Київський національний університет імені Тараса Шевченка

І.В. Плющай, Р.В. Остапенко

ФІЗИКА ДЛЯ БІОЛОГІВ

Механіка

2025

І.В. Плющай, Р.В. Остапенко

Фізика для біологів. Механіка (для студентів ННЦ “Інститут біології та медицини”). Київ, 2025.–
45 **с.**

У посібнику «Фізика для біологів. Механіка» основну увагу приділено ознайомленню студентів з великою кількістю прикладів застосування фізичних принципів до біологічних та медичних проблем. Коротко подано основні теоретичні відомості, наведено формули, необхідні для розуміння та розв’язання задач. Додатково подано задачі, які ілюструють застосування фізики для опису таких явищ, як рух рідин у судинах, навантаження на опорно-руховий апарат, механічні властивості біологічних тканин. Посібник допомагає формувати міждисциплінарне бачення, підвищує зацікавленість студентів у вивченні фізики та сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Рецензенти:

Макаренко О.В., д-р фіз.-мат. наук, доцент

Овсієнко І.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рекомендовано до друку

Вченою радою фізичного факультету

Київського Національного університету

імені Тараса Шевченка

протокол № ?? від ?? травня 2025 року

ЗМІСТ

РОЗДІЛ І

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

§1. Кінематика та динаміка матеріальної точки. Закони збереження імпульсу, енергії

1. ***Механічний рух*** – це зміна взаємних розташувань тіл (або їх частин) у просторі з часом.

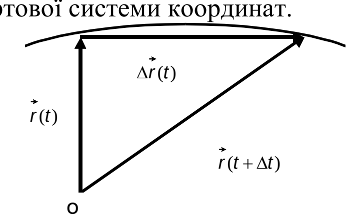
Використовують три форми опису руху матеріальної точки – координатну, векторну та параметричну. У координатній формі задають координати точки x, y, z як функції від часу t

$$x = x(t);\; y = y(t); z = z(t). \qquad (1)$$

У векторній формі задають радіус–вектор точки $\vec{r}$ як функцію t

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}, \qquad (2)$$

де $i \rightarrow, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – орти осей x, y, z декартової системи координат.



Коли відома траєкторія руху, то можна описувати рух за допомогою параметрів траєкторії, наприклад, задаючи шлях S від часу t: $S = S(t)$.

Вектор переміщення $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ чисельно дорівнює відстані між кінцевою і початковою точками, направлений від початкової до кінцевої точки і з'єднує ті точки траєкторії, в яких матеріальна точка знаходилась у моменти часу t і $t + \Delta t$.

2. ***Швидкість і прискорення. Вектор середньої швидкості*** $\langle\vec{v}\rangle$ при переміщенні між двома точками визначається як вектор, що збігається з напрямком переміщення і дорівнює за модулем вектору переміщення, поділеному на час переміщення

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad (3)$$

де $\Delta\vec{r}$ — переміщення (приріст радіус–вектора за час Δt

Якщо $\vec{v}(t)$ і $\vec{v}(t + \Delta t)$ – швидкості в двох точках траєкторії, а Δt – час переміщення з першої точки в другу, то ***середнє прискорення*** $\langle a \rightarrow \rangle$ точки на ділянці траєкторії між цими точками визначається формулою

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad (4)$$

де $\Delta\vec{v}$ – приріст швидкості.

Миттєву швидкість $\vec{v}$ і ***миттєве прискорення*** $\vec{a}$ знаходять із формул

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},\} \qquad (5)$$

де $\vec{v}$ – похідна від радіус–вектора по часу; $\vec{a}$ – похідна від миттєвої швидкості по часу.

Проекції швидкості й прискорення в декартовій системі координат виражаються формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}\ a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}\ \}. \qquad (6)$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Швидкість бігу залежить від довжини дистанції: бігун здатен підтримувати максимальну швидкість лише протягом обмеженого часу, тому середня швидкість на коротких дистанціях вища, ніж на довгих. Це чітко простежується у світових рекордах: середні швидкості рекордних забігів рівномірно зменшуються зі збільшенням дистанції. Проте ця закономірність має винятки. Наприклад, середня швидкість на дистанції 200 метрів вища, ніж на 100 метрів. Це може здатися дивним, але пояснюється поведінкою миттєвої швидкості бігуна протягом забігу.

Бігун стартує з нульової швидкості і проходить фазу прискорення, яка зазвичай триває близько двох секунд або менше. За цей час він досягає максимальної швидкості приблизно 10,5 м/с. Проте середня швидкість на дистанції виявляється меншою за максимальну, оскільки початок забігу відбувається з прискоренням, а середня швидкість у фазі розгону складає лише половину від максимальної. У забігу на 100 метрів фаза розгону займає відносно велику частину всього часу, тому середня швидкість є нижчою. У забігу на 200 метрів більша частина шляху долається вже на досягнутий максимальній швидкості, тому середня швидкість виходить вищою, ніж на 100 метрів.

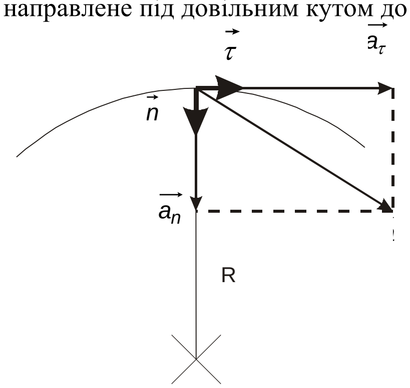
Якби бігун міг підтримувати максимальну швидкість нескінченно довго, то середня швидкість зростала б із довжиною дистанції. Але цього не відбувається, і вже на дистанціях понад 200 метрів середня швидкість починає спадати. Точно визначити момент початку цього спаду складно. Причина падіння швидкості полягає у фізіологічних обмеженнях організму — зокрема, у нестачі кисню.

Під час бігу м'язи споживають кисень, що зберігається в тканинах або надходить через дихання. На коротких дистанціях (до приблизно 300 м) бігун використовує переважно кисень, запасений у м'язах, і здатен працювати на повну потужність. Проте після виснаження цього запасу організм не встигає доставити кисень у достатній кількості, тому бігун змушений знижувати інтенсивність, і, відповідно, швидкість. Отже, на довгих дистанціях швидкість свідомо зменшується — чим довша дистанція, тим меншою вона повинна бути, щоб зберегти здатність підтримувати зусилля протягом усього забігу.

Таким чином, усі бігуни на дистанціях до 200 метрів — це спринтери, які долають всю дистанцію на максимальній швидкості. Бігуни на середні та довгі дистанції — середньовики і стаєри — змушені дотримуватись помірної сталої швидкості, щоб уникнути кисневого виснаження ще до фінішу. Цікаво, що дистанція в 300 метрів майже не зустрічається в офіційних змаганнях, хоча саме вона є критичною межею, на якій закінчуються внутрішні кисневі запаси. Можливо, саме з цієї причини її уникають — на ній особливо чітко проявляється межа між спринтом і витривалістю.

3. ***Повне прискорення. Тангенціальне та нормальне прискорення***

Швидкість завжди спрямована по дотичній до траєкторії. Прискорення може мати довільний кут відносно швидкості, тобто може бути направлене під довільним кутом до траєкторії.



Повне прискорення складається з двох взаємно перпендикулярних векторів: прискорення $(\frac{dv}{dt})\tau \rightarrow = a_\tau \rightarrow$, напрямленого уздовж траєкторії руху, яке називається ***тангенціальним***, і прискорення $\frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \vec{a}_n$, яке спрямовано перпендикулярно до траєкторії, тобто уздовж нормалі, до центра O кривизни траєкторії R.

Це прискорення називається ***нормальним,*** ($\tau \rightarrow, n \rightarrow$) – одиничні орти.

Повне прискорення визначається за формулою:

$a \rightarrow = a \rightarrow_{\tau} + a \rightarrow_{n}$,

$$|a \rightarrow| = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \qquad (7)$$

де $a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$, v – модуль швидкості, R – радіус кривизни траєкторії в певній точці.

Нормальна компонента прискорення не змінює модуля швидкості, а змінює лише її напрямок. Зміна модуля швидкості зумовлена тільки тангенціальною складовою прискорення.

4. ***Класифікація механічного руху*** залежно від тангенціальної a_{τ} та нормальної a_n складових прискорення:

1) $a_n = 0$; $a_{\tau} = 0$ — прямолінійний рівномірний рух;

2) $a_n = 0$; $a_{\tau} = \pm const$— прямолінійний рівномірно прискорений/ сповільнений рух;

3) $a_n = 0$; $a_{\tau} = f(t)$— прямолінійний рух зі змінним прискоренням;

4) $a_n = f(t)$; $a_{\tau} = 0$— рівномірний криволінійний рух. Якщо $a_n = const$, то тіло (точка) рухається по колу;

5) $a_n \neq 0$; $a_{\tau} \neq 0$ — криволінійний рух зі змінним ($a_{\tau} = f(t)$) або постійним ($a_{\tau} = \pm const$) прискоренням.

5. ***Кутова швидкість та кутове прискорення***. Обертальний рух характеризують кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням β

Кутова швидкість ω визначається як

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}, \qquad (8)$$

де $\Delta\phi$ – кут, що описує радіус–вектор, який з’єднує точку з центром обертання за час Δt.

Кутове прискорення β ***дорівнює***

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (9)$$

Зв’язок між лінійними та кутовими величинами визначається формулами

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}],\ v = \omega R,\ a_n = \omega^2 R,\ a_{\tau} = \beta R, \qquad (10)$$

де $\vec{r}$ – радіус–вектор точки, що розглядається відносно довільної точки осі обертання; R– відстань від осі обертання.

Якщо величина ω залишається незмінною з часом, обертальний рух по колу називають ***рівномірним***. При цьому можна ввести ***період обертання*** T

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (11)$$

Очевидно, що $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – є ***кут***, який описує радіус вектор точки за 1 секунду; величину **ω** називають також ***кутовою частотою обертання***; ν – звичайна частота.

6. ***Закони Ньютона*** – закони класичної динаміки матеріальної точки.

1) Перший закон Ньютона (закон інерції): існують такі системи відліку, названі інерціальними, в яких матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доки дія з боку інших тіл не виведе її з цього стану;

2) Другий закон Ньютона: прискорення, якого набуває матеріальна точка в інерціальній системі відліку, прямо пропорційне результуючій усіх сил $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, що діють на неї і обернено пропорційне її масі m

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m}, \qquad (12)$$

де n – кількість сил, що діють на точку.

У загальній формі другий закон Ньютона записують так

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \qquad (13)$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс тіла (точки) або кількість руху.

Рівняння (13) в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії точки записують у вигляді

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n. \qquad (14)$$

Нормальна складова сили $\vec{F}_n$ перпендикулярна до швидкості й направлена до центра кривизни траєкторії, її називають ***доцентровою силою***.

3) Третій закон Ньютона: сили, з якими два тіла (точки) діють одне на одне, рівні за величиною і протилежні за напрямком. Якщо позначити ці сили через $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{21}$, то

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| \; i \; \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,. \qquad (15)$$

Істотно, що ці сили мають однакову природу, але прикладені до різних тіл.

7. *Закон всесвітнього тяжіння*

Гравітація (тяжіння) – один з видів матеріальної взаємодії в природі. Це притягання тіл будь–якої природи, що залежить від їх мас та розташування. Тяжіння відбувається через ***гравітаційне поле***.

Згідно із ***законом всесвітнього тяжіння*** між двома точковими масами m_1 і m_2, розташованими на віддалі r одна від одної, діють сили притягання, причому чисельне значення кожної з них дорівнює

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (16)$$

де $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2·кг$^{-2}$ – ***гравітаційна стала***.

У векторній формі закон всесвітнього тяжіння приймає вигляд

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}, \qquad (17)$$

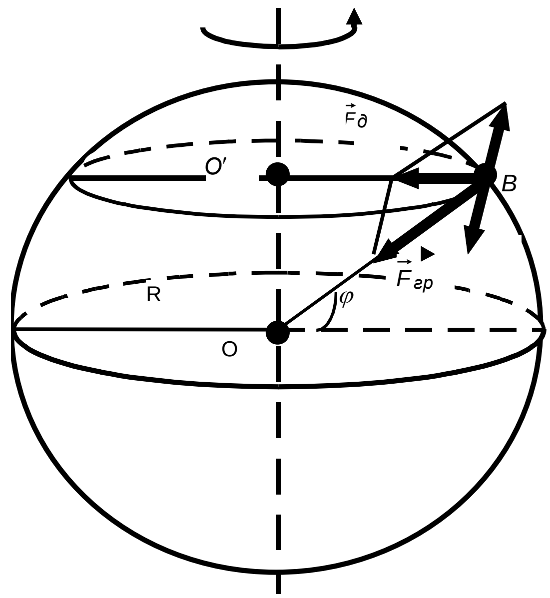
де $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, спрямований від першого тіла до другого.

Гравітаційні сили $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ прикладені до кожної із взаємодіючих точок і спрямовані вздовж прямої, яка їх сполучає, у напрямку взаємного зближення.

8. *Сила тяжіння. Вага*

На тіло, що знаходиться в пункті B на поверхні Землі з широтою ϕ діють дві сили: гравітаційна сила $\vec{F}_{\text{гр}}$ і сила реакції земної поверхні $\vec{N}$. Рівнодіюча $\vec{F}_{\text{Д}}$ (доцентрова сила) цих двох сил забезпечує рух тіла по колу з центром O′ при обертальному русі Землі навколо осі. Доцентрова сила $\vec{F}_{\text{Д}}$ розташована в площині географічної паралелі тіла, спрямована до земної осі обертання і чисельно дорівнює

$$\vec{F}_{\text{Д}} = m\omega^2 R\, cos\, cos\, \phi$$



(де m – маса тіла; ω – кутова швидкість добового обертання Землі; R – радіус Землі; ϕ – географічна широта точки, в якій розташоване тіло).

Її числове значення дорівнює нулю на полюсі ($\phi = 90^0$) і найбільше на екваторі ($\phi = 0^0$).

В системі відліку, що зв'язана з Землею, на будь–яке тіло, нерухоме відносно Землі, діє ***сила тяжіння*** $\vec{F}_{тяж}$, направлена протилежно до сили реакції опори $\vec{N}$ і рівна за модулем

$$\vec{F}_{тяж} = -\vec{N} = \vec{F}_{гр} - \vec{F}_{д}. \qquad (18)$$

Сила тяжіння дорівнює гравітаційній силі на полюсі й менша за гравітаційну силу на 0,36% на екваторі.

У системі відліку, яка зв'язана із Землею, тіло, що не підтримується підставкою, під дією сили тяжіння одержує ***прискорення вільного падіння*** $\vec{g}$. Це прискорення не залежить від маси m тіла і згідно з другим законом Ньютона визначається через силу тяжіння $\vec{F}_{тяж}$

$$\vec{g} = \frac{F\rightarrow_{тяж}}{m}. \qquad (19)$$

Вага – сила $\vec{P}$, з якою тіло внаслідок притягання його до Землі, діє на підставку або підвіс $\vec{P} = -\vec{N}$.

Якщо тіло з підставкою (підвісом) нерухоме в земній системі відліку, то вага тіла і за напрямком, і за числовим значенням збігається із силою тяжіння $\vec{F}_{тяж}$, що діє на тіло. Тільки точкою прикладення сили тяжіння є центр мас тіла (або системи тіл), а вага прикладена до підставки чи підвісу. Рівність ваги та сили тяжіння існує й у випадку рівномірного і прямолінійного руху підставки (підвісу) в системі відліку, що пов'язана із Землею.

Якщо підставка (підвіс) має прискорення $\vec{a}$, вага тіла не дорівнює силі тяжіння

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

1) тіло масою m з підставкою рухається з прискоренням $\vec{a}$, спрямованим вертикально вверх. Вага тіла P буде більша сили тяжіння

$$P = m(g + a) \qquad (20)$$

2) тіло масою m з підставкою рухається з прискоренням $\vec{a}$, спрямованим вертикально вниз. Вага тіла P *буде менша сили тяжіння:*

$P = m(g - a).$ (21)

3) вага тіла дорівнює нулю при $\vec{a} = \vec{g}$. У цьому випадку має місце стан ***невагомості***.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Невагомість – стан механічної системи, при якому зовнішні сили тяжіння надають частинкам цієї системи тільки прискорення і не викликають взаємного тиску між ними.

