Задачі з фізики плазми

навчальний посібник

Козак Л.В.[1]

31 серпня 2024 р.

[1]kozakliudmyla@knu.ua

Зміст

Передмова

Навчальний посібник є доповненням до навчальних посібників "Вступ до фізики комічної плазми"та "Турбулентні процеси в гідродинамічному та магнітогідродинамічному середовищі". Для роз'язання запропонованих задач необхідно ознайомитися із лекційним матеріалом представленим в навчальних посібниках із курсу фізики плазми та електродинаміки. Розв'язання задач допомагає глибше зрозуміти лекційний матеріал і використовувати набуті знання на практиці.

Спектр запропонованих задач досить широкий: від базових понять до умов розвитку нестійкостей. Тому запропонований навчальний посібник буде корисний як для студентів так і викладачів природничих вищих навчальних закладів.

Для того, щоб дати можливість читачеві самостійно подумати над розв'язком запропонованих задач, розв'язання, найбільш цікавих, на думку автора задач, винесено в окремий розділ.

Для спрощення сприйняття матеріалу в посібник включено додаток в якому зібрано основні формули і означення фізики плазми. Знання даних формул буде необхідним для розв'язання задач представлених в даному методичному посібнику а також корисним при вивченні електрики, електродинаміки, класичної механіки, фізики навколоземного середовища, планетних атмосфер та ін.

Подяки

- Автор щиро вдячний
  - рецензентам: Кравчуку Сергію Григоровичу та Черемниху Олегу Костянтиновичу за слушні зауваження і рекомендації щодо покращення роботи;
  - Грицаю Асену Васильовичу та Петренку Богдану Артемовичу за слушні зауваження, коментарі та доповнення при підготовці рукопису;

- студентам кафедри астрономії та фізики космосу яким читався курс лекцій з "Основ фізики плазми"та "Додаткові розділи фізики плазми".

- Робота виконувалась
  - у відповідності з цільовою комплексною програмою НАН України по фізиці плазми;
  - за підтримки грантів 90312, 90312-1, 97742 фонду Фольксваген (VW-Stiftung);
  - за підтримки гранту the ROYAL Society International Exchanges scheme 2021 IES111177.

1

Задачі

1.1 Базові питання

1. Доведіть, що рівняння Максвела є узагальненням експериментальних фактів.

2. Знайдіть глибину екранування внесеного в плазму точкового заряду.

3. Нехай в симетричному циліндричному стовпі плазми густина $n(r)$ змінюється для вибраної довжини хвилі за законом $\partial n/\partial r \approx n/\lambda$ і задовільняє рівнянню Больцмана. Знайдіть радіальний розподіл електричного поля і покажіть, що при $r_c = 2\lambda$ швидкість дрейфу в електричному полі буде рівна швидкості теплового руху електронів.

4. Знайдіть дебаївський радіус (дебаївську довжину) і кількість частинок у сфері дебаївського радіуса для:

   - Сонячного вітру. Електронна енергія 10 еВ, а кількість частинок $5 \cdot 10^6$ м$^-$3.
   - Земної іоносфери на висоті 100 км. Густина електронів – 10^{12} м$^{-3}$, а середня енергія частинок 1 еВ.
   - Плазмового шару. Середня енергія – 1 КеВ і густина 10^6 м$^{-3}$.
   - Сонячної корони. Середня енергія частинок – 100 еВ, а густина – 10^{14} м$^{-3}$.

5. Максвелівська функція розподілу за швидкостями задається співвідношенням

$$f(v) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Використовуючи дану залежність, знайдіть середню швидкість частинок та компоненту швидкості в одному виділеному напрямку.

6. Знайдіть середню кінетичну енергію частинок, які задовольняють максвелівській функції розподілу.

7. Знайдіть кулонівську силу відштовхування і відповідну потенціальну енергію кулонівської взаємодії двох ядер дейтерію, які розміщені на відстані 10^{-14} м один від одного. Яку температуру повинна мати дейтерієва плазма, якщо її середня теплова кінетична енергія рівна даній потенціальній енергії?

8. Міжмолекулярні сили взаємодії пов'язані із потенціальною енергією співвідношенням $F(r) = -dU(r)/dr$. Для випадку нейтральних частинок, що знаходяться на великих між'ядерних відстанях, вводиться притягуючий потенціал Ван дер Ваальса (який є дальнодіючою частиною потенціалу Леннарда-Джонса) $U(r) = -C\,(a_0/r)^6\,R_\infty$, де – стала, що залежить від типу частинки, a_0 – радіус борівської орбіти ($a_0 = 0.0529$ нм), а R_∞ – стала Рідберга. Знайдіть силу притягання Ван дер Ваальса для молекули водню ($C = 24$) і порівняйте її із силою кулонівського притягання між протоном і електроном, що розміщені на відстані $r = Na_0$ де $N \gg 1$.

9. Використовуючи теорему Гауса, покажіть, що для квазінейтральної плазми, в якій виникло одномірне збурення по осі x, електричне поле буде рівним $E_x = (ne/\varepsilon_0)\,\delta x$, а рівняння руху електрона буде задаватися співвідношенням:

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \left(\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\right)\delta x = 0.$$

Знайдіть розв'язок даного рівняння.

10. Знайти тепловий потік на стінку труби, всередині якої утримується термоядерна плазма із густиною $n = 10^{14}$ cm^{-3} і температурою $T = 10$ кеВ. Радіус труби - $R = 2$м.

1.2 Рух заряджених частинок

1. Доведіть, що при русі зарядженої частинки в постійному (однорідному) магнітному полі кінетична енергія частинки зберігається і є інтегралом руху.

2. Знайдіть траєкторію руху зарядженої частинки частинки маси m, що рухається із швидкістю $\vec{v}$ в постійному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ при відсутності електричного поля.

3. Знайдіть швидкість дрейфу зарядженої частинки в постійному електромагнітному полі для наступної конфігурації полів: $\vec{B} = (0, 0, B)$, а $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$.

4. Доведіть, що швидкість дрейфу ведучого центру зарядженої частинки в напрямку перпендикулярному до однорідного магнітного поля під впливом зовнішньої постійної сили F задається співвідношенням
$$\vec{W}_D = \frac{1}{q}\frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}.$$

5. Знайдіть за яких умов можна знехтувати зміною поляризаційного дрейфу з часом.

6. Покажіть, що збереження магнітного моменту призводить до збереження загального магнітного потоку через поверхню, обмежену ларморівським радіусом.

7. Знайдіть час дрейфу навколо Землі електрона з енергією 1 МеВ, який інжектується в магнітосферу на магнітному екваторі на висоті двох радіусів Землі, перпендикулярно до силової лінії?

   - Як зміниться час дрейфу при інжекції під кутом 45°?

   - Проведіть аналогічні розрахунки для протона із енергією 1 МеВ і порівняйте отримані результати.

8. Покажіть, що для дипольного магнітного поля будуть виконуватися співвідношення: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ і $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$.

9. Доведіть, що для дипольного магнітного поля буде виконуватися рівність $\operatorname{ctg}\lambda = 2\operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між r і B , а λ – магнітна широта. Крім того, $(\pi/2 - \alpha)$ – кут нахилу магнітного поля.

10. Покажіть, що елемент довжини дуги (ds) силової лінії дипольного магнітного поля в залежності від магнітної широти $(d\lambda)$

можна записати як: $ds/d\lambda = r_0 \cos\lambda \left(1 + 3\sin^2\lambda\right)^{1/2}$ де r_0 – відстань до силової лінії в екваторіальній площині.

11. Покажіть, що для дипольної конфігурації магнітного поля індукція магнітного поля вздовж елемента дуги силової лінії змінюється як:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{3\mu_0 M}{4\pi r_0^4} \frac{\sin\lambda}{\cos^8\lambda} \frac{\left(3 + 5\sin^2\lambda\right)}{\left(1 + 3\sin^2\lambda\right)}$$

де M – дипольний момент.

12. Запишіть, у скільки разів відрізняється дипольне магнітне поле на поверхні Землі від значення поля на відстані десяти радіусів Землі.

13. Покажіть, що гравітаційна сила, яка діє на частинки в іоносфері Землі, зокрема на протони з енергією 1 еВ, мала порівняно із силою Лоренца.

14. Обертання магнітного поля Землі породжує електричне поле в іоносфері. Дане електричне поле коротації на іоносферних висотах складає приблизно 0.015 В/м. Розрахуйте дрейф ведучого центра іоносферних частинок над екватором під дією даного електричного поля.

15. Розрахуйте дрейф ведучого центра іоносферного протона над екватором під дією гравітаційного поля Землі. Порівняйте отримані результати із результатами попередньої задачі.

16. Розрахуйте масу намагніченого тіла, для якого сила Лоренца протона з енергією 1 еВ на висоті 100 км буде рівною гравітаційній силі.

17. Побудуйте криві, що показують поведінку циклотронної частоти протона в дипольному геомагнітному полі як функцію широти. Зробіть це для магнітних силових ліній $r_0 = 2, 6, 10 R_E$ (де r_0 – відстань до силової лінії в екваторіальній площині).

18. Побудуйте криву, що показує поведінку циклотронного радіуса для аврорального протона з енергією 1 кеВ вздовж силової лінії магнітного поля на відстані $r_0 = 6R_E$.

19. Отримайте вираз для градієнтної дрейфової швидкості частинок ведучого центра в дипольному полі. Використайте даний

вираз для обчислення швидкості дрейфу авроральних частинок з енергією 1 кеВ, які мають пітч-кут 90°. Проведіть розрахунки для силової лінії, що перетинає магнітний екватор на відстані $r_0 = 6R_E$.

20. Отримайте вираз для криволінійної дрейфової швидкості частинок ведучого центра в дипольному полі. Використайте даний вираз для обчислення швидкості дрейфу авроральних частинок з енергією 1 кеВ, які мають пітч-кут 0°. Проведіть розрахунки для силової лінії, що перетинає магнітний екватор на відстані $r_0 = 6R_E$.

21. Розрахуйте розміри конуса втрат на геомагнітному екваторі для авроральних частинок на відстані $r_0 = 6R_E$. При цьому вважаємо, що дзеркальні точки (точки відбивання) знаходяться в іоносфері на висоті 100 км від поверхні Землі.

22. Дрейф ведучого центра, викликаний перпендикулярним електричним полем, має значення, тільки якщо дрейфова швидкість є меншою, ніж швидкість світла. Доведіть дане твердження.

23. Нехай є різниця потенціалів між екватором і іоносферою. При цьому $\varphi = 0$ на екваторі і $\varphi = \varphi$ в іоносфері, де знаходяться точки відбивання. Крім того, $\varphi > 0$, і тому електрони прискорюються при рухові до іоносфери. Використовуючи рівняння руху вздовж $\vec{B}$ доведіть, що магнітний момент частинки зберігається. При розв'язуванні використайте, що $\vec{\nabla}\varphi = -d\varphi/d\bar{s} = -\vec{E}_{\|}$, де $\vec{s}$ – направлене вздовж магнітного поля.

24. Розглянемо пульсар із масою 10^{30} кг і магнітним полем на поверхні 10^5 Тл. Період обертання пульсара складає 10^{-3} с. Розрахуйте енергію протона цього пульсара при умові, що гравітаційна сила врівноважує силу Лоренца.

25. Отримайте вираз для гірорадіуса і гірочастоти релятивістської частинки. При цьому використайте, що вираз для імпульсу частинки в релятивістському випадку має вигляд

    $p = \left(\sqrt{1-(v/c)^2}\right)^{-1} m_0 v$, де m_0 – маса спокою.

    Яка формула для магнітного моменту релятивістської частинки?

26. Покажіть, що релятивістський магнітний момент частинки зберігається.

1.3 Основи магнітогідродинаміки

1. Покажіть, що в МГД теорії (в рівноважному стані) вільні заряди не накопичуються.

2. Оцініть за яких умов, для середовища, що характеризується великою провідністю, можна знехтувати струмом зміщення в рівняннях МГД.

3. Отримайте закон збереження енергії для електромагнітних полів в рамках МГД теорії. Поясніть фізичний зміст кожного доданка.

4. Використовуючи рівняння Максвела і закон Ома, знайдіть умову вмороженості силових ліній магнітного поля для середовища із ідеальною провідністю ($\sigma \to \infty$).

5. Оцінити час затухання магнітного поля у надрах Землі і порівняйте із часом існування планети ($4.6 \cdot 10^9$ років). При розрахунках використайте, що провідність ядра 10^8 См/м **(????)**.

6. Металевий стержень довжиною L рухається в магнітному полі $\vec{B}$ із швидкістю $\vec{v}$. Яка різниця потенціалів між кінцями даного стержня?

7. Розгляньте сферу радіуса R, що обертається навколо своєї осі із постійною кутовою швидкістю ω. Густина поверхневого заряду - σ_s. Покажіть, що магнітне поле в точці, яка знаходиться за межами сфери, є дипольним. Знайдіть відповідний дипольний момент.

8. Розгляньте магнітне поле, яке однорідне в просторі, але змінюється із часом за законом $\vec{B} = \vec{n}B(t)$ де $\vec{n}$ – одиничний вектор в напрямку магнітного поля. Крім того, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$. Доведіть, що рівняння $\vec{E} = -(1/2)(\vec{n} \times \vec{r})(\partial B/\partial t)$ є розв'язком записаних вище рівнянь Максвела.

9. Показати, що якщо $\vec{E} = -[\vec{v} \times \vec{B}]$, то $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{n}\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\vec{B})$ де $\vec{n}$ – одиничний вектор в напрямку магнітного поля.

10. Використовуючи результат попередньої задачі, отримати рівняння збереження магнітного потоку $(\partial \vec{B}/\partial t) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\vec{B}) = 0$. Використовуючи дане рівняння та закон збереження маси, отримайте співвідношення
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n}{B}\right) = 0,$$

де n – концентрація частинок.

11. Використовуючи закон Ома і рівняння руху, показати, що

    - вираз для перпендикулярного руху може бути записаний як

    $$\rho_m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \vec{F}_\perp + \sigma B^2 \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \vec{v}_\perp \right),$$

    де $\vec{F}_\perp$ – неелектромагнітна сила, перпендикулярна до магнітного поля.

    - граничне значення швидкості в перпендикулярному напрямку

    $$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{F}_\perp}{\sigma B^2} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

    крім того, при $\sigma \to \infty, \vec{v}_\perp \to \vec{E} \times \vec{B}/B^2$.

    - час за який швидкість досягне граничного значення

    $$\tau \approx \rho_m/(\sigma B^2).$$

12. Розглянемо ситуацію в космосі, коли густина струму паралельна магнітному полю. Для цього випадку МГД система є безсиловою, і буде мати місце співвідношення $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0$. Дане рівняння виконується, коли $\vec{\nabla} \times \vec{B} = a\vec{B}$, де a – скалярна функція.

    - Показати, що a повинна задовольняти рівнянню $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})a = 0$.

    - Вважаючи, що магнітне поле затухає завдяки обмеженій провідності середовища, довести, що магнітне поле змінюється за законом

    $$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \right) \left[a^2 \vec{B} + (\vec{\nabla} a) \times \vec{B} \right].$$

    - Показати, що якщо затухання магнітного поля відбувається без деформації середовища, то a повинна бути сталою величиною, а рівняння, записане вище, набуде вигляду:

    $$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\left(\frac{a^2}{\mu_0 \sigma} \right) \vec{B}.$$

13. Дисбаланс електричних зарядів у системі заряджених частинок призведе до зміни електричних полів. Оцініть значення електричного поля, якщо відхилення від квазінейтральності складає 1% для системи, що містить 10^{12} частинок/м^3. Розгляньте сферу радіусом 0.1 м.

1.4 Хвилі в плазмі

1. Знайдіть глибину проникнення поперечних електромагнітних хвиль у плазмі.

2. Знайдіть дисперсійне рівняння для електронних (ленгмюрівських) плазмових коливань

3. Знайдіть дисперсійну криву для електронних плазмових коливань при наявності теплових рухів (хвилі Бома-Гросса).

4. Визначіть вплив зіткнень на електронні плазмові коливання. До виникнення коливань плазма була однорідною, нейтральною, не замагніченою і знаходилася в спокої.

5. Знайдіть дисперсійне рівняння для плазмових коливнь враховуючи рухи як електронів так і іонів. Порівняйте отримане рівняння із рівнянням для ленгмюрівських коливань.

6. Знайдіть дисперсійне рівняння для іонозвукових (іоноакустичних) хвиль та побудуйте дисперсійну залежність.

7. Знайдіть плазмову частоту для сонячної корони, сонячного вітру, плазмосфери, іоносфери та плазмового шару. Порівняйте дані результати із електронно-циклотронними частотами в даних областях.

8. Дисперсійні співвідношення для хвиль в холодній плазмі виконуються при умові $k\lambda_D \ll 1$. Отримайте приблизний діапазон довжин хвиль у сонячному вітрі, плазмосфері, іоносфері та плазмовому шарі, для яких наближення холодної плазми виконується.

9. Знайдіть показник заломлення і дисперсійне співвідношення для електромагнітних хвиль із правою коловою поляризацією, що розповсюджуються в холодному електронному газі вздовж магнітного поля. Проведіть аналогічні розрахунки для хвиль із лівою коловою поляризацією. Як зміниться показник заломлення і дисперсійне співвідношення, якщо хвилі будуть поширюватися під кутом до магнітного поля?

10. Знайдіть показник заломлення і дисперсійне співвідношення для звичайної електромагнітної хвилі, що розповсюджується в холодному електронному газі перпендикулярно до магнітного поля. Проведіть аналогічні розрахунки для незвичайної хвилі. Як

зміниться показник заломлення і дисперсійне співвідношення, якщо хвилі будуть поширюватися під кутом до магнітного поля?

11. Знайдіть дисперсійне співвідношення для поперечних магнітогідродинамічних хвиль в замагніченій плазмі.

12. Знайдіть дисперсійне співвідношення для поздовжніх хвиль, що розповсюджуються в плазмі вздовж магнітного поля. Проаналізуйте отриманий результат при поширенні хвилі під кутом до магнітного поля.

13. Доведіть, що швидкість обертання площини поляризації (зміна із відстанню кута повертання площини поляризації) електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж магнітного поля в плазмі задається співвідношенням $\theta_F = (1/2)\,(k_R - k_L)\,z$, де k_R, k_L - хвильові числа для право- і лівополяризованих хвиль, відповідно.

14. Знайдіть енергію ленгмюрівських коливань плазми.

15. Розгляньте холодну однорідну плазму, яка рухається зі сталою швидкістю u_0 в напрямку z. Покажіть, що дисперсійне співвідношення для цього одномірного руху плазми буде $(\omega - ku_0)^2 = \omega_p^2$. Прийміть до уваги, що $n_1 \ll n_0, u_1 \ll u_0, T = 0, B_0 = 0, E_0 = 0$. Знайдіть групову швидкість для даного типу хвиль.

16. Амплітуда альфвенівської хвилі буде затухати за рахунок скінченної провідності. Доведіть, що дисперсійне рівняння для альфвенівських хвиль у випадку скінченної провідності буде:

$$\omega^2 - \left(V_A^2 + \frac{i\omega}{\mu_0\sigma}\right) k^2 = 0$$

Визначте вираз для скін-шару альфвенівської хвилі.

17. Отримайте та проаналізуйте дисперсійне співвідношення для поширення хвиль в однорідній замагніченій плазмі при нехтуванні дисипативними процесами.

1.5 Нестійкості

1. Знайдіть загальний вираз для інкремента нестійкості в лінійному наближенні при дослідженні дисперсійного співвідношення $D(\omega, \vec{k}) = 0$.

2. Знайдіть інкремент зростання нестійкості Релея-Тейлора в нестискуваному обмеженому середовищі: границя розділу $y = 0$, границя середовища $y = h$.

3. Сосисочна нестійкість має місце, якщо осесиметричні збурення циліндричного стовпа плазми у місцях звуження призводять до достатнього збільшення азимутального магнітного поля B_θ, в місцях роздування — до його послаблення. Так як кінетичний тиск однаковий в усіх точках стовпа, а магнітний тиск – ні, то це призводить до порушення умови рівноваги стовпа плазми. Знайдіть умову підтримання рівноваги, розглядаючи магнітне поле $B = (0, B_\theta, B_z)$.

4. Знайти дисперсійне співвідношення для бунеманівської нестійкості, розглядаючи лінеаризовані рівняння руху, неперервності та Пуассона для електростатичного потенціалу.

5. Для шлангової нестійкості (firehose instability) знайдіть:

   а. дисперсійне співвідношення;

   б. інкремент зростання.

6. Знайдіть дисперсійне співвідношення для двохпотокової нестійкості у випадку коли електрони рухаються відносно іонів зі швидкістю u_0 вздовж магнітного поля. Розгляньте ситуацію одномірного руху, й за умови, що плазму можна вважати холодною та однорідною.

7. Розглянемо два диполі M_1 і M_2 в площині на відстані r. M_1 нерухомий, а M_2 може вільно обертатися навколо свого центру. Покажіть, що для рівноваги необхідно щоб $\tan\theta_1 = 2\tan\theta_2$, де θ_1 і θ_2 — кути між r і M_1 та M_2 відповідно.

8. Використовуючи рівняння

$$-\frac{g}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} > \frac{k^2 u_0^2}{4},$$

   оцініть швидкість зростання нестабільності плазми

   а. В іоносфері Землі на відстані 100 км. Інформацію про $\partial n_0/\partial x$ можна отримати, вважаючи, що шкала висот 5 км. Припустимо, що густина 10^{12} м$^{-3}$ і $u_0 \approx 100$ m/s і зважаючи, що $(\omega - ku_0) \ll \omega_c$.

   б. У короні Сонця. Шкалу висот можна визначити, використовуючи рівняння неперервності та припускаючи, що густина 10^{12} м$^{-3}$.

9. Ізольований «малий» об'єм високопровідної плазми (плазмоїд) у слабко неоднорідному магнітному полі можна розглядати як диполь з магнітним моментом $\mu = -\kappa \mathbf{B}$, де κ — форм-фактор, що залежить від геометрії плазмоїда. Для сферичного плазмоїда, $\kappa = r^2/2$, де r — радіус.

10. Покажіть, що для плазмоїду який не обертається, сила, яка на нього діє, визначається формулою:
$$F = -\frac{\kappa}{2}\nabla B^2,$$
якщо κ постійне, рух плазмоїда еквівалентний руху частинки в потенціалі $\phi = \left(\kappa B^2/2\right)$. Визначте повну енергію плазмоїда, якщо швидкість плазмоїда U, та опишіть рух плазмоїдів в хвості магнітосфери, якщо $\vec{B} = (B_0 z/L)\,\hat{x}$, де B_0 - стала величина.

1.6 Турбулентність

1. Знайти швидкість дисипації енергії в'язкої нестискуваної рідини.

2. При виверженні вулкана створюється турбулентний шлейф, в якому є інтегральний масштаб турбулентності $l \sim 10$ м, а типова турбулентна швидкість 20 м/с. Якщо в'язкість газу становить 10^{-5} м^2/с, оцініть розмір найменших вихорів у шлейфі. Порівняйте це із середньою довжиною вільного пробігу повітря.

3. В аеродинамічній трубі, кінетична енергія на одиницю маси для сіткової турбулентності спадає з часом за законом $u^2 \sim t^{-10/7}$. Припускаючи, що найбільші вихори передають енергії за час свого обертання, показати, що величина $u^2 l^5 = const$.

4. Знайдіть спектр турбулентних пульсацій нестискуваної рідини (спектр Колмогорова).

5. Знайти частку енергії електромагнітного поля у повній енергії турбулентності для:
   - іонно-акустичних коливань;
   - ленгмюрівських коливань;
   - поперечних коливань.

6. Знайти розподіл тиску за відомим розподілом швидкості в'язкої нестискуваної рідини.

7. Знайдіть необхідну кількість точок для проведення комп'ютерного моделювання турбулентного середовища з інтегральним масштабом l в боксі з довжиною ребра L_{box}, враховуючи необхідність забезпечення достатнього просторового розділення на масштабах, починаючи з колмогорівського мікромасштабу:
   - для просторових координат;
   - для часової області;
   - оцінити час виконання моделювання, опираючись на загальну кількість точок обчислення у просторі та тривалості фізичного часу T. Як зміниться час обчислення, якщо збільшити параметр Рейнольдса від 10^3 до 10^4.
8. Визначіть за яких умов в атмосферах планет будуть мають місце вільні конвективні рухи [1].
9. Покажіть, що рівняння Нав'є-Стокса для опису конвективних процесів набуває вигляду

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla \frac{p'}{\rho_0} - \beta T' \vec{g} + \nu \Delta \vec{v},$$

   де «$-\beta T'\vec{g}$» - величина, що описує силу плавучості (суперпозицію сили тяжіння і сили Архімеда).
10. Слідуючи викладкам зробленим Релеєм в 1916 році [***посилання на літературу***], визначте критичне число Релея для горизонтального шару рідини товщиною h з вільними, але такими що не деформуються, межами, на яких підтримується різниця температур ΔT.
11. Доведіть, що, за відсутності дисипативних процесів, потік для вихрових рухів (потік вихору) зберігається.
12. Для розвиненої турбулентності знайдіть зв'язок між дисипацією турбулентної енергії та коефіцієнтом турбулентної в'язкості.

1.7 Кінетична теорія плазми

1. Отримайте із кінетичного рівняння дисперсійне рівняння для поширення високочастотних електромагнітних хвиль у плазмі.

[1] В рідині, що заходиться в полі сили тяжіння, за умови механічної рівноваги розподіл температури залежить тільки від висоти z.

2. У плазмі із $n = 10^{17}$ м$^{-3}$ і $k_b T_e = 10$ еВ збуджуються плазмові хвилі. Знайдіть приблизне значення декременту загасання Ландау $|\mathrm{Im}\,(\omega/\omega_p)|$, якщо $k = 10^4$ м$^{-1}$.

3. У плазмі із $n = 10^{15}$ м$^{-3}$ і $k_b T_e = 10$ еВ виникає електронна плазмова хвиля із довжиною хвилі 1 см. Потім джерело генерації хвилі відключається і хвиля загасає згідно з ефектом загасання Ландау. За який проміжок часу амплітуда хвилі зменшиться в e разів?

4. Вважаючи, що в деякій моделі теплої плазми іонна й електронна функції розподілу задаються, відповідно, виразами:

   $$\hat{f}_{e0}(v) = (a_e/\pi)\left[v^2 + a_e^2\right]^{-1}, \hat{f}_{i0}(v) = (a_i/\pi)\left[v^2 + a_i^2\right]^{-1}$$

   - Використовуючи рівняння Власова, отримайте дисперсійне рівняння для електростатичних збурень.

