КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи
для студентів фізичного факультету

Друге видання
змінене і доповнене

Київ, 2017

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. І.С. Доценко
д-р фіз.-мат. наук, проф. Д.Д. Шека

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
(протокол № __ від «___» _______ 2017 року)

В.М. Хотяїнцев
Методи математичної фізики: методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи для студентів фізичного факультету/Упорядник В.М. Хотяїнцев. 2-е видання, змінене і доповнене. – Київ, 2017. – 62 с.

Видання містить матеріали для аудиторної і самостійної роботи студентів над практичною частиною курсу «Методи математичної фізики»: план практичних занять на два семестри з текстами всіх обов'язкових задач (переважно фізичного змісту, з різних розділів фізики з квантовою механікою включно), з указівками, коментарями і питаннями для обговорення, зразки завдань контрольних робіт, великий список літератури для навчання і наукової роботи. Частина задач має оригінальний характер. Друге видання включає цілий ряд нових задач, а розподіл матеріалу і підбір задач у цілому значно оновлені з урахуванням досвіду використання першого видання (ВПЦ «Київський університет», 2010. – 56 с.). Поряд з простими, в кожне заняття включені задачі підвищеної складності. Видання включає також оригінальну добірку задач творчого характеру для самостійних міні-досліджень під керівництвом лектора.

Призначено для студентів другого і третього курсів фізичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка та викладачів, що проводять практичні заняття.

Зразки розв'язаних задач можна знайти тут:

1. В. М. Хотяїнцев. Методи математичної фізики. Електронний конспект лекцій. Частина I, §§3,4 (опубліковано на сайті факультету, розділ «Додаткові відомості» на сторінці курсу «Методи математичної фізики»).
2. Юрачківський А.П., Жугаєвич А.Я. Математична фізика в прикладах і задачах. – К: ВПЦ «Київський університет», 2005.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука,1972.
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1998.
5. Доценко І.С., Якименко О.І. Методи математичної фізики: методичний посібник для студентів фізичного факультету. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2007.

ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
ТА ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАДАЧІ НА ПЕРШИЙ СЕМЕСТР КУРСУ

Для кожного заняття виділені **жирним шрифтом** задачі розв'язуються в аудиторії як зразки. Не закінчені або не розв'язані в аудиторії задачі і решта задач заняття є завданням додому. Всі задачі без зірочок є обов'язковими. Бали для оцінки понад 89 дають тільки задачі, відмічені зірочками (на вибір, по одному балу за зірочку).

МОДУЛЬ 1. ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Заняття 1. Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних варіантів межових умов

Задача про власні моди (у математиків - так звана «основна допоміжна задача методу відокремлення змінних») є задачею про вільний рух фізичної системи, а саме про набір вільних рухів особливого вигляду. Задача про власні моди є **допоміжною** з точки зору розв'язання **відповідної крайової задачі**; в останній додатково фіксується початковий стан системи за допомогою початкових умов (див. заняття 3 і подальші заняття). Проте власні моди даної фізичної системи мають **самостійний фізичний смисл**, оскільки проявляють себе у різних ситуаціях. Вони є прямим аналогом **нормальних коливань для** лінійних коливальних систем зі скінченним числом ступенів вільності. Як і нормальні коливання, власні моди є деякими характеристичними рухами лінійної динамічної системи. Поняття власних мод стосується не лише задач про поширення хвиль (див. заняття 2).

Теми для обговорення:

- постановка задачі на власні моди коливань струни;
- однорідність задачі і тривіальний розв'язок;
- процедура відокремлення змінних x і t (x - просторова координата, t - час) в **межових умовах** і в **рівнянні**, стала відокремлення і результат відокремлення змінних: спектральна **задача** по просторовій координаті та **рівняння** по часу;
- задача Штурма-Ліувілля, постановка задачі та формат «невідомого» (**набір** власних функцій і відповідних власних значень), однорідність задачі та тривіальний розв'язок, що таке власні функції і власні значення;

- процедура розв'язання задачі Штурма-Ліувілля, розв'язки рівняння для різних дійсних і комплексних значень спектрального параметра, розв'язки характеристичного рівняння, ***всі** різні* власні функції (що це означає?) та їх нумерація, власні значення, формат відповіді;
- аналіз результатів, графіки власних функцій, кількість вузлів і порядковий номер власної функції;
- **самоконтроль** і самоперевірка, аналітична й графічна, у ході розв'язання задачі та перевірка кінцевого результату (виконання всіх умов задачі); як помітити пропущені власні функції (осциляційна теорема), алгоритм самоконтролю за зразком модульної контрольної роботи №1 (див. заняття 6);
- рівняння для часової функції, власні частоти коливань струни;
- основна (мода, що відповідає найменшому власному значенню) і вищі власні моди коливань струни, рух струни, стояча хвиля, фізичні характеристики моди: власна частота та розподіл зміщень;
- зміна вигляду власних функцій і власних мод при зміні межових умов, чотири найпростіші задачі Штурма-Ліувілля для чотирьох комбінацій межових умов першого-другого роду.

Головний висновок занять 1 і 2. Зміни вигляду не лише рівняння (однорідного!), а й **межових умов** (однорідних!) призводять до того, що набір власних мод стає іншим. Отже, сукупність можливих рухів системи змінилась, і ми маємо справу вже з **іншою** фізичною системою. Тобто фізичні **системи типу хвильового поля в резонаторі задаються не лише виглядом рівняння, але й умовами на поле, які виконуються на межі системи, і враховані в межових умовах.** Неоднорідні члени в рівнянні та межових умовах (у задачах занять 1-6 їх немає) відповідають зовнішнім відносно системи чинникам; вони до самої системи не належать, але впливають на її рух.

Вказівки: 1) Використовуйте алгоритм самоконтролю за зразком модульної контрольної роботи (див. заняття 6). 2) Зверніть увагу, як змінюється вигляд функцій $X(x)$ та $T(t)$ внаслідок змін в умовах задачі. Які саме умови задачі визначають той або інший їх вигляд? Намалюйте та проаналізуйте графіки часової і просторової залежності розв'язків.

1.1. Знайти власні моди коливань струни довжиною l із закріпленими кінцями (знайти функції вигляду $u(x,t) = X(x)T(t)$, визначені і достатньо гладкі в області $0 \le x \le l, -\infty < t < \infty$, не рівні тотожно нулю, які задовольняють одновимірне хвильове

рівняння $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ **на проміжку** $0 \le x \le l$ **і межові умови** $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0$ **на його кінцях**). Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття 6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Знайти початкові умови (початкове відхилення і початкову швидкість) для кожної з мод.

1.2. Знайти власні моди коливань струни $0 \le x \le l$, лівий кінець якої закріплений, а правий – вільно рухається в поперечному напрямі (задача з межовими умовами $u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0$). Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття 6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл.

1.3. Знайти власні моди коливань струни $0 \le x \le l$, правий кінець якої закріплений, а лівий - вільний (задача з межовими умовами $u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=0$). Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття 6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл.

1.4. Розв’язати варіант задачі 1.1 і 1.2 для проміжку $a \le x \le b$ і тих же межових умов, відповідно $u(a,t)=0,\ u(b,t)=0$ і $u(a,t)=0,\ u_x(b,t)=0$.

Заняття 2. Власні моди коливань стержня з вільними кінцями і пружно закріпленим кінцем. Відокремлення змінних і власні моди для систем, що описуються різними рівняннями.

Поняття власних мод має смисл не лише для систем, що описуються хвильовим рівнянням, але й для інших рівнянь, що описують хвилі, - для рівняння теплопровідності та інших параболічних рівнянь, а також до певної міри і для рівнянь Лапласа, Пуассона та інших еліптичних рівнянь в частинних похідних.

Теми для обговорення:

- нульова мода та її особливості;
- зміни у вигляді власних мод при зміні вигляду рівняння;
- власні коливання лінійного осцилятора з тертям;
- процес розрядки конденсатора через активний опір (RC-коло) як тип часової поведінки системи.

Указівки: 1) Використовуйте алгоритм самоконтролю за зразком модульної контрольної роботи (див. заняття 6). 2) Зверніть увагу, як змінюється вигляд функцій $X(x)$ *та* $T(t)$ *при* *зміні умов задачі. Які саме умови задачі визначають той або інший їх вигляд? Намалюйте та проаналізуйте графіки часової і просторової залежності розв'язків.*

2.1. Знайти власні моди повздовжніх коливань тонкого стержня $0 \le x \le l$ з вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами $U_x(0,t) = 0,\ U_x(l,t) = 0$). Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

2.2. Знайти власні моди повздовжніх коливань тонкого стержня $0 \le x \le l$, рух якого описується хвильовим рівнянням з тертям ($h > 0$) або з підсиленням ($h < 0$) $u_{tt} + 2hu_t = v^2 u_{xx}$, якщо кінці стержня: а) закріплені; б) вільні. Скористатись розв'язками спектральних задач, отриманими у задачах 1.1. та 2.1. Як змінюється характер руху різних мод в залежності від параметра *h*?

2.3. Знайти власні моди одновимірного резонатора $0 \le x \le l$, в якому хвильове поле $U(x,t)$ описується рівняннями $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$ (поширення хвиль вздовж хвилеводу) або $u_{tt} = v^2 u_{xx} + \beta^2 u$ (система, положення рівноваги якої може бути нестійким) з межовими умовами $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$. Як змінюється характер руху основної та інших мод в залежності від довжини резонатора *l*? Чи є положення рівноваги $u(x,t) \equiv 0$ стійким?

2.4. Розв'язати задачу на власні моди на проміжку $0 \le x \le l$ для систем, які описуються рівняннями $u_t = a^2 u_{xx}$ (теплопровідність, дифузія) або $u_t = a^2 u_{xx} + \beta u$ (дифузія частинок, що мають скінченний час життя ($\beta < 0$) або розмножуються ($\beta > 0$)) з межовими умовами $u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0$. Скористатись готовими результатами спектральних задач. Як змінюються розв'язки з часом? Намалюйте графіки часової залежності для різних мод. Чи можлива поява розв'язків, що необмежено зростають?

2.5*. Знайти власні моди повздовжніх коливань стержня $0 \le x \le l$, правий кінець якого закріплений пружно (межова умова $u(l,t) + hu_x(l,t) = 0$, де $h > 0$), а лівий кінець: а) закріплений; б) вільний. Простежити переходи до граничних випадків закріплених та вільних кінців (див. задачі 1.1 і 2.1). Звернути особливу увагу на зміну форми основної моди, намалювати графіки основної моди для різних *h*. *Указівка: характеристичне рівняння розв'язати графічно*.

2.6*. Показати, що задача на власні моди симетричного одновимірного резонатора (струни, пружного стержня) скінченної довжини, обидва кінці якого знаходяться в однакових фізичних умовах, розпадається на дві окремі задачі: для симетричних й антисиметричних мод (відносно середини). Розглянути випадки: а) кінців, закріплених нерухомо; б) кінців, закріплених пружно, причому обидва коефіцієнти пружності однакові. Показати, що задача зводиться до вже розв'язаних простіших задач для резонаторів удвічі меншої довжини. *Указівки: 1) скористатись явним виглядом загального розв'язку рівняння на власні значення; 2) систему координат розташувати симетрично відносно середини.*

Заняття 3. Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є за системою ортогональних функцій.

Теми для обговорення:

- постановка крайової задачі для хвильового рівняння на відрізку (рівняння й межові умови однорідні), початкові умови до хвильового рівняння;
- фізичний смисл (для конкретних моделей) хвильового поля $U(x,t)$, рівняння та межових умов, початкових умов, їх кількість;
- власні моди як нетривіальні частинні розв'язки задачі, що задовольняють всі умови, крім початкових; початкові умови для окремих мод;
- набір власних мод і загальний (або формальний) розв'язок крайової задачі;
- ортогональність власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, інтеграл ортогональності, його обчислення «в лоб», користуючись явним виглядом функцій;
- знаходження коефіцієнтів загального розв'язку з початкових умов, формальна процедура знаходження виразів для коефіцієнтів розкладання по системі ортогональних функцій у вигляді інтегралів;
- два варіанти знаходження коефіцієнтів Фур'є заданої функції: а) шляхом обчислення інтегралів; б) шляхом розкладання функції за ортогональною системою функцій «вручну» (якщо це можливо) з подальшим прирівнюванням коефіцієнтів при однакових базисних функціях у лівій і правій частинах рівності.

3.1. Знайти коливання струни $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями, якщо її початкове відхилення є $\varphi(x) = hx/l$, а початкова швидкість $\psi(x) = v_0$. Обчислити інтеграл

ортогональності власних функцій та знайти квадрат норми. Чи є рух струни періодичним, тобто чи повторюється початковий стан струни через деякий час? Що зміниться, якщо хвильове поле буде описуватися рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$?

3.2. Знайти коливання струни $0 \le x \le l$, лівий кінець якої вільно рухається у поперечному напрямі, а правий закріплений, якщо у початковий момент струна проходила через положення рівноваги, маючи швидкість $\psi(x) = v_0 \sin \pi x/l$. Через який час початковий стан струни повториться?

3.3. Знайти коливання пружного стержня $0 \le x \le l$, правий кінець якого закріплений, а лівий вільний, якщо початкова швидкість дорівнює нулю, а початкове відхилення $\varphi(x) = 2h \sin^2 \pi x/4l$.

3.4*. Для заданих початкових умов загального вигляду знайдіть коливання поля у одновимірному резонаторі $0 \le x \le l$, що описується рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} + \alpha u_x$ з наступними комбінаціями межових умов: а) $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$; б) $u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0$. Знайти вигляд співвідношення ортогональності мод і вирази для коефіцієнтів Фур'є. Прослідкувати, як відбувається перехід до відповідних результатів задач 1.1 та 1.2 при $\alpha \to 0$.

Порівняти результати для випадку б) із результатами задачі 2.5*. Як змінюється набір мод зі зміною α? У чому полягає відмінність між випадками $\alpha > 0$ і $\alpha < 0$ з фізичної точки зору?

3.5.* Струну довжиною l із закріпленими кінцями у початковий момент відтягують у точці, що знаходиться на відстані a від кінця струни, і відпускають без початкової швидкості. Знайти сумарну долю енергії, що припадає на обертони. Показати, що механічна енергія струни (пружного стержня, одновимірного пружного середовища) із закріпленими або вільними кінцями дорівнює $E = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \beta(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$, де $\rho(x)$ лінійна густина маси, $\beta(x)$ - сила натягу струни (пружна стала), а в модовому представленні енергія є сумою енергій незалежних осциляторів окремих власних мод. Як зміниться цей вираз, якщо кінці закріплені пружно?

Заняття 4. Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Теми для обговорення:

- другий варіант знаходження коефіцієнтів загального розв'язку із початкових умов: шляхом розкладання функції за ортогональною системою функцій «вручну» (якщо це можливо) з подальшим прирівнюванням коефіцієнтів при однакових базисних функціях у лівій і правій частинах рівності.
- нульове власне значення у задачі Штурма-Ліувілля та нульова мода, її особливості;
- повнота й неповнота системи ортогональних функцій, її наслідки;
- як не загубити нульову моду.

4.1. **Знайти коливання пружного стержня $0 \le x \le l$, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення $\varphi(x) = h\sin 3\pi x/2l$, а початкова швидкість $\psi(x) = v_0 \sin \pi x/2l$.**

4.2. Знайти коливання пружного стержня $0 \le x \le l$, лівий кінець якого вільний, а правий закріплений, якщо початкова швидкість $\psi(x) = 2v_0 \sin(\pi x/2l)\sin(\pi x/l)$, а початкове відхилення дорівнює нулю.

4.3. Знайти коливання пружного стержня довжиною l з вільними кінцями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість $\psi(x) = v_0$. *Якщо всі знайдені вами коефіцієнти Фур'є (коефіцієнти загального розв'язку) дорівнюють нулю, поясніть, що це означає, і знайдіть, де була допущена помилка.*

4.4. Знайти коливання пружного стержня $0 \le x \le l$ з вільними кінцями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість $\psi(x) = v_0 \cos^2(\pi x/l)$.

4.5*. Показати, що результат задачі 2.5* (задача про власні моди симетричного одновимірного резонатора (струни, пружного стержня) скінченної довжини, обидва кінці якого знаходяться в однакових фізичних умовах, розпадається на дві окремі задачі для симетричних й антисиметричних мод відносно площини симетрії резонатора) залишається справедливим для будь якого симетричного резонатора, у тому числі неоднорідного всередині. Такий резонатор (без дисипації) може описуватись рівнянням вигляду $\rho(x)u_{tt} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u$, де $k(x)$, $q(x)$ - парні функції відносно середини.

