Робота та енергія

Елементарна робота:

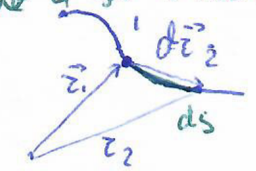
$$\delta A = \vec{F}\, d\vec{r} = F\, dr \cos(\widehat{\vec{F}\, d\vec{r}}) = F_r\, dr = F\, dl$$

δA - алгебраїчна ($>0, <0$ залежно від кута) - скаляр

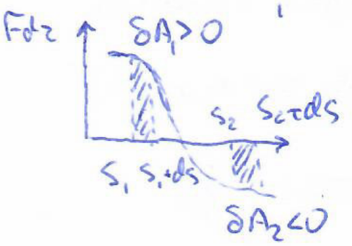
Робота на ділянці траєкторії

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} = \int_1^2 F_{dr}\, dr = \int_1^2 F_s\, ds$$

справедливе не лише для частинки, але й для $\forall$ тіл (системи) але



$d\vec{r}$ - переміщення точки прикладення сили.



Декілька сил $\{\vec{F}_i\}$, $i=\overline{1,n}$

результуюча $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

$$A = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n)\, d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_2 d\vec{r} + \ldots + \int_1^2 \vec{F}_n d\vec{r} =$$

$$= A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

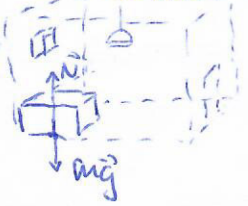
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad i = \overline{1,n}$$

Пр.1 $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ $\quad A_{12} = \int_1^2 \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\, d\vec{r} = \left[\begin{array}{l} d(r^2) = d(\vec{r}\cdot\vec{r}) \\ 2r\,dr = d\vec{r}\cdot\vec{r} + \vec{r}\,d\vec{r} = 2\vec{r}\,d\vec{r} \\ r\,dr = \vec{r}\,d\vec{r} \end{array}\right] =$

$$= \int_1^2 \frac{\alpha}{r^3} r\, dr = \alpha \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \alpha\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \alpha = -Gm_1m_2 \quad A = Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

робота не залежить від форми траєкторії, а лише від початкової та кінцевої точок, може бути як >0, так і <0

Пр 2



Робота сили тертя ковзання

$$\vec{F}_{тер} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}$$

$\vec{a} = 0, \vec{v} = const$

$$A_{12} = \int_1^2 -\mu N \frac{\vec{v}}{v}\, d\vec{r} = \left[\begin{array}{l} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ F_{тер,s} = -\mu N \end{array}; N = mg\right] =$$

$$= -\int_1^2 \mu mg\, ds = -\mu mg\, S_{21} < 0$$

для мінімізації роботи необх. обирати найкоротший шлях

Нерідко використовують вирази "робота сил поля" або "робота сили $\vec{F}$ на деякому шляху" при $A>0$ та "робота проти сил поля", "робота проти сили" $A<0$

$[A] = Н \cdot м = Дж = кг \cdot м^2 с^{-2}$

Потужність

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F}\, d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \text{ - скаляр}$$

швидкість, з якою рухається точка прикладення сили

може бути $>0, <0, =0$, $\quad N = \sum N_i \quad i = \overline{1,n}$

$[N] = \frac{Дж}{с} = Вт = кг \cdot м^2 с^{-3}$

$$A = \int_0^t N\, dt$$

Кінетична енергія.

Давайте згадаємо, що для вільної частинки ще зберігається ϑ^2

величина $T = \frac{1}{2} m\vartheta^2$ – кінетична енергія, скаляр $[T] = Дж = кг \cdot м^2 с^{-2}$

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\vartheta^2\right) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\vec{\vartheta} \cdot \vec{\vartheta}) = \frac{m}{2}\left[\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} \cdot \vec{\vartheta} + \vec{\vartheta} \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\right] = m \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} \vec{\vartheta} =$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{\vartheta} = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta} = N$$ => кінетична енергія частинки зберігається, якщо сумарна потужність всіх прикладених сил $= 0$ (для вільної частинки T зберігається безумовно

$dT = N \cdot dt = \delta A$ – кін. енергія частинки змінюється за рахунок сумарної роботи прикладених сил

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 \delta A \qquad T_2 - T_1 = A_{12} \qquad \text{або} \qquad \Delta T = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\, dt$$

Силове поле

Відповідно до сучасних уявлень взаємодія між частинками – через силові поля (гравітаційне, електростатичне нерухомого заряду...)

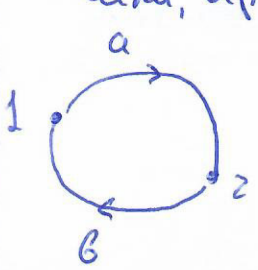
Якщо до частинки в певній ділянці простору прикладена сила, яка закономірно змінюється від точки до точки, існує силове поле

Силове поле – векторне поле (поле вектора сили), описується вказівкою $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ у кожній точці

Якщо сила до частинки в $\forall$ точці не залежить від часу – поле стаціонарне

Потенціальне поле – це стац. силове поле, в якому робота сили поля при переміщенні частинки між двома $\forall$ точками не залежить від форми траєкторії, що проходить через ці точки, а залежить лише від їхнього положення.

