

ФІЗИКА КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ

I. НЕДИФРАКЦІЙНА КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ

Вячеслав ЛІЗУНОВ, Тетяна ВЛАДІМІРОВА, Світлана ЛІЗУНОВА,
Микола КУЛІШ, Оксана ДМИТРЕНКО, Олена ПАВЛЕНКО

ВСТУП

Розвиток багатьох сучасних галузей науки і техніки потребує відповідного вдосконалення методів неруйнівної діагностики складу та внутрішньої структури досліджуваних об'єктів. Вказані об'єкти можуть складатися із різноманітних речовин і матеріалів та мати складну будову. При цьому в залежності від області застосування розмір та форма об'єктів змінюються у широкому діапазоні.

Сучасні діагностичні методи засновані на формуванні за допомогою високоенергетичного випромінення картини розсіяння об'єкту, яка містить інформацію про внутрішню будову і склад, та її подальшій розшифровці на основі використання теорій, що описують зв'язок між параметрами об'єкта та дифракційною картиною. Отримання детальної інформації про складні об'єкти потребує змін умов експерименту і призводить до збільшення часу діагностики та, в результаті, дози опромінення, що зазвичай має негативний вплив на досліджуваний об'єкт. Найбільш критичним є виникнення такої ситуації при дослідженні некристалічних біологічних об'єктів (в тому числі і при діагностиці людини), для яких дифракційні методи не можуть бути застосовані.

На сьогодні одним з найбільш інформативних діагностичних методів для некристалічних об'єктів є комп'ютерна томографія. Небагато приладів у багатому арсеналі медичної техніки можуть скласти конкуренцію за розповсюдженістю комп'ютерному томографу. Його винахід безсумнівно розпочав революцію в медичній діагностиці, дозволивши неінвазивно «бачити» структуру людського організму.

Термін «томографія» походить від двох грецьких слів: *τομος* — перетин і *γραφω* — пишу та означає пошарове дослідження структури об'єкту. Існує багато різних видів томографії: рентгенівська, електронно-променева, магнітно-резонансна, позитронно-емісійна, ультразвукова, оптична когерентна та ін. Спільним для усіх цих томографічних методів є те, що за певною інтегральною характеристикою (наприклад, інтенсивністю, виміряною детектором), одержаної від деякого перерізу речовини, необхідно визначити локальну інформацію щодо характеристик об'єкту в кожній точці перерізу.

У класичній рентгенівській томографії вважається, що проміні, що формують зображення, розповсюджуються крізь об'єкт по прямих лініях, а дифракцією можна знехтувати. Тому цей вид томографії також називається недифракційною томографією. Таке припущення справедливе для випромінення з короткими довжинами хвиль. Коли довжина хвилі випромінення є співмірною з розмірами досліджуваного об'єкту, виникає необхідність врахування дифракції. Такий вид томографії називається дифракційною томографією. Особливості взаємодії випромінення з об'єктом визначаються його комплексним показником заломлення, дійсна частина якого описує заломлення випромінення, а уявна — поглинання.

Не зважаючи на широке розповсюдження методів комп'ютерної томографії, спостерігається нестача відповідних україномовних навчальних видань. Даний посібник спрямовано на вирішення цієї проблеми й присвячено викладенню фізичних основ методів рентгенівської комп'ютерної томографії. Переважно ми будемо слідувати схемі викладення матеріалу, запропонованій у класичній монографії [1]. В першій частині посібника розглядаються недифракційні методи рентгенівської томографії.

1. ВИМІРЮВАННЯ ПРОЕКЦІЙ У НЕДИФРАКЦІЙНІЙ ТОМОГРАФІЇ

Томографічні зображення формуються шляхом вимірювання та подальшої обробки проекцій, а контраст на томографічному зображенні у недифракційній томографії виникає за рахунок поглинання рентгенівського випромінення в досліджуваному об'єкті. В даному розділі ми розглянемо питання, пов'язані із вимірюванням проекцій, одержаних із використанням високоенергетичного випромінення, яке розповсюджується по прямим лініях через досліджувані об'єкти. Виміряні проекції за своєю природою є результатом взаємодії між випроміненням, яке використовується для одержання зображень, та речовиною, з якої складається об'єкт.

Наближено результати такої взаємодії можна подати як виміряні лінійні інтеграли деякої характеристики об'єкту. Простим прикладом цього є поглинання рентгенівського випромінення, яке, як буде показано далі, є логарифмом відношення кількості рентгенівських фотонів, які входять в об'єкт, до кількості тих, що виходять з нього. Однак, дані вимірювань лише наближено дорівнюють лінійним інтегралам. Так, ослаблення рентгенівського променя залежить від енергії кожного фотона, а оскільки зазвичай випромінення, що використовується для одержання зображення, не є монохроматичним і займає певний діапазон енергій, то поглинання описується більш складними виразами, ніж проста сума поглинання в кожній точці вздовж лінії розповсюдження.

Розглянемо паралельний пучок рентгенівських фотонів, які поширюються через однорідний матеріал, як показано на рис. 1. При цьому вважаємо, що втрат інтенсивності променя через його розбіжність немає. Однак інтенсивність променя зменшується внаслідок поглинання або розсіяння фотонів атомами матеріалу.

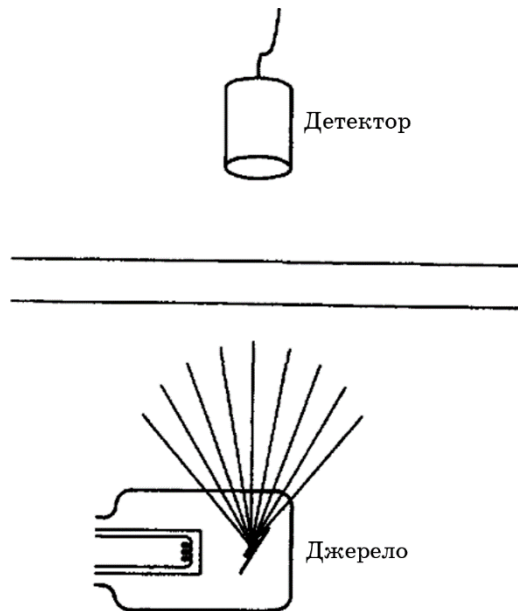


Рис. 1. Рентгенівське джерело, яке освітлює об'єкт пучком рентгенівських променів. Для визначення характеристик об'єкту потік випромінення вимірюється на задній стороні об'єкту.

Для діапазону енергій фотонів, який найчастіше використовується у медичній діагностиці (20–150 кеВ), основними механізмами, відповідальними за ці два канали зменшення інтенсивності пучка є фотоелектричне поглинання та Комптонове розсіяння. Явище фотоелектричного поглинання полягає в тому, що рентгенівський фотон передає всю свою енергію внутрішньому електрону в атомі (зазвичай на *K*-оболонці). Комптонове розсіяння пов'язано із непружним розсіянням рентгенівського фотона на вільному електроні, в результаті чого фотон відхиляється від початкового напрямку руху з певними втратами енергії.

Як фотоелектричне поглинання, так і ефект Комптона залежать від енергії фотонів. Це означає, що ймовірність поглинання або розсіяння фотона є функцією енергії цього фотона. Обговоримо ці питання більш детально.

Монохроматичні рентгенівські проекції. Розглянемо тонкий шар матеріалу, показаний на рис. 1. Припустимо, що N монохроматичних фотонів перетинають нижню межу цього шару протягом деякого довільного інтервалу часу вимірювання і що лише $N + \Delta N$ виходять з верхньої сторони (ΔN , очевидно, буде від'ємним). Ці $N + \Delta N$ фотонів не були поглинуті або розсіяні і, отже, вони

розповсюджуються в початковому напрямку руху. Якщо вважати, що всі фотони мають однакову енергію, то ΔN задовольняє співвідношенню [2]:

$$\frac{\Delta N}{N} \frac{1}{\Delta x} = -\tau - \sigma, \quad (1)$$

де τ і σ описують швидкості втрат фотонів (на одиницю відстані) за рахунок фотоелектричного поглинання та ефекту Комптона, відповідно. Поклавши $\tau + \sigma = \mu$ представимо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{\Delta N}{N} \frac{1}{\Delta x} = -\mu. \quad (2)$$

Переходячи до $\Delta x \rightarrow 0$ одержимо диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{N} dN = -\mu dx, \quad (3)$$

розв'язок якого знаходимо інтегруванням по всій товщині шару:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN'}{N'} = -\mu \int_0^x dx'. \quad (4)$$

Тут N_0 — кількість фотонів, яка падає на досліджуваний шар. Після інтегрування маємо

$$\ln N - \ln N_0 = -\mu x \quad (5)$$

або

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x}. \quad (6)$$

Величина μ називається коефіцієнтом поглинання матеріалу. При одержанні формули (6) μ вважалось постійним на інтервалі інтегрування.

Тепер розглянемо експеримент, зображений на рисунку 2, де показано поперечний переріз тіла людини, освітленого пучком рентгенівського випромінювання.

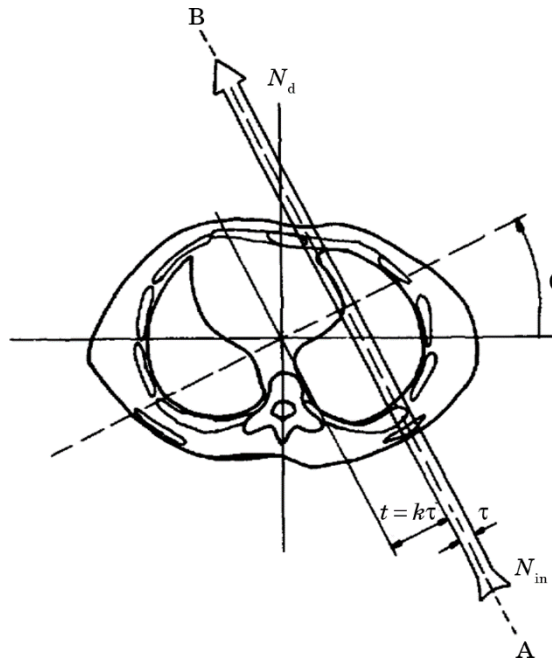


Рис. 2. Розповсюдження паралельного пучку рентгенівських променів через поперечний переріз тіла людини [3].

Якщо ми розглядаємо лише цей поперечний переріз, то μ буде функцією двох просторових координат x і y — $\mu = \mu(x, y)$. Позначимо N_{in} загальну кількість фотонів, які падають на об'єкт протягом проведення вимірювання зі сторони А. Позначимо також N_d загальну кількість фотонів, що виходять (протягом того самого інтервалу часу) зі сторони В. Коли ширина τ пучка досить мала, міркування, подібні до того, що було використано перед цим для одновимірного випадку, тепер приводять до наступного співвідношення між числами N_d і N_{in} [2]:

$$N_d = N_{in} \exp \left(- \int_{AB} \mu(x, y) ds \right) \quad (7)$$

або

$$\int_{AB} \mu(x, y) ds = \ln \frac{N_{in}}{N_d}, \quad (8)$$

де ds — елемент довжини, а інтегрування здійснюється вздовж прямої АВ, зображеної на рис. 2. Ліва частина рівняння (8) якраз і є лінійним інтегралом для проекції. Таким чином, вимірювання таких величин, як $\ln(N_{in}/N_d)$, виконані для різних променів під різними кутами, можна використовувати для знаходження проекційних даних функції $\mu(x, y)$.

Вимірювання проекційних даних за допомогою поліхроматичних джерел. На практиці джерела рентгенівського випромінювання, які використовуються для медичної діагностики, не є монохроматичними. Хоча використовуючи явище зміцнення пучка, про яке мова піде далі, можна було б сформувати рентгенівський пучок фотонів майже однакової енергії, однак це значно зменшило б загальну кількість фотонів та суттєво погіршило б співвідношення сигнал/шум, що є неприйнятним.

Отже, коли енергія в пучку рентгенівського випромінювання не монохроматична, рівняння (7) не виконується, і його потрібно замінити на рівняння:

$$N_d = \int S_{in}(E) \exp(-\int \mu(x, y, E) ds) dE, \quad (9)$$

де $S_{in}(E)$ — спектральна густина енергії падаючих фотонів. Добуток $S_{in}(E)dE$ дорівнює загальній кількості падаючих фотонів в діапазоні енергій від E до $E + dE$. Це рівняння враховує той факт, що лінійний коефіцієнт ослаблення μ у точці (x, y) також є функцією енергії. Спектр вихідних фотонів (сторона В на рис. 2) описується формулою:

$$S_{exit} = S_{in}(E) \exp(-\int \mu(x, y, E) ds) dE. \quad (10)$$

При обговоренні поліхроматичних джерел рентгенівських фотонів, слід врахувати, що, в основному, існує три різних типи детекторів таких фотонів [4]: сигнал детектора пропорційний загальній кількості фотонів, що падають на нього, сигнал детектора пропорційний загальній енергії фотонів, або він пропорційний енергії, що приходить на одиницю маси. При визначенні виходу детектора необхідно також враховувати залежність чутливості детектора від енергії фотона. Ми будемо вважати, що чутливість детектора є постійною в діапазоні енергії, що розглядається.

У тих діапазонах енергій, які використовуються для медичної діагностики, лінійний коефіцієнт поглинання зазвичай зменшується при збільшенні енергії випромінювання. При використанні поліхроматичного рентгенівського пучка це призводить до переважного поглинання фотонів низьких енергій, так що в пучку залишаються відповідно фотони більш високих енергій. Іншими словами, середня енергія, пов'язана зі вихідним спектром $S_{exit}(E)$ вища, ніж середня

енергія, пов'язана зі спектром вхідного пучка $S_{in}(E)$. Це явище називається зміцненням пучка. Зміцнення пучка, викликане поліхроматичністю променю, може призводити до появи двох основних типів спотворень. Перший — це ефект «відбілювання» зображень внаслідок збільшення енергії фотонів у пучку, що дає більш світлі зображення. Іншим артефактом, спричиненим поліхроматичністю, є поява смуг і хибних максимумів інтенсивності.

Було запропоновано різні підходи для зменшення кількості вказаних артефактів. Переважно вони поділяються на три категорії: 1) попередня обробка проєкційних даних, 2) обробка реконструйованого зображення та 3) використання методу так званих «двоенергетичних» зображень.

Методи попередньої обробки полягають у наступному: якщо б ми мали «ідеальний» випадок, коли фотони мають однакові енергії, була б справедлива формула (8). Для однорідного матеріалу з коефіцієнтом поглинання μ це означало б, що:

$$\mu l = \ln \frac{N_{in}}{N_d}, \quad (11)$$

де l — товщина поглинаючого матеріалу. Отже, при «ідеальних» умовах експериментально виміряна залежність $\ln(N_{in}/N_d)$ має бути лінійно пропорційною товщині поглинача (пунктирна крива на рис. 3). За реальних умов маємо результат, який описується суцільною кривою на тому ж рисунку. Попередня обробка полягає у виборі «відповідного» поглинача для експериментального одержання суцільної кривої рис. 3.

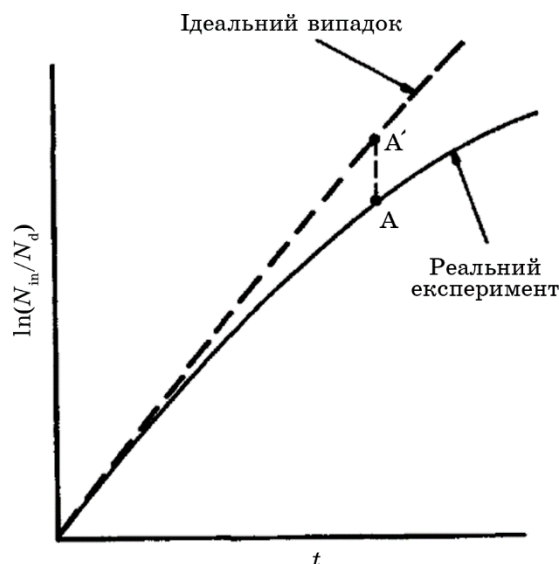


Рис. 3. Експериментально одержані значення променевого інтегралу нелінійно залежать від товщини однорідного поглинача [3].

Таким чином, якщо лінійний інтеграл вимірюється в точці А, його значення просто збільшують до значення в точці А' при проведення томографічної реконструкції. Перевага цієї процедури полягає в тому, що вона є швидкою та добре працює для поперечних зрізів м'яких тканин, оскільки відмінності в їхньому складі мінімальні.

Методи попередньої обробки даних зазвичай погано працюють, якщо в об'єкті присутні області, що сильно поглинають. У таких випадках можливе застосування постобробки зображення для покращення реконструкції. В ітераційній схемі спочатку виконується реконструкція зображення (зазвичай з використанням лінеаризації, згаданої вище) за проєкційними даними. Потім на одержане зображення накладаються певні обмеження так, щоб отримати зображення, яке показує лише сильнопоглинаючі ділянки. Потім визначають внесок сильнопоглинаючих ділянок в кожен лінійний інтеграл для кожної проєкції, на основі чого і визначається поправка.

Метод подвійної енергії, запропонований в роботах [5, 6], засновано на моделюванні енергетичної залежності лінійного коефіцієнта поглинання:

$$\mu(x, y, E) = a_1(x, y)g(E) + a_2(x, y)f_{\text{KN}}(E). \quad (12)$$

Перший доданок описує внесок фотоелектричного поглинання в точці (x, y) , де функція $g(E)$ має вигляд:

$$g(E) = \frac{1}{E^3}. \quad (13)$$

Другий доданок описує внесок Комптонового розсіяння, а функція $f_{\text{KN}}(E)$ — це функція Клейна–Нішіни, яка має вигляд:

$$f_{\text{KN}}(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + 2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \ln(1 + 2\alpha) - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2}, \quad (14)$$

де $\alpha = E/510,975$, а енергію виражено в кеВ.

Важлива особливість рівняння (12) полягає в тому, що залежність від енергії описується відомими, незалежними від матеріалу, функціями $g(E)$ та $f_{\text{KN}}(E)$. Підставляючи це рівняння в (9) одержимо:

$$N_d = \int S_0(E) \exp(-(A_1 g(E) + A_2 f_{KN}(E))) dE, \quad (15)$$

де

$$A_1 = \int_{AB} a_1(x, y) ds \quad (16)$$

та

$$A_2 = \int_{AB} a_2(x, y) ds. \quad (17)$$

Зрозуміло, що A_1 та A_2 є лінійними інтегралами функцій $a_1(x, y)$ і $a_2(x, y)$. Якщо вдасться визначити A_1 та A_2 для кожного променя, то функції $a_1(x, y)$ і $a_2(x, y)$ можуть бути реконструйовані. І тоді, визначивши $a_1(x, y)$ і $a_2(x, y)$ і використовуючи формулу (12), коефіцієнт поглинання може бути розрахований для будь-якої енергії, причому без впливу ефектів зміцнення променю.

Як же визначити величини A_1 та A_2 ? Відмітимо, що N_d — це, фактично, інтенсивність, що вимірюється детектором. Тепер замість одного вимірювання лінійного інтегралу, зробимо два вимірювання для кожного променя для двох різних джерел випромінювання. Якщо виміряні інтенсивності I_1 та I_2 , то:

$$I_1(A_1, A_2) = \int S_1(E) \exp(-(A_1 g(E) + A_2 f_{KN}(E))) dE, \quad (18)$$

$$I_2(A_1, A_2) = \int S_2(E) \exp(-(A_1 g(E) + A_2 f_{KN}(E))) dE, \quad (19)$$

що дає нам два (інтегральних) рівняння для двох невідомих A_1 та A_2 . Зазначені два різні джерела випромінювання $S_1(E)$ та $S_2(E)$, можна, наприклад, отримати зміною напруги в трубці джерела рентгенівського випромінювання або використанням додаткових фільтрів. При цьому, зазвичай, потрібно зробити два сканування для кожної томограми.

Розсіяння. Розсіяння рентгенівського випромінювання призводить до появи іншого типу спотворень у вимірних проекціях. В результаті розсіяння променя відбувається ослаблення пучку за рахунок того, що частина пучку відхиляється та розповсюджується новим шляхом. Кут розсіяння в нашому випадку є випадковим, але зазвичай рентгенівські промені розсіюються в напрямку «вперед».

Єдиний спосіб запобігти розсіянню, яке призводить до спотворень зображення — побудова системи ідеально колімованих детекторів. Таким

чином, будь-які рентгенівські промені, які не розповсюджуються за прямою лінією, що з'єднує джерело та детектор не реєструються детектором.

Розсіювання рентгенівського випромінювання призводить до появи артефактів у реконструйованих зображеннях, оскільки ефект від розсіювання різних для різних проекцій. Інтенсивність розсіяного рентгенівського випромінювання приблизно однакова для різних проекцій об'єкту, в той час як інтенсивність первинного променя, який падає на детектор, ні. Після проходження випромінюванням коліматору, детектор просто підсумовує дві інтенсивності. Для променів, які пройшли через об'єкт, інтенсивність первинного пучка мала, тоді як ефект розсіювання буде значним, для інших променів, коли інтенсивність первинного променя велика, розсіяне рентгенівське випромінювання не дає великої помилки. Отже, розсіювання випромінювання призводить до різних помилок для різних проекцій. Таким чином, замість помилкового внеску від розсіювання по всьому зображенню, цей внесок виникає лише для деяких напрямків, що призводить до появи смуг у реконструйованому зображенні.

2. АЛГОРИТМИ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ У НЕДИФРАКЦІЙНІЙ ТОМОГРАФІЇ

Лінійні інтеграли та проекції

Отже, при проведенні томографічних вимірювань, ми постійно маємо справу із так званими проекціями та лінійними інтегралами. Лінійний інтеграл — це інтеграл від деякого параметру, який характеризує досліджуваний об'єкт, вздовж певної лінії. Наприклад, це може бути інтеграл від коефіцієнту поглинання (або заломлення) рентгенівських променів взятий вздовж ліній їхнього розповсюдження в об'єкті.