   - Отримайте наближений вираз для дисперсійного рівняння при $\omega \leq \omega_p$. При яких умовах хвилі затухають слабо?

   - Дайте фізичне пояснення, чому $\omega \approx \omega_p$ у випадку дуже великих k.

5. Розглянемо систему однорідно розподілених у просторі частинок із постійною концентрацією n_0. Функція розподілу по швидкості задається співвідношенням $f(v) = K_0$ для $|v_i| \leq v_0 (i = x, y, z), \quad f(v) = 0$ для інших випадків, де $_0$ – додатна константа, що не дорівнює нулю. Отримайте вираз для $_0$ через v_0 і n_0.

6. Розгляньте двомірну функцію розподілу Максвела:

   $$f\left(v_x, v_y\right) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right) \exp\left[-\frac{m\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{2k_b T}\right]$$

   Покажіть, що n_0 коректно описує густину частинок, тобто кількість частинок на одиницю площі. Схематично намалюйте в тримірній проекції поверхню даної функції розподілу, зобразивши $f\left(v_x, v_y\right)$ як функцію v_x і v_y. Відмітьте на даному графіку криві постійного значення v_x, v_y, і f.

7. Електрони всередині системи, що складається із двох магнітних дзеркал, можна описати так званою функцією розподілу із конусом втрат:

   $$f(\vec{v}) = \frac{n_0}{\pi^{3/2} a_\perp^2 a_\parallel} \left(\frac{v_\perp}{a_\perp}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{v_\perp}{a_\perp}\right)^2 - \left(\frac{v_\parallel}{a_\parallel}\right)^2\right]$$

де через $v_{\parallel}$ і $v_{\perp}$ позначені величини швидкостей електронів у напрямку, паралельному і перпендикулярному до осі магнітної пробки, а $a_{\parallel}^2 = 2k_bT_{\parallel}/m$ і $a_{\perp}^2 = 2k_bT_{\perp}/m$. Покажіть, що густина електронів у магнітній пробці буде рівна n_0

8. Розгляньте рух заряджених частинок для одномірного випадку при наявності електричного потенціалу $V(x)$. Покажіть, що функція виду $f = f\left(mv^2/2 + qV\right)$ дає розв'язок рівняння Больцмана для стаціонарного випадку.

9. Доведіть, що при наявності азимутального симетричного поля (в напрямку z) розв'язок рівняння Больцмана при стаціонарних умовах задається функцією виду $f = f\left(mv^2/2, mr^2\dot{\phi} + qrA_{\phi}\right)$ де $p_{\phi} = mr^2\dot{\phi} + qrA_{\phi}$ – узагальнений імпульс, а A_{ϕ} – компонента магнітного потенціалу, яка визначається як $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

10. Покажіть, що рівняння Власова для однорідної плазми, яка знаходиться під впливом постійного зовнішнього магнітостатичного поля в рівноважному стані, задовольняє однорідній функції розподілу $f\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right)$, яка є циліндрично симетричною по відношенню до магнітного поля.

11. Розгляньте одномірний гармонічний осцилятор, повну енергію якого можна записати як $E = \left(mv^2 + cx^2\right)/2$ де c – константа, а x – зміщення. Покажіть, що траєкторія точки осцилятора в фазовому просторі – еліпс.

12. Розподіл частинок по тепловій кінетичній енергії E для максвелівського газу рівний

$$G(E) = \frac{2nE^{1/2}}{\pi^{1/2}\left(k_bT\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{k_bT}\right).$$

Отримайте вираз для найбільш ймовірної енергії і покажіть, що швидкість частинок із даною енергією рівна $\left(k_bT/m\right)^{1/2}$.

13. Покажіть, що середня теплова енергія, яка припадає на одну частинку в газі за умови термодинамічної рівноваги, рівна $1.292 \cdot 10^{-4}$ еВ/К.

14. Використовуючи хвильове рівняння та лінеаризоване рівняння Больцмана, отримайте дисперсійне рівняння для поперечних електромагнітних хвиль, вважаючи, що немає резонансних частинок.

15. Вкажіть особливості стаціонарного розв'язку рівняння Власова у дрейфовому наближенні.

16. Показати, що густина та тиск плазми на фіксованій силовій лінії залежить тільки від величини магнітного поля B.

17. Отримайте рівняння зміни одиниці об'єму ентропії (S) для максвелівської функції розподілу.

18. Отримайте рівняння

$$nT\frac{d}{dt}\frac{s}{n} = Q - ne\vec{E}u$$

використовуючи момент кінетичного рівняння Власова з вагою $mv^2/2$.

19. Показати, що в плазмі з градієнтом електронної температури на електрони діє сила тертя, навіть якщо потік електронів у середовищі рівний нулеві.

20. Знайдіть величину електричного поля для ізольованої плазми за наявності градієнта температури (ефект Зеєбека). Розгляньте стаціонарний випадок, а для інтегралу зіткнень скористайтеся формулою лоренцівського інтегралу зіткнень

$$\{\mathrm{St}\} = \frac{A}{\nu^3}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta},$$

де $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda/m^2$.

21. Знайти потік тепла, що пов'язаний із відносним рухом електронів та іонів.

1.8 Плазма в космосі

1. В ядерному синтезі водню в основних реакціях приймають участь ізотопи водню – дейтерій (^2H) і тритій (^3H):

$$\begin{gathered}
^2H + {}^2H \to {}^3He + {}^1n + 3.27\mathrm{MeB} \\
^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + {}^1\mathrm{H} + 4.03\mathrm{MeB} \\
^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \to {}^4\mathrm{He} + {}^1n + 17.58\mathrm{MeB} \\
^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{He} \to {}^4\mathrm{He} + {}^1\mathrm{H} + 18.34\mathrm{MeB}
\end{gathered}$$

(^1n) – нейтрон. Знайдіть кількість енергії, що виділяється при згоранні 1 г дейтерію в даних реакціях, вважаючи що кінцеві продукти реакції – ${}^4He$, ${}^1H$ і (${}^1n$), а дві перші реакції проходять із однаковою ймовірністю. Скільки енергії виділяється при згоранні всього дейтерію, який міститься в одному літрі звичайної води? Порівняйте отриманий результат із енергією, що отримується при згоранні одного літра бензину.

2. Яку масу втрачає Сонце за одиницю часу внаслідок сонячного вітру? Припустимо, що на відстані 1 а.о. $n = 10^7$ протон/м^3 . Який час потрібен, щоб Сонце вичерпало свою масу?

3. За рахунок обертання Сонця силові лінії магнітного поля закручуються. Показати із закону збереження моменту імпульсу, що поперечна складова потоку є набагато меншою за швидкість потоку в радіальному напрямку.

4. Яка кінетична енергія протонів сонячного вітру на відстані 1 а.о.?

5. Яка теплова енергія протонів сонячної корони?

6. Знайдіть циклотронну частоту і ларморівський радіус для:

   - Електрона в іоносфері Землі на висоті 300 км, де магнітна індукція $B = 0.5 \cdot 10^{-4}$ Тл, а температура $T = 1000$ К.
   - Протона з енергією 50 МеВ у внутрішньому радіаційному поясі Землі у екваторіальній площині на відстані $1.5R_{\text{Землі}}$, якщо $B = 10^{-5}$ Тл.
   - Електрона з енергією 1 МеВ у зовшішньому радіаційному поясі в екваторіальній площині на відстані біля $4R_{\text{Землі}}$, $B = 10^{-7}$ Тл.
   - Протона сонячного вітру, що рухається зі швидкістю 100 км/с в магнітному полі $B = 10^{-9}$ Тл.
   - Протона з енергією 1 МеВ в районі плями в сонячній фотосфері, вважаючи що $B \approx 0.1$ Тл.

7. Знайдіть в іоносфері Землі на висоті 3000 км в екваторіальній площині, де $B = 0.5 \cdot 10^{-4}$ Тл, для електрона і атомарного іона кисню:

   - швидкість дрейфу в гравітаційному полі Землі;
   - густину струму викликану даним дрейфом. За умови, що магнітне поле перпендикулярне до сили гравітації, а $n_e = n_i = 10^{12}$ м$^{-3}$.

8. Розрахувати магнітний момент електрона, який знаходиться в площині екватора на магнітній оболонці $L = 3$ з енергією 14 кеВ та пітч кутом 30°.

9. Плазмоїд в сонячному вітрі поширюється зі швидкістю $v_{SW} = 440$ км/с, з певним надлишком концентрації плазми Δn над концентрацією середовища з $n = 4.2$ см$^{-3}$. При наближенні до магнітопаузи швидкість плазмоїду сповільнюється до 3 км/с, а оточуюче середовище нерухоме. Знайдіть надлишок концентрації Δn.

10. В деякій точці простору електричне та магнітне поле перпендикулярні, внаслідок чого виникає дрейф заряджених частинок зі швидкістю 43 км/с. Концентрація плазми $n = 0.5$ см$^{-3}$, а напруженість магнітного поля 5 нТл. Яким повинен бути градієнт тиску в напрямку електричного поля, щоб повний дрейф став рівний нулеві?

11. Знайдіть максимальну перпендикулярну швидкість протону в нейтральному шарі, після чого його рух буде неадіабатичним. Геомагнітне поле в цій області становить 6 нТл з мінімальною кривиною в $0.2R_E$ (радіус Землі $R_E = 6371$ км).

12. Обґрунтуйте, як раптове зростання швидкості сонячного вітру може прискорити частинки всередині магнітосфери.

13. Знайдіть за якого співвідношення між температурою і прискоренням вільного падіння буде відбуватися перехід до надзвукового розширення сонячного вітру? Отримайте розв'язок використовуючи зміну конфігурації силових ліній (сопло Лаваля).

14. Оцінити швидкість, необхідну для генерації великомасштабного магнітного поля в плазмі, що рухається, і характерний час τ наростання напруженості поля на Сонці.

15. Визначити від яких параметрів залежить розмір порожнини за супутником, що рухається зі швидкістю v у плазмі.

1.9 Границі в космосі

1. Визначте тиск в точці стагнації при обтіканні потоком сонячного вітру Місяця.

2. Знайдіть величину стрибка густини і швидкості для одноатомного і двох атомного разу в сильній ударній хвилі.

3. Оцініть верхню межу нагрівання плазми під час сильної ударної хвилі.

4. Знайдіть швидкість перетворення енергії магнітного поля в енергію плазми в області переоб'єднання силових ліній магнітного поля магнітосфери Землі.

5. Доведіть, що швидкість наближення силових ліній до області анігіляції (область перез'єднання) пропорційна альвенівській швидкості $U_x \propto V_A$.

6. Оцініть, скільки процентів із загальної енергії припадає на густину енергії міжпланетного магнітного поля (ММП, IMF) в області магнітопаузи Землі. При розрахунках використайте, що $B_{IMF} = 5$ нТл, $n = 10^6$ м$^{-3}$, $U_{SW} = 400$ км/с.

7. Оцініть значення електричного потенціалу, що викликаний потоком сонячного вітру, в хвості магнітосфери, якщо $B_{IMF} = 5$ нТл, $U_{SW} = 400$ км/с, а розміри хвоста $20R_E$.

8. Покажіть, що положення магнітопаузи для дипольного магнітного поля задається співвідношенням

$$r^6 = \frac{\mu_0 M^2}{64\pi^2 m_i n_i U_{SW}^2 \cos^2\phi}$$

   Оцініть положення магнітопаузи в екваторіальній площині, якщо $U_{SW} = 400$ км/с.

9. Розгляньте електричне поле, що виникає в конфігурації магнітного поля в результаті суперпозиції міжпланетного магнітного поля, яке направлене на південь, та дипольного поля Землі. Запишіть рівняння для потенціалу в площині xz. Оцініть різницю потенціалу між денною і нічною стороною, якщо $B_{IMF} = 10$ нТл, $U_{SW} = 400$ км/с і $B_P = 30000$ нТл для широти, де магнітні силові лінії відкриті (полярні області на висотах іоносфери).

10. Значення швидкості сонячного вітру варіюється від 200 км/с до 800 км/с. Розрахуйте і побудуйте графіки:

    - Альфвенівського числа Маха як функції U_{SW}, якщо B_{IMF} змінюється в межах $1 - 50$ нТл.

    - Плазмового параметра для сонячного вітру, за умови, що має місце теплова рівновага, і концентрація частинок варіюється між $n = 10^6 - 10^7$ м$^{-3}$

- Магнітозвукового числа Маха як функції температури сонячного вітру (від 1 до 100 еВ).

11. Для перпендикулярної ударної хвилі знайдіть такі параметри після проходження ударної хвилі як:

    - швидкість як функцію швидкості потоку до ударної хвилі, якщо коефіцієнт стиснення рівний 2;

    - тиск як функцію тиску до ударної хвилі, якщо швидкість потоку після фронту ударної хвилі має значення 50 км/с.

12. Використовуючи рівняння для ідеального газу $p = \rho RT$ та $T_2/T_1 = p_2\rho_1/p_1\rho_2$ отримайте для сильної ударної хвилі рівняння:

$$\frac{p_2}{\rho_1} \to \frac{2\gamma(\gamma-1)M_1^2U_1^2}{(\gamma+1)^2}$$

.

2

Розв'язання

2.1 Базові питання

Задача 2.

Розв'язок:

На малій відстані r від пробного точкового заряду q потенціал буде $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 r = \varphi_c$, де ε_0 - діелектрична проникність вакууму. Однак на більшій відстані значення потенціалу зміниться за рахунок поляризації плазми, що викликана полем заряду q. В рівноважному стані просторовий розподіл кількості електронів і іонів в околі пробного заряду визначається розподілом Больцмана $n = n_0 e^{-\hat{U}/k_b T}$, де $\hat{U}$ - потенціальна енергія частинки (у полі потенціалу φ, $\quad \hat{U} = \pm e\varphi$). Тоді просторовий розподіл електронів та іонів буде

$$n_e = n_0 e^{e\varphi/k_b T} \text{ і } n_i = n_0 e^{-e\varphi/k_b T}.$$

При цьому вважаємо, що електрони й іони мають однакову температуру і виконується умова квазінейтральності: $n_{0i} = n_{0e} = n_0$. Повну густину заряду, включаючи і пробний заряд, який розміщений в початку координат, можна записати у вигляді

$$\rho(\vec{r}) = -e\left(n_e(\vec{r}) - n_i(\vec{r})\right) + q\delta(\vec{r}),$$

де $\delta(\vec{r})$ - дельта-функція Дірака.

Підставивши вираз для напруженості електричного поля $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ в рівняння Максвела $\operatorname{div}\vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ отримаємо рівняння Пуассона:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

А також диференційне рівняння:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) - \frac{en_0}{\varepsilon_0}\left[e^{e\varphi/k_bT} - e^{-e\varphi/k_bT}\right] = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}).$$

За умови $e\varphi \ll k_bT$ можна розкласти експоненту в ряд по малому параметру ($e^x = 1 + x + \ldots$). При цьому будемо мати

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) - \frac{en_0}{\varepsilon_0}\left[1 + \frac{e\varphi}{k_bT} - \left(1 - \frac{e\varphi}{k_bT}\right)\right] = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}),$$
$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) - \frac{2e^2n_0\varphi}{\varepsilon_0k_bT} = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}).$$

Позначивши

$$\frac{\varepsilon_0k_bT}{e^2n_0} = \lambda_D^2.$$

Отримаємо

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) - \frac{2\varphi}{\lambda_D^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}).$$

При $r \to 0$ ми будемо мати рівняння:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}),$$

розв'язком якого буде кулонівський потенціал -

$$\varphi_c = q/4\pi\varepsilon_0 r.$$

А глибина екранування буде

$$d_{\text{екранування}} = \lambda_D/\sqrt{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0k_bT}{2e^2n_0}}.$$

Відповідь: глибина екранування буде

$$d_{\text{екранування}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0k_bT}{2e^2n_0}}.$$

Задача 3.
Розв'язок:
Для визначення напруженості електричного поля скористаємося:

$$n = n_0e^{\frac{e\varphi}{kT_e}}, \quad \varphi = \left(\frac{kT_e}{e}\right)\ln\left(\frac{n}{n_0}\right)\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Тоді

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e_r} = -\frac{kT_e}{e}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial r}\vec{e_r} = -\frac{kT_e}{e\lambda}\vec{e_r}.$$

Швидкість дрейфу в електричному полі

$$\vec{v_E} = -\frac{E_r}{B}\vec{e_\theta} = \frac{kT_e}{eB\lambda}\vec{e_\theta}.$$

Швидкість теплового руху електронів

$$v_{\text{тепл}} = \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{1/2},$$

$$|v_E| = \frac{kT_e}{m_e}\frac{m_e}{eB\lambda}$$

Оскільки $v_\perp = v_{\text{тепл}}$, а циклотронний (ларморівський) радіус $r_c = mv_\perp/eB$. То при

$$r_c = 2\lambda \Rightarrow v_E = v_{\text{тепл}}.$$

Відповідь: радіальний розподіл напруженості електричного поля $\vec{E} = -kT_e\vec{e_r}/e\lambda$, і при $r_c = 2\lambda \Rightarrow v_E = v_{\text{тепл}}$.

Задача 7.
Розв'язок:
Сила відштовхування визначається законом Кулона:

$$F(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_0^2}, \quad q_1 = q_2 = Ze,$$

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}} \cdot \frac{\left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2 \text{Кл}^2}{\left(10^{-12}\right)^2 \text{м}^2} \approx 2.3 \text{ Н}.$$

Потенціальна енергія

$$U(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} F(r)dr = -\left.\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_2}\right|_{r_0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_0} = 2.3 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}.$$

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2}kT$$

За умовою

$$\langle E_K \rangle = U(r_0)$$

тоді отримаємо

$$T = \frac{2}{3}\frac{U}{k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2.3 \cdot 10^{-14}\text{Дж}}{1.38 \cdot 10^{-23}\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}} \approx 1.1 \cdot 10^{9} \text{ К}$$

Відповідь:

$$F(r_0) \approx 2.3 \text{ Н}, \quad U(r_0) = 2.3 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}, \quad T \approx 1.1 \cdot 10^{9} \text{ К}.$$

Задача 9.
Розв'язок:
Рівняння руху

$$m\frac{d^2\delta x}{dt^2} = -eE_x.$$

Значення E_x, можна отримати використовуючи теорему Гауса (рівняння Максвела) $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow E_x/\delta x = en/\varepsilon_0$.

Тоді

$$m\frac{d^2\delta x}{dt^2} = -\frac{e^2 n}{\varepsilon_0}\delta x, \quad \frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}\delta x = 0.$$

Це рівняння описує просте гармонічне коливання з частотою $\sqrt{e^2 n/\varepsilon_0 m} = \omega_p$.

Розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді

$$\delta x = (\delta x)_0 \cos\omega_p t.$$

Відповідь: доведено, що електричне поле буде

$$E_x = \left(\frac{ne}{\varepsilon_0}\right)\delta x,$$

рівняння руху електрона -

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}\delta x = 0,$$

а частота коливань - $\omega_p = \sqrt{e^2 n/\varepsilon_0 m}$.

Задача 10.
Розв'язок:
Тепловий потік з одиниці об'єму дорівнює $3nT/\tau$, де $tau = 1$ сек. Потік S на одиницю поверхні знаходимо з рівняння балансу

$$2\pi R \cdot S = \pi R^2 \frac{3nT}{\tau}$$

Звідси

$$S = \frac{3}{2} \frac{3nTR}{2\tau} = 2.4 \cdot 10^5 \cdot R \quad [\text{м}] \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

При $R = 2$ м отримаємо $S = 480$ кВт/м$^{\mathbf{2}}$. Це число отримано у припущенні, що α-частинки досягають стінки. Якщо вони гальмуються у плазмі, то тепловий потік потрібно помножити на 4/5.

Відповідь: при при $R = 2$ м отримаємо $S = 480$ кВт/м$^{\mathbf{2}}$.

2.2 Рух заряджених частинок

Задача 1.

Розв'язок:

Рівняння руху буде мати вигляд:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Сила в даному випадку перпендикулярна до швидкості, тому вона не виконує механічної роботи. Скалярно помноживши рівняння руху на швидкість, отримаємо, що

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = q\vec{v} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] = 0.$$

Таким чином, кінетична енергія частинки в однорідному магнітному полі зберігається і є інтегралом руху.

Відповідь: отримано що

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = const.$$

Задача 2.

Розв'язок:

Рівняння руху:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Розкладемо вектор швидкості на поздовжню і перпендикулярну складову до напрямку магнітного поля $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, тоді отримаємо:

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\left[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}\right]$$

оскільки $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} = 0$. то можна записати через систему двох рівнянь, одне для поздовжніх компонент, інше - для перпендикулярних:

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}\left[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}\right].$$

Нехай магнітне поле направлене по осі $z : \vec{B} = (0, 0, B)$, тоді перпендикулярну складову можна переписати у вигляді:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B,$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B.$$

Взявши похідну по часу від першого рівняння, підставивши в отриманне рівняння друге рівняння і проінтегрувавши отримаємо

$$x - x_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin\left(\omega_c t + \phi\right),$$
$$y - y_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos\left(\omega_c t + \phi\right).$$

де, $\omega_c = |q|B/m$ - гірочастота

Слід доповнити систему також рухом вздовж осі z

$$z - z_0 = v_{\parallel} t.$$

Перші два рівняння описують рух частинки по колу із радіусом $v_{\perp}/\omega_c$ в площині xy.

Координати x_0, y_0, z_0 і кут $\phi\,(\operatorname{tg}\phi = v_x(0)/v_y(0))$ визначаються із початкових умов.

Відповідь: траєкторія частинки в постійному магнітному полі вздовж осі z має вигляд циліндричної спіралі із віссю, паралельною $\vec{B}$ та радіусом $v_{\perp}/(|q|B/m)$ в площині xy.

Задача 3.

Розв'язок:

Для заданої конфігурації електромагнітного поля

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y + \frac{\omega_c E_x}{B} \\
\frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \\
\frac{dv_z}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

де ω_c - циклотронна частота. Диференціюючи друге рівняння і використовуючи перше, отримаємо

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = -\frac{\omega_c^2 E_x}{B}$$

Зробивши заміну змінних $v_y = u - (E_x/B)$ отримаємо

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_c^2 u = 0$$

Розв'язком даного рівняння буде

$$u = A\cos\omega_c t + C\sin\omega_c t,$$

а врахувавши заміну, отримаємо

$$v_y = A\cos\omega_c t + C\sin\omega_c t - \frac{E_x}{B},$$

A і C - константи інтегрування, які визначаються із початкових умов. Диференціюючи дане рівняння і використовуючи друге рівняння вхідної системи рівнянь знайдемо розв'язок для v_x. За довільних початкових умов $\vec{v}(t=0) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$, отримаємо

$$\begin{aligned}
v_x &= v_{x0}\cos\omega_c t + \left(v_{y0} + \frac{E_x}{B}\right)\sin\omega_c t, \\
v_y &= \left(v_{y0} + \frac{E_x}{B}\right)\cos\omega_c t - v_{x0}\sin\omega_c t - \frac{E_x}{B}, \\
v_z &= v_{z0}.
\end{aligned}$$

Відповідь: швидкість руху зарядженої частинки в електромагнітному полі визначається як

$$\begin{aligned}
v_x &= v_{x0}\cos\omega_c t + \left(v_{y0} + \frac{E_x}{B}\right)\sin\omega_c t, \\
v_y &= \left(v_{y0} + \frac{E_x}{B}\right)\cos\omega_c t - v_{x0}\sin\omega_c t - \frac{E_x}{B}, \\
v_z &= v_{z0}.
\end{aligned}$$

Задача 4.
Розв'язок
Рівняння руху для довільної сили $\vec{F}$ можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}[\vec{v} \times \vec{B}] + \frac{\vec{F}}{m}$$

А окремо для поздовжньої і перпендикулярної складової до $\vec{B}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} &= \frac{\vec{F}_{\parallel}}{m}, \\ \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} &= \frac{\vec{F}_{\perp}}{m} + \frac{q}{m}\left[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}\right]. \end{aligned}$$

Нехай $\vec{v}_{\perp} = \vec{u} + \vec{W}_D$, де $\vec{W}_D$ - постійна величина дрейфової швидкості, $\vec{u}$ швидкість руху по колу. Тоді рівняння для перпендикулярної складової руху буде

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{W}_D \times \vec{B} + \frac{q}{m}[\vec{u} \times \vec{B}] + \frac{\vec{F}_{\perp}}{m}.$$

Оскільки $d\vec{W}_D/dt = 0$, то можна відокремити чисто циклотронний рух від дрейфового

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m}[\vec{u} \times \vec{B}], \\ &\vec{F}_{\perp} + q\left[\vec{W}_D \times \vec{B}\right] = 0. \end{aligned}$$

Перше рівняння - циклотронний рух, а друге - дрейфовий рух.

Помножимо друге рівняння векторно на $\vec{B}$ і врахувавши тотожність $[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} - b^2\vec{a}$. Оскільки $\vec{W}_D$ перпендикулярна до $\vec{B}$, то отримаємо вираз

$$\vec{W}_D = \frac{1}{q}\frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Відповідь: швидкість дрейфу ведучого центру задається співвідношенням

$$\vec{W}_D = \frac{1}{q}\frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}.$$

Задача 5.

Розв'язок: Рівняння руху:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\vec{E}(t)}{m} + \frac{q}{m}[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Якщо позначити швидкість як $\vec{v} = \vec{u} + \vec{W}_E + \vec{W}_p$, де $\vec{W}_p$ - поляризаційний дрейф, а $\vec{W}_E = \vec{E} \times \vec{B}/B^2$ - дрейф в електричному полі, то рівняння руху можна переписати

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{W}_E}{dt} + \frac{d\vec{W}_p}{dt} = \frac{q}{m}[\vec{u} \times \vec{B}]$$

Тут враховано, що $\vec{W}_E$ залежить від часу, а $q[\vec{E} \times \vec{B}] \times \vec{B}/B^2 = -q\vec{E}$.

