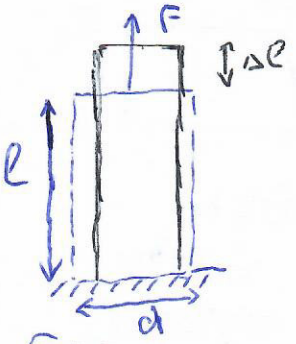
Механіка пружних тіл

Основні механічні х-ки можна отримати, досліджуючи залежності напруження-деформація ← площа

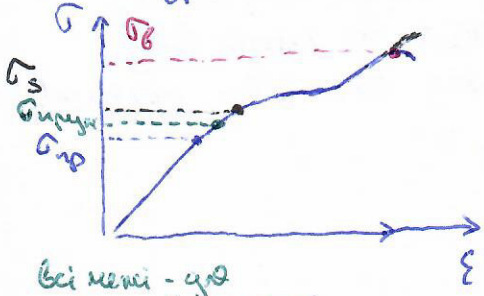


↳ $\sigma = \frac{F}{S}$ (нормальні, тангенціальне - див. далі)

відносна деформація $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%$ ← затока Форт (щоб сталеві канати розтягнуті на 3м

Деформація буває
- пружна і - пластична; - руйнування

$\sigma_{пр}$ - межа пропорційності (умовне напруження, яке відповідає відхиленню від лінійної залежності) ↑0,002%



всі межі - для початкової площі

$\sigma_{пруж}$ - межа пружності (пластична деформація 0,001÷0,005% або зменшення нахилу ~25...50%

σ_s - межа плинності (найменше напруження, після якого при незначному збільшенні напруж значна деформація), залишкова 0,2%

$\sigma_в$ - межа міцності (макс. навантаження, яке витримує зразок без руйнування

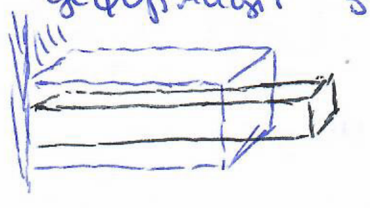
Для пластичних матеріалів - утворення шийки

⇒ істинні діаграми...

$\sigma = E\varepsilon$ E - модуль Юнга.

Коефіцієнт Пуасона $\nu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$ ← відносна поперечна деформація

ν характеризує прагнення матеріалу під час пружної деформації зберегти свій початковий об'єм.



Я квадратний переріз $\frac{V_к - V_п}{V_п} = \varepsilon_V$

$V_п = d^2 l$

$V_к = (d - \Delta d)^2 \cdot (l + \Delta l)$

$l + \Delta l = l + \varepsilon l = l(1+\varepsilon)$

$\frac{\Delta d}{d} = \nu \cdot \frac{\Delta l}{l} = \nu \cdot \varepsilon$ $d - \Delta d = d - d\nu\varepsilon = d(1 - \nu\varepsilon)$

$V_к = d^2 l (1-\nu\varepsilon)^2 \cdot (1+\varepsilon)$

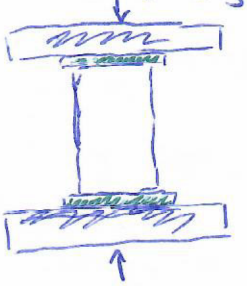
$\varepsilon_V = \frac{d^2 l (1-\nu\varepsilon)^2 (1+\varepsilon) - d^2 l}{d^2 l} = (1+\varepsilon)(1 - 2\nu\varepsilon + \nu^2\varepsilon^2) - 1 =$
$= \varepsilon - 2\nu\varepsilon^2 + \nu^2\varepsilon^3 - 2\nu\varepsilon + \nu^2\varepsilon^2$

ε - малі (0,01÷0,1%) => залишаємо найменший степінь ε

$\varepsilon_V \approx \varepsilon(1 - 2\nu)$

метали $\nu = 0{,}25 \div 0{,}35$ загалом $\nu = 0 \div 0{,}5$
корок ↗ ↖ парафін

може бути стиск (все для крихких матеріалів $\sigma_s \approx \sigma_в$)