Скористатись: 1) існуванням парних і непарних частинних розв'язків рівняння на власні значення (показати, що вони існують); 2) збереженням парності поля у такій системі (див. електронний конспект лекцій Частина 2, §13) або симетричністю спектральної задачі відносно заміни $x \to -x$.

4.6*. **Коливання стержня змінної жорсткості.** Тонкий стержень $a \le x \le b$ виготовлений з неоднорідного матеріалу, так що модуль Юнга змінюється вздовж стержня за законом $E = \alpha(x - x_0)^2$, де точка x_0 лежить поза межами стержня. Густина матеріалу ρ та площа перерізу стержня постійні. Знайти власні моди і власні частоти коливань стержня, встановити співвідношення ортогональності мод та розв'язати задачу про коливання стержня при початкових умовах загального вигляду, якщо: а) обидва кінці стержня закріплені нерухомо; б) один кінець закріплений нерухомо, а інший - вільний.

Заняття 5. Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Теми для обговорення:

- Постановка задач для рівняння теплопровідності, фізичний смисл межових умов у задачах теплопровідності й дифузії.
- особливості відокремлення змінних в рівнянні теплопровідності;
- неможливість безпосереднього відокремлення змінних у випадку неоднорідних межових умов, найпростіший приклад приведення межових умов до однорідних;
- характерні часи в задачах теплопровідності, часи релаксації основної і вищих мод;
- випадок, коли початкові умови виражаються через кусково-задані функції (задача 5.1);
- симетрія мод симетричного одновимірного резонатора та її прояви у задачі;
- особливості задач на стійкість положення рівноваги системи (стійкість чи нестійкість системи визначається основною модою);

5.1. В початковий момент часу ліва половина стержня з теплоізольованою бічною поверхнею має температуру T_1, а права – температуру T_2. Знайти розподіл температури при $t > 0$, якщо кінці стержня підтримуються при температурі T_0. *Указівка: подумайте, що означає «температура дорівнює нулю», що це за нуль?* **Покладіть в кінцевому результаті $T_0 = 0$ і розгляньте частинні випадки: $T_1 = T_2$ та $T_1 = -T_2$. Які члени ряду при цьому обертаються в нуль? Чому? Намалюйте графіки та порівняйте часову залежність**

температури для різних мод. Намалюйте (якісно) графіки розподілу температури вдовж стержня у різні характерні послідовні моменти часу. Що таке «малий» і «великий» проміжок часу для цієї задачі? Як характерні часи залежать від розмірів системи?

5.2. Лівий кінець стержня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею підтримується при температурі T_1, а правий — теплоізольований. Знайти розподіл температур для $t > 0$, якщо в початковий момент часу розподіл температур вздовж стержня був таким: $T_2 + T_0 \sin \pi x/2l$.

5.3. Початкова температура повністю теплоізольованого тонкого стержня $0 \le x \le l$ дорівнює $T_1 \cos \pi x/2l + T_2 \cos 2\pi x/l$. Знайти поле температур при $t > 0$. Перевірити виконання початкових умови при $T_1 = 0$ і $T_2 = 0$.

5.4. В тонкому стержні з непроникними стінками відбувається дифузія частинок, які розмножуються зі швидкістю, пропорційною концентрації (див. задачу 2.4). Визначити критичні розміри системи (при перевищенні яких концентрація частинок необмежено зростає), якщо: а) кінці є непроникними для частинок; б) концентрація на кінцях підтримується рівною нулю; в) один кінець є непроникним, а на іншому концентрація підтримується рівною нулю. *З математичної точки зору при перевищенні критичних розмірів системи тотожно рівний нулю розв'язок, що відповідає нульовим початковим умовам, стає нестійким.*

5.5.* **Власні моди коливань на згин**. Для струни існування поперечних хвиль зумовлене її натягом. Проте й за відсутності натягу для тонкого пружного стержня або пластини (гнучкої металевої лінійки), що чинить спротив згинові, існують поперечні хвилі на згин. Вони описуються рівнянням четвертого порядку $u_{tt} = -a^2 u_{xxxx}$. На відміну від лінійного закону дисперсії акустичних хвиль $\omega = v|k|$ (які описуються хвильовим рівнянням), хвилі на згин мають квадратичний закон дисперсії $\omega = \pm ak^2$. Подібні механічні збудження називають «м'якими модами», вони характерні для лінійних і планарних структур, наприклад, графену, і поверхневих хвиль. Цікаво, що квадратичний закон дисперсії $\omega = ak^2$ мають хвилі де Бройля, тобто вільна квантова частинка. Такий же закон дисперсії з нульовою енергією збудження в точці $\vec{k} = 0$ мають і деякі електронні збудження у кристалах (наприклад, магнони за відсутності зовнішнього магнітного поля).

Для *симетричних* лінійних резонаторів (фізичні умови на обох кінцях однакові!), що описуються рівнянням $u_{tt} = -a^2 u_{xxxx}$, знайти такі комбінації межових умов на кінцях вигляду $\partial_x^n u = 0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, за яких власні функції відповідної спектральної задачі ортогональні, а власні значення – дійсні. Яким фізичним умовам на кінцях відповідають такі комбінації межових умов? Фізичний зміст $\partial_x^n u$: u - зміщення, u_x - кут нахилу дотичної (малий), u_{xx} - кривизна (пропорційна моменту згину), u_{xxx} - градієнт кривизни, пропорційний силі, що діє на нескінченно малий елемент з боку сусіднього справа, u_{xxxx} - пропорційне сумі сил, що діють на нескінченно малий елемент.

5.6*. Дослідити власні моди симетричних лінійних резонаторів, що описуються рівнянням $u_{tt} = -a^2 u_{xxxx}$ з такими комбінаціями межових умов на кінцях вигляду $\partial_x^n u = 0$, $n = 0, 1, 2, 3$, для яких власні функції відповідної спектральної задачі ортогональні, а власні значення – дійсні (скористатись результатами попередньої задачі). Розглянути також кільцевий резонатор, що моделюється періодичними межовими умовами $u(x+l,t) = u(x,t)$. Знайти і всебічно проаналізувати спектр власних частот і самі моди, віднормувати їх, зобразити графічно форму основної моди і найнижчої антисиметричної моди, порівняти зі звичайними.

Заняття 6. Контрольна робота по заняттях 1–5.

Приклад завдання.

Модульна контрольна №1 (МКР-1)

До 8 балів, кожне завдання - 1 бал (якщо не вказано інше).

Варіант 1.

1. Розв'язати задачу Штурма-Ліувілля:

$$y'' = \lambda y,\ y(a) = 0,\ y(a) = 0,\ 0 \le x \le a \tag{1}$$

Виписати відповідь (власні функції, власні значення та їх нумерація). Чи знайдені **всі різні** власні функції?

2. Перевірити виконання всіх умов задачі (1) аналітично. Намалювати графіки перших чотирьох власних функцій на одній координатній площині в зручному для сприйняття масштабі. Відмітити всі характерні точки на графіках. Пояснити, яким чином з цих графіків видно, що межові умови задачі виконуються, і відмітити на графіках відповідні місця.

3. Записати інтеграл ортогональності власних функцій задачі (1) в явному вигляді. Обчислити його, коли одна з функцій відповідає найменшому власному значенню, а індекс другої функції пробігає **всі** можливі значення.

4. (2 бали). Поставити задачу математично (зверніть увагу на межові умови!) та розв'язати.

Правий кінець стержня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею підтримується при температурі T_1, а лівий — теплоізольований. Знайти розподіл температур в стержні при $t > 0$, якщо в початковий момент часу розподіл температур вздовж стержня був таким: $T_2 + T_0 \sin^2 \pi x/4l$.

5. Те ж саме, якщо в початковий момент часу стержень мав температуру T_0.

Бонус за правильне виконання всіх завдань – 2 бали.

Домашнє завдання: розв'язати задачі інших варіантів.

МОДУЛЬ 2. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА. МЕТОД ЧАСТИННИХ РОЗВ’ЯЗКІВ ТА МЕТОД РОЗКЛАДАННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ.

Заняття 7. Рівняння Лапласа у прямокутній області, особливості відокремлення змінних.

Обговорення домашнього завдання. **Тема: ортогональні системи власних функцій чотирьох задач Штурма-Ліувілля (див. задачу 1.1) і класичний тригонометричний ряд Фур’є.** Задану функцію $f(x)$ на проміжку $0 \le x \le l$ можна розкласти в ряд Фур’є за кожною з чотирьох згаданих систем ортогональних функцій, побудованих із тригонометричних функцій. В результаті отримаємо чотири різні тригонометричні ряди.

Задача. **Продовжіть суму кожного з рядів для функції $f(x) = \alpha x$ на всю числову вісь, користуючись властивостями базисних функцій; намалюйте графіки і порівняйте їх.**

Висновок: кожний з рядів є частинним випадком класичного тригонометричного ряду Фур’є, сума якого є періодичною функцією. Які саме періоди відповідають кожному з рядів? Яка саме частина повного тригонометричного базису використовується в кожному з розкладань і чому? Зверніть увагу, що парний або непарний тип продовження суми ряду Фур’є насправді визначається крайовими умовами задачі Штурма-Ліувілля. Який зв’язок існує між характером збіжності вказаних рядів і крайовими умовами, яким задовольняє функція $f(x)$? Чи співпадає сума ряду з функцією $f(x)$ на відкритому проміжку $0 < x < l$, на закритому проміжку $0 \le x \le l$?

Теми для обговорення:

- постановка задач для рівняння Лапласа в прямокутнику, фізичний смисл поля й межових умов Діріхле та Неймана в різних моделях;

- принципова рівноправність змінних (x, y) у рівнянні Лапласа і в задачі для прямокутника на відміну від змінних (x, t) в еволюційних рівняннях; протилежний характер поведінки (осцилюючий чи монотонний) розв'язків для $X(x)$ та $Y(y)$, що отримуються в результаті відокремленні змінних, зміна поведінки розв'язків для $X(x)$ та $Y(y)$ на протилежну в залежності від знаку константи відокремлення, якісне пояснення різної поведінки розв'язків (осцилююча – монотонна) безпосередньо за виглядом диференціального рівняння через знак другої похідної;
- необхідність вибору між двома варіантами відокремлення (задача Штурма-Ліувілля по x, чи по y?), ключове значення однорідності/неоднорідності межових умов по тій чи іншій змінній (по x, чи по y?) для такого вибору: *задача Штурма-Ліувілля виникає по тій змінній, по якій межові умови однорідні*;
- приведення крайової задачі загального вигляду до двох частинних задач з однорідними межовими умовами по змінній x і по змінній y шляхом розбиття розв'язку на певні частини (варіант реалізації принципу суперпозиції);
- можливість записати відповідь другої задачі, маючи розв'язок першої, шляхом простого перепозначення величин, якщо в задачі присутня певна симетрія між змінними.

7.1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, якщо ліва сторона її підтримується при температурі T_1, права – при температурі T_2, верхня - при нульовій температурі, а нижня теплоізольована.

7.2. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині розмірами a на b, дві суміжні сторони якої підтримуються при температурі T_1, а через дві інші подаються теплові потоки I_a та I_b відповідно. *Указівка. Скористайтесь досвідом задачі 3.1, а також розгляньте частинні випадки, коли один із заданих потоків дорівнює нулю. Тобто, спочатку знаходимо розв'язок при* $T_1 = 0$, $I_b = 0$. *Після цього записуємо відповідь для випадку* $T_1 = 0$, $I_a = 0$ *і відповідь до задачі в цілому.*

7.3. Знайти електростатичний потенціал всередині області, обмеженої провідними пластинами $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, якщо пластина $x = 0$ заряджена до потенціалу V, а інші – заземлені. Заряди всередині області відсутні. Розв'язком якої задачі є знайдена функція у півпросторі $x > 0$? *Указівка. Це приклад задачі для рівняння Лапласа в необмеженій області. Подумайте, яку умову слід накласти на розв'язок при* $x \to +\infty$, *щоб для* $V = 0$

задача мала лише нульовий розв'язок (в іншому разі розв'язок задачі не буде єдиним). **Ряд просумувати.** *Указівка: скористайтесь формулою для суми геометричної прогресії.*

7.4. Знайти стаціонарний розподіл температури в тонкій однорідній прямокутній пластині, яка однорідно по площі нагрівається стаціонарним зовнішнім джерелом заданої потужності, якщо температура країв пластини підтримується рівною T_0. *Указівка: підібрати простий частинний розв'язок* $w(x, y)$ *неоднорідного рівняння і звести рівняння до однорідного, перейшовши до нової невідомої функції* $u = w + \tilde{u}$. *Одночасно можна подбати про те, щоб задача для* $\tilde{u}$ *допускала відокремлення змінних без подальших перетворень. Подібні прийоми використовуються також у задачах наступних занять (див. заняття 8, 9).*

7.5**. **Ласо**. Вільна петля з тонкої вірьовки, яка не чинить спротиву згину, має початкову форму кола і вільно обертається у площині кола відносно центру з кутовою швидкістю ω. Дослідити малі поперечні коливання петлі у площині кола відносно початкового положення в системі координат, пов'язаній з петлею. Як рухається при цьому петля відносно лабораторної системи? Які з цих рухів у дійсності є коливаннями? Чи є початкова форма петлі стійкою?

Заняття 8. Еволюційні задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами: стаціонарні неоднорідності

Розв'язання задач попередніх занять ми починали з відокремлення змінних (у рівнянні і межових умовах!). Якщо межові умови задачі або рівняння є неоднорідними, то процедура безпосереднього відокремлення змінних є незастосовною, треба застосовувати інші підходи. Вони теж відносяться до методу Фур'є або методу відокремлення змінних в ширшому розумінні. Задачі з неоднорідними членами **будь-якого (тобто загального) вигляду** дозволяє розв'язувати ***метод розкладання за власними функціями***. Існують також **спеціальні випадки**, коли задачу можна розв'язати простіше, з них ми і почнемо.

Якщо, наприклад, неоднорідні члени не залежать від часу, або змінюються за гармонічним законом з деякою частотою ω, то є прості прийоми, що ведуть до розв'язку. Ці випадки мають особливе значення як з точки зору фізики відповідних процесів, так і з точки зору реалізації певних загальних математичних підходів, що розглядатимуться пізніше (метод Дюамеля, інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа, функції Гріна).

Теми для обговорення:

- **неможливість** безпосереднього відокремлення змінних в задачах з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами;
- поняття і фізичний смисл стаціонарного розв'язку в теплових і механічних моделях, необхідна (але не достатня) умова його існування – стаціонарність джерел поля;
- постановка задачі на стаціонарний розв'язок та її розв'язання;
- постановка задачі для відхилення від стаціонарного розв'язку, чим вона відрізняється від вихідної (і рівняння, і межові умови тепер однорідні (!), нові початкові умови);
- виділення стаціонарного розв'язку у вигляді окремого доданку як варіант реалізації принципу суперпозиції;
- особлива ситуація (задачі з нульовими модами): джерела стаціонарні, а стаціонарний розв'язок **не існує** (див. задачу 8.5*).

8.1. Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. *Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги.* **Намалювати графіки розподілу поля зміщень та поля напружень в положенні рівноваги.**

8.2. Кінці стержня з теплоізольованою бічною поверхнею підтримуються при температурах T_1 та T_2, початкова температура стержня T_0. Знайти розподіл температури при $t > 0$, а також стаціонарний розв'язок. За який характерний час температура виходить на стаціонарне значення? Намалювати графіки.

8.3. У стержні довжиною l з непроникною бічною поверхнею відбувається дифузія частинок (коефіцієнт дифузії D), що мають час життя τ. Через правий кінець всередину стержня подається постійний потік частинок I_0. Знайти стаціонарний розподіл концентрації та розв'язок, що задовольняє нульову початкову умову, якщо через лівий кінець частинки вільно виходять назовні й назад не повертаються. Знайти вигляд стаціонарного розв'язку в граничних випадках великих і малих τ та намалювати графіки. *Указівка. Рівняння дифузії частинок зі скінченним часом життя має вигляд:*

$$u_t = D u_{xx} - u/\tau \ .$$

Його зручно переписати через так звану довжину дифузійного зміщення $L = \sqrt{D\tau}$ *:*

$$\tau u_t = L^2 u_{xx} - u$$

Величина L має смисл характерної відстані, на яку частинки встигають зміститися (в середньому) за час свого життя. «Великі» й «малі» τ *означають в дійсності* $L \gg l$ *і* $L \ll l$ *відповідно. Останній випадок фактично означає перехід до наближення півнескінченного стержня* $-\infty < x \le l$.