Враховуючи суперпозицію рухів, перепишемо дане рівняння як систему

$$m\frac{d\vec{W}_E}{dt} = q\left[\vec{W}_p \times \vec{B}\right],$$
$$m\frac{d\vec{u}_1}{dt} + m\frac{d\vec{W}_p}{dt} = q\left[\vec{u}_1 \times \vec{B}\right].$$

Якщо ми помножимо перше рівняння векторно на $\vec{B}$, та врахувавши, що $\vec{W}_p \cdot \vec{B} = 0$, отримаємо

$$\vec{W}_p = -\frac{m}{qB^2}\frac{d\vec{W}_E}{dt} \times \vec{B}$$

Знехтувати зміною поляризаційного дрейфу з часом можна лише за умови

$$\frac{\left|md\vec{W}_p/dt\right|}{\left|q\vec{u}_1 \times \vec{B}\right|} \ll 1, \Rightarrow \frac{m^2}{q^2B^2}\frac{\left|d^2\vec{W}_E/dt^2 \times \vec{B}\right|}{\left|\vec{u}_1 \times \vec{B}\right|} = \frac{\upsilon^2}{\omega_c^2}\frac{\left|\vec{W}_E\right|}{|\vec{u}_1|} \ll 1,$$

де ω_c- циклотронна частота, d/dt - ν (характерна частота зміни електричного поля $\vec{E}$). Ми можемо нехтувати доданком $d\vec{W}_p/dt$, якщо

$$\frac{\upsilon^2}{\omega_c^2}\frac{\left|\vec{W}_E\right|}{|\vec{u}_1|} \ll 1.$$

Відповідь: знехтувати зміною поляризаційного дрейфу з часом можна якщо зміни напруженості електричного поля малі на масштабах ларморівського радіусу

$$\frac{v^2}{\omega_c^2}\frac{\left|\vec{W}_E\right|}{|\vec{u}_1|} \ll 1.$$

Задача 6.

Розв'язок:

Загальний магнітний потік через поверхню, обмежену ларморівським радіусом:

$$\Phi = BS = B\pi r_c^2 = B\pi\frac{v_\perp^2}{\omega_c^2} = \frac{2\pi m}{q^2}\mu.$$

Оскільки, $\mu = mv_\perp^2/2B = \mathrm{const}$, то і магнітний потік зберігається (є адіабатичним інваріантом).

Відповідь: показано, що при $\mu = \mathrm{const} \Rightarrow \Phi = \mathrm{const}$.

Задача 11.

Розв'язок:

Векторний потенціал для дипольного магнітного поля

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{M} = M\vec{e_z},$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r}),$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\left(-2\sin\lambda\vec{e}_r + \cos\lambda\vec{e}_\lambda\right),$$

$$B(r,\lambda) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}$$

Рівняння силової лінії у сферичних системах

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\lambda}{B_\lambda} = \frac{\cos\lambda d\varphi}{B_\varphi}$$

$$d\varphi = 0: \quad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\lambda} = \frac{B_r}{B_\lambda} = -\frac{2\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2d\cos\lambda}{\cos\lambda}; \quad r = r_0\cos^2\lambda$$

- рівняння силової лінії

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\lambda^2 + r^2 \cos^2\lambda d\varphi^2$$

Підставимо отримане рівняння силової лінії в елемент отриманої довжини ds^2 :

$$ds^2 = 4r_0^2\cos^2\lambda\sin^2\lambda d\lambda^2 + r_0^2\cos^4\lambda d\lambda^2 = r_0^2\cos^2\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)$$

Тому

$$\frac{ds}{d\lambda} = r_0^2\cos\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2},$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{d\lambda}} = \frac{1}{r_0\cos\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}}$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{d\lambda}{ds}\frac{dB}{d\lambda} = \frac{1}{r_0\cos\lambda(1+3\sin\lambda)^{1/2}}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\mu_0 M}{4\pi r_0^3\cos^6\lambda}\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r_0\cos\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}}\frac{\mu_0 M}{4\pi r_0^3}\frac{3\sin\lambda\left(3+5\sin^2\lambda\right)}{\cos^7\lambda\left(1+3\sin^2\lambda\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{3\mu_0 M}{4\pi r_0^4}\frac{\sin\lambda}{\cos^8\lambda}\frac{\left(3+5\sin^2\lambda\right)}{\left(1+3\sin^2\lambda\right)}$$

Відповідь: для дипольної конфігурації магнітного поля індукція магнітного поля вздовж елемента дуги силової лінії змінюється як:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{3\mu_0 M}{4\pi r_0^4}\frac{\sin\lambda}{\cos^8\lambda}\frac{\left(3+5\sin^2\lambda\right)}{\left(1+3\sin^2\lambda\right)}$$

Задача 21.

Розв'язок:

Магнітний момент частинки зберігається

$$\mu = \frac{mv^2\sin^2\alpha}{2B} = \text{const}$$

Оскільки змінюються лише $v_\parallel$, $v_\perp$ то

$$\frac{mv^2}{2} = \text{const}$$

Нехай частинка зазнає відбиття в точці простору B_R:

$$\frac{\sin^2\alpha_0}{B_0} = \frac{\sin^2\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)}{B_R} \Rightarrow \sin^2\alpha_0 = \frac{B_0}{B_R}$$

Частинки з $\alpha < \alpha_0$ будуть попадати в конус втрат і "висипатися"в атмосферу

$$B_0 = B_{\otimes}\left(\frac{R_E}{r\left(R_E\right)}\right)^3 \Rightarrow \frac{B_0}{B_R} = \left(\frac{R_E}{r_0}\right)^3$$

$$\alpha_0 = \arcsin\left[\left(\frac{R_E}{r_0}\right)^{3/2} = \arcsin\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{3/2}\right] \approx 3.9^\circ\right.$$

Відповідь: $\alpha_0 \approx 3.9^\circ$

2.3 Основи магнітогідродинаміки

Задача 1.

Розв'язок:

Вираз для загальної густини заряду плазми ρ_c, що складається із іонів (протонів) і електронів (умова квазінейтральності виконується), можна записати як

$$\rho_c = q_i n_i + q_e n_e, \quad q_i = -q_e, n_e = n_i, \quad \Rightarrow \quad \rho_c = 0,$$

а рівняння Максвела для напруженості електричного поля $\vec{E}$ набуде вигляду $\operatorname{div}\vec{E} = 0$.

Відповідь: показано, що магнітогідродинамічна рідина є електрично нейтральною (вільні заряди не накопичуються).

Задача 2.

Розв'язок:

Щоб знехтувати струмом зміщення в рамках МГД потрібно щоб струм зміщення $\left(\left|\partial\vec{D}/\partial t\right|\right)$ був набагато менше струму провідності $|\vec{j}|$: Тобто

$$\left|\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right| = \varepsilon_0\left|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right| \approx \varepsilon_0\frac{|\vec{E}|}{T},$$

$$|\vec{j}| = |\vec{\nabla}\times\vec{H}| \approx \frac{H}{L} = \frac{B}{\mu_0 L},$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0\frac{|\vec{E}|}{T} \ll \frac{B}{\mu_0 L}.$$

Для середовища, що характеризується великою провідністю ($\sigma \to \infty \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{U} \times \vec{B}|$), отримаємо

$$\varepsilon_0 U \frac{B}{T} \ll \frac{B}{\mu_0 L} \Rightarrow T \gg \frac{UL}{c^2},$$

де c - швидкість світла ($c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$). Для випадку $U/c \ll 1$, струмом зміщення можна нехтувати, коли $T \gg L/c$ (характерний час варіацій електромагнітних величин (T) повинен бути набагато більшим, ніж час, за який світло проходить характерну відстань (L).

Відповідь: струмом зміщення можна знехтувати якщо виконується умова $T \gg L/c$.

Задача 3.

Розв'язок:

Система МГД включає:

- Рівняння Максвела

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j},$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0.$$

- Рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho_m \vec{U} = 0.$$

- Рівняння руху

$$\rho_m \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p.$$

- Рівняння стану

$$\frac{d}{dt}\left(p\rho_m^{-\gamma}\right) = 0 \text{ - адіабатична рідина.}$$

Де густина струму ($\vec{j}$) визначається законом Ома

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}),$$

а вираз для масової густини середовища ρ_m та швидкості $\vec{U}$:

$$\rho_m = \rho_m^i + \rho_m^e = n_i m_i + n_e m_e, \quad \vec{U} = \frac{n_i m_i \vec{v}_i + n_e m_e \vec{v}_e}{n_i m_i + n_e m_e}.$$

Враховуючи рівняння Максвела ($\vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B}/\mu_0$), рівняння руху можна записати у вигляді:

$$\rho_m \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \vec{\nabla} p.$$

Помножимо дане рівняння скалярно на $\vec{U}$:

$$\rho_m \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{\vec{U}}{\mu_0} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

Розглянемо кожен із доданків окремо.

Для лівої частини маємо -

$$\rho_m \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho_m \vec{U} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}$$

$$\rho_m \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\rho_m}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{\rho_m}{2} \vec{U} \cdot \vec{\nabla} U^2$$

$$\rho_m \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_m U^2}{2} - \frac{U^2}{2} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\rho_m}{2} \vec{U} \cdot \vec{\nabla} U^2$$

Використовуючи рівняння неперервності $\partial \rho_m / \partial t = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho_m \vec{U} \right)$ і поєднуючи другий і третій доданок, отримаємо:

$$\rho_m \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_m U^2}{2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\rho_m U^2}{2} \vec{U}$$

Розглянемо перший доданок справа.

Рівняння адіабати можна записати як

$$\rho_m^{-\gamma} \frac{dp}{dt} - \gamma p \rho_m^{-(\gamma+1)} \frac{d\rho_m}{dt} = 0, \text{ або } \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma p}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} = 0$$

Враховуючи, що $dp/dt = (\partial p / \partial t) + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) p$ і знову використовуючи рівняння неперервності, отримаємо

$$(1-\gamma)(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) p + \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p\vec{U}) = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) p = -\frac{1}{(1-\gamma)} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma}{(1-\gamma)} \vec{\nabla} \cdot (p\vec{U})$$

Другий доданок справа можна переписати як

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} = -\frac{1}{\mu_0}(\vec{U}\times\vec{B})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}),$$
$$\frac{1}{\mu_0}\vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}),$$

де враховано, що для середовища з великою провідністю

$$\sigma\to\infty\Rightarrow\vec{E}=-\vec{U}\times\vec{B}.$$

Використовуючи векторне співвідношення $\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$ та рівняння Максвела, отримаємо

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}).$$

Поєднавши отримані співвідношення, закон збереження енергії для адіабатичної МГД рідини буде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_m U^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\rho_m U^2}{2}\vec{U} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\vec{U} + \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right) = 0.$$

Доданки, які входять у перші дужки - питома кінетична енергія, питома теплова енергія і густина енергії магнітного поля. В других дужках ми маємо доданки, які характеризують потоки енергій. $\vec{E}\times\vec{B}$ - вектор Умова-Пойнтінга, що характеризує потік енергії електромагнітного поля.

Відповідь: закон збереження енергії для адіабатичної МГД рідини

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_m U^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\rho_m U^2}{2}\vec{U} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\vec{U} + \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right) = 0.$$

Задача 4.

Розв'язок:

Із закону Ома, при $\sigma\to\infty$, отримаємо співвідношення $\vec{E}=-\vec{U}\times\vec{B}$ Тоді рівняння Максвела можна записати як

$$\vec{\nabla}\times[\vec{U}\times\vec{B}] = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Розкривши ротор векторного добутка та врахувавши $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, будемо мати

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U}\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla}\vec{U})$$

Для подальшого розгляду введемо субстанційну (лагранжеву) похідну ($d/dt = \partial/\partial t + (\vec{U}\vec{\nabla})$). Тоді

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{U} - \vec{B}(\vec{\nabla}\vec{U}).$$

Врахувавши рівняння неперервності $\left(d\rho_m/dt = -\rho_m\vec{\nabla}\vec{U}\right)$, отримаємо

$$\frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{\vec{B}}{\rho_m}\frac{d\rho_m}{dt} = (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{U}.$$

Розділивши ліву і праву частину даного рівняння на ρ_m, можна записати

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}}{\rho_m}\right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho_m}\vec{\nabla}\right)\vec{U}.$$

Якщо швидкість стала вздовж силової лінії, то напруженість поля (густина силових ліній) змінюється пропорційно густині середовища ($\vec{B}/\rho_m = \text{const}$).

Відповідь: отримано, що для середовища з ідеальною провідністю, якщо швидкість стала вздовж силової лінії, напруженість поля (густина силових ліній) змінюється пропорційно густині середовища ($\vec{B}/\rho_m = \text{const}$).

Задача 5.
Розв'язок:
Використаємо рівняння Максвела

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j},$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Взявши ротор від першого рівняння системи ($\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{f} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{f} - \Delta\vec{f}$) та використавши закон Ома ($\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{U}\times\vec{B})$), отримаємо для зміни індукції магнітного поля співвідношення:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{U}\times\vec{B}) + \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B}.$$

Враховуючи що для Землі відношення сил інерції до сил в'язкості мале (першим доданком можемо знехтувати):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{<\vec{B}>}{\tau_{\text{характерне}}} \approx \frac{<\vec{B}>}{\sigma\mu_0 l^2_{\text{характрерне}}}$$

При цьому зміна магнітного поля з часом буде описуватися співвідношенням:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-t/\mu_0\sigma l^2}$$

а час затухання магнітного поля внаслідок переходу магнітної енергії в джоулеве тепло буде:

$$\tau_{\text{характерне}} \approx \mu_0\sigma l^2_{\text{характерне}}$$

Враховуючи, що для Землі $l_{\text{характерне}} = R_{\text{Землі}} = 6371$ км, $\sigma \approx 10^8$ См/м, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн$\cdot$ м$^2 \Rightarrow \tau_{\text{характерне}} \sim 2\cdot 10^5$ років.

Відповідь: $\tau_{\text{характерне}} \sim 2\cdot 10^5$ років.

Задача 7.

Розв'язок:

Густина струму сфери що обертається

$$\vec{j} = \sigma_s(\vec{\omega}\times\vec{r}) = j\vec{e_\varphi} - \text{ симетрія по } \varphi$$
$$j = \sigma_s\omega r\sin\theta$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{r}\times\vec{j_r}dV \text{ або } \vec{m} = \frac{1}{2}\iint\limits_S \vec{r}\times\vec{j}dS$$
$$\vec{m} = m\vec{e}_z$$

Елемент заряду dq на елементі кільця

$$dq = 2\pi R\sin\theta R d\theta\cdot\sigma_s$$

$$dt = \frac{dq}{P} = \frac{dq}{2\pi\omega} = \sigma_S\omega R^2\sin\theta d\theta$$

Величина магнітного моменту

$$m = IS = \int dl\cdot\pi R^2 = 2\pi r^2\int_0^{\pi/2}\sigma_S\omega R^2\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi\sigma_S R^4\omega$$

Відповідь:

$$\vec{m} = \frac{4}{3}\pi\sigma_S R^4\omega\vec{e_z}.$$

Задача 13.
Розв'язок:
Розглядаємо збурення концентрації електронів:

$$n_e(\vec{r},t) = n_0 + n'_e(\vec{r},t)$$

Густина заряду іонів із $Z = 1$

$$\rho(\vec{r},t) = -e\left(n_0 + n'_e(\vec{r},t)\right) + en_0 = -en'_e(\vec{r},t)$$

Рівняння Гауса

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0}n'_e(\vec{r},t)$$

Для оцінки можемо використати співвідношення:

$$\nabla \cdot \vec{E} \approx \frac{E}{L}, \quad \frac{E}{L} = \frac{en'_e}{\varepsilon_0}, \quad n'_e = \delta n_0$$

$$E = \frac{e\delta n_0 L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{12}\text{м}^{-3} \cdot 10^{-1}\text{м}}{8.85 \cdot 10^{-12}\text{Ф/м}} \approx 18\ \text{В/м}$$

Відповідь: $E \approx 18$ В/м.

2.4 Хвилі в плазмі

Задача 1.
Розв'язок:
Використаємо лінеаризовані рівняння Максвела

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{E}_1 &= -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\
\operatorname{div} \vec{E}_1 &= \frac{\rho_1}{\varepsilon_0} \\
\operatorname{rot} \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_1 + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \\
\operatorname{div} \vec{B}_1 &= 0
\end{aligned}$$

Візьмемо ротор від першого рівняння і виключимо $\operatorname{rot}\vec{B}_1$, врахувавши третє рівняння

$$\operatorname{rotrot}\vec{E}_1 = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}_1}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{E}_1 - \Delta\vec{E}_1 + \mu_0\frac{\partial\vec{j}_1}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2} = 0$$

Вважаючи, що параметри першого порядку підпорядковуються експоненціальній залежності і

$$\vec{\nabla}div\vec{f} \to -\vec{k}(\vec{k}\vec{f}), \Delta\vec{f} \to -\vec{k}^2\vec{f}$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial t} \to -i\omega\vec{f}$$

$$\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2} \to -\omega^2\vec{f}$$

Отримаємо хвильове рівняння у вигляді:

$$k^2\vec{E}_1 - \left(\vec{k}\cdot\vec{E}_1\right)\vec{k} - i\omega\mu_0\vec{j}_1 - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_1 = 0.$$

Розглянемо ситуацію, коли рухаються електрони, а іони знаходяться в спокої. Цей розгляд справедливий, оскільки частоти електромагнітних хвиль оптичного діапазону є високими. Тоді густина струму в плазмі буде визначатися співвідношенням

$$\vec{j}_1 = -en_0\vec{v}_{e1},$$

де $\vec{v}_{e1}$ отримується із лінеаризованого рівняння руху при $\vec{B}_0 = 0:$

$$\vec{v}_{e1} = \frac{e\vec{E}_1}{im_e\omega}$$

Підставляючи густину струму в хвильове рівняння отримаємо:

$$k^2\vec{E}_1 - \left(\vec{k}\cdot\vec{E}_1\right)\vec{k} = -\frac{\omega_{pe}^2}{c^2}\vec{E}_1 + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_1.$$

Для перпендикулярних хвиль $\left(\vec{k}\cdot\vec{E}_1\right) = 0$, і дисперсійне рівняння

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2.$$

Для довільного значення хвильового вектора буде справедливою умова $\vec{k} = \vec{k}_{\mathrm{Re}} + i\vec{k}_{\mathrm{Im}}$, де k_{Re} і k_{Im} - дійсні величини. Звідси залежність у просторі буде визначатися співвідношенням $e^{i\vec{k}\vec{r}} = e^{i\vec{k}_{\text{Re}}\vec{r}}e^{-\vec{k}_{\text{Im}}\vec{r}}$, а глибина проникнення буде $d_{skin} = \left|\vec{k}_{\text{Im}}\right|^{-1}$.

Для поперечних електромагнітних хвиль (світлових хвиль) глибина проникнення їх в середовище (скін-глибина):

$$d_{skin} = \frac{c}{\left(\omega_{pe}^2 - \omega^2\right)^{1/2}}$$

Відповідь:

$$d_{skin} = \frac{c}{\left(\omega_{pe}^2 - \omega^2\right)^{1/2}}$$

Задача 2.
Розв'язок:

Для отримання дисперсійних залежностей для ленгмюрівських коливань можна використати наступні наближення: 1) іони нерухомі, 2) магнітне поле відсутнє, 3) зіткнення відсутні, 4) теплових рухів немає.

Крім того, до виникнення коливань плазма була однорідною, нейтральною і знаходилася в спокої $\nabla n_0 = \vec{v}_0 = \vec{E}_0 = 0$. Тоді достатньо скористатися наступною лінеаризованою системою рівнянь

$$\begin{aligned}
m_e \frac{\partial \vec{v}_e^{(1)}}{\partial t} &= -e\vec{E}_1, \\
\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial t} &+ \operatorname{div}\left(n_e^{(0)}\vec{v}_1\right) = 0, \\
\operatorname{div}\vec{E}_1 &= -\frac{e n_e^{(1)}}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Шукаємо розв'язок величин першого порядку у вигляді хвилі плоских монохроматичних хвиль $f_1 = f_1' \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}$. Отримаємо

$$\begin{aligned}
&- i\omega m_e \vec{v}_e^{(1)} = -e\vec{E}_1, \\
&- i\omega n_e^{(1)} + i n_e^{(0)}\vec{k}\cdot\vec{v}_e^{(1)} = 0, \\
i\vec{k}\cdot\vec{E}_1 &= -\frac{e n_e^{(1)}}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Помноживши перше рівняння системи скалярно на $\vec{k}$ і використавши друге і третє рівняння отримаємо

$$\omega^2 = \frac{n_e^{(0)} e^2}{\varepsilon_0 m} = \omega_{\text{pe}}^2, \quad [\omega_{\text{pe}}] = \text{рад/с}.$$

Крім того, $\omega_p e/2\pi = \nu_p e \approx 9\sqrt{n}$.

Відповідь: дисперсійне рівняння для ленгмюрівських коливань $\rightarrow \omega^2 = \omega_{\text{pe}}^2 = n_e^{(0)} e^2/\varepsilon_0 m$

Задача 3.

Розв'язок:

На відміну від попередньої задачі в розповсюдженні плазмових коливань суттєву роль відіграє тепловий рух

$$\Rightarrow \nabla p_e, \quad p_k^{(1)} = \gamma n_k^{(1)} k_b T_k^{(0)}.$$

Тоді лінеаризована система рівнянь набуде вигляду

$$\begin{aligned} &m_e n_e^{(0)} \frac{\partial \vec{v}_e^{(1)}}{\partial t} = -e n_e^{(0)} \vec{E}_1 - \gamma k_b T_e^{(0)} \nabla n_e^{(1)} \\ &\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial t} + n_e^{(0)} \operatorname{div} \vec{v}_e^{(1)} = 0 \\ &\operatorname{div} \vec{E}_1 = -\frac{e n_e^{(1)}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

При пошуку розв'язку величин першого порядку у вигляді хвилі плоских монохроматичних хвиль $f_1 = f_1' \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}$ отримаємо

$$\begin{aligned} &- i\omega m_e n_e^{(0)} \vec{v}_e^{(1)} = -e n_e^{(0)} \vec{E}_1 - i\gamma k_b T_e^{(0)} \vec{k} n_e^{(1)}, \\ &- i\omega n_e^{(1)} + i n_e^{(0)} \vec{k} \cdot \vec{v}_e^{(1)} = 0, \\ &i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e n_e^{(1)}}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Помноживши перше рівняння скалярно на $\vec{k}$ і використавши друге і третє рівняння отримаємо

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_e^{(0)}}{m_e \varepsilon_0} + \frac{\gamma k_b T_e^{(0)} k^2}{m_e}$$

Для одномірного випадку - $\gamma = 3$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} v_{\text{тепл}}^2 k^2; \quad 2\omega d\omega = \frac{3}{2} v_{\text{тепл}}^2 2k dk, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{v_{\text{тепл}}^2}{v_{\text{ф}}}.$$

Дисперсійна крива для електронних плазмових коливань представлена на Рис. 2.1

Відповідь: дисперсійне рівняння для електронних плазмових коливань $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + (3/2) v_{\text{тепл}}^2 k^2$.

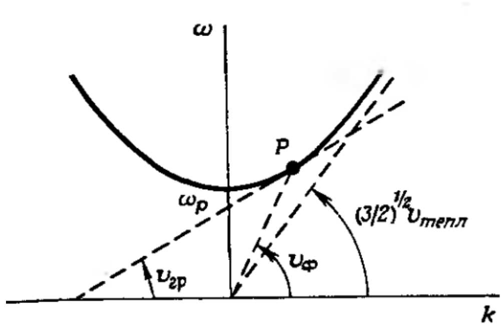

Рис. 2.1: Дисперсійна крива для електронних плазмових коливань (хвилі Бома-Гросса).

Задача 4.

Розв'язок:

Наявність зіткнень призводить до появи в рівнянні руху доданку $\Rightarrow -v_k m_k n_k^{(0)} v_k^{(1)}$. Тоді можна скористатися лінеаризованою системою рівнянь у вигляді

$$m_e n_e^{(0)} \frac{\partial \vec{v}_e^{(1)}}{\partial t} = -e n_e^{(0)} \vec{E}_1 - \nu_e m_e n_e^{(0)} v_e^{(1)}$$
$$\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial t} + n_e^{(0)} \operatorname{div} \vec{v}_e^{(1)} = 0$$
$$\operatorname{div} \vec{E}_1 = -\frac{e n_e^{(1)}}{\varepsilon_0}$$

Оскільки збурені величини $\propto \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}$, то отримаємо систему рівнянь $\Rightarrow$

$$- i\omega m_e n_e^{(0)} \vec{v}_e^{(1)} = -e n_e^{(0)} \vec{E}_1 - \nu_e m_e n_e^{(0)} v_e^{(1)},$$
$$- i\omega n_e^{(1)} + i n_e^{(0)} \vec{k} \cdot \vec{v}_e^{(1)} = 0,$$
$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = -(e n_e^{(1)})/\varepsilon_0.$$

Помноживши перше рівняння скалярно на $\vec{k}$ і використавши друге і третє рівняння отримаємо $\omega^2 = \omega_{pe}^2 - i\nu_e \omega$

Відповідь: за наявності зіткнень в дисперсійному рівнянні на відміну від ленгмюрівських коливань з'являється доданок $-i\nu_e\omega$, що спричиняє затухання хвилі.

Задача 5.

