

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА  
**ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**С.Л.Парновський**

# **ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ ТА ДОДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ ДО КУРСУ ЕЛЕКТРИКИ ТА МАГНЕТИЗМУ**

*Рекомендовано* **Науково-методичною комісією фізичного факультету**

Київ  
2024

Електронне мережне навчальне видання

*Парновський Сергій Людомирович, д-р фіз.-мат. наук, проф.*

# ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ ТА ДОДАТКОВІ МАТЕРІАЛИ ДО КУРСУ ЕЛЕКТРИКИ ТА МАГНЕТИЗМУ

Векторний аналіз та додаткові матеріали до курсу електрики та магнетизму

[Електронний ресурс] : навч.-метод. посіб. для студ. фіз. ф-ту КНУ ім. Т. Шевченка / С. Парновський – Електронні текстові дані (1 файл: 708 Кбайт). – Київ : 2024. – 25 с.

Навчально-методичний посібник містить в собі додаткові матеріали до курсу, зокрема довідкову інформацію про основи векторного та тензорного аналізу, застосування векторного аналізу у електродинаміці (з прикладами), а також розділи курсу, що практично відсутні у підручниках, а саме розгляд особливих точок поля та тензору натягу електромагнітного поля.

© С. Парновський, 2024

## Зміст

Зміст.....	3
1. Основи векторного аналізу. Короткий практичний курс .....	4
2. Основні операції векторного аналізу .....	4
2.1. Дивергенція $\text{div}$ .....	4
2.2. Градієнт $\text{grad}$ .....	5
2.3. Ротор $\text{rot}$ .....	5
2.4. Оператор Гамільтона $\text{набла}$ .....	6
2.5. Оператор Лапласа.....	7
2.6. Оператор $(\vec{a}\nabla)$ .....	8
2.7. Застосування операцій векторного аналізу до полів, які є добутком двох функцій ....	9
2.8. Операції другого порядку.....	9
2.9. Теореми Гаусса-Остроградського, Стокса і Гріна .....	10
3. Приклади застосування операцій векторного аналізу в електродинаміці.....	11
3.1. Приклади обчислень в електродинаміці з використанням техніки векторного аналізу .....	11
4. Векторний аналіз як частина тензорного аналізу .....	13
5. Питання курсу електрики і магнетизму, які не відображено в підручниках.....	16
5.1. Особливі точки поля .....	16
5.1.1. Особливі точки електростатичного поля на прикладі задачі про кулю в однорідному полі .....	17
5.1.2. Більш загальний випадок.....	18
5.2. Деякі властивості тензора натягу.....	20
5.2.1. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку поверхні в електромагнітному полі.....	20
5.2.2. Тензор натягу поля.....	20
5.2.3. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку кордону двох середовищ в електростатичному полі.....	23
5.2.4. Задача про підйом діелектричної рідини в конденсаторі.....	23
Додаткова література .....	25

# 1. Основи векторного аналізу. Короткий практичний курс

Мовою сучасної фізики є математика, перш за все мова диференціальних рівнянь. Але для електродинаміки також важливо володіння апаратом векторного аналізу. У цьому посібнику його викладено практично без доказів для окремого з точки зору математики випадку плоского (не викривленого) тривимірного простору. Більшість формул можна знайти в будь-якому довіднику з математики на кшталт [1], але не всі. Наводяться формули для декартової, сферичної і циліндричної систем координат з координатами  $(x, y, z)$ ,  $(r, \theta, \varphi)$  і  $(\rho, \varphi, z)$ , відповідно. Вектори або векторні поля позначаються  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , скаляри або скалярні поля –  $\varphi, \psi$  тощо. Розрахунки з застосуванням векторного аналізу можна проводити в довільній системі координат, результат буде тим самим. Деякі додаткові питання див. у [2].

## 2. Основні операції векторного аналізу

### 2.1. Дивергенція $\text{div}$

За векторним полем  $\vec{a}$  можна визначити скалярне поле  $\text{div} \vec{a}$ . У декартовій системі координат

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1)$$

У сферичній системі координат

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

У циліндричній системі координат

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Операцію  $\text{div} \vec{a}$  визначено в кожній точці простору або його частини. Точки, в яких  $\text{div} \vec{a}$  не є нулем, зветься джерелами поля. Інколи джерелами зветься тільки точки з  $\text{div} \vec{a} > 0$ , а для точок з  $\text{div} \vec{a} < 0$  використовується назва стік поля. Поле  $\vec{a}$ , для якого  $\text{div} \vec{a} = 0$  в усьому просторі, зветься соленоїдальним.

З важливих формул згадаємо дивергенцію радіуса-вектора  $\vec{r}$ :

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3. \quad (4)$$

У загальному випадку в математиці  $\operatorname{div} \vec{r}$  дорівнює розмірності простору.

## 2.2. Градієнт grad

Зі скалярного поля  $\psi$  можна отримати векторне поле  $\operatorname{grad} \psi$ . У декартовій системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{grad} \psi)_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (5)$$

У сферичній системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{grad} \psi)_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

В циліндричній системі координат його компоненти дорівнюють

$$(\operatorname{grad} \psi)_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (\operatorname{grad} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (7)$$

З формули похідної від складної функції ми отримуємо вираз для градієнта функції

$$\operatorname{grad}(\psi(\xi)) = \psi' \operatorname{grad}(\xi), \quad \psi' = \frac{d\psi}{d\xi}. \quad (8)$$

З формули похідної від добутку функцій ми отримуємо вираз для градієнта додатку двох скалярних функцій

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}(\psi) + \psi \operatorname{grad}(\varphi). \quad (9)$$

З важливих формул відзначимо градієнт модуля радіуса-вектора  $\vec{r}$ , тобто радіальної координати  $r$  в сферичній системі координат:

$$\operatorname{grad} r = \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (10)$$

Вектор  $\vec{n}$  це одиничний вектор в радіальному напрямку, тобто в напрямку радіуса-вектора  $\vec{r}$ .

Якщо  $\operatorname{grad} \psi = 0$  в певній точці простору, то в ній величина  $\psi$  має екстремум або сідлову точку. Якщо  $\operatorname{grad} \psi = 0$  в якійсь області простору, то  $\psi$  в ній є постійною величиною  $\psi = \text{const}$ .

## 2.3. Ротор rot

Операція ротор ставить у відповідність векторному полю  $\vec{a}$  інше векторне поле  $rot \vec{a}$ . Існує альтернативне позначення цієї операції  $curl \vec{a}$ , яке зараз вживається вкрай рідко, але іноді зустрічається в науковій літературі. У декартовій системі координат його компоненти є

$$(rot \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad (rot \vec{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad (rot \vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (11)$$

У сферичній системі координат його компоненти дорівнюють

$$\begin{aligned} (rot \vec{a})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ (rot \vec{a})_\theta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right], \\ (rot \vec{a})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

У циліндричній системі координат його компоненти дорівнюють

$$(rot \vec{a})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \quad (rot \vec{a})_\varphi = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}, \quad (rot \vec{a})_z = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right]. \quad (13)$$

Операція  $rot \vec{a}$  визначена в кожній точці простору або його частини. Точки, в яких  $rot \vec{a}$  не є нулем, називаються вихорами поля. Поле з  $rot \vec{a} = 0$  в усьому просторі називається потенційним.

