe — заряди полів ψ і φ відповідно. При калібрувальному перетворенні поле A_μ перетворюється за законом (68). При цьому

$$D'_\mu \varphi' = (\partial_\mu + iqeA_\mu - iq(\partial_\mu \alpha))e^{iq\alpha}\varphi = e^{iq\alpha} D_\mu \varphi,$$

тобто лагранжіан як поля ψ , так і поля φ залишається інваріантним. Абелева група не фіксує відносні величини калібрувальних зарядів різних полів²⁸.

²⁸Чому електричний заряд адронів є цілим кратним заряду електрона? Відповідь на це питання дає Стандартна Модель. Для скорочення розбіжностей в трикутних діаграмах з лептонною петлею необхідно, щоб сумарний заряд кожного кварк-лептонного покоління дорівнював нулю. Наприклад, для першого покоління ця умова має вигляд

$$Q(e) + Q(\bar{\nu}_e) + 3(Q(u) + Q(d)) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + 0 + 3(2/3 - 1/3) = 0, \quad (*)$$

де $Q(l)$ — електричний заряд лептона/кварка; множник 3 відповідає трьом кольоровим станам кварків. Оскільки $Q(u) = -2Q(d)$, то з (*), наприклад, слідує, що $Q(p) = -Q(e)$.

Інша ситуація для неабелевої групи. Наприклад, навіть у випадку інфінітезимальних перетворень (75)

$$\begin{aligned} D'_\mu \varphi' &= (\partial_\mu + i q g \hat{A}_\mu - q g [\hat{\alpha}, \hat{A}_\mu] - i q (\partial_\mu \hat{\alpha})) e^{i q \hat{\alpha}} \varphi = \\ &= e^{i q \hat{\alpha}} (\partial_\mu + i q g \hat{A}_\mu + q g (q - 1) [\hat{\alpha}, \hat{A}_\mu]) \varphi \neq e^{i q \hat{\alpha}} D_\mu \varphi, \quad \text{якщо } q \neq 1 \end{aligned}$$

тобто, для калібрувальної інваріантності теорії заряд цієї групи повинен бути один для всіх полів (та одного знаку).

Гравітація. Гравітаційна взаємодія не є чисто калібрувальною, оскільки крім перетворень самих польових змінних перетворюються також і координати x_μ . Проте, гравітація має багато спільних рис з калібрувальною теорією.

Так само як і в калібрувальних теоріях гравітаційна взаємодія вводиться шляхом подовження похідної: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$, де Γ_μ — деякі величини, що виражаються через символи Крістофеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Явний вигляд Γ_μ залежить від того, на яке поле (спінорне, векторне, тензорне) діє оператор D_μ . Таким чином, аналогом калібрувальних полів A_μ у гравітації є символи Крістофеля, а аналогом тензора $F_{\mu\nu}$ — тензор кривизни:

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi_\lambda = R_{\mu\nu\lambda\sigma} \Psi^\sigma.$$

Тотожності Якобі (71) відомі у гравітації як тотожності Біанки

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma;\rho} + R_{\mu\nu\sigma\rho;\lambda} + R_{\mu\nu\rho\lambda;\sigma} = 0,$$

де $A_{\dots;\mu} \equiv D_\mu A_{\dots}$. Можна поглянути на цю аналогію і з іншого боку: калібрувальна теорія має характерні риси теорії гравітації. З сучасної точки зору тензор $F_{\mu\nu}$ калібрувального поля A_μ можна розглядати як кривизну деякого абстрактного зарядового (або внутрішнього) простору — простору представлень відповідної компактної групи Лі ($U(1)$, $SU(2)$ і т.п.). При цьому поля A_μ повністю аналогічні символам Крістофеля в теорії гравітації і визначають зміну вектора $\psi(x)$ при паралельному переносі в зарядовому просторі. Вперше ця думка була висловлена Г. Вейлем в 1929 р, який прямо називав електродинаміку теорією відносності в зарядовому просторі.

Усі варіанти квантової гравітації, що існують на сьогоднішній день, є неперенормованими (і тому нефізичними). Можливо, це пов'язано з тим, що квантова теорія поля, будучи локальною теорією, має обмежену сферу застосування і є низькоенергетичною границею деякої більш загальної, нелокальної, теорії, можливо багатовимірної, як теорія струн, бран та ін.

Лекція 14.

Спонтанне порушення глобальної симетрії.

Маса поля в КТП. В квантовій теорії поля кожній частинці відповідає квантоване поле, і навпаки, кожному полю відповідає квант збудження — частинка. Тому, говорячи про масу якогось поля в КТП, ми маємо на увазі масу відповідного кванта збудження.

1. **Комплексне скалярне поле.** Лагранжیان (в одиницях $\hbar = c = 1$) має вигляд

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2.$$

Цей лагранжیان приводить до рівняння руху (рівняння Клейна - Гордона)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0,$$

розв'язком якого є плоска хвиля $\phi = \phi_0 e^{-ip_\mu x^\mu}$, де $p_\mu p^\mu = m^2$. З цього співвідношення видно, що параметр m , що входить в лагранжیان, слід ототожнити з масою скалярного поля.

2. **Векторне поле A_μ .** Лагранжیان векторного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

приводить до рівняння руху (рівняння Прока)

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0,$$

яке розпадається на систему двох рівнянь

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) A_\mu = 0,$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

З першого рівняння системи видно, що параметр m — маса векторного поля.

3. **Дійсне скалярне поле з самодією.** Лагранжیان скалярного поля з потенціалом $V(\varphi)$ має вигляд

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi).$$

Рівняння руху, що відповідає цьому лагранжіану

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + V'(\varphi) = 0$$

у випадку довільного (не квадратичного) лагранжіана не зводиться до рівняння Клейна - Гордона і не є лінійним. Що тепер є масою? В КТП маса кванта поля визначається за спектром малих збурень над вакуумним станом. Такі збурення задовольняють рівнянню Клейна - Гордона з якого і знаходиться маса частинки.

Вакуумний стан - це стан з мінімальною енергією. З гамільтоніану

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2) + V(\varphi)$$

слідuje, що мінімум енергії досягається при $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, де φ_0 — мінімум потенціалу $V(\varphi)$. Позначимо $\chi = \varphi - \varphi_0$ — мале збурення на фоні вакууму. Розкладаючи потенціал $V(\varphi)$ в ряд по χ , отримуємо

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi) - V(\varphi_0) - \frac{1}{2} V''(\varphi_0) \chi^2 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \chi = 0,$$

де $m^2 = V''(\varphi_0) > 0$ — маса кванта поля.

Симетрії лагранжіана (локальні та глобальні) часто бувають порушеними. Динамічний механізм порушення симетрії називається спонтанним порушенням. Спонтанне порушення глобальної та локальної (калібрувальної) симетрії відбувається по-різному. Тому ми розглянемо їх окремо.

Спонтанне порушення дискретної симетрії. Розглянемо дійсне скалярне поле φ з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{\lambda}{4}(\varphi^4 - 2\eta^2 \varphi^2 + \eta^4) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\varphi), \quad (83)$$

де

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - \eta^2)^2. \quad (84)$$

Цей лагранжіан має симетрію щодо дискретного перетворення

$$\mathcal{L} = \text{inv} : \quad \varphi \rightarrow -\varphi.$$

Доданок $V(\varphi)$ описує самодію скалярного поля²⁹ (Рис. 20). Як бачимо, стан $\varphi = 0$, відносно якого лагранжіан симетричний, не є вакуумним, оскільки у цьому стані потенціал $V(\varphi)$ має максимум. Через це, доданок $\frac{1}{2}\lambda\eta^2\varphi^2$, що входить в лагранжіан, не можна розглядати як масовий, а множник $-\lambda\eta^2$ — як квадрат маси (уявної). Для правильної інтерпретації теорії необхідно визначити основний стан і розглянути його малі збурення.

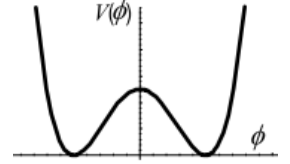


Рис. 20

З (83) для енергії поля отримуємо

$$E[\varphi] = \int (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) d^3x = \int \left(\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2) + V(\varphi) \right) d^3x, \quad (85)$$

де $\pi = \dot{\varphi}$ — канонічний імпульс. Основний стан (вакуум) — це стан, який забезпечує мінімум функціоналу $E[\varphi]$. Перші два доданки (85) мінімальні у випадку $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Значення цієї константи знаходимо з умови мінімуму останнього доданку

$$\left. \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \pm \eta.$$

Таким чином, основний стан моделі (83) є двократно виродженим.

Припустимо, що в результаті взаємодії поле φ передало всю свою енергію іншим полям, і в області простору, що розглядається, перейшло в один із вакуумних станів, в якості якого ми виберемо значення

$$\varphi_0 = +\eta.$$

Розглянемо малі збурення на фоні цього вакуумного стану. Поклавши

$$\varphi(x) = \eta + \chi(x),$$

після підстановки цього виразу в (83), отримуємо

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \lambda\eta^2\chi^2 + \mathcal{L}_{int},$$

²⁹Можливий вигляд потенціалу самодії сильно обмежений вимогою перенормованості теорії, так що допустимими є лише степеневі потенціали, не вище четвертого порядку.

$$\mathcal{L}_{int} = -\lambda\eta\chi^3 - \frac{\lambda}{4}\chi^4.$$

Отриманий лагранжіан вже не має симетрії щодо заміни $\chi \rightarrow -\chi$. В зв'язку з цим говорять, що сталося спонтанне порушення симетрії³⁰. Доданок $-\lambda\eta^2\varphi^2$ визначає масу скалярного поля:

$$\lambda\eta^2 = \frac{m^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{2\lambda\eta^2}.$$

Отже, при спонтанному порушенні симетрії отримуємо теорію з масивним полем χ , лагранжіан якого вже не має початкової симетрії.