Сила, прикладена з боку пот. поля наз консервативною.



$$A_{12}^a = A_{12}^b$$

Для замкненого контуру

$$A_O = A_{12}^a + A_{21}^b = A_{12}^a - A_{12}^b = 0$$ і навпаки

$$A_{21}^b = -A_{12}^b$$

якщо робота для $\forall$ замкненої траєкторії $= 0$, то поле потенціальне

Центральні сили

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

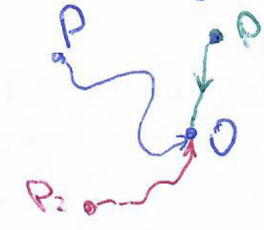
$f(r)$ – скалярна функція від відстані $|\vec{r}|$ до певного силового центру

$\frac{\vec{r}}{r}$ – одиничний вектор

$$A_{12} = \int_1^2 f(r)\frac{\vec r}{r}d\vec r = \int_1^2 f(r)\frac{r\,dr}{r} = \int_1^2 f(r)dr = \psi(r_2) - \psi(r_1)$$

Потенціальна енергія

т. O - фіксована, P - довільна



$A_{PO} = \int_P^O \vec F d\vec r$ — якщо брати різні т. P, то роботи залежатиме лише від їхнього положення

$A_{PO} = U(\vec r_P)$

↑ позначили, наз. пот. енергією частинки, в даному потенціальному полі, зрозуміло, що залежить від вибору т. O.

При переході з т.1 в т.2 виберемо траєкторію через т.O

$$A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O} = U(\vec r_1) - U(\vec r_2) = U_1 - U_2$$

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = \int_1^2 \vec F d\vec r \qquad \delta A = \vec F d\vec r = -dU$$

запам'ятам

Щоб обчислити потенціал за формулою сили
- розрахувати роботу між ∀ двома точками поле
- представити роботу у вигляді від'ємного приросту певної функції полож. точки

! :-)   :-)

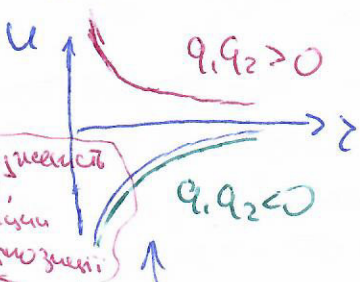
$$\vec F = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec r}{r} : \quad A_{12} = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\left(\frac{\alpha}{r_2} - \frac{\alpha}{r_1}\right) = -[U(r_2) - U(r_1)]$$

гравітаційне поле $\alpha = -Gm_1m_2$

$$U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$$!:-) :-)

кулонівське $\alpha = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ $U = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

напруженість поля, принципи суперпозиції о треба



Еквіпотенціальна поверхня - геометричне місце точок, де потенціальна енергія однакова

$U(\vec r) = const$ $U(x,y,z) = const$

силове поле через потенціал...

як виглядають? концентричні сфери

Роботи по переміщенню по еквіпот. поверхні = 0

Звязок між потен. енергією та силою

$\vec F d\vec r = -dU$.   водночас $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$

$$\vec F = F_x\vec i + F_y\vec j + F_z\vec k$$

$$d\vec r = dx\cdot\vec i + dy\cdot\vec j + dz\cdot\vec k$$

$\uparrow z$ $\vec F = m\vec g$ $A_{12} = \int_1^2 \vec F d\vec r = \int_1^2 -mg\,dz = mg(z_1 - z_2)$ — однорідне поле сили

$\vec F = (0,0,-mg)$ $U = +mgz$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\cdot dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{\nabla} U, \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

оператор набла

$$\boxed{\vec{F} = -\operatorname{grad} U}$$

градієнт вказує напрям найшвидшого зростання величини скалярного поля (~~зро~~ (зростання U), nonормалі до еквіпотенціальних

Закон збереження енергії частинки.

Сили, що діють на частинку → консервативні (потенціальні) → неконсервативні (сторонні)

$$\vec{F} = \vec{F}^{конс} + \vec{F}^{стор}$$

$$dT = \delta A^{конс} + \delta A^{стор} \qquad \delta A^{конс} = -dU$$

$$dT = -dU + \delta A^{стор}$$

$$d(T+U) = \delta A^{стор}$$

$E = T+U$ – повна механічна енергія частинки

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) \text{ - ф-я механічного стану}$$

$$dE = \delta A_{стор} \qquad \int_1^2 dE = \int_1^2 \delta A_{стор} \qquad E_2 - E_1 = A_{12}^{стор}$$

сумарна робота всіх стор сил між 1 та 2 ~~може~~ має бути залежати від траєкторії!