Визначимо систему координат так, як показано на рис. 1. Нехай досліджуваний об'єкт описується двовірною функцією $f(x, y)$, а кожен лінійний інтеграл — параметрами (θ, t) .

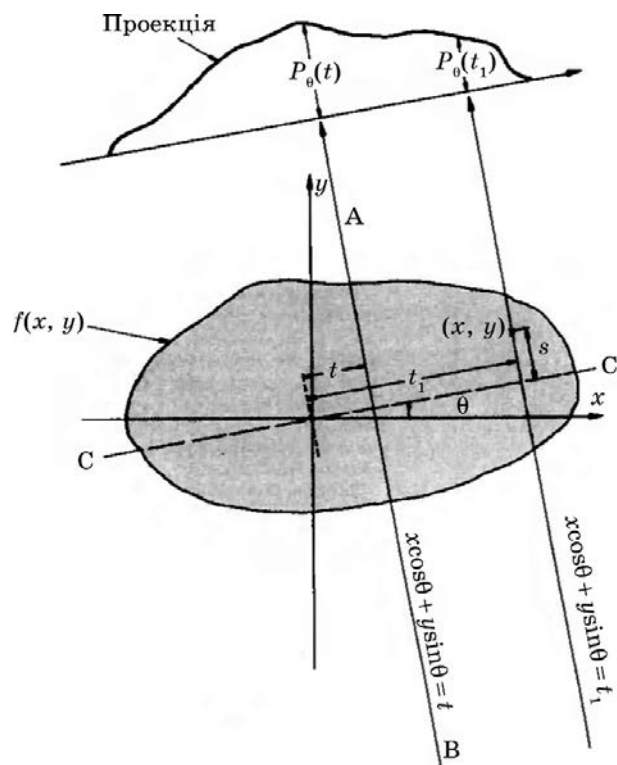


Рис. 1. Об'єкт, який описується функцією $f(x, y)$, та його лінійна проекція $P_\theta(t)$, виміряна при заданому куті θ [3].

Рівняння прямої АВ на рисунку 1

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t. \quad (1)$$

Використаємо це співвідношення для того, щоб визначити лінійний інтеграл

$$P_{\theta}(t) = \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (2)$$

Враховуючи (1) та використовуючи δ -функцію, рівняння (2) можна представити у вигляді:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy. \quad (3)$$

Таке перетворення функції $f(x, y)$ називається перетворенням Радона.

Найпростішим типом проекцій є набір лінійних інтегралів $P_{\theta}(t)$, вимірюваних при заданому θ , але різних t . Такий тип проекції називається паралельною проекцією та може бути вимірюваний, наприклад, при русі джерела рентгенівських променів і детектора паралельно один одному вздовж об'єкту (рис. 2).

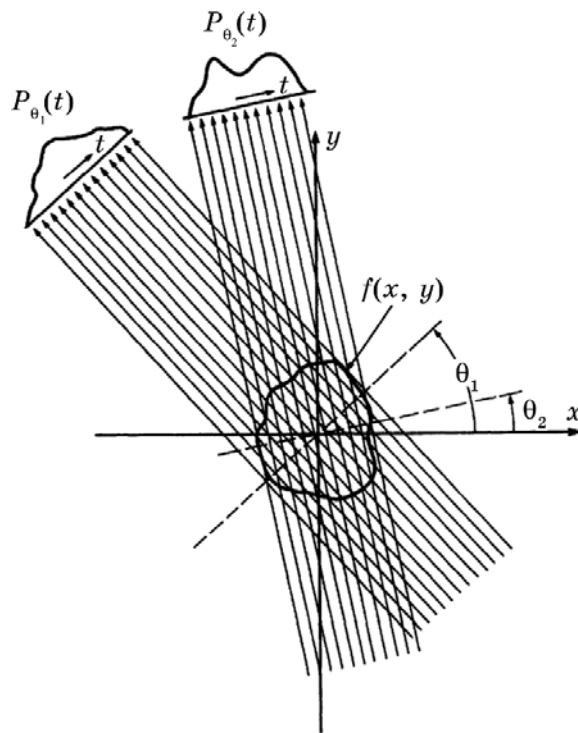


Рис. 2. Паралельні проекції, які є результатом вимірювання інтенсивності для наборів паралельних променів при різних кутах [7].

Вимірювання проекцій іншого типу може бути реалізоване при використанні точкового джерела випромінювання, розміщення якого фіксоване відносно лінійного набору детекторів (рис. 3). Такі проекції мають назву віялових.

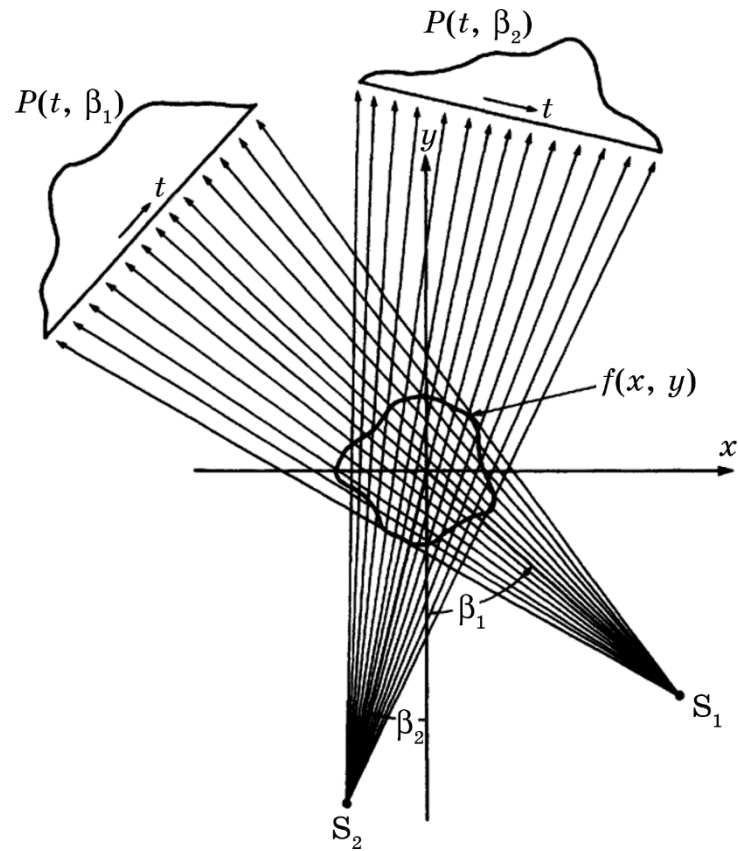


Рис. 3. Вимірювання віялових проекцій [7].

Для прикладу одержимо вираз для проекції однорідного об'єкту, який має форму кола (рис. 4). Функція $f(x, y)$ для такого об'єкту записується у вигляді:

$$f(x, y) = \begin{cases} \mu & \text{при } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4)$$

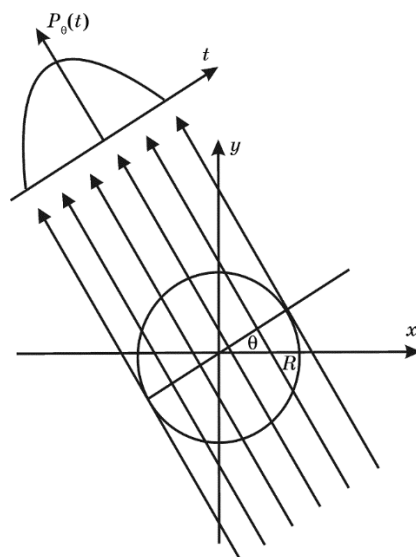


Рис. 4. Розрахунок проекції об'єкту простої форми.

Шлях, який проходить в об'єкті промінь, що знаходиться на відстані t від центру кола, дорівнює $2(R^2 - t^2)^{1/2}$ (при $t < R$). Враховуючи формулу (4) одержимо, що проекція для такого випадку дорівнюють:

$$P_{\theta}(t) = \begin{cases} 2\mu\sqrt{R^2 - t^2} & \text{при } |t| \leq R, \\ 0 & \text{при } |t| > R. \end{cases} \quad (5)$$

Зазначимо, що наше визначення проекції $P_{\theta}(t)$ прямо пов'язує величину проекції із внеском від поглинання випромінювання об'єктом. При цьому, чим більше значення $P_{\theta}(t)$, тим менша буде відповідна інтенсивність, виміряна детектором, та навпаки.

Теорема про центральний переріз

Важливу роль для реконструкції зображень відіграє теорема про центральний переріз. Визначимо двовимірне Фур'є-перетворення функції об'єкту $f(x, y)$ як:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (6)$$

Фур'є-перетворення проекції при заданому куті θ дорівнює:

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-i2\pi wt} dt. \quad (7)$$

Тоді теорема про центральний переріз може бути сформульована у наступній формі [8]: Фур'є-перетворення паралельної проекції функції $f(x, y)$, виміряної при куті θ , дорівнює перерізу двовимірного Фур'є-перетворення $F(u, v)$ функції f , взятому вздовж лінії, що проходить через початок координат і складає кут θ з віссю u .

Розглянемо два способи доведення цієї теореми.

Спосіб 1. Найпростіший варіант теореми про центральний переріз одержимо при $\theta=0$. Розглянемо Фур'є-перетворення функції об'єкту вздовж лінії в Фур'є-просторі, яка задається рівнянням $v=0$:

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] e^{-i2\pi ux} dx. \quad (8)$$

Вираз у дужках є виразом для проекції при $\theta = 0$:

$$P_{\theta=0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy. \quad (9)$$

Підставивши (9) у рівняння (8), одержимо:

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-i2\pi ux} dx \quad (10)$$

або

$$F(u, 0) = S_{\theta=0}(u). \quad (11)$$

Формула (11) виражає теорему про центральний переріз у найпростішій формі. Однак зрозуміло, що одержаний результат не залежить від орієнтації об'єкту відносно координатної системи. Якщо, наприклад, як показано на рис. 5, координатну систему повернуто на кут θ , то Фур'є-перетворення проекції у формулі (9) дорівнює двовимірному Фур'є-перетворенню функції об'єкту вздовж лінії в Фур'є-просторі, повернутої на кут θ .

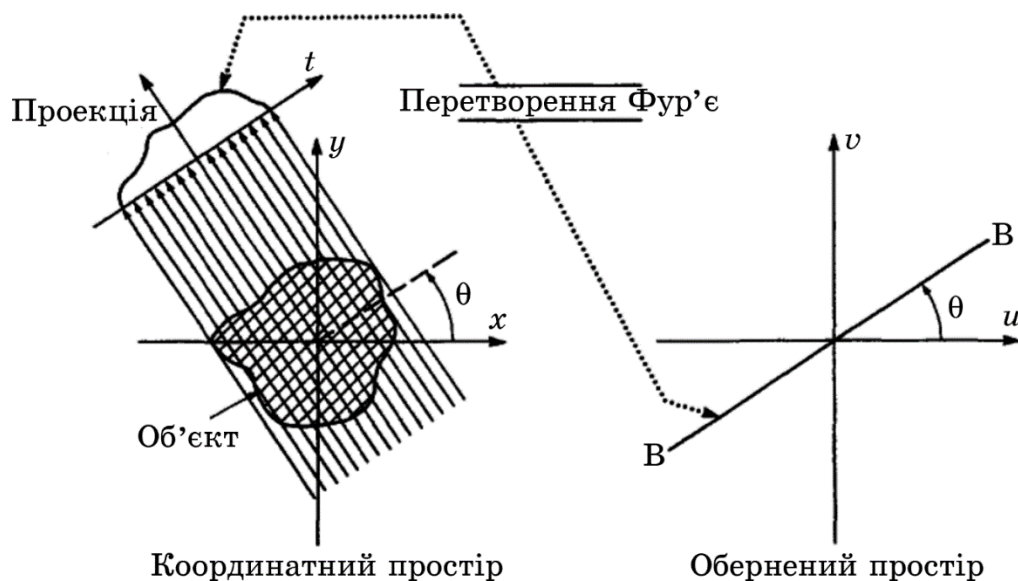


Рис. 5. Зв'язок між Фур'є-перетворенням проекції та Фур'є-перетворенням функції об'єкту вздовж радіальної лінії.

Спосіб 2. Розглянемо систему координат (t, s) повернуту на кут θ відносно вихідної системи координат (x, y) . Дві зазначені системи координат пов'язані співвідношенням:

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В системі координат (t, s) вираз для проєкції вздовж лінії, для якої $t = \text{const}$, має вигляд:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds, \quad (13)$$

а із формули (7) для її Фур'є-образу одержимо:

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-i2\pi w t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds \right] e^{-i2\pi w t} dt. \quad (14)$$

Перейдемо тепер до системи координат (x, y) ; використавши формулу (12) одержимо:

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy. \quad (15)$$

Права частина даного рівняння є двовимірним Фур'є-перетворенням функції об'єкту при просторових частотах $u = w \cos \theta$, $v = w \sin \theta$, отже

$$S_{\theta}(w) = F(u, v) = F(w \cos \theta, w \sin \theta), \quad (16)$$

що й доводить теорему про центральний переріз.

Одержаний результат свідчить, що, вимірюючи проєкції об'єкту при кутах $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ і виконуючи Фур'є-перетворення для кожної з них, можна визначити значення $F(u, v)$ на радіальних лініях, показаних на рис. 5. Якщо взяти нескінченну кількість проєкцій, то $F(u, v)$ буде відомо для всіх точок uv -площини. Визначивши $F(u, v)$, можна за допомогою оберненого Фур'є-перетворення знайти функцію об'єкту $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi (ux+vy)} du dv. \quad (17)$$

Якщо функція $f(x, y)$ обмежена областю $-A/2 < x < A/2$, $-A/2 < y < A/2$, то для числових обчислень формулу (17) можна переписати у вигляді:

$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_m \sum_n F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{i2\pi ((m/A)x + (n/A)y)}. \quad (18)$$

При обчисленнях кількість вимірних проєкцій, а, отже, й визначених Фур'є-компонент завжди буде скінченною, тому замість (18) маємо наближену рівність:

$$f(x, y) \approx \frac{1}{A^2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{i2\pi((m/A)x + (n/A)y)}, \quad (19)$$

де N — ціле парне число. Зрозуміло, що якість реконструкції зображення буде визначатись значенням N . Для обчислень за формулою (18) може бути використане швидке перетворення Фур'є; при цьому N^2 коефіцієнтів $F(m/A, n/A)$ вважаються відомими.

Те, що на практиці може бути виміряна лише скінчена кількість проекцій, означає, що функція $F(u, v)$ відома лише вздовж скінченої кількості радіальних ліній, як це показано на рис. 6.

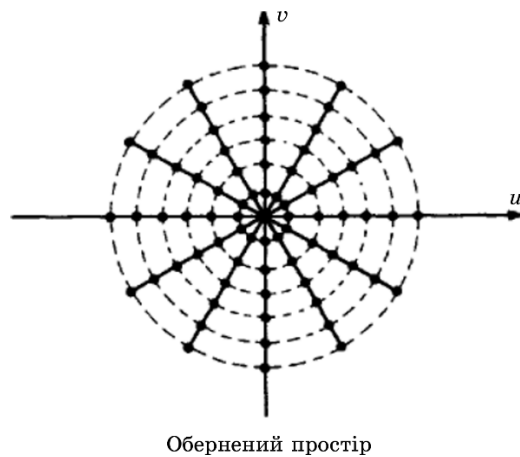


Рис. 6. Вимірювання проекцій об'єкту для певних кутів дозволяє визначити Фур'є-образ функції об'єкту вздовж деяких радіальних ліній [9].

Для використання формули (19) необхідно перейти від відомих значень функції $F(u, v)$ в точках на радіальних лініях, показаних на рис. 6, до значень F в точках квадратної ґратниці. Одним із способів для точного визначення необхідних для використання (19) N^2 коефіцієнтів є визначення відповідної необхідної кількості значень функції $F(u, v)$ на певних радіальних лініях, що, однак призводить до необхідності розв'язання систем рівнянь великої розмірності та появи нестійких розв'язків. Більш доцільним є визначення значення на квадратній сітці методами інтерполяції за значеннями радіальних точок. Оскільки щільність радіальних точок зменшується із збільшенням відстані від центру, похибка інтерполяції стає при цьому більшою. Отже,

більша похибка при обчисленнях у високочастотній області в порівнянні з низькочастотною призводить до деякого погіршення відновленого зображення.

Алгоритм реконструкції зображення за паралельними проекціями

Теорема про центральний переріз пов'язує Фур'є-перетворення проекції з Фур'є-перетворенням функції об'єкту вздовж певної радіальної лінії в Фур'є-просторі. Таким чином, вимірявши достатню кількість проекцій при різних значеннях кутів, можна одержати двовимірне Фур'є-перетворення шуканої функції та за допомогою оберненого Фур'є-перетворення визначити функцію об'єкту. Однак практична реалізація цього методу вимагає використання дещо іншого підходу.

Один із методів, який знайшов широке застосування у томографії, — метод фільтрованих обернених проекцій. Цей метод має просте обґрунтування, оскільки кожна проекція представляє собою «майже незалежне» вимірювання об'єкту. Дійсно, проекції «майже незалежні» одні від одної, оскільки єдина спільна інформація, що міститься у перетвореннях Фур'є двох проекцій, виміряних при різних значеннях кутів — нульова компонента.

Зауважимо, що вимірювання проекції можна розглядати як виконання операції двовимірної фільтрації. Розглянемо деяку проекцію та її Фур'є-образ. Згідно із теоремою про центральний переріз цей образ співпадає із двовимірним Фур'є-перетворенням функції об'єкту вздовж певної лінії. Якщо Фур'є-образ цієї проекції розмістити в відповідному місці в двовимірному Фур'є-образі об'єкту, то проста (хоча і спотворена) реконструкція зображення може бути проведена шляхом оберненого Фур'є-перетворення при припущенні, що всі інші проекції дорівнюють нулю. При цьому проведена в такий спосіб реконструкція еквівалентна знаходженню Фур'є-образу об'єкту помноженого на функцію фільтру (див. рис. 7, б).



a



б



в

Рис. 7. Реконструкція всього об'єкту може бути виконана шляхом об'єднання зображень, одержаних для кожного кута до повного заповнення частотної області (*а*); експериментально вимірювані результати, які несуть інформацію про Фур'є-образ об'єкту вздовж однієї лінії (*б*); метод фільтрованих обернених проекцій використовує дані з рис. 7, *б* та вимагає застосування вагової функції в оберненому просторі, щоб результати були максимально наближені до результатів рис. 7, *а* (*в*).

Один із простих варіантів реконструкції зображення міг би полягати в знаходженні суми проекцій функції об'єкту, відфільтрованих круговими клинами (рис. 7, *а*). Таку суму можна обчислювати як в координатному, так і в Фур'є-просторі внаслідок лінійності перетворення Фур'є. Як буде видно з подальшого розгляду, при виконанні підсумовування в координатному просторі, відбувається знаходження зворотної проекції.

Як випливає з назви, метод фільтрованих обернених проекцій складається з двох етапів: фільтрації, яку можна представити як співставлення кожній проекції певної ваги в Фур'є-просторі та знаходження оберненої проекції, яке полягає в реконструкції зображень, які відповідають кожній відфільтрованій (зваженій) проекції, згаданих вище.

Перший етап методу полягає в наступному. Для кожної проекції в Фур'є-просторі знаходиться зважене фільтром типу «кругового клину» Фур'є-перетворення функції об'єкту. Найпростіший спосіб це зробити — помножити Фур'є-образ проекції $S_0(w)$ на ширину клину при вказаній частоті. Таким чином, якщо наявні K проекцій у кутовому діапазоні 180° , то при заданій частоті w кожен клин має ширину $2\pi|w|/K$. Далі буде показано, що множник $|w|$ є Якобіаном переходу між полярною системою координат та Декартовою системою координат, необхідною для оберненого Фур'є-перетворення.

Ефект від цього зважування представлено на рисунку 7, *в*. Порівнюючи з рис. 7, *а*, можна бачити, для кожної просторової частоти w , зважена проекція $2\pi|w|/KS_0(w)$ має таку саму «масу», як функція об'єкту, відфільтрована круговим клином. Отже, зважені проекції є наближенням до кругових клинів

функції об'єкту, однак похибку можна зробити як завгодно малою використовуючи достатню кількість проекцій.

Другий етап відновлення зображення полягає у застосуванні двовимірного оберненого Фур'є-перетворення до кожної зваженої проекції. Оскільки кожна проекція дає значення Фур'є-перетворення тільки вздовж однієї лінії, обернене перетворення може бути виконано швидко.

Отже реалізація методу фільтрованих обернених проекцій складається з наступних кроків:

для всіх K кутів θ в інтервалі від 0° до 180° вимірюються проекції $P_\theta(t)$,
до них застосовується Фур'є-перетворення, щоб знайти $S_\theta(w)$,
результат множиться на вагову функцію $2\pi|w|K$,
виконується підсумовування по всій площині зображення обернених Фур'є-перетворень фільтрованих проекцій.

Наведений алгоритм має принаймні дві переваги над інтерполяцією в Фур'є-просторі. Найголовнішим є те, що реконструкцію зображення можна починати одразу після того, як було виміряно першу проекцію. Це прискорює процедуру відновлення зображення. Інша перевага полягає в тому, що інтерполяція зазвичай є більш точною, коли виконується в координатному просторі (як частина процесу знаходження зворотної проекції), ніж Фур'є-просторі. Проста лінійна інтерполяція часто є достатньою для достатньо точної роботи алгоритму фільтрованих зворотних проекцій, тоді як у Фур'є-просторі потрібні більш складні підходи.