В розглянутому вище прикладі лагранжіан мав лише дискретну симетрію і, як наслідок, вакуумний многовид також дискретний. В таких моделях після спонтанного порушення симетрії всі поля стають масивними. Якщо ж симетрія вихідного лагранжіана неперервна, то і вакуумний многовид S_V буде неперервним (тобто, між різними значеннями вакуумних станів існує неперервний перехід, який не виводить поля за межі S_V). В цьому випадку після спонтанного порушення симетрії в теорії залишаться безмасові поля, кількість яких збігається з розмірністю S_V . Поява безмасових ступенів вільності є неодмінним атрибутом спонтанного порушення будь-якої неперервної симетрії. Проілюструємо це на прикладах.

Спонтанне порушення глобальної $U(1)$ симетрії. В цьому випадку лагранжіан

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - \lambda(|\phi|^2 - \eta^2/2)^2$$

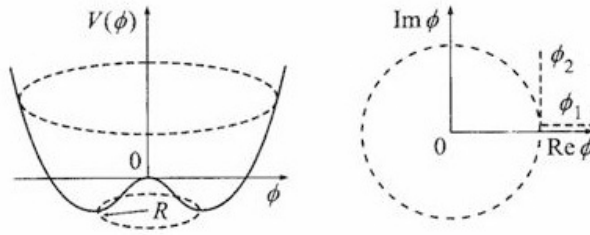
інваріантний щодо однопараметричної групи перетворень

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (86)$$

де $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$, $\varphi_{1,2}$ — дійсні поля. Вакуумний многовид S_V знаходиться з умови мінімуму потенціалу

$$V(\phi) = \min \quad \Rightarrow \quad S_V: \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \eta^2,$$

тобто S_V — коло у просторі полів.



Виберемо довільний вакуумний стан φ_0 на S_V . Оскільки всі точки на S_V рівноправні, зручно покласти

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta, \quad \text{тобто.} \quad \varphi_1 = \eta, \quad \varphi_2 = 0.$$

В околі цього вакууму

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \chi(x) + i\theta(x)),$$

³⁰Слово "спонтанне" відображає той факт, що в різних, причинно-незалежних областях простору, поле φ може "скочуватися" у різні вакуумні стани ($\pm\eta$), вибір між якими відбувається випадково (спонтанно).

а лагранжіан набуває вигляду

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta) - \lambda \eta^2 \chi^2 + \mathcal{L}_{int}, \quad (87)$$

де $\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}\lambda(\chi^2 + \theta^2)(\chi^2 + \theta^2 + 4\eta\chi)$ — лагранжіан взаємодії, пропорційний третій та четвертій ступені полів χ і θ . З (87) видно, що ми маємо справу з теорією з одним масивним полем χ ($m_\chi = \sqrt{2\lambda\eta}$) і одним безмасовим — θ . Безмасова мода відповідає збуренню, що розповсюджується вздовж вакуумного многовиду: для нього $V(\varphi) = \text{const}$, отже і $m_\theta = 0$.

Те, що безмасова мода пов'язана з неперервною симетрією лагранжіана (а отже, і з неперервним вакуумним многовидом) можна показати ще і у такий спосіб. В околі довільної точки вакуумного многовиду поле ϕ можна представити у вигляді

$$\phi(x) = e^{i\theta(x)}\rho(x).$$

В силу інваріантності лагранжіана щодо перетворень (86) потенціал $V(\phi)$ не буде залежати від поля θ , тобто в лагранжіан входять лише похідні від θ , що і означає його безмасовість. Таке (безмасове) поле називається голдстоунівським.

Спонтанне порушення глобальної $SO(3)$ симетрії. У випадку групи $U(1)$ вибір конкретного вакууму повністю порушував початкову симетрію лагранжіану. В загальному випадку початкова симетрія може порушуватися не повністю. Як ілюстрацію цього, розглянемо лагранжіан для трьох дійсних скалярних полів виду

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - \frac{\lambda}{4} \left(\sum \varphi_i^2 - \eta^2 \right)^2.$$

Цей лагранжіан інваріантний відносно групи тривимірних поворотів $SO(3)$. Вакуумний многовид визначається з умови

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 = \eta^2$$

і є сферою S^2 (двовимірний многовид). З цього випливає, що після спонтанного порушення симетрії ми отримаємо теорію з двома безмасовими полями та одним масивним. Покажемо це явно. Виберемо в якості вакуумного стану значення

$$\varphi_3 = \eta, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \quad (88)$$

Тоді, в околі цього вакууму

$$\varphi_1(x) = \theta_1(x), \quad \varphi_2(x) = \theta_2(x), \quad \varphi_3(x) = \eta + \chi(x).$$

Підставляючи ці вирази в лагранжіан, отримаємо

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \theta_1)^2 + (\partial_\mu \theta_2)^2 + (\partial_\mu \chi)^2 \right) - \lambda \eta^2 \chi^2 + \mathcal{L}_{int}, \quad (89)$$

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4} \left((\theta_1^2 + \theta_2^2)^2 + 4\eta\chi(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 4\eta\chi^3 + \chi^4 \right).$$

З (89) видно, що моди θ_1 і θ_2 є голдстоунівськими (безмасовими), а поле χ — масивне, з масою $m_\chi = \sqrt{2\lambda\eta}$.

Вибір вакууму (88) порушує початкову симетрію лагранжіана не повністю: є підгрупа поворотів, що залишає значення (88) незмінним

$$\begin{aligned}\varphi_1 \rightarrow \varphi'_1 &= \varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \sin \alpha, \\ \varphi_2 \rightarrow \varphi'_2 &= \varphi_2 \cos \alpha - \varphi_1 \sin \alpha, \\ \varphi'_3 &= \varphi_3.\end{aligned}\tag{90}$$

Відповідно, і після спонтанного порушення лагранжіан залишиться інваріантним щодо перетворень (90), що безпосередньо видно з (89), куди входять поля θ_1 і θ_2 лише у вигляді комбінацій $\theta_1^2 + \theta_2^2$ і $(\partial_\mu \theta_1)^2 + (\partial_\mu \theta_2)^2$, інваріантних щодо поворотів (90). Таким чином, кінцевий лагранжіан має симетрію $SO(2) \subset SO(3)$.

Розмірність вакуумного многовиду (а отже, і число безмасових мод) можна знайти з аналізу порушення групи симетрії. Відповідне твердження називається теоремою Голдстоуна.

Теорема. При спонтанному порушенні глобальної симетрії число безмасових полів, що утворюються, дорівнює числу порушених симетрій, тобто

$$N_g = N(G) - N(H),$$

де N_g — число голдстоунівських мод, $N(G)$ — розмірність початкової групи симетрії (тобто число генераторів групи G), $N(H)$ — розмірність групи симетрії H кінцевого лагранжіана.

У розглянутому нами прикладі $N(SO(3)) = 3$, $N(SO(2)) = 1$, $N_g = 2$.

Теорема Голдстоуна впливає з таких міркувань. За припущенням, початковий лагранжіан інваріантний щодо групи симетрії G , тобто

$$\mathcal{L}(T_g \varphi) = \mathcal{L}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad V(T_g \varphi) = V(\varphi),\tag{91}$$

де T_g — представлення групи G , $g \in G$. Таким чином, якщо φ_0 — вакуумний стан (тобто $V(\varphi_0) = V_{min}$), то і $T_g \varphi_0$ — також вакуум. Далі, після спонтанного порушення симетрія лагранжіана порушується не повністю — є підгрупа H , що залишає обраний вакуум φ_0 інваріантним

$$T_h \varphi_0 = \varphi_0, \quad h \in H.\tag{92}$$

Інакше кажучи, підгрупа H — стаціонарна (така, що переводить $\varphi_0 \rightarrow \varphi_0$). Відповідно, кількість незалежних перетворень, що переводять $\varphi_0 \rightarrow \varphi'_0 \in S_V$, $\varphi'_0 \neq \varphi_0$ дорівнює різниці числа генераторів вихідної групи та групи H . З іншого боку, кожному такому перетворенню відповідає лінійно незалежна мода, яка є малим збуренням вакууму φ_0 і не виходить за межі вакуумного многовиду. Всі ці польові моди — безмасові (бо на них потенціал залишається незмінним, $V = V_{min}$).

Лекція 15.

Спонтанне порушення калібрувальної симетрії. Механізм Хіггса.

При переході від глобальної симетрії до локальної в теорію вводяться безмасові калібрувальні поля A_μ^i , число яких збігається з розмірністю групи симетрії (див. Лекцію 13). Якщо потрібно мати справу з масивними бозонами, то калібрувальну симетрію необхідно порушити. Простий спосіб введення мас "руками", шляхом додавання в лагранжіан масових членів $\frac{1}{2}m_i^2 A_\mu^i A^{\mu i}$, приводить до того, що теорія перестає бути перенормованою. Спосіб введення мас бозонів, що залишає теорію перенормованою, називається механізмом Хіггса. Проілюструємо його на прикладах.

Група $U(1)$. Припустимо, що ми хочемо мати справу з масивним "фотонем". Для цього додамо в лагранжіан теорії комплексне скалярне поле ϕ з зарядом g , що взаємодіє з A_μ через коваріантну похідну D_μ :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(|\phi|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (93)$$

де $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, а потенціал самодії $V(|\phi|)$ виберемо у вигляді

$$V(|\phi|) = \lambda(|\phi|^2 - \eta^2/2)^2 = \lambda(|\phi|^4 - \eta^2|\phi|^2 + \eta^4/4) \quad (94)$$

λ — безрозмірна константа (в одиницях $\hbar = c = 1$). Потенціал (94) називають потенціалом зі спонтанним порушенням симетрії.

