Принцип відносності в класичній та релятивістській механіці

Теорія відносності - фундаментальна фізична теорія, яка охоплює всю фізику. Виникла на початку XX ст. в результаті подолання принципових труднощів електродинаміки та оптики рухомих тіл. Автор - Ейнштейн, викладена в теорії "До електродинаміки рухомих тіл" (1905)
Багато результатів цієї роботи були отримані раніше Лармором, Лоренцом, Пуанкаре. Але перші двоє принципово відстоювали ~~позиції~~ точку зору існування нерухомого ефіру з яким пов'язувалась система відліку. Пуанкаре заповнив математичні прогалини, виправив помилки Лоренца, проводив критику поняття одночасності просторово рознесених подій. Але принципово нове фізичне розуміння і послідовна побудова теорії - Ейнштейн.

В класичній механіці основний закон: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор положення мат. точки відносно якоїсь інерц. сист. відліку.
Візьмемо дві інерціальні С.В: S та S'; S' рухається рівномірно та прямолінійно з $\vec{V}$: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t$ ($x = x' + Vt$, $y = y'$, $z = z'$) - перетворення Галілея
Час t - абсолютний (однаковий в цих С.В) і незалежний від простору.

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$; $\vec{a} = \vec{a}\,'$

тобто прискорення інваріантне, $\vec{r}$ і $\vec{r}\,'$, v і $\vec{v}\,'$ - різні, але їх різниці однакові, так як вони визначають відносні положення і швидкість точки відносно іншої.
Сила $\vec{F}$ в клас. механіці залежить від $\Delta\vec{r}$, $\Delta\vec{v}$ ⇒ тому і $\vec{F}$, і рівняння ~~та~~ Ньютона залишаються інваріантними: відносно перетворень Галілея
~ - принцип відносності Галілея. Його інше, більш широке формулювання:

Закони природи, що визначають зміну стану руху механічних систем не залежать від того, до якої інерціальної системи вони відносяться
Принцип не стверджує, що ~~що~~ явища виглядають однаково: рух визначають не лише диф. рівняння, але й початкові умови (тому книжка падає з полиці ~~вагона~~ вкупе у вагоні прямолінійно, а по відношенню до вокзалу - по параболі). ⇒ однаковість законів, а не явищ.
~~Взагалі всі тіла взаємодіють між собою, тому твердження про ідентичність С.В.~~ Крім того, в класс. фізиці використовувався принцип дальнодії: взаємодія тіл поширюється миттєво.
З розвитком інших галузей фізики виникло питання, чи поширюється принцип Галілея і на інші явища. Якщо ні - то за допомогою немеханічних явищ можна, в принципі, розрізнити інерціальні системи відліку і, в свою чергу, поставити питання про існування абсолютної (головної) С.В

рівняння Максвела не інваріантні відносно перетворень Галілея.

Одне з явищ, ~~[illegible]~~ яке очікували, що відбувається по різному – поширення світла. С – це швидкість відносно гіпотетичного середовища (ефіру), яке, зрозуміло, не може перебувати у стані спокою по відношенню до всіх С.В => однакова швидкість с у всіх напрямах лише в абсолютній С.В.

Досліди Майкельсона не виявив різниці у швидкостях поширення світла в залежності від системи відліку. Теж саме – досліди Майкельсона-Морлі (більш досконалий інтерферометр) => несправедливість перетворень Галілея, неможливість виявити рух відносно ефіра, незалежність шв-ті світла від руху джерела (про останнє свідчать і деякі астрономічні спостереження – наприклад над подвійними зірками, де Сіттер + див. Сівухін, Оптика)

Принципи Ейнштейна (постулати на яких базується спец. теорія відносності)

1. Всі фізичні явища відбуваються однаково у всіх інерціальних системах відліку, всі закони і р-ня, що їх описують інваріантні ~~відносно змін~~ при переходів від однієї інерц. С.В до іншої — узагальнення принц. відн. Галілея на ∀ фіз процеси.

Іншими словами всі інерціальні С.В – нерозрізнені (еквівалентні).