Теорія методу фільтрованих обернених проекцій

Спочатку розглянемо метод фільтрованих обернених проекцій для паралельних проекцій. Запишемо формулу для оберненого Фур'є-перетворення:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv. \quad (20)$$

Перейдемо до полярної системи координат:

$$\begin{aligned} u &= w \cos \theta, \\ v &= w \sin \theta, \\ du dv &= w dw d\theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді формула (20) прийме вигляд:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta. \quad (22)$$

Інтеграл по θ може бути розбитий на 2 інтеграли: один, коли θ змінюється від 0 до π , а інший — від π до 2π :

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta. \quad (23)$$

Використавши властивість

$$F(w, \theta + \pi) = F(-w, \theta), \quad (24)$$

а також властивості тригонометричних функцій маємо:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\infty} F(w, \theta) |w| e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw \right] d\theta = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(w, \theta) |w| e^{i2\pi w t} dw \right] d\theta, \quad (25)$$

де введено позначення $t = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Підставляючи в формулу (25) замість $F(w, \theta)$ вираз для Фур'є-образу проєкції $S_{\theta}(w)$ маємо:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(w) |w| e^{i2\pi w t} dw \right] d\theta. \quad (26)$$

Інтеграл в (26) може бути представлений у вигляді:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta, \quad (27)$$

де

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(w) |w| e^{i2\pi w t} dw. \quad (28)$$

Рівняння (27), (28) можна інтерпретувати наступним чином. Рівняння (28) описує операцію фільтрації з використанням фільтру, який у Фур'є-просторі має вигляд $|w|$. Саме тому $Q_{\theta}(w)$ називають «фільтрованою» проєкцією. Фільтровані проєкції розраховуються для різних кутів θ .

Рівняння (27) описує процес розрахунку «оберненої» проєкції. Для кожного фіксованого кута θ значення змінної t однакове для всіх (x, y) , що лежать на лінії LM (див. рис. 8). Отже, фільтрована проєкція дає однаковий внесок при реконструкції для кожної з цих точок (x, y) . Можна сказати, що при реконструкції кожна фільтрована проєкція $Q_{\theta}(w)$ розмазується (або «обертається») по площині зображення.

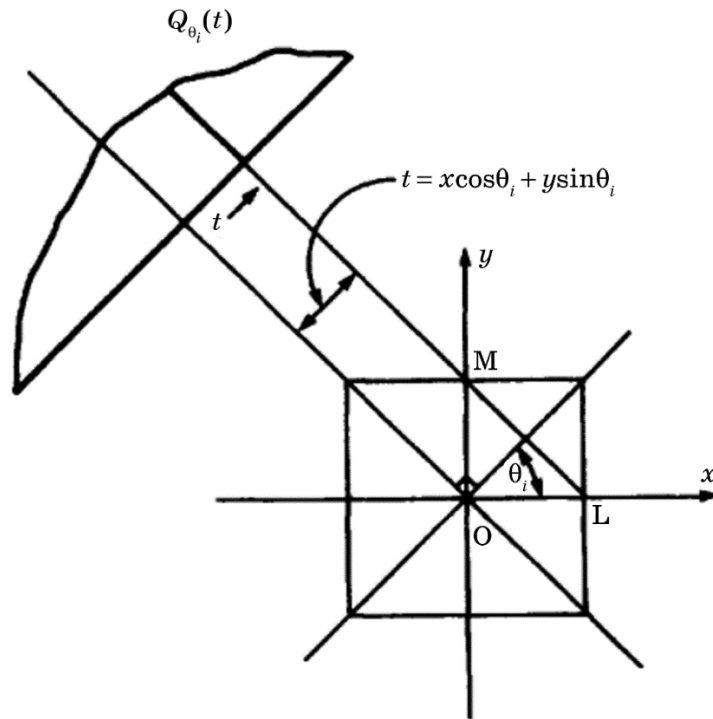


Рис. 8. Розрахунок «оберненої» проекції: фільтрована проекція розмазується по площині реконструкції вздовж ліній постійного t . Фільтрована проекція (для постійного t) робить однаковий внесок у всі точки вздовж лінії LM.

Змінна w має розмірність просторової частоти. Інтегрування в (28) проводиться, в принципі, по всіх просторових частотах. На практиці внеском від високих частот часто можна знехтувати та розглядати проекції як вузькосмугові. Якщо частота W більша за частотні компоненти в виміряних проекціях, то згідно з теоремою дискретизації проекції можуть бути дискретизовані з інтервалом

$$T = \frac{1}{2W} \quad (29)$$

без внесення похибки. Якщо також ми покладемо, що проекції дорівнюють 0 при великих значеннях $|t|$, то проекції можна представити у вигляді:

$$P_\theta(mT), m = \frac{-N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (30)$$

для деякого (великого) N .

Для наближеного обчислення Фур'є-образу $S_\theta(w)$ може бути використаний метод швидкого перетворення Фур'є:

$$S_{\theta}(w) \approx S_{\theta} \left(m \frac{2W}{N} \right) = \frac{1}{2W} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} P_{\theta} \left(\frac{k}{2W} \right) e^{-i2\pi(mk/N)}. \quad (31)$$

Заданий набір дискретизованих проекцій визначає дискретизований набір їхніх Фур'є-образів. Тепер визначимо фільтровані проекції врахувавши обмеженість за частотою:

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-W}^W S_{\theta}(w) |w| e^{i2\pi wt} dw \approx \frac{2W}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2} S_{\theta} \left(m \frac{2W}{N} \right) \left| m \frac{2W}{N} \right| e^{i2\pi m(2W/N)t}. \quad (32)$$

Якщо ми хочемо розрахувати значення проекцій лише в тих точках, в яких проекції $P_{\theta}(t)$ дискретизовано, то

$$Q_{\theta} \left(\frac{k}{2W} \right) \approx \frac{2W}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2} S_{\theta} \left(m \frac{2W}{N} \right) \left| m \frac{2W}{N} \right| e^{i2\pi(mk/N)}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}. \quad (33)$$

Отже, функцію $Q_{\theta}(t)$ можна розрахувати використовуючи обернене дискретне Фур'є-перетворення (ДФП) добутку функцій $S_{\theta}(2Wm/N)$ та $|2Wm/N|$. Для зменшення шумів у реконструйованому зображенні можна додатково помножити фільтровану проекцію $S_{\theta}(2W/N)|2W/N|$ на множник, який буде виконувати роль додаткового фільтра. Наприклад, як подібний фільтр часто використовується функція $H(x)$, яка називається «вікно Хеммінга»:

$$Q_{\theta} \left(\frac{k}{2W} \right) \approx \frac{2W}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2} S_{\theta} \left(m \frac{2W}{N} \right) \left| m \frac{2W}{N} \right| H \left(m \frac{2W}{N} \right) e^{i2\pi(mk/N)}. \quad (34)$$

Вікно Хеммінга (та інші подібні фільтри) повинні подавляти високі частоти, які часто і вносять найсильніший шум у зображенні. Використовуючи теорему про згортку, формулу (34) можна подати у вигляді:

$$Q_{\theta} \left(\frac{k}{2W} \right) \approx \frac{2W}{N} P_{\theta} \left(\frac{k}{2W} \right) * \phi \left(\frac{k}{2W} \right), \quad (35)$$

де $*$ означає періодичну згортку, а ϕ — обернене ДФП дискретної функції $|2Wm/N|H(2Wm/N)$, $m = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2$.

Отже, $Q_{\theta}(t)$ може бути знайдена в Фур'є-просторі за допомогою формули (32) або в координатному просторі за допомогою формули (35). Реконструйоване зображення $f(x, y)$ може бути наближено розраховано за формулою (27), в якій зроблено перехід від інтегрування до підсумовування:

$$f(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i), \quad (36)$$

де K — кількість виміряних при кутах θ_i проекцій.

Відмітимо, що значення $x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$ в (36) може не співпадати із значеннями t , при яких визначено Q_{θ_i} в (34) або (35). Однак Q_{θ_i} для таких t може бути знайдене наближено шляхом інтерполяції; часто лінійної інтерполяції достатньо.

Зробимо ще два коментарі щодо формули (28). По-перше, формулу (28) можна подати в координатному просторі у вигляді:

$$Q_{\theta}(t) = \int P_{\theta}(t) p(t - \alpha) d\alpha, \quad (37)$$

де $p(t)$ — обернене Фур'є-перетворення функції $|w|$. Оскільки $|w|$ не є квадратично інтегрованою функцією, це обернене перетворення не існує в звичайному сенсі. Однак його можна розглядати як обернене Фур'є-перетворення функції

$$|w| e^{-\varepsilon|w|} \quad (38)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тоді

$$p_{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon^2 - (2\pi t)^2}{(\varepsilon^2 + (2\pi t)^2)^2}. \quad (39)$$

При великих t $p_{\varepsilon}(t) \approx -1/2\pi t$.

По-друге, рівняння (28) може представити ще й в наступному вигляді:

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi w S_{\theta}(w) \left(\frac{-i}{2\pi} \operatorname{sig} w \right) e^{i2\pi w t} dw, \quad (40)$$

де

$$\operatorname{sig} w = \begin{cases} 1, & w > 0, \\ -1, & w < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Використовуючи теорему про згортку, знаходимо:

$$Q_{\theta}(t) = \text{IFT}\{i2\pi w S_{\theta}(w)\} * \text{IFT}\left\{\frac{-i}{2\pi} \operatorname{sig} w\right\}, \quad (42)$$

де $*$ означає (лінійну) згортку, а IFT — обернене перетворення Фур'є. Оскільки

$$\text{IFT}\{i2\pi w S_{\theta}(w)\} = \frac{\partial}{\partial t} P_{\theta}(t), \quad \text{IFT}\left\{\frac{-i}{2\pi} \operatorname{sig} w\right\} = \frac{1}{t},$$

то формула (42) прийме вигляд:

$$Q_{\theta}(t) = \frac{1}{2\pi^2 t} * \frac{\partial P_{\theta}(t)}{\partial t}. \quad (43)$$

Іншими словами, $Q_{\theta}(t)$ є перетворенням Гільберта від $\partial P_{\theta}(t) / \partial t$.

Практична реалізація методу.

Позначимо дискретизовані проекції як $P_\theta(k\tau)$, де k приймає цілі значення. Викладена вище теорія передбачає, що для кожної дискретизованої проекції $P_\theta(k\tau)$, потрібно розрахувати фільтровану проекцію $Q_\theta(k\tau)$, використовуючи періодичну згортку, задану (32). Однак, рівняння (32) було одержано в припущенні про обмежену смугу сигналу та скінчену кількість проекцій. Оскільки ці дві умови одночасно не можуть бути виконані, то обчислення за формулою (32) призводять до появи артефактів, що виникають, коли лінійна згортка в формулі (28) замінюється на періодичну. В результаті відновлення зображення на основі використання формул (33), (36) призводить до спотворення зображення та привнесення постійного зсуву за інтенсивністю. Ці артефакти викликані як використанням періодичної згортки в (32), так і тим, що в (32) «зануляється» вся інформація в неперервному Фур'є-просторі в комірці, для якої $m=0$, тоді як рівняння (28) передбачає таке «занулення» лише при одній частоті $w=0$. Внесок цих артефактів може бути суттєво зменшений (аж до повного усунення) шляхом відповідного доповнення нулями проекційних даних перед використанням формул (33) або (34).

Доповнення нулями також дозволяє зменшити (але не усунути) артефакти, які виникають за рахунок занулення в комірці $m=0$ в (32). Це пов'язано з тим, що доповнення нулями в координатному просторі призводить до зменшення розміру комірки у Фур'є-просторі.

Зазначені артефакти можуть бути усунуті шляхом іншого альтернативного застосування формули (28), яке не вимагає наближення, використаного в дискретному представленні в формулі (32). Коли найвища частота в проекції обмежена, формулу (28) можна записати у вигляді:

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(w)H(w)e^{i2\pi wt}dw, \quad (44)$$

де

$$\begin{aligned} H(w) &= |w|b_w(w), \\ b_w(w) &= \begin{cases} 1, & |w| < W, \\ 0, & |w| \geq W. \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

Функція $H(w)$, представлена на рисунку 9, є фільтром, який діє на проекцію.

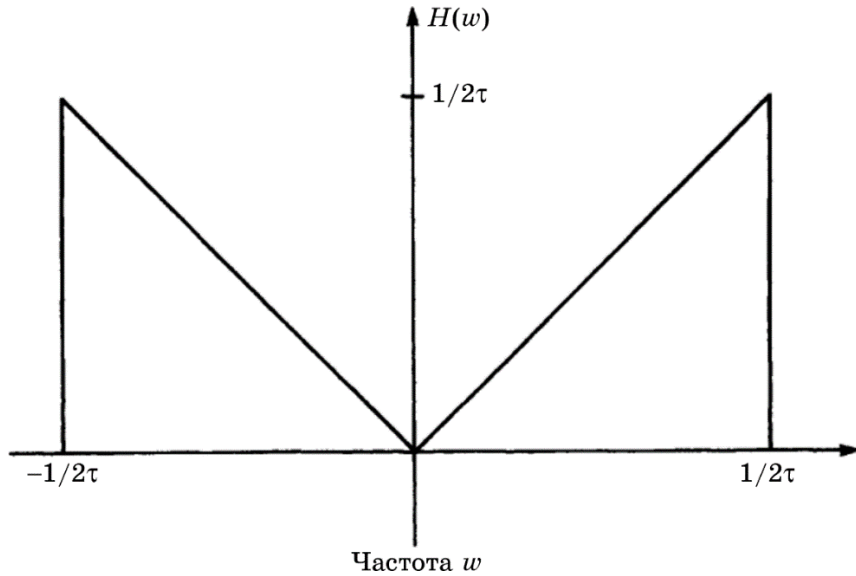


Рис. 9. Графік функції фільтру $H(w)$, який має смугу $1/2\tau$.

Імпульсний відклик цього фільтру $h(t)$ можна знайти шляхом застосування оберненого Фур'є-перетворення $H(w)$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(w) e^{i2\pi w t} dw = \frac{1}{2\tau^2} \frac{\sin 2\pi t / 2\tau}{2\pi t / 2\tau} - \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{\sin \pi t / 2\tau}{\pi t / 2\tau} \right)^2, \tau = \frac{1}{2W}. \quad (46)$$

Тут τ є інтервалом дискретизації і $h(t)$ повинно бути дискретизовано з тим же інтервалом. Дискретні значення $h(n\tau)$ функції $h(t)$ визначаються формулами:

$$h(t) = \begin{cases} 1 / 4\tau^2, & n = 0, \\ 0, & n \text{ парне}, \\ -\frac{1}{n^2 \pi^2 \tau^2}, & n \text{ непарне}. \end{cases} \quad (47)$$

Оскільки як $P_\theta(t)$, так і $h(t)$ мають обмежену частотну смугу, то їх можна представити у вигляді:

$$P_\theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_\theta(k\tau) \frac{\sin 2\pi W(t - k\tau)}{2\pi W(t - k\tau)}, \quad (48)$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\tau) \frac{\sin 2\pi W(t - k\tau)}{2\pi W(t - k\tau)}. \quad (49)$$

Згідно із теоремою про згортку фільтрована проекція (44) може бути записана у вигляді:

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t')h(t-t')dt'. \quad (50)$$

Підставивши (48), (49) в (50) одержимо наступний вираз для фільтрованої проекції в дискретних точках:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n\tau - k\tau)P_{\theta}(k\tau). \quad (51)$$

Експериментально проекції вимірюються в скінченій кількості точок. Покладемо, що кожна проекція $P_{\theta}(k\tau)$ дорівнює 0 для всіх k , крім $k=0, \dots, N-1$. Тоді можна записати 2 наступних еквівалентних рівняння:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(n\tau - k\tau)P_{\theta}(k\tau), n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (52)$$

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} h(k\tau)P_{\theta}(n\tau - k\tau), n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (53)$$

Для визначення $Q_{\theta}(n\tau)$ послідовність $h(n\tau)$ повинна включати елементи від $l=-(N-1)$ до $l=(N-1)$.

Підкреслимо, що результати, отримані за допомогою формул (52) або (53) не ідентичні результатам, які слідують із формули (33). Це обумовлено тим, що дискретне перетворення Фур'є послідовності $h(n\tau)$ з таким n , що приймає значення в скінченному діапазоні (наприклад, n змінюється від $-(N-1)$ до $l=(N-1)$) не є послідовністю $|k(2W)/N|$. Зокрема, остання послідовність дорівнює нулю при $k=0$, а дискретне перетворення Фур'є послідовності $h(n\tau)$ з n , що змінюється від $-(N-1)$ до $l=(N-1)$ не дорівнює нулю в цій точці.

Дискретна згортка в (52) або (53) може бути реалізована безпосередньо. Однак більш швидко обчислення можна провести в Фур'є-просторі з використанням алгоритмів швидкого перетворення Фур'є. Слід пам'ятати, що в Фур'є-просторі можна виконувати лише періодичні згортки, тоді як згортка, яка використовується в (52), є аперіодичною. Для усунення інтерференційних артефактів, необхідно доповнити дані проекції достатньою кількістю нулів. Отже, у Фур'є-просторі обчислення можуть бути проведені за наступною схемою:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \times \text{IFFT}\{[\text{FFTP}_{\theta}(n\tau) + \text{ZP}] \times [\text{FFTh}(n\tau) + \text{ZP}]\}, \quad (54)$$

де FFT та IFFT — пряме та обернене перетворення Фур'є, ZP — доповнення нулями. Зображення відновлюються краще, якщо в формулі (54) використовується певне згладжування. Згладжування може бути реалізовано шляхом множення добутку двох швидких перетворень Фур'є на вікно Хеммінга. Тоді формулу (54) можна записати як:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \times \text{IFFT}\{[\text{FFTP}_{\theta}(n\tau) + \text{ZP}] \times [\text{FFTh}(n\tau) + \text{ZP}]\} \times \text{згладжування}. \quad (55)$$

Після того, як фільтровані проекції $Q_{\theta}(n\tau)$ обчислено за представленою тут альтернативною процедурою, решта операцій по відновленню зображення залишаються таким ж, як і раніше. Так само використовується формула (36) для знаходження зворотних проекцій та їх підсумовування. Знову для заданих (x, y) і θ_i аргумент $x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$ може не відповідати жодному з $k\tau$, при яких Q_{θ_i} відомі, що можна вирішити за допомогою інтерполяції.

Алгоритм реконструкції зображення за віяловими проекціями

Викладене в попередніх розділах стосувалося реконструкції зображень за їх паралельними проекціями. Однак набагато більш швидким є підхід, в якому використовуються віялові промені (див. рис. 3). В цьому підході використовується точкове джерело випромінювання. З іншого боку об'єкта розміщується набір детекторів, що дозволяє виконувати всі вимірювання для віялового променя одночасно. Джерело та детектори обертаються для забезпечення вимірювання необхідної кількості проекцій. Як і слід було очікувати, спрощення та пришвидшення збору даних призводить до певного ускладнення методу; як ми побачимо, простий метод фільтрованих обернених паралельних проекцій стає тепер методом зважених обернених проекцій.

Розділяють два типи віялових проекцій в залежності від того, як вимірюються проекції: через однакові кутові або просторові інтервали. Обидва випадки показано на рис. 10. На рисунку 10, а показано набір променів, розділених однаковими кутовими інтервалами. Якщо детектори для вимірювання проекцій розташовані на прямій лінії D_1D_2 , відстані між ними будуть різними. Якщо ж детектори розташовані на колі, центр якого знаходиться в S , вони можуть тепер розташовувати на однаковій відстані один

від одного (рис. 10, б). Інший тип віялових проекцій формується, коли промені розташовані таким чином, що відстань між детекторами на прямій лінії однакова (рис. 10, в). Методи, які реконструюють зображення за описаними двома різними типами проекцій, відрізняються і будуть розглянуті окремо.

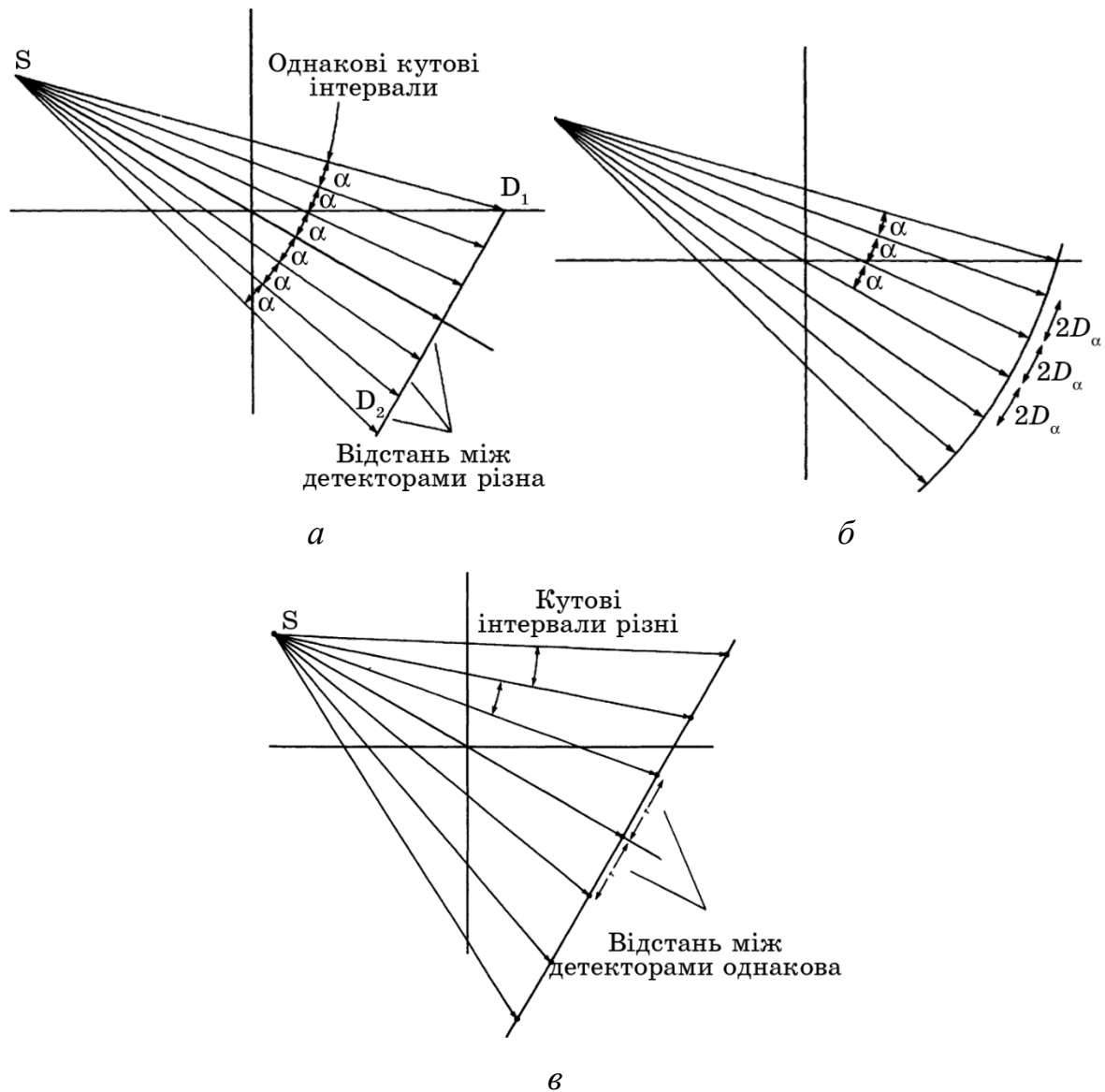


Рис. 10. Різні типи віялових проекцій: кути між сусідніми променями однакові, але відстані між детекторами різні (*a*), детектори розміщені вздовж кола, відстані між ними однакові (*б*), детектори розміщені вздовж прямої лінії на рівних відстанях, кути між сусідніми променями різні (*в*) [7].