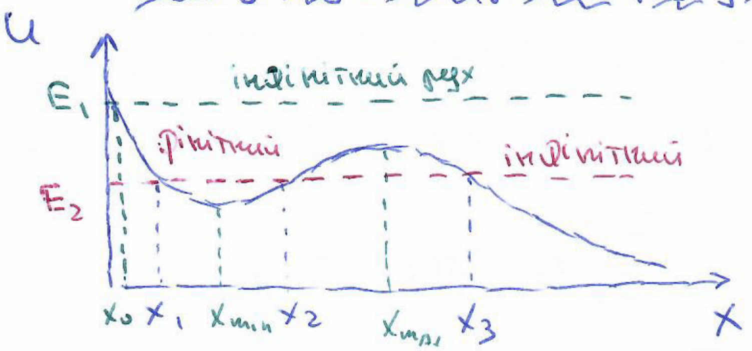
$$\delta A^{стор}_{ex} = N_*^{стор}\cdot dt \qquad N^{стор} > 0 \ \ E\nearrow, \quad < 0 \ \ E\searrow$$

Повна мех. енергія частинки зберігається, якщо сумарна потужність всіх сторонніх сил, ~~Σ~~ = 0

Більш звужено: повна механічна енергія частинки, на яку не діють сторонні сили, зберігається: $T+U = const$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = const$$

Аналіз одновимірного руху част. в пот полі



$E = T(x) + U(x) = const$

Рух можливий лише на тих ділянках, де $E \geq U(x)$

← якщо котиться кулька, то $T \neq \frac{1}{2}mv^2$, але це інша стор

* кулька рухається по жолобу, опір повітря та тертя нехтуємо нами

* E_1, розташували в т. x_0 =>

діє консервативна сила, починається рух: від x_0 до x_{min} $F \uparrow\uparrow x$, кулька прискорюється, $T\nearrow$, $U\searrow$

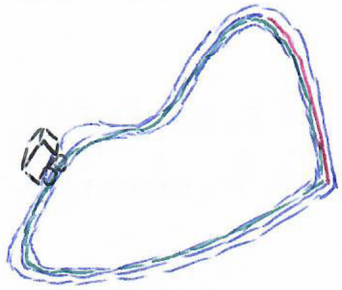
$x_{min} \div x_{max}$, $F \downarrow\uparrow x$, але швидкість була, $T\searrow$, $U\nearrow$

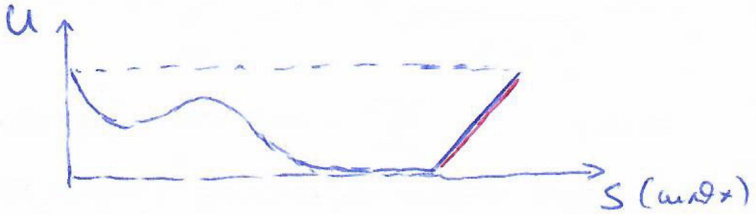
$x > x_{max}$ $T\nearrow$ → мат. точка може бути всюди, інфінітний рух.

↗ $E_2 < U(x_{max})$ – розміщуємо в т x_1 – фінітний рух $\frac{1}{2}mv^2 + U = E_2$, не може подолати потенціальний бар'єр

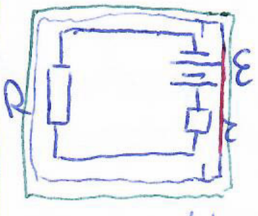
$U(x_1) = U(x_2) = E_2$ звичайно, якщо в т. x_2 надати швидкості..

якщо розмістити в т. x_3 – інфінітний рух.





– консервативні – сторонні недисипативні – сторонні дисипативні



на ст. 46 краще ε, r

Якби не було втрат енергії (дисипативні сили; опір повітря, тертя кочення), то візок  в американських гірках міг би рухатися по замкненому рейковому шляху нескінченно довго.

Загалом $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, але вважаємо, що $\dot{x}^2 \gg \dot{y}^2$ (масштаби на рис. суттєво різні ..)

на ділянці $[x_1, x_2]$ $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_2$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_2 - U(x))} \qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_2 - U(x))}}$$

проміжок часу для переміщення від x_1 до x_2 $t_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_2 - U(x))}}$

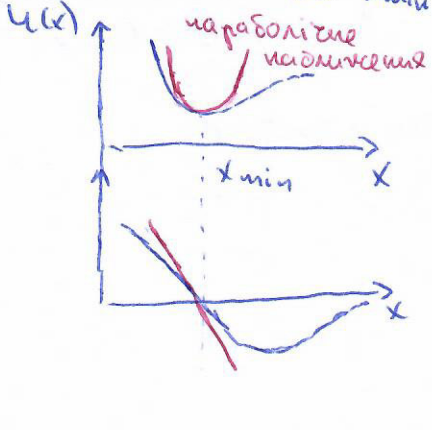
$t_{21} = t_{12}$, тобто час $x_1 \to x_2 \to x_2$

$$T = 2t_{12} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_2 - U(x))}}$$ період одновимірного фінітного руху (він завжди періодичний)

Малі коливання поблизу мінімуму U

$$U(x) = U(x_{min}) + \frac{dU}{dx}\Big|_{x_{min}}(x - x_{min}) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_{min}}(x - x_{min})^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3U}{dx^3}\Big|_{x=x_{min}}(x - x_{min})^3 + \ldots$$

мінімум $\frac{dU}{dx}\Big|_{x_{min}} = 0$ малі $(x - x_{min})^3 \approx 0$ потенціальна енергія $U(x_{min}) = 0$