Невагомість виникає за таких умов: на систему не діють ніякі зовнішні сили, крім гравітаційних; у стані невагомості тіло перебуває у стані вільного падіння, вільно рухається навколо Землі з першою космічною швидкістю тощо. Невагомість можна трактувати як зрівноваження гравітаційних сил силами інерції. У системі, що перебуває у стані невагомості, спостерігаються такі явища: математичний маятник зависає у відхиленому стані; зникає Архімедова сила в рідині; змочувана рідина розтікається по посудині, незмочувана рідина приймає форму кулі; тіло підвішене на пружині, зовсім її не деформує; предмети (і людина) «пливуть» у довільному положенні.

Фізіологічне відчуття невагомості, наприклад, у космонавтів, характеризується відсутністю напруг та навантажень, які зумовлені силою тяжіння. У цьому стані не відбувається деформація внутрішніх органів, зникають постійно діючі напруги цілого ряду м’язів, порушується діяльність вестибулярного апарату тощо.

Щоб вирішити проблеми зі здоров’ям, що виникають в стані невагомості, на космічній станції може бути створена штучна гравітація. При цьому для космонавтів можуть бути створені умови, що будуть найбільш близькими до нормальних. Задля досягнення бажаного ефекту космічну станцію потрібно привести станцію в стан обертання з певною кутовою швидкістю навколо своєї осі. Обертання конструкції станції буде створювати відцентрову силу інерції. Для досягнення рівня гравітації, як на Землі станція має набрати доцентрове(нормальне) прискорення a_n співрозмірне з прискоренням вільного падіння $a_n = \omega^2 R = g$, обертання має бути повільним менше 2 об/хв, щоб вестибулярний апарат людини справлявся і не було нудоти, дезорієнтації. По розрахунках при $a_n = 9.8$ м/с^2, періоді обертання $T = 30$ об/хв. $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $a_n = \omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ радіус космічної станції має складати не менше $R = 224$ м. Відмітимо, що доцентрове прискорення залежить від R прямопропорційно та зменшується при наближенні до осі обертання. Відповідно величина штучної гравітації буде залежати від положення космонавтів на космічній станції. Для збереження постійного значення штучної гравітації найоптимальнішою формою космічної станції є кільцеподібна форма.

Слід відмітити, що при дії на людину перевантажень (наприклад, зміна ваги космонавта на старті та при гальмуванні космічного корабля) також спостерігаються фізіологічні відхилення в органах людини, особливо в системі кровообігу. Якщо прискорення спрямовано від таза до голови космонавта, то спостерігається відплив крові із судин голови та її приплив до органів нижньої частини тулуба. Артеріальний тиск крові здорової людини на рівні серця становить 16–18кПа, а у великих артеріях голови 12–14кПа. Якщо космонавт рухається з прискоренням $a \approx 3g$, спрямованим в напрямку таз → голова, то артеріальний тиск у судинах головного мозку знизиться приблизно на 12кПа і наблизиться до атмосферного тиску, що призведе до порушення кровообігу в судинах, і клітини головного мозку зазнають нестачу кисню. Тиск у судинах нижніх кінцівок збільшується і при $a \approx 3g$ може досягти 75кПа. Це викликає збільшення об’єму крові в нижніх частинах тіла, що призводить до набрякання тканин. Для забезпечення нормального кровообігу у космонавтів і пілотів реактивних літаків їх розміщують у горизонтальному положенні так, щоб розміри тіла були мінімальними в напрямку вектора прискорення. Вплив на людину, рослини тощо перевантажень та невагомості вивчає космічна медицина.

9. ***Закон Гука*** – закон, який встановлює залежність між деформуючою силою і викликаною нею величиною деформації ізотропного тіла в межах його пружності.

Означивши відношення деформуючої сили F до площі $S_\perp$ перпендикулярної до неї площини деформованого тіла як ***нормальне напруження*** $\sigma = \frac{F}{S_\perp}$, а відношення абсолютної деформації ΔL до початкової довжини L тіла як ***відносну деформацію*** $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$, зако***н Гука*** для лінійної деформації розтягу (стиску) формулюють так: механічне напруження пропорційне відносній деформації

$\sigma = E\varepsilon,$ (22)

де E – ***модуль пружності*** (модуль Юнга).

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Пружні властивості біологічних матеріалів мають важливе значення для забезпечення функціонування організму. Біологічні тканини не є однорідними з фізичної точки зору — вони мають складну мікроструктуру та механічні властивості, що дозволяють їм адаптуватися до навантажень і деформацій. Одним із прикладів є кістка — матеріал, який, попри свою легкість, володіє надзвичайною міцністю. Кісткова тканина є композитною системою, що складається з органічного білкового компонента (переважно колагену), неорганічного мінерального компонента (гідроксиапатиту $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$), а також води та сполучних речовин. Колаген становить приблизно 20% маси кістки, а апатит — близько 70%. Властивості цих компонентів суттєво відрізняються. Зокрема, мінеральний компонент забезпечує опір стисненню (до 30% внеску), тоді як білковий компонент робить значний внесок в опір розтягуванню (до 7%). Цікаво, що сам по собі жоден із цих компонентів не забезпечує високої міцності, але у поєднанні вони формують матеріал, механічні характеристики якого можна порівняти з властивостями металів. Наприклад, міцність суцільної кістки на розтягування майже дорівнює міцності алюмінію. Колаген має пружиноподібну молекулярну структуру, що обумовлює його еластичну поведінку при розтягуванні та слабкий опір при стисненні. Водночас апатит, як кристалічна структура, забезпечує жорсткість і твердість. Модуль пружності (модуль Юнга) кісткової тканини становить приблизно 10^{10} Па, що свідчить про високу жорсткість матеріалу — навіть незначна деформація потребує значних зусиль.

На відміну від кістки, м'які біологічні тканини, такі як м'язи, шкіра або сухожилля, мають зовсім інші механічні властивості. Вони є еластомероподібними матеріалами і ведуть себе подібно до гуми. Їхня структура складається з довгих полімерних молекул, що переплітаються і можуть витягуватись до кількох разів від початкової довжини без розриву. Для таких матеріалів характерне нелінійне розтягування: спочатку деформація відбувається легко, але зі збільшенням розтягування опір зростає. Їхній модуль Юнга набагато менший і становить у межах 10^5 – 10^6 Па, що на кілька порядків нижче, ніж у кісткової тканини. Наприклад, якщо максимальна деформація кістки при розтягуванні становить близько 1% (тобто подовження на 1%), то еластомер може витримати збільшення довжини у 2–3 рази без пошкодження. Така здатність до розтягування є критично важливою для функціонування м'язів і сполучних тканин.

Варто зазначити, що фізичні характеристики тканин, такі як модуль пружності або міцність на розтягування й стиск, виявляються напрочуд стабільними серед різних видів тварин, навіть якщо їхня морфологія та спосіб життя сильно відрізняються. Це свідчить про існування певних еволюційно сформованих меж міцності біоматеріалів, які оптимізовані для живих систем. Природа використовує комбінування структур і властивостей для створення матеріалів, які забезпечують необхідну механічну функціональність — від захисту внутрішніх органів до забезпечення руху.

Сили, що ламають кістки під час стрибків. Під час стрибка або падіння з висоти людина зазнає значного механічного навантаження, особливо в нижніх кінцівках. При приземленні на тверду поверхню найбільше навантаження припадає на кістки гомілки, зокрема на великогомілкову кістку, яка є найвразливішою в цій ситуації. Злам відбувається в зоні найменшого поперечного перерізу — трохи вище щиколотки. Якщо сила тиску, що діє на кістку при приземленні, перевищує приблизно 50 000 ньютонів, кістка ламається. Для людини масою 75 кг, яка приземляється на обидві ноги, ця межа становить близько 100 000 ньютонів (10^5 Н), що еквівалентно приблизно 130-кратному збільшенні її власної ваги.

Сила, що діє на ноги під час зупинки руху при падінні, визначається другим законом Ньютона. Щоб оцінити цю силу, потрібно врахувати кінетичну енергію, яку набуває тіло під час падіння з висоти H, та шлях, на якому відбувається зупинка — h.

Швидкість при падінні з висоти H (за відсутності опору повітря) визначається як:

$\boldsymbol{v} = \sqrt{2gH}$ => $v^2 = 2gH$

Середнє прискорення a необхідне для зупинки тіла, що рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v}$ на шляху при якому відбувається повна зупинка тіла h

$v^2 = 2aH$ => $a = \frac{gH}{h}$

Звідси, $F = ma = \frac{mgH}{h}$

Таким чином, сила при приземленні прямо пропорційна висоті падіння та обернено пропорційна відстані, за яку тіло зупиняється. Якщо людина жорстко приземляється, не згинаючи ніг у колінах, тоді гальмівна відстань h становить приблизно 1 см (0,01 м). Враховуючи, що сила F не повинна перевищувати $130mg$ гранично допустима висота падіння без ризику перелому гомілки обчислюється як:

$$H = \frac{Fh}{mg} = 1.3 \text{ м}$$

Отже, падіння навіть із висоти трохи більш ніж одного метра може призвести до перелому, якщо приземлення відбувається без амортизації — на прямі ноги. Це підкреслює важливість згинання колін під час приземлення. Якщо людина присяде, тобто розширить гальмівний шлях до приблизно 0,6 м, то допустима висота збільшується в 60 разів. Це дозволяє безпечно стрибати з восьмиповерхової будівлі, проте при приземленні з амортизацією основне навантаження передається вже не на кістки, а на м'язи, сухожилля і зв'язки, які мають значно меншу міцність. Типові зв'язки витримують лише близько 1/20 тієї сили, яку витримують кістки, а це в свою чергу відповідає висоті в 4 метри. Таким чином, навіть при правильно організованому приземленні стрибки з висоти понад 4 метри є небезпечними, адже несподівані або нерівномірні навантаження на м'язи можуть перевищити їхню межу витривалості, що призведе до розриву зв'язок або серйозних травм

Якщо ж приземлення відбувається не на тверду поверхню, а на матеріал, здатний значно подовжити гальмівну відстань (вода, глибокий пухкий сніг, пісок, гравій), то потенційно виживання можливе навіть при падіннях з дуже великих висот. Один із найвідоміших випадків — історія Югославської стюардеси Весни Вулович, яка у 1972 році вижила після падіння з висоти понад 10 км, потрапивши в сніжний схил.

Ці приклади, однак, залишаються винятками. У загальному випадку навіть падіння з висоти власного зросту може бути небезпечним, якщо приземлення відбувається неконтрольовано.

10. *Механічна робота. Консервативні та неконсервативні сили*

У механіці ***робота*** $\varDelta A$ дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на переміщення $\varDelta\vec{r}$

$\varDelta A = (F \rightarrow \cdot \varDelta r) \rightarrow = F\varDelta r \cos\cos\alpha$, (23)

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $\varDelta\vec{r}$.

Робота змінної сили

$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cdot \cos\cos\alpha\, dr = \int_1^2 F_r\, dr,$ (24)

де $F_r = F \cos\cos\alpha$ – проекція сили на напрямок переміщення.

Консервативними називають сили, робота яких залежить тільки від початкового та кінцевого положення точки, що рухається, і не залежить від форми траєкторії.

При замкненій траєкторії робота консервативної сили завжди дорівнює нулю.

До консервативних сил відносять гравітаційні сили, сили пружності, електростатичні.

Робота $A_{\text{гр}}$ гравітаційної сили при переміщенні матеріальної точки з масою m відносно іншої точки з масою M, яка розташована в початку координат, дорівнює:

$A_{\text{гр}} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r)\, d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma m M}{r^2} dr = \frac{\gamma m M}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma \cdot mM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$ (25)

де r_1 і r_2 – модулі радіус–векторів, які характеризують початкові й кінцеві положення точки, що переміщується.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії, називають ***непотенціальними силами*** (сили тертя, сили опору тощо).

Робота непотенціальних сил по замкненій траєкторії не дорівнює нулю.

Система тіл називається ***консервативною***, якщо внутрішні й зовнішні сили, що діють на систему, є потенціальними. У ***замкненій консервативній системі*** між тілами діють тільки внутрішні потенціальні сили.

Між тілами замкненої ***неконсервативної системи*** поряд із внутрішніми потенціальними силами діють внутрішні непотенціальні сили.

11. *Потужність*

Середньою потужністю $\langle P \rangle$. називається фізична величина, яка визначається відношенням роботи $\varDelta A$ сили або системи сил протягом кінцевого проміжку часу $\varDelta t$до цього проміжку часу

$\langle P \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}$. (26)

Потужністю (миттєвою потужністю) P називається фізична величина, яка визначається формулою

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (27)$$

Якщо матеріальна точка або тіло переміщається зі швидкістю $\vec{v}$, то

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) = F \cdot v \cdot \cos\cos\alpha, \quad (28)$$

де α– кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{v}$.

12. ***Енергія. Механічна енергія***

Енергією називається скалярна фізична величина, яка є загальною мірою різних видів руху матерії та різних взаємодій, а також мірою переходу руху матерії з одних форм в інші.

Основні види енергії: механічна, теплова, електромагнітна, ядерна та ін. Механічну енергію поділяють на кінетичну і потенціальну.

Механічна енергія E характеризує рух і взаємодію тіл і є функцією стану механічної системи, яка залежить від швидкостей і взаємного розташування тіл (або їх частин).

Кінетична енергія матеріальної точки (точок) – енергія руху, яка пов’язана з масою та швидкістю їх руху в даній інерціальній системі відліку

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad (29)$$

де $p = mv$ – імпульс матеріальної точки.

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій E_{ki} всіх n матеріальних точок, що входять до системи

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i}. \quad (30)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії: зміна ΔE_k кінетичної енергії точки (тіла) при переході з одного стану в інший дорівнює роботі A всіх сил, що діють на тіло

$$A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}, \quad (31)$$

де E_{k2} – кінетична енергія тіла в кінцевому стані (положенні); E_{k1} – кінетична енергія в початковому положенні.

Потенціальна енергія – енергія консервативної системи, яка залежить від розташування та взаємодії частинок цієї системи (як між собою, так і з зовнішнім силовим полем).

Потенціальна енергія – однозначна функція координат точок системи.

Мірою зміни потенціальної енергії системи при її переході з одного стану в інший є робота потенціальних сил, що спричиняють взаємодію між елементами системи.

Робота $A_{\text{пот}}$ ***потенціальних сил*** дорівнює зміні $\Delta E_{\text{п}}$ потенціальної енергії системи при її переході з початкового стану в кінцевий, взятій з оберненим знаком

$$A_{\text{пот}} = -\Delta E_{\text{п}} = -(E_{\text{п}2} - E_{\text{п}1}), \quad (32)$$

де $E_{\text{п}2}$ – потенціальна енергія системи в кінцевому стані; $E_{\text{п}1}$ – потенціальна енергія системи в початковому стані.

Наприклад, згідно з (25) для гравітаційного поля

$$A_{\text{пот}} = \text{A}_{\text{гр}} = \gamma \cdot mM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\frac{\gamma \cdot mM}{r_1} - \left(-\frac{\gamma \cdot mM}{r_2}\right) = \text{E}_{\text{п}1} - \text{E}_{\text{п}2}$$

13. ***Вирази для потенціальної енергії взаємодії простих механічних систем***

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії системи двох матеріальних точок з масами m і M, що знаходяться на відстані r одна від одної

$$E_n = -\gamma \frac{mM}{r}, \qquad (33)$$

де γ – гравітаційна стала, а нуль відліку потенціальної енергії $(E_п = 0)$ приймають при $r = \infty$.

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії тіла масою m із Землею

$$E_n = \gamma \frac{mM_3 h}{R_3(R_3+h)}, \qquad (34)$$

де h – висота тіла над поверхнею Землі; $М_з$ – маса Землі; $R_з$ – радіус Землі, а нуль відліку потенціальної енергії приймають при $h = 0$.

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії тіла масою m із Землею для малих висотh $(h << R_з)$ дорівнює

$$E_п = mgh, \qquad (35)$$

де g – модуль прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі ($g = \frac{\gamma \cdot M_3}{R_3^2}$).

Потенціальна енергія пружних взаємодій

$$E_n = \frac{k(\Delta x)^2}{2}, \qquad (36)$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили; Δx – модуль вектора подовження або стиснення.