Рівнокутні промені

Нехай $R_\beta(\gamma)$ позначає віялову проекцію, як показано на рисунку 11. Тут β — кут, який центральна лінія SF утворює з віссю координат, а кут γ визначає

положення променю в віалі. Розглянемо промінь SA. Якщо проекції формувались набором паралельних променів, то промінь SA належав би паралельній проекції $P_\theta(t)$ для θ і t заданих як:

$$\theta = \beta + \gamma, t = D \sin \gamma, \quad (56)$$

де D — відстань джерела S від початку координат O.

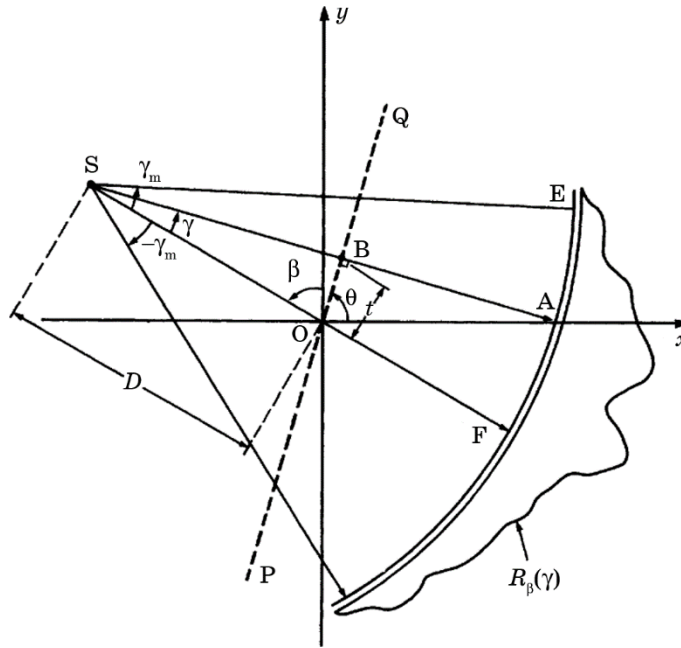


Рис. 11. Рівнокутні промені: кожен промінь характеризується кутом γ , який відраховується від центрального променя [7].

Співвідношення в (56) впливають з того, що всі промені в паралельній проекції під кутом θ перпендикулярні до прямої PQ і що вздовж такої прямої відстань OB дорівнює t . Як показано раніше, з паралельних проекцій $P_\theta(t)$ можна реконструювати $f(x, y)$ за формулою:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta, \quad (57)$$

де t_m — значення t , для якого $P_\theta(t) = 0$ з $|t| > t_m$ для всіх проекціях. Це рівняння потребує вимірювання паралельних проекцій в діапазоні кутів $(0-180)^\circ$. Однак, якщо використовувати проекції, виміряні в діапазоні кутів $(0-360)^\circ$, це рівняння слід переписати наступним чином:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta, \quad (58)$$

Полярні координати точки (x, y) (позначеної С на рисунку 12) дорівнюють:

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi. \quad (59)$$

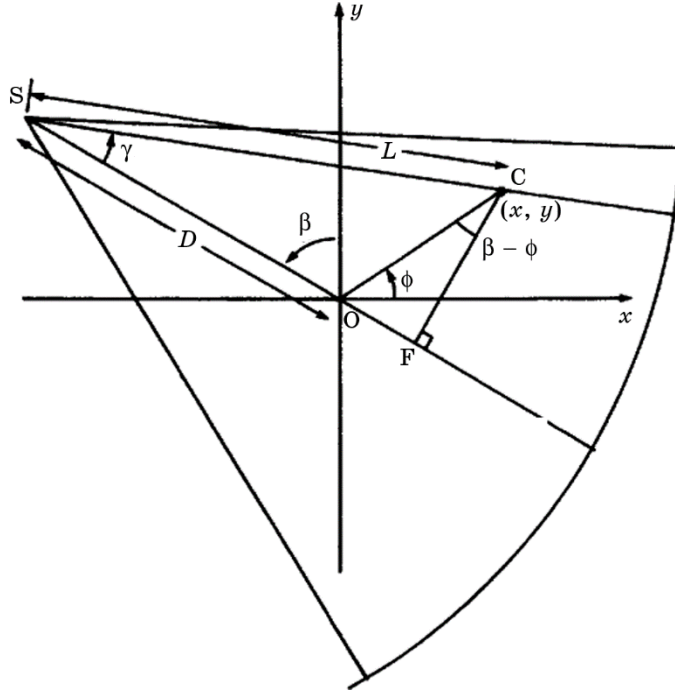


Рис. 12. Рівнокутні віялові проекції: L — відстань від точки (x, y) до джерела випромінювання S , γ — кут між лінією, що з'єднує джерело з точкою (x, y) , та центральною лінією [7].

Вираз в формулі (58) може бути записаний у вигляді:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(r \cos(\theta - \phi) - t) dt d\theta. \quad (60)$$

За допомогою співвідношень (56) можемо перейти до інтегрування по γ та β :

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} \int_{-\arcsin(t_m/D)}^{\arcsin(t_m/D)} P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma) h(\tau \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (61)$$

де було використано рівність $dt d\theta = D \cos \gamma d\gamma d\beta$. Проаналізуємо цей вираз більш детально. Інтервал зміни кута β від $-\gamma$ до $2\pi - \gamma$ складає 360° . Оскільки функції β періодичні з періодом 2π , ці межі можна замінити на $(0, 2\pi)$. $\arcsin(t_m/D)$ дорівнює значенню γ для екстремального променя SE на рис. 11. Отже, нижня та верхня межі для γ можуть бути записані як $(-\gamma_m, \gamma_m)$. Вираз $P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma)$ відповідає інтегралу $P_\theta(t)$ вздовж лінії SA при використанні паралельних

проекцій. Для випадку віялових проекцій це буде просто $R_\beta(\gamma)$. Врахувавши все це в рівнянні (61) одержимо:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta. \quad (62)$$

Тепер розглянемо аргумент функції $h(t)$. Цей аргумент може бути записаний у вигляді:

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = r \cos(\beta - \phi) \cos \gamma - (r \sin(\beta - \phi) + D) \sin \gamma. \quad (63)$$

Нехай L — відстань від джерела S до точки (x, y) (або (r, ϕ) в полярних координатах). L є функцією трьох змінних: r, ϕ, β . Введемо також кут γ' між променями, що проходить через точку (r, ϕ) , та через початок координат. Можна бачити, що

$$L \cos \gamma' = D + r \sin(\beta - \phi), \quad L \sin \gamma' = r \cos(\beta - \phi). \quad (64)$$

Положення точки (r, ϕ) та кут проекції β однозначно визначають L та γ' :

$$L(r, \phi, \beta) = \sqrt{(D + r \sin(\beta - \phi))^2 + (r \cos(\beta - \phi))^2} \quad (65)$$

та

$$\gamma' = \arctg \frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)}. \quad (66)$$

Підставляючи (64) в (63) маємо для аргументу функції h :

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = L \sin(\gamma' - \gamma) \quad (67)$$

та використавши (67) в (62) одержимо:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(L \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta. \quad (68)$$

Тепер виразимо функцію $h(L \sin(\gamma' - \gamma))$ через функцію $h(t)$. Відмітимо, що $h(t)$ є Фур'є-образом $|w|$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{i2\pi w t} dw \quad (69)$$

та, отже

$$h(L \sin \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{i2\pi L \sin \gamma t} dw. \quad (70)$$

Провівши заміну змінних під інтегралом

$$w' = \frac{w L \sin \gamma}{\gamma} \quad (71)$$

одержимо

$$h(L \sin \gamma) = \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |w'| e^{i2\pi w' \gamma} dw' = \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma). \quad (72)$$

Отже, (68) можемо записати у наступному вигляді:

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_{\beta}(\gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (73)$$

де

$$g(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma). \quad (74)$$

Формулу (73) можна інтерпретувати як обчислення зважених обернених проекцій. Щоб показати це, перепишемо (73) у вигляді:

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} Q_{\beta}(\gamma') d\beta, \quad (75)$$

де

$$Q_{\beta}(\gamma) = R'_{\beta}(\gamma) * g(\gamma), \quad (76)$$

$$R'_{\beta}(\gamma) = R_{\beta}(\gamma) D \cos \gamma. \quad (77)$$

Тепер реконструкція зображень потребує виконання наступних етапів.

Етап 1. Припустимо, що кожна проекція $R_{\beta}(\gamma)$ дискретизується з інтервалом дискретизації α . Тоді відомі значення $R_{\beta_i}(n\alpha)$, де n приймає цілі значення, а β_i — кути, під якими знімаються проекції. Для кожної віялової проекції $R_{\beta_i}(n\alpha)$, необхідно розрахувати відповідну $R'_{\beta_i}(n\alpha)$:

$$R'_{\beta_i}(n\alpha) = R_{\beta_i}(n\alpha) D \cos n\alpha. \quad (78)$$

Випадок $n = 0$ відповідає променю, що проходить через центр проекції.

Етап 2. Необхідно виконати згортку кожної модифікованої проекції $R'_{\beta_i}(n\alpha)$ з $g(n\alpha)$, щоб створити відповідну фільтровану проекцію:

$$Q_{\beta_i}(n\alpha) = R'_{\beta_i}(n\alpha) * g(n\alpha). \quad (79)$$

Для розрахунку цієї дискретної згортки за допомогою швидких перетворень Фур'є функція $R'_{\beta_i}(n\alpha)$ має бути доповнено достатньою кількістю нулів, щоб уникнути появи інтерференційних артефактів. Послідовність $g(n\alpha)$ розраховується за формулою:

$$g(n\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \right)^2 h(n\alpha). \quad (80)$$

Підставивши сюди значення $h(n\alpha)$ з (47), одержимо формулу для дискретного імпульсного відклику

$$h(n\alpha) = \begin{cases} 1 / 8\alpha^2, & n = 0, \\ 0, & n \text{ парне}, \\ \left(\frac{\alpha}{\pi\alpha \sin n\alpha} \right)^2, & n \text{ непарне}. \end{cases} \quad (81)$$

Хоча, можна було б безпосередньо використовувати формулу (79) без подальшої фільтрації, на практиці кращі результати одержуються, якщо проводиться певне згладжування та додаткова фільтрація:

$$Q_{\beta_i}(n\alpha) = R'_{\beta_i}(n\alpha) * g(n\alpha) * k(n\alpha), \quad (82)$$

де $k(n\alpha)$ — імпульсна характеристика згладжувального фільтру. В Фур'є-просторі цей фільтр згладжування може бути простим косинусом або вікном Хеммінга.

Етап 3. Необхідно знайти зважену обернену проекцію кожної фільтрованої проекції. Оскільки обернена проекція тут сильно відрізняється від такої для випадку паралельних проекцій, пояснимо цей момент трохи докладніше. Для випадку паралельних проекцій фільтрована проекція «розмазується» вздовж набору паралельних ліній, як показано на рис. 13, *а*. Для віялового пучка обернена проекція розраховується для розбіжного набору променів (рис. 13, *б*). Це обумовлено формулою (75):

$$f(x, y) \approx \Delta\beta \sum_{i=1}^M \frac{1}{L^2(x, y, \beta_i)} Q_{\beta_i}(\gamma'), \quad (83)$$

де γ' — кут між променями, який проходить через точку (x, y) , та променем, який проходить через початок координат, $\Delta\beta = 2\pi/M$.

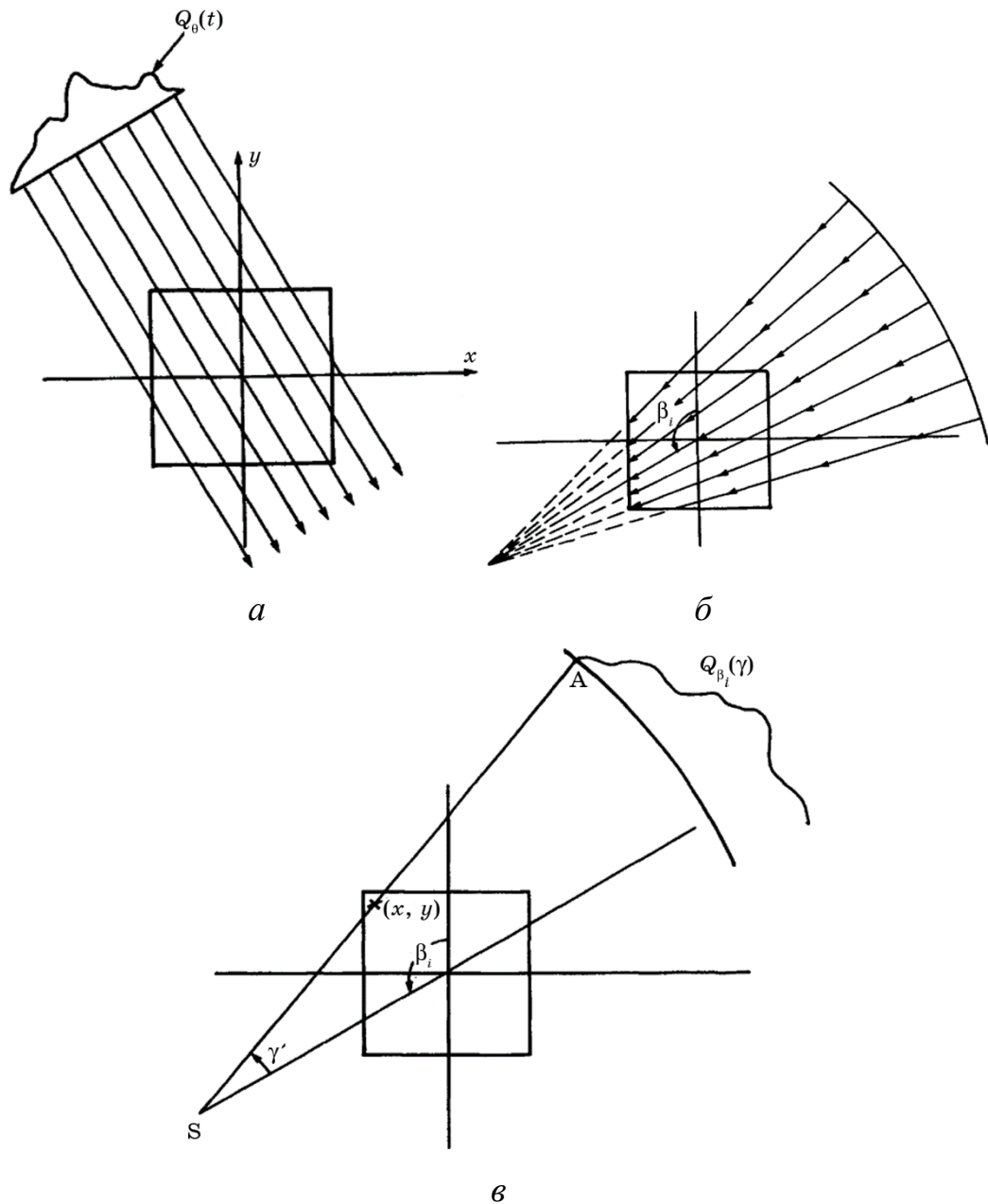


Рис. 13. Для паралельних променів обернене проектування виконується вздовж паралельних прямих (*a*), для віялових проекцій обернене проектування виконується вздовж розбіжного набору ліній (*б*), ілюстрація того, що для визначення оберненої проекції в точці (x, y) , спочатку потрібно обчислити γ' для цієї точки (*в*) [7].

Для β_i , обраного на рисунку 15, *в*, щоб знайти внесок $Q_{\beta_i}(\gamma)$ в точку (x, y) необхідно знайти кут γ' променю SA , який проходить через точку (x, y) . $Q_{\beta_i}(\gamma')$ буде давати внесок від фільтрованої проекції при β_i в точці (x, y) . При цьому, обчислене значення кута γ' може не відповідати одному з $n\alpha$, для яких $Q_{\beta_i}(n\alpha)$

відоме. В цьому випадку необхідно використовувати інтерполяцію. Внесок $Q_{\beta_i}(\gamma')$ в точці (x, y) повинен потім бути поділений на L^2 , де L — відстань від джерела S до точки (x, y) .

Випадок колінеарних детекторів, розташованих на однаковій відстані один від одного

Нехай $R_{\beta}(s)$ позначає віялову проекцію, як показано на рисунку 14, а s — відстань вздовж прямої лінії до детекторів. Принципова різниця між методом, викладеного в попередньому розділі від викладеного тут, полягає в представленні віялової проекції, що потім приводить до появи відмінностей у математичних формулах. Раніше віялові проекції вимірювалися через однакові кутові інтервали та мали вигляд $R_{\beta}(\gamma)$, де γ визначало кутове розташування променя. Тепер ми представляємо віялові проекції $R_{\beta}(s)$.

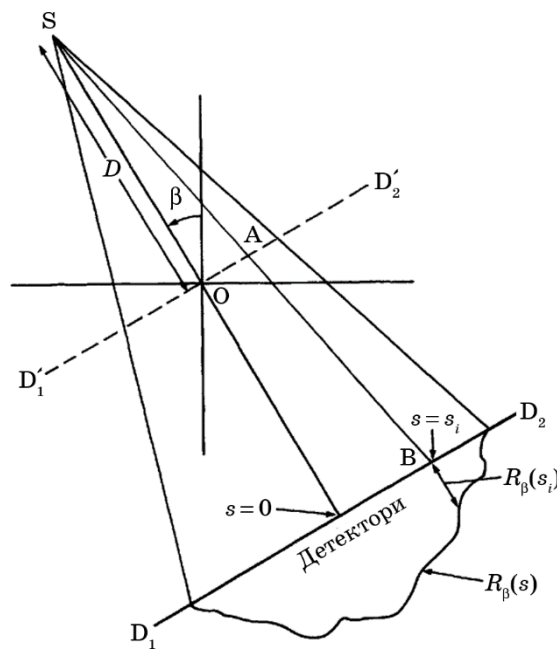


Рис. 14. Проекції $R_{\beta}(s)$ для випадку детекторів, які знаходяться на однакових відстанях один від одного та розміщені на прямій [7].

Хоча проекції вимірюються на лінії D_1D_2 на рисунку 14, зручно припустити наявність уявної лінії детекторів $D_1'D_2'$, що проходить через початок координат. Тепер ми пов'яжемо інтеграл для променя, що розповсюджується


$$t = s \cos \gamma, \theta = \beta + \gamma,$$

що кут АОС дорівнює куту OSC, а D — відстань до

З точки зору підходу паралельних проекцій реконструйоване зображення

$$f(r, \phi) = \frac{1}{s_m} \int_0^{2\pi - \arctan(s_m/D)} \int_0^{s_m} p\left(\frac{sD}{r} \cos(\beta + \arctan\left(\frac{s}{r}\right) - \phi) - \frac{sD}{r}\right) \frac{D^3}{r^2} dr d\beta \quad (85)$$

було використано те, що

$$dt d\theta = \frac{D^3}{2\pi} d\alpha d\beta \quad (86)$$

У (85) s_m є найбільшим значенням s для кожній проекції та відповідає t_m для методу паралельної проекції. Межі $-\arctg(s_m/D)$ і $2\pi - \arctg(s_m/D)$ охоплюють кутовий інтервал 360° . Оскільки функції β періодичні з періодом 2π , ці межі можна замінити на $(0, 2\pi)$. Крім того, вираз

$$P_{\beta+\gamma} \left(\frac{sD^3}{\sqrt{s^2 + D^2}} \right) \quad (87)$$

відповідає лінійному інтегралу для променю, що розповсюджується вздовж лінії SA, для паралельної проекції $P_\theta(t)$.

