КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Горкавенко Володимир Миколайович

Масивні векторні поля у формалізмі Штюкельберга

Навчально-методичний посібник для студентів фізичного факультету

Київ – 2023

ЗМІСТ

1 Вступ

Стандартна модель фізики елементарних частинок (СМ) була створена наприкінці 60-х років XX століття Стівеном Вайнбергом, Абдусом Саламою та Шелдоном Глешоу. СМ найкращим чином описує електромагнітні, слабкі та сильні взаємодії елементарних частинок та вдало витримує перевірку великою кількістю високоточних експериментів за участю елементарних частинок до енергетичних масштабів ~ 100 ГеВ (а для окремих процесів і до декількох ТеВ), а також добре узгоджується з даними космологічних спостережень.

З іншого боку, ряд фактів (наявність у нейтрино маси, проблема баріонної асиметрії, наявність у Всесвіті темної матерії) свідчить про те, що СМ не є повною фізичною моделлю та потребує модифікації.

СМ, як теоретична модель, базується на принципах локальної калібрувальної інваріантності та механізмі Хіггса генерації маси векторних бозонів. В цьому сенсі є цікавим розглянути альтернативний підхід до опису масивних векторних полів, а саме підхід Штюкельберга. В цьому підході лагранжіан масивного векторного поля має калібрувальну інваріантність відносно внутрішньої (фейкової) групи симетрії, в результаті чого маса векторного поля не потребує механізму Хіггса і задається як зовнішній параметр теорії.

Застосування підходу Штюкельберга має цікаві фізичні наслідки. В СМ підхід Штюкельберга, застосований до опису електромагнітного поля, дозволяє існування ненульової маси фотона, що менша за існуючі експериментальні обмеження $m_\gamma < 10^{-22}$ еВ. У векторному розширенні СМ шляхом додавання нових векторних бозонів (темних фотонів) використання підходу Штюкельберга може бути корисним, знімаючи питання про генерацію маси даних частинок, та дозволяє обійтися від введення в теорію нового (темного) хіггсівського поля. Взаємодія векторного поля Штюкельберга з аксіальним ферміонним струмом або з аномальним струмом, що генерується явищем кіральної аномалії, призводить до появи нових взаємодій, відсутніх в СМ, та забезпечує скорочення кіральної аномалії.

Даний навчально-методичний посібник написаний з метою допомогти студентам опанувати досить складний матеріал відповідної теми з курсу "Розширення Стандартної моделі" , що читається автором для студентів фізичного факультету освітньої програми "Квантова теорія поля".

2 Мотивація введення формалізму Штюкельберга опису масивних векторних полів групи $U(1)$

Як відомо, існують два підходи до лагранжевого опису масивного векторного поля: запис лагранжіана за допомогою тензора Максвела (лагранжіан Прока) та запис лагранжіана масивного векторного поля за аналогією з записом лагранжіана масивного скалярного поля, див. [1]. Оскільки зазначені два лагранжіани відрізняються один від одного на повну похідну, ми очікуємо їх еквівалентності. Однак, як ми побачимо далі, процедура вторинного квантування у зазначених двох формалізмах буде відрізнятися. При спробі узгодити між собою теорію вторинно квантованих векторних масивних полів в зазначених двох підходах і виникне поняття поля Штюкельберга.

Нагадаємо, як відбувається вторинне квантування масивного векторного поля [1]. В стандартному підході лагранжіан масивного зарядженого векторного поля (лагранжіан Прока) має вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{\dagger}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 V^{\mu}V^{\dagger}_{\mu}. \tag{2.1}$$

Даний лагранжіан не має калібрувальної інваріантності відносно перетворень за групою $U(1)$ за рахунок масового доданку. Рівняння руху для векторного поля, що описується лагранжіаном (2.1), має вигляд рівняння Прока:

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu} + m^2 V_{\nu} = 0. \tag{2.2}$$

Взявши похідну ∂^{ν} від обох частин останнього рівняння, отримаємо $m^2\partial^{\nu}V_{\nu} = 0$, звідки автоматично випливає умова Лоренца $\partial^{\nu}V_{\nu} = 0$. Вираз для енергії поля, що задається (2.1), є додатньовизначеним. За рахунок наявності умови Лоренца кількість ступенів вільності векторного поля замість 4 стає рівною 3 (три поляризаційні стани з проекцією спіну на напрямок руху ± 1, 0). Вторинне квантування відбувається канонічним чином.

В результаті канонічного вторинного квантування [2] отримаємо

$$[\hat{V}_{\mu}(x), \hat{V}_{\nu}(y)]_{-} = 0, \qquad [\hat{V}^{\dagger}_{\mu}(x), \hat{V}^{\dagger}_{\nu}(y)]_{-} = 0 \tag{2.3}$$

$$[\hat{V}_{\mu}(x), \hat{V}^{\dagger}_{\nu}(y)]_{-} = -i\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\right)\Delta_m(x-y), \tag{2.4}$$

де $\Delta_m(x-y)$ – функція Паулі-Йордана, що задовольняє рівнянню Клейна-Гордона $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Delta_m(x-y) = 0$. Взявши похідні від обох частин даного виразу та використавши рівняння на $\Delta_m(x-y)$, можна показати, що

$$[\partial^\mu \hat{V}_\mu(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = 0. \tag{2.5}$$

Розглянемо тепер лагранжіан масивного зарядженого векторного поля у формі, подібній до лагранжіану скалярного поля:

$$\mathcal{L} = -\partial^\nu V^\mu \partial_\nu V_\mu^\dagger + m^2 V^\mu V_\mu^\dagger. \tag{2.6}$$

Цей лагранжіан відрізняється від (2.1) лише на повну похідну, тому ми очікуємо еквівалентності лагранжіанів (2.1) та (2.6). З лагранжіану (2.6) випливає рівняння руху у формі Клейна-Гордона (в рівняння входить лише 4-потенціал, без тензора Максвелла)

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)V_\nu = 0. \tag{2.7}$$

Взявши похідну від обох частин даного виразу, отримаємо

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)(\partial^\nu V_\nu) = 0. \tag{2.8}$$

Тобто, як частковий випадок, згортка $\partial^\nu V_\nu$ може бути рівною нулю, а в загальному випадку це може бути ненульова функція, що задовольняє рівнянню (2.8).

Вираз для енергії поля, що задається лагранжіаном (2.6), не є додатньовизначеним. Просторові компоненти векторного поля дають позитивний внесок в енергію, а нульова компонента векторного поля дає негативний внесок в енергію векторного поля. Ситуацію рятує накладання умови Лоренца $\partial_\mu V^\mu = 0$, але воно відбувається штучно, а не випливає з рівнянь руху, як це було в (2.2).