14. ***Закон збереження і зміни механічної енергії***

Робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії матеріальної точки при її переміщенні з положення 1 в положення 2

$$A_{12} = -\int_1^2 dE_n = E_{п1} - E_{п2}. \qquad (37)$$

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії зменшення потенціальної енергії йде на приріст кінетичної енергії

$$E_{п1} - E_{п2} = E_{k2} - E_{k1}.$$

Оскільки $E = E_k + E_п$, то можна записати, що

$$E_1 = E_2 = E = const \qquad (38)$$

де $E_1 = E_{k1} + E_{п1}$ *і* $E_2 = E_{k2} + E_{п2}$– повні механічні енергії матеріальної точки в положеннях 1 і 2.

Закон збереження механічної енергії в консервативній системі: механічна енергія консервативної системи зберігається постійною в процесі руху системи

$$E = E_k + E_п = const. \qquad (39)$$

Цей закон виконується як для замкнених, так і для незамкнених систем.

В незамкненій консервативній системі потенціальна енергія $E_П$ є сумою потенціальної енергії взаємодії частинок між собою $E_П(вн)$ та потенціальної енергії частинок системи в полі зовнішніх сил $E_П(зов)$:

$$E_П = E_П(вн) + E_П(зов). \qquad (40)$$

Якщо на тіла системи діють зовнішні сторонні сили та внутрішні дисипативні сили то закон збереження енергії формулюється так: Зміна механічної енергії ΔE при русі системи дорівнює роботі сторонніх$A^{стор}$ та дисипативних сил $A^{дис}$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (E_{K2} + E_{\Pi 2}) - (E_{K1} + E_{\Pi 1}) = A^{\text{стор}} + A^{\text{дис}}. \qquad (41)$$

15. ***Закон збереження імпульсу***

Якщо в інерціальній системі відліку розглядається система, що складається з n матеріальних точок, то зміна сумарного імпульсу системи визначається сумою тільки одних зовнішніх сил

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{зов}}. \qquad (42)$$

Якщо система замкнена, то $\vec{F}_{\text{зов}}$=0 (частковим випадком замкненої системи є ізольована система, коли зовнішні сили відсутні), тоді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \vec{p} = const. \qquad (43)$$

Закон збереження імпульсу для замкненої системи тіл:

в інерціальній системі відліку сумарний імпульс замкненої системи тіл не змінюється з часом *(*$\vec{p} = const$*)*. Імпульс системи дорівнює добутку маси m системи на швидкість $\vec{v}_C$ її центра мас $\vec{p} = m\vec{v}_C$. Тоді $\vec{p} = m\vec{v}_C$=$const$, звідки

$$\vec{v}_C = const. \qquad (44)$$

Центр мас замкненої системи тіл в інерціальній системі відліку рухається прямолінійно і рівномірно.

Якщо система незамкнена, але проекція суми всіх зовнішніх сил на якусь вісь, наприклад x, дорівнює нулю то закон збереження імпульсу виконується вздовж цієї осі $\sum_i \ p_{ix} = const$.

16. ***Сили інерції. Рух тіла в неінерціальних системах відліку***

Сили інерції — це сили, які вводяться для опису механічного руху в неінерціальних системах. Сили інерції не виникають при дії на дану матеріальну точку інших тіл або матеріальних полів.

Поступальна сила інерції $\vec{F}_i$ вводиться для опису поступального руху тіла в неінерціальній системі відліку, що рухається поступально

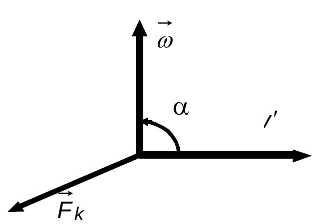
$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{\text{нсв}}, \qquad (45)$$

де m – маса тіла; $\vec{a}_{\text{нсв}}$– прискорення даної неінерціальної системи відліку відносно будь–якої інерціальної системи.

Відцентрова сила інерції $\vec{F}_{\text{вц}}$ виникає в обертальній (відносно інерціальної) системі відліку, діє на тіло незалежно від того, знаходиться воно в стані спокою, чи рухається і визначається формулою:

$$\left|\vec{F}_{\text{вц}}\right| = m\omega^2 R \quad \text{або} \quad \left|\vec{F}_{\text{вц}}\right| = m\omega^2 R_3 \cos\cos\phi\,, \qquad (46)$$

де m – маса тіла; ω – кутова швидкість обертання системи відліку (наприклад, Землі навколо осі); R – відстань тіла від осі обертання ($R = R_з \cos\cos\phi$: $R_з$ — радіус Землі; ϕ – широта місцевості).



Сила Коріоліса $\vec{F}_K$ – це сила інерції, що діє на тіло масою m, яке рухається з певною швидкістю $\vec{v}'$ в системі відліку, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}' \cdot \vec{\omega}]$ (47)

або$F_k = 2m\vec{v}'\omega \sin \sin \alpha$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Характеристики і функції організму залежать від його розмірів. Заєць збільшений до розмірів слона не міг би існувати, як і людина зменшена до розмірів хом'яка. Для розуміння чому спосіб існування організму визначається його розмірами, необхідно розуміти поняття масштабування. **Масштабування** — це вивчення того, як фізичні, хімічні та біологічні властивості змінюються залежно від розміру тіла або організму. Це критично важливо для розуміння обмежень і адаптацій біологічних структур. Для масштабування будь-якого живого організму вводиться характеристична довжина об'єкта - L відповідно до розмірів організму. Для людини значення характеристичної довжини буде висота(приблизно 1.5-2 м). Об'єм організму зростає пропорційно до кубу розміру L^3, тоді як площа поверхні - лише пропорційно квадрату L^2. Сила м'язів прямо пропорційна числу волокон на одиницю площі поперечного перерізу та прямо пропорційна характерному поперечному перерізу, який рівний квадрату характеристичної довжини. Зі зростанням розмірів тіла, площа доступна для теплообміну, дихання чи живлення, не встигає за об'ємом. Тому дрібні тварини (наприклад, миші) швидше втрачають тепло і мають вищу інтенсивність обміну речовин, тоді як великі тварини (як слони) мають низький метаболізм і потребують адаптацій для охолодження.

Механічна міцність структур організму(наприклад, кісток, сухожиль) пов'язана з поперечним перерізом, який зростає пропорційно L^2. Водночас маса тіла, яку потрібно підтримувати, зростає пропорційно L^3. Це означає, що у великих тварин кістки повинні бути непропорційно товщ тобто. неможливо зробити істоту розміром з 10-метрову людину без кардинальної перебудови її опорно-рухового апарату. Слони мають короткі масивні ноги — компроміс між необхідною підтримкою ваги та мобільністю. Навпаки, миші можуть мати тонкі ніжки — їх вага дуже мала.

Масштабування дозволяє інтерпретувати фізичні обмеження, з якими стикаються живі істоти, й пояснити, чому організми виглядають і функціонують так, як вони є. Воно демонструє взаємозв'язок між геометрією, механікою та фізіологією, і є одним із найяскравіших прикладів застосування фізичних знань у біологічному контексті.

Енергетика бігу людини. Енергія людини, яка біжить витрачається на рух вверх - вниз і відштовхування ногами від поверхні. При цьому йдуть витрати на подолання сили тертя, опору повітря, перетворення енергії в тепло. Додатковою причиною втрати енергії є ноги людини, маса ніг складає близько 50% від загальної маси тіла і процесі бігу постійно прискорюються і зупиняються. Тому, робота для підтримки руху тіла вперед з постійною швидкістю велика.

$$A = Fd = \frac{1}{2}mv^2$$

де F - сила м'язів, d - відстань на якій при кожному кроці виконується робота, m - загальна маса тіла

Відповідно принципам масштабування людського організму:

$$v^2 = \frac{2Fd}{m} = \frac{L^2L}{L^3}$$

Отже, швидкість бігуна не залежить від розмірів тіла і стосується не лише людини, а й всього тваринного світу. Люди вважаються поганими бігунами оскільки їхні рухи зосереджені в м'язах ніг, а їхня маса є надто великою для потрібного прискорення. Ймовірно, що під час еволюції в людей звільнилися верхні кінцівки для виконання інших завдань, що призвело до втрати ефективності бігу.

Енергетика стрибків людини. Якщо людина буде стрибати з позиції навприсядки вертикально вгору то центр мас піднімається на висоту $(d + h)$ де d - висота на яку центр мас опускається в позиції навприсядки, h - висота на яку піднімається центр мас з вихідного положення. Робота яка виконується в стрибку складає:

$$A = Fd = mg(d + h)$$

Згідно принципів масштабування висота стрибків не залежить від їхніх розмірів, наприклад маленькі види кенгуру можуть досягати висот таких як і гігантські кенгуру.

Найкращий людський стрибок з позиції навприсядки в висоту підіймає центр мас на 0.6 м, при цьому м'язи ніг працюють на висоті 0.3 м. Отже сила необхідна для стрибку буде рівна:

$$F = \frac{mg(d+h)}{d} = mg(1+\frac{h}{d}) = 3mg$$

Отже, сила м'язів ніг, необхідна для стрибка вгору складає три ваги людини.

Максимальна висота стрибка людини у висоту з розбігу через перекладину складає 2.4 м, а для досягнення цієї висоти людина має підняти свій центр мас на відстань приблизно 1.5 метра, при цьому центр мас має зазвичай знаходиться на висоті 1 м. Відповідно висота на яку має людина підняти свій центр мас складає

$$h = 2.5\text{ м} - 1\text{ м} = 1.5\text{ м}$$

Стрибок людини з місця піднімає центр мас на висоту 0.6 м, іншу частину висоти має підняти за рахунок бігу, коли кінетична енергія бігу перетвориться в енергію стрибка. Швидкість рух перед стрибком в спортсменів складає приблизно $v = 7\text{ м/с}$ Тоді, як кінетична енергія людини масою 80 кг складає:

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}80 \cdot 7^2 = 1960\text{ Дж}$$

Енергія, що необхідна для подолання залишкової висоти $\Delta h = 0.9$ м стрибка складає:

$$E = mgh = 80 \cdot 9.8 \cdot 0.9 = 705.6\text{ Дж}$$

Таким чином, спортсмену по стрибках у висоту через перекладину необхідно перевести в енергію стрибка менше половини затраченої енергії. Якщо людський організм дозволяв би зробити це перетворення з більшою ефективністю, то можна було б досягати більшої висоти стрибка.

Використовуючи лише м'язи ніг спортсмен не в змозі перетворити значну частину енергії бігу на енергію стрибка. Однак, використовуючи для стрибків жердину, він може виконати стрибок з більшою ефективністю майже подвоюючи висоту стрибка. При цьому кінетична енергія бігу перетворюється на пружну потенціальну енергію жердини. Коли жердина розгинається, за рахунок цієї енергії вона виконує роботу, піднімаючи стрибуна над планкою. Вважаємо, що на підйом спортсмена пішла вся кінетична енергія розбігу перейшла в потенціальну енергію жердини.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad => \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

Висота поперечини H, яку він зможе подолати, буде дорівнювати H плюс висота його центру мас(1 м) плюс висота стрибка з місця(0.6 м). Середньостатистична швидкість спортсмена складає 9 м/с

$$H = h + 1 + 0.6 = \frac{9^2}{2 \cdot 9.8} = 5.7\text{ м}$$

Сучасний світовий рекорд для стрибків із жердиною дорівнює 6.15 м. Отже, швидкість бігу спортсмена в цьому випадку складає $v = 9.43\text{ м/с}$. Отже, гнучка жердина дозволяє зі значно більшою ефективністю використовувати кінетичну енергію розбігу. Також необхідно враховувати поправку на зусилля спортсмена прикладених до жердини, що в свою чергу збільшує висоту стрибка при менших швидкості розбігу.

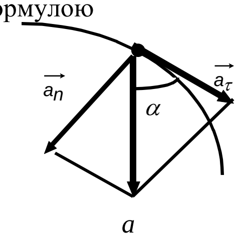
Розв’язування задач

Задача 1

Поїзд проходить поворот з радіусом закруглення R =400м, його тангенціальне прискорення a_τ=0,2м/с^2. Визначити нормальне і повне прискорення в момент, коли швидкість v =10 м/с.

Розв’язання

Нормальне прискорення визначається формулою



$a_n = \frac{v^2}{R}$ = 0,25 м/с^2.

Повне прискорення дорівнює

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0{,}32$ м/с.

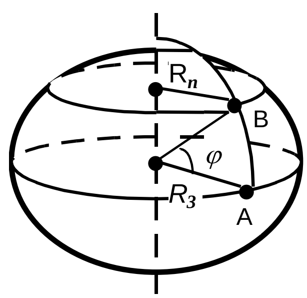
Напрямок вектора а характеризується кутом α між a і a_τ

$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$ =1,25; α = 51°20′.

Задача 2

Знайти кутову швидкість обертання Землі навколо своєї осі та лінійні швидкості точок на екваторі й на географічній широті ϕ = 56°.

Розв’язання



Кутова швидкість визначається формулою

$\omega = \frac{2\pi}{T}$,

де T =24 год – період обертання Землі навколо осі. Тому ω ≈7,3·10^{-5} с$^{-1}$.

Лінійні швидкості точок A і B на екваторі і на географічній широті ϕ відповідно визначаються так:

$v_A = \omega R_з; \quad v_B = \omega R_з \cos \cos \phi$,

де $R_з$ = 6370 км.

Тому: v_A≈ 460 м/с; v_B≈ 277 м/с.

Задача 3

Визначити лінійну швидкість v руху Землі навколо Сонця. Маса Сонця і відстань від Землі до Сонця відповідно дорівнюють: M = 2·10^30^кг, R =1,5·10^8^км.

Розв'язання

На орбіті Землю утримує доцентрова сила $F_{Дц}$, яка відповідає силі тяжіння F.

Тому :

$F_{Дц} = F$ або $\frac{mv^2}{R} = \frac{\gamma m M}{R^2}$, (1)

де m– маса Землі; G =6,67·10^{-11}Н·м^2·кг$^{-2}$ – гравітаційна стала.

З рівняння (1) знаходимо:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}}{1{,}5\cdot10^{11}}} = 29{,}8\cdot10^3 \text{м/с} \approx 30 \text{ км/с}.$$

Задача 4

Знайти мінімальну швидкість, яку треба надати тілу, щоб воно змогло залишити Землю, подолавши поле тяжіння Землі (так звану другу космічну швидкість).

Розв'язання

Сумарна енергія E тіла, якому надана швидкість v, біля поверхні Землі складається з кінетичної енергії

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

і потенціальної енергії

$U = -\gamma \frac{mM}{R}$ (m і M– маси тіла і Землі, R– радіус Землі):

$E = E_k + U = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R}$. (1)

Якщо тіло значно віддалиться від Землі (теоретично на нескінченність), його потенціальна енергія дорівнюватиме нулю. Що ж до кінетичної енергії, то досить, щоб вона мала мінімально можливе значення. Тобто також дорівнювала нулю.

Таким чином, повна енергія тіла на нескінченності перетвориться на нуль

$E = 0$. (2)

З рівняння (1) і (2) знаходимо

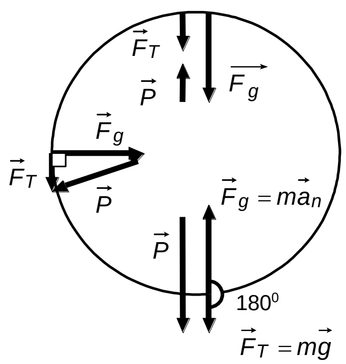
$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR}; \qquad v = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Задача 5

Літак робить «мертву петлю» радіуса R =500м з постійною швидкістю v =100 м/с. Знайти вагу пілота масою m =70 кг в нижній, верхній і середній точках петлі.

Розв’язання

Оскільки літак рухається по колу радіусом R з постійною швидкістю v, то на пілота діє доцентрова сила $F_g = ma_n = \frac{mv^2}{R}$ (результуюча сили тяжіння $F \rightarrow_T = mg \rightarrow$ та реакції опори $\vec{N}$), отже вага пілота $\vec{P} = -\vec{N}$ може бути знайдена з другого закону Ньютона



$$m\vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{g} - \vec{P}$$

Звідки $\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}_n = m(\vec{g} - \vec{a}_n)$.Згідно з цією формулою модуль ваги:

$$\left|\vec{P}\right| = P = m\sqrt{g^2 + a_n^2 - 2ga_n\, cos\, cos\, \alpha},$$

де α– кут між векторами $\vec{g}$ і $\vec{a}_n$.

Коли пілот знаходиться в нижній точці петлі, тоα =180° (див. рисунок) і

$P = m\sqrt{g^2 + a_n^2 + 2ga_n} = m(g + a_n) = 70\left(9{,}8 + \frac{100^2}{500}\right)$кг·м/с^2≈ 2,1 кН.

