2) $B\neq 0$, $B\sin ka = 0$, $A = 0$ $\qquad k = \frac{\pi}{2a}n$; $n = 2k$

непарні ф-ї $\psi = B\sin kx$, $k = \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3.$

причому $k \neq 0$, так як в цьому випадку $\psi = 0$ що не має фізичного змісту.

$$\int_0^\infty |\psi|^2 dx = 1 = \int_{-a}^{a} A^2 \cos^2 kx \, dx = A^2 \qquad =$$

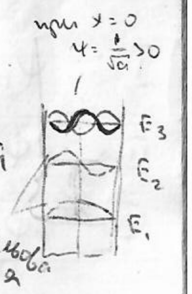
$$\cancel{\int \cos^2 x\, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 x}\, d \ldots} \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$= \int_{-a}^{a} A^2 \left[\frac{\cos 2kx + 1}{2}\right] dx = A^2 \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{2k}\sin 2kx}_{0} + x\right]\Bigg|_{-a}^{a} = aA^2$$

$A = \frac{1}{\sqrt{a}}$ аналогічно $B = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} & \text{при непарних } n \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} & \text{при парних } n \end{cases} \qquad -a < x < a$$

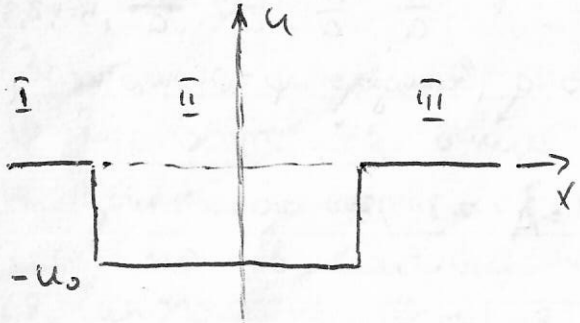


$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} n^2$, спектр квантується. енергетичні рівні дискретні, їх нескінченна к-ть. Так як $n \neq 0$, то енергія найнижчого рівня $E_0 = \frac{\hbar\pi^2}{8ma^2}$

*бо інакше $\psi \equiv 0$

В принципі даний розв'язок має розрив для перших похідних. Але реально $U_0 \neq \infty$, ψ і $\frac{d\psi}{dx}$ відмінні від 17
нуля біля стінки. Тож наш розв'язок відноситься не до реальної ф-ї $\psi(x)$ при дуже великому значенні U_0, а до її граничного

му значений при $u_0 \to \infty$



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-u)\psi = 0$$

Розглянемо випадок

$\cancel{u_0 \le |E| \le 0}$ $\quad -u_0 < E < 0$

$$\text{I, III}: \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi = 0 \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\text{II}: \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(u_0 - |E|)\psi = 0 \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(u_0 - |E|)}$$

k і α - дійсні

$\text{I}: \quad \psi_1 = A_1 e^{-\alpha x} + B_1 e^{\alpha x}$

$\text{II}: \quad \psi_2 = A_2 \cos kx + B_2 \sin kx$

$\text{III}: \quad \psi_3 = A_3 e^{-\alpha x} + B_3 e^{\alpha x}$

для обмеженості $A_1 = 0$; $B_3 = 0$

З міркувань симетрії - необхідно щоб густина ймовірності була симетричною ф-єю x відносно початку координат

$\Rightarrow B_1^2 = A_3^2 \Rightarrow$ 1) $A_3 = B_1$ 2) $A_3 = -B_1$

$x = a$

$$A_2 \cos ka + B_2 \sin ka = A_3 e^{-\alpha a} \qquad (1)$$

18

$$-k A_2 \sin ka + k B_2 \cos ka = -\alpha A_3 e^{-\alpha a} \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0 . \qquad (2)$$

$x = -a$ $\quad A_2\cos ka - B_2\sin ka = B_1 e^{-\alpha a}$ (3)

$$kA_2\sin ka + kB_2\cos ka = \alpha B_1 e^{-\alpha a} \quad (4)$$

Звідси

(1)+(3) $\quad 2A_2\cos ka = (A_3+B_1)e^{-\alpha a}$ (1a)

(4)−(2) $\quad 2kA_2\sin ka = \alpha(A_3+B_1)e^{-\alpha a}$ (2a)

(1)−(3) $\quad 2B_2\sin ka = (A_3-B_1)e^{-\alpha a}$ (3a)

(2)+(4) $\quad 2kB_2\cos ka = -\alpha(A_3-B_1)e^{-\alpha a}$ (4a)

Якщо $A_3=B_1$ і $A_2\neq 0$; (2a):(1a) =>

$$k\,\mathrm{tg}\,ka = \alpha \quad (*)$$

Якщо $A_3=-B_1$, $B_2\neq 0$ (4a):(3a) =>

$$k\,\mathrm{ctg}\,ka = -\alpha \quad (**)$$

Умови (*) і (**) - приводять до рівнів енергії, їх число залежить від глибини ями і її ширини, всі рівні, в тому числі і найнижчий лежать вище дна потенц. ями.