Якщо проводити паралель з методом віялових проекцій цей інтеграл відповідає $R_\beta(s)$. Вносячи ці зміни в (85), одержимо:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) h \left[r \cos(\beta + \arctg\left(\frac{s}{D}\right) - \phi) - \frac{sD}{\sqrt{s^2 + D^2}} \right] \frac{D^3}{(s^2 + D^2)^{3/2}} ds d\beta. \quad (88)$$

Аналогічно тому, як ми робили це раніше розглянемо аргумент функції h . Цей аргумент може бути записаний у вигляді:

$$r \cos(\beta + \arctg\left(\frac{s}{D}\right) - \phi) - \frac{sD}{\sqrt{s^2 + D^2}} = r \cos(\beta - \phi) \frac{D}{\sqrt{s^2 + D^2}} - (D + r \sin(\beta - \phi)) \frac{s}{\sqrt{s^2 + D^2}}. \quad (89)$$

Тепер введемо дві нові змінні. Перша з них, U , призначений для кожної точки (x, y) відношенням SP (рис. 16) до відстані від джерела до початку координат. Зазначимо, що SP є проекцією відрізка SE, що з'єднує джерело та точку, на центральний промінь. Таким чином

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{SO + OP}{D} = \frac{D + r \sin(\beta - \phi)}{D}. \quad (90)$$

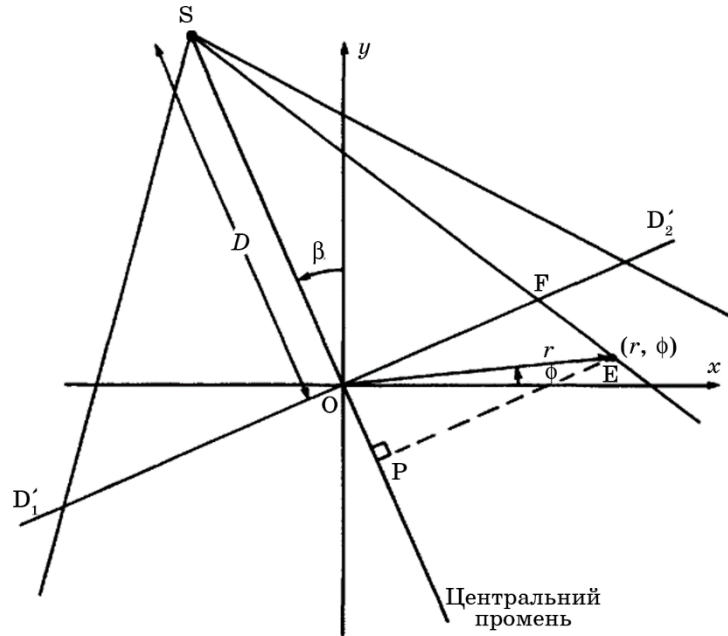


Рис. 16. Для точки з полярними координатами (r, ϕ) змінна U є відношенням відстані SP , яка є проекцією лінії, що з'єднує джерело та точку, на центральний промінь, до відстані від джерела до точки O [7].

Інший параметр, який ми введемо, це значення s для променю, який проходить через точку (r, ϕ) . Позначимо цей параметр s' . Оскільки s вимірюється вздовж уявної лінії детектора $D_1'D_2'$, s' визначається як відстань OF . Оскільки

$$\frac{s'}{SO} = \frac{EP}{SP}, \quad (91)$$

то

$$s' = D \frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)}. \quad (92)$$

Використаємо формули (90) і (92) для вираження (89) через U та s' :

$$r \cos(\beta + \arctg\left(\frac{s}{D}\right) - \phi) - \frac{sD}{\sqrt{s^2 + D^2}} = \frac{s'UD}{\sqrt{s^2 + D^2}} - \frac{sUD}{\sqrt{s^2 + D^2}}. \quad (93)$$

Підставивши (93) в (88) одержимо:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} R_p(s) h \left[(s' - s) \frac{UD}{\sqrt{s^2 + D^2}} \right] \frac{D^3}{(s^2 + D^2)^{3/2}} ds d\beta. \quad (94)$$

Тепер виразимо ядро згортки h у цьому рівнянні у формі, близькій до (47). Оскільки $h(t)$ є Фур'є-образом $|w|$, то

$$h\left[(s' - s) \frac{UD}{\sqrt{s^2 + D^2}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{i2\pi w(s' - s)(UD/\sqrt{D^2 + s^2})} dw. \quad (95)$$

Провівши заміну змінних під інтегралом

$$w' = w \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (96)$$

одержимо

$$h\left[(s' - s) \frac{UD}{\sqrt{s^2 + D^2}}\right] = \frac{D^2 + s^2}{U^2 D^2} \int_{-\infty}^{\infty} |w'| e^{i2\pi(s' - s)w'} dw' = \frac{D^2 + s^2}{U^2 D^2} h(s' - s). \quad (97)$$

Отже, (94) можемо записати у наступному вигляді:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) g(s' - s) \frac{D}{\sqrt{s^2 + D^2}} ds d\beta, \quad (98)$$

де

$$g(s) = \frac{1}{2} h(s). \quad (99)$$

Формулу (98) можна інтерпретувати як обчислення зважених обернених проєкцій. Щоб показати це, перепишемо (98) у вигляді:

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} Q_\beta(s') d\beta, \quad (100)$$

де

$$Q_\beta(s) = R'_\beta(s) * g(s), \quad (101)$$

$$R'_\beta(s) = R_\beta(s) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}}. \quad (102)$$

Тепер реконструкція зображень потребує виконання наступних етапів.

Етап 1. Припустимо, що кожна проєкція $R_\beta(s)$ дискретизується з інтервалом дискретизації a . Тоді відомі значення $R_{\beta_i}(na)$, де n приймає цілі значення при цьому $n = 0$ відповідає центральному променю, який проходить через початок координат, β_i — кути, під якими знімаються проєкції. Для кожної віялової проєкції $R_{\beta_i}(na)$, необхідно розрахувати відповідну $R'_{\beta_i}(na)$:

$$R'_{\beta_i}(na) = R_{\beta_i}(na) \frac{D}{\sqrt{D^2 + n^2 a^2}}. \quad (103)$$

Етап 2. Необхідно виконати згортку кожної модифікованої проєкції $R'_{\beta_i}(na)$ з $g(na)$, щоб створити відповідну фільтровану проєкцію:

$$Q_{\beta_i}(na) = R'_{\beta_i}(na) * g(na), \quad (104)$$

де послідовність $g(na)$ визначається формулою:

$$g(na) = \frac{1}{2} h(na). \quad (105)$$

Підставивши сюди значення $h(na)$ з (47), одержимо формулу для дискретного імпульсного відклику

$$h(na) = \begin{cases} 1 / 8a^2, & n = 0, \\ 0, & n \text{ парне}, \\ -\frac{1}{2n^2\pi^2a^2}, & n \text{ непарне}. \end{cases} \quad (106)$$

Аналогічно до попередніх випадків при розрахунку згортки за допомогою швидких перетворень Фур'є проєкційні дані доцільно доповнити достатньою кількістю нулів, щоб уникнути появи інтерференційних артефактів.

Хоча, можна було б безпосередньо використовувати формулу (104) без подальшої фільтрації, на практиці кращі результати одержуються, якщо проводиться певне згладжування та додаткова фільтрація:

$$Q_{\beta_i}(na) = R'_{\beta_i}(na) * g(na) * k(na), \quad (107)$$

де $k(na)$ — імпульсна характеристика згладжувального фільтру. В Фур'є-просторі цей фільтр згладжування може бути простим косинусом або вікном Хеммінга.

Етап 3. Необхідно знайти зважену обернену проєкцію кожної фільтрованої проєкції, яка визначається формулою:

$$f(x, y) \approx \Delta B \sum_{i=1}^M \frac{1}{U^2(x, y, \beta_i)} Q_{\beta_i}(s'). \quad (108)$$

При цьому, обчислене значення s' може не відповідати одному з na , для яких $Q_{\beta_i}(na)$ відоме. В цьому випадку також необхідно використовувати інтерполяцію.

Алгоритм пересортування

Розглянемо алгоритм, який дозволяє швидко пересортувати віялові проєкційні дані в еквівалентні дані для паралельних проєкцій. Після пересортування можна використовувати метод фільтрованих обернених проєкції для паралельних проєкцій. Цей алгоритм пересортування накладає

певні обмеження на кути, при яких вимірюються віялові проекції, а також на кути при яких відбувається дискретизація.

Враховуючи взаємозв'язок (56) між незалежними змінними для віялових та паралельних проекцій, можемо записати:

$$R_{\beta}(\gamma) = P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma). \quad (109)$$

Нехай $\Delta\beta$ позначає кутовий інтервал між послідовними віяловими променями, а $\Delta\gamma$ — кутовий інтервал, який використовується при виборці проекцій віялового променя. Вважатимемо, що виконується умова:

$$\Delta\beta = \Delta\gamma = \alpha. \quad (110)$$

Кути β і γ в (109) дорівнюють $m\alpha$ і $n\alpha$ для деяких цілих значень індексів m і n . Тому можна записати (109) у вигляді:

$$R_{m\alpha}(n\alpha) = P_{(m+n)\alpha}(D \sin n\alpha). \quad (111)$$

Це рівняння є основою швидкого алгоритму пересортування. Воно виражає той факт, що n -ий промінь в m -ій радіальній проекції є n -им променем у $(m + n)$ -ій паралельній проекції. Звичайно, за рахунок множника $\sin n\alpha$ одержані паралельні проекції не будуть дискретизованими рівномірно. Це може бути виправлено інтерполяцією.

Використання віялових проекцій з обмеженою кількістю вимірювань

Розглянемо прості геометричні міркування, які підтверджують те, що паралельні проекції, кути вимірювання яких відрізняються на 180° , $P_{\theta}(t)$ і $P_{\theta+180}(t)$ є дзеркальними відображеннями один одного. Тобто,

$$P_{\theta}(t) = P_{\theta+180}(-t) \quad (112)$$

і тому достатньо виміряти проекції об'єкту лише для кутів від 0 до 180° .

Можна розширити цей результат, зазначивши, що об'єкт повністю заданий якщо відомі проекції в діапазоні кутів

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_{0+180} \quad (113)$$

та відстаней

$$-t_{\max} \leq t \leq t_{\max}, \quad (114)$$

де t_{\max} є достатньо великим, щоб кожна проекція була принаймні такої ж ширини, як і об'єкт. Якщо кожен лінійний інтеграл представити як точку в

полярній системі координат (t, θ) , як показано на рис. 17, то повний набір таких інтегралів повністю заповнить диск радіуса t_{\max} .

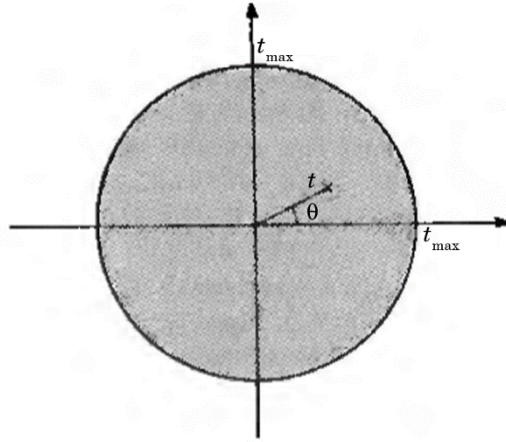


Рис. 17. Кожен лінійний інтеграл може розглядатися як одна точка при Радоновому перетворенні об'єкту.

Подібні міркування також можна використати і у випадку віялових проєкцій. З рисунку 18 видно, що два лінійні інтеграли, які характеризуються кутами (β_1, γ_1) та (β_2, γ_2) є ідентичними при

$$\beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \gamma_2 + 180, \quad (115)$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2. \quad (116)$$

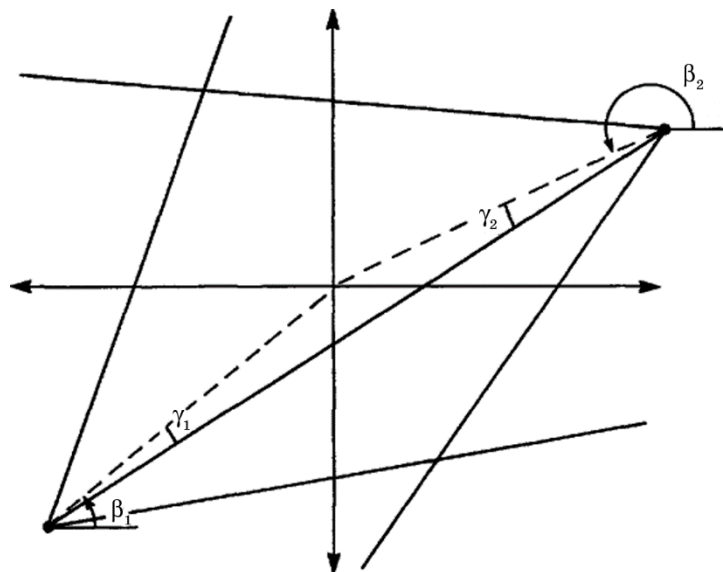


Рис. 18. Промені в двох віялових пучках будуть представляти однаковий лінійний інтеграл, якщо задовольняється співвідношення $\beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \gamma_2 + 180^\circ$.

Координатне перетворення (56)

$$\theta = \beta + \gamma, \quad t = D \sin \gamma,$$

дозволяє перейти від опису віялових проекцій в координатах (β, γ) до еквівалентного опису із використанням перетворення Радона. Це перетворення було використано для побудови рис. 18, на якому представлено дані, доступні в області, коли кут β змінюється від 0 до 180° , а кут розбіжності пучка 40° ($\gamma_{\max} = 20^\circ$).

При цьому точки в просторі Радона є періодичними згідно умов (113) та (114) і відповідають тому самому лінійному інтегралу. Отже, дані на рис. 19 для кутів $\theta > 180^\circ$ і $t > 0$ дорівнюють значенням для кутів $\theta < 0$ і $t < 0$. Ці дві області позначені А на рис. 19. З іншого боку, області, позначені на рис. 19 В, є областями, де не можна провести вимірювання проекцій.

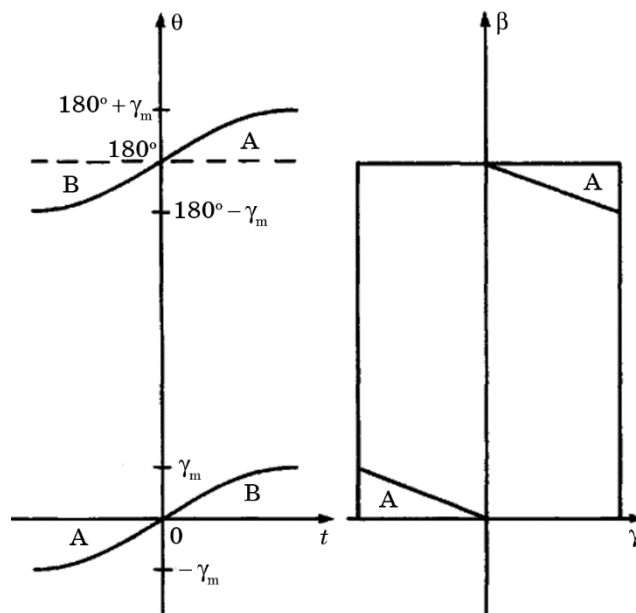


Рис. 19. Вимірювання проекцій при кутах $> 180^\circ$ дозволяє оцінити результати перетворення Радона в області між кривими лініями, як показано зліва.

Представлені криві представляють межові проекції кута γ_m . Праворуч показано доступні області у координатах β – γ . В області В не можна провести вимірювання проекцій.

Для того, щоб охопити ці області необхідно проведення вимірювання проєкцій в додатковій кутовій області, розмір якої становить $2\gamma_m$ градусів, як показано на рис. 20. Це означає, що для реконструкції характеристик об'єкту за допомогою віялових проєкцій, необхідне використання проєкцій, виміряних при кутах $180^\circ + 2\gamma_m$ градусів.

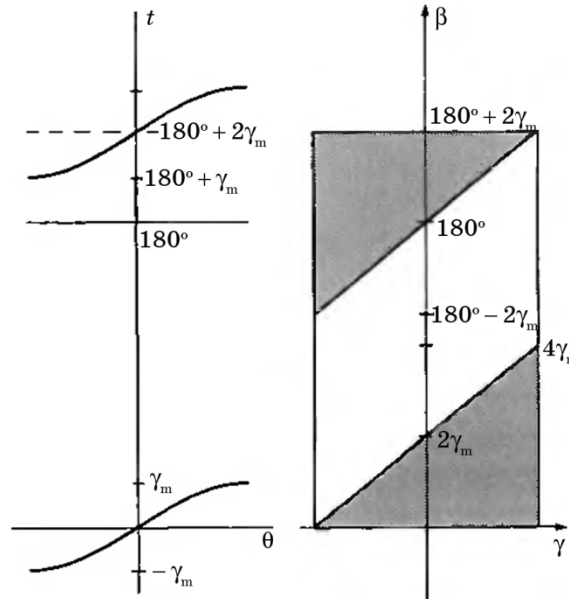


Рис. 20. Показано доступну області для випадку, коли проєкції вимірюються при кутах $180^\circ + 2\gamma_m$. Ліворуч представлено перетворення Радона, тоді як праворуч показано доступні дані в системі координат β – γ . Лінійні інтеграли в затінених областях представляють точки, які враховуються двічі та повинні мати додатково відповідні вагові коефіцієнти.

Доцільно також обговорити перекриття проєкційних даних в системі координат (β, γ) . Ми одержуємо області перекриття в цьому випадку за допомогою співвідношень у (115), (116) та нерівностей

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta_1 &\leq 180 + 2\gamma_m, \\ 0 \leq \beta_2 &\leq 180 + 2\gamma_m. \end{aligned} \quad (117)$$

Підставляючи (115), (116) у перше рівняння (117), знаходимо

$$0 \leq \beta_2 - 2\gamma_2 + 180 \leq 180 + 2\gamma_m \quad (118)$$

або

$$-180 + 2\gamma_2 \leq \beta_2 \leq 2\gamma_m - 2\gamma_2. \quad (119)$$

Підставляючи ці ж два рівняння в другу нерівність (117), знаходимо

$$0 \leq \beta_1 - 2\gamma_1 - 180 \leq 180 + 2\gamma_m \quad (120)$$

або

$$180 + 2\gamma_1 \leq \beta_1 \leq 360 + 2\gamma_m + 2\gamma_1. \quad (121)$$

Оскільки кут γ , який характеризує розбіжний пучок, завжди менший за 90° , області перекриття задаються виразами (див., також рис. 20):

$$0 \leq \beta_2 \leq 2\gamma_m + 2\gamma_2, \quad (122)$$

$$180 + 2\gamma_1 \leq \beta_1 \leq 180 + 2\gamma_m. \quad (123)$$

Можна спробувати покращити реконструкцію за рахунок покладання нулю даних у одній із областей перекриття. Це можна реалізувати, наприклад, шляхом множення проекції при заданому куті β , $P_\beta(\gamma)$, на функцію вікна

$$w_\beta(\gamma) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \beta \leq 2\gamma_m + 2\gamma, \\ 1, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (124)$$

Однак, як показано в роботі [10], використання функції вікна такого типу дає лише незначні покращення реконструкції.

Більш точнішу реконструкцію можна реалізувати, якщо «згладжувальне» вікно використовується для фільтрації даних. З математичної точки зору «згладжувальне» вікно — неперервна функція, яка має неперервну похідну. Формально функція вікна $w_\beta(\gamma)$ повинна задовольняти наступним умовам:

$$w_{\beta_1}(\gamma_1) + w_{\beta_2}(\gamma_2) = 1 \quad (125)$$

для (β_1, γ_1) та (β_2, γ_2) , які задовольняють співвідношенням (115) і (116),

$$w_0(\gamma) = 0, \quad (126)$$

$$w_{180+2\gamma_m} = 0. \quad (127)$$

Для того, щоб функція фільтру була неперервною та «гладкою» на межі між областями одинарного та подвійного перекриття потрібно накласти наступні умови на похідну від $w_\beta(\gamma)$:

$$\left. \frac{\partial w_\beta(\gamma)}{\partial \beta} \right|_{\beta=2\gamma_m+2\gamma} = 0 \quad (128)$$

та

$$\left. \frac{\partial w_{\beta}(\gamma)}{\partial \beta} \right|_{\beta=180+2\gamma} = 0. \quad (129)$$

Однією із функцій, що задовольняє вказаним умовам є наступна:

$$w_{\beta}(\gamma) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{45\beta}{\gamma_m - \gamma}\right), & 0 \leq \beta \leq 2\gamma_m - 2\gamma, \\ 1, & 2\gamma_m - 2\gamma \leq \beta \leq 180 - 2\gamma, \\ \sin^2\left(45\frac{180 + 2\gamma_m - \beta}{\gamma_m + \gamma}\right), & 180 - 2\gamma \leq \beta \leq 180 + 2\gamma_m. \end{cases} \quad (130)$$

Реконструкція зображень тривимірних об'єктів

Широко розповсюдженим способом одержання зображень тривимірних об'єктів є освітлення об'єкту вузьким пучком рентгенівських променів і подальше використання двовимірних алгоритмів реконструкції. Тривимірна реконструкція може бути утворена шляхом освітлення послідовних площин всередині об'єкта та їх подальшого складання разом (див. рис. 21).

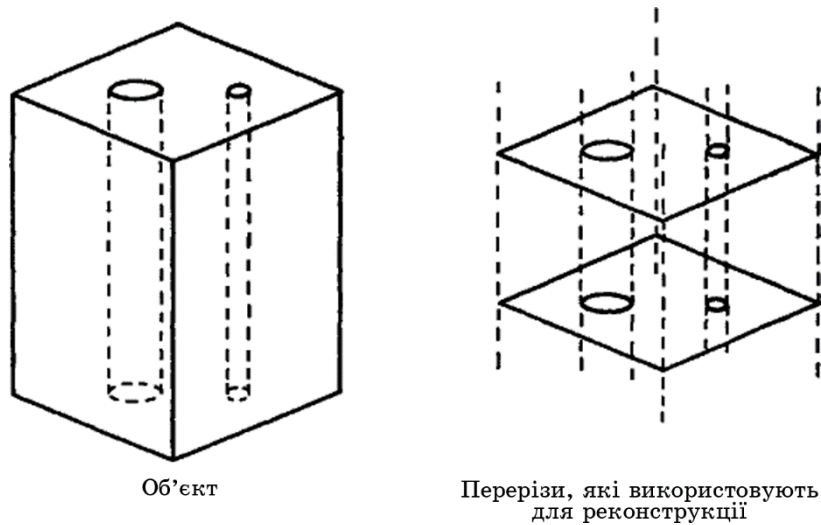


Рис. 21. Тривимірна реконструкція шляхом багаторазового використання двовимірного алгоритму реконструкції для різних значень висоти z [11].