$x_{min} = 0$ $U(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_{min}} x^2 = \frac{1}{2}kx^2$, $k = \frac{d^2U}{dx^2}$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}}$$

$\frac{kx^2}{2E} = \sin^2 z$; $\sin z = x\sqrt{\frac{k}{2E}}$ $\quad \cos z\, dz = \sqrt{\frac{k}{2E}}\, dx$

при $x = x_1, x_2$ $\quad \dot{x} = 0$ $\quad E = \frac{1}{2} k x_{1,2}^2$ $\quad \sin^2 z = 1$ $\quad z_{1,2} = \mp\frac{\pi}{2}$

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{2E}{k}} \frac{\cos z\, dz}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dz = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Таке вже було $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - тіло на пружині $\quad x = x_0 \cos(\omega_0 t)$

! справедливо для малих коливань (період не залежить від амплітуди) - гармонічне наближення.

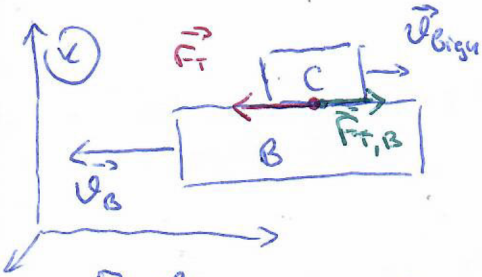
Дисипативні сили (неконсервативні) - сили опору, тертя

$$\vec{F} = -f(v)\frac{\vec{v}}{v} \qquad \vec{F} \uparrow\downarrow \vec{v}$$

~~[illegible]~~ як правило залежать від відносних шв-тей

Якщо тіло ковзає по нерухомій поверхні (в "нерухомому" середовищі) то робота < 0

Але A може > 0, якщо поверхня чи середовище самі рухаються



$\vec{v}_B$ - шв-ть B в нерухомій K

$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{відн}$ $\quad$ при $v_B > v_{відн}$

потужність сили тертя, що діє на тіло C $\quad F_{тр}(v_B - v_{відн})$

робота цієї сили $\delta A_C = F_{тр}(v_B - v_{відн})\,dt > 0$

Правда ще треба зауважити, що робота сили тертя на тіло B

$$\delta A_B = -F_{тр} v_B\, dt$$

і тому загальна робота $\delta A_C + \delta A_B = -F_{тр} v_{відн}\, dt < 0$ (в замкненій системі повна робота всіх дисипативних сил, що діють на всі тіла системи завжди від'ємна)

→ до ст. 4.5

Гіроскопічні сили (неконсервативні)

$$F = f(v) \qquad \vec{F} \perp \vec{v}$$

↑ визначаються не лише положенням, а й швидкістю на відміну від центральних (консервативних)

$N = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$

$A = 0$

$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ + сили в механіці, пов'язані з неІСВ "несправжні"

Закон збереження енергії системи частинок (N-штук)

Замкнута система

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i, \quad T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad m_i > 0, \quad v_i^2 > 0 \quad T > 0$$

$$dT = d\left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right) = \sum_i dT_i = \sum_i \delta A_i$$

або $$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_i m_i 2 v_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i F_i v_i = \sum N_i = N_\Sigma$$

F_i → внутрішні → консервативні, неконсервативні; → зовнішні

$$\vec F_i = \vec F_i^{зовн} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{N} \left(\vec F_{ik}^{конс} + \vec F_{ik}^{стор}\right)$$

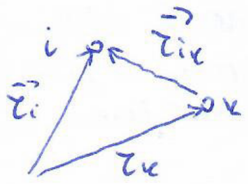
$$dT = \delta A^{зовн} + \delta A^{вн.конс} + \delta A^{вн.стор}$$

$$\delta A^{вн.конс} = \sum_i \sum_{\substack{k \\ k \ne i}} \vec F_{ik}^{конс} d\vec r_i = \sum_{\substack{i,k \\ i \ne k}} \vec F_{ik}^{конс} d\vec r_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec F_{ik}^{конс} d\vec r_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ k \ne i}} \vec F_{ik}^{к} d\vec r_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec F_{ik}^{к} d\vec r_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec F_{ki}^{к} d\vec r_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec F_{ik}^{к} d\vec r_i - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec F_{ik}^{к} d\vec r_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec F_{ik}^{к} d(\vec r_i - \vec r_k)$$

$\vec r_{ik} = \vec r_i - \vec r_k$ $\quad$ $\vec F_{ik}^{конс} d\vec r_{ik}$ – робота переміщення i-тої частинки в пот. полі, що створює k-та,

$\Rightarrow \delta A_{ik}^{кон} = -dU_{ik}$



$$\delta A^{вн.конс} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \ne k}} dU_{ik} = -d\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k \\ i \ne k}} U_{ik}(\vec r_{ik})\right) = -dU_{сист}$$

парні вз-ї частинок

$$U_{сист} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \ne k}}^{N} U_{ik}(\vec r_{ik})$$ – внутрішня (або власна) потенціальна енергія частинок

$U_{сист}$ можна визначити трохи інакше

$$U_{сист} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} U_i, \quad \text{де} \quad U_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{N} U_{ik}$$ – потен. енергія i-ої частинки в полі інших