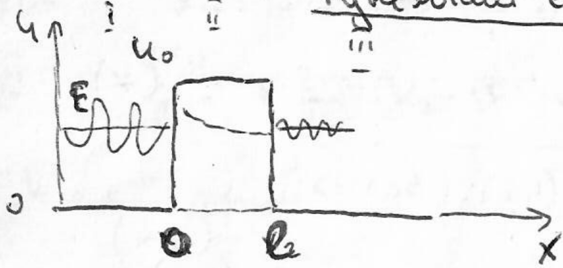
Умови (*) і (**) не можуть виконуватись одночасно, т.я було б $k^2=-\alpha^2$, а k і α - дійсні. Розв'язок, коли всі коефіцієнти A_3, B_1, A_2 і $B_2 \neq 0$ фізичного змісту немає. Таким чином можливі розв'язки розділяються 19
на два класи: с парною хвильовою ф-єю, коли $A_2\neq 0$, $B_2=0$, $B_1=A_3$ і з непарною хв. ф-єю, при $A_2=0$, $B_2\neq 0$, $B_1=-A_3$

При $E>0$, $\alpha = i\beta$, ~~тоо~~то $\psi_1 = A'\cos\beta x + B'\sin\beta x$

$\psi_3 = A''\cos\beta x + B''\sin\beta x$

"Зшив" ψ і $\frac{d\psi}{dx}$ призводить до того що A', B', A'', B'' ви[ражаються]
жаються через A_2 і B_2, які можуть бути довільними
при $E>0$ енергія не квантується, спектр НП, рух інфі[нітний]

Тунельний ефект.



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ U_0, & 0 < x < \ell \\ 0, & x \ge \ell \end{cases}$$

В класичній механіці $E = \frac{p^2}{2m} + U(x)$. В [квантовій] механіці такої рівності немає, ~~вони не визначат~~. ~~одночасно~~ Кін. і потен. енергії навіть не [вимірю]ються одночасно ($\hat{T}$ і $\hat{U}$ не комутують).

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E-U)\psi = 0$$

I, III: $\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$, $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$

II: $\frac{d^2\psi}{dx^2} - \varkappa^2\psi = 0$, $\varkappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$

$$\psi_1 = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ikx}$$

$$\psi_2 = A_2 e^{-\varkappa x} + B_2 e^{\varkappa x}$$

$$\psi_3 = A_3 e^{-ikx} + B_3 e^{+ikx}$$

Правильніше лише ~~B₃~~ $A_3 = 0$, рештa вільно є
треба розглядати $\psi_1(0) = \psi_2(0)$; $\psi_2(\ell) = \psi_3(\ell)$
$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$; $\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=\ell} = \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=\ell}$
Але всеодно для $\frac{B_3^2}{B_1^2} = D$ виходить теже саме
Але так як ні A_1 ні B_3 не рівні нулеві, то
ненульова ймовірність і того що при $E<U_0$ частинка мо[же]
виявитися за бар'єром (тунел. ефект) і того що навіть п[ри]
$E>U_0$ частинка може відбитися від бар'єру

$A_1 = A_3 = 0$ - за вибраним напрямком поширення
хвилі, $B_2 = 0$ - щоб амплітуда з координатою

затухала, $B_3 < B_1$ (бо частина відбилась)

Граничні умови: $\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow B_1 = A_2$

$\psi_2(l) = \psi_3(l) \Rightarrow B_1 e^{-\varkappa l} = B_3 e^{ikl}$

Інтенсивність ~ (амплітуді)^2 - все для ймовірностей

Коефіцієнт прозорості бар'єру $D = \frac{B_3^2}{B_1^2} = e^{-2\varkappa l} =$

$\Rightarrow D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2m(U_0 - E)}\right)$

Для ∀ бар'єру

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U_0(x) - E)}\,dx\right)$$

Енергія така E

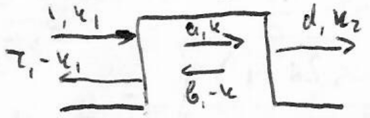
1) якщо $\hbar \to 0$ - перехід до клас. механіки $D \to 0$

