

Біфуркації та критичні параметри в астрономічних системах

Допоміжні матеріали до курсу "Синергетика в
астрономії"

В.І.Жданов, І.В.Стьопочкіна, А.В.Тугай

November 1, 2015

ПЕРЕДМОВА

Сучасне природознавство має справу із дуже складними явищами, які інколи важко описати невеликою кількістю рівнянь, щоб їх розв'язувати аналітично чи навіть за допомогою чисельних методів. Усе частіше на передній план виходять системи, для дослідження яких треба враховувати спільну дію великої кількості факторів. Тим більшого значення набувають якісні та загальні результати, що дають орієнтир для подальшого пошуку відповіді на більш конкретні питання. Саме такі задачі досліджує синергетика, яка вивчає явища у складних системах за наявності процесів самоорганізації.

Більшість процесів, які описують складні фізичні та астрономічні системи, є нелінійними. Інша річ, коли в практичних застосуваннях нелінійністю можна знехтувати, тобто наближено звести рівняння, що описують систему, до лінійних. Але досить часто поведінка фізичних систем є настільки складною, що питання про лінеаризацію тут навіть не виникає. Зазначимо, що перші математичні дослідження нелінійних систем, в тому числі роботи таких класиків, як Ньютон, Лагранж, Пуанкаре, Ляпунов, були значною мірою обумовлені астрономічними задачами. І зараз небесну механіку, астрофізику та космологію неможливо уявити без сучасних наближених та якісних методів нелінійного аналізу.

Набір принципово нових ефектів, що відрізняють нелінійні системи від лінійних, досить великий. Наведемо деякі приклади. Якщо в коливальних лінійних системах маємо набір характеристичних частот, що не залежать від амплітуди коливань, то за наявності нелінійності типовою є залежність частоти від амплітуди коливань. Відомим прикладом є фізичний маятник. В нелінійній коливальній системі за наявності зовнішньої гармонічної сили в загальному випадку амплітуда коливань є неоднозначною функцією частоти. За наявності слабого нелінійного зв'язку між різними коливальними системами, може виникати явище синхронізації, коли усі системи починають коливатися строго з однією частотою.

Відмінності між лінійними та нелійними системами виникають навіть на рівні існування розв'язків: розв'язок лінійної автономної системи диференціальних рівнянь існує на усій дійсній осі, а розв'язок нелінійної системи може натрапити на особливість за скінчений час. У розв'язку квазілінійних рівнянь з частинними похідними можуть виникати розриви – це поширене явище в гідродинаміці ідеальної рідини, пов'язане з виникненням ударних хвиль.

Нелінійним системам притаманні явища хаосу та самоорганізації. Можливість виникнення хаотичної (стохастичної) поведінки виникає як у системах скінченної, і навіть невеликої, розмірності, так і в континуальних фізичних системах. В разі стохастичної поведінки траєкторії системи N звичайних диференціальних рівнянь стають вельми заплутаними, причому мала зміна початкових умов призводить до суттєвої відмінності розв'язків навіть за не дуже великий час.

Принциповий інтерес становлять системи із самоорганізацією. Такі системи "автоматично" набувають ефектів впорядкованості у просторовій структурі або за часом. Загальні принципи виникнення впорядкованих структур відіграють важливу роль для цілком різних областей знань, від точних до суспільних наук.

Як видно із сказаного, для багатьох застосувань важливо визначити, коли виникають зміни якісної поведінки фізичної чи астрономічної системи. Наведемо типовий приклад, коли стан системи або розв'язки рівнянь, що її описують, залежать від певного параметра P , причому існує певне значення P_0 , яке називають біфуркаційним, таке, що за $P < P_0$ можливий лише стаціонарний стійкий стан системи, а за $P > P_0$ цей стан стає нестійким і система виходить на інший тип, який можна описати періодичною або майже періодичною залежністю. Можна сказати, що виникає деяка структура поведінки системи у часі. Існує чимало прикладів, коли виникають зміни також і в просторовій структурі складної системи.

Тут виникають такі задачі. По-перше, треба з'ясувати, чи критичне значення P_0 взагалі існує, тобто чи можливий перехід між різними типами якісної поведінки. По-друге, якщо відповідь позитивна, треба знайти значення P_0 або запропонувати відповідний алгоритм. По-третє, треба дослідити поведінку системи для параметрів P , що є близькі до біфуркаційного. Відзначимо, що досить часто дослідження в околі біфуркаційного значення, де відбувається зміна якісної поведінки при зміні P , є значно простішим, ніж далеко від точки біфуркації.

У цій книзі розглянуто низку задач, що виникають в астрономічних та фізичних застосуваннях у зв'язку з переходами між різними типами якісної поведінки. Книгу можна умовно поділити на дві частини. У першій (Розділи 1-4) викладено базові поняття якісної теорії диференціальних рівнянь (Розд. 1,2). Ці розділи є стандартними і необхідними для ілюстрації базових підходів при описі якісної поведінки диференціальних рівнянь, тут введено та проілюстровано базові поняття, необхідні для розуміння подальших розділів 3-9. У Розділі 3, що є одним з центральних, розглянуто елементи теорії біфуркацій у скінченновимірних системах з ілюстраціями з царини фізики та астрономії. Ообливу увагу приділено явищу біфуркації народження циклу, яке виникає на зовсім різних масштабах: від компактних генераторів коливальних, до пульсацій зір (див., зокрема, розділ 9, присвячений зоряним пульсаціям). У розділі 3 також подано елементи теорії катастроф з відповідними прикладами. У Розділі 4 обговорено основні поняття та відомі підходи до опису хаотичної поведінки та її типів. Наступні розділи більш безпосередньо пов'язані з астрономічними застосуваннями, як такими, що допускають детальний аналіз математичних моделей (як у Розділах 5-7), так і такими, де послідовний розгляд практично неможливий без залучення спостережних даних (Розд. 8,9). У Розділі 5 розглянуто основні якісні режими космологічної еволюції та критичні параметри, що їх відокремлюють; обговорено проблеми стандартної космологічної Λ CDM-моделі, що виводять на необхідність інфляційної ери раннього Всесвіту. Розділ 6 торкається можливого виникнення топологічних дефектів результаті біфуркацій деякого фундаментального поля при розширенні Всесвіту; цей розділ тісно пов'язаний з п.3.7 у контексті теорії катастроф. Розділ 7 присвячений, в основному, стійкості холодних релятивістських зір та кінцевим етапам зоряної еволюції. У Розділі 8 розглянуто сучасні погляди на формування космогонічних структур, а саме на виникнення екзопланетних систем. У Розділі 9, який тісно

пов'язаний з Розділами 3,4, розглянуто проблеми теорії зоряних пульсацій.

Автори намагалися надати замкнутий характер усім розділам, але, зрозуміло, книга вимагає певної підготовки. Наприклад, Розділи 5-9 спираються на знання, які студенти астрономічних спеціальностей набувають на 1-3 курсах університетів. Разом з тим, у цих розділах подано необхідні відомості із загальної теорії відносності, космології, астрофізики та космогонії, які, як сподіваються автори, зроблять книгу доступною і цікавою також для фахівців і студентів більш широкого профілю.

Дана книга – плід спільної роботи усього авторського колективу. Тим не менш, відзначимо, що у написанні Розділів 1,2,4 найбільший внесок належить І. Стьопчкіній; Розділ 3 написаний спільно В. Ждановим та І. Стьопчкіною; Розділи 5, 7 написані В. Ждановим, а Розділи 6, 8 – А.Тугаєм, Розділ 9 написаний спільно В.Ждановим та А. Тугаєм. Але за усі недоліки, які, безумовно, у книзі присутні, несе відповідальність весь колектив у цілому.

Contents

1. Базові відомості з теорії диференціальних рівнянь	7
1.1. Існування та єдиність розв'язків скінченновимірних динамічних систем.	7
1.2. Фазовий простір	9
1.3. Стійкість	10
1.4. Оцінки розв'язків	12
1.5. Лагранжеві та гамільтонові системи	15
1.6. Статистичний опис скінченновимірної системи.	17
1.7. Теорема Ліувілля про збереження фазового об'єму.	19
2. Якісна поведінка розв'язків динамічних систем	23
2.1. Динамічна система поблизу положень рівноваги	23
2.2. Гранична поведінка траєкторій загальної системи	30
2.3. Динамічні системи другого порядку на площині	31
2.4. <i>Література до розділів 1-2</i>	39
3. Біфуркації в динамічних системах	41
3.1. Загальні зауваження.	41
3.2. Комплексна форма рівняння нелінійних коливань	44
3.3. Зведення комплексної системи до нормальної форми Пуанкаре.	45
3.4. Існування циклів для точної системи (3.11)	51
3.5. Зведення на центральний многовид	53
3.6. Інші типи біфуркацій	59
3.7. Елементи теорії катастроф	62
3.8. <i>Література до розділу 3</i>	69
4. Хаос	71
4.1. Загальні властивості хаотичної поведінки та математичний опис.	71
4.2. Розбігання траєкторій.	74
4.3. Дивні атрактори.	75
4.4. Сценарії переходу до хаосу	75
4.5. Дискретні відображення	76
4.6. <i>Література до розділу 4</i>	79

5. Критичні параметри в космології	81
5.1. Періоди раннього Всесвіту	81
5.2. Базові співвідношення з загальної теорії відносності	83
5.3. Рівняння Фрідмана	87
5.4. Інфляція раннього Всесвіту	92
5.5. <i>Література до розділу 5</i>	99
6. Топологічні дефекти у Всесвіті	101
6.1. Механізм Кіббла	101
6.2. Текстури та їх космологічна еволюція	104
6.3. Вплив текстур на реліктове випромінювання.	107
6.4. Текстури і великомасштабна структура.	109
6.5. <i>Література до розділу 6</i>	111
7. Критичні параметри холодних зір	113
7.1. Кінцеві стадії еволюції зір	113
7.2. Стійкість холодних зір	115
7.3. Чорні діри	117
7.4. <i>Література до розділу 7</i>	121
8. Планетні міграції	123
8.1. Властивості екзопланет.	123
8.2. Планетна міграція I типу.	124
8.3. Міграція II типу.	125
8.4. Міграція III типу.	130
8.5. <i>Література до розділу 8</i>	135
9. Нелінійні зоряні пульсації	137
9.1. Змінні зорі	137
9.2. Зоряні пульсації	139
9.3. Теоретичні моделі пульсацій	141
9.4. Біфуркації та хаос у змінних зорях	144
9.5. <i>Література до розділу 9</i>	147

Базові відомості з теорії диференціальних рівнянь

1.1. Існування та єдиність розв'язків скінченновимірних динамічних систем.

Далі будемо говорити, що певний набір параметрів визначає стан об'єкта (системи), якщо він, заданий в деякий момент часу, однозначно визначає стани в майбутньому. У наступних розділах вважаємо, що стан системи заданий вектором в \mathbb{R}^N . Основним об'єктом дослідження буде система N звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu), \quad \text{або} \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(\mathbf{y}, \mu), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

де $\mathbf{y}(t) \equiv [y_1(t), \dots, y_N(t)]$ визначає *стан системи в момент t* , $\mathbf{F} \equiv [f_1, \dots, f_N]$, праві частини залежать від параметрів $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$. Параметри $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ в позначеннях правих частин та розв'язків часто будемо опускати, коли вони несуттєві. Будемо вважати, що вектор-функція $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu)$ є неперервно-диференційовною функцією усіх своїх аргументів в усій області значень, що розглядається.

Розв'язком системи (1.1) на $[0, T]$ називатимемо неперервно-диференційовну на $[0, T]$ функцію $\mathbf{y}(t)$, таку, що для кожного $t \in [0, T]$ вектор $\mathbf{y}(t)$ належить області визначення правої частини (1.1) та перетворює (1.1) у тотожність.

Система (1.1) є *автономною*, тобто права частина явно не залежить від t . Зазначимо, що неавтономну систему можна звести до автономної більш високого порядку. Тому рівняння (1.1) є досить загальним і частину теорем цього підрозділу легко поширити на неавтономні системи.

Рівняння (1.1) розглядаємо з початковими умовами

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \equiv [y_{01}, \dots, y_{0N}] \quad (1.2)$$

Наведемо декілька відомих теорем, що гарантують існування та єдиність розв'язку систем диференціальних рівнянь. Доведення можна знайти в [1-3].

Теорема 1.1 (локальна теорема існування та єдиності).

Нехай (при фіксованому μ) вектор функція $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu)$ та її похідні по y_i , $i = 1, \dots, N$, неперервні в околі точки $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$. Тоді $\exists t_1 > 0$, таке, що на відрізку $[0, t_1]$ існує одна й тільки одна вектор-функція $\mathbf{Y} \in C_{[0, t_1]}^{(1)}$, яка задовольняє рівняння (1.1) з умовою (1.2).

Теорема 1.2 (про подовження розв'язку). Нехай (при фіксованому μ) вектор-функція $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu)$ та її похідні $\partial \mathbf{F} / \partial y_i$, $i = 1, \dots, N$, неперервні в обмеженій замкненій області $\bar{D} \subset \mathbb{R}^N$, причому вектор початкових умов належить до внутрішньої частини цієї області $\mathbf{Y}_0 \in D$. Тоді існує неперервно-диференційовна функція $\mathbf{Y} \in C_{[0, t_1]}^{(1)}$ на $[0, t_1]$, $t_1 > 0$, яка задовольняє (1.1), (1.2), причому або $t_1 = \infty$, або $\mathbf{Y}(t_1)$ належить межі області \bar{D} .

Підкреслимо, що теорема 1.1 гарантує локальне існування розв'язку, тобто для певного (можливо досить малого) $t_1 > 0$, доки розв'язок знаходиться в околі початкових умов. За теоремою 1.2. розв'язок подовжується 'глобально', тобто за усіх t , якщо він залишається в обмеженій області. Це не завжди має місце.

Приклад 1.1. Початкова задача

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = 1$$

має розв'язок $x(t) = (1 - t)^{-1}$, що не може бути подовжений до нескінченних значень часу t . Справа у тому, що $x(t)$ при $t \rightarrow 1$ виходить за межі будь-якої обмеженої області.

Аналогічні властивості має рівняння $\frac{dx}{dt} = x^{1+\alpha}$ для будь-якого як завгодно малого $\alpha > 0$: розв'язок цього рівняння з початковою умовою $x(0) > 0$ прямує до нескінченності за деякого $t \rightarrow t_1 > 0$, тобто не подовжується на усі $t > 0$.

Зазначимо, що умови теорем 1.1, 1.2 можна послабити, розглядаючи неперервність за Ліпшицем замість неперервності похідних. Однак записані умови є цілком достатніми для подальшого розгляду, як і для багатьох застосувань.

Далі ще більш конкретизуємо умови на праву частину \mathbf{F} , вважаючи що

(А) $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu)$ є гладкою в усьому просторі як функція від \mathbf{y} ,

(В) $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu)$ є гладкою функцією параметрів $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ в області $d \subset \mathbb{R}^p$.

Теорема 1.3.

Нехай $\mu \in d$, виконані умови (А), (В), неперервно-диференційовна функція $\mathbf{Y}(t, \mu)$ задовольняє (1.1), (1.2) для усіх значень параметру μ з околу точки μ_0 при $t \in [0, t_1]$, $t_1 > 0$. Тоді $\mathbf{Y}(t, \mu)$ є неперервно-диференційовною функцією μ в околі μ_0 .

Теорема 1.4. (залежність від початкових умов; μ фіксоване).

Нехай $\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}_0)$ є неперервно-диференційованою функцією від $t \in [0, t_1]$, $t_1 > 0$, яка задовольняє (1.1), (1.2). Тоді за умов (А), (В) $\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}_0)$ є неперервно-диференційовною функцією початкових умов \mathbf{y}_0 .

Теорему 1.4 можна отримати як наслідок теореми 1.3.

1.2. Фазовий простір

Дослідження властивостей системи, що описується рівняннями (1.1), зручно проводити, використовуючи поняття *фазового простору, фазового потоку та фазових траєкторій*. Згідно до теорем 1.1 та 1.2 стан системи $\mathbf{y}(t_0)$, заданий початковими умовами (1.2), однозначно визначає стан у будь-який момент $t > 0$, якщо розв'язок можна продовжити до цього моменту. Множину станів називають **фазовим простором**. Очевидно, замість (1.2) можна задавати умову

$$\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N, \quad (1.3)$$

тобто задавати стан системи в інший початковий момент t_0 , а також продовжувати розв'язок на значення $t < t_0$. Дійсно, заміна $t \rightarrow t' = t - t_0$ зводить задачу (1.1), (1.3) до задачі (1.1), (1.2). Інша заміна $t \rightarrow t' = -t$ дає систему, аналогічну до (1.1), для якої усі висновки поширюються на $t < t_0$.

Нехай функція $\mathbf{y}(t) \in C_{(t_1, t_2)}^{(1)}$ задовольняє (1.1) на інтервалі (t_1, t_2) . Множину точок $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^N$, $t \in (t_1, t_2)$ називатимемо **траєкторією** системи (1.1) (або **фазовою кривою**); це множина станів, що допускає система, яку описує рівняння (1.1). Тут вважаємо, що (t_1, t_2) є максимальний інтервал існування розв'язку системи (1.1). Траєкторія системи $\mathbf{y}(t)$ описує переміщення точки \mathbf{y} у фазовому просторі з часом t .

За умов (A), (B) **траєкторії системи (1.1) не перетинаються**. Дійсно, якщо припустити, що $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – це траєкторії (1.1), такі, що

$$\mathbf{y}_1(t_1) = \mathbf{y}_2(t_2),$$

тоді $\tilde{\mathbf{y}}_2(t) = \mathbf{y}_2(t - t_1 + t_2)$ задовольняє при $t = t_1$ тим самим початковим умовам, що й $\mathbf{y}_1(t)$ і визначає, в силу теореми єдиності, ту ж саму множину станів. Аналогічне твердження є справедливим і в тому разі, якщо інтервал існування розв'язку не є нескінченним.

Фазовим потоком називають оператор Φ_t , який переводить систему з одного стану в початковий момент часу $t = 0$ до іншого стану в момент t : $\mathbf{y}(t) = \Phi_t(\mathbf{y}(0))$. Множину станів M називають інваріантною множиною фазового потоку Φ_t (або відповідного рівняння, що відповідає Φ_t), якщо $\Phi_t(M) \subset M$.

Права частина системи (1.1) задає векторне поле в \mathbb{R}^n , яке у кожній точці є дотичним до деякої траєкторії цієї системи, якщо $\mathbf{F}(\mathbf{y}) \neq 0$. Точку Y_1 , таку, що $\mathbf{F}(Y_1) = 0$, називають **особливою точкою** (або **стаціонарною**, або **точкою спокою**, або **точкою рівноваги**) динамічної системи (1.1).

Приклад 1.2. Система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y$$

задає векторне поле при $x^2 + y^2 \neq 0$, що є дотичним до траєкторії $x = x(0) \exp(t)$, $y = y(0) \exp(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ у кожній її точці за винятком початку координат

$(0,0)$, що є точкою спокою системи. Траєкторії – це промені прямих ліній, що виходять з початку координат $(0,0)$, але не містять цієї точки. Точка $(0,0)$ є окремою траєкторією. Жодні траєкторії не перетинаються.

Теорема 1.5.

Розв’язок $\mathbf{y}(t)$ автономної системи (1.1) може бути одного з трьох типів:

Неперіодичний: $\mathbf{y}(t_1) \neq \mathbf{y}(t_2)$ при будь-яких $t_1 \neq t_2$ (незамкнена траєкторія).

Періодичний: $\exists T > 0 : \mathbf{y}(t+T) \equiv \mathbf{y}(t)$, але існує хоча б одна пара значень $t_1, t_2; t_1 < t_2 : \mathbf{y}(t_1) \neq \mathbf{y}(t_2)$ (таку траєкторію називають циклом);

Постійний: $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_0$ (точка спокою). У точці спокою $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \mu) = 0$. Очевидно, \mathbf{y}_0 залежить від параметра μ .

Доведення

Нехай розв’язок не є постійним і не є неперіодичним: $\exists t_1 \neq t_2 : \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_2) = \mathbf{z}$. Завдяки автономності $\mathbf{y}(t+t_1)$ і $\mathbf{y}(t+t_2)$ – це також розв’язки, причому які мають однакові початкові умови при $t=0$, тобто $\mathbf{y}(t+t_1) \equiv \mathbf{y}(t+t_2)$. Звідси $\mathbf{y}(t+t_2-t_1) \equiv \mathbf{y}(t)$, тобто це періодична функція з періодом, сумірним з t_2-t_1 .

У загальному випадку цикл – це деяка траєкторія, за якою рух повторюється з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, де ω -частота. Періодичний рух описується рядом Фур’є: $x(\omega t) = \sum_n c_n e^{in\omega t}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Дуже часто основну увагу приділяють якісним властивостям фазових кривих, що є спільними для широкого класу еквівалентних систем. Це стосується граничних властивостей траєкторій, кількості та розташування особливих точок та замкнених траєкторій.

Топологічна еквівалентність динамічних систем.

Нагадаємо, що дифеоморфізмом називають взаємно-однозначне та неперервно-диференційовне в обидва боки відображення одного диференційовного многовиду на інший (тобто диференційовним є як пряме, так і обернене відображення). Векторні поля, які визначаються правими частинами динамічних систем вважають топологічно еквівалентними (дифеоморфними), якщо існує дифеоморфізм фазового простору однієї системи на фазовий простір іншої системи, який переводить орієнтовані фазові криві, що утворюються під дією одного потоку, до фазових кривих іншого зі збереженням орієнтації.

1.3. Стійкість

У фізиці, техніці та інших науках постановка задач з рівняннями (1.1) та початковими умовами (1.2) моделює певну ідеалізовану ситуацію. Початкові умови, як і праві частини (1.1), ніколи не є відомими з абсолютною точністю. Виникає питання, чи сильно відхиляється розв’язок, якщо трохи змінити початкові умови, параметри у правій частині (1.1) або навіть вигляд правої частини (1.1). Частково відповідь на ці питання дають зазначені вище теореми про неперервну залежність від параметрів та початкових умов. Розглянемо це більш докладно.

Нехай $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z})$ – розв’язок системи (1.1) з початковою умовою $\mathbf{Y}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$, $\forall \mathbf{z}$

з допустимої області. Для оцінки відхилення точок в N -вимірному просторі виберемо евклідову норму

$$|\mathbf{y}| = \left\{ \sum_{i=1}^N y_i^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.4)$$

Характеристикою відхилення функцій на $[t_1, t_2]$ може слугувати банахова норма

$$\|\varphi - \psi\|_{t_1}^{t_2} = \sup \{ |\varphi(s) - \psi(s)|, s \in [t_1, t_2] \}.$$

З неперервної залежності розв'язку від початкових умов випливає, що для фіксованого t величина $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z})$ мало відхиляється від $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)$, якщо вибрати \mathbf{z} досить близьким до \mathbf{z}_0 . Це справедливо для довільного наперед заданого **скінченного** інтервалу з області існування розв'язку: для наперед заданого $\varepsilon > 0$ при досить малому $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|$ та скінченних t_1, t_2 маємо

$$\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) - \mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)\|_{t_1}^{t_2} < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Аналогічно вирішується питання щодо відхилення розв'язку на скінченному інтервалі при зміні параметрів в правій частині (1.1). В досить загальному випадку оцінку такого відхилення на скінченному інтервалі при зміні правої частини (1.1) можна отримати за допомогою нерівності Гроуолла (див. далі). Але розгляд значно ускладнюється, якщо треба оцінити зміни на нескінченному інтервалі t . З такими оцінками пов'язані різноманітні поняття стійкості.

Нехай розв'язок (1.1) визначений на $[0, \infty)$ для усіх початкових умов \mathbf{z} з околу точки \mathbf{z}_0 .

Розв'язок $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)$ задачі (1.1) називають *стійким (стійким відносно збурення початкових умов, або стійким за Ляпуновим)*, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0| < \delta$ маємо

$$\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) - \mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)\|_0^\infty < \varepsilon \quad (1.6)$$

Підкреслимо, що тут йдеться *усі можливі* розв'язки з початковими умовами, що задовольняють (1.6). Аналогічна властивість для скінченного інтервалу, що є наслідком неперервної залежності від початкових умов, є типовою для скінченновимірних систем. Стійкість на *нескінченному* інтервалі вимагає, як правило, спеціальних досліджень і має місце далеко не завжди.

Приклад 1.3. Розв'язком рівняння $\frac{dx}{dt} = x$ з умовою $x(0) = z$; $x, z \in \mathbb{R}$, є $x(t) = z \exp(t)$. Очевидно, на скінченному відрізку $t \in [0, T]$, $T < \infty$, цю функцію можна зробити як завгодно близькою до тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ вибираючи початкову умову z досить малою. Але на нескінченному інтервалі нульовий розв'язок не є стійким: для будь-якого, в тому числі і малого, $|z| \neq 0$ завжди існує область аргументу t , де $|z| \exp(t) > 1$.

Аналогічно стійкості відносно збурення початкових умов можна розглядати стійкість при збуренні параметра μ в правій частині (1.1) або при більш загальних змінах правої частини (1.1) тощо.

Стійкий розв'язок $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)$ задачі (1.1) називають *асимптотично стійким на* $[t_0, \infty)$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0| < \delta$ має місце (1.6) і

$$|\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) - \mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Стійкий розв'язок $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)$ задачі (1.1) називають *експоненційно стійким на* $[t_0, \infty)$, якщо існують таке $\delta > 0$ і такі $A > 0, \alpha > 0$ (які не залежать від \mathbf{z}_0 !), якщо при $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0| < \delta$:

$$|\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) - \mathbf{Y}(t, \mathbf{z}_0)| < A|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Експоненційно стійкий розв'язок є асимптотично стійким.

Вправа 1.1. Зведіть рівняння $\ddot{x} + x = 0$ до системи двох рівнянь першого порядку та покажіть, що нульовий розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Вправа 1.2. Покажіть, що нульовий розв'язок рівняння $\dot{x} + x = 0$ є асимптотично та експоненційно стійким.

1.4. Оцінки розв'язків

Для практичних застосувань часто необхідно отримати оцінку змін розв'язку при зміні початкових умов чи інших параметрів задачі; як правило, це потрібно ще до того, як розв'язок знайдено в явному вигляді. Засобом для цього є різні апріорні оцінки, зокрема, що базуються на інтегральних нерівностях типа *леми Гронуолла*.

Лема 1.1. (*Гронуолла*). Нехай функція $y(t) > 0$ задовольняє нерівність

$$y(t) \leq C + \int_0^t g(s)y(s)ds, \quad C > 0, \quad g(s) > 0. \quad (1.7)$$

Тоді

$$y(t) \leq C \exp \left\{ \int_0^t g(s)ds \right\} \quad (1.8)$$

Доведення.

Нерівність (1.4) можна помножити на $g(t)$ і переписати так:

$$\frac{g(t)y(t)}{C + \int_0^t g(s)y(s)ds} \leq g(t)$$

Ліва частина є похідною від $\ln \left[C + \int_0^t g(s)y(s)ds \right]$. Інтегруючи цю нерівність від 0 до t , маємо

$$\ln \left[C + \int_0^t g(s)y(s)ds \right] - \ln C \leq \int_0^t g(s)ds,$$

звідки

$$y(t) \leq C + \int_0^t g(s)y(s)ds \leq C \exp \int_0^t g(s)ds,$$

тобто дістаємо (1.8).

Зазначимо, що оцінка (1.8) є точною у тому розумінні, що можна знайти приклад, де нерівність (1.8) переходить у рівність. Її можна підсилити лише якщо додатково відомі властивості конкретної системи.

Наведемо приклад використання леми Гронуолла для оцінки розв'язків.

Лема 1.2. Нехай

i) в області $D \in R^N$ для правої частини системи (1.1) має місце оцінка

$$|\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}')| \leq C|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|, \quad \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in D \quad (1.9)$$

ii) розв'язки (1.1) $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z})$ з умовою $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{z} \in D_1 \subset D$ не виходять з області D .

Тоді при $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in D_1$

$$|\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}') - \mathbf{Y}(t, \mathbf{z})| \leq |\mathbf{z}' - \mathbf{z}| \exp(Ct), \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

Доведення. З рівняння (1.1)

$$\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{z} + \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{Y}(s, \mathbf{z}))ds \quad (1.11)$$

звідси

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t |\mathbf{F}(\mathbf{Y}(s, \mathbf{z}')) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}(s, \mathbf{z}))| ds \leq u_0 + \int_0^t Cu(s)ds,$$

де $u(t) = |\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}') - \mathbf{Y}(t, \mathbf{z})|$, $u_0 = |\mathbf{z}' - \mathbf{z}|$.

Звідси, за лемою Гронуолла 1.1, маємо (1.10).

Порівняємо розв'язок системи (1.1) з розв'язком збуреної системи. Така задача часто виникає, коли маємо наближений розв'язок $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$ вихідної задачі (1.1), (1.2),

який задовольняє системі

$$\frac{d\tilde{\mathbf{Y}}}{dt} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Y}}) + \varepsilon \mathbf{f}(t), \quad \tilde{\mathbf{Y}}(0) = \mathbf{z}, \quad (1.12)$$

(ε – малий параметр), де права частина відрізняється на малу величину εf від (1.1).

Нехай мають місце умови (1.9), причому розв'язки системи (1.1) та системи (1.12) не виходять з області D , а також $|\mathbf{f}| \leq f_1$

Маємо з (1.12)

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{z} + \int_0^t [\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Y}}(s)) + \varepsilon \mathbf{f}(s)] ds.$$

Нехай $\mathbf{Y}(t)$ – розв'язок (1.1) з початковою умовою $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{z}$, для якого справедливо (1.10). Позначимо $u(t) = |\tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t)|$. Маємо

$$\begin{aligned} u(t) &= |\tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t)| \leq \\ &\leq \int_0^t [|\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Y}}(s)) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}(s, \mathbf{z}))| + \varepsilon |\mathbf{f}(s)|] ds \leq \int_0^t [Cu(s) + \varepsilon f_1] ds, \end{aligned}$$

де враховано (1.10) та (1.9). Звідси

Покладемо $V(t) = |u(t)| + \varepsilon f_1/C$, тоді

$$V(t) \leq \varepsilon f_1/C + \int_0^t CV(s) ds.$$

Звідси, за лемою Гронуолла,

$$V(t) \leq \varepsilon \frac{f_1}{C} \exp(Ct), \quad \rightarrow \quad |u(t)| \leq \varepsilon \frac{f_1}{C} [\exp(Ct) - 1]. \quad (1.13)$$

Як бачимо, ця оцінка є ефективною лише при $t \in [0, C^{-1}]$, доки експонента не набирає сили. Для фіксованого t , очевидно, різниця між збуреним та вихідним розв'язком прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Але зовні відрізка $[0, C^{-1}]$ похибка може експоненційно зростати. Тому для отримання якомога більш ефективних оцінок треба зводити систему (1.1) до вигляду, коли права частина та її константа Ліпшиця C з (1.9) є малою.

Приклад 1.4. (нелінійний осцилятор). Система

$$\ddot{x} + x = Ax^n,$$

де ціле число $n > 1$, зводиться до системи першого порядку

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + f.$$

Замінімо змінні: $x = \varepsilon r \cos \alpha$, $y = \varepsilon r \sin \alpha$;

$$\varepsilon r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \arctg(y/x).$$

Маємо в нових змінних

$$\frac{dr}{dt} = A\varepsilon^{n-1}r^n \sin \alpha (\cos \alpha)^n, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -1 + A\varepsilon^{n-1}r^{n-1}(\cos \alpha)^{n+1}.$$

Для правої частини цієї системи в області $r \leq R < \infty$ справедлива оцінка виду (1.9), причому тут, очевидно, $C \sim \varepsilon^{n-1}$. Тому інтервал $[0, T]$, $T = C^{-1} \sim 1/\varepsilon^{n-1}$, де оцінка (1.10) є ефективною, буде великим за малих ε .

1.5. Лагранжеві та гамільтонові системи

Будемо говорити, що класична механічна система має N_f степеней вільності, якщо вона описується N_f рівняннями другого порядку (рівняннями руху Ньютона). Наприклад, стан замкненої системи n матеріальних точок в механіці має $N_f = 3n$ степеней вільності. Рівняння руху можна звести до $N = 2N_f$ рівнянь першого порядку. Один з варіантів такого зведення приводить до *гамільтонової форми рівнянь руху*.

В багатьох випадках рівняння руху можна задавати за допомогою варіаційного принципу найменшої дії

$$\delta S = 0, \tag{1.14}$$

де $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$ – дія, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{N_f})$ – вектор узагальнених координат, підінтегральну функцію $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ називають *лагранжсіаном*. Узагальнені координати вводять так, щоб забезпечити виконання зв'язків (якщо вони є), які обмежують рух системи певними умовами. *Лагранжсіан механічної системи, в якій діють потенціальні сили (зовнішні чи сили взаємодії між частинками системи) має вигляд $L = T - U$, де T – кінетична енергія, U – потенціальна.*

Варіаційний принцип (1.14) за умови фіксованих значень $\mathbf{q}(t_1)$, $\mathbf{q}(t_2)$ на кінцях відрізка $[t_1, t_2]$ приводить до рівнянь Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N_f. \tag{1.15}$$

За визначенням, рівняння (1.1) є *лагранжсевичими*, якщо їх можна записати у формі (1.15).

Введемо узагальнені імпульси

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, N_f. \quad (1.16)$$

Ці рівняння задають перехід від змінних $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ до (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Обернене перетворення, яке позначимо

$$\dot{q}_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (1.17)$$

задає перехід $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Введемо *функцію Гамільтона* або *гамільтоніан*

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_f} \dot{q}_i p_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \sum_{i=1}^N p_i Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, Q(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \quad , \quad (1.18)$$

Зауважимо, що як лагранжіан, та і гамільтоніан можуть в загальному випадку залежати від часу. При цьому рівняння руху зберігають вид (1.15), (1.18).

Обчислимо похідні

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

Но $\frac{\partial L}{\partial Q_k} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$, тому

$$\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q_i} = - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \sum_{k=1}^N p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Тому рівняння (1.15), (1.17) переписуються у *гамільтоновій формі*

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, N_f. \quad (1.19)$$

Тепер стан механічної системи можна задати точкою у фазовому просторі $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ з N_f -вимірними векторами $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{N_f})$ та $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{N_f})$. Задавання координат та імпульсів системи в певний момент часу однозначно визначає її подальшу еволюцію (фазову криву). Як вже було зазначено, фазові криві не перетинаються.

Обчислимо похідну за часом від $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ уздовж траєкторій системи (1.19):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H(q(t), p(t), t) &= \sum_{i=1}^{N_f} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_f} \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad ,
\end{aligned}$$

тобто

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \quad (1.20)$$

Отже, якщо функція H явно від часу не залежить, то вона – інтеграл руху.

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad . \quad (1.21)$$

Очевидно, те ж саме справедливо і для будь-якої функції $f = f(H)$.

1.6. Статистичний опис скінченновимірної системи.

При статистичному описі нас цікавлять не стільки окремі стани чи траєкторії системи (1.1), а їх розподіл у фазовому просторі. Припустимо, що при $t = 0$ задана густина розподілу імовірності $\varphi(\mathbf{y}, 0)$ координат \mathbf{y} , що характеризують стан фізичної системи, описуваної рівняннями (1.1). Знайдемо рівняння, що описують розподіли імовірності $\varphi(\mathbf{y}, t)$ в усі моменти часу.

Нехай функція $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) \equiv [Y_1(t, \mathbf{z}), \dots, Y_N(t, \mathbf{z})]$ змінних t, \mathbf{z} задовольняє системі (1.1)

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(t, \mathbf{z})}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}(t, \mathbf{z})) \quad (1.22)$$

з початковими умовами

$$\mathbf{Y}(0, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{z} \quad . \quad (1.23)$$

Звідси

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{Y}(t, \mathbf{z}) \} \right|_{t=0} = \mathbf{F}(\mathbf{z}) \quad . \quad (1.24)$$

Функції $\mathbf{Y}(t, \mathbf{z})$ задають фазовий потік, що здійснює відображення довільної області Ω_0 фазового простору в область $\Omega_t = \mathbf{Y}(t, \Omega_0)$ для кожного моменту t . Зв'язок розподілів імовірності в різні моменти часу t й $t+\tau$ одержуємо за відомою формулою

$$\varphi(\mathbf{y}, t + \tau) = \int \varphi(\mathbf{z}, t) \prod_{i=1}^N \{\delta[y_i - Y_i(\tau, \mathbf{z})]\} dz_i \quad ,$$

де інтегрування йде по усім \mathbf{z} з фазового простору. Інтегруючи це співвідношення по $\mathbf{y} \in \Omega_\tau$, одержимо

$$\int_{\Omega_{t+\tau}} \varphi(\mathbf{y}, t + \tau) \prod_{i=1}^N dy_i = \int_{\Omega_t} \varphi(\mathbf{z}, t) \prod_{i=1}^N dz_i \quad (1.25)$$

Тут враховано, що в правій частині ненульовий внесок дають тільки ті значення \mathbf{z} , що належать області $\Omega_{t+\tau} \leftrightarrow \Omega_t$.

Покладемо $t = 0$ й у лівій частині (1.3) зробимо заміну змінних $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}$ за формулою $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\tau, \mathbf{z})$. Тоді

$$\int_{\Omega_\tau} \varphi(\mathbf{y}, \tau) \prod_{i=1}^N dy_i = \int_{\Omega_0} \varphi(\mathbf{Y}(\tau, \mathbf{z}'), \tau) D(\tau) \prod_{i=1}^N dz'_i \quad , \quad (1.26)$$

де $D(\tau) \stackrel{df}{=} \left| \frac{\partial Y_i(\tau, \mathbf{z})}{\partial z_j} \right|$ - якобіан переходу $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}$.

За малих τ

$$\begin{aligned} D(t) &= \left| \frac{\partial}{\partial z'_j} \{z'_i + \tau F_i(\mathbf{z}')\} \right| = \left| \delta_{ij} + \tau \frac{\partial F_i}{\partial z'_j} \right| = \\ &= \prod_{i=1}^N \left(1 + \tau \frac{\partial F_i(\mathbf{z}')}{\partial z'_i} \right) = 1 + \tau \sum_{i=1}^M \frac{\partial F_i(\mathbf{z}')}{\partial z'_i}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

а також, у силу (1.22), (1.24), $\mathbf{Y}(\tau, \mathbf{z}') = \mathbf{z}' + \tau \mathbf{F}(\mathbf{Y}(0, \mathbf{z}'))$,

де ми відкидаємо члени другого і більш високих порядків по τ .

У силу автономності системи (1.1) функція $\mathbf{Y}(t + \tau, \mathbf{z})$ є розв'язком цієї системи і як функція t і як функція τ . Тому $\mathbf{Y}(t + \tau, \mathbf{z})$ збігається з функцією $\mathbf{Y}(\tau, \mathbf{z}')$, де $\mathbf{Y}(0, \mathbf{z}') \equiv \mathbf{z}' = \mathbf{Y}(t, \mathbf{z})$. З точністю до лінійних по τ членів, маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \varphi(\mathbf{z}, t) d^M z &= \int_{\Omega_0} \varphi(\mathbf{z}' + \tau \mathbf{F}, t_0 + \tau) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^M \frac{\partial F_i}{\partial z_i} \tau \right) d^M z' = \\ &= \int_{\Omega_0} \varphi(\mathbf{z}', t_0) d^M \mathbf{z}' + \tau \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^M \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z'_i} F_i + \varphi \frac{\partial F_i}{\partial z_i} \right] \right\} d^M \mathbf{z}' = \\ &= \int_{\Omega_0} \varphi[\mathbf{z}', t_0] d^M \mathbf{z}' + \tau \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial z'_i} (\varphi F_i) \right\} d^M \mathbf{z}' \quad , \text{ де } t = t_0. \end{aligned}$$

Підставляючи це в (1.3), після простих скорочень маємо

$$\int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial z'_i} (\varphi F_i) \right\} d^M \mathbf{z}' = 0 \quad ,$$

чи, через довільність області Ω_0 , і вибору t_0 ,

$$(\forall \mathbf{z}, t) : \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial z_i} (\varphi F_i) = 0 \quad , \quad (1.28)$$

де $\varphi = \varphi(\mathbf{z}, t)$, $F_i = F_i(\mathbf{z})$. Рівняння (1.28) називають *рівнянням* Ліувілля, або *рівнянням неперервності*.