$U_{сист}$ залежить лише від їхнього взаємного розташування (конфігурації)

кожна конфігурація – своє значення $U_{сист} = U(\vec r_1, \vec r_2, \dots \vec r_N)$

$\delta A^{вн.конс} = -dU_{сист}$ $\quad$ $A^{вн.конс} = -(U_{сист,2} - U_{сист,1})$ ← відповідають початковій та кінцевій конфігурації

$$dT = -dU_{сист} + \delta A^{вн.стор} + \delta A^{зовн}$$

$$d(T + U_{сист}) = \delta A^{зовн} + \delta A^{вн.стор}$$

$E_{сист} = T_{сист} + U_{сист}$ – повна мех. енергія системи частинок, є функцією механічного стану частинок

$$E_{сист} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\frac{dE}{dt} = N^{зов} + N^{вн.конс}$$ – повна мех. енергія системи може змінюватися ...

E зберігається, якщо сумарна потужність (або робота) зовнішніх сил та внутрішніх сторонніх сил $= \varnothing$

Замкнена система $\quad dE = \delta A^{вн.стор}$

Загалом $\delta E > 0, < 0, = 0$ напр. {ракета + викинуті гази} енергія зростає за рахунок згоряння палива (хімічна → теплова → кінетична продуктів згор)

Серед сторонніх можна виділити дисипативні. $\vec{F}^{дис} = -k(v)\vec{v}$ ← відн

$$N^{вн.дис} = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \vec{F}_{ik}^{вн.дис} \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum \vec{F}_{ik}^{вн.дис} \vec{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \vec{F}_{ki} \vec{v}_k =$$

$\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1} \vec{F}_{ik} (\vec{v}_i - \vec{v}_k) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} k(v_{ik}) \vec{v}_{ik} \vec{v}_{ik} = -\frac{1}{2} \sum k(v_{ik}) v_{ik}^2 < 0$$

тобто загальна потужність внутрішніх дисипативних < 0

$$dE = \delta A^{вн.дис} + \delta A^{вн.інші}$$ ⇒ E замкненої зберіг. якщо втрати на роботу проти внутр дисипативних сил компенсуються

Якщо інших сторонніх окрім дисипативних нема $\quad \frac{dE}{dt} = N^{вн.дис} < 0$

Якщо взагалі сторонніх нема $\quad dE = 0$:

повна механічна енергія замкненої ~~системи~~ консервативної системи частинок зберігається ← гарне наближення Сонячна систем.

$$\sum_i \frac{m_i v_i^2(t)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij}(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)) = const$$

E – загалом не адитивна (лише для невзаємодіючих частинок)

$E_1 = T_1 + U_1$

$E_2 = T_2 + U_2$

$$E_{1+2} = T_1 + U_1 + T_2 + U_2 + U_{12} = E_1 + E_2 + U_{12}$$ ← пот. енергія вз-ї частинок підсистеми 1 з частинками підсис. 2.

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k + U_{вз}$$

Незамкнена система

$$\frac{dE}{dt} = N^{\text{вн,стор}} + N^{\text{зовн}} \qquad dE = \delta A^{\text{вн.стор}} + \delta A^{\text{зовн}}$$

$$\vec{F}_i^{\text{зовн}} = \vec{F}_i^{\text{зовн,кон}} + \vec{F}_i^{\text{зовн,стор}}$$

Я U' - пот. енергія нашої системи в зовн. полі

$$U' = U'(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots \vec{r}_N(t), t) = U'(x_1, y_1, z_1, \dots x_N, z_N, t)$$

$$dU' = \frac{\partial U'}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U'}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial U'}{\partial z_1}dz_1 + \dots + \frac{\partial U'}{\partial x_N}dx_N + \frac{\partial U'}{\partial y_N}dy_N + \frac{\partial U'}{\partial z_N}dz_N + \frac{\partial U'}{\partial t}dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U'}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U'}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial U'}{\partial z_i}dz_i\right) + \frac{\partial U'}{\partial t}dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \text{grad}_i U' \, d\vec{r}_i + \frac{\partial U'}{\partial t}dt$$

обчислюється в місці розташування i-тої частинки

$$\frac{dU'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \text{grad}_i U' \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial U'}{\partial t}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad , \quad \text{grad}_i U' = -\vec{F}_i^{\text{зовн,кон}} \qquad \frac{dU'}{dt} = -\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\text{зовн,кон}}\cdot\vec{v}_i + \frac{\partial U'}{\partial t}$$

$$N^{\text{зовн}} = \sum \vec{F}_i^{\text{зовн,кон}}\vec{v}_i + \sum \vec{F}_i^{\text{зовн.стор}}\vec{v}_i = \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{dU'}{dt} + \sum \vec{F}_i^{\text{зовн.стор}}\vec{v}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = N^{\text{вн.стор}} + N^{\text{зовн.стор}} + \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{dU'}{dt}$$

$E' = E + U' = T + U + U'$ - повна мех. енергія д частинок у зовн. (потенц.) полі

$$\frac{dE'}{dt} = N^{\text{вн,стор}} + N^{\text{зовн,стор}} + \frac{\partial U'}{\partial t}$$