Коли пілот знаходиться у верхній точці петлі, то α =0° і

$P = m\sqrt{g^2 + a_n^2 - 2ga_n} = |m(g - a_n)|$=$\left|70(9{,}8 - 20)\right|$ Н ≈ 0,7 кН.

Вагу пілота в середній точці петлі (α =90°, $cos\, cos\, \alpha$ =0) знайдемо з формули

$P = m\sqrt{g^2 + a_n^2} = 70 \cdot \sqrt{9{,}8^2 + 20^2} H$ ≈1,5 кН.

Задача 6

До сухожилля довжиною L =0,12 м і діаметром d =1,6·10^{-3}м підвісили вантаж F =68,6Н. При цьому подовження сухожилля становило ΔL =3·10^{-3} м. Визначити модуль пружності E сухожилля.

Розв’язання

Відомо, що сухожилля підлягає деформації одностороннього розтягу, тому

$E = \frac{F \cdot l}{S \cdot \Delta l}$, (1)

де S– площа перерізу; ΔL– подовження сухожилля.

Підставляючи значення

$S = \frac{\pi d^2}{4}$ = (3,14·1,6^2·10^{-6})/4 = 2·10^{-6} м^2,

а також L =0,12 м і ΔL = 0,003 м в рівняння (1), одержимо:

$E = \frac{68{,}6 \cdot 0{,}12}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 1{,}4 \cdot 10^9$ Па.

Задача 7

Мідна кулька діаметром d =4·10^{-5}м падає в широкій посудині, яка заповнена гліцерином. Знайти швидкість V рівномірного руху кульки, який встановиться. Коефіцієнт в'язкості гліцерину η =0,001кг/м·с, густина гліцерину ρ =1,26·10^{3}кг/м^3, густина міді ρ_1=8,9·10^{3}кг/м^3.

Розв'язання

Під час руху на кульку діють три сили:

сила тяжіння $P = \rho_1 V g$ (V– об'єм кульки);
сила тертя $F_T = 6\pi\eta r v$ (r – радіус кульки);
виштовхувальна сила $F_\text{в} = \rho V g$.

При рівномірному русі, який встановиться, сумарна сила, що діє на кульку, дорівнює нулю.

Тому $P - F_T - F_\text{В} = 0$, або $\rho_1 V g - \rho V g - 6\pi\eta r v = 0$.

Тут $r = \frac{d}{2}$, v – шукана швидкість кульки, $V = \frac{\pi d^3}{6}$ – об'єм кульки.

З останньої рівності знаходимо v

$v = \frac{V_g(\rho_1 - \rho)}{6\pi\eta r} = \frac{d^2 g(\rho_1 - \rho)}{18\eta} = 5{,}3 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Задача 8

Між двома тілами з масами m_1 і m_2 відбувається абсолютно непружний удар. Швидкість тіл до зіткнення v_1 і v_2, спрямовані вздовж однієї прямої. Визначити зміну кінетичної енергії при ударі.

Розв'язання

Кінетична енергія тіл до зіткнення

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Після непружного удару обидва тіла рухаються як єдине ціле зі спільною швидкістю U, яка дорівнює

$U = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. (1)

Зміна кінетичної енергії при ударі

$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} U^2 - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right)$. (2)

Підставляючи (1) в (2), знайдемо

$$\Delta E_k = -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Таким чином, при непружному ударі має місце зменшення кінетичної енергії тіл.

Задача 9

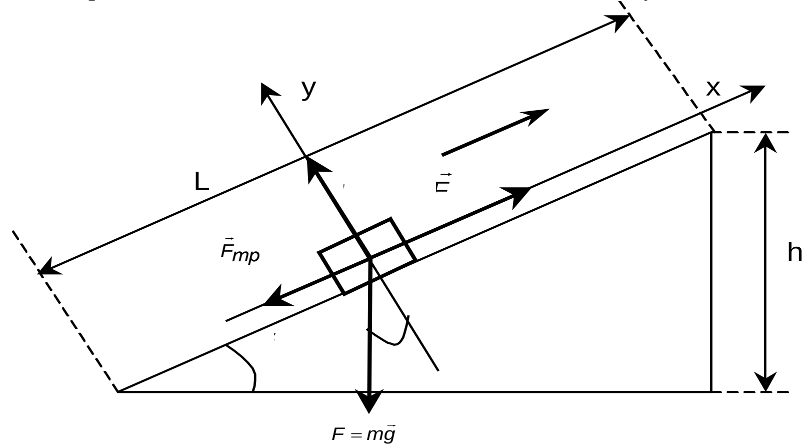
Визначити роботу підіймального пристрою при підніманні зі стану спокою тіла масою m з прискоренням а по похилій площині довжиною L, що нахилена до горизонту під кутом α, якщо коефіцієнт тертя μ. Пояснити в які види енергії переходить виконана робота.

Розв'язання

На тіло (брусок), що рухається по похилій площині, діють:

$F_T \rightarrow = mg \rightarrow$ – сила тяжіння;
$N \rightarrow$ – сила нормальної реакції опори;
$F \rightarrow_\text{тр}$– сила тертя ковзання;
$F \rightarrow$– сила тяги підіймального пристою .

Роботу підіймального пристою $A = F \cdot L$ визначимо, якщо знайдемо силу тяги $F \rightarrow$.



Запишемо другий закон Ньютона у векторній формі

$ma \rightarrow= mg \rightarrow +N \rightarrow +F \rightarrow_{\text{тр}}+ F \rightarrow$ (1)

Спроектувавши векторне рівняння (1) на осі Хта Yотримаємо

$ma = -mg\ sin\ sin\ \alpha\ - F_{\text{тр}} + F$ (2)

$0 = -mg\ cos\ cos\ \alpha\ + N$ (3)

З скалярного рівняння (3) бачимо, що $mg\ cos\ cos\ \alpha\ = N,$ а отже

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\ cos\ cos\ \alpha$$

Тепер, з рівняння (2) знаходимо силу тяги

$$F = ma + mg\ sin\ sin\ \alpha\ + \mu mg\ cos\ cos\ \alpha\ .$$

Робота $A = F \cdot L = maL + mgL\ sin\ sin\ \alpha\ + L\mu mg\ cos\ cos\ \alpha$ може бути записана у вигляді

$A = \frac{mv^2}{2} + mgh + LF_{\text{тр}} = \text{Е}_{\text{к}} + \text{Е}_{\text{п}} + \text{А}_{\text{тр}},$ (4)

(тут ми скористалися формулою для шляху рівноприскореного руху $L = \frac{v^2}{2a}$). Бачимо, що робота підіймального пристою A пішла на надання тілу кінетичної енергії $E_k = \frac{mv^2}{2}$, на збільшення потенціальної енергії тіла $E_{\text{п}} = mgh$ та виконання роботи проти сил тертя $A_{\text{тр}} = LF_{\text{тр}}$.

Інший (енергетичний) спосіб розв'язку: рух тіла під дією сторонньої сили тяги $F \rightarrow$ відбувається в полі консервативних сил тяжіння $F \rightarrow_{\text{т}}= mg \rightarrow$.

На тіло діє дисипативна сила тертя ковзання $F \rightarrow_{\text{тр}}$, яка виконує від'ємну роботу під час руху $A^{\text{дис}} = -LF_{\text{тр}}$. На тіло діє також сила нормальної реакції опори $N \rightarrow$, яка не виконує роботи під час руху, бо $N \rightarrow$ перпендикулярна до напрямку руху. Скористаємось законом збереження енергії в механіці, записаним у вигляді

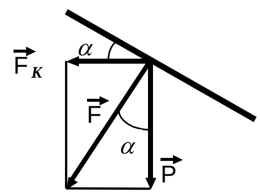
$$A^{\text{стор}} + \text{А}^{\text{дис}} = \varDelta E = (E_{k2} + E_{\text{п}2}) - (E_{k1} + E_{\text{п}1}) = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

У нас $\text{А}^{\text{стор}}$ – це робота підіймальної машини А, $A^{\text{дис}} = -LF_{\text{тр}}$. Отже, маємо$A = \frac{mv^2}{2} + mgh + LF_{\text{тр}}$. Бачимо, що для роботи підіймальної машини, ми зразу отримали рівняння (4).

Задача 10

Добове обертання Землі зумовлює відхилення поверхні води в річках від горизонтального положення. Обчислити нахил поверхні води в річці до горизонтальної поверхні, якщо річка тече на широті ϕ з півночі на південь. Швидкість течії v.

Розв'язання



Розглянемо довільний елемент поверхні води. На нього діє:

1) сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$;

2) сила інерції Коріоліса, яка чисельно дорівнює $F_k = 2mv\omega \sin \sin \phi$.

Ці дві сили взаємно перпендикулярні, а їх рівнодіюча $\vec{F}$ буде перпендикулярна до поверхні рівня води, який встановиться в річці. Охарактеризуймо його кутом α з горизонтом і остаточно запишемо

$$tg\alpha = \frac{F_K}{P} = \frac{2mv\omega \cdot \sin \sin \phi}{mg} = \frac{2v\omega \cdot \sin \sin \phi}{g}.$$

Задачі

1. Космічний корабель масоюm_1=10^{6}кг починає рухатися вертикально вгору. Сила тяги двигунівF_T=3·10^{7}Н.
Визначити прискорення a корабля і вагу космонавта P, що знаходиться там. Відомо, що на Землі на космонавта діє сила тяжіння $F_{тяж}$ = 5,9·10^2 Н.
(*a = 20,2 м/с^2, P ≈ 1,80·10^3 Н*)
2. Визначити силу натягу канату при рівноприскореному опусканні кабіни в шахту, якщо протягом t =30с від початку руху вона проходить шлях l =100м. Маса кабіни 300 кг.
($T = m(g - a)$ =2,8 10^3 Н)
3. Ліфт масою M =10^3 кг піднімається з постійним прискоренням a =0,2 м/с^2. У ліфті знаходяться п᾽ять чоловік масою m =60кг кожний. Знайти силу натягу каната ліфта і вагу кожної людини.
($T = (M + 5m)(g + a)$ =13·10^{3}Н, $P = m(g + a)$ =600Н)
4. Автомобіль масою M =1,5 т рухається горизонтально зі швидкістю v =20 м/с. Після виключення двигуна він проходить до зупинки L =50м. Знайти силу тертя і коефіцієнт тертя.
($F_T = MV^2/2L$=6·10^{3}Н, μ ≈0.42)
5. На екваторі деякої планети тіло має вагу вдвічі меншу, ніж на полюсі. Густина речовини цієї планети ρ =3·10^{3}кг/м^3 . Визначити період обертання T планети навколо своєї осі.
(T *= 9,7·10^3 с*)
6. Яка робота виконується під час рівномірного переміщення ящика масою 100 кг по горизонтальній поверхні на відстань 49,6 м, якщо коефіцієнт тертя 0,33, а мотузок, за допомогою якого тягнуть ящик, утворює з горизонтом кут 30^0?
($A = \mu mg\, cos\, cos\, \alpha\, l/(cos\, cos\, \alpha\ + \mu\, sin\, sin\, \alpha\ )$ =13,5·10^{3}Дж)
7. Куля масою 10 г, що летить із швидкістю 800 м/с, потрапляє в дерево і заглиблюється на 10 см. Визначити силу опору дерева і час руху кулі в дереві.
($F = mV^2/2l$=32·10^{3}Н, $t = 2l/V$ =2,5·10^{-4}с)
8. Визначити, яку роботу виконає людина, яка підіймає тіло масою m =4кг на висоту h =1м з прискоренням a =1,2м/с^2. Визначити кінетичну і потенціальну енергію тіла на висоті 1м.
($A = m(g + a)h$ =44 Дж, $E_к$=4,8 Дж, $E_п$=39,2 Дж)
9. Визначити кінетичну енергію тіла масою m =1кг, яке кинули горизонтально зі швидкістю v_0=20 м/с в кінці четвертої секунди його руху (g ≈ 10 м/с^2).
($E_к$ *= 10^3 Дж*)
10. Людина стрибає з висоти h = 1 м одного разу на прямі ноги, а іншого – на зігнуті в колінах. Час гальмування при стиканні з опорою відповідно дорівнює 0,1 і 0,5 с. Обчислити кратність перевантаження, яке при цьому виникає, а також тривалість стану невагомості. Вважати, що людина в кожному випадку при падінні проходить однаковий шлях, опір повітря не враховувати.
(*5,5; 2; 0,4 с*)
11. Центрифуга, що використовується для тренування, космонавтів здійснює n =0,5об/с при радіусі траєкторії R =4м. Знайти кутαміж вертикаллю і напрямком скроні космонавта в місці його знаходження. Встановити залежність$\alpha = f(\omega)$. Які перевантаження при цьому виникають?

$$\left(\alpha = arctg\frac{\omega^2 R}{g};\ \frac{\left(g^2 + (\omega^2 R^2)\right)^{1/2}}{g} \approx 4\right)$$

12. Визначте роботу серця людини за 1 хвилину та за добу, якщо відомо, що вона в основному складається з роботи при скороченні лівого шлуночка і визначається формулою A_c≈1,2$A_ш$, де $A_ш$– робота лівого шлуночка. $A_ш = PV_{уд} + mv^2/2$, деP =1,3·10^{4}Па – середній тиск, з яким кров виштовхується в аорту; ρ =1,05·10^3 кг/м^3 – густина крові;v =0,5м/с – швидкість крові в аорті; $V_{уд}$=7·10^{-5}м^3 – ударний об'єм крові; t =0,3с – час скорочення шлуночків.
($A_{хв}$*≈ 110 Дж;* $A_{доб}$*≈ 160 кДж*)
13. Дах будинку нахилено під кутом α = 20° до горизонту. Чи пройде людина вгору по покритому льодом дахові, якщо коефіцієнт тертя μ = 0,3?
($tg\alpha < \mu$)
14. Стоячи на льоду ковзаняр масою m_2=80кг кинув вперед гирю масою m_1=10кг і при цьому сам поїхав назад із швидкістю v_2=1,5м/с. Яку роботу виконав ковзаняр, кидаючи гирю?

($A = m_2 V_2^2 (1 + m_{2/} m_1)/2$=810 Дж)

15. Ковзаняр масоюm_1=70кг, стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямку камінь масоюm_2=3кг із швидкістю v_2=8м/с. Знайти, на яку відстаньSвідкотиться при цьому ковзаняр. Коефіцієнт тертя ковзання μ =0,02.
($S = m_2^2 v_2^2 / 2 m_1^2 \mu g$ =30 см)

16. Маса серця дорослої людини приблизно m =0,3 кг. При скороченні лівого шлуночка в аорту виштовхується V =70 мл крові. Швидкість крові в аорті v =0,5м/с, густина крові ρ =1,05·10^3 кг/$м^3$. Визначити швидкість віддачі серця$v_{\text{від}}$.
($v_{\text{від}}$≈ *0,12 м/с*)

§2. Рух твердого тіла. Основні поняття та закони гідродинаміки

1. Поступальний рух. Рух центра інерції твердого тіла

Рух твердого тіла визначається прикладеними до нього зовнішніми силами. Характерними видами руху твердого тіла є ***поступальний та обертальний рухи***.

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі його точки рухаються по однакових траєкторіях, швидкості всіх точок у будь–який момент часу однакові, а будь–яка пряма, проведена між довільними точками тіла, переміщується паралельно сама собі.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, у якого відстань між двома довільними матеріальними точками не змінюється в процесі руху.

Тверде тіло розглядають як ***систему*** з n ***матеріальних точок***, а маса тіла m дорівнює сумі мас усіх цих точок

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i, \qquad (1)$$

де Δm_i– маса *i*–тої точки.

Поступальний рух твердого тіла повністю характеризується заданням руху будь–якої однієї точки цього тіла, тобто при поступальному русі тіло має три ступеня вільності.

Центром мас тіла (центром інерції) називають точку *C*, координати якої $x_{c,}\ \ y_{c,}\ \ z_c$ визначаються через координати окремих елементів тіла $x_{j,}\ \ y_{j,}\ \ z_j$ співвідношеннями

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{m};\ y_c = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{m};\ z_c = \frac{\sum z_i \Delta m_i}{m}. \qquad (2)$$

Рух центра інерції твердого тіла: центр інерції твердого тіла рухається як матеріальна точка з масою, рівною масі тіла під дією всіх сил, прикладених до тіла

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \qquad (3)$$

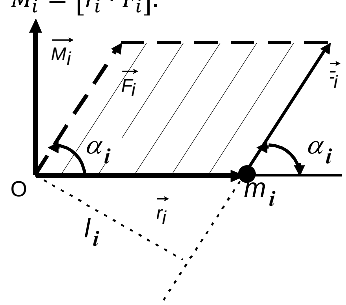
де $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторна сума всіх зовнішніх сил.