Подібна ситуація виникає і у випадку безмасового електромагнітного поля, якщо його описувати лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu. \tag{2.9}$$

Щоб енергія електромагнітного поля не була негативною, штучно накладається умова Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Якщо це зробити на рівні класичних полів, то у вираз для енергії ввійдуть лише дві компоненти електромагнітного поля. І потім при квантуванні лише дві компоненти будуть проквантовані. Тому при вторинному квантуванні електромагнітного поля методом Блейлера-Гупта виявляється коректним накласти умову Лоренца не на класичні поля, а на оператори електромагнітних полів після вторинного квантування, а саме:

$$\partial^{\mu}\hat{A}^{-}_{\mu}|phys\rangle = 0, \tag{2.10}$$

де мається на увазі $\hat{A}_{\mu} = \hat{A}^{-}_{\mu} + \hat{A}^{+}_{\mu}$, оператор $\hat{A}^{-}_{\mu}$ містить лише оператори знищення, а $\hat{A}^{+}_{\mu}$ лише оператори народження.

Комутаційні співвідношення на оператори нейтральних безмасових полів в цьому випадку матимуть вигляд [1]:

$$[\hat{A}_{\mu}(x), \hat{A}_{\nu}(y)]_{-} = -ig_{\mu\nu}\Delta_{0}(x-y), \tag{2.11}$$

де нижній індекс 0 поблизу Δ означає безмасовість векторних полів. Легко отримати, що

$$[\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}(x), \partial^{\nu}\hat{A}_{\nu}(y)]_{-} = 0, \tag{2.12}$$

бо для безмасового поля $\partial^{\mu}\partial_{\mu}\Delta_{0}(x-y) = 0$.

Співвідношення (2.10) не суперечить умові (2.12). Справді,

$$\begin{aligned}&[\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}(x), \partial^{\nu}\hat{A}_{\nu}(y)]_{-} = \\ &\quad = [\partial^{\mu}\hat{A}^{-}_{\mu}(x), \partial^{\nu}\hat{A}^{+}_{\nu}(y)]_{-} + [\partial^{\mu}\hat{A}^{+}_{\mu}(x), \partial^{\nu}\hat{A}^{-}_{\nu}(y)]_{-} = 0\,||phys\rangle.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Врахувавши (2.12), отримаємо

$$\begin{aligned}&\partial^{\mu}\hat{A}^{-}_{\mu}(x)\partial^{\nu}\hat{A}^{+}_{\nu}(y)|phys\rangle - \partial^{\nu}\hat{A}^{-}_{\nu}(y)\partial^{\mu}\hat{A}^{+}_{\mu}(x)|phys\rangle = \\ &\qquad\qquad /\partial^{\mu}\hat{A}^{+}_{\mu}|phys\rangle = |phys'\rangle/ = 0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здавалося б, що метод Блейлера-Гупта можна застосувати і для масивного зарядженого векторного поля з лагранжіаном

$$\mathcal{L} = -\partial_{\nu}V^{\dagger}_{\mu}\partial^{\nu}V^{\mu} + m^{2}V^{\dagger}_{\mu}V^{\mu}, \tag{2.15}$$

але виявляється, що накладання умови (2.10) є суперечливим по відношенню до комутаційних операторів полів [3]. Справді, комутаційні співвідношення на оператори масивних заряджених векторних полів в даному підході матимуть вигляд [1]:

$$[\hat{V}_\mu(x), \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = -ig_{\mu\nu}\Delta_m(x-y), \tag{2.16}$$

відповідно,

$$[\partial^\mu \hat{V}_\mu(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- = i\partial^\mu\partial_\mu\Delta_m(x-y) = -im^2\Delta_m(x-y) \neq 0, \tag{2.17}$$

що суперечить умові $\partial^\mu \hat{V}_\mu^- |phys\rangle = 0$ [1, 3].

Для вирішення цієї проблеми Штюкельберг у 1938 році запропонував доповнити лагранжіан зарядженого векторного масивного поля (2.6), а саме - додати до нього заряджене скалярне поле $B(x)$, що отримало назву поля Штюкельберга. Дане поле має задовольняти рівнянню

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)B = 0 \tag{2.18}$$

з тією ж масою, що і маса векторного зарядженого масивного поля.

Для операторів вторинноквантованого скалярного поля комутаційні співвідношення мають стандартний вигляд [1]:

$$[\hat{B}(x), \hat{B}(y)]_- = 0, \qquad [\hat{B}(x), \hat{B}^\dagger(y)]_- = i\Delta_m(x-y). \tag{2.19}$$

Тоді автоматично буде виконуватися умова

$$\begin{aligned}&[\partial^\mu \hat{V}_\mu(x) + m\hat{B}(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y) + m\hat{B}^\dagger(y)]_- = \\ &\qquad = [\partial^\mu \hat{V}_\mu(x), \partial^\nu \hat{V}_\nu^\dagger(y)]_- + m^2[\hat{B}(x), \hat{B}^\dagger(y)]_- = 0\end{aligned} \tag{2.20}$$

і можна накласти несуперечливу умову квантування у вигляді

$$S^-|phys\rangle = (\partial^\mu \hat{V}_\mu + m\hat{B})^-|phys\rangle = 0 \tag{2.21}$$

та комутаційні співвідношення

$$[S(x), S(y)]_- = [S(x), S^\dagger(y)]_- = 0. \tag{2.22}$$

До питання введення додаткового скалярного поля Штюкельберга можна підійти і з іншого боку, більш просто. Комутаційні співвідношення для вторинноквантованих операторів полів лагранжіана (2.1) мають вигляд (2.4), а комутаційні співвідношення для вторинноквантованих операторів полів лагранжіана (2.15) мають вигляд (2.16). Якщо лагранжіани (2.1) та (2.15) є тотожними (відрізняються на доданки, що являють собою повну похідну), то чому комутаційні співвідношення для вториннoквантованих операторів полів є різними? Доповнення векторного поля додатковим скалярним полем вирішує цю проблему, справді

$$\left[V_\mu(x) - \frac{1}{m}\partial_\mu B(x), V_\nu^\dagger(y) - \frac{1}{m}\partial_\nu B^\dagger(y)\right]_- =$$
$$= -i\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta_m(x-y), \quad (2.23)$$

що й збігається з виразом (2.4). Можна показати, що умови (2.20) та (2.23) еквівалентні.