Розв'язок:

При наявності руху як іонів так і електронів лінеаризована система рівнянь набуде вигляду

$$\begin{aligned}
&m_e \frac{\partial \vec{v}_e^{(1)}}{\partial t} = -e\vec{E}_1,\\
&m_i \frac{\partial \vec{v}_i^{(1)}}{\partial t} = e\vec{E}_1,\\
&\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_e^{(0)}\vec{v}_e^{(1)}\right) = 0,\\
&\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(n_i^{(0)}\vec{v}_i^{(1)}\right) = 0,\\
&\operatorname{div}\vec{E}_1 = \frac{e\left(n_i^{(1)} - n_e^{(1)}\right)}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Оскільки збурені величини $\propto \exp\{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\}$, то $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&i\omega m_e \vec{v}_e^{(1)} = -e\vec{E}_1,\\
&-i\omega m_i \vec{v}_i^{(1)} = e\vec{E}_1,\\
&-i\omega n_e^{(1)} + i n_e^{(0)}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}_e^{(1)}\right) = 0,\\
&-i\omega n_i^{(1)} + i n_i^{(0)}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}_i^{(1)}\right) = 0,\\
&i\left(\vec{k}\cdot\vec{E}_1\right) = \frac{e\left(n_i^{(1)} - n_e^{(1)}\right)}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

Виразимо із третього і четвертого рівняння $n_e^{(1)}$ й $n_i^{(1)}$ та підставимо в п'яте рівняння.

$$\begin{aligned}
&n_e^{(1)} = \frac{n_e^{(0)}\left(\vec{k}\vec{v}_e^{(1)}\right)}{\omega},\\
&n_i^{(1)} = \frac{n_i^{(0)}\left(\vec{k}\vec{v}_i^{(1)}\right)}{\omega},\\
&i\left(\vec{k}\vec{E}_1\right) = \frac{e}{\omega\varepsilon_0}\left(n_i^{(0)}\left(\vec{k}\vec{v}_i^{(1)}\right) - n_e^{(0)}\left(\vec{k}\vec{v}_e^{(1)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Значення $\vec{k}\cdot\vec{v}_e^{(1)}$ і $\vec{k}\cdot\vec{v}_i^{(1)}$ які потрібно підставити в останнє рівняння знайдемо помноживши перше і друге рівняння скалярно на $\vec{k}$.

$$-i\omega m_e\left(\vec{k}\vec{v}_e^{(1)}\right)=-e\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)\Rightarrow\left(\vec{k}\vec{v}_e^{(1)}\right)=\frac{e\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)}{i\omega m_e}$$
$$-i\omega m_i\left(\vec{k}\vec{v}_i^{(1)}\right)=e\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)\Rightarrow\left(\vec{k}\vec{v}_i^{(1)}\right)=\frac{e\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)}{-i\omega m_i}$$

Тоді

$$i\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)=\frac{e}{\omega\varepsilon_0}\left(n_i^{(0)}\left(\frac{e\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)}{-i\omega m_i}\right)-n_e^{(0)}\left(\frac{e\left(\vec{k}\vec{E}_1\right)}{i\omega m_e}\right)\right)$$

і дисперсійне рівняння $\omega^2=\omega_{pe}^2+\omega_{pi}^2$.

Відповідь: $\omega^2=\omega_{pe}^2+\omega_{pi}^2$.

Задача 6.

Розв'язок:

Рівняння руху іонів

$$m_i n_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial t}+m_i n_i\left(\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}_i=en_i\vec{E}-\vec{\nabla}p_i.$$

Лінеаризуємо і підставляємо розв'язок у вигляді хвилі $|\sim\exp(-i(\omega t-\vec{k}\vec{r}))|$:

$$\omega m_i n_0\vec{v}_{i1}=en_0\vec{k}\varphi_1+\gamma_i k_b T_{0i}\vec{k}n_{i1}$$

Де використано, що $\vec{v}_0=0,\vec{E}_0=0\Rightarrow\varphi_0=0,p_{i1}=\gamma_i n_{i1}k_bT_{0i}$.

Лінеаризоване рівняння неперервності буде

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t}+n_0 div\vec{v}_{i1}=0\Rightarrow|\sim\exp(-i(\omega t-\vec{k}\vec{r}))|\Rightarrow\omega n_{i1}=n_0\vec{k}\vec{v}_{i1}$$

Рівняння Максвела (рівняння Пуассона)

$$\operatorname{div}\vec{E}_1=\frac{\rho_1}{\varepsilon_0};\operatorname{div}\vec{E}_1=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_{i1}-n_{e1}\right),$$
$$\operatorname{div}\vec{E}_1=k^2\varphi_1,k^2\varphi_1=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_{i1}-n_{e1}\right)$$

Маємо систему лінеаризованих рівнянь:

$$\omega m_i n_0\vec{v}_{i1}=en_0\vec{k}\varphi_1+\gamma_i k_b T_{0i}\vec{k}n_{i1}$$
$$\omega n_{i1}=n_0\vec{k}\vec{v}_{i1}$$
$$k^2\varphi_1=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_{i1}-n_{e1}\right)$$

Просторовий розподіл електронів буде визначатися розподілом Больцмана:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi_1}{k_b T_{0e}}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\varphi_1}{k_b T_{0e}}\right) = n_0 + n_{e1}$$

де n_0 - рівноважна концентрація при відсутності будь-яких збурень.

$$n_{e1} = \frac{n_0 e\varphi_1}{k_b T_{0e}}$$

Підставивши отримане значення в рівняння Пуассона можна знайти значення φ_1.

$$\varphi_1 \left(k^2 + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_b T_{0e}}\right) = \frac{e n_{i1}}{\varepsilon_0}$$

Другий доданок в дужках $\epsilon\lambda_D^{-2}$ $\left(\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_b T_{0e}}{e^2 n_0}\right)$. Тоді

$$\varphi_1 = \frac{e n_{i1} \lambda_D^2}{\varepsilon_0 \left(1 + k^2 \lambda_D^2\right)}$$

А із лінеаризованих рівнянь отримаємо

$$m_i \omega^2 = k^2 \left[\frac{n_0 e^2 \lambda_D^2}{\varepsilon_0 \left(1 + k^2 \lambda_D^2\right)} + \gamma_i k_b T_{0i}\right]$$

Отже, дисперсійне рівняння для іоннозвукових (іонноакустичних) хвиль, які можуть існувати тільки тоді, коли в плазмі є теплові рухи

$$\frac{\omega}{k} = \left[\frac{k_b T_{0e}}{m_i \left(1 + k^2 \lambda_D^2\right)} + \frac{\gamma_i k_b T_{0i}}{m_i}\right]^{1/2}$$

Важливо, що іоннозвукові хвилі існують навіть тоді, коли температура іонів прямує до нуля.

$$\frac{\omega}{k} \approx \left[\frac{k_b T_{0e}}{m_i \left(1 + k^2 \lambda_D^2\right)}\right]^{1/2}$$

Якщо $k^2\lambda_D^2 \gg 1$, то при $T_{0i} \to 0$ отримаємо $\omega^2 = (n_0 e^2)/(m_i \varepsilon_0) = \omega_{pi}^2$ - іоноплазмова частота, що є асимптотичною частотою для іонозвукових коливань.

Дисперсійна крива для іонозвукових коливань подана на Рис. 2.2

Відповідь: дисперсійне рівняння для іоннозвукових (іонноакустичних) хвиль

$$\frac{\omega}{k} = \left[\frac{k_b T_{0e}}{m_i \left(1 + k^2 \lambda_D^2\right)} + \frac{\gamma_i k_b T_{0i}}{m_i}\right]^{1/2}.$$

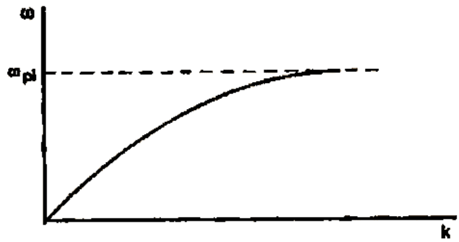

Рис. 2.2: Дисперсійна крива для іоннозвукових хвиль.

Задача 13.

Розв'язок:

Розглянемо декартову систему координат із хвильовим вектором, направленим уздовж осі z (так як і поле $\vec{B}_0$), і при $z = 0$ вектор електричного поля має тільки одну компоненту вздовж x. Тоді

$$\vec{E}(z = 0, t) = \hat{x} E_0 \exp(-i\omega t)$$

де $\hat{x}$ - одиничний вектор в напрямку x, ω - частота. Дане рівняння можна переписати у вигляді

$$\vec{E}(0, t) = \frac{1}{2} E_0 [(\hat{x} + i\hat{y}) + (\hat{x} - i\hat{y})] \exp(-i\omega t)$$

де перший і другий доданки у квадратних дужках відповідають правополяризованим і лівополяризованим компонентам. Ці дві компоненти поширюються незалежно, тому при будь-якому $z > 0$ вектор електричного поля задається як

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} + i\hat{y}) \exp\left(i k_R z - i\omega t\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} - i\hat{y}) \exp\left(i k_L z - i\omega t\right),$$

де k_R, k_L - хвильові числа для право- і лівополяризованих хвиль, відповідно.

Тоді:

$$\vec{E}(z,t) = \frac{1}{2}E_0 \exp\left[\frac{1}{2}i\left(k_R + k_L\right)z - i\omega t\right] \times$$
$$\times \left\{(\hat{x} + i\hat{y})\exp\left[\frac{1}{2}i\left(k_R - k_L\right)z\right] + (\hat{x} - i\hat{y})\exp\left[-\frac{1}{2}i\left(k_R - k_L\right)z\right]\right\} =$$
$$= E_0 \exp\left[\frac{i\left(k_R + k_L\right)z}{2} - i\omega t\right] \cdot$$
$$\cdot \left\{\hat{x}\cos\left[\frac{\left(k_R - k_L\right)z}{2}\right] - \hat{y}\sin\left[\frac{\left(k_R - k_L\right)z}{2}\right]\right\},$$

а зміна із відстанню кута повертання площини поляризації електромагнітної хвилі θ_F, що поширюється вздовж магнітного поля в плазмі задається співвідношенням

$$\theta_F = (1/2)\left(k_R - k_L\right)z.$$

Відповідь: доведено, що швидкість обертання кута поляризації задається співвідношенням $\theta_F = (1/2)\left(k_R - k_L\right)z$.

Задача 15.
Розв'язок:

Плазма рухається зі швидкістю $\vec{u}_0$ вздовж магнітного поля (можна ігнорувати ефекти магнітного поля), і є холодною, тобто, $k_bT = k_bT_i = 0$.

Тоді рівняння руху для іонів та електронів, для першого порядку, буде

$$m_i n_0\left[\frac{\partial \vec{u}_{i1}}{\partial t} + \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla\right)\vec{u}_i\right] = en_0\vec{E}_1,$$
$$m_e n_0\left[\frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} + \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla\right)\vec{u}_{e1}\right] = -en_0\vec{E}_1.$$

Оскільки швидкість однорідна в просторі то доданків $\left(\vec{u}_{e1} \cdot \nabla\right)\vec{u}_0, \left(\vec{u}_{i1} \cdot \nabla\right)\vec{u}_0$ немає.

Електростатичне електричне поле $\vec{E}_1 = E \exp i(kz - \omega t)\hat{z}$, де z - напрям $\vec{u}_0$. Після лінеаризації отримаємо:

$$im_i n_0\left(-\omega + ku_0\right)\vec{u}_{i1} = en_0\vec{E}_1,$$
$$im_e n_0\left(-\omega + ku_0\right)\vec{u}_{i1} = -en_0\vec{E}_1.$$

І значення швидкостей

$$\vec{u}_{i1} = \frac{ieE}{m_i\hat{z}\omega - ku_0},$$

$$\vec{u}_{e1} = -\frac{ie}{m_e}\frac{E\hat{z}}{\omega - ku_0}.$$

Рівняння неперервності для іонів та електронів записуються у вигляді:

$$frac\partial n_{i1}\partial t + n_0\nabla \cdot \vec{u}_{i1} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla)\, n_{i1} = 0,$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0\nabla \cdot \vec{u}_{e1} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla)\, n_{e1} = 0.$$

І, відповідно,

$$n_{i1} = \frac{kn_0\vec{u}_{i1}}{\omega - ku_0},$$

$$n_{e1} = \frac{n_0 k}{\omega - ku_0}\vec{u}_{e1}.$$

А врахувавши значення швидкостей

$$n_{i1} = \frac{ien_0kE}{m_i\left(\omega - ku_0\right)^2},$$

$$n_{e1} = -\frac{ien_0kE}{m_e\left(\omega - ku_0\right)^2}.$$

Рівняння Пуассона

$$\epsilon_0\nabla \cdot \vec{E}_1 = e\left(n_{i1} - n_{e1}\right).$$

Підставляючи значення отримані для концентрації отримаємо

$$\epsilon_0 ikE = e\left(ien_0kE\right)\left[\frac{1}{m_i\left(\omega - ku_0\right)^2} + \frac{1}{m_e\left(\omega - ku_0\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\omega - ku_0\right)^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2, \quad \left(\omega - ku_0\right)^2 = \omega_p^2,$$

де $\omega_p^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2$.

Групова швидкість:

$$2(\omega - ku_0)\partial\omega - 2u_0(\omega - ku_0)\partial k = 0 \Rightarrow v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = u_0.$$

Відповідь: показано, що $\left(\omega - ku_0\right)^2 = \omega_p^2$, а значення групової швидкості $v_{\text{гр}} = u_0$.

Задача 16.

Розв'язок:

Для отримання дисперсійного рівняння для альфвенівських хвиль можна використати рівняння МГД у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0,\\
&\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times(\vec{U}\times\vec{B})+\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\vec{B},\\
&\rho_m\frac{dU}{dt}=-\nabla p+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}.
\end{aligned}$$

При цьому повне магнітне поле

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B_0}+\vec{B_1}(\vec{r},t)$$

Лінеаризувавши рівняння МГД отримаємо

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{U_1}=0\\
&\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}=\nabla\times\left(\vec{U_1}\times\vec{B_0}\right)+\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\vec{B}_1\\
&\rho_m\frac{d\vec{U_1}}{dt}=-\nabla\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\left(\vec{B_0}\cdot\nabla\right)\frac{\vec{B}_1}{\mu_0}\\
&\vec{B_0}=(0,0,B_z)\,,\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}=0.
\end{aligned}$$

Слід зауважити, що

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\left(\vec{U_1}\times\vec{B_0}\right)&=\left(\vec{B_0}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{U_1}\\
\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}&=\left(\vec{B_0}\nabla\right)\vec{U_1}+\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\vec{B}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}=B_0\frac{\partial\vec{U_1}}{\partial z}+\frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\partial^2\vec{B}_1}{\partial z^2}\\
&\rho_m\frac{\partial\vec{U_1}}{\partial t}=\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)\vec{e}_z\\
&\frac{\partial U_{1z}}{\partial z}=0\ \text{та}\ \frac{\partial B_{1z}}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)=0
\end{aligned}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}&=B_0\frac{\partial\vec{U_1}}{\partial z}+\frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\partial^2\vec{B}_1}{\partial z^2},\\
\frac{\partial\vec{U_1}}{\partial t}&=\frac{B_0}{\mu_0\rho_m}\frac{\partial\vec{B}_1}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Взявши похідну від першого рівняння по часу і використавши друге рівняння отримаємо диференційне рівняння для збуреної величини індукції магнітного поля у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}_1}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 \vec{B}_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \vec{B}_1}{\partial^2 z}$$

Шукаємо розв'язок величин першого порядку малості у вигляді хвилі (представлення у вигляді експоненти)

$$\vec{B}_1 = \widetilde{\vec{B}_1} e^{i(kz-\omega t)}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &\to ik, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= -k^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^0} \to -\omega^2. \end{aligned}$$

Дисперсійне рівняння

$$-\omega^2 = -k^2 V_A^2 + \frac{i\omega k^2}{\mu_0 \sigma},$$

$$\omega^2 - k^2 \left(V_A^2 - \frac{i\omega}{\mu_0 \sigma} \right) = 0$$

$$\vec{k} = \vec{k}_{Re} + i\vec{k}_{Im},$$

$$d_{\text{skin}} = \frac{1}{\left| \vec{k}_{Im} \right|}$$

$$k = \frac{\omega}{V_A \left(1 - \frac{i\omega}{\mu_0 \sigma V_A^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{\omega}{V_A} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{i\omega}{\mu_0 \sigma V_A^2} \right),$$

$$k_{Im} = \frac{\omega^2}{2\mu_0 \sigma V_A^3} \quad \Rightarrow \quad d_{\text{skin}} = \frac{2\mu_0 \sigma V_A^3}{\omega^2}.$$

Відповідь: доведено, що дисперсійне рівняння для альфвенівських хвиль у випадку скінченної провідності буде:

$$\omega^2 - k^2 \left(V_A^2 - \frac{i\omega}{\mu_0 \sigma} \right),$$

а значення скін-шару задається співвідношенням:

$$d_{\text{skin}} = \frac{2\mu_0 \sigma V_A^3}{\omega^2}.$$

Задача 17.

Розв'язок:

Використаємо що в результаті проходження хвилі фіксуються малі збурення відносно незбурених (з індексом 0) параметрів $p_1 \ll p_0, \rho_1 \ll \rho_0, \vec{B}_1 \ll \vec{B}_0$. Лінеризувавши рівняння МГД (дисипативними процесами нехтуємо, адіабатичне середовище) отримаємо

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}\left[rot\vec{B}_1 \times \vec{B}_0\right],$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right],$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\gamma p_0 \,\mathrm{div}\, \vec{v}_1,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \,\mathrm{div}\, \vec{v}_1.$$

Шукаємо розв'язок величин першого порядку у вигляді плоских монохроматичних хвиль (Фур'є перетворення в просторі і часі):

$$f_1 = f_1' \exp\left\{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right\},$$

де ω - частота хвилі, а $\vec{k}$ - хвильовий вектор. Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$-i\omega\rho_0\vec{v}_1 = -i\vec{k}p_1 + \frac{1}{\mu_0}\left[\left[i\vec{k}\times\vec{B}_1\right]\times\vec{B}_0\right],$$

$$-i\omega\vec{B}_1 = i\vec{k}\times\left[\vec{v}_1\times\vec{B}_0\right],$$

$$-i\omega p_1 = -\gamma p_0 i\vec{k}\cdot\vec{v}_1,$$

$$-i\omega\rho_1 = -\rho_0 i\vec{k}\cdot\vec{v}_1.$$

І для швидкості:

$$\omega^2\rho_0\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{B}_0\times\left[\vec{k}\times\vec{B}_0\right]}{\mu_0} + \gamma p_0\vec{k}\right)\vec{k}\cdot\vec{v}_1 - \frac{1}{\mu_0}\vec{k}\cdot\vec{B}_0\left[\vec{k}\times\vec{v}_1\right]\times\vec{B}_0.$$

Є як поздовжні хвилі (хвилі стиснення) $\propto \vec{k}\cdot\vec{v}_1$ так і поперечні хвилі (хвилі зсуву) $\propto \vec{k}\times\vec{v}_1$.

Виберемо систему координат таким чином, щоб $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z, \vec{k} = k_\perp\vec{e}_x + k_\parallel\vec{e}_z$.

Тоді покомпонентно

$$\begin{pmatrix} \omega - k_{\parallel}^2 v_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega - k_{\perp}^2 v_{\text{зв}}^2 - k^2 v_A^2 & -k_{\perp} k_{\parallel} v_{\text{зв}}^2 \\ 0 & -k_{\perp} k_{\parallel} v_{\text{зв}}^2 & \omega - k_{\parallel}^2 v_{\text{зв}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0,$$

де $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho}$ - альфвенівська швидкість, $v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ швидкість звуку, а $k^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$. Рівняння на власні значення (дисперсійне співвідношення) - якщо детермінант матриці дорівнює нулеві:

$$\left(\omega'^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2\right) \left\{\omega'^4 - \omega'^2 k^2 \left(v_{\text{зв}}^2 + v_A^2\right) + k^2 v_{\text{зв}}^2 k_{\parallel}^2 v_A^2\right\} = 0.$$

Отримали три типи власних мод (типів хвиль).

(I) Альфвенівська хвиля

$$\omega^2 = \omega_A^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2.$$

Рух плазми в поперечному напрямку ($\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0, \vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1 = 0$), а збурення магнітного поля задається співвідношенням $\vec{B}_1 = \pm\sqrt{\mu_0 \rho_0} \vec{v}_1$, яке виникає за рахунок доданку $(\vec{B}\nabla)\vec{B}$ в силі Лоренца і призводить до пружного вигину силових ліній магнітного поля.

(II) Швидка магнітозвукова хвиля.

$$\omega^2 = \omega_{fast}^2 = \frac{k^2}{2}\left[v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 + \sqrt{\left(v_A^2 + v_{\text{зв}}^2\right)^2 - 4 v_A^2 v_{\text{зв}}^2 k_{\parallel}^2/k^2}\right].$$

Ця хвиля є хвилею стиснення. Фазова швидкість знаходиться в діапазоні $v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 \geq (\omega/k)^2 \geq v_A^2$. Це "найшвидша" хвиля в напрямку перпендикулярному до магнітного поля $\vec{B}_0$. Для поздовжнього/паралельного розповсюдження,

$$\omega^2 = \omega_{fast}^2 = \frac{1}{2} k^2 \left(v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 + \left|v_A^2 - v_{\text{зв}}^2\right|\right),$$

хвиля при малому параметрі β, коли $v_A > v_{\text{зв}}$ переходить у рівняння для альфвенівської хвилі, а при високому значенні параметру $\beta\,(v_{\text{зв}} > v_A)$ маємо чисто поздовжні моди, які відповідають незамагніченим звуковим хвилям - $\omega^2 = k^2 v_{\text{зв}}^2$.

(III) Повільна магнітозвукова хвиля.

$$\omega^2 = \omega_{slow}^2 = \frac{k^2}{2}\left[v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 - \sqrt{\left(v_A^2 + v_{\text{зв}}^2\right)^2 - 4 v_A^2 v_{\text{зв}}^2 k_{\parallel}^2/k^2}\right].$$

Ця хвиля, також, в загальному, є хвилею стиснення. Фазова швидкість знаходиться в діапазоні $0 \le (\omega/k)^2 \le v_{\text{зв}}^2$. Для поздовжнього/паралельного розповсюдження фазова швидкість має верхню межу

$$\omega_{slow}^2 = \frac{1}{2}k^2\left(v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 - \left|v_A^2 - v_{\text{зв}}^2\right|\right),$$

при $v_A > v_{\text{зв}}$ маємо звукову хвилю, а при $v_{\text{зв}} > v_A$, альфвенівську швидкість.

Відповідь: отримано дисперсійні залежності для трьох типів хвиль, що можуть поширюватися в однорідній замагніченій плазмі –

альфвенівська хвиля $\omega^2 = \omega_A^2 = k_\parallel^2 v_A^2$;

швидка магнітозвукова

$$\omega^2 = \omega_{fast}^2 = \frac{k^2}{2}\left[v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 + \sqrt{\left(v_A^2 + v_{\text{зв}}^2\right)^2 - 4v_A^2 v_{\text{зв}}^2 k_\parallel^2/k^2}\right];$$

повільна магнітозукова

$$\omega^2 = \omega_{slow}^2 = \frac{k^2}{2}\left[v_A^2 + v_{\text{зв}}^2 - \sqrt{\left(v_A^2 + v_{\text{зв}}^2\right)^2 - 4v_A^2 v_{\text{зв}}^2 k_\parallel^2/k^2}\right].$$

2.5 Нестійкості

Задача 1.

Розв'язок:

В загальному випадку $D(\omega, \vec{k})$ є комплексною функцією з дійсною D_r та уявною частинами D_i :

$$D(\omega, \vec{k}) = D_r(\omega, \vec{k}) + iD_i(\omega, \vec{k}).$$

Нехай хвильовий вектор $\vec{k}$ є дійсною величиною, тоді частота є комплексною величиною (в загальному випадку), інкремент зростання γ:

$$\omega(\vec{k}) = \omega_r(\vec{k}) + i\gamma\left(\omega_r, \vec{k}\right)$$

Розкладемо $D(\omega, \vec{k})$ в околі точки $\omega = \omega_{\text{r}}$ до першого порядку:

$$D(\omega, \vec{k}) = D_r\left(\omega_r, \vec{k}\right) + (\omega - \omega_r)\left.\frac{\partial D_r(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}\right|_{\gamma=0} + iD_i\left(\omega_r, \vec{k}\right) = 0$$

Враховуючи, що для дійсних частот виконується рівність $D_r\left(\omega_r,\vec{k}\right) = 0$ та $\omega-\omega_r = i\gamma$, маємо:

$$\gamma\left(\omega_{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{k}}\right) = -\frac{D_{\mathrm{i}}\left(\omega_{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{k}}\right)}{\partial D_{\mathrm{r}}(\omega,\vec{\mathrm{k}})/\left.\partial\omega\right|_{\gamma=0}}.$$

Відповідь:

$$\gamma\left(\omega_r,\vec{k}\right) = -\frac{D_i\left(\omega_r,\vec{k}\right)}{\partial D_r(\omega,\vec{k})/\left.\partial\omega\right|_{\gamma=0}}.$$

Задача 2.
Розв'язок:
Лінеаризовані рівняння неперервності та руху:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{v}_1\vec{\nabla}n_0 = 0$$
$$\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} + i\vec{k}\vec{v}_{1\perp} = 0$$
$$n_0\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}P}{m} + n_1 g\vec{e}_y$$
$$v_y(y=h) = 0$$

Збурення має вигляд:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1(y)e^{\gamma t + i\vec{k}\vec{x}}$$

Відповідь: $\gamma^2 = kg\tanh k_\perp h$

Задача 3.
Розв'язок:
Повздовжня компонента магнітного поля B_z може стабілізувати плазмовий стовпчик (Рис. **??**). Знайдемо умову для B_θ, B_z для підтримання стійкості. Магнітний потік при $\Phi = B_z\pi r^2$ виникнення сосичної нестійкості не змінюється при зміні радіусу dr :

$$d\Phi = 0$$

З іншого боку,

$$d\Phi = \pi r^2 dB_z + B_z 2\pi r dr$$

$$dB_z = -2B_z\frac{dr}{r}$$

Відповідна зміна магнітного тиску p_z :

$$dp_z = \frac{(B_z + dB_z)^2}{2\mu_0} - \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} B_z dB_z = -\frac{2B_z^2}{\mu_0}\frac{dr}{r}$$

З закону Ампера $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, маємо, що:

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_z$$

$$B_\theta(r) r = \text{ const}$$

$$dB_\theta = -B_\theta \frac{dr}{r}$$

$$dp_\theta = \frac{1}{\mu_0} B_\theta dB_\theta = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0}\frac{dr}{r}$$

Плазмовий циліндр є стійким проти сосисочної нестійкості за умови: $dp_z > dp_\theta$, або $B_z^2 > \frac{1}{2} B_\theta^2$.

Відповідь: $B_z^2 > B_\theta^2/2$.

4.

Розв'язок:

Лінеаризовані рівняння руху, неперервності та Пуассона для кожного сорту частинки σ:

$$\frac{\partial \vec{u}_{\sigma 1}}{\partial t} + \vec{u}_{\sigma 0} \nabla \vec{u}_{\sigma 1} = -\frac{q_\sigma}{m_\sigma} \nabla \phi_1,$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{\sigma 1}}{\partial t} + \vec{u}_{\sigma 0} \nabla n_{\sigma 1} = -n_{\sigma 0} \nabla \vec{u}_{\sigma 1},$$

$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\sigma q_\sigma n_{\sigma 1}.$$

З перших двох рівнянь через розгляд плоских хвиль $e^{(i\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ отримуємо збурену концентрацію:

$$n_{\sigma 1} = n_{\sigma 0} \frac{k^2}{\left(\omega - \vec{k}\vec{u}_{\sigma 0}\right)^2} \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \phi_1.$$

Підстановка у рівняння Пуассона дає дисперсійне співвідношення:

$$1 - \sum_\sigma \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\left(\omega - \vec{k}\vec{u}_{\sigma 0}\right)^2} = 0.$$

Відповідь:

$$1 - \sum_\sigma \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\left(\omega - \vec{k}\vec{u}_{\sigma \circ}\right)^2} = 0.$$

Задача 5.