З важливих формул відзначимо ротор радіуса-вектора  $\vec{r}$ :

$$rot \vec{r} = 0. \quad (14)$$

## 2.4. Оператор Гамільтона набла

Лінійний векторний диференціальний оператор набла (назва запозичена з грец.  $\nu\acute{\alpha}\beta\lambda\alpha$  – вид арфи трикутної форми) або оператор Гамільтона позначається знаком  $\nabla$ . Він діє на вираз, що стоїть праворуч від нього, утворюючи три компоненти, як у вектора. Компоненти цього оператора є частковими похідними за координатами. В декартових координатах вони можуть бути записані у вигляді

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (15)$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орти, тобто одиничні вектори вздовж осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  відповідно. Використовується також запис оператора набла через компоненти

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (16)$$

При дії оператора набла на скаляр  $\psi$  виникає вектор з декартовими компонентами  $(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ , який збігається з (5). Таким чином

$$\nabla \psi = \text{grad} \psi. \quad (17)$$

Дія оператора набла на вектор  $\vec{a}$  (точніше векторне поле  $\vec{a}$ ) менш очевидна. Два вектори можуть бути помножені скалярно і векторно, при цьому має утворитися відповідно скаляр і вектор. Якщо ми використовуємо скалярний добуток, то отримуємо

$$\nabla \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div} \vec{a}. \quad (18)$$

При використанні векторного добутку (позначається  $\times$  або квадратними дужками) ми отримуємо

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot} \vec{a}. \quad (19)$$

У цьому можна переконатися з порівняння (19) і (11).

Таким чином, всі три наведені вище операції векторного аналізу записуються за допомогою оператора  $\nabla$ . При цьому при його дії на скаляр ми отримуємо градієнт (17), а на вектор - дивергенцію (18). Оскільки результат всіх обчислень в рамках векторного аналізу не змінюється при використанні іншої системи координат, вирази (6) і (7) разом з (17) можна прямо використовувати для визначення компонент оператора набла в сферичній і циліндричній системах координат. У сферичній системі координат його компоненти дорівнюють

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}. \quad (20)$$

У циліндричній системі координат його компоненти дорівнюють

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (21)$$

## 2.5. Оператор Лапласа

Добутком оператора набла на нього ж є так званий оператор Лапласа, він же лапласіан або оператор дельта  $\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2$ . При дії на скаляр він дає

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \nabla \nabla \psi = \nabla \text{grad} \psi = \text{div}(\text{grad} \psi), \quad (22)$$

тобто  $\Delta = \text{div grad}$ . Коли ми підставимо вирази для дивергенції і градієнта то отримаємо для декартових координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (23)$$

для сферичних координат

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (24)$$

і для циліндричних координат

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (25)$$

Однак при дії на вектор можна здатися, що  $\Delta \vec{a} = \nabla \nabla \vec{a} = \text{grad}(\text{div} \vec{a})$ , що невірно. Насправді вектор  $\Delta \vec{a}$  має три компоненти, які слід визначати за трьома компонентами вектора  $\vec{a}$  за формулою (22), а саме

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{a})_x &= \Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}, \\ (\Delta \vec{a})_y &= \Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}, \\ (\Delta \vec{a})_z &= \Delta a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.6. Оператор $(\vec{a} \nabla)$

Ще одна операція векторного аналізу це оператор  $(\vec{a} \nabla)$ , в якій може використовувати будь-яке векторне поле  $\vec{a}$ . Воно діє на інше векторне поле  $\vec{b}$ , утворюючи ще одне векторне поле  $(\vec{a} \nabla) \vec{b}$ . При цьому операція  $(\vec{a} \nabla)$  відрізняється від  $(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$  порядком співмножників в скалярному добутку. Так як  $\nabla$  це не вектор, а оператор, скалярний добуток з його участю не є комутативним. Оператор  $\nabla$  діє на те, що праворуч від нього. В операції  $(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$  це вектор  $\vec{a}$ . В операції  $(\vec{a} \nabla) \vec{b}$  він діє тільки на вектор  $\vec{b}$ , але не на  $\vec{a}$ . Таким чином, оператор  $(\vec{a} \nabla)$  є скалярним і в декартових координатах має вигляд

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (27)$$

а компоненти вектора  $(\vec{a} \nabla) \vec{b}$  в декартових координатах дорівнюють



$$\begin{aligned}
((\vec{a}\nabla)\vec{b})_x &= a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z}, \\
((\vec{a}\nabla)\vec{b})_y &= a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial z}, \\
((\vec{a}\nabla)\vec{b})_z &= a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{28}$$

З важливих формул відзначимо дію  $(\vec{a}\nabla)$  на радіус-вектор  $\vec{r}$  :

$$(\vec{a}\nabla)\vec{r} = \vec{a}. \tag{29}$$

Операція  $(\vec{a}\nabla)\vec{b}$  часто називається похідною векторного поля  $\vec{b}$  в напрямку вектора  $\vec{a}$ .

## 2.7. Застосування операцій векторного аналізу до полів, які є добутком двох функцій

Операція *grad* діє на скалярне поле. Якщо цей скаляр є добутком двох функцій або складною функцією, то слід використовувати формули (8) і (9). Якщо ж цей скаляр є скалярним добутком двох векторних полів, то можна використовувати формулу

$$\text{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b} + [\vec{b} \times \text{rot}\vec{a}] + [\vec{a} \times \text{rot}\vec{b}]. \tag{30}$$

Операції дивергенція, ротор та  $(\vec{a}\nabla)$  застосовуються до векторних полів. Якщо векторне поле є добутком скаляра на вектор, то можна використовувати формули

$$\text{div}(\psi\vec{a}) = \psi \text{div}\vec{a} + (\vec{a} \text{ grad}\psi), \tag{31}$$

$$\text{rot}(\psi\vec{a}) = \psi \text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\psi \times \vec{a}], \tag{32}$$

$$(\vec{b}\nabla)(\psi\vec{a}) = \psi (\vec{b}\nabla)\vec{a} + \vec{a}(\vec{b} \text{ grad}\psi). \tag{33}$$

Якщо векторне поле є векторним добутком двох векторів, то можна використовувати формули

$$\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = (\vec{b} \text{ rot}\vec{a}) + (\vec{a} \text{ rot}\vec{b}), \tag{34}$$

$$\text{rot}[\vec{a} \times \vec{b}] = (\vec{b}\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\nabla)\vec{b} + \vec{a} \text{ div}\vec{b} - \vec{b} \text{ div}\vec{a}, \tag{35}$$

$$(\vec{c}\nabla)[\vec{a} \times \vec{b}] = [(\vec{c}\nabla)\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{a} \times (\vec{c}\nabla)\vec{b}]. \tag{36}$$

## 2.8. Операції другого порядку

До результатів операцій векторного аналізу можна ще раз застосовувати подібні операції. Єдине обмеження пов'язано з тим, що не можна плутати скаляри та вектори. Одна операція дає оператор Лапласа (22), результати двох інших завжди дорівнюють нулю:

$$\text{div}(\text{rot}\vec{a}) = 0, \tag{37}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\psi) = 0. \quad (38)$$

Ще дві можливі операції другого порядку пов'язані між собою та з оператором Лапласа

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}. \quad (39)$$

## 2.9. Теореми Гаусса-Остроградського, Стокса і Гріна

Теорема Гаусса-Остроградського в математиці в разі плоского тривимірного простору має справу з замкнутою поверхнею  $S$ , що обмежує область  $V$ . Тоді

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (40)$$

де  $dV$  - елемент об'єму області  $V$ ,  $d\vec{S}$  - елемент поверхні  $S$ , спрямований уздовж зовнішньої нормалі до неї та по модулю рівний площі елемента  $dS$ . У разі, якщо  $\vec{a} = \psi \nabla \varphi = \psi \operatorname{grad} \varphi$ , можна використовувати (22, 31) і отримати теорему Гріна

$$\oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV. \quad (41)$$

При виведенні ми врахували, що

$$\operatorname{grad} \varphi d\vec{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (42)$$

де напрямок зовнішньої нормалі до поверхні позначено  $\vec{n}$ , а похідну вздовж нього позначено  $\partial/\partial n$ .