Таким чином, замість лагранжіана (2.6), Штюкельберг запропонував використовувати лагранжіан векторного масивного поля разом з допоміжним скалярним полем B:

$$\mathcal{L} = -\partial_\nu V_\mu^\dagger \partial^\nu V^\mu + m^2 V_\mu^\dagger V^\mu + \partial^\mu B^\dagger \partial_\mu B - m^2 B^\dagger B. \quad (2.24)$$

Накладання додаткової умови (2.21) робить енергію системи полів даного лагранжіана додатньовизначеною.

Порахуємо тепер кількість ступенів вільності в останньому лагранжіані – їх 5, а має бути для лагранжіана масивного векторного поля 3. Один ступінь вільності зніме додаткова умова (2.21). Однак має існувати ще одна умова, яка б зняла ще один ступінь вільності. Такою умовою є умова калібрувальної інваріантності лагранжіану (2.24) відносно перетворень

$$V_\mu \to V'_\mu = V_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad B \to B' = B + m\Lambda, \quad (2.25)$$

де Λ – комплексна функція, що задовільняє умові $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Lambda = 0$. Зазначену інваріантність легко побачити, якщо додати до лагранжіану (2.24) повну похідну $-m\partial^\mu[V_\mu^\dagger B + B^\dagger V_\mu]$ і перетворити лагранжіан до вигляду:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2\left(V_\mu^\dagger - \frac{1}{m}\partial_\mu B^\dagger\right)\left(V^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) -$$
$$- (\partial^\mu V_\mu^\dagger + mB^\dagger)(\partial^\mu V_\mu + mB) =$$
$$-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} + m^2 V_\mu^\dagger V^\mu - (\partial^\mu V_\mu^\dagger)(\partial^\nu V_\nu) + \partial_\mu B^\dagger \partial^\mu B - m^2 B^\dagger B \quad (2.26)$$

де ми врахували, що якщо відкинути повну похідну, є справедливим вираз

$$F^{\dagger}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2 = \partial_\nu V^{\dagger}_{\mu}\partial^\nu V^\mu - (\partial^\mu V^{\dagger}_{\mu})(\partial^\nu V_\nu).$$

Умова $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Lambda = 0$ випливає з інваріантності другого рядка лагранжіана (2.26) відносно перетворень (2.25). Лагранжіан (2.26) отримав назву лагранжіана Штюкельберга.

У випадку нейтрального векторного поля лагранжіан Штюкельберга набуває вигляду

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\left(V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right)\left(V^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) - \frac{1}{2}(\partial^\mu V_\mu + mB)^2$$
$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2}(\partial^\mu V_\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{m^2}{2}B^2. \quad (2.27)$$

Якщо перепозначити $X_\mu = V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$, то $F_{\mu\nu} = X_{\mu\nu}$ та отримаємо

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}X^{\dagger}_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + m^2 X^{\dagger}_{\mu}X^\mu - (\partial^\mu X^{\dagger}_{\mu})(\partial^\nu X_\nu), \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}X_\mu X^\mu - \frac{1}{2}(\partial^\nu X_\nu)^2 \quad (2.29)$$

для випадків зарядженого та нейтрального полів відповідно. Звертаємо увагу, що комутаційні співвідношення для операторів вторинно-квантованих полів записуються саме для полів X_μ (2.23).

Головна відмінність лагранжіанів Штюкельберга від лагранжіану звичайного масивного векторного поля полягає у тому, що лагранжіан звичайного векторного масивного поля не має інваріантності до калібрувальних перетворень, а лагранжіан Штюкельберга масивних векторних полів має інваріантність відносно фейкових калібрувальних перетворень групи $U(1)$, див. (2.25), при яких поле X_μ не змінюється [4]. Це дає нові можливості для запису доданків для взаємодії поля Штюкельберга з іншими полями.

3 R_ξ калібрування у формалізмі Штюкельберга

Наведені вище лагранжіани Штюкельберга (2.28), (2.29) були побудовані виходячи з вимоги узгодження комутаційних співвідношень для операторів вториннoквантованих функцій з відповідними співвідношеннями, що випливали з лагранжіану Прока. Однак використання лагранжіану Штюкельберга дозволяє провести узагальнення лагранжіана векторного поля на випадок довільного калібрування.

Для спрощення розглядатимемо лише випадок нейтрального векторного поля. Узагальнення має такий вигляд:

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\left(V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right)\left(V^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 =$$
$$= -\frac{1}{4}X_{\mu\nu}X^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}X_\mu X^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu X_\mu)^2 =$$
$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\nu V^\nu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{\xi m^2}{2}B^2, \quad (3.30)$$

де $\xi > 0$ – параметр, що фіксує калібрування. Звертаємо увагу, що означення 4-вектора $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m$ не змінилося, змінилася лише маса поля B: $m \to \sqrt{\xi}m$ (тому й накладається вимога $\xi > 0$). Звертаємо увагу, що змінився вираз для 4-дивергенції $\partial^\mu X_\mu = \partial^\mu V_\mu + mB \to \partial^\mu V_\mu + \xi mB$.

Вираз в передостанньому рядку лагранжіана (3.30) можна розглядати як функцію Лагранжа з додатковою умовою $\partial^\mu X_\mu = 0$ у формалізмі знаходження екстремуму функцій в математичному аналізі за наявності додаткової умови на функцію. Параметр ξ в цьому випадку можна розглядати як параметр Лагранжа. Отже, можна вважати, що в узагальненому формалізмі Штюкельберга векторне поле X_μ є комбінацією векторного та скалярного полів $X_\mu = V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$ (B – скалярне поле з масою $\sqrt{\xi}m$) з узагальненою умовою Лоренца у формі $\partial^\mu X_\mu = \partial^\mu V_\mu + \xi mB = 0$. Оскільки нам треба зберегти кількість ступенів вільностей для масивного векторного поля, що дорівнює 3, то замість умови Лоренца ми могли обрати і будь-яку іншу умову. Умова ж $\partial^\mu X_\mu = \partial^\mu V_\mu + \xi mB = 0$ виділена тим, що забезпечує відсутність змішування між полями V_μ та B в кінцевому лагранжіані.

Лагранжіан Штюкельберга (3.30) в узагальненому випадку залишається інваріантним до "фейкових" калібрувальних перетворень

$$V_\mu \to V'_\mu = V_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad B \to B' = B + m\Lambda, \tag{3.31}$$

де Λ має задовольняти умові $(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)\Lambda = 0$.