Якщо $\lambda\eta^2 > 0$, то здається, що поле ϕ має уявну масу ($m^2 = -\lambda\eta^2$), що відповідає тахіону. Проте, стан $\phi = 0$ не є вакуумним і, отже, величину $\lambda\eta^2$ не можна інтерпретувати як масовий член. Стан $\phi = 0$ є нестійким, і через деякий час поле "скотиться" в один з мінімумів потенціалу, віддавши свою енергію іншим полям, з якими воно взаємодіє. Про це кажуть, що сталося спонтанне порушення симетрії. Знайдемо вакуумний стан системи.

Повна енергія полів ϕ і A_μ , що відповідає лагранжіану (93), має вигляд

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (F_{0i})^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + (D_0 \phi)^* (D_0 \phi) + (D_i \phi)^* (D_i \phi) + V(|\phi|) \right). \quad (95)$$

Перші чотири доданки в (95) мінімальні (рівні нулю) при

$$A_\mu(x) = \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x), \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha(x)} \phi_0, \quad \phi_0 = \text{const}, \quad (96)$$

де $\alpha(x)$ — довільна функція координат. Значення постійної ϕ_0 знаходиться з умови мінімуму потенціалу: $V(|\phi|) = 0$ при $|\phi_0| = \eta$. Якщо записати комплексне поле ϕ у вигляді $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$, то поверхня потенціальної енергії матиме вигляд "дна пляшки", основа якої — вакуумний многовид — описується рівнянням

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \eta^2.$$

Присутність у (96) довільної функції $\alpha(x)$ є прямим наслідком калібрувальної інваріантності теорії: лагранжіан (93) (а разом з ним і енергія (95)) інваріантні щодо перетворень

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x), \quad \phi \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \phi. \quad (97)$$

В якості вакуумного стану виберемо

$$(A_\mu)_{vac} = 0, \quad \phi_{vac} = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta. \quad (98)$$

Будь-який інший вакуумний стан можна отримати з (98) за допомогою відповідного калібрувального перетворення (97). Мале збурення стану (98) має вигляд

$$A_\mu = A_\mu, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \chi_1 + i\chi_2). \quad (99)$$

Вираз (99) зручно переписати в іншій формі

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \chi) e^{i\theta},$$

де $\tan \theta = \chi_2/(\eta + \chi_1)$, $\chi = \sqrt{(\eta + \chi_1)^2 + \chi_2^2} - \eta$. Підставляючи значення збурених полів в лагранжіан, отримуємо

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + g^2 (\eta + \chi)^2 (A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta)^2 \right) - \frac{\lambda}{4} \chi^2 (2\eta + \chi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (100)$$

Поле θ входить в (100) тільки у вигляді похідної $\partial_\mu \theta$, причому крім кінетичного доданку $\frac{1}{2} g^2 \eta^2 (\partial_\mu \theta)^2$ в лагранжіані присутні також доданки нестандартного вигляду $\sim \chi^2 (\partial_\mu \theta)^2$, $\chi^2 A_\mu \partial^\mu \theta$ та інші. Щоб лагранжіан (100) можна було трактувати в термінах взаємодіючих полів, зробимо заміну змінних. Замість полів A_μ і $\partial^\mu \theta$ введемо поле

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta. \quad (101)$$

В результаті, лагранжіан (100) набуває звичного вигляду

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \lambda \eta^2 \chi^2 + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 B_\mu B^\mu - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int}, \quad (102)$$

де

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} g^2 \chi (B_\mu B^\mu) (2\eta + \chi) - \frac{\lambda}{4} \chi^3 (4\eta + \chi), \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Зауважимо, що поле B_μ відрізняється від A_μ на градієнтну добавку $\frac{1}{g} \partial_\mu \theta$, аналогічно тому, як пов'язані між собою поля A'_μ і A_μ при калібрувальних перетвореннях (97). Таким чином, в фізичному сенсі поля B_μ і A_μ еквівалентні, а $F_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$. Це пов'язано з тим, що поле θ входить в ϕ у вигляді $e^{i\theta}$ і тому може бути виключено калібрувальним перетворенням з $\alpha = \theta$:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta + \chi).$$

Інакше кажучи, поле θ є нефізичним (неспостерігаємим) оскільки воно цілком зводиться до калібрування. При цьому $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) = B_\mu$. Таким чином, перехід до полів χ і B_μ еквівалентний фіксації калібрування. Такий вибір калібрування називають унітарним.

Лагранжіан (102) відповідає масивному скалярному полю χ ($m_\chi = \sqrt{2\lambda}\eta$) і масивному векторному полю B_μ ($m_B = g\eta$). Поле θ з лагранжіану зникло. Проте кількість ступенів вільності не змінилася. До спонтанного порушення було комплексне скалярне поле ϕ (два ступеня вільності — φ_1 і φ_2) і безмасове поле A_μ — ще дві поляризаційні ступені вільності (з чотирьох компонент поля A_μ функціонально незалежними є лише дві

за рахунок калібрувальної свободи). Після порушення симетрії залишається одне дійсне скалярне поле χ і масивне векторне поле B_μ (три ступеня вільності, тому що на чотири компоненти поля B_μ накладається одна умова поперечності $\partial_\mu B^\mu = 0$). Таким чином, повна кількість фізичних ступенів вільності залишається незмінною: $2 + 2 = 1 + 3$.

Поле θ називають голдстоунівським бозоном, що не відбувся (у разі спонтанного порушення глобальної симетрії поле θ залишилося б безмасовим — голдстоунівський бозон, а χ набуло б масу). В зв'язку з цим кажуть, що калібрувальне поле "з'їло" голдстоунівський бозон і стало масивним. В цьому полягає механізм Хіггса. Кванти поля χ називають хіггсовськими бозонами.

Лагранжіан (102), як і вихідний лагранжіан (93), інваріантний щодо калібрувальних перетворень групи $U(1)$. Щоб переконатися в цьому, знайдемо закон перетворення полів χ і B_μ при калібрувальних перетвореннях (97).

$$\phi \rightarrow e^{-i\alpha} \phi \quad \Rightarrow \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \theta \rightarrow \theta - \alpha. \quad (103)$$

$$B_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha + \frac{1}{g} \partial_\mu (\theta - \alpha) = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta = B_\mu.$$

Отже, поля χ і B_μ калібрувально інваріантні, а отже інваріантним залишається і лагранжіан (102). Тому термін "спонтанне порушення калібрувальної симетрії" не зовсім адекватний: кінцевий лагранжіан, як і раніше, має симетрію $U(1)$, проте тепер ця симетрія явно (через поля χ і B_μ) не проявляється. Така симетрія називається прихованою. Збереження калібрувальної інваріантності теорії при спонтанному порушенні симетрії має першочергове значення для доведення її перенормованості.

Механізм Хіггса для локальної $SU(2)$ симетрії. В цьому випадку лагранжіан має вигляд

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \quad (104)$$

де тепер $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ — ізотопічний дублет, $\phi_{1,2}$ — комплексні поля, $D_\mu = \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu$, $\hat{A}_\mu = \sum A_\mu^i \tau^i / 2$,

$$V(\phi^\dagger \phi) = \lambda(\phi^\dagger \phi - \eta^2/2)^2.$$

Вакуумний многовид поля ϕ описується рівнянням $\phi^\dagger \phi = \eta^2/2$ і є сферою S^3 . Виберемо вакуум у вигляді

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді в околі цього значення

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_3 \\ \eta + \chi + i\theta_1 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

де χ і θ_i — дійсні поля. Поле ϕ зручно представити у вигляді

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\vec{\xi}(x)\vec{\tau}/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}.$$

Дійсно, для малих ξ_i

$$e^{i\xi_i \tau_i / 2} = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \xi_i \tau_i = \begin{pmatrix} 1 + i\xi_3/2 & \frac{1}{2}(i\xi_1 + \xi_2) \\ \frac{1}{2}(-i\xi_1 + \xi_2) & 1 - i\xi_3/2 \end{pmatrix}.$$

Отже, в лінійному наближенні по ξ_i і χ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\tilde{\xi}(x)\tilde{\tau}/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2}(i\xi_1 + \xi_2) \\ \eta + \chi - i\eta\xi_3/2 \end{pmatrix},$$

що з точністю до перепозначень збігається з (105).

Скористаємося калібрувальною симетрією і зробимо перетворення

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\tilde{\xi}(x)\tilde{\tau}/2} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}, \quad A_\mu^i \rightarrow A_\mu^{\prime i} \equiv B_\mu^i,$$

виключивши з теорії неспостережувані (нефізичні) поля ξ_i . При цьому

$$\begin{aligned} (D'_\mu \phi')^\dagger (D'^\mu \phi') &= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu + ig\hat{B}_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[(\partial^\mu + ig\hat{B}^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + ig \underbrace{\left[(0, \partial_\mu \chi) \hat{B}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} - (0, \eta + \chi) \hat{B}_\mu^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix} \right]}_{=0} \right) + \\ &+ g^2 (0, \eta + \chi) \hat{B}_\mu^\dagger \hat{B}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + \frac{g^2}{8} (\eta + \chi)^2 \mathbf{B}_\mu \mathbf{B}^\mu. \end{aligned}$$

В результаті лагранжіан (104) набуває вигляду

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \lambda \eta^2 \chi^2 + \frac{1}{8} g^2 \eta^2 \mathbf{B}_\mu \mathbf{B}^\mu - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int},$$

де $\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{8} g^2 \chi (2\eta + \chi) (\mathbf{B}_\mu \mathbf{B}^\mu) - \frac{\lambda}{4} \chi^3 (4\eta + \chi)$, $G_{\mu\nu}^i$ — три тензорних поля, що будуються з полів B_μ^i аналогічно тому, як $F_{\mu\nu}^i$ будується з полів A_μ^i . Таким чином, всі три векторні бозони B_μ^i набули однакову масу $m_B = g\eta/2$.