Теорема Стокса в математиці для тривимірного простору розглядає замкнутий контур  $L$  і натягнуту на нього поверхню  $S$ , яка не обов'язково лежить в площині. Контур є границею поверхні. Тоді

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S}, \quad (43)$$

де вектор елемента контуру позначено  $d\vec{l}$ , він спрямований уздовж контуру і по модулю дорівнює довжині елемента  $dl$ . При визначенні напрямку нормалі  $d\vec{S}$  до поверхні  $S$ , яка незамкнута, є дві можливості з протилежними орієнтаціями нормалей. Для вибору треба скористатися правилом штопора (гвинта). Виберемо довільний напрямок обходу контура  $L$ , це визначить напрямок елемента контуру  $d\vec{l}$ . Якщо повертати штопор для правші в цьому напрямку, то напрямок його зміщення вздовж "осі" штопора треба вважати позитивним (додатнім) напрямком для нормалі  $d\vec{S}$  до поверхні  $S$ .

### 3. Приклади застосування операцій векторного аналізу в електродинаміці

У електростатиці напруженість електричного поля  $\vec{E}$  виражається через градієнт потенціалу поля  $\varphi$  [3-6] (тут і далі використовується система СГС)

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (44)$$

а його дивергенція пов'язана з густиною заряду  $\rho$

$$div \vec{E} = 4\pi k\rho. \quad (45)$$

Комбінуючи ці дві формули отримаємо рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi k\rho. \quad (46)$$

Операція ротор важлива для розгляду магнітних полів, де магнітна індукція  $\vec{B}$  пов'язана з векторним потенціалом  $\vec{A}$

$$\vec{B} = rot \vec{A}. \quad (47)$$

Тому в силу (37) магнітна індукція  $\vec{B}$  є соленоїдальним полем.

Операція типу  $(\vec{a}\nabla)$  виникає при розгляді сили, що діє на електричний диполь з дипольним моментом  $\vec{d}$  в електричному полі  $\vec{E}$ . Вона дорівнює

$$\vec{F} = (\vec{d}\nabla)\vec{E}. \quad (48)$$

#### 3.1. Приклади обчислень в електродинаміці з використанням техніки векторного аналізу

Для початку зазначимо важливу властивість операцій векторного аналізу, які, по суті, є похідними за просторовими координатами. Вони комутують з взяттям похідних за часом і з інтегруванням уздовж кривої, по поверхні і за об'ємом, тому порядок цих операцій не важливий. Наприклад

$$\frac{d(grad\psi)}{dt} = grad \frac{d\psi}{dt}, \quad \frac{d(rot\vec{a})}{dt} = rot \frac{d\vec{a}}{dt}, \quad rot \int \vec{a} dV = \int rot \vec{a} dV. \quad (49)$$

Перейдемо до прикладів. Потенціал електричного диполя з дипольним моментом  $\vec{d}$  дорівнює

$$\varphi = k \frac{(\vec{d} \vec{r})}{r^3}. \quad (50)$$

Тут використовується радіус-вектор  $\vec{r}$  і його модуль  $r$ . Множник  $k$  дорівнює 1 у системі СГС та  $1/4\pi\epsilon_0$  у системі СІ. Застосуємо формулу (44) і отримаємо з використанням співвідношень (9, 8, 30, 4, 14, 32, 29, 10)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -k \operatorname{grad}\{r^{-3}(\vec{d}\vec{r})\} = -k\{r^{-3}\operatorname{grad}(\vec{d}\vec{r}) + (\vec{d}\vec{r})\operatorname{grad}(r^{-3})\} = \\ &= -k\{r^{-3}(\vec{r}\nabla)\vec{d} + r^{-3}(\vec{d}\nabla)\vec{r} + r^{-3}[\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{d}] + r^{-3}[\vec{d} \times \operatorname{rot} \vec{r}] - 3(\vec{d}\vec{r})r^{-4}\operatorname{grad}(r)\} = \\ &= -k\{r^{-3}(\vec{d}\nabla)\vec{r} - 3(\vec{d}\vec{r})r^{-5}\vec{r}\} = -k\{r^{-3}\vec{d} - 3(\vec{d}\vec{r})r^{-5}\vec{r}\} = k \frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{r^3}.\end{aligned}\quad (51)$$

Нагадаємо, що вектор  $\vec{n}$  це одиничний вектор у радіальному напрямку (10), а векторні операції від постійного вектора  $\vec{d}$  дорівнюють нулю.

Знайдемо магнітне поле магнітного диполя з магнітним дипольним моментом  $\vec{m}$ . Його векторний потенціал дорівнює

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3}.\quad (52)$$

Тому за формулою (47) магнітна індукція  $\vec{B}$  дорівнює

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot} \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3} = r^{-3} \operatorname{rot}[\vec{m} \vec{r}] + [\operatorname{grad}(r^{-3}) \times [\vec{m} \vec{r}]] = \\ &= r^{-3}\{(\vec{r}\nabla)\vec{m} - (\vec{m}\nabla)\vec{r} + \vec{m} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{m}\} - 3r^{-5}[\vec{r}[\vec{m} \vec{r}]] = \\ &= r^{-3}\{-\vec{m} + 3\vec{m}\} - 3r^{-5}\{\vec{m}r^2 - \vec{r}(\vec{r}\vec{m})\} = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{m}) - \vec{m}}{r^3}.\end{aligned}\quad (53)$$

Це практично вираз (51) з заміною  $\vec{d}$  на  $\vec{m}$ . При обчисленні використано формули (32, 35, 8, 10, 4, 29) і формула для подвійного векторного добутку

$$[\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).\quad (54)$$

Нагадаємо, що векторні операції від постійного вектора  $\vec{m}$  дорівнюють нулю. Є і трохи інший порядок обчислення, який, природно, дає той же результат, але іншим шляхом

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot} \left[ \vec{m} \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \nabla \right) \vec{m} - (\vec{m} \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \operatorname{div} \vec{m} = -(\vec{m} \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} + \\ &+ \vec{m} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{m} \{ r^{-3} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \operatorname{grad}(r^{-3}) \} - r^{-3} (\vec{m} \nabla) \vec{r} - \vec{r} (\vec{m} \operatorname{grad}(r^{-3})) = \\ &= r^{-3} \{ 3 - 3 \} \vec{m} - r^{-3} \vec{m} + 3r^{-5} \vec{r}(\vec{r}\vec{m}) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{m}) - \vec{m}}{r^3}.\end{aligned}\quad (55)$$

Використано формули (35, 36, 31, 4, 8, 10, 29).

Розглянемо магнітостатику в вакуумі в системі СГС ( $\mu = 1$ ,  $\vec{B} = \vec{H}$ ). Виведемо закон Біо-Савара з рівняння

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{B} = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}. \quad (56)$$

Крім (47) використано умову калібрування векторного потенціалу  $\text{div} \vec{A} = 0$ . Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{r}. \quad (57)$$

Магнітну індукцію і рівну їй напруженість поля отримаємо з (47)

$$\begin{aligned} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} &= \text{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{r} = \frac{1}{c} \int \text{rot} \frac{\vec{j} dV}{r} = \frac{1}{c} \int dV \text{rot}(\vec{j} r^{-1}) = \\ &= \frac{1}{c} \int \{r^{-1} \text{rot}(\vec{j}) + [\text{grad}(r^{-1}) \vec{j}]\} dV = -\frac{1}{c} \int r^{-3} [\vec{r} \vec{j}] dV = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV. \end{aligned} \quad (58)$$

Це ілюструє використання комутативності операцій векторного аналізу з інтегруванням.