З лагранжіана (3.30) можна отримати такі рівняння на польові функції

$$\partial_\nu \partial^\nu V_\mu + m^2 V_\mu - (1 - \xi^{-1})\partial_\mu(\partial_\nu V^\nu) = 0, \tag{3.32}$$

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \xi m^2)B = 0. \tag{3.33}$$

Продиференціювавши обидві частини рівняння (3.32) за допомогою дії оператора ∂_μ, отримаємо

$$\xi^{-1}(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)(\partial_\nu V^\nu) = 0, \tag{3.34}$$

тобто $\partial_\nu V^\nu$ в цьому випадку не обов'язково має дорівнювати нулю, воно має задовольняти рівнянню Клейна-Гордона, неначе скалярне поле з масою $\sqrt{\xi} m$.

Використавши означення $X_\mu = V_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$, легко отримати, що

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \xi m^2)(\partial_\nu X^\nu) = 0. \tag{3.35}$$

3.1 Пропагатор поля Штюкельберга в R_ξ калібруванні

Для лагранжіана векторного масивного поля у формі Прока (2.1) причинна функція Гріна, або пропагатор, має вигляд

$$\langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle_{Proc} = \frac{-i}{m^2 - k^2 - i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right). \tag{3.36}$$

Пропагатор поля Штюкельберга визначається як

$$\begin{aligned} D^{Sht}_{\mu\nu}(x - x') = -i\langle 0|\hat{T}\hat{X}_\mu(x)\hat{X}_\nu(x')|0\rangle = \\ - i\langle 0|\hat{T}(\hat{V}_\mu(x) - \partial_\mu \hat{B}(x)/m)(\hat{V}_\nu(x') - \partial_\nu \hat{B}(x')/m)|0\rangle = \\ - i\langle 0|\hat{T}\hat{V}_\mu(x)\hat{V}_\nu(x')|0\rangle - i\frac{\partial^{(x)}_\mu \partial^{(x')}_\nu}{m^2}\langle 0|\hat{T}\hat{B}(x)\hat{B}(x')|0\rangle. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Пропагатор векторного поля з останнього рядка лагранжіана (3.30)

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\nu V^\nu)^2 \tag{3.38}$$

в імпульсному просторі має вигляд [5, 6, 7]

$$\langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle = \frac{-i}{m^2-k^2-i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{\xi m^2-k^2-i\epsilon}\right). \tag{3.39}$$

Пропагатор скалярного поля з останнього рядка лагранжіана (3.30)

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{\xi m^2}{2}B^2 \tag{3.40}$$

в імпульсному просторі має вигляд

$$\langle \hat{B}(k)\hat{B}(-k)\rangle = \frac{i}{\xi m^2 - k^2 - i\epsilon}. \tag{3.41}$$

Відповідно, в імпульсному просторі

$$\begin{aligned}\langle \hat{X}_\mu(k)\hat{X}_\nu(-k)\rangle &= \langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\langle \hat{B}(k)\hat{B}(-k)\rangle = \\ &\frac{-i}{m^2-k^2-i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{\xi m^2-k^2-i\epsilon}\right) + \frac{ik_\mu k_\nu/m^2}{\xi m^2 - k^2 - i\epsilon} = \\ &\frac{-i}{m^2-k^2-i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Звертаємо увагу, пропагатор поля Штюкельберга в довільному калібруванні виявився незалежним від калібрування та рівним пропагатору лагранжіана Прока (3.36). Проаналізуємо складові отриманого виразу для окремих значень калібрувального параметра ξ.

Для випадку $\xi = 0$ (калібрування Ландау) матимемо

$$\langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle = \frac{-i}{m^2-k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \tag{3.43}$$

тобто внесок поля V_μ в пропагатор є повністю повздовжнім, бо згортка $\langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle k^\nu = 0$ ($V_\mu k^\mu = 0$). Відповідно, внесок поля B є повністю поперечним. Вираз пропагатора (3.43) збігається з виразом пропагатора безмасового векторного поля, де внесок у пропагатор дають лише два поляризаційні стани з проекцією спіна ± 1 на напрямок руху. При $\xi = 0$ маса поля B дорівнює нулю і ситуація стає схожою на ту, коли бозон векторного поля набуває масу в результаті спонтанного порушення симетрії, а додатковий ступінь вільності бере за рахунок поглинання голдстоунівського бозону.

Для випадку $\xi = \infty$ (унітарне калібрування) матимемо

$$\langle \hat{X}_\mu(k)\hat{X}_\nu(-k)\rangle = \langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle = \frac{-i}{m^2 - k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right). \quad (3.44)$$

Скалярне поле B випадає з розгляду та ні на що не впливає, бо має масу $\sqrt{\xi}m = \infty$, відповідно, $\langle \hat{B}(k)\hat{B}(-k)\rangle = 0$. Відповідно, в унітарному калібруванні формалізм поля Штюкельберга збігається з формалізмом векторного поля, що задається лагранжіаном Прока.

Звертаємо увагу, що при довільному значенні ξ (не 0 та не ∞), асимптотична поведінка пропагаторів при $k_\mu \to \infty$ має вигляд:

$$\langle \hat{V}_\mu(k)\hat{V}_\nu(-k)\rangle \sim \frac{1}{k^2}; \quad \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\langle \hat{B}(k)\hat{B}(-k)\rangle \sim \frac{1}{m^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (3.45)$$

тобто внесок поля B (повздовжній внесок) не прямує до нуля, що є небезпечним для перенормовності теорії.

Якщо ж розглядати поле Штюкельберга як зовнішню лінію у певній діаграмі Фейнмана, то трьом векторам поляризацій відповідають вектора

$$\varepsilon^1 = (0,1,0,0), \quad \varepsilon^2 = (0,0,1,0), \quad \varepsilon^L = \frac{1}{m}(|\vec{k}|,0,0,k_0). \quad (3.46)$$

Ми знову бачимо, що зі зростанням енергії внесок повздовжньої моди буде збільшуватися.

В цьому місці доречно згадати про *теорему еквівалентності голдстоунівського бозона* [6]: амплітуда випромінення або поглинання повздовжнього масивного калібрувального бозона при великих енергіях дорівнює амплітуді випромінення або поглинання голдстоунівського бозона. Теорема є справедливою в довільному калібруванні.