8.4. Знайти коливання пружного стержня, лівий кінець якого закріплений, а до правого при $t>0$ прикладена постійна сила F_0. При $t<0$ стержень перебував у рівновазі.

8.5*. До тонкого стержня з теплоізольованою бічною поверхнею подаються через його кінці теплові потоки I_1 та I_2, початкова температура стержня T_0. Знайти розподіл температури для $t>0$. Чому стаціонарний розв'язок не існує? Який вигляд має розв'язок для великих t ? *Указівка: проаналізуйте загальний баланс тепла для всього стержня і зробіть висновки.*

Заняття 9. Задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами

Частина 1. Еволюційні задачі у випадку джерел з гармонічною залежністю від часу.

Теми для обговорення:

- фізичний смисл задачі – вимушені коливання поля в резонаторі під дією об'ємних або поверхневих сил (джерел поля);
- аналогія з вимушеними коливаннями гармонічного осцилятора під дією гармонічної сили: вимушені коливання, що встановились, і перехідний процес;
- два типи джерел поля: поверхневі й об'ємні (масові) сили (або сили реакції);
- вигляд, в якому шукаємо розв'язок $u(x,t;\omega)$ для вимушених коливань поля, що встановились під дією гармонічного джерела з частотою ω, аналогія з методом невизначених коефіцієнтів для звичайних диференціальних рівнянь;
- резонанс при вимушених коливаннях поля в резонаторі, резонансні частоти та просторовий розподіл поля в резонансі, смисл полюсів розв'язку $u(x,t;\omega)$ в комплексній площині ω та лишків в цих полюсах;

9.1. Знайти коливання струни $0 \le x \le l$, лівий кінець якої закріплений, а правий вільний, при $t>0$ під дією розподіленої сили $f(x,t) = f(x)\cos\omega t$. При $t<0$ струна

перебувала в положенні рівноваги. Розглянути частинний випадок $f(x)=f_0$. Виділити складову розв'язку, яка відповідає вимушеним коливанням, що встановились, та проаналізувати картину резонансу. Перевірити, чи переходить отриманий розв'язок у розв'язок задачі 8.1 за відповідних умов.

9.2. Знайти коливання струни, що встановились, якщо лівий її кінець рухається за законом $h\sin\omega t$, а правий закріплений. Чи спостерігається в системі резонанс? Якщо так, то на яких частотах? Зайти розподіл зміщень для випадку, коли частота зовнішньої сили наближається до однієї з резонансних частот, і намалювати графік залежності зміщень від координати. Що являє собою рух струни поблизу конкретної резонансної частоти? *Указівка. «Коливання, що встановились» - це вимушені коливання, які встановлюються через великий проміжок часу за наявності в системі малої сили тертя. Через це вони не залежать від початкових умов.* Побудувати також розв'язок, що задовольняє нульові початкові умови.

Частина 2. Метод розкладання за власними функціями в задачах з неоднорідним рівнянням

Теми для обговорення:

- суть методу розкладання за власними функціями: розв'язок та розподілені джерела поля розкладаємо за певним ортогональним базисом просторових функцій, так само розкладаємо дані початкових умов;
- коефіцієнти розкладання шуканого поля є новими невідомими функціями замість поля $u(x,t)$, вони залежать тільки від часу (в просторових задачах можливі інші ситуації) і мають смисл нормальних координат поля (не обов'язково нормованих);
- система базисних функцій для розв'язання задачі про вимушені коливання формально береться з розв'язку іншої задачі - задачі про вільні коливання поля, в якій і рівняння, і межові умови є **однорідними;** з фізичного погляду в обох задачах ідеться про різні режими коливань тієї ж фізичної системи, отже, система базисних функцій, за якою розкладається розв'язок, відповідає **власним модам цієї фізичної системи**;
- ортогональна система функцій, по якій ведеться розкладання, породжується відповідною спектральною задачею на власні функції і власні значення; властивості базисних функцій визначаються умовами цієї задачі, а отже, працюючи з системою власних функцій, можна не використовувати їх явний вигляд, а користуватись рівнянням на власні значення і крайовими умовами відповідної спектральної задачі;

- кінцевий результат розкладання – система рівнянь руху для нормальних координат поля з початковими умовами до кожного з них; фізичний смисл цих рівнянь: хвильове поле в резонаторі еквівалентне системі осциляторів;
- перший варіант реалізації методу (проходить лише при однорідних межових умовах): безпосередня підстановка в рівняння шуканого поля $u(x,t)$ і неоднорідного члена $f(x,t)$ у вигляді розвинень за власними модами;
- виконання межових умов основної задачі забезпечується за рахунок крайових умов задачі Штурма-Ліувілля на базисні функції (за умови належної збіжності ряду).

9.3. Знайти коливання струни із закріпленими кінцями під дією сили $f(x,t) = f_0 t^N$, $N > 0$ однорідно розподіленої по довжині струни. В початковий момент струна нерухома, і зміщення дорівнює нулю. Остаточні обчислення виконати для $N = 2$.

9.4. Розв'язати задачу 9.1 методом розкладання за власними функціями. Порівняти результати для коливань, що встановилися. Як залежить величина амплітуди коливань поблизу частоти резонансу на даній моді від вигляду функції $f(x)$? Розглянути випадок $f(x) = A\delta(x - x')$, де $\delta(x)$ - дельта-функція[1]. Як залежить результат від точки прикладання сили x'? Як він зміниться, якщо обидва кінці струни закріплені?

9.5.* **Теплопередача через стержень змінного перерізу.** Через лівий кінець тонкого стержня $0 \le x \le l$ змінного перерізу, бічна поверхня якого теплоізольована, подається сталий тепловий потік *I*. Правий кінець стержня підтримується при сталій температурі, що дорівнює початковій температурі стержня T_0. Знайти розподіли температури і густини потоку тепла в стержні для $t > 0$, якщо радіус змінюється вздовж стержня за законом $r(x) = r_0 \exp(-\alpha x)$, $\alpha > 0$. Поясніть можливе походження члена з першою похідною по координаті у задачі 3.4*.

Заняття 10. Задачі з неоднорідними межовими умовами загального вигляду

Два варіанти дій: (1) зведення до задачі з неоднорідним рівнянням; (2) безпосереднє розкладання за власними модами.

(1) ***Теми для обговорення:***

- суть методу: **штучно підбираємо** найпростішу функцію $w(x,t)$, яка задовольняє тільки межові умови (обидві), та виділяємо її з розв'язку $u = w + \tilde{u}$; виграш: для нової

[1] Поняття про дельта-функцію вводилося в курсі математичного аналізу; для розв'язання задачі достатньо елементарного означення і властивостей дельта-функції (див. лекції §16 п. 16.2).

невідомої функції $\tilde{u}(x,t)$ межові умови будуть однорідними; плата за цей виграш: вихідне рівняння для $u(x,t)$ є однорідним, а рівняння для $\tilde{u}(x,t)$ - неоднорідним, якщо тільки не виявиться, що $w(x,t)$ задовольняє вихідне рівняння.

- Прикладом застосування подібного перетворення в протилежному напрямі, тобто для перетворення задачі з неоднорідним рівнянням і однорідними межовими умовами в задачу з однорідним рівнянням і неоднорідними межовими умовами, може служити задача 9.4.

(2) ***Теми для обговорення:***

- у випадку неоднорідних межових умов перший варіант методу розкладання за власними функціями (див. заняття 10(2)) **не проходить** (формально дає $u(x,t) \equiv 0$);

- суть другого варіанту: за означенням $T_n(t) = \|X_n\|^{-2} \int_0^l u(x,t) X_n(x) dx$; щоб отримати рівняння для коефіцієнтних функцій $T_n(t)$, множимо рівняння на базисну функцію $X_n(x)$ та інтегруємо всі члени рівності по області зміни координати $[0, l]$;

- далі, використовуючи тобто рівняння та однорідні крайові умови задачі на базисні функції $X_n(x)$ та крайові умови основної задачі на $u(x,t)$; виконуємо інтегрування за частинами, що рівнозначно одновимірному варіанту так званої другої інтегральної формули Гріна

$$\int_a^b (uv'' - vu'')dx = (uv' - vu')_{x=b} - (uv' - vu')_{x=a} .$$

Початкові умови для $T_n(t)$ отримуємо з початкових умов на $u(x,t)$;

- хід обчислень показує, що базисні функції $X_n(x)$ не можуть бути довільними: умови спектральної задачі на $X_n(x)$ однозначно слідують з умов основної задачі, зокрема **базисні функції $X_n(x)$ мають задовольняти однорідні умови основної задачі** (в яких неоднорідні члени покладено рівними нулю), інакше неоднорідний член в рівнянні для $T_n(t)$ (він відповідає правій частині формули Гріна) не може бути виражений через дані задачі;

- другий варіант методу розкладання за власними функціями є **універсальним**: на відміну від першого варіанту методу та від класичної процедури відокремлення змінних, він придатний для джерел поля всіх видів, а саме для джерел у рівнянні (задачі типу 9.3, 9.1, 10.1), в межових умовах (типу 8.1-8.4, 9.2, 10.2-10.5) та у початкових умовах (наприклад, 3.1-3.4, 9.2, 9.3);

- парадокс невиконання межових умов та проблема неперервного примикання розв'язку рівняння до межових умов задачі.

10.1. Знайти коливання пружного стержня, якщо правий кінець його закріплений нерухомо, а до лівого при $t>0$ прикладена сила $F(t)$, шляхом зведення до задачі з неоднорідним рівнянням. Розглянути частинний випадок $F(t)=F_0e^{-\alpha t}$. При $t<0$ стержень перебував в положенні рівноваги.

10.2. Розв'язати задачу 10.1, застосувавши безпосереднє розкладання за власними модами.

10.3. При $t<0$ струна знаходилась в положенні рівноваги. При $t>0$ її лівий кінець рухається за заданим законом $y_1(t)$, а правий – за законом $y_2(t)$. Знайти коливання струни: а) шляхом зведення до задачі з неоднорідним рівнянням; б) за допомогою безпосереднього розкладання за власними модами. Який фізичний смисл має неоднорідний член в рівнянні у випадку $y_1(t)=y_2(t)$? Перевірте, що за відповідних $y_1(t)$ та $y_2(t)$ результати співпадають з результатами задачі 7.2.

10.4. Знайти розподіл електростатичного потенціалу в нескінченній смузі $0\le x\le l$, $-\infty<y<\infty$, на лівій стороні якої потенціал дорівнює нулю, а на правій приймає значення $\varphi(y)$. Ряд просумувати. Розглянути частинний випадок $\varphi(y)=A(1-e^{-\alpha|y|})$.

10.5*. Розв'язати задачу 8.5*, застосувавши безпосереднє розкладання за власними модами. Порівняти результати. ***Які особливості спектру власних мод системи*** *вказують на те, що стаціонарний розв'язок* ***не існує****, навіть якщо джерела поля стаціонарні?*

Заняття 11. Контрольна робота по заняттях 7-10.

Приклад завдання. Модульна контрольна №2 (МКР-2), до 8 балів

Варіант 1. Розв'язати дві задачі на вибір.

1. (1 бал). Знайти розподіл температури при $t>0$ в тонкому стержні довжиною *l,* правий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а лівий теплоізольований, якщо початкова температура дорівнює $\psi(x)=2\nu_0\sin^2\pi x/4l$.

2. (2 бали). Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння, що діє при $t > 0$. Кінці стержня закріплені. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було.

3. (2 бали). Варіант задачі №2: слова «під дією сили тяжіння» замінити на «під дією сили $f(x,t) = f_0 \cos \omega t$». Перевірити граничний перехід до умов задачі №2.

Бонус за принаймні одну **повністю** правильно розв'язану задачу — 4 бали.

Домашнє завдання: розв'язати задачі іншого варіанту.

Хочете розв'язувати задачі правильно? Обов'язково користуйтесь наступною інструкцією.

Як самому перевірити правильність свого розв'язку?

Розв'язавши кожну задачу, обов'язково перевірте проміжні результати і вашу відповідь.

1) ***Формальна постановка задачі.*** Чи відповідає записана вами формальна постановка (рівняння, кожна межова й початкова умова, їх число) тексту і смислу вашої задачі (уважно читати текст!)?
2) ***Спектральна задача***. Чи відповідають умови задачі Штурма-Ліувілля умовам основної задачі? Чи правильно знайдені власні функції і власні значення задачі Штурма-Ліувілля (алгоритм перевірки: див. приклад завдання МКР-1)? Чи задовольняють власні функції **всі** умови задачі Штурма-Ліувілля? Чи не пропущені якісь власні функції, чи правильно вони занумеровані? Чи є у цій задачі нульова мода? Чи були рівняння й межові умови основної задачі однорідними?
3) ***Власні моди і загальний розв'язок***. Як поводять себе отримані доданки загального розв'язку з часом (осцилюють, сталі, прямують до нуля, прямують до нескінченності)? Чи відповідає це фізичному смислу задачі? Чи є всі аргументи синусів, косинусів, логарифмів, показники експонент безрозмірними?
4) Чи всі змінні, від яких залежить шукане поле (*x,t* чи *x,y*), присутні у правій частині вашої відповіді? Чи відповідає структура відповіді структурі отриманого раніше загального розв'язку?
5) ***Відповідь***. Скільки джерел поля є у вашій задачі? Які параметри визначають їх величину? Чи входять вони у відповідь? Чи містить ваша відповідь вклади від **усіх** наявних у задачі джерел?

6) Покладіть почергово рівними нулю усі джерела, крім одного, і перевірте (по можливості) виконання початкових і межових умов для кожного з таких частинних випадків.

Якщо відповідь хоча б на один із пунктів негативна, отримана вами відповідь до задачі неправильна. Шукайте, де помилка(-ки), і виправляйте.

МОДУЛЬ 3

Заняття 12. Метод характеристик та формула Даламбера: нескінченна пряма, півнескінченна пряма та відрізок. Метод непарного продовження.

Частина 1. Вільні коливання нескінченної струни.

Теми для обговорення:

- загальний розв'язок однорідного хвильового рівняння у вигляді суперпозиції двох зустрічних хвиль

$$u(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)\,; \tag{12.1}$$

- окремі хвилі з певним напрямком поширення $u = f(x \pm vt)$ та їх властивості: незмінність форми, швидкість хвилі, хвиля зміщень та хвиля швидкостей $u_t = \pm v f'(x \pm vt)$, рівняння першого порядку $u_t \mp v u_x = 0$;
- постановка задачі про вільні коливання необмеженої струни при заданих початкових умовах, відсутність межових умов на нескінченності; знаходження «профілів хвилі» $f_1(x)$ та $f_2(x)$ через розподіли початкових відхилень і швидкостей та формула Даламбера;
- фазова площина, характеристики, вибір характерних моментів і проміжків часу, графічний спосіб побудови «кадрів» струни в послідовні моменти часу;
- аналіз руху необмеженої струни: (1) він є результатом поширення зустрічних хвиль незмінної форми $u = f_1(x - vt)$ та $u = f_2(x + vt)$ з постійною швидкістю v та їх інтерференції, в ньому чітко проявляє себе скінченність швидкості поширення сигналу; (2) хвиля переносить енергію та імпульс до нескінченно віддалених частин струни, струна є відкритою системою.

12.1. Знайти закон руху нескінченної струни й зобразити поле зміщень і поле швидкостей графічно в характерні послідовні моменти часу, якщо початкове відхилення (зміщення) має форму рівнобедреного трикутника висотою *h*, а початкова швидкість дорівнює нулю. Чи всі частини трикутника приходять у рух одразу? Відповідь поясніть.