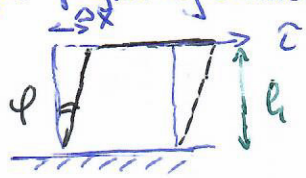


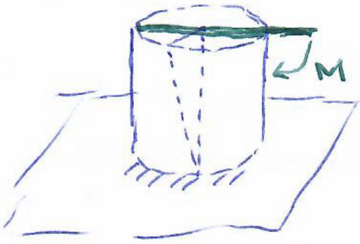
парафіновий папір для полегшення ковзання

$\sigma_в$ буде інше, бо інший механізм руйнування

$$\tau = \underset{G}{G}\varphi = G\frac{\Delta x}{h} \quad \text{(зсув)}$$

G модуль зсуву

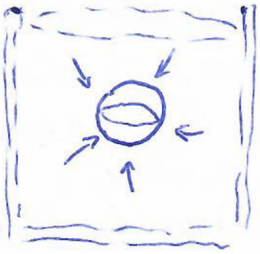




кручення викликає неоднорідні по об'єму деформації (як і згину)

$$M = k\varphi$$

$k = \frac{\pi r^4 G}{2l}$ k - модуль кручення, залежить не лише від матеріалу, але й від розмірів.



всебічний (гідростатичний стиск)

модуль $K = -\left(\frac{V \cdot p}{\Delta V}\right)$

Твердість: - дряпання (шкала Мооса)

- метод Шора (по висоті відскоку)

$HS = \frac{h}{h_{ет}} \cdot 100$

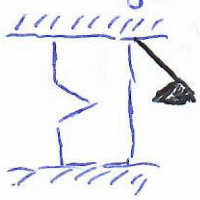
$h_{ет}$ — висота від еталонного матеріалу евтектоїдна загартована сталь

- вдавлювання інденторів
  - *) Брінеля (куля)
  - *) Віккерса (піраміда)

  } все площу відбитка
  - *) Роквела (конус, 120° або кулька) - глибина

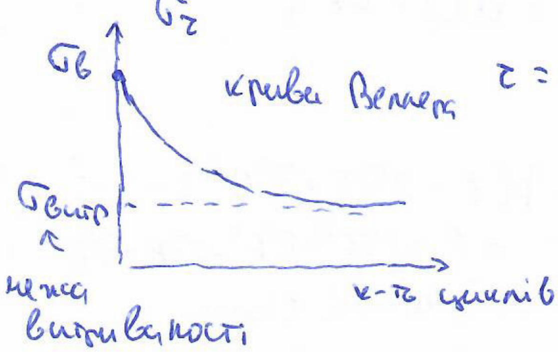
} складні ф-ли :-)

Ударна в'язкість - робота ударного руйнування, віднесена до площі надрізаного зразка



$$a_k = \frac{P(h_1 - h_2)}{S}$$

Втомне руйнування - в результаті багатократного змінного навантаження

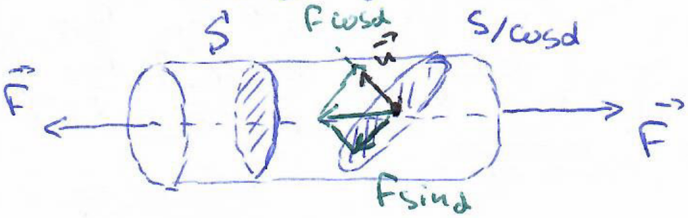


$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$; $\sigma_{амп} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$

$\sigma_{сер} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min})$

Опис напруженого та деформованого стану

Ч анізотропний континіум (принцип Сен-Венана: внутрішні силові фактори, які виникають внаслідок зовнішніх сил, розподіляються по перерізу тіла рівномірно



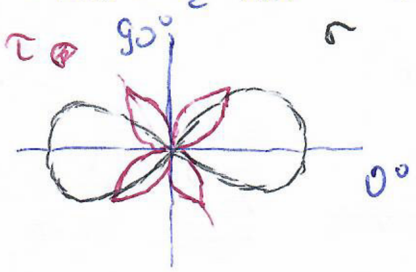
Якщо треба визначити напруження для довільного перерізу

$$\sigma = \frac{F\cos\alpha}{S/\cos\alpha} = \frac{F}{S}\cos^2\alpha \quad \text{- відрив}$$