Однак більш ефективним підходом, який буде розглянуто в цьому розділі, є узагальнення методів двовимірних віялових проекцій. Тепер замість освітлення перерізу об'єкту віялом рентгенівських променів весь об'єкт освітлюється точковим джерелом, а потік рентгенівського випромінювання вимірюється на площині. Це підхід називається методом конічного пучка, оскільки промені утворюють конус, як показано на рис. 22.

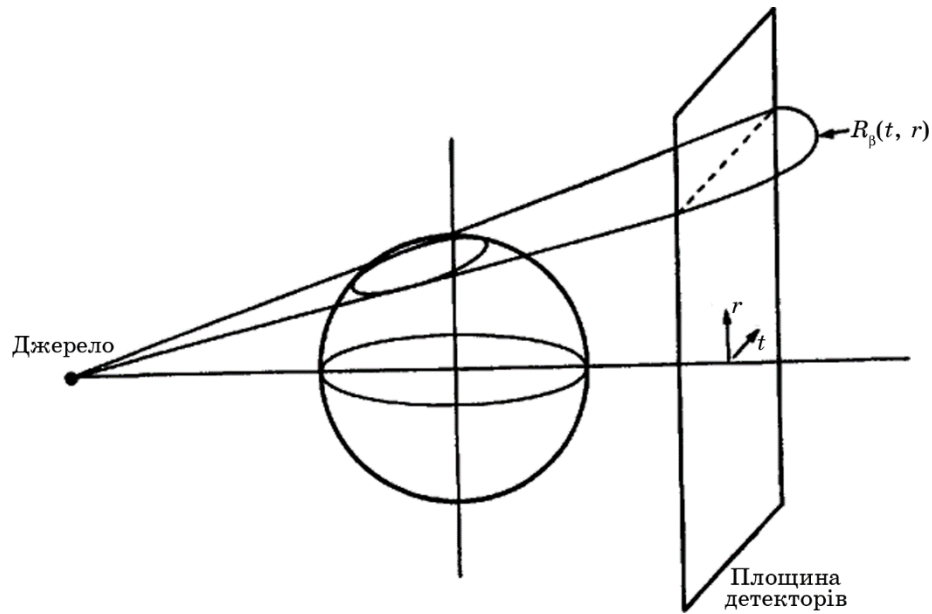


Рис. 22. Використання конічного пучка рентгенівських променів. Обертанням джерела і площини детекторів навколо об'єкту, можна виміряти необхідні для тривимірної реконструкції проекції за такий же час, який необхідний при звичайному методі віялових проекцій для двовимірної реконструкції [11].

Головна перевага такого підходу — зменшення часу, необхідного на збір даних. З точковим джерелом лінійні інтеграли вимірюються в кожній точці об'єкту за той самий час, який необхідний для вимірювання одного зрізу при звичайному двовимірному скануванні. Проекції $R_\beta(t, r)$ тепер стають функціями вихідного кута β , а також горизонтального та вертикального положень площини детектору t і r .

Тривимірні проекції

Промінь в тривимірній проекції описується перетином двох площин:

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (131)$$

$$r = -(-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \gamma + z \cos \gamma. \quad (132)$$

Нова система координат (t, s, r) отримується двома обертаннями осей (x, y, z) , як показано на рис. 23. Перший поворот, як і в двовимірному випадку, відбувається на θ градусів навколо осі z , щоб отримати вісі (t, s, z) . Потім виконується другий поворот, який виводить із площини (t, s) поворотом

навколо вісі t на кут γ . У матричній формі це можна записати в наступній формі:

$$\begin{pmatrix} t \\ s' \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (133)$$

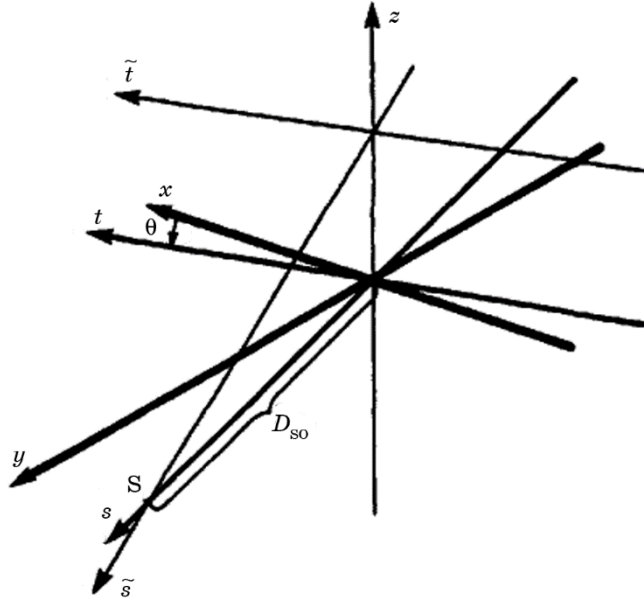


Рис. 23. Поворот системи координат. Вісь r не показано, але вона перпендикулярна до осей t і s [11].

Тривимірна паралельна проекція об'єкту f описується інтегралом:

$$P_{\theta, \gamma}(t, r) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t, s, r) ds. \quad (134)$$

Зазначимо, що для характеристики променю використовуються чотири змінні: (t, θ) задають відстань і кут у площині x – y та (r, γ) — у площині s – z .

В методі конічного пучка джерело обертається на кут β , а лінійні інтеграли $R_{\beta}(p', \zeta')$ вимірюються набором детекторів. Для знаходження еквівалентної паралельної проекції, позначимо:

$$p = \frac{p' D_{so}}{D_{so} + D_{de}}, \quad \zeta = \frac{\zeta' D_{so}}{D_{so} + D_{de}}. \quad (135)$$

Тут D_{so} позначає відстань від центру обертання до джерела, а D_{de} — відстань від центру обертання до детектора. Для заданого променю конічного пучка $R_{\beta}(p', \zeta')$

промінь паралельної проекції має вигляд:

$$t = p \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + p^2}}, \quad (136)$$

$$\theta = \beta + \arctg(p / D_{so}), \quad (137)$$

де t та θ визначають промінь у заданому розбіжному пучку, та, аналогічно:

$$r = \zeta \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2}}, \quad (138)$$

$$\theta = \arctg(\zeta / D_{so}), \quad (139)$$

де r та γ визначають локалізацію самого розбіжного пучку.

Наприклад, для еліпсоїду, який описується рівнянням:

$$f(x, y) = \begin{cases} \mu \text{ при } \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \leq 1, \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad (140)$$

проекція на площину детекторів матиме вигляд:

$$P_{\theta, \gamma}(t, r) = \frac{2\mu ABC}{a^2(\theta, \gamma)} (a^2(\theta, \gamma) - t^2(C^2 \cos^2 \gamma + (B^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \gamma) - \\ - r^2(A^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta) \frac{7 + \cos(4\gamma)}{8} - 2tr \sin \gamma \cos \theta \sin \theta (B^2 - A^2))^{1/2}, \quad (141)$$

де

$$a^2(\theta, \gamma) = C^2(B^2 \sin^2 \theta + A^2 \cos^2 \theta) \cos^2 \gamma + A^2 B^2 \sin^2 \gamma. \quad (142)$$

Метод тривимірних фільтрованих обернених проекцій

Розглянемо метод тривимірних фільтрованих обернених проекцій [11, 12]. Процес реконструкції базується на фільтрації та знаходженні оберненої проекції для окремої площини всередині конуса. Іншими словами, кожна площина в конусі (яка описується z або ζ) розглядається окремо, а тривимірне зображення одержують шляхом підсумовування внеску від кожного променя.

Викладення методу тривимірних фільтрованих обернених проекцій зручно почати з згадування методу фільтрованих обернених проекцій для променів, розташованих на однаковій відстані один від одного. При тривимірній реконструкції кожен набір пучків розташовується під кутом до площини обертання джерело–детектор. Це призводить до відповідної заміни змінних

Запишемо двовимірну формулу для реконструкції зображень у методі віялових проекцій для точки (r, ϕ) :

$$g(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(p) h(p' - p) \frac{D_{\text{So}}}{\sqrt{p^2 + D_{\text{So}}^2}} dp d\beta, \quad (143)$$

$$p' = \frac{D_{\text{so}} r \cos(\beta - \phi)}{D_{\text{so}} + r \sin(\beta - \phi)}, \quad h(p) = \int_{-W}^W |w| e^{iwp} dw, \quad (144)$$

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{D_{\text{so}} + r \sin(\beta - \phi)}{D_{\text{so}}}. \quad (145)$$

Рівняння (143) таке саме, як (98), за винятком перепозначення деяких змінних. Для подальшого спрощення виразу, замінімо координати (r, ϕ) на повернуту систему координат (t, s) . Згадаємо, що (t, s) є місцем розташування точки, повернутої на деякий кут відносно джерела–детектора. Використання виразів

$$t = x \cos \beta + y \sin \beta, s = -x \sin \beta + y \cos \beta, \quad (146)$$

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi \quad (147)$$

приводять нас до формул:

$$p' = \frac{D_{s0}t}{D_{s0} - s}, U(x, y, \beta) = \frac{D_{s0} - s}{D_{s0}}. \quad (148)$$

Тепер формулу (143) можна переписати у вигляді:

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{\text{so}}^2}{(D_{\text{so}} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(p) h\left(\frac{D_{\text{so}} t}{D_{\text{so}} - s} - p\right) \frac{D_{\text{so}}}{\sqrt{p^2 + D_{\text{so}}^2}} dp d\beta. \quad (149)$$

При реконструкції методом конічного пучка необхідно відхилити віяловий пучок від площини обертання; таким чином, розмір пучка та система координат змінюються. Як показано на рис. 24 нова система координат (\tilde{t}, \tilde{s}) визначена так, щоб визначати розташування реконструйованої точки з урахуванням нахилу пучка.

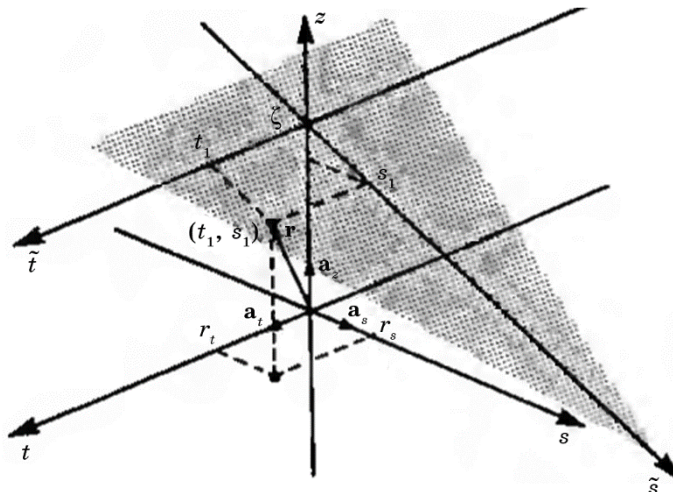


Рис. 24. Система координат (\tilde{t}, \tilde{s}) відповідає точці об'єкту, на яку потрапляє пучок нахилених віялових променів [11].

Через зміну розміру пучка відстань до джерела D_{so} і його кутовий розмір β змінюються. Нова відстань до джерела дорівнює:

$$D_{so}'^2 = D_{so}^2 + \zeta^2, \quad (150)$$

де ζ — висота віялового пучка над центром площини обертання. Крім того, приріст кутового повороту $d\beta'$ дорівнює:

$$D_{so}' d\beta' = D_{so} d\beta, \quad d\beta' = \frac{D_{so} d\beta}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2}}. \quad (151)$$

Підставивши нові змінні D_{so}' , $d\beta'$ маємо:

$$g(\tilde{t}, \tilde{s}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}'^2}{(D_{so}' - \tilde{s})^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_p(p, \zeta) h\left(\frac{D_{so}' \tilde{t}}{D_{so}' - \tilde{s}} - p\right) \frac{D_{so}'}{\sqrt{p^2 + D_{so}'^2}} dp d\beta'. \quad (152)$$

Для повернення до початкової системи координат (t, s, z) зробимо заміну

$$\tilde{t} = t, \quad \frac{\tilde{s}}{D_{so}'} = \frac{s}{D_{so}}, \quad \frac{\zeta}{D_{so}'} = \frac{z}{D_{so} - s} \quad (153)$$

та використавши (150), (151) одержимо:

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_p(p, \zeta) h\left(\frac{D_{so} t}{D_{so} - s} - p\right) \frac{D_{so}}{\sqrt{p^2 + D_{so}^2 + \zeta^2}} dp d\beta. \quad (154)$$

Тепер реконструкція зображень потребує виконання наступних етапів.

Етап 1. Обчислення $R_p'(p, \zeta)$:

$$R_p'(p, \zeta) = \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}} R_p(p, \zeta). \quad (155)$$

Етап 2. Обчислити згортку зваженої проекції $R_p'(p, \zeta)$ з функцією $h(p)/2$ шляхом перемноження їхніх Фур'є-образів відносно p . Ця згортка виконується незалежно для кожного значення ζ . Результат $Q_\beta(p, \zeta)$ має вигляд:

$$Q_\beta(p, \zeta) = R_p'(p, \zeta) * \frac{1}{2} h(p). \quad (156)$$

Етап 3. Для кожної зваженої проекції знаходиться обернена зважена проекція на тривимірній сітці реконструкції:

$$g(t, s, z) = \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} Q_\beta\left(\frac{D_{so} t}{D_{so} - s}, \frac{D_{so} z}{D_{so} - s}\right) d\beta. \quad (157)$$

Два аргументи зваженої проекції Q_β здійснюють перетворення координат точки в об'єкті до системи координат, пов'язаної із нахиленим пучком, зображеним на рис. 24.

Реконструювати можна лише властивості тих точок об'єкту, які освітлені з усіх сторін. При використанні методу конічного пучка це сфера радіуса $D_{SO}\sin(\Gamma_m)$, де Γ_m дорівнює кутовій напівширині пучка. За межами цієї області точка не потрапить до частини проекцій і, отже, не буде правильно реконструйована.

3. НАКЛАДАННЯ СПЕКТРІВ ТА ШУМИ У ТОМОГРАФІЇ

Спотворення, розглянуті раніше, є фундаментальними та обумовлені взаємодією неоднорідностей об'єкту із випроміненням. Їхній вплив не можна зменшити шляхом збільшення кількості вимірювань у кожній проекції або загальної кількості проекцій.

У цьому розділі нашу увагу буде зосереджено на помилках відновлення зображень іншого типу: таких, що викликані або недостатністю даних, або наявністю випадкового шуму в вимірюваннях. Недостатність даних може виникнути або через недостатню вибірку проекційних даних, або через недостатню кількість виміряних проекцій. Спотворення, які виникають через недостатність даних, зазвичай називають спотвореннями за рахунок накладання спектрів. Спотворення за рахунок накладання спектрів також можуть бути спричинені використанням сітки з недостатньою дискретизацією для відображення реконструйованого зображення.

Ми обговоримо ефекти, що виникають при накладанні спектрів, з двох точок зору. Спочатку, вважаючи джерела випромінення та детектори точковими, розглянемо спотворення, які виникають за рахунок накладання спектрів. Ми розглянемо випадки недостатньої дискретизації проекцій, використання занадто малої кількості проекцій, а також вибір неправильної сітки або фільтра. Потім будуть розглянуті детектори та джерела ненульової ширини.

Спотворення за рахунок накладання спектрів

Одним із розповсюджених спотворень, що виникає за рахунок накладання спектрів, є утворення смуг. Нехай K — кількість проекцій, а N — кількість дискретних значень для кожної проекції. Покажемо, що смуги, що утворюються у випадку, коли N мале, а K велике, обумовлені помилками, викликаними накладанням спектрів проекційних даних. Зазначимо, що одна із основних проблем томографічних зображень загалом полягає в тому, що об'єкти, а отже, і їхні проекції, мають необмежену частотну смугу. Іншими словами, частотна смуга проекційних даних перевищує найвищу частоту, яку

можна записати за даної частоти дискретизації. Щоб проілюструвати, як помилки накладення спектрів з'являються в проекційних даних, припустимо, що перетворення Фур'є $S_\theta(f)$ проекції $P_\theta(t)$ виглядає так, як показано на рис. 1. Як видно з рисунку, частотна смуга цієї функції дорівнює B . Для дискретизації проекцій виберемо інтервал дискретизації τ , відповідає ширині вимірюваної смуги $W = 1/2\tau$.

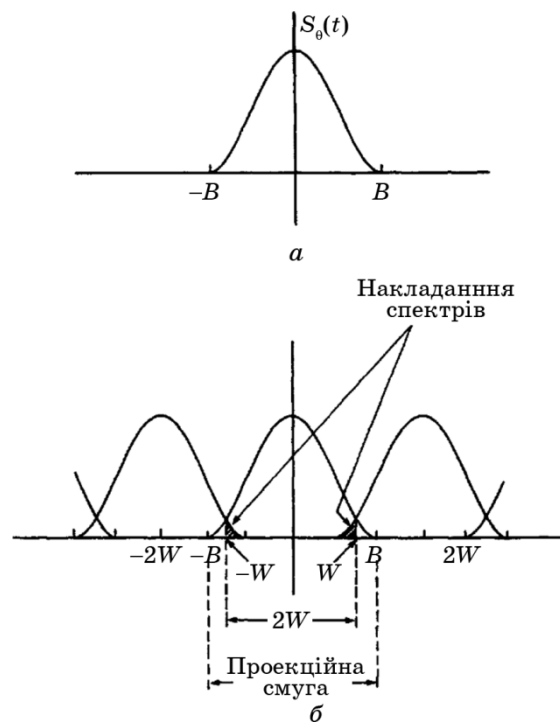


Рис. 1. Дискретизація проекції (а) з частотою, нижчою за частоту Найквіста (у цьому випадку нижчою за $2B$), призводить до накладання спектрів (б) [13].

Припустимо, що $W < B$. Тоді перетворення Фур'є дискретних точок проекцій буде мати вигляд, представлений на рис. 1, б. Можна бачити, що інформація про вимірювану частотну смугу спотворена «хвостами» (заштриховані області) вищих і нижніх реплік початкового перетворення Фур'є. Ці спотворення і є помилками накладення спектрів у дискретних проекційних даних.

Знаходження зворотної проекції — це лінійний процес, тому можна вважати, що кінцеве зображення визначається двома функціями. Одна з них відповідає зображенню, реконструйованому з проекцій з обмеженою частотною смугою та спотворене головним чином за рахунок кінцевої кількості проекцій.

Друга відповідає зображенню, реконструйованому із тих частотних областей, для яких спостерігається накладання спектрів в кожній проекції.

Частину реконструйованого зображення, пов'язану із накладанням спектрів можна одержати віднімаючи перетворення дискретизованих проекцій від відповідного теоретично розрахованого перетворення вихідних проекцій. Тоді, після застосування функції фільтру одержимо зображення, яке відповідає спотворенню за рахунок накладання спектрів.

Тепер розглянемо фактори, які визначають буде спотворююча смуга темною, або світлою. Як завжди, проекції вимірюються масивом детекторів. При цьому, якщо об'єкт має розриви на межах, то їх буде мати й проекція. Розглянемо, як положення цього розриву по відношенню до масиву детекторів впливає на знак помилки за рахунок накладання спектрів. Після знаходження фільтрованої оберненої проекції знак цієї помилки і буде визначати колір смуги.

Розглянемо дискретизацію проекції, описану функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Фур'є образ цієї функції:

$$F(\omega) = -\frac{2i}{\omega}. \quad (2)$$

Для дискретизації потрібно помножити функцію f на функцію:

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT), \quad (3)$$

де T являє собою інтервал дискретизації проекції. Фур'є образ цієї функції задається як:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_N), \quad (4)$$

де $\omega_N = 2\pi/T$.

Очевидно, що перетворення Фур'є дискретизованої функції є згортою виразів (2) і (4):

$$F_{\text{дискр}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{\omega + k\omega_N}. \quad (5)$$

Цю функцію показано на рис. 2, а.

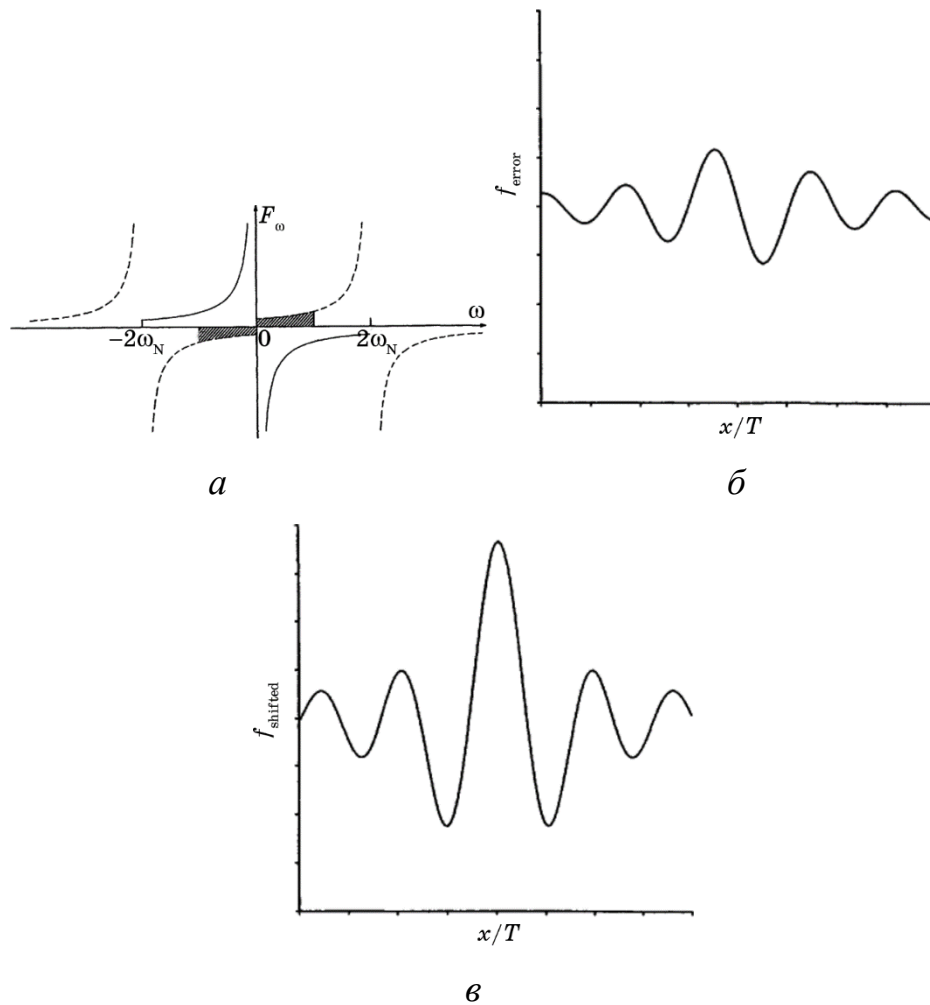


Рис. 2. Накладання спектрів в результаті низької частоти дискретизації: перетворення Фур'є в області розриву, інтервал накладення спектрів заштрихований (а), похибка для сітки дискретизації, вирівняної за розривами (б) і похибка при зміщенні розривів на 1/4 інтервалу дискретизації (в). Величина похибки змінюється більш, ніж у 3 рази, коли сітка дискретизації зміщується.