2) $m \to \infty$ $D \to 0$ - легкі частинки легше тунелюють

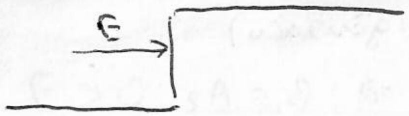
3) $U(x) - E \to \infty$, $D \to 0$

(Пр) тунельного ефекту - контактна різниця потенціалів, холодна емісія електронів з металу, α-розпад, спонтанне ділення атомних ядер

→ Взагалі правильніше розглядати



— всі ці хвилі, для них граничні умови і r і d - коефіцієнти відбивання і пропускання хвилі, необхідно перейти до коефіцієнтів до частинок - див. Сивухін

При  Задача подібна повному відбиванню світла. При

існує область, куди хвиля проникає. Цей парадокс (повне відбивання і область куди проникає) пояснюється так: розв'язок про повне відбивання відноситься до стаціонарного стану (бо є результатом р-ку відповідного р-ня Шредінгера). Проникнення відбувається в перехідний період, коли стан в часі не встановився

Задачі після потенціальної ями.

1. Частинка в потенціальному ящику знаходиться в основному стані. Яка імовірність виявлення частинки а) в середній третині ящику б) в крайній третині ящику.

$dw = |\psi(x)|^2 dx$ - імовірність того, що частинка бу[де] виявлена в інтервалі ~~dx~~ $(x, x+dx)$

основний стан $\Rightarrow n=1 \Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\frac{\pi x}{2a}$

$$w = \frac{1}{a}\int_{-\frac{1}{3}a}^{\frac{1}{3}a} \cos^2\frac{\pi x}{2a}\,dx = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)\right] =$$

22

$$= \frac{1}{2a}\int_{-\frac{1}{3}a}^{\frac{1}{3}a}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + 1\right)dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a} + x\right]\Bigg|_{-\frac{1}{3}a}^{\frac{1}{3}a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a}{\pi}\, 2\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2a}{3}\right] = \frac{1}{3} + \frac{\sin \pi/3}{\pi} \approx 0.609$$

$$б)\quad w = \frac{1}{2a}\left[\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a} + x\right]\Bigg|_{-a}^{-\frac{1}{3}a} = \frac{1}{2a}\left[\frac{a}{\pi}\left(-\sin\frac{\pi}{3} + \sin\pi\right) + \frac{2}{3}a\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2\pi} \approx 0{,}195$$

N33

/ Почнеш в контрольну

2. Частинка в нескінченно глибокому, одновимірному, прямокутному потенціальному ящиці шириною $2a$ знаходиться у збудженому стані ($n=3$). Визначити в яких точках інтервалу $-a < x < a$ густина ймовірності знаходження частинки має максимальне і мінімальне значення.

$$n=3 \Rightarrow \psi = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}$$

N34

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{a}\cos^2\frac{3\pi x}{2a} = |\psi(x)|^2 = \rho$$

$$d\,\cancel{(\ldots)}\qquad \frac{d\rho}{dx} = -\frac{2}{a}\cos\frac{3\pi x}{2a}\sin\frac{3\pi x}{2a}\cdot\frac{3\pi}{2a} = -\frac{3\pi}{2a^2}\sin\frac{3\pi x}{a} = 0$$

$$\sin\frac{3\pi x}{a} = 0, \qquad \frac{3\pi x}{a} = k\pi \qquad x = \frac{ka}{3}; \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = -\frac{3\pi}{2a^2}\cdot\frac{3\pi}{a}\cos\frac{3\pi x}{a} = -\frac{9\pi^2}{2a^3}\cos\frac{3\pi x}{a}$$

$$x = 0 \qquad \frac{d^2\rho}{dx^2} = -\frac{9\pi^2}{2a^3} < 0 - \max$$

$$k = \pm1, \quad x = \pm\frac{a}{3} \quad \frac{d^2\rho}{dx^2} = -\frac{9\pi^2}{2a^3}\cos\pi = \frac{9\pi^2}{2a^3} > 0 - \min.$$

$k = \pm 2, \quad x = \pm\frac{2a}{3} \quad \frac{d^2 g}{dx^2} = -\frac{9\pi^2}{2a^3}\cos 2\pi = -\frac{9\pi^2}{2a^3} < 0 \Rightarrow max$

$k = \pm 3, \quad x = \pm a \quad \frac{d^2 g}{dx^2} = -\frac{9\pi^2}{2a^3}\cos 3\pi = \frac{9\pi^2}{2a^3} > 0 \Rightarrow min$

Д/р.

Електрон знаходиться в прямокутному потенціальному ящику з непроникними стінками. Ширина ящика $2a = 0,2$ нм, енергія електрону в ящику $E = 37,8$ eV. Визначити номер n енергетичного рівня і модуль хвильового вектора k.