12.2. Знайти закон руху нескінченної струни й зобразити поле зміщень і поле швидкостей графічно в характерні послідовні моменти часу, якщо початкове відхилення (зміщення) дорівнює нулю, початкова швидкість всіх точок струни на деякому відрізку довжиною l однакова і дорівнює v_0, а в усіх інших точках дорівнює нулю. В який кінцевий стан переходить струна в результаті такого процесу? *З точки зору механіки системи частинок результат є парадоксальним: у початковий момент тілу був переданий імпульс (у поперечному напрямі до струни), а в кінцевому стані струна є нерухомою, замість того, щоб рухатись рівномірно.* Розгляньте граничний випадок: $v_0 \to \infty, l \to 0$ за умови, що переданий струні імпульс залишається сталим.

Частина 2. Метод непарного продовження для півнескінченної та скінченної струни.

Крім методу Фур'є, для хвильового рівняння існують ще ***дві*** *«зачіпки», кожна з яких дозволяє просунутись вперед в задачах для півнескінченної прямої, а в деяких випадках - і для відрізка. Це ідея* ***непарного продовження*** *та наявність для хвильового рівняння* ***загального розв'язку*** (*формула* (12.1)) *у вигляді суперпозиції зустрічних хвиль. Перша можливість розглядається на цьому занятті, а друга - на наступному.*

Теми для обговорення:

- постановка задачі: порівняно з необмеженою струною додається межова умова на кінці струни, вона однорідна (це умова застосовності методу); починаємо з найпростішого варіанту, коли рівняння теж однорідне;
- загальна схема дій: за допомогою методу непарного продовження задача на півнескінченому інтервалі $x \in D$ зводиться до задачі на необмеженій прямій (крок 1), вона розв'язується (крок 2), її розв'язок за межами області D має смисл допоміжної побудови, а при $x \in D$ є розв'язком основної задачі;
- суть непарного продовження: записуємо межову умову у вигляді $w(0,t) = 0$ (тут $w(x,t)$ дорівнює u, u_x, $\alpha u + \beta u_x$ і т. п., залежно від вигляду межової умови); дані початкових

умов продовжуємо на необмежену пряму так, щоб функція $w(x,t)$ була непарною (тоді межова умова при $x=0$ виконується автоматично, внаслідок симетрії), для цього достатньо, щоб непарними були $w(x,0)$ та $w_t(x,0)$; у частинному випадку $u(0,t)=0$ дані обох початкових умов продовжуються непарним чином, а для $u_x(0,t)=0$ - парним;

- для хвильового рівняння задача на необмеженій прямій розв'язується за допомогою формули Даламбера;
- поки хвиля ще не досягла кінця струни, рух півнескінченної струни відбувається так само, як і нескінченної (це пояснює смисл моделі нескінченної струни), після цього починається фаза відбивання;
- рух півнескінченної струни в процесі відбивання є результатом інтерференції падаючої та відбитої хвиль, результат відбивання (форма відбитої хвилі) залежить від вигляду межової умови;
- узагальнення на інші задачі для хвильового рівняння: (1) в задачі на відрізку необхідно забезпечити непарність $w(x,t)$ відносно обох кінців струни; (2) якщо рівняння неоднорідне, належним чином продовжується неоднорідний член у рівнянні;
- метод допускає узагальнення на інші рівняння та багатовимірні задачі в просторі: просторова область подвоюється за рахунок відбивання в площині, що є її межею (півкуля перетворюється на кулю, половина круга – на цілий круг, і т.ін.); як і для струни, однорідна межова умова на цій площині виконується за рахунок непарності відповідної функції.

12.3. Знайти закон руху півнескінченної струни й зобразити поле зміщень і поле швидкостей графічно в характерні послідовні моменти часу, якщо початкове відхилення має форму прямокутного трикутника, причому максимальне відхилення дорівнює меншому катету (довжиною *h*), який знаходиться далі від кінця струни, ніж протилежна вершина. Початкова швидкість дорівнює нулю. Кінець струни а) вільний (відносно поперечних зміщень), б) закріплений нерухомо.

12.4. Півнескінченній струні, яка знаходилась в положенні рівноваги, в початковий момент часу в результаті поперечного удару переданий імпульс p_0 в точці $x=x_0$. Знайти аналітично та зобразити графічно форму струни та поле швидкостей в характерні послідовні моменти часу. Кінець струни: а) закріплений нерухомо; б) вільний (відносно поперечних зміщень). *Указівка: початковий розподіл швидкостей представити через δ-функцію.*

12.5. Розв’язати задачу 12.2 для випадку скінченної струни з обома закріпленими кінцями (початкова швидкість дорівнює v_0 на всій довжині струни). Розглянути також випадок, коли початкове відхилення має форму синусоїди, яка в кінцевих точках струни проходить через нуль. Показати, що отримані за допомогою формули Даламбера та за допомогою методу відокремлення змінних розв'язки є еквівалентними.

12.6*. Тонкий пружний стержень, що рівномірно рухався зі швидкістю v_0 у напрямку осі, в момент при $t=0$ налітає на жорстку нерухому стінку. Знайти рух стержня при $t>0$ у випадках: а) півнескінченного; б) скінченного стержнів. Зобразити поле швидкостей графічно в характерні послідовні моменти часу.

12.7.* **Ефект Доплера.** Вздовж нескінченної струни (лінійна густина маси ρ) з дозвуковою швидкістю $v<c$ (c – швидкість звуку на струні) при $-\infty<t<\infty$ рухається джерело заданої розподіленої зовнішньої сили, що діє на струну. В системі координат, пов’язаній з джерелом, просторовий розподіл сили залишається незмінним, а змінюється в часі за заданим законом лише її амплітуда. Знайти хвилі, що створюються на струні таким джерелом. Розглянути частинний випадок зосередженого монохроматичного джерела коливань з частотою ω.

12.8.** **Відкритий резонатор.** Лівий кінець струни закріплений нерухомо, а правий — закріплений пружно, причому крім пружної сили на правий кінець діє також сила тертя, пропорційна швидкості. Показати: (1) що власні моди такого резонатора є затухаючими; (2) що власні моди вже не є стоячими хвилями, а поле «витікає» з резонатора в напрямку правого кінця (так звані «витікаючі» моди). Знайти наближено декремент затухання витікаючих мод для випадку, коли тертя можна вважати малим. За яких значень параметрів реалізується такий випадок?

Заняття 13. Використання загального розв’язку хвильового рівняння у вигляді суперпозиції зустрічних хвиль. Нестаціонарна задача розсіяння.

Теми для обговорення:

- постановка задачі про поширення межового режиму; використання загального розв’язку хвильового рівняння $u(x,t)=F(t+x/v)+f(t-x/v)$, область визначення функцій $F(\xi)$ та $f(\eta)$; відсутність падаючої хвилі внаслідок нульових початкових умов, $F \equiv 0$; наявність переднього фронту хвилі та області перед фронтом, де хвилі немає, загальний характер руху струни;

- задача про відбивання заданої падаючої хвилі є частинним випадком задачі розсіяння (стаціонарної або нестаціонарної): *u* є сумою заданого падаючого поля і розсіяного; в нестаціонарній постановці фіксується стан системи до формального початку процесу розсіяння, а саме за означенням при $t < t_0$ маємо: (1) падаюча хвиля ще не досягла кінця струни і поширюється так, як на необмеженій струні (вона ще «не знає», що попереду є кінець струни), (2) розсіяного поля немає, тому початкові умови для розсіяного поля при $t = t_0$ нульові; в подальшому можна переходити до границі $t_0 \to -\infty$ подібно до задач на коливання, що встановилися.

13.1. Знайти розв'язок в квадратурах задачі про вимушені коливання півнескінченного стержня, який перебував у стані рівноваги, а починаючи з початкового моменту часу на кінець стержня діє задана сила *F*(*t*). *Це так звана задача про поширення межового режиму, задача для півнескінченної струни з неоднорідною межовою умовою.* ***Указівка:*** *задача відшукання форми хвилі, створеної таким джерелом, зводиться до диференціального рівняння першого порядку; проблема знаходження константи інтегрування вирішується, якщо врахувати умову неперервності хвильового поля на передньому фронті хвилі, тобто на межі областей $x > vt$ і $x < vt$.*

13.2. По півнескінченній струні $0 \le x < \infty$ при $t < t_0$ в напрямку її кінця поширюється хвиля заданої форми (падаючий «імпульс»), причому передній фронт хвилі при $t < t_0$ не досягає кінця струни. Знайти коливання струни, тобто форму відбитого імпульсу, при $t \ge t_0$ для скінченного t_0 і $t_0 = -\infty$. Кінець струни: а) закріплений жорстко; б) зазнає дії сили тертя, пропорційної швидкості. Як пояснити відсутність відбивання при певному значенні коефіцієнта тертя? *Указівка: звести до задачі про поширення межового режиму типу задачі 13.1, використати вказівку до цієї задачі та умову, що при $t < t_0$ фронт хвилі не досягає кінця струни.*

13.3. Розв'язати задачу 13.2 для випадків, коли кінець струни є: а) вільним (відносно поперечних зміщень); б) закріплений пружно. Проаналізувати, як відбувається неперервний перехід від випадку закріпленого до випадку вільного кінця з точки зору зміни форми відбитої хвилі на прикладі падаючої хвилі у вигляді прямокутного імпульсу.

13.4.** **Тертя випромінювання.** Розглянемо систему, що складається з гармонічного осцилятора, який взаємодіє з хвильовим полем. Наприклад, до нескінченної струни (лінійна густина *ρ,* швидкість хвиль *v*), положення рівноваги якої співпадає з віссю *Ox*, в точці $x=0$ прикріплена частинка маси *m*. До частинки в напрямку осі *Oy* з протилежних боків прикріплені дві однакові пружинки сумарною жорсткістю *k,* інші кінці яких закріплені нерухомо на однаковій відстані від струни. Коли частинка знаходиться в початку координат, обидві пружини розтягнуті, так що положення рівноваги частинки відносно будь-яких зміщень є стійким. Розглядаємо малі поперечні коливання системи, коли точки струни й частинка зміщуються тільки в напрямку осі *Oy*. Нехай початкові умови для струни є нульовими. Виключивши з рівнянь руху системи поле зміщень струни, показати, що рух частинки описується рівнянням гармонічного осцилятора з тертям, пропорційним швидкості, величина якого залежить від параметрів системи, зокрема від параметрів струни.

Заняття 14. Приведення лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома змінними до заданого вигляду.

Теми для обговорення:

- клас рівнянь, що підлягають класифікації на гіперболічні, параболічні та еліптичні; як записати характеристичне рівняння та знайти тип рівняння; характеристики й варіанти заміни змінних для приведення до канонічного вигляду рівнянь різних типів, техніка заміни змінних у диференціальному виразі другого порядку;
- фізичний смисл додаткових (що не містять старших похідних) членів у лінійних рівняннях, можливості виключення частини з них за рахунок заміни невідомої функції типу $u(x,t)=v(x,t)g(x)$ або $u(x,t)=w(x,t)f(t)$ за рахунок належного вибору множників g і f, зокрема для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, коли g і f мають експоненціальний вигляд;
- перелік рівнянь зі сталими коефіцієнтами (з двома незалежними змінними), які не зводяться до простіших;
- альтернативний підхід: приведення рівняння до самоспряженого вигляду (не потребує приведення до канонічного вигляду і заміни невідомої функції).

Задачі 14.1 – 14.3 ілюструють варіанти реалізації алгоритму приведення до канонічного вигляду. Задачі 14.1 та 14.3 дають приклади рівнянь, для яких приведення до канонічного вигляду дозволяє знайти загальний розв'язок.

14.1. Визначити тип рівняння $u_{xx} + 4u_{xy} + cu_{yy} + u_x = 0$, привести його до канонічного вигляду для c і знайти загальний розв'язок.

14.2. Розв'язати задачу 14.1 а) для $c = 13$ та б) для $c = 4$.

14.3. Привести до канонічного вигляду та знайти загальний розв'язок рівняння $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$.

14.4. Привести до канонічного вигляду і з'ясувати фізичний смисл рівняння $u_{tt} + 2vu_{xt} - c^2 u_{xx} = 0$.

14.5. Привести до простішого вигляду рівняння $u_t = a^2\left(u_{xx} + \alpha u_x\right) + cu$.

14.6. Привести до простішого вигляду рівняння $u_{tt} + 2hu_t = v^2\left(u_{xx} + \alpha u_x\right) + cu$, виключивши члени з першими похідними. При якому співвідношенні між параметрами це рівняння зводиться до хвильового? Чи можна виключити перші похідні, якщо $\alpha = \alpha(x)$ або $h = h(x)$?

14.7. Привести до простішого вигляду рівняння $u_{tt} = v^2\left(u_{rr} + (2/r)u_r\right) + cu$, виключивши члени з першими похідними.

14.8. Привести рівняння $u_{tt} = v^2\left(u_{rr} + (2/r)u_r\right) + cu$ до самоспряженого вигляду:

$$\rho(r)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r)u .$$

14.9. Привести до самоспряженого вигляду (див. задачу 14.8) рівняння, вказане в задачі 14.5. Якій фізичній системі може відповідати отримане рівняння? *Зверніть увагу, що вихідне рівняння має сталі коефіцієнти і виглядає як рівняння, що описує рух просторово однорідного середовища, в той час як вигляд кінцевого рівняння відповідає неоднорідному середовищу. Це пояснює можливе походження члена αu_x у вихідному рівнянні, який зумовлює нееквівалентність двох протилежних напрямків поширення хвиль в такій системі.*

14.10.** **Батіг.** Рівняння $\rho(x)(U_{tt} + 2hU_t) = a^2\left(\rho(x)U_x\right)_x$ описує поширення хвиль в неоднорідному середовищі (наприклад, стержень змінного перерізу) за наявності тертя. Нехай $\rho(x) = \exp(-2ax)$ (модель типу батога). З'ясувати, при якому співвідношенні параметрів це рівняння точно зводиться до хвильового рівняння в однорідному середовищі, та знайти загальний розв'язок для цього випадку. В чому ж полягає ефект батога?

Заняття 15. Симетрія розв'язків крайових задач та власних мод.

Теми для обговорення:

- відбивання в площині (або інверсія) як операція симетрії фізичної системи, відповідна симетрія математичної моделі (остання визначається однорідними членами рівняння та однорідними членами межових умов); наслідки симетрії для неоднорідної крайової задачі, що має єдиний розв'язок;
- наслідки симетрії системи для відповідної однорідної крайової задачі на власні моди, симетричні та антисиметричні моди симетричного резонатора, ділення симетричного резонатора навпіл.

15.1. Знайти потенціал точкового заряду, який знаходиться на відстані d від плоскої поверхні заземленого нескінченного металевого електрода.

15.2. Для умов задачі 13.3б (півнескінченна струна з пружно закріпленим кінцем) побудувати продовження початкових умов загального вигляду на нескінченну пряму і розв'язати задачу за допомогою формули Даламбера.

15.3. Знайти окремо симетричні та окремо антисиметричні власні моди симетричного одновимірного резонатора, наприклад, струни, кінці якої знаходяться в однакових фізичних умовах, для таких випадків: а) кінці закріплені нерухомо; б) кінці пружно закріплені, причому обидва коефіцієнти пружності однакові, обмежитись тільки симетричними модами; простежити граничні переходи до протилежних випадків закріплених та вільних кінців, звертаючи особливу увагу на те, як змінюється форма основної моди, намалювати графіки. *Указівка: систему координат розташувати симетрично відносно середини струни.* Користуючись результатами цієї задачі, поясніть, чому в ряді розглянутих раніше задач на метод відокремлення змінних певна частина коефіцієнтів загального розв'язку обертається в нуль, а певна частина - ні.

15.4. Розв'язати задачу 15.3 для випадків: а) вільних кінців; б) пружно закріплених кінців, причому обидва коефіцієнти пружності однакові, знайти тільки антисиметричні моди; простежити граничні переходи до протилежних випадків закріплених та вільних кінців. Моди віднормувати. Намалювати графіки для кількох перших мод.

15.5. Розділимо кожен із симетричних резонаторів, описаних в задачі 15.3, навпіл по площині симетрії, яка проходить через середину резонатора. Нехай на цій площині виконується одна з двох умов: а) поле зміщень дорівнює нулю; б) похідна по нормалі до площини симетрії дорівнює нулю. Які власні моди відповідають резонатору, що є половиною цілого, як вони співвідносяться з модами цілого (подвоєного) резонатора? Чи можна розповсюдити отриманий результат на симетричні 2D та 3D резонатори: половину круга, чверть круга, половину циліндра, півкулю і т.п.?

15.6. Знайти власні функції оператора Лапласа з умовою $u = 0$ на межі для двовимірної області у вигляді рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою довжиною a.