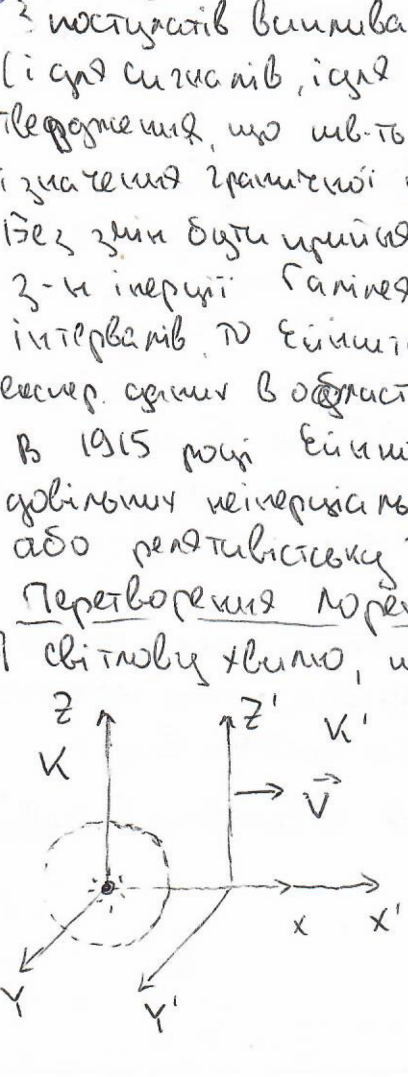
2. Швидкість світла у вакуумі не залежить від руху джерела і однакова у всіх напрямах. – тобто шв. світла займає особливе місце у природі.

З постулатів випливає і те, що с має бути граничною швидкістю (і для сигналів, і для взаємодій) [доказ: всі закони, в тому числі і твердження, що шв-ть ∀ сигналу < граничної, однакові в всіх С.В => і значення граничної шв-ті має бути однаковим, бо інакше С.В можна розрізнити]. Без змін були прийняті ті класичні твердження про евклідовість простору, з-н інерції Галілея-Ньютона. Щодо незмінності часових і просторових інтервалів, то Ейнштейн звернув увагу, що ці твердження є екстраполяцією експер. даних в область великих швидкостей, а це не є виправданим.

В 1915 році Ейнштейн узагальнив принцип відносності для випадку довільних неінерціальних С.В і створив загальну теорію відносності або релятивістську теорію тяжіння – це основна теорія в астрофізиці.

Перетворення Лоренца

Я світлову хвилю, що випромінюється точковим джерелом. Хвильовий фронт (поверхня однакової фази) має форму сферичної поверхні як в С.В, відносно якої джерело нерухоме, так і в С.В, що прямолінійно і рівномірно рухається по відношенню до джерела. (бо інакше за формою фронту можна встановити, що джерело рухається, тобто розрізнити С.В)



1.5

$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ (1) Спробуємо знайти таку форму перетворень
$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$ (2) координат і часу, щоб c була сталою

В припустимо, що початку відліку t і t' співпадають, в початковий момент часу співпадають тіла відліку обох С.В.

Якщо в (2) підставити перетвор. Галілея $\{x'=x-Vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t\}$,

то $x^2-2xVt+V^2t^2+y^2+z^2=c^2t^2$ – не підходить. але якесь перетвор має бути

Від нового перетворення ~~ми~~ (в y^2 і z^2) очікуємо, що $y'=y$, $z'=z$ бо в (1) ~~та~~ (2) y'^2 і z'^2 переводяться без додаткових зусиль. Перетворення має бути лінійним відносно x і t, бо хочемо отримати рівняння сферичної поверхні, що розширюється з постійною швидкістю. В перетворенні не можна залишити $t=t'$, бо $-2Vxt+V^2t^2$ не скорочуються

Х $x'=x-Vt$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t+\alpha x$, де α - якась стала.

$$x^2-2xVt+V^2t^2+y^2+z^2=c^2t^2+2c^2\alpha tx+c^2\alpha^2x^2$$

$(2xVt+2c^2\alpha tx)$ скорочується при $\alpha=-\frac{V}{c^2}$; $t'=t-\frac{Vx}{c^2}$

$$x^2-c^2\left(-\frac{V}{c^2}\right)^2x^2+y^2+z^2=c^2t^2-V^2t^2$$

$$x^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+y^2+z^2=c^2t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$$ – маємо (1), тільки і x^2 і t^2 множаться на $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};\quad y'=y;\quad z'=z;\quad t'=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$ – перетворення Лоренца (1904)

при $\frac{V}{c}=\beta\to 0$ переходить в перетворення Галілея

$$x=(x'+Vt')(1-\beta^2)^{-1/2};\quad y=y';\quad z=z';\quad t=\left(t'+\frac{V}{c^2}x'\right)(1-\beta^2)^{-1/2}$$

Додавання швидкостей

Х частинка рухається в системі K' з постійною швидкістю, компоненти якої (v_x', v_y', v_z'). шв-ть С.В. (V: const)

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad dx=\frac{dx'+Vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+Vdt'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}=\frac{v_x'+V}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}$$ ← у Галілея було $v_x=v_x'+V$

$dy=dy'$; $dz=dz'$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}\sqrt{1-\beta^2}=\frac{v_y'}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}\sqrt{1-\beta^2}$$

$$v_z=\frac{v_z'}{1+\frac{Vv_x'}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}$$

Зворотні перетворення $v_x'=\frac{v_x-V}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}$; $v_y'=\frac{v_y}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}$; $v_z'=\frac{v_z}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}$

Якщо частинка фотон => $u'_x = c$, $v_x = \frac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = c$

Рівняння Максвела інваріантні відносно перетворень Лоренца.