Перед знаходженням оберненої проекції необхідно провести фільтрацію шляхом множення перетворення Фур'є проекції на $|\omega|/2\pi$. Тоді відфільтрована проекція матиме вигляд:

$$F'_{\text{дискр}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|}{2\pi} \frac{-2i}{\omega + k\omega_N}. \quad (6)$$

Розглянемо лише два доданки, для яких $k = \pm 1$, вважаючи, що доданками вищих порядків можна знехтувати. Доданок нульового порядку містить

інформацію про властивості об'єкту на його межах та повинен бути врахований; доданки вищих порядків вносять похибки, але будуть малими порівняно з доданками, для яких $k = \pm 1$, на низьких частотах. Обернене перетворення Фур'є цих двох доданків записується як:

$$F_{\text{похибки}}(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N/2}^{\omega_N/2} \frac{|\omega|}{2\pi} \left[\frac{-2i}{\omega + \omega_N} + \frac{-2i}{\omega - \omega_N} \right] e^{-i\omega x} d\omega \quad (7)$$

і показане на рис. 2, б.

Якщо дискретна сітка зміщена на $1/4$ інтервалу дискретизації, то, відповідно, перетворення Фур'є множиться на $\exp(i\omega_N T/4)$ або

$$F_{\text{зсуву}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|}{2\pi} \frac{-2i}{\omega + k\omega_N} e^{ik\omega_N (T/4)}. \quad (8)$$

Цей доданок можна розрахувати для $k = \pm 1$, щоб знайти інтеграл помилок:

$$f_{\text{зсуву}}(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N/2}^{\omega_N/2} \frac{|\omega|}{2\pi} \left[\frac{2}{\omega + \omega_N} - \frac{2}{\omega - \omega_N} \right] e^{-i\omega x} d\omega, \quad (9)$$

показаний на рис. 2, в. Якщо сітку зсунута в протилежну сторону, то похибка буде такою ж, але з протилежним знаком.

Як було зроблено раніше, будемо вважати, що дискретизована проекція складається з двох компонент: істинної проекції та похибки. Істинні проекційні дані для кожної проекції об'єднуються, щоб сформувати потрібне зображення. Позитивна помилка в проекції приводить до появи світлої смуги при обчисленні оберненої проекції; в свою чергу негативні помилки призводять до появи темних смуг. Зі зміною кута, під яким вимірюється проекція, розмір «тіні» об'єкту змінюється, а розрив рухається відносно масиву детекторів. Крім того, якщо кривизна об'єкту є великою, межа розриву буде швидко рухатися, що призводить до появи великої кількості смуг.

Поява тонких смуг, які утворюються при великих N і малих K , викликана недостатньою кількістю проекцій. Можна показати, що коли використовується лише невелика кількість проекцій для невеликого об'єкта, результатом буде зіркоподібні спотворення. Це ілюструє рис. 3: на рис. 3, а показано чотири проекції точкового об'єкта, на рис. 3, б — відфільтровані проекції, а на рис. 3, в — їхні обернені проекції.

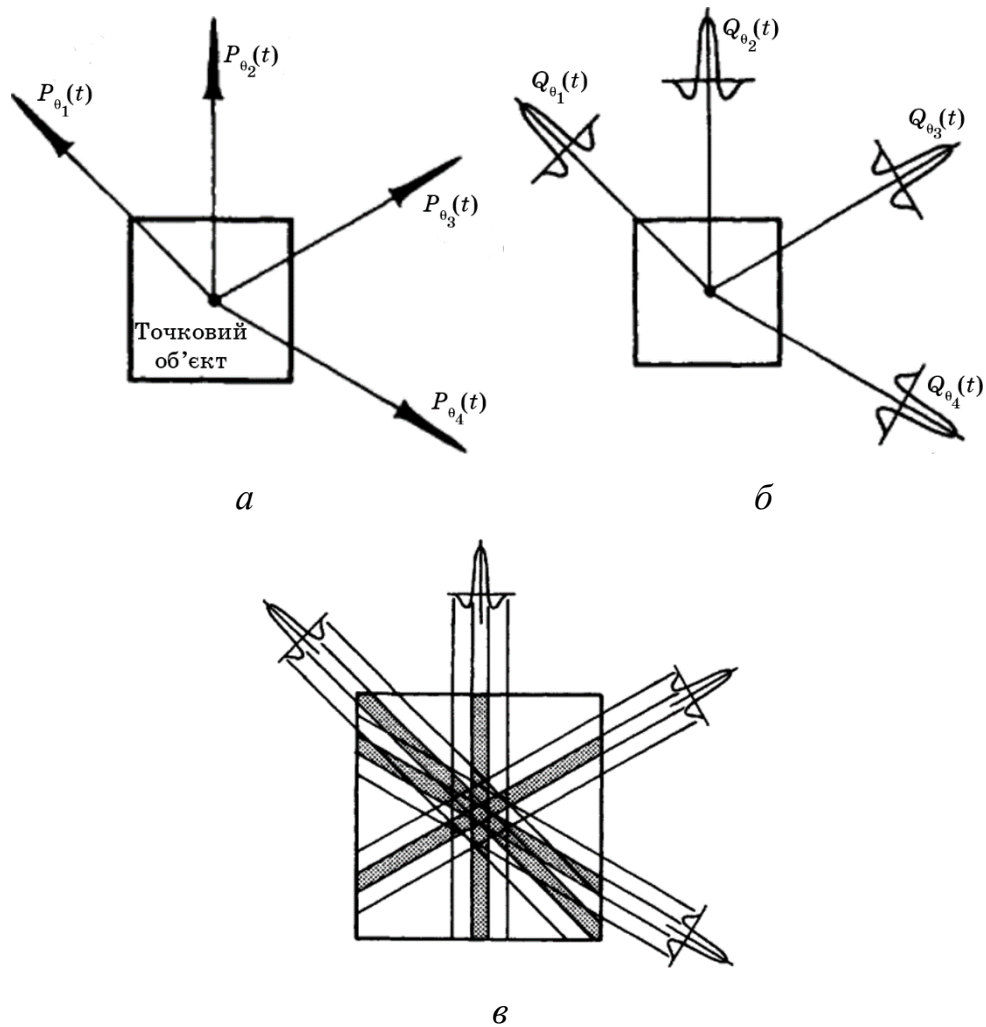


Рис. 3. При знаходження оберненої проекції у реконструйованому зображенні можуть з'являтися зіркоподібні артефакти [7].

Кількість проекцій повинна приблизно дорівнювати кількості променів у кожній проекції. Це можна обґрунтувати для випадку паралельних проекцій наступним чином: згідно із теоремою про центральний переріз перетворення Фур'є кожної проекції дорівнює перерізу двовимірного Фур'є-перетворення об'єкту. У частотній області, показаній на рис. 4, кожна радіальна лінія, наприклад, A_1A_2 відповідає одній проекції.

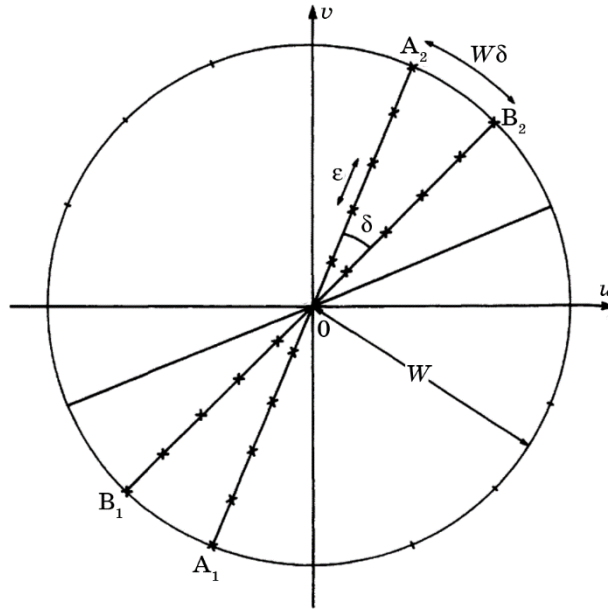


Рис. 4. Параметри частотної області, що використовують при обробці даних, одержаних методом паралельних проекцій [14].

Якщо є M проекції, рівномірно розподілених у інтервалі 180° , кутовий інтервал δ між сусідніми радіальними лініями дорівнює:

$$\delta = \frac{\pi}{M}. \quad (10)$$

Якщо τ — інтервал дискретизації, що використовується для кожної проекції, найвища просторова частота W , яку можна виміряти для кожної проекції, становитиме:

$$W = \frac{1}{2\tau}. \quad (11)$$

Це як раз дорівнює радіусу диску, зображеного на рисунку 4. Відстань між сусідніми дискретними точками на межі цього диска дорівнює A_2B_2 і визначається за формулою:

$$A_2B_2 = W\delta = \frac{1}{2\tau} \frac{\pi}{M}. \quad (12)$$

Якщо в кожній проекції є N_π дискретних точок, загальна кількість незалежних дискретних точок у просторі Фур'є на лінії A_1A_2 буде такою ж самою. Отже, відстань ε між будь-якими двома послідовними дискретними точками на кожній радіальній лінії на рис. 4 дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{2W}{N_\pi} = \frac{1}{\tau N_\pi}. \quad (13)$$

Оскільки в частотній області найгірша азимутальна роздільна здатність повинна бути приблизно такою ж, як радіальна роздільна здатність, маємо:

$$\frac{1}{2\tau} \frac{\pi}{M} \approx \frac{1}{\tau N_{\pi}}, \quad (14)$$

яке одержуємо прирівнявши (12) та (13). Рівняння (14) зводиться до наступного:

$$\frac{M}{N_{\pi}} \approx \frac{\pi}{2}, \quad (15)$$

що й означає, що кількість проекцій повинна бути приблизно такою ж, як кількість променів у проекції.

Отже, можна зробити висновок, що для реконструкції зображення $N \times N$ як кількість променів у кожній проекції, так і загальна кількість проекцій повинні приблизно дорівнювати N .

Дискретизація в реальних системах

Вплив, описаних у попередньому розділі спотворень, викликаних накладанням спектрів, на практиці дещо пом'якшуються за рахунок скінченного розміру апертури детектора та ненульового розміру джерела рентгенівського випромінення. Обидва ці фактори приводять до певного згладжування проекцій і, як наслідок, втрати інформації на найвищих частотах. Тут ми продемонструємо, як можна врахувати ці фактори, щоб визначити «оптимальну частоту», з якою проекція має бути дискретизована.

Ефекти, викликані ненульовим розміром апертури детектора, можна врахувати шляхом обчислення згортки ідеальної проекції з апертурною функцією. Введемо функцію, що описує апертуру шириною T_d (ми розглядаємо лише ширину апертури вздовж проекції, ширина вздовж перпендикулярного напрямку не має значення для нашого обговорення):

$$a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq T_d / 2, \\ 0, & |x| > T_d / 2. \end{cases} \quad (16)$$

Перетворення Фур'є для цієї апертурної функції дає:

$$A(\omega) = T_d \text{sinc}(\omega T_d / 2). \quad (17)$$

У Фур'є просторі перетворення Фур'є ідеальної проекції зводиться до множення на цю функцію, маючи на увазі, що ми фактично пропускаємо

проекцію через фільтр низьких частот (ФНЧ). Оскільки перший нуль $A(\omega)$ розташований в точці $2\pi/T_d$, можна сказати, що вплив функції $A(\omega)$ полягає у відфільтруванні всіх частот, вищих за

$$\omega_{\text{ФНЧ}} = \frac{2\pi}{T_d}. \quad (18)$$

Іншими словами, у Фур'є просторі функцію апертури можна апроксимувати наступним чином:

$$A'(\omega) = \begin{cases} T_d \text{sinc}(\omega T_d / 2), & |\omega| < \omega_{\text{ФНЧ}}, \\ 0, & |\omega| \geq \omega_{\text{ФНЧ}}. \end{cases} \quad (19)$$

Нехай відстань між центрами сусідніх детекторів у масиві детекторів дорівнює T_s . Вимірювання даних проєкції еквівалентно множенню відфільтрованої фільтром низьких частот проєкції на функцію $d(x)$, де $d(x)$ визначається як:

$$d(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT_s), \quad (20)$$

а її Фур'є образ як

$$D(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T_s}). \quad (21)$$

У Фур'є просторі вплив апертури детектора та інтервалу дискретизації показано на рис. 5.

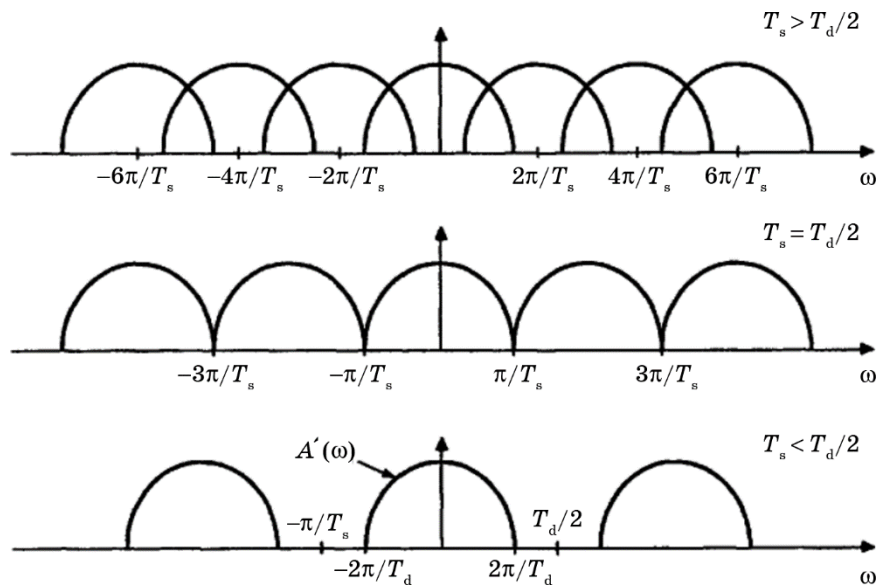


Рис. 5. Перетворення Фур'є сигналу, який вимірюється масивом детекторів для трьох різних відстаней між ними. При $T_s > T_d/2$ спостерігаються спотворення, а при $T_s < T_d/2$ накладання спектрів мінімізується.

Тепер можна записати вираз для дискретних значень p_n ідеальної проекції $p(x)$:

$$p_n = \delta(x - nT_s)[p(x) * a(x)] \quad (22)$$

або

$$p_n = \text{ОПФ}\{D(\omega) * [P(\omega)A'(\omega)]\}, \quad (23)$$

де $P(\omega)$ — перетворення Фур'є проекції, а ОПФ — обернене перетворення Фур'є. Очевидно, що у дискретизованих проекціях буде відбуватися накладання спектрів, коли

$$T_s < T_d / 2. \quad (24)$$

Це співвідношення означає, що ми повинні мати принаймні два значення на ширині детектору.

Існує кілька способів вимірювання декількох значень на ширині детектора. Зі сканерами першого покоління (паралельні проекції) достатньо збільшити густину пікселів детектору. Збільшити густину вибірки можна також у сканерах четвертого покоління (з фіксованим детектором), розглядаючи кожен детектор як вершину віяла. Коли джерело обертається, кожен детектор вимірює променеві інтеграли, і густину променів можна зробити скільки завгодно великою, збільшуючи частоту дискретизації для кожного детектора.

Для сканерів третього покоління використовується метод, відомий як четверть-детекторний зсув. Для сканера, що вимірює віялові проекції, достатньо провести вимірювання лише для кутової області 180° (плюс ширина віяла); якщо ж зібрано дані для кутової області 360° , решта даних фактично зайва. Зазвичай масив детекторів є симетричним відносно лінії, що сполучає джерело рентгенівського випромінювання та центр обертання, однак його можна зміщувати ліворуч або праворуч відносно цієї лінії. Отже, якщо масив детекторів зсувається на $1/4$ відстані між детекторами і вимірюються проекції

для кутової області 360° , їх можна використати для одержання додаткової інформації про об'єкт. Це фактично подвоює частоту дискретизації проекції.

Обговоримо ще один фактор, який спричиняє розмитість проекцій, а саме розмір рентгенівського променя. Цей ефект описати дещо складніше, оскільки розмиття зображення об'єктів залежить від того, на якій відстані вони знаходяться від джерела випромінення. На рисунку 6 показано схему утворення зображення для джерела ненульової ширини.

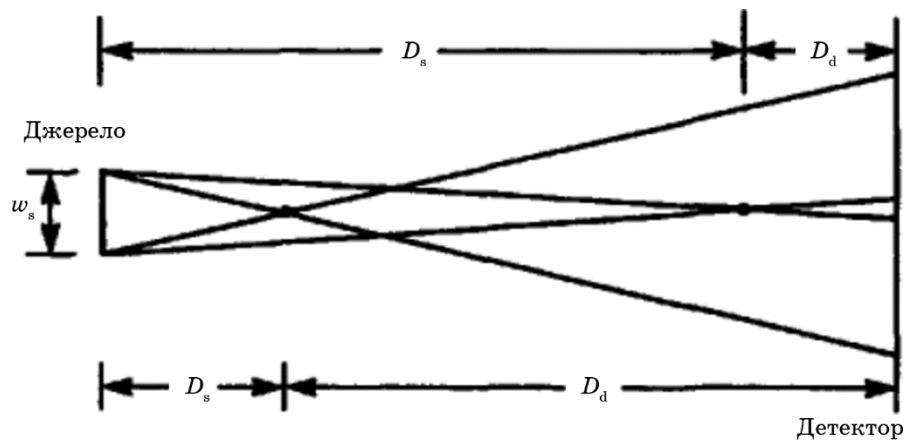


Рис. 6. Джерело шириною w_s буде зображено кожною точкою об'єкту на лінії детектора. Розмір зображення визначається співвідношенням D_s/D_d . На рисунку показано зображення двох точкових об'єктів.

Прості геометричні аргументи показують, що для даної точки в об'єкті розмір її зображення на детекторі дорівнює:

$$B_s = w_s \frac{D_d}{D_s}, \quad (25)$$

де w_s — ширина джерела, а D_d та D_s — відповідно, відстані від точки об'єкту до детектору та джерела. Це може бути наближено мірою розмиття, яке створюється джерелом ненульової ширини при вимірюванні паралельних проекцій.

При вимірюванні віялових проекцій вищезгадане розмиття посилюється за рахунок природного розходження самого віяла. Щоб проілюструвати це, розглянемо дві детекторні лінії для системи вимірювання віялових проекцій, як показано на рис. 7.

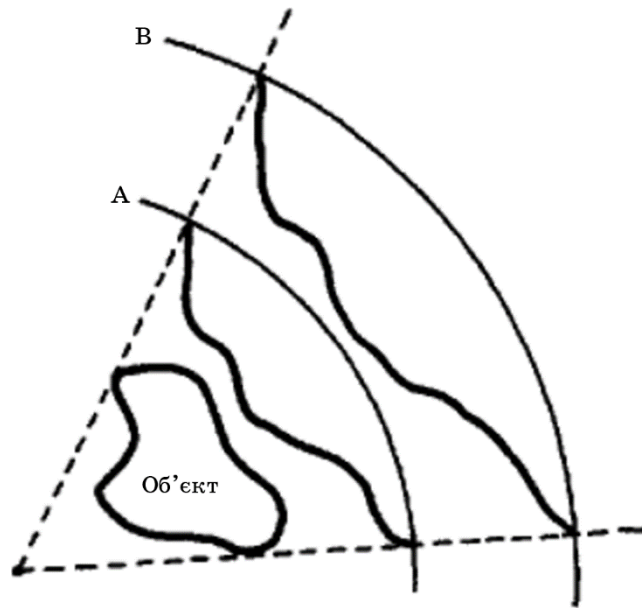


Рис. 7. Збільшення проєкції при використанні віялових променів.

Проекції, виміряні вздовж цих двох ліній, будуть ідентичними, за винятком розтягування проєкцій вздовж дуги детектора, коли ми віддаляємось від центру. Цей коефіцієнт розтягування визначається як (див. рис. 8):

$$\frac{D_s}{D_s + D_d}, \quad (26)$$

де відстані D_s та D_d — це відстані від точки об'єкту до лінії сканування.