15.7.* Знайдіть функції Гріна для півнескінченної струни з пружно закріпленим кінцем, які дозволяють записати розв'язки задач 15.2 та 13.3б.

Заняття 16. Найпростіші задачі на власні значення з кількома змінними та крайові задачі з трьома-чотирма змінними.

На цьому занятті відпрацьовуються ситуації, що виникають при застосуванні методу відокремлення змінних у задачах з $n \geq 3$ змінними. Як показує досвід, в процесі відокремлення декількох змінних дуже легко втратити орієнтацію. Тому наполегливо рекомендуємо дотримуватися двох простих правил:

1) *розділяти $n \geq 3$ змінних виключно поетапно «методом половинного ділення»: за один раз - тільки на 2 групи змінних (ні в якому разі не на 3 або 4 одночасно), наприклад, час і координати, радіус і сферичні кути тощо (приклад - задача 9.2);*

2) *при розділенні задачі на власні значення з кількома змінними на задачі меншої розмірності вводити окремий спектральний параметр для кожної такої нової задачі, а власне значення основної задачі виражати через них (приклад - задача 16.1).*

16.1. Розв'язати задачу на власні функції та власні значення для оператора Лапласа для прямокутника зі сторонами *a* та *b* з однорідною умовою Діріхле (Неймана) на його сторонах.

16.2. Знайти поперечні коливання прямокутної мембрани зі сторонами l_1 та l_2 із закріпленими краями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість усіх точок мембрани однакова і дорівнює v_0.

16.3. Знайти розподіл електростатичного потенціалу всередині прямокутного паралелепіпеда з провідними стінками, якщо його бічні грані та верхня основа заземлені, а нижня основа заряджена до потенціалу *V*.

16.4. Знайти температуру куба з ребром *l*, якщо в початковий момент часу він був рівномірно нагрітий до температури T_0 , а температура його поверхні підтримується рівною T_1.

16.5.* Знайти розподіл температур в однорідній прямокутній пластині, якщо дві протилежні сторони її (довжиною *a*) теплоізольовані, одна з інших сторін (довжиною *b*) підтримується при температурі T_1, а через другу подається заданий стаціонарний (або нестаціонарний) неоднорідно розподілений тепловий потік. В початковий момент часу пластина була рівномірно нагріта до температури T_1. *Скористатись методом розкладання за власними функціями.*

16.6.* Знайти розподіл температур в однорідному півнескінченному прямокутному бруску перерізом *a на b*, якщо його бічні сторони підтримуються при температурі T_1, а на торці підтримується заданий стаціонарний (або нестаціонарний) неоднорідний розподіл температур. В початковий момент часу брусок був рівномірно нагрітий до температури T_1. *Скориставшись методом розкладання за власними функціями, звести задачу до відомої одновимірної задачі на півнескінченній прямій.*

Заняття 17. Підсумкова контрольна робота за перший семестр курсу.

Приклад завдання.

Розв'язати дві задачі на вибір. Максимальна оцінка — 16 балів.

1. **(2 бали, зараховується лише повністю правильно розв'язана задача).** Знайти коливання пружного стержня $0 \le x \le l$, лівий кінець якого вільний, а правий закріплений, якщо початкове відхилення дорівнює $\varphi(x) = h\cos \pi x/l$, а початкова швидкість дорівнює $\psi(x) = v_0 \cos 3\pi x/2l$.

2. **(3 бали).** Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, якщо дві протилежні сторони її (довжиною *a*) підтримуються при температурі T_1, а через дві інші (довжиною *b*) подаються теплові потоки лінійною густиною I_1 та I_2.

3. **(5 балів).** Знайти симетричні та антисиметричні (відносно середини струни) моди коливань однорідної обмеженої струни з пружно закріпленими кінцями, якщо фізичні умови на обох

кінцях однакові. Показати існування граничного переходу до результатів для струни з вільними та закріпленими кінцями.

Бонус за принаймні одну повністю правильно розв'язану задачу — 8 балів.

Перш ніж здати роботу, обов'язково перевірте свій розв'язок і відповідь, як указано в інструкції до МКР-2 «Як самому перевірити правильність свого розв'язку?».

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЗАЛІКУ
на 60-75 балів

Теорія: лекції Частина І, §§ 3,4. Зразки розв'язання задач – див. список на с. 3.
Типові задачі, що розв'язувались у класі й удома:

- №№ 3.1, 3.2, 4.1, 4.2;
- №№ 8.1, 8.2, 8.4, 9.2.

Наступні задачі перевіряють, чи розумієте ви, що означає **ортогональність власних мод** на практиці, і як нею треба користуватись при розв'язанні задач.

Д1. В початковий момент часу тонкий стержень $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею має температуру $T_0 \sin 3\pi x/2l$. Лівий кінець стержня підтримується при температурі T_2, а правий теплоізольований. Знайти стаціонарний розподіл температури та розподіл температури при $t > 0$.

Д2. Початкова температура тонкого стержня $0 \le x \le l$, кінці якого підтримуються при нульовій температурі, дорівнює $T_1 \sin \pi x/l + T_2 \sin \pi x/2l$. Знайти поле температур при $t > 0$.

ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ОБОВ'ЯЗКОВІ ЗАДАЧІ НА ДРУГИЙ СЕМЕСТР КУРСУ

Задачі, виділені **жирним шрифтом,** розв'язуються в аудиторії як зразки. Не закінчені чи не розв'язані в аудиторії задачі і решта задач кожного заняття є завданням додому. Всі задачі без зірочок є обов'язковими. Бали для оцінки понад 89 дають тільки задачі, відмічені зірочками (на ваш вибір), 1 зірочка - однин бал, задача з двома зірочками – 4 бали. З приводу можливих підходів до цих задач можна і потрібно консультуватися з викладачем.

МОДУЛЬ 4.

Заняття 1. Рівняння Лапласа в полярних координатах: відокремлення змінних, власні функції оператора Лапласа на одиничному колі.

Необхідна попередня інформація:

- фізичний смисл рівняння Лапласа та межових умов до нього на прикладі задач теплопровідності, електростатики, гідродинаміки;
- основні формальні постановки задач, задачі Діріхле та Неймана;
- полярні координати, їх означення, геометричний смисл, координатні лінії, параметри Ламе, якобіан переходу від декартових координат (x, y) до полярних (ρ, φ);
- оператор Лапласа в полярних координатах, його структура, розмірність, точки, в яких він не існує;

Теми для обговорення:

- відокремлення змінних у межових умовах: чому задача для круга розв'язується в полярних координатах?
- процедура відокремлення змінних у рівнянні Лапласа в полярних координатах;
- збереження (порівняно з задачею для прямокутника) загального характеру поведінки розв'язків: осциляції по одній змінній, монотонна поведінка – по іншій;
- поява необмежених в нулі розв'язків рівняння, а також розв'язків, необмежених на нескінченності;
- необхідність використання умов, які явно не фігурують в умові задачі, зокрема, умови обмеженості розв'язку при $\rho \to 0$;

- порівняння задач для сектора та круга з простішим аналогом – задачею для прямокутника;
- нова особливість, що виникає в задачах для кругових областей: необхідність використання умови періодичності по куту φ (циклічна межова умова), яка явно не фігурує в умові задачі, її зв'язок з вимогою однозначності шуканого поля як функції точки простору;
- особливості задачі на власні функції оператора Лапласа на одиничному колі порівняно з задачею Штурма-Ліувілля на відрізку: еквівалентність умови періодичності по куту φ двом (чому?) крайовим умовам в задачі на відрізку, наявність нульового власного значення та двократного виродження для ненульових власних значень;
- варіанти вибору та нумерації кутових функцій, їх фізичний смисл як мод кільцевого резонатора, власні функції оператора Лапласа на одиничному колі як базис класичного тригонометричного ряду Фур'є;
- причини появи необмежених в нулі розв'язків та їх фізичний смисл: при $\rho = 0$ якобіан переходу до полярних координат обертається в нуль, а оператор Лапласа в полярних координатах не існує, таким чином втрачається інформація про відсутність джерел в точці $\rho = 0$. Точкові джерела (точкові на площині!), розташовані в центрі круга, і є причиною появи необмежених в нулі розв'язків.

1.1. Знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса *a*, на межі якого потенціал приймає значення $u = 2Ax^2 + 2By^2$, де $A \neq B$ − сталі.

Новим у цій задачі є поява умови періодичності розв'язку по φ. Обговорити її зв'язок з топологією прямокутної області, що відповідає кругу, в площині з декартовими осями ρ, φ. Обговорити постановку спектральної задачі на кутові функції, варіанти вибору системи кутових функцій, їх симетрію, варіанти запису загального розв'язку. Обговорити поведінку радіальних функцій в нулі та на нескінченності, використання умови обмеженості потенціалу в нулі, особливості застосування умови обмеженості (поля, а не потенціалу) на нескінченності у зовнішніх крайових задачах на площині. Показати, що логарифмічний розв'язок відповідає наявності точкового джерела (заряду, джерела тепла) в точці $\rho = 0$.

1.2. Розв'язати рівняння Лапласа всередині кільця (внутрішній радіус дорівнює *a*, зовнішній - *b*), якщо: а) на внутрішньому колі $\rho = a$ потенціал приймає значення $f(\varphi)$, а на зовнішньому колі $\rho = b$ потенціал дорівнює нулю; б) на внутрішньому колі $\rho = a$ потенціал приймає значення $f_1(\varphi)$, а на зовнішньому колі $\rho = b$ потенціал $u = f_2(\varphi)$. *Указівка: в силу лінійності задачі діє принцип суперпозиції: розв'язок є сумою розв'язків для частинних випадків:* $f_1(\varphi) = 0$ *і* $f_2(\varphi) = 0$. *Див. також указівку до задачі 3.2.*

1.3. Розв'язати задачу для рівняння Лапласа в круговому секторі $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$, **якщо на стороні** $\rho = a$ **потенціал приймає значення** $f(\varphi)$, **а на інших − нульове значення.**

У площині з декартовими осями ρ, φ дана задача є задачею для прямокутника. У цьому її подібність до задачі Діріхле для прямокутника (яка розв'язується в декартових координатах). Проте на стороні прямокутника $\rho = 0$ *відсутня явно задана межова умова, натомість з'являються необмежені при* $\rho \to 0$ *частинні розв'язки, яких у декартових координатах не було. Як і в задачі для круга, причини появи цих розв'язків пов'язані з незаконністю використання полярних координат у точці* $\rho = 0$. *У даній задачі обмеженість розв'язку при* $\rho \to 0$ *формально випливає з вимоги неперервності розв'язку в замкненій області* $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$.

1.4*. Розв'язати задачу для рівняння Лапласа в круговому секторі $a \le \rho \le b$, $0 \le \varphi \le \alpha$, якщо на стороні $\varphi = 0$ потенціал приймає значення $f(\rho)$, а на інших − нульове значення. *Указівка:в радіальному рівнянні зробити заміну змінної* $\rho = a \cdot e^s$. *На відміну від аналогічних задач для прямокутної області в декартових координатах, де змінні x і y фактично рівноправні, в полярних координатах задача для кругового сектора з однорідними межовими умовами по куту φ і задача з однорідними межовими умовами по радіусу ρ приводять до істотно різних спектральних задач.*

Чи можна внутрішній радіус сектора *a* спрямувати до нуля? До якої задачі в декартових координатах можна звести подібну задачу для сектора $0 \le \rho < \infty$?

1.5**. Відкритий резонатор-2. Лівий кінець струни закріплений нерухомо, а правий — закріплений пружно, причому крім пружної сили на правий кінець діє також сила тертя, пропорційна швидкості (система, описана в задачі 12.8** за попередній семестр). Розв'язати задачу про вільні коливання такої струни з початковими умовами загального вигляду за допомогою інтегрального перетворення Лапласа, знайти функцію Гріна, отримати її розкладання за власними модами і показати, що вони є витікаючими.

Заняття 2. Зовнішні задачі для рівняння Лапласа в полярних координатах і задача Неймана

Теми для обговорення:

- умови на поведінку розв'язків на нескінченності в зовнішніх крайових задачах, неможливість (взагалі кажучи) використання умови обмеженості розв'язку;
- постановка і прийоми розв'язання задач з неоднорідною умовою на нескінченності;
- використання ідеї парного (непарного) продовження розв'язку за межі області (див. заняття 13 першого (4-го) семестру).
- особливості внутрішньої задачі Неймана, питання єдиності розв'язку, умови існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана.

2.1. На плоскій поверхні землі встановлений довгий ангар, що має форму половини циліндра радіуса *a* (циліндр розділено по площині, що проходить через його вісь). У горизонтальному напрямку перпендикулярно до осі ангара дме вітер зі швидкістю v_0. Вважаючи його потоком ідеальної нестисливої рідини, знайти розподіл потенціалу швидкості потоку та поле швидкостей. *Указівки:1) потенціал пов'язаний з полем швидкостей співвідношенням* $\vec{v} = \vec{\nabla} u$ *та задовольняє рівняння Лапласа; 2) звести задачу до задачі про обтікання цілого циліндра однорідним потоком, користуючись її симетрією; 3) виділити з розв'язку доданок, що відповідає потенціалу однорідного потоку.*

2.2. Знайти стаціонарний розподіл температур у товстостінній трубі (внутрішній радіус дорівнює *a*, зовнішній − *b*), якщо через її внутрішню поверхню подається рівномірно розподілений тепловий потік густиною j_1, а через зовнішню – густиною j_2. За якої умови на j_1 і j_2 задача має розв'язок? Який її фізичний смисл? Який розв'язок отримується, якщо спрямувати *a* до нуля для фіксованого j_2, або навпаки, *b* до нескінченності для фіксованого j_1? Дайте фізичну інтерпретацію логарифмічного частинного розв'язку рівняння Лапласа в полярних координатах.

2.3. Однорідне середовище обмежене нескінченною циліндричною поверхнею радіуса a. Через поверхню подається неоднорідно розподілений стаціонарний тепловий потік заданої величини, причому в напрямі осі циліндра густина потоку є сталою. Знайти стаціонарний розподіл температур у середовищі для випадку, коли середовище займає внутрішню відносно циліндричної поверхні область. Чи завжди задача має розв'язок? Від чого це залежить? Чи є розв'язок єдиним?

2.4. Скористатись розв’язком задачі 1.2а і розглянути частинний випадок, коли на одній половині внутрішнього кола $\rho = a$ потенціал приймає значення u_1, а на другій його половині u_2; на зовнішній межі $\rho = b$ потенціал залишається рівним нулю. *Указівки: 1) розподіл потенціалу на межі можна розкласти на суму симетричної і антисиметричної частин відносно діаметра, що розділяє половини кола; 2) розв’язання задачі можна спростити, використавши симетрію кутових функцій і симетрію джерела і вибравши зручний напрям полярної осі. Якою є симетрія джерела? Які саме кутові функції дають ненульовий внесок в розв’язок? Якою є їх симетрія, і якою є симетрія кутових функцій, для яких коефіцієнти загального розв’язку дорівнюють нулю? Чи можна було передбачити це з міркувань симетрії, не розв’язуючи задачі?*

2.5*. Розв'язати задачу 2.3 за умови, що середовище займає зовнішню відносно поверхні область. Яку умову треба накласти на розв'язок на нескінченності? Спрямуйте a до нуля так, щоб на фіксованій відстані від осі поле температур у кожній точці залишалось незмінним і дайте інтерпретацію необмежених в нулі розв'язків рівняння Лапласа. Подібний же перехід, але при $a \to \infty$, зробіть у попередній задачі і дайте інтерпретацію розв'язків рівняння Лапласа, не обмежених на нескінченності.

Заняття 3. Рівняння Пуассона в полярних координатах, розкладання за власними функціями оператора Лапласа на одиничному колі в задачах з кількома змінними.

Теми для обговорення:

- симетрія власних функцій оператора Лапласа на одиничному колі (задачі 1.3 і 3.1);
- симетрія джерела і симетрія розв'язку, використання скороченого базису власних функцій;
- застосування методу розкладання за кутовими власними функціями;
- циліндрична система координат (ЦСК), оператор Лапласа в ЦСК.