В загальному випадку кількість масивних калібрувальних бозонів, що утворюються, дорівнює числу голдстоунівських бозонів, які б утворилися у разі порушення глобальної симетрії. Це твердження називається теоремою Голдстоуна:

Теорема. Нехай початковий лагранжіан має симетрію групи G (розмірність групи $N(G)$), яка спонтанно порушується до симетрії $H \subset G$. Тоді число N народжених масивних калібрувальних бозонів буде

$$N = N(G) - N(H),$$

тобто дорівнює числу порушених симетрій.

В нашому випадку симетрія групи $SU(2)$ (порядок групи $N(SU_2) = 3$) повністю порушується ($H = E$, $N(H) = 0$), оскільки не існує жодного $SU(2)$ перетворення (крім тотожного), що залишає вакуум $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$ незмінним.

Корисно також мати на увазі, що число голдстоунівських бозонів (а значить і кількість масивних калібрувальних полів) дорівнює розмірності вакуумного многовида поля ϕ . Наприклад, у розглянутих вище прикладах з групами симетрії $U(1)$ і $SU(2)$ вакуумні многовиди мали розмірності $N = 1$ і $N = 3$, що збігається з числом масивних векторних полів у цих теоріях.

В якості останньої ілюстрації теореми Голдстоуна розглянемо механізм Хіггса в моделі з локальною $SO(3)$ симетрією. Лагранжіан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^T (D^\mu \phi) - V(\phi^2) - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu},$$

де $\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$ — триплет дійсних полів, $D_\mu = \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu$, $\hat{A}_\mu = A_\mu^i T^i$, $i = 1, 2, 3$,

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k.$$

T^i — генератори групи $SO(3)$, що нормовані умовою $\text{Tr } T^i T^j = 2\delta_{ij}$. Потенціал самодії має стандартний вигляд

$$V(\phi^T \phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^T \phi - \eta^2)^2. \quad (106)$$

Вакуумний многовид поля ϕ — сфера S^2 : $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \eta^2$.

В якості вакуумного стану виберемо $\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. В околі цього вакууму поле ϕ можна представити у вигляді

$$\phi = e^{i\xi \mathbf{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}$$

в чому можна переконатися, розписавши цей вираз в лінійному наближенні по полях ξ_i і χ :

$$\phi = e^{i\xi \mathbf{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} \approx (\mathbb{1} + i\xi \mathbf{T}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta\xi_2 \\ \eta\xi_1 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}.$$

Зробимо тепер калібрувальне перетворення

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\xi \mathbf{T}} \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mu \rightarrow \mathbf{A}'_\mu \equiv \mathbf{B}_\mu.$$

При цьому

$$\begin{aligned} (D'_\mu \phi')^T (D'^\mu \phi') &= (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + ig \underbrace{\left[(0, 0, \partial_\mu \chi) \hat{B}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} - (0, 0, \eta + \chi) \hat{B}_\mu^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix} \right]}_{=0} + \\ &+ g^2 (0, 0, \eta + \chi) \hat{B}_\mu^\dagger \hat{B}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix} = (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + g^2 (\eta + \chi)^2 (B_\mu^1 B^{1\mu} + B_\mu^2 B^{2\mu}). \end{aligned}$$

В результаті лагранжіан набуває вигляду

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \lambda \eta^2 \chi^2 + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 (B_\mu^1 B^{1\mu} + B_\mu^2 B^{2\mu}) - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int},$$

де $\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} g^2 \chi (2\eta + \chi) (B_\mu^1 B^{1\mu} + B_\mu^2 B^{2\mu}) - \frac{\lambda}{4} \chi^3 (4\eta + \chi)$.

Таким чином, два векторні бозони B_μ^1 і B_μ^2 набувають маси $m = g\eta/2$, а третій залишається безмасовим. В цьому випадку початкова симетрія $SO(3)$ порушується до кінцевої симетрії $SO(2)$ (повороти в площині $(1, 2)$, що залишають інваріантною комбінацію $B_\mu^1 B^{1\mu} + B_\mu^2 B^{2\mu}$), тобто кількість масивних полів

$$N = N(SO(3)) - N(SO(2)) = 3 - 1 = 2.$$

Кінцева симетрія $SO(2)$ обумовлена тим, що вакуум ϕ_0 залишається інваріантним щодо поворотів в площині $(1, 2)$ в просторі полів ϕ_i . Те, що масивних векторних полів має бути саме два видно також із того, що розмірність вакуумного многовиду дорівнює двом.

Лекція 16.

Механізм Хіггса в електрослабкій теорії (бозонний сектор).

Вибір групи симетрії. Слабка взаємодія обумовлена взаємодією слабких струмів з калібрувальними бозонами. Експериментально відомо два типи слабких струмів: заряджені та нейтральні. Відповідно, існують принаймні три *масивних* калібрувальних бозони: два заряджені (W^\pm) і один нейтральний (Z^0). Тому в теорії повинні бути три голдстоунівські бозони, які об'єднуючись з калібрувальними полями передають їм масу. Крім того, оскільки бозони W^\pm електрично заряджені, то кінцева група симетрії H повинна включати групу $U(1)_{em}$ електромагнітної симетрії. Якщо $U(1)_{em}$ не вичерпує групу H , то в теорії будуть присутні й інші (крім фотона) *безмасові* калібрувальні бозони, що суперечить експерименту (глюони є переносчиками сильної взаємодії і тому не розглядаються). Отже, $H = U(1)_{em}$. За теоремою Голдстоуна

$$N_m = N(G) - N(H).$$

Оскільки $N_m \geq 3$, $N(H) = 1$, то

$$N(G) \geq 4,$$

тобто розмірність вихідної групи щонайменше 4, а число скалярних полів $N_\phi \geq 3+1 = 4$. Мінімальним вимогам задовольняє група³¹ $G = SU(2) \times U_Y(1)$ ($N_G = 4$) та дублет ϕ комплексних скалярних полів ($N_\phi = 4$)

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}, \quad (107)$$

що реалізує представлення груп $SU(2)$ та $U_Y(1)$.

Бозонний сектор електрослабкої теорії. Групою симетрії в цій теорії є група $SU(2) \times U_Y(1)$. Позначимо W_μ^a , $a = 1, 2, 3$ — калібрувальні поля групи $SU(2)$ і B_μ — калібрувальне поле групи $U_Y(1)$. Бозонний сектор електрослабкої теорії описується стандартним лагранжіаном, що є сумою лагранжіанів вільних полів W_μ^a і B_μ , що взаємодіють зі скалярним полем ϕ мінімальним чином (через коваріантну похідну) і з потенціалом зі спонтанним порушенням симетрії

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \lambda(\phi^\dagger \phi - \eta^2/2)^2, \quad (108)$$

де

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 Y \frac{\mathbb{1}}{2} B_\mu + ig_2 \frac{\tau_a}{2} W_\mu^a.$$

ϵ_{abc} — антисиметричний тензор Леві-Чівіта. У коваріантну похідну входить величина $Y \frac{\mathbb{1}}{2}$, де $\frac{\mathbb{1}}{2}$ — генератор групи $U_Y(1)$ (аналогічно матрицям $\tau_a/2$). Генератори нормовані

³¹Для того, щоб енергія калібрувального поля була додатньо визначеною, група калібрувальної симетрії повинна бути компактною. Усі прості (такі, що не представляються у вигляді прямих добутків) компактні групи (алгебри) відомі. Це $SU(n)$, $n = 2, 3, \dots$ (розмірність $N(SU_n) = n^2 - 1$), $SO(n)$, $n = 5, 7, 8, \dots$ ($N(SO_n) = n(n-1)/2$), сімплектичні групи $Sp(n, C)$, $(, ,)$ і п'ять так званих виняткових груп Картана: G_2 ($N(G) = 14$), F_4 ($N(F) = 52$), E_6 ($N(E_6) = 78$), E_7 ($N(E_7) = 133$) та E_8 ($N(E_8) = 248$). Як бачимо, мінімальним вимогам задовольняє лише група $SU(2) \times U(1)$. Інші групи іноді розглядаються як кандидати на об'єднанні теорії.

умовою³²

$$\text{Tr}\left(\frac{\tau_a}{2} \cdot \frac{\tau_b}{2}\right) = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad \text{Tr}\left(\frac{\mathbb{1}}{2} \cdot \frac{\mathbb{1}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Число Y — це заряд (гіперзаряд³³) поля ϕ по відношенню до групи $U_Y(1)$. Для дублета $Y = 1$, що впливає з формули Гелл-Мана - Нішиджими $Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$ і виду дублета (107). Аналогічна зарядова величина для групи $SU(2)$ відсутня, оскільки в силу неабелевості групи заряд для всіх частинок однаковий і може бути включений в константу зв'язку g_2 (див. стор. 55). При унітарних перетвореннях групи $SU(2) \times U_Y(1)$ поле ϕ перетворюється за законом

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha_a(x)\frac{\tau_a}{2}} e^{i\beta(x)Y\frac{\mathbb{1}}{2}} \phi, \quad (109)$$

де $e^{i\alpha_a(x)\frac{\tau_a}{2}}$ та $e^{i\beta(x)Y\frac{\mathbb{1}}{2}}$ — елементи груп $SU(2)$ і $U_Y(1)$ відповідно.

Вакуумне значення поля ϕ виберемо у вигляді

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (110)$$

Тоді в околі цього вакууму

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix},$$

де ми, для усунення нефізичних ступенів вільності, використовуємо унітарне калібрування.

Обрахуємо коваріантну похідну.