$E = \cancel{\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma}} \quad E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} n^2$ №35

$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{8ma^2 E}{\pi^2 \hbar^2}} = \frac{2a}{\pi \hbar}\sqrt{2mE} \approx 2.$

$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m\pi^2\hbar^2 n^2}{\hbar^2 8ma^2} = \frac{\pi^2 n^2}{4a^2} \quad k = \frac{\pi n}{2a} = 3,14 \cdot 10^{10}$

На к/р. №3

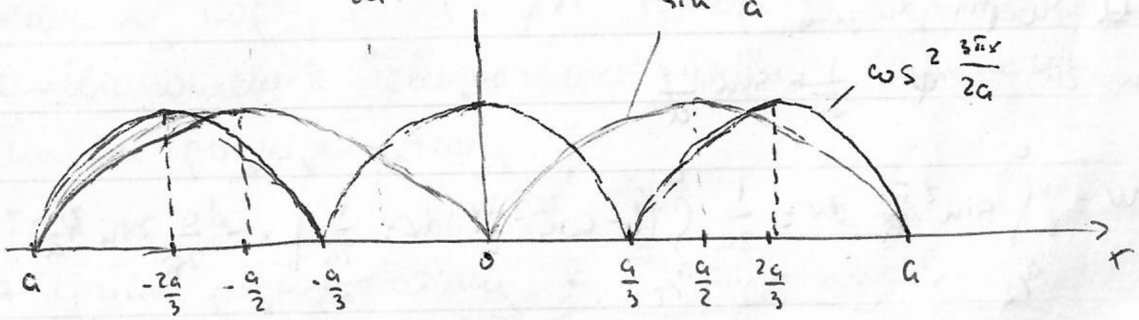
1. Електрон знаходиться в нескінченно глибокому, одновимірному, прямокутному потенціальному ящику. ~~Використовуючи співвідношення невизначе~~ шириною $2a$. В яких точках в інтервалі $-a < x < a$ густина ймовірності знаходження електрону на другому та третьому енергетичних рівнях однакові? ~~Підрахувати густини ймовірності для цих точок.~~ Розв'язок пояснити графіком

24

$n=2 \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\frac{\pi x}{a}$

$n=3 \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\frac{3\pi x}{2a}$

$\sin^2\frac{\pi x}{a} = \cos^2\frac{3\pi x}{2a}.$



$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}}{2} = \frac{1+\cos\frac{3\pi x}{a}}{2} \Rightarrow -\cos\frac{2\pi x}{a} = \cos\frac{3\pi x}{a}$

$\cancel{\frac{2\pi x}{a} = \frac{3\pi x}{a} \pm (2k+1)\pi} \qquad \cancel{\frac{2\pi x}{a} + (2k+1)\pi = \frac{3\pi x}{a}}$

$\cancel{\frac{\pi x}{a} = (2k+1)\pi} \qquad \cancel{x = (2k+1)a}$

$\pm(2k+1)\pi - \frac{2\pi x}{a} = \frac{3\pi x}{a} \qquad x = \frac{\pm(2k+1)a}{5}$

$k=0 \quad x = \pm\frac{a}{5} \quad , k=1 \quad x = \pm\frac{3}{5}a \quad , \quad k=2 \quad , x = \pm a$

$x = \pm\frac{a}{5} \qquad \sin^2\frac{\pi}{5} = \sin^2(36^\circ) = \cos^2\frac{3}{2}\frac{\pi}{5} = \cos^2\frac{3}{10}\pi =$

$= \cos^2 54^\circ = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 36^\circ\right) =$

$= \sin^2 36^\circ = 0{,}35$

N37

2. Частинка в нескінченно глибокому, одновимірному прямокутному потенціальному ящикі знаходиться в ~~основному~~ збудженому (…) стані. Яка ймовірність w виявлення частинки в з… крайній чверті ящика.

$$n=2 \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\frac{\pi x}{a}$$

$$w = \frac{1}{a}\int_{a/2}^{a} \sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx = \frac{1}{2a}\int_{a/2}^{a}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left[x - \frac{a}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{a}\right.$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2\pi}(\sin 2\pi - \sin\pi)\right] = \frac{1}{4}$$

Лінійний осцилятор (одномірний) $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2\psi = E\,\psi(x)$. Розв'язок дає $E_n = \hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $n=0,1,2$

$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$; $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$; $H_n(y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{y^2}\frac{d^n(e^{-y^2})}{dy^n}$

В класичній механіці енергія осцилятора хоч і постійна в часі, але може мати ∀ значе… (~~в тому~~ (зокрема і як завгодно близькі нулю). В квантовій механіці енергія квантується, найменша енергія квантового осцилятора

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \neq 0$$

І дискретність енергетичних рівнів і наявність нульової енергії підтверджено спостереженнями інфрачервоних спектрів молекул.