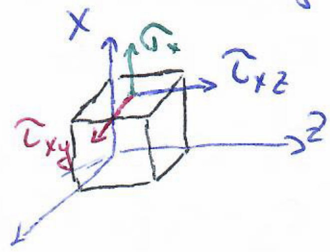
$$\tau = \frac{F\sin\alpha}{S/\cos\alpha} = \frac{F}{S}\cos\alpha\cdot\sin\alpha \quad \text{- зсув.}$$

$\sigma_{MAX} = \frac{F}{S}$ при $\alpha = 0$

$\tau_{MAX} = \frac{1}{2}\sigma_{MAX}$ при $\alpha = 45^\circ$



Але загалом необх. повно х-ти напружений стан у певній точці тіла і вміти визначати напруги у ∀ площині



тобто напружений стан х-ться тензором напруг ІІ рангу

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

в рівновазі не обертається $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ => 6 компонент

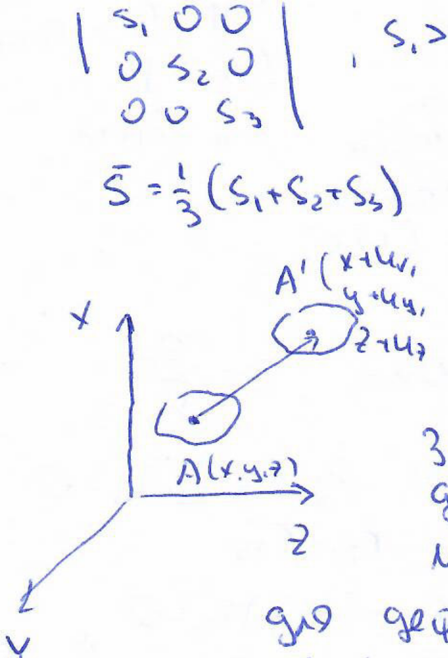
Через ∀ точку для ∀ напруженого стану завжди можна провести щонайменше 3 взаємоперпендикулярні площини, де $\tau = 0$ => головні напруги

$$\begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{vmatrix}, \quad s_1 > s_2 > s_3$$

одновісний зсув $\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ всебічний стиск $\begin{pmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix}$

$$\bar{s} = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{s} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{s} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s} \end{pmatrix}}_{\text{кульовий тензор => зміна об'єму}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x - \bar{s} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{s} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{s} \end{pmatrix}}_{\text{девіатор напружень зміна форми}}$$



При деформації не завжди відбувається зміна форми (кручення, гідростат. стиск) => деформацію краще х-ти через зміну відстані між довільними точками

для деформації необх $u_i = u_i(x,y,z)$
зміщення змінювалися від точки до точки

$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ (при одновісному розтягу $u_x = \varepsilon_x \cdot x$ ← тоб ф пропорц.

крім видовжень також виникають зсуви, які х-ть

$g_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ - це дозволяє виключити зміщення, пов'язані з обертанням.

$g_{ij} = g_{ji}$

тензор деформацій

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & \varepsilon_y & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \bar\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \bar\varepsilon \end{pmatrix}}_{\text{кульовий тензор дає зміну V}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \bar\varepsilon & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & \varepsilon_y - \bar\varepsilon & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & \varepsilon_z - \bar\varepsilon \end{pmatrix}}_{\text{девіатор, дає зміну форми}}$$

$\Downarrow$

головні осі деформації

макс. зсуви - під 45° до головних осей

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \qquad \bar\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

узагальнений з-н Гука $\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$

C_{ijkl} - пружні сталі, 81 штука

$C_{ijkl} = C_{ijlk}$; $C_{ijkl} = C_{jikl}$ => 36 компонент

xx - 1, yy - 2, zz - 3, xy - 4, xz - 5, yz - 6

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}g_{xy} + C_{15}g_{xz} + C_{16}g_{yz} \\ \sigma_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}g_{xy} + C_{25}g_{xz} + C_{26}g_{yz} \\ &\vdots \\ \tau_{yz} &= C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}g_{xy} + C_{65}g_{xz} + C_{66}g_{yz} \end{aligned}\right\}$$

для анізотропного тіла загальний вигляд

$C_{ij} = C_{ji}$ => 21 незалежна компонента

кубічні кристали

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

ізотропне середовище

$\frac{C_{11} - C_{12}}{2} = C_{44}$

міра опору деформації викликаної танг. навант. прикладеними у площині $\{110\}$ вздовж $[1\bar{1}0]$

$C_{12} = \lambda$ – коеф. Ламе.