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \left(\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + i\frac{g_1}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + i\frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right) \phi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)(\eta + \chi) \\ \partial_\mu \chi + \frac{i}{2} (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)(\eta + \chi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результаті

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + \frac{g_2^2}{4} |W_\mu^1 - iW_\mu^2|^2 (\eta + \chi)^2 + \frac{1}{4} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)^2 (\eta + \chi)^2 \right).$$

З врахуванням потенціалу $V(\phi)$ квадратична по полям частина лагранжіану \mathcal{L}_ϕ має вигляд

$$\mathcal{L}_\phi^{(2)} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \lambda \eta^2 \chi^2 + \frac{g_2^2 \eta^2}{4} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \right|^2 + \frac{\eta^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)^2. \quad (111)$$

Для інтерпретації цього виразу введемо поля

$$\begin{cases} W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), & W_\mu^+ = (W_\mu^-)^*, \\ A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3), \\ Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu). \end{cases} \quad (112)$$

³²Нормування генераторів визначається лише умовою зручності (або історичними традиціями). Завжди можна змінити нормування генераторів, переозначивши заряд g . Для групи $U_Y(1)$ зручно у визначенні генератора додати множник $1/2$. Тоді вирази для електричного заряду e і кута змішування Вайнберга матимуть простий симетричний вигляд. Часто константу $1/2$ включають до гіперзаряду ($Y/2 \rightarrow Y$). Тоді формула Гелл-Мана – Нішиджими записується як $Q = T_3 + Y$.

³³Слід підкреслити, що згадані тут *слабкий* гіперзаряд Y і *слабкий* ізоспін T не мають нічого спільного з гіперзарядом та ізоспіном адронів.

Перехід від полів (W_μ^a, B_μ) до $(W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu)$ є унітарним перетворенням (цим пояснюється вибір множників у цих полів). Зокрема

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W ,$$

$$Z_\mu = W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W ,$$

де

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} , \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} ,$$

θ_W — кут Вайнберга. В термінах нових полів вираз (111) приймає вигляд

$$\mathcal{L}_\phi^{(2)} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + m_W^2 W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^2 + 0 \cdot A_\mu^2 ,$$

де

$$m_\chi = \sqrt{2\lambda}\eta , \quad m_W = \frac{g_2 \eta}{2} , \quad m_Z = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2} \eta = \frac{m_W}{\cos \theta_W} .$$

Таким чином, стани з певною масою (масовий базис) не збігаються з початковими станами. Після спонтанного порушення симетрії поля χ , W_μ^\pm і Z_μ стають масивними, а поле A_μ — залишається безмасовим. Зауважимо також, що в цій теорії $m_Z > m_W$. Маси W^\pm - і Z -бозонів добре відомі і рівні $m_W = 80$ ГеВ, $m_Z = 91$ ГеВ. Кут Вайнберга визначається з експериментів по слабкому розсіюванню лептонів та кварків. Експериментальне значення $\sin^2 \theta_W = 0.23$ добре узгоджується з теоретичним передбаченням $\cos \theta_W = m_W/m_Z$. Константа η пов'язана з постійною Фермі $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5}$ ГеВ⁻² співвідношенням: $\eta = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$, що дає значення $\eta = 246$ ГеВ.

Група $U(1)_{em}$. Знайдемо кінцеву групу симетрії та вивчимо перетворення полів χ , W_μ^\pm , Z_μ та A_μ по відношенню до цієї групи.

Кінцева група симетрії H є такою підгрупою G , яка залишає незмінним обраний вакуумний стан ϕ_0 , тобто (див. (109))

$$e^{i\frac{\beta}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}(\tau\mathbf{n})} \phi_0 = \phi_0 . \quad (113)$$

Оскільки

$$e^{i\frac{\alpha}{2}(\tau\mathbf{n})} = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} (\tau\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} + i n_3 \sin \frac{\alpha}{2} & i n_- \sin \frac{\alpha}{2} \\ i n_+ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} - i n_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (114)$$

$n_\pm = n_1 \pm i n_2$, то умова (113) приймає вигляд

$$e^{i\frac{\beta}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}(\tau\mathbf{n})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (n_1 - i n_2) \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \\ e^{i\frac{\beta}{2}} (\cos \frac{\alpha}{2} - i n_3 \sin \frac{\alpha}{2}) = 1 \end{cases} , \quad (115)$$

Якщо в першому рівнянні системи (115) вибрати $\alpha = 0$, друге рівняння (115) приводить до $\beta = 0$, тобто перетворення (113) зводиться до тотожного. Залишається варіант

$$n_1 = n_2 = 0 , \quad n_3 = 1 .$$

З другого рівняння (115) отримуємо

$$e^{i\frac{\beta}{2}} (\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2}) = e^{i\frac{\beta}{2}(\beta-\alpha)} = 1 \Rightarrow \alpha = \beta .$$

Таким чином, маємо однопараметричну кінцеву групу симетрії H з елементами виду

$$U_{em} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\alpha T_3} = e^{i\alpha \hat{Q}}$$

де

$$\hat{Q} = \hat{T}_3 + \frac{1}{2} \hat{Y},$$

$T_3 = \tau_3/2$, $\hat{Y} = Y \mathbb{1} = \mathbb{1}$ (для дублета, що розглядається). Ермітів оператор Q є оператором електричного заряду, а підгрупа H — група $U(1)_{em}$.

Зайдемо тепер закон перетворення полів. Оператор перетворення для групи $U(1)_{em}$ дорівнює

$$e^{i\alpha(x)Q} = e^{i\alpha(x)(\tau_3/2 + \mathbb{1}/2)} = e^{i\alpha(x)\tau_3/2} e^{i\alpha(x)/2} = U(x)\omega(x),$$

де $U = e^{i\alpha(x)\tau_3/2} \in SU(2)$, а $\omega(x) = e^{i\alpha(x)/2} \in U_Y(1)$. Поля (W_μ^a) та B_μ перетворюються кожне по своїй групі. Згідно (74)

$$\hat{W}'_\mu = U \hat{W}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g_2} (\partial_\mu U) U^{-1}, \quad (116)$$

$$\hat{B}'_\mu = \hat{B}_\mu + \frac{i}{g_1} (\partial_\mu \omega) \omega^{-1}, \quad (117)$$

де $\hat{W}_\mu = W_\mu^a \frac{\tau_a}{2}$, $\hat{B}_\mu = B_\mu \frac{\mathbb{1}}{2}$ ($\mathbb{1}/2$ — генератор групи $U_Y(1)$). Враховуючи, що

$$U = e^{i\alpha\tau_3/2} = \cos(\alpha/2) + i\tau_3 \sin(\alpha/2), \quad U^{-1} = e^{-i\alpha\tau_3/2} = \cos(\alpha/2) - i\tau_3 \sin(\alpha/2),$$

а також рівність $\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \tau_k$, для правої частини (116) знаходимо

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i\tau_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{\tau_1}{2} W_\mu^1 + \frac{\tau_2}{2} W_\mu^2 \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i\tau_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\tau_3}{2} W_\mu^3 + \frac{i}{g_2} \cdot \frac{i\tau_3}{2} (\partial_\mu \alpha) = \\ & = \frac{\tau_1}{2} (W_\mu^1 \cos \alpha + W_\mu^2 \sin \alpha) + \frac{\tau_2}{2} (W_\mu^2 \cos \alpha - W_\mu^1 \sin \alpha) + \frac{\tau_3}{2} \left(W_\mu^3 - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \alpha \right) \end{aligned}$$

тобто

$$(W_\mu^1)' = W_\mu^1 \cos \alpha + W_\mu^2 \sin \alpha,$$

$$(W_\mu^2)' = W_\mu^2 \cos \alpha - W_\mu^1 \sin \alpha,$$

$$(W_\mu^3)' = W_\mu^3 - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \alpha.$$

Аналогічно, з (117) отримуємо

$$B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g_1} \partial_\mu \alpha.$$

Залишається підставити ці вирази в означення полів A_μ , W_μ^\pm и Z_μ :

$$A'_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 B'_\mu + g_1 (W_\mu^3)') = A_\mu - \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{g_1 g_2} \partial_\mu \alpha = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha, \quad (118)$$

$$Z'_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 (W_\mu^3)' - g_1 B'_\mu) = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu) = Z_\mu, \quad (119)$$

$$(W_\mu^\pm)' = \frac{1}{\sqrt{2}} ((W_\mu^1)' \mp i(W_\mu^2)') = e^{\pm i\alpha} W_\mu^\pm. \quad (120)$$

Таким чином, поле A_μ перетворюється аналогічно електромагнітному потенціалу і може бути з ним ототожнено. Причому для електричного заряду отримуємо вираз

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}.$$

Поле Z_μ — електро-нейтральне, а поля W_μ^\pm мають заряд $\pm e$ (поле ψ з зарядом qe перетворюється за законом $\psi \rightarrow e^{iq\alpha}\psi$). Поле χ , також як і ϕ_0 , не змінюється при $U(1)_{em}$ перетвореннях і тому відповідає нейтральній скалярній частинці. І це не випадково. Саме цією умовою і визначається вибір вакуумного стану (110).

До спонтанного порушення симетрії поле ϕ мало вигляд (107). Знаки "+" і "0" у компонентів дублету ϕ^+ , ϕ^0 відповідають їх електричним зарядам, які знаходяться з закона перетворення полів по підгрупі $U(1)_{em}$. Дійсно, оскільки

$$\begin{aligned} e^{i\alpha(x)Q} &= e^{i\alpha(x)/2} e^{i\alpha(x)\tau_3/2} = e^{i\alpha(x)/2} (\cos(\alpha/2) + i\tau_3 \sin(\alpha/2)) = \\ &= e^{i\alpha(x)/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha(x)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(x)/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то

$$\phi \rightarrow \phi' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha(x)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha(x)} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

тобто $\phi^+ \rightarrow e^{i\alpha} \phi^+$, а $\phi^0 \rightarrow \phi^0$, що і обґрунтовує індекси "+" і "0".

Якщо поле має ненульове вакуумне середнє, то вибір цього вакуумного стану підпорядкований додатковій фізичній вимозі нейтральності цієї моди (тобто відсутності в неї всіх зарядів). Інакше не виконувався б закон збереження заряду. Цим пояснюється вибір вакууму у вигляді (110).