## 4. Векторний аналіз як частина тензорного аналізу

Деякі формули векторного аналізу виводяться з властивостей похідної, наприклад (8, 9), деякі з властивостей векторів, які переносяться на оператор набла. Так, (34) виходить з (54). Але не всі формули (30-36) можна отримати в рамках векторного аналізу, тим більше отримати простим шляхом. Однак це можна зробити з використанням методів і апарату тензорного аналізу.

Вважається, що його основи вже відомі, наприклад з підручника [3]. Це поняття тензора, тензорного поля, рангу тензора, те, що скаляр це тензор нульового рангу, а вектор – тензор першого рангу. Вектор задається одновимірним масивом (рядком або стовпчиком), довжина якого дорівнює розмірності простору, тобто трьом.

Існують об'єкти, наприклад квадратична форма, що задаються двовимірної матрицею  $3 \times 3$ , вони описуються тензором другого рангу з двома індексами. А також об'єкти, які описуються тензором третього рангу з трьома індексами і більш високих рангів. Знаючи компоненти тензора в одній системі координат, завжди можна обчислити його компоненти в іншій, якщо задана матриця перетворення координат. Відповідна матриця при перетворенні декартової системи координат приведена в будь-якій книзі з тензорного аналізу.

Тензори однакового рангу можна додавати і віднімати. Тензорним добутком двох тензорів є тензор з рангом, рівним сумі рангів вихідних тензорів. Існує операція згортки тензора, це специфічна тензорна операція, що знижує ранг тензора на два, вона розраховується підсумовуванням по парі індексів. Індеси, за якими ведеться підсумовування, пробігають, залишаючись рівними один одному, всі свої 3 значення, наприклад:

$$A_{ikl} = B_{iklmm} = \sum_{m=1}^3 B_{iklmm} = B_{ikl11} + B_{ikl22} + B_{ikl33}. \quad (59)$$

Ми використовуємо правило Айнштейна, за яким автоматично відбувається підсумовування за індексом, що повторюється. Індеси позначаються буквами i, k, l, m, ... і приймають значення 1, 2, 3.

Ми використовуємо декартові координати, в яких радіус-вектор  $\vec{r}$  має компоненти  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ , а оператор набла – компоненти  $\nabla_i = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) = \partial/\partial x_i$ .

Існують два тензора, які зберігають свій вигляд при будь-якому перетворенні декартової системи координат. Один з них це символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}. \quad (59)$$

Він описує компоненти одиничної матриці  $3 \times 3$ , згортка з ним по одному індексу змінює позначення цього індексу:

$$A_{ikl} \delta_{lm} = A_{ikm}, \quad A_{ikl} \delta_{km} = A_{iml}. \quad (60)$$

Згортка з символом Кронекера за двома індексами дає тензор з меншою кількістю індексів

$$A_{ikl} \delta_{kl} = A_{ikk} = A_i. \quad (61)$$

З його допомогою визначається згортка двох або декількох тензорів (в тому числі тензорів і векторів), наприклад:

$$C_{ikm} = A_{ikl} B_{ml} = \sum_{l=1}^3 A_{ikl} B_{ml} = A_{ikl} B_{mn} \delta_{ln}. \quad (62)$$

Дія оператора набла  $\nabla_i$  на радіус-вектор  $x_k$  є символом Кронекера

$$\nabla_i x_k = \delta_{ik}. \quad (63)$$

Другий тензор, який зберігає свій вигляд при будь-якому перетворенні декартової системи координат, це абсолютно асиметричний одиничний тензор Леві-Чивіті  $e_{ikl}$  (введений італійським математиком Тулліо Леві-Чивіта). Цей тензор має компоненти, які змінюють знак при перестановці будь-яких двох індексів, причому відмінні від нуля компоненти рівні  $\pm 1$ .

Всі компоненти, у яких хоча б два індекси збігаються, дорівнюють нулю, так що відмінні від нуля лише ті, у яких всі три індекси  $i, k, l$  є різними. Поклавши  $e_{123} = e_{xyz} = 1$  ми фіксуємо напрямки осей  $x, y, z$  як праву трійку, визначаємо напрямки векторного добутку та напрямки, отримані за правилами "правої руки" і "лівої руки". Всі відмінні від нуля компоненти  $e_{ikl}$  дорівнюють  $+1$  або  $-1$  залежно від того, парним чи непарним є кількість перестановок (транспозицій), за допомогою яких числа  $i, k, l$  можуть бути переведені у послідовність  $1, 2, 3$ .

Добуток двох тензорів Леві-Чивіті можна записати через символи Кронекера:

$$e_{ikl} e_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix}. \quad (64)$$

Згортаючи це по 2, 4 і 6 індексам, отримуємо:

$$e_{ikl} e_{mnl} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{in}, \quad e_{ikl} e_{mkl} = 2\delta_{im}, \quad e_{ikl} e_{ikl} = 6. \quad (65)$$

Тензорний добуток двох векторів є тензором другого рангу. Звертаючи його з символом Кронекера ми отримуємо скалярний добуток цих векторів:

$$(\vec{a}\vec{b}) = a_i b_i = a_i b_k \delta_{ik}, \quad (66)$$

а згортаючи його з тензором Леві-Чивіті - векторний добуток цих векторів:

$$[\vec{a}\vec{b}]_i = a_k b_l e_{ikl}. \quad (67)$$

Уже на цьому етапі ми можемо легко вивести формулу (54)

$$\begin{aligned} [\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}]]_i &= e_{ikl} a_k [\vec{b} \times \vec{c}]_l = e_{ikl} a_k e_{lmn} b_m c_n = a_k b_m c_n e_{ikl} e_{mnl} = a_k b_m c_n (\delta_{im} \delta_{kn} - \\ &- \delta_{km} \delta_{in}) = b_i a_k c_k - c_i a_m b_m = b_i (\vec{a}\vec{c}) - c_i (\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}))_i. \end{aligned} \quad (68)$$

Використано (60, 65-67) і те, що  $e_{lmn} = e_{mnl}$ .

Перейдемо до операцій векторного аналізу. З (17-19, 27) ми отримуємо

$$(\text{grad} \psi)_i = \nabla_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (69)$$

$$\text{div} \vec{a} = \nabla_i a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \quad (70)$$

$$(\text{rot} \vec{a})_i = [\nabla \vec{a}]_i = e_{ikl} \nabla_k a_l = e_{ikl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k}, \quad (71)$$

$$((\vec{a} \nabla) \vec{b})_i = a_k \nabla_k b_i = a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k}. \quad (72)$$

При дії оператора Гамільтона  $\nabla_i$  на добуток ми можемо використовувати похідну від добутку функцій

$$\nabla_i (ABCD...) = (BCD...) \nabla_i A + (ACD...) \nabla_i B + (ABD...) \nabla_i C + (ABC...) \nabla_i D + \dots, \quad (73)$$