2. ***Обертальний рух. Динамічні характеристики тіла, яке обертається***

Обертальний рух – це такий рух, при якому принаймні дві точки тіла весь час залишаються нерухомими. Пряма, яка проходить через ці точки, називається ***віссю обертання***. Усі точки твердого тіла, які лежать на осі обертання, нерухомі. Інші точки твердого тіла рухаються по колах у перпендикулярних до осі обертання площинах. Центри цих кіл лежать на осі обертання. Обертальний рух твердого тіла – це ***плоский рух***.

Момент $\vec{M}_i$ ***сили*** $\vec{F}_i$ ***відносно точки O*** визначається векторним добутком радіус–вектора $\vec{r}_i$, проведеного в точку прикладання сили $\vec{F}_i$ на цю силу

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]. \qquad (4)$$



Числове значення моменту сили $\vec{F}_i$ дорівнює

$$M_i = F_i \cdot r_i \cdot sin\, sin\, \alpha_i\ = F_i l_i, \qquad (5)$$

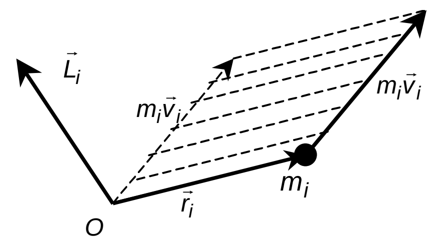
де α_i – кут між векторами $\vec{r}_i$ і $\vec{F}_i$;

$l_i = r_i\ sin\, sin\, \alpha_i$ – довжина перпендикуляра, який опустили з точки *O* на лінію дії сили$\vec{F}_i$.

Величину l_i називають ***плечем сили***.

Якщо лінія дії сили проходить через точку *O*, то $l_i = 0$ і момент сили відносно точки *O* дорівнює нулю.

Момент імпульсу $\vec{L}_i$ ***матеріальної точки*** m_i ***відносно точки O*** визначається векторним добутком радіус–вектора $\vec{r}_i$ матеріальної точки на її імпульс $mv \rightarrow_i$



$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \cdot m_i\vec{v}_i]$. (6)

Вектор $\vec{L}_i$ іноді називають моментом кількості руху матеріальної точки. Він спрямований перпендикулярно до площини, проведеної через вектори $\vec{r}_i$ і $mv \rightarrow_i$.

Моментом** M_{iz} **сили** $\vec{F}_i$ **відносно осі Z називають проекцію на вісь Z моменту сили відносно будь–якої точки O, що лежить на цій осі

$M_{iz} = \vec{M}_{i\ \text{пр.z}} = M_i \cos \cos\left(\vec{M}_i, z^\wedge\right)$,

де $\left(\vec{M}_i, z\right)^\wedge$ – кут між вектором $\vec{M}_i$ і віссю Z.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Сили, що діють на м'язи й кістки, є результатом взаємодії фізичних законів і біологічної будови тіла. Людське тіло можна розглядати як систему важелів, де кістки виконують роль жорстких елементів, суглоби — осей обертання, а м'язи — джерела сили. При кожному русі м'яз скорочується й через сухожилля тягне кістку, створюючи момент сили. Момент сили дорівнює добутку модуля сили на плече — найкоротшу відстань від лінії дії сили до осі обертання. У більшості випадків м'язи прикріплюються до кісток дуже близько до суглобів, тому мають коротке плече сили. Це означає, що для створення достатнього моменту сили м'язам потрібно розвивати зусилля, що в кілька разів перевищує зовнішнє навантаження.

Цей механічний принцип пояснює, чому навіть прості рухи вимагають великих внутрішніх зусиль. Наприклад, щоб утримати вантаж у руці, м'язи плеча повинні створювати силу в кілька разів більшу за вагу вантажу — через коротке плече прикріплення. Через це суглоби й м'язи зазнають значних навантажень навіть при звичних діях. Особливо це помітно в нижніх кінцівках: під час присідання чи стрибка сили, що діють на коліна й тазостегнові суглоби, можуть у 5–10 разів перевищувати вагу тіла.

М'язи працюють не лише для переміщення тіла, а й для підтримання рівноваги. Центр мас тіла зазвичай розміщений приблизно на рівні таза, і щоби зберігати вертикальне положення, м'язи постійно регулюють положення корпусу відносно площини опори. При цьому діють як статичні (утримання пози), так і динамічні (компенсація коливань) навантаження, що потребують енерговитрат навіть під час нерухомого стояння.

Під час активного руху — ходьби, бігу, стрибків — сили значно зростають. Наприклад, під час бігу в момент приземлення сила удару на стопу може втричі перевищити вагу тіла. Усі ці сили мають бути погашені за короткий час і малу відстань — тому м'язи, сухожилля й суглоби працюють як амортизатори. М'язи при цьому часто працюють в ексцентричному режимі — вони скорочуються під навантаженням, що створює велике напруження й ризик пошкоджень.

Кістки мають високу міцність на стиск — наприклад, гомілкова кістка може витримати до 50 000 Ньютон, але сухожилля та зв'язки — значно менше. Саме вони першими страждають при перевищенні допустимих моментів сили в суглобах. Типовою причиною травм є не лише надмірне навантаження, а й невдалий кут дії сили або надто коротке плече.

Під час виконання вправ на згинання руки з гантеллю у лікті виникає цікава ситуація з точки зору механіки. Припустімо, що людина тримає гантель масою m =5 кг у руці, зігнутій під прямим кутом у лікті. Передпліччя при цьому горизонтальне, а плече вертикальне. У такому положенні вся вага гантелі створює момент сили відносно ліктьового суглоба, навантажуючи м'язи, що забезпечують згинання — передусім біцепс. В цьому випадку сила тяжіння, яка діє на гантель обчислюється: $F = mg = 5 \cdot 9.8 = 49$ Н Ця сила прикладена на відстані приблизно $r = 30$ см $= 0{,}3$ м від осі обертання (ліктя), тому створює момент сили: $M_1 = \boldsymbol{F} \cdot r = 49 \cdot 0.3 = 14.7$ Н · м

Біцепс також створює момент сили, але прикріплюється до передпліччя на набагато меншій відстані від ліктя — приблизно $r = 4$ см $= 0{,}04$ м. Щоб утримати руку в рівновазі момент сили біцепса має бути таким самим за модулем: $M_2 = F_2 \cdot r = F_2 \cdot 0.04 = 14.7$ Н · м, звідси сила біцепса $F_2 = \frac{14.7}{0{,}04} = 367{,}5$ Н

Отже, хоча гантель важить лише 5 кг, м’язи змушені розвивати зусилля у **понад 7 разів більше**, ніж вага гантелі. Причина — у короткому важелі, через який діє сила біцепса. Це класичний приклад нерівноплечого важеля, де виграш у точності й контролі руху досягається ціною значного м’язового зусилля. Такий принцип широко реалізований у будові людського тіла: коротке плече м’яза забезпечує компактність і швидкість, але вимагає великої сили навіть для утримання невеликої маси.

Моментом L_{iz} ***імпульсу*** $\vec{p}_i = m\overline{i}\vec{v}_i$ ***відносно осі Z*** називають проекцію на вісь Z моменту імпульсу відносно будь–якої точки O, що лежить на цій осі

$L_{iz} = \vec{L}_{i\ \text{пр.}z} = L_i \cos\cos\left(\vec{L}_i, z^\wedge\right)$,

де $\left(\vec{L}_i, z\right)^\wedge$ – кут між вектором $\vec{L}_i$ і віссю Z.

Бачимо, що величини M_{iz} і L_{iz} не залежать від розташування на осі Z точки O, відносно якої знаходять M_{iz} і відповідно L_{iz}.

Момент імпульсу L_z ***тіла відносно осі обертання*** - це проекція результуючого вектора моменту імпульсу $\vec{L}$ на вісь z, яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на цю вісь усіх складових векторів $\vec{L}_i$

$L_z = \sum_{i=0}^{n} L_{iz}$. (7)

Із визначення векторного добутку вектор $\vec{L}_i$ за модулем дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{r}_i$ та $m_i v \rightarrow_i$ та є перпендикулярним до цих двох векторів. Проекція L_{iz} дорівнює площі S_i – проекції цього паралелограма на площину, перпендикулярну до осі OZ .

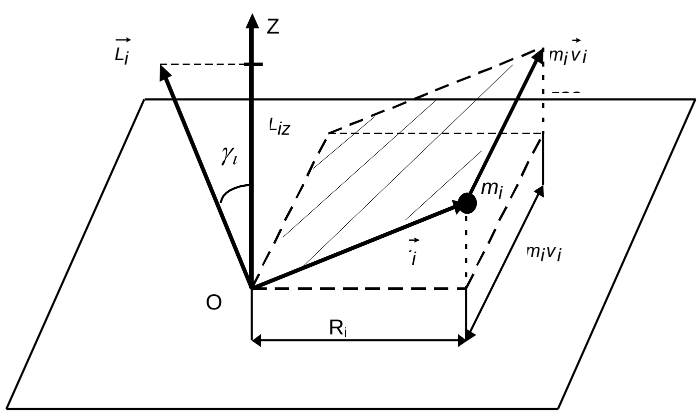
Із рисунка видно, що $L_{iz} = L_i \cos\cos\gamma_i$, (де γ_i– кут між вектором $\vec{L}_i$ і віссю OZ) дорівнює площі прямокутника із сторонами R_i і $m_i v_i$. Таким чином,

$L_{iz} = r_i m v_i \cos\cos\gamma_i\ = R_i m_i v_i = \omega m_i R_i^2$, (8)

бо $r_i \cos\cos\gamma_i\ = R_i$ та $v_i = \omega R_i$.

Момент імпульсу тіла відносно осі обертання OZ

$L_z = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$. (9)



Сума добутків мас усіх матеріальних точок тіла на квадрати їх відстаней до осі називається ***моментом інерції*** I_z ***тіла*** відносно цієї осі

$I_z = \sum m_i R_i^2$. (10)

При визначенні моменту інерції тіла його розбивають на нескінченну кількість малих елементів з масами dm, і момент інерції визначають формулою

$I_z = \int R^2 dm = \rho \int R^2 dV$, (11)

де ρ – густина однорідного тіла; dV– елементарний об’єм.

Момент імпульсу тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї ж осі на кутову швидкість ω обертання навколо осі

$L_z = I_z\omega$. (12)

3. Основний закон динаміки обертального руху тіла

Основний закон динаміки обертального руху тіла, закріпленого в одній нерухомій точці: швидкість зміни моменту імпульсу $\frac{d\vec{L}}{dt}$ тіла, що обертається навколо нерухомої точки, дорівнює результуючому моменту $\vec{M}$ відносно цієї точки всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$. (13)

Формулу (13) одержують так:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \frac{d[\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i]}{dt} = \sum_i \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{p}_i\right] + \sum_i \left[\vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] == \sum_i [\vec{v}_i \cdot \vec{p}_i] + \sum_i [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i] = 0 + \sum \vec{M}_i = \vec{M}.$$

Вираз (13) називають рівнянням моментів відносно точки.

Основний закон обертального руху для тіла, що обертається навколо нерухомої осі

$\frac{dL_z}{dt} = M_z$, (14)

де L_zі M_z – проекції на вісь *OZ* обертання тіла векторів моменту імпульсу тіла і результуючого моменту сил.

Оскільки $L_z = I_z\omega$, то (14) приймає вигляд

$\frac{d}{dt}(I_Z\omega) = M_Z$. (15)

Для абсолютно твердого тіла I_z не залежить від часу t. Тому

$I_Z \frac{d\omega}{dt} = M_Z$або$I_z\beta = M_z$, (16)

де β – кутове прискорення тіла.

Вираз (16) називають рівнянням моментів відносно осі z.

Кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі *OZ*, прямо пропорційне результуючому моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне моменту інерції тіла відносно тієї ж осі

$\beta = \frac{M_Z}{I_Z}$. (17)

Якщо $M_z = 0$, то $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 0$, і кутова швидкість обертання тіла постійна. Це стан ***рівномірного обертання*** навколо ***нерухомої осі***. Основний закон обертального руху для тіла, що обертається навколо нерухомої осі $\frac{dL_Z}{dt} = M_Z$, зберігає таку найпростішу форму і при обертанні тіла навколо рухомої осі, якщо швидкість руху осі $\vec{v}$ паралельна швидкості руху центра мас тіла $\vec{v}_C$, або вісь проходить через центр мас.

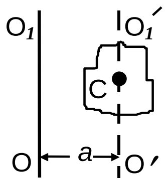
4. ***Закон збереження моменту імпульсу***

Якщо результуючий момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки тіла (нерухомої осі) дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї точки (осі) не змінюється з часом у процесі руху

$\{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \; i \; \vec{L} = const \; \frac{dL_Z}{dt} = 0 \; i \; L_Z = const \; I_Z\omega = const,$ (18)

де ω – кутова швидкість тіла; I_Z– момент інерції відносно осі обертання.

5. ***Теорема Штейнера***



Момент інерції I_Z тіла відносно довільної осі OO_1 дорівнює сумі моменту інерції I_Z' тіла відносно осі $O'O_1'$, проведеної через центр інерції C тіла паралельно OO_1 і добутку маси m тіла на квадрат відстані між цими осями a

$$I_z = I_z{}' + ma^2. \quad (19)$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Розподіл маси в людському тілі є ключовим фактором для розуміння як біомеханіки руху, так і фізичних обмежень, пов’язаних із рівновагою, навантаженням на суглоби та енергетичними витратами. Людське тіло - це не просто набір частин, а складна система з різноманітною щільністю тканин, геометрією та спеціалізацією функцій, де маса розподілена нерівномірно. Такий розподіл має прямий вплив на те, як ми стоїмо, ходимо, біжимо чи підтримуємо рівновагу у нестійких положеннях.

Близько 50% маси людського тіла припадає на нижні кінцівки — стегна, гомілки й стопи. Це забезпечує стабільність, дозволяє утримувати вертикальне положення тіла та створює умови для ефективного пересування. Стегна зокрема є одними з найважчих елементів — разом зі сідничними м’язами вони формують основну частину опорно-рухового комплексу. Такий масовий центр у нижній частині тіла робить людину стійкішою — з фізичної точки зору це знижує положення загального центру мас, що важливо для стабільності при ходьбі чи бігу.

На тулуб припадає ще приблизно 40% маси. Грудина, ребра, хребет і м’язи спини, живота й грудної клітки є масивними не лише через кісткові структури, а й через м’язи, що підтримують положення тіла та внутрішні органи. Жирові відкладення, які накопичуються на животі чи грудях, також змінюють розподіл маси і впливають на баланс та енерговитрати при русі. Усі ці фактори мають значення в спортивній науці, медицині, реабілітації й ергономіці.

Голова складає лише близько 7–8% від загальної маси тіла, але її положення критичне для контролю рівноваги. З точки зору фізики, голова — це «висячий вантаж» на вершині вертикального важеля (шийного відділу хребта), що має постійно балансуватись. Якщо маса голови зміщується (наприклад, при нахилі вперед, як під час роботи за комп’ютером), це створює додатковий момент сили, що сильно навантажує м’язи шиї та плечей.

Маса рук загалом становить близько 10% тіла, але їх вплив на динаміку руху може бути значним. Наприклад, при бігу чи ходьбі розмахування руками використовується для компенсації обертальних моментів, які виникають через рух ніг. Це допомагає зменшити втрати енергії на стабілізацію тіла й утримання вертикального положення.

Центр мас людського тіла в положенні стоячи зазвичай розташовується на рівні тазу, трохи перед другим крижовим хребцем. Його положення змінюється залежно від пози тіла, маси окремих частин та наявності додаткового навантаження (наприклад, при носінні рюкзака). Для збереження рівноваги центр мас має проєктуватись у межах площі опори, яку формують стопи. Саме тому ми автоматично перерозподіляємо вагу, нахиляємо тулуб чи виставляємо руки для компенсації змін положення тіла.

Розподіл маси в людському тілі також впливає на механіку падінь. Наприклад, діти мають відносно більшу голову (до 20% маси тіла), тому вони частіше падають уперед і головою вниз. У дорослих маса тіла зосереджена нижче, тож вони мають кращу стійкість, але можуть зазнавати значних навантажень на коліна й спину при неправильному згинанні чи перенесенні ваги.