Поняття одночасності

[4] ст. 620-623 [2] 197-203
[1] ст. 172-180

Ейнштейн звернув увагу на те, що фізичну реальність має не точка у просторі і не момент часу, коли щось відбулось, а тільки сама подія, що х-ться місцем і часом. Положення точки, де відбулася подія може бути визначено за допомогою порівняння вимірюваних величин з еталонами (як і ньютонов. механіці). Відповідний момент часу - за допомогою годинника, вміщеного в ту саму точку. Якщо дві події відбуваються в одній точці, труднощів у визначеності їх одночасності нема;; якщо в різних - то без подальших роз'яснень нічого сказати не можна. Не існує апріорної одночасності просторово розділених подій, або, що те саме, тяжко порівнювати час для подій, віддалених від годинника.

Спочатку потрібно визначити загальний час для всіх точок системи, забезпечити синхронний хід всіх годинників системи - наприклад за допомогою світлових сигналів (з врахуванням l/c). Суттєво, що визначений таким чином час відноситься лише до С.В. відносно якої годинники у спокої.

Ці тепер різні інерціальні системи відліку. Вже в клас. механіці існували просторові співвідношення які подібні в різних системах відліку (напр, лампочка відносно поїзда блимає в одному місці, тоді як відносно вокзалу) Часові ж співвідношення (проміжки) вважались інваріантними. Насправді поняття одночасності - відносне, має зміст коли вказано до якої С.В. це відноситься. Напр. стержень AB рухається з V відносно K-системи.

В системі, пов'язаній зі стержнем, сигнал одночасно досягне фотоелементів A та B, бо c - стала. Через ту саму причину в системі K фотоелемент A спрацює раніше.

=> час в різних С.В. тече неоднаково.

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2-t_1)-(x_2-x_1)\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

одночасність в обох системах лише при $x_2 = x_1$

Фіджеральда-Лоренца

Скорочення довжини в нерухомій системі координат

Якщо стержень, що лежить ∥ OX нерухомо відносно K', нерухомо, => координати його кінців $x'_1 \neq f(t)$, $x'_2 \neq f(t)$. Довжина спокою:

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

В K'-системі необхідно визначити x_1 і x_2, що в даний момент часу t співпадають з кінцями стержня

$$L = x_2(t) - x_1(t)$$

9.5

$x_1' = \frac{x_1(t) - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $x_2' = \frac{x_2(t) - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (1.7)

$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\boxed{L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; -$$

$L < L_0$

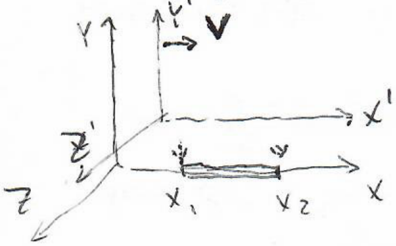
це наз. лоренцове скорочення довжини. Воно відноситься лише до розмірів в напрямі руху, поперечні розміри не змінюються.

Отже, довжина - поняття відносне. Відмітимо, що скорочення має бути взаємним: якщо будемо порівнювати два рухомих один відносно одного стержня, для яких L_0 рівна, то "з точки зору" кожного з них довжина другого буде коротшою, причому в однаковому співвідношенні (інакше можна було б відрізнити зв'язані з цими стержнями інерціальні С.В)

Лоренцове скорочення - кінематичний ефект, в тілі не виникає ніяких напружень, що викликають деформацію. Одночасно це об'єктивний факт, що не пов'язаний з ілюзіями спостерігача.

(Пр) Крізь нерухому в К-системі трубку довжиною l_0 пролітає стержень з $2l_0$. Швидкість така, що в К-системі для стержня $l = l_0$ => в певний момент стержень цілком поміститься в трубці. Але "з точки зору стержня" скорочується вдвічі труба і стержень $2l_0$ не поміщається в $l_0/2$. Чи є протиріччя? Нема, бо "з точки зору трубки" кінці стержня суміститься з кінцями трубки одночасно, "з точки зору стержня" - ні.

Спробуємо інакше. Х в момент $t=0$ з точок x_1 та x_2 випромінюються імпульси (світла) ∥ ОУ. На якій відстані в К' системі будуть знаходитись лічильники, які зафіксували імпульси? Для спрощення $x_1 = 0$, $x_2 = L_0$, тоді



$$x_1' = \frac{0 - V\cdot 0}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \; x_2' = \frac{L - V\cdot 0}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \; x_2' - x_1' = L = \frac{L_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

протиріччя. Але це інший дослід, в якому проводиться порівняння $\Delta x'$ і Δx коли $\Delta t = 0$ (в першому випадку коли $\Delta t' = 0$)

~~Скорочення~~ Сповільнення тривалості процесів

Х в точці x' в К'-системі відбувається процес, тривалість якого в цій системі $\tau_0 = t_2' - t_1'$ (власний час процесу). Тоді в К-системі

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \; t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \; \tau = t_2 - t_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \; -$$

явище наз. сповільнення часу, годинник який рухається іде повільніше того, який у стані спокою.