Цю задачу можна сформулювати трохи інакше, розглядаючи рух фіктивних часток уявлюваного “фазового газу”. Число часток “газу”, як і число траєкторій системи (1.1) у фазовому просторі є сталим, ці “частки”, як і траєкторії, не зникають і не виникають. Закон збереження числа частинок у диференціальній формі, тобто у формі рівняння неперервності, має вигляд (1.28).

1.7. Теорема Ліувілля про збереження фазового об’єму.

Теорема 1.6 (Ліувілля)

Якщо для системи (1.1) виконується умова

$$\sum_{i=1}^M \frac{\partial F_i(\mathbf{y})}{\partial y_i} = 0 \quad , \quad (1.29)$$

то фазовий об’єм області Ω_t не міняється при русі уздовж траєкторій цієї системи.

Доведення.

Нехай вихідна область Ω_1 початкових умов при $t = t_1$ має об’єм $V = \int_{\Omega_1} d^M \mathbf{z}'$.

При $t = t_1 + \tau$

$$V_t = \int_{\Omega_t} d^M \mathbf{z} = \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial z_i}{\partial z'_j} \right| d^M \mathbf{z}' \quad ,$$

де зв’язок між \mathbf{z} і \mathbf{z}' дається формулами $\mathbf{z} = \mathbf{Y}[\mathbf{z}', t_1 + \tau, t_1]$. У силу (1.27) за малих τ

$$D(t_1 + \tau) = 1 + \tau \sum_{i=1}^M \frac{\partial F_i(\mathbf{z})}{\partial z_i} + o(\tau); \quad D(t_1) = 1 \quad .$$

Звідси, розглядаючи границю при $\tau \rightarrow 0$

тобто за $t \rightarrow t_1$ маємо $\left. \frac{dD(t)}{dt} \right|_{t=t_1} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial F(\mathbf{z})_i}{\partial z_i} = 0$.

Через довільність вибору початкового моменту t_1 маємо $D(t) \equiv \text{const}$, що і треба було довести.

Відзначимо, що при виконанні умови (1.29) рівняння неперервності (1.28) можна записати у виді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} F_i = 0 \quad (1.30)$$

Розглянемо гамільтонову систему для N_f узагальнених координат q_i та імпульсів p_i . Зіставимо (1.19) з рівняннями (1.1), покладаючи

$$z_i = p_i, \quad z_{i+N_f} = q_i, \quad F_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad F_{i+N_f} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad N = 2N_f.$$

Нехай функція $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ описує розподіл ймовірностей у фазовому просторі $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$. Перевіримо виконання умови (1.29) у теоремі Ліувілля. Очевидно

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{N_f} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0, \quad ,$$

де припускаємо необхідну гладкість функції H , що забезпечує можливість зміни порядку частинних похідних по q_i і p_i .

Отже за теоремою Ліувілля уздовж розв'язків рівнянь Гамільтона фазовий об'єм залишається незмінним. Рівняння неперервності (1.28) приймає вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_f} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} = 0. \quad (1.31)$$

Приклад 1.4. Система однакових нерелятивістських часток у зовнішньому полі.

$$L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n), \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

Узагальнені координати в даному випадку \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, n$, а узагальнені імпульси збігаються зі звичайними імпульсами

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = m \dot{\mathbf{r}}_i, \quad H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + U.$$

Кожна частка має три координати: $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{p}_i = (p_{x,i}, p_{y,i}, p_{z,i})$. Розмірність фазового простору $N = 6n$. Рівняння Гамільтона:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i}{m}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рівняння неперервності:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}_i} \right\} = 0, \quad (1.32)$$

де, наприклад, $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_i} \equiv \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \right]$, тому фактично в сумі є $3n$ доданків.

Функція φ описує спільний розподіл імовірностей координат n часток. Однак частіше нам більш цікаво знати одночасткові чи спільні розподіли з невеликим числом змінних, наприклад

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = \int \varphi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_n \quad .$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int \varphi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_n \cdot d\mathbf{p}_3 \dots d\mathbf{p}_n \quad ,$$

Тут вважаємо всі частки однаковими, а функцію φ – симетричну відносно перестановок (окремо) по $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ та $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Тому в інтегралах можна вибирати в якості змінних інтегрування довільні $n-1$ чи $n-2$ часток.

Одержимо рівняння для одночасткової функції $\varphi^{(1)}$ у випадку, коли частки рухаються незалежно в зовнішньому полі

$$U = \sum_{i=1}^n U_*(\mathbf{r}_i)$$

Проінтегруємо (1.31) по $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$. Будемо вважати, що на нескінченності фазового простору густина імовірності прямує до нуля. Ця вимога приводить до того, що після інтегрування частинами всі доданки в сумі з $i = 2, \dots, n$ пропадуть:

$$\begin{aligned} & \int \prod_{i=2}^n d^3\mathbf{p}_i d^3\mathbf{r}_i \sum_{i=2}^n \left(\frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = \\ & \int \prod_{i=2}^n d^3\mathbf{p}_i d^3\mathbf{r}_i \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left(\frac{\mathbf{p}_i}{m} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \varphi \right) \right) = 0 \quad , \end{aligned}$$

де було враховано рівняння руху.

Решта членів у (1.31) дають

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_*(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad , \quad (1.33)$$

де $\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

Отримане співвідношення для $\varphi^{(1)}$ цілком очевидне – це просто рівняння неперервності для однієї частки з рівняннями руху

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial U_*}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} . \quad (1.34)$$

Зовсім інакше справа виглядає за наявності міжчастинкової взаємодії, коли в рівняннях руху кожної частинки присутні змінні інших частинок. У цьому випадку аналогічна процедура інтегрування по $d\mathbf{r}_2, d\mathbf{p}_2, \dots, d\mathbf{r}_n, d\mathbf{p}_n$ приводить до рівняння, що, крім $\varphi^{(1)}$, містить двочасткову функцію $\varphi^{(2)}$. В загальному випадку отримуємо нескінченний ланцюжок рівнянь для функцій $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ аж до $\varphi^{(n)} \equiv \varphi$.

Якісна поведінка розв'язків динамічних систем

Для багатьох застосувань теорії динамічних систем найбільш цікавим є не стільки кількісний опис розв'язків, а їх якісна поведінка, яка стосується здебільшого топологічних властивостей фазового потоку. Тобто: чи є у системи положення рівноваги, яка асимптотична поведінка траєкторій, чи траєкторії прямують на нескінченність, чи мають фінітну поведінку тощо. Важливо з'ясувати, чи допускає система періодичні розв'язки. Досить часто можна отримати відповідь на ці запитання, не маючи аналітичного представлення розв'язку і не застосовуючи чисельні дослідження; більше того, якісні дослідження часто передують застосуванням чисельних схем і обґрунтовують їх.

2.1. Динамічна система поблизу положень рівноваги

2.1.1. Стійкість. Положення рівноваги (див. п.1.3) автономної системи (1.1), яке є водночас розв'язком, може бути стійким або нестійким. Характер стійкості рівноважного положення має важливе значення для опису еволюції системи. У випадку стійкої рівноваги при малих відхиленнях від неї система завжди залишається поблизу цього стану. У випадку нестійкої рівноваги система значно відходить від цього стану, вона може прямувати до іншого стану, уходити на нескінченність тощо. Існує низка теорем, що дозволяють досліджувати стійкість систем рівнянь, що є більш загальними, ніж (1.1). Для наших потреб ми обмежуємось спрощеними версіями цих теорем (зокрема, теорем Ляпунова), що дозволяють визначити характер положення рівноваги автономної системи.

Розглянемо систему:

$$\frac{dy}{dt} = F(y). \quad (2.1)$$

Нехай функції $F \equiv [f_1, \dots, f_N]$ є гладкими разом із першими похідними, причому в точці x_0 має місце стан рівноваги (точка спокою), тобто $F(x_0) = 0$. Далі для простоти вважаємо $x_0 = 0$.

Функцію $V(x)$ називають *додатно-визначеною*, якщо в околі нуля

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad V(\mathbf{0}) = 0.$$

Теорема 2.1 (Перша теорема Ляпунова про стійкість)

Нехай $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ і існує додатно-визначена гладка функція¹ $V(\mathbf{x})$ така, що її похідна вздовж траєкторій системи (2.1) задовольняє нерівності

$$\frac{dV}{dt} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (2.2)$$

Тоді нульовий розв'язок системи (2.1) є стійким на інтервалі $t \in [0, \infty)$.

Доведення. Розглянемо сферу $S = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = \varepsilon > 0\}$, яка є компактною множиною в \mathbb{R}^N . Завдяки додатній визначеності і теоремі Вейерштрасса про нижню межу, $\exists \alpha : 0 < \alpha \leq V(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$.

Нехай $\mathbf{y}(t)$ задовольняє (2.1) і починається в околі нуля: $0 < |\mathbf{y}(0)| < \delta$, причому δ таке мале, що

$$V(\mathbf{y}(0)) < \alpha. \quad (2.3)$$

Покажемо, що

$$|\mathbf{y}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t > 0. \quad (2.4)$$

Нехай, від противного, $|\mathbf{y}(t_1)| = \varepsilon$, $t_1 > 0$, тоді $V(\mathbf{y}(t_1)) \geq \alpha$. Завдяки (2.2) на $[0, t_1]$ маємо $\frac{dV(\mathbf{y})}{dt} \leq 0 \rightarrow V(\mathbf{y}(t_1)) \leq V(\mathbf{y}(0)) < \alpha$, що суперечить припущенню. Оскільки розв'язок не виходить з малого околу нуля, де виконано умови існування розв'язку системи (2.1), цей розв'язок продовжується до нескінченності. Теорему доведено.

Приклад 2.1. Механічна система в мінімумі потенціальної енергії.

Рівняння руху частинок в консервативному потенціальному полі після тривіальних замін можна звести до вигляду

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla W(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N].$$

Еквівалентна система першого порядку

$$\dot{y}_i = -\partial W / \partial x_i, \quad \dot{x}_i = y_i.$$

Нехай $W(0) = 0$, причому $W(\mathbf{x})$ – додатно-визначена функція \mathbf{x} . Розглянемо функцію Гамільтона (див. (1.18))

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i^2 + W(\mathbf{x}).$$

¹Її називають функцією Ляпунова.

Похідна від H вздовж траєкторій системи дорівнює нулю (див. (1.21)) і її можна вибрати в якості функції Ляпунова. Для $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ виконано умови теореми 2.1. Тому положення рівноваги $\mathbf{x} = 0$ є стійким.

Умови цього розгляду поширюються, наприклад, на рух одновимірною нелінійного осцилятора без тертя

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\partial W / \partial x,$$

де в околі нуля $W(x) \sim \alpha x^{2n}$, $\alpha > 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Теорема 2.2 (теорема Ляпунова про експоненційну стійкість)

Нехай $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, а в околі нуля існує гладка функція $\alpha_1 |\mathbf{x}|^2 \geq V(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 |\mathbf{x}|^2$, $\alpha_0 > 0$, така, що її похідна вздовж траєкторій системи (2.1) задовольняє умові

$$\frac{dV}{dt} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \leq -\alpha V(\mathbf{x}), \quad \alpha > 0. \quad (2.5)$$

Тоді нульовий розв'язок системи (2.1) є експоненційно стійким на інтервалі $t \in [0, \infty)$.

Доведення. За першою теоремою Ляпунова, для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, таке, що будь-який розв'язок $\mathbf{y}(t)$, що починається в досить малому околі нуля $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < \delta\}$, задовольняє умові $|\mathbf{y}(t)| < \varepsilon$ на усьому інтервалі до нескінченності. З (2.5)

$$\frac{1}{V} \frac{dV(\mathbf{y})}{dt} = \frac{d \ln V(\mathbf{y})}{dt} \leq -\alpha,$$

де враховано, що для нетривіального розв'язку $V > 0$. Звідси

$$\ln [V(\mathbf{y}(t))/V(\mathbf{y}(0))] \leq -\alpha t \quad \text{або} \quad V(\mathbf{y}(t)) \leq V(\mathbf{y}(0)) \exp[-\alpha t].$$

Тоді, за умовою,

$$|\mathbf{y}(t)| \leq [V(\mathbf{y}(t))/\alpha_0]^{1/2} \leq [V(\mathbf{y}(0))/\alpha_0]^{1/2} \exp[-\alpha t/2] < [\alpha_1/\alpha_0]^{1/2} |\mathbf{y}(0)| \exp[-\alpha t/2],$$

де $A = \sup_{|\mathbf{x}| \leq \delta} \{V(\mathbf{x})\}$. Твердження доведено.

Приклад 2.2. Нехай у системі

$$\dot{x}_i = -\lambda x_i + f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N, \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N], \quad \lambda > 0,$$

має місце оцінка $\sum_{i=1}^N |f_i(\mathbf{x})| \leq \beta |\mathbf{x}|^2$. Покладемо $V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 \equiv \sum_{i=1}^N x_i^2$. З рівнянь системи маємо

$$\frac{dV}{dt} = 2 \sum_{i=1}^N x_i \dot{x}_i = -2\lambda \sum_{i=1}^N (x_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N x_i f_i.$$

Завдяки оцінці на f другий доданок $\sim O(|\mathbf{x}|^3)$ і тому в малому околі нуля $\left| \sum_{i=1}^N x_i f_i \right| < \varepsilon |\mathbf{x}|^2$, де $\varepsilon > 0$ є достатньо малим ($\varepsilon < \lambda$). Тоді

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha V, \quad \alpha = 2(\lambda - \varepsilon) > 0.$$

Умови теореми 2.2 виконано (тут $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$), нульовий розв'язок є експоненційно (а значить і асимптотично) стійким.

2.1.2. Дослідження околу положення рівноваги за лінійним наближенням

Потужним засобом дослідження стійкості положень рівноваги є використання лінійного наближення. В околі положення рівноваги $\mathbf{x}_0 = 0$ запишемо $\mathbf{y}(t) = \xi(t)$, $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_N]$, $\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{R}$, де

$$\mathbf{A} = \|A_{ij}\|, \quad A_{ij} = (\partial f_i / \partial x_j)_{\mathbf{x}=0}; \quad R_i = \frac{1}{2} \sum_{j,m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \bigg|_{\mathbf{x}=0} \xi_j \xi_k + \dots$$

Будемо називати \mathbf{A} матрицею лінеаризації. Лінеаризована система, відповідна системі (2.1) має вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}\xi. \quad (2.6)$$

Для малих відхилень від положення рівноваги ми очікуємо, що розв'язки систем (2.1) та (2.6) будуть близькими на скінченному інтервалі часу. Щодо усього нескінченного інтервалу t треба бути більш обережним.

Явний вигляд розв'язку системи (2.6) з початковою умовою $\xi(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_N$ можна подати так:

$$\xi(t) = (I + \frac{t}{1!} \mathbf{A} + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n + \dots) \mathbf{x}_0. \quad (2.7)$$

Дійсно, матричний ряд у дужках та його похідні, отримані почленним диференціюванням, збігаються і вираз (2.7) можна почленно диференціювати. Тоді прямою підстановкою в (2.6) маємо

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = (A + \frac{t}{1!} A^2 + \frac{t^2}{2!} A^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^{n+1} + \dots) \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\xi(t).$$

Вираз $e^{\mathbf{A}t} = I + \frac{t}{1!} \mathbf{A} + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n + \dots$ називають матричною експонентою. Відповідно $\xi(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$. Таким чином, $e^{\mathbf{A}t}$ визначає фазовий потік на \mathbf{R}_N , який породжується векторним полем $\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Систему (2.7) можна характеризувати набором власних значень λ_i : $\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$ та відповідних власних векторів $\mathbf{v}_{(i)}$: $\mathbf{A}\mathbf{v}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{v}_{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Далі для простоти вважаємо, що всі власні значення різні, тоді $\{\mathbf{v}_{(i)}\}$ утворюють

базис, за яким можна розкласти будь-який вектор з простору R_N : $\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{v}_{(j)}$; причому такий розклад єдиний. Тоді вираз

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{v}_{(j)} e^{\lambda_j t} \quad (2.8)$$

є розв'язком задачі Коші (2.6) з початковою умовою $\xi(0) = \mathbf{x}_0$. Це легко перевірити:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{v}_{(j)} \lambda_j e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{A} \mathbf{v}_{(j)} e^{\lambda_j t} = \mathbf{A} \xi(t).$$

Очевидно, що розв'язок з початковими умовами, що належать до лінійної оболонки² $\text{span}\{\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(m)}\}$ векторів $\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(m)}$, також належить до неї. Інакше, $\text{span}\{\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(m)}\}$ є інваріантним підпростором системи (2.6). Власні значення матриці \mathbf{A} , після тривіального перепорядкування, можна розділити на три класи:

- 1) S: $\text{Re} \lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, n_s$;
- 2) U: $\text{Re} \lambda_j > 0$, $j = n_s + 1, \dots, n_s + n_u$;
- 3) C: $\text{Re} \lambda_j = 0$, $j = n_s + n_u + 1, \dots, n_s + n_u + n_c$.

Тут n_s, n_u, n_c – кількість відповідних власних значень, $n_s + n_u + n_c = N = \dim R_N$. Визначимо в R_N три інваріантні підпростори, натягнуті на відповідні власні вектори; вони мають назви:

E^S – стійкий підпростір, побудований на власних векторах, що відповідають власним значенням з S ,

E^U – нестійкий підпростір, побудований на власних векторах, що відповідають власним значенням з U ,

E^C – центральний підпростір, побудований на власних векторах, що відповідають власним значенням з C .

Наприклад, для системи $\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ власні вектори $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ відповідають власним числам 1 та -1 . Тут

$$x_1(t) = e^t x_{10}; \quad \lambda_1 = 1, \quad E^U = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_2(t) = e^{-t} x_{20}; \quad \lambda_2 = -1, \quad E^S = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Лише виділені траєкторії прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$ або $t \rightarrow -\infty$. Це так звані сепаратрисы сідла, які лежать на одновимірних інваріантних многовидах E^S та E^U .

²Підпростір, що утворений за допомогою лінійних комбінацій векторів.

Досить простим є аналіз положення рівноваги, якщо це положення є **гіперболічною особливою точкою**, тобто такою, у якій відсутні власні значення матриці лінеаризації \mathbf{A} з нульовою дійсною частиною.

Наступна теорема встановлює характер стійкості положення рівноваги за властивостями лінеаризованої системи.

Теорема 2.3 (про стійкість за лінійним наближенням).

Якщо всі власні числа λ_i матриці лінеаризації \mathbf{A} задовольняють умові $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то нульовий розв'язок системи (2.1) є експоненційно стійким на інтервалі $t \in [0, \infty)$. Якщо існує хоча б одне власне значення з додатною власною частиною $\operatorname{Re} \lambda_{k_0} > 0$, то точка $\mathbf{x}_0 = 0$ – нестійка.

Доведення стійкості можна провести з використанням теореми з лінійної алгебри, за якою за умови $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ можна побудувати функцію Ляпунова $V(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 |\mathbf{x}|^2$ (див. напр. [2]). Інакше можна розглянути безпосередню оцінку розв'язку [3].

Можна показати, що якщо $m < N$ власних чисел має $\operatorname{Re} \lambda > 0$, а решта – від'ємні дійсні частини, існує многовид розмірності $N - m$, на якому розв'язок є стійким (умовна стійкість). Звідси, зокрема, впливає існування нетривіального розв'язку $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, а разом із тим нестійкість при $t \rightarrow \infty$ (див. напр. [5]). Якщо точка $\mathbf{y} = 0$ є гіперболічною особливою точкою системи (2.1) ($\mathbf{F}(0) = 0, \operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$), тоді існує гомеоморфізм h , визначений в деякому околі $U \subset R^n$, $0 \in U$, такий, що $h : U \rightarrow U' \subset R^n$, h переводить фазовий потік системи (2.1) у фазовий потік лінеаризованої системи (2.6), причому h переводить розв'язки вихідної системи в розв'язки лінеаризованої системи (теорема Гробмана – Хартмана).³

Якщо хоча б одне з власних чисел має нульову дійсну частину ($\exists i : \operatorname{Re} \lambda_i = 0$), то, у загальному випадку, стійкість або нестійкість не можуть бути визначені за аналізом лінеаризованої системи.

Приклад 2.3. Вище розглянуто рух одновимірною нелінійною осцилятором без тертя. Узагальнимо цей випадок за наявності тертя

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}), \quad \gamma > 0, \quad \omega_0^2 > 0,$$

де в околі нуля вважаємо $|f(x)| = O(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)$.

Еквівалентна система першого порядку:

$$\dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2 x + f(x), \quad \dot{x} = y.$$

Система лінійного наближення:

$$\dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2 x, \quad \dot{x} = y$$

Характеристичне рівняння лінійного наближення $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ має корені

³Д. Гробман, Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР 128 (1959), no. 5, с. 880–881. Р. Hartman, A lemma in the theory of structural stability of differential equations. Proc. A.M.S. 11 (1960), no. 4, pp. 610–620.

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, що, за умови $\gamma > 0$, мають від'ємні дійсні частини. Нульовий розв'язок експоненційно стійкий.

Приклад 2.4.

Розглянемо рівняння

$$\ddot{x} + \varepsilon x^2 \dot{x} + x = 0,$$

що зводиться до еквівалентної системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(x + \varepsilon x^2 y) \end{cases}$$

Лінеаризація цієї системи в околі особливої точки $(0,0)$ має вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Ця система має особливу точку $(0,0)$ – центр. Вона стійка, але не асимптотично стійка.

Щодо нелінійної системи можна зробити такі висновки.

Якщо $\varepsilon = 0$, то рівняння має вид $\ddot{x} + x = 0$. Помножимо вихідне рівняння другого порядку на \dot{x} , отримуємо $\dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + x^2) = 0$. Маємо інтеграл $E(\dot{x}, x) \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) = \text{const}$. Траєкторії системи на площині (x, y) є концентричними колами.

Якщо $\varepsilon \neq 0$, то отримуємо $\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2 + x^2}{2} = \frac{d}{dt} E = -\varepsilon x^2 \dot{x}^2$, тобто $\frac{dE}{dt} < 0$ при $\varepsilon > 0$ – енергія зменшується та прямує до нуля, при $\varepsilon < 0$ – навпаки. Замкнених траєкторій немає. Звідси можна зробити висновок, що $\forall \varepsilon \neq 0$ нелінійне рівняння та його лінеаризація якісно нееквівалентні.

Таким чином, коли особлива точка не має властивостей гіперболічності, то фазові потоки нелінійної системи та системи, отриманої після лінеаризації, можуть якісно відрізнитися. Але якщо особлива точка \bar{x} динамічної системи гіперболічна, поняття інваріантних підпросторів E^S та E^U можна локально узагальнити на нелінійний випадок. У загальному випадку в околі гіперболічної особливої точки $\bar{\mathbf{x}}$ можна побудувати многовид $W^S(\bar{\mathbf{x}})$ тієї ж розмірності, що й E^S , який є інваріантною множиною відносно дії фазового потоку системи (2.1) за $t \geq 0$, причому $\forall \mathbf{x} \in W^S(\bar{\mathbf{x}})$ існує границя $\Phi_t(\mathbf{x}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}$. Цей многовид⁴ можна уявляти як гіперповерхню в \mathbb{R}_N , яка дотикається до гіперплощини $E^S = \text{span}\{\mathbf{v}_{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{(n_s)}\}$. Також існує многовид з аналогічними властивостями за $t \leq 0$, $t \rightarrow -\infty$, що дотикається до E^U .

⁴Його називають локально стійким

2.2. Гранична поведінка траєкторій загальної системи

Припустимо, що розв'язки системи (2.1) і фазовий потік цієї системи означені на нескінченному інтервалі t . За визначенням, точка x^* є **граничною точкою** розв'язку $\mathbf{x}(t)$, якщо існує така послідовність $t_n \rightarrow \infty$, що $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{x}^*, n \rightarrow \infty$. Сукупність граничних точок є ω -**граничною множиною**; визначення α -граничної множини дається аналогічно при $t_n \rightarrow -\infty$.

За теоремою 1.5 траєкторією системи (2.1) може бути точка спокою, неперіодичний розв'язок або цикл. У останньому випадку траєкторія утворює замкнену криву. Якщо якийсь цикл є α - або ω -граничною множиною для деякої відмінної від нього траєкторії, то він називається **граничним циклом**. Граничні цикли можуть бути: стійкі (притягуючі), нестійкі (відштовхуючі), напівстійкі (коли є як траєкторії, що притягуються до цикла, так і траєкторії, що відштовхуються від нього).

Властивості граничних множин

А. Замкненість (множина містить всі свої граничні точки).

Доведення. Нехай M —гранична множина для траєкторії $\mathbf{x}(t)$, а послідовність $\mathbf{x}_n \in M$ збігається до границі $\bar{\mathbf{x}}$: $\mathbf{x}_n \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, тобто $|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}| < \varepsilon_n/2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Оскільки кожна точка \mathbf{x}_n є граничною, для кожного n можна знайти t_{k_n} , таке, що $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}(t_{k_n})| < \varepsilon_n/2$. Таким чином, $|\mathbf{x}(t_{k_n}) - \bar{\mathbf{x}}| \leq |\mathbf{x}(t_{k_n}) - \mathbf{x}_n| + |\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}| < \varepsilon_n \rightarrow 0$, тобто точка $\bar{\mathbf{x}}$ також є граничною для траєкторії $\mathbf{x}(t)$: $\bar{\mathbf{x}} \in M$.

Б. Інваріантність відносно дії потоку, тобто $\forall \bar{\mathbf{x}} \in M$ уся траєкторія $\Phi_t(\bar{\mathbf{x}})$ динамічної системи, що проходить через $\bar{\mathbf{x}}$, також належить граничній множині: $\Phi_t(\bar{\mathbf{x}}) \in M$.

Доведення. Нехай $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$. Розглянемо траєкторії $\Phi_t(\mathbf{x}(t_n))$, для яких $\mathbf{x}(t_n)$ є початковими умовами. Завдяки неперервній залежності від початкових умов, для будь-якого фіксованого t_1 матимемо $\Phi_{t_1}(\mathbf{x}(t_n)) \rightarrow \Phi_{t_1}(\bar{\mathbf{x}})$, тобто точка $\Phi_{t_1}(\bar{\mathbf{x}})$ також є граничною для $\mathbf{x}(t)$.

В. Гранична ω -множина траєкторії може бути пустою. Для цього необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Дійсно, умова $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$ означає, що для як завгодно великого $A > 0$ починаючи з певного часу t матимемо $|\mathbf{x}(t)| > A$ і для будь-якої обмеженої послідовності t_n кожна обмежена множина міститиме лише обмежене число точок $\mathbf{x}(t_n)$, тобто вона не може містити граничну точку. Навпаки, нехай гранична ω -множина траєкторії $\mathbf{x}(t)$ пуста. Тоді ми не можемо припустити, що в деякій обмеженій множині є нескінченне число точок $\mathbf{x}(t_n)$, оскільки обмежена множина є компактною і в ній існуватиме гранична точка траєкторії.

Г. Гранична ω -множина траєкторії може складатися з одної точки \mathbf{x}_0 . Для цього необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доведення. Нехай $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0$, тоді для будь-якої точки $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_0$ отримаємо, за досить великих t , $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}(t)| \geq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| - |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(t)| > |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|/2$.

Припустимо, навпаки, що \mathbf{x}_0 —це єдина точка граничної множини. Від супротивного припустимо, що $|\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}_0| > \varepsilon > 0$ для деякої послідовності $\{t_n\}$. З іншого боку, $\exists \{t'_n\} : |\mathbf{x}(t'_n) - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$. Тому, за неперервністю, $\exists \{t''_n\} : t_n \leq t''_n \leq$

t'_n , $|\mathbf{x}(t''_n) - \mathbf{x}_0| = \varepsilon$. Сфера $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \varepsilon$ є компактом, тому можна вибрати підпослідовність $\{t''_{n_k}\} : \mathbf{x}(t''_{n_k}) \rightarrow \mathbf{x}_1$, яка збігається до деякої \mathbf{x}_1 , що суперечить припущенню.

Притягуючою множиною (атрактором) будемо називати замкнену інваріантну множину A , якщо існує U -деякий окіл $A \subset U$, такий, що:

- 1) $\forall t \geq 0 \quad \Phi_t(U) \subset U$;
- 2) $\Phi_t(U) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A$.

Тобто якщо траєкторія системи починається в U , відстань від цієї траєкторії до множини A прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Поглинаючою множиною називають замкнену однозв'язну притягуючу множину.

Приклад 2.5

Розгляньмо систему

$$\dot{x} = x(x-1)^2, \quad \dot{y} = 1,$$

де x – це радіус в полярних координатах, $y \in [0, 2\pi]$ – кут.

Система має один граничний цикл у вигляді кола одиничного радіусу. Однак тут \dot{x} є додатним для $0 < x < 1$ та для $x > 1$. Тому цей цикл – напівстійкий.

2.3. Динамічні системи другого порядку на площині

Динамічні системи другого порядку мають наступний рівень складності у порівнянні з автономними рівняннями першого порядку. Тим не менш, досить часто ці системи дозволяють провести повне якісне дослідження поведінки траєкторій. Це обумовлено тим, що нескінченна траєкторія або цикл ділять фазовий простір на дві частини. Завдяки цьому хаотична поведінка тут неможлива, на відміну від систем більш високої розмірності. Фазовим простором двовимірної системи може бути площина, сфера, циліндр тощо; локальна поведінка розв'язків цих систем подібна, відмінності можуть бути лише при розгляді траєкторій у цілому. Нижче зосередимося на випадку систем 2-го порядку на площині. Дослідження якісної поведінки таких систем починається із знаходження точок спокою (особливих точок), визначення їх стійкості, поведінки розв'язків на нескінченності (типу нескінченної особливої точки), існування та положення періодичних розв'язків (циклів).

Положення рівноваги.

За $N = 2$ система (2.1) є системою двох рівнянь 1-го порядку

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad . \quad (2.9)$$

Точка $(0,0)$ є точкою спокою системи (2.3), якщо $F(0,0) = G(0,0) = 0$. Матриця лінеаризованої системи має вид

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{array} \right\|, \text{ де похідні беруть у точці } (0,0).$$

Власні значення такі:

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - D}, \text{ де } S = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}, \quad D = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Зосередимось на так званих грубих положеннях рівноваги, тобто таких, поблизу яких якісна поведінка розв'язків (зокрема, стійкість) не змінюється при малих змінах S, D . Для динамічних систем, визначених на площині, такі положення рівноваги можуть бути трьох типів, показаних на Рис. 2.1. Підкреслимо, що тут можуть бути траєкторії системи (2.3), що прямують до точки $(0,0)$ при $t \rightarrow -\infty$ або $t \rightarrow \infty$, але ці траєкторії не перетинають цієї точки за жодних скінченних t .

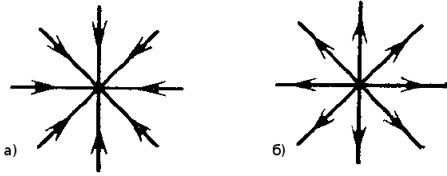


Figure 2.1: Вузол: а) стійкий; б) нестійкий

Якщо власні значення $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, причому $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ - особлива точка має назву “вузол”. В цьому разі $S^2 > 4D > 0$. При $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ - це нестійкий вузол, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ - стійкий вузол. Поведінка траєкторій поблизу точки спокою при $\lambda_1 = \lambda_2$ показана на Рис. 2.1. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ вигляд траєкторій більше схожий на вузол, хоча гранична поведінка траєкторій така ж як і на цьому рисунку.

Якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \lambda_2 < 0$ маємо особливу точку типу “сідло”. Це відповідає умові $D < 0$. Це нестійка точка (див. Рис. 2.2.). Тут існує лише дві траєкторії, що прямують до точки спокою при $t \rightarrow \infty$ і дві, що прямують до неї при $t \rightarrow -\infty$; ці траєкторії називають сепаратрисами сідла.

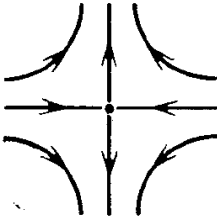


Figure 2.2: Сідло

Якщо маємо два комплексно спряжені власні значення $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$

(α, β – дійсні), але вони не чисто уявні, то особлива точка має назву “фокус” (див. Рис. 2.3). При цьому $S^2 < 4D$, звідки $\beta \neq 0$. Стійкість точки спокою визначається знаком $\alpha \neq 0$. Якщо λ_1, λ_2 чисто уявні та $\alpha = 0$, особлива точка має назву “центр”

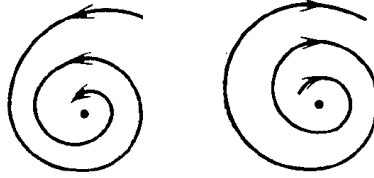


Figure 2.3: Фокуси: стійкий (зліва) та нестійкий (справа)

(див. Рис. 2.4.), але така точка рівноваги не є грубою.

Запишемо лінеаризовану систему у виді

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}$$

або

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}; \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

В (2.10) тоді

$$S = a + d, \quad D = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

У випадку фокуса $S^2 < 4D$, $\lambda_1 = \alpha + \beta i \stackrel{df}{=} \lambda$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ (верхнє підкреслювання означає комплексне спряження); $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ – дійсні. Нехай двовимірний вектор \mathbf{e} є власним вектором матриці $\hat{\mathbf{A}}$ з власним значенням $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, а тоді комплексно спряжений йому вектор $\bar{\mathbf{e}}$ є власним вектором з власним значенням $\alpha - \beta i$. Вектори $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}$ є лінійно незалежними, оскільки вони відповідають різним власним значенням за $\beta \neq 0$, і будь-який вектор \mathbf{x} можна розкласти по базису $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}$:

$$\mathbf{x} = z\mathbf{e} + \bar{z}\bar{\mathbf{e}}. \quad (2.12)$$

Підставляючи в (2.11) маємо $\dot{z}\mathbf{e} + \dot{\bar{z}}\bar{\mathbf{e}} = \lambda z\mathbf{e} + \bar{\lambda}\bar{z}\bar{\mathbf{e}}$, звідки, прирівнюючи коефіцієнти при $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}$, замість (2.11) маємо еквівалентну комплексну форму, що складається з лінійного рівняння $\dot{z} = \lambda z$ та його комплексно спряженого.

Розглянемо більш складний випадок, коли до правої частини (2.11) додано нелінійні члени $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Нехай розклад нелінійних членів по базису $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}$ має вигляд

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(z, \bar{z})\mathbf{e} + \overline{f(z, \bar{z})}\bar{\mathbf{e}}$$

(вважаємо, що \mathbf{F} – дійсне, тоді коефіцієнти розкладу по $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}$ – комплексно спряжені). Тоді, підставляючи (2.12) в (2.13) та прирівнюючи коефіцієнти при незалежних $\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}$, дістанемо *еквівалентну комплексну форму системи другого порядку (2.13)*:

$$\dot{z} = \lambda z + f(z, \bar{z}). \quad (2.14)$$

Комплексна форма (2.14) має сенс, якщо особливою точкою є фокус. Ця форма знадобиться далі при розгляді біфуркації народження циклу.

Задачі.

Розглянемо одну з форм запису рівняння Ван дер Поля:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x^3; \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (2.15)$$

Задача 1: Визначити особливі точки системи (2.15) та проаналізувати поведінку системи в їх околі.

Задача 2: Записати комплексну форму рівняння (2.15).

Існування та відсутність циклів

Бендиксоном виявлено, що у двовимірному випадку гранична поведінка траєкторій динамічної системи обмежена більш жорстко, ніж у випадку більш високої розмірності. Один із важливих результатів стосується наявності циклів в обмеженій області. Він базується на тому, що за теоремою Жордана неперервна замкнена крива на площині ділить її на дві частини (на відміну від простору вищої розмірності).

Теорема Бендиксона про існування циклів.

Якщо траєкторії системи входять в компактну область G і не виходять з неї, причому в цій області немає особливих точок, тоді ця область містить хоча б одну періодичну траєкторію.

Доведення. Нехай траєкторія $\mathbf{x}(t)$ проходить в G . Завдяки компактності в цій області $\exists \bar{\mathbf{x}}, \{t_n\} : \mathbf{x}(t_n) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, n \rightarrow \infty$. Згідно до п.2.2. траєкторія системи $\bar{\mathbf{x}}(t) = \Phi_t(\bar{\mathbf{x}})$ також є граничною; вона також належить G і не виходить з неї. Завдяки компактності $\exists \mathbf{x}^*, \{t_n\} : \bar{\mathbf{x}}(t_n) \rightarrow \mathbf{x}^*, n \rightarrow \infty$, причому (див. п.2.2) $\mathbf{x}^* \in M$, де M – гранична множина для траєкторії $\mathbf{x}(t)$.

а) Нехай траєкторія $\bar{\mathbf{x}}(t)$ проходить через свою граничну точку \mathbf{x}^* , що не є точкою спокою. Покажемо, що тоді $\bar{\mathbf{x}}(t)$ є замкненою.

Припустимо, від протинного, що це не так. Тоді розглянемо малий окіл точки \mathbf{x}^* , де траєкторії системи проходять майже паралельно та без дотикання до відрізка прямої ab (див. Рис. 2.4); причому в цьому околі міститься ділянка траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$, що проходить через \mathbf{x}^* (в околі цієї точки продовжується через

точку "a" на Рис. 2.4) і ділянка, що не проходить через \mathbf{x}^* (через точку "b"). Можливі випадки показані на Рис. 2.4. Або траєкторії входять в "мішок Бендиксона", складений з ділянки acb траєкторії та відрізка прямої ab (лівий малюнок), або виходять з такого мішка (правий малюнок).

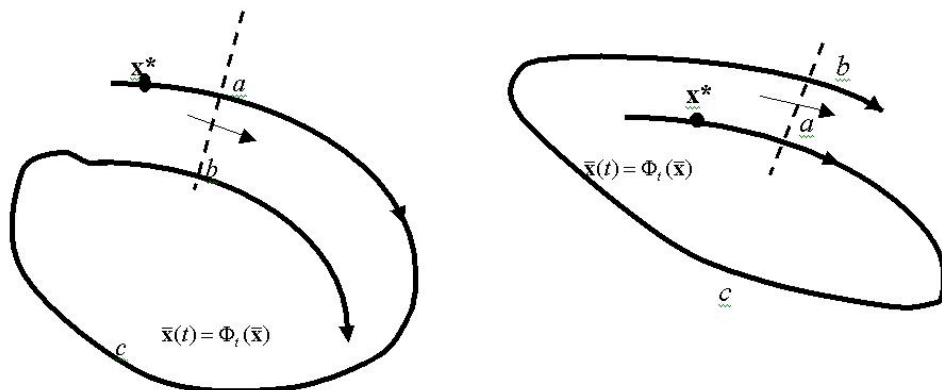


Figure 2.4:

Очевидно, в обох випадках траєкторія не може за досить великих t наблизитися до точки \mathbf{x}^* , оскільки вона не має перетинів сама з собою, тобто припущення суперечливе.

б) покажемо тепер, що умова (a) виконана, тобто траєкторія $\bar{\mathbf{x}}(t)$ проходить через будь-яку свою граничну точку \mathbf{x}^* .

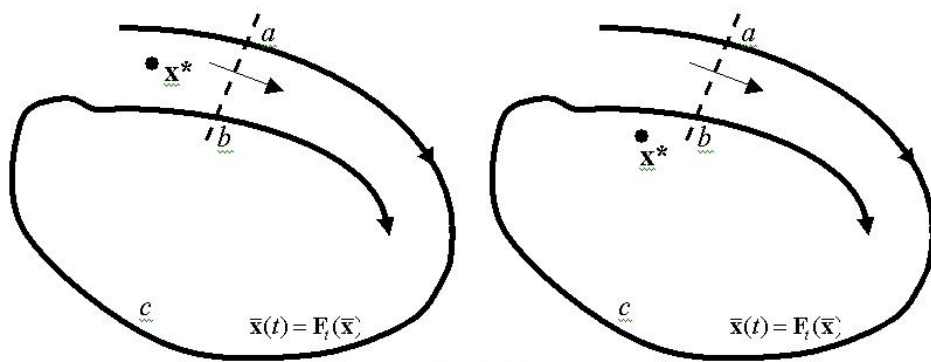


Figure 2.5:

В цьому разі в малому околі точки \mathbf{x}^* розглядаємо ділянки траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$

аналогічно (а). Якщо точка \mathbf{x}^* не належить траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$, розгляд, подібний до (а) показує, що тоді ця точка і усі точки траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$ не можуть одночасно бути граничними для вихідної траєкторії $\mathbf{x}(t)$. Два з варіантів розташування \mathbf{x}^* та кривих в околі цієї точки показаний на Рис.2.5. Дійсно, на лівому малюнку \mathbf{x}^* знаходиться зовні мішка Бендиксона, куди з часом має попасти траєкторія $\mathbf{x}(t)$ (разом із подовженням траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$ після точки (b) і $\mathbf{x}(t)$ не може наблизитися до \mathbf{x}^* . На правому малюнку зовні мішка Бендиксона залишилася ділянка траєкторії $\bar{\mathbf{x}}(t)$ зліва від точки a, що суперечить тому, що ці точки є граничними (див. п.2.2). Ці та інші варіанти розташування кривих та точки \mathbf{x}^* приводять до суперечностей. Теорему доведено.