6. ***Кінетична енергія тіла***

Якщо тверде тіло рухається поступально з швидкістю v і одночасно обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка проходить через його центр інерції, то кінетична енергія тіла дорівнює

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \quad (20)$$

де I_c – момент інерції тіла відносно осі обертання.

7. ***Порівняння рівнянь руху твердого тіла і матеріальної точки***

Поступальний рух матеріальної точки		Обертальний рух твердого тіла	
Маса	m	Момент інерції	I_z
Швидкість	$v \rightarrow$	Кутова швидкість	ω
Прискорення	$a \rightarrow$	Кутове прискорення	β
Сила	$F \rightarrow$	Момент сили	$M \rightarrow, M_z$
Імпульс	$p \rightarrow = mv \rightarrow$	Момент імпульсу	$\vec{L}$, L_Z
Рівняння руху	$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$	Основний закон динаміки обертального руху	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \beta = \frac{M_Z}{I_Z}$
Закон збереження імпульсу	$p \rightarrow = const$	Закон збере–ження моменту імпульсу	$L \rightarrow = const$ $I_z\omega = const$
Робота	$dA = \vec{F}\ \ d\vec{r}$	Робота	$dA = M_z d\alpha$
Кінетична енергія	$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{p_i^2}{2m_i}$	Кінетична енергія	$W_k = \frac{I_c \omega^2}{2}$

8. ***Рух рідини. Рівняння нерозривності струмини***

Для опису руху рідини використовують такі величини: три компоненти швидкості елемента об'єму $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, тиск $P = P(x, y, z, t)$ і густину $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Змінні цих функцій x, y, z і t характеризують координати і час не окремих молекул рідини, а визначену точку простору, заповнену рідиною.

Тому $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, $P = P(x, y, z, t)$ і $\rho = \rho(x, y, z, t)$ – швидкість, тиск і густина рідини в даній точці простору x, y, z в момент часу t. При фіксованому часі $t = t_0$ функція $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t_0)$ описує ***поле швидкостей***, тобто дає миттєву картину розподілу швидкостей рідини в кожній точці простору.

Рух рідини називають ***стаціонарним***, якщо поле швидкостей не змінюється з часом, і ***нестаціонарним,*** якщо воно з часом змінюється.

Рівняння нерозривності струмини: для стаціонарної течії маса рідини або газу, що проходить за одиницю часу через довільний переріз трубки течії однакова для всіх перерізів

$$\rho v S = const, \tag{21}$$

де ρ і v – густина і швидкість рідини або газу в даному перерізі трубки S.

9. ***Рівняння Бернуллі*** – рівняння гідромеханіки, яке визначає зв'язок між швидкістю v рідини, тиском P в ній та висотою h частинок над площиною відліку для стаціонарної течії ідеальної нестискуваної рідини

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = const, \tag{22}$$

де ρ – густина рідини; g – прискорення вільного падіння.

У рівнянні Бернуллі всі члени мають розмірність тиску:

P – ***статичний тиск,*** $\frac{\rho v^2}{2}$ ***– динамічний,*** $\rho g h$ ***– ваговий***.

Рівняння Бернуллі для двох перерізів течії

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2. \tag{23}$$

Для горизонтальної течії

$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2.$ (24)

10. ***Формула Торрічеллі*** визначає швидкість витікання рідини з невеликого отвору в широкій посудині, який міститься на глибині H від верхнього рівня рідини в посудині

$v = \sqrt{2gH},$ (25)

де g – прискорення вільного падіння.

11. ***Формула Гагена–Пуазейля*** визначає кількість рідини Q, що протікає по горизонтальній трубці постійного перерізу в одиницю часу. Кількість рідини пропорційна різниці тисків P_1 і P_2 на вході та виході з труби, четвертому ступеню її радіуса R і обернено пропорційна довжині L труби і коефіцієнту в'язкості рідини

η

$Q = \frac{(P_1 - P_2)}{L} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}$ або $Q = \frac{P_1 - P_2}{\omega}$, (26)

де $\omega = \frac{8l\eta}{\pi R^4}$ – гідравлічний опір.

12. ***Число Рейнольдса*** (Re) зв'язує середню швидкість руху рідини v, густину рідини ρ, її в'язкість η та діаметр труби D і є критерієм для переходу ламінарної течії в турбулентну

$= \frac{v\rho D}{\eta}.$ (27)

Для прямої труби Re_{kr}= 2300.

Якщо $Re \geq Re_{kr}$, то спостерігається турбулентна течія.

13. ***Сила в'язкості*** — це сила, яка виникає в рідині або газі і протидіє руху тіла, що рухається в цьому середовищі, або руху самих частинок рідини одна відносно одної. Вона пов'язана з внутрішнім тертям у рідині.

$$F_{в'яз} = 6\pi r\eta v$$

де r - радіус сферичного тіла

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Коли тіло падає у вакуумі, поблизу поверхні Землі, воно зазнає рівномірного прискорення, яке дорівнює прискоренню вільного падіння g. Проте в реальному середовищі — у повітрі, воді чи іншій рідині — рух тіла під час падіння відбувається інакше через вплив опору середовища, зумовленого його в'язкістю. Під час падіння на тіло діють декілька сил: сила тяжіння mg, спрямована вниз, сила в'язкості (опору) — спрямована вгору, а також, у разі падіння в рідині, додаткова виштовхувальна сила Архімеда, також спрямована вгору.

$$F_{рез.} = F_{в'яз} + mg$$

Сила в'язкості, яка виникає через тертя між тілом і середовищем, залежить від швидкості руху тіла: чим вища швидкість, тим сильніший опір. У міру падіння тіло розганяється під дією гравітації, але опір середовища зростає. Зрештою, настає момент, коли сила в'язкості (а також виштовхувальна сила, якщо вона є) зрівноважує силу тяжіння. У цей момент результуюча сила дорівнює нулю , і тіло перестає прискорюватися, далі падаючи з постійною швидкістю. Ця швидкість називається ***граничною*** або ***сталою швидкістю падіння***. Отже:

$$F_{в'яз} = mg \quad => \quad 6\pi r\eta v = mg$$

$v = \frac{mg}{6\pi r\eta}$ (у випадку ламінарної течії коли $Re < 10$)

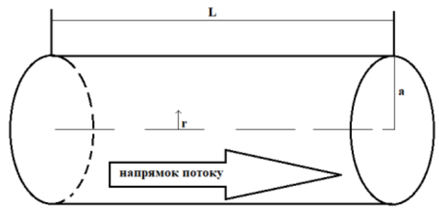
Гранична швидкість залежить від кількох параметрів: маси тіла, його форми, площі поперечного перерізу, густини середовища та його в'язкості. Наприклад, для людини в положенні «парашутиста» (з розставленими руками й ногами) гранична швидкість падіння у повітрі становить близько 65 м/с. Якщо ж тіло має більш обтічну або кулясту форму, швидкість може сягати 105 м/с. Для маленьких об'єктів гранична швидкість значно менша — лише кілька метрів на секунду. Це зумовлено високим відношенням площі поверхні до маси: чим менша маса при великій площі, тим сильніше уповільнює тіло опір середовища.

Цей фізичний принцип особливо добре видно в біологічному світі. Якщо людина впаде з третього поверху, вона, ймовірно, зазнає серйозних ушкоджень або загине. Натомість невелика тварина — наприклад, миша — може пережити таке падіння без значних наслідків. Комаха — як-от блоха чи муха — взагалі може впасти й одразу злетіти, ніби нічого не сталося. Це явище пояснюється законами масштабування: у менших істот площа поверхні значно більша відносно їхнього об'єму й маси. Оскільки опір повітря зростає з площею, а сила тяжіння — з масою, у малих організмів сила опору виявляється значно ефективнішою в стримуванні швидкості падіння. Вони досягають своєї граничної швидкості дуже швидко, і вона є настільки малою, що падіння з висоти не завдає їм шкоди.

14. ***Швидкість руху крові в судинах.*** Кров являє собою в'язку рідину, яка рухається по складній системі артерій і вен Оскільки течія крові по тілу достатньо маленька, то течію крові в судинах можна розглядати, як ламінарний рух рідини через тонкі трубки. Внаслідок дії сил тертя між молекулами крові і стінками судин поблизу них течія відсутня. Кров тече швидше в центрі артерії, біля стінок її швидкість рівна нулю.

$$v = \frac{1}{4\eta L}(P_1 - P_2)(a^2 - r^2) \qquad (28)$$

де r – відстань від центра трубки(судини), a – внутрішній радіус трубки, L – довжина трубки



15. ***Поверхневий натяг*** **–** робота, що витрачається на збільшення поверхні рідини

$$\alpha = \frac{A}{S} \qquad (29)$$

де α – коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

В кров'яних судинах відбувається зміна швидкості руху в залежності від відстані до стінок та згідно закону Бернуллі має місце зміна тисків. Біля стінок буде формуватися зона високого тиску та низької швидкості руху, в центрі судини тиск мінімальний, а швидкість руху максимальна. Клітина крові, яка рухається по судині, буде відчувати радіальну різницю тисків, яка виштовхує клітину до центру судини. Кількість крові Q, що протікає через поперечний переріз судинної системи людини у одиницю часу у першому наближенні, визначається формулою Гагена–Пуазейля. Кількість крові Q сильно залежить від внутрішнього радіусу a, при зменшені радіусу артеріальних стінок в 2 рази кількість крові, що протікає через поперечний переріз судини зменшиться в 16 разів, що збільшує навантаження на людське серце та погіршує загальний стан організму.

Течія крові в судинній системі людини в нормальних умовах має ламінарний характер. При різкому звуженні просвіту судини спостерігається турбулентна течія крові. Це відбувається, наприклад, при неповному відкритті або, навпаки, при неповному закритті аортних або серцевих клапанів. Це явище називають ***серцевими шумами***.

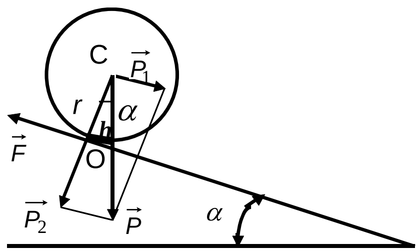
Рівняння (26) і (28) показують, що швидкість руху і кількість крові залежать від різниці тисків на кінцях ділянки наприклад артерії. Якщо крові змусити рухатися по артеріях турбулентно то можна визначити тиск крові по характерному звуку акустичними методами. Для визначення артеріального тиску вимірюють два значення тиску: максимальне (систолічний тиск) коли кров виштовхується сердечним м'язом з лівого атріовентрикулярного клапана в аорту; мінімальне (діастолічний тиск) коли тиск між скороченням серця падає нижнього значення. Сучасні методи визначення артеріального тиску використовують штучне стиснення артерії для зупинки потоку крові та після зниження тиску створення турбулентного потоку. До того моменту, як по артерії зможе знову пройти певна кількість крові звукових ефектів спостерігатися не буде. Після початку фіксації звуку турбулентної течії тиск крові вважається систолічним. Тиск при якому пропадає звук турбулентного потоку вважається діастолічним.

Коефіцієнт поверхневого натягу – це основна величина, що характеризує властивості поверхні рідини. При збільшенні поверхні рідини будуть виконуватися негативні(зовнішні) роботи. На межі розділу двох двох середовищ(повітря-вода) молекули рідини притягуються до сусідніх сильніше аніж до молекул газу при цьому створюється ефект стягування поверхні й мінімізація площі поверхні. Візуальним прикладом поверхневого натягу є невеликі комахи, що можуть бігати по поверхні рідини, не занурюючись, при цьому продавлюють поверхню рідини. Сили поверхневого натягу будуть діяти вгору по площі контакту лапок водомірки з водою, якщо вага комахи менша за максимальну силу натягу то вона не тоне. У випадку використання поверхнево-активних речовин (ПАР) може виникнути ефект Маренгоні – явище при якому буде виникати потік рідин через градієнт поверхневого натягу де рідина буде перетікати з області низького до високого поверхневого натягу. Якщо на поверхню потрапляє ПАР, поверхневий натяг зменшується, працює ефект Маренгоні і водомірка може втратити здатність пересуватися. За цим принципом буде виникати рух схожий на реактивний, якщо у вушко голки помістити мило і покласти її на поверхню рідини, щоб сили поверхневого натягу не дали їй потонути. В результати біля вушка голки буде зменшуватися сили поверхневого натягу, а голка почне рух в бік від області зі зниженим натягом.

Розв'язання задач

Задача 1

Уздовж похилої площини, яка утворює кут α з горизонтом, скочується без ковзання суцільний однорідний диск. Знайти лінійне прискорення його центра.



Розв'язання

Рух диска можна розглядати як обертання навколо миттєвої осі z, що проходить перпендикулярно до площини рисунка через точку дотику O диска і похилої площини.На диск діють три сили: сила тяжіння $\vec{P}$, сила реакції опори $\vec{N}$ (яка проходить через точку O та на рисунку не зображена) і сила тертя $\vec{F}_T$.

Плече сили тяжіння $\vec{P}$, як видно з рисунка, $h = r\, sin\, sin\, \alpha$ (r – радіус диска). Момент сил $\vec{N}$ і $\vec{F}_T$ дорівнюють нулю. Отже, рівняння моментів відносно осі z має вигляд

$\alpha\ = I_1\beta,$ (1)

де I_1 момент інерції відносно осі z, що проходить через точку O.

Згідно з теоремою Штейнера

$I_1 = I + mr^2,$

де m – маса диска, а I – момент інерції відносно осі, яка проходить через центр інерції диска перпендикулярно до його площини: $I = \frac{mr^2}{2}$.

Тому

$I_1 = \frac{3}{2}mr^2.$ (2)

Шукане прискорення центру мас (точки *C)* можна подати у вигляді

$a = \beta r,$ (3)

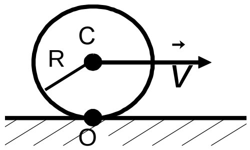
якщо розглядати рух центра інерції C як обертання навколо осі, що проходить через точку O.

З рівнянь (1) і (3), враховуючи (2) і те, що $P = mg$ знаходимо

$a = \frac{2}{3}g \cdot sin\, sin\, \alpha\,.$ (4)

Задача 2

Визначити кінетичну енергію тонкого обруча масою M, що котиться без ковзання горизонтальною поверхнею з швидкістю v.



Розв'язання

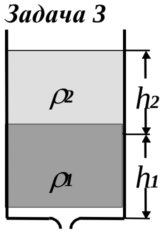
Розглядаємо рух обруча як обертання навколо миттєвої осі, яка проходить перпендикулярно до його площини через точку дотику O обруча й поверхні. Кінетична енергія обруча дорівнює $W_k = \frac{I_0 \omega^2}{2}$. Момент інерції відносно осі O I_0 можна виразити через момент інерції відносно осі C I_c, який згідно з теоремою Штейнера дорівнює

$I_0 = I_c + MR^2$ (R – радіус обруча).

Отже, $I_0 = 2MR^2,\ v = \omega R, = \frac{v}{R}$.

Підставляючи I_0 та ω у формулу для енергії W_k, одержимо
$W_k = Mv^2$.

Задача 3



У дні посудини, заповненої двома різними рідинами, висоти яких дорівнюють h_1 і h_2, а густини відповідно ρ_1і ρ_2, є невеликий отвір. Знайти початкову швидкість витікання рідини з посудини, вважаючи обидві рідини ідеальними і нестискувальними.

Розв'язання

Розглянемо верхній шар і запишемо рівняння Бернуллі стосовно двох перерізів у верхній і нижній частинах шару. Тиск у верхній частині збігається з атмосферним тиском P_0; тиск у нижній частині позначимо P_1. Оскільки отвір невеликий, швидкістю переміщення рідин можна знехтувати, тому

$P_0 + \rho_2 g h_2 = P_1$ (1)

(для нижнього рівня висота $h = 0$).

Тепер розглянемо нижній шар. Тиск у його верхній частині буде P_1, а в нижній частині біля отвору P_0.

У верхній частині знову вважаємо, що швидкість рідини дорівнює нулю. Отже,

$P_1 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \frac{\rho_1 v^2}{2}$ (2)

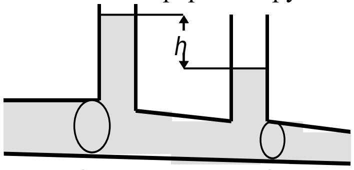
(рівень h у нижній частині дорівнює нулю).