В частковому випадку, на рівні написаних вище пропагаторів це математично означає домінуючий внесок у пропагатор поля Штюкельберга B мезона, що при $\xi = 0$ має нульову масу:

$$\langle \hat{X}_\mu(k) \hat{X}_\nu(-k) \rangle|_{k^2 \gg m^2} = \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \langle \hat{B}(k) \hat{B}(-k) \rangle|_{\xi=0}. \tag{3.47}$$

4 Маса поля Штюкельберга

Перше, на що потрібно звернути увагу, так це на те, що коли векторне поле калібрувальної групи $U(1)$ описувалося в фрмалізмі Прока, то його масовий доданок порушував принцип локальної калібрувальної інваріантності [8]. Відповідно, для введення маси векторного поля нам було необхідно поле Хіггса зі спонтанним порушенням симетрії, чиє ненульове вакуумне середнє генерувало масу векторного поля. У випадку ж векторного поля Штюкельберга його лагранжіан (3.30) має інваріантність відносно "фейкових" калібрувальних перетворень (3.31) і наявність масового доданку векторного поля нічим не забороняється, а отже, маса поля Штюкельберга може задаватися як стартовий параметр теорії. Тобто для введення маси поля Штюкельберга немає потреби у введенні поля Хіггса та застосуванні принципу спонтанного порушення симетрії [9, 10].

Розглянемо для узагальнення ситуацію, коли ми маємо масивне поле Штюкельберга та скалярне поле Хіггса:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m} \right) \left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m} \right) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 \\ + (D_\mu \varphi)^* D^\mu \varphi - \lambda \left(|\varphi|^2 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right)^2, \tag{4.48}$$

де $D_\mu = \partial_\mu - ieV_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$.

Звертаємо увагу, що в подовжену похідну D_μ входить лише поле V_μ, оскільки для лагранжіана скалярного поля з калібрувальним полем ми і далі вимагатимемо виконання принципу локальної калібрувальної інваріантності. В цілому ж, лагранжіан (4.48) є калібрувально інваріантним відносно перетворень

$$\varphi \to \varphi' = e^{-i\alpha(x)} \varphi, \quad \varphi^* \to \varphi^{*\prime} = e^{i\alpha(x)} \varphi^*, \\ \psi \to \psi' = e^{-i\alpha(x)} \psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{i\alpha(x)} \overline{\psi} \\ V_\mu \to V'_\mu = V_\mu - \partial_\mu \alpha(x)/e, \quad B \to B' = B - m\,\alpha(x)/e. \tag{4.49}$$

Далі ми не будемо цікавитися ферміонною частиною лагранжіана (4.48), але вважатимемо, що поле Хіггса знаходиться в околі стану з мінімумом енергії:

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + \chi(x)}{\sqrt{2}}\, e^{i\theta(x)/\varphi_0}. \tag{4.50}$$

Тоді лагранжіан (4.48) отримає вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m}\right)\left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m}\right) - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta - e\varphi_0 V_\mu)^2\left(1 + \frac{\chi}{\varphi_0}\right)^2 - \lambda\chi^2\left(\varphi_0 + \frac{\chi}{2}\right)^2, \tag{4.51}$$

де поле θ є безмасовим голдстоунівським бозоном та є нефізичним. Він нього можна позбутися шляхом калібрувальних перетворень

$$\varphi \to e^{-i\theta/\varphi_0}\varphi = \frac{\varphi_0 + \chi}{\sqrt{2}}, \quad V_\mu \to V_\mu - \frac{\partial_\mu\theta}{e\varphi_0}, \quad B \to B - \frac{m}{e\varphi_0}\theta. \tag{4.52}$$

Тоді лагранжіан (4.48) набуде вигляду

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\left(V_\mu - \frac{\partial_\mu B}{m}\right)\left(V^\mu - \frac{\partial^\mu B}{m}\right) - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\partial^\mu\chi\partial_\mu\chi + \frac{e^2}{2}(\varphi_0 + \chi)^2 V^\mu V_\mu - \frac{\lambda}{4}(\chi^2 + 2\varphi_0\chi)^2 \tag{4.53}$$

і здавалося б, що все добре. Однак є проблема, пов'язана з тим, що останній доданок в першому рядку лагранжіана (4.53) при перетвореннях (4.52) буде інваріантним лише за умови $(\partial_\mu\partial^\mu + \xi m^2)\theta = 0$, але ж поле θ є безмасовим – ми отримали протиріччя.

Вирішити протиріччя можна за рахунок модифікації доданку лагранжіана, що визначає додаткову умову для поля Штюкельберга:

$$\mathcal{L}_{cond} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B)^2 \to -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu + \xi m B + \xi e\varphi_0\theta)^2, \tag{4.54}$$

яку можна записати як

$$\mathcal{L}_{cond} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu V_\mu)^2 - \frac{\xi}{2}(mB + e\varphi_0\theta)^2 + V^\mu\partial_\mu(mB + e\varphi_0\theta)$$
$$- \partial_\mu[V^\mu(mB + e\varphi_0\theta)], \tag{4.55}$$

де останній рядок можна відкинути як повну похідну. Перше, що треба відзначити – ми отримали недіагональний вираз для масових доданків полів B та ξ:

$$\mathcal{L}_{B\theta}^{mass} = -\frac{\xi}{2}(mB + e\varphi_0\theta)^2 = -\frac{\xi m^2}{2}B^2 - \frac{\xi(e\varphi_0)^2}{2}\theta^2 - \xi m e\varphi_0 B\theta$$
$$= -\frac{1}{2}(B;\,\theta)\begin{pmatrix} \xi m^2 & \xi m e\varphi_0 \\ \xi m e\varphi_0 & \xi(e\varphi_0)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Масову матрицю можна діагоналізувати шляхом унітарних перетворень

$$\begin{pmatrix} B \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S \\ G \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Тоді лагранжіан (4.56) запишеться у вигляді:

$$\mathcal{L}_{B\theta}^{mass} = -\frac{S^2}{2}\xi(e\varphi_0\sin\beta + m\cos\beta)^2 - \frac{G^2}{2}\xi(e\varphi_0\cos\beta - m\sin\beta)^2$$
$$-\frac{SG}{2}\xi(2me\varphi_0\cos 2\beta - (m^2 - (e\varphi_0)^2)\sin 2\beta). \quad (4.58)$$

Зануливши коефіцієнт поблизу змішаного доданку SG, отримаємо

$$\tan 2\beta = \frac{2me\varphi_0}{m^2 - (e\varphi_0)^2};\ \text{або}$$
$$\tan\beta = \frac{e\varphi_0}{m};\ \sin\beta = \frac{e\varphi_0}{\sqrt{m^2 + (e\varphi_0)^2}};\ \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + (e\varphi_0)^2}}. \quad (4.59)$$

Тоді в нових позначеннях

$$\mathcal{L}_{B\theta}^{mass} = -\frac{\xi(m^2 + (e\varphi_0)^2)}{2}S^2, \quad (4.60)$$

тобто поле S (поле Штюкельберга) стало масивним, а поле G (голдстоунівське поле) стало безмасовим.