Співвідношення невизначеності.

1. Кінетична енергія електрону в атомі водню складає величину порядку $T = 10\,eV$. Використовуючи співвідношення невизначеності, оцініть мінімальні лінійні розміри атому.

№26

$\Delta x \, \Delta p \geq \hbar$

Я лінійні розміри атому l, тоді $\Delta x = l/2$

$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p}$

$p = \langle p \rangle \pm \Delta p \Rightarrow p_{min} \geq \Delta p$ ідеа

$\Delta p \leq p$; $p = \sqrt{2mT}$, $l_{min} \geq \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}}$

$l_{min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-10}$

2. Визначити відносну невизначеність $\frac{\Delta p}{p}$ імпульсу рухомої частинки, якщо припустити, що невизначеність її координати дорівнює довжині хвилі де Бройля

$\Delta x = \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$, $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar$, $\frac{2\pi\hbar}{p} \Delta p \geq \hbar$

№27 [illegible]

$\frac{\Delta p}{p} \geq \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$

к/р

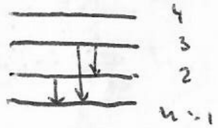
Оцінити за допомогою співвідношення невизначеності мінімальну кінетичну енергію T_{min} електрону, що рухається всередині сферичної області діаметром $d = 0{,}1$ нм.

$$\Delta x = \frac{d}{2}, \quad \Delta p \geq \frac{2\hbar}{d}, \quad \Delta p \leq p = \sqrt{2mT}$$

$$T \geq \frac{2\hbar^2}{d^2 m}; \quad T_{min} = \frac{2\hbar^2}{d^2 m} \; (\approx 15 eV).$$

До пари про теорію Бора.

1. Скільки частот може випромінити атом водню, збуджений на n-й енергетичний рівень.



$n=1, \quad k_1 = 0$

$n=2, \quad k_2 = 1 = k_1 + (n-1)$

$n=3 \quad k_3 = 3 = k_2 + (n-1)$

$n=4 \rightarrow k_4 = 6 = k_3 + (n-1)$

$101 \cdot 50$ 5050

17 9 153

$$k_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\left(S_n \text{ арифметичної прогресії } = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \, n \quad d = a_2 - a_1 \right)$$

число збуджень.

Приклад: Атом водню, що перебуває у збудженому стані, може, повертаючись в основний стан, випромінити 15 ліній. Знайти номер збудженого стану.

153 5050

$n = 6$ ←

$n = 18, n = 101$

2. Показати, що електрон в атомі водню за теорією Бора може рухатись тільки по тим коловим орбітам, де вкладається ціле число хвиль де Бройля

або ціле число (~~хвиль~~) (довжин) хвиль де-Бройля вкладається на дозволених, за теорією Бора, електронних орбітах

по Бору: $L_n = \hbar n = m v_n r_n$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \Rightarrow mv = \frac{2\pi\hbar}{\lambda};$$

$$\frac{2\pi\hbar}{\lambda} r_n = \hbar n \Rightarrow n\lambda = 2\pi r_n \text{ — довжина орбіти.}$$

---

3. Визначити різницю довжин хвиль світла, випромінюваного при переходах $n_2 = 2 \to n_1 = 1$ і $n_2 = 5 \to n_1 = 4$ в атомах водню і тритію

для хвильового числа справедливо $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$; стала Рідберга $R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M}}$ ← маса ел-ну; M — маса ядра; R_∞ — конст

$$\Delta\lambda = \lambda_H - \lambda_T = \left(1 + \frac{m}{M_H}\right) R_\infty^{-1} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{m}{M_T}\right) R_\infty^{-1} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} =$$

$$= R_\infty^{-1}\left(\frac{m}{M_H} - \frac{m}{M_T}\right)\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} = [M_T = 3M_H] \simeq R_\infty \frac{m}{M_H} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} = \begin{cases} R_\infty \frac{m}{M_H} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \\ R_\infty \frac{m}{M_H} \frac{2}{3} \cdot \frac{400}{9} \end{cases}$$

Дано газ, молекули якого мають максвеллівський розподіл швидкостей (за модулем). Знайти розподіл молекул за дебройлівськими довжинами хвиль і визначити найбільш імовірну λ. Температура газу T, маса молекул m, концентрація n.