Рівняння (1) і (2) утворюють систему двох рівнянь з двома невідомими P_1 і v. Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукану швидкість витікання:

$v = \sqrt{\frac{2g}{\rho_1}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}$.

Задача 4

Виразити витрачання Q рідини густиною ρ, що протікає вздовж горизонтальної труби змінного перерізу, через різницю рівнів рідини h у двох манометричних трубках скляного вимірника витрачання рідини. Величини перерізів труби біля підніжжя першої та другої трубок відповідно дорівнюють S_1іS_2.



Розв’язання

Прирівняємо величини Q для перерізів S_1іS_2, згідно з формулою $Q = \rho v S$

$Q = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$ (1)

Застосуємо також рівняння Бернуллі

$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$ (2)

(ми врахували, що рівень рідини в обох перерізах однаковий, бо труба горизонтальна). З рівнянь (1) і (2) можна визначити v_1і v_2

$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$;$v_2 = S_1\sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$.

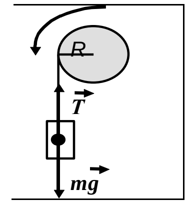
Різницю тисків $P_1 - P_2$можна виразити як вагу стовпа рідини висотою h і перерізом, що дорівнює одиниці

$P_1 - P_2 = \rho g h$.

Остаточно запишемо

$Q = \rho S_1 S_2\sqrt{\frac{2gh}{(S_1^2-S_2^2)}}$.

Задачі



1. Колесо, що обертається рівномірно сповільнено, за 1 хвилину зменшило частоту обертання з ν_0=300 об/хв до ν =180 об/хв. Момент інерції колеса I =2 кг·м^2. Визначити: 1) кутове прискорення β; 2) гальмівний момент M; 3) роботу гальмування A.
(*β = 0,21 рад/с^2; М = 0,42 Дж; А = 630 Дж*)

2. На суцільний циліндричний вал радіусом R =0,5 м намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж масою m =10 кг. Знайти момент інерції I вала та його масу m_1, якщо вантаж опускається з прискоренням a = 2 м/с^2.
(*I = 9,75 кг·м^2, m_1 = 78 кг*)

3. Приймемо тіло людини за циліндр, радіус якого R =20 м, висота h =1,7 м і маса m =70 кг. Знайти момент інерції людини відносно вертикальної осі в двох положеннях відносно Землі: у вертикальному $I_\perp$ та горизонтальному I_{II}. Вважати, що вертикальна вісь проходить через центр мас циліндра.
(*$I_\perp$ = 1,4 кг·м^2; I_{II} = 16,9 кг·м^2*)

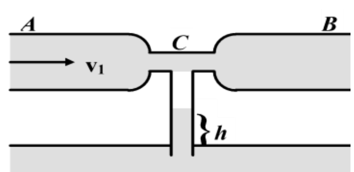
4. Маса руки людини приблизно дорівнює m =4,2 кг, довжина l =0,83 м, а її центр мас розташовано на відстані r =0,34 м від плечового суглоба. Момент інерції руки відносно цього суглоба дорівнює I =0,3 кг·м^2. Рука вільно падає з горизонтального у вертикальне положення. Знайти кінетичну енергію $E_к$ руки і лінійну швидкість v нижньої частини кисті в кінці падіння.
(*$E_к$ = 14,3 Дж; v = 8 м/с*)

5. На легкому столику, який вільно обертається, стоїть людина і тримає на випростаних руках на відстані l_1=1,5 м одна від одної дві однакові гирі масою m =2,5 кг кожна. Потім людина зближує гирі до відстані l_2=0,4 м. При цьому кутова швидкість обертання столика зростає від ω_1= 6с$^{-1}$ до ω_2=12 с$^{-1}$. Вважаючи момент інерції людини відносно осі обертання столика сталим, знайти роботу A, яку вона виконує.
(*A = 94 Дж*)

6. Яку роботу A виконує людина, роблячи за час t =1с одне повне коливання мізинцем з кутом розмаху $\Delta\phi$ =60°? Момент інерції мізинця I =4·10^{-5} кг·м^2. Вважати, що робота витрачається на прискорення і сповільнення мізинця, а його рух – рівнозмінно обертовий.
(*A = 13,5·10^{-4} Дж*)

7. Яку середню потужність $\langle N\rangle$ розвиває людина при ходьбі, якщо тривалість кроку Δt =0,5с? Вважати, що робота витрачається на прискорення і гальмування кінцівок, а кутове переміщення ніг $\Delta\phi$ ≈30°. Момент інерції кожної кінцівки I =1,7 кг·м^2.
(*$\langle N\rangle$ = 14,8 Вт*)

8. На яку висоту h підніметься вода у вертикальній трубці, що впаяна у вузьку частину С (діаметром d =2 см) горизонтальної трубки, якщо у широкій частині трубки А, В (діаметром D =6см) швидкість води v_1= 0,3 м/с при тиску P_1=10^5 Па?
(*h = 0,37 м*)



9. Визначити максимальну дальність польоту S струмини з шприца діаметром d =4·10^{-2}м, на поршень якого тисне сила F =30Н. Густина рідини ρ =10^3 кг/м^3, а $S_{отв}$<<$S_{порш}$.
(*S ≈ 4,9 м*)

10. У посудину рівномірним струменем наливається вода за 1 с 150 см^3. Дно посудини має отвір площею S =0,5 см^2. Який рівень води встановиться в посудині?
(*h = 0,46 м*)

11. Площа поршня у шприці S_1=1,2 см^2, а площа отвору S_2=1 мм^2. Скільки часу буде витікати розчин (ρ =10^{3}кг/м^3) з шприца, якщо сила, що діє на поршень F =5 Н, а хід поршня l =4·10^{-2} м?
(*t ≈ 0,5 с*)

12. З горизонтально розташованого медичного шприца видавлюється фізіологічний розчин силою F =10 Н. Знайти швидкість v витікання рідини з голки шприца. Чому швидкість витікання розчину не залежить від площі перерізу голки? ($\rho_{роз}$=1,03 г/см^3, $d_ш$=1,5 см, $S_ш$>>$S_{гол}$).

(v = *10,5 м/с*)
13. З оприскувача виштовхується струмінь рідини (густина ρ =10^3кг/$м^{3)}$ зі швидкістю v_2=25 м/с. Який тиск P_1 створює компресор у баці оприскувача?
(P_1 = *3,12·10*^{5} *Па*)
14. На столі знаходиться широка циліндрична посудина з водою висотою h =0,5 м. Нехтуючи в'язкістю, знайти на якій висоті H від дна посудини необхідно зробити невеликий отвір, щоб з нього витікав струмінь на максимальну віддаль l_{max}від посудини.
(H = 0,25 м, l_{max}= 0,5 м)
15. Визначити спад ΔP тиску крові в аорті при переході її у велику артерію, якщо відомо, що загальний потік крові Q в тілі людини (у стані спокою) дорівнює $8{\cdot}10^{-5}$ $м^3$/с, радіус аорти r =10^{-2} м, в'язкість крові η = $4{\cdot}10^{-3}$ Па·с.
($\Delta P/\Delta l$ = *80 Па/м*)
16. Використовуючи дані попередньої задачі, визначити середню швидкість $\underline{v}$ потоку крові в аорті, число Рейнольдса Re і характер течії крові.
($\underline{v}$ ≈ *0,25 м/с*, Re = *1300*)
17. Знайти максимальну масу m крові (в'язкість η = $4{\cdot}10^{-3}$ Па·с), яка може пройти через аорту (діаметр d = $2{\cdot}10^{-2}$ м) за 1с у ламінарному режимі.
(m ≈ *0,14 кг*)
18. У високу посудину, що заповнена маслом при 20^0С, кидають свинцеві кульки різних діаметрів. На певній глибині кульки рухаються рівномірно, так як сили, що діють на них, зрівноважуються. Визначити число Рейнольдса для руху кульки діаметром 0,1 мм, якщо вважати рух масла при падінні кульки ламінарним. При якому максимальному діаметрі d кульки рух масла залишається ламінарним? ($\rho_м$= 970 кг/$м^3$).
(Re = *5,4·10*$^{-6}$, d =*4,5 мм*)

§3. Механічні коливання та хвилі

1. ***Гармонічні коливання.*** Коливання, які відбуваються під дією сили, пропорційної зміщенню тіла з положення рівноваги і напрямленої в бік положення рівноваги, називають ***гармонічними***. За своєю природою гармонічні коливання можуть бути механічними, електричними та оптичними. Рівняння гармонічних коливань

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ або $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$ (1)

де m – маса тіла, що виконує коливання; k – коефіцієнт пружності; x– миттєве значення коливної величини (наприклад, зміщення маятника від положення рівноваги або значення напруженості електричного поля тощо);

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – ***колова частота*** (кількість коливань за 2π секунд: $\omega_0 = 2\pi/T$).

Замість колової частоти використовують також лінійну частоту ν_0, зв'язок між ω_0 і ν_0 такий:

$\omega_0 = 2\pi\nu_0,$ (2)

Лінійна частота ν_0– число коливань за одну секунду (в СІ). Розв'язок рівняння гармонічних коливань:

$x = Asin(\omega_0 t + \phi),$ (3)

де A– ***амплітуда*** коливання (найбільше значення коливної величини);

$\omega_0 t + \phi$ – ***фаза коливання;*** ϕ – ***початкова фаза*** (значення фази коливання в момент часу t =0).

2. ***Період коливання*** T – час, протягом якого відбувається одне повне коливання

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$ (4)

Період власних коливань математичного маятника

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$ (5)

де l – довжина підвісу маятника; g – прискорення вільного падіння.

Період власних коливань пружинного маятника

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$ (6)

деm – маса коливного тіла, k – коефіцієнт пружності (жорсткість).

Період власних коливань фізичного маятника

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$ (7)

де I – момент інерції відносно осі коливань; m – маса; a – відстань від центра ваги тіла до осі обертання.

Величину $\frac{I}{ma=L}$ називають ***зведеною довжиною*** фізичного маятника.

3. ***Швидкість v та прискорення a тіла, яке здійснює гармонічне коливання***

$v = A\omega_0 \cos\cos(\omega_0 t + \phi)$ або $a = -A\omega_0^2 sin(\omega_0 t + \phi)$ (8)

де $A\omega$ – амплітуда швидкості; $A\omega^2$– амплітуда прискорення.

Сила, яка спричинює гармонічне коливання

$F = ma = -mA\omega_0^2 \sin\sin(\omega_0 t + \phi)\,,$ (9)

де $mA\omega_0^2$ – ***амплітуда сили***; m – маса коливного тіла.

4. ***Додавання двох коливань, що відбуваються по одній прямій в одному напрямку з однаковими періодами, але з різними амплітудами і початковими фазами***

Рівняння складових коливань мають такий вигляд

$$x_1 = A_1 \sin\sin(\omega_0 t + \phi_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin\sin(\omega_0 t + \phi_2). \qquad (10)$$

Результуюче коливання визначається рівнянням

$$x = x_1 + x_2 = A \sin\sin(\omega_0 t + \phi), \qquad (11)$$

де $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\cos(\phi_2 - \phi_1)}$ – амплітуда

результуючого коливання; ϕ– початкова фаза результуючого коливання $tg\phi = \frac{A_1 sinsin\,\phi_1 + A_2 sinsin\,\phi_2}{A_1 coscos\,\phi_1 + A_2 coscos\,\phi_2}$.

5. ***Додавання двох взаємно перпендикулярних коливань однакового періоду, але різних амплітуд і початкових фаз. Траєкторія результуючого коливання визначається рівнянням***

$$\frac{x_1^2}{A_1^2} + \frac{x_2^2}{A_2^2} - \frac{x_1x_2}{A_1A_2} \cos\cos\left(\phi_2 - \phi_1\right) = (\phi_2 - \phi_1), \qquad (12)$$

6. ***Енергія тіла, яке здійснює гармонічне коливання***

Кінетична енергія: $W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{2\pi^2A^2m}{T^2}\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$. (13)

Потенціальна енергія: $W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{2\pi^2A^2m}{T^2}\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$. (14)

Повна енергія: $W = W_k + W_n = \frac{2\pi^2A^2m}{T^2} = \frac{m\omega^2A^2}{2}$, (15)

де m– маса тіла; A – амплітуда; T – період коливань ($\omega = \frac{2\pi}{T}$), коефіцієнт жорсткості $k = m\omega^2$.

7. ***Затухаючі коливання*** — вільні коливання, енергія яких зменшується за рахунок дії сил тертя, сил опору середовища, випромінювання тощо. Рівняння затухаючих механічних коливань при дії в’язкого опору, пропорційного швидкості

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0, \qquad (16)$$

де $\beta = r/2m$– ***коефіцієнт затухання,*** а $\omega_0^2 = k/m$.

Розв’язок рівняння затухаючих коливань

$$x = A_0e^{-\beta t} \cos\cos(\omega t + \phi), \qquad (17)$$

де A_0– амплітуда коливань у початковий момент часу t =0;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухаючих коливань.

Період коливань $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ в середовищі більший, ніж період коливань $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ точки такої ж маси під дією такої ж пружної сили в середовищі без опору.

8. ***Логарифмічний декремент затухання*** δ **–** безрозмірна характеристика затухаючих коливань, яка дорівнює натуральному логарифму відношення однієї з амплітуд A_t до наступної A_{t+T}через період

$$\delta = ln\ ln\ \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T, \quad (18)$$

де β – коефіцієнт затухання; T – період. Величина, обернена до логарифмічного декремента затухання, показує кількість N коливань, які мають відбутися, щоб амплітуда зменшилася в e разів (приблизно в 2,7 раза).

9*. **Вимушені коливання*** – коливання, які виникають у системі під дією зовнішньої періодичної сили $F(t)$, причому

$$F(t) = F_0 cos\omega t,$$

деF_0– амплітудне значення сили; ω – її циклічна частота.

Рівняння руху вимушених коливань та його розв'язок мають вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos\ cos\ \omega\ t, \quad (19)$$

$$x = A\ cos\ cos\ (\omega t - \phi)\ , \quad (20)$$

$$\text{де}A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, tg\phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (21)$$

10. ***Резонанс*** – явище різкого збільшення амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти зовнішнього періодичного впливу до власної частоти одночастотної системи.

При умові взаємної незалежності основних параметрів зовнішньої гармонічної дії та коливальної системи резонансна частота становить

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{\omega_0^2}}, \quad (22)$$

де ω_0– власна частота системи; β– коефіцієнт затухання.

Амплітуду резонансних коливань $A_{\text{рез}}$ знаходять із виразу:

$$A_{\text{рез}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\beta\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}} \approx \frac{\frac{F_0}{m}}{2\beta\omega_0}.$$

11. ***Хвилі*** — процес поширення коливань у середовищі. Залежно від характеру пружних деформацій у середовищі розрізняють хвилі ***повздовжні*** та ***поперечні***.

У ***повздовжних хвилях*** частинки середовища здійснюють коливання вздовж лінії, яка збігається з напрямком поширення коливань. Повздовжні хвилі можуть бути в газовому, рідинному та твердому середовищах.

У ***поперечних хвилях*** частинки середовища здійснюють коливання перпендикулярно до напрямку поширення коливань. Поперечні хвилі ***поширюються тільки в твердому тілі та на поверхні води.***

Кожен тип хвиль характеризується довжиною, швидкістю, інтенсивністю.

12. ***Довжина хвилі*** – відстань між двома найближчими точками, які коливаються в однаковій фазі. Довжину хвилі можна визначити також як шлях, що його проходить хвиля протягом періоду коливань. Позначаючи довжину хвилі черезλ, можна записати

$$\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu};\ \nu\ = \frac{v}{\lambda}, \quad (23)$$

де v – швидкість поширення хвилі; T – період коливання; ω – циклічна частота коливань, що відповідають хвилі; ν– лінійна частота.

13. ***Рівняння плоскої хвилі***

$$x = A\ sin\ sin\ \omega\ (t - r/v),$$

де r/v – час проходження хвильового процесу від вихідної точки до даної; r – віддаль, пройдена хвилею від вихідної точки до даної; v – швидкість поширення хвильового процесу.

Інша форма рівняння плоскої хвилі

$$x = A\ sin\ sin\ (\ \omega t - kr) \quad (24)$$

де $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Різниця фаз двох точок, що лежать на шляху поширення хвилі

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}, \quad (25)$$

де r_1, r_2 – віддаль точок від джерела коливань.