На Рис.2.6 показаний варіант використання теореми; тут граничний цикл виникає в кільцевій області, в яку входять і з якої не виходять траєкторії.

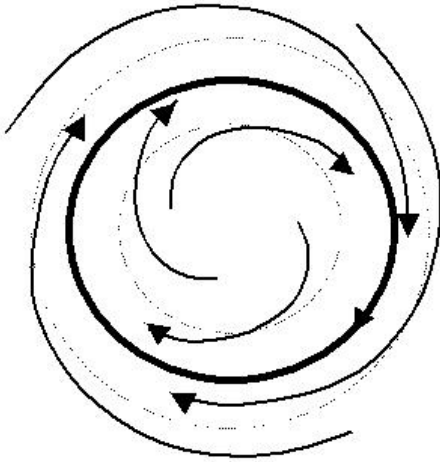


Figure 2.6: Траєкторії входять в область, обмежену пунктирними лініями.

Критерій Бендиксона відсутності циклів.

Існує низка критеріїв відсутності циклів, одним з яких є досить простий

критерій Бендиксона:

Нехай в однозв'язній області вираз

$$\Xi(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

не міняє знак і не є тотожним нулем. Тоді в цій області немає замкнених кривих, що складаються з траєкторій системи (2.9).

Доведення. Нехай, від протилежного, така крива існує і утворює замкнений

контур C . Оскільки, за умовою, для довільної точки кривої виконується (2.9), на будь-якій ділянці цієї кривої маємо

$$G(x, y)dx - F(x, y)dy = [G(x, y)\dot{x} - F(x, y)\dot{y}] dt = 0,$$

тому $\oint_C [G(x, y)dx - F(x, y)dy] = 0$.

З іншого боку, за формулою Гріна

$$\oint_C [G(x, y)dx - F(x, y)dy] = - \iint_D \left[\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} \right] dxdy \neq 0,$$

оскільки, за неперервністю підінтегрального виразу, він зберігає знак хоча б в околі деякої точки, де він є відмінним від нуля. Протиріччя доводить висновок критерію.

Зауваження 1. Твердження теореми є більш сильним, ніж просто умова відсутності циклів. Дійсно, можна побудувати замкнену криву, що складається з різних траєкторій, які виходять з особливих точок чи входять в них з різних боків.

Контрольне запитання. Де в критерії Бендиксона використовується умова однозв'язності області?

Bibliography

2.4. *Литература до розділів 1-2*

- [1] И.Г.Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1979.
- [2] В.И.Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
- [3] А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980
- [4] В.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. Введение в нелинейную физику. М., Наука, 1988.
- [5] Б.П.Демидович. Лекции по теории математической устойчивости. М., Наука, 1967.
- [6] Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., Наука, 1976.

3

Біфуркації в динамічних системах

3.1. Загальні зауваження.

У теорії динамічних систем досліджують режими руху, у яких може перебувати система, в залежності від вибору параметрів, що можуть входити через початкові умови або явно в рівняннях руху. Найбільш цікавими є так звані біфуркаційні – критичні – значення параметрів, при проходженні яких система змінює якісну поведінку; власне таку зміну і називають біфуркацією. Дослідження в малому околі біфуркаційних параметрів, як правило, суттєво спрощується. Але таке дослідження допомагає виділити області різної якісної поведінки системи і з'ясувати характер розв'язків у загальному випадку.

В п.2.3. йшлося про грубі положення рівноваги. Більш загальним є поняття про грубі системи. Диференціальна система (відображення) називають **грубою**¹, якщо при її малих збуреннях розподіл фазових кривих залишається топологічно еквівалентним незбуреній системі. За цим визначенням, значення параметрів, що відповідають грубій системі, не є біфуркаційними. Негрубу систему можна зробити грубою за допомогою малих змін векторного поля, що визначає цю систему. Питання про режими, які при цьому виникають, є предметом дослідження теорії біфуркацій.

Вправа. Покажіть, що лінійна система виду $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ є грубою у класі лінійних систем тоді й тільки тоді, коли серед власних чисел матриці \mathbf{A} немає чисел із нульовою дійсною частиною.

Приклад 1. Розглянемо рівняння ($x \in \mathbb{R}^1$)

$$\dot{x} = x(\mu - x^2). \quad (3.1)$$

Тут μ - біфуркаційний параметр. Дослідимо поведінку системи при різних значеннях μ .

При $\mu < 0$ - є стійка особлива точка $x = 0$. Малі зміни $\mu < 0$ не змінюють якісну поведінку траєкторії, система є грубою. Аналогічно при $\mu > 0$ точка $x = 0$ є нестійкою, а система є грубою.

¹В літературі вживають також близький термін "структурна стійкість".

Значення параметра $\mu = 0$ є біфуркаційним: при зміні знаку μ відбувається зміна характеру стійкості точки $x = 0$ (при $\mu = 0$ точка $x = 0$ залишається стійкою). Крім того, при $\mu > 0$ від цієї точки відгалужуються дві додаткові особливі точки: $x_{1,2} = \pm x_0$, де $x_0 = \sqrt{\mu}$. Ці точки є стійкими (покажіть це).

Вправа. Дослідіть за $\mu > 0$ стійкість точок $x_{1,2} = \pm x_0$ з попереднього прикладу, аналізуючи зміни знаку функції $x(\mu - x^2)$. Покажіть, що той самий висновок за $\mu > 0$ впливає з лінеаризованих систем в околі кожної з цих особливих точок.

Приклад 2.

В рівнянні лінійного осцилятора ($x \in \mathbb{R}^1$)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.2)$$

при зміні знаку тертя (тобто коли параметр γ проходить через нуль) відбувається зміна характеру стійкості нульового розв'язку. Значення $\gamma = 0$ є біфуркаційним.

В прикладі 2 рівняння (3.2) є еквівалентним системі 2-го порядку на площині $x, y = \dot{x}$. Траєкторії системи при $|\gamma| < \omega_0$ утворюють фокус, характер стійкості якого змінюється при переході через точку біфуркації; при цьому пара комплексно спряжених розв'язків характеристичного рівняння у комплексній площині проходить через уявну вісь (дійсна частина власних значень міняє знак). Суттєво, що лінійна система при $\gamma \neq 0$ не має періодичних розв'язків, вони експоненційно зростають або спадають. Але ця ситуація може змінитися за наявності нелінійних доданків.

Нехай при проходженні значення $\mu = 0$ відбувається така зміна стійкості нульового розв'язку системи другого порядку: при $\mu < 0$ точка спокою, що відповідає нульовому розв'язку є стійким фокусом, а при $\mu > 0$ фокус є нестійким. Будемо говорити про **біфуркацію Пуанкаре-Андронов-Хопфа**, коли при цьому реалізуються один з варіантів:

- а) при $\mu > 0$ в околі фокуса існує малий **стійкий** граничний цикл (тобто виникають періодичні коливання) малої амплітуди, яка зростає при збільшенні μ , а при $\mu < 0$ в околі фокуса циклів немає;
- б) при $\mu < 0$ в околі фокуса існує малий **нестійкий** цикл, амплітуда прямує до нуля при $\mu \rightarrow 0$, а при $\mu > 0$, коли фокус стає нестійким, в його малому околі циклів немає.

У випадку (а) при зміні параметра $\mu > 0$ амплітуда періодичних коливань в околі точки спокою прямує до нуля при зменшенні $\mu \rightarrow 0$. При повільному збільшенні μ починаючи з нуля відбувається також повільне збільшення амплітуди усталених коливань (*м'яка втрата стійкості точки спокою*).

У випадку (б) траєкторії можуть прямувати до якогось іншого граничного циклу, розмір якого не прямує до нуля при $\mu \rightarrow 0$. У цьому разі, навіть якщо μ міняють повільно, при переході через точку біфуркації система стрибком міняє амплітуду усталених коливань, причому ця амплітуда не прямує до нуля якщо, навпаки, зменшувати $\mu \rightarrow 0$ (*жорстка втрата стійкості*).

Методика дослідження біфуркації Пуанкаре-Андронов-Хопфа є одним з основних

питань Розділу 3.

Розглянемо N -вимірну систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (3.3)$$

причому

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0} \quad . \quad (3.4)$$

Аналогічно п. 2.1.2, в околі положення рівноваги $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, розкладаючи праву частину рівняння (3.3) по малій величині \mathbf{x} , виділимо лінійну частину: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{R}$, де $|\mathbf{R}| \sim |\mathbf{x}|^2$ містить нелінійні члени починаючи з другого порядку, а

$$\mathbf{A} = \left\| \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right\|;$$

- матриця лінеаризації. Далі ми припускатимемо, що усі записані співвідношення мають місце за будь-яких μ , а точка $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$ є ізольованою нерухомою точкою системи (3.3).

Лінеаризована система, відповідна системі (3.3), має вигляд

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Нехай $\lambda_n = \alpha_n \pm i\omega_n$ - власні значення дійсної матриці $\mathbf{A}\mathbf{x}$, n нумерує пари власних значень (в принципі, можливо $\omega_n = 0$). Поведінка лінеаризованої системи може суттєво відрізнитися від поведінки точної системи (3.3), якщо серед власних значень λ_n є такі, що мають нульову дійсну частину α_n . Ця ситуація має місце у багатьох застосуваннях за наявності параметра μ , оскільки при зміні μ власні числа можуть перетинати уявну вісь. У цьому розділі ми зосереджуємося на випадку, коли за $\mu < 0$ усі $\alpha_n < 0$, а при $\mu = 0$ одна пара (наприклад, за $n = 1$) власних значень $\lambda_1(\mu) = \alpha_1(\mu) \pm i\omega_1(\mu)$ з найбільшими дійсними частинами перетинає уявну вісь: $\alpha_1(0) = 0$, $\omega_0 \equiv \omega_1(0) > 0$, а для решти власних значень $\alpha_n(0) < 0$.

Далі ми сформулюємо умови існування періодичного розв'язку у припущенні, що N -вимірна вектор-функція \mathbf{f} є аналітичною або досить гладкою за сукупністю \mathbf{x} та μ в деякому околі точки $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$, $\mu = 0$.

Нехай матриця лінеаризації $\mathbf{A}(\mu)$ системи (3.3) має пару комплексно спряжених власних чисел $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, де $\omega(0) > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, а інші $N - 2$ власних чисел мають строго від'ємні дійсні частини.

Сформульовані умови є основою для підозри, що система (3.3) в околі точки бифуркації $\mu = 0$ має періодичні розв'язки, тобто це – керівництво до подальшого дослідження. Тут можливі різні варіанти. Найбільш цікаво, коли за $\alpha(\mu) > 0$ виникає стійкий граничний цикл; можливо, що за $\alpha(\mu) < 0$ також є періодичні розв'язки, але нестійкі. Остаточна відповідь залежить від властивостей нелінійних складових, для з'ясування яких потрібні певні додаткові умови.

Тим не менш, в разі аналітичної функції $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ можна показати, що існує деяке $\varepsilon_H > 0$ і така аналітична функція $\mu^H(\varepsilon) = \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k^H \varepsilon^k$, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_H)$ система (3.3) при $\mu = \mu^H(\varepsilon)$ має періодичний розв'язок із періодом $T^H(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} [1 + \sum_{k=2}^{\infty} \tau_k^H \varepsilon^k]$.

У цьому твердженні, яке є спрощеним формулюванням теореми Хопфа (докладніше див., напр., [7]), важливо, що розклад $\mu^H(\varepsilon)$ починається з другого порядку, тому, в околі точки $\mu = 0$, періодичні розв'язки виникають або при $\mu > 0$, або при $\mu < 0$. Зауважимо, що висновок про існування періодичних розв'язків залишається в силі і тоді, коли умову аналітичності $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ замінити умовою існування неперервних похідних цієї функції за обома аргументами достатньо високого порядку, але у цьому разі нескінченні розклади $\mu^H(\varepsilon)$ та $T^H(\varepsilon)$ слід замінити асимптотичними виразами скінченного порядку. Це твердження узагальнюється на нескінченно-вимірний випадок, що охоплює рівняння з частинними похідними та функціонально-диференціальні рівняння (див., напр., [7,8]).

Далі ми зосередимося на практичних прийомах, що дозволяють будувати періодичні розв'язки системи (3.3) у вигляді розкладів за малим параметром.

3.2. Комплексна форма рівняння нелінійних коливань

В п. 2.3. було показано, як можна динамічну систему в околі фокуса подати в комплексному вигляді (2.14); цей вигляд є зручним для переходу до нормальної форми Пуанкаре, яку означено нижче. Тут розглянемо зведення до комплексної форми більш докладно для рівняння нелінійного осцилятора з тертям – рівняння другого порядку відносно одновимірної змінної $x \in \mathbb{R}^1$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \varphi(\dot{x}, x), \quad (3.5)$$

де права частина $\varphi(\dot{x}, x) \sim O(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)$ містить нелінійні члени². Далі нас цікавитимуть властивості цього рівняння за малих $\alpha = -\gamma$, причому знак цієї величини (знак тертя) може бути як від'ємним, так і додатним. Зручно ввести $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$, тоді ліва частина (3.5) приймає вигляд

$$\ddot{x} - 2\alpha\dot{x} + (\omega^2 + \alpha^2)x = \frac{d}{dt}(\dot{x} - \alpha x) - \alpha(\dot{x} - \alpha x) + \omega^2 x. \quad (3.6)$$

Щоб отримати систему двох рівнянь першого порядку введемо

$$y = -\frac{\dot{x} - \alpha x}{\omega},$$

звідки маємо

²Розгляд аналогічний, якщо розклад φ починається з величин більш високого порядку малості.

$$\dot{x} = \alpha x - \omega y, \quad (3.7)$$

а (3.5) з урахуванням (3.6) приймає вигляд

$$\dot{y} = \omega x + \alpha y - \frac{1}{\omega} \varphi(\alpha x - \omega y, x). \quad (3.8)$$

Система (3.7), (3.8) представляє рівняння, які можна записати в комплексній формі:

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \mu), \quad (3.9)$$

де $\lambda = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, та $g(z, \bar{z}, \alpha) = -\frac{i}{\omega} \varphi(\alpha x - \omega y, x) = -\frac{i}{\omega} \varphi\left(\alpha \frac{z+\bar{z}}{2} - \omega \frac{z-\bar{z}}{2i}, \frac{z+\bar{z}}{2}\right)$.

Далі розглядатиметься випадок, коли можна записати розклад

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{2 \leq m+n} g_{mn}(\mu) z^m \bar{z}^n + \dots, \quad (3.10)$$

де $z = x + iy$ - комплексна змінна, $\bar{z} = x - iy$, $\alpha = \alpha(\mu)$. Звичайну форму рівнянь другого порядку отримуємо після відділення дійсної та уявної частини в (3.9), а зв'язок змінних здійснюється за формулами $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Вправа. Записати комплексну форму рівняння (3.7), (3.8) для випадків.

$$a) \varphi(\dot{x}, x) = \sigma \dot{x} x; \quad b) \varphi(\dot{x}, x) = \sigma \dot{x} x^2.$$

Розглянемо (а). Враховуючи (3.9)

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = -\frac{i}{\omega} \varphi(\alpha x - \omega y, x) = -\frac{i}{\omega} \varphi\left(\alpha \frac{z+\bar{z}}{2} - \omega \frac{z-\bar{z}}{2i}, \frac{z+\bar{z}}{2}\right) \dot{x} = \alpha x - \omega y,$$

тому

$$g = -\frac{i}{\omega} \sigma \left(\alpha \frac{z+\bar{z}}{2} - \omega \frac{z-\bar{z}}{2i} \right) \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right) = \frac{\sigma}{4} (z^2 - \bar{z}^2) - \frac{i\sigma\alpha}{4\omega} (z + \bar{z})^2$$

3.3. Зведення комплексної системи до нормальної форми Пуанкаре.

3.3.1. Далі нас цікавитиме поведінка розв'язків в околі точки бифуркації $\alpha(\mu) = 0$. Вважаємо, що система залежить від малого параметра μ з бифуркаційним значенням $\mu = 0$. Народження циклу відбувається в околі точки спокою, тобто нелінійності в рівняннях системи також є малими. Але нехтувати ними не можна, оскільки саме вони визначають параметри циклу, що виникає при переході μ через бифуркаційне значення.

Припускаємо $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0$. Позначимо $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$.

Нормальною формою Пуанкаре порядку $2N+1$ називатимемо комплексне представлення двовимірної системи у вигляді:

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + \sum_{j=1}^N f_j(\mu) \xi |\xi|^{2j} + \varphi_{2N+2}(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (3.11)$$

де в φ_{2N+2} зібрано степені вищі за $2N+1$; ми обмежимося варіантом, коли $\varphi_{2N+2} \sim |\xi|^{2N+2}$.

Нормальна форма Пуанкаре цікава тим, що для рівняння (3.11) наближений аналіз поведінки розв'язків в околі нуля проводиться дуже просто. Фактично цей аналіз зводиться до рівняння першого порядку з однією змінною. Рівняння (3.9) ще не відповідає формі (3.11), оскільки в правій частині нелінійності (3.10) містять члени $z^m \bar{z}^n$ з довільними степенями. Далі буде показано, як побудувати нормальну форму Пуанкаре, виходячи з (3.9).

3.3.2. Побудуємо перетворення виду

$$z = \xi + \chi(\xi, \bar{\xi}), \quad (3.12)$$

яке переводить систему (3.9) до рівняння в нормальній формі Пуанкаре (3.11). Підкреслимо, що перетворення має бути регулярним за параметром μ в околі точки біфуркації $\mu = 0$, тобто за $\alpha = \text{Re} \lambda \rightarrow 0$.

Підставляючи (3.12) в (3.9) маємо

$$\dot{\xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} = \lambda \xi + \lambda \chi + g(\xi + \chi, \bar{\xi} + \bar{\chi}). \quad (3.13)$$

Це рівняння слід розглядати разом із своїм комплексним спряженням, яке складає, разом із (3.13), систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь $\dot{\xi}, \dot{\bar{\xi}}$. Її можна розв'язувати за допомогою ітерацій, переписавши (3.13) у формі

$$\dot{\xi} = \lambda \xi + \lambda \chi + g(\xi + \chi, \bar{\xi} + \bar{\chi}) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \right). \quad (3.14)$$

Зокрема, перша ітерація (з точністю до лінійних членів) дає

$$\dot{\xi} = \lambda \xi,$$

друга

$$\dot{\xi} = \lambda \xi + \lambda \chi + g(\xi + \chi, \bar{\xi} + \bar{\chi}) - \left(\lambda \xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \bar{\lambda} \bar{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\xi}} \right), \quad (3.15)$$

і так далі. Збіжність процедури забезпечена малою величиною нелінійних поправок. З вигляду ітерацій видно, що рівняння, розв'язане відносно $\dot{\xi}$, матиме вигляд

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + \Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu) \quad , \quad (3.16)$$

де $\Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu)$ містить усі нелінійні доданки. Зауважимо, що коли $\chi(\xi, \bar{\xi})$ має вигляд $\chi(\xi, \bar{\xi}) \equiv \sum_{m+n=L} \chi_{mn} \xi^m \bar{\xi}^n$ (для цілого $L > 1$), то члени порядку L виникають у другій ітерації, а подальші ітерації залишають ці члени незмінними. Таким чином, вибір $\chi(\xi, \bar{\xi})$ для ліквідації членів певного порядку можна робити на основі (3.15).

Наша задача – звести рівняння до нормальної форми Пуанкаре, тобто отримати

$$\Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu) = \Phi_{2N+2}(\xi, \bar{\xi}, \mu) \equiv \sum_{j=1}^N f_j(\mu) \xi |\xi|^{2j} + \varphi_{2N+2}(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (3.17)$$

де в φ_{2N+2} зібрано члени більш високого порядку по $\xi, \bar{\xi}$, починаючи з $2N + 2$.

Заміну змінних (3.12), що приводить до (3.17), зручно шукати як суперпозицію послідовних заміन подібного типу, таких, що кожна така заміна позбавляє вихідні рівняння спочатку членів другого порядку, потім третього (за винятком тих, що фігурують у формі Пуанкаре), потім четвертого і т.д. На кожному такому кроці для $m + n = L$ (L – ціле) матимемо вирази для коефіцієнтів розкладу функції χ , а також коефіцієнтів f_j у формі Пуанкаре, через відомі коефіцієнти g_{mn} з (3.10).

Покажемо це по індукції. Нехай маємо форму Пуанкаре порядку $N - 1$, тобто в рівнянні (3.9)

$$g(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k z |z|^{2k} + \sum_{m+n=2N} \psi_{mn} z^m \bar{z}^n + g_1(z, \bar{z}), \quad (3.18)$$

де в g_1 зібрано члени порядку $\geq 2N + 1$; усі коефіцієнти можуть залежати від параметра μ ; $N \geq 1$.

(а) На першому кроці шукаємо $\chi(\xi, \bar{\xi})$ у вигляді

$$\chi \equiv \sum_{m+n=2N} \chi_{mn} \xi^m \bar{\xi}^n.$$

де коефіцієнти χ_{mn} виберемо так, щоб знищити члени порядку $2N$ в (3.16). Як було зазначено, для цього досить розглядати другу ітерацію, тобто (3.15).

Враховуючи порядок членів χ , у (3.15) можна записати

$$g(\xi + \chi, \bar{\xi} + \bar{\chi}) = g(\xi, \bar{\xi}) + \dots,$$

де крапки означають члени більш високого порядку, починаючи з $2N + 1$.

Щоб права частина (3.15) не містила членів порядку $2N$, необхідно і достатньо знищити такі члени у виразі

$$\begin{aligned}
& g(\xi, \bar{\xi}) + \lambda\chi - \left(\lambda\xi \frac{\partial\chi}{\partial\xi} + \bar{\lambda}\bar{\xi} \frac{\partial\chi}{\partial\bar{\xi}} \right) = \\
& = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \xi|\xi|^{2k} + \sum_{m+n=2N} \psi_{mn} \xi^m \bar{\xi}^n + g_1 + \lambda\chi - \left(\lambda\xi \frac{\partial\chi}{\partial\xi} + \bar{\lambda}\bar{\xi} \frac{\partial\chi}{\partial\bar{\xi}} \right) + \dots
\end{aligned}$$

Звідси

$$\left(\lambda\xi \frac{\partial\chi}{\partial\xi} + \bar{\lambda}\bar{\xi} \frac{\partial\chi}{\partial\bar{\xi}} \right) - \lambda\chi = \sum_{m+n=2N} \psi_{mn} \xi^m \bar{\xi}^n, \quad (3.19)$$

що дає умову на коефіцієнти

$$\chi_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\lambda(m-1) + \bar{\lambda}n}, \quad m+n=2N. \quad (3.20)$$

Сума $\sum_{k=1}^{N-1} c_k \xi|\xi|^{2k}$ залишається незмінною.

Відзначимо, що при $\alpha \rightarrow 0$ знаменник в (3.20) є регулярним

$$\begin{aligned}
\lambda(m-1) + \lambda * n &= \alpha(m-1+n) + i\omega(m-1-n) = \\
&= \alpha(2N-1) + i\omega(2m-1-2N) \rightarrow i\omega(0)(2m-1-2N) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ми отримали рівняння (3.16), де

$$\Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu) = \Phi_{2N+1}(\xi, \bar{\xi}, \mu) \equiv \sum_{j=1}^{N-1} c_j(\mu) \xi|\xi|^{2j} + \varphi_{2N+1}(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (3.21)$$

де φ_{2N+1} містить члени порядку $\geq 2N+1$. Тепер тут треба ліквідовувати члени наступного (непарного) порядку, за винятком $\sim \xi|\xi|^{2N} = \xi^{N+1}\bar{\xi}^{*N}$.

(б) Після етапу (а) та перепозначення у щойно отриманих рівняннях (3.21) та (3.16) $\xi \rightarrow z$ маємо справу з новим рівнянням (3.9), де замість (3.18)

$$g(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k z|z|^{2k} + \sum_{m+n=2N+1} \psi_{mn} z^m \bar{z}^n + \varphi_{2N+1}(z, \bar{z}),$$

а в φ_{2N+1} тепер зібрано члени порядку $> 2N+1$. Шукаємо перетворення змінних у вигляді (3.12)

$$\chi \equiv \sum_{m+n=2N+1} \chi_{mn} \xi^m \bar{\xi}, \quad (3.22)$$

причому при $m = N+1$, $n = N$ коефіцієнт $\chi_{N+1,N} = 0$.

Аналогічні до (а) міркування дають значення коефіцієнтів згідно до (3.20) при $m+n = 2N+1$. Причому єдиний випадок, що може давати особливість у

знаменнику (3.19) при $\alpha \rightarrow 0$, який відповідає $m = N + 1$, $n = N$, ми виключили. Таким чином,

$$\chi_{mn} = \varphi_{mn}[\lambda(m-1) + \lambda^* n]^{-1}, \quad m+n = 2N+1, \quad n \neq N, \quad (3.23)$$

що ліквідує члени порядку $2N+1$, за винятком члена $\psi_{N+1,N} \xi^{N+1} \bar{\xi}^N$. Ми отримали рівняння виду (3.16), де

$$\Phi(\xi, \bar{\xi}, \mu) = \Phi_{2N+2}(\xi, \bar{\xi}, \mu) \equiv \sum_{j=1}^N f_j(\mu) \xi |\xi|^{2j} + \varphi_{2N+2}(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (3.24)$$

$$f_j(\mu) = c_j(\mu), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad f_N(\mu) = \psi_{N+1,N}(\mu). \quad (3.25)$$

Таким чином, з нормальної форми Пуанкаре порядку $N-1$ (3.18) отримано форму порядку N , що й було треба довести.

3.3.3. Побудуємо формули для отримання параметрів циклу в околі точки бифуркації.

Розглянемо скорочену систему,

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + \sum_{j=1}^N c_j(\mu) \xi |\xi|^{2j}, \quad (3.26)$$

яку отримуємо з (3.11) шляхом відкидання членів старших порядків.

З (3.26) звідси для комплексної змінної $\xi = r e^{i\varphi}$, $r = |z|$, маємо

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\xi \bar{\xi}) = \dot{\xi} \bar{\xi} + \xi \dot{\bar{\xi}} = 2\alpha r^2 + 2 \sum_{j=1}^{[L/2]} \operatorname{Re} c_j r^{2j+2},$$

або

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r + \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} c_j r^{2j+1}, \quad (3.27)$$

При $\alpha'(0) > 0$ за $\mu > 0$ маємо $\alpha > 0$. Нехай $\operatorname{Re} c_1(0) < 0$, тоді для деякого малого r права частина (3.27) обертається на нуль:

$$\alpha + \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} c_j r^{2j} = 0. \quad (3.28)$$

Відповідно, звідси впливає існування стаціонарного розв'язку, на якому права частина (3.19) дорівнює нулю. У площині комплексної змінної $\xi = r e^{i\varphi}$ це відповідатиме радіусу кола

$$r = r_c \approx \left[-\frac{\alpha'(0)\mu}{\operatorname{Re} c_1(0)} \right]^{1/2},$$

Більш точно r_c можна отримати з рівняння (3.28).

Оскільки ми працюємо із скороченою системою, це – також наближене співвідношення, отримане після відкидання членів порядку $\geq 2N + 2$. Але слід пам'ятати, що порядок форми Пуанкаре, а з ним і порядок відкинутих членів, можна зробити як завгодно великим.

Для розв'язку скороченої системи з $r = r_c$, диференціюючи $\xi = re^{i\varphi}$ з урахуванням (3.17), (3.28), маємо частоту обертання по колу в комплексній площині

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mu) + \sum_{j=1}^N \operatorname{Im} c_j(\mu) r^{2j}.$$

Цей розв'язок існує за $\mu > 0$ і є стійким. Останнє впливає з розгляду знаку правої частини (3.27) за $r > r_c$ та $r < r_c$.

У вихідних координатах x, y , перехід до яких отримуємо через зв'язок (3.12) між комплексними змінними z та ξ , траєкторія буде дещо відрізнятися від кола завдяки малим (за малих μ) нелінійним поправкам, що їх представляє функція χ з (3.12); але, звичайно, це також буде замкнена стійка траєкторія, тобто стійкий цикл.

Якщо $\operatorname{Re} c_1(0) > 0$, то аналогічний розгляд показує, що цикл існуватиме при $\mu < 0$, але у цьому разі він буде нестійким.

Зауваження. В багатьох задачах досить обмежитися головними членами в оцінці амплітуди першої гармоніки, тобто радіусу граничного циклу r_c . Це дуже просто знайти, якщо в (3.9) розклад (3.10) починається з членів непарного порядку. Нехай

$$g(z, z^*, \mu) = \sum_{m+n=2M+1} g_{mn}(\mu) z^m z^{*,n} + \dots, \quad M \geq 1 - \text{ціле}.$$

Тоді ліквідацію "зайвих" нелінійностей порядку $2M + 1$ можна починати відразу з частини (б) з розгляду п.3.3.3. З цього розгляду видно, що перший ненульовий коефіцієнт в формі Пуанкаре буде $c_M = g_{M+1,M}(\mu)$ і в скороченій системі матимемо

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + g_{M+1,M}(\mu)\xi|\xi|^{2M}.$$

Відповідно, радіус граничного циклу наближено визначається рівнянням

$$\alpha + \operatorname{Re}(g_{M+1,M}) r_c^{2M} = 0.$$

3.4. Існування циклів для точної системи (3.11)

Результат щодо існування циклу для скороченої системи (3.26) наводить на думку про аналогічні властивості точного рівняння (3.11). Для того, щоб поширити отримані розклади на випадок (3.11), треба довести, що цикли та відповідні розклади дійсно існують за усіх μ в околі нуля. Коротко окреслимо, як довести існування періодичних розв'язків та функції $\mu(\varepsilon)$.

В рівнянні (3.11) зробимо заміну $\xi = \varepsilon\zeta$, після чого воно приймає вид

$$\dot{\zeta} = \lambda(\mu)\zeta + \sum_{j=1}^N \varepsilon^{2j} f_j(\mu) \zeta |\zeta|^{2j} + \varepsilon^{2N+1} \tilde{\psi}(\zeta, \bar{\zeta}, \mu, \varepsilon), \quad (3.29)$$

де функцію $\tilde{\psi}$ за досить загальних умов можна вважати достатньо гладкою за усіма аргументами. Нагадаємо, що $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, $\omega_0 \equiv \omega(0) > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$.

За $\varepsilon = 0$ рівняння (3.29) зводиться до

$$\dot{\zeta} = \lambda(\mu)\zeta \quad (3.30)$$

За $\mu = 0, \varepsilon = 0$ траєкторія розв'язку (3.30) – це коло $\zeta = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$, причому за малих μ траєкторія (3.30) за скінченних t мало відрізнятиметься від цього кола.

Розглянемо розв'язок $\zeta(t, \varepsilon, \mu)$ рівняння (3.29), що визначається початковою умовою $\zeta(0, \varepsilon, \mu) = 1$. За $\varepsilon = 0$ і досить малому μ розв'язок цього рівняння $\zeta = (t, 0, \mu) = e^{\alpha t} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$ перетинає дійсну вісь при $t = T_0(\mu) \equiv 2\pi/\omega(\mu) \approx 2\pi/\omega_0$, тобто $\text{Im} \zeta(T_0(\mu), 0, \mu) \equiv 0$. Зауважимо, що при цьому $\text{Im} \dot{\zeta}(t, 0, \mu) \approx \omega_0 > 0$. За умови гладкості $\text{Im} \zeta(t, \varepsilon, \mu)$, в силу теореми про неявну функцію існує розв'язок $t = T(\varepsilon, \mu)$ рівняння $\text{Im} \zeta(t, \varepsilon, \mu) = 0$.

Покладемо $F(\varepsilon, \mu) = \zeta(T(\varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu)$. Тепер задача полягає в тому, щоб замкнути траєкторію при $t = T(\varepsilon, \mu)$ для кожного ε , тобто підібрати таке $\mu = \mu(\varepsilon)$, що $F(\varepsilon, \mu) = 1$. Знов маємо рівняння для неявної функції, причому розв'язок цього рівняння існує за $\varepsilon = 0$: це, очевидно, $\mu = 0$. За $\varepsilon = 0$ маємо $\text{Re} \zeta(T_0(\mu), \varepsilon, \mu) \equiv \exp[\alpha(\mu)T_0(\mu)]$, звідки, за неперервністю в околі точки $\varepsilon = 0, \mu = 0$ оцінюємо $\partial F / \partial \mu \approx 2\pi\alpha'(0)/\omega_0 \neq 0$. Таким чином, існує функція $\mu = \mu(\varepsilon)$, яка задовольняє поставлені умови. Подальший аналіз рівняння для цієї функції дозволяє визначити її властивості гладкості та перші члени розкладу за параметром ε . А саме, озброєні результатом про існування періодичного розв'язку, можна повторити міркування попереднього підрозділу і отримати співвідношення, аналогічне (3.28). Для рівняння (3.29), отримане після заміни $\xi = \varepsilon\zeta$ та $r = |\zeta| = \varepsilon$, в такий спосіб дістаємо

$$\alpha'(0)\mu + \dots + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^{2j} \text{Re} f_j(\mu) + \dots = 0;$$

тут враховано $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$. За допомогою цього співвідношення можна побудувати асимптотичні формули для $\mu(\varepsilon)$ до потрібного порядку.

Приклад: стійкість циклічних розв'язків в околі точки біфуркації.

Розглянемо рівняння нелінійного осцилятора з тертям

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \varphi(\dot{x}, x), \quad (3.31)$$

з кубічною нелінійністю $\varphi(\dot{x}, x) = \kappa \dot{x} x^2$ та з'ясуємо умови існування періодичних коливань за малих значень параметра $\alpha = -\gamma$. Далі обмежимося розкладами до третього порядку за величинами \dot{x} , x .

Згідно з п.3.2, після підстановки $y = -\frac{\dot{x}-\alpha x}{\omega}$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$, рівняння руху нелінійного осцилятора зводиться до системи

$$\dot{x} = \alpha x - \omega y, \quad (3.32)$$

$$\dot{y} = \omega x + \alpha y - \frac{\kappa}{\omega} (\alpha x - \omega y) x^2, \quad (3.33)$$

де враховано, що $\varphi(\dot{x}, x) = \kappa \dot{x} x^2 = \kappa (\alpha x - \omega y) x^2$.

Зведемо до комплексної форми: $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\lambda = \alpha + i\omega$,

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}, \alpha); \quad (3.34)$$

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = -\frac{i}{\omega} \varphi(\dot{x}, x) = -\frac{i}{\omega} \kappa (\alpha x - \omega y) x^2.$$

Аналіз існування періодичних розв'язків проводиться на основі розгляду скінченної кількості членів в розкладах по z , \bar{z} . Для вирішення питання про стійкість циклу, що народжується, основну роль відіграють коефіцієнти розкладу по z , \bar{z} при $\alpha = 0$:

$$g(z, \bar{z}, 0) = \frac{\kappa}{8} (z^2 - \bar{z}^2) (z + \bar{z}) = \frac{\kappa}{8} (z^3 + z^2 \bar{z} - z \bar{z}^2 - \bar{z}^3). \quad (3.35)$$

За допомогою заміни (3.12) зводимо рівняння до комплексного представлення нормальної форми Пуанкаре (3.11). Завдяки тому, що нелінійні члени в $g(z, \bar{z}, \alpha)$ починаються з третього порядку, шукаємо перетворення (3.12) у виді $z = \xi + \chi_{30}\xi^3 + \chi_{12}\xi\bar{\xi}^2 + \chi_{03}\bar{\xi}^3 + \dots$ (нагадаємо, що слід покласти $\chi_{21} = 0$). Форма (3.11) має вид

$$\dot{\xi} = \lambda(\alpha)\xi + c_1(\alpha)\xi|\xi|^2 + \dots, \quad (3.36)$$

де коефіцієнт $c_1(\alpha) \approx c_1(0) = \kappa/8$ визначається згідно до (3.20). Коефіцієнти χ_{mn} при $m \neq n + 1$, що можна визначити з (3.17), в порядку $m + n = 3$, що розглядається, не впливають на визначення $c_1(\alpha)$ і, таким чином, на існування та стійкість граничного циклу, обумовлену знаком цієї величини. За $\kappa < 0$ при $\alpha > 0$ в площині комплексної змінної $\xi = re^{i\varphi}$ маємо стійкий граничний цикл у вигляді кола з радіусом $r_c \approx [-8\alpha/\kappa]^{1/2}$ і періодом $T \approx 2\pi/\omega(\mu) \approx 2\pi/\omega_0$. За $\kappa > 0$ при $\alpha < 0$ маємо нестійкий цикл в околі стійкого фокуса.

Вправа. Проаналізувати систему

$$\ddot{x} - 2\alpha\dot{x}(1 - x^2) + \omega^2 x = 0 \quad ,$$

за малих $\alpha > 0$; знайти наближене значення амплітуди коливань, що відповідає стійкому граничному циклу при $\alpha \rightarrow 0$; визначити внесок третьої гармоніки в першому порядку по α .

Відповідь: $x(t) = r \cos(\varphi) + q \sin(3\varphi)$, де $r \approx 2$, $q \approx -\alpha/(2\omega)$, $\varphi = \omega t + \text{const}$.

3.5. Зведення на центральний многовид

Розглянемо n -вимірну систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (3.37)$$

де виділено матрицю лінеаризації \mathbf{A} та нелінійну частину $\mathbf{f} \in C^{k+1}$ в околі особливої точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ і $D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; тут і далі $D\mathbf{f} \equiv \{\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j\}$. Визначення центрального многовиду подано в п.2.1.4; це інваріантний многовид, що проходить через особливу точку і є дотичним до інваріантного підпростору E^C лінеаризованої системи.

Відома теорема про центральний многовид (див., напр., [7]), згідно з якою в околі особливої точки системи (3.37) існують стійкий, нестійкий і *центральный* многовиди $W_{loc}^S, W_{loc}^U, W_{loc}^C$, відповідно класів C^{k+1}, C^{k+1}, C^k , що є інваріантними відносно фазового потоку системи (3.37) і є дотичними до інваріантних підпросторів лінеаризованої системи E^S, E^U, E^C . Звернемо увагу, що порядок гладкості W_{loc}^C в цій теоремі менший, ніж порядок гладкості вихідного рівняння. Якщо, наприклад, права частина (3.37) є аналітичною, то аналітичного многовиду може й не існувати. На відміну від стійкого та нестійкого многовидів, що визначаються однозначно, центральний многовид визначений не єдиним чином. Тому, коли йдеться про центральний многовид, треба розуміти, що тут вибрано один з множини таких многовидів.

Теорема ³ (Шошитайшвили, 1975). Нелінійна система в околі негіперболічної особливої точки топологічно еквівалентна системі:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x), & x &\in W_{loc}^S, \\ \dot{y} &= -y & y &\in E^S, \\ \dot{z} &= z, & z &\in E^U, \end{aligned}$$

де $X(x)$ є обмеженням векторного поля вихідної системи на центральний многовид.

Зауважимо, що окіл особливої точки можна таким чином розглядати як прямий добуток багатовимірної сідла та обмеженням векторного поля вихідної системи

³Шошитайшвили А. Н. Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки. // Тр. семинаров им. И. Г. Петровского. — 1975. — Вып 1. — С. 279—309.

на центральний многовид. В разі негіперболічної особливої точки уся нетривіальна динаміка поблизу цієї точки зосереджена на центральному многовиді.

Приклад. Розглянемо систему

$$\dot{x} = x^2, \dot{y} = y,$$

матриця лінеаризації $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, особлива точка $x = 0, y = 0$;

$$E^U = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E^C = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо очевидний частковий розв'язок при $x \equiv 0$: $y(t) = e^t y(0)$; відповідна крива утворює W_{loc}^U , що співпадає з E^U .

При $x \neq 0$ нелінійну систему можна проінтегрувати:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \rightarrow y(x) = y(x_0) \exp \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right).$$

Очевидно, для будь-якого $x_0 > 0$ усі ці криві дотикаються до осі. Будь-яка така крива, зшита через нуль з прямою $y = 0$ за $x < 0$, може розглядатися як W_{loc}^C . Звернемо увагу, що криві $y(x)$ не є аналітичними в нулі, хоча вихідна система рівнянь є аналітичною.