Лагранжіан полів A_μ , W_μ^\pm , Z_μ . Динаміка полів A_μ , W_μ^\pm , Z_μ описується лагранжіаном (108), в якому треба перейти до нових змінних. Перехід здійснюється за допомогою перетворень, зворотних до (112):

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ + W_\mu^-), \quad W_\mu^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ - W_\mu^-), \\ B_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 A_\mu - g_1 Z_\mu), \quad W_\mu^3 = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_1 A_\mu + g_2 Z_\mu). \end{aligned}$$

Приведемо деякі проміжні результати.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W_{\mu\nu}^+ + \frac{1}{4} (W_{\mu\nu}^3)^2, \\ W_{\mu\nu}^\pm &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^1 \mp i W_{\mu\nu}^2) = \mathcal{W}_{\mu\nu}^\pm \pm i g_2 \cos \theta_W (Z_\mu W_\nu^\pm - Z_\nu W_\mu^\pm), \\ W_{\mu\nu}^3 &= F_{\mu\nu} \sin \theta_W + Z_{\mu\nu} \cos \theta_W - i g_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+), \\ B_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \cos \theta_W - Z_{\mu\nu} \sin \theta_W. \end{aligned}$$

Тут були використані позначення

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mu\nu}^\pm &= D_\mu W_\nu^\pm - D_\nu W_\mu^\pm, \quad D_\mu W_\nu^\pm = (\partial_\mu \pm i e A_\mu) W_\nu^\pm, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu. \end{aligned}$$

В результаті, лагранжіан (108) приймає вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} |\mathcal{W}_{\mu\nu}^-|^2 + m_W^2 |W_\mu^-|^2 - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + \mathcal{L}_{int}, \quad (121)$$

Доданок \mathcal{L}_{int} включає члени третього і четвертого порядку по полях і представляється у вигляді трьох доданків

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}(\chi) + \mathcal{L}_{int}(A; W, Z) + \mathcal{L}_{int}(Z, W),$$

де

$$\mathcal{L}_{int}(\chi) = -\frac{m_\chi^2 \chi^3}{8\eta^2} (4\eta + \chi) + \frac{\chi(2\eta + \chi)}{\eta^2} \left(m_W^2 |W_\mu^-|^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^2 \right),$$

$$\mathcal{L}_{int}(A; W, Z) = -ig_2 [(\mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+ - \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^-) Z_\mu \cos \theta_W + F_{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+ \sin \theta_W],$$

$$\mathcal{L}_{int}(W, Z) = -\frac{g_2^2}{2} \cos^2 \theta_W |Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^-|^2 - \frac{g_2^2}{4} (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)^2 - ig_2 \cos \theta_W Z_{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+.$$

Лагранжіан (121) інваріантний відносно групи електромагнітних перетворень $U(1)_{em}$, в чому легко переконатися за допомогою співвідношень (118) - (120). Варто звернути увагу, що взаємодія полів W_μ^\pm з електромагнітним полем A_μ не є мінімальною. Мінімальна взаємодія дається першим доданком (121)

$$\mathcal{L}(W)_{min} = -\frac{1}{2} |D_\mu W_\nu^- - D_\nu W_\mu^-|^2.$$

Додаткова (не мінімальна) взаємодія міститься в доданку $\mathcal{L}_{int}(A; W, Z)$, який включає в себе члени виду $F^{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+$ і $(A^\mu W_\mu^+)(Z^\nu W_\nu^-)$.

Таблиця найлегших баріонів

Частинка	Скл ад	J^P	I	I_3	Q	S	Час життя τ (с), або ширина Γ	Канали розпаду (відносна ймовірність Γ_i/Γ , %)	Маса, MeV
$\Delta^{++}(1232)$	uuu	$3/2^+$	$3/2$	$3/2$	2	0	$\Gamma = 118 \text{ MeV}$	$p\pi^+$ (100)	1232
p	uud	$1/2^+$	$1/2$	$1/2$	1	0	стабільний		939
$\Delta^+(1232)$	uud	$3/2^+$	$3/2$	$1/2$	1	0	$\Gamma = 118 \text{ MeV}$	$N\pi$ (99.4), $p\gamma$ (0.6)	1236
n	udd	$1/2^+$	$1/2$	$-1/2$	0	0	$\tau = 886$	$p\bar{e}\bar{\nu}$	940
$\Delta^0(1232)$	udd	$3/2^+$	$3/2$	$-1/2$	0	0	$\Gamma = 118 \text{ MeV}$	$N\pi$ (99.4), $n\gamma$ (0.6)	1236
$\Delta^-(1232)$	ddd	$3/2^+$	$3/2$	$-3/2$	-1	0	$\Gamma = 118 \text{ MeV}$	$n\pi^-$ (100)	1241
$\Sigma^+(1383)$	uus	$3/2^+$	1	1	1	-1	$\Gamma = 36 \text{ MeV}$	$\Lambda\pi$ (87), $\Sigma\pi$ (12), $\Lambda\gamma$ (1)	1383
Σ^+	uus	$1/2^+$	1	1	1	-1	$\tau = 0.8 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^0$ (52), $n\pi^+$ (48)	1189
$\Sigma^0(1383)$	uds	$3/2^+$	1	0	0	-1	$\Gamma = 36 \text{ MeV}$	$\Lambda\pi$ (87), $\Sigma\pi$ (12), $\Lambda\gamma$ (1)	1384
Σ^0	uds	$1/2^+$	1	0	0	-1	$\tau = 7.4 \cdot 10^{-20}$	$\Lambda\gamma$ (100)	1192
Λ	uds	$1/2^+$	0	0	0	-1	$\tau = 2.6 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^-$ (64), $n\pi^0$ (36)	1116
Σ^-	dds	$1/2^+$	1	-1	-1	-1	$\tau = 1.5 \cdot 10^{-10}$	$n\pi^-$ (99.8), $ne\bar{\nu}$ (0.1)	1197
$\Sigma^-(1383)$	dds	$3/2^+$	1	-1	-1	-1	$\Gamma = 39 \text{ MeV}$	$\Lambda\pi$ (87), $\Sigma\pi$ (12), $\Lambda\gamma$ (1)	1387
$\Xi^0(1530)$	uss	$3/2^+$	$1/2$	$1/2$	0	-2	$\Gamma = 9 \text{ MeV}$	$\Xi\pi$ (100)	1532
Ξ^0	uss	$1/2^+$	$1/2$	$1/2$	0	-2	$\tau = 3 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$ (99.5), $\Sigma^0\gamma$ (0.3), $\Lambda\gamma$ (0.1)	1315
Ξ^-	dss	$1/2^+$	$1/2$	$-1/2$	-1	-2	$\tau = 1.6 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$ (99.9), $\Sigma^-\gamma$ (10^{-2})	1322
$\Xi^-(1530)$	dss	$3/2^+$	$1/2$	$-1/2$	-1	-2	$\Gamma = 9 \text{ MeV}$	$\Xi\pi$ (100)	1535
Ω^-	sss	$3/2^+$	0	0	-1	-3	$\tau = 0.8 \cdot 10^{-10}$	ΛK^- (68), $\Xi^0\pi^-$ (24), $\Xi^-\pi^0$ (9)	1672

Таблиця найлегших мезонів

Час-тин-ка	Склад	J^{PC}	I^G	I_3	Q	S	Час життя τ (с), або ширина Γ	Канали розпаду (відносна ймовірність Γ_i/Γ , %)	Маса, MeV
π^+	$u\bar{d}$	0^-	1^-	1	1	0	$\tau = 2.6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+\nu$ (100), $e^+\nu$ (10^{-2})	140
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0^{-+}	1^-	0	0	0	$\tau = 8.4 \cdot 10^{-17}$	$\gamma\gamma$ (98.8), γe^+e^- (1.2)	135
π^-	$d\bar{u}$	0^-	1^-	-1	-1	0	$\tau = 2.6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^-\nu$ (100), $e\nu$ (10^{-2})	140
η	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0^{-+}	0^+	0	0	0	$\Gamma = 1.3 \text{ keV}$	$\gamma\gamma$ (39), $3\pi^0$ (33), $\pi^+\pi^0\pi^-$ (23)	548
ρ^+	$u\bar{d}$	1^-	1^+	1	1	0	$\Gamma = 149 \text{ MeV}$	$\pi^+\pi^0$ (100), $\pi^+\gamma$ (0.045)	775
ρ^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	1^{--}	1^+	0	0	0	$\Gamma = 149 \text{ MeV}$	$\pi^+\pi^-$ (99), $\pi^+\pi^-\gamma$ (1)	770
ρ^-	$d\bar{u}$	1^-	1^+	-1	-1	0	$\Gamma = 149 \text{ MeV}$	$\pi^-\pi^0$ (100), $\pi^-\gamma$ (0.045)	775
ω	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	1^{--}	0^-	0	0	0	$\Gamma = 8.5 \text{ MeV}$	$\pi^+\pi^0\pi^-$ (89), $\pi^0\gamma$ (8), $\pi^+\pi^-$ (1.5)	783
K^+	$u\bar{s}$	0^-	$1/2$	$1/2$	1	1	$\tau = 1.2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+\nu$ (64), $\pi^+\pi^0$ (21), $\pi^+\pi^+\pi^-$ (6)	494
K^0	$d\bar{s}$	0^-	$1/2$	$-1/2$	0	1	$\tau = 5 \cdot 10^{-8}, 9 \cdot 10^{-11}$	$2\pi^0$, $\pi^+\pi^-$, $3\pi^0$, $\pi^+\pi^0\pi^-$	498
K^-	$s\bar{u}$	0^-	$1/2$	$-1/2$	-1	-1	$\tau = 1.2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^-\nu$ (64), $\pi^-\pi^0$ (21), $\pi^+\pi^-\pi^-$ (6)	494
\bar{K}^0	$s\bar{d}$	0^-	$1/2$	$1/2$	0	-1	$\tau = 5 \cdot 10^{-8}, 9 \cdot 10^{-11}$	$2\pi^0$, $\pi^+\pi^-$, $3\pi^0$, $\pi^+\pi^0\pi^-$	498
K^{*+}	$u\bar{s}$	1^-	$1/2$	$1/2$	1	1	$\Gamma = 46 \text{ MeV}$	$K\pi$ (99.9), $K^+\gamma$ (0.1)	892
K^{*0}	$d\bar{s}$	1^-	$1/2$	$-1/2$	0	1	$\Gamma = 46 \text{ MeV}$	$K\pi$ (99.8), $K^0\gamma$ (0.2)	892
η'	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0^{-+}	0^+	0	0	0	$\Gamma = 0.2 \text{ MeV}$	$\eta\pi^+\pi^-$ (43), $\rho^0\gamma$ (30), $\eta\pi^0\pi^0$ (22)	958
ϕ	$s\bar{s}$	1^{--}	0^-	0	0	0	$\Gamma = 4.3 \text{ MeV}$	K^+K^- (49), K_LK_S (34), $\rho\pi$ (15)	1020

Для γ -квантів та глюонів $J^{PC} = 1^{--}$.