14. ***Середня густина енергій та інтенсивність хвилі***

Середня густина енергії $\underline{\omega}$ — середня енергія $\bar{W}$, що припадає на одиницю об'єму середовища, зайнятого хвилею:

$$\underline{\omega} = \frac{\bar{W}}{V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2, \quad (26)$$

де ρ– густина середовища.

Цю формулу можно легко отримати із таких міркувань. Нехай кількість частинок в одиниці об`єму середовища, які приймають участь у коливальному русі n, а маса кожної частинки m. У випадку вільних незатухаючих коливань середня енергія такої частинки залишається весь час сталою, рівною повній енергії $\frac{m\omega^2 A^2}{2}$ (див. формулу (15)). Отже:

$$\bar{\omega} = \frac{nm\omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}.$$

15. ***Інтенсивністю хвилі*** *I* називається величина, яка дорівнює середній енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження хвилі

$$I = \underline{\omega}v = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2, \quad (27)$$

де v – швидкість розповсюдження хвилі.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1. Звук – це пружні хвилі в речовинному середовищі, які за своєю частотою та інтенсивністю можуть сприйматися органами слуху.

Звук – подвійне явище: з одного боку, це пружні коливання, які характеризуються певною частотою, інтенсивністю, набором частот, з іншого – психофізіологічне відчуття певної ***висоти***, ***голосності*** та ***тембру*** в нашому сприйманні. Людські органи слуху здатні сприймати звукові хвилі частотою від 18 до 20 000 Гц з інтенсивністю від $2{\cdot}10^{-16}$ до $4{\cdot}10^{4}$ Вт/м^2 (для найбільш чутних частот від 1000 до 3000 Гц). Хвилі в пружному середовищі, частота яких більша 20 кГц, називаються ультразвуком. Людина не сприймає ультразвуку. Однак деякі тварини можуть сприймати ультразвуки. Наприклад, дельфіни сприймають ультразвукові сигнали з частотою до 30 кГц, кажани – до 100 кГц.

При утворені звуків голосові зв'язки в горлі людини коливаються під дією потоку повітря. Голосові зв'язки можна уявити як струни, що коливаються:

$$v = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Де L - довжина голосової зв'язки людини, T – сила натягу зв'язок, μ – маса на одиницю довжини голосових зв'язок.

Для розрахунку реальної частоти коливань голосових зв'язок потрібно враховувати ряд фізичних і біологічних поправок. Реальні голосові зв'язки ведуть себе не як ідеальна нитка з натягом, а як складні багатошарові в'язко-еластичні струни з нерівномірним натягом. Через різну будову зв'язок чоловічі та жіночі голоси мають різні частоти, а тренування голосу можуть змінювати фізичні властивості тканин та змінювати тональність голосу. У дітей голосові зв'язки коротші, що сприяє вищій частоті голосу. Жорсткість голосових зв'язок змінюється зі ступенем розтягування, що впливає на висоту звуку. Реальні голосові зв'язки мають потовщення по краях, що змінює їхню ефективну масу і довжину коливальної системи, через що частота коливань стає нижчою. Легеневий тиск збуджує та підтримує коливання голосових зв'язок, визначаючи їхню стабільність. Голосові зв'язки не ідеально зафіксовані, через що може змінюватися форма та характер стоячих хвиль.

Голосові зв'язки створюють лише початковий "сирий" звук. Далі цей сигнал проходить через резонатори — глотку, ротову і носову порожнини — які підсилюють одні частоти і приглушують інші, формуючи характерний тембр голосу та окремі звуки мови, зокрема голосні.

Висота звуку визначається його частотою: чим більша частота, тим вище звук. Частота залежить Від інтенсивності звукової хвилі залежить властивість людського організму розрізняти звуки різної частоти. Висота голосу буде більш низькою в разі збільшення інтенсивності.

Для оцінки висоти звуку весь діапазон тонів, що сприймається вухом людини, розділили на інтервали — ***октави.***

Октава – це інтервал висот тону, в якому відношення крайніх частот дорівнює двом:

Октава	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границі Частоти Гц	16 – 32	32 – 64	64 – 128	128 – 256	256 – 512	512 – 1024	1024 – 2048	2048 – 4096	4096 – 8192	8192 – 16384

Складні тони при однаковій основній частоті можуть відрізнятися за формою коливань і відповідно за гармонічним спектром. Ця відмінність сприймається вухом як ***тембр*** звуку. Наприклад, однакові за основними частотами голосні звуки мови у різних людей відрізняються за тембром.

Об’єктивна ***голосність*** (сила звуку) визначається кількістю енергії, що переноситься звуковою хвилею за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження хвилі. Ця величина пропорційна квадрату амплітуди хвилі та квадрату її частоти. Це означає, що сила звуку даної частоти пропорційна квадрату амплітуди. Вухо людини не однаково чутливе до звуків різної висоти. Звук буде чутним людиною, якщо сила звуку буде перевищувати певну мінімальну величину — ***поріг чутності***. Звук, інтенсивність якого нижча за поріг чутності, вухом не сприймається. ***Поріг болю*** відповідає максимальному значенню інтенсивності звуку, перевищення якого викликає біль. Вухо людини найбільш чутливе до звуків в інтервалі частот 1–3 кГц. Для них поріг чутності складає близько 10^{-12} Вт/м^2, а поріг болі перевершує поріг чутності приблизно в 10^{14} разів.

2.***Закон Вебера-Фехнера***: рівень голосності даного звуку L (при одній і тій же частоті коливань) прямо пропорційний логарифму відношення його інтенсивності I до значення інтенсивності I_0, яка відповідає порогу чутності

$$L = k\ lg\ lg\ \left(\frac{I}{I_0}\right), \qquad (1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Для $k = 1$: $L = lg\ lg\ \frac{I}{I_0}$ белів (Б) Для $k = 10$: $L = 10\ lg\ lg\ \frac{I}{I_0}$ децибелів (дБ) (2)

Мінімальний рівень голосності, що сприймається вухом людини, приблизно відповідає 1дБ, шепіт – 10 дБ, мова людини – 60 дБ.

3. ***Швидкість звуку***

У пружньому середовищі (швидкість поширення повздовжніх хвиль)***:***

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (3)$$

де E – модуль Юнга; ρ – густина середовища.

У газах: $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$ (4)

де $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, c_p – теплоємність газу при постійному тиску, C_v – теплоємність при постійному об'ємі), R – молярна газова стала, T – абсолютна температура, M – молярна маса.

Хвиля зміщень, зумовлена поширенням звуку, супроводжується хвилею тиску, причому амплітуда хвилі тиску $\Delta\rho$ визначається за формулою

$$\Delta\rho = \rho_0 A\omega v, \qquad (5)$$

де ρ_0 – густина середовища до приходу хвилі; A – амплітуда; ω – частота коливань, що відповідають хвилі; v – швидкість поширення хвилі.

Поширення звуку у вусі людини. У випадку слуху людини, звук проходить через повітря і середовище органів слуху, перетворюючись з механічних коливань на електричні імпульси. Звукова хвиля спочатку потрапляє у вушну раковину і спрямовується в зовнішній слуховий прохід. Слуховий прохід діє як резонатор, підсилюючи певні частоти (зазвичай в діапазоні 2-5 кГц, важливому для розуміння мови). Тут відбувається фокусування хвиль для посилення амплітуди і потрапляння на барабанну перетинку. Барабанна перетинка починає коливатись у відповідь на зміну тиску звукової хвилі. В середньому вусі ланцюг з трьох слухових кісточок(молоточок, коваделце і стремінце) – передає коливання від барабанної перетинки до овального вікна внутрішнього вуха. Також відбувається підсилення тиску при переході коливань з барабанної перетинки у овальне вікно внутрішнього вуха. Коефіцієнт підсилення оцінюють, як відношення площ барабанної перетинки (велика) до площі овального вікна (мала). Підсилення звуку необхідне щоб компенсувати акустичний імпеданс та ефективної передачі звукової хвилі. В іншому випадку без підсилення більша частина енергії відбилася б.

У внутрішньому вусі коливання стремінця викликають поширення хвиль у перилімфі та ендолімфі (рідини у завитці — кохлеї). Рідина передає поздовжні механічні хвилі, а базилярна мембрана коливається відповідно до частоти звуку: високі частоти — біля основи кохлеї, низькі частоти — ближче до вершини. Коливання базилярної мембрани збуджують волоскові клітини, які відкривають іонні канали та утворюють електричні імпульси, що передаються слуховим нервом у мозок.

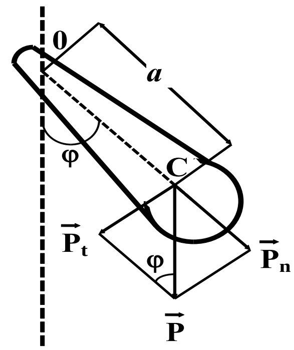
Розв’язування задач

Задача 1

Визначити період коливань фізичного маятника масою m, центр тяжіння якого C розташовано на відстані a від осі обертання. Кути відхилення ϕ тіла від положення рівноваги вважати малими (рисунок).

Розв’язання

Маятник буде рухатися до положення рівноваги під дією складової сили тяжіння $\vec{P}_t$, яка при малих кутахϕ наближено дорівнює $P_t = -P\phi$.



Момент цієї сили відносно осі обертання z, яка проходить через точку підвісу *0* перпендикулярно до площину рисунку*:* $M = P_t a = -P\phi a$.

Під дією моменту M тіло одержує кутове прискорення $\beta = \frac{d^2\phi}{dt^2}$, яке дорівнює $\beta = \frac{M}{I}$, де I – момент інерції тіла відносно осі z.

Рівняння руху маятника запишемо у вигляді
$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{Pa}{I}\phi$.
Позначимо величину $\frac{Pa}{I}$ через ω_0^2, тоді рівняння руху маятника має вигляд $\ddot{\phi}(t) + {\omega_0}^2\phi(t) = 0$.

Період коливань маятника визначається так
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ або $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Pa}}$.

Враховуючи, що $P = mg$, остаточно знаходимо, що$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$.

Величина $L = \frac{I}{ma}$ – зведена довжина фізичного маятника.

Задача 2

Амплітуда тиску звукової хвилі дорівнює ΔP =6Н/м^2. Визначити кількість енергії E, що потрапляє протягом часу τ =2с у вухо людини, розташоване перпендикулярно до напрямку поширення хвилі. Площа вуха S = 4·10^{-4} м^2. Густина повітря ρ_0=1,29 кг/м^3.

Розв’язання

Величина енергії, що проходить за одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярної до напрямку розповсюдження хвилі, визначається за формулою
$E = IS\tau = \frac{1}{2}\rho_0 A^2\omega^2 v S\tau$,
де A – амплітуда хвилі; ω – частота коливань, що відповідають хвилі.
Амплітуда хвилі тиску ΔPдорівнює

$\Delta P = \rho_0 A\omega v$,

де ρ_0 – густина середовища до приходу хвилі.
Перепишемо перше рівняння у вигляді
$\text{E} = \frac{(\Delta p)^2}{2} \cdot \frac{S\tau}{\rho_0 v}$; $E \approx 3{,}34 \cdot 10^{-5}$ Дж .

Задачі

1. Відомо, що енергія коливань камертона (ν_0=500Гц) протягом часу t =18с зменшилась у n =10^5 разів. Знайти логарифмічний декремент затухання δ.
($\delta = ln\, ln\, (n)/(2\nu_0 t)$; $\delta = 6{,}4 \cdot 10^{-4}$)
2. Якщо хвилі поширюються зі швидкістю v =24 м/с при частоті ν = 3Гц, то чому дорівнює різниця фаз двох точок, віддалених одна від одної на 2 м?
($\Delta\phi = \pi/2$)
3. Звук розповсюджується від поверхні Землі вертикально вгору. Який час t проходить звук до висоти H =10^4 м, якщо температура повітря у поверхні Землі дорівнює T =289 К, а вертикальний градієнт температури в атмосфері складає 0,007 К/м?
(t = *31,4 с*)
4. Порівняйте швидкість звуку в повітрі при T_1=273 К і на висоті H =$3\cdot10^3$ м, де температура повітря T_2=223 К?
(ν_1 =332 м/с; ν_2 =300м/с.)
5. Знайти швидкість звукової хвилі в сталі. Модуль Юнга для сталі
$2\cdot10^{11}$ Н/м^2, густина сталі $7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3.
(v = *5250 м/с*)
6. Кажан летить перпендикулярно до стіни зі швидкістю v =6м/с, випромінюючи ультразвук ν =$4{,}5\cdot10^4$ Гц. Які частоти він сприймає?
(*4,66·10⁴ Гц*)
7. За допомогою ехолота вимірювалася глибина моря. Яка була глибина моря, якщо проміжок часу між виникненням звуку та його прийомом становив 2,5с? Коефіцієнт стиснення води $4{,}6\cdot10^{-10}$м^2/Н, густина морської води $1{,}03\cdot10^3$ кг/м^3.
(*1810 м*)
8. На відстані r_0=20м від точкового джерела звуку рівень голосності L_0=30дБ. Нехтуючи затуханням хвилі, знайти рівень голосності на відстані r =10 м від джерела та відстань від нього, на якій звук не можна почути.
($L = L_0 + 20\, lg\, lg\, (r_0/r)$; *L = 36 дБ; r > 0,63 км*)
9. Амплітуда хвилі тиску для звуку частотою ν =$3\cdot10^3$Гц дорівнює ΔP =10^{-3} Н/м^2. Визначити амплітуду зміщень A частинок повітря в такій хвилі.
($A = 1{,}2\cdot10^{-8}$ *м*)
10. Визначити різницю фаз $\Delta\phi$ в пульсовій хвилі між двома точками артерії, що знаходяться на Δr = 0,2 м одна від одної. Швидкість v пульсової хвилі – 10 м/с, а коливання серця – гармонічні, частота ν = 1,2 Гц.
($\Delta\phi = 0{,}048\pi$)
11. Розрив барабанної перетинки відбувається при рівні інтенсивності звуку L =150 дБ. Визначте інтенсивність, амплітудне значення звукового тиску й амплітуду зміщення частинок у хвилі для звуку частотою ν =1 кГц, при яких відбудеться розрив барабанної перетинки.
(*1 кВт/м²; 937 Па;* $3{,}4\cdot10^{-4}$ *м*)
12. Нормальна розмова людини оцінюється рівнем гучності звуку E =50дБ (приν =1кГц). Визначте рівень гучності звуку, що відповідає 100 одночасно балакаючим людям (студентам). (*70 дБ*)

Список використаних джерел:

1. В.А. Макара, В.І.Оглобля, І.В. Плющай, Т.Л. Цареградська Загальна фізика для біологів. Збірник задач. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2011 (гриф МОН).
2. А.Н. Матвєєв. Механіка та теорія відносності. М.: Висшая школа, 1986.
3. Е.І. Сливко, О.З. Мельнікова1. Новий погляд на життя. Як фізики змінили біологію? https://nauka.ua/article/navishcho-biologam-fiziki (2022) ,
4. ФІЗИЧНИЙ ПРАКТИКУМ. ЧАСТИНА І. Механіка, молекулярна фізика, електрика та магнетизм. Навчальний посібник / Боровий М.О., Лисов В.І., Козаченко В.В., Цареградська Т.Л., Овсієнко І.В., Жабітенко О.М. – К. , 2012.
5. О.О. Каленик, І.В. Плющай, Т. Л. Цареградська Фізика для слухачів-іноземців: навч. посіб. К. : ВПЦ "Київський університет", 2021.
6. О.З. Іванченко, Н.С. Біляк МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА: Навчальний посібник. Запоріжжя, 2018.
7. Богданов К. Ю. Физик в гостях у биолога. – М.: Наука, 1986, – 144 с.
8. Мэрион Дж.Б. Общая физика с биологическими примерами: Пер. с англ. – М.: Высш.шк., 1986. – 623 с.
9. Ремизов А.Н. и др . Сборник задач по медицинской и биологической физике. – М.: Высшая школа, 1987. – 348 с.
10. Ремизов А. Н., Максина А. Г. Сборник задач по медицинской и биологической физике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2001. – 192 с.
11. Ремизов А. Н., Максина А. Г., Потапенко А. Я. Медицинская и биологическая физика: учеб. для вузов . – М.: Дрофа, 2005. – 558 с.
12. Новіков М.М., Погорілий А.М., Наконечна О.І., Плющай І.В. Основи загальної фізики частина 1, 2005. Київ, 2005 – 176 с.