$C_{44} = \mu$

$C_{11} = 2\mu + \lambda$

* одновісний розтяг ізотропного

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} & (1) \\ 0 = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} & (2) \\ 0 = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} & (3) \\ 0 = \mu g_{xy} \Rightarrow g_{xy} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

модуль Юнга $E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$

(2) - (3) $2\mu\varepsilon_{22} - 2\mu\varepsilon_{33} = 0$

$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$

$\lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} = 0$

$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon_{11}$

$$\sigma_{11} = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11} - 2\lambda\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_{11} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varepsilon_{11}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

$$K = \frac{3\lambda+2\mu}{3}$$

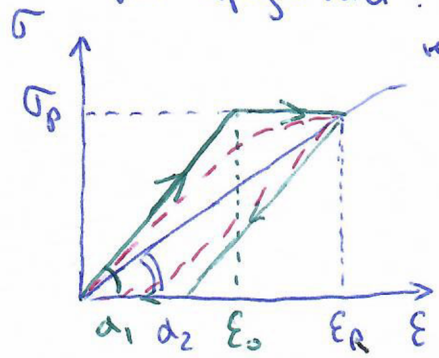
найпростіший варіант: енергія пружньої деформації $u = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 V$

Енергія пружної деформації (питома): $\delta a = \frac{\delta A}{V} = \sum_{i,j}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$

Пружна післядія – існує причина відхилення від ідеальної поведінки навіть при малих деформаціях, пов'язана з фактором часу.

Принцип Ле Шательє: зовнішній вплив, що виводить систему зі стану стійкої рівноваги, стимулює в ній процеси, які намагаються послабити цей вплив

При пружній: охолодження (нагрів) на додачу до зміни відстані між атомами



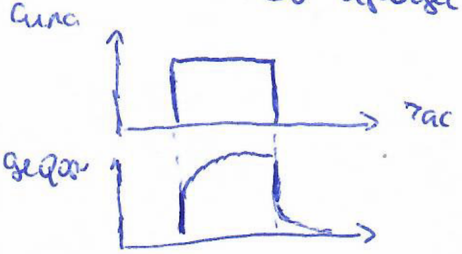
несвідчасно повільно

як швидко => охолодження => $\varepsilon_0 < \varepsilon_p$ =>

$E_H = tg\alpha_1 = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$ – нерелаксований модуль Юнга

далі при незмінній σ_p нагрів від оточуючого повітря Φ_1 $\varepsilon_0 \to \varepsilon_p$ релаксація пружн. деформ або пружна післядія

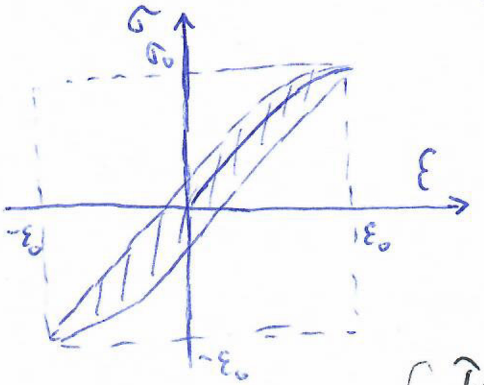
- - - бо процес теплообміну вже під час навантаження.



$E_H > E_{es} > E_R$ ← релаксований

↑ адіабатичний; ізотермічні

Площа петлі – втрачена робота (енергія)



Чому і як довго дзвенить дзвін

цикл розтяг – стиск => замкнута петля → відносно

оцінка втрат енергії $\frac{\text{площа петлі}}{2\varepsilon_0 \cdot 2\sigma_0} \sim 10^{-4}$ для термопружного тертя

$$\sigma + \tau_\varepsilon\dot{\sigma} = E_R(\varepsilon + \tau_\sigma\dot{\varepsilon})$$