Релятивістське сповільнення було підтверджене у явищі розпаду мюонів (μ-мезонів) - це частинки, які утворюються під дією космічних променів у верхніх шарах атмосфери (~10км). Виміри показали, що час життя нерухомого мюона ~ $2.2 \cdot 10^{-6}$ с, за цей час вони встигли би пройти ≈600м, але вони все-таки досягають поверхні Землі, $\tau \approx 10^{-5}$ с

[1] ст.180-190, 193-197
[2] ст.203-208
[4] ст. 632-635

В дорелятивістській фізиці простір і час незалежні, два інваріанти. В теорії відносності - один просторово-часовий інваріант.

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = inv, \quad l_{12}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

$$t'_{12} = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \left(\frac{v}{c^2}x_2 - \frac{v}{c^2}x_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y_{21} = y'_{21}$$

$$s'_{12} = c^2 \frac{\left[t_{12} - \frac{v}{c^2}x_{12}\right]^2}{1-\beta^2} - \frac{(x_{12} - Vt_{12})^2}{1-\beta^2} = \frac{t_{12}^2 c^2 - 2V x_{12} t_{12} + \frac{V^2}{c^2}x_{12}^2 - x_{12}^2 + 2Vx_{12}t_{12} - V^2 t_{12}^2}{1-\beta^2}$$

$$= \frac{t_{12}^2 (c^2 - V^2) + x_{12}^2\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - x'^2_{12} \Rightarrow \text{інваріант.}$$

Інтервали бувають

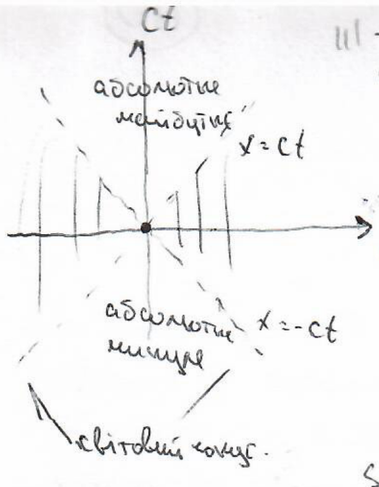
а) світлоподібними: $l_{12}^2 = c^2 t_{12}^2$
події, відстань між якими описуються таким інтервалом між собою можуть бути пов'язані світловим сигналом

б) часоподібними $s_{12}^2 > 0$, $|ct_{12}| > |l_{12}|$ - можна знайти таку С.В K', в якій $\Delta l' = 0$, тобто події відбуваються в одній точці через проміжок часу $\Delta t' = \frac{\Delta s}{c}$
між такими подіями може бути причинно-наслідковий зв'язок

в) просторовоподібними $\Delta s^2 < 0$, можна знайти таку K', де події відбуваються одночасно, відстань між точками $l_{12} = i\Delta s$
не може бути причинного зв'язку між подіями.
Події, які відбуваються з однією частинкою можуть бути зв'язані лише дійсним інтервалом $l_{12} \le c\, t_{12}$

Уявлення про простір-час, тобто мат. мова, на якій витончено описується спец. теорія відносності, були розроблені Г. Мінковським (1908). Подія х-ться місцем, де відбулася (x,y,z) і часом t, коли відбулася. Якщо ввести уявний 4-х мірний простір, по осям x,y,z і t (або величина пропорційна t), то подія відображається крапкою - т.з. "мировой точкой". $\forall$ частинці (навіть нерухомій) у просторі відповідає світова лінія. Сам 4-простір наз. світом або простором Мінковського.

(1.9)



III – область подій, які абсолютно не зв'язані з подією ($x=0, t=0$)

замість x можуть бути всі координати (це просто простір)

Якщо ввести позначення

$x^0 = ct,\quad x^1 = x,\quad x^2 = y,\quad x^3 = z$

то інтервал – це аналог відстані в евклідовому просторі, модуль різниці 4-радіус-векторів відповідних світових точок

$$s_{12}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

(простір Мінковського – псевдоевклідовий)

перетворення компонент 4-радіус-вектора $x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a^\mu_\nu x^\nu$

$$a^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← якщо K і K' як звичайно.