В нових позначеннях лагранжіан набуде вигляду

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2}V_\mu V^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu V^\mu)^2 +$$
$$\frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S - \frac{\xi m_\gamma^2}{2}S^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu G\partial^\mu G +$$
$$\frac{1}{2}\partial_\mu \chi\partial^\mu \chi - \frac{m_h^2}{2}\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\chi^4 - \lambda\varphi_0\chi^3 +$$
$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0} + \frac{\chi^2}{2\varphi_0^2}\right)\left[\left(\frac{e\varphi_0}{m_\gamma}\partial_\mu S + \frac{e\varphi_0}{m_\gamma}\partial_\mu G\right) - e\varphi_0 V_\mu\right]^2, \quad (4.61)$$

де $m_\gamma = \sqrt{m^2 + (e\varphi_0)^2}$ – маса векторного поля, в яку дає внесок як параметр масивного поля Штюкельберга, так і ненульове вакуумне середнє поля Хіггса.

5 Взаємодії за участю поля Штюкельберга

Перше, що потрібно відзначити, є те, що поле Штюкельберга має внутрішню "фейкову" симетрію. Тому взаємодія може будуватися напряму з полем Штюкельберга (не потрібно задовольняти вимоги калібрувальної інваріантності до перетворень поля Штюкельберга) і може містити доданки типу $X_\mu j^\mu$, $(X^\mu X_\mu)^2$, $X^\mu X_\mu H^+ H$ і т.д.

Як вже зазначалося, найбільш проблемною з позиції збереження унітарності та перенормування є взаємодія зі струмом компоненти поля Штюкельберга, що являє собою повну похідну $\partial_\mu B/m_X$, де m_X – маса поля Штюкельберга. Розглянемо її детальніше.

5.1 Взаємодія зі струмом, що зберігається

У випадку взаємодії поля Штюкельберга $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m_X$ зі струмом, що зберігається, доданком $\partial_\mu B/m_X$ можна знехтувати, оскільки інтегруванням лагранжіана за частинами легко отримати $(\partial_\mu B)j^\mu = B(\partial_\mu j^\mu) = 0$. Так і повинно бути, бо доданок лагранжіана зі взаємодією звичайного векторного поля зі струмом, що зберігається, $A_\mu j^\mu$ має бути інваріантним відносно калібрувальних перетворень $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$, що є очевидним завдяки використанню методу інтегрування за частинами: $\partial_\mu f j^\mu = -f\partial_\mu j^\mu = 0$. Отже, при взаємодії поля Штюкельберга зі струмом, що зберігається, ми можемо записати

$$\mathcal{L}_{int} = g_v X_\mu j^\mu = g_v(V_\mu - \partial_\mu B/m_X)j^\mu = g_v V_\mu j^\mu, \tag{5.62}$$

тобто по зазначеній взаємодії ми не зможемо відрізнити поле Штюкельберга від звичайного векторного поля Прока.

5.2 Взаємодія зі струмом, що не зберігається

Розглянемо взаємодію поля Штюкельберга $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m_X$ зі струмом, що не зберігається. Візьмемо для цього аксіальний струм $f_a = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$. На класичному рівні ми маємо співвідношення для 4-дивергенції аксіального струму у вигляді: $\partial_\mu j_a^\mu = 2im_f\,\bar{\psi}\gamma^5\psi$. Тоді взаємодію поля Штюкельберга можна записати у вигляді

$$\mathcal{L}_{int} = g_a X_\mu j_a^\mu = g_a(V_\mu - \partial_\mu B/m_X)j^\mu = g_a V_\mu j^\mu + g_a \frac{2im_f}{m_X}\,\bar{\psi}\gamma^5\psi B, \tag{5.63}$$

звідки випливає, що взаємодію з полем B необхідно враховувати.

На перший погляд може скластися враження, що взаємодія поля B з ферміонами є гарною з фізичної точки зору, оскільки описується польовим оператором розмірності 4. Однак, розглянувши взаємодію лише поля B з ферміонами, наприклад, в реакції $XX \to ff$, ми побачимо, що амплітуда реакції при $s \gg m_X^2, m_f^2$ та при сталому значенні t веде себе як

$$|M_{fi}|^2 = \frac{32g_a^2 m_f^4 s}{m_X^4(m_f^2 - t)} + ..., \tag{5.64}$$

де опущені доданки, що повільніше зростають при зростанні s. Легко побачити, що при певному значенні змінної Мандельштама s величина $|M_{fi}|^2$ стане більшою за 1 і умова унітарності буде порушеною [11]. Відповідно, вище порогового значення $s \gtrsim s_{max} = m_X^4/(32g_a^4 m_f^2)$ теорія втрачає фізичний сенс, отже, вона може бути ефективно застосована лише у відповідному низькоенергетичному масштабі. Це говорить про те, що у фізично коректному лагранжіані має бути побудована взаємодія поля Штюкельберга з декількома аксіальними струмами так, щоб при великих значеннях s амплітуди типу (5.64) взаємно скорочувалися.

Корисно відзначити, що взаємодія поля Штюкельберга X^μ з аксіальним струмом також міститься у взаємодії полів Хіггса з X^μ (оператор розмірності 4):

$$iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H X^\mu \,. \tag{5.65}$$

Нагадуємо, що за визначенням $H^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H = H^\dagger(D_\mu H) - (D_\mu H^\dagger)H$, де D_μ – подовжена похідна, що включає калібрувальні поля групи слабкого ізоспіну $SU_W(2)$ та гіперзаряду $U_Y(1)$. Саме ж поле Штюкельберга не змінюється при калібрувальних перетвореннях.

Зосередимось на взаємодії повздовжньої частини поля Штюкельберга:

$$iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H X_L^\mu \to -iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H \frac{\partial^\mu B}{m_X} \,. \tag{5.66}$$

Застосувавши інтегрування частинами, запишемо останній вираз як

$$i\frac{B}{m_X}\,\partial^\mu(H^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H) = i\frac{B}{m_X}\,\left[H^\dagger D^2 H - (D^2 H^\dagger)H\right], \tag{5.67}$$

де в останньому виразі ми замінили частинну похідну на коваріантну, оскільки доданки з калібрувальними полями зануляться під дією оператора $\overleftrightarrow{D}$. Використавши рівняння руху хіггсівського поля, отримаємо зв'язок поля B з псевдоскалярним струмом, що пропорційний юкавівським сталим зв'язку[1]:

$$\to -i\frac{B}{m_X}(\bar{f}_L y_f\, f_R - \bar{f}_R\, y_f^\dagger f_L)\frac{(v+h)}{\sqrt{2}}. \tag{5.68}$$

Ми можемо провести процедуру діагоналізації матриць Юкави так, щоб їхні значення були дійсними та додатними, та отримаємо

$$\to -i\ y_f\,\frac{(v+h)}{\sqrt{2}}\ \frac{B}{m_X}\,(\bar{f}\gamma_5 f). \tag{5.69}$$

Останній вираз містить в собі і аксіальний струм. Покажемо це.