Розв'язок:

Шлангова нестійкість (firehose instability) виникає, коли реалізується наступна ситуація. Зміни тиску, викликані збуренням, наприклад, альфвенівською хвилею, стають занадто великими у порівнянні з перпендикулярною складовою тиску плазми (перпендикулярно до вектора магнітного поля $\vec{B} = B\vec{e}_z$) таким чином, що повернення до рівноважної конфігурації стає неможливим. Тензор тиску електронів та іонів при цьому є анізотропним:

$$\widehat{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_\perp & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{p}_\perp & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{p}_\parallel \end{pmatrix}$$

Рівняння стану мають вигляд:

$$\frac{p_\perp^2 p_\parallel}{\rho} = \text{ const}$$

Відповідь:

а). $\omega^2 = \frac{1}{2}k^2 v_A^2 \left(A_1 \pm \left(A_2^2 + A_3^2\right)^{1/2}\right)$,

де $A_1 = \frac{1}{2}\beta_{01}\left(1+\sin^2\theta\right) + \beta_{0\parallel}\cos^2\theta + 1$, $A_2 = \frac{1}{2}\beta_{01}\left(1+\sin^2\theta\right) - 2\beta_{01}\cos^2\theta + 1$,

$A_3 = \beta_{0\parallel}\sin\theta\cos\theta, \beta_{01} = 2\mu_0 p_{0.1}/B_{0.2}^2\beta_{0\parallel} = 2\mu_0 p_{0\parallel}/B_0^2$.

б). $\gamma = \frac{k_\parallel v_A}{\sqrt{2}}\left(\beta_{0\parallel} - \beta_{0\perp} - 2\right)^{1/2}, \beta_{0\parallel} > \beta_{0\perp} + 2$.

Задача 6.

Розв'язок:

Лінеаризовані рівняння руху для іонів та електронів:

$$m_i n_0 \frac{\partial \vec{u}_{i1}}{\partial t} = e n_0 \vec{E}_1,$$

$$m_e n_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla)\,\vec{u}_{e1}\right] = -e n_0 \vec{E}_1.$$

Для нашої задачі збурені параметри $\propto \exp i(kz - \omega t)\hat{z}$, де z - напрям $\vec{u}_0$. Тоді

$$-i\omega m_i n_0 \vec{u}_{i1} = e n_0 \vec{E}_1,$$

$$i m_e n_0 \left(-\omega + k u_0\right)\vec{u}_{i1} = -e n_0 \vec{E}_1.$$

І швидкість збурених іонів та електронів буде

$$\vec{u}_{i1} = \frac{ieE}{m_i \omega}\hat{z},$$

$$\vec{u}_{e1} = -\frac{ie}{m_e}\frac{E\hat{z}}{\omega - ku_0}.$$

Рівняння неперервності для іонів та електронів:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = 0,$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla)\, n_{e1} = 0.$$

$$\Rightarrow n_{i1} = \frac{kn_0 \vec{u}_{i1}}{\omega}, \quad n_{e1} = \frac{n_0 k}{\omega - ku_0}\vec{u}_{e1}.$$

А врахувавши значення для швидкостей:

$$n_{i1} = \frac{ien_0 kE}{m_i \omega^2}, \quad n_{e1} = -\frac{ien_0 kE}{m_e\,(\omega - ku_0)^2}.$$

Збурене електричне поле і збурені густини пов'язані рівнянням Пуассона

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = e\,(n_{i1} - n_{e1})\,.$$

Враховуючи (4.27) отримаємо

$$\epsilon_0 ikE = e\,(ien_0 kE)\left[\frac{1}{m_i \omega^2} + \frac{1}{m_e\,(\omega - ku_0)^2}\right], \Rightarrow$$

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku_0)^2},$$

де ω_{pi}^2 та ω_{pe}^2 - квадрати плазмових частот іонів та електронів. Частота буде у нас комплексною величиною. При цьому, якщо уявна частина буде більше нуля ми будемо спостерігати наростаючі флуктуації, якщо уявна частина рівна нулеві будемо мати постійні в часі коливання, за інших умов будемо мати затухання.

Відповідь: для двохпотокової нестійкості дисперсійне співвідношення

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku_0)^2}.$$

2.6 Турбулентність

1.

Розв'язок:

Рівняння Ньютона для в'язкої рідини (останній доданок з в'язкими силами):

$$\rho\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_i = -\nabla p + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Конвективна похідна для векторного поля $A(x,t)$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\overrightarrow{u}\cdot\nabla)\overrightarrow{A}$$

Рідина ньютонівська, якщо зсувне напруження лінійно пропорційно градієнту швидкості (τ_{ij} — дотичне напруження на і-ій грані елемента рідини в j-ому напрямку в [кг м]$^{-1}$ с$^{-2}$):

$$\tau_{ij} = \rho v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Тензор деформації швидкостей:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Компактна формула закону в'язкості Ньютона: $S_{ij} = 2\rho v \tau_{ij}$ Припускаючи, що рідина нестискувана із рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{u}) = 0.$$

Отримуємо $\nabla\cdot\overrightarrow{u} = 0$. І нарешті, рівняння Нав'є-Стокса (підстановка τ_{ij}):

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2 u.$$

Розрахунок потужності перетворення кінетичної енергії рухів елементів рідини у тепло за рахунок в'язкості. Потужність в'язких напружень:

$$\dot{W} = \oint u_i\left(\tau_{ij} dS\right)$$

За теоремою Гауса:

$$\dot{W} = \int \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i \tau_{ij}\right] dV$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i\tau_{ij}\right] = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}u_i + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i u_i + \tau_{ij}S_{ij}$$

Перший доданок — потужність роботи результуючих в'язких сил (зміна механічної енергії), другий доданок — зміна внутрішньої енергії.

$$\dot{W}_{\text{dissipation}} = \int \rho\varepsilon dV$$

Швидкість зростання внутрішньої енергії на одиницю маси (в м^2 с$^{-3}$):

$$\varepsilon = \tau_{ij}S_{ij}/\rho = 2vS_{ij}S_{ij}$$

Відповідь:

$$\varepsilon = \tau_{ij}S_{ij}/\rho = 2vS_{ij}S_{ij}, \text{ де } \tau_{ij} = \rho v\left(\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), S_{ij} = 2\rho v\tau_{ij}.$$

2.

Розв'язок:

Параметр, що характеризує перевагу інерційних сил над в'язкими, називається числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{ul}{\nu}$$

Нехай u та v є швидкостями найбільшого та найменшого вихорів. А їх розміри становлять l (інтегральний масштаб) та η, відповідно. Темп передачі енергії по масштабах від більшого вихора до меншого (час передачі рівний час обороту вихора l/u):

$$\Pi \sim u^2/(l/u) = u^3/l$$

Темп дисипації енергії на найменшому масштабі:

$$\varepsilon \sim \nu S_{ij}S_{ij}$$

На найменшому масштабі S_{ij} є деформаціями швидкостей найменших вихорів $S_{ij} \sim v/\eta$, а відтак $\varepsilon \sim \nu(v/\eta)^2$. Дисипація енергії повинна співпадати з темпом передачі енергії по каскадам:

$$\Pi \sim \varepsilon$$
$$u^3/l \sim \nu v^2/\eta^2$$

Колмогорівські мікромасштаби:

$$\eta \sim lRe^{-3/4} = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}$$
$$v \sim uRe^{-1/4} = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

Чисельний розрахунок для числа Рейнольдса дає $Re = 13 \cdot 10^6$. Колмогорівська довжина: $\eta \sim 45$ мкм.

Довжина вільного пробігу:

$$L = \frac{\rho\nu}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{2M}}$$

Врахувавши, що молекулярна маса повітря $M = 0.02897$ кг/моль, густина $\rho = 1.2754$ кг·м$^{-3}$, тиск $p = 101325$ Па, температура $T = 300$ К, універсальна газова стала $R = 8.3145$ Дж/(моль·К). Отримаємо значення для довжини вільного пробігу $L = 69$ нм. Отже, $\eta/L = 656.8$ (2.8 порядка).

Відповідь: $\eta \sim 45$ мкм, $\eta/L = 656.8$ (2.8 порядка).

3.

Розв'язок:

Закон розпаду турбулентності:

$$\frac{du^2}{dt} = -\frac{(\text{енергія найбільших вихорів})}{(\text{ час оберту })} = -\frac{Au^3}{l}$$

$\frac{du^2}{dt} \sim t^{-17/7}$, а значить $l \sim t^{2/7}$ а отже $u^2 l^5 = \mathrm{const}$. **Відповідь:** доведено

Задача 4.

Розв'язок:

Спектральна густина турбулентності визначається величиною E_k, а отже розмірність густини енергії становить $E_k k$.

Потік енергії:

$$\Pi \sim E_k k/t$$

$$\frac{1}{t} \sim \omega \sim kv$$

Встановлення зв'язку між густиною енергії турбулентних рухів та руху частинок:

$$E_k k \sim nmv^2$$

$$v \approx \left(\frac{E_k k}{nm}\right)^{1/2}$$

$$\Pi \sim \frac{E_k k}{t} \approx E_k kkv \approx E_k k^2 \left(\frac{E_k k}{nm}\right)^{1/2}$$

Сталість потоку енергії дозволяє визначити спектр пульсацій:

$$E_k = \frac{\mathrm{const}}{k^{5/3}}.$$

Відповідь: $E_k \sim k^{-5/3}$

Задача 5.
Розв'язок:
а. Густина енергії руху іонів:

$$W_i = \left\langle n_0 m_i \frac{v_i^2}{2} \right\rangle =$$

$$= n_0 \frac{m_i}{2} \int \langle v_{ik} v_{ik'} \rangle e^{i\left(k+k'\right)x} dk dk' =$$

$$\frac{n_0 e^2}{2m_i} \int \frac{dk dk'}{\omega^2} \langle E_{ik} E_{ik'} \rangle e^{i\left(k+k'\right)x} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left|E_k^2\right| dk$$

Де використано рівняння руху:

$$\langle v_{ik} v_{ik'} \rangle = \frac{e^2}{m_i^2 \omega^2} \langle E_{ik} E_{ik'} \rangle$$

Енергія електричного поля W_E :

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \left|E_k^2\right| dk$$

Тому, наближено можна вважати, що

$$W_i \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} W_E$$

b. Аналогічно до першого випадку для ленгмюрівських коливань:

$$W_e \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} W_E$$

c. Аналогічно до першого випадку для поперечних коливань:

$$W_e \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} W_E$$

Відповідь: a. $W_i \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} W_E$; b. $W_e \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} W_E$; c. $W_e \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} W_E$.

Задача 6.
Розв'язок:

Взяттям дивергенції рівняння Нав'є-Стокса (з використанням умови нестискуваності $\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0$):

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + v\nabla^2\overrightarrow{u}$$

маємо наступне рівняння (рівняння Пуассона):

$$\nabla^2\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\nabla \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \nabla\overrightarrow{u})$$

Розв'язком рівняння є функція:

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho}{4\pi}\int \frac{[\nabla \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \nabla\overrightarrow{u})]'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}d\vec{x}'$$

Відповідь:

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho}{4\pi}\int \frac{[\nabla \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \nabla\overrightarrow{u})]'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}d\vec{x}'$$

Задача 7.
Розв'язок:
a. Колмогорівський мікромасштаб η:

$$\eta \sim lRe^{-3/4}$$

Просторове розділення має бути щонайменше рівне колмогорівському мікромасштабу:

$$\Delta x \sim l \sim \eta\,\mathrm{Re}^{-3/4}$$

Загальна кількість точок для моделювання:

$$N_x^3 \sim \left(\frac{L_{\mathrm{box}}}{\Delta x}\right)^3 \sim \left(\frac{L_{\mathrm{box}}}{l}\right)^3 Re^{9/4}$$

b. Необхідне часове розділення має бути:

$$\Delta t \sim \Delta x/u \sim \eta/u$$

Для загальної тривалості часу моделювання T, кількість точок для моделювання N_t:

$$N_t \sim \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{T}{\eta/u} \sim \frac{T}{l/u}Re^{3/4}$$

c. Загальна кількість точок для проведення моделювання N:

$$\text{Час обчислення } \sim N_x^3 N_t \sim \left(\frac{T}{l/u}\right)\left(\frac{L_{\text{box}}}{l}\right)^3 Re^3$$

Час обчислення моделювання,при збільшенні Re у 10 раз, збільшується у 1000 разів.

Відповідь:

a. $N_x^3 \sim \left(\frac{L_{box}}{z_m}\right)^3 Re^{9/4}$;

b. $N_t \sim \frac{T}{l/u} Re^{3/4}$

c. Час обчислення $\sim \left(\frac{T}{l/u}\right)\left(\frac{L_{\text{box}}}{l}\right)^3 Re^3$, у 1000 разів.

Задача 8.

Розв'язок:

Для опису термогравітаційної конвекції використовують систему рівнянь Нав'є-Стокса і рівняння переносу тепла (температури). При цьому, тиск слабо змінюється уздовж рідини тому зміною густини під впливом зміни тиску можна знехтувати, а зміна температури призводить до появи сил Архімеда (сил плавучості), що викликають конвективний рух.

Тоді $T = T_0 + T', \quad (T' << T_0) \to \rho = \rho_0 + \rho'$.

При цьому

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \beta T',$$

де $\beta = -\rho_0^{-1}(\partial \rho_0/\partial T)_p$ - температурний коефіцієнт розширення рідини ($\beta > 0$). Тиск - $p = p_0 + p'$, де p_0 відповідає механічній рівновазі при температурі T_0 і густині ρ_0.

Згідно рівнянню гідростатичної рівноваги

$$p_0 = \rho_0 \vec{g}\vec{r} + \text{const}, \quad \delta p(h) = \rho_0 g h \Rightarrow \delta\rho \propto \rho_0 g h/v_{\text{зв}}^2,$$

де $v_{\text{зв}}$ - швидкість звуку, що визначається як $v_{\text{зв}}^2 = (\partial p/\partial \rho)_s$, де ($s = const$, процес адіабатичний). Тоді умова існуванння вільних конвективних рухів

$$gh/v_{\text{зв}}^2 \ll \beta \delta T,$$

де δT - характерна різниця температур.

Відповідь: вільні конвективні рухи будуть мати місце в атмосферах планет коли виконується нерівність $gh/v_{\text{зв}}^2 \ll \beta\delta T$.

Задача 9.

Розв'язок:

Розглянемо рівняння Нав'є-Стокса

$$(\partial\vec{v}/\partial t) + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g},$$

вважаючи що $T = T_0 + T', \quad (T' << T_0) \to \rho = \rho_0 + \rho'$. В результаті перший доданок з правого боку набуде вигляду

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla\left(p_0 + p'\right)}{\rho_0 + \rho'} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\nabla\left(p_0 + p'\right)}{1 + \rho'/\rho_0} \approx \frac{1 - \rho'/\rho_0}{\rho_0}\nabla\left(p_0 + p'\right) =$$

$$= \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\rho'\nabla p_0}{\rho_0^2},$$

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\rho'\nabla p_0}{\rho_0^2} = \vec{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \beta T'\vec{g}.$$

При цьому використано рівняння гідростатичної рівноваги $\nabla p_0/\rho_0 = \vec{g}$, а також умову, що до конвективних процесів призводить зміна температури $\to \rho' = \left(\partial\rho_0/\partial T\right)_p T' = -\rho_0\beta T'$, де $\beta = -\rho_0^{-1}(\partial\rho_0/\partial T)_p$ - температурний коефіцієнт розширення рідини.

Тоді рівняння Нав'є-Стокса можна записати як

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho_0} - \beta T'\vec{g} + \nu\Delta\vec{v}$$

в праву частину даного рівняння входить величина, що описує силу плавучості (суперпозицію сили тяжіння і сили Архімеда) «$-\beta T'\vec{g}$».

Відповідь: показано, що рівняння Нав'є-Стокса для опису конвективних процесів набуває вигляду

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho_0} - \beta T'\vec{g} + \nu\Delta\vec{v}.$$

Задача 10.

Розв'язок:

Для аналізу потрібно перевести систему рівнянь Бусінеска до безрозмірного вигляду.

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla p + \mathrm{Ra}T\vec{e}_z + \Delta\vec{v}$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)T = \Delta T$$

$$div\vec{v} = 0.$$

Де використано, що одиниця довжини це h, температури - ΔT, час - h^2/ν, швидкість - χ/h, тиск - $\rho_0\chi^2/h^2$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ і число Релея $\mathrm{Ra} = g\beta\Delta T h^3/\chi\nu$.

Дотримуючись викладок Релея, будемо розглядати двовимірну задачу в площині 0xz. Вісь 0z спрямована вертикально вгору, а вісь 0x - горизонтально. В цьому випадку конвективний рух буде мати вигляд валів, витягнутих уздовж осі 0y. Граничні умови вибирають у вигляді:

$$z = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T = 1,$$

$$z = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T = 0.$$

Дані умови фізично означають що ми маємо межі які не деформуються, але вони є вільними. Такі умови не зовсім реальні (шар рідини з вільними верхньою і нижньою межами), але саме вони дають найпростішу математичну постановку задачі.

Нехай температура описується функцією виду $T = \vartheta + (1 - z)$, де ϑ - відхилення температури від рівноважного лінійного розподілу $T_0 = (1 - z)$. Введемо функцію потоку так, що $u = -\partial\psi/\partial z, w = \partial\psi/\partial x$.

Розгляд задачі ведеться в рамках лінійної теорії, тому з рівнянь можна відкинути всі члени, квадратичні по швидкості і збуреню профілю температури.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial p}{\partial z} + \mathrm{Ra}\cdot T + \Delta w$$

Запишемо вирази для швидкості через функцію потоку і перехресно продиференціюємо по координатам x і z.

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad |\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial p}{\partial z} + \mathrm{Ra}\cdot T + \Delta\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad |\frac{\partial}{\partial x}$$

Віднімаючи другого рівняння перше, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = \Delta\Delta\psi + \mathrm{Ra}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$$

Далі скористаємося функцією опису температури.

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial(\vartheta+1-z)}{\partial t}+u\frac{\partial(\vartheta+1-z)}{\partial x}+w\frac{\partial(\vartheta+1-z)}{\partial z}=\Delta(\vartheta+1-z)$$

В результаті перетворень отримуємо

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}-w=\Delta\vartheta$$

Другий і третій доданки в лівій частині даного рівняння містять квадрати малих величин, отже, ними можна знехтувати. У підсумку приходимо до наступного рівняння:

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\Delta\vartheta+\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Із граничними умовами

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \vartheta=0$$

або

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,\quad \psi=0, \vartheta=0.$$

Будемо шукати розв'язок системи у вигляді періодичних збурень з експоненційної залежністю амплітуди від часу:

$$\psi=\psi_0 e^{-\lambda t}\sin(\pi n z)\sin(\pi a x)$$

$$\vartheta=\vartheta_0 e^{-\lambda t}\sin(\pi n z)\cos(\pi a x)$$

Дані співвідношення задовольняють граничні умови. Підставивши вигляд розв'язків отримаємо:

$$\psi_0\left[\lambda\pi^2\left(a^2+n^2\right)-\pi^4\left(a^2+n^2\right)^2\right]+\vartheta_0[\mathrm{Ra}(\pi a)]=0$$

$$\psi_0[\pi a]+\vartheta_0\left[\lambda\mathrm{Pr}-\pi^2\left(a^2+n^2\right)\right]=0$$

Вийшла система однорідних лінійних рівнянь щодо амплітуд ψ_0 та ϑ_0. Щоб дана система мала нетривіальний розв'язок, її визначник повинен дорівнювати нулю.

$$\begin{vmatrix} \lambda\pi^2\left(a^2+n^2\right)-\pi^4\left(a^2+n^2\right)^2 & \mathrm{Ra}(\pi a) \\ \pi a & \lambda\mathrm{Pr}-\pi^2\left(a^2+n^2\right) \end{vmatrix}=0$$

Розкриваючи визначник, отримуємо квадратне рівняння щодо декремента λ:

$$\mathrm{Pr}\lambda^2 - \pi^2\left(a^2+n^2\right)(1+\mathrm{Pr})\lambda + \pi^4\left(a^2+n^2\right)^2 - \frac{a^2\mathrm{Ra}}{(a^2+n^2)} = 0$$

Розв'язуючи його отримаємо два кореня:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi^2\left(a^2+n^2\right)(1+\mathrm{Pr})}{2\mathrm{Pr}} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{\pi^4\left(a^2+n^2\right)^2(1-\mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{Pr}^2} + \frac{a^2\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}\left(a^2+n^2\right)}}$$

Із вигляду розв'язку можна зробити наступні висновки:

1. При $\mathrm{Ra} > 0$ (тобто при нагріванні знизу) вираз під коренем буде завжди додатнім. Отже, обидва кореня будуть дійсними і амплітуда збурень еволюціонує монотонно. При цьому один корінь завжди додатній, а другий при деякому значенні $\mathrm{Ra} > 0$ змінює знак, і амплітуда збурень починає експоненціально наростати.

2. При $\mathrm{Ra} < 0$ дійсна частина обох коренів завжди додатня, отже, при підігріві зверху всі збурення загасають. Але зі зростанням величини підігріву виникає ситуація, коли вираз під коренем стає від'ємним, тобто з'являються два комплексно-спряжені корені, які вказують про реалізацію згасаючих коливальних режимів. Цей перехід відбувається при значенні числа Релея

$$\mathrm{Ra}^* = -\frac{\pi^4\left(a^2+n^2\right)^3(1-\mathrm{Pr})^2}{4a^2\mathrm{Pr}}$$

Отже, існують три області значень: затухаючі коливальні збурення, монотонно затухаючі збурення і монотонно наростаючі збурення. Визначимо критичне значення числа Релея, при досягненні якого починається наростання збурень.

$$\frac{\pi^4\left(a^2+n^2\right)^2(1+\mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{Pr}^2} - \frac{\pi^4\left(a^2+n^2\right)^2(1-\mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{Pr}^2} = \frac{a^2\mathrm{Ra}_c}{\mathrm{Pr}\left(a^2+n^2\right)},$$

$$\mathrm{Ra}_c = \frac{\pi^4\left(a^2+n^2\right)^3}{a^2}$$

З отриманої формули слідує цікавий висновок: критичне число Релея не залежить від числа Прандтля. Для знаходження мінімуму/критичного значення числа Рейнольдса достатньо знайти екстремум даної функції (продиференціювати даний вираз по параметру a і прирівняти отримане співвідношення до нуля).

Відповідь: критичне число Релея - $\mathrm{Ra}_c = \pi^4 \left(a^2 + n^2\right)^3 / a^2$.

Задача 11.
Розв'язок:
Рівняння для вихору в найпростішому випадку має вигляд

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \mathrm{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0.$$

Потік вихору (циркуляція) визначається як

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l},$$

де використано теорему Стокса [1].

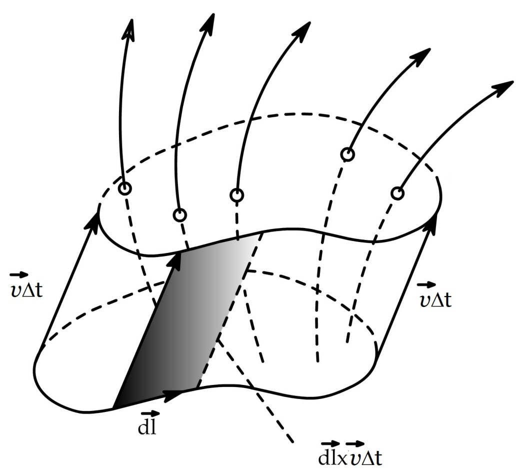

Рис. 2.3: Потік через довільний контур.

Оскільки, ми маємо бічний контур (Рис. 2.3), зміна циркуляції з часом буде в загальному задаватися співвідношенням

$$\int_S \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_L \vec{\omega} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}).$$

Врахувавши залежність

$$\vec{\omega} \cdot [d\vec{l} \times \vec{v}] = d\vec{l} \cdot [\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

[1] За теоремою Стокса для довільного вектора $\vec{A}$ існує співвідношення $\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{A} \cdot d\vec{S}$, де S - поверхня, обмежена замкненим контуром L.

та теорему Стокса, отримаємо

$$\int \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS - \oint [\vec{v} \times \vec{\omega}] \cdot d\vec{l} = \int \left\{ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times [\vec{v} \times \vec{\omega}] \right\} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Відповідь: доведено, що потік вихрових рухів зберігається.

Задача 12.
Розв'язок:
Розглянемо середню кількість дисипуючої енергії за одиницю часу в одиниці маси (розмірність ε - [Дж/(кг·с)]=[м^2/с^3]).

$$\varepsilon \sim \frac{\Delta \mathrm{u}^3}{\mathrm{L}} \sim \frac{\mathrm{b}^{3/2}}{\mathrm{L}} \left[\frac{\mathrm{м}^2}{\mathrm{c}^3} \right],$$

де b - енергія турбулентного руху $\mathrm{b} = (1/2) \sum \mathrm{u}_{\mathrm{i}}'^2$.
Турбулентна в'язкість K має розмірність $\left[\mathrm{м}^2 \mathrm{c}^{-1}\right]$.
З величин $\rho, \mathrm{L}, \Delta \mathrm{u}$, враховуючи розмірність, $\Rightarrow$

$$\mathrm{K} \sim \mathrm{L} \Delta \mathrm{u} = \mathrm{L} \sqrt{\mathrm{b}} \left[{}^2 \mathrm{c}^{-1}\right].$$

Тоді дисипація турбулентної енергії пов'язана із турбулентною в'язкістю як

$$\varepsilon \sim \frac{\Delta \mathrm{u}^3}{\mathrm{L}} = \frac{(\Delta \mathrm{uL})^3}{\mathrm{L}^4} \sim \frac{\mathrm{K}^3}{\mathrm{L}^4}.$$

Відповідь: $\varepsilon \propto \mathrm{K}^3$.

2.7 Кінетична теорія плазми

Задача 5.
Розв'язок:
В загальному випадку

$$n^{\alpha}(\vec{r}, t) = \int f^{\alpha}(\vec{r}, v, t) d^3 v$$

В нашому випадку

$$n_0 = \int_{-v_0}^{v_0} \int_{-v_0}^{v_0} \int_{-v_0}^{v_0} K_0 dv_x dv_y dv_z = 8 K_0 v_0^3$$

Отже,

$$K_0 = n_0 / 8 v_0^3.$$

Відповідь: $K_0 = n_0/8v_0^3$.