процес релаксації закінчився $\sigma = E_R\varepsilon$ ← релакс. м. Юнга

τ_ε – час релаксації σ при $\varepsilon = const$

τ_σ – час –//– ε при $\sigma = const$

є розв'язок р-н у конспекті правильний варіант досить громіздкий

$$E_H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_R \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}$$

Якщо навантаження змінювати періодично $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_{ess} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_R \sqrt{\frac{1+\omega^2 \tau_\sigma^2}{1+\omega^2 \tau_\varepsilon^2}}$$

Внутрішнє тертя

$$Q = 2\pi \frac{W}{\delta W}$$

← енергія в контурі

← її зменшення за період

$$Q^{-1} = \frac{E_H - E_R}{\bar{E}} \frac{\omega \bar{\tau}}{1+(\omega\bar{\tau})^2}$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{\tau_\varepsilon \cdot \tau_\sigma}$$

$$\bar{E} = \sqrt{E_H \cdot E_R}$$

Механіка рідин та газів

ТВ.Т. – рух молекул навколо положень рівноваги, середня відстань (при $T = const$) = const => збереження форми.

Рідини, гази – сили (між молекулами) менші, розміщення молекул одна відносно іншої довільне => непостійність форми

Проте у рідинах <міжмолекулярна відстань> = const => майже незмінний об'єм; у газів власного об'єму немає

Суцільне середовище – ~~В~~ НП розподілене в просторі, має вл-ть плинності; молекулярна будова не враховується, ∀ який [малий] елемент об'єму містить величезне число молекул

Сили на ∀ елементарний об'єм → внутрішні (вз-я частинок, зрівноважені)
все редині рідини → зовнішні (дія сусідніх елементів)

Зовнішні → об'ємні (масові), сили тяжіння, інерції; тяжіння, інші поля
→ поверхневі

У спокої елементарні об'єми не змінюють взаємного розташування

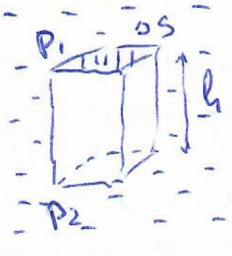
Виділено об'єм, ділимо навпіл, розрізані частини діють одна на одну з однаковими за модулем і протилежними за напрямом пружними силами

∀ одну частину вилучимо, щоб рівновага не порушилася необхідно прикласти ΔF (= дії вилученого), ця сила має бути ⊥ площини (інакше тангенційна складова зумовить рух частинок і рівновага порушиться?)

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \text{ – середній} \qquad p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

$[p] = Па = Н/м^2$; ↑ скаляр

Закон Паскаля: тиск у ∀ точці рідини або газу, що перебуває у спокої, однаковий в усіх напрямках і передається у всіх напрямках однаково (доведення є Кучерук ст.150)



Врахуємо силу тяжіння

Виберемо елемент-паралелепіпед, він у спокої => рівнодійна всіх сил = 0; сили на бічні зрівноважуються, для вертикалі

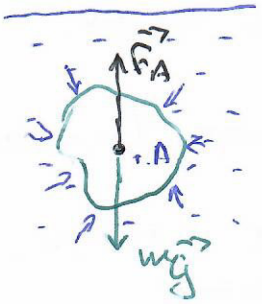
$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \rho g h \Delta S$$

$$p_2 = p_1 + \underbrace{\rho g h}_{\text{гідростатичний тиск, не залежить від форми}}$$

Якщо тиск на поверхню рідини p_0, то на глибині h

$$p = p_0 + \rho g h$$

тиск залежить від глибини => виштовхувальна сила

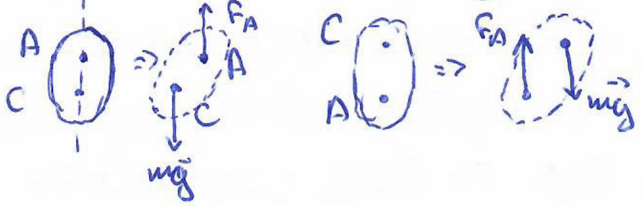


∃ тіло вийняли і об'єм заповнили рідиною, зовн. сили, що діють на цей об'єм зрівноважені => сила тяжіння зрівноважується силою тиску на поверхню з боку інших елементів рідини, тобто ця рівнодійна спрямована вертикально вгору і проходить через центр мас виділеного (витісненого об'єму). Якщо тіло повернути, то сили з боку рідини не зміняться... Закон Архімеда