Врахувавши, що $\frac{(v+h)}{\sqrt{2}}e_L = H^\dagger L$, вираз (5.69) можна записати як

$$-i\,\frac{B}{m_X}((\bar{L}H)\,y_e e_R - \bar{e}_R y_e^\dagger\, H^\dagger L + \cdots). \tag{5.70}$$

[1] Наведені вирази справедливі для лептонів та нижніх кварків (лагранжіан юкавівської взаємодії через поле H, а не $\tilde{H}$). Але вирази можна узагальнити і для верхніх кварків.

Використавши рівняння руху для ферміонів $i\gamma^\mu D_\mu e_R - y_e^\dagger H^\dagger L = 0$, запишемо

$$-i\,\frac{B}{m_X}(\bar{L}iDL - \bar{e}_R iDe_R + \cdots) = -i\,\frac{B}{m_X}(\bar{L}i\gamma^\mu\partial_\mu L - \bar{e}_R i\gamma^\mu\partial_\mu e_R + \cdots)$$
$$= i\,\frac{B}{m_X}(\bar{f}\gamma^\mu\gamma_5 f + \cdots). \quad (5.71)$$

Отже, взаємодія з полем Хіггса (5.65) буде містити в собі взаємодію аксіального струму з полем Штюкельберга X_μ, що дасть відповідне зростання амплітуди реакції зі збільшенням енергії взаємодіючих частинок.

Хоча взаємодії $X_\mu \overline{f}\gamma^\mu\gamma_5 f$ та $iH^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu H X^\mu$ окремо призводять до амплітуд, що зростають зі зростанням енергії, можна підібрати таку комбінацію цих доданків, яка не буде зростати при збільшенні енергії частинок. Тобто загальний коефіцієнт при аксіальному струмі має бути виду [4, 12]:

$$i\sum_f \frac{y_f(v+h)}{\sqrt{2}m_X}\Big((Y_{f_R} - Y_{f_L}) \pm Y_H\Big)\,B\,(\bar{f}\gamma_5 f), \quad (5.72)$$

де Y_{f_L}, Y_{f_R} – гіперзаряди правих та лівих ферміонів (f_L та f_R) відповідно, Y_H – гіперзаряд поля Хіггса, а знак $+$ $(-)$ відповідає випадку лептонів та нижніх (верхніх) кварків. Комбінація гіперзарядів, що входить у зазначений вираз, задовольняє інваріантність лагранжіану СМ відносно калібрувальних перетворень групи $U_Y(1)$ та дорівнює нулю.

5.3 Взаємодія з полем Хіггса

На перенормовному рівні існує лише один доданок взаємодії поля Хіггса з полем Штюкельберга X^μ:

$$\frac{1}{2}\lambda_2|H|^2 X_\mu X^\mu\,, \quad (5.73)$$

де λ_2 – безрозмірна стала взаємодії. Тоді поле Хіггса в околі стану з мінімумом потенціалу даватиме додатковий внесок в масу Штюкельберговського векторного поля і призведе до її перевизначення:

$$\tilde{m}_X^2 = m_X^2 + \frac{\lambda_2 v^2}{2}\,. \quad (5.74)$$

Взаємодія повздовжньої компоненти поля Штюкельберга з полем Хіггса буде визначатися виразом

$$\frac{1}{2}\lambda_2|H|^2X_\mu X^\mu \to \frac{1}{2\tilde{m}_X^2}\lambda_2|H|^2(\partial_\mu B\partial^\mu B), \tag{5.75}$$

що породжує оператори взаємодії повздовжньої моди B з полем Хіггса розмірності 5 та 6:

$$\frac{\lambda_2(2vh+h^2)}{2\tilde{m}_X^2}(\partial_\mu B\partial^\mu B). \tag{5.76}$$

Така взаємодія призведе до зростання амплітуд реакцій при зростанні енергій взаємодіючих частинок як $\sqrt{s}/m_X$. Явний розрахунок реакції $XX \to hh$ та накладання умови унітарності у вигляді $|\mathcal{M}|^2 = 1$ призводить до максимального порогового значення енергії взаємодіючих частинок у вигляді $\sqrt{s_{\max}} \sim \tilde{m}_X\sqrt{2/\lambda_2}$, що визначатиме межі застосовності такої взаємодії. Зазначимо, що у частковому випадку, коли основним внеском в масу X^μ є внесок від доданка пропорційного λ_2 (тобто $\tilde{m}_X^2 \simeq \lambda_2 v^2/2$), порогове значення $\sqrt{s_{\max}} \sim v$ визначається масштабом електрослабкої взаємодії та не залежить від маси поля Штюкельберга.

Оператор (5.73) генерує додаткову масу векторного поля Штюкельберга за аналогією до того, як генерується маса векторного поля групи $U(1)$ в механізмі Хіггса. Замість λ_2 в останньому випадку буде g^2, де g – відповідна стала зв'язку. Відповідно, можна очікувати, що стала λ_2 буде мати додатне значення, що є важливим при визначенні маси поля Штюкельберга у формі (5.73).

5.4 Самодія поля Штюкельберга

Існує лише один перенормовний оператор самодії поля Штюкельберга. Він має розмірність 4:

$$\frac{1}{4!}\lambda_4(X_\mu X^\mu)^2\,, \tag{5.77}$$

де λ_4 – безрозмірна стала. Однак для повздовжньої компоненти матимемо вже оператор розмірності 8:

$$\frac{\lambda_4}{4!m_X^4}(\partial_\mu B\partial^\mu B)^2, \tag{5.78}$$

що призводить до зростання амплітуди розсіяння квантів поля Штюкельберга зі збільшенням енергії частинок за законом

$$\mathcal{A}(X_L X_L \to X_L X_L) \sim \lambda_4 \frac{s^2}{m_X^4}. \tag{5.79}$$

В цьому місці корисно відмітити, що ріст амплітуди за законом s^2/m_X^4 відбувається і в СМ для реакцій з 4-частинковою взаємодією W-бозонів. Однак, в СМ відповідне зростання амплітуди реакцій компенсується врахуванням діаграм з обміном Z-бозонів та бозоном Хіггса h [11].