Повна ... E' зберігається, якщо зовнішнє поле стаціонарне, а потужність сторонніх (неконсерв сил) $= 0$ $\rightarrow$ або $\vec{F}_i^{\text{зовн стор}} = 0$, $\vec{F}_i \perp \vec{v}_i$

$$E' = \sum_{i=1}^{N} E_i' \qquad E_i' = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_{k=1}^{N} U_{ik}(\vec{r}_{ik}) + U_i'$$

Кеніга теор. ~~Кеніга~~

Система центра мас $\frac{d\vec{R}_c}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$

але $\sum m_i v_i^2 \neq 0$, тоді

$$\hat{E}' = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m \tilde{v}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{ij}(\hat{r}_{ij})}_{\hat{E}} + \hat{U}'$$

$$T = \sum \frac{m_i(\vec{v}_{ic} + \vec{V}_c)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i \vec{v}_{ic}^2 + V_c^2 \sum m_i + V_c \underbrace{\sum m_i \vec{v}_{ic}}_{0}\right]$$

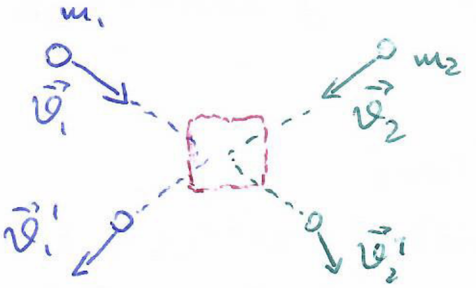
Тоді в $\forall$ СВ

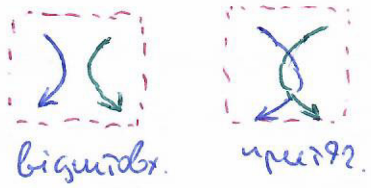
$$E' = \hat{E} + \underset{U}{U'} + \underbrace{\frac{1}{2}MV_c^2}$$

кінетична енергія мінімальна в СЦМ

кінетична енергія руху системи частинок як цілого

Зіткнення частинок - відбувається внаслідок вз-ї частинок за відсутності впливу інших мат. об'єктів, результат - зміна мех. стану





Спочатку - відстань велика (вз-я відсутня, рух вільний). При зближенні - характер залежить від взаємодії (див.) але здалеку різниця непомітна. Задача: знаходження $\vec{v}_1'$ та $\vec{v}_2'$ (відстань знов велика :-), швидкості усталені

$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad \vec{P} = \vec{P}'$$

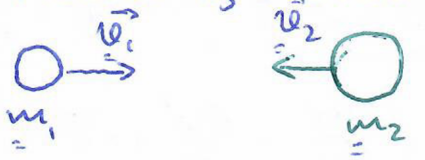
при $E = E'$ - абсолютно пружне зіткнення АПЗ.

$E' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

$E = E' + E^{немех}$

$E' = (1-\eta)E$, $0 < \eta \le 1$ - непружне (А непружне З - внутрі- ній мех. рух ∂ припиняється

1. Лобове зіткнення



АПЗ: $\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_2') \\ m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)(\vec{v}_1' + \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_2')(\vec{v}_2 + \vec{v}_2') \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_1' + \vec{v}_1 = \vec{v}_2' + \vec{v}_2 \qquad \vec{v}_2' = \vec{v}_1 + \vec{v}_1' - \vec{v}_2$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1' - m_2\vec{v}_2^*$$

$$\vec{v}_1'(m_1+m_2) = \cancel{m_1 \vec{v}_1} \; \vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2\vec{v}_2}{(m_1+m_2)} = \frac{\vec{v}_1(-m_1 - m_2 + 2m_1) + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} =$$

$$= -\vec{v}_1 + 2\,\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_2' = -\vec{v}_2 + 2\,\frac{m\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \quad \vec{V}_c$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1' = -\vec{v}_1 + 2\vec{V}_c \\ \vec{v}_2' = -\vec{v}_2 + 2\vec{V}_c \end{cases}$$

а) $m_1 = m_2$

$\vec{v}_1' = -\vec{v}_1 + 2\,\frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{2m} = \vec{v}_2$

$\vec{v}_2' = \vec{v}_1$

обмін швидкостями

б) $m_1 \ll m_2$, $\vec{v}_2 = 0$ – легка частинка налітає на важку нерухому

$$\vec{v}_1{}' \approx -\vec{v}_1 + 2\frac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} \to -\vec{v}_1 \qquad v_2' \to 0$$

відбиття $\qquad \Delta\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = -m\vec{v}_1 - m\vec{v}_1 = -2m_1\vec{v}_1$

в) $m_1 \gg m_2$, $\vec{v}_2 = 0$ важка частинка

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2{}' = 2\vec{v}_1$$

АНЗ $\qquad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}\,' \qquad (\vec{v}\,' = \vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}')$

$$\vec{v}\,' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \vec{V}_c$$ – залишається const

$$E = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \qquad E' = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 = \frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$= \frac{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{2(m_1+m_2)}$$