$\cancel{a^0_0 \cdot a^1_1 = 1}$ (для зворотного перетворення $\beta \to (-\beta)$)

Сукупність величин $\frac{dx^\mu}{dt}$ – не буде мати вл-тей 4-вектора, бо dt не є інваріантом, але інваріантом є $d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2dt^2 - dl^2}}{c} = dt\sqrt{1-\frac{(dl/dt)^2}{c^2}} = dt\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$d\tau$ – власний час, $v = \frac{dl}{dt}$ – шв-ть частинки

Тоді чотиривектор швидкості:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c\frac{dx^\mu}{ds}$$

аналогічно 4-в-р прискорення

$$w^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = c^2\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$$

Явний вигляд: так як $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$; $x^0 = ct$ $dx^0 = c\,dt$; $dx^1 = dx$

то $u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $u^k = \frac{v_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $k=\overline{1,3}$; $u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

$\vec{u} = (u_t, \vec{v})$ скаляр. добуток $u\cdot u = u_t u_t - \vec{u}\cdot\vec{u}$ ⇒ $\sum_{\mu=0}^{3} u^\mu u_\mu = \frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2$ – інваріант.

Якщо продиференціювати останній вираз по $d\tau$

$$\sum_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu + \sum_\mu u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = \sum_\mu w^\mu u_\mu + \sum_\mu u^\mu w_\mu = 0$$

ці суми еквівалентні, тому

$\sum_\mu w^\mu u_\mu = 0$ => в-ри 4-швидкості і 4-прискорення взаємноперпендикулярні

[2] ст.208-211
[3] ст.144-155
[4] ст.642-644

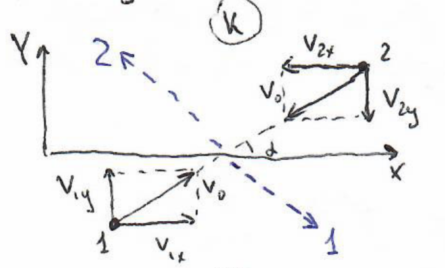
(1.10)

Релятивістська динаміка

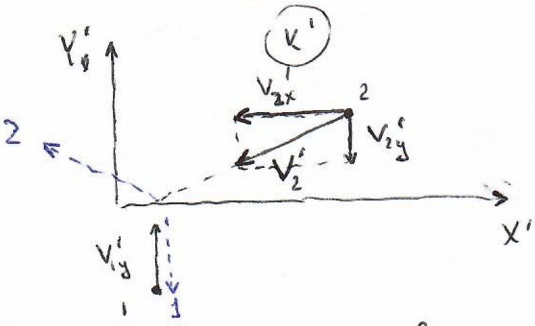
Релятивістський імпульс

Основні положення ньютонівської механіки щодо імпульсу:

1) $\vec{p} = m\vec{v}$, де m – не залежить від швидкості частинки
2) імпульс замкненої системи частинок зберігається з часом в $\forall$ інерціальній С.В



Ж в інерціальній К-системі рухаються дві однакові частинки 1 та 2 з однаковою швидкістю V_0 під кутом α до осі X. Розглянемо абс. непружне зіткнення. Сумарний імпульс обох частинок зберігається, до і після зіткнення $= \varnothing$ (утворена частинка нерухома)



Ж К'-система рухається вправо зі швидкістю V_{1x}

до зіткнення $V'_{1x} = 0$, $V'_{2x} = -\dfrac{2V_{1x}}{1+\frac{V_{1x}^2}{c^2}}$ } див ф-ли додавання швидкостей

після зіткнення $V'_{1x} = V'_{2x} = -V_x$

Таким чином ми отримали, що до зіткнення сумарний $p_x = -2mV_{1x}/\left(1+\frac{V_{1x}^2}{c^2}\right)$, після $p_x = -2mV_x$

тобто виходячи с уявлень ньютонівської механіки ми прийшли до висновку, що імпульс не зберігається. Інваріантність закону збер. імпульсу можна отримати, якщо припустити, що m тіла залежить від його шв-ті. Але для з'ясування цієї залежності абс. непружне зіткнення не підходить, так не збер. кін енергія $\Rightarrow$ це призведе до додаткового ефекту про який ми не знаємо

Я абс. пружне зіткнення. див --->

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

		До зіткнення		Після зіткнення	
		1-ша частинка	2-га	1-ша	2-га
K	V_x	$V_{1x} \overset{def}{\equiv} V$	$-V$	V	$-V$
	V_y	$V_{1y} \overset{def}{\equiv} u$	$-u$	$-u$	u
	$V_{заг.}$	$\sqrt{V^2+u^2}$	$\sqrt{V^2+u^2}$	$\sqrt{V^2+u^2}$	$\sqrt{V^2+u^2}$
K'	V'_x	$\varnothing$	$-\dfrac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$	0	$-2V/\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)$
	V'_y	$\dfrac{u}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$	$-\dfrac{u}{1+\frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$	$-\dfrac{u}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$	$\dfrac{u}{1+\frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$
	$\lvert V'_{заг}\rvert$	$\dfrac{u}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$	$\dfrac{\sqrt{4V^2+u^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{V^2}{c^2}}$	$\dfrac{u^*}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$	$\dfrac{\sqrt{4V^2+u^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{V^2}{c^2}}$