3.1. Розв’язати задачу для рівняння Пуассона $\Delta u = -f$ в крузі радіуса *a* з однорідною умовою Неймана на його межі, якщо в одній із половин круга, розділених діаметром, $f = 1$, а в іншій $f = -1$. Чи має розв'язок така задача, якщо в одній половині $f = 1$, а в іншій $f = 0$? *На прикладі цієї задачі і домашньої задачі 2.4 обговорити симетрію кутових* *власних функцій і можливість використання скороченого базису, враховуючи симетрію джерел поля.*

3.2. Розв'язати задачу для рівняння Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=-2xy$ в кільці $a\le\rho\le b$ з однорідною умовою Неймана на межі області. 1) *Підібрати вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння, виходячи з явного вигляду неоднорідного члена. 2) Щоб розв'язати неоднорідну крайову задачу для радіального рівняння, зручно побудувати і використати два частинні розв'язки однорідного рівняння, один з яких задовольняє однорідну крайову умову при $\rho=a$, а другий – при $\rho=b$. Те ж саме стосується задач 1.2 і 2.4. Побудовані за цим принципом розв'язки однорідного рівняння зручно використовувати для розв'язання будь-яких неоднорідних крайових задач (лінійних другого порядку).*

3.3. Знайти електростатичний потенціал, що задовольняє рівняння Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=-4x^3/\rho^7$ в області, що є зовнішньою до круга радіуса a, якщо на межі області нормальна складова напруженості поля дорівнює нулю, а на нескінченності потенціал прямує до нуля.

3.4. За допомогою розкладання за кутовими функціями знайти розподіл температур при $t>0$ в однорідній тонкостінній трубі (тобто в циліндричній оболонці, пустій всередині) радіуса a і довжиною h, один з країв якої підтримується при температурі $T_1=0$, а через інший при $t>0$ подається заданий неоднорідно розподілений стаціонарний тепловий потік. Тепловіддачею з поверхні труби можна знехтувати. В початковий момент часу труба була рівномірно нагріта до температури $T_1 = 0$. Проаналізувати результат у граничному випадку $h\gg a$.

Заняття 4. Контрольна робота на заняття 1-3 (0,5 пари). Циліндричні функції: аксіально симетричні задачі.

Теми для обговорення:

- кругла мембрана як двовимірний аналог струни;
- специфіка сингулярної спектральної крайової задачі по полярному радіусу, що виникає в задачі для круга, побудова ортогональної системи радіальних функцій на основі функцій Бесселя нульового порядку;
- інтеграл ортогональності та розкладання заданої функції в узагальнений ряд Фур'є;
- як уникнути помилок, пов'язаних з існуванням нульового власного значення.

4.1. Знайти вільні коливання круглої мембрани радіуса *a* із закріпленим краєм, якщо у початковий момент часу мембрана знаходилась у положенні рівноваги, а всі її точки мали однакову швидкість v_0. *Указівка: скористайтесь симетрією мембрани і її початкового стану.*

4.2. Знайти електростатичний потенціал у заземленій нескінченній металевій трубі $0 \le \rho \le a$, $-\infty < z < \infty$, всередині якої на площині $z = 0$ знаходиться однорідно розподілений поверхневий заряд густиною *σ*.

4.3. Знайти температуру теплоізольованого тонкого диска радіуса *a*, якщо в початковий момент часу він має температуру: а) $T_1 = const$; б) $T_1(\rho)$.

4.4*. Однорідний тонкий диск радіуса *a*, що мав температуру T_0, при $t > 0$ однорідно по площі нагрівається стаціонарним потоком світла інтенсивності *I*, яке повністю поглинається диском. Методом розкладання за власними функціями знайти зміну поля температур у диску при $t > 0$, якщо край диска: а) підтримується при температурі T_0; б) теплоізольований. Тепловіддачею через плоскі поверхні диска можна знехтувати.

4.5*. Однорідний тонкий диск радіуса *a* розігрівається через край рівномірно розподіленим тепловим потоком, повна величина якого *W*. Знайти поле температур у диску при $t > 0$, якщо його початкова температура дорівнює T_0. Тепловіддачею через плоскі поверхні диска можна знехтувати. *Указівка: скористайтесь досвідом розв’язання аналогічної задачі для відрізка (див. задачу 8.5* за попередній семестр).*

Заняття 5. Циліндричні функції: задачі на власні функції оператора Лапласа для круга загального вигляду.

Теми для обговорення:

- варіанти вибору власних функцій оператора Лапласа для круга і їх фізичний зміст;
- власні функції оператора Лапласа для круга як приклад ортогональної системи функцій кількох змінних; розкладання в узагальнений ряд Фур'є за власними функціями багатовимірної спектральної задачі.

5.1. Знайти поле температур при $t > 0$ у необмеженому круговому циліндрі $0 \le \rho \le a$, якщо в початковий момент його температура дорівнювала $2T_0\, xy/a^2$, а температура поверхні підтримується рівною нулю.

5.2. а) Знайти стаціонарні стани квантової частинки у двовимірній потенціальній ямі з непроникними стінками у формі круга радіуса *a*. Кутові функції можна вибрати або дійсними, або комплексними; які стани ми отримаємо в залежності від цього? Які фізичні величини мають певне значення у таких станах окрім енергії? Як розподілені густина ймовірності і густина потоку ймовірності в різних станах?

б) Знайти, як змінюється з часом хвильова функція частинки $\psi(\rho,\varphi,t)$ в такій ямі, якщо стан частинки у початковий момент описується хвильовим пакетом загального вигляду $\psi(\rho,\varphi,0)=f(\rho,\varphi)$.

5.3. Розв’язати задачу про охолодження тонкого диска радіуса a з теплоізольованими плоскими поверхнями, якщо дві його половини, розділені діаметром, мають початкові температури T_1 і T_2. Край диска підтримується при нульовій температурі. *Указівка: Розкладіть початкове поле температур на симетричну й антисиметричну частини і скористайтесь принципом суперпозиції; використайте скорочений базис кутових функцій відповідно до симетрії кожного із джерел (див. задачі 2.4 і 3.1).*

5.4*. Кругла мембрана радіуса a натягнута на жорсткий обруч. Обруч коливається за заданим законом з частотою ω, внаслідок чого коливання мембрани встановилися. У момент часу $t=0$ обруч раптово зупиняється в положенні $u=0$. Знайдіть закон руху мембрани до і після зупинки обруча, якщо до зупинки обруча він рухався за законом:

а) $u(a,\varphi,t)=u_0\dfrac{x}{a}\cos\omega t$ - коливання навколо осі Oy;

б) $u(a,\varphi,t)=u_0\dfrac{y}{a}\sin\omega t$ - коливання навколо осі Ox;

в) $u(a,\varphi,t)=u_0\dfrac{x}{a}\cos\omega t+u_0\dfrac{y}{a}\sin\omega t$ - як рухався обруч у цьому випадку?

Дослідіть також систему на резонанс. Як треба рухати обручем, щоб спостерігати конкретну власну моду коливань мембрани? *Указівка: скористайтесь досвідом розв'язання задачі 9.2 за І семестр.*

Заняття 6. Циліндричні функції: задачі для циліндра.

При перевірці домашнього завдання обговорити використання в задачах 5.3, 5.4 симетрії і скороченого базису власних функцій, виходячи із симетрії даних задачі (джерел поля).

Теми для обговорення:

- зведення тривимірної задачі на власні значення для оператора Лапласа для циліндра до двох незалежних простіших задач: одновимірної по z та двовимірної задачі для круга; незалежність відповідних рухів квантової частинки та поняття складеної системи, що є сукупністю незалежних підсистем;
- «блочне мислення» в задачах з багатьма змінними (принцип "коробочка в коробочці"), основа – оперувати власними функціями багатовимірних спектральних задач як цілісними об'єктами, що мають певні властивості і набір індексів (квантових чисел;
- ортогональність власних функцій оператора Лапласа в багатовимірній області довільної форми, розкладання заданої функції в узагальнений ряд Фур'є, ортогональність з вагою як наслідок переходу до криволінійних координат;
- використання скороченого базису власних функцій оператора Лапласа для круга та циліндра в задачах з джерелами певної симетрії.

6.1. Розв'язати задачу на власні функції та власні значення оператора Лапласа для кругового циліндра радіуса *a* та висоти *h* з однорідними межовими умовами: на бічній поверхні та нижній основі − Діріхле, на верхній основі − Неймана. Розглянути частинний випадок аксіально симетричних власних функцій.

6.2. Знайти спектр енергій та хвильові функції частинки, що рухається всередині циліндра з непроникними стінками радіуса a: а) необмеженого по довжині; б) скінченної довжини h. Яка відповідність існує між стаціонарними станами у обмеженому і необмеженому циліндрах? Намалюйте, як залежать енергії стаціонарних станів від модуля хвильового вектора, зокрема у випадку $h \gg a$.

6.3. Радіус однорідного циліндра *a*, висота *h*; його нижня основа і бічна поверхня підтримуються при нульовій температурі, а верхня основа теплоізольована. Знайдіть розподіл температури в циліндрі при $t > 0$ для довільного початкового розподілу температури $u\big|_{t=0} = F(\vec{r})$. Скористатись результатами задачі 6.1.

6.4. Радіус однорідного циліндра *a*, висота *h*; його бічна поверхня підтримується при нульовій температурі, а верхня основа теплоізольована. Знайдіть:

а) розподіл температури, що був у циліндрі при $t < 0$, якщо на нижній основі при $-\infty < t < 0$ підтримувався заданий розподіл температури $u\big|_{z=0} = f(\vec{\rho})$;

б) розподіл температури в циліндрі при $t > 0$, якщо **при $t = 0$ джерело нагріву нижньої основи вимикається, і у подальшому її температура підтримується рівною нулю.**

6.5. Розв'язати задачу 6.4 для випадку, коли $u\big|_{z=0} = 2T_0(y/a)^2$, де y — декартова координата точки на основі циліндра.

6.6*. Всередині циліндра (радіуса a, висота h) з жорсткими стінками знаходиться газ, швидкість звуку в газі c. До моменту $t=0$ газ знаходиться у стані спокою відносно циліндра, а вся система рухається рівномірно зі швидкістю $\vec{v}_0$. В момент $t=0$ циліндр раптово зупиняється. Знайти розподіл потенціалу швидкостей та поле швидкостей газу при $t>0$. *Вказівки: 1) потенціал пов'язаний з полем швидкостей співвідношенням* $\vec{v} = \vec{\nabla} u$ *і задовольняє скалярне хвильове рівняння в просторі, змінні частини густини й тиску пропорційні похідній* u_t*; 2) показати, що задача зводиться до сукупності двох частинних випадків орієнтації вектора* $\vec{v}_0$*: а) паралельно осі циліндра; б) перпендикулярно осі циліндра.*

6.7**. **Моди галереї, що шепоче** (*англ.* – whispering gallery, *рос.* – шепчущая галерея). За звичайних умов людина розрізняє тихий шепіт на відстані не більше кількох метрів. Проте у спорудах, що мають кільцеву зовнішню стіну (або у склепінчастих приміщеннях) це обмеження може вражаючим чином зникати: послаблення звуку з відстанню ніби не відбувається. В результаті на відстані в десятки метрів шепіт можна чути так, ніби людина, що говорить, стоїть поруч. Це так званий ефект галереї, що шепоче. Пояснюється він тим, що у тривимірній системі замість просторового виникає одновимірний (або поверхневий) режим поширення хвиль. При цьому роль геометричного фактора, пов'язаного з розширенням фронту хвилі, зникає (або значно послаблюється). Цей ефект зумовлений особливостями певної частини власних мод системи.

Існує багато реальних 3-D систем, де реалізуються одновимірні режими поширення хвиль: оптичний резонатор лазера (лінійний або кільцевий), діелектричний світловод, замагнічений квантовий двовимірний електронний газ в обмеженому зразку (крайові стани) та ін. На межі розділу середовищ можуть існувати поверхневі хвилі (наприклад поверхневі плазмони в металах). На відміну від подібних випадків, існування мод галереї, що шепоче, зумовлені виключно кривизною межі.

Проаналізувати точні розв'язки рівняння Гельмгольца для моделі 2-D резонатора у вигляді круга, знайти частину власних мод, що відповідає за вказаний ефект, проаналізувати їх структуру та знайти наближений вигляд, користуючись аналогіями із задачами квантової механіки.

Заняття 7. Циліндричні функції 3. Модифіковані функції Бесселя.

Теми для обговорення:

- як відрізняти задачі, в яких з'являються модифіковані функції Бесселя;
- основні властивості модифікованих функцій Бесселя, подібне й відмінне між звичайними функціями Бесселя і модифікованими, аналогія з синусами-косинусами і гіперболічними функціями.

7.1. Основи циліндра радіуса *a* і висоти *h* ($0 \le z \le h$) теплоізольовані, а на бічній поверхні підтримується заданий розподіл температур $u = f(z)$, де $f(z)$- функція загального вигляду, або $f(z) = T_0 \sin^2 \dfrac{\pi z}{h}$. Знайти: а) стаціонарний розподіл температур у циліндрі; б) розподіл температур у випадку нульової початкової умови. *Зауваження: у випадку рівняння Лапласа в прямокутнику змінні x і y фактично рівноправні, але для циліндра* ρ і z *не рівноправні. У результаті задачі для циліндра з однорідними межовими умовами по* ρ *або по* z *істотно відрізняються.*

7.2. У нескінченному плоскому шарі однорідного середовища товщиною *h* є наскрізний циліндричний отвір радіуса *a*, вісь якого перпендикулярна поверхні шару. У середовищі однорідно по об'єму генеруються частинки зі сталою швидкістю *q* частинок на одиницю об'єму в одиницю часу. Частинки дифундують в середовищі (коефіцієнт дифузії *D*), а досягнувши поверхонь шару або отвору, миттєво вилітають назовні і назад не повертаються. Знайти стаціонарний розподіл концентрації частинок у середовищі і кількість частинок, що вилітають через отвір. *Задача якісно моделює нейтронний канал в активній зоні ядерного реактора. Такі канали використовують в дослідницьких ядерних реакторах як джерела інтенсивних потоків нейтронів для наукових досліджень.*

7.3. Знайти стаціонарний розв'язок рівняння дифузії частинок зі скінченим часом життя τ на площині в області, що є *зовнішньою* до круга радіуса *a*, якщо на межі $\rho = a$ підтримується задана концентрація частинок $u = 2A\sin^2\varphi$.

7.4*. Знайти хвильові функції та характеристичне рівняння для енергії стаціонарних зв'язаних станів (тобто станів дискретного спектру) квантової частинки маси *m* у двовимірній потенціальній ямі у формі круга радіуса *a*, з прямокутним профілем потенціалу по радіусу і глибиною U_0. Проаналізувати характеристичне рівняння графічно й показати, що зв'язані стани не утворюються, якщо глибина ями (або її радіус) менше деякого критичного значення. *Подібна ситуація спостерігається і в тривимірному випадку, а в одновимірній симетричній потенціальній ямі зв'язаний стан є завжди.*

7.5**. **Метастабільні стани**. Квантова частинка маси m рухається в порожнині (обмеженій 3-D області), відокремленій від решти простору товстим потенціальним бар'єром. На межі між областю та бар'єром хвильова функція задовольняє умову $\frac{\partial\psi}{\partial n}+(h-i\varepsilon)\psi=0$. Тут мала уявна поправка $i\varepsilon$ враховує скінченну прозорість бар'єра. Вважаючи хвильову функцію стаціонарного стану при $\varepsilon=0$ відомою, знайти уявну частину енергії і час життя частинки в порожнині в першому порядку по ε. *Указівка: скористатись інтегральним співвідношенням для розв'язків рівняння Шредінгера.*

Заняття 8. Циліндричні функції й ортогональні поліноми як спеціальні функції.

Частина матеріалу заняття 8 виноситься на самостійне опрацювання.

Теми для обговорення:

- як аналітичний апарат теорії (ряди, інтегральні представлення, співвідношення ортогональності та ін.) дозволяє виконувати різноманітні аналітичні обчислення зі спеціальними функціями;
- поле застосування спеціальних функції далеко не вичерпується лише рівняннями в частинних похідних і методом відокремлення змінних, вони зустрічаються в контексті найрізноманітніших фізичних і математичних задач.

8.1. Користуючись представленням функції Бесселя у вигляді степеневого ряду:

а) обчислити вронскіан функцій J_ν та $J_{-\nu}$;

б) довести формули диференціювання $\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)$, $\frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu(x))=-x^\nu J_{\nu+1}(x)$.