Далі ми використовуємо такі припущення.

Нехай у системі (3.37) матриця лінеаризації \mathbf{A} та нелінійна частина \mathbf{f} залежать від параметра μ , причому точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ є особливою для усіх μ : $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0}$ і $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0}$. Нехай матриця лінеаризації \mathbf{A} системи (3.1.3) має пару комплексно спряжених власних чисел

$$\lambda_1(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \stackrel{df}{=} \lambda(\mu), \quad \lambda_2(\mu) = \bar{\lambda}(\mu),$$

де $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, а інші $N-2$ власних чисел мають від'ємні дійсні частини.

Можна показати [7], що за допомогою неособливих замін цю систему можна звести до виду

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}'(\mu)\mathbf{x}' + \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mu), \quad (3.38)$$

де

$$\mathbf{A}'(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) & \mathbf{0} \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{D}(\mu) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\mathbf{D}(\mu)$ – матриця розмірності $N-2$, що має власні значення $\lambda_3(\mu), \lambda_4(\mu), \dots, \lambda_N(\mu)$ з від'ємними дійсними частинами $\text{Re} \lambda_i(0) < 0$.

Після переходу до комплексної форми заміною $z = x_1 + ix_2$ отримуємо систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \lambda(\mu)z + G(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) \\ \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{D}(\mu)\mathbf{w} + \mathbf{H}(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) \end{aligned} \right\}, \quad \mathbf{w} = (x_3, x_4, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-2}, \quad (3.39)$$

з якою працюватимемо далі.

Зауважимо, що твердження про центральний многовид було вище сформульовано для системи (3.37), де нічого не сказано про наявність параметра μ . Задача полягає в тому, щоб розглядати усі значення цього параметра в околі $\mu = 0$. Для цього можна перейти до розширеної системи

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \lambda(\mu)z + G(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) \\ \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{D}(\mu)\mathbf{w} + \mathbf{H}(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Для цієї системи матриця лінеаризації за усіма зміними $z, \mathbf{w}, \mu \in$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \mathbf{0} & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}(0) & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

а лінеаризоване рівняння має центральний підпростір. Розширену систему можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \lambda(0)z + G_1(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) \\ \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{D}(0)\mathbf{w} + \mathbf{H}_1(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Таким чином, для системи (3.40), а значить і для системи (3.39), існує центральний многовид – інваріантна множина відносно фазового потоку цієї системи. Цей многовид задаємо у вигляді

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_C(z, \bar{z}; \mu), \quad (3.41)$$

тоді з першого рівняння (3.39) маємо

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}; \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.42)$$

де

$$g(z, \bar{z}; \mu) \equiv G(z, \bar{z}, \mathbf{w}_C(z, \bar{z}; \mu); \mu) \quad . \quad (3.43)$$

Таким чином, задачу зведено до системи 2-го порядку, до якої застосовний розгляд попередніх розділів 3.3, 3.4.

Далі зосередимось на практичній задачі, яка полягає в тому, щоб побудувати функції $\mathbf{w}_C(z, \bar{z}; \mu)$ та $g(z, \bar{z}; \mu)$. Ми очікуємо, що розклад $\mathbf{w}_C(z, \bar{z}; \mu)$ починається

з нелінійних по z, \bar{z} членів. Функції $G(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)$ та $\mathbf{H}(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu)$ з вихідної системи (3.39) вважаємо заданими; ми будемо припускати, що їх можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} G(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu) &= \\ &= \sum_{\substack{m, n \\ m+n \geq 2}} \left\{ G_{mn}^0(\mu) z^m \bar{z}^n + \sum_p G_{mn}^p(\mu) z^m \bar{z}^n w_p + \sum_{p_1, p_2} G_{mn}^{p_1 p_2}(\mu) z^m \bar{z}^n w_{p_1} w_{p_2} + \dots \right\}, \\ \mathbf{H}(z, \bar{z}, \mathbf{w}, \mu) &= \\ &= \sum_{\substack{m, n \\ m+n \geq 2}} \left\{ \mathbf{H}_{mn}^0(\mu) z^m \bar{z}^n + \sum_p \mathbf{H}_{mn}^p(\mu) z^m \bar{z}^n w_p + \sum_{p_1, p_2} \mathbf{H}_{mn}^{p_1 p_2}(\mu) z^m \bar{z}^n w_{p_1} w_{p_2} + \dots \right\}, \\ \mathbf{w} &= (w_1, \dots, w_{N-2}). \end{aligned}$$

Підстановка (3.41) в (3.39) з урахуванням (3.42) дає рівняння

$$\lambda z \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial z} + \bar{\lambda} \bar{z} \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial \bar{z}} - \mathbf{D}(\mu) \mathbf{w}_C = \mathbf{H}(z, \bar{z}, \mathbf{w}_C, \mu) - \left(g \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial z} + \bar{g} \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial \bar{z}} \right). \quad (3.44)$$

Функцію $\mathbf{w}_C(z, \bar{z}; \mu)$ шукаємо у виді

$$\mathbf{w}_C(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{m+n \geq 2} \mathbf{W}_{mn}(\mu) z^m \bar{z}^n, \text{ де } \mathbf{W}_{mn}(\mu) = (W_{mn}^1(\mu), \dots, W_{mn}^{N-2}(\mu)) \in \mathbb{R}^{N-2}$$

для кожного m, n .

Ліва частина (3.44) має вид

$$\lambda z \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial z} + \bar{\lambda} \bar{z} \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial \bar{z}} - \mathbf{D}(\mu) \mathbf{w}_C = \sum_{m+n \geq 2} ([\lambda(\mu)m + \bar{\lambda}(\mu)n] \mathbf{I} - \mathbf{D}(\mu)) \mathbf{W}_{mn}(\mu) z^m \bar{z}^n, \quad (3.45)$$

\mathbf{I} — одинична матриця.

Праві частини (3.44) можна записати так:

$$\mathbf{H}(z, \bar{z}, \mathbf{w}_C, \mu) - \left(g \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial z} + \bar{g} \frac{\partial \mathbf{w}_C}{\partial \bar{z}} \right) = \sum_{m+n \geq 2} \mathbf{R}_{mn}(\mu) z^m \bar{z}^n,$$

де векторні коефіцієнти $\mathbf{R}_{mn}(\mu)$ розкладу за степенями z^m, \bar{z}^n обчислюються через коефіцієнти розкладу функцій $G(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)$ та $G(z, \bar{z}, \mathbf{w}; \mu)$, а також через шукані коефіцієнти $\mathbf{W}_{mn}(\mu)$. Суттєво зазначити, що для кожного порядку $L = m + n$ величини $\mathbf{R}_{mn}(\mu)$ залежать від коефіцієнтів $\mathbf{W}_{m'n'}(\mu)$ лише при $m' + n' < L$. Тому, прирівнюючи в (3.45) коефіцієнти при однакових степенях

$$([\lambda(\mu)m + \bar{\lambda}(\mu)n]\mathbf{I} - \mathbf{D}(\mu)) \mathbf{W}_{mn}(\mu) = \mathbf{R}_{mn}(\mu) \quad , \quad (3.46)$$

маємо змогу послідовно обчислювати $\mathbf{W}_{mn}(\mu)$ для $L = m + n = 2, 3, \dots$. Зокрема, при $L = 2$ маємо $\mathbf{R}_{mn}(\mu) = \mathbf{H}_{mn}^0(\mu)$, оскільки інші доданки правій частині рівняння (3.45) дають внесок у більш високі порядки розкладу по $z^m \bar{z}^n$. Слід також проаналізувати можливість розв'язання (3.46) відносно $\mathbf{W}_{mn}(\mu)$. З цим проблем немає, оскільки в околі $\mu = 0$ маємо $\lambda(\mu) \approx \lambda(0) = i\omega_0$, тому дійсні частини власних значень $N-2$ -вимірних матриць $[\lambda(\mu)m + \bar{\lambda}(\mu)n]\mathbf{I} - \mathbf{D}(\mu)$ визначаються лише матрицею $\mathbf{D}(\mu)$ і є наближено $-\text{Re}\lambda_i(\mu) \neq 0$ ($i = 3, 4, \dots, N$). Це остаточно обґрунтовує алгоритм обчислення $\mathbf{W}_{mn}(\mu)$.

Приклад.

Розглянемо осциляторну систему, в якій нелінійна частина залежить від додаткового параметра w :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varphi(\dot{x}, w), \\ \dot{w} &= -w + H(x), \end{aligned} \quad (3.47)$$

де $\varphi(\dot{x}, w) = \beta \dot{x} w$, $H(x) = \eta x^2$. Дослідимо стійкість періодичних розв'язків в околі точки бифуркації, де малий параметр α міняє знак. Аналогічно п. 3.2 покладемо $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ і зведемо рівняння (3.47) до

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda z + G(z, \bar{z}, w, \alpha), \\ \dot{w} &= -w + H\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

де зв'язок із вихідною системою дається співвідношеннями

$$z = x + iy, \quad y = -(\dot{x} - \alpha x)/\omega, \quad \lambda = \alpha + i\omega; \quad (3.49)$$

$$G(z, \bar{z}, w, \alpha) = -\frac{i}{\omega} \varphi\left[\left(\alpha \frac{z + \bar{z}}{2} - \omega \frac{z - \bar{z}}{2i}\right), w\right], \quad (3.50)$$

$$\varphi(\dot{x}, w) = \beta \dot{x} w, \quad H(x) = \eta x^2.$$

Зокрема,

$$G(z, \bar{z}, w, 0) = \beta \frac{z - \bar{z}}{2} w.$$

Шукаємо центральний многовид у вигляді

$$w = w_C(z, \bar{z}; \alpha) = \sum_{\substack{m, n \\ m + n \geq 2}} w_{mn}(\alpha) z^m \bar{z}^n, \quad (3.51)$$

де сума береться по усім додатним цілим парам m, n , що задовольняють умові $m + n \geq 2$. Щоб отримати нормальну форму Пуанкаре (3.36) на центральному

многовиді з точністю до членів третього порядку, в розкладі по z, \bar{z} достатньо обмежимося членами другого порядку ($m + n = 2$). Для поставленої задачі достатньо знайти коефіцієнти цього розкладу за $\alpha = 0$, що спрощує розрахунок. За $\alpha = 0$ ліва частина (3.45) рівняння (3.44) приймає вид ($\lambda = i\omega_0$)

$$i\omega_0 \left(z \frac{\partial w}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) + w = \sum_{\substack{m, n \\ m + n = 2}} ([i\omega_0 m - i\omega_0 n] + 1) w_{mn}(0) z^m \bar{z}^n + \dots,$$

де крапками позначено члени більш високого порядку. В правій частині (3.45) в другому порядку дає внесок лише

$$H(x) = \frac{\eta}{4} (z + \bar{z})^2,$$

тому при $\alpha = 0$ це рівняння виглядає так

$$\sum_{\substack{m, n \\ m + n = 2}} ([i\omega_0 m - i\omega_0 n] + 1) w_{mn}(0) z^m \bar{z}^n = \frac{\eta}{4} (z + \bar{z})^2.$$

Звідси

$$w_{20}(0) = \frac{\eta}{4(1 + 2i\omega_0)}, \quad w_{02}(0) = \frac{\eta}{4(1 - 2i\omega_0)}, \quad w_{11}(0) = \frac{\eta}{2}.$$

Звернемо увагу: хоча окремі коефіцієнти містять уявні частини, функція w_C (3.51) залишається дійсною.

На центральному многовиді

$$G(z, \bar{z}, w, 0) = \beta \frac{z - \bar{z}}{2} w$$

$$\begin{aligned} G(z, \bar{z}, w_C(z, \bar{z}), 0) &= -\frac{i}{\omega_0} \varphi(\dot{x}, w) = \\ &= \frac{\beta}{2} (z - \bar{z}) \left(\frac{\eta z^2}{4(1 + 2i\omega_0)} + \frac{\eta \bar{z}^2}{4(1 - 2i\omega_0)} + \frac{\eta z \bar{z}}{2} \right) = \\ &= \frac{\beta \eta}{8(1 + 4\omega_0^2)} [z^3(1 - 2i\omega_0) + (2i\omega_0 - 1 - 8\omega_0^2)z\bar{z}^2 + \\ &\quad + (1 + 8\omega_0^2 + 2i\omega_0)z^2\bar{z} - \bar{z}^3(1 + 2i\omega_0)] . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Задачу зведено до двовимірної системи типу (3.34), яку аналізуємо аналогічно п.3.4. Різниця тільки в іншому виді функції g з правої частини: замість (3.35) слід підставити (3.52). Як було видно в п.3.4, в формі Пуанкаре (3.36) коефіцієнт $c_1(\alpha) \approx c_1(0)$ при $\xi|\xi|^2$ в точці біфуркації співпадає з коефіцієнтом розкладу функції g при $z^2\bar{z}$; ця рівність наближено виконується (при $\alpha \rightarrow 0$) і у випадку функції (3.52). Таким чином маємо форму Пуанкаре (3.36), де

$$c_1(\alpha) \approx c_1(0) = \frac{\beta\eta(1 + 8\omega_0^2 + 2i\omega_0)}{8(1 + 4\omega_0^2)}.$$

Задачу зведено до розгляду пп. 3.3, 3.4. Існування та стійкість циклів в околі точки біфуркації визначається знаком дійсної частини цього коефіцієнта. Звідси випливає, що за $\beta\eta < 0$ при $\alpha > 0$ в околі нестійкого фокуса $z = 0$ маємо стійкий граничний цикл; за $\beta\eta > 0$ при $\alpha < 0$ маємо нестійкий цикл в околі стійкого фокуса.

3.6. Інші типи біфуркацій

Біфуркація народження циклу, яка є детально вивченою, зрозуміло, не вичерпує усього "зоопарку" явищ, що виникають при зміні якісної поведінки розв'язків динамічних систем. У цьому розділі ми розглянемо інші приклади біфуркацій, починаючи з найбільш простих.

Розглянемо одновимірну (за числом координат) гамільтонову систему

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad (3.53)$$

$$H(x, y) = \frac{my^2}{2} + U(x).$$

Кінетична енергія

$$T = \frac{my^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

тому особлива точка знаходиться на осі Ох; координати х особливих точок збігаються з екстремумами потенціалу U, оскільки $\partial H/\partial x = 0 = dU/dx$. В мінімумах потенціалу маємо стійкі положення рівноваги, в максимумах - нестійкі.

Нехай

$$U(x) = \lambda x^2/2 + x^4/4. \quad (3.54)$$

За $\lambda > 0$ потенціал має один мінімум, а система (3.53) має одну стійку точку рівноваги ($x = 0, \dot{x} = 0$) – особливу точку типу "центр".

За $\lambda < 0$ (див. Рис. 3.2) ця точка втрачає стійкість; це – сідло, сепаратриса якого відповідають руху з нульовою енергією $H(x, y) = 0$, вони виходять з сідла і знов прямують до нього за $t \rightarrow \infty$. Крім того, виникають два нових центри в точках $y = 0, x = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Подібна біфуркація є прикладом часто розглядуваного в фізиці явища динамічного порушення симетрії. При зміні знаку λ з додатного на від'ємний система, яка є симетричною (за усіх λ) відносно перетворення $x \rightarrow -x$, може опинитися або в правому, або в лівому положенні рівноваги (див. тж. далі п. 6.1).

В наступному прикладі розглянемо ту ж саму систему за наявності тертя:

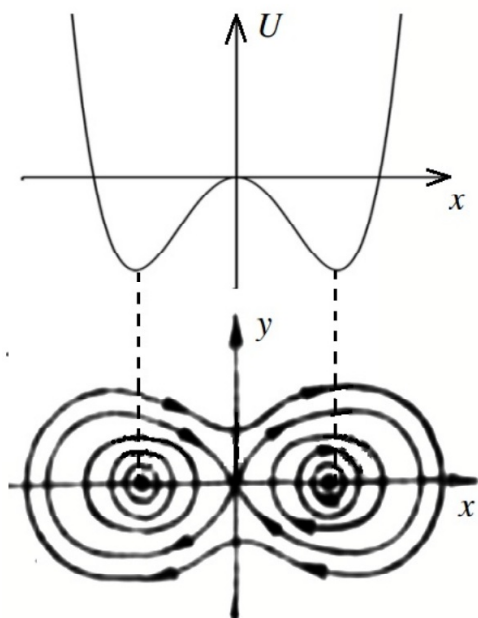


Figure 3.1: Вигляд потенціалу (3.54).

$$\dot{x} = y, \dot{y} + \gamma y = -\lambda x - x^3, \quad \gamma > 0. \quad (3.55)$$

Тут за $\lambda > 0$ в точці $(0,0)$ маємо стійкий фокус (Рис. 3.2, зліва), який є граничною точкою усіх траєкторій.

За $\lambda < 0$ (Рис. 3.2, справа) ця точка втрачає стійкість і стає сідлом.

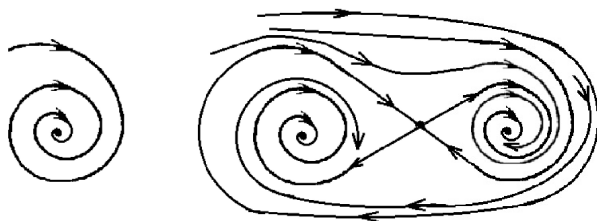


Figure 3.2: Фазовий портрет системи 3.55.

Крім того, з'являються два нових стійких фокуса $y = 0, x = \pm\sqrt{-\lambda}$. Дві

сепаратиси сідла описують траєкторію частинки, що прямує при $t \rightarrow \infty$ до максимуму потенціалу в точці $x = 0$, інші дві – рух частинки, що зкочується з цього максимуму (тобто прямує до нього при $t \rightarrow -\infty$).

У бифуркації Пуанкаре-Андрона-Хопфа, що була розглянута в попередніх підрозділах, при зміні деякого параметра системи після втрати стійкості фокуса може з'являється стійкий граничний цикл. За певних умов при подальшій зміні параметра він може розгалужуватися на нові граничні цикли з різними параметрами (періодами тощо).

Можливий варіант, коли двовимірний цикл після бифуркації трансформується у тривимірний рух по поверхні тора. При цьому рух може бути періодичним чи квазіперіодичним (в останньому разі траєкторія системи густо заповнює поверхню тора). Простий приклад такої бифуркації дає система двох незв'язаних осциляторів типу тих, що розглядалися в попередніх розділах

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\mu)z_1 + g(z_1, \bar{z}_1, \mu), \quad \dot{z}_2 = \lambda_2(\mu)z_2 + g(z_2, \bar{z}_2, \mu) \quad (3.56)$$

де $z_1 = x + iy$, $z_2 = u + iw$ з різними залежностями $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + i\omega_2$ від параметра μ . Спільна поведінка траєкторій у чотиривимірному просторі змінних $\{x, y, u, w\}$ залежить від того, чи збігаються точки бифуркації та періоди першого і другого рівняння (3.56). Якщо періоди циклічних розв'язків змінних x, y та змінних u, w є сумірними, матимемо періодичний рух. У разі несумірних періодів матимемо квазіперіодичний рух.

Інший, дуже поширений, варіант бифуркації – коли старий граничний цикл переходить в новий з подвоєнням періоду. Перехід системи через точку бифуркації може відбуватися плавно з появою субгармоніки подвійного періоду. До цього типу бифуркації ми повернемося у наступних розділах.

Досі ми обмежувалися скінченновимірними системами, що можна описати звичайними диференціальними рівняннями, приділяючи увагу виникненню структур у часовому вимірі. Певною мірою можна говорити також про виникнення просторових структур (наприклад, стійких торів плоских структур тощо). Просторовий розподіл траєкторій можна вивчати за допомогою статистичного підходу (п.1.7), що особливо ефективний за великої розмірності системи. Досить широко відомі приклади виникнення структур і в нескінченновимірних (континуальних) системах, що описують диференціальними рівняннями в частинних похідних, наприклад, у гідродинаміці. Процеси виникнення складних структур (самоорганізація) виникають у відкритих нелінійних, нерівноважних системах, які можуть обмінюватися з навколишнім середовищем енергією чи речовиною. Виникнення та існування життя також є одним із проявів самоорганізації. Процеси самоорганізації вивчає синергетика, яка має справу з явищами та процесами, в результаті яких в складній системі можуть з'явитися властивості, якими не володіє жодна з частин-підсистем. Чисто теоретичний аналіз таких систем, як правило, неможливий, тому дослідження в цій області спираються на узагальнення суто математичних результатів і експериментальні досліджень досить широкого кола різноманітних явищ. Поняття бифуркації тут

відіграє важливу роль, оскільки саме вони визначають граничні значення і умови, за яких можливою є поява тієї або іншої регулярної структури.

До відомих прикладів виникнення просторових структур відносять комірки Релея – Бенара, реакція Белоусова – Жаботінського.

Комірки Бенара або Релея – Бенара – упорядковані конвективні осередки у формі циліндричних валів або правильних шестигранних структур в шарі в'язкої рідини з вертикальним градієнтом температури, тобто середовище з рівномірним підігрівом знизу. За певного значення градієнту температури, внаслідок підігріву в спочатку однорідному шарі рідини починається дифузія, внаслідок чого виникають неоднорідності щільності. При подоланні деякого критичного значення градієнту, дифузія не встигає привести до однорідного розподілу температури по об'єму. Виникають циліндричні вали, що обертаються назустріч один одному (як зчеплені шестерні). При збільшенні градієнту температури виникає другий критичний перехід. Для прискорення дифузії кожен вал розпадається на два вали меншого розміру. При подальшому збільшенні керуючого параметра вали дробляться і в межі виникає турбулентний хаос.

Реакції Белоусова – Жаботінського – клас хімічних реакцій, що протікають в коливальному режимі, при якому деякі параметри реакції (колір, концентрація компонентів, температура та ін.) змінюються періодично, утворюючи складну просторово-часову структуру реакційного середовища. Наразі під цією назвою об'єднується цілий клас споріднених хімічних систем, близьких за механізмом, але вони розрізняються каталізаторами, органічними відновлювачами і окислювачами. За певних умов ці системи можуть демонструвати дуже складні форми поведінки від регулярних періодичних до хаотичних коливань і є важливим об'єктом дослідження універсальних закономірностей нелінійних систем.

Зміна параметрів системи може привести до виникнення хаосу. Відомими прикладами є виникнення хаосу через послідовність біфуркацій, коли виникають стійкі періодичні чи майже періодичні коливання. В протяжних системах (наприклад, в течіях рідини і газу) можливі режими, коли хаотична поведінка реалізується в окремих просторових областях, а в інших областях маємо періодичні чи стаціонарні течії. У сценарії Помо – Манервідля при зміні параметрів системи можуть виникати як стохастичні, так і регулярні, періодичні, режими. Питання стохастичної поведінки розглянуто в наступному розділі.

3.7. Елементи теорії катастроф

Поняття катастрофи⁴ виникає при розгляді критичних точок диференційовних відображень. Критичною або особливою точкою неперервно диференційовної функції (відображення) $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ називають таку точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$, де ранг матриці Якобі $\{\partial f_j / \partial x_i\}_{(x_0)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, менший за максимально можливе

⁴Термін "катастрофа" отримав поширення у 1960-х роках завдяки роботам французького математика Р. Тома.

значення $\min\{n, m\}$. Нехай відображення залежить від деяких параметрів $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_P$; будемо вважати, що залежність $f(\mathbf{x}, \lambda)$ є гладкою. Деякі значення параметрів можуть бути біфуркаційними: в околі цих значень може відбуватися зміна числа критичних точок функції f чи зміна типу цих точок. У випадку одного параметра λ можуть існувати окремі точки біфуркації, якщо розмірність простору параметрів $P = 2$ це можуть бути лінії, якщо $P = 3$ чи більше – поверхні; відповідні значення параметрів значення називають "катастрофічними". Використання терміну "катастрофа", пов'язано з тим, що малі зміни у реальному житті за малих варіацій вхідних параметрів інколи можуть призводити до вельми неприємних наслідків.

Відображення $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Найпростіші приклади можна навести у випадку однієї функції від однієї чи декількох змінних. Розглянемо функцію $f(x, \lambda) = \lambda x + x^3$, коли параметр λ змінює свій знак. При фіксованому $\lambda > 0$ для функції $f(x, \lambda)$ існує обернена функція; відображення $F : x \rightarrow y = F(x, \lambda)$ є взаємно-однозначним. За $\lambda < 0$ взаємна однозначність втрачається, оскільки залежність $y(x)$ не є монотонною і на інтервалі значень $y \in (-2|\lambda/3|^{3/2}, 2|\lambda/3|^{3/2})$ існують різні гілки оберненої функції, що відповідають трьом розв'язкам рівняння $y = f(x, \lambda)$ відносно x . Ці розв'язки зливаються в один при переході параметру λ через нуль у бік від'ємних значень. Це вже схоже на катастрофу! Суттєво, що ситуація якісно не зміниться, якщо x та y зазнають взаємно-однозначних неперервних перетворень.

Інша трактовка пов'язана з інтерпретацією $f(x, \lambda)$ як градієнту потенціалу (3.54) матеріальної точки, що рухається за рівнянням Ньютона (див. рівняння 3.55). За наявності малого тертя точка з необхідністю прямує з часом в стаціонарний стан, який відповідає мінімуму потенціалу. При $\lambda > 0$ потенціал $U(x)$ має один стійкий мінімум, а при $\lambda < 0$ на цьому місці з'являється нестійкий максимум та два нових стійких мінімуми (див. Рис. 3.1), куди система потраплятиме з часом.

Розглянемо інший потенціал $U(x) = f(x, \lambda) \equiv \lambda x + x^3$. За $\lambda > 0$ рівняння $dU(x)/dx = 0$ не має жодного розв'язку, мінімум $U(x)$ відсутній. За $\lambda < 0$ є два мінімуми: один стійкий (з більшим значенням x) та один нестійкий; які зникають за $\lambda > 0$. Якщо система знаходилася за $\lambda > 0$ у мінімумі, при збільшенні λ , після того, коли цей параметр проходить через 0, вона скочуватиметься в область нескінченних від'ємних x . Катастрофа!

Для функції багатьох змінних $U(x, \lambda) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$; $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$ критичною точкою є така точка $y \in \mathbf{R}^n$, де усі частинні похідні дорівнюють нулю: $\{\partial U / \partial x_i\}_{(y)} = 0$, $i = 1, \dots, n$. Позначимо визначник $D = |\partial^2 U / (\partial x_i \partial x_j)|$. Нехай, для простоти, $y = 0$. Якщо $D \neq 0$, тоді, за досить гладкої функції U , існує система координат, де функція U в околі нуля має вид (лема Морса)

$$U(x) = U(0) + \sum_{i=1}^n c_i(\lambda) x_i^2,$$

де усі $c_i = c_i(\lambda) \neq 0$ відмінні від нуля. Число від'ємних коефіцієнтів c_i називають

індексом критичної точки. У даному випадку катастрофа відбувається при зміні індексу. Наприклад, нехай за $\lambda) > 0$ маємо строгий мінімум $U(x, \lambda)$ (як функції від x) в нулі ($c_i(\lambda) > 0$). Катастрофа має місце, коли при зміні знаку (λ) один з коефіцієнтів $c_i(\lambda)$ також міняє знак і мінімум зникає.

Градiєнтна катастрофа у гiдродинамiчній течiї. Відоме явище, що суттєво відрізняє нелінійні рівняння у частинних похідних від лінійних рівнянь, пов'язане з виникненням розривів у газодинамічних течіях, які спочатку були неперервними. Зауважимо, що у випадку звичайних диференціальних рівнянь наявність нелінійності часто призводить до того, що розв'язок не продовжується на усі значення аргумента t , наприклад, розв'язок прямує до нескінченності за $t \rightarrow t_1 < \infty$. На відміну від цього, у випадку квазілінійних рівнянь, наприклад, рівнянь руху ідеальної рідини, розв'язок залишається скінченним, але виникають його розриви та, відповідно, нескінченні значення частинних похідних. Це явище називають *градієнтною катастрофою*. У випадку руху суцільного середовища розрив відповідає ударній хвилі. При введенні вязкості в рівняння газодинаміки розриви згладжуються, але відомо, що товщина фронту сильної ударної хвилі у реальних газах є порівняною з довжиною вільного пробігу молекул [5],[6].

Розглянемо рівняння для функції двох змінних $u(t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.57)$$

з неперервно-диференційовною початковою умовою $u(0, x) = v(x)$. Зауважимо, що до (3.57) зводиться більш загальне рівняння $\partial u / \partial t + g(u) \partial u / \partial x = 0$ у разі довільної монотонно-зростаючої функції $g(u)$; це рівняння виникає при розгляді так званих простих хвиль Рімана в одновимірних гiдродинамiчних течiях [6].

Розв'язок рівняння (3.57) легко знайти методом характеристик:

$$u(t, x) = tv(y), \quad x = tv(y) + y. \quad (3.58)$$

Співвідношення (3.58) задають розв'язок у неявному вигляді. Диференціювання (3.58) за y дає

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v'(y)}{tv'(y) + 1}; \quad v'(y) \equiv dv/dy. \quad (3.59)$$

Якщо функція $v(y)$ має ділянку, де вона спадає, зокрема, якщо існує точка $y_0 : v'(y_0) = \min(v'(y)) < 0$, у момент часу $t_0 = -1/(v'(y_0))$ маємо нескінченне значення $\partial u / \partial x$. На подальші моменти часу класичний розв'язок рівняння (3.57) не продовжується.

Для аналізу при $t > t_0$ рівняння (3.57) необхідно його узагальнити в залежності від того, яку фізичну чи іншу ситуацію воно моделює. Зокрема, у випадку руху ударної хвилі в реальному газі розглядають розривний *узагальнений розв'язок* [6]. Але рівняння (3.57) також відповідає вільному руху *невзаємодіючих* частинок, які за $t = 0$ були неперервно (з деякою густиною) розподілені на прямій, причому усі частинки у точці y мали швидкість $v(y)$. За наявності ділянки з $v'(y) < 0$

задні частинки (з меншим y) наздоганятимуть передні; завдяки цьому виникає "перехльост", коли в одній точці $x = tv(y) + y$ знаходяться частинки з різними швидкостями. Зрозуміло, що у цьому випадку гідродинамічна модель суцільного середовища не працює, оскільки ейлерів опис з неоднозначною функцією $u(t, x)$ неможливий; але це не заперечує можливість іншого опису (наприклад, в рамках кінетичного підходу). Тут маємо типовий приклад біфуркації одновимірного відображення $y \rightarrow x$ за параметром t з біфуркаційним значенням t_0 .

Відображення $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Відображення двовимірних многовидів (площини на площину, сфери на сферу) можна зустріти в оптиці, астрономії, картографії, техніці відновлення зображень. У цьому підрозділі ми приділимо увагу основам теорії гравітаційного-лінзових систем (ГЛС) або гравітаційно-лінзової оптики – теорії поширення електромагнітного випромінювання у викривленому просторі-часі. Добре відомо, що за наявності гравітуючих мас рівняння електромагнітного поля можна записати у формі, аналогічній до рівнянь Максвелла у неоднорідному середовищі. Тому значна кількість понять і ефектів теорії ГЛС подібні до звичайної оптики. При розгляді ГЛС як правило мають справу зі знехтовно малими довжинами хвиль електромагнітного випромінювання (геометрична оптика), де в основі розрахунків лежить формула Ейнштейна для кута θ відхилення фотонів (променя світла) у гравітаційному полі точкової маси M :

$$\theta = 4GM/r, \quad (3.60)$$

G – гравітаційна стала, r – відстань від траєкторії фотонів до маси, швидкість світла $c = 1$.

Сформулюємо одну з типових задач. Нехай точковий об'єкт, що випромінює, розташований у площині джерела на відстані D_s від спостерігача, а гравітуючі маси, які відхиляють промені, сконцентровані у площині лінзи на відстані $D_d < D_s$; ці площини вважаємо ортогональними до оптичної осі системи, що є близькою (але не обов'язково збігається) до напрямку на джерело. Деяка довільність вибору оптичної осі не впливає на результати у першому порядку параксіального наближення. Уведемо (декартові) координати $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ у площині джерела і $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – у площині лінзи, причому початок координат у кожній площині відповідає перетинам з оптичною віссю. Для реальних астрономічних задач відстані D_d, D_s значно більші за характерний розмір області, де відбувається зміна напрямку руху фотонів від прямолінійного. Тому можна вважати, що у точці \mathbf{x} площини лінзи відбувається заломлення променя на малий кут $\theta(\mathbf{x})$. Зазвичай за порядком величини $\theta \sim 10^{-6}$ і менше.

Нехай джерело знаходиться у точці \mathbf{y} , а промінь від нього перетинає площину лінзи у точці \mathbf{x} . Простий геометричний розгляд дає змогу пов'язати ці координати за відсутності заломлення: $\mathbf{y} = D_s \mathbf{x} / D_d$. Заломлення у площині лінзи на кут $\theta(\mathbf{x})$ дає поправку θD_{ds} (див. Рис. 3.7):

$$\mathbf{y} = \frac{D_s \mathbf{x}}{D_d} + \theta(\mathbf{x}) D_{ds}; \quad (3.61)$$

тут D_{ds} – відстань від площини лінзи до площини джерела⁵.

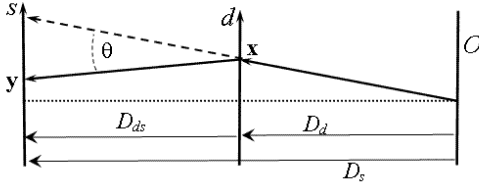


Figure 3.3: Схема гравітаційного лінзування. Промені від джерела у точці y площини s після заломлення у точці x площини d попадають до спостерігача, розташованого на перетині оптичної осі (пунктир) з площиною O . Спостерігач бачить зображення у точці y' , до якого йде штрихова крива.

Таким чином, маємо відображення $\mathbf{L} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$: кожній точці площини лінзи \mathbf{x} відповідає точка площини джерела \mathbf{y} (*лінзове відображення*). Але це відображення не завжди є взаємно-однозначним: рівняння лінзи (3.61) може мати декілька розв'язків, які відповідають декільком зображенням точкового джерела.

Загальне відображення $\mathbf{L} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ можна розглядати в околі кожної точки $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$; якщо якобіан $J = \det[\partial y_i / \partial x_j]$, $i, j = 1, 2$, у цій точці відмінний від нуля, тоді в околі \mathbf{X} маємо взаємно однозначне відображення. Коли $J(\mathbf{X})$ дорівнює нулю, взаємна однозначність може бути порушена і тоді ця точка є критичною (точкою катастрофи). Зазначимо, що тут у якості параметрів відображення виступають самі координати. У типовому випадку двовимірного відображення $\mathbf{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ рівняння $J(\mathbf{X}) = 0$ визначає *критичну* криву \mathbf{X}_{cr} на площині; якщо вона параметризована деяким параметром p , маємо $J(\mathbf{X}_{cr}(p)) \equiv 0$. Образ критичної кривої при лінзовому відображенні називають *каустикою*, тобто каустика – це

⁵Тут вважаємо, що D_d, D_s, D_{ds} – це так звані *відстані за кутовим діаметром*, які використовують у космології. За визначенням, D є відстанню за кутовим діаметром до об'єкта з лінійним власним розміром l ортогонально до променя зору, якщо він має кутовий діаметр $\theta = l/D$. Зауважимо, що у викривленому просторі-часі в загальній ситуації $D_s \neq D_{ds} + D_d$. Усюди йдеться про параксіальне наближення (малі кути θ).

крива $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_c(p) = \mathbf{L}(\mathbf{X}_{cr}(p))$. Якісна картина каустик показана на Рис. 3.4.

Завдяки заломленню променів у площині лінзи яскравість видимого зображення буде відрізнятися від яскравості джерела за відсутності лінзування. Відповідно, відношення густини потоку фотонів, що реєструється спостерігачем у площині O (Рис. 3.7) за наявності заломлення, до аналогічної величини за відсутності заломлення, називають коефіцієнтом підсилення. Можна показати [7], [8], що коефіцієнт підсилення, який відповідає певному зображенню (променю, що перетинає площину лінзи у точці \mathbf{x}) є

$$K(\mathbf{x}) = \frac{D_s^2}{D_d^2 |J(\mathbf{x})|}. \quad (3.62)$$

Відповідно, каустикою можна назвати геометричне місце точок площини S , для яких яскравість зображення (хоча б одного з декількох, якщо їх більше одного) точкового джерела є нескінченною. Зазначимо, що коли точка площини джерела знаходиться на каустиці, не обов'язково усі її зображення відповідають критичній кривій у площині лінзи. Найбільший інтерес мають стійкі катастрофи, що якісно не міняються за малих ворухінь (тобто за малих змін) відображення. Стійкими є лише два типа каустик: складки, які відповідають регулярним ділянкам кривих, та збірки, які відповідають точкам загострення (каспам) [7]. За малих ворухінь відображення ці типи каустик можуть дещо зсуватися і деформуватися, але вони не зникають.

У гравітаційно-лінзових системах, завдяки відносному руху лінзи та джерела, карта коефіцієнтів підсилення та розподіл каустик весь час міняються. Але для широкого кола задач можна вважати, що зорі у лінзовій галактиці є нерухомими, причому джерело рухається відносно них прямолінійно та рівномірно. Відповідно, траєкторія руху (центру) джерела відносно нерухомої сітки каустик – це пряма. Коли джерело перетинає каустику, його яскравість зростає. Для джерела скінченних розмірів підсилення буде скінченним, чим менше розмір, тим більшим буде коефіцієнт підсилення. Для реальних джерел у позагалактичних ГЛС потік може підсилюватися у декілька разів ⁶. Явище, коли джерело перетинає каустику, в результаті чого його яскравість значно збільшується, називають подією з великим підсиленням. Значення таких подій полягає в тому, що в околі каустики залежність коефіцієнту підсилення від координат можна моделювати простими співвідношеннями з невеликою кількістю вільних параметрів. Зокрема, для регулярної точки каустики коефіцієнт підсилення точкового джерела у найпростішому наближенні можна апроксимувати формулою

$$K = \frac{A}{\sqrt{d}}, \quad (3.63)$$

де d – відстань від джерела до каустики, коефіцієнт A називають силою каустики. Формулу (3.63) можна отримати, якщо розкласти лінзове відображення в околі

⁶У подіях галактичного мікролінзування, коли віддалена зоря мікролінзується зорею нашої Галактики, відомі події з підсиленням у десятки разів

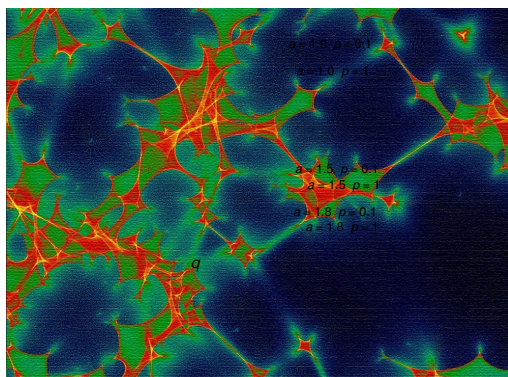


Figure 3.4: Типова картина гравітаційно-лінзового відображення. Колір визначає величину коефіцієнту підсилення (більш червоний – більше підсилення). Межі червоних областей з різким переходом до інших кольорів – каустики. Гладкі ділянки ліній (регулярні каустики) – складки; точки загострення (каспи) – збірки.

точки складки в ряд Тейлора і утримати перші нетривіальні члени цього розкладу. Дослідження наближень більш високого порядку можна знайти в роботах [9].

Bibliography

3.8. Література до розділу 3

- [1] *В.Хэссад, Н. Казаринов, И.Вэн.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла М., Мир, 1985.
- [2] *Дж.Марсден, М.Мак-Кракен.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980.
- [3] *Г.Хакен.* Синергетика. М., Мир, 1985.
- [4] *В.Й.Сугаков.* Основы синергетики. К., Обереги, 2001.
- [5] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика, т.VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [6] *Б.Л.Рождественский, Н.Н. Яценко.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [7] *P.Schneider, J.Ehlers, E.E.Falco.* Gravitational Lenses. New York, Springer-Verlag, 1992.
- [8] *П.В.Блюх, А.А.Минаков.* Гравитационные линзы. К., Наукова Думка, 1989.
- [9] *A. N. Alexandrov, V. I. Zhdanov.* Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic. MNRAS, 417, pp. 541–554, 2011; *V. I. Zhdanov, A. N. Alexandrov, E. V. Fedorova, V. M. Sliusar.* Analytical Methods in Gravitational Microlensing. ISRN Astron. Astrophys. V. 2012 (2012), ID 906951, 21 P.