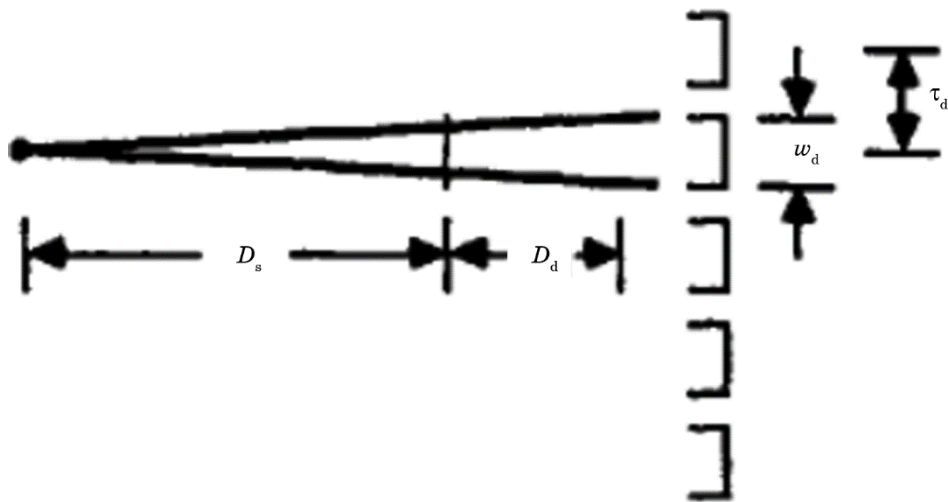


Рис. 8. Кінцевий розмір апертури детектору призводить до розмиття зображення об'єкту.

Об'єднуючі попередні два рівняння, одержуємо для розмиття, викликаного джерелом ненульової ширини, при вимірюванні віялових проекцій:

$$B_s = w_s \frac{D_d}{D_s} \frac{D_s}{D_s + D_d} = w_s \frac{D_d}{D_s + D_d}. \quad (27)$$

Зазначимо, що це рівняння справедливе лише для точок об'єкта, близьких до центру обертання.

Оскільки розмір зображення залежить від положення об'єкту, це призводить до просторово змінного розмивання даних проекції. Якщо об'єкт знаходиться поблизу детектора, розмиття буде невеликим, тоді як положення об'єкту поблизу джерела випромінення може привести до значного розмиття. Оскільки система є лінійною, кожна точка об'єкту буде згорнута з масштабованим зображенням точкового джерела та спроектована на матрицю детектора.

Шуми в реконструйованому зображенні

Тепер розглянемо вплив шумів в проекційних даних на реконструйоване зображення. Слід розглянути два типи шумів. Перший тип може бути змодельований як простий адитивний шум (наприклад, через електричні шуми або помилки округлення). Таким чином, реконструйоване зображення можна вважати сумою двох зображень — справжнього зображення та зображення, отриманого в результаті дії шуму. Другий тип шуму найкраще ілюструється дробовим шумом у рентгенівській томографії. У цьому випадку величина можливої похибки є функцією кількості рентгенівських фотонів, які виходять з об'єкту, та її аналіз стає більш складним.

Неперервний випадок

Розглянемо випадок, коли кожна проекція $P_\theta(t)$ спотворена додатковим шумом $v_\theta(t)$. Виміряні проекції описуються як:

$$P_\theta^m = P_\theta(t) + v_\theta(t). \quad (28)$$

Будемо вважати, що шум може описуватись як стаціонарний випадковий процес із нульовим середнім, а також що його значення некорельовані для будь-яких двох променів у системі, тому

$$E[v_{\theta_1}(t_1)v_{\theta_2}(t_2)] = S_0\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(t_1 - t_2). \quad (29)$$

Реконструкція за вимірними проекційними даними отримується шляхом попереднього фільтрування кожної проекції:

$$Q_{\theta}^m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}^m(w) |w| G(w) e^{i2\pi w t} dw, \quad (30)$$

де $S_{\theta}^m(w)$ — Фур'є образ $P_{\theta}^m(t)$, а $G(w)$ — використаний згладжуючий фільтр, та подальшого знаходження оберненої проекції:

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}^m(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta, \quad (31)$$

де $\tilde{f}(x, y)$ — реконструйоване спотворене зображення об'єкту $f(x, y)$. Для розрахунку шуму підставимо (28) і (30) в (31):

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_{\theta}(w) + N_{\theta}(w)] |w| G(w) e^{i2\pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta, \quad (32)$$

де, як і раніше, $S_{\theta}(w)$ є перетворенням Фур'є ідеальної проекції $P_{\theta}(t)$, а $N_{\theta}(w)$ є перетворенням Фур'є функції, що описує адитивний шум $v_{\theta}(t)$ (тут ми припускаємо, що $N_{\theta}(w)$ існує, а крім того, незважаючи на позначення, маємо справу лише з проекціями скінченного розміру). Очевидно, що

$$N_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\theta}(t) e^{-i2\pi w t} dt, \quad (33)$$

звідки

$$E[N_{\theta_1}(w_1) N_{\theta_2}^*(w_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[v_{\theta_1}(t_1) v_{\theta_2}(t_2)] e^{-i2\pi(w_1 t_2 - w_2 t_1)} dt_1 dt_2 = S_0 \delta(\theta_1 - \theta_2) \delta(w_1 - w_2). \quad (34)$$

Оскільки $N_{\theta}(w)$ є випадковим, реконструйоване зображення, яке визначається формулою (32), також є випадковим. Середнє значення $\tilde{f}(x, y)$ визначається формулою:

$$E[\tilde{f}(x, y)] = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_{\theta}(w) + E(N_{\theta}(w))] |w| G(w) e^{i2\pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta, \quad (35)$$

Оскільки ми розглядаємо шум із нульовим середнім $E[v_{\theta}(t)] = 0$, то з (33) маємо $E[N_{\theta}(w)] = 0$. Підставляючи останню рівність у (35), одержимо:

$$E[\tilde{f}(x, y)] = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(w) |w| G(w) e^{i2\pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta. \quad (36)$$

Дисперсія шуму в точці (x, y) на реконструйованому зображенні визначається як:

$$\sigma^2(x, y) = E[\tilde{f}(x, y) - E(\tilde{f}(x, y))]^2. \quad (37)$$

Підставляючи (32) та (36), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y) &= E \left| \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N_\theta(w) |w| G(w) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta \right|^2 = \\ &= E \left| \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N_\theta(w) |w| G(w) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta \right| \left| \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N_\theta(w) |w| G(w) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta \right| = \\ &= \pi S_0 \int_{-\infty}^\infty |w|^2 |G(w)|^2 dw. \end{aligned} \quad (38)$$

Отже, можемо записати:

$$\frac{\sigma^2}{S_0} = \pi \int_{-\infty}^\infty |w|^2 |G(w)|^2 dw, \quad (39)$$

де ми опустили залежність від (x, y) в σ^2 , оскільки ця величина не залежить від положення в площині зображення.

З рівняння (39) випливає, що для зменшення дисперсії шуму в реконструйованому зображенні функція фільтру $G(w)$ повинна бути обрана так, щоб площа під кривою $|w|G(w)$ була якомога меншою. При цьому, для зменшення спотворення зображення $|w|G(w)$ має бути максимально близьким до $|w|$. Тому вибір виду функції $G(w)$ залежить від припустимого компромісу між спотворенням зображення та величиною дисперсії шуму.

Розглянемо спектральну густину шуму в реконструйованому зображенні. Для спрощення будемо знов розглядати лише білий шум з нульовим середнім $v_0(t)$. Реконструйоване зображення, відновлене за проєкціями з шумом, має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N_\theta(w) |w| G(w) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty N_\theta(w) w G(w) e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta, \end{aligned} \quad (40)$$

де, як і раніше, $N_\theta(w)$ є перетворенням Фур'є від $v_0(t)$. Нехай тепер $R(\alpha, \beta)$ — автокореляційна функція реконструйованого зображення:

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta) &= E[\tilde{f}(x + \alpha, y + \beta) \tilde{f}(x, y)] = E[\tilde{f}(x + \alpha, y + \beta) \tilde{f}^*(x, y)] = \\ &= S_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dw w^2 |g(w)|^2 e^{i2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)}. \end{aligned} \quad (41)$$

З цього випливає, що спектральна густина реконструйованого шуму залежить лише від відстані від початку координат в просторі Фур'є та визначається так:

$$S(w, \theta) = S_0 |G(w)|^2 w, w \geq 0, 0 < \theta \leq 2\pi. \quad (42)$$

Це можна показати, виразивши спочатку результат для автокореляційної функції в полярних координатах:

$$\begin{aligned} R(r, \phi) &= S_0 \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dw w^2 |G(w)|^2 e^{i2\pi w r \cos(\theta - \phi)} = \\ &= S_0 \int_0^\infty w |G(w)|^2 w J_0(2\pi w r) dw \end{aligned} \quad (43)$$

і використати те, що автокореляційна функція та спектральна густина пов'язані між собою перетворенням Ганкеля.

Дискретний випадок

Хоча при розгляді неперервного випадку й з'являється залежність дисперсії шуму в реконструйованому зображенні від використаної функції фільтру для проєкційних даних, цей випадок базується на дещо нереалістичному припущенні. Припущення про стаціонарність, наслідком якого є формула (29), означає, що в будь-якій проєкції дисперсія шуму для кожного променя є однаковою. На практиці так майже ніколи не буває. Дисперсія шуму переважно залежить від сигналу, що має суттєвий вплив на шум в реконструйованому зображенні.

Розглянемо випадок сигналу, залежного від шуму. Нехай τ буде інтервалом дискретизації, а також шириною рентгенівського променя, як показано на рис. 9.

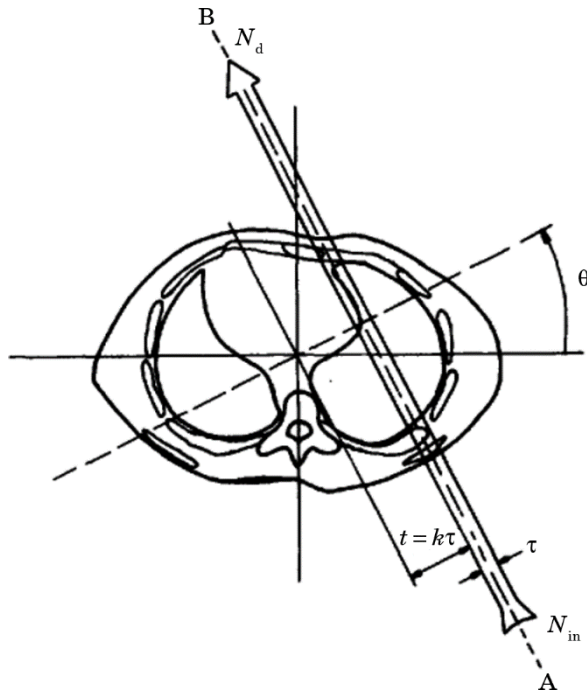


Рис. 9. Промінь рентгенівського випромінення шириною τ проходить через поперечний переріз тіла людини [3].

Якщо ширина τ променю досить мала та промінь монохроматичний, інтеграл від функції поглинання $\mu(x, y)$ уздовж лінії AB на рис. 9 визначається як:

$$P_{\theta}(t) = \int_{AB} \mu(x, y) ds \approx \ln N_{in} - \ln N_{\theta}(k\tau), \quad (44)$$

де $N_{\theta}(k\tau)$ позначає значення N_d для променю з орієнтацією $(\theta, k\tau)$, як показано на рисунку. Випадковість величини $P_{\theta}(t)$ обумовлена статистичними флуктуаціями $N_{\theta}(k\tau)$. Зверніть увагу, що на практиці лише $N_{\theta}(k\tau)$ вимірюється безпосередньо. Значення N_{in} для всіх променів визначається шляхом моніторингу джерела рентгенівського випромінення за допомогою еталонного детектора та на основі знання просторового розподілу випромінюваного рентгенівського випромінення. Зазвичай можна з упевненістю припустити, що еталонний потік рентгенівського випромінення достатньо великий, щоб N_{in} можна було вважати відомою з незначною похибкою. У подальшому обговоренні будемо припускати, що для кожного вимірювання N_{in} є відомою детермінованою константою, тоді як, з іншого боку, безпосередньо виміряна

величина $N_0(k\tau)$ є випадковою величиною. Випадковість $N_0(k\tau)$ статистично описується функцією ймовірності Пуассона [1]:

$$p\{N_0(k\tau)\} = \frac{(\bar{N}_0(k\tau))^{N_0(k\tau)}}{N_0(k\tau)!} e^{-\bar{N}_0(k\tau)}, \quad (45)$$

де $p\{\}$ — ймовірність та $\bar{N}_0(k\tau)$ — очікуване значення вимірювання:

$$\bar{N}_0(k\tau) = E\{N_0(k\tau)\}, \quad (46)$$

де $E\{\}$ — математичне очікування. При цьому, дисперсія визначається як:

$$\text{Дисперсія}\{N_0(k\tau)\} = \bar{N}_0(k\tau). \quad (47)$$

Через випадковість величини $N_0(k\tau)$ справжнє значення $P_0(k\tau)$ відрізнятиметься від вимірюваного значення, яке будемо позначати $P_0^m(k\tau)$. Щоб підкреслити цю відмінність, запишемо (44) наступним чином:

$$P_0^m(k\tau) = \ln N_{\text{in}} - \ln N_0(k\tau) \quad (48)$$

та

$$P_0(k\tau) = \int_{AB} \mu(x, y) ds. \quad (49)$$

Інтерпретуючи $\exp\{-P_0(k\tau)\}$ як ймовірність того, що фотон, що входить в об'єкт зі сторони А, з'явиться (без розсіювання або поглинання) на стороні В, можна показати, що

$$\bar{N}_0(k\tau) = N_{\text{in}} e^{-P_0(k\tau)}. \quad (50)$$

Будемо вважати, що всі флуктуації (відхилення від середнього) $N_0(k\tau)$, які мають значну ймовірність появи, набагато менші за середнє. З цим припущенням і використанням (45) і (46) легко показати, що

$$E\{P_0^m(k\tau)\} = P_0(k\tau) \quad (51)$$

та

$$\text{Дисперсія}\{P_0^m(k\tau)\} = \frac{1}{\bar{N}_0(k\tau)}. \quad (52)$$

Виходячи зі статистичних властивостей вимірних проекцій $P_0^m(k\tau)$ розглянемо статистичні властивості реконструйованого зображення. Використовуючи дискретний алгоритм фільтрованих обернених проекцій, зв'язок між реконструкцією в точці (x, y) і вимірними проекціями визначається як

$$\bar{f}(x, y) = \frac{\pi\tau}{M_{\text{пр}}} \sum_{i=1}^{M_{\text{пр}}} \sum_k P_{\theta_i}^m(k\tau) h(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - k\tau). \quad (53)$$

Використовуючи (51)–(53), одержимо

$$E\{\bar{f}(x, y)\} = \frac{\pi\tau}{M_{\text{пр}}} \sum_{i=1}^{M_{\text{пр}}} \sum_k P_{\theta_i}(k\tau) h(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - k\tau). \quad (54)$$

та

$$\text{Дисперсія}\{\bar{f}(x, y)\} = \left(\frac{\pi\tau}{M_{\text{пр}}} \right)^2 \sum_i \sum_k \frac{1}{\bar{N}_{\theta_i}(k\tau)} h^2(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - k\tau), \quad (55)$$

де було використано припущення, що флуктуації $P_{\theta_i}^m$ некорельовані для різних променів. Рівняння (54) показує, що очікуване значення реконструйованого зображення дорівнює отриманому з ідеальних проекційних даних. Перш ніж інтерпретувати рівняння (55), перепишемо його наступним чином. В термінах ідеальних проекцій $P_{\theta}(k\tau)$ визначаємо нові проекції як

$$V_{\theta}(k\tau) = e^{P_{\theta}(k\tau)} \quad (56)$$

та нову функцію фільтру

$$h_v(t) = h^2(t). \quad (57)$$

Підставляючи (50), (56), (57) у (55), отримаємо

$$\text{Дисперсія}\{\bar{f}(x, y)\} = \left(\frac{\pi\tau}{M_{\text{пр}}} \right)^2 \sum_i \sum_k V_{\theta_i}(k\tau) h_v(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - k\tau). \quad (58)$$

Тепер визначимо відносно-невизначене зображення наступним чином:

$$\text{Відносна невизначеність у } (x, y) = \frac{\text{Дисперсія}\{\bar{f}(x, y)\}}{[\bar{f}(x, y)]^2}. \quad (59)$$

Ця формула застосовна лише тоді, коли компенсатори не використовуються для зменшення динамічного діапазону вхідного сигналу детектора. При аналізі шуму їхній вплив можна приблизно змодельовати, використовуючи різні N_{in} для різних променів. При комп'ютерному моделюванні з таким визначенням відносної невизначеності зображення стає незалежним від кількості падаючих фотонів, що використовуються для вимірювань, і повністю визначається вибором фантома.

Тепер розглянемо вигляд формули (58) у деяких окремих випадках. Спробуємо визначити дисперсію шуму в джерелі. З (58) можна записати:

$$\text{Дисперсія}\{f(0,0)\} = \left(\frac{\pi\tau}{M_{\text{пр}}} \right)^2 \sum_{i=1}^{M_{\text{пр}}} \sum_k \frac{1}{\bar{N}_{\theta_i}(k\tau)} h^2(k\tau), \quad (60)$$

де ми використали той факт, що $h(t)$ є парною функцією. Оскільки $h(k\tau)$ швидко падає зі збільшенням k , можна використати наступне наближення для приблизно однорідних об'єктів:

$$\text{Дисперсія}\{f(0,0)\} = \left(\frac{\pi\tau}{M_{\text{пр}}} \right)^2 \sum_k h^2(k\tau) \sum_{i=1}^{M_{\text{пр}}} \frac{1}{\bar{N}_{\theta_i}(0)}, \quad (61)$$

яке при малих τ також можна записати як

$$\text{Дисперсія}\{f(0,0)\} = \left(\frac{\pi}{M_{\text{пр}}} \right)^2 \tau \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt \sum_{i=1}^{M_{\text{пр}}} \frac{1}{\bar{N}_{\theta_i}(0)}. \quad (62)$$

Зазначемо, що $\bar{N}_{\theta_i}(0)$ — це середня кількість фотонів, що випромінюються, виміряна для центрального променя в кожній проекції. Використовуючи (62) в роботі [15] було показано, що (за тієї самої невизначеності вимірювання) загальна кількість фотонів на елемент роздільної здатності, необхідна для рентгенівської томографії (з використанням алгоритму фільтрованих обернених проекцій), є такою самою, яка необхідна для вимірювання поглинання ізольованим (вирізаним) шматком об'єкту з розмірами, рівними розмірам елемента роздільної здатності.

Тепер розглянемо випадок, коли поперечний переріз, для якого реконструюється зображення, є центрально-симетричним. $\bar{N}_{\theta_i}(0)$ для всіх i будуть однаковими, позначимо це значення як \bar{N}_0 , тобто:

$$\bar{N}_0 = \bar{N}_{\theta_1}(0) = \bar{N}_{\theta_2}(0) = \bar{N}_{\theta_3}(0) = \dots \quad (63)$$

Вираз (62) для дисперсії тепер можна записати як

$$\text{Дисперсія}\{f(0,0)\} = \frac{\pi^2 \tau}{M_{\text{пр}} \bar{N}_0} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt. \quad (64)$$

За теоремою Парсеваля цей результат можна виразити в оберненому просторі як

$$\text{Дисперсія}\{f(0,0)\} = \frac{\pi^2 \tau}{M_{\text{пр}} \bar{N}_0} \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} |H(w)|^2 dw, \quad (65)$$

де τ — інтервал дискретизації для даних проекції. Цей результат показує, що дисперсія шуму пропорційна площі під квадратом функції фільтра, яка

використовується для реконструкції. Це не означає, що цю область можна зробити як завгодно малою, оскільки будь-яке значне відхилення від функції $|w|$ призведе до просторового спотворення зображення, навіть якщо воно буде містити менше шумів. Отже, наведені вище рівняння не слід інтерпретувати як такі, що співвідношення сигнал/шум наближається до нуля, якщо зробити τ достатньо малим. Крім того, τ також є шириною вимірювального променя. У будь-якій практичній системі зі зменшенням τ \bar{N}_0 також зменшуватиметься.

Література

1. A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (New York: 1988).
2. M. TerPogossian, *The Physical Aspects of Diagnostic Radiology*. New York, NY: Harper and Row, 1967.
3. A. C. Kak, "Computerized tomography with x-ray emission and ultrasound sources," *Proc. IEEE*, vol. 67, pp. 1245-1272, 1979
4. E. C. McCullough, "Photon attenuation in computed tomography," *Med. Phys.*, vol. 2, pp. 307-320, 1975.
5. R. E. Alvarez and A. Macovski, "Energy-selective reconstructions in x-ray computerized tomography," *Phys. Med. Biol.*, vol. 21, pp. 733-744, 1976.
6. A. J. Duerinckx and A. Macovski, "Polychromatic streak artifacts in computed tomography images," *J. Comput. Assist. Tomog.*, vol. 2, pp. 481-487, Sept. 1978.
7. A. Rosenfeld and A. C. Kak, *Digital Picture Processing*, 2nd ed. New York, NY: Academic Press, 1982.
8. "Tomographic imaging with diffracting and non-diffracting sources," in *Array Signal Processing*, S. Haykin, Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
9. S. X. Pan and A. C. Kak, "A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography: Interpolation vs. filtered-backpropagation," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 1262-1275, Oct. 1983.
10. A. Naparstek, "Short-scan fan-beam algorithms for CT," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. NS-27, 1980.
11. A. C. Kak and B. Roberts, "Image reconstruction from projections," in *Handbook of Pattern Recognition and Image Processing*, T. Y. Young and K. S. Fu, Eds. New York, NY: Academic Press, 1986.
12. L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress, "Practical cone-beam algorithm," *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 1, pp. 612-619, June 1984.
13. C. R. Crawford and A. C. Kak, "Aliasing artifacts in computerized tomography," *Appl. Opt.*, vol. 18, pp. 3704-3711, 1979.

14. Digital Image Processing Techniques, M. P. Ekstrom, Ed. New York, NY: Academic Press, 1984.
15. D. A. Chester, S. J. Riederer, and N. J. Pelc, "Noise due to photon counting statistics in computed x-ray tomography," J. Comput. Assist. Tomog., vol. 1, pp. 64-74, Jan. 1977.