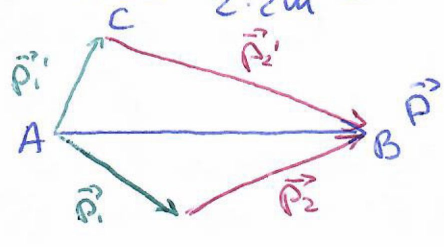
$$\Delta E = E - E' = \frac{(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)(m_1+m_2) - m_1^2v_1^2 - m_2^2v_2^2 - 2m_1m_2\vec{v}_1\vec{v}_2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$= \frac{m_1m_2(v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2)}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

при $m_1 = m_2 \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \qquad \Delta E = \frac{m^2}{2\cdot 2m}(2v)^2 = mv^2 = E \Rightarrow E' = 0$

2. Нелобове зіткнення

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$$



діаграма імпульсів ABC

АПЗ $\qquad \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$

Нехай у нас є система центра мас і $\vec{v}_{1,c}, \vec{v}_{2,c}, \vec{v}\,'_{1,c}, \vec{v}\,'_{2,c}$ – в СЦМ

$\vec{r}_{1,c}, \vec{r}_{2,c}, \vec{r}\,'_{1,c}, \vec{r}\,'_{2c}$

$\vec{v}_1 = \vec{V}_c + \vec{v}_{1,c}$; $\vec{v}_2 = \vec{V}_c + \vec{v}_{2,c}$; $\vec{v}_1{}' = \vec{V}_c + \vec{v}\,'_{1,c}$; $\vec{v}_2{}' = \vec{V}_c + \vec{v}\,'_{2,c}$

$\vec{r}_1 = \vec{R}_c + \vec{r}_{1,c}$

$\vec{P} = M\vec{V}_c = \vec{P} = M\vec{V}_c{}' \Rightarrow \vec{V}_c = \vec{V}_c{}'$

Раніше ми показували $\vec{r}_{1,c} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, $\vec{r}_{2c} = -\frac{m_1}{M}\vec{r}_{12}$

аналогічно $\qquad \vec{r}\,'_{1,c} = \frac{m_2}{M}\vec{r}\,'_{12} \qquad \vec{r}\,'_{2,c} = -\frac{m_1}{M}\vec{r}\,'_{12}$

тоді $\qquad \vec{v}_{1,c} = \frac{m_2}{M}\vec{v}_{12}$, $\vec{v}_{2,c} = -\frac{m_1}{M}\vec{v}_{12}$; $\vec{v}\,'_{1c} = \frac{m_1}{M}\vec{v}\,'_{12}$; $\vec{v}\,'_{2,c} = -\frac{m_2}{M}\vec{v}\,'_{12}$

Вектори відносної швид-ті до та після зіткнення

$\vec{p}_{1,c} + \vec{p}_{2,c} = \vec{p}\,'_{1,c} + \vec{p}\,'_{2,c}$ $\quad E_c = \frac{m_1 \upsilon_{1,c}^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_{2,c}^2}{2} = E_c' = \frac{m_1 \upsilon'^2_{1c}}{2} + \frac{m_2 \upsilon'^2_{2c}}{2}$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m_1 \frac{m_2^2}{M^2}\upsilon_{12}^2 + m_2 \frac{m_1^2}{M^2}\upsilon_{12}^2\right) = \frac{m_1 m_2}{2M}(m_1+m_2)\upsilon_{12}^2 = \frac{m_1 m_2}{2M}\upsilon^2 = \frac{\mu \upsilon_{12}^2}{2}$$

аналогічно $E_c' = \frac{\mu \upsilon'^2_{12}}{2}$ $\qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$E_c = E_c' \Rightarrow \upsilon_{12} = \upsilon_{12}'$ (до речі відносні швидкості не залежать від СВ)

тобто результат зіткнення в СЦМ – поворот вектора відносної швидкості

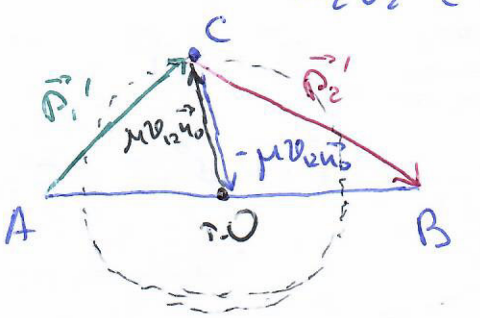
$\vec{\upsilon}\,'_{12} = \upsilon_{12}\vec{n}_0$ ← одиничний в-р з невідомим поки напрямком

$$\vec{\upsilon}\,'_1 = \vec{V}_c + \vec{\upsilon}\,'_{1,c} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M} + \frac{m_2}{M}\upsilon_{12}\vec{n}_0$$

$\vec{V}_c = \frac{\vec{p}}{M}$ $\qquad \vec{\upsilon}\,'_2 = \frac{\vec{p}_1+\vec{p}_2}{M} - \frac{m_1}{M}\upsilon_{12}\vec{n}_0$

або $\quad m_1\vec{\upsilon}\,'_1 = \frac{m_1}{M}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) + \frac{m_1 m_2}{M}\upsilon_{12}\vec{n}_0 = \vec{p}\,'_1$