Хаос

4.1. Загальні властивості хаотичної поведінки та математичний опис.

Фундаментальною властивістю, специфічною для нелінійних динамічних систем, є можливість виникнення *хаотичної (стохастичної) поведінки*. Хаотична або стохастична поведінка виникає в розв'язках звичайних диференціальних рівнянь, починаючи з третього порядку; в автономних системах другого порядку хаос неможливий. Підкреслимо, що в динамічних системах маємо справу з "детермінованим" хаосом, який виникає через надзвичайно високу чутливість до початкових умов: завдяки нестійкостям поведінка траєкторій системи може стати дуже заплутаною. Формально тут виконуються усі результати щодо єдиності розв'язку, заданого певними початковими умовами, але на практиці ця залежність від початкових умов може бути нівельована завдяки складній поведінці. Дві траєкторії, що мали досить близькі початкові умови, починають швидко відходити одна від однієї і кореляції між початковими умовами та траєкторіями спадають до нуля. Оскільки в реальних задачах початкові умови визначаються з певною обмеженою точністю, на перший план виходить статистичний опис та загальні властивості стохастичного руху.

Хаотична поведінка – поширене явище. Відомим прикладом є турбулентність в гідродинамічних та газодинамічних течіях. Явище детермінованого хаосу поширено як у лабораторних явищах, так і в природі. Виявляється, що певні прояви хаосу є універсальними.

Незважаючи на формально-детермінований характер нелінійних динамічних систем, для опису граничної поведінки хаотичних траєкторій зручно використовувати апарат теорії випадкових процесів. З іншого боку, існує низка задач, де стохастичність з наперед заданими властивостями вводять "руками". Наприклад, розглядають осцилятор під дією зовнішньої сили, яка моделює випадкові зіткнення з частинками середовища, обумовлені броунівським рухом.

Нижче будуть сформульовані основні поняття теорії випадкових процесів. Слід мати на увазі, що застосування цих понять до реальних фізичних чи астрономічних

систем має модельний характер, пов'язаний з певними ідеалізаціями (так само, як модель однорідного діелектрика чи суцільного середовища, або модель інерціальної системи відліку в механіці). Можна сказати, що з точки зору практичного фізика випадкова функція чи *випадковий процес* – це великий набір реалізацій деякого статистичного ансамблю, елементами якого є різні функції $f_\alpha(t)$, де індекс α може приймати дискретні чи неперервні значення з певним розподілом. Більш строго, будемо говорити, що задано випадковий процес $f(t)$, якщо для будь-якого набору t_1, t_2, \dots, t_n (n – натуральне число), заданий спільний розподіл ймовірностей $W(f_1, f_2, \dots, f_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ величин $f_1 = f(t_1), f_2 = f(t_2), \dots, f_n = f(t_n)$. Означення випадкового процесу, подане для однієї функції $f(t)$, легко узагальнити на багатовимірний чи комплексний випадок, а також для випадкових полів, коли замість однієї змінної t маємо декілька просторових та часових змінних.

Моментами випадкового процесу називають математичні сподівання (середні за ансамблем) добутків :

$\langle f(t) \rangle \equiv \int df f W(f; t)$ – момент першого порядку,

$\langle f(t_1)f(t_2) \rangle \equiv \int df_1 df_2 f_1, f_2 W(f_1, f_2; t_1, t_2)$ – момент другого порядку,

$\langle f(t_1)f(t_2)f(t_3) \rangle \equiv \int df_1 df_2 df_3 f_1, f_2 f_3 W(f_1, f_2, f_3; t_1, t_2, t_3)$ – момент третього порядку і так далі.

За означенням процес є *стаціонарним*, якщо

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv W(f_1, f_2, \dots, f_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad \forall \tau$$

для довільних t_1, t_2, \dots, t_n . Стаціонарний процес – це ідеалізація, можливість застосування якої до конкретних явищ треба аналізувати окремо. Наприклад, в радіофізиці реальні сигнали тривають скінченний час, тим не менш модель стаціонарного процесу спрацює, якщо треба розглядати спостережувані величини в межах відносно малого проміжку часу.

Термін "стаціонарний процес" у природничих науках зазвичай стосується залежностей від часу. Аналогічно розглядають залежності від просторових змінних; в цьому разі застосовують термін "однорідний процес", або "статистично однорідна залежність". Наприклад, на космологічних масштабах наш Всесвіт є статистично однорідним. Процес є *гаусівським*, якщо розподіл ймовірностей $W(f_1, f_2, \dots, f_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ є нормальним для довільного вибору t_1, t_2, \dots, t_n .

У статистичному описі динамічних систем для фіксованого моменту t маємо розподіл ймовірностей $W(f; t)$, який наглядно можна інтерпретувати як густину станів системи.

Для стаціонарного процесу також розглядають *середні за часом*. Для функції n змінних F середнє за часом від $F[f(t_1), \dots, f_n(t_n)]$ – це випадкова величина

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau F[f(t_1 + \tau), \dots, f_n(t_n + \tau)] \right\},$$

що вводиться за умови існування границі та інтегралу.

Процес $f(t)$ називають *ергодичним*, якщо середнє за часом з одиничною ймовірністю збігається з відповідним середнім за ансамблем $\langle F[f(t_1), \dots, f_n(t_n)] \rangle$ для будь-якої функції F .

Серед моментів випадкового процесу, який далі вважаємо *комплексним*, найбільш вживаними є середні $\langle f(t) \rangle, \langle |f(t)|^2 \rangle \equiv \langle \bar{f}(t)f(t) \rangle$, а також моменти другого порядку $\langle \bar{f}(t_1)f(t_2) \rangle$, що також називають кореляційними функціями або кореляторами. Далі розглядаємо процеси з нульовим середнім: $\langle f(t) \rangle \equiv 0$. Для двох різних процесів f, g розглядають взаємну кореляційну функцію $\langle f(t_1)g(t_2) \rangle$, якщо відомий спільний розподіл двох процесів.

Розглядають також *кореляційні функції за часом*

$$R_{f,g}(T) = \langle \bar{f}(t+T)g(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau \bar{f}(t)g(t+\tau) \right\}.$$

Автокореляційна функція (корелятор) є $R(T) = \langle \bar{f}(t+T)f(t) \rangle_t$. Це – випадкові величини; для ергодичного випадкового процесу з одиничною ймовірністю вони дорівнюють середньому за ансамблем

$$R_{f,g}(T) = \langle \bar{f}(t+T)g(t) \rangle.$$

Властивість ергодичності суттєво спрощує аналіз випадкових процесів і порівняння теоретичного аналізу з спостереженнями, що на можуть залучати лише скінченне число реалізацій. З іншого боку, це виправдовує в практичних застосуваннях розгляд 'на фізичному рівні строгості', коли часові середні отождествлюють із середніми за ансамблем.

Спектральна густина корелятора $\tilde{R}(\omega)$ визначається як

$$\tilde{R}_{f,g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT e^{-i\omega T} R_{f,g}(T).$$

Обернене перетворення:

$$R_{f,g}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega T} \tilde{R}_{f,g}(\omega).$$

Розглянемо деякі критерії хаотичної поведінки.

Кажуть, що процес $f(t)$ має властивість *перемішування*, якщо для будь-яких функцій F, G границя $\lim_{T \rightarrow \infty} R_{F(f), G(f)}(T) = 0$. Характерний час T_0 , за який корелятори суттєво спадають, називають часом розчеплення кореляцій. Досить часто це спадання відбувається по експоненційному закону: $R(T) \equiv R_{f,f}(T) \sim \exp(-T/T_0)$.

Для процесу з перемішуванням спектральна густина є неперервною функцією.

Умова перемішування є більш адекватною хаотичній поведінці, ніж умова ергодичності. Ергодичними можуть бути системи, траєкторії яких є фінітними, вони не обов'язково виконують випадкові рухи. Це може бути, наприклад, майже періодичний рух. Для такого ергодичного процесу f без перемішування маємо дискретний спектр:

$$\tilde{R}(\omega) = \sum_n A_n \delta(\omega - \omega_n).$$

Така поведінка характерна для майже періодичної функції, що є суперпозицією гармонік з несумірними частотами. Хоча на перший погляд поведінка траєкторій з майже-періодичною залежністю координат від часу дуже схожа на стохастичну. В реальному випадку в такій системі при проведенні вимірювань на скінченному інтервалі замість дельта-функцій матимемо сукупність вузьких резонансів.

За наявності хаосу, коли система попадає в область стохастичності, типовими є широкі резонансні лінії, що перетинаються між собою; на практиці їх важко відрізнити. Умова перетинання резонансів при поступовому переході від регулярного руху може слугувати критерієм виникнення хаосу, коли спектр можна вважати неперервним хоча б на деякій його ділянці.

4.2. Розбігання траєкторій.

Для подальшого нагадаємо, що показником Ляпунова вектор-функції $\mathbf{x}(t)$ називають границю

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left[\frac{\ln |\mathbf{x}(t)|}{t}, \quad t \geq T \right] \right\}.$$

У випадку нестійкості точки спокою система повинна мати розв'язки в околі цієї точки принаймні з невід'ємними показниками Ляпунова. Часто реалізується експоненційна нестійкість, тоді показник Ляпунова додатний хоча б для частини розв'язків.

Нехай траєкторії системи $\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{z}) = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ є неперервно-диференційованою функцією початкових умов $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_n\}$, що задані в t_0 . Позначимо $\delta y_i = \sum_j (\partial Y_i / \partial z_j) \delta z_j$. Для того, щоб в системі було перемішування, необхідно, щоб хоча б для частини траєкторій з близькими початковими умовами відстань між ними $|\delta \mathbf{y}|$ швидко (але не обов'язково монотонно) зростала, наприклад, коли $\delta \mathbf{y}(t)$ має додатний показник Ляпунова. При цьому, якщо рух системи зосереджений в обмеженій області, відстань між траєкторіями не може прямувати до нескінченності і починається заплутування. Зауважимо, що, оскільки траєкторія $\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{z})$ є, взагалі кажучи, функцією часу, дослідження збурень δy_i в околі цієї траєкторії має справу з неавтономною системою, що ускладнює справу. Матриця $\partial Y_i / \partial z_j$ залежить від часу і від точки, де задані початкові умови. Крім того, поведінка δy_i залежить від збурень початкових умов δz_i ; за наявності перемішування, коли

для певного вибору δz_i матимемо локальне розбігання $\delta \mathbf{y}(t)$, для інших близьких траєкторії матимемо стиснення.

4.3. Дивні атрактори.

Стохастичний атрактор – це типовий атрибут системи, де є хаотичний рух. Нагадаємо, що атрактор – це інваріантна множина A станів динамічної системи, до яких вона прямує з часом. Для системи другого порядку можливі типи атракторів – точка спокою чи граничний цикл. Для розмірності більше трьох можливим є принципово новий тип – стохастичний атрактор, кожна точка якого є нестійкою. В процесі руху відстань між траєкторією та стохастичним атрактором – множиною A прямує до нуля, але траєкторія має хаотичну поведінку; для руху системи на множині A притаманною є властивість перемішування. Характерні приклади атракторів з дрібною хаусдорфовою розмірністю.

Розмірність Хаусдорфа – розмірність множини M в n -вимірному (чи, загальніше, у метричному) просторі дорівнює

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \inf \left[\frac{\ln \rho(n)}{\ln n} \right] \right\}$$

$\rho(n)$ – мінімальне число куль діаметру $1/n$, що повністю покривають M .

4.4. Сценарії переходу до хаосу

Слід очікувати, що в реальних системах перехід до стохастичної поведінки може реалізовуватися складним чином, із залученням різних варіантів хаотизації. Тим не менш повчально розглянути деякі моделі турбулентності, що є певною ідеалізацією.

Модель турбулентності Ландау-Хопфа (шляхом втрати стійкості інваріантних торів). Переход до квазіперіодичного руху може здійснюватися внаслідок втрати стійкості вихідного граничного циклу і появи інваріантного двовимірного тора. Зі зміною біфуркаційного параметра (наприклад, середньої швидкості рідини) тор також може втратити стійкість і перейти у тривимірний тороїдальний многовид. Подальші біфуркації можуть призвести до появи інваріантних торів із все більшою розмірністю. Ландау та Хопф висували гіпотезу, що хаотичні коливання можуть бути рухом по тору великої розмірності. Але пізніше було показано, що квазіперіодичний рух навіть великої розмірності (тобто з великою кількістю неспівставлених частот) не є хаотичним і не є типовим.

Сценарій Рюеля-Такенса. Трьох частотний квазіперіодичний рух, якщо такий утворився у системі, як правило, не є стійким і легко руйнується. На його місці утворюється дивний атрактор. Рюель і Такенс показали, що коли існує векторне поле f на тривимірному торі, що відповідає тричастотному руху, то у будь-якому околі U відповідної точки фазового простору знайдуться векторні поля f' на тривимірному торі, що мають дивні атрактори. Області, що відповідають

векторним полям f' , не займають увесь окіл U , тобто в цьому околі також можна виділити поля, що не мають дивних атракторів.

Сценарій Помо-Манневілья (перехід до хаосу через чередування). При такому русі ділянки із хаотичним рухом передуються із ділянками, де мають місце періодичні коливання.

Сценарій Фейгенбаума: перехід до хаотичної поведінки після низки біфуркацій подвоєння періоду. Зазначимо, що явище подвоєння періоду досить часто зустрічається в різноманітних системах. Прикладом може слугувати рівняння Дуффінга: $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x + \delta x^3 = \alpha_1 + \alpha_2 \sin \omega_0 t$, яке ілюструє відгук нелінійного осцилятора на періодичну збуджуючу силу. Докладніше цей сценарій розглянуто далі на прикладі дискретних відображень.

4.5. Дискретні відображення

Для того, щоб неперервна система могла мати дивний атрактор, число динамічних змінних повинно бути більше або дорівнювати трьом. Але у дискретному випадку хаотичний рух може виникнути навіть у дуже простих системах (наприклад, для відображення $x_{n+1} = 1 - cx^2$). З іншого боку, певні питання щодо систем з неперервними траєкторіями можна зводити до вивчення дискретних систем за допомогою *відображення Пуанкаре*. Воно полягає в тому, що замість розгляду повністю траєкторій динамічної системи досліджують лише точки перетину цих траєкторій з деякою поверхнею (зазвичай, *площиною Пуанкаре*).

При перетині траєкторій руху деякої системи із площиною Пуанкаре ми отримуємо нескінченну послідовність точок $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$, яка однозначно визначається початковим положенням \mathbf{x}_0 і кожна з точок визначає іншу:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k), \quad \Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Перевагами такого підходу у порівнянні з розглядом неперервних траєкторій в цілому є спрощення та наочність. При цьому властивості неперервної системи багато в чому визначаються властивостями дискретного відображення, що нею породжуються. Разом із тим вивчення таких послідовностей є цікавим само по собі, це – природний спосіб опису динамічних систем із дискретним часом.

Точка \mathbf{x}^* називається *нерухомою точкою* дискретного відображення, якщо $\Phi(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. За теоремою про стислі відображення, послідовність (4.1) збігається, якщо $|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})| \leq q < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $q < 1$. Але ця умова може не виконуватися для усіх \mathbf{x}, \mathbf{y} . Циклом порядку m (m -кратним циклом) будемо називати послідовність точок $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$, які задовольняють умові: $\mathbf{x}_2 = \Phi(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_3 = \Phi(\mathbf{x}_2)$, ..., $\mathbf{x}_0 = \Phi(\mathbf{x}_m)$. За певного виду функції Φ можлива хаотична поведінка, коли послідовність ("дискретна траєкторія системи") щільно заповнює деяку область в \mathbb{R}^N . Аналогія між диференціальними рівняннями та системами типу (4.1) цілком зрозуміла, якщо вважати порядковий номер елементів послідовності дискретним часом.

Розглянемо більш детально послідовність (4.1) поблизу точки спокою. Нехай $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_k$. Підставимо це в (4.1):

$$\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_k),$$

або покомпонентно, з врахуванням $\Phi(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$:

$$\delta x_{k,i} = \sum_j a_{ij} \delta x_{k,j}, \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}.$$

Стійкість точки \mathbf{x}^* визначають власні числа α_r матриці $\{a_{ij}\}$, які називають мультиплікаторами. Нерухома точка \mathbf{x}^* – стійка, якщо усі власні числа $|\alpha_r| < 1$; ця точка нестійка, якщо існує хоча б один мультиплікатор $|\alpha_r| > 1$.

У разі одновимірного відображення $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ точка x^* – стійка, якщо $|\varphi'(x^*)| < 1$.

Одне із найпростіших відображень, що ілюструють перехід до хаосу через послідовність біфуркацій – логістичне відображення:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, \mu); \quad \varphi(x, \mu) \equiv \mu x(1 - x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

Якщо $\mu \in [0, 4]$, то будь-яке x_n , $0 \leq x_n \leq 1$ відображається в x_{n+1} : $0 \leq x_{n+1} \leq 1$. Задавши початкове значення $x_0 \in [0, 1]$, можна обчислити усі члени послідовності x_1, x_2, \dots за формулою (4.2).

Дослідимо систему (4.2). Можна виділити наступні випадки:

1) $0 < \mu \leq 1$. Точка $x^* = 0$ – нерухома стійка точка, нерухома точка $x_1^* = 1 - 1/\mu$ – нестійка.

2) $1 < \mu < \mu_1 = 3$. При $\mu > 1$ точка $x^* = 0$ втрачає стійкість, оскільки $|\varphi'(0)| > 1$. Стійкою стає точка $x_1^* = 1 - 1/\mu$, оскільки $|\varphi'(x_1^*)| = |2 - \mu| < 1$.

Для $\mu = 2$ послідовність можна задати точно: $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x_0)^{2^n}$.

3) $\mu_1 < \mu < \mu_2 = 1 + \sqrt{6}$. При $\mu > 3$ відбувається біфуркація – точка x_1 , яку можна розглядати як цикл порядку 1, стає нестійкою, але з'являється стійкий двократний цикл (періоду 2), який знаходимо, аналізуючи точку спокою двократного відображення $x_2^* = \varphi(\varphi(x_2^*))$. Очевидно, що старі точки спокою $x^* = 0$ та $x_1^* = 1 - 1/\mu$ (нестійкі цикли періоду 1) також задовольняють цьому рівнянню; це полегшує розв'язок, який зводиться до пошуку коренів квадратного тричлена:

$$x_{2\pm}^* = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}.$$

Похідна від двократного відображення є однаковою для обох коренів:

$$\varphi'(x_{2\pm}^*)\varphi'(\varphi(x_{2\pm}^*)) = 4 + 2\mu - \mu^2;$$

її значення належать до інтервалу $(-1, 1)$ при $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$.

4) При переході через значення μ_2 двократний цикл втрачає стійкість, але з'являється новий цикл періоду 4. Цей процес можна продовжити. Фейгенбаумом

було показано, що при подальших змінах параметру в проміжку $\mu_2 < \mu < \mu_{cr} \approx 3,5699$ відбувається послідовність біфуркацій в нових точках μ_3, μ_4, \dots ; послідовність $\{\mu_m\}$ є монотонно зростаючою і вона збігається до границі $\mu_m \rightarrow \mu_{cr}$. При переході через значення μ_m втрачає стійкість цикл порядку 2^m , але виникає новий стійкий цикл порядку 2^{m+1} . Для послідовності $\{\mu_m\}$ справедливе співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{\mu_{m+1} - \mu_m} = \delta,$$

де $\delta \approx 4.669$ називають константою Фейгенбаума.

5) Для більшості значень $\mu \in (\mu_{крит}, 4)$ послідовність $\{x_k\}$ набуває хаотичної поведінки: малі зміни початкової умови x_0 призводять до великих відмінностей членів послідовності з достатньо великим k ; послідовність $\{x_k\}$ аперіодична. Але серед значень $\mu \in (\mu_{крит}, 4)$ є проміжки регулярної поведінки (вікна періодичності), коли $\{x_k\}$ прямує до циклу.

6) За $\mu > 4$ значення x_k виходять з проміжку $(-1,1)$ і розбігаються.

Bibliography

4.6. *Література до розділу 4*

- [1] В.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. Введение в нелинейную физику. М., Наука, 1988.
- [2] Дж.Марсден, М.Ма-Кракен. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980.
- [3] Г.Хакен. Синергетика. М., Мир, 1985.
- [4] А.О.Мінаков, О.Ф.Тирнов. Статистична радіофізика. Харків: "Факт", 2003.
- [5] Ю.Л.Климонтович. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.

Критичні параметри в космології

5.1. Періоди раннього Всесвіту

Як видно з попередніх розділів, у багатьох задачах з нелінійними системами виникають критичні значення характерних параметрів, що відокремлюють області різної якісної поведінки. Не є винятком і космологія, яка розглядає найбільші астрономічні масштаби. Але, на відміну від інших природничих наук, тут маємо справу з єдиним об'єктом для вивчення. Ми не можемо впливати на умови астрономічних спостережень і, тим більше, не можемо створювати всесвіти з різним типом кривини. У теоретичних конструкціях інколи розглядають "Мультивсесвіт", тобто ансамбль різних всесвітів, але ці інші всесвіти, якщо вони є, існують у причинно-незв'язаних областях, і, згідно до сучасних уявлень, експериментатори в цих всесвітах ніколи не матимуть змогу обмінятися інформацією. Це, однак, не заважає розглядати в теорії різні варіанти глобальної структури (зокрема, відкритий, замкнений, просторово-плоский Всесвіт), тим більше, що ці варіанти не завжди можна відрізнити на основі сучасних спостережень. Відповідно, в теоретичних дослідженнях виникають критичні значення характерних параметрів, які відділяють різні типи розв'язків космологічних рівнянь.

З іншого боку, в еволюції Всесвіту можна виділити різні періоди чи епохи, що відрізняються якісно різною поведінкою з точки зору фізики. У ці періоди домінуючими є різні фізичні процеси. Перехід від одного періоду до іншого (наприклад, від радіаційної ери до епохи домінування речовини) не є миттєвим, хоча у порівнянні із тривалістю цих періодів він може бути досить малим. У цьому розумінні можна говорити про критичні значення часу, температури тощо, які характеризують межі основних етапів космологічної еволюції. Оскільки ця книга не є підручником з космології, обмежимося найбільш загальними відомостями щодо цих етапів¹.

Більшість сучасних спостережних даних, що стосуються еволюції Всесвіту, можна описати в рамках так званої Λ CDM-моделі. У цій моделі присутня ненульова космологічна стала, яку інтерпретують як прояв специфічного виду матерії – так званої "темної енергії" (TE), густина маси якої складає приблизно 68% від

¹ Докладніше див., напр., [1]-[2]

загальної космологічної густини. Приблизно 27% складає темна матерія (ТМ), частинки якої не взаємодіють із звичайними частинками та між собою, решту 5% густини маси забезпечуює звичайна "баріонна матерія", з якої складаються зірки, планети, міжзоряний пил та газ. Густина ТЕ незмінна з часом, а густина ТМ і звичайної матерії спадають. Всесвіт також заповнений чорнотільним "реліктовим" випромінюванням, що має температуру 2.7 К. Внесок цього випромінювання у сучасну космологічну густину знехтовно малий. Але, якщо рухатися назад у часі, можна показати, що густина маси-енергії випромінювання зростає швидше, ніж аналогічна густина ТМ і звичайної матерії; зростає і температура випромінювання. Звідси приходимо до висновку, що колись Всесвіт був дуже гарячим. Оцінки показують, що у ранньому Всесвіті існувала високотемпературна плазма з елементарних частинок та античастинок у термодинамічній рівновазі з випромінюванням.

У класичній (тобто неквантовій) загальній теорії відносності строго доведено, що космологічне розширення має починатися з космологічної сингулярності. Але більшість космологів погоджується з тим, що відлік треба вести від планківського часу $t_{Pl} \sim 5 \cdot 10^{-44} \text{ с}$. Ймовірно, говорити про час за $t < t_{Pl}$ у звичайному розумінні не має сенсу. Обговорюючи народження Всесвіту, Я.Б. Зельдович інколи цитував відомого в минулому юмориста А. Аверченка: "Історія мідян темна і незрозуміла. Вчені поділяють її, тим не менш, на три періоди". Мабуть історія перших миттєвостей дійсно є "темною" завдяки ролі ТЕ, яку не можна вичерпати простою моделлю, що базується на космологічній константі. Найбільш незрозумілими для сучасної науки є період від t_{Pl} до 10^{-31} с . Однак певний консенсус щодо якісного розуміння цього періоду, безперечно, існує, хоча тут далеко до побудови послідовної теорії. По-перше, цей період важливий з точки об'єднання, а точніше, від'єднання взаємодій. Існує думка, що за великих енергій елементарних частинок (вище $\sim 10^{14} \text{ GeV}$) зникають відмінності між електромагнітною, слабкою та сильною взаємодією. Для відповідних теоретико-польових моделей існує назва "теорія Великого об'єднання". При ще більших енергіях у єдину схему, яку називають "Теорією усього", слід додати гравітаційну взаємодію, що, мабуть, вимагатиме розробки квантового варіанту теорії тяжіння. Сильна взаємодія відокремлюється від електрослабкої на масштабі часу $t \sim 10^{-36} \text{ с}$. Інший важливий процес, що, як припускають, відбувається саме в часи менші за $\sim 10^{-31} \text{ с}$, це – дуже швидке розширення Всесвіту (інфляція). Не виключено, що теорія інфляції потребуватиме введення нових фундаментальних взаємодій або вимагатиме перегляду уявлень про гравітацію. Про необхідність інфляційного етапу космологічного розширення свідчать, зокрема, проблеми горизонту та плоскостності, що будуть розглянуті нижче. Поки що немає пріоритетної теоретичної схеми, яка могла б з єдиних позицій описати цей період, але деякі принципові деталі якісної картини відомі.

Для подальших часів працює сучасна теорія електрослабкої взаємодії; певний час ще існує симетрія між електромагнітною та слабкою взаємодіями (електрослабка епоха), яка зникає при $t \sim 10^{-12} \text{ с}$.

У період $10^{-12} \div 10^{-6} \text{ с}$ усі чотири взаємодії (гравітаційна, електромагнітна,

слабка і сильна) існують окремо. Всесвіт заповнений кварк-глюонною плазмою, лептонами, фотонами. Кварки, які за високих густин енергії ще не об'єднані у адрони, рухаються вільно (асимптотична свобода). За більших часів основні періоди у еволюції Всесвіту визначаються масами елементарних частинок та енергіями чи температурами, за яких відбуваються фазові переходи, починають йти або припиняються певні реакції. Наприкінці зазначеного періоду відбувається об'єднання кварків в адрони (фазовий перехід конфайнменту). Характерна температура адронізації $T = 150 \div 170 \text{ MeV}$, що близько до маси піона 140 MeV .

За часів $\sim 10^{-6} \div 1 \text{ с}$ має місце адронна епоха, вільні кварки зникають. Відбувається анігіляція баріон-антибаріонних пар.

У період $1 \text{ с} - 3 \text{ хв}$ лептон-антілептонні пари анігілюють (характерна температура відповідає енергії народження $e^+ - e^-$ пар, маса спокою електрона $m_e = 0.5 \text{ MeV}$). Дещо раніше, при $T = 2 \div 3 \text{ MeV}$, частота взаємодій нейтрино з іншими частинками стає недостатньою для підтримання термодинамічної рівноваги; відбувається "закалка" нейтрино, коли вони починають рухатися вільно. Речовина стає для нейтрино прозорою. За температури вище $T = 1.3 \text{ MeV}$, яка відповідає різниці мас спокою нейтрона та протона, концентрація протонів та нейтронів однакова. Коли температура спадає, число вільних нейтронів зменшується, але починаються ядерні реакції з утворенням дейтерію, трітій та гелію. Основні ядерні реакції з утворенням первинного розподілу елементів йдуть протягом перших $3 \div 20$ хвилин космологічного розширення.

Протягом перших сотень тисяч років речовина починає домінувати на випромінюванням. При $t \approx 380000$ років відбувається рекомбінація водню. Електрони й протони об'єднуються в атоми; вільні заряджені частинки зникають, Всесвіт стає прозорим для електромагнітного випромінювання і воно еволюціонує окремо від речовини. Розподіл "реліктових" фотонів, що утворилися на момент рекомбінації, залишається чорнотільним, тобто описується розподілом Планка, але середня температура його спадає від декількох тисяч до 2.7 K у сучасну епоху. Реліктове випромінювання – це найбільш давнє випромінювання, яке спостерігають у Всесвіті. Його температура практично не залежить від напрямків. Флуктуації температури $\Delta T/T$ мають порядок 10^{-5} ; вони несуть інформацію про флуктуації гравітаційного потенціалу, а значить і про неоднорідності густини темної матерії в епоху рекомбінації водню.

Тиск речовини, яка не взаємодіє з випромінюванням, різко спадає, що сприяє розвитку збурень густини баріонної та небаріонної компоненти відносно однорідного фону. Починається формування структури Всесвіту. Перші зорі утворилися, коли його вік Всесвіту складав близько 400 мільйонів років.

5.2. Базові співвідношення з загальної теорії відносності

В цьому підрозділі дуже стисло викладено основи загальної теорії відносності (ЗТВ). Докладне викладення див. книги [1], [2], [4], [8].

1. Метричний тензор. Основною величиною в загальній теорії відносності,

за допомогою якого визначаються усі спостережні характеристики чотиривимірного викривленого простору-часу та гравітаційного поля, є *метричний тензор* $g_{\nu\mu}(x)$, який задають за допомогою квадратичної форми

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

де коефіцієнти $g_{\nu\mu}(x)$ утворюють поле двічі коваріантного невідродженого симетричного тензора. Далі позначимо $g = \det \|g_{\mu\nu}\|$. Крім того, ЗТВ постулює *лоренцову* сигнатуру метричного тензора $s = -2$, як у тензора Мінковського. При цьому значення квадратичної форми ds^2 можуть бути додатними, від'ємними чи дорівнювати нулю – в залежності від диференціалів координат, що в неї входять.

За допомогою метричного тензора вводять довжину кривої. Нехай крива $x(p)$ параметризована неособливим параметром p (тобто $\sum_{\alpha=0}^3 |dx^\alpha/dp| \neq 0$). Позначимо

$$\varepsilon = \text{sign} \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}.$$

Нехай вздовж кривої $\varepsilon = \text{const}$. Будемо говорити, що крива часоподібна, якщо $\varepsilon = 1$; у цьому випадку її можна інтерпретувати як траєкторію частинки ненульової маси. Крива ізотропна (або світлоподібна), якщо $\varepsilon = 0$, у цьому випадку її можна інтерпретувати як траєкторію безмасової частинки. Крива просторовоподібна, якщо $\varepsilon = -1$. Відповідно до метричної інтерпретації квадрата інтервалу, визначимо "довжину" часоподібної чи просторовоподібної кривої між точками $x(p_1)$ і $x(p_2)$ як

$$\int_{p_1}^{p_2} \left\{ \varepsilon g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{1/2} dp.$$

Якщо спостерігач рухається по часоподібній траєкторії, то виміряний ним власний час між точками $x(p_1)$ і $x(p_2)$ є

$$T(1, 2) = \frac{1}{c} \int_{p_1}^{p_2} \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{1/2} dp.$$

Параметр $s = cT$, $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = cdT$ можна ввести на будь-якій часоподібній траєкторії; різні параметри s можуть відрізнятися лише завдяки вибору початку відліку на траєкторії.

Двічі контраваріантний тензор $g^{\mu\nu}$, визначений за допомогою співвідношення

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (5.2)$$

також називають метричним.

Символи Крістоффеля, асоційовані з метричним тензором $g_{\mu\nu}$, визначені формулою

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}). \quad (5.3)$$

Кома тут означає частинну похідну. Очевидно, ці символи симетричні за нижніми індексами: $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$.

Система координат $\{x\}$ є *геодезичною в точці* $m_0 \in M_n$, якщо в цих координатах у цій точці $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x_0) = 0$, де x_0 - координати m_0 у цій системі. Вживають також термін "*локально-геодезична система координат*" у відповідній точці m_0 . Система координат є геодезичною в точці m тоді й тільки, якщо в цій системі перші похідні від метричного тензора в цій точці дорівнюють нулю: $g_{\mu\nu,\delta}(m) = 0$.

Система координат називається *лоренцовою* (або *локально-лоренцовою*) у точці m , якщо ця система є локально геодезичною в m і додатково у цій системі в цій точці $g_{\mu\nu}(m) = \eta_{\mu\nu}$.

Можна довести, що в рімановому многовиді для фіксованої точки m завжди можна знайти систему координат, геодезичну в m (а також і локально-лоренцову в m). Але існування локально геодезичної системи координат у точці m зовсім не гарантує, що перші похідні від метричного тензора дорівнюють нулю в усьому просторі або навіть в околі точки m . У загальному випадку локально-геодезичні системи для різних точок є різними.

Важливу роль для визначення спостережуваних величин та рівнянь фізичних полів у викривленому просторі-часі, відіграє **принцип локальної лоренцовості**.

Нехай m – будь-яка точка многовиду подій (простору-часу), а $\{y\}_m$ - локально-лоренцова в m система координат. Тоді у точці m в системі $\{y\}_m$ усі співвідношення для локальних тензорних фізичних величин, що не містять похідних вище першого порядку, збігаються з відповідними співвідношеннями СТВ.

2. Рівняння руху ідеальної рідини. Запишемо рівняння гідродинаміки для тензора енергії-імпульсу релятивістської ідеальної рідини $T^{\mu\nu}$:

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.4)$$

де ∇ - коваріантна похідна,

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U^{\mu}U^{\nu} - g^{\mu\nu}p, \quad (5.5)$$

ε – густина енергії в системі спокою (супутній системі) елементу рідини; p – тиск, що зазвичай є функцією двох термодинамічних параметрів, наприклад, густини ентропії та густини баріонного числа n^* , яку задають у власній системі елементу рідини; $U^{\mu} = dx^{\mu}/ds$ - ейлерова чотиришвидкість, що визначається у кожній точці середовища; $U^{\mu}U_{\mu} = 1$. Густина енергії та тиск, а також інваріантна густина баріонного числа n^* , є скалярними величинами; вони визначаються в локально-супутній системі спостерігача, що рухається разом з елементом рідини.

З (5.4) випливає узагальнене рівняння неперервності

$$\nabla_\mu [(\varepsilon + p)U^\mu] = U^\mu \nabla_\mu p \equiv U^\mu \partial_\mu p, \quad (5.6)$$

та узагальнене рівняння Ейлера

$$(\varepsilon + p)U^\mu \nabla_\mu U^\nu = (g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) \partial_\nu p; \quad (5.7)$$

ці рівняння описують рух суцільного середовища.

Рівняння (5.4) треба доповнити рівнянням стану та незалежним еволюційним рівнянням для ще одного термодинамічного параметра. Це може бути, наприклад, рівняння збереження баріонного числа:

$$\nabla_\mu (n^* U^\mu) = 0. \quad (5.8)$$

3. Тензор Рімана. Умови, за яких існує система координат, де похідні від метричного тензора дорівнюють нулю в усьому просторі або у скінченній області змінних x^α , визначаються *тензором кривини Рімана*:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\beta}. \quad (5.9)$$

Якщо $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv 0$ в деякій області, то простір-час є плоским і рівняння $g_{\mu\nu,\delta} \equiv 0$ також може бути виконано в цій області при відповідному виборі координат. У цій області метричний тензор можна звести до тензора Мінковського координатним перетворенням.

Тензор кривини задовольняє алгебраїчним співвідношенням

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0, \quad (5.10)$$

а також диференціальним співвідношенням (*тотожності Біанкі*)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\varepsilon} + R_{\alpha\beta\delta\varepsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\varepsilon\gamma;\delta} \equiv 0; \quad (5.11)$$

нагадаємо, що крапка з комою означає коваріантне диференціювання.

Згортку тензора Рімана за першим і третім індексами ²

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$$

називають *тензором Річчі*; цей тензор є симетричним: $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Величину $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ називають *скалярною кривиною*. Тензор

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

називають *тензором Ейнштейна*. З тотожностей Біанкі випливає коваріантний "закон збереження"

²Іноді згортають за пергим і четвертим індексами, в цьому разі тензори кривини, Річчі та права частина рівнянь Ейнштейна відрізняються знаком.

$$G^{\beta}_{\delta;\beta} \equiv 0 \quad (5.12)$$

Коротко розглянемо послідовність дій, що приводить до рівнянь Ейнштейна. Рівняння для метричного тензора можна отримати практично однозначно (з точністю до двох вільних констант) з наступних умов: (а) це мають бути рівняння не вище другого порядку; (б) вони мають випливати з варіаційного принципу стаціонарної дії

$$S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (L_g + L_m),$$

де гравітаційна частина лагранжіану L_g є інваріантом, побудованим лише з $g_{\nu\mu}(x)$ та його похідних; (в) лагранжіан L_m негравітаційних полів може містити лише $g_{\nu\mu}$ та його перші похідні $g_{\nu\mu,\alpha}$.

Наслідком цих умов є вигляд гравітаційної частини дії

$$L_g = C_1 R + C_2$$

де константи C_1, C_2 пов'язані з гравітаційною сталою та з космологічною сталою, що була визначена наприкінці минулого століття з даних позагалактичної астрономії.

Звідси випливають рівняння Ейнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.13)$$

де

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} (\sqrt{-g} L_m) \right) \right\}, \quad (5.14)$$

тензор енергії імпульсу негравітаційних полів. Умовою інтегровності рівнянь (5.13) є коваріантний закон збереження $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, який можна отримати і з інших міркувань.

5.3. Рівняння Фрідмана

Умови просторової однорідності та ізоотропії. Якщо відкинути точку зору щодо виділеного положення нашої Галактики у Всесвіті, слід прийняти гіпотезу про однорідність (у середньому) тривимірного простору. Спостереження свідчать, що наш Всесвіт виглядає приблизно однаково в усіх напрямках, і природно вважати, що так само він виглядає для спостерігача в будь-якій іншій галактиці. Потужним аргументом на користь цього є ізоотропія так званого "реліктового" електромагнітного випромінювання, що поширюється у Всесвіті в усіх напрямках, варіації температури якого помітні лише на рівні 0.001%. Таким чином перший крок у побудові космологічних моделей полягає у розгляді умов однорідності та ізоотропії тривимірного простору.

За умов просторової однорідності та ізотропії, що стосуються не тільки гравітаційного поля, а й усіх інших величин, які характеризують Всесвіт на великих масштабах, рівняння Ейнштейна зводяться до космологічних рівнянь Фрідмана (див., напр. [12, 13, 15, 16]).

Аналіз умов однорідності та ізотропії приводить до такого вигляду метрики у деякій системі координат t, χ, θ, φ

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + F^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (5.15)$$

де функція $F(\chi)$ має різний вигляд в залежності від знаку скалярної кривини σ тривимірного простору (тобто гіперповерхні $t = const$)

- 1) $\sigma = -1$, $F(\chi) = \sin \chi$ – замкнений Всесвіт,
- 2) $\sigma = 0$, $F(\chi) = \chi$ – просторово-плоский Всесвіт,
- 3) $\sigma = 1$, $F(\chi) = \text{sh } \chi$ – відкритий Всесвіт.

Підстановка (5.15) в рівняння Ейнштейна з тензором енергії імпульсу ідеальної релятивістської рідини (5.5) – якщо весь Всесвіт описувати за допомогою гідродинамічної моделі – дає лише два нетривіальних рівняння ([12, 13, 15, 16])

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right); \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = \frac{\sigma c^2}{2}, \quad (5.17)$$

де $\rho = \varepsilon/c^2$ – інваріантна густина маси спокою усіх видів матерії у Всесвіті, окрім гравітаційного поля, куди ми включили також густину "темної" енергії $\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda$ та від'ємний тиск $p = -\varepsilon_\Lambda$, пов'язані з космологічною сталою.

Завдяки умовам однорідності та ізотропії, з рівнянь гідродинаміки для локально нерухомої рідини залишається лише одне нетривіальне рівняння – неперервності – яке приймає вид

$$\frac{d\rho}{dt} + 3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{d}{dt} \ln a = 0. \quad (5.18)$$

Нагадаємо, що з тотожності (5.12) випливає коваріантний закон збереження (5.4), який має наслідком рівняння релятивістської гідродинаміки. Таким чином, рівняння руху та рівняння поля не є незалежними. Це легко перевірити безпосередньо для рівнянь (5.16)–(5.18). Далі для однокомпонентного Всесвіту можна використовувати, наприклад, рівняння (5.17) та (5.18)

Для рівняння стану холодного ідеального газу $p = 0$ з (5.18) випливає

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0, \text{ звідки } \rho \sim a^{-3}.$$

Для рівняння стану ультрарелятивістського ідеального газу $p = \varepsilon/3$ аналогічно маємо $\rho \sim a^{-4}$.