Задача 10.
Розв’язок:
Рівняння Власова

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t} + \vec{v}\nabla f_{\alpha} + \frac{1}{m_{\alpha}}\left[\vec{F}_{Ext} + q_{\alpha}\left(\vec{E_C} + \vec{v}\times\vec{B_i}\right)\right]\nabla_v f_{\alpha} = 0$$

В нашому випадку

$$\vec{F}_{Ext} = q_{\alpha}\left(\vec{v}\times\vec{B_0}\right)$$

$$\vec{B_0} = B_0\vec{e}_z$$

$$\mathrm{mod}\ \vec{F_{Ext}} = q_{\alpha}v\sin\alpha B_0 = q_{\alpha}v_{\perp}B$$

$$\vec{v} = \left(v_{\perp}\cos\psi, v_{\perp}\sin\psi, v_{\parallel}\right)$$
$$\vec{v}(t) = \left(v_{\perp}\cos\left(\omega_g t+\psi\right), v_{\perp}\sin(\omega_g t+\psi), v_{\parallel}\right)$$
$$\frac{\partial f(\vec{v}(t)}{\partial\vec{v}(t)} = \left(\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}\cos\left(\omega_g t+\psi\right), \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}}\sin\left(\omega_g t+\psi\right), \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}\right)$$

За умовою однорідності:

$$\frac{\partial f(\vec{v}(t)}{\partial\vec{r}(t)} = 0.$$

Оскільки, похідна $\partial f/\partial\vec{v}$ визначається через $v_{\parallel}$ і $v_{\perp}$ однозначно, то представлення f через $v_{\parallel}$ і $v_{\perp}$ є корректним.

Відповідь: показано, що рівняння Власова для однорідної плазми, яка знаходиться під впливом постійного зовнішнього магнітостатичного поля в рівноважному стані, задовольняє однорідній функції розподілу $f\left(v_{\parallel}, v_{\perp}\right)$, яка є циліндрично симетричною по відношенню до магнітного поля.

Задача 14.
Розв’язок:
Для розгляду можемо скористатися хвильовим рівнянням отриманим із рівнянь Максвела в задачі ***(????)***

$$-\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{E}] = -\mu_0\left(i\omega\vec{j} - \varepsilon_0\omega^2\vec{E}\right)$$

Розглянемо окремо поздовжню (паралельну $\vec{k}$) і перпендикулярну (перпендикулярну $\vec{k}$) складові. Нехай $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ і $\vec{j} = \vec{j}_{\parallel} + \vec{j}_{\perp}$, де індекси $\parallel$ і $\perp$ стосуються напрямку $\vec{k}$. Тоді:

$$-\vec{k}kE_{\parallel}+\vec{k}kE_{\parallel}=-\mu_0\left(i\omega\vec{j}_{\parallel}-\varepsilon_0\omega^2\overrightarrow{E_{\parallel}}\right)=0$$
$$k^2\vec{E}_{\perp}=-\mu_0\left(i\omega\vec{j}_{\perp}-\varepsilon_0\omega^2\vec{E}_{\perp}\right).$$

Перше рівняння описує поздовжні електростатичні коливання, а друге - поперечні хвилі в плазмі.

Розглянемо лінійно поляризовані електромагнітні хвилі, і нехай хвильовий вектор направлений вздовж осі z, а $\vec{E}_{\perp}-$ вздовж осі x. В результаті

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)E_{\perp}=iq\mu_0\omega\int f_1v_xd^3v$$

де ми записали густину струму через функцію розподілу і використали $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$. Лінеаризоване рівняння Больцмана для випадку електромагнітних хвиль:

$$i(\vec{k}\vec{v}-\omega)f_1+\frac{q}{m}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\vec{\nabla}_vf_0=0$$

Використовуючи рівняння Максвела

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow(\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B})$$

Отримаємо:

$$f_1=i\frac{q}{m}\frac{\left[\vec{E}+\omega^{-1}\vec{v}\times[\vec{k}\times\vec{E}]\right]}{(\vec{k}\vec{v}-\omega)}\cdot\vec{\nabla}_vf_0=$$
$$=i\frac{q}{m}\frac{E\left(\partial f_0/\partial v_x\right)+\left(Ek/\omega\right)\left[v_x\partial f_0/\partial v_z-v_z\partial f_0/\partial v_x\right]}{kv_z-\omega}$$

Це рівняння показує залежність збуреної функції розподілу від параметрів електричного поля хвилі. Тоді дисперсійне співвідношення для поперечних (перпендикулярних) електромагнітних хвиль:

$$\omega^2-k^2c^2=\frac{q^2}{m\varepsilon_0}\int\left[\frac{(\omega-kv_x)\,\partial f_0/\partial v_x}{kv_z-\omega}+\frac{kv_x^2\partial f_0/\partial v_z}{kv_z-\omega}\right]d^3v$$

Проінтегруємо дане рівняння по частинам, вважаючи, що немає резонансних частинок:

$$\omega^2-k^2c^2=\omega_p^2+\frac{q^2k^2}{m\varepsilon_0}\int\frac{v_x^2f_0d^3v}{(kv_z-\omega)^2}$$

Розглянемо неізотропну функцію розподілу $f_0 = \delta(v_z)\,\phi(v_x, v_y)$, де $\phi(v_x, v_y)$ - довільна функція, перпендикулярна до напрямку поширення.

$$\omega^2 - k^2c^2 - \omega_p^2\left(1 + \frac{k^2\left\langle v_x^2\right\rangle}{\omega^2}\right) = 0$$

$$\omega^4 - \left(k^2c^2 + \omega_p^2\right)\omega^2 - k^2\omega_p^2\left\langle v_x^2\right\rangle = 0.$$

Розв'язком цього рівняння буде вираз:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(k^2c^2 + \omega_p^2 \pm \left[\left(k^2c^2 + \omega_p^2\right)^2 + 4k^2\omega_p^2\left\langle v_x^2\right\rangle\right]^{1/2}\right).$$

Одне із значень ω буде завжди від'ємним для всіх значень k, тому цей розв'язок відповідає зростаючій моді. Це - нестабільні (нестійкі) світлові хвилі.

Відповдь: дисперсійне рівняння для електростатичних хвиль за відсутності резонансних частинок буде

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(k^2c^2 + \omega_p^2 \pm \left[\left(k^2c^2 + \omega_p^2\right)^2 + 4k^2\omega_p^2\left\langle v_x^2\right\rangle\right]^{1/2}\right).$$

Задача 15.

Розв'язок:

Розв'язком стаціонарного рівняння Власова ($\partial f/\partial t = 0$) є будь-яка функція, яка залежить від інтегралів руху. У дрейфовому наближенні інтегралами руху є

$$\varepsilon = \frac{m\nu^2}{2} + e\varphi$$

- енергія частинки в електростатичному полі з потенціалом φ,

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$$

- магнітний момент,

$$J_\parallel = \int \sqrt{(2/m)(\varepsilon - muB - e\varphi)}ds$$

- поздовжній адіабатичний інваріант.

Тому $f = f\left(\varepsilon, \mu, J_\parallel\right)$.

Відповідь: розв'язком є функція що задовольняє умові $f = f\left(\varepsilon, \mu, J_\parallel\right)$.

Задача 16.
Розв'язок:
Враховуючи, що $d^3v = 2\pi v_\perp dv_\perp dv_\parallel = 2\pi(Bd\mu/m)\left(d\varepsilon/mv_\parallel\right)$, отримуємо для густини електронів та іонів:

$$n_{e,i} = \frac{2\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}}$$

Звідси випливає, що $n_{e,i} = n_{e,i}(B, \varphi)$. З рівняння квазінейтральності $e_e n_e + e_i n_i = 0$ отримуємо, що $\varphi = \varphi(B)$, і відповідно, $n_{e,i} = n_{e,i}(B)$.

Отже, поздовжній та поперечний тиск у плазмі також залежать тільки від B :

$$p_{\parallel 1} = \sum_{e,i} \int d^3v m_{e,i} v_\parallel^2 f_{e,i} = \sum_{e,i} \frac{4\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi} f_{e,i} d\varepsilon d\mu$$

$$p_\perp = \sum_{e,i} \int d^3v \frac{m_{e,i} v_\perp^2}{2} f_{e,i} = \sum_{e,i} \frac{2\sqrt{2}\pi B^2}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{\mu f_{e,i} d\varepsilon d\ mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}}.$$

Відповідь: показано, що густина та тиск плазми на фіксованій силовій лінії залежить тільки від величини магнітного поля B, зокрема -

$$n_{e,i} = \frac{2\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{f_{e,i} d\varepsilon d\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}},$$

$$p_{\parallel 1} = \sum_{e,i} \frac{4\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi} f_{e,i} d\varepsilon d\mu,$$

$$p_\perp = \sum_{e,i} \frac{2\sqrt{2}\pi B^2}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{\mu f_{e,i} d\varepsilon d\ mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu B - e_{e,i}\varphi}}.$$

Задача 17.
Розв'язок:
Використаємо перше начало термодинаміки

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

де dS - зміна ентропії в системі, а dQ - тепло. Для однієї частинки за одиницю часу – $d(s/n)/dt$, Енергія, що надходить: $Q/n - e\boldsymbol{E}\boldsymbol{u}$, де

$$Q \equiv \int \frac{m}{2} v'^2 \mathrm{St}_{ab} d^3v,$$

а $-e\vec{E}\vec{u}$ - джоулеве нагрівання (теплова потужність, що має місце при наявності електричного струму). При цьому St_{ab} - інтеграл зіткнень. Потужність $\vec{u}\vec{R}$, що відповідає $\vec{R}$, йде на зміну кінетичної енергії і не викликає зміну ентропії. Тому,

$$nT\frac{d}{dt}\frac{s}{n} = Q - ne\vec{E}\vec{u}$$

Відповідь: рівняння зміни одиниці об'єму ентропії

$$nT\frac{d}{dt}\frac{s}{n} = Q - ne\vec{E}\vec{u}.$$

Задача 18.
Розв'язок:

Помножимо рівняння Власова на $mv^2/2$ і проінтегруємо в полі швидкостей

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nmu^2}{2} + \frac{3}{2}nT\right) + \mathrm{div}\left(\frac{nmu^2}{2} + \frac{5}{2}nT\right)\vec{u} = Q + \vec{u}\vec{R}.$$

Доданки що містять похідні $nmu^2/2$, перетворимо використавши рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{nmu^2}{2} + \mathrm{div}\,\frac{nmu^2}{2}\vec{u} = n\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{mu^2}{2} + \vec{u}\nabla\frac{mu^2}{2}\right) + \frac{mu^2}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\,n\vec{u}\right)}_{=0},$$

Також

$$n\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{mu^2}{2} + \vec{u}\nabla\frac{mu^2}{2}\right) = -\vec{u}\nabla p + \vec{u}\vec{R} + ne\vec{E}\vec{u}$$

В результаті отримаємо

$$\frac{3}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u}\nabla p\right] = -ne\vec{E}\vec{u} - \frac{5}{2}p\,\mathrm{div}\,\vec{u} + Q.$$

$$\left[\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{u}\nabla n\right] = -n\,\mathrm{div}\,\vec{u}$$

Помножимо перше рівняння на $1/p$, а друге - на $-5/2n$.
Оскільки $d(s/n) = 3dp/2p - 5dn/2n$, то отримаємо:

$$nT\frac{d}{dt}\frac{s}{n} = Q - ne\vec{E}u$$

Відповідь: використовуючи рівняння Власова отримано закон збереження енергії у вигляді:

$$nT\frac{d}{dt}\frac{s}{n} = Q - ne\vec{E}u$$

Задача 19.

Розв'язок:

Нехай через довільну границю $z = z_0$ рухи частинок зліва направо і з права на ліво однакові за одиницю часу $j \sim n_e v_{Te}$. З боку іонів на ці потоки діють сили тертя F_+і F_- відповідно, причому $F_\pm \sim m_e j v_\pm$. Оскільки частота зіткнень $\nu_\pm$ залежить від температури, результуюча сила $\vec{F}_T = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$ не дорівнює нулю, якщо $\partial T_e/\partial z \neq 0$. Враховуючи, що в точку $z = z_0$ потрапляють електрони в середньому з відстаней порядку $\lambda \sim v_{Te}/v$, з $z > z_0$ будуть приходити електрони з енергією приблизно на $\lambda \partial T_e/\partial z$ більшої енергії електронів, що надходять з області $z < z_0$. Тому результуюча сила по порядку величини дорівнює

$$F_T \sim \frac{\lambda}{T_e}\frac{\partial T_e}{\partial z} m_e j \nu \sim \frac{m_e v_{Te}^2}{T_e} n_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \sim n_e \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Вона направлена проти градієнта температури.

Відповідь: $F_T \neq 0, \quad F_T \sim n_e(\partial T_e/\partial z)$.

Задача 20.

Розв'язок:

Нехай середовище однорідне, не замагнічене, а градієнт електронної температури, спрямований уздовж осі z $\nabla T_e = e_z dT_e/dz$. Струм відсутній - іони і електрони нерухаються. Градієнт електронного тиску врівноважується $\nabla p_e = n\nabla T_e$ електричним полем $\vec{E} = E\vec{e_z}$, яке має утримувати електрони. У випадку ізольованої плазми, електричне поле створюється зарядами, що накопичуються на її поверхні. Запишемо кінетичне рівняння для функції розподілу електронів, для стаціонарного випадку $\partial f/\partial t = 0$: Враховуючи, що ми розглядаємо стаціонарний випадок,

$$v_z\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m}E\frac{\partial f}{\partial v_z} = \{\mathrm{St}\} = \frac{A}{\nu^3}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}.$$

Де $\{\mathrm{St}\}$ - лоренцівський інтеграл зіткнень, $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda / m^2$. В силу симетрії завдання функція f не залежить від азимутального кута, а A/ν^3 частота електрон-іонних зіткнень. Отримаємо, що

δf (бо f_{M} при $\boldsymbol{u} = 0$ не залежить від ϑ), а в лівій частині ми знехтуємо δf в порівнянні з членами, що містять f_{M} :

$$v_z \frac{\partial f_{\mathrm{M}}}{\partial z} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f_{\mathrm{M}}}{\partial v_z} = \frac{A}{\nu^3} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial \delta f}{\partial \vartheta}.$$

Розкриваючи похідні

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\mathrm{M}}}{\partial v_z} &= -\frac{m v_z}{T_e} f_{\mathrm{M}} = -\frac{m v \cos\vartheta}{T_e} f_{\mathrm{M}} \\
\frac{\partial f_{\mathrm{M}}}{\partial z} &= -\frac{3}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} f_{\mathrm{M}} + \frac{m v^2}{2T_e^2} \frac{\partial T_e}{\partial z} f_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left(\frac{m v^2}{T_e} - 3 \right) f_{\mathrm{M}}
\end{aligned}$$

$$\frac{v}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left(\frac{m v^2}{T_e} - 3 \right) f_{\mathrm{M}} \cos\vartheta - \frac{eEv\cos\vartheta}{T_e} f_{\mathrm{M}} = \frac{A}{\nu^3} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial \delta f}{\partial \vartheta}.$$

Шукатимемо розв'язок розділяючи змінні, при цьому $\delta f = \Phi(v)\cos\vartheta$, а функція $\Phi(v)$:

$$\Phi(v) = -\frac{\nu^3}{2A} \left[\frac{v}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left(\frac{m v^2}{T_e} - 3 \right) - \frac{eEv}{T_e} \right] f_{\mathrm{M}}$$

Внаслідок азимутальної симетрії досить розглянути лише z-компоненту цього векторного співвідношення:

$$\int \delta f v_z d^3 v = 0$$

або

$$\int \Phi(v) v \cos^2\vartheta d^3 v = 0$$

При усередненні по тілесному куту $\langle \cos^2\vartheta \rangle = 1/3$, так що остання умова зводиться до

$$\int \Phi(v) v d^3 v = 0$$

Тоді

$$\int f_{\mathrm{M}} v^5 d^3 v = 48\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{T_e}{m}\right)^{5/2}, \quad \int f_{\mathrm{M}} v^7 d^3 v = 384\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{T_e}{m}\right)^{7/2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T_e}{\partial z}(384 - 3\cdot 48) = 48eE$$

або

$$eE = \frac{5}{2}\frac{\partial T_e}{\partial z}, \quad E = \frac{5}{2e}\frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Відповідь:

$$E = \frac{5}{2e}\frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Задача 21.
Розв'язок:
Використовуючи функцію

$$\vec{q} = \int \frac{m(\vec{v}-\vec{u})^2}{2}(\vec{v}-\vec{u}) f d^3 v$$

і функцію розподілу електронів у вигляді отриманому в попередній задачі:

$$\begin{aligned}
\vec{q}_{ue} &= \int \frac{m(\vec{v}-\vec{u})^2}{2}(\vec{v}-\vec{u}) f d^3 v \\
&\approx \int \frac{m\vec{v}^2}{2}\vec{v}\delta f d^3 v - \int m(\vec{v}\vec{u})\vec{v} f_{\mathrm{M}} d^3 v - \int \frac{m\vec{v}^2}{2}\vec{u} f_{\mathrm{M}} d^3 v \\
&= 4n_e T_e \vec{u} - n_e T_e \vec{u} - \frac{3}{2} n_e T_e \vec{u} \\
&= \frac{3}{2} n_e T_e \vec{u}
\end{aligned}$$

Повний електронний потік тепла $\boldsymbol{q}_e$ дорівнює сумі $\boldsymbol{q}_{ue}$ і $\boldsymbol{q}_{Te}$.
Відповідь: $\vec{q}_{ue} = 3/2(n_e T_e \vec{u})$.

2.8 Плазма в космосі

Задача 2.
Розв'язок:

Об'єм простору який долає сонячний вітер за проміжок часу Δt біля земної орбіти у всіх напрямках

$$V = S \cdot l = 4\pi r_0^2 \cdot v_{SW} \Delta t$$

Кількість протонів:

$$N = nV$$

Маса протонів:

$$\Delta M = m_p n V$$

Темп втрати маси $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \frac{\Delta M}{\Delta t} = m_p n \cdot 4\pi r_0^2 \cdot v_{SW} =$$

$$= 1.67 \cdot 10^{-27}\text{кг} \cdot 10^7\text{м}^{-3} 4\pi \cdot \left(1.49 \cdot 10^{11}\right)^2 \text{ м}^2 \cdot 4.7 \cdot 10^5\text{м/с} =$$

$$= 1.74 \cdot 10^8\text{кг/с}$$

$$T = \frac{M_\oplus}{\dot{m}} = \frac{1.99 \cdot 10^{30}\text{кг}}{1.74 \cdot 10^8\text{кг/с}} = 1.14 \cdot 10^{22}\text{с} = 3.6 \cdot 10^{14} \text{ років.}$$

Відповідь:

$$\dot{m} = 1.74 \cdot 10^8\text{кг/с}, \quad T = 3.6 \cdot 10^{14} \text{ років.}$$

Задача 4.
Розв'язок:

$$E_K = \frac{m_p v_{SW}^2}{2} = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{КГ} \cdot \left(4.7 \cdot 10^5\right)^2 \text{ m}^2/\text{c}^2 = 1.84 \cdot 10^{-16} \text{ Дж.}$$

Відповідь:

$$E_K = 1.84 \cdot 10^{-16}\text{Дж.}$$

Задача 6.
Розв'язок:

Магнітний момент (або перший адіабатичний інваріант) ν зарядженої частинки, що рухається у магнітному з напруженістю B можна обчислити за формулою:

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B}$$

Поперечна швидкіст $v_{\perp}$, ов'язана через пітч-кут α та повну швидкість v наступним чином:

$$v_{\perp} = v \sin\alpha$$

Враховуючи, що $W = \frac{1}{2}mv^2$

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv^2 \sin^2\alpha}{B} = \frac{W \sin^2\alpha}{B}$$

Дипольний магнітний момент Землі наразі складає:

$$M = 8 \cdot 10^{15} \text{ Тл} \cdot \text{м}^3 = 30.4 \text{ мТл} \cdot R_E^3$$

Модуль дипольного магнітного поля в будь-якій точці на геоцентричній віддалі r та з кутом магнітної кошироти θ становить:

$$B = Mr^{-3}\left(1 + 3\cos^2\theta\right)$$

Рівняння для силової лінії у сферичній системі координат для осесиметричної конфігурації:

$$\frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dr}{B_r}$$
$$d\varphi = 0$$

Дипольне магнітне поле у сферичних координатах має вигляд:

$$B_r = 2Mr^{-3}\cos\theta$$
$$B_\theta = 2Mr^{-3}\cos\theta$$
$$B_\varphi = 0.$$

Підстановка компонент поля у рівняння силової лінії та інтегрування дає залежність геоцентричної віддалі від кошироти:

$$r = r_0 \sin^2\theta.$$

Тут r_0 відстанню до перетину силової лінії з екватором, в одиницях радіусу Землі її позначають через L. Вираз через магнітну широту λ :

$$r = L\cos^2\lambda$$

Оскільки за умовою задачі – $\lambda = 0$, тому $r = L, B = ML^{-3}$. Фінальна формула для підстановки чисельних значень:

$$r = r_0 \sin^2\theta$$

$$\mu = \frac{W\sin^2\alpha}{ML^{-3}} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 14\cdot 10^3\cdot 0.5^2}{30.4\cdot 10^{-6}\cdot 3^{-3}} =$$

$$= 4.97\cdot 10^{-10}\text{А}\cdot\text{м} \approx 0.5\ \text{нА}\cdot\text{м}$$

Відповідь:

$$\mu = \frac{W\sin^2\alpha}{ML^{-3}} \approx 0.5\ \text{нА}\cdot\text{м}.$$

Задача 7.
Розв’язок:
Складемо рівняння збереження густини імпульсу:

- надлишок густини імпульсу в сонячному вітрі = густина імпульсу біля магнітошару
- надлишок густини імпульсу в сонячному вітрі = $(n+\Delta n)mv_{sw} - nmv_{sw}$
- густина імпульсу біля магнітошару = $(n+\Delta n)mv_e$

З рівняння збереження густини імпульсу, отримуємо з якої швидкістю плазмоїд проникає в магнітошар:

$$v_e = \frac{v_{sw}\Delta n}{n+\Delta n}$$

$$\Delta n = \frac{v_e n}{v_{sw} - v_e} = \frac{3\cdot 4.2}{440-3} = 0.028\ \text{см}^{-3}.$$

Відповідь:

$$\Delta n = \frac{v_e n}{v_{sw} - v_e} = 0.028\ \text{см}^{-3}.$$

Задача 8.
Розв’язок:

Градієнт тиску: $\nabla p = \vec{J} \times \vec{B}$

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B} = en\vec{v} \times \vec{B}$$
$$|\nabla p| = envB = 1.72 \cdot 10^{-17}\ \text{Па/м}$$

Відповідь: $1.72 \cdot 10^{-17}$ Па/м.

Задача 9.
Розв'язок:

Рух частинки стає неадіабатичним і стає хаотичним, якщо параметр кривини $\kappa \leq 1$, тобто коли радіус кривини силової лінії лінії магнітного поля не менше гірорадіусу зарядженої частинки. Цей параметр означається через радіус кривини $R_{C\,\min}$ та Ларморівський радіус $\rho_{\max}$ наступним чином:

$$\kappa = (R_{C\,\min}/\rho_{\max})^{1/2}$$
$$\rho_{\max} = \frac{mv_{\perp\max}}{qB}$$
$$v_{\perp\max} = \frac{RqB}{m} = 122\ \text{км/с.}$$

Відповідь:

$$v_{\perp\max} = \frac{RqB}{m},\ 122\ \text{км/с.}$$

Задача 13.
Розв'язок:

Для генерації магнітного поля потрібно щоб виконувалася умова $\tau > 0$ і $v > c^2/4\pi\sigma d$. Для сонячних хромосферних спалахів $d \approx 10^9$ см, $v \approx 10^8$ см /с, $\quad 4\pi\sigma vd/c^2 \gg 1$ і $\tau^{-1} \approx d/4\pi v \approx 1$с.

Відповідь: $v \approx 10^8$ см/с, $\tau^{-1} \approx 1$ с.

Задача 14.
Розв'язок:

Порожнина яка "вимітається"супутником, буде мати конічну форму із кутом θ при вершині. Величина кута буде визначатися відношенням швидкості іонного звуку в плазмі до швидкості космічного апарату $\rightarrow (v_{\text{зв}})/v << 1$.

Відповідь: розмір конічної порожнини визначається швидкістю іонного звуку в плазмі до швидкості космічного апарату.

2.9 Границі в космосі

Задача 1.

Розв'язок:

Оскільки границя непроникна, то нормальна складова швидкості потоку сонячного вітру при обтіканні Місяця обертається в нуль (точка стагнації (т.О)). Рівняння збереження енергії (рівняння Бернулі)

$$\rho\frac{U_\infty^2}{2} + p_\infty = p_O$$

де p_∞ і p_O - тиск сонячного вітру у незбуреній області та в т.О, відповідно. Отже, тиск у точці стагнації більший, ніж тиск на нескінченності (тиск сонячного вітру), на величину $\rho U_\infty^2/2$, яка є кінетичною енергією одиниці об'єму незбуреного потоку.

Відповідь: тиск сонячного вітру в точці стагнації зростає на $\rho U_\infty^2/2$.

Задача 2.