де як А, В, С, D можуть стояти тензори будь-якого рангу, включаючи нульового (скаляри). Зауважимо, що похідні від символу Кронекера і тензора Леві-Чивіті, які є набірором нулів і одиниць, тобто констант, дорівнюють нулю, тому ці тензори можна переносити вліво від оператора набла. Зауважимо також, що ми можемо змінювати літеру, що позначає індекс, за яким йде згортка. Виведемо співвідношення (31-33)

$$\text{div}(\psi \vec{a}) = \nabla_i (\psi a_i) = \frac{\partial \psi a_i}{\partial x_i} = \psi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \psi \text{div} \vec{a} + (\vec{a} \text{grad} \psi), \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
(\text{rot}(\psi \vec{a}))_i &= e_{ikl} \nabla_k (\psi a_l) = e_{ikl} \frac{\partial \psi a_l}{\partial x_k} = \\
&= \psi e_{ikl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k} + e_{ikl} a_l \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = (\psi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \psi \times \vec{a}])_i,
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
((\vec{b} \nabla)(\psi \vec{a}))_i &= b_k \nabla_k (\psi a_i) = b_k \frac{\partial \psi a_i}{\partial x_k} = \psi b_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + a_i b_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \\
&= (\psi (\vec{b} \nabla) \vec{a} + \vec{a} (\vec{b} \text{grad} \psi))_i.
\end{aligned} \tag{76}$$

Нарешті, виведемо співвідношення (35), яке практично неможливо вивести в рамках векторного аналізу без довгих розрахунків:

$$\begin{aligned}
(\text{rot}[\vec{a} \times \vec{b}])_i &= e_{ikl} \nabla_k [\vec{a} \times \vec{b}]_l = e_{ikl} \nabla_k e_{lmn} a_m b_n = e_{ikl} e_{mnl} \nabla_k a_m b_n = \nabla_k a_m b_n (\delta_{im} \delta_{kn} - \\
&- \delta_{km} \delta_{in}) = \nabla_k a_i b_k - \nabla_k a_k b_i = a_i \nabla_k b_k + b_k \nabla_k a_i - a_k \nabla_k b_i - b_i \nabla_k a_k = \\
&= ((\vec{b} \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a})_i.
\end{aligned} \tag{77}$$

Співвідношення (37, 38) легко отримати з того, що згортка симетричного по парі індексів тензора  $a_{ik...} = a_{ki...}$  і антисиметричного по цій же парі індексів тензора  $b_{ik...} = -b_{ki...}$  завжди дорівнює нулю, адже

$$a_{ik...} b_{ik...} = a_{ki...} (-b_{ki...}) = -a_{ki...} b_{ki...} = -a_{ik...} b_{ik...}. \tag{78}$$

Як симетричний по парі індексів  $i, k$  тензор виступає комбінація  $\nabla_i \nabla_k$ , яка є симетричною тому, що похідна не залежить від порядку диференціювання, а як антисиметричний по цій парі індексів тензор - тензор Леві-Чивіті.

$$\text{div}(\text{rot} \vec{a}) = \nabla_i e_{ikl} \nabla_k a_l = e_{ikl} \nabla_i \nabla_k a_l = 0. \tag{79}$$

$$(\text{rot}(\text{grad} \psi))_i = e_{ikl} \nabla_k \nabla_l \psi = 0. \tag{80}$$

## 5. Питання курсу електрики і магнетизму, які не відображено в підручниках

### 5.1. Особливі точки поля

Особливі точки можуть існувати у будь-якого векторного поля  $\vec{a}$ . Це сукупність точок, в яких поле зникає  $\vec{a} = 0$ . Зверніть увагу, що багато доказів властивостей силових ліній в електростатиці засновано на припущенні, що в досліджуваній точці напруженість поля не нульова. Наприклад, доказ того, що дві силові лінії не можуть перетинатися, мати злам, що силові лінії перпендикулярні еквіпотенціальній поверхні або поверхонь провідників вимагають виконання цього припущення. В особливих точках електростатичного поля, в яких  $\vec{E} = 0$ , це припущення не виконується.

Відомо, що силові лінії електростатичного поля можуть починатися і закінчуватися на зарядах або на нескінченності. Менш відомо, що вони також можуть починатися і закінчуватися в особливих точках поля.



### 5.1.1. Особливі точки електростатичного поля на прикладі задачі про кулю в однорідному полі

Переконаємося в існуванні подібних точок на прикладі однієї задачі.

**Умова задачі:** Розглянемо однорідне електростатичне поле, в яке поміщено металеву кулю. Якщо вибрати «вісь» кулі в напрямку поля, то на «екваторі» кулі вибираємо точку  $O$ . Природно, що через аксіальну симетрію завдання всі точки на «екваторі» еквівалентні і т.  $O$  є їх типовим представником. Намалюємо тепер картину силових ліній поля і поцікавимося лінією (або лініями), що проходить через т.  $O$ . Хтось, знаючи, що силові лінії завжди перпендикулярні поверхні провідника, малює картину, зображену на Рис. 1 ліворуч під номером 1. Його опонент проти через те, що силова лінія має кут в т.  $O$ , а в школі вчать, що силова лінія не може мати зламів. Він пропонує варіант, зображений на Рис. 1 праворуч, з цифрою 2. Але на ньому силові лінії не перпендикулярні поверхні провідника. Хто з них має рацію? Або неправі обидва? Перед тим, як намалювати шукану картинку, треба дізнатися, який кут з поверхнею провідника становить силова лінія поля, що проходить через т.  $O$ .

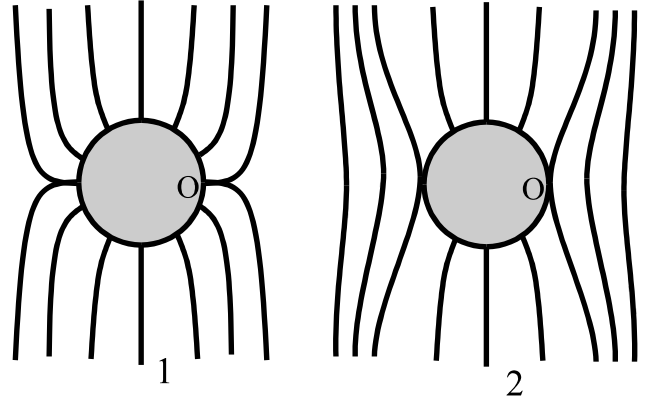


Рис. 1. Два гіпотетичних варіанти картини силових ліній електричного поля

**Розв'язок задачі:** Введемо в площині центрального перетину кулі дві системи координат - декартову  $(x, y)$  з центром в центрі кулі (вісь  $y$  спрямована вздовж напрямку поля, вісь  $x$  проходить через точку  $O$ ) і полярну  $(r, \theta)$  з центром в центрі кулі (кут  $\theta$  відраховується від осі  $y$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ). Позначимо радіус кулі  $R$ . Поза кулею потенціал поля буде сумою потенціалів однорідного поля  $\varphi_1 = -Ey = -Er \cos \theta$  і поля диполя, що знаходиться в центрі кулі і має дипольний момент  $\vec{d} = \vec{E}R^3$ , тобто  $\varphi_2 = \frac{ER^3 \cos \theta}{r^2}$  (тут і далі використовується система СГС):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = E \cos \theta r \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) = Ey \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right). \quad (81)$$

Виведення формули (81) можна знайти в якісному задачнику. Однак воно не потрібно. Розв'язок (81) задовільняє рівняння Лапласа ззовні від кулі ( $r > R$ ), має на великій відстані від нього потрібну асимптотику  $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_1$  і задовільняє граничній умові  $\varphi = 0$  на поверхні кулі. Тому, завдяки теоремі про єдиність розв'язку задач електростатики, цей розв'язок буде єдиним вірним. Власне кажучи, значення  $\vec{d} = \vec{E}R^3$  є єдиним, при якому потенціал зануляється на поверхні кулі.

Зазначимо, що точка  $O$  лежить на перетині двох взаємно перпендикулярних екіпотенційних поверхонь - поверхні кулі і площини  $y = 0$ .