Для тиску "космологічного вакууму" $p = p_{vac} = -\varepsilon_\Lambda$, це узгоджується з рівнянням (3.11), яке в цьому разі перетворюється у тотожність.

2. Критична густина як біфуркаційне значення.

Уведемо параметр Габбла

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

Значення цього параметра у сучасну епоху $H_0 = H(t_0)$ називають сталою Габбла. Якщо ввести критичну густину

$$\rho_{cr}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

та омега-параметр

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)},$$

рівняння (5.17), переписеться так:

$$H^2(t)[1 - \Omega(t)] = \frac{\sigma c^2}{a^2(t)}. \quad (5.19)$$

Далі ми використовуємо позначення $\rho_{cr,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$.

Як бачимо, відмінність Ω від одиниці визначає знак σ , а значить і знак просторової кривини однорідного Всесвіту. При цьому достатньо визначити знак $1 - \Omega$ в сучасну епоху, очевидно, він залишається незмінним для усього розв'язку рівнянь Фрідмана.

В "старій" космологічній моделі (без космологічної сталої) замкненість чи відкритість моделі визначала одночасно можливість продовжити розв'язок $a(t)$ на усі моменти часу $t > 0$ (або відсутність такої можливості). Це пов'язано з вибором певної фізичної моделі негравітаційних взаємодій, який, зокрема забезпечує ультра-релятивістське рівняння стану $p = \varepsilon/3$ в ранньому Всесвіті (гаряча модель) та $p = 0$ в сучасну епоху після рекомбінації водню (холодна матерія). Завдяки рівнянню стану константа у правій частині рівняння (5.17) визначає асимптотичну поведінку в майбутньому, оскільки при збільшенні $a(t)$ внесок члена $(4\pi G/3)\rho a^2$ в це рівняння спадає.

В роботах з космології в рамках якісного розгляду часто розглядають однорідні ізотропні гідродинамічні моделі, де всю речовину Всесвіту описують одним ефективним рівнянням стану типу $p = p(\rho)$ (баротропне рівняння стану). При цьому вводять параметр $w = p/\varepsilon$. Якщо $p(\rho) \geq 0$, як видно з (5.16), завжди $d^2a/dt^2 < 0$; якщо має місце розширення ($da/dt < 0$), то воно відбувається зі сповільненням.

З рівняння (5.18)

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + 3(1+w) \frac{d}{dt} \ln a = 0.$$

звідки

$$\rho(a) = \rho_0 \exp \left(-3 \int_{a_0}^a (1+w) \frac{da}{a} \right), \quad a_0 = a(t_0), \quad \rho_0 = \rho(t_0) \quad . \quad (5.20)$$

Підстановка в (5.17) дає

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + V(a) = \frac{\sigma c^2}{2}, \quad (5.21)$$

де позначено

$$V(a) = -\frac{4\pi G}{3} a^2 \rho_0 \exp \left(-3 \int_{a_0}^a (1+w) \frac{da}{a} \right). \quad (5.22)$$

Рівняння (5.21) легко аналізувати, оскільки воно має вигляд закону збереження енергії для частинки одиничної маси з координатою a в полі з від'ємним потенціалом $V(a)$ та енергією $\sigma c^2/2$.

Розглянемо приклади з $w \geq 0$. Вважаємо, що у деякий момент $\dot{a}(t_0) > 0$ – Всесвіт розширюється, що відповідає даним спостережень. В залежності від σ маємо такі варіанти.

1) $\sigma = -1$ (замкнений Всесвіт, від'ємна "енергія частинки"). За $a > a_0$, $w \geq 0$ маємо

$$V(a) \sim a^2 \exp \left(-3 \int_{a_0}^a (1+w) \frac{da}{a} \right) \leq a^2 \exp \left(-3 \int_{a_0}^a \frac{da}{a} \right) = a^{-1} (a_0)^3.$$

За великих a ця величина спадає до нуля, тому зростання $a(t)$ до нескінченності неможливе, оскільки тоді в (5.21) ліва частина додатна, а права від'ємна. Розв'язок натрапляє на точку повороту $t = t_1 > t_0$, причому $-V(a_1) + \frac{\sigma c^2}{2} = 0$, де $a = a_1 \equiv a(t_1)$, і в цій точці відбувається зміна знаку da/dt . Після цього, оскільки $d^2a/dt^2 < 0$, масштабний фактор $a(t)$ спадає до нуля, $\exists t_2 : a(t) \rightarrow 0, t \rightarrow t_2$. Після точки повороту $a(t) < a(t_1)$ за $t > t_1$, тоді, згідно з (5.20),

$$\rho(a) = \rho(t_1) \exp \left(3 \int_a^{a_1} (1+w) \frac{da}{a} \right) \geq \left(\frac{a_1}{a} \right)^3 \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_2.$$

2) $\sigma = 0$ (просторово-плоский Всесвіт, "енергія частинки" дорівнює нулю): точок повороту немає, $\dot{a} > 0$ і $a(t)$ зростає до нескінченності. Явний вигляд асимптотики за великих t залежить від конкретного вигляду залежності $p(\varepsilon)$.

Якщо $w = \text{const} > -1$, з (5.20) маємо $\rho \sim a^{-3(1+w)}$ і пряме інтегрування (5.21) за $\sigma = 0$ дає

$$a(t) \sim t^m, \quad m = \frac{2}{3(1+w)}. \quad (5.23)$$

3) $\sigma = 1$ (відкритий Всесвіт, додатна "енергія частинки"), маємо гіперболічний рух, точок повороту немає, $V(a) \rightarrow 0$, $a(t)$ зростає до нескінченності, при цьому $\dot{a}(t) \rightarrow \text{const} > 0$ виходить на константу і $a(t) \simeq ct$.

Таким чином, критичну густину, а точніше параметр $\Omega(t_0)$ можна вважати біфуркаційним параметром, який визначає умови, коли розв'язок космологічних рівнянь визначений для усіх часів, а коли ні.

3. Урахування космологічної сталої. Висновки попереднього підрозділу суттєво спиралися на конкретний вид рівняння стану. Одним з важливих досягнень кінця 20-го століття є висновок про наявність прискорення розширення Всесвіту (на відміну від сповільнення в старій моделі). Причину такого прискорення назвали 'темною енергією', яку, у найбільш простому підході, можна описати за допомогою ненульової космологічної сталої; при цьому відповідна густина енергії $\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda = \text{const}$, густина маси $\rho_\Lambda = \varepsilon_\Lambda/c^2$. Розгляньмо поведінку масштабного фактора в сучасній моделі з холодною темною матерією та космологічною сталою (Λ CDM-модель). Для небаріонної темної матерії покладемо $p = 0$. Звичайна баріонна матерія в період після рекомбінації водню має нерелятивістське рівняння стану; більше того, на космологічних масштабах усереднений розподіл речовини описують моделлю невзаємодіючих частинок (без тиску). Тому небаріонну темну матерію та баріонну речовину в рівняннях Фрідмана можна об'єднати в спільну компоненту з густиною ρ_m та рівнянням стану $p = 0$. Залежність густини від масштабного фактора згідно з (5.20) зручно виразити через критичну густину $\rho_{cr,0}$ в сучасну епоху

$$\rho_m(a) = \rho_{cr,0} \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad \text{де} \quad \Omega_{m,0} = \rho_m(t_0)/\rho_{cr,0}.$$

За наявності ненульової космологічної сталої з тиском $p_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda$ маємо додатковий внесок у гідродинамічний тензор енергії імпульсу (5.5) $T_\Lambda^{\mu\nu} = \varepsilon_\Lambda g^{\mu\nu}$. Сучасна оцінка внеску космологічної сталої в загальну густину, яка близька до критичної, є приблизно $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho_{cr,0} \approx 0.7$, частка "холодної" матерії $\Omega_{m,0} \approx 0.3$. Внеском інших компонент (реліктові фотони та нейтрино) тут можна знехтувати. Тому в правій частині рівняння (5.16)

$$\rho + 3p/c^2 = -\rho_{cr,0} [2\Omega_\Lambda - \Omega_m(a_0/a)^3] < 0.$$

Таким чином, Всесвіт при $t > t_0$ розширюється з прискоренням, $\ddot{a}(t) > 0$, $a(t) \rightarrow \infty$. Більше того, це прискорення з часом буде зростати, адже при розширенні $\rho_m = \varepsilon_m/c^2 \sim a^{-3}$ спадає, тому величина $[-(\varepsilon + 3p)]$ надалі ще збільшуватиметься. З часом $\varepsilon_m \rightarrow 0$ і рівняння (5.17) можна наближено переписати як

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_\Lambda a^2 = c^2\Lambda a^2,$$

звідки видно, що у далекому майбутньому масштабний фактор виходить на експоненційний режим зростання:

$$a \sim \exp\left(ct\sqrt{\Lambda}\right) \quad . \quad (5.24)$$

Цей режим збільшення з прискоренням називають інфляційним³, він реалізується незалежно від знаку σ . Сучасну стадію космологічної інфляції слід відрізнити від дуже швидкого зростання $a(t)$, яке, як припускають, відбувалося у перші миттєвості еволюції Всесвіту починаючи з планківського часу $5 \cdot 10^{-44}$ сек.

5.4. Інфляція раннього Всесвіту

1. Проблеми стандартної космологічної моделі. У Λ CDM моделі маємо асимптотичну поведінку рівняння стану $p = \varepsilon/3$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$; а в сучасну епоху основні внески дають темна енергія (космологічна стала), внесок якої складає $\Omega_\Lambda \approx 0.7$, звичайна (баріонна) матерія та небаріонна темна матерія, яка разом із баріонною компонентою складає $\Omega_{m,0} \approx 0.3$ від загальної густини.

При цьому виникають певні проблеми, з яких найбільш серйозними є проблема площинності та проблема горизонту. Розглянемо ці питання, вважаючи $p = w\varepsilon$, де $w = \text{const}$; тоді з (5.20) маємо $\rho \sim a^{-3(1+w)}$.

Проблема площинності. Поділимо співвідношення (5.19) для сучасної епохи t_0 і для довільного t

$$\frac{1 - \Omega(t)}{1 - \Omega(t_0)} = \frac{a_0^2 H_0^2}{a^2(t) H^2(t)}. \quad (5.25)$$

У стандартній космології $w \geq 0$, тому в ранні часи, коли $a \rightarrow 0$, в рівнянні Фрідмана (5.17) маємо, що член $\frac{4\pi G}{3}\rho a^2 \sim 1/a^{1+3w} \rightarrow \infty$ стає значно більшим за $\frac{c^2}{2}$ і останнім можна знехтувати за будь якого $\sigma = 1, 0, -1$. Це означає, що для ранніх часів можна користуватися співвідношеннями для просторово-плоскої моделі з $\sigma = 0$, де маємо (5.23),

$$a(t) \sim t^m, \quad m = \frac{2}{3(1+w)}, \quad (5.26)$$

звідки права частина (5.25) веде себе як

$$\frac{a_0^2 H_0^2}{a^2(t) H^2(t)} \sim \left(\frac{t}{t_0}\right)^P, \quad P = \frac{1+3w}{3(1+w)}$$

³"Інфляція" (inflation) означає "роздування".

Таким чином, навіть якщо в сучасну епоху величина $\Omega(t_0)$ значимо відрізняється від одиниці, за $t \ll t_0$ маємо

$$\frac{1 - \Omega(t)}{1 - \Omega(t_0)} \sim \left(\frac{t}{t_0} \right)^P \ll 1 \quad . \quad (5.27)$$

В моделі гарячого Всесвіту за малих t реалізується ультра-релятивістське рівняння стану $w = 1/3$. Тоді, якщо прийняти, що початок космологічного розширення⁴ відповідає $t \sim t_{Pl} \sim 10^{-43}c$, то відмінність $\Omega(t)$ від одиниці становить нехтовно малу величину. В цьому було б нічого жахливого, якщо б не загальноприйнята інтерпретація (5.17) як аналога співвідношення між потенційною гравітаційною енергією та кінетичною енергією розльоту. Найбільш природним припущенням було б $\Omega(t_{Pl}) \sim 1$. Виникає запитання, як пояснити $|\Omega(t_{Pl}) - 1| \ll 1$? Звичайно, можна наводити аргументи в дусі антропного принципу. Якщо, наприклад, в ранні часи величина $\Omega(t) - 1 > 0$ була б порівняною з одиницею, то наш Всесвіт сколапсував би значно раніше, ніж хтось почав би ставити такі запитання. В протилежному випадку $\Omega(t) - 1 < 0$, $1 - \Omega(t) \sim 1$, Всесвіт розширявся б дуже швидко і галактики не встигли б утворитися аж до сучасної епохи. Але навіть у цьому контексті потрібне тонке налаштування параметра $\Omega(t)$, і це вимагає пояснення.

Проблема горизонту. Як відомо, температура реліктового випромінювання, що поширюється з усіх напрямків, є майже однаковою ($T_0 = 2.7 K$); відмінності від цієї величини мають порядок $\Delta T/T_0 \sim 10^{-5}$. Але в космологічній моделі з додатним тиском $p = w\varepsilon$, $w \geq 0$, напрямки на небі, що розрізняються на декілька градусів, є причинно незв'язаними.

Розглянемо це більш докладно.

Найбільший розмір області в момент космологічного часу t , на яку може вплинути подія $t = t_1, \chi = 0$ в координатах, що відповідають метриці (5.15), дається відстанню, яку проходить світловий сигнал. Цей розмір можна визначити з рівнянь ізотропної геодезичної $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 = 0$, що відповідає поширенню сигналу з просторової точки $\chi = 0$ вздовж радіуса χ . Це дає таку фізичну відстань на гіперповерхні $t = const$

$$D(t, t_1) = ca(t) \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad . \quad (5.28)$$

За $w > -1/3$ інтеграл в (5.28) збігається на його нижній межі при $t_1 \rightarrow 0$ і основний внесок визначається верхньою межею $t \gg t_1$, тому $D(t, t_1) \sim ct$ за $t_1 \rightarrow 0$. Головний висновок: навіть при $t_1 \rightarrow 0$ ⁵ розмір причинно-зв'язаної області є скінченним. Ця величина для реального Всесвіту є не дуже значною, якщо взяти $t = t_{rec} = 3.8 \cdot 10^5$ років – момент рекомбінації, коли утворюється

⁴Якщо взагалі тут можна говорити про якийсь момент часу чи початок.

⁵Зазвичай розглядають $t_1 \sim t_{Pl}$.

спостережуваний розподіл температури реліктового випромінювання. Зокрема, для $w = 1/3$ (ультра-релятивістське рівняння стану) отримаємо $D(t_{rec}, 0) = 2ct_{rec}$. Кутовий розмір цієї області з точки зору сучасного спостерігача досить малий: $\sim 1^0$; очевидно він не охоплює усе небо.

Таким чином, основне питання в тому, чому причинно-незв'язані області на небі мають майже однакову температуру?

2. Критичні параметри рівняння стану космологічної рідини. Як бачимо, в обох розрахунках (при розгляді і проблеми горизонту, і проблеми площинності) особливу роль відіграє значення $w = -1/3$. Можна назвати його біфуркаційним у тому розумінні, що в околі цього значення маємо розв'язки з

різною фізичною поведінкою. Дійсно, при $-1 < w < -1/3$ інтеграл $\int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}$ в (5.28)

розбігається на нижній межі, тому, вибираючи t_1 досить малим, можна добитися, щоб розмір причинно-зв'язаної області (спостережуваний розмір горизонту) був досить великим, принаймні охоплював усе небо. Чим ближче w до -1 , тим більше буде цей розмір для фіксованих t_1, t . За $w = -1$ матимемо експоненційний режим типу (5.24). Таким чином, для розв'язання проблеми горизонту треба придумати таку модель, яка б давала ефективне рівняння стану з $w < -1/3$ у перші миттєвості космологічного розширення. Звичайно, це вимагає розгляд нової фізики раннього Всесвіту.

Зазначимо, що за виконання умови $-1 < w < -1/3$ з рівняння (5.26) випливає, що масштабний фактор $a(t)$ зростає швидше за лінійну функцію від t . Це відповідає прискореному режиму розширення Всесвіту, це легко бачити також безпосередньо з (5.16).

Щодо проблеми площинності, зробимо природне припущення $\Omega(t_{Pl}) \sim 1$ і розглядаємо часи $t > t_{Pl}$. Оскільки ми розглядаємо *збільшення* $a(t)$ за $t > t_{Pl}$, тут за $-1 < w < -1/3$ з часом матимемо $\frac{4\pi G}{3}\rho a^2 \gg \frac{c^2}{2}$ за будь якого $\sigma = 1, 0, -1$. Нехтуючи $\sigma c^2/2$ в (5.17), отримаємо за $t \gg t_{Pl}$ та $-1 \leq w < -1/3$,

$$\frac{1 - \Omega(t)}{1 - \Omega(t_{Pl})} \sim \left(\frac{t}{t_{Pl}} \right)^P \ll 1 \quad .$$

Якщо припустити, що характер фізичних взаємодій забезпечує потрібне рівняння стану, матимемо, що з часом відмінність космологічної моделі від плоскої прямує до нуля. В інфляційних моделях це забезпечують, наприклад, за допомогою вибору потенціалу скалярного поля. В період швидкого роздування Всесвіту проходить розгладжування усіх флуктуацій густини та інших параметрів, що забезпечує високу однорідність спостережуваної частини Всесвіту; відбувається народження частинок. За цей період Всесвіт збільшує розміри на багато порядків. Після інфляційної стадії еволюція виходить на звичайний режим розширення гарячого Всесвіту з ультра-релятивістським рівнянням стану $p = \varepsilon/3$. Докладний розгляд питань інфляційної космології можна знайти в [13, 14, 17, 19].

Ще одна критична точка в рівнянні стану: $w = -1$. Якщо у Всесвіті присутня

складова матерії з рівнянням стану $p = w\varepsilon$, $w < -1$, то з рівняння неперервності (5.18) для цієї складової випливає $\varepsilon \sim a^{2\alpha}$, $\alpha = -3(1+w)/2 > 0$, тобто з розширенням Всесвіту густина енергії зростає і вона домінує у правій частині рівняння (5.17). Звідси за великих a

$$\frac{da}{dt} = \left[\frac{8\pi G}{3} \rho(t_0) \left(\frac{a_0}{a} \right)^\alpha a^2 + \sigma c^2 \right]^{1/2} \approx A a^{1+\alpha}, \quad A > 0.$$

Розв'язок цього рівняння натрапляє на сингулярність $a(t) \rightarrow \infty$ за $t \rightarrow t_1$ для деякого скінченного t_1 . Густина енергії у цей момент є нескінченною, будь-які дві різні, навіть дуже близькі, точки відчують нескінченне відносне прискорення ("розрив Всесвіту").

Проста модель інфляції з скалярним полем Моделі з скалярним полем часто застосовують у сучасній космології завдяки їх відносній простоті. Далі працюємо планківських одиницях: $c = 1$, $\hbar = 1$, $G = 1$. Густина функції Лагранжа (лагранжіан) масивного скалярного поля $\varphi(x)$ у просторі з метрикою $g_{\alpha\beta}$ має вигляд:

$$L(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - m^2 \varphi^2) \quad (5.29)$$

Згідно з загальним принципом стаціонарної дії функціонал

$$S = \int L(\varphi, \partial\varphi) \sqrt{-g} d^4x$$

має рівну нулю першу варіацію на "правильних" польових функціях. Ця умова приводить до рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi_{,\alpha}} = 0, \quad \tilde{L} = \sqrt{-g} L \quad (5.30)$$

Тоді приходимо до хвильового рівняння у вигляді

$$(D + m^2)\varphi = 0, \quad (5.31)$$

де $D\varphi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} \right]$ – коваріантний оператор д'Аламбера.

Тензор енергії імпульсу (ТЕІ) негравітаційного поля з лагранжіаном L має вид [2, 3]

$$T_{\alpha\beta}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial g^{\alpha\beta}_{,\mu}} \right) \right\} \quad (5.32)$$

Для скалярного поля він приймає вигляд:

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} (\varphi_{,\sigma} \varphi_{,\tau} g^{\sigma\tau} - m^2 \varphi^2) g_{\alpha\beta} \quad (5.33)$$

Можна перевірити прямим обчисленням з врахуванням явного вигляду (5.33) та рівняння поля (5.31), що у такому вигляді ТЕІ дійсно задовольняє коваріантному закону збереження $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$.

У однорідному та ізотропному Всесвіті поле φ може залежати лише від космологічного часу $\varphi \equiv \varphi(t)$. Тоді легко отримати, що

$$T_{00} = \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 g^{00} - m^2 \varphi^2] g_{00} = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 + m^2 \varphi^2] \quad (5.34)$$

$$T_{ii} = -\frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 g^{00} - m^2 \varphi^2] g_{ii} = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 - m^2 \varphi^2] g_{ii}, \quad (5.35)$$

$i = 1, 2, 3.$

Згадаємо, що ТЕІ ідеальної рідини має вигляд:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \varepsilon) U_\alpha U_\beta - p g_{\alpha\beta} \quad (5.36)$$

тобто для метрики 5.15

$$T_{00} = (p + \varepsilon) - p = \varepsilon, \quad T_{ii} = p g_{ii}.$$

Таким чином, порівнюючи (5.34), (5.35) з (5.36) бачимо, що скалярне поле можна формально розглядати як ідеальну рідину з густиною енергії

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 + m^2 \varphi^2]$$

та тиском

$$p = \frac{1}{2} [(\dot{\varphi})^2 - m^2 \varphi^2]$$

Хвильове рівняння (5.31) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0 \quad , \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad . \quad (5.37)$$

Подальший розгляд вимагає спільного аналізу рівнянь (5.37) та рівняння Фрідмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \varepsilon - \frac{k}{a^2}, \quad k = 0, 1, -1. \quad . \quad (5.38)$$

Режим повільного скочування. Рівняння (5.37) має вигляд рівняння осцилятора зі змінним тертям. Як відомо, за великого тертя замість коливань має місце "в'язка" поведінка осцилятора, коли він монотонно скочується до положення мінімуму у потенціальній ямі $\sim m^2\varphi$. У випадку рівняння (5.37) такий режим скочування можливий, доки виконується умова

$$H \gg m, \quad (5.39)$$

причому внеском другої похідної за часом в (5.37) можна знехтувати:

$$\dot{\varphi} = -\frac{m^2}{3H}\varphi \quad . \quad (5.40)$$

Згідно до (5.39) маємо

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{m^4}{9H^2}\varphi^2 \ll m^2\varphi^2, \quad (5.41)$$

тоді

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[(\dot{\varphi})^2 + m^2\varphi^2 \right] \approx \frac{1}{2} m^2\varphi^2 \approx -p,$$

або

$$p \approx -\varepsilon,$$

тобто ефективне рівняння стану відповідає умові $w < -1/3$, за якої виникає можливість обійти проблеми горизонту та площинності. З рівняння (5.38)

$$H^2 \approx \frac{4\pi}{3} m^2\varphi^2 - \frac{k}{a^2}, \quad (5.42)$$

Природно припустити, що, що величини $H \sim \sqrt{\varepsilon}$ на початку розширення $t = t_1$ були дуже великими. При цьому можливо, що величини $\varepsilon(t_1)$ та $1/a^2(t_1)$ були одного порядку, тобто Всесвіт міг бути як відкритим, так і замкненим. З умови (5.39) та рівняння Фрідмана (5.38) у цей момент маємо $m^2\varphi^2 \sim H^2 \gg m^2$, звідки $\varphi(t_1) \gg 1$ (де ми вважаємо, для простоти, $\varphi(t_1)$ додатним).

Оскільки умова (5.41) відповідає режиму розширення темної енергії з $p \approx -\varepsilon$; тоді з рівнянь гідродинаміки маємо $\varepsilon = const$, $H \approx const$, при цьому масштабний фактор експоненційно збільшується: $a(t) \sim exp(Ht)$. Цей режим називають експоненційною інфляцією (роздуванням). За великого $H \approx const$ зростання $a(t)$ відбувається дуже швидко; причому на масштабі декількох планківських часів доданком з k у рівнянні (5.38) можна знехтувати і космологічна еволюція відбувається як у випадку просторово-плоского Всесвіту. Зокрема, завдяки швидкому збільшенню $a(t)$ нерівність $\varepsilon \gg 1/a^2$ протягом режиму скочування підсилюється, а це еквівалентно $\Omega(t) - 1 \rightarrow 0$. Тоді розгляд еволюційних рівнянь (5.40, 5.42) значно спрощується. Маємо з (5.42)

$$H^2 \approx \frac{4\pi}{3} m^2\varphi^2 \quad . \quad (5.43)$$

тоді з (5.40)

$$\dot{\varphi} = -\frac{m}{\sqrt{12\pi}} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(t_1) - \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t - t_1).$$

Протягом часу $\tau \sim 0.1\varphi(t_1)/m$ працює режим скочування, поле та густина енергії залишаються практично незмінними. Оцінки показують, що, при відповідному виборі параметрів задачі, цього часу виявляється досить, щоб забезпечити таку ступінь роздування, яка із великим запасом може забезпечити вирішення проблем горизонту та площинності.

Bibliography

5.5. *Література до розділу 5*

- [1] С. Вейнберг. Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.– 696 с.
- [2] Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной. – Изд.-во ИЯИ РАН, 2007. – 457 с.
- [3] А.Д. Долгов, Я.Б. Зельдович, М.В. Сажин. Космология ранней Вселенной. – Изд-во МГУ, 1988. – 199 с.
- [4] В.І. Жданов. Вступ до теорії відносності. – К.:ВПЦ "Київський університет", 2008 –287 с.
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
- [6] А.Д. Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990. – 275 С.
- [7] Я.С. Яцків, О.М. Александров, І.Б. Вавилова, В.І. Жданов, Ю.М. Кудря, С.Л. Парновський, Е.О. Федорова, С.В. Хміль. Загальна теорія відносності: випробування часом.– К., ГАО НАН України, 2005.
- [8] Weinberg S. Cosmology. – Oxford: Oxford University Press, 2008. – 593 p.

Топологічні дефекти у Всесвіті

Топологічним дефектом називають розв'язок рівнянь теорії поля або, взагалі, розв'язок деяких рівнянь математичної фізики, що є гомотопічно¹ відмінний від деякого тривіального (вакуумного) розв'язку. У космології топологічні дефекти можуть виникати в результаті певних біфуркацій ефективного потенціалу деякого фундаментального поля (наприклад, скалярного або сукупності декількох таких полів), параметри якого (середня густина, температура тощо) змінюються при розширенні Всесвіту. При таких змінах структура мінімумів потенціалу може мінятися: якісь мінімуми зникають, якісь з'являються. Складність таких змін залежить від числа компонент поля чи кількості полів, що входять у вираз для лагранжіану поля.

6.1. Механізм Кіббла

Як зазначено вище, на масштабі космологічного часу менше 10^{-30} секунди на еволюцію Всесвіту повинні були впливати космологічні поля, що не входять до стандартної моделі елементарних частинок. Оскільки експериментальних даних щодо цього періоду немає, простір для теоретичних спекуляцій є дуже широким. Але певні ідеї та результати якісного характеру можна проілюструвати на відносно простих моделях з скалярним полем.

Розглянемо густину функції Лагранжа, що узагальнює формулу (5.29) на випадок потенціалу $U(\varphi)$

$$L(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - U(\varphi) \quad (6.1)$$

Нехай у точці $\varphi = \varphi_0$ потенціал має мінімум. Уведемо нове поле $\psi = \varphi - \varphi_0$. В околі мінімуму потенціалу $U \approx m^2\psi^2$, де $m^2 = 2U''(\varphi_0)$ і задача зводиться до вивчення звичайного масивного скалярного поля з лагранжіаном (5.29). Але для значних відхилень від точки $\psi = 0$ можливі інші мінімуми, тобто інші рівноважні

¹Дві неперервні функції називають гомотопними, якщо одну з них можна деформувати в іншу неперервним чином.

стану поля. Рівноважний стан з найменшою енергією називають вакуумним. Існування декількох рівноважних станів поля з однаковими абсолютними мінімумами потенціалу є типовою за наявності певних симетрій. Ці мінімуми рівноправні і поле з рівною ймовірністю може опинитися у будь-якому мінімумі.

У задачі багатьох тіл розглядають фонове поле, що описує усереднений стан багаточастинкової системи. На фоні цього поля можна вводити збурення, що описують окремі частинки, з лагранжіаном типу (6.1) чи більш складним, для більш складного набору полів. Таким чином приходимо до задач з потенціалом $U(\varphi)$, що може залежати від різних параметрів, які змінюються з космологічним часом. З цим пов'язаний механізм Кіббла утворення топологічних дефектів як наслідок фазового переходу в середовищі, що охолоджується [3, 4]. Суттєвими для цього механізму є дві обставини: (i) при змінах фонового поля відбувається перебудова ефективного потенціалу, внаслідок чого з'являються нові рівноправні мінімуми; (ii) у Всесвіті існують причинно незв'язані області, в яких поле є цілком незалежним (незкорельованим) і перехід в різні мінімуми відбувається незалежним чином. Перша умова є типовою для виникнення фазових переходів, що часто зустрічаються, наприклад, у фізиці твердого тіла, і є наслідком наявності симетрій. Умова (ii) виконується в Λ CDM-моделі для областей на відстані більших за $\sim t$, де t – космологічний час з початку розширення від космологічної сингулярності. Виконання цих умов забезпечує появу специфічних конфігурацій поля – топологічних дефектів.

Відразу зазначимо, що міркування, які пояснюють механізм Кіббла, є вельми загальними, але в інфляційній космології розширення Всесвіту відбувається так швидко, що причинно незв'язані області опиняються дуже далеко, "за горизонтом". Тому топологічні дефекти, якщо вони дійсно існують і виникли в доінфляційну еру, не обов'язково є спостережуваними. Тим не менш, космологічні фазові переходи могли відбуватися і пізніше, а незкорельовані області фундаментального поля можливі і на менших відстанях. Тому розгляд космологічних дефектів (струн, текстур тощо) є важливою частиною сучасної космології.

Повернемося знов до лагранжіану (6.1). Поле у стані з вищою густиною енергії, якій відповідає більшому значенню ефективного потенціалу, може перейти в один з багатьох еквівалентних станів з найнижчою енергією, які вважають вакуумними². Такий перехід є типовим для спонтанного порушення симетрії. При цьому лагранжіан поля та усі рівняння руху, а також і початковий стан системи (який, як будемо умовно вважати, відповідає нульовому значенню поля) є інваріантними відносно певної групи перетворень; але за певних значень параметрів цей стан стає нестійким і система опиняється в мінімумі, де ця симетрія порушена. На Рис. 6.1 показано потенціал $V(\phi) = \lambda(\phi^2 - \eta^2)^2$, $\eta \neq 0$, – він описує систему, якій притаманна симетрія відносно перетворення $\phi \rightarrow -\phi$. Функція $V(\phi)$ має два стійких мінімуми, розташовані симетрично відносно початку координат; цим мінімумам відповідають

²Сукупність значень поля, за яких потенціал приймає мінімально можливе значення, називають вакуумним многовидом.

частинки з масою $m = 2\sqrt{2m\eta}$. Якщо система у початковий момент була у стані $\phi = 0$, що відповідає умові симетрії $\phi \rightarrow -\phi$, але є нестійким, з часом ця система опиняється в одному з мінімумів, де симетрія порушена. Подібні приклади добре відомі з теорії твердого тіла, коли йдеться про енергію взаємодії магнітних моментів у феромагнетику. Для невеликих розмірів, коли можна знехтувати внеском доменних стінок, енергетично більш вигідним є стан, коли усі магнітні моменти домена мають один і той самий напрямок (хоча він і вибирається довільним чином), що на Рис. 6.1 відповідає $\phi = \eta$. Нагрівання феромагнетика відновлює симетрію, усі магнітні моменти орієнтовані хаотично. Можна придумати модель, де потенціал залежить від температури (через фонове поле тощо), причому за дуже високих температур потенціал має один стійкий мінімум $\phi = 0$ (відновлення симетрії), а при зниженні температури нижче деякого значення, характерного для фазового переходу, з'являються мінімуми при $\phi \neq 0$. Такий перехід – це біфуркація сідло-вузол (див. Рівняння (3.54), п. 3.6). Так виникають області з різними значеннями поля, що відповідають різним мінімумам. У випадку, показаному на Рис. 6.1 поле в різних просторових областях може випадково попасти або в мінімум $\phi = \eta$, або $\phi = -\eta$, тоді між цими областями виникає проміжна область підвищеної енергії – доменна стінка. Існування такої області має топологічний характер, оскільки це є наслідком неперервності ϕ як функції від координат. Тому проміжну область називають топологічним дефектом.

Топологічні міркування відіграють основну роль і в іншій моделі [2]

$$L(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}^* - U(\phi), \quad (6.2)$$

де $V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - \eta^2)^2$, $\eta \neq 0$ є дійсним, $\phi = |\phi|e^{i\alpha}$. Комплексне скалярне поле еквівалентне парі дійсних полів $\phi_1 = \mathbf{Re} \phi$, $\phi_2 = \mathbf{Im} \phi$; у просторі дійсних змінних $\{\phi_1, \phi_2, V\}$ потенціал має форму "мексиканського сомбреро". Якщо поле ϕ мало нульове початкове значення (нестійкий стан), воно з рівною ймовірністю може перейти у стійкі стани з однаковими $|\phi| = \eta$, але з різними (незалежними у віддалених просторових точках) α . Здавалося б, що, що поле перейде у стани $|\phi| = \eta$ в усьому реальному \mathbf{x} -просторі. Це дійсно так для більшості точок \mathbf{x} , але також існуюватимуть точки \mathbf{x}_0 , де $\phi(\mathbf{x}_0) = 0$, де потенціал приймає значення локального максимуму $V(0)$. Це впливає з неперервності функції $\phi(\mathbf{x})$ на основі таких міркувань.

Існує ненульова ймовірність, що стани $|\phi| = \eta$ з різними α реалізуються для різних положень вздовж замкненої кривої Γ ,

$$\Gamma : [0, 1] \rightarrow R^3 : s \rightarrow \mathbf{x}(s); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1),$$

причому ця крива охоплює початок координат. Уздовж замкненої кривої Γ маємо $\phi(\mathbf{x}(s)) = \eta \exp(i\alpha(s))$, $\phi(\mathbf{x}(0)) = \phi(\mathbf{x}(1))$. Функція $\alpha = \mathbf{Arg} \phi$ є локально-неперервною функцією ϕ усюди, де $\phi \neq 0$. Тому $\alpha(s)$ також неперервна на $[0, 1]$, причому $\alpha(\mathbf{x}(0)) = \alpha(\mathbf{x}(0)) + 2\pi n$, де $n \neq 0$ – ціле число обертів образу кривої $\Gamma(\phi)$:

$s \rightarrow \phi(\mathbf{x}(s))$ на площині $\{\phi_1, \phi_2\}$ навколо початку координат. При деформаціях кривої Γ число n не зміниться завдяки неперервності, за винятком випадку, коли деформована крива перетне початок координат $\phi = 0$. Але криву можна деформувати таким чином, щоб вона стягнулася у точку, тоді слід покласти $n = 0$, що суперечить припущенню $n \neq 0$. Звідси, від протилежного, випливає, що у деякій точці \mathbf{x}_0 матимемо $\phi(\mathbf{x}_0) = 0$ з потенціалом $V(\phi(\mathbf{x}_0))$. Ці наглядні міркування ілюструє Рис. 6.1; їх можна зробити цілком строгими за допомогою поняття індексу особливої точки векторного поля [6]. Рівність $\phi(\mathbf{x}_0) = 0$ означає рівність уявної та дійсної частини: $\phi_1(\mathbf{x}_0) = 0$ та $\phi_2(\mathbf{x}_0) = 0$. За досить загальних умов звідси випливає, що у реальному тривимірному \mathbf{x} -просторі існує одновимірна крива $\mathbf{x}_s(p)$, яка задана комплексним рівнянням $\phi(\mathbf{x}) = 0$ і проходить через \mathbf{x}_0 . У типових моделях переріз околу цієї кривої, де потенціал $V(\phi)$ суттєво відрізняється від вакуумного значення $V(\eta)$, є дуже малим, тому цю область часто розглядають як одновимірний об'єкт – космічну струну.

Космічні струни привертають значну увагу в космології [5]. Вони можуть бути надпровідними і містити сильний електричний струм. При перезамиканні двох струн утворюється касп, електричне поле якого може прискорювати заряджені частинки до енергій $10^{21} \div 10^{22}$ eV; тому космічні струни розглядають як ймовірне джерело космічних променів найвищих енергій.

Зазначимо, що струни і доменні стінки можна моделювати в лабораторних умовах за допомогою ефектів, що виникають у твердих тілах, коли енергетичні характеристики суцільного середовища (наприклад феромагнетика) відповідають механізму Кіббля. У більш загальному випадку топологічні дефекти можуть мати характеристики ранньої (гарячої) фази та різну розмірність. Наприклад, окрім струн та доменних стінок, можливі "нуль-вимірні" точкові дефекти, які можуть мати магнітний заряд – магнітні монополі. У космології раннього Всесвіту топологічні дефекти розглядають як можливу складову небаріонної темної матерії. Але спостереження анізотропії реліктового випромінювання [9] дають суттєве обмеження на густину космічних струн, отже їх вплив на формування структури Всесвіту, якщо він взагалі є, незначний.

6.2. Текстури та їх космологічна еволюція

Узагальнюючи попередній розгляд можна зробити такі висновки.

- Якщо вакуумна множина M є незв'язною, утворюються доменні стінки. Це відбувається при порушенні дискретних симетрій (приклад розглянуто вище для дійсного скалярного поля).
- Якщо M містить контури, не гомотопні нулю³, утворюються струни (приклад розглянуто вище для комплексного скалярного поля.).
- Якщо вакуумна множина M містить звичайні 2-вимірні сфери, що не стягуються в точку, виникають точкові монополі. Це можливо для 3-компонентного поля.

³Тобто не стягуються в точку без виходу з M

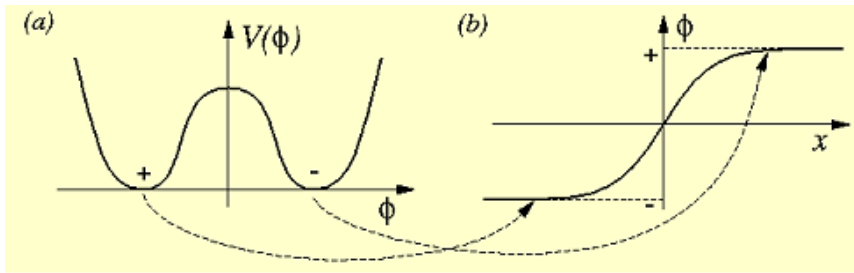


Figure 6.1: Доменні стінки можуть виникати якщо потенціальна енергія поля має два або більше відокремлених мінімуми. Стінка розділяє області простору з різними вакуумними значеннями скалярного поля. На самій стінці поле приймає проміжні значення, що відповідають більшій енергії (більшому значенню потенціалу). Рис. 6.1, 6.2 і 6.3 взяті з монографії [10]; Фіг. 3.1, 3.2 і 3.5 відповідно.

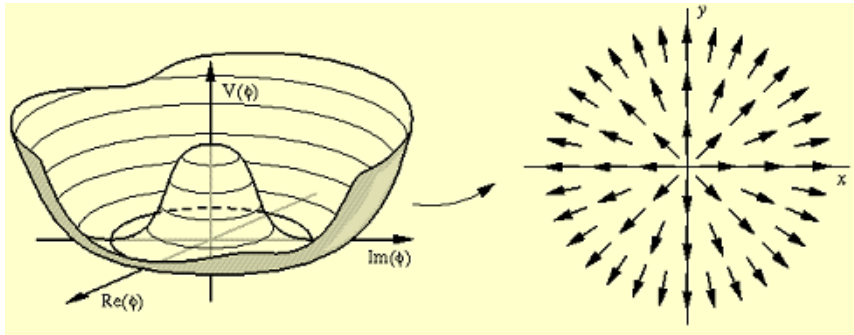


Figure 6.2: Механізм утворення космічної струни може бути проілюстрований на прикладі двокомпонентного скалярного поля. У даному прикладі поле має нескінченно багато вакуумних станів, які реалізуються у реальному просторі вздовж замкнутого контуру (кола). Тоді всередині контуру має існувати точка, в якій густина енергії поля має максимум. Перенос цієї точки вздовж третьої координатної осі просторових координат приводить до космічної струни.