Q — електричний заряд, J — спин, P — просторова парність, I — ізоспін,
 C — зарядова парність, G -парність, I_3 — проекція ізоспіна, S — дивність.

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

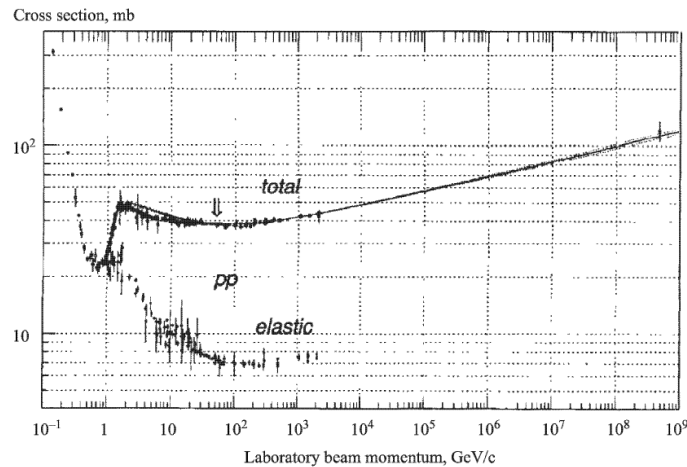
Notation:

J	J	...
M	M	...

[illegible]

ЗАДАЧІ.

- З яких причин заборонені такі процеси: а) розпад протону (чому, однак, можливий розпад протону у ядрах?); б) розпад всіх нейтронів у ядрах; в) випромінювання γ -квантів вільним електроном; г) розпад атома водню: $p + e \rightarrow n + \nu$. Чому ядро ${}^3\text{He}$ — стабільне, а дзеркальне ядро ${}^3\text{H}$ — ні?
- На графіку зображено переріз протон-протонного зіткнення в лабораторній системі. Поясніть різке зростання повного перерізу при енергії протона $E \simeq 1.2\text{GeV}$.



- Показати, що значення спіна ρ -мезона $J = 1$ забороняє його розпад по каналу $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$.
- Знайти найбільш ймовірні канали розпаду для Ω^- -баріону. Під дією якої взаємодії відбуваються ці розпади?
- Чи можливі сильні або електромагнітні розпади Λ -гіперону? Відповідь обґрунтувати.
- У реакції $\pi^- + d \rightarrow 2n$ захоплення повільного ($l = 0$) π -мезона відбувається зі збереженням парності. Враховуючи, що квантові числа дейтрона $J^P = 1^+$, визначить внутрішню парність π^- -мезона.
- Якою є внутрішня парність η -мезона, що має спін $J = 0$ якщо можливий його сильний розпад на три π -мезони? Чи може така частинка розпадатися на два піони?
- Чи можливі електромагнітні розпади: а) $\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma$, б) $\phi \rightarrow 2\gamma$, в) $\rho^0 \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$.
- Визначити просторову та зарядову парності позитронію (зв'язаного стану системи e^+e^-) у станах 1S_0 і 3S_1 . Що можна сказати про аналогічні характеристики ϕ -мезону?
- На яке мінімальне число γ -квантів можливий розпад позитронію зі станів 1S_0 і 3S_1 ? Що можна сказати про число фотонів n , що утворюються в результаті електромагнітного розпаду піона: $\pi^0 \rightarrow n\gamma$?

11. Показати, що системам $2\pi^0$ і $\pi^+\pi^-$ відповідає власне значення $CP = +1$, а системі $\pi^+\pi^0\pi^-$ в стані $l = 0$ власне значення $CP = -1$.
12. Показати, що у кварковій моделі неможливе існування істинно нейтральних частинок з $CP = -1$ і $\varepsilon_P = (-1)^J$, тобто частинок з $J^{PC} = 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}$ і т.д. Такі стани називають екзотичними.
13. З якого стану ($^{2S+1}L_J$) можливий сильний розпад нуклеонію по каналу:
а) $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, б) $p + \bar{p} \rightarrow 2\pi^0$.
14. Визначити ізоспін дейтрона та його внутрішню парність (дейтрон є суперпозицією станів 3S_1 і 3D_1 системи np). Чи можна встановити ізоспін дейтрона з того факту, що існує лише один пов'язаний стан системи з двох нуклонів? Що можна сказати про ізоспін основного стану ядра 4He ? Чи можливий сильний процес $d + d \rightarrow \pi^0 + ^4He$?
15. Знайти за допомогою узагальненого принципу Паулі ізоспін I системи: а) $\pi^+\pi^0$ і $\pi^+\pi^-$ у станах 1P , 1D ; б) ρ -мезона, що розпадається по каналу $\rho \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.
16. Показати, що ізоспін системи np дається формулою $I = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{L+S})$. Чи може частинка мати ізоспін більше $3/2$?
17. Поясніть, чому реакція ${}_1H^2 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + \pi^0$ відбувається з ймовірністю приблизно в 100 разів меншою, ніж реакція ${}_1H^1 + {}_1H^3 \rightarrow {}_2He^4 + \pi^0$.
18. Чи можливий сильний двоіонний розпад частинки $f^0(J^P, I) = (2^+, 0)$?
19. Знайти ймовірності $\varpi(I)$ різних значень сумарного ізотопічного спіна I піон-піонної та піон-нуклонної системи в наступних станах: $2\pi^0$, $\pi^+\pi^-$, π^+n , π^0p .
20. Під дією якої взаємодії відбуваються розпади: а) $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-$, б) $\omega \rightarrow 2\pi^0$, в) $\eta \rightarrow 2\pi$, г) $\eta' \rightarrow \eta\pi\pi$.
21. Під дією якої взаємодії відбуваються розпади: $K^+ \rightarrow \pi^0\pi^+$ і $K^0 \rightarrow 2\pi^0$? Знайти зміну ізоспіну ΔI у цих процесах, якщо відомо, що ймовірність розпаду $K^0 \rightarrow 2\pi^0$ вдвічі менша від ймовірності розпаду по каналу $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$.
22. Написати найімовірніші праві частини реакцій:
а) $\nu_\mu + p \rightarrow \dots$; б) $\nu_\mu + n \rightarrow \dots$; в) $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \dots$; г) $\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow \dots$.
Намалюйте відповідні діаграми для цих реакцій.
23. Показати, що ізоспінова частина хвильової функції системи з трьох піонів в стані з повним ізотопічним спіном системи $I(3\pi) = 0$ має певну симетрію по відношенню до перестановки ізоспінових змінних будь-яких двох піонів, і з'ясувати характер цієї симетрії. На підставі отриманого результату показати, що нейтральна частинка ω з ізотопічним спіном $I = 0$ не може розпадатися на три π^0 -мезона, тобто сильний розпад $\omega \rightarrow 3\pi^0$ — заборонений.
24. Які значення J^{PC} і I^G може мати частинка X^0 , якщо можливий її сильний розпад по каналам $X^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. На основі отриманого результату проаналізуйте можливість/неможливість двоіонних розпадів частинок ρ^0 , ω , η , η' , ϕ .
25. Те саме, що і в попередній задачі, але для розпаду $X^0 \rightarrow 2\pi^0$.
26. За допомогою методу Шмускевича знайти співвідношення між повними перерізами σ і ймовірностями ω наступних процесів:

а) реакції типу: $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ (N — нуклон)

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\rightarrow \pi^+ + \pi^- & (\sigma_1) \\ p + \bar{p} &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 & (\sigma_2) \\ n + \bar{p} &\rightarrow \pi^0 + \pi^- & (\sigma_3) \end{aligned}$$

б) реакції типу: $\pi + N \rightarrow \Lambda^0 + K$

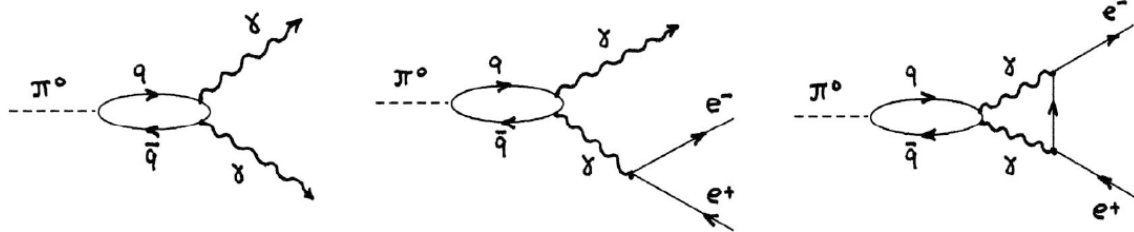
$$\begin{aligned} \pi^+ + n &\rightarrow \Lambda^0 + K^+ & (\sigma_1) \\ \pi^0 + p &\rightarrow \Lambda^0 + K^+ & (\sigma_2) \end{aligned}$$

в) реакції типу: $\pi + N \rightarrow \Sigma + K$

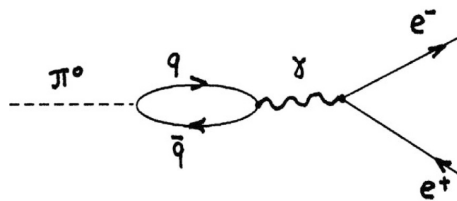
$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \Sigma^+ + K^+ & (\sigma_1) \\ \pi^0 + p &\rightarrow \Sigma^0 + K^+ & (\sigma_2) \\ \pi^0 + p &\rightarrow \Sigma^+ + K^0 & (\sigma_3) \\ \pi^- + p &\rightarrow \Sigma^- + K^+ & (\sigma_4) \\ \pi^- + p &\rightarrow \Sigma^0 + K^0 & (\sigma_5) \end{aligned}$$

г) покажіть, що розпад $\omega^0 \rightarrow 3\pi^0$ — неможливий.