т. A (центр мас витісненого об'єму) — центр плавучості

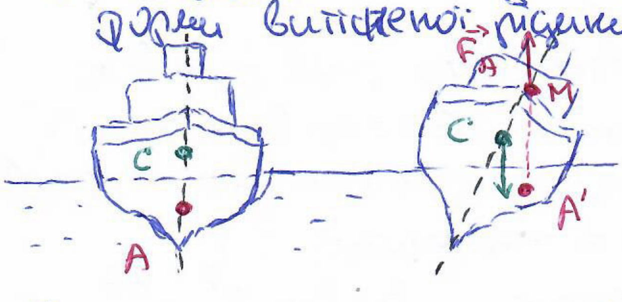
Для рівноваги зануреного тіла: вага тіла дорівнює вазі витісненої ним рідини, а центр плавучості на одній вертикалі з центром мас

∃ тіло повністю занурене:



стійка рівновага якщо C нижче A.
нестійка — вище.

∃ плавання — складніше, бо зміщення від рівноваги => зміна форми витісненої рідини, A → A'



лінія дії F_A перетинає вісь симетрії в т. M, якщо M вище C — стійка.

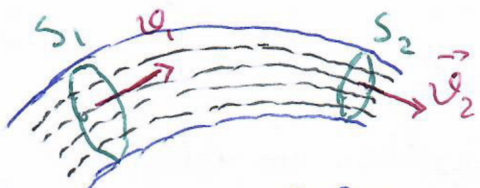
Ідеальна рідина: 1) нестислива 2) відсутнє внутрішнє тертя.

Для опису руху рідини розглядають певні фіксовані елементарні об'єми ~~...~~ і вивчають, що відбувається в кожній його точці (метод Ейлера, якщо рух кожної частинки — метод Лагранжа, складніший)

Швидкість потоку загалом $\vec{v}(\vec{r},t)$

лінія течії — дотична до якої в кожній точці збігається з $\vec{v}$

потік стаціонарний, якщо $\vec{v}=\vec{v}(\vec{r})$ — не залежить від часу.

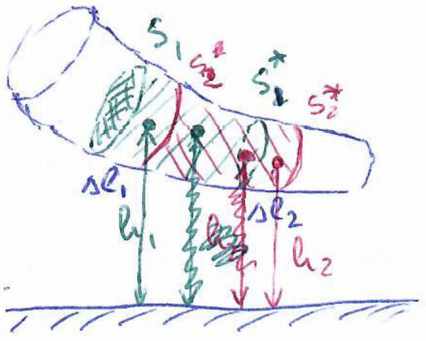


трубка течії — частина рідини обмежена лініями течії, вважається що частинки не змінюють свою трубку

для стац. потоку маса рідини (або газу) що протікає за одиницю часу через ∀ переріз трубки течії = const

$dm_1 = \rho_1 v_1 S_1 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt$ нестислива $\rho_1 = \rho_2$

$v_1 S_1 = v_2 S_2$ $vS = const$



Я об'єм між S_1 та S_2. За dt він перемістився в $S_1^* S_2^*$. В полі тяжіння.

зовн. конс.

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{\partial U'}{\partial t} + N^{\text{зовн. неконс.}} \qquad E' = T + U + U'$$

U' - завдяки силі тяжіння $\frac{\partial U'}{\partial t} = 0$

Внутрішнього тертя нема, відстані між частинками = const (нестислива) ⇒ U - const

$\Delta E' = E_2' - E_1' = A_{12}$ ← робота зовнішніх неконсервативних сил (сил гідростатичного тиску)

робота на бокові стінки = 0, $A_{12} = \underbrace{p_1 S_1}_{F_1} \Delta l_1 - \underbrace{p_2 S_2}\Delta l_2$ напрям сили та переміщення протилежні

Фактично $\Delta E'$ пов'язана з різницею енергій малих об'ємів між S_1^* та S_2^* і між S_1 та S_2