Розглянемо поведінку (81) поблизу т.  $O$ . Для цього введемо нову декартову систему координат  $(z, y)$  з початком в цій точці. Координата  $y$  збігається з аналогічною координатою

системи (x, y), а координату z можна отримати з координати x після зсуву  $z = x - R$ . За умови малих y, z отримуємо

$$\begin{aligned}\varphi &= -E \cos \varphi \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) = -E \left( y - \frac{yR^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -Ey \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2z}{R} + \frac{z^2 + y^2}{R^2} \right)^{-3/2} \right] \approx -Ey \left[ 1 - \left( 1 - \frac{3z}{R} \right) \right] = -\frac{3E}{R} yz.\end{aligned}\quad (82)$$

Поблизу точки О еквіпотенціальними поверхнями є осі y і z, а також сімейство гіпербол  $yz = \text{const}$ . На Рис. 2, де представлено картину поля в малій околиці т. О, вони намальовані штрихованими гіперболами. Силкові лінії поля ортогональні еквіпотенціальним поверхням. На малюнку їх позначено суцільними лініями. Деякі з них є гіперболами, ортогональними поверхні кулі  $z = 0$ , деякі гіперболами, що не торкаються кулі. Крім гіпербол, силовими лініями будуть дві прямі, що починаються в точці О і утворюють кут  $45^\circ$  з поверхнею кулі. Звідси отримуємо відповідь: шуканий кут дорівнює  $45^\circ$  і картина силових ліній має вигляд, зображений на Рис. 3.

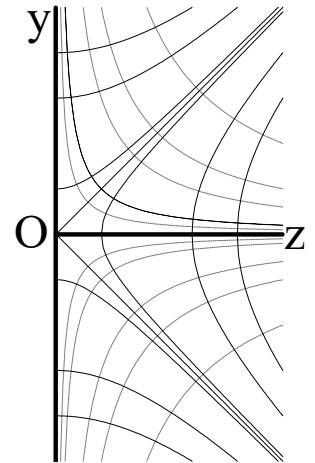


Рис. 2. Картина силових ліній електричного поля біля т. О з великим збільшенням

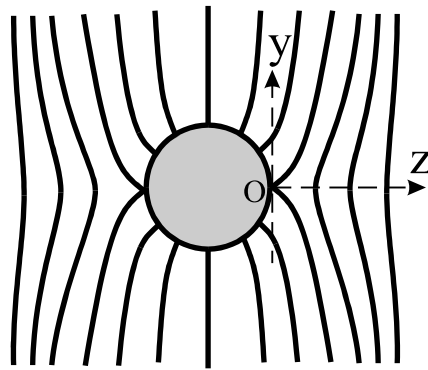


Рис. 3. Правильна картина силових ліній електричного поля біля кулі

У т. О напруженість поля дорівнює нулю, як і її тангенціальна складова, тому гранична умова  $E_t = 0$  виконується, незважаючи на неперпендикулярність силових ліній.

### 5.1.2. Більш загальний випадок

Покажемо, що цей розв'язок є частковим випадком більш загальної ситуації. У загальному випадку поблизу довільної точки потенціал поля можна розкласти в ряд:

$$\varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^3 E_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 W_{ik} x_i x_k + \dots, \quad (83)$$

де  $\varphi_0$  - потенціал в даній точці, а  $x_i = (x, y, z)$  - довільні декартові координати з початком в даній точці. Індекси i, k приймають значення 1, 2, 3 і нумерують координати.  $E_i$  - компоненти напруженості електричного поля. Поблизу особливої точки ці компоненти занолюються. Тензор (матриця)  $W$  є симетричним і поворотом координат його можна привести до

діагонального вигляду  $W = \text{diag} (A, B, C)$ . При цьому для потенціалу поблизу особливої точки поля отримуємо розклад

$$\varphi = \varphi_0 + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \dots \quad (84)$$

Рівняння Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  виконується за умови

$$A + B + C = 0. \quad (85)$$

Якщо на поверхні провідника є ділянки з додатними і від'ємними зарядами (вони обов'язково будуть у незарядженого провідника у зовнішньому електричному полі), то крива, що їх розділяє, буде складатися з особливих точок поля (тангенціальна складова вектора напруженості дорівнює нулю через граничні умови, а нормальна через те, що зануляється поверхнева густина зарядів). При зсуві вздовж цієї кривої потенціал не змінюється. Тому вздовж дотичної до кривої буде лежати один з власних векторів матриці  $W$ , наприклад той, який лежить уздовж осі  $z$ , а відповідне власне значення наближається до нуля  $C = 0$ . Разом з умовою (85) це дає розклад

$$\varphi = \varphi_0 + A(x^2 - y^2) + \dots = \varphi_0 + A\zeta\xi + \dots \quad (\zeta, \xi) = x \pm y. \quad (86)$$

Видно, що (86) відрізняється від (82) заміною координат  $(y, z)$  на  $(\zeta, \xi)$  і зміною константи, що стоїть перед добутком цих координат. Тому маємо ту ж картину еквіпотенційних поверхонь і силових ліній. Силовими лініями поблизу такої особливої точки будуть ті ж самі два набори гіпербол і дві сепаратиси  $(\zeta = \pm\xi)$ , що виходять з особливої точки і нахилені під кутом  $45^\circ$  до поверхні провідника. Так що кут в  $45^\circ$  буде і в картині силових ліній в загальному випадку особливих точок на поверхні без зламів.

Можливий і інший випадок особливих точок поля – ізольовані особливі точки. Якщо у нас є два точкових заряди одного знаку, то на прямій між зарядами, що їх з'єднує, буде точка, в якій напруженість поля наближається до нуля. Для зарядів різного знаку і різних по модулю, така точка буде лежати на прямій, що проходить через заряди, але не між ними. Вона буде лежати за зарядом, меншим за модулем. Для таких точок легко знайти картину силових ліній, виходячи з (84, 85). Через аксиальну симетрію ми бачимо, що напрямок уздовж лінії, що з'єднує заряди, має бути одним з власних векторів  $W$ . Нехай уздовж нього спрямовано вісь  $z$ . Тоді в перпендикулярній площині ми маємо однакові власні значення  $A = B = C / 2$  і (84) переходить в

$$\varphi = \varphi_0 + A(x^2 + y^2 - 2z^2) + \dots \quad (87)$$

Знайти картину силових ліній в цьому випадку нескладно. Вона буде дещо іншою, ніж у випадку силових ліній на поверхні провідника - гіперболи стануть виду  $y \sim x^{-2}$ .

## 5.2. Деякі властивості тензора натягу

### 5.2.1. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку поверхні в електромагнітному полі

Сила, що діє на тіло (або на деяку виділену ділянку простору), в електромагнітному полі може бути представлена у вигляді інтеграла по поверхні тіла  $S$  від густини поверхневих сил  $\vec{T}$ , що діють на ділянку поверхні через присутність поля [3-5]:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T} dS, \quad (88)$$