Розв'язок:

Для цього випадку ми можемо вважати тиск скаляром, а магнітним полем знехтувати. Тоді можна використати співвідношення Ренкіна-Гюгоніо, що описують закон збереження маси, імпульсу та енергії через ударну хвилю для адіабатичного середовища:

$$\begin{aligned}
&[\rho_m U_n] = 0\\
&\left[\rho_m U_n^2 + p\right] = 0\\
&\left[\rho_m U_n \vec{U}_t\right] = 0\\
&\left[\left(\frac{\rho_m U^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)}\right) U_n\right] = 0
\end{aligned}$$

Квадратні скобки означають стрибки параметрів по обидва боки від фронту хвилі. Із першого і третього рівняння отримаємо, що тангенціальна компонента є неперервною $\left[\vec{U}_t\right] = 0$ (тангенціальна компонента є неперервною). Тому ми можемо перейти до системи координат, що рухається вздовж площини УХ. При цьому $\vec{U}_t = 0$ і $U = U_n$. Введемо нові змінні що описують саме стрибки параметрів по обидва боки від фронту хвилі

$$\eta = \frac{\rho_{m2}}{\rho_{m1}}, \xi = \frac{p_2}{p_1}$$

Індекси 1 і 2 позначають характеристики до та після фронту ударної хвилі, відповідно. Оскільки $U_1\rho_{m1} = U_2\rho_{m2}U_1\rho_{m1} = U_2\rho_{m2}$, то

$$\eta = \frac{U_1}{U_2}$$

Локальна швидкість звуку перед фронтом ударної хвилі - $v_{s1}^2 = \gamma p_1/\rho_{m1}$, а число Маха перед фронтом як $M_1 = U_1/v_{s1}$, то закон збереження кількості руху через фронт ударної хвилі

$$M_1^2\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = \frac{\xi - 1}{\gamma}$$

а закон збереження енергії

$$M_1^2\left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) = 2\frac{(\xi/\eta - 1)}{\gamma - 1}$$

Знайдемо значення η, виключивши ξ. Є два можливих розв'язки: $\eta = 1$, яке справедливе при умові $U_1 = U_2$ і, відповідно, ми не маємо стрибка параметрів, та

$$\eta = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

Для зміни тисків тоді

$$\xi = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}$$

Для сильної ударної хвилі $M_1 \to \infty$ і стрибок параметрів буде визначатися співвідношенями:

$$\frac{\rho_{m2}}{\rho_{m1}} \to \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)},$$
$$\frac{U_2}{U_1} \to \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)},$$
$$\frac{p_2}{p_1} \to \frac{2\gamma M_1^2}{(\gamma + 1)}.$$

Для одноатомного газу $\gamma = 5/3$ і $\rho_{m2}/\rho_{m1} \to 4$, а $U_2/U_1 \to 1/4$. Для двоатомного при $\gamma = 7/5$ і $\rho_{m2}/\rho_{m1} \to 6$, $U_2/U_1 \to 1/6$. (Примітка: В реальних умовах у сильній ударній хвилі показник адіабати не залишається сталим із-за процесів дисоціації та іонізації, тому стиснення може стати набагато більшим.)

Відповідь: для одноатомного газу граничне стиснення рівне 4, а для двохатомного газу - 6, стрибок швидкості 1/4 та 1/6, відповідно.

Задача 3.
Розв'язок:

Для оцінок можна використати рівняння стрибків параметрів отримані в попередній задачі. А саме:

$$\eta = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} = \frac{\rho_{m2}}{\rho_{m1}},$$

$$\xi = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Величину нагрівання після ударної хвилі T_2/T_1 ми можемо оцінити, використовуючи рівняння ідеального газу $p_2 = n_2 k_b T_2$, $p_1 = n_1 k_b T_1$.

Тоді

$$\frac{n_2 k_b T_2}{n_1 k_b T_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)}\frac{1}{\eta},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)} \cdot \frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{(\gamma+1)M_1^2},$$

Для сильної ударної хвилі $M_1 \to \infty$.

$$\frac{T_2}{T_1} \to \frac{2\gamma(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)^2} \to \infty.$$

Таким чином, ми не маємо верхньої межі нагрівання, значення прямує до M_1^2, а для сильної ударної хвилі $M_1 \to \infty$.

Відповідь: ми не маємо верхньої границі нагрівання для сильної ударної хвилі ($T_2/T_1 \to \infty$).

Задача 4.
Розв'язок:

В області переоб'єднання силових ліній магнітного поля речовина наближається до границі з конвективною швидкістю і, зрештою, виштовхується вздовж границі. Границя, що містить нейтральну точку, буде областю зі зниженим магнітним полем. Граничний прошарок вшир сягає 2δ (вздовж x), і становить $2L$ завдовжки (вздовж z).

Плазма наближається до границі з конвективною швидкістю $\vec{U} = \vec{E} \times \vec{B}/B^2$, що для нашої геометрії $U_x = E_y/B_z$.

Для стаціонарного випадку $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ і E_y - постійне та однорідне всередині потоку. Значення для густини струму можна отримати і із рівняння Максвела $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$: та використовуючи закон Ома:

$$\mu_0 j_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x} \approx \frac{B_z}{\delta}, \quad j_y = \sigma E_y.$$

Тоді

$$\mu_0 \sigma U_x B_z \approx \frac{B_z}{\delta} \quad \Rightarrow \quad U_x = -1/\mu_0 \sigma \delta.$$

Оскільки характерний час дифузії магнітного поля (***див. задачу 2222***) $t_D = \mu_0 \sigma \delta^2$, то швидкість руху плазми всередину граничного прошарку дорівнює швидкості дифузії магнітного поля із плазми.

U_x - швидкість, з якою силові лінії магнітного поля переносяться назустріч і утворюють нейтральну точку, тому ця швидкість визначає темп об'єднання (швидкість анігіляції) і є швидкістю перетворення енергії магнітного поля у енергію плазми.

Відповідь: швидкість перетворення енергії магнітного поля у енергію плазми задається співвідношенням $U_x = -1/\mu_0 \sigma \delta$

Задача 5.

Розв'язок:

Конфігурація в області нейтральної точки аналогічна до попередньої задачі (***див. задачу 2222***): граничний прошарок вздовж $x - 2\delta$, а вздовж $z - 2L$. При цьому швидкість потоку в напрямку границі:

$$U_x = -1/\mu_0 \sigma \delta,$$

а U_z – швидкість вздовж границі.

Із рівняння неперервності

$$U_x L = U_z \delta$$

Границя підтримується балансом тисків речовини та магнітного поля:

$$p = p_\infty + \frac{B_z^2}{2\mu_0}$$

де B_z - магнітне поле за границею, p - тиск всередині границі (у нейтральній точці), p_∞ - тиск далеко від границі. Оскільки тиск в нейтральній точці більший, ніж тиск у сусідніх областях. Різниця тисків (тиск в нейтральній точці більший, ніж тиск у сусідніх областях) буде виштовхувати плазму і прискорювати її вздовж границі. Швидкість плазми вздовж границі можна знайти із рівняння Бернуллі

$$p - p_\infty = \rho \frac{U_z^2}{2},$$

де ρ - масова густина речовини (плазми).

Тоді

$$\frac{B_z^2}{2\mu_0} = \rho\frac{U_z^2}{2},$$

$$\frac{U_x L}{U_z} = \delta, \quad U_x = -U_z/\mu_0\sigma U_x L,$$

$$U_x^2 = \frac{B_z}{\sqrt{\mu_0\rho}}\left(\frac{1}{\mu_0\sigma L}\right).$$

$V_A = B_z/\sqrt{\mu_0\rho}$ - альфвенівська швидкість. Якщо тепер означити магнітне число Рейнольдса як $R_m = \mu_0\sigma L V_A$, то вираз для швидкості потоку:

$$U_x = V_A/\sqrt{R_m}.$$

Відповідь: доведено, що $U_x \propto V_A$.

Задача 6.

Розв'язок:

Для оцінки використаємо співвідношення

$$\eta = \frac{E_{\mathrm{IMF}}}{E_{\mathrm{SW}} + E_{\mathrm{IMF}}},$$

де E_{IMF} – густина енергії міжпланетного магнітного поля, а E_{SW} – густина енергії набігаючого потоку сонячного вітру (SW).

Густина енергії міжпланетного магнітного поля визначається значенням магнітного поля на орбіті Землі

$$E_{\mathrm{IMF}} = B^2/2\mu_0 = \left(5\cdot 10^{-9}\right)^2 \text{ Тл }^2/\left(2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}\right) =$$
$$= 1.98\cdot 10^{-12} \text{ Дж/м}^3$$

А для потоку сонячного вітру:

$$E_{SW} = n\left(m_e + m_i\right)U^2 \approx n m_i U^2 =$$
$$= 10^6\text{м}^3 \cdot 1.67\cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\left(4\cdot 10^5\right)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 = 6.68\cdot 10^{-11} \text{ Дж/м}^3$$

В результаті отримаємо

$$\eta = \frac{E_{\mathrm{IMF}}}{E_{\mathrm{SW}} + E_{\mathrm{IMF}}} \approx \frac{E_{\mathrm{IMF}}}{E_{\mathrm{SW}}} = 0.03$$

Відповідь: В області магнітопаузи Землі на густину енергії міжпланетного магнітного поля припадає близько 3%.

Задача 8.

Розв'язок:

Форма магнітопаузи визначається балансом тисків. При цьому врівноважується динамічний тиск з боку набігаючого потоку сонячного вітру (зовнішній тиск) та магнітосферний тиск (внутрішній тиск).

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = 2\rho_{SW} U_{SW}^2 \cos^2\phi$$

де ϕ – кут між набігаючим потоком та нормаллю проведеною до границі магнітосфери. Значення магнітного поля для квазідипольної структури через дипольний момент можна записати як

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}$$

а густину потоку сонячного вітру $\rho_{SW} \approx m_i n_i$

В результаті отримаємо

$$\frac{\mu_0^2 M^2}{16\pi^2 r^6 \cdot 2\mu_0} = 2m_i n_i \cdot U_{SW}^2 \cos^2\phi \Rightarrow r^6 = \frac{\mu_0 M^2}{64\pi^2 m_i n_i \cdot U_{SW}^2 \cos^2\phi}$$

$$r = \left(\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\text{Н/м} \cdot \left(8 \cdot 10^{12}\right)^2 \text{А}^2/\text{м}^4}{64\pi^2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\text{кг} \cdot 10^6\text{м}^{-3} \cdot \left(4 \cdot 10^5\right)^2 \text{м}^2/\text{с}^2 \cdot 1}\right)^{1/6}$$

$$\approx 7.6 \cdot 10^9 \text{ м} = 11.9 R_E$$

Відповідь: отримано, що

$$r^6 = \frac{\mu_0 M^2}{64\pi^2 m_i n_i \cdot U_{SW}^2 \cos^2\phi},$$

а положення магнітопаузи в екваторіальній площині знаходиться на відстані $11.9R_E$.

3

Додаток

ДОДАТОК

ДЕЯКІ ЧИСЛОВІ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

В межах двох відсотків

$$(2\pi)^{1/2} \approx 2.5;\ \ \pi^2 \approx 10;\ \ e^3 \approx 20;\ \ 2^{10} \approx 10^3;$$

Гама функція $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\begin{array}{ll} \Gamma(1/6) = 5.5663 & \Gamma(3/5) = 1.4892 \\ \Gamma(1/5) = 4.5908 & \Gamma(2/3) = 1.3541 \\ \Gamma(1/4) = 3.6256 & \Gamma(3/4) = 1.2254 \\ \Gamma(1/3) = 2.6789 & \Gamma(4/5) = 1.1642 \\ \Gamma(2/5) = 2.2182 & \Gamma(5/6) = 1.1288 \\ \Gamma(1/2) = 1.7725 = \sqrt{\pi} & \Gamma(1) = 1 \end{array}$$

Біноміальна теорема (справджується для $|\, x \,| < 1$ або коли α – додатне число):

$$\left(1+x\right)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \equiv 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

ВЕКТОРНІ ТОТОЖНОСТІ

Позначення: *f, g* – скаляри; $\vec{A}$, $\vec{B}$ – вектори; *T* – тензор, знак вектора над оператором набла опущено.

1) $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B}$

2) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{C}\times\vec{B})\times\vec{A} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

3) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

4) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

5) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$

6) $\nabla(fg) = \nabla(gf) = f\nabla g + g\nabla f$

7) $\nabla\cdot(f\vec{A}) = f\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla f$

8) $\nabla\times(f\vec{A}) = f\nabla\times\vec{A} + \nabla f\times\vec{A}$

9) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$

10) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

11) $\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) = (\nabla\vec{B})\cdot\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

12) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

13) $\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f$

14) $\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times\nabla\times\vec{A}$

15) $\nabla\times\nabla f = 0$

16) $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$

Якщо e_1, e_2, e_3 – ортонормовані одиничні вектори, тензор другого порядку T може бути записаний у формі

17) $T = \sum_{i,j} T_{ij} e_i e_j$

У декартових координатах дивергенція тензора – вектор з компонентами

18) $(\nabla\cdot T)_i = \sum_j \left(\partial T_{ji} / \partial x_j\right)$

19) $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B}) = (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

20) $\nabla\cdot(fT) = \nabla f\cdot T + f\nabla\cdot T$

Нехай $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор величини r, від початку координат до точки x, y, z. Тоді

21) $\nabla\cdot\vec{r} = 3$

22) $\nabla\times\vec{r} = 0$

23) $\nabla r = \vec{r}/r$

24) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$

25) $\nabla\cdot(\vec{r}/r^3) = 4\pi\delta(\vec{r})$

26) $\nabla\vec{r} = I$

Якщо V – об'єм, обмежений поверхнею S та $d\vec{S} = \vec{n}dS$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований назовні від V,

27) $\int_V dV\nabla f = \int_S d\vec{S}\, f$

28) $\int_V dV\nabla\cdot\vec{A} = \int_S d\vec{S}\cdot\vec{A}$

29) $\int_V dV\nabla\cdot T = \int_S d\vec{S}\cdot T$

30) $\int_V dV\nabla\times\vec{A} = \int_S d\vec{S}\times\vec{A}$

31) $\int_V dV\,(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) = \int_S d\vec{S}\cdot(f\nabla g - g\nabla f)$

32) $\int_V dV\,(\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{A}) = \int_S d\vec{S}\cdot(\vec{B}\times\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\times\vec{B})$

Якщо S – відкрита поверхня, обмежена контуром C, елемент довжини якої $d\vec{l}$

33) $\int_S d\vec{S}\times\nabla f = \oint_C d\vec{l}\; f$

34) $\int_S d\vec{S}\cdot\nabla\times\vec{A} = \oint_C d\vec{l}\cdot\vec{A}$

35) $\int_S (d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{A} = \oint_C d\vec{l}\times\vec{A}$

36) $\int_S d\vec{S}\cdot(\nabla f\times\nabla g) = \oint_C f\; dg = -\oint_C g\; df$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ В КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ

Циліндричні координати

Дивергенція $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Градієнт $(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}$; $(\nabla f)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}$; $(\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

Ротор $(\nabla\times\vec{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}$; $(\nabla\times\vec{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$;

$$(\nabla\times\vec{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}$$

Лапласіан $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Лапласіан вектора $(\nabla^2\vec{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{A_r}{r^2}$;

$$(\nabla^2\vec{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{r^2};\; (\nabla^2\vec{A})_z = \nabla^2 A_z$$

Компоненти $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_r = A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} + A_z\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_\phi = A_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + A_z\frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{A_\phi B_r}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_z = A_r\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Дивергенція тензора

$$(\nabla\cdot T)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial z} + \frac{T_{\phi r}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$$

Сферичні координати

Дивергенція

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Градієнт

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r};\quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta};\quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

Ротор

$$(\nabla\times\vec{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}$$

$$(\nabla\times\vec{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)$$

$$(\nabla\times\vec{A})_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}$$

Лапласіан

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Лапласіан вектора

$$(\nabla^2\vec{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\mathrm{ctg}\theta A_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$(\nabla^2\vec{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$(\nabla^2\vec{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}$$

Компоненти $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_r = A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial B_r}{\partial\phi} - \frac{A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_\theta = A_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\theta}{\partial\phi} + \frac{A_\theta B_r}{r} - \frac{\mathrm{ctg}\theta A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_\phi = A_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} + \frac{A_\phi B_r}{r} + \frac{\mathrm{ctg}\theta A_\phi B_\theta}{r}$$

Дивергенція тензора

$$(\nabla\cdot T)_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta r}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial\phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial\phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{\mathrm{ctg}\theta T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta\phi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{\mathrm{ctg}\theta T_{\phi\theta}}{r}$$

РОЗМІРНОСТІ Й ОДИНИЦІ

Щоб одержати значення величини в гаусових одиницях, необхідно помножити значення, виражене в одиницях СІ, на перевідний множник.

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Перевідний множник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
Ємність	$\frac{t^2q^2}{ml^2}$	l	Фарад	9×10^{11}	см
Заряд	q	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}$	Кулон	3×10^{9}	статкулон
Густина заряду	$\frac{q}{l^3}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{3/2}t}$	Кулон/м^3	3×10^{3}	статкулон/см^3
Провідність	$\frac{tq^2}{ml^2}$	$\frac{l}{t}$	Сіменс	9×10^{11}	см/сек
Питома провідність	$\frac{tq^2}{ml^3}$	$\frac{1}{t}$	Сіменс/м	9×10^{9}	сек$^{-1}$
Струм	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t^2}$	Ампер	3×10^{9}	статампер
Густина струму	$\frac{q}{l^2t}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t^2}$	Ампер/м^2	3×10^{5}	статампер/см^2
Густина	$\frac{m}{l^3}$	$\frac{m}{l^3}$	кг/м^3	10^{-3}	г/см^3
Зміщення електричного поля	$\frac{q}{l^2}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Кулон/м^2	$12\pi\times10^{5}$	статкулон/см^2
Напруженість електричного поля	$\frac{ml}{t^2q}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Вольт/м	$\frac{1}{3}\times10^{-4}$	статвольт/см

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Пере-відний множ-ник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
ЕРС	$\frac{ml^2}{t^2q}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t}$	Вольт	$\frac{1}{3}\times10^{-2}$	статвольт
Енергія	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	Джоуль	10^7	ерг
Густина енергії	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	Джоуль/м^3	10	ерг/см^3
Сила	$\frac{ml}{t^2}$	$\frac{ml}{t^2}$	Ньютон	10^5	дин
Частота	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	Герц	1	Герц
Імпеданс, опір	$\frac{ml^2}{tq^2}$	$\frac{t}{l}$	Ом	$\frac{1}{9}\times10^{-11}$	сек/см
Індукція	$\frac{ml^2}{q^2}$	$\frac{t^2}{l}$	Генрі	$\frac{1}{9}\times10^{-11}$	сек^2/см
Довжина	l	l	метр (м)	10^2	см
Напруженість магнітного поля	$\frac{q}{lt}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Ампер/м	$4\pi\times10^{-3}$	Ерстед
Магнітний потік	$\frac{ml^2}{tq}$	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}$	Вебер	10^8	Максвел
Магнітна індукція	$\frac{m}{tq}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Тесла	10^4	Гаус

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Пере-відний множ-ник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
Магнітний момент	$\frac{l^2 q}{t}$	$\frac{m^{1/2} l^{5/2}}{t}$	Ампер · м^2	10^3	Ерстед · см^3
Намагніченість	$\frac{q}{lt}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t}$	Ампер/м	10^{-3}	Ерстед
Магніторушійна сила	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2} l^{1/2}}{t^2}$	Ампер	$\frac{4\pi}{10}$	Гільберт
Маса	m	m	кілограм (кг)	10^3	грам (г)
Імпульс	$\frac{ml}{t}$	$\frac{ml}{t}$	кг · м/с	10^5	г · см/сек
Густина імпульсу	$\frac{m}{l^2 t}$	$\frac{m}{l^2 t}$	кг/(м^2 · с)	10^{-1}	г/(см^2 · сек)
Магнітна проникність	$\frac{ml}{q^2}$	1	Генрі/м	$\frac{1}{4\pi} \times 10^7$	—
Діелектрична проникність	$\frac{t^2 q^2}{ml^3}$	1	Фарад/м	$36\pi \times 10^9$	—
Поляризація	$\frac{q}{l^2}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t}$	Кулон/м^2	3×10^5	статкулон/см^2
Потенціал	$\frac{ml^2}{t^2 q}$	$\frac{m^{1/2} l^{1/2}}{t}$	Вольт	$\frac{1}{3} \times 10^{-2}$	статвольт
Потужність	$\frac{ml^2}{t^3}$	$\frac{ml^2}{t^3}$	Ват	10^7	ерг/сек

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Пере-відний множ-ник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
Густина енергії	$\frac{m}{lt^3}$	$\frac{m}{lt^3}$	Ват/м^3	10	ерг/(см^3·сек)
Тиск	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	Паскаль	10	дин/см^2
Магнітний опір	$\frac{q^2}{ml^2}$	$\frac{1}{l}$	Ампер/ Вебер	$4\pi \times 10^{-9}$	см$^{-1}$
Питомий опір	$\frac{ml^3}{tq^2}$	t	Ом·м	$\frac{1}{9} \times 10^{-9}$	сек
Питома теплопровідність	$\frac{ml}{t^3}$	$\frac{ml}{t^3}$	Ват/(м· град(К))	10^5	ерг/(см·сек· град(К))
Час	t	t	секунда (с)	1	секунда (сек)
Векторний потенціал	$\frac{ml}{tq}$	$\frac{m^{1/2} l^{1/2}}{t}$	Вебер/м	10^6	Гаус·см
Швидкість	$\frac{l}{t}$	$\frac{l}{t}$	м/с	10^2	см/сек
В'язкість	$\frac{m}{lt}$	$\frac{m}{lt}$	кг/(м·с)	10	пуаз
Завихреність (ротор)	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	с$^{-1}$	1	сек$^{-1}$
Робота	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	Джоуль	10^7	ерг

МІЖНАРОДНА СИСТЕМА (СІ) ПОЗНАЧЕНЬ

Фізична величина	***Назва одиниці***	***Позначення одиниці***	***Фізична величина***	***Назва одиниці***	***Позначення одиниці***
* довжина	метр	м	Електричний потенціал	вольт	В
* маса	кілограм	кг	Електричний опір	ом	Ом
* час	секунда	с	Електрична провідність	сіменс	См
* струм	ампер	А	Електрична ємність	фарад	Ф
* температура	кельвін	К	Магнітний потік	вебер	Вб
* кількість речовини	моль	моль	Магнітна індукція	генрі	Гн
* сила світла	кандела	кд			
† плоский кут	радіан	рад	напруженість магнітного поля	тесла	Т
† тілесний кут	стерадіан	ср			
частота	герц	Гц	Світловий потік	люмен	лм
енергія	джоуль	Дж	освітленість	люкс	лк
сила	ньютон	Н	Активність (радіоактивного джерела.)	бекерель	Бк
тиск	паскаль	Па			
потужність	ват	Вт	Поглинена доза (іонізуюча радіація)	грей	Гр
ел. заряд	кулон	Кл			

* основні одиниці СІ, † допоміжні одиниці

МЕТРИЧНІ ПРЕФІКСИ

Множник	*Префікс*	*Символ*	*Множник*	*Префікс*	*Символ*
10^{-1}	деци	д	10	дека	да
10^{-2}	санти	с	10^{2}	гекто	г
10^{-3}	мілі	м	10^{3}	кіло	к
10^{-6}	мікро	мк	10^{6}	мега	М
10^{-9}	нано	н	10^{9}	гіга	Г
10^{-12}	піко	п	10^{12}	тера	Т
10^{-15}	фемто	ф	10^{15}	пета	П
10^{-18}	атто	а	10^{18}	екса	Е

ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ (СІ)

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стала Больцмана	k	1.3807×10^{-23}	Дж·К$^{-1}$
Елементарний заряд	e	1.6022×10^{-19}	Кл
Маса електрона	m_e	9.1094×10^{-31}	кг
Маса протона	m_p	1.6726×10^{-27}	кг
Гравітаційна стала	G	6.6726×10^{-11}	м^{3}·с$^{-2}$·кг$^{-1}$
Стала Планка	h $\hbar = h/2\pi$	6.6261×10^{-34} $1.0546 \text{ x } 10^{-34}$	Дж·с Дж·с
Швидкість світла у вакуумі	c	2.9979×10^{8}	м·с$^{-1}$
Діелектрична проникність вакууму	ε_0	8.8542×10^{-12}	Ф·м$^{-1}$
Магнітна проникність вакууму	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	Гн·м$^{-1}$
Відношення мас протона/електрона	m_p / m_e	1.8362×10^{3}	
Відношення заряд/маса електрона	e / m_e	1.7588×10^{11}	Кл·кг$^{-1}$
Стала Рідберга	$R_\infty = me^4 / 8\varepsilon_0^2 ch^3$	1.0974×10^{7}	м$^{-1}$
Радіус Бора	$a_0 = \varepsilon_0 h^2 / \pi me^2$	5.2918×10^{-11}	м

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Атомний переріз взаємодії	πa_0^2	8.7974×10^{-21}	м^2
Класичний радіус електрона	$r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m c^2$	2.8179×10^{-15}	м
Томпсонівський переріз взаємодії	$(8\pi/3)r_e^2$	6.6525×10^{-29}	м^2
Комптонівська довжина хвилі електрона	$h/m_e c$ $\hbar/m_e c$	2.4263×10^{-12} 3.8616×10^{-13}	м м
Стала тонкої структури	$\alpha = e^2/2\varepsilon_0 h c$ α^{-1}	7.2974×10^{-3} 137.04	
1-а радіаційна стала	$c_1 = 2\pi hc^2$	3.7418×10^{-16}	Вт·м^2
2-а радіаційна стала	$c_2 = hc/k$	1.4388×10^{-2}	м·К
Стала Стефана-Больцмана	σ	5.6705×10^{-8}	Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$
Довжина хвилі, пов'язана з 1 еВ	$\lambda_0 = hc/e$	1.2398×10^{-6}	м
Частота, пов'язана з 1 еВ	$\nu_0 = e/h$	2.4180×10^{14}	Гц
Хвильове число, пов'язане з 1 еВ	$k_0 = e/hc$	8.0655×10^{5}	м$^{-1}$
Енергія, пов'язана з 1 еВ	$h\nu_0$	1.6022×10^{-19}	Дж
Енергія, пов'язана з 1 Рідбергом	$me^3/8\varepsilon_0^2 h^2$	13.606	еВ
Енергія пов'язана з 1 Кельвіном	k/e	8.6174×10^{-5}	еВ
Температура пов'язана з 1 еВ	e/k	1.1604×10^{4}	К
Число Авогадро	N_A	6.0221×10^{23}	моль$^{-1}$
Стала Фарадея	$F = N_A e$	9.6485×10^{4}	Кл·моль$^{-1}$
Газова стала	$R = N_A k$	8.3145	Дж·К$^{-1}$·моль$^{-1}$
Число Лошмідта	n_0	2.6868×10^{25}	м$^{-3}$
Атомна одиниця маси	m_u	1.6605×10^{-27}	кг

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стандартна температура	T_o	273.15	K
Атмосферний тиск	$p_0 = n_0 k T_0$	1.0133×10^{5}	Па
Тиск 1мм Hg (1 torr)		1.3332×10^{2}	Па
Молярний об’єм при н.у.	$V_0 = RT_0 / p_0$	2.2414×10^{-2}	$м^3$
Молярна маса повітря	M_{air}	2.8971×10^{-2}	кг
Калорія (cal)		4.1868	Дж
Прискорення вільного падіння	g	9.8067	$м \cdot с^{-2}$

ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ (СГС)

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стала Больцмана	k	1.3807×10^{-16}	ерг/град (K)
Елементарний заряд	e	4.8032×10^{-10}	статкулон
Маса електрона	m_e	9.1094×10^{-28}	г
Маса протона	m_p	1.6726×10^{-24}	г
Гравітаційна стала	G	6.6726×10^{-8}	$дин \cdot см^2/г^2$
Стала Планка	h $\hbar = h/2\pi$	6.6261×10^{-27} 1.0546×10^{-27}	ерг·сек ерг·сек
Швидкість світла у вакуумі	c	2.9979×10^{10}	см/сек
Відношення мас протона/електрона	m_p / m_e	1.8362×10^{3}	
Відношення заряд/маса електрона	e / m_e	5.2728×10^{17}	статкулон/г
Стала Рідберга	$R_\infty = \dfrac{2\pi^2 m e^4}{ch^3}$	1.0974×10^{5}	$см^{-1}$
Радіус Бора	$a_0 = \hbar^2 / me^2$	5.2918×10^{-9}	см
Атомний переріз	πa_0^2	8.7974×10^{-17}	$см^2$

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Класичний радіус електрона	$r_e = e^2 / m c^2$	2.8179×10^{-13}	см
Томпсонівський переріз	$(8\pi/3) r_e^2$	6.6525×10^{-25}	$см^2$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$h / m_e c$ $\hbar / m_e c$	2.4263×10^{-10} 3.8616×10^{-11}	см см
Стала тонкої структури	$\alpha = e^2 / \hbar c$ α^{-1}	7.2974×10^{-3} 137.04	
1-а радіаційна стала	$c_1 = 2\pi h c^2$	3.7418×10^{-5}	ерг·$см^2$/сек
2-а радіаційна стала	$c_2 = hc/k$	1.4388	см·град(K)
Стала Стефана-Больцмана	σ	5.6705×10^{-5}	ерг/($см^2$·сек·$град^4$)
Довжина хвилі, пов’язана з 1 еВ	λ_0	1.2398×10^{-4}	см
Частота, пов’язана з 1 еВ	ν_0	2.4180×10^{14}	Гц
Хвильове число, пов’язане з 1 еВ	k_0	8.0655×10^{3}	$см^{-1}$
Енергія, пов’язана з 1 еВ		1.6022×10^{-12}	ерг
Енергія, пов’язана з 1 Рідбергом		13.606	еВ
Енергія пов’язана з 1 Кельвіном		8.6174×10^{-5}	еВ
Температура пов’язана з 1 еВ		1.1604×10^{4}	град(K)
Число Авогадро	N_A	6.0221×10^{23}	$моль^{-1}$
Стала Фарадея	$F = N_A e$	2.8925×10^{14}	статкулон/моль
Газова стала	$R = N_A k$	8.3145×10^{7}	ерг/(град·моль)
Число Лошмідта	n_0	2.6868×10^{19}	$см^{-3}$
Атомна одиниця маси	m_u	1.6605×10^{-24}	г

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стандартна температура	T_o	273.15	град(K)
Атмосферний тиск	$p_0 = n_0 k T_0$	1.0133×10^6	дин/см^2
Тиск 1мм Hg (1 torr)		1.3332×10^3	дин/см^2
Молярний об'єм при н.у.	$V_0 = RT_0 / p_0$	2.2414×10^4	см^3
Молярна маса повітря	M_{air}	28.971	г
Калорія (cal)		4.1868×10^7	ерг
Прискорення вільного падіння	g	980.67	см/сек^2

ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ

В даному пункті використано позначення $\alpha = 10^2$ см/м, $\beta = 10^7$ ерг/Дж, $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-12}$ Гн/м, $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2.9979 \times 10^8$ м/с і $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}$ Дж/сек. Щоб одержати коректну по розмірності формулу в системі одиниць СІ з виразу, записаного в гаусових одиницях, потрібно замінити кожну величину згідно з $\overline{Q} = \overline{k} Q$, де $\overline{k}$ – коефіцієнт у другому стовпчику таблиці, що відповідає Q. Так, для прикладу, формула $\overline{a}_0 = \overline{\hbar}^2 / \overline{m}\overline{e}^2$ для борівського радіуса стає $\alpha a_0 = (\hbar\beta)^2 \Big/ \left[\left(m\beta/\alpha^2\right)\left(e^2\alpha\beta/4\pi\varepsilon_0\right)\right]$ або $a_0 = \varepsilon_0 h^2 / \pi m e^2$. Щоб перейти від СІ до природних величин, у яких $\hbar = c = 1$, потрібно використати формулу $Q = \hat{k}^{-1}\hat{Q}$, де $\hat{k}$ – коефіцієнт, що відповідає Q у третьому стовпчику. Таким чином, $\hat{a}_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 \Big/ \left[\left(\hat{m}\hbar/c\right)\left(\hat{e}^2\varepsilon_0\hbar c\right)\right] = 4\pi / \hat{m}\hat{e}^2$. (У перетворенні від одиниць СІ не замінюйте ε_0, μ_0 або c).

Фізична величина	***Гаусові одиниці до СІ***	***Природні одиниці до СІ***
Ємність	$\alpha/4\pi\varepsilon_0$	ε_0^{-1}
Заряд	$(\alpha\beta/4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\varepsilon_0\hbar c)^{-1/2}$
Густина заряду	$(\beta/4\pi\alpha^5\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\varepsilon_0\hbar c)^{-1/2}$
Струм	$(\alpha\beta/4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Густина струму	$(\beta/4\pi\alpha^3\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Електричне поле	$(4\pi\beta\varepsilon_0/\alpha^3)^{1/2}$	$(\varepsilon_0/\hbar c)^{1/2}$
Електричний потенціал	$(4\pi\beta\varepsilon_0/\alpha)^{1/2}$	$(\varepsilon_0/\hbar c)^{1/2}$
Електропровідність	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$	ε_0^{-1}
Енергія	β	$(\hbar c)^{-1}$
Густина енергії	β/α^3	$(\hbar c)^{-1}$
Сила	β/α	$(\hbar c)^{-1}$
Частота	1	c^{-1}
Індуктивність	$4\pi\varepsilon_0/\alpha$	μ_0^{-1}
Довжина	α	1
Магнітна індукція	$(4\pi\beta/\alpha^3\mu_0)^{1/2}$	$(\mu_0\hbar c)^{-1/2}$
Напруженість магн. поля	$(4\pi\mu_0\beta/\alpha^3)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Маса	β/α^2	$c/\hbar$
Імпульс	β/α	$\hbar^{-1}$
Потужність	β	$(\hbar c^2)^{-1}$
Тиск	β/α^3	$(\hbar c)^{-1}$
Опір	$4\pi\varepsilon_0/\alpha$	$(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}$
Час	1	c
Швидкість	α	c^{-1}

РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА

Назва або опис	***СІ***	***Гаусові***
Закон Фарадея	$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Закон Ампера	$\nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$	$\nabla \times \vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{J}$
Рівняння Пуассона	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$
Відсутність магнітних монополів	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Сила Лоренца на заряд q	$q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$	$q\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$
Матеріальні (невід'ємні) співвідношення	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$

У плазмі $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн×м$^{-1}$ (Гаусові одиниці: $\mu \approx 1$). Діелектрична стала задовольняє співвідношенню $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м (в Гаусових одиницях: $\varepsilon \approx 1$) за умови, що весь заряд розглядається як вільний. Використовуючи дрейфову апроксимацію $\vec{\upsilon}_\perp = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$, можна розрахувати густину поляризаційного заряду і знайти діелектричну сталу $K \equiv \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + 36\pi \times 10^9 \rho / B^2$ (СІ), $K \equiv \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + 4\pi\rho c^2 / B^2$ (СГС), де ρ – масова густина.

Електромагнітна енергія в об'ємі V задається співвідношенням:

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\int_V dV\left(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right) \text{ (СІ)}, \quad \hat{W} = \frac{1}{8\pi}\int_V dV\left(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right) \text{(СГС)}.$$

Теорема Пойнтінга:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \int_S \vec{N} \cdot d\vec{S} = -\int_V dV \vec{J} \cdot \vec{E},$$

де S – замкнута поверхня, що обмежує об'єм V, та вектор Пойнтінга (енергетичний потік через S) задається формулою $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ (СІ) або $\vec{N} = c\vec{E} \times \vec{H} / 4\pi$ (Гаусова).

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

В даному підпункті, ε – діелектрична проникність, μ – проникність провідника, μ' – проникність навколишнього середовища, σ – питома провідність, $f = \omega/2\pi$ – частота випромінювання. Всі одиниці подано в СІ, якщо інше не зазначено.

Діелектрична постійна вакууму	$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна проникність вакууму	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м = $= 1.2566 \times 10^{-6}$ Гн/м
Опір вакууму	$R_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 376.73$ Ом
Ємність паралельних пластин площею A, розташованих на відстані d	$C = \varepsilon A/d$
Ємність концентричного циліндра довжиною l, радіусом a, b	$C = 2\pi\varepsilon l/\ln(b/a)$
Ємність концентричної сфери радіусом a, b	$C = 4\pi\varepsilon ab/(b-a)$
Коефіцієнт самоіндукції провідника довжиною l, по якому тече однорідний струм	$L = \mu l$
Взаємоіндуктивність паралельних провідників довжиною l, радіуса a, розташованих на відстані d	$L = (\mu' l/4\pi)\left[1 + 4\ln(d/a)\right]$
Індуктивність круглого витка радіусом b, зробленого із провідника радіуса a, по якому тече однорідний струм	$L = b\left\{\mu'\left[\ln(8b/a) - 2\right] + \mu/4\right\}$
Час релаксації в середовищі із втратами	$\tau = \varepsilon/\sigma$
Глибина поверхневого шару в середовищі із втратами	$\delta = (2/\omega\mu\sigma)^{1/2} = (\pi f \mu\sigma)^{-1/2}$
Хвильовий опір у середовищі із втратами	$Z = \left[\mu/(\varepsilon + i\sigma/\omega)\right]^{1/2}$
Поле на відстані r від прямого провідника, по якому тече струм I (амперів)	$B_\theta = \mu I/2\pi r$ Т, $B_\theta = 0.2I/r$ Гс
Поле на відстані z уздовж осі від круглого витка радіуса a, по якому тече струм I	$B_z = \mu a^2 I \Big/ \left[2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}\right]$

ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ЧАСТОТА / ДІАПАЗОН ДОВЖИН ХВИЛЬ

Позначення*	Частотний діапазон		Діапазон довжин хвиль	
	Нижній	Верхній	Нижній	Верхній
ULF**		30 Гц	10 Мм	
VF**	30 Гц	300 Гц	1 Мм	10 Мм
ELF	300 Гц	3 кГц	100 км	1 Мм
VLF	3 кГц	30 кГц	10 км	100 км
LF	30 кГц	300 кГц	1 км	10 км
MF	300 кГц	3 МГц	100 м	1 км
HF	3 МГц	30 МГц	10 м	100 м
VHF	30 МГц	300 МГц	1 м	10 м
UHF	300 МГц	3 ГГц	10 см	1 м
SHF	3 ГГц	30 ГГц	1 см	10 см
S	2.6	3.95	7.6	11.5
G	3.95	5.85	5.1	7.6
J	5.3	8.2	3.7	5.7
H	7.05	10.0	3.0	4.25
X	8.2	12.4	2.4	3.7
M	10.0	15.0	2.0	3.0
P	12.4	18.0	1.67	2.4
K	18.0	26.5	1.1	1.67
R	26.5	40.0	0.75	1.1
EHF	30 ГГц	300 ГГц	1 мм	1 см
Субміліметровий діапазон	300 ГГц	3 ТГц	100 мкм	1 мм
Інфрачервоний діапазон	3 ТГц	430 ТГц	700 нм	100 мкм

Позначення	Частотний діапазон		Діапазон довжин хвиль	
	Нижній	Верхній	Нижній	Верхній
Видимий діапазон	430 ТГц	750 ТГц	400 нм	700 нм
Ультрафіолетовий діапазон	750 ТГц	30 ПГц	10 нм	400 нм
Рентген	30 ПГц	3 ЕГц	100 пм	10 нм
Гамма-випромінювання	3 ЕГц			100 пм

*ULF – ультранизькі частоти (УНЧ), VF – голосові частоти (ГЧ), ELF – крайні низькі частоти (КНЧ), VLF – дуже низькі частоти (ДНЧ), LF – низькі частоти (НЧ), MF – середні частоти (СЧ), HF – високі частоти (ВЧ), VHF – дуже високі частоти (ДВЧ), UHF – ультрависокі частоти (УВЧ), SHF – надвисокі частоти (НВЧ), EHF – крайні високі частоти (КВЧ).
**Границя між УНЧ і ГЧ задається по-різному.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПЛАЗМОВІ ПАРАМЕТРИ

Всі величини подано в гаусових (СГС) одиницях, крім температури (T, T_e, T_i), вираженої в еВ, маси іона (m_i), вираженої в одиницях маси протона, $\mu = m_i / m_p$; Z – значення заряду; k – стала Больцмана; K – хвильове число: γ – адіабатичний показник; $\ln\Lambda$ – Кулонівський логарифм.

Частоти

Електронна гірочастота	$f_{ce} = \omega_{ce}/2\pi = 2.80 \times 10^6 B$, Гц $\omega_{ce} = eB/m_e c = 1.76 \times 10^7 \cdot B$, рад/сек
Іонна гірочастота	$f_{ci} = \omega_{ci}/2\pi = 1.52 \times 10^3 Z\mu^{-1} \cdot B$, Гц $\omega_{ci} = ZeB/m_i c = 9.58 \times 10^3 Z\mu^{-1} \times B$, рад/сек
Електронна плазмова частота	$f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi = 8.98 \times 10^3 n_e^{1/2}$, Гц $\omega_{pe} = \left(4\pi n_e e^2/m_e\right)^{1/2} = 5.64 \times 10^4 n_e^{1/2}$, рад/сек

Іонна плазмова частота	$f_{pi} = \omega_{pi}/2\pi = 2.10\times10^{2} Z\mu^{-1/2} n_i^{1/2}$, Гц $\omega_{pi} = \left(4\pi n_i Z^2 e^2/m_i\right)^{1/2} = 1.32\times10^{3} Z\mu^{-1/2} n_i^{1/2}$, рад/сек
Частота захоплених електронів	$\nu_{Te} = \left(eKE/m_e\right)^{1/2} = 7.26\times10^{8} K^{1/2} E^{1/2}$, сек$^{-1}$
Частота захоплених іонів	$\nu_{Ti} = \left(ZeKE/m_i\right)^{1/2} = 1.69\times10^{7} Z^{1/2} K^{1/2} E^{1/2} \mu^{-1/2}$, сек$^{-1}$
Частота зіткнень електронів	$\nu_e = 2.91\times10^{-6} n_e \ln\Lambda T_e^{-3/2}$, сек$^{-1}$
Частота зіткнень іонів	$\nu_i = 4.80\times10^{-8} Z^4 \mu^{-1/2} n_i \ln\Lambda T_i^{-3/2}$, сек$^{-1}$

Довжини

Електронна довжина де Бройля	$\lambda = \hbar/\left(m_e k T_e\right)^{1/2} = 2.76\times10^{-8} T_e^{-1/2}$, см
Класична відстань мінімального зближення	$e^2/kT = 1.44\times10^{-7} T^{-1}$, см
Гірорадіус електрона	$r_e = \upsilon_{Te}/\omega_{ce} = 2.38 T_e^{1/2} B^{-1}$, см
Гірорадіус іона	$r_i = \upsilon_{Ti}/\omega_{ci} = 1.02\mu^{1/2} Z^{-1} T_i^{1/2} B^{-1}$, см
Плазмова глибина поверхневого шару	$c/\omega_{pe} = 5.31\times10^{5} n_e^{-1/2}$, см
Дебаївська довжина	$\lambda_D = \left(kT/4\pi n e^2\right)^{1/2} = 7.43\times10^{2} T^{1/2} n^{-1/2}$, см

Швидкості

Електронна теплова швидкість	$\upsilon_{Te} = \left(kT_e / m_e \right)^{1/2} = 4.19 \times 10^7 T_e^{1/2}$, см/сек
Іонна теплова швидкість	$\upsilon_{Ti} = \left(kT_i / m_i \right)^{1/2} = 9.79 \times 10^5 \mu^{-1/2} T_i^{1/2}$, см/сек
Іонна швидкість звуку	$C_s = \left(\gamma Z k T_e / m_i \right)^{1/2} = 9.79 \times 10^5 \left(\gamma Z T_e / \mu \right)^{1/2}$, см/сек
Альфвенівська швидкість	$\upsilon_A = B / \left(4\pi n_i m_i \right)^{1/2} = 2.18 \times 10^{11} \mu^{-1/2} n_i^{-1/2} B$, см/сек

Безрозмірні

(Відношення мас електрона/протона)$^{1/2}$	$\left(m_e / m_p \right)^{1/2} = 2.33 \times 10^{-2} = 1/42.9$
Число частинок у сфері Дебая	$\left(4\pi/3 \right) n \lambda_D^3 = 1.72 \times 10^9 T^{3/2} n^{-1/2}$
Альфвенівська швидкість/ швидкість світла	$\upsilon_A / c = 7.28 \mu^{-1/2} n_i^{-1/2} B$
Відношення електронної плазмової частоти/гірочастоти	$\omega_{pe} / \omega_{ce} = 3.21 \times 10^{-3} n_e^{1/2} B^{-1}$
Відношення іонної плазмової частоти/гірочастоти	$\omega_{pi} / \omega_{ci} = 0.137 \mu^{1/2} n_i^{1/2} B^{-1}$
Теплове/магнітне енергетичне відношення	$\beta = 8\pi n k T / B^2 = 4.03 \times 10^{-11} n T B^{-2}$
Магнітне/іонне відношення енергії спокою	$B^2 / 8\pi n_i m_i c^2 = 26.5 \mu^{-1} n_i^{-1} B^2$

ІОНОСФЕРНІ ПАРАМЕТРИ

Наступна таблиця дає середні нічні значення. Де приведено два значення, перше стосується нижньої області шару, а друге – верхньої границі.

Величина	E область	F область
Висота (км)	$90-160$	$160-500$
Густина (м$^{-3}$)	$1.5\times10^{10}-5\times10^{10}$	$5\times10^{10}-2\times10^{11}$
Проінтегрована по висоті густина (м$^{-2}$)	9×10^{14}	4.5×10^{15}
Частота зіткнень іонів з нейтральними частинками (с$^{-1}$)	$2\times10^{3}-10^{2}$	$0.5-0.05$
Відношення гірочастоти іонів до частоти зіткнень	$0.09-2.0$	$4.6\times10^{2}-5.0\times10^{3}$
Частота зіткнень електронів з нейтральними частинками	$1.5\times10^{4}-9.0\times10^{2}$	$80-10$
Відношення гірочастоти електронів до частоти зіткнень	$4.1\times10^{2}-6.9\times10^{3}$	$7.8\times10^{4}-6.2\times10^{5}$
Середня молекулярна маса	$28-26$	$22-16$
Іонна гірочастота (с$^{-1}$)	$180-190$	$230-300$
Нейтральний дифузійний коефіцієнт (м^2/с)	$30-5\times10^{3}$	10^{5}

Магнітне поле Землі в нижніх шарах іоносфери в екваторіальних широтах – приблизно $B_0=0.35\times10^{-4}$ Тл. Радіус Землі – $R_E=6371$ км.

ПРИБЛИЗНІ ВЕЛИЧИНИ В ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ПЛАЗМАХ

Тип плазми	n, см$^{-3}$	T, еВ	ω_{pe}, с$^{-1}$	λ_D, см	$n\lambda_D{}^3$	ν_{ei}, с$^{-1}$
Міжзоряний газ	1	1	6×10^{4}	7×10^{2}	4×10^{8}	7×10^{-5}
Газоподібна туманність	10^{3}	1	2×10^{6}	20	8×10^{6}	6×10^{-2}
Сонячна корона	10^{9}	10^{2}	2×10^{9}	2×10^{-1}	8×10^{6}	60
Дифузійна гаряча плазма	10^{12}	10^{2}	6×10^{10}	7×10^{-3}	4×10^{5}	40
Сонячна атмосфера, газовий розряд	10^{14}	1	6×10^{11}	7×10^{-5}	40	2×10^{9}
Тепла плазма	10^{14}	10	6×10^{11}	2×10^{-4}	8×10^{2}	10^{7}
Гаряча плазма	10^{14}	10^{2}	6×10^{11}	7×10^{-4}	4×10^{4}	4×10^{6}
Термоядерна плазма	10^{15}	10^{4}	2×10^{12}	2×10^{-3}	8×10^{6}	5×10^{4}
Тета-пінч	10^{16}	10^{2}	6×10^{12}	7×10^{-5}	4×10^{3}	3×10^{8}
Щільна гаряча плазма	10^{18}	10^{2}	6×10^{13}	7×10^{-6}	4×10^{2}	2×10^{10}
Лазерна плазма	10^{20}	10^{2}	6×10^{14}	7×10^{-7}	40	2×10^{12}

ПАРАМЕТРИ СОНЯЧНОЇ ФІЗИКИ

Параметр	Символ	Значення	Одиниця
Повна маса	$M_{\odot}$	1.99×10^{33}	г
Радіус	$R_{\odot}$	6.96×10^{10}	см
Прискорення сили тяжіння на поверхні	$g_{\odot}$	2.74×10^{4}	$см\cdot с^{-2}$
Швидкість витоку	υ_{∞}	6.18×10^{7}	$см\cdot с^{-1}$
Спрямований вгору потік маси в спікулах	–	1.6×10^{-9}	$г\cdot см^{2}\cdot с^{-1}$
Вертикально проінтегрована атмосферна густина	–	4.28	$г\cdot см^{-2}$
Напруженість магнітного поля сонячної плями	$B_{\max}$	$2500-3500$	Гс
Ефективна температура поверхні	T_0	5770	К
Потужність випромінювання	$L_{\odot}$	3.83×10^{33}	$ерг\cdot с^{-1}$
Густина променевого потоку	F	6.28×10^{10}	$ерг\cdot см^{-2}\cdot с^{-1}$
Оптична глибина на довжині хвилі 500 нм, що виміряна від фотосфери	τ_5	0.99	–
Астрономічна одиниця (радіус земної орбіти)	AU	1.50×10^{13}	см
Сонячна стала на орбіті Землі	f	1.36×10^{6}	$ерг\cdot см^{-2}\cdot с^{-1}$

ХРОМОСФЕРА ТА КОРОНА

Параметр (одиниці)	Спокійне Сонце	Корональні діри	Активна область
Хромосферні променеві втрати (ерг·см$^{-2}$·с$^{-1}$)			
Низька хромосфера	2×10^6	2×10^6	$\geq 10^7$
Середня хромосфера	2×10^6	2×10^6	10^7
Верхня хромосфера	3×10^5	3×10^5	2×10^6
Всього	4×10^6	4×10^6	$\geq 2\times10^7$
Тиск перехідного шару (дин·см$^{-2}$)	0.2	0.07	2
Температура корони (K) на відстані 1.1 $R_\odot$	$1.1-1.6\times10^6$	10^6	$2,5\times10^6$
Втрати енергії корони (ерг·см$^{-2}$·с$^{-1}$)			
Провідність	2×10^5	6×10^4	10^5-10^7
Випромінювання	10^5	10^4	5×10^6
Сонячний вітер	$\leq 5\times10^4$	7×10^5	$< 10^5$
Всього	3×10^5	8×10^5	10^7
Втрата маси за рахунок сонячного вітру (г·см$^{-2}$·с$^{-1}$)	$\leq 2\times10^{-11}$	2×10^{-10}	$< 4\times10^{-11}$

4

Рекомендована література

– Козак, Л.В. Вступ до фізики космічної плазми. Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2010.

– Козак, Л.В. Турбулентні процеси в гідродинамічному та магнітогідродинамічному середовищі. К.: "Друкарик", 2020.

– Козак, Л.В. Основи фізики планет. Київ: ВПЦ "Київський університет 2007

– Загородний, А.Г., Черемных О.К. Введение в физику плазмы, Київ: Наукова думка, 2014

– Ситенко, О. Г., and В. М. Мальнев. Основи теорії плазми. Київ: Наукова думка, 1994. (Sitenko, A., and V. Malnev. Plasma physics theory. Vol. 10. CRC Press, 1994.)

– Davidson P.A. Turbulence. Oxford University Press. 2015

– Tsytovich V.N. Lectures on Non-linear Plasma Kinetics. Springer. 1995

– Keith W., Heikkila W. Earth’s Magnetosphere Formed by the Low-Latitude Boundary Layer. Second Edition. Elsevier. 2021

– Chen, Francis F. Introduction to plasma physics. Springer Science Business Media, 2012.

– Chen, Francis F. Introduction to plasma physics and controlled fusion. Vol. 1. New York: Plenum press, 1984.

– Dendy, Richard O., ed. Plasma physics: an introductory course. Cambridge University Press, 1995.

– Treumann, Rudolf A., and Wolfgang Baumjohann. Advanced space plasma physics. Vol. 30. London: Imperial College Press, 1997.

– Bellan, Paul M. Fundamentals of plasma physics. Cambridge university press, 2008.

– Kulsrud, Russell M. Plasma physics for astrophysics. Vol. 66. Princeton University Press, 2020.

– Goldston, Robert J. Introduction to plasma physics. CRC Press, 2020.

– Bittencourt, José A. Fundamentals of plasma physics. Springer Science Business Media, 2013.

– Drummond, James E. Plasma physics. Courier Corporation, 2013.

– Cairns, Robert A., ed. Plasma physics. Springer Science Business Media, 2012.

– Gurnett, Donald A., and Amitava Bhattacharjee. Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications. Cambridge university press, 2005.

– Thompson, William Bell. An introduction to plasma physics. Elsevier, 2013.

– Peratt, Anthony L. Physics of the plasma universe. Vol. 48. New York: Springer-Verlag, 1992.

– Nishikawa, Kyōji, and Masahiro Wakatani. Plasma physics. Vol. 8. Springer Science Business Media, 2000.

– Fitzpatrick, Richard. Introduction to plasma physics. The University of Texas at Austin, 2008.

– Landau, Lev Davidovich, and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. Fluid mechanics: Landau And Lifshitz: course of theoretical physics, Volume 6. Vol. 6. Elsevier, 2013.