27. Перевірте виконання всіх законів збереження (включаючи C - і P -парності) для електромагнітного розпаду $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$, якщо пара e^+e^- утворюється в 1S стані. На експерименті виявлено, що розпад π -мезона по каналу $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ сильно подавлений порівняно з основними модами $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ і $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+e^-$. Пояснення цьому можна знайти, розглянувши діаграми процесів, з яких видно, що розпад



$\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ відбувається у вищому (четвертому) порядку теорії збурень. Чому для цього розпаду заборонено діаграму



28. В реакції $\pi + N \rightarrow X + \Lambda$, обумовленої сильною взаємодією, народжується невідомий X -мезон. Показати, як із відомого відношення перерізів

$$\frac{\sigma(\pi^- p \rightarrow X^0 \Lambda)}{\sigma(\pi^0 n \rightarrow X^0 \Lambda)} = \alpha$$

можна визначити ізоспін X -мезону.

29. Розпади $\Lambda \rightarrow N + \pi$ та $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi$ задовольняють правилу відбору $\Delta I = 1/2$. Знайти відношення ймовірностей розпаду

$$\frac{\omega(\Lambda \rightarrow p + \pi^-)}{\omega(\Lambda \rightarrow n + \pi^0)} \quad \text{і} \quad \frac{\omega(\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0)}{\omega(\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-)}.$$

30. Показати, що адрон може мати певну G -парність тільки в тому випадку, коли він має цілі значення спіну та ізоспіну.
31. Визначити, з яких станів $^{2S+1}L_J$ можливий сильний розпад нуклеонія $N\bar{N}$ на два π -мезони з $I = 0, 1$ каналом: а) $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, б) $p + \bar{p} \rightarrow 2\pi^0$.
32. Використовуючи закони збереження G і P -парності, а також кутового моменту, отримати обмеження на мінімальну кількість піонів, що утворюються при анігіляції нуклеонія зі стану 1S при двох можливих значеннях ізоспіну.
33. Одна з наведених нижче реакцій можлива, а інша ніколи не спостерігалася. Яка? Дайте пояснення цьому факту. а) $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$; б) $\Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$.
34. Оцініть відносні ймовірності розпаду $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}$ π -мезона каналами

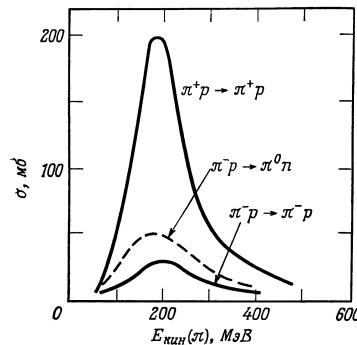
$$1) \pi^0 \rightarrow 2\gamma \quad (\omega_1); \quad 2) \pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma \quad (\omega_2); \quad 3) \pi^0 \rightarrow 2e^+2e^- \quad (\omega_3).$$

Порівняйте з експериментальними значеннями $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1.1 \cdot 10^{-2}$, $\frac{\omega_3}{\omega_1} = 3.5 \cdot 10^{-5}$.

35. Дайте кількісне пояснення спостережуваному відношенню перерізів реакцій

$$\sigma_1(\pi^+p \rightarrow \pi^+p) : \sigma_2(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) : \sigma_3(\pi^-p \rightarrow \pi^-p)$$

при енергії $E \approx 200$ MeV. Яким має бути переріз $\sigma(\pi^0p \rightarrow \pi^0p)$?



36. Виконайте розкладання наступних прямих добутків $SU(3) \times SU(3)$: а) 8×8 ; б) 8×10 . Скільки разів представлення 1 входить у добуток $8 \times 8 \times 8 \times 8$?
37. Для $1/2^+$ -октету знайти стани Σ_U^0 і Λ_U (частинок, зі значенням U -спіна рівним 1 та 0 і проекцією $U_3 = 0$).
38. Довести, що оператор $C_1 = \sum F_i^2$ є оператором Казиміра, тобто $[C_1, F_i] = 0, \forall i$.
39. Показати, що оператор Казиміра $C_1 = \sum F_i^2$ представляється у вигляді

$$C_1 = I_3^2 + 2I_3 + \frac{3}{4}Y^2 + I_-I_+ + V_-V_+ + U_+U_-.$$

40. Знайти значення оператора Казиміра C_1 для довільного представлення (p, q) .
41. Знаючи дію зсувних операторів на базисні функції (40) і (42) побудуйте представлення для генераторів F_i і \bar{F}_i .
42. Розгляньте дію зсувних операторів на кваркові триплети (u, d, s) і $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$. Знайдіть фазові множники $\tilde{\lambda}_i$, що відповідають зсувам проти годинникової стрілки.

43. Знайти вигляд операторів Y_U і Y_V , які є операторами "гіперзаряду" по відношенню до операторів U і V -спіну.
44. Дослідити всі можливі чотири-, п'яти-, і шестикваркові комбінації виду $qqq\bar{q}$, $qqq\bar{q}\bar{q}$, $qqqq\bar{q}\bar{q}$ і т.д. Які можуть відповідати частинкам, допустимим в межах КХД? Чи буде заряд таких частинок завжди цілим?
45. Те саме, що й у попередній задачі, але для гібридних адронів виду gqq , $gq\bar{q}$, $gqqq$, $gqq\bar{q}$ і т.д. Чи зміниться результат, якщо розглядати адрони з двома чи більшим числом глюонів?
46. Існування вільних кварків заборонено конфайнментом кольору. Перевірте можливість існування одиночного кварку в глюонній "шубі" тобто станів виду qg , qgg , $qggg$ і т.п.
47. Чому рівні магнітні моменти мезонів 0^- і 1^- -октетів?
48. Побудуйте хвильові функції, що відповідають баріонному $SU_f(3)$ синглету для частинки а) зі спіном $3/2$; б) зі спіном $1/2$.
49. В розклад $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$ октет входить двічі. Це означає, що є два різних (по симетрії) октетних представлення. Представлення через симетричні базисні функції було знайдено у лекції 10. Побудуйте антисиметричне представлення зі спіном $1/2$. Яким частинкам можуть відповідати ці хвильові функції?
50. Чому рівні магнітні моменти баріонів з октетного антисиметричного представлення $1/2^+$?
51. Отримайте співвідношення (61) з формули Гелл-Мана - Окубо.
52. Отримайте масову формулу Колмана - Глешоу (56) з правила паралелограма (54). Як зміниться формула (56), якщо замість припущення про збереження U -спіну в електромагнітній взаємодії припустити збереження V -спіну (тобто $[\hat{H}_{em}, V_i] = 0$)?
53. Знайти закон перетворення полів $F_{\mu\nu}^a$ при інфінітезимальних калібрувальних перетвореннях групи $SU(2)$ і $SU(n)$.
54. Показати, що величина $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}$ є повною дивергенцією $\partial_\mu K^\mu$ як в абелевому, так і в неабелевому випадку.
55. Розгляньте не мінімальну стандартну модель з двома хігсівськими дублетами. Покажіть, що і в цьому випадку співвідношення $m_W/m_Z = \cos \theta_W$ залишається правильним.
56. Розгляньте не мінімальну модель з додатковим триплетом дійсних скалярних полів φ_a з потенціалом самодії (106). Знайдіть маси W - і Z -бозонів. Чи виконується рівність $m_W/m_Z = \cos \theta_W$?
57. Доведіть інваріантність лагранжіана (121) щодо групи електромагнітних перетворень $U(1)_{em}$.

Література

- [1] Белокуров В. В., Ширков Д. В. Теория взаимодействий частиц. – М.: Наука, 1986.
- [2] Емельянов В. М. Стандартная модель и ее расширения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- [3] Кейн Г. Современная физика элементарных частиц. – М.: Мир, 1990.
- [4] Гибсон У., Поллард Б. Принципы симметрии в физике элементарных частиц. 1977.
- [5] Любимов А., Киш Д. Введение в экспериментальную физику частиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [6] Перкинс Д. Введение в физику высоких энергий. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
- [7] Нишиджима К. Фундаментальные частицы. – М.: Мир, 1965.
- [8] Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. Бозонные теории. – М.: КомКнига, 2005.
- [9] Никитин Ю. П., Протасов В. П., Топоркова Э. П. и др. Сборник задач по физике элементарных частиц. – М.: Энергоатомиздат, 1992.
- [10] Рубаков В. А. К открытию на Большом адронном коллайдере новой частицы со свойствами бозона Хиггса. – УФН, т. 182, № 10, 2012, стр. 1017 – 1025.
- [11] Рубаков В. А. Иерархии фундаментальных констант. – УФН, т. 177, № 4, 2007, стр. 407 – 414.