В К-системі, як і для OX' проекції К'-системи збереження імпульсу легко виконується. Для P_y має місце незбереження. Припустимо, що $m = m(|V^*_{заг}|)$ і будемо вимагати збереження сумарної проекції на OY'

можна просто ввести релятивістський імпульс

$$1 - \frac{V^2}{c^2} \overset{def}{=} 1 - \beta^2$$

(1.11)

f(x) в круглих дужках вказана залежність, а не множник

$$m\left(\frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\times\frac{u}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + m\left(\frac{\sqrt{4V^2+u^2(1-\beta^2)}}{1+\frac{V^2}{c^2}}\right)\times\left(-\frac{u\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{V^2}{c^2}}\right) =$$

$$= m\left(\frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\times\left(-\frac{u}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) + m\left(\frac{\sqrt{4V^2+u^2(1-\beta^2)}}{1+\frac{V^2}{c^2}}\right)\times\left(\frac{u\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{V^2}{c^2}}\right)$$

зводячи подібні доданки

$$m\left(\frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\times\frac{2u}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\left(\frac{\sqrt{4V^2+u^2(1-\beta^2)}}{1+\beta^2}\right)\times\frac{2u\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2}$$

або $$m\left(\frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\times\frac{2}{1-\beta^2} = m\left(\frac{\sqrt{4V^2+u^2(1-\beta^2)}}{1+\beta^2}\right)\times\frac{2}{1+\beta^2}$$

останнє співвідношення має бути справедливим при $\forall\, u, V$ в тому числі і при $u=0$

$$m(0)\cdot\frac{2}{1-\beta^2} = m\left(\frac{2V}{1+\beta^2}\right)\times\frac{2}{1+\beta^2}$$

тобто $$m(V'_{зах}) = m\left(\frac{2V}{1+\beta^2}\right) = m(0)\times\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$$ - зв'язок маси частинки, яка рухається з $V'_{зах}$ з масою нерухомої частинки

$$\frac{V'_{зах}}{c} = \frac{2\frac{V}{c}}{1+\frac{V^2}{c^2}} \Rightarrow 1+\frac{V'_{зах}}{c} = \frac{\left(1+\frac{V}{c}\right)^2}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

$$1-\frac{V'_{зах}}{c} = \frac{\left(1-\frac{V}{c}\right)^2}{1+\frac{V^2}{c^2}} \overset{\times}{\Rightarrow} 1-\frac{V'^2_{зах}}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)^2} = \frac{(1-\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V'^2_{зах}}{c^2}}} \Rightarrow \left(V'_{зах} \overset{des}{=} \vartheta\right) \Rightarrow m(\vartheta) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

m_0 - інваріантна маса, ~~m(0)~~ яка наз. масою спокою, $m(\vartheta)$ - релятивістська маса неінваріантна

Тепер імпульс релятивістської частинки $\vec{p} = m\vec{\vartheta} = \frac{m_0\vec{\vartheta}}{\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}}$ - визначений таким чином імпульс зберігається незалежно від вибору інерціал. системи відлік.
[2] ст. 218-223

Основне рівняння релятивістської динаміки

р-ня II-го закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ не задовольняє принципу відносності Ейнштейна (бо не інваріантне відносно перетворень Лоренца). А от р-ня

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

є цілком інваріантним. Правда вигляд однаковий, зміст інший: похідна реля. імпульсу

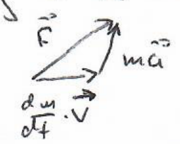
$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \vec{F} \qquad \text{при } V \ll c \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}$$

+ сила $\vec{F}$ величина неінваріантна, в різних І.С.В. відрізнятимуться як її числове значення, так і напрям. (проекції сили, перпендикулярні напряму вектору відносної ш-ті С.В, відмінні в різних С.В. Ці проекції max в тій С.В, де частинка в даний момент перебуває у стані спокою

$$F'_x = F_x,\quad F'_y = F_y\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

З (1) випливає, що в загальному випадку $\vec a$ не співпадає з $\vec F$

$$\frac{d(m\vec v)}{dt} = \vec F \Rightarrow \frac{dm}{dt}\vec v + m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F$$



$\vec a \parallel \vec F$ лише якщо

а) $\vec F \perp \vec v \Rightarrow |\vec v| = const \Rightarrow \frac{m_0 \vec a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec F \Rightarrow \vec a = \frac{\vec F}{m_0}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

б) $\vec F \parallel \vec v \Rightarrow$ (1) у скалярному вигляді $\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{dv}{dt} + \frac{m_0\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = F$

$$\vec a = \frac{\vec F}{m_0}\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}$$ [1] ст. 213-215