8.2. Користуючись інтегральним представленням Бесселя або твірною функцією:

а) виразити $J_n(-x)$ та $J_{-n}(x)$ через $J_n(x)$;

б) отримати рекурентні співвідношення, що пов'язують функцію Бесселя $J_n(x)$ та її похідну $J_n'(x)$ з функціями сусідніх порядків $J_{n\pm1}(x)$;

г) обчислити перетвір Лапласа функції Бесселя $J_0(x)$.

8.3*. Довести співвідношення $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn} a_{ln} = \delta_{kl}$, де $a_{kn} = J_{n-k}(x)$, *n,k* – довільні цілі, *x* – дійсний параметр.

Диференціальні рівняння, що зводяться до рівняння Бесселя.

Існує клас диференціальних рівнянь, розв'язки яких виражаються через циліндричні функції. До таких рівнянь приводять різноманітні фізичні задачі. Зокрема, якщо в диференціальному рівнянні Бесселя виконати заміни невідомої функції $w = z^{\alpha} y$ і незалежної змінної $x = cz^{\beta}$, то отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$z^2 w'' + (1-2\alpha) z w' + [\beta^2 c^2 z^{2\beta} - (\nu^2 \beta^2 - \alpha^2)] w = 0,$$

розв'язками якого є $w(z) = z^{\alpha} Z_{\nu}(cz^{\beta})$, де Z_{ν} – циліндрична функція порядку ν (див. довідник [32] п. 9.1.53).

8.4. Записати через циліндричні функції розв'язки наступних рівнянь (використовуючи, де можливо, результат попередньої задачі):

а) $z^2 w'' + 2zw' + [\pm z^2 - l(l+1)]w = 0$;

б) $zw'' + w' \pm w = 0$;

в) $w'' - zw = 0$, – загальний розв'язок для $z < 0$, для $z > 0$, а також обмежений при $z \to +\infty$ розв'язок;

г)* $w'' - [\alpha^2 - \beta^2 \exp(2z)]w = 0$, – обмежений при $z \to -\infty$ розв'язок.

д)* $w'' + [\alpha^2 - \beta^2 \exp(2z)]w = 0$, – обмежений при $z \to +\infty$ розв'язок.

Коментар. Всі рівняння а)-д) мають фізичний смисл. Так, а) - рівняння для сферичних функцій Бесселя, в)-д) - рівняння Шредінгера в безрозмірних змінних для одновимірного руху частинки в лінійному потенціалі, а також в експоненціальному потенціалі, додатному для додатної енергії та від'ємному для від'ємної енергії (див. також задачі 8.5, 8.6*).*

8.5*. Знайти зв'язані стани квантової частинки в одновимірній потенціальній ямі $U(x) = -U_0 e^{-|x|/2a}$ ($U_0 > 0,\ a > 0$).

8.6*. Знайти сферично симетричні зв'язані стаціонарні стани квантової частинки в потенціальному полі $U(r) = -U_0 e^{-r/2a}$ ($U_0 > 0,\ a > 0$).

8.7**. **Надбар'єрне відбивання**. Знайти хвильову функцію та коефіцієнт відбивання частинки з енергією $E > 0$, що проходить над експоненціальним краєм нескінченно глибокої потенціальної ями $U(x) = -U_0 e^{x/a}$, $U_0 > 0,\ a > 0$. Намалювати графік залежності коефіцієнта відбивання від енергії.

8.8**. **Функції Бесселя і рівняння Шредінгера на гратці.** Показати, що система нескінченновимірних векторів $\vec{a}_k$ з компонентами $a_{kn} = J_{n-k}(x)$ (n,k – довільні цілі, x – дійсний параметр) породжується спектральною задачею, що включає рівняння на власні значення для елементів послідовності a_n, $-\infty < n < \infty$,

$$-\frac{x}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) + na_n = \lambda a_n$$

з крайовими умовами $a_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$. *Вказане рівняння фактично співпадає за виглядом з рекурентним співвідношенням, що пов'язує* $J_\nu(x)$ *та* $J_{\nu\pm 1}(x)$. *Дана спектральна задача визначає стаціонарні стани електрона в однорідному електричному полі в моделі сильно зв'язаних електронів для одновимірної гратки (кристала або молекулярного ланцюга). Співвідношення ортогональності власних векторів задачі доводиться у задачі 8.2*в. Задачу можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є за змінною n. Рекомендуємо ознайомитись з виглядом графіка функцій Бесселя цілого порядку як функцій індексу при фіксованому аргументі (див., наприклад, довідник* [32]).

Ортогональні поліноми як спеціальні функції.

8.9. Побудувати систему ортогональних поліномів шляхом ортогоналізації степеневого базису, користуючись відповідними умовами ортогональності та нормування:

а) поліноми Лежандра $P_l(t)$**,** $l = 0,\ 1,\ 2,\ 3$**;** **б) поліноми Ерміта** $H_n(x)$**,** $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$**.**

Користуючись явним виглядом отриманих поліномів, знайдіть їх нулі й екстремуми і побудуйте графіки в області визначення.

8.10. Обчислити коефіцієнти розкладання функції x^n за поліномами Лежандра, користуючись формулою Родріга.

8.11. Диференціюючи твірну функцію, отримати рекурентне співвідношення, що пов'язує: а) похідну від полінома Ерміта з поліномами сусідніх порядків; б) поліноми Лежандра трьох сусідніх порядків.

Метод твірних функціоналів. Як відомо, ортогональні поліноми, функції Бесселя та деякі інші системи спеціальних функцій можуть бути отримані як коефіцієнти розкладання відповідної твірної функції в ряд за одним із аргументів твірної функції, так званому генеруючому параметру. Метод твірних функціоналів є потужним методом обчислення виразів зі спеціальними функціями, для яких існує твірна функція.

Нехай, наприклад, треба обчислити інтеграл від n-го полінома з деякою функцією. Заміняємо під інтегралом поліном на твірну функцію даної системи поліномів. Це і є твірний функціонал. Далі реалізуємо два варіанти послідовності дій: (1) спочатку обчислюємо інтеграл, а потім отриманий вираз розкладаємо в ряд по генеруючому параметру; (2) спочатку розкладаємо твірну функцію в ряд, а потім інтегруємо його почленно, коефіцієнти останнього розкладання - суть шукані інтеграли від поліномів відповідних порядків. Прирівнюючи коефіцієнти двох рядів, знаходимо значення шуканих інтегралів.

У наступних задачах обчислити інтеграли методом твірних функціоналів.

8.12. $\int_0^1 P_l(t)dt$ **8.13.** $\int_0^\infty J_n(t)e^{-pt}dt$ **8.14*.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{2m}(xy)dy = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{m!}(x^2-1)^m$

Продиференціюйте останню рівність m разів по x; результатом буде співвідношення, що пов'язує поліноми Ерміта з поліномами Лежандра!

8.15*. Знайдіть Фур'є-образи: а) функцій $f_n(x) = e^{-x^2} H_n(x)$; б) функцій Ерміта $\psi_n(x)$ (нормованих хвильових функцій стаціонарних станів гармонічного осцилятора в координатному представленні). *Указівка: твірний функціонал зводиться до твірної функції для поліномів Ерміта від певних аргументів.*

8.16**. Довести умову повноти функцій Ерміта $\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x')\psi_n(x) = \delta(x-x')$. *Указівка: скористатись результатом задачі 8.15.*

Заняття 9. Контрольна робота на заняття 4-8.

Заняття 10. Рівняння Лапласа і Пуассона у сферичних координатах, задачі на поліноми Лежандра.

Необхідна попередня інформація:

- сферичні координати, їх означення, геометричний смисл, координатні лінії, параметри Ламе, якобіан переходу від декартових координат (x, y, z) до сферичних (r, θ, φ), точки, в яких якобіан обертається в нуль;
- оператор Лапласа в сферичних координатах, його структура, розмірність, точки, в яких він не існує.

Теми для обговорення:

- процедура відокремлення змінних в рівнянні Лапласа у сферичних координатах в аксіально симетричному випадку;
- необхідність використання умов обмеженості розв'язку за змінними r і θ, які явно не фігурують в умові задачі - наслідок переходу від задачі на функцію точки простору до задачі на функцію сферичних координат; походження і смисл необмежених розв'язків, порівняння з ситуацією в циліндричних координатах;
- властивості і явний вигляд поліномів Лежандра;
- сферично симетричні та аксіально симетричні частинні розв'язки рівняння Лапласа, обмежені по куту θ; розв'язки рівняння Лапласа, не обмежені при $r \to 0$, а також при $r \to \infty$;
- загальний характер поведінки частинних розв'язків: осциляції по θ, монотонна поведінка по r;
- ортогональність аксіально симетричних власних функцій кутової частини оператора Лапласа як функцій точки на одиничній сфері, а також як функцій кута θ; розкладання функції в узагальнений ряд Фур'є на сфері;
- розкладання потенціалу точкового заряду за поліномами Лежандра.

10.1. Знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині півкулі радіуса *a*, на основі якої потенціал дорівнює нулю, а на сферичній поверхні приймає задане значення $f(\theta)$; розглянути частинний випадок сталого значення на поверхні *V*. *Звести задачу до задачі для цілої кулі, використовуючи ідею непарного продовження (див. задачу 1.6). Інші аналоги: задачі для рівняння Лапласа в прямокутнику (див. задачі 4.1, 4.2 за 3 семестр).*

10.2. Однорідна куля нагрівається розподіленим джерелом тепла, причому кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму в одиницю часу, пропорційна z^2 (тобто квадрату відстані від деякої осі, що проходить через центр кулі). Якою має бути густина потоку тепла через поверхню кулі (якщо по всій поверхні вона є однаковою), щоб стаціонарний розподіл температури в кулі існував? Знайдіть цей розподіл.

10.3. На поверхні металевої кулі створений заданий розподіл поверхневого заряду, який є аксіально симетричним. Знайти створений поверхневими зарядами розподіл потенціалу в усьому просторі, якщо потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

10.4.* Незаряджена металева куля радіуса a вміщена в поле одиничного точкового заряду, що знаходиться на відстані $r_1 > a$ від центру кулі. Знайти просторовий розподіл електростатичного потенціалу методом відокремлення змінних, прийнявши за нуль потенціал на нескінченності. Ряд просумувати і переконатися, що відповідь співпадає з відомим результатом методу електростатичних відображень. *Указівка: скористайтесь виглядом потенціалу точкового заряду в необмеженому просторі та його розкладанням за поліномами Лежандра.*

10.5**. **Розкладання мультиполя за мультиполями.** Відоме розкладання потенціалу точкового заряду $U_0(\vec{r}) = 1/|\vec{r}|$ за поліномами Лежандра одночасно є розкладанням за аксіально симетричними мультиполями $U_l(\vec{r})$, одним з яких є сам потенціал точкового заряду $U_0(\vec{r})$:

$$U_0(\vec{r} - z\vec{e}_z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l U_l(\vec{r}) .$$

Узагальнити це розкладання (тобто розкладання нульового мультиполя $U_0(\vec{r})$) на випадок розкладання мультиполя $U_l(\vec{r})$. *Указівка: з'ясувати смисл операції диференціювання окремого мультиполя по* z .

10.6**. **Розкладання екранованого кулонівського потенціалу за поліномами Лежандра.** Відоме розкладання потенціалу точкового заряду за поліномами Лежандра фактично є розкладанням фундаментального розв'язку рівняння Лапласа. Узагальнити це розкладання на випадок розкладання за поліномами Лежандра фундаментальних розв'язків рівняння Гельмгольца $\Delta u - \mu^2 u = 0$ (екранований кулонівський потенціал) та $\Delta u + k^2 u = 0$ (сферична хвиля).

Заняття 11. Рівняння Лапласа і Пуассона в сферичних координатах, задачі на сферичні функції.

Необхідна попередня інформація:

- сферичні координати, їх означення, геометричний смисл, координатні лінії, параметри Ламе, якобіан переходу від декартових координат (x, y, z) до сферичних (r, θ, φ) та від циліндричних (ρ, φ, z) до сферичних, точки, в яких якобіан обертається в нуль, φ - спільний кут для циліндричної і сферичної систем;

- оператор Лапласа в сферичних координатах, його структура, розмірність, точки, в яких він не існує.

Теми для обговорення:

- процедура відокремлення радіальної і кутової частини розв'язку рівняння Лапласа у сферичних координатах (загальний випадок);
- необхідність використання умов, що не фігурують в умові задачі явно: умови періодичності за кутом φ і умов обмеженості розв'язку за змінними r і θ; поява таких умов як наслідок переходу від задачі на функцію точки простору до задачі на функцію сферичних координат; походження і смисл необмежених розв'язків, порівняння з ситуацією в циліндричних координатах;
- загальний характер поведінки частинних розв'язків: осциляції по θ і φ, монотонна поведінка по r;
- сферичні функції, їх явний вигляд і ортогональність як функцій точки на одиничній сфері, а також як функцій сферичних кутів; розкладання заданої функції на сфері в узагальнений ряд Фур'є за сферичними гармоніками.

11.1. Знайдіть явний вигляд сферичних функцій Y_{l0}, $Y_{l,\pm l}$ **та** Y_{lm}, $l = 0,\ 1,\ 2$ для всіх m.

11.2. Розв'язати задачу для рівняння Лапласа для кулі радіуса *a*, на поверхні якої потенціал приймає значення: а) $u = 3Az^2$**; б)** $u = 3Ax^2$**; в обох випадках сферичну систему прив'язуємо до осі *Oz*.** *Указівка: користуватись ненормованими сферичними функціями, адже розкладати потенціал на поверхні простіше «в лоб», тобто шляхом тотожних перетворень, без обчислення інтегралів, для яких і потрібна умова нормування кутових функцій.*

Зауважте, що при переході до сферичної системи координат можна вибирати напрям осі, відносно якої відраховується кут θ (так званий зенітний кут), як нам зручно. При цьому ми отримуємо різні набори власних функцій кутової частини оператора Лапласа. Функції одного набору є лінійними комбінаціями функцій будь-якого іншого набору з тим же l. Прикладом розкладання функцій одного набору по іншому є теорема додавання для сферичних функцій (див. задачу 11.4).

11.3. На непровідній сфері створений заданий розподіл поверхневого заряду загального вигляду. Знайти створений поверхневими зарядами розподіл потенціалу в усьому просторі, якщо потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

11.4.* Знайти потенціал точкового заряду в необмеженому просторі, безпосередньо розв'язуючи рівняння Пуассона в сферичних координатах шляхом розкладання за сферичними функціями (вісь *Oz* направити в довільному напрямі, що не проходить через заряд *(чому?)*). Порівнявши з розкладанням потенціалу точкового заряду за поліномами Лежандра, отримати теорему додавання для сферичних функцій. Переконатись за допомогою теореми додавання, що варіанти відповіді а) та б) до задачі 11.2 збігаються. *Указівки.* 1) *Необхідно скористатись повнотою системи сферичних функцій* $\left\{Y_{lm}(\vec{n})\right\}$. *2) У сферичній системі зручно δ-функцію від просторового аргументу подати у вигляді:*

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{4\pi r^2}\delta(r-r')\cdot\delta(\vec{n}-\vec{n}\,')\,.$$

Тут інтегрування по $\vec{n}$ *еквівалентне інтегруванню по тілесному куту. Вигляд першого множника в правій частині випливає з умови нормування δ-функції.*

Заняття 12. Сферично-симетричні задачі, що зводяться до рівняння Гельмгольца.

Радіальна частина оператора Лапласа в сферичних координатах може бути записана наступними трьома способами:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(ru\right).$$

Це особливість саме тривимірного випадку. Тому для рівнянь, що містять оператор Лапласа, в результаті заміни невідомої функції $ru=w$ *сферично-симетричний випадок формально зводиться до одновимірного, коли оператор Лапласа співпадає з другою похідною по координаті. Зокрема, сферично симетричні власні функції оператора Лапласа зводяться до звичайних синусів та косинусів.*

12.1. Знайти зміну поля температур з часом всередині однорідної кулі радіуса *a*, якщо вона мала температуру U_0, а з початкового моменту часу її поверхня підтримується при температурі U_1.

12.2. У початковий момент часу в теплоізольованій однорідній кулі радіуса a існував сферично-симетричний розподіл температур $f(r)$. Знайти зміну поля температур з часом.