$$f(v)dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv$$

Вважаємо, що швидкість всіх частинок нерелятивістські (доля частинок з $v \sim c$ при норм. т-рах дуже мала)

$$v = \frac{2\pi h}{m\lambda};\quad dv = -\frac{2\pi h}{m\lambda^2} d\lambda \Rightarrow \varphi(\lambda) d\lambda = -4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2\pi h}{m}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \cdot \exp\left(-\frac{m}{2kT}\left(\frac{2\pi h}{m}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2}\right) \times$$

$$\times \frac{2\pi h}{m\lambda^2} d\lambda = -4\pi n \left(\frac{2\pi h^2}{kTm}\right)^{3/2} \frac{1}{\lambda^4} \exp\left(-\frac{2\pi^2 h^2}{kTm\lambda^2}\right) d\lambda$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)\Bigg|_{\lambda_{im}} = 0 = -\frac{4}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{2\pi^2 h^2}{kTm\lambda^2}\right) + \frac{1}{\lambda^4} \exp(\;) \cdot \frac{4\pi^2 h^2}{kTm\lambda^3} = 0 \Rightarrow \lambda_{im}^2 = \frac{\pi^2 h^2}{mkT}$$

Для опису з-нів механіки Ньютону знадобилося нове мат. апарат — диференційне числення. Закони квантов. механіки можуть бути охарактеризовані за допомогою інших мат. засобів — операторів

Оператори, власні функції, власні значен[ня]

1. В квантовій фізиці кожній фізичній величині F ставимо у відповідність оператор $\hat{F}$, тоді значення цієї величини у квантовому стані

$$F = \int \Psi^* \hat{F} \Psi \, d\tau$$

$$\vec{p} \to \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \qquad , \vec{r} \to \hat{\vec{r}}$$

Якщо вираз містить добуток некомутуючих операторів то його необхідно симетризувати

$$AB \to \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$$

~~Оператори~~ Комутатор двох операторів

$$[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Якщо комутатор $= 0$, то оператори наз. комутуючими

Оператори F і F^+ є ермітово-спряженими, якщо $\int \Psi_1^* \hat{F} \Psi_2 d\tau = \int (\hat{F}^+ \Psi_1)^* \Psi_2 d\tau$

Якщо $F = F^+$ то оператор наз. самоспряженим

Оператори дійсних фізичних величин самоспряжені, т.я. середні значення самоспряжених величин дійсні

$$\bar{F} = \int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau$$

$$\bar{F}^* = \int \psi (\hat{F}\psi)^* d\tau = \int (\hat{F}\psi)^* \psi = \int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau = \bar{F}$$

Рівняння $\hat{F}\psi = \lambda\psi$ – р-ня на власні функції та власні значення оператора $\hat{F}$

Сукупність всіх власних значень наз спектром (оператора, фізичної величини). Спектр може бути дискретним $F_1, F_2, \ldots F_n, \ldots$ або неперервним $a \le F \le b$.

Якщо величина має дискретний спектр, то результат вимірювання цієї величини в довільному стані буде одне з власних значень.

Для самоспряжених операторів
1) власні значення дійсні
2) власні функції ортогональні $\int \psi_n^* \psi_m \, d\tau = 0$

Якщо вл. ф-ї не ортогональні, то вони належать до одного вл. зн.

Якщо одному власному значенню відповідає декілька лінійно незалежних Вл. Ф, то випад наз. виродження, а к-ть Вл. ф-й - кратністю виродження.

Якщо Вл. знач. просте, то Вл. Ф визначена з точні- сю множника, якщо кратне - визначена неоднозначно.

Якщо комутатор операторів $\hat{F}$ і $\hat{G}$ $= 0$, то існу спільна ∂ Вл. Ф-й цих операторів.

Крім того, величини $\hat{F}$ і $\hat{G}$ можуть мати певні значення одночасно (в одному стані) коли $[\hat{F}, \hat{G}$

1. Знайти комутатор операторів а) x і $\frac{d}{dx}$,

б) $i\hbar\vec{\nabla}$ і $A(\vec{r}$

а) $[x, \frac{d}{dx}]\psi = (x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x)\psi = x\frac{d\psi}{dx} - \psi - x\frac{d\psi}{dx} = -\psi$

$[\ ] = -1$

б) $[i\hbar\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{r})]\psi = i\hbar\vec{\nabla}(\vec{A}\psi) - \vec{A}\ i\hbar\vec{\nabla}\psi = i\hbar\psi\, di$

$[\ ] = i\hbar \operatorname{div}\vec{A}$

5/ Не треба. Вільно в список Боровою

1. Довести самоспряженість операторів x, $i\frac{\partial}{\partial y}$

$$\int \psi_1^* x \psi_2 \, dV = \int (x\psi_1)^* \psi_2 \, dV \Rightarrow x = x^+$$

$$\int \psi_1^* \, i \frac{\partial \psi_2}{\partial y} dV = \overset{=0}{\psi_1 \psi_2 \Big|_{-\infty}^{\infty}} - i \int \psi_2 \frac{\partial}{\partial y} \psi_1^* dV = \int \left(i\frac{\partial}{\partial y}\psi_1\right)^* \psi_2 \, dV$$