до речі, при однакових F і v поперечна сила надає більше прискорення

Кінетична та повна енергія релятивістської частинки

Використаємо той же шлях, що і у ньютонівській механіці. Приріст кін. енергії

$$dT = \vec F d\vec r = \vec F \vec v dt.$$

$\vec F dt = d(m\vec v) = dm\cdot\vec v + m d\vec v \Rightarrow dT = \vec v(dm\cdot\vec v + m d\vec v)$

$\vec v^2 = v^2 \Rightarrow \vec v d\vec v = v dv \Rightarrow dT = v^2 dm + m v dv$

$T = E - m_0c^2$ на ст. 9.11

$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m$ піднесемо до квадрату $\Rightarrow m^2c^2 = m^2v^2 + m_0c^2$

Так як c і m_0 - інваріанти, то $2mc^2dm = 2mv^2dm + 2m^2vdv$

$$c^2dm = v^2dm + mvdv$$

$dT = c^2dm \Rightarrow T = (m-m_0)c^2$; $\boxed{T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)}$

при $v \ll c$ $T \approx m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\dots-1\right) \approx \frac{1}{2}m_0v^2$

2) Видно, що приріст кін. енергії супроводжується приростом ~~кін. енергії~~ маси

Відомо, що при протіканні різних процесів можливі перетворення одних видів енергії в інші $\Rightarrow$ маса тіла має зростати при $\forall$ збільшенні запасу енергії незалежно від типу (кінетичної, електричної, хімічної ...) $\Rightarrow$ Ейнштейн

$\boxed{E = mc^2}$ - загальна (повна) енергія тіла або системи тіл,

в цю енергію не включена потенціальна енергія тіла в зовн. полі (якщо воно існує)

$$E = m_0c^2 + T = E_0 + T$$

$E_0 = m_0c^2$ - енергія спокою (власна енергія) $\Rightarrow$ маса раніше була мірою інертності або мірою гравітаційної дії, тепер - міра енерговмісту

Х нагрів 1л води від 0 до 100°C, надана $\Delta E = mc_p\Delta t = 1кг\cdot 4200\frac{Дж}{кг\cdot К}\cdot 100K$

$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx \cancel{0{,}17\cdot10^{-10}}$ $4{,}7\cdot10^{-12}$ кг - зміна маси за межами точності досліду.

сонячне випромінювання приносить на Землю за одну секунду на площадку 1 м² перпендикулярно променям ~ $1{,}3\cdot10^3$ Дж/с·м². Тобто сумарна енергія, що випромінюється Сонцем $\Delta E \approx 1{,}3\cdot10^3\cdot4\pi R^2 = 4\cdot10^{26}$ Дж/с

радіус орбіти Землі

отже втрата маси $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 4{,}4\cdot10^9$ кг/с - грандіозно але

$$\frac{\Delta m}{m} = 2\cdot10^{-21}\ c^{-1}$$

 навіть при V=0 E>0, m_0 - міра енергії

Звязок енергії та імпульсу частинки

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \quad p = \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} ; \Rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 V^2}{p^2}$$

$$1 = V^2\left(\frac{m_0^2}{p^2}+\frac{1}{c^2}\right) ; \quad V^2 \frac{m_0^2 c^2+p^2}{p^2 c^2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{p^2+m_0^2 c^2}$$

$$\frac{m_0^2}{p^2} \quad \frac{p^2 c^2}{(m_0 c^2+p^2)}$$

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{m_0^2 c^2}\left(m_0^2 c^2+p^2\right)$$

$$\boxed{E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = inv}$$ - у всіх інерціальних С.В.

Для $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{E\vec{V}}{c^2}}$

Розглянемо можливість існування частинок з нульовою масою спокою ($m_0=0$) з випли善 ває, що вона має енергію та імпульс лише за умови $v=c$ (рух зі швидкістю світла). Але це не означає невизначеність E та p, навпаки $p=\frac{E}{c}$. Тобто існування таких частинок можливе, ці частинки можуть лише рухатись з c, цей рух не є результатом попереднього прискорення, а взагалі єдиноможливий стан. [1] с.216-222

Повернемось ненадовго до 4-х мірного простору. Аналогом імпульсу є 4-ри вектор

$p^\mu = m_0 u^\mu$ — бо має бути інваріант, врахувавши явний вигляд u^μ

$$p^\mu = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) \quad ; \text{ бачимо, що } p^0 = \frac{E}{c}$$

тобто $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$, де $\vec{p}$ - релятивістський імпульс

Тепер можна записати з-н зміни компонент 4 вектора при переході від однієї системи до іншої $x'^\mu = \sum_{\nu=0} a_\nu^\mu x^\nu$ і врахувавши вигляд матриці перетворення

$$\frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c}-\frac{V}{c}p_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} , \quad p_x' = \frac{p_x - \frac{EV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} ; \quad p_y' = p_y ; \quad p_z' = p_z$$ - якщо K' рухається з V відносно K

квадрат 4-імпульса $(p^0)^2-(p^1)^2+(p^2)^2-(p^3)^2$ має бути інваріантом

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 \sum_{\mu=0}^{3} u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$$ див с.1.9

Вектор $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ називають ще вектором імпульса-енергії. Крім того в теорії відносності закони збер. імпульсу та енергії перестають бути незалежними і об'єднуються в закон збереження імпульсу-енергії.