$\quad m_2\vec{\upsilon}\,'_2 = \frac{m_2}{M}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) - \mu\,\upsilon_{12}\vec{n}_0 = \vec{p}\,'_2$



виберемо т.O : $\vec{AO} = \frac{m_1}{M}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) = m_1\vec{V}_c$

$\vec{OB} = \frac{m_2}{M}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) = m_2\vec{V}_c$

$\vec{p}\,'_1 = \vec{AO} + \mu\upsilon_{12}\vec{n}_0$

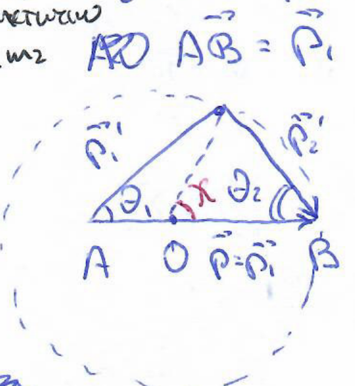
$\vec{p}\,'_2 = \vec{OB} - \mu\upsilon_{12}\vec{n}_0$

тобто коло з початком в т.O та радіусом $\mu\upsilon_{12}$ – це можливе місце кінців $\vec{p}\,'_1$ та початків $\vec{p}\,'_2$

$\upsilon_{12} = \sqrt{2E_c/\mu}$ $\qquad \mu\upsilon_{12} = \sqrt{2\mu E_c}$

a) $\upsilon_2 = 0 \quad p_2 = 0$ ← загалом ∀ задачу можна звести до цієї вибором С.В

це фактично $m_1 < m_2$ $\quad \vec{AB} = \vec{p}_1$; $\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{p}_1$, $\vec{OB} = \frac{m_2}{M}\vec{p}_1 = \frac{m_2 \cdot m_1}{M}\vec{\upsilon}_1 = \mu\vec{\upsilon}_{12}$ $\quad (\vec{\upsilon}_{12} = \vec{\upsilon}_1)$



частинка з m_1 відхиляється на θ_1

– // – m_2 рухається в напрямку, що утворює θ_2 з початковим напрямком руху першої

θ_1, θ_2 – кути розсіяння в лабораторній С.В

χ – кут розсіяння в СЦМ, кут на який повертається $\vec{\upsilon}_{12}$

$\theta = \theta_1 + \theta_2$ – // – в лабораторній

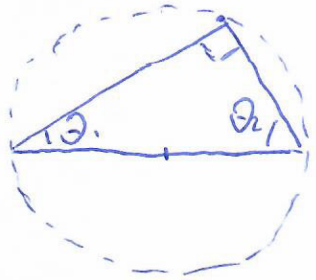
$0 < \theta_1 \leq \pi$

$\theta > \pi/2$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\chi}$$

б) $m_1 = m_2$ $\quad OA = OB$ - це також $\upsilon_2 = 0$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

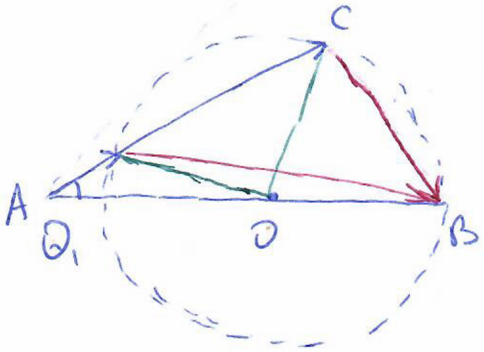


$0 < \theta_1 \le \pi/2 \qquad \theta = \pi/2$

в) $m_1 > m_2$

$0 < \theta_1 \le \theta_{1,max}$

$\theta_1 + \theta < \pi/2$



для кожного θ_1 може бути 2 варіанти θ_2, χ

θ_1 - max - коли AC є дотичній до кола

$$\sin\theta_{1,max} = \frac{OC}{AO} = \frac{\mu\upsilon}{\frac{m_1}{M} m_1 \upsilon} = \frac{m_2}{m_1}$$

Розрахунок енергії

$$E_2' = \frac{(p_2')^2}{2m_2}$$

$p_2 = 0,\ \upsilon_{12} = \upsilon_1 = \upsilon$

$$(p_2')^2 = \left(\frac{m_2}{M}\vec{p}_1 - \mu\upsilon\vec{n}_0\right)\left(\frac{m_2}{M}\vec{p}_1 - \mu\upsilon\vec{n}_0\right) = \frac{m_2^2}{M}p_1^2 + \mu^2\upsilon^2 - 2\frac{m_2}{M}\mu\upsilon\, \vec{p}_1\cdot\vec{n}_0 =$$

$$= \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}m_1^2\upsilon^2 + \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2\upsilon^2 - 2\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\cdot\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\upsilon\, p_1\cos\chi =$$

$$= 2\frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\upsilon^2(1-\cos\chi) = 4\mu^2\upsilon^2\sin^2\frac{\chi}{2}$$

$$E_2' = \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\upsilon^2\sin^2\frac{\chi}{2} \qquad E'_{2\,max} \text{ при } \underset{m_1=m_2}{\chi=\pi} = \frac{m\upsilon^2}{2}$$