~~Знайти власні знач.~~

$$\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)^+$$

2. Знайти оператор, спряжений до $\hat{A}\cdot\hat{B}$

$(\hat{A}\hat{B})^+ - ?$

$$\int \psi_1^* \hat{A}\hat{B}\psi_2 \, dV = [\hat{B}\psi_2 = \psi_3] = \int \psi_1 \hat{A} \psi_3 \, dV =$$

$$= \int \psi_3 (A^+\psi_1)^* dV = [A^+\psi_1 = \psi_4] = \int \psi_4^* \cdot B \psi_2 \, dV =$$

$$= \int \psi_2 (B^+\psi_4)^* dV = \int \psi_2 (B^+A^+\psi_1)^* dV$$

$$(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$$

3. $[\hat{L}, \hat{M}] = 1$ $\quad \hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L} - ?$

$\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1 \quad | \cdot \hat{M} \Rightarrow \hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}\hat{L}\hat{M} = \hat{M}$

$M \cdot | \quad \hat{M}\hat{L}\hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = \hat{M}$

$+$

$$\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L} = 2\hat{M}$$

4. Довести, що $\hat{A}^{-1}\hat{B}^2\hat{A} = (\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^2$

$\hat{A}^{-1}$ - обернений оператор $\quad \hat{A}\hat{A}^{-1}\psi = \psi$

$\hat{A}^{-1}\hat{B}^2\hat{A} = \hat{A}^{-1}\hat{B}\,\cancel{\hat{A}\hat{A}}\,\hat{B}\hat{A} = \hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}$

5. Знайти власні функції і власні числа операторів

а) $\frac{d}{dx}$, б) $i\frac{d}{dx}$, в) $(x+\frac{d}{dx})\psi$ г) $e^{ia\frac{d}{d\varphi}}$ д) $\frac{d^2}{d\varphi^2}$

а) $\frac{d}{dx}\psi = \lambda\psi \qquad \psi' - \lambda\psi = 0 \qquad \psi = Ce^{\sigma x}$

$\sigma - \lambda = 0,$

$\psi = Ce^{\lambda x}$

e^{∞}

ψ має бути скінченною, однозначною, неперервною

$x = \pm\infty \Rightarrow \lambda$ - уявне $\quad \lambda = i\beta,\ \beta \in \mathbb{R}$

$\psi = Ce^{i\lambda x}$

б) $i\frac{d}{dx}\psi = \lambda\psi \qquad \cancel{\psi' + i\lambda\psi}$

$\psi' + i\lambda\psi = 0 \qquad \psi = Ce^{\sigma x}$

$Ce^{\sigma x}(\sigma + i\lambda) = 0 \qquad \sigma = -i\lambda$

$\psi = Ce^{-i\lambda x}$, λ - дійсне

Якщо $-i\frac{d}{dx}$ + умова періодичності $\psi(x) = \psi(x+a)$

$\psi = Ce^{i\lambda x}$

в) $\left(x+\frac{d}{dx}\right)\psi=\lambda\psi$

$\psi'+\psi(x-\lambda)=0 \qquad \frac{d\psi}{dx}=-\psi(x-\lambda) \qquad \frac{d\psi}{\psi}=-(x-\lambda)\,dx$

$\ln\psi=-\left(\frac{x^2}{2}-\lambda x\right)+\ln C$

$\psi=C\,e^{-\left(\frac{x^2}{2}-\lambda x\right)} \qquad \lambda-\forall$

г) $\left(e^{ia\frac{d}{d\varphi}}\right)\psi=\lambda\psi$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ia)^n\frac{d^n}{d\varphi^n}\psi=\lambda\psi$

$\psi=C\,e^{\sigma\varphi}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ia)^n\sigma^n=\lambda \quad\Rightarrow\quad e^{ia\sigma}=\lambda$

для обмеженості $\sigma=i\alpha$, $e^{-a\alpha}=\lambda$, $\psi=C\,e^{i\alpha\varphi}$

$\psi(\varphi)=\psi(\varphi+2\pi) \Rightarrow C\,e^{i\alpha\varphi}=C\,e^{i\alpha\varphi}e^{i\alpha 2\pi}$

$e^{i\alpha 2\pi}=1 \qquad \alpha 2\pi=2\pi n \Rightarrow$ α – ціле

$\lambda=e^{-a\alpha}, \quad \psi=C\,e^{i\alpha\varphi}$

д) $\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi = \lambda\psi \qquad \psi = Ce^{\sigma\varphi}$

$\sigma^2 = \lambda \Rightarrow \sigma = \sqrt{\lambda}$

ψ - обмежена $\Rightarrow \lambda < 0$

$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi) \Rightarrow C e^{i\sqrt{\lambda}\varphi} = C e^{i\sqrt{\lambda}\varphi} e^{i\sqrt{\lambda}2\pi}$

$e^{i\sqrt{\lambda}2\pi} = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}(\sqrt{\lambda})$ - ціле.