Межі застосовності теорії з оператором взаємодії (5.77) можна оцінити з виразу (5.79): прирівнявши амплітуду процесу до 1, отримаємо:

$$\sqrt{s_{\max}} \lesssim \frac{m_X}{\lambda_4^{1/4}}, \tag{5.80}$$

що накладає сильні обмеження на значення параметра $\lambda_4 \ll 1$. Зазначимо, що стала λ_4 має бути додатною, щоб забезпечити аналітичність теорії при високих енергіях [13].

5.5 Взаємодія із аномальним струмом

Як відомо, повний вираз для 4-дивергенції аксіального струму має вигляд [6, 7, 14]:

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2im_f\, \bar{\psi}\gamma^5\psi - \frac{q^2}{8\pi^2}\, F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta}, \tag{5.81}$$

де $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ є дуальним тензором до тензора $F_{\alpha\beta}$, а останній доданок являє собою похідну від аномального струму $F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = \partial_\mu j^\mu_{CS}$, де $j^\mu_{CS} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}V_\nu F_{\lambda\rho}$ (скорочення CS походить від того, що такий струм називають струмом Черна-Саймонса або аномальним струмом). Зазначимо, що останній доданок походить з розгляду трикутних петльових діаграм взаємодії векторних полів і відсутній в класичній теорії полів. Доданок $F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta}$ в літературі називають також густиною Черна-Понтрягіна [4].

Тоді взаємодія поля Штюкельберга з аномальним струмом призведе до появи доданку

$$\mathcal{L}_{int} = g_a X_\mu j^\mu_{CS} = \cdots - g_a \frac{B}{m_X}\partial_\mu j^\mu_{CS} = \frac{q^2 g_a}{8\pi^2}\,\frac{B}{m_X}\,F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} + \cdots\,, \tag{5.82}$$

Останній доданок у виразі (5.82) має назву доданка Печеі-Куіна і являє собою оператор розмірності 5. Відповідно, зазначена взаємодія не є перенормовною.

Розглянемо лагранжіан, в якому калібрувальне поле V_μ (складова частина поля Штюкельберга $X_\mu = V_\mu - \partial_\mu B/m_X$) взаємодіє з аксіальним ферміонним струмом $\bar{f}\gamma^\mu\gamma^5 f$ зі сталою взаємодії g_a, а також в системі існує векторне калібрувальне поле A_μ, що взаємодіє з векторним ферміонним струмом $\bar{f}\gamma^\mu f$ зі сталою взаємодії q. Як відомо, в цьому випадку через трикутну ферміонну петлю буде генеруватися взаємодія полів AAV і у вершині ферміонної трикутної петлі з полем V_μ закон збереження аксіального струму матиме аномальний доданок. В імпульсному просторі, якщо імпульс кванта поля V_μ дорівнює p, імпульс одного з векторних полів – q, а петлі відповідає функція $\Delta^{\rho\mu\nu}$ (петля має три лоренцеві індекси, бо за ними відбуватиметься згортка з лоренцевими індексами векторних полів A_ρ, A_ν, V_μ), останній факт буде виражатися рівністю (див. детальніше [7, 15])

$$p_\mu \Delta^{\rho\mu\nu} = \frac{q^2 g_a}{2\pi^2}\epsilon^{\rho\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta. \tag{5.83}$$

Якщо ж тепер врахувати наявність взаємодії повздовжньої компоненти поля Штюкельберга у вигляді (5.82), то можна також побудувати взаємодію AAB через трикутну ферміонну петлю. Петлі в цьому випадку буде відповідати величина $\Delta^{\rho\nu}$ (два індекси, бо за ними відбуватиметься згортка з лоренцевими індексами векторних полів A_ρ та A_ν). Аномальний закон збереження аксіального струму в цьому випадку буде наслідком рівності

$$i m_X \Delta^{\rho\nu} = \frac{q^2 g_a}{2\pi^2}\epsilon^{\rho\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta. \tag{5.84}$$

Як бачимо, праві частини виразів (5.83), (5.84) збігаються. Це дозволяє записати узагальнений вираз для тотожності Уорда у вигляді

$$p_\mu \Delta^{\rho\mu\nu}(V) - i m_X \Delta^{\rho\nu}(B) = 0. \tag{5.85}$$

Таким чином, наявність взаємодії поля Штюкельберга з аномальним струмом (5.82) призводить до скорочення квантової аномалії. Це явище має назву механізму скорочення аномалії Гріна-Шварца [16].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей* – М.: Наука, 1976. - 480 с.

2. Paul A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* – Snowball Publishing, 2012. - 96 pp.

3. H. Ruegg, M. Ruiz-Altaba, *The Stueckelberg field*, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 3265 (2004), arXiv:hep-th/0304245.

4. G.D. Kribs, G. Lee, A. Martin, *Effective field theory of Stückelberg vector bosons*, Phys. Rev. D *106*, 055020 (2022), arXiv:2204.01755.

5. C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications (February 24, 2006) – 581 pp.

6. M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, CRC Press; 1st edition (May 4, 2018) – 866 pp.

7. В. М. Горкавенко, *Діаграмна техніка Фейнмана. Ймовірність розпаду та переріз розсіяння частинок* – К.: ВПЦ "Київський університет", 2014. - 261 с.

8. V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press; First Edition (May 26, 2002) – 456 pp.

9. P. Langacker, The Standard Model and Beyond – CRC Press, 2010. - 663 pp.

10. В. М. Горкавенко, *Стандартна модель фізики елементарних частинок та її розширення*, навчальний посібник для студентів фізичного факультету, 2022. - 245 с.

11. J. Horejsi, *Introduction to electroweak unification. Standard model from tree unitarity* – World Scientific, 1994. - 168 pp.

12. J. A. Dror, R. Lasenby, and M. Pospelov, *Light vectors coupled to bosonic currents*, Phys. Rev. D **99**, 055016 (2019), arXiv:1811.00595.

13. A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis, and R. Rattazzi, *Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion*, JHEP **10**, 014 (2006), arXiv:hep-th/0602178.

14. L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (June 13, 1996) – 508 pp.

15. Clarkson R. and McKeon D. G. C., *Quantum field theory* (Parts I and II), U. Waterloo lecture notes, 2003 – 266 pp.

16. J. Preskill, *Gauge anomalies in an effective field theory*, Annals Phys. **210**, 323-379 (1991).