- Якщо M містить 3-вимірні сфери, що не стягуються у точку в просторі чотирьох компонент поля, виникає ще один тип дефектів – текстур. Можна також навести приклади текстур меншої розмірності.

Специфіка текстур полягає в тому, що тут мінімум потенціалу може досягатися *в усіх точках простору* (немає точок, де потенціал досягає локального максимуму); тим не менш розв'язок рівнянь поля не є гомотопним тривіальному розв'язку, що пов'язано з певними граничними умовами. Енергія текстури залежить від

градієнту енергії поля, яке не є константою.

Наведемо приклад двохкомпонентного поля $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, заданого на прямій $x \in (-\infty, \infty)$, з граничною умовою $\Phi(-\infty) = \Phi(\infty)$ та потенціалом

$$V(\Phi) = \frac{1}{4}\lambda(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - \eta^2)^2. \quad (6.3)$$

Вакуумною множиною є поля, для яких $|\Phi(x)| = \eta$, тобто $\Phi(x) = \eta e^{i\alpha(x)}$. Якщо вибрати $\alpha(x)$ таким чином, щоб вектор $\Phi(x)$ робив один чи декілька обертів на площині Φ_1, Φ_2 при зміні x (Рис. 6.2, верхній), це поле не буде гомотопним до поля $|\Phi(x)| = \text{const}$.

Аналогічний приклад текстури для трикомпонентного поля, заданого на площині, показано на нижньому Рис. 6.2.

Текстура являє собою нестійкий розподіл збуреного поля, що схильний до колапсу [8]. В результаті колапсу може утворитися магнітний монопол. Хоча текстури не можуть існувати у сучасному Всесвіті, у далекому минулому їх колапс міг вплинути на формування структур баріонної речовини і на флуктуації реліктового випромінювання [7].

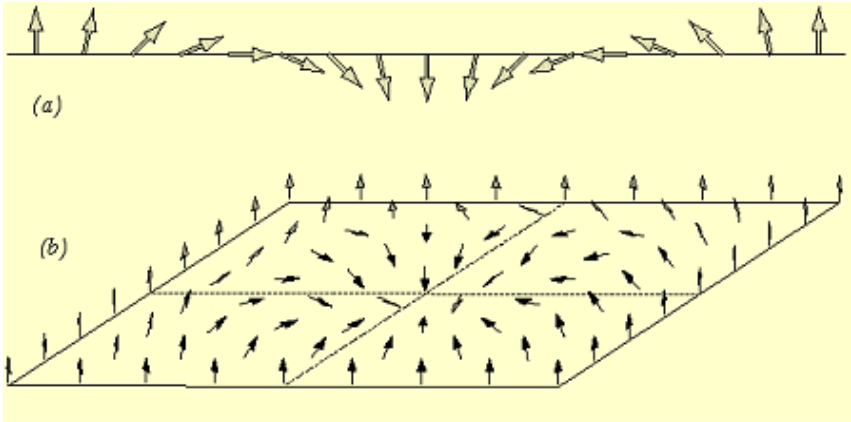


Figure 6.3: Приклади нелокалізованих конфігурацій текстур в одному і двох вимірах.

При розгляді текстур часто наводять приклад чотирикомпонентного поля Φ з потенціальною енергією

$$V(\Phi) = \frac{1}{4}\lambda(\Phi_i\Phi_i - \eta^2)^2, \quad (6.4)$$

де по індексах $i = 1, 2, 3, 4$, що повторюються, береться сума. В цій моделі симетрія $SO(4)$ зазнає спонтанного порушення до $SO(3)$. Вакуумний многовид $\Phi_i\Phi_i = \eta^2 \neq$

0 є 3-сферою і може бути параметризований трьома кутами:

$$\Phi_i = \eta(\sin \chi \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}, \sin \chi \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi}, \sin \chi \cos \tilde{\theta}, \cos \chi) \quad (6.5)$$

Звуження дії поля на вакуумний многовид (3-сферу) приводить до так званої сигма-моделі

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} G_{AB}(\phi) \partial_\mu \phi^A \partial^\mu \phi^B \quad (6.6)$$

де

$$G_{AB}(\phi) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi^A} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi^B}$$

– метрика вакуумного многовиду M і g – визначник метрики простору-часу [10].

Початкова конфігурація текстур встановлюється при фазовому переході коли скалярне поле Φ досягає вакуумного значення. Φ приймає значення з вакуумного многовиду M і обходить M нетривіальним шляхом на масштабах більше кореляційної довжини. Подальша еволюція визначається нелінійною динамікою поля Φ . У Всесвіті, що розштрюється, топологічні «вузли» текстур колапсують з релятивістськими швидкостями. Коли градієнт енергії стає достатнім для того, щоб поле Φ подолато потенціальний бар'єр, вся енергія текстури іде на народження з вакууму частинок — так званих голдстоунівських бозонів. В результаті кореляційна довжина Φ швидко зростає майже до масштабу горизонту і далі продовжує зростати з ним. В такому режимі текстурні вузли колапсують і розсипаються з фіксованою швидкістю в межах горизонту за хаблівський час

$$\frac{dn}{dt} \approx k d_H^{-4} \quad (6.7)$$

де $k=0.04$ – константа, що визначається топологією фазового простору Φ .

В еру випромінювання поле текстур з кореляційною довжиною $d_H = 2t$ має густину енергії $\rho_T = \eta^2/d_H^2$, яка залишається фіксованою часткою повної густини

$$\frac{\rho_T}{\rho} \sim 8G\eta^2 \quad (6.8)$$

Більшість цієї енергії перетворюється у безмасові голдстоунівські бозони за хаблівський час. Голдстоунівські бозони зазнають червоного зміщення, як і електромагнітне випромінювання.

В еру домінування речовини густина голдстоунівських бозонів спадає швидше фонової густини. Сила взаємодії голдстоунівських бозонів обернено пропорційна масштабу порушення симетрії і для великих значень фон голдстоунівських бозонів практично неможливо спостерігати.

6.3. Вплив текстур на реліктове випромінювання.

Гравітаційні поля текстур можуть суттєво порушити ізотропію реліктового випромінювання. Довжина когерентності поля текстур дорівнює хаблівській довжині d_H і флуктуація

густини, що викликається текстурами на будь-якому масштабі при перетині горизонту, може бути безпосередньо оцінена з (6.8),

$$(\delta\rho/\rho)_H \sim 8G\eta^2 \quad (6.9)$$

Слід очікувати, що флуктуації температури реліктового випромінювання будуть такої ж величини.

$$\delta T/T \sim (\delta\rho/\rho)_H \sim 8G\eta^2 \quad (6.10)$$

Окрім гаусівських флуктуацій, обумовлених випадковими відмінностями Φ на масштабах горизонту, розподіл температури буде мати характерні риси, що створюються колапсуючими вузлами текстур. При розсіянні фотона в гравітаційному полі сферичної текстури, що колапсує, його зсув частоти відповідає флуктуації температури

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\pi \epsilon t_0}{(t_0^2 + 2r_0^2)^{1/2}} \quad (6.11)$$

Де t_0 і r_0 – час і відстань найбільшого наближення фотона до центру колапсу, для якого покладається $t = r = 0$. Фотони, що досягають найбільшого зближення до колапсу мають червоне зміщення, а ті, що досягають його після колапсу мають блакитне зміщення. Першій групі фотонів доводиться виходити з потенційної ями текстури, що колапсує, тоді як друга група фотонів потрапляє до оболонки випромінювання голдстоунівських бозонів, що розширюється.

Отже, текстури, що колапсують, мають бути видимі як холодні або гарячі плями на карті реліктового випромінювання. Щоб оцінити кількість таких плям доцільно використати супутні координати і конформний час. Використовуючи співвідношення $d_H = a(t)t$, ми можемо переписати швидкість колапсу текстури (6.7) як

$$\frac{dn_c}{d\tau} \approx \kappa\tau^{-4} \quad (6.12)$$

Де n_c – концентрація вузлів текстур у супутньому об'ємі. Кількість плям знаходиться шляхом інтегрування (6.12) вздовж хвильового фронту фотона назад до деякого червоного зміщення. Припускаючи, що частка текстур, що колапсують на горизонті, дорівнює β_τ , отримуємо

$$N(z) = \int_{\tau_z}^{\tau_0} d\tau 4\pi(\tau_0 - \tau)^2 \beta_\tau \left(\frac{dn_c}{d\tau} \right) \approx 2\pi\kappa\beta \left(\frac{\tau_0}{\tau_z} \right)^2 \approx 0.2\beta z \quad (6.13)$$

Тут τ_0 – теперішній конформний час і робиться припущення, що $z \gg 1$. Параметр $\beta < 1$ враховує той факт, що модель сферичного колапсу і вираз (6.11) для флуктуацій температури застосовуються лише для кінця колапсу. Типовий кутовий розмір холодних і гарячих плям, що викликаються колапсом текстур на червоному зміщенні, є $\beta z^{-1/2}$ радіан. Максимальна флуктуація температури в центрі плями є $\delta T/T = \pi\epsilon$. Плями з розподілом (6.13) мають виникати на всіх червоних зміщеннях,

аж до поверхні останнього розсіяння. Наприклад, при $z=40$, (6.13) передбачає існування 10 гарячих (і холодних) плям з кутовими розмірами 10 градусів.

Чисельна модель розподілу реліктового випромінювання на основі сигма-моделі еволюції текстур була вперше побудована Беннетом і Рі в 1993 році. Згладження цієї моделі на масштабі 10 градусів і вище дає гаусівський розподіл флуктуацій температури. При кращому розділенні можливо виявити плями від колапсу вузлів текстур. Середньоквадратична флуктуація температури

$$(\delta T/T)_{rms} = (10 \pm 1)G\eta^2 \quad (6.14)$$

і спектр потужності ідентичний спектру первинних флуктуацій густини Гаррісона-Зельдовича (плоский спектр без виділеного масштабу). Якщо спостережувані флуктуації реліктового випромінювання викликаються текстурами, має бути

$$\varepsilon = (2.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-5} \quad (6.15)$$

6.4. Текстури і великомасштабна структура.

Неоднорідне поле текстур з довжиною когерентності порядку хаблівського радіусу d_H створює флуктуації густини матерії на масштабі горизонту. Частина амплітуди флуктуацій при перетині горизонту є масштабно інваріантною і задається виразом (6.9). На масштабах більше горизонту флуктуації густини текстур врівноважуються флуктуаціями густини матерії. Це наслідок збереження енергії при утворенні текстур — текстури є флуктуаціями постійної кривини. На масштабі горизонту, оскільки моди текстур з довжиною хвилі порядку d_H починають еволюціонувати з релятивістськими швидкостями, енергетичний баланс порушується і флуктуації густини матерії залишаються незмінними. В результаті глобального порушення симетрії утворюється спектр у формі (6.9). Таким чином, флуктуації густини, створені текстурами, могли б відповідати за утворення структури Всесвіту.

Колапс вузлів текстур призводить до зростання ізольованих піків у полі густини. Знайдемо профіль густини матерії в таких піках, припускаючи, що у Всесвіті переважає холодна темна матерія. У випадку сферично-симетричного колапсу текстури пробні частинки досягають доцентрової швидкості $v = \pi\varepsilon$, де $\varepsilon = 8\pi G\eta^2$. Якщо ρ_0 — початкова густина частинок, маса речовини всередині супутнього радіуса r є $M = 4\pi\rho_0 r^3/3$. Фізичний радіус сфери є $R = r - \pi\varepsilon t$, де t - час після колапсу вузла. Профіль густини може бути знайдений таким чином

$$\rho(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dR} = \rho_0 \left(1 + \frac{\pi\varepsilon t}{R}\right)^2 \quad (6.16)$$

Отже безрозмірна флуктуація густини дорівнює

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{2\pi\varepsilon t}{R} \quad (6.17)$$

Розподіл маси обмежених об'єктів, що утворюються при колапсі вузлів, був обчислений в 1991 з використанням швидкостей колапсу текстури (6.12) і (6.17). В наш час основним шляхом вивчення утворення структури під впливом текстур є чисельні моделювання. У 1990-х роках були проведені моделювання, в яких комбінувалися моделі еволюції текстур і скупчування N тіл у Всесвіті з домінуванням холодної темної матерії, а також включені гідродинамічні і дисипативні ефекти.

Лінійна еволюція флуктуацій густини, що викликаються текстурами у сигма-моделі, дає такі ж результати, як і космологічна модель розподілу монополів. Для (6.9) флуктуації густини на масштабі 8 Мпк в сучасну епоху лежать в межах від 0.25 до 0.4, залежно від параметра Хаббла. Ця величина може бути узгоджена з значенням $\delta\rho/\rho \approx 1$, що отримується за підрахунками галактик, якщо галактики зазнають набагато сильнішого скупчування ніж розподіл маси. Параметр зсуву (відношення флуктуацій всієї матерії до видимої) необхідний для врахування цієї різниці дорівнює 2.5 для $h=1$ і 4 для $h=0.5$. Таке велике значення параметра зсуву в сценарії текстур отримується у різних наближеннях і вказує на те, що спостереження реліктового випромінювання не можуть поки дати чітких обмежень на параметри реальних космічних текстур.

Bibliography

6.5. Література до розділу 6

- [1] Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва. Москва. 2006.
- [2] Goldstone, J. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cimento* V. 19, p. 154–164 (1961)
- [3] Durrer, R.; Kunz, M.; Melchiorri, A. Cosmic structure formation with topological defects. 2002. *Physics Reports*, Volume 364, Issue 1, p. 1-81. (arXiv:astro-ph/0110348)
- [4] Gangui A. Topological defects in cosmology. *Lecture Notes for the First Bolivian School on Cosmology*, La Paz, 24-28 September, 2001. 78 pp. (arXiv:astro-ph/0110285)
- [5] Hindmarsh, M. B.; Kibble, T. W. B. Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics*, Volume 58, Issue 5, pp. 477-562 (1995). (arXiv:hep-ph/9411342)
- [6] Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963. 248С.
- [7] Durrer R. Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory: A General Study and It's Application to the Texture Scenario of Structure Formation. *Fundamentals of Cosmic Physics*, 1993, Volume 15: No. 3, pp. 209-339. (arXiv:astro-ph/9311041)
- [8] Barabash O.V., Shtanov Yu.V. Collapse of topological texture. *Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology)*, Volume 58, Issue 8, P. 5015. 1998. (arXiv:hep-ph/9807291)
- [9] PlanckCollaboration; Ade,P.A.R.; Aghanim,N.; Armitage-Caplan,C.; Arnaud,M.; Ashdown,M.; Atrio-Barandela,F.; Aumont,J.; Baccigalupi,C.; Banday,A.J.; and 218 coauthors. Planck 2013 results. XXV. Searches for cosmic strings and other topological defects. ArXiv: 1303.5085. 20 pages.
- [10] Vilenkin A., Shellard E.P.S. Cosmic strings and other topological defects. 1994. Cambridge University Press. 534 pages.

Критичні параметри холодних зір

7.1. Кінцеві стадії еволюції зір

В рівноважному стані зорі тиск усередині її протидіє силам гравітаційного стиснення. В звичайних, гарячих, зорях необхідний тиск пов'язаний з високою температурою, яку забезпечують ядерні реакції. Коли ядерне паливо використане, тиск визначається іншими факторами, не пов'язаними з температурою. Такі зорі умовно вважають холодними (хоча насправді температура в них може сягати десятків тисяч градусів). Можна виділити три типи холодних зір: білі карлики, нейтронні зорі та чорні діри¹. Останні, строго кажучи, не є зорями у звичайному розумінні; це нестаціонарні об'єкти, хоча у багатьох випадках для їх опису використовують стаціонарні розв'язки рівнянь Ейнштейна.

Базовим параметром зорі є її маса, яку зручно подавати у масах Сонця $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$. Цікаво, що за порядком величини цю масу можна записати через просту комбінацію фундаментальних констант – маси протона m_p і планківської маси $(c\hbar/G)^{1/2}$:

$$M_0 = \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{c\hbar}{G} \right)^{3/2} \approx 1.9 M_{\odot}. \quad (7.1)$$

Граничною масою білих карликів, що не обертаються, є $1.44 M_{\odot}$ (границя Чандрасекара, див. далі). Маса нейтронної зорі має бути не більше $3 \div 5 M_{\odot}$; більшу масу може мати тільки чорна діра.

На відміну від білих карликів, які можна спостерігати в оптичному діапазоні, та нейтронних зірок, які, як правило, швидко обертаються і є пульсарами², чорні діри побачити дуже важко. Спостережні дані про чорні діри можна отримати

¹До цієї класифікації можна додати так звані "коричньові карлики", або "субзорі", що займають проміжне положення між звичайними зорями та великими планетами типу Юпітера. Вони мають масу від сотих до десятих часток від M_{\odot} . Хоча у цих об'єктах йдуть ядерні реакції синтезу, але внесок цих реакцій у теплові ефекти малий – у порівнянні зі звичайними зорями, причому коричньові карлики швидко остигають і перетворюються на планетоподібні тіла. Популяція коричньових карликів дуже численна, але внесок її у середню густину маси зірок незначний.

²тобто є джерелами періодичних імпульсів електромагнітного випромінювання

лише за наявності інших зір чи речовини поблизу них. В подвійних системах індикатором компактної маси може бути рентгенівське випромінювання, що виникає за рахунок перетікання газу від зірки компаньйона. При акреції речовини, що перетікає, газ розігрівається до температур³, за яких він починає випромінювати в рентгенівському діапазоні. Але рентгенівське випромінювання може виникати також і при акреції на інші види холодних зірок. Тому, щоб визначити тип компактного об'єкта, треба оцінити його масу та дослідити характеристики випромінювання.

Перелічимо основні ознаки, за якими рентгенівське джерело у подвійній системі можна вважати чорною дірою.

У випадку подвійної системи звичайних зір спектральні лінії розділяються; відсутність розділення ліній у спектрально-подвійній системі є ознакою невидимого компаньйона.

Дані про рух компаньйона у подвійній системі дають оцінку маси невидимого об'єкта. Якщо вона перевищує граничне значення для білих карликів та нейтронних зір, для холодної зорі залишається єдина можливість – це чорна діра.

Характерна довжина сплесків рентгенівського випромінювання дає змогу оцінити розміри об'єкта. Необхідною ознакою чорної діри є відсутність періодичностей, типових для випромінювання нейтронної зорі-пульсара.

Серед кандидатів у чорні діри зоряної маси, які є рентгенівськими джерелами у подвійних системах, найбільш досліджений Суг Х-1 (Лебідь Х-1). Параметри траєкторії компаньйона чорної діри (у випадку Суг Х-1 – це спектрально-подвійна зоря 9-ї зоряної величини; орбітальний період системи 5.6 днів) оцінюють за зсувом спектральних ліній, що періодично змінюється. У подвійній системі виникає рентгенівське випромінювання внаслідок акреції речовини, що перетікає на невидимий компонент. Поляриметричні вимірювання уточнюють нахил орбіти і дають оцінку маси невидимого компонента, що виявляється більшою за п'ять сонячних мас. Це дозволяє вважати невидимий об'єкт чорною дірою.

На відміну від кандидатів у чорні діри, кількість яких відносно невелика, нейтронних зір-пульсарів відкрито досить багато і в рентгенівському і в радіодіапазонах. Основні спостережні свідчення існування пульсарів такі.

Періоди повторення імпульсів від оптичних чи радіо-пульсарів досить стабільні, але повільно збільшуються із часом. Єдиним відомим механізмом, що це пояснює та узгоджується зі спостережуваними характеристиками імпульсів, може бути лише обертання компактного тіла. Кутова швидкість обертання повільно спадає через втрати енергії на електромагнітне випромінювання.

Дуже короткі періоди повторення імпульсів, починаючи від мілісекунд, свідчать про велику кутову швидкість, яка неможлива для білого карлика (розміри $\sim 10^3$ км). З іншого боку, про малі розміри джерела свідчить і мала тривалість імпульсів.

Пульсари спостерігаються як окремі джерела радіо- та оптичного випромінювання, так і в подвійних системах, де акреція речовини на невидимий компонент є

³Строго кажучи, газ, що випромінює в акреційному диску, може бути термодинамічно нерівноважним, навіть локально. У цьому випадку температура вводиться умовно, як міра середньої кінетичної енергії частинок газу.

причиною рентгенівського випромінювання. Важливою ознакою рентгенівських пульсарів є наявність періодичності у випромінюванні, що відрізняє їх від кандидатів у чорні діри.

7.2. Стійкість холодних зір

Нагадаємо міркування, що свідчать про існування граничної маси, коли холодна зоря ще може вважатися стійкою. Рівняння стану речовини у різних областях холодної зорі досить складне. Однак за малих температур і великих значень густини, типових для внутрішніх областей, основний внесок у тиск тут можна отримати за допомогою співвідношень для виродженого ідеального фермі-газу. Вперше модель виродженого електронного газу для пояснення природи білих карликів була використана Р. Фаулером. У 1931 р. С. Чандрасекар розрахував будову білого карлика з урахуванням тиску виродженого електронного газу і з'ясував, що маса білого карлика не може перевищувати приблизно $1.2M_{\odot}$. Л.Д. Ландау в 1932 р. дав більш просте пояснення чандрасекарівської границі, яке пізніше було використано для оцінки граничної маси нейтронних зір. У подальшому це значення уточнювалося; сучасне значення граничної маси білих карликів, яке називають границею Чандрасекара, складає $1.44 M_{\odot}$.

Розглянемо, за Ландау, просту модель холодної зорі, яка ілюструє якісні особливості задачі. Нехай зоря не обертається, а основний внесок у тиск забезпечують електрони, що при нульовій температурі $T = 0$ та досить великій густині речовини ρ утворюють вироджений фермі-газ. Взаємодією електронів між собою та з ядрами, а також реакціями, що можуть впливати на число ферміонів, знехтуємо.

За умови $T \approx 0$ ферміони щільно заповнюють усі можливі стани з імпульсами, меншими за абсолютною величиною від деякого максимального значення p_F (імпульс Фермі). Імпульс Фермі входить у вираз для об'ємної густини фермі-частинок $n = p_F^3 / (3\pi^2 \hbar^3)$, де враховано, що кількість спінових станів електрона дорівнює 2. Основний внесок у густину маси дають нуклони в ядрах (тобто протони та нейтрони, маса яких приблизно однакова): $\rho \approx \mu t_p n$, де μ – кількість нуклонів на один ферміон, t_p – маса протона. Звідси, нехтуючи, для грубої оцінки, неоднорідністю просторового розподілу речовини всередині зорі з масою M та радіусом R , дістанемо повну енергію фермі-газу:

$$E_F \sim \frac{cM}{\mu t_p} \left[\frac{\hbar^2}{R^2} \left(\frac{9\pi M}{4\mu t_p} \right)^{2/3} + m_F^2 c^2 \right]^{1/2}.$$

Якщо додати енергію гравітаційної взаємодії $E_g \sim -GM^2/(2R)$, легко бачити, що умова існування мінімуму повної енергії $E = E_F + E_g$ збігається з умовою додатності асимптотики останнього виразу за $R \rightarrow 0$:

$$E \sim \left[\frac{c\hbar}{\mu m_p} \left(\frac{9\pi M}{4\mu m_p} \right)^{1/3} - \frac{GM}{2} \right] \frac{M}{R}.$$

Коли цей знак додатний, існує положення стійкої рівноваги системи. Звідси маса холодної зорі має задовольняти умову $M < 3\sqrt{2\pi}\mu^{-2}M_0$, де M_0 визначено формулою (7.1).

Коли температура зорі, яка вичерпала ядерне паливо, падає, вона починає стискатися і характерний радіус зорі зменшується. За великих значень густини середня кінетична енергія електронів значно перевищує енергію електростатичної взаємодії електронів з ядрами і ця нерівність підсилюється зі зростанням густини електронів. Це виправдовує застосування моделі виродженого ідеального фермі-газу електронів.

Якщо маса холодної зорі менша за вказану граничну величину, сили тиску здатні припинити подальше зменшення R ; у противному разі стиснення продовжується. Але із зростанням імпульсу Фермі стає істотним обернений β -розпад: $p + e^- \rightarrow n + \nu$, тобто стає хибним основне припущення про незмінність числа електронів. Коли густина речовини стає порядку ядерної, основну масу зорі складають нейтрони, що також є ферміонами. У цьому випадку можна знов повторити наведені вище оцінки про існування граничної маси, поклавши $\mu = 1$. Важливо відзначити, що маса ферміона не входить в M_0 , тому маємо таку ж за порядком величину граничної маси як для білих карликів, так і для нейтронної зорі. Таким чином, для зорі з великою масою (більше декількох M_\odot) неминуче подальше стиснення, яке приймає характер катастрофічного колапсу.

Наведені міркування носять наближено-якісний характер, яке ігнорує низку фізичних факторів. Опис за допомогою ньютонівського гравітаційного потенціалу при розгляді асимптотичної поведінки колапсуючої зорі непридатний, потрібний розгляд на основі загальної теорії відносності. Важливим є врахування ефектів фізики елементарних частинок при побудові реалістичного рівняння стану за надвисоких густин. Та незважаючи на це, основні риси наведеного якісного розгляду зберігаються і в більш точній теорії. Розрахунки на основі рівняння рівноваги для білих карликів дають границю Чандрасекара [11]:

$$M_{Ch} \approx \frac{\sqrt{3\pi}}{\mu^2} M_0 \approx \frac{5.7}{\mu^2} M_\odot.$$

Основним кінцевим продуктом ядерних реакцій в зорях є залізо ($\mu = 56/26$), тоді $M_{Ch} \approx 1.2M_\odot$. Врахування ефектів нейтронізації речовини для різного хімічного складу зорі може впливати на цю оцінку в межах 10–20%. За сучасне значення граничної маси білого карлика, який не обертається, приймають 1.4 маси Сонця.

Зазначимо, що обертання зір може вносити суттєві корективи у граничну масу. Врахування енергії обертання $\sim J^2/MR^2$ якісно змінює поведінку ефективного потенціалу за $R \rightarrow 0$ і може збільшити оцінку маси у декілька разів. Певний час

вважалося, що білі карлики не обертаються, точніше, їх обертання не досить суттєве для оцінки граничної маси. Але декаду тому стали з'являтися свідчення, що це, можливо, не так. Було відкрито декілька дуже яскравих наднових типу Ia, які стали відомі як "Champagne Supernova" ("наднова шампанське")⁴. Як вважають, ці наднові могли з'явитися у результаті колапсу білого карлика із масою, що значно перевищує межу Чандрасекара; у свою чергу, таке перевищення маси може бути наслідком швидкого обертання [6]. Втім, є альтернативна гіпотеза, за якою перевищення маси може бути наслідком злиття двох білих карликів.

Перші розрахунки нейтронних зір дали максимальне значення маси $M_{n,max} < M_{\odot}$. Пізніші оцінки для різних моделей рівняння стану дали $M < M_{n,max} \approx 3.6 M_{\odot}$. Ситуацію ускладнює недостатнє знання властивостей сильних взаємодій за густин матерії порядку ядерних, оскільки важливим є врахування фізичних умов як в центрі холодної зорі, так і зовні надгустого ядра. Для отримання максимальної граничної маси, використовують в центральних областях *максимально жорстке* рівняння стану $P = P_0 + (\rho - \rho_0)c^2$ для густин, більших за $\rho_0 \sim 5 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$. Якщо в цій області припустити *нескінченно жорстке* рівняння стану $\rho \equiv \rho_0$ (що вже суперечить вимогам теорії відносності), тоді $M_{n,max} \sim 5 M_{\odot}$.

Пульсари, тобто нейтронні зорі, мають значно менші розміри, ніж білі карлики, та швидко обертаються. Теоретичні розрахунки, з яких можна оцінити граничну швидкість обертання та максимальну масу, в цьому випадку ще більше ускладнюються у зв'язку з необхідністю загальнорелятивістської постановки задачі. Тут виникає широке поле для досліджень. Однак оцінки для реалістичного рівняння стану не змінюють суттєво величину $M_{n,max}$ і дають значення мінімального періоду обертання 0.4 мс. Магнітне поле, в принципі, може впливати на оцінку маси, але поля величиною $< 10^{13} \text{ Гс}$, що спостерігаються в реальних пульсарах, для цього несуттєві.

7.3. Чорні діри

Чорні діри – відносно прості з теоретичної точки зору астрофізичні об'єкти: їх, в основному, можна описати за допомогою лише рівнянь Ейнштейна без залучення рівнянь гідродинаміки та не дуже достовірних даних про рівняння стану. Теорія чорних дір розроблена досить докладно і добре відображена в літературі. Зупинимось на найбільш важливих наслідках численних досліджень чорних дір.

Єдиним розв'язком вакуумних⁵ рівнянь Ейнштейна, який описує асимптотичний стан колапсуючої зорі з масою M та моментом обертання J , є розв'язок Керра

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) (dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} (dr)^2 - \rho^2 (d\theta)^2 + \quad (7.2)$$

⁴першим таким об'єктом, відкритим у 2003 р., була наднова SNLS-03D3bb [5]

⁵тобто за відсутності негравітаційних полів

$$+ \frac{2ar_g r}{\rho^2} (\sin \theta)^2 dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} (\sin \theta)^2 \right) (\sin \theta d\varphi)^2$$

де $a = J/M$, $r_g = 2GM$, $\rho^2 = r^2 + a^2 (\cos \theta)^2$, $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$; метрику записано в координатах Бойера–Ліндквіста; розмірності відповідають $c = 1$.

У двовимірному просторі параметрів M, a маємо біфуркаційну пряму $a = GM$, яка відділяє області існування принципово різних об'єктів – чорної діри ($a \leq GM$) та голої сингулярності ($a > GM$). За умови $a \leq GM$ поверхня сфери $r = R_h$, де $R_h = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2}$, є горизонтом подій віддаленого спостерігача. Це означає, що не існує часоподібних або ізотропних геодезичних, що виходять з-під цієї сфери назовні, інакше кажучи, спостерігач не може отримати жодних фізичних сигналів з області $r \leq R_h$. Частинки чи фотони, що падають у чорну діру ззовні, ніколи не досягають цієї поверхні. За годинником зовнішнього спостерігача речовина зорі, що колапсує, завжди покриває горизонт; її поверхня з часом прямує до сфери $r = R_h$, але ніколи її не досягає; яскравість зорі та частота випромінювання швидко спадають.

У будь-який час усередині зорі, де тензор енергії-імпульсу негравітаційних полів, що фігурує у правій частині рівнянь Ейнштейна, є відмінним від нуля, тому тут метрика є відмінною від (7.2). При $a \neq 0$ у зовнішній області метрика також відрізняється від (7.2), однак, за відсутності електромагнітного та інших негравітаційних полів, вона швидко прямує до (7.2). Винятком є випадок сферично-симетричного колапсу, тут вакуумний розв'язок рівнянь Ейнштейна зовні зорі за $a = 0$ *точно* збігається з розв'язком (7.2), який у цьому разі має назву метрики Шварцшильда. Таким чином, реальні зорі-колапсари слід вважати нестационарними об'єктами, хоча метрика (7.2) є метрикою стаціонарного простору-часу, а вивчення колапсу з точки зору зовнішнього спостерігача фактично не торкається області під горизонтом.

За $a \leq GM$ зовнішній спостерігач не бачить сингулярність $r = 0$, яка не може впливати на процеси зовні горизонту. Цей наслідок має принципове значення: сингулярність породжує неприємності для будь-якої теорії, оскільки це, як правило, пов'язане з неможливістю робити передбачення. Але для $a > GM$ горизонту не існує, тобто маємо так звану “голу” сингулярність, яка спостерігається ззовні. Час колапсу у голу сингулярність може бути скінченним, тому виникає запитання, а що ж буде далі? За відсутності горизонту час руху сигналів від голої сингулярності до зовнішнього спостерігача є скінченним, тобто сингулярність може непередбачувано впливати на області, віддалені від неї. Щоб обійти ці та подібні утруднення, Роджер Пенроуз висунув гіпотезу, за якою виникнення голих сингулярностей у реальному Всесвіті неможливе. Аналіз певних фізичних ситуацій ніби підтверджує гіпотезу Пенроуза, але досить загального її доведення досі не існує і це важливе питання залишається відкритим.

У випадку чорної діри метрика Керра є стійкою границею розв'язків рівнянь Ейнштейна в тому розумінні, що малі збурення цього розв'язку спадають з часом

до нуля, за винятком тих, які описують рух чорної діри або зміну її кутового моменту як цілого. Рівняння, що описують лінеаризовані збурення метрики Керра, допускають розділення змінних, після чого вони зводяться до звичайних диференціальних рівнянь Тюкольського. Рівняння електромагнітного поля і поля безмасових нейтрино зводяться до подібних рівнянь, які відрізняються лише значенням спінового параметра.

За допомогою рівнянь Тюкольського можна розраховувати характеристики гравітаційного випромінювання, що виникають після утворення чорної діри та несуть інформацію про її масу та кутовий момент. Як очікують, це випромінювання можна буде спостерігати за допомогою гравітаційних детекторів.

Підсумовуючи цей розділ, зазначимо, що критичні значення мас, які відділяють області білих карликів, нейтронних зір та чорних дір можуть у майбутньому уточнюватися, але їх існування наразі не викликає жодних сумнівів. Загальноприйняте значення межі Чандрасекара складає $1.4M_{\odot}$. Можна вважати добре обґрунтованим твердження, що максимальна маса “реалістичної” *стаціонарної* холодної зорі не може перевищувати $3M_{\odot}$. Менш жорстка “абсолютна” оцінка максимальної маси білого карлика чи нейтронної зорі складає приблизно $5M_{\odot}$. Несвітні астрофізичні об’єкти з масою, більшою за вказану межу, мають бути чорними дірами, причому альтернативні пояснення таких об’єктів вважають ще більш екзотичними.

Bibliography

7.4. Література до розділу 7

- [1] С. Вейнберг. Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.– 696 с.
- [2] В.І. Жданов. Вступ до теорії відносності. – К.:ВПЦ "Київський університет", 2008 –287 с.
- [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
- [4] Я.С. Яцків, О.М. Александров, І.Б. Вавилова, В.І. Жданов, Ю.М. Кудря, С.Л. Парновський, Е.О. Федорова, С.В. Хміль. Загальна теорія відносності: випробування часом.– К., ГАО НАН України, 2005.
- [5] D.A. Howell , M. Sullivan , P.E. Nugent et al. The type Ia supernova SNLS-03D3bb from a super-Chandrasekhar-mass white dwarf star. – Nature. – 2006. – Vol. 443. – P. 308-311 (arXiv:astro-ph/0609616).
- [6] Hachisu I., Kato M., Saio H., Nomoto K. A single degenerate progenitor model for type Ia supernovae highly exceeding the Chandrasekhar mass limit // Astrophys. J. - 2012. - Vol. 744 (1). - Id. 69 (arXiv:1106.3510).

Планетні міграції

8.1. Властивості екзопланет.

Утворення планет і їх розподіл навколо центральної зорі - яскравий приклад формування структури в нелінійній системі. В теоретичному плані розгляд цього важливого питання космогонії базується на ньютонівській механіці та газодинаміці. Але будь яка теоретична схема має бути підтвержена і доповнена спостереженнями. Тривалий час такі "експериментальні" дані стосувалися лише Сонячної системи. Відкриття планет за межами Сонячної системи у 1990-х роках стало важливим етапом розвитку космогонії і поставило нові проблеми щодо структури планетних систем.

Перші екзопланети були відкриті на основі точних вимірів променевих швидкостей зір. Такі виміри дозволили виявити зміщення зорі, що викликається тяжінням планети. Метод променевих швидкостей найбільш ефективний для виявлення масивних екзопланет на низьких орбітах навколо близьких до Сонця зір. Цим методом (за даними електронного каталогу exoplanet.eu) на початок 2015 року було відкрито близько 600 екзопланет. Ще 17 екзопланет було виявлено на орбітах нейтронних зір - пульсарів за затримкою їх радіоімпульсів, що також спричинена тяжінням планети.

Якщо промінь зору лежить в площині орбіти екзопланети, при проходженні планети по диску зорі можливо зареєструвати тимчасове послаблення блиску зорі. На цьому явищі ґрунтується інший ефективний метод відкриття екзопланет — метод затемнень. В результаті спостережень спеціалізованих космічних телескопів Kepler і COROT кількість екзопланет, відкритих цим методом перевищила 300, причому велика кількість з них було підтверджено також методом променевих швидкостей. Крім того, для 32 екзопланет у близьких зір вдалося отримати зображення планети, а для кількох планет — навіть спектр атмосфери.

Ще один метод відкриття екзопланет використовує явище гравітаційного мікролінзування. Якщо промінь зору далекої зорі перетне інша зоря (лінзуюча), що має планету, наявність екзопланети можна виявити за характерною несиметричною кривою блиску. Метод гравітаційного мікролінзування дозволяє відкривати екзопланети

на великих відстанях (тисячі світлових років), але не допускає повторних спостережень. Цим методом відкрито 16 екзопланет.

Маси екзопланет сягають до 25 мас Юпітера. При масі небесного тіла більше за 12 мас Юпітера у ньому можливі термоядерні реакції горіння дейтерію. Об'єкти з масами від 12 до 80 мас Юпітера, у яких вигорів дейтерій, називають коричневими карликами і вважають проміжними між зорями і планетами. Останніми роками відкрито велику кількість ізольованих коричневих карликів, що не обертаються навколо іншої зорі. Зауважимо, що сучасні космогонічні теорії допускають утворення з міжзоряної газопилової хмари ізольованих небесних тіл з масами від 3 мас Юпітера. Такі тіла називають коричневими субкарликами або блукаючими планетами.

У 1995 році була відкрита перша екзопланета поблизу зорі головної послідовності — 51 Peg b. Це планета-гігант, її маса складає половину маси Юпітера. Велика піввісь орбіти дорівнює 0.05 а.о., в 8 разів менше, ніж у Меркурія. У наступні роки було відкрито велику кількість планет-гігантів, розташованих дуже близько до своєї зорі. Відкриття таких екзопланет (вони отримали назву гарячі Юпітери) стало несподіванкою, оскільки у Сонячній системі планети-гіганти розташовані на набагато більшій відстані від центрального світила. Наявність гарячих Юпітерів зробила необхідним перегляд уявлень про будову і розвиток планетних систем, що існували раніше. Для пояснення існування гарячих Юпітерів розробляють теорію планетних міграцій. Згідно неї найбільша планета в системі утворюється в протопланетному газопиловому диску на відстані кілька астрономічних одиниць (як Юпітер), а потім мігрує до зорі.

8.2. Планетна міграція I типу.

Згідно сучасної теорії утворення планет, у протопланетному газопиловому диску легкі елементи відносяться випромінненням зорі на більші відстані, а важчі елементи залишаються ближче до зорі. Починаючи з деякої відстані у диску можливе утворення льоду. Біля лінії льодів накопичуються летючі елементи. Внаслідок балансу тиску, гравітації і відцентрових сил орбітальні швидкості менше кеплерівських, крупні частинки перетинають лінію льодів. Тут утворюється розрив в параметрах газу, після чого гальмування частинок припиняється.

За лінією льодів летючі елементи конденсуються на пилінках, розміри і маса яких збільшуються. Дрібні частинки рухаються з газом, а крупні, більше міліметра, гальмуються газом і по спіралі рухаються до зорі. Орбіти згустків розміром порядку метра за тисячу років скорочуються вдвічі.

Значна маса частинок проникає всередину лінії льодів, покривається вологою або брудом і злипається, утворюючи мільярди кілометрових планетезималей. Стикаючись на безлічі орбіт, вони можуть утворити зародки планет з розмірами Місяця і Землі. Зародки з орбітою 1 а.о. за час порядку 100 тисяч років досягають своєї межі: 0.1 маси Землі. На орбіті Юпітера (5 а.о.) 4 маси Землі накопичуються за кілька мільйонів років.

Міграція I типу — це міграція внутрішніх планет. Хвилі в протопланетному диску, що утворюються зародком, не компенсуються і викликають поступове наближення його орбіти до зорі. При цьому лише невелика частка тіл здатна “вижити”.

В історії утворення планетних систем можна виділити наступні етапи.

1. До 100 тис. р. - в центрі первинного газопилового диску формується зоря і в ній починається ядерний синтез.
2. 100 тис. р. - 2 млн. р. - пилинки злипаються в планетні зародки з масами від місячної до земної.
3. 2 млн. р. - формується перший газовий гігант і вимітає астероїди першого покоління.
4. 3-10 млн. р. - газовий гігант стимулює формування інших гігантів і планет земного типу. На цей час газу майже не залишається.
5. 800 млн. р. - перегруповання планет продовжується біля мільярда років після свого початку.