12.3. Знайти загальний розв'язок хвильового рівняння у вільному просторі у сферично-симетричному випадку, що виражається через довільні функції. *Указівка: звести задачу до відомого загального розв'язку хвильового рівняння на прямій.*

12.4*. Однорідна куля радіуса a розігрівається через поверхню рівномірно розподіленим тепловим потоком, повна величина якого I. Знайти температуру кулі при $t > 0$, якщо початкова її температура дорівнює T_0. *Указівка: скористайтесь досвідом розв'язання аналогічної задачі для відрізка (див. задачі 8.5* за попередній семестр і задачу 4.5*).*

Заняття 13. Задачі на рівняння Гельмгольца у сферичних координатах. Власні функції оператора Лапласа для кулі. Сферичні функції Бесселя.

13.1. Знайти зміну з часом поля температур в однорідній кулі радіуса *a*, якщо в початковий момент часу вона була неоднорідно нагріта до температури $u = f(r,\theta,\varphi)$, а її поверхня: а) підтримується при нульовій температурі; б) теплоізольована. *Порівняйте результат зі сферично-симетричним випадком (див. задачі 12.1, 12.2).*

13.2. Всередині тіла у формі кулі радіуса *a* відбувається дифузія частинок, які розмножуються зі швидкістю, пропорційною концентрації. На поверхні тіла концентрація підтримується рівною нулю. Знайти «критичні розміри» системи, при перевищенні яких концентрація частинок необмежено зростає. *Розмноження зі швидкістю, пропорційною концентрації, означає, що кількість нових частинок (на одиницю об'єму), які утворились за час dt, пропорційна концентрації.*

Якщо частинки не розмножуються, то всі члени загального розв'язку рівняння експоненціально прямують до нуля. Адже початкові концентрації у просторі вирівнюються, до того ж частинки витікають за межі тіла через поверхню. Якщо ж розмноження є, то зі збільшенням розмірів системи якийсь із членів загального розв'язку, який раніше спадав, перетворюється на розв'язок, що експоненціально наростає із часом. Це й означає, що концентрація частинок вибухоподібно наростає від довільного ненульового початкового розподілу, або іншими словами, тотожно рівний нулю розв'язок задачі з нульовою початковою умовою стає нестійким. З'ясуйте, на якій саме просторовій моді відбувається втрата стійкості. Чи потрібно знаходити всі просторові моди, щоб відповісти на питання задачі? Аналог: задача 5.4 за перший семестр.

13.3. Початкова температура **півкулі** радіуса a дорівнює U_0, а на її поверхні підтримується постійна температура U_1. Знайти температуру півкулі при $t > 0$.

13.4*. Всередині кулі радіуса a з жорсткими стінками знаходиться газ, швидкість звуку в газі c. До моменту $t = 0$ газ знаходиться в стані спокою відносно кулі, а вся система в цілому рухається рівномірно зі сталою швидкістю $\vec{v}_0$. У момент $t = 0$ циліндр раптово зупиняється. Знайти розподіл потенціалу швидкостей газу та поле швидкостей при $t > 0$. *Вказівки: 1) потенціал пов'язаний з полем швидкостей співвідношенням $\vec{v} = \vec{\nabla} u$ та задовольняє скалярне хвильове рівняння в просторі, а змінні частини густини й тиску пропорційні похідній u_t.*

13.5*. Квантова частинка знаходиться всередині кулі радіуса a з непроникними стінками, яка розділена на дві половини площиною, що проходить через центр; перегородка також є непроникною. До початкового моменту часу частинка знаходилась в одній із половин в основному стані. У початковий момент часу перегородка миттєво зникає. Знайти, як змінюватиметься хвильова функція з часом. Обчислити ймовірності знайти частинку у стані з енергією, що рівна початковій, менша за неї і більша за неї.

Заняття 14. Розсіяння на циліндрі і сфері.

14.1. Подати плоску хвилю у просторі у вигляді розвинення, що відповідає загальному розв'язку рівняння Гельмгольца в сферичній системі координат, прив'язаній до напрямку поширення хвилі. *Указівка: коефіцієнти розвинення можна знайти за відомим виглядом головного члена асимптотичного розвинення сферичних функцій Бесселя для великих значень аргументу* $j_l(x) \sim \dfrac{\sin\left(x - \pi l/2\right)}{x}$.

14.2. **Розсіяння квантовомеханічної частинки на непроникній сфері.**

14.3. Розсіяння плоскої акустичної хвилі на нескінченному жорсткому циліндрі.

14.4. Розсіяння квантовомеханічної частинки з імпульсом $\vec{p}$ на непроникному циліндрі**.**

14.5*. Через поверхню кулі радіуса *a,* яка мала нульову початкову температуру, подається стаціонарний неоднорідний тепловий потік, що має величину $2Az^2$. Знайти температуру кулі при $t > 0$. *Задача є ускладненим варіантом задачі 12.5*.*

Заняття 15. Функції Гріна.

Ідея методу функцій Гріна. *Розв'язавши для даної фізичної системи задачу з джерелом спеціального вигляду (точкове або миттєве точкове джерело), можна знайти функцію Гріна цієї системи. Потім за допомогою знайденої функції Гріна можна записати поле, створене в системі будь-якими джерелами загального вигляду. Оскільки точкове або миттєве точкове джерело є простим, то знайти функцію Гріна може бути легше, ніж знайти розв'язок із джерелом загального вигляду. З фізичної точки зору функція Гріна відображає властивості самої фізичної системи, в якій створюється поле, а не джерел, які це поле створюють. Тому вивчаючи лінійну фізичну систему (в тому числі експериментально) ми фактично вивчаємо різні прояви функції Гріна цієї системи.*

Звичайні диференціальні рівняння. Теми для обговорення:

- означення і фізичний смисл функції Гріна задачі Коші; як записати через неї розв'язок задачі з даними загального вигляду для звичайного лінійного диференціального рівняння першого або другого порядку;
- означення і фізичний смисл функції Гріна крайової задачі для звичайного лінійного диференціального рівняння другого порядку; як записати через неї розв'язок задачі з даними загального вигляду;
- як знайти явний вигляд функції Гріна безпосередньо за означенням.

15.1. Знайти явний вигляд функції Гріна **задачі Коші для гармонічного осцилятора, виходячи безпосередньо з означення. Чи зберігає вона смисл, коли власна частота осцилятора прямує до нуля? Записати через функцію Гріна розв'язок задачі про вимушені коливання гармонічного осцилятора при $t > 0$ під дією узагальненої сили $f(t)$ з початковими умовами $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$.**

15.2. Побудувати функцію Гріна задачі Коші для рівняння $y' + \alpha y = 0$ (RC-коло). Записати через неї розв'язок задачі Коші з даними загального вигляду.

15.3. Знайти функцію Гріна крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$ на проміжку $0 \le x < \infty$ з умовою $u(0) = 0$ і умовою обмеженості на нескінченності шляхом зшивання розв'язків однорідного рівняння і подальшого нормування розв'язків. Записати результат для проміжку $a \le x < \infty$ і перейти до граничного випадку $a \to -\infty$. Дайте фізичну інтерпретацію розв'язку в термінах стаціонарної дифузії частинок зі скінченним часом життя. Проаналізуйте залежність

функції Гріна від кожного з аргументів та її симетрію. Чому в одних випадках функція Гріна залежить від кожного з аргументів окремо, а в інших – тільки від їх різниці?

Рівняння в частинних похідних. Теми для обговорення:

- що таке функція Гріна крайової задачі у випадку еволюційних і стаціонарних задач; як записати через відповідну функцію Гріна розв'язки крайових задач з різними видами джерел;
- як знайти явний вигляд функції Гріна: а) безпосередньо за означенням як розв'язок, що задовольняє спеціальні початкові умови; б) як інтегральне ядро, за допомогою якого записується розв'язок задачі з деяким джерелом загального вигляду.

15.4. Знайти функцію Гріна $G(x,x',t)$ для обмеженої струни, кінці якої закріплені (або вільні, або пружно закріплені), розв'язуючи задачу про вільні коливання з початковими умовами $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\delta(x-x')$ методом розкладання за власними функціями. Виразити функцію Гріна **струни через** функцію Гріна **осциляторів, що відповідають окремим модам коливань струни.**

15.5. Користуючись явним виглядом функції Гріна**, знайденим в попередній задачі, записати розв'язки задач про коливання струни, які створюються джерелами окремих видів: а) розподіленою зовнішньою силою загального вигляду; б) початковим розподілом швидкостей загального вигляду; в) початковим відхиленням загального вигляду. Показати, що результати співпадають з результатами розв'язання відповідних задач методом відокремлення змінних.**

15.6. Записати розв'язок задачі про вільні коливання обмеженої струни у вигляді розкладання за власними модами для нульового початкового відхилення і початкового розподілу швидкостей $u=\psi(x)$ загального вигляду. Отримати з цього розв'язку вигляд функції Гріна: а) поклавши $\psi(x)=\delta(x-x')$ (див. задачу 15.4); б) представивши отриманий розв'язок у вигляді $u(x,t)=\int_0^l G(x,x',t)\psi(x')dx'$.

15.7. Використовуючи відому функцію Гріна рівняння Лапласа для необмеженого простору (потенціал точкового заряду), побудувати методом відображень (методом непарного продовження) функцію Гріна для півпростору $z<0$ для наступних варіантів крайових умов на межі $z=0$: а) $u=0$; б) $u_z=0$; г) $\alpha u-\beta u_z=0$. Записати через функцію Гріна розв'язки рівняння Пуассона з правою частиною загального вигляду для випадку, коли на площині $z=0$ потенціал приймає задане значення $\varphi(x,y)$.

Заняття 16. Інтегральні рівняння.

16.1. Для ядра $K(t,s)=(t+s)/2$, заданому в квадраті $-1 \le t,\ s \le 1$, розв'язати наступні задачі.

1). Розв'язати рівняння

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{-1}^{1} K(t,s)\varphi(s)ds$$

методом послідовних наближень при $f(t)=1$. При яких λ отриманий ряд збігається?

2). Розв'язати те ж рівняння при довільному f, користуючись тим, що ядро є виродженим. Переконатись, що при $f(t)=1$ отримується результат п. 1). Знайти резольвенту ядра $R(t,s,\lambda)$.

3). Знайти власні функції та власні значення ядра.

4). Записати ядро та резольвенту у вигляді розкладань за власними функціями ядра.

16.2. Виконати завдання задачі 16.1 для наступних ядер:

(а) $K(t,s)=(t-s)/2$, $-1 \le t,s \le 1$;

(б) $K(t,s)=\dfrac{2}{\pi}\cos(t-s)$, $-\dfrac{\pi}{2} \le t,\ s \le \dfrac{\pi}{2}$;

(в) $K(t,s)=\sin(t+s)$, $0 \le t,\ s \le \pi$.

16.3. Розв'язати рівняння (типу лапласівської згортки)

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_{0}^{t} (t-s)\varphi(s)ds \textbf{.}$$

16.4. Розв'язати рівняння (типу згортки Фур'є)

$$\varphi(t) = e^{-\alpha t^2} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta s^2} \varphi(t-s)ds .$$

16.5. Розв'язати рівняння (нелінійне!)

$$e^{-\alpha t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\varphi(t-s)ds .$$

Підготувати обов'язкові задачі для перевірки та підготуватися до підсумкової контрольної роботи.

Заняття 17. Підсумкова контрольна робота за перший і другий семестри.

Окремі задачі для підготовки до підсумкової контрольної.

17.1. Розв'язати задачу 5.3, якщо край диска теплоізольований. Перевірте отриману відповідь у випадку $T_1 = T_2$.

17.2. Розв'язати варіант задачі 6.4 для випадку циліндра з теплоізольованою бічною поверхнею.

17.3. Основи циліндра радіуса *a*, $0 \le z \le h$ теплоізольовані, а на бічній поверхні підтримується заданий розподіл температур $u = f(\varphi, z)$, де $f(\varphi, z)$ - функція загального вигляду, або $f(\varphi, z) = 2T_0 \sin^2(\pi z/h) \sin^2 \varphi$. Знайти: а) стаціонарний розподіл температур у циліндрі; б) розподіл температур у випадку нульової початкової умови. *Зверніть увагу на послідовність дій при відокремленні змінних і неможливість відокремити змінну ρ від змінних φ і z.*

17.4. Знайти стаціонарний розв’язок рівняння дифузії частинок зі скінченим часом життя τ на площині в області, що є *зовнішньою* до круга радіуса *a*, якщо на межі $\rho = a$ підтримується задана концентрація частинок $u = 2A\sin^2\varphi$.

17.5. Незаряджена металева куля радіуса *a* вміщена в однорідне електростатичне поле напруженістю $\vec{E}_0$. Знайти просторовий розподіл електростатичного потенціалу, прийнявши потенціал кулі за нуль.

17.6. Бабуся розігріває колобок у вигляді однорідної кулі радіуса *a* в мікрохвильовій печі. В одиницю часу на кожну одиницю об’єму колобка виділяється стала кількість теплоти *q=const.* Знайти температуру колобка при $t > 0$, якщо його поверхня: а) теплоізольована, б) підтримується при нульовій температурі. Початкову температуру колобка прийняти за нуль.

17.7. Розсіяння плоскої акустичної хвилі на жорсткій сфері.

Приклад завдання підсумкової контрольної роботи.

Розв'язати дві задачі на вибір. Максимальна оцінка — 20 балів.

1. (2 бали) Знайти коливання пружного стержня довжиною *l,* правий кінець якого закріплений, а до лівого кінця при $t>0$ прикладена постійна сила F_0. В початковий момент часу стержень був нерухомий і деформацій не було.

2. (5 балів) Розв’язати рівняння Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=-4x^3/\rho^7$ в області зовнішній до круга радіуса a з однорідною умовою Діріхле на межі області. Потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

3. (5 балів) Основи циліндра радіуса a, $0\le z\le h$ теплоізольовані, а на його бічній поверхні підтримується розподіл температур $u\big|_{\rho=a}=T_0\sin^2\pi z/h$. Знайти стаціонарний розподіл температур та розподіл температур за нульової початкової умови.

Додатково за принаймні одну повністю правильно розв'язану задачу нараховується 10 балів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ[1]

Основна література

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
3. Михлин С.Т. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1970.
4. Юрачківський А.П., Жугаєвич А.Я. Математична фізика в прикладах і задачах. – К: ВПЦ «Київський університет», – 2005. – 157 с.
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1987. 1972.
6. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. –М.: Изд-во, 1998.
7. Колоколов И.В. и др. Задачи по математическим методам физики. –М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 288 с.
8. Доценко І.С., Якименко О.І. Методи математичної фізики: методичний посібник для студентів фізичного факультету. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2007. – 50 с.

[1] Абсолютна більшість джерел, вказаних у списку, доступна в інтернеті.

9. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
10. Шапиро Д.А. Методы математической физики. Часть 1 (Уравнения в частных производных, специальные функции, асимптотики), НГУ, 2004.
11. Шапиро Д.А. Методы математической физики. Часть 2 (Представления групп, функции Грина), НГУ, 2004.

Додаткова література

12. Перестюк М.О. Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій. – К.: Либідь, 1993.
13. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичої фізики: Підручник/ М.О.Перестюк, В.В.Маринець. – К.: "Либідь", 2006.
14. Несис Е.И. Методы математической физики. – М. Просвещение, 1977.
15. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985.
16. Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – К. КПІ, 1997.
17. Годунов С.К. Уравнения математической физики (2-е изд.). – М.: Наука 1979.
18. Кошляков Н.С. Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
19. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977.
20. Арнольд В.И. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Фазис, 1997.
21. Свешников А. Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. –М.
22. Никифоров А.Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. – М.: 1974
23. Никифоров А.Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: 1978.
24. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
25. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
26. Метьюз Дж., Уокер Д. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1972.
27. Соболев С.Л. Уравнения математической физики (4-е издание). М.: Наука, 1966.
28. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.
29. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1990.

30. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1,. – М.: Мир, 1982.
31. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.2,. – М.: Мир, 1984.
32. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 1. М.-Л.: ГТТИ, 1933.
33. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 2. М.-Л.: ГТТИ, 1945.
34. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 1. М.: ИЛ, 1958.
35. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 2. М.: ИЛ, 1960.
36. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002.
37. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. М.: Факториал, 1999.
38. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Факториал, 2000.
39. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. М.: Факториал, 1998.
40. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
41. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2: Преобразования Бесселя, интегралы от специальных функций М.: Наука, 1970.
42. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970.
43. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979.
44. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1967.
45. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1967.