$\lambda < 0$, $\mathrm{Im}(\sqrt{\lambda})$ - ціле, $\psi = C e^{i\,\mathrm{Im}(\sqrt{\lambda})\varphi}$

3. Знайти власні значення оператора імпульса $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$

$-i\hbar\vec{\nabla}\psi = \lambda\psi$

$-i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}\right) = (\lambda_x\vec{i} + \lambda_y\vec{j} + \lambda_z\vec{k})\psi$

$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda_x\psi$

$-i\hbar e^{i\sigma x}\sigma = \lambda_x e^{i\sigma x} \qquad \cancel{\lambda_x}$ з $\sigma = i\frac{\lambda_x}{\hbar}$

$\vec{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$, λ_i - дійсні

$\cancel{\psi = \frac{C}{\hbar} e}$ $\psi = C\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z)\right]$

7. Побудувати оператор $\hat{L}$

$L = [\vec{r}, \vec{p}]$, $\quad \hat{L} = [\hat{r}, \hat{\vec{p}}]$, $\quad \hat{r} = (x, y, z)$

$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\partial}$

$$\hat{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}(-i\hbar) \Rightarrow \hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$\cancel{\hat{L}_x\psi = \lambda\psi}$

$\cancel{-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}\psi - z\frac{\partial}{\partial y}\psi\right) = \lambda\psi}$

$\cancel{\psi = Y(y)Z(z)}$ $\quad \cancel{-i\hbar\left(yY\frac{\partial Z}{\partial z} - zZ\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \lambda ZY}$

$\cancel{-i\hbar\left(\frac{Z'}{Zz} - \frac{Y'}{Yy}\right) = \lambda}$

8. Знайти комутатор операторів $\hat{x}_k$ і $\hat{p}_l$

$[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = [\hat{x}_k, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_l}] =$ $\qquad [\ ] = i\hbar\delta_{lk}$

$[x_k, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_l}]\psi = -i\hbar x_k\frac{\partial}{\partial x_l}\psi + i\hbar x_k\frac{\partial}{\partial x_l}\psi + i\hbar\psi\frac{\partial}{\partial x_l}x_k = i\hbar\delta_{lk}\psi$

9. $\psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x}$ $\qquad A - ?\ ,\ \bar{x} - ?\ ,\ \bar{p} - ?$

$\langle \Delta x^2 \rangle - ?\ ,\ \langle$ [illegible]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, \psi^*(x)\, dx = 1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx = |A|^2 \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}}\ ,$$

$$\underline{\bar{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{x} \psi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{x^2}{a^2} - ik_0 x}\, x\, e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\underline{\bar{p}} = -\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx}\, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx}\, i\hbar\, e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \Big(\underbrace{-\frac{2x}{a^2}}_{0} + ik_0 \Big) =$$

$$= A^2 \hbar k_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx = \hbar k_0$$

$\Delta x = x - \langle x \rangle = x \quad , \Delta x^2 = x^2$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-\frac{x^2}{a^2} - ik_0 x} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2} + ik_0 x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} x^2 dx \overset{\vee}{\underset{\wedge}{=}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} x^2 dx = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{a^2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{a^2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} a =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{a^2}\right)} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} a^3$$

$$\overset{\vee}{\underset{\wedge}{=}} \frac{a^3}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi} |A|^2 = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\, a} = \frac{a^2}{4}$$

Кл. роб. 1 (a, [illegible], б, в), 3, 5 ([illegible], a, г) 6, 7, 9 (A, $\bar{x}$, $\langle \Delta x^2 \rangle$).

Д/роб. 1 (б), 4, 5 (в, g), 9 ($\bar{p}$) - ?

Знайти власне значення оператора $\hat{A}$, що належить власній ф-ї ψ_A

а) $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$; $\psi_A = \sin 2x$ $\qquad -\frac{d^2}{dx^2} \sin 2x = 4 \sin 2x$

б) $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ $\qquad \psi_A = \exp(-x^2/2)$ $\qquad \hat{A}\psi = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{d}{dx}\left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} =$

$= e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $\lambda = 1$

в) $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$; $\psi_A = \frac{\sin \alpha x}{x}$ $\qquad A = -\alpha^2$

Довести $\quad [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$

$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

5

ДЗ N 7 (б)

8 (б, в, г, g)

[illegible] 4 ($\bar{p}$)