їх маси $\rho \Delta V_2 = \rho S_2 \Delta l_2$ $\rho \Delta V_1 = \rho S_1 \Delta l_1$

$$E_2' - E_1' = \frac{1}{2}\rho S_2 \Delta l_2 \cdot v_2^2 + \rho S_2 \Delta l_2 \cdot g h_2 - \left(\frac{1}{2}\rho S_1 \Delta l_1 v_1^2 + \rho S_1 \Delta l_1 g h_1\right) =$$

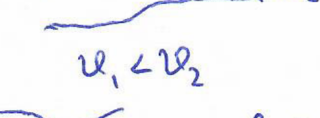
$$= A_{12} = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2$$

$$v_1 S_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta t} S_1 = v_2 S_2 = \frac{\Delta l_2}{\Delta t} S_2 \Rightarrow \Delta l_1 S_1 = \Delta l_2 \cdot S_2 = \Delta V$$

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(h_2 - h_1) = p_1 - p_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = const$$ - р-ня Бернулі

Ця застосовна і до реальних рідин з малою в'язкістю, та для газів, при $v \ll v_{звуку}$



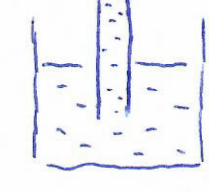
$v_1 < v_2$

* $h = const$ $\frac{\rho v^2}{2} + p = const$ $p_1 > p_2$

p - статичний тиск

$\frac{\rho v^2}{2}$ - динамічний

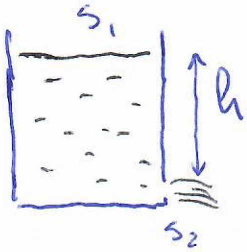
$p + \frac{\rho v^2}{2}$ - повний (напір)



В струмені тиск менший ніж у нерухомій рідині, який може стати меншим я атмосферного

⇒ водоструменевий насос (пульверизатор

-7.10.



* посудина з отвором

$p_1 = p_2 =$ атмосферний

$v_1 \approx 0$ ($v_1 \ll v_2$) широка посудина

$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2$

для витікаючої рідини $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta l S}{\Delta t} \cdot v = \rho v^2 S$

так само має змінитися імпульс посудини => реактивна сила $F_R = 2\rho g h S$ (вдвічі більша сили на пробку завдяки перерозподілу тиску.

Вертоліт надає прилеглим шарам повітря імпульс вниз => сила реакції

ця сила виникає і при зміні напрямку течії

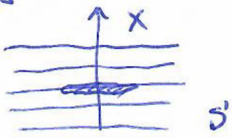
$\vec p_1 = \rho v_1 S \vec v_1$ (імпульс за одиницю часу)

$\vec p_2 = \rho v_2 S \vec v_2$ $\qquad v_1 = v_2 = v$

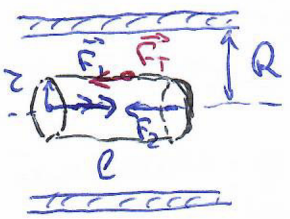
$\vec F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \vec p_2 - \vec p_1 = \rho v S (\vec v_2 - \vec v_1)$ - зумовлена дією трубки на рідину => III з.Н. на трубу сила реакції

На цьому принципі базується дія турбін (які, наприклад, у генераторах струму)

В'язка рідина - при відносному переміщенні між шарами діють сили (в'язкого тертя) $F = \eta S \frac{dv}{dx}$ - ф-ла Ньютона



η - коеф. в'язкості, залежить від природи та стану рідини



* циліндрична труба радіуса R

виділимо циліндричний об'єм з r та l

на основи циліндру діють сили тиску, рівнодійна яких $F = (p_1 - p_2)\pi r^2$ збігається з напрямом течії. На бічну - сила тертя

$$F_T = \eta S \frac{dv}{dx} = \eta \cdot \underbrace{2\pi r l}_{S} \frac{dv}{dr}$$

Для стац. випадку

$$F = F_T$$

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = 2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr}$$

$\frac{dv}{dr} < 0$

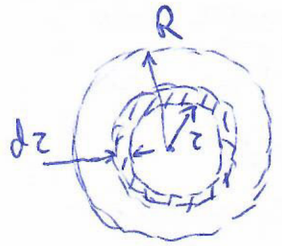
$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r\, dr$$

$$v = -\frac{p_1-p_2}{4\eta l} r^2 + C$$

$v(r=R)=0 \Rightarrow C = \frac{p_1-p_2}{4\eta l}R^2$ $\quad v = \frac{p_1-p_2}{4\eta l}(R^2-r^2)$