З можна записати $E = c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$. Тоді релятивістський вираз для ф-ї Гамільтона

$$\underbrace{\underbrace{H = c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}_{\text{для вільної частинки}} + u}_{\text{для частинки в зовнішньому силовому полі.}}$$

Узагальненням ІІ-з Ньютона в 4-просторі є вираз

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = K^\mu \qquad (*)$$

де K^μ - деякий 4-вектор, що називається силою Міньковського.

Так як $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ і врахувавши вираз для u^μ маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = K^0; \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = K_i, \quad i=\overline{1,3}$$

Визначемо просторові компоненти сили Міньковського так, щоб вони були пов'язані з компонентами звичайної 3-мірної сили F_i

$$F_i = K_i\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad i=\overline{1,3}$$

тоді $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F_i$ - як і мало бути ;-)

для визначення часової компоненти домножимо (*) на u_μ і просумуємо

$$\sum_{\mu=0}^{3} K^\mu u_\mu = m_0 \sum_{\mu=0} w^\mu u_\mu = 0$$

інваріант

див. ст. 1.9

$$K^0\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sum_{i=1}^{3}\frac{F_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

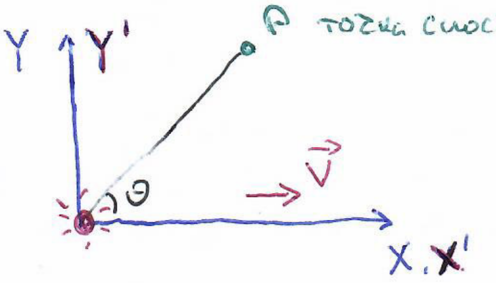
$$K^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sum_{i=1}^{3} F_i v_i = \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

отже $K^\mu = \left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$ - 4 вектор

$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow K^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dE}{dt}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \Rightarrow$

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const$. Ейнштейн в свій час доклав чимало зусиль, аби показати що $const = 0$

Ефект Доплера для Е-М. хвиль



Світло - хвилі, збурення Е-М поля, можуть поширюватися у вакуумі

$\divideontimes$ джерело рухається зі шв-тю V відносно точки спостереження
K - власна С джерела
K' - власна С спостерігача

Фаза Інваріантом щодо перетворень Лоренца є фаза хвилі

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = \omega' t' - \vec{k}'\vec{r}' \qquad \omega = 2\pi\nu,\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c}\nu$$

$\divideontimes$ $\vec{k}$ в площині YX (Y'X')

$$\nu t - \frac{\nu}{c}(x\cos\theta + y\sin\theta) = \nu' t' - \frac{\nu'}{c}(x'\cos\theta' + y'\sin\theta')$$

$$\nu' = \nu\,\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \nu = \nu'\,\frac{1+\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1+\beta\cos\theta'}$$

Тобто $\Delta\nu$ залежить від проекції відносної шв-ті на $\vec{k}$, (для звичайного еф. Доплера окремо розглядаються проекції шв-тей приймача та джерела відн. середовища)

а) повздовжній еф. Д:

$\theta' = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ $\qquad \nu' = \nu\,\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu\,\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}$

синє зміщення

$180 \Leftrightarrow 180$ $\qquad \nu' = \nu\,\frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

червоне

б) поперечний $\qquad \theta' = \pm\frac{\pi}{2};\ \cos\theta' = 0 \qquad \cos\theta = \beta = \frac{V}{c}$

$$\nu' = \nu\,\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu\sqrt{1-\beta^2},\quad \nu' < \nu$$ — ефект, відсутній для пружних хвиль

1919 В. Слайфер виявив (вивчаючи зміщення у спектрах туманностей) що вони віддаляються від Землі з $v \sim 1800$ км/с

1922 Хаббл, Хьюмасон - виявили істотне червоне зміщення у спектрі / галактики NGC 7619 => 3800 км/с

Едвін: галактики у Великій Ведмедиці віддалені ~40 000 км/с, 65 000 км/с } => розбігання галактик

$$v = H r \leftarrow \text{відстані від Землі}$$

стала Хаббла $H = 75\ \frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпс}}$ $\qquad$ Мпс - мільйон парсек

1 парсек 3,26 світлового року

космологічна оцінка віку Всесвіту $t = \frac{1}{H} \approx 14$ млрд. років