де компоненти вектора  $\vec{T}$  виражаються через так званий тензор натягу поля  $\sigma_{ik}$  і компоненти одиничного вектора в напрямку зовнішньої нормалі  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , як

$$T_i = \sigma_{ik} n_k. \quad (89)$$

Компоненти тензора натягу поля  $\sigma_{ik}$  знаходяться через напруженості електричного і магнітного полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  поза тілом біля його поверхні і діелектричну  $\epsilon$  і магнітну  $\mu$  проникності середовища в цій точці. Якщо всередині тіла є поле, то воно також створює силу, що діє на поверхню. Сума цих внутрішніх сил дорівнює нулю і їх можна не брати до уваги при розрахунку повної сили, що діє на тіло. Однак при розрахунку густини поверхневих сил  $\vec{T}$ , що діють на ділянку поверхні тіла, слід враховувати і дію поля всередині тіла. Ці сили також необхідно враховувати, якщо ми розраховуємо повну силу, яка діє на незамкнуту поверхню. Необхідно розрахувати компоненти сумарної сили, що виникає через дію поля з одного боку від границі

$$F_i = \int_S \sigma_{ik} dS_k \quad (90)$$

і додати до них компоненти сумарної сили, що виникає через дію поля з іншого боку від неї. При цьому треба враховувати, що напрямки нормалей до поверхні з різних боків є протилежними. Тому поверхнева густина сили дорівнює нулю, якщо напруженості електричного і магнітного полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  з двох сторін від поверхні є рівними. Саме це і спостерігається в середовищах з однорідними діелектричною та магнітною проникностями. Однак якщо є стрибок цих величин, наприклад на кордоні розділу двох середовищ, то виникає некомпенсована поверхнева густина сили  $\vec{T}$ , що діє на ділянку поверхні. Її напрямок може бути довільним і її можна розкласти на силу тиску, перпендикулярну поверхні, і силу зсуву, що діє вздовж поверхні. Якщо ми розглядаємо силу, що діє на рідину, то вона починає втягуватися в область, де поля сильніші. Це призводить до підвищення тиску рідини в конкретній точці. Умова рівноваги рідини з тиском  $P$  має вигляд

$$P\vec{n} + \vec{T} = \text{const}. \quad (91)$$

### 5.2.2. Тензор натягу поля

Тензор натягу поля  $\sigma_{ik}$  є симетричний ( $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$ ) тривимірний тензор другого рангу. Разом з вектором Пойнтінга і скаляром густини енергії поля він утворює чотиривимірний тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля  $T_{\alpha\beta}$ , де грецькі індекси пробігають значення (0, 1, 2, 3), та відповідають координатам чотиривимірного простору-часу. Тензор енергії-імпульсу відіграє важливу роль в загальній теорії відносності, але тут ми розглядаємо його частину, причому в плоскому просторі-часі, тобто без гравітаційного поля. Додатково ми будемо для простоти розглядати тільки випадок ізотропних середовищ, для яких можна ввести діелектричну і магнітну проникності  $\varepsilon$  і  $\mu$ . Тензор натягу електромагнітного поля є сумою двох тензорів натягу. Перший називається максвелівським тензором натягу, він дорівнює

$$\sigma'_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \left( H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right), \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \sigma' = & \frac{\varepsilon}{4\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\mu}{4\pi} \begin{pmatrix} H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 & H_x H_y & H_x H_z \\ H_x H_y & H_y^2 - \frac{1}{2} H^2 & H_y H_z \\ H_x H_z & H_y H_z & H_z^2 - \frac{1}{2} H^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (93)$$

Другий тензор називається тензором стрікційних натягів або коротко стрікційним тензором. Позначаючи густину середовища буквою  $\tau$  (літеру  $\rho$ , яку зазвичай використовують, застосовано для позначення координати в циліндричній системі і густини заряду), запишемо його у вигляді

$$\sigma''_{ik} = \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \delta_{ik} + \frac{1}{8\pi} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \delta_{ik}. \quad (94)$$

З огляду на те, що  $E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$ ,  $H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$ , отримуємо для максвелівського тензора натягу

$$\begin{aligned} \sigma' = & \frac{\varepsilon}{8\pi} \begin{pmatrix} E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 & 2E_x E_y & 2E_x E_z \\ 2E_x E_y & E_y^2 - E_x^2 - E_z^2 & 2E_y E_z \\ 2E_x E_z & 2E_y E_z & E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\mu}{8\pi} \begin{pmatrix} H_x^2 - H_y^2 - H_z^2 & 2H_x H_y & 2H_x H_z \\ 2H_x H_y & H_y^2 - H_x^2 - H_z^2 & 2H_y H_z \\ 2H_x H_z & 2H_y H_z & H_z^2 - H_x^2 - H_y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (95)$$

Отже, тензор натягу електромагнітного поля є сумою тензорів натягу електричного і магнітного полів. Вони визначаються кожен напруженістю електричного і магнітного полів і відповідними властивостями середовища, тобто діелектричної та магнітної проникності і їх залежностями від густини середовища. Тому далі ми будемо говорити тільки про тензор натягу електричного поля, розуміючи, що все це просто переноситься на випадок магнітного поля.

Стрикційний тензор може мати той же порядок величини, що і максвеловський. Однак, при розгляді рівнодіючої сил, що діють на діелектричне тіло, цей член може бути відкинутий. Це докладно описано в §34 книги [5]. Але при розгляді сил, що діють на незамкнуту поверхню, його треба враховувати. Природно, в вакуумі він відсутній. Для розріджених газів  $\varepsilon - 1 \propto \tau$  і  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau = \varepsilon - 1 \ll 1$ . У загальному випадку тензор стрикційних натягів (94), коли його підставити в (89), забезпечує поверхневу щільність сили

$$\vec{T}'' = \frac{1}{8\pi} \left( E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \tau \vec{n}, \quad (96)$$

яка відповідає тиску, спрямованого уздовж нормалі  $\vec{n}$ , зокрема назовні.

Розглянемо, як веде себе поверхнева густина сили, що описується максвелівським тензором натягу  $\vec{T}'$ , яка викликана електричним полем з напруженістю  $\vec{E}$ , напрямком якого біля поверхні становить кут  $\alpha$  з нормаллю до поверхні. Направимо вісь  $x$  вздовж нормалі, а осі  $y$  і  $z$  в площині, дотичній до поверхні, причому вісь  $y$  спрямовано уздовж проекції вектора  $\vec{E}$  на площину  $yz$ . Тоді нормальна і тангенціальна компоненти поля збігаються з  $E_x$  і  $E_y$ , а  $E_z = 0$ . Коли підставити вирази для компонент

$$E_x = E \cos \alpha = E_n, \quad E_y = E \sin \alpha = E_t, \quad E_z = 0 \quad (97)$$

в (95), отримаємо

$$\sigma' = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Після підстановки (98) і компонент нормалі  $\vec{n} = (1, 0, 0)$  в (89) отримаємо компоненти

$$T'_x = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cos(2\alpha) = T'_n, \quad T'_y = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \sin(2\alpha) = T'_t, \quad T'_z = 0. \quad (99)$$

Так що модуль  $\vec{T}'$  дорівнює  $\varepsilon E^2 / 8\pi$ , а напрямком становить кут  $2\alpha$  з нормаллю в площині  $xy$ . Іншими словами, напрямком напруженості поля є бісектриса нормалі і напрямку  $\vec{T}'$ . При  $0 < \alpha < \pi/4$  і  $3\pi/4 < \alpha < \pi$  маємо  $T'_n > 0$ , при  $\pi/4 < \alpha < 3\pi/4$  –  $T'_n < 0$ .

### 5.2.3. Густина поверхневих сил, що діють на ділянку кордону двох середовищ в електростатичному полі

Розглянемо поверхню розділу двох середовищ. Ми знайшли компоненти  $\vec{T}'$  з одного боку від неї. Нехай з іншого боку знаходиться середовище з діелектричної проникністю  $\varepsilon'$ . Тангенціальні компоненти вектора  $\vec{E}$  є рівними по обидва боки від границі розділу двох середовищ. Якщо на ній немає вільних зарядів, то є рівними нормальні компоненти вектора  $\vec{D}$ . Це означає, що в другому середовищі нормальна компонента вектора  $\vec{E}$  перевищує  $E_n$  в  $\varepsilon / \varepsilon'$  разів. Позначимо їх штрихом,  $E'_n = \varepsilon / \varepsilon' E_n$ ,  $E'_t = E_t$ .