максимальна швидкість на осі $r=0$ $\quad v_0 = \frac{p_1-p_2}{4\eta l}R^2$

$$v(r) = v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$



Об'єм, що протікає через поперечний переріз за Δt розділено на кільця з $dS = 2\pi r\,dr$

через кожне $dV = v\Delta t\cdot dS = 2\pi r v \Delta t\cdot dr = \frac{p_1-p_2}{2\eta l}\pi\Delta t\,(R^2 r - r^3)dr$

$$V = \frac{p_1-p_2}{2\eta l}\pi\Delta t\int_0^R (R^2r-r^3)dr = \frac{p_1-p_2}{2\eta l}\pi\Delta t\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)$$

$$\frac{V}{\Delta t} = \frac{p_1-p_2}{8\eta l}\pi R^4$$ - ф-ла Пуазейля

Ламінарний рух - шари не перемішуються, всі попередні закони справедливі для такого руху

Турбулентний - частинки здійснюють нерегулярні рухи по складним траєкторіям, швидкості змінюються хаотично, відбувається інтенсивне перемішування (спостерігається при збільшенні шв-ті руху)

Число Рейнольдса $Re = \rho\frac{vL}{\eta} = \frac{vL}{\nu}$ $\quad [Re]=1$

v - х-на швидкість, L - х-ний розмір (напр. діаметр труби)

$\nu = \eta/\rho$ - кінематична в'язкість

має порядок відношення кін. енергії рідини до втрат енергії, зумовлених роботою сил в'язкості на L. при великих числах основну роль відіграє інерція, при малих в'язкість

$Re < \sim 2000$ - ламінарна

> 4000 - турбулентна

в діапазоні нестійка

Re може бути критерієм подібності потоків (не абсолютним, ще є х-ки, але ...)

числа Фруда, Маха, Струхаля

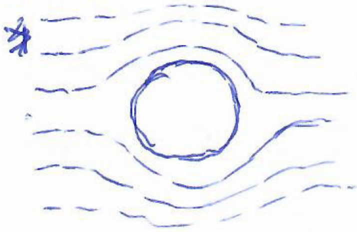
$\tilde{v}/v$; $\tilde{r}/l$

Рух тіла в рідинах та газах.

Х-р взаємодії залежить від швидкості, що тіло рухається, що обтікається — однаково

В заг. випадку $\vec{F}$ спрямована під кутом до напряму руху. Сила в напрямі потоку — сила лобового опору, $\perp$ — підіймальна.

Якщо тіло симетричне і вісь симетрії $\parallel$ потоку $\Rightarrow F_{підй} = 0$



* ідеальна рідина, симетричне тіло

лінії течії зазнають симетричних викривлень $\Rightarrow$ розподіл тисків симетричн.

ф-ла Бернуллі

$\Rightarrow$ результуюча сила $= 0$ (парадокс Д'Аламбера)

реальна рідина $\Rightarrow$ до поверхні тіла прилипає так званий межовий шар, його відносна швидкість $= 0$, $\Rightarrow$ сила в'язкості

$F_{вязк} = C \cdot v$ $\quad C = f(\eta$, розміри, форма тіла, орієнтація у потоці$)$

$Re \approx 1$ — товщина межового шару ~ розмірів

$\approx 10^4$ — " — 0,01 розмірів, за тілом з'явл. вихори.

попереду тіла тиск майже незмінний, позаду (в області вихорів) $\approx P$ статичний $\Rightarrow$ різниця дорівнює динамічному $\rho \frac{v^2}{2}$

$\Rightarrow$ сила лобового опору $\quad F = C_1 \rho S v^2$ $\quad C_1 = f(Re$, форма та орієнтація тіла$)$

Сили в'язкості — на бічну поверхню, лоб. опору — на поверхню, куди набігає потік, їх співвідношення залежить від швидкості (при малій переважають сили в'язкості)

або при $Re < 1$

$Re > 1$ — сили опору

Формула Стокса (для кульки) $\quad F_{вязк} = 6\pi\eta r_0 v$