З першого боку середовища маємо (99), цей вираз перепишемо у вигляді

$$T'_x = \frac{\varepsilon}{8\pi} (E_n^2 - E_t^2) = T'_n, \quad T'_y = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_t = T'_t, \quad T'_x = 0. \quad (100)$$

Поле з іншого боку забезпечує поверхневу щільність сили, викликану максвелівським тензором натягу, яка з урахуванням протилежного напрямку нормалі  $\vec{n}$  дорівнює

$$T'_x = -\frac{\varepsilon'}{8\pi} (E_n'^2 - E_t'^2) = \frac{\varepsilon'}{8\pi} \left( E_t^2 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} E_n^2 \right) = T'_n, \quad (101)$$

$$T'_y = -\frac{\varepsilon'}{4\pi} E'_n E'_t = -\frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_t = T'_t, \quad T'_x = 0.$$

Підсумовуючи обидві сили, отримуємо, що тангенціальна компонента поверхневої густини сили, викликані максвелівським тензором натягу, дорівнює нулю, а сума нормальних компонент дорівнює

$$\Delta T'_n = \frac{1}{8\pi} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right) (\varepsilon E_n^2 + \varepsilon' E_t^2). \quad (102)$$

Припустимо, що ми розглядаємо границю рідини і вакууму (в реальності також і повітря, як і будь-якого розрідженого газу) з  $\varepsilon' = 1$ . Поблизу неї тиск в рідині відрізняється від атмосферного на величину

$$\Delta P = \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau + \frac{1 - \varepsilon}{8\pi} (\varepsilon E_n^2 + E_t^2). \quad (103)$$

Ми використовували (91) і врахували, що і стрикційна (96) і максвелівська (102) поверхнева густина сили діють в напрямку від рідини до вакууму.

### 5.2.4. Задача про підйом діелектричної рідини в конденсаторі

Розглянемо вертикально розташований конденсатор, частково занурений в рідину з щільністю  $\tau$ , що має діелектричну проникність  $\varepsilon$  (див. рис.4). Необхідно знайти висоту підняття рідини всередині конденсатора  $h$ . Капілярні сили не враховуються. Напруженість поля в конденсаторі дорівнює  $E$ , поле майже однорідне, якщо знехтувати крайовими

ефектами. Для поверхні розділу всередині конденсатора поле повністю тангенційне  $E_n = 0, E_t = E$ .

Спочатку розв'яжемо задачу, використовуючи силовий підхід, тобто за допомогою тензора натягу. Тиск  $P_C$  в т. С, де електричне поле практично відсутнє, дорівнює атмосферному тиску  $P_{atm}$ . У т. В тиск  $P_B$  дорівнює  $P_{atm} + \Delta P$  з  $\Delta P$  з (103). Знайдемо тиск  $P_A$  в т. А, що лежить на висоті т. С, але всередині конденсатора. З одного боку, гідростатичний тиск в т. А, що лежить на висоті  $h$  нижче і в тому ж електричному полі, так само

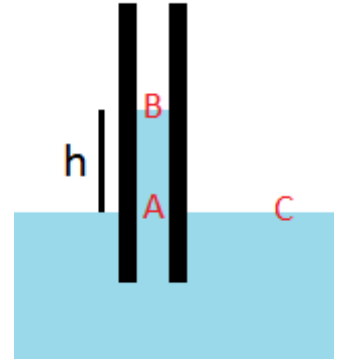


Рис. 4. Всередині конденсатора рівень рідини вище ніж ззовні

$$P_A = P_B + \tau gh = P_{atm} + \Delta P + \tau gh = P_{atm} + \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau + \frac{1-\varepsilon}{8\pi} E^2 + \tau gh. \quad (104)$$

З іншого боку, на маленький об'єм біля т. А, що знаходиться в електричному полі, буде діяти сума гідростатичного тиску  $P_A$  і тиск, який забезпечується стрикційним членом тензора натягу (96). Ця сума повинна дорівнювати аналогічній сумі у т. С, тобто  $P_{atm}$ , тому

$$P_A = P_{atm} + \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau. \quad (105)$$

Прирівнюючи (104) і (105), отримуємо  $\frac{1-\varepsilon}{8\pi} E^2 + \tau gh = 0$ , тобто

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\tau g} E^2. \quad (106)$$

Більш докладно про умову рівноваги рідини в присутності електричного поля див. §15 (зокрема формулу (15.18)) книги "Електродинаміка суцільних середовищ" Л.Д. Ландау і Є.М. Ліфшиця, М., "Наука", 1982 і вже згаданий §34 книги [4].

Для перевірки розв'яжемо задачу ще раз, застосувавши на цей раз енергетичний підхід. Введемо ряд позначень. Нехай відстань між пластинками конденсатора це  $d$ , заряд на них дорівнює  $\pm q$ , висота пластини дорівнює  $b$ , при цьому довжина повністю зануреної в діелектрик ділянки (нижче т. А) дорівнює  $b_1$ . Довжина пластин (в напрямку, перпендикулярному площині рисунка) дорівнює  $a$ . Тоді ємність конденсатора  $C$  і напруженість поля всередині нього будуть дорівнювати

$$C = \frac{a}{4\pi d} (\varepsilon(h + b_1) + b - h - b_1) = \frac{a}{4\pi d} [b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]. \quad (107)$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{4\pi q}{[b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]a}. \quad (108)$$

Сума енергії електричного поля конденсатора і потенційної енергії діелектрика, піднятого вгору в конденсаторі, дорівнює



$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} \tau g h \times (dah) = \frac{2\pi d q^2}{[b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]a} + \frac{1}{2} \tau g d a h^2. \quad (109)$$

Вона повинна бути мінімальна при значенні  $h$ , яке і буде розв'язком. Диференціюючи і прирівнюючи нулю похідну по  $h$ , отримуємо умову

$$\frac{dW}{dh} = -\frac{2\pi d q^2 (\varepsilon - 1)}{[b + (\varepsilon - 1)b_1 + (\varepsilon - 1)h]^2 a} + \tau g d a h = a d \left\{ -\frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi} + \tau g h \right\} = 0, \quad (110)$$

яка призводить до тієї ж відповіді (106).

### **Додаткова література**

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. — 832 с.
2. Гладуш В.Д., Куліков Д.О. Елементи векторного аналізу та теорії поля. 2010. — 126 с. Електронний ресурс [http://repository.dnu.dp.ua:1100/?page=inner\\_material&id=6690](http://repository.dnu.dp.ua:1100/?page=inner_material&id=6690)
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля М.: Наука, 1973. — 504 с.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества М.: Физматлит, 2003. — 616 с.
5. Батыгин В., Топтыгин И. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970. — 488 с.
6. Федорченко А. М., Теоретична фізика, т.1 Класична механіка і електродинаміка, Київ, Вища школа, 1992. — 535 с.
7. Разумова М.А., Хотяїнцев В.М. Основы векторного і тензорного аналізу. — Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. — 216 с.
8. Ледней М.Ф., Разумова М.А., Романенко О.В., Хотяїнцев В.М. Збірник задач з векторного та тензорного числення. — Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. — 129 с.
9. Сугаков В.Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. — Київ: Вища школа, 1974. — 272 с.
10. Решетняк С.О. Теоретична фізика. Електродинаміка [Електронний ресурс]. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — 196 с.
11. Жданов В.І., Пономаренко С.М., Долгошей В.Б. Класична електродинаміка: Збірник задач [Електронний ресурс]. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 96 с.