8.3. Міграція II типу.

Теорія міграції II типу описує утворення і рух планет-гігантів (у тому числі гарячих Юпітерів) на етапі формування планетної системи. Перший газовий гігант створює умови для народження наступних. Він розчищає у протопланетному диску щілину, яка діє як замковий рів; її не може здолати речовина, що рухається до центру диска. Речовина збирається на зовнішній стороні розриву, де з неї утворюються нові планети. При цьому зростання маси найбільшого гіганта обмежується. Залишковий газ поступово втрачає кутовий момент і осідає на зорю, захоплюючи планету-гігант.

Припливна дія планети призводить до зменшення кутового моменту речовини всередині її орбіти і до збільшення кутового моменту речовини назовні орбіти. Так утворюється щілина навколо орбіти планети. Міграція II типу відбувається якщо маса планети достатньо велика для того, щоб припливні сили очистили щілину на її орбіті. Припливний момент диску всередині або назовні орбіти планети, що призводить до утворення щілини, можна оцінити з рівняння

$$T_0 \sim \Sigma \Omega_p^2 a^4 \left(\frac{M_p}{M_s} \right)^2 \left(\frac{a}{H} \right)^3 \quad (8.1)$$

де Σ — поверхнева густина диску, Ω_p — кутова швидкість обертання планети навколо зорі, M_s — маса зорі, M_p — маса планети, a — радіус орбіти планети, H — товщина диску. Турбулентна в'язкість прагне закрити щілину. Ефект турбулентності виражається через кінематичну в'язкість ν яка параметризується в так званій моделі альфа-диску як

$$\nu = \alpha c H \quad (8.2)$$

де α — безрозмірний параметр, c_s — швидкість звуку у газі. Величина α повинна бути менше одиниці, оскільки турбулентні рухи повільніші за звукові і характерний масштаб турбулентності менше товщини диску.

Турбулентна в'язкість створює момент поблизу щілини

$$T_c \sim \frac{M_g \Delta J_g}{t_g} \quad (8.3)$$

де M_g — маса, що накопичилася у диску поблизу щілини, ΔJ_g — зміна кутового моменту диску на одиницю маси, що необхідна для закриття щілини і t_g — час закриття щілини. Ми оцінюємо ці величини як

$$\begin{aligned} M_g &\sim \sum a \omega, \\ \Delta J_g &\sim a \Omega_p \omega, \\ t_g &\sim \frac{\omega^2}{\nu}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

де ω — радіальна ширина щілини, Σ — густина диску одразу за щілиною і ν — кінематична турбулентна в'язкість диску. Оцінка часу закриття щілини ґрунтується на припущенні про те, що в'язкість за час дифузії діє на відстані ω , що дає квадратичну залежність від ω . Застосовуючи останню систему співвідношень до рівняння (8.3), маємо, що

$$T_c \sim \Sigma a^2 \Omega_p \nu \quad (8.5)$$

без залежності від ω .

Щоб у диску виникла щілина необхідно, щоб момент, що відкриває щілину був більший за момент, що її закриває: $T_o > T_c$. Тоді ми отримуємо умову для мінімальної маси, що може відкрити щілину

$$\frac{M_p}{M_s} \gtrsim C_g \left(\frac{\nu}{a^2 \Omega_p} \right)^{1/2} \left(\frac{H}{a} \right)^{3/2} \quad (8.6)$$

де $C_g = 2\sqrt{10}$ — безрозмірний параметр. Для параметрів диску $a=0.004$ і $H/r=0.05$ можна передбачити, що щілина відкриється на орбіті Юпітера навколо зорі сонячної маси при масі планети $M_p > 0.2 M_J$, де M_J — маса Юпітера. Це передбачення добре узгоджується з результатами тривимірних чисельних моделювань.

Крім вищенаведеної умови в'язкості необхідно додати до розгляду іншу умову відкриття щілини, пов'язану з її стійкістю. Така умова має виключати щілини, в яких великий градієнт густини призводить до нестійкості, яка унеможливорює

відкриття щілини. Ця умова називається тепловою і вимагає, щоб радіус Хілла, який задається рівнянням

$$R_H = a \sqrt[3]{\frac{M_p}{3M_s}} \quad (8.7)$$

був більшим за товщину диску. Критична маса для відкривання щілини згідно цієї умови задається виразом

$$\frac{M_p}{M_s} \gtrsim 3 \left(\frac{H}{a} \right)^3 \quad (8.8)$$

Для $H/a=0.05$ ця умова вимагає більшої маси планети для відкривання щілини, ніж рівняння (8.6) для $a < 0.01$. Навіть якщо обидві умови виконуються і $R_H > H$ може існувати залишковий потік газу через щілину і на планету.

Швидкість міграції планети в щілині сильно відрізняється від випадку типу 1. Планета, що відкриває щілину в масивному диску, маса якого набагато більше маси планети, повинна зсуватися до зорі під дією акреційного потоку диску. Планета просто передає в'язкий момент через щілину врівноважуючи кутовий момент. Часовий масштаб міграції 2 типу визначається в'язкістю диску

$$t_{vis} \sim \frac{a^2}{\nu} \sim \frac{a^2}{\alpha c H} \sim \left(\frac{a}{H} \right)^2 \frac{1}{\alpha \Omega_p} \quad (8.9)$$

і складає 10^5 років для системи типу “Юпітер-Сонце” з параметрами $\alpha=0.004$, $H=0.05$ і $\Omega_p = 2\pi/12p^{-1}$. Таким чином часовий масштаб міграції повинен бути більше ніж 1 типу. Але він менше ніж час вичерпання диску — $10^6 - 10^7$ р. Справжній темп міграції повинен бути менше щоб пояснити спостережувані позасонячні гіганти за 1 а.о.

На практиці умови для чистої міграції 2 типу малоімовірно задовольняються. Маса диску може бути не дуже великою в порівнянні з масою планети і щілина може бути не повністю вільна від речовини. Але моделювання показують, що з точністю до кількох разів час міграції відповідає часовому масштабу в'язкості диску. Цей результат охоплює широкий діапазон параметрів і показує що припливне очищення суттєве і маса диску принаймні порівняна з масою планети.

Визначимо швидкість міграції II типу, відмітивши, що розподіл припливних моментів на одиницю маси диску все ще наближено застосовний, навіть якщо диск має глибоку щілину, яка не повністю чиста від речовини. Густина диску в області щілини дозволяє темпу міграції бути порівняним з еволюцією системи диск-планета.

В моделі міграції II типу в нульовий момент часу розглядається повністю сформована газова гігантська планета заданої маси на заданій геліоцентричній відстані. Припускається, що навколосонячний диск має гладкі степеневі розподіли густини і температури і є осесиметричним. Планети маси Юпітера можуть вимагати більшість часу життя диску на акрецію (1-10 млн. р.). Однак ця можливість

включається в модель, дозволяючи деяким дискам розсіятися за час міграції планети; таким чином ефективний час життя диску вважається рівним різниці дійсного часу життя диску і часу формування планети. Ця величина розглядається як граничне обмеження часу.

Коли планета, що акретує, має достатню масу, вона буде формувати щілину в диску. Формування щілини переривається процесом акреції. В усіх цікавих випадках цього дослідження щілина формується швидко. Таким чином, початок розгляду з повністю сформованою гігантською планетою в диску з початковим гладким розподілом густини є адекватним і прийнятним. В моделі розглядається одновимірний (радіальний) рух масивних планет. Орбіти вважаються кеплерівськими і коловими увесь час.

Протопланетний диск вважається тонким і осесиметричним, з радіальними розподілами температури і поверхневої густини, що задаються степеневими законами з показниками $-1/2$ і $-3/2$ відповідно. Характерні фізичні параметри навколосоряного диску наступні: параметр в'язкості $\alpha = \nu\Omega/c_s^2 = 0.005$, маса диску 0.011 маси Сонця, масштаб висоти рівний 0.05 а.о. на 5.2 а.о. Ефективний час життя диску складає 10 млн. р. Всі ці фізичні параметри змінюються від заданих значень для моделей дисків з різними властивостями.

Масивна планета в навколосоряному диску зазнає припливного впливу, що є результатом переносу кутового моменту між диском і планетою. Рух планети в диску породжує хвилі густини і назовні і всередину від планети. Ці хвилі створюють щілину в диску, так що планета очищує свою орбіту від речовини. Розмір щілини залежить від маси планети і обернено пропорційний в'язкості диску. Припливна сила залежить від кількості речовини диску наявної поблизу планети і, отже, від розміру щілини. Припливна дія на планету обумовлена гравітаційною взаємодією між планетою і хвилями густини, що відповідають ліндбладівському резонансу в диску (тобто орбітальний період кратний періоду збурюючої сили). В задачі застосовується спрощене імпульсне наближення, в якому розсіяння хвиль густини вважається локальним і кутовий момент зберігається поблизу планети завдяки дисипативним утворенням, таким як ударні хвилі. Наближення локального розсіяння прийнятне, оскільки найближча до планети частина диску завдає планеті найбільшого припливного впливу. Точність і правомірність цього наближення обговорюється в кінці цього розділу.

Радіальний рух планети в навколосоряному диску, обумовлений взаємодією з диском, описується виразом

$$\frac{da}{dt} = - \left(\frac{a}{GM_\star} \right)^{1/2} \left(\frac{4\pi}{M_p} \right) \int_{R_{in}}^{R_{out}} R \Lambda(R) \Sigma(R) dR \quad (8.10)$$

де R є радіальною координатою, причому R_{in} і R_{out} є внутрішньою і зовнішньою границями диску відповідно і Λ є темпом введення кутового моменту на одиницю маси в диск через взаємодію диску і планети. Зазначимо, що радіальний рух планети обернено пропорційний до маси планети, так що більш масивні планети

рухаються повільніше. Швидкість отримання кутового моменту в імпульсному наближенні з локальною дисипацією задається виразом

$$\Lambda(R) = \text{sign}(R - a) \frac{fq^2 GM_{\star}}{2R} \left(\frac{R}{|\Delta_p|} \right)^4 \quad (8.11)$$

де f є константою, що близька до одиниці, q є відношенням маси планети до зорі і Δ_p є більшим значенням з $|R - a|$ або H , де H є масштабом висоти диску. Ми використали для Σ в рівнянні (8.10) повністю беззаперечений розв'язок рівняння неперервності для диску, що записується як

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[3R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) - \frac{2\Lambda \Sigma R^{3/2}}{(GM_{\star})^{1/2}} \right] \quad (8.12)$$

Ми взяли густину рівною нулю у внутрішній частині диску, щоб представити падіння речовини з внутрішньої границі диску на зорю. Так ми можемо знайти $\Sigma(R)$ і $\Lambda(R)$ і після цього обчислити інтеграл в рівнянні (8.10) щоб знайти радіальний рух планети.

Щілина, що формується планетою у диску, має вирішальне значення у визначенні поведінки системи. Її ширина визначається як область, у якій поверхнева густина менше половини густини, яка була б там якби у диску не було планети. Імпульсне наближення локальної дисипації, що використовується в даній моделі, близько відтворює формування щілини знайдене за складнішою схемою у наближенні Вентцеля-Крамерса-Бріллюена, отже наше спрощуюче припущення прийнятне. Характерний час еволюції системи, на якому зручно порівнювати різні моделі планетної міграції, складає 10000 років. Це час після того, як щілина повністю сформувалася, але перед тим, як планета почала значно мігрувати зі свого початкового положення. Диск продовжує еволюціонувати після цього моменту, так що разом з рухом планети всередину щілина, що нею створюється, також рухається всередину. Зазначимо, що більша в'язкість призводить до меншої щілини а отже і до швидшої міграції всередину; більшій масі диску також відповідає менша щілина і, відповідно, швидша міграція.

Припущення про те, що навколосоряний диск розсіюється за 10 млн. р, вибране на основі результатів спостережень. В даній моделі не проводиться точне моделювання фізики дисипації диску. Замість цього використовується припущення про те, що як локальний феномен диск зникає в околицях планети за цей час. При розгляді поведінки планети важлива лише локальна частина диску і процеси очищення диску деінде не впливають на поведінку планети.

Коли планета наближається до центральної зорі, припливна деформація зорі, що викликається планетою, починає суттєво впливати на радіальний рух планети. Оскільки зорі втрачають речовину, припливні виступи зорі не орієнтовані вздовж лінії, що з'єднує центри мас зорі і планети. У більшості випадків змодельовані нами планети не мігрують ближче, ніж точка коротації з зорею, що швидко обертається; тому в усіх випадках ми припускаємо, що зоря обертається швидше

орбітального руху планети, так що припливні горби випереджують вісь центрів мас. Припливна дія планети в цьому випадку є оберненою і планета вповільнює темп обертання зорі, як у випадку системи Земля-Місяць. Оскільки енергія розсіюється зорею і зоря вповільнюється, планета має віддалятися заради збереження кутового моменту. Так можна пояснити спостереження великої кількості екзопланет-гігантів з радіусами орбіт 0.05-0.15 а.о.

Радіальний рух планети відповідно до припливної взаємодії з обертанням зорі задається рівнянням

$$\frac{da}{dt} = \frac{9}{2} \Omega_p q \left(\frac{R_\star}{a} \right)^4 \frac{R_\star}{Q_\star} \quad (8.13)$$

де R_\star - радіус зорі і Q_\star - параметр припливного руйнування зорі. Чисельний коефіцієнт взяти з виразу для тіл однорідної густини, однак відхилення від нього порівняні з невизначеностями (див. нижче). Враховуючи падіння речовини на зорю і вивільнення енергії через гравітаційне стиснення, зоряний радіус зменшується протягом 10 млн. р.

Параметр розсіяння описує наскільки ефективно енергія обертання розсіюється внаслідок тертя в системі. Ми використовуємо значення $1.5 \cdot 10^5$ і діапазон $1.5 \cdot 10^4 - 1.5 \cdot 10^6$ для зірок до головної послідовності. Для порівняння, Юпітер має Q_\star в діапазоні $10^4 - 10^5$ і зоря головної послідовності має $Q_\star = 10^6$. Для менших значень зоря розсіює енергію менш ефективно і зовнішній припливний вплив на планету більший, ніж для більших.

Ми взяли характерний час уповільнення обертання зорі 100 млн. р. оскільки за такий час швидкість обертання зменшується приблизно на порядок від початкового стану з швидким обертанням. Вплив різного часу вповільнення обертання від 10 до 100 млн. р. на результати моделі є малим. Припливний ефект після 100 млн. р. є малим через підвищене значення зорі і вповільнене обертання. В дійсності всі системи з тісними компонентами (за виключенням припливно зв'язаної системи тау Волопаса) досі динамічно еволюціонують через взаємну припливну дію тіл, але час падіння на зорю, наприклад, для планети 51 Пегаса b, перевищує трильйон років, тобто набагато більше часу життя зорі на головній послідовності. Тому ми не включаємо в нашу модель таку пізню еволюцію орбіти.

Через припливну дію зорі планета деформується і нагрівається, але відповідна енергія набагато менше світності планети, вона може досягати 10^{19} Вт.

Міграція є універсальним механізмом для пояснення екзопланетних систем, але вона не призвела до появи гарячих Юпітерів у Сонячній системі. У 2009 р. на Обсерваторії Лазурного Берегу (Ніцца, Франція) була розроблена модель формування планет Сонячної системи, що включає процеси міграції.

8.4. Міграція III типу.

При русі планети в навколозоряному газовому диску навколо неї існує область

простору, в якій гравітація планети переважає гравітацію зорі і можливі еліптичні орбіти навколо планети. В проекції на площину диску границя цієї області має форму подвійної підкови з двома U-подібними точками нестійкості на орбіті перед і поза планетою. Через ці точки речовина диску перетікає на планету і змінює її орбітальний момент. Міграція планети описується рівнянням

$$2Ba\dot{a}M_e = 2Ba\dot{a}\delta m + T \quad (8.14)$$

де

$$B = \frac{1}{2r} \frac{d(r^2\Omega)}{dr}, \quad (8.15)$$

M_e — ефективна маса планети, що дорівнює сумі маси планети і навколопланетного диску, δm — дефіцит маси на орбіті. Він представляє різницю маси підковоподібної області яку б вона мала при однорідному розподілі поверхневої густини рівному поверхневій густині потоку що перетинає сепаратрису (границю підковоподібної області) і дійсної маси підковоподібної області.

Темп міграції планети, що частково відкриває щілину, згідно рівняння (8.14) може бути описаний як цикл з оберненим зв'язком. На вході циклу знаходиться диференціальний момент Ліндблада T , а на виході темп міграції. Якщо $\delta m < M_e$, цикл залишається стабільним. Темп дрейфу в цьому випадку не схожий ні на міграцію I ні II типу. Це скоріше темп I типу, прискорений коорбітальними ефектами. Для цього режиму міграції немає спеціальної назви. Якщо $\delta m > M_e$, цикл стає нестійким і міграція переходить до режиму з розбіганням, яке може бути і назовні і всередину. Темп дрейфу як функція маси диску переходить у біфуркацію і цей режим називається міграцією III типу з утіканням.

Втікаюча міграція ґрунтується на здатності планети доповнити нестачу маси на орбіті, обумовлену утворенням щілини. Вона не застосовується до маломасивних планет, у яких $\delta m < M_e$. Вона не застосовується також до масивних планет, які відкривають широку і глибоку щілину, так що поверхнева густина потоку, що перетинає сепаратрису, занадто мала для створення значного дефіциту маси. Вона скоріше пов'язана з планетами проміжної маси, які задовольняють критерію відкривання щілини в масивних дисках:

$$1.1 \left(\frac{q}{h^3} \right)^{-1/3} + \frac{50\alpha_\nu h^2}{q} \leq 1, \quad (8.16)$$

де h виражається з виразу для кінематичної в'язкості: $\nu = \alpha_\nu h^2 a^2 \Omega$. Чим більше маса диску, тим більше густина потоку, що перетинає орбіту. Поява втікаючої міграції чутлива до величин, оскільки вони впливають на здатність планети відкрити щілину. Також зазначимо, що критерій втікаючої міграції враховує ефективну масу планети, суму маси планети і маси навколопланетного диску. Поява втікаючої міграції, таким чином, чутлива до розподілу маси всередині навколопланетного диску, який може суттєво залежати від припущень у фізичному

моделюванні, а саме чи береться до уваги акреція газу на планету, чи включається самогравітація, чи враховується термодинаміка газу. Вона може також залежати від ефектів роздільності сітки у чисельних моделюваннях.

Проста модель, що викладена вище, допомагає зрозуміти умову, при якій міграція переходить до втікаючого режиму. Однак, оскільки вона передбачає плавну міграцію (тобто постійне), ця модель перестає бути коректною коли міграція дійсно переходить до втікаючого режиму, в якому швидкість міграції зростає експоненційно за час, порівняний з періодом лібрації в підковоподібній області. Поки відстань між орбітами, на яку планета мігрує за період лібрації залишається менше радіальної ширини підковоподібної області навколо планети, T залишається приблизно пропорційно da/dt (режим повільного втікання). При більших швидкостях міграції (режим швидкого втікання), T досягає максимуму і повільно спадає з зростанням a . Точна залежність T від a в цьому режимі швидкого втікання внутрішньо пов'язана з орбітальним дефіцитом маси, а отже з історією міграції планети. Орбітальну еволюцію планети, що зазнала втікаючої міграції III типу, таким чином, важко передбачити. Чисельні моделювання показали, що залежно від розділення газового потоку, що оточує планету, часовий масштаб внутрішньої втікаючої міграції III типу може бути не більше кількох сотень орбітальних періодів.

Знак T задається самим дрейфом планети. Втікаюча міграція може бути таким чином спрямована назовні або всередину, залежно від знаку a перед тим, як втеча мала місце. Зокрема, міграція може бути спрямована назовні, якщо незважаючи на те, що область поблизу орбіти частково вичерпана, додатне перетягування речовини у підковоподібну область залишається достатньо сильним, щоб протидіяти від'ємному моменту Ліндблада. Зовнішня втікаюча міграція може бути таким чином привабливим механізмом для пояснення недавніх відкриттів масивних планет на великих орбітальних відстанях. Моделювання, однак, показали, що окрім очікуваного зростання маси потоку, що перетинає орбіту при русі планети назовні (для фонових профілів поверхневої густини дрібніших за r^{-2}), орбітальний дефіцит маси не може зберігатися необмежено. Збільшення маси навколопланетного диску і сильна дисторсія потоку в ньому при великих швидкостях міграції призводять до того, що планета втрачає орбітальний дефіцит маси і напрямок міграції обертається.

Міграція III типу недавно аналізувалася для дисків низької в'язкості. Залежно від маси диску, краї викликаної планетою щілини можуть зазнавати двох типів нестійкостей. В маломасивних дисках краї щілини нестійкі до вихороутворюючих мод. Вони призводять до утворення кількох вихорів, що зісковзують вздовж країв щілини, які зливаються і утворюють великомасштабні вихорі. При проходженні повз планету ці вихорі можуть висадитися на неї через U-подібну точку повороту і викликати великий коротаційний момент на планету, що призведе до розсіяння планети назовні або всередину. Якщо врахувати самогравітацію рідини, тільки частина великомасштабних вихорів досягає U-подібних точок, решта вихорів продовжує ковзати вздовж країв щілини. Це забезпечує періодичний стрибкоподібний коротаційний

приплив на планету. Залежно від відносної сили вихорів, що проходять через зовнішню або внутрішню U-подібну точку, цей механізм діє як стрибкоподібний режим міграції III типу. В масивних самогравітуючих дисках (стійких до гравітаційної нестійкості) вихороутворюючі моди замінюються глобальними крайовими модами, які породжують спіральні хвилі густини. Періодичне випинання хвиль густини, що створені крайовими модами поблизу зовнішнього краю щілини, забезпечує періодичне джерело додатного коротаційного припливу на планету і призводить до стрибкоподібного режиму міграції III типу. Чисельні моделювання показують, що крайові моди можуть підтримувати зовнішню міграцію поки планета не покине щілину.

Коротко підсумуємо основні результати параграфу.

Мігруючі планети зазнають додаткового коротаційного припливу через елементи рідини, що течуть через підковоподібну область області і проходять через граничні U-подібні вузли. Він пропорційний швидкості міграції планети на малих швидкостях міграції, що дає позитивний обернений зв'язок на міграцію. Коли цикл оберненого зв'язку розбігається, тип міграції відомий як міграція III типу.

Планета і її навколопланетний диск відчувають ефективний коротаційний приплив, що пропорційний орбітальному дефіциту маси, визначеному в рівнянні (8.14). Поява втікаючого оберненого зв'язку (тобто міграції III типу) відповідає орбітальному дефіциту маси, що перевищує масу планети і її навколопланетного диску. Це стосується планет, що частково відкривають щілину вздовж своєї орбіти в масивному протопланетному диску.

Еволюція орбіти планет, що зазнають міграції III типу чутлива до часової еволюції співорбітального дефіциту маси, що робить важким її передбачення. Чисельні моделювання показують, що втікаюча міграція відбувається на дуже коротких часових масштабах, типово від 100 до 1000 орбітальних періодів планети.

Bibliography

8.5. *Література до розділу 8*

- [1] Baruteau C., Masset F. Recent developments in planet migration theory. Review article to be published in "Tidal effects in Astronomy and Astrophysics", Lecture Notes in Physics. Eprint arXiv:1203.3294.
- [2] Lubow S.H., Ida S. Planet Migration. Exoplanets, edited by S. Seager. Tucson, AZ: University of Arizona Press, 2011. Eprint arXiv:1004.4137.
- [3] Trilling D.E. et al. Orbital Evolution and Migration of Giant Planets: Modeling Extrasolar Planets. Astrophysical Journal v.500, p.428-439.
- [4] Ксанфомалити Л.В. Планетарные системы звезд: от "горячего юпитера" 51 Peg b к океаническим планетам. Всероссийская астрономическая конференция "От эпохи Галилея до наших дней", Нижний Архыз, Карачаево-Черкесская АР, Россия, 13-19 сентября 2010.

Нелінійні зоряні пульсації

9.1. Змінні зорі

У змінних зорях спостерігають практично усі якісні ефекти, притаманні для нелінійних процесів: від стаціонарної поведінки до періодичних змін та хаосу. Сучасні теоретичні моделі пульсуючих зір можуть мати ознаки біфуркацій подвоєння періоду та виникнення дивних атракторів. Змінні зорі дуже різноманітні за спостережуваними проявами змінності і своєю фізичною природою. Далі ми розглянемо деякі з них.

Принципи сучасної систематики змінних зір були закладені німецьким астрономом Фрідріхом Аргеландером, який у 1844 році склав перший каталог з 18 відомих на той час змінних зір. Згідно системи Аргеландера, змінні зорі позначаються окремо у кожному сузір'ї у порядку відкриття. Перші 9 зір позначають однією латинською літерою від R до Z, наступні 45 зір - двома літерами від RR до ZZ. Літери розташовані у алфавітному порядку. Наступні 280 зір позначаються двома літерами від AA до QZ, літера J не використовується. Наступні дорі позначаються літерою V з номером, починаючи з V335, наприклад V5665 Стрільця. Видання 2013 року Загального Каталогу Змінних Зір (Самусь М.М. та ін., ГАШ МГУ) містить 47969 змінних зір.

За фізичною природою змінні зорі можна поділити на затемнювані, еруптивні і пульсуючі. Зазначимо, що є об'єкти, що мають ознаки декількох типів. Затемнювані зорі є подвійними або кратними, коли площа орбіти двох зірок має малий нахил до променя зору. Тому у таких системах спостерігають періодичні пониження блиску - затемнення. На окремі зображення компоненти затемнюваної зорі не розділяються. Тісні затемнювані системи, що складаються з двох зір з близькими характеристиками називаються системами типу W Великої Ведмедиці. В них затемнення однієї зорі іншою відбуваються практично безперервно. У системах типу β Персея, натомість, компоненти мають різні спектральні класи, світності і розміри. Ці системи поділяються на наступні підтипи.

1. Системи типу β Ліри. Тісні системи з неперервними затемненнями. У наступних системах між затемненнями на кривій блиску спостерігається 'поличка', що відповідає максимальній сумарній яскравості двох зірок.

2. Алголі. Компоненти мають різну світність, внаслідок чого вторинний мінімум на кривій блиску набагато менш глибокий за основний. (Основним мінімумом називається затемнення більш яскравої компоненти менш яскравою)

3. Системи типу RX Геркулеса. Основний і вторинний мінімуми однакової глибини.

4. ІМ Кассіопеї - системи з еліптичною орбітою. Вторинний мінімум не відповідає середині інтервалу часу між двома послідовними основними мінімумами.

5. Системи типу AR Ящірки орієнтовані таким чином, що відбувається проходження меншої зорі по диску (або поза диском) більшої. Через це на кривій блиску поличка спостерігається також і в мінімумах.

Еруптивні зорі змінюють свій блиск нерегулярно і їх змінність яких не може бути пояснена затемненнями компаньйоном у подвійній системі або періодичними пульсаціями, відносяться до еруптивних. Тут причина змінності як правило, більш складна у порівняннях із затемнювальними системами. Зміни блиску еруптивних зір пов'язують з вибуховими процесами, що відбуваються на зорях чи в їхній околиці, або ж із вибухами самих зір. Наприклад, сюди відносять катаклізмичні (вибухові та новоподібні) змінні зорі, для яких типовими є термоядерні вибухи, що відбуваються або в їхніх поверхневих шарах, або усередині цих зір. Більшість вибухових та новоподібних зір входять до подвійних систем, і на процеси в цих зорях суттєво впливають їх компаньйони.

Еруптивні зорі можуть бути поділені на наступні підтипи:

1. Еруптивні зорі у тісних подвійних системах. Більшість з них мають у складі білий карлик. Це класичні Нові, повторні Нові, карликові Нові типу U Близнюків, полярні (або системи типу AM Геркулеса; вони містять у складі білий карлик з надпотужним магнітним полем), катаклізмичні змінні і Наднові типу Ia. Окремо виділяються симбіотичні зорі типу Z Андромеди, що мають спільну фотосферу. Карликові нові, у свою чергу, поділяються на зорі типу SS Лебеда (класичні карликові нові), SU Великої Ведмедиці (мають підтип WZ Стріли), Z Жирафа, UX Великої Ведмедиці і AM Гончих псів. Підтипи карликових нових відрізняються амплітудами і характерними часами спалахів, а також наявністю особливо сильних спалахів.

2. Наднові з колапсом ядра - кінцева стадія еволюції одиночних масивних зір. В залежності від форми кривої блиску і наявності спектральних ліній водню і металів поділяються на підтипи Ib, Ic і II.

3. Еруптивні зорі на ранніх стадіях еволюції: протозор'яні об'єкти Хербіга-Аро, протозорі типу Т Тільця, спалахуючі червоні карлики типу UV Кита, зорі Ae/Be Хербіга. Зорі типу Т Тільця поділяються на підтипи RW Андромеди, RW Візничого і FU Орiona.

4. Гарячі еруптивні зорі з протяжними фотосферами: гіпергіганти типу S Золотої риби, зорі типу γ Кассіопеї, зорі Вольфа-Райє, Ве зорі, ядра планетарних туманностей.

5. Еруптивні зорі з проявами обертання. Тип ВУ Дракона – зорі пізніх класів

з плямами і активністю, тип RS Гончих Псів – подвійні жовті гіганти з плямами і рентгенівськими спалахами, тип FK Волосся Вероніки – жовті гіганти з швидким обертанням, можливо у подвійній системі з яскравою плямою, тип α^2 Гончих Псів – зорі з великим магнітним полем і вмістом металів.

6. Зорі типу R Північної Корони. Це пульсуючі червоні гіганти, подібні до Мірид (див. нижче). В окремих мінімумах в атмосфері зорі випадковим чином утворюються хмари вуглецевого пилу, внаслідок чого глибина мінімуму різко збільшується, досягаючи 10 зоряних величин. Чергування звичайних і надглибоких мінімумів є хаотичним.

У пульсуючих змінних зір, відповідно їх назви, зміни блиску зумовлено періодичними пульсаціями оболонки, що можуть мати як сферично-симетричний характер, так і відхилятися від нього. Властивості пульсуючих зір детально розглядаються у наступних підрозділах.

9.2. Зоряні пульсації

Змінність пульсуючих зір пов'язана з періодичними змінами фізичних характеристик в їх надрах і атмосферах. Світність пульсуючої зорі у максимумі пропорційна періоду пульсацій. Це дозволяє визначати відстань до зорі за періодом пульсацій та густиною потоку випромінювання в околі Землі, які є спостережуваними величинами. Дана залежність найкраще встановлена для зір типу δ Цефея (цефеїд). Цефеїди — це жовті гіганти та надгіганти зі періодами від 1 доби до 135 діб. Цефеїди мають велике значення у астрономії як стандартні свічки при визначенні міжзоряних відстаней. Жевакін (1957) пояснив зоряні пульсації періодичною іонізацією і рекомбінацією водню і гелію у приповерхневому шарі. Пульсації розвиваються при певній комбінації інтегральних характеристик зорі, які можуть бути відображені на діаграмі Герцшпрунга-Рессела у вигляді смуги (смуга нестабільності). Більшість спостережуваних типів змінних зір можуть бути розташовані вздовж смуги нестабільності. При переході від пульсуючих червоних гігантів (зорі типу α Кита) до білих карликів (тип ZZ Кита) зменшується період і амплітуда пульсацій. Поза смугою нестабільності відомі три малочисельні групи блакитних гігантів: PV Телескопа, α Лебеда і β Цефея. У таблиці 9.1 подані наступні характеристики основних пульсуючих зір: позначення типу, амплітуда зміни блиску у зоряних величинах, період пульсацій P , спектральний клас S , кількість N відомих зір кожного типу, абсолютна зоряна величина у максимумі M і маса у масах Сонця.

Для вивчення періодичних змін до спостережуваної кривої блиску $m(t)$ застосовують дискретне перетворення Фур'є, за допомогою якого виділяють значущі моди коливань. Далі, з урахуванням визначених частот, будують апроксимацію $m(t)$ у вигляді

$$m(t) = m_0 + \sum_{i=0}^N A_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad \omega_i = 2\pi/P_i, \quad (9.1)$$

де $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$; параметрами підгонки можуть виступати як амплітуди

Table 9.1: Характеристики типів пульсуючих зір

Name	Δm	P , days	S	N	M	Mass
PV Tel	0.1	0.1-1	B	12	-6	20
α Cyg	0.1	3-30	BA	8	-5	20
β Cep	0.01-0.3	0.1-0.6	B0-B3	14	-3 -5	10 – 15
α Cen	>1-2.5	>100	M2-8 C, S	5000	V -0.8..-3 K -4.4..-7.3	<2
RV Tau	3.5	30-150	max FG min KM	100	-0.3	1
δ Cep	0.5-2	1-200	F5-K0	396	-2..-6	3-16
W Vir	0.3-1.2	0.8-35	F6-K2	86	-1..-5	0.55
RR Lyr	0.2-2	0.2-1.2	A-F	200	-0.75	0.4
δ Sct	0.03-0.9	<0.3	A0-F5	129	0..+1	1.6-2.2
SX Phe	0.7	0.03-0.08	A2-F5	50	2.1-5.4	0.4-0.7
ZZ Cet	0.012-0.28	114-1186 s	DA	13	13.1-15.6	0.6

та фази коливань, так і частоти. Таким чином можна виділити не тільки кратні гармоніки, характерні для будь-якої нелінійної системи, а також і моди з неспіввимірними частотами та їх комбінації. Після виділення складових у розкладі (9.1) необхідно проводити ретельне дослідження, щоб з'ясувати інтерпретацію кожної моди. Зокрема, треба відділити основні частоти від тих, що є їх комбінаціями із врахуванням кратності, з'ясувати, коли спостережувана крива блиску є результатом лінійної взаємодії різних коливальних мод (таких, як биття) чи коли її складна форма є результатом нелінійної фізики. Ця задача досить нетривіальна. Слід мати на увазі, що в практиці астрономічних спостережень, на відміну від багатьох інших природничих наук, немає можливості повторювати експеримент декілька разів. Тут завжди мають справу зі скінченними, і не завжди тривалими, рядами спостережень, які ще й зашумлені похибками вимірювань. Це може призводити до того, що спостережувані періодичні та квазіперіодичні залежності слабо відрізняються від стохастичних процесів, і застосування чисельних методів може дати неправильний результат. Відомі приклади, коли застосування методу періодограм до аналізу завідомо хаотичного сигналу приводить до набору фіктивних частот.

Наведемо приклад дослідження кривих блиску у зорі типу RR Ліри OGLE-BLG-RRLYR-24137. RR Ліри — тип пульсуючих гігантів з відносно стійкими кривими блиску з періодом 0,2—1,2 доби. Це менше, ніж у класичних цефеїд, тому раніше ці змінні називали короткоперіодичними цефеїдами; зараз ця назва застаріла. Для RR Ліри OGLE-BLG-RRLYR-24137 аналіз розкладу типу (9.1) було проведено в роботі [32] на основі даних спостережень групи OGLE (Optical Gravitational Lens Experiment). До цієї роботи в OGLE-BLG-RRLYR-24137 було відомо дві моди, тоді як в [32] виявлено, як мінімум, ще одну моду, яка до того ж має ознаки присутності біфуркації подвоєння періоду. Незалежні моди, виявлені в [32], показано в Табл. 9.2. У останній колонці вказано параметри складової, яка

інтерпретована як результат подвоєння періоду, що відповідає третьому періоду. Зазначимо, що в роботі [32] заявлено ще про декілька виявлених частот, що є комбінаціями вказаних в Таблиці 9.2.

Table 9.2: Незалежні частоти $f_i = \omega_i/(2\pi)$ та амплітуди A_i пульсацій кривих блиску зорі OGLE-BLGRRLYR- 24137 згідно [32].

f_i	2.262844	3.118717	4.547226	3.709679	2.273613
A_i	0.0800	0.0607	0.0293	0.0128	0.0104

Як показують спостережні та теоретичні дослідження, для зоряних пульсацій досить часто притаманні декілька неспівмірних періодів варіацій блиску. Важливою характеристикою зір, де у кривій блиску присутні принаймні дві моди змінності¹ - основна, з більшим періодом P_0 та наступна з меншим періодом $P_1 < P_0$, є відношення P_1/P_0 . Залежність P_1/P_0 від більшого періоду P_0 , яку будують для певного класу змінних, називають діаграмою Петерсена. Положення зорі на цій діаграмі залежить від маси, складу і температури. Еволюційні зміни, що відбуваються у пульсуючих зорях, можуть призводити до модуляції коливань блиску. Повільні варіації параметрів коливань відомі як ефект Блажко.

Приклад діаграми Петерсена з роботи [34] показано на Рис. 9.1 для змінних типу δ Щита (δ Scuti або скорочено δ Sct), виявлених у Магеланових хмарах за даними огляду SuperMACHO. Для змінних δ Щита характерні різкі зміни світності завдяки радіальним та нерадіальним пульсаціям поверхні. До цього типу можна віднести гіганти чи зорі головної послідовності з амплітудою змін блиску від 0,03 до 0,9 зоряних величин з періодом в декілька годин, причому форма кривої блиску, період та амплітуда можуть сильно мінятися, зникати й виникати. На Рис. 9.2 показано результати [33] розрахунків діаграм Петерсена в моделях, які враховують вплив обертання та конвекції на частоти осциляцій.

9.3. Теоретичні моделі пульсацій

Теоретичні розрахунки зоряних пульсацій еволюціонують паралельно з розвитком обчислювальних засобів, від напів-аналітичних одновимірних схем до 3-вимірної гідродинаміки. Мета цих досліджень – будувати криві блиску, які можна порівнювати з спостережними даними. Найбільше поширення отримали гідродинамічні моделі, що враховують - в певних спрощеннях - радіаційні процеси та конвекцію. Перші програмні коди, які виникли наприкінці минулого століття і були на той час цілком успішними, враховували тільки процеси формування випромінювання, без конвекції; але й конвективні гідрокоди були побудовані практично у ті ж роки.

¹У англомовній літературі класичні Цефеїди, що мають дві радіальні моди осциляцій, називають "Beat Cepheids" або "double-mode Cepheids".

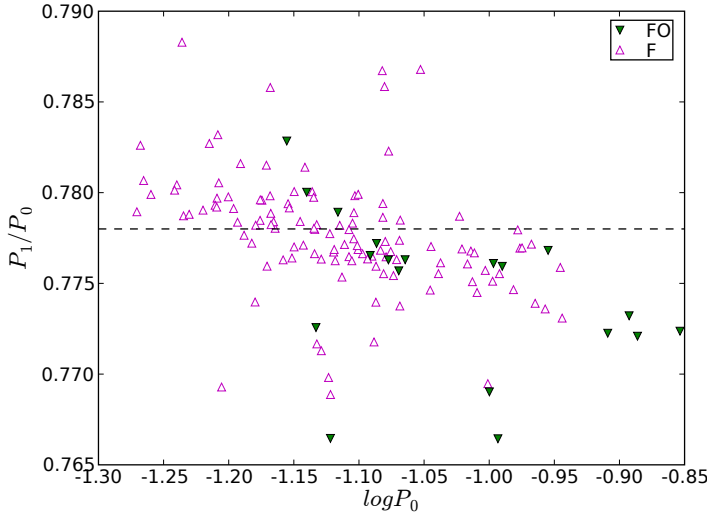


Figure 9.1: Діаграма Петерсена для багатомодових змінних зір з найбільшими амплітудами пульсацій в фундаментальній моді (F, прямі трикутники) та з найбільшими амплітудами першого обертоу (FO, перевернуті трикутники). Штрихова лінія показує рівень $P_1/P_0=0.778$. Джерело: [34].

Турбулентна конвекція є важливим фізичним процесом, що діє у зорях. Це суттєво тривимірний процес, де реалізується типовий для турбулентності сценарій, коли енергія передається від найбільших макроскопічних масштабів до менших аж до дисипативної області, де енергія механічного руху середовища переходять у теплову енергію руху молекул. Для конвективних процесів у зорях типовою є сильна турбулентність з високими числами Релея ² $Ra \sim 10^{12}$ за малих чисел Прандтля³ $Pr \sim 10^{-9}$.

Наявність турбулентності суттєво ускладнює теоретичні розрахунки, але багато особливостей конвекції можна описати в рамках одновимірних (час + радіальна координата) моделей. У пульсуючих зорях усереднені змінні, що описують макроскопічний рух газу, взаємодіють із параметрами дрібномасштабного турбулентного руху.

²Число Релея

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu \chi}$$

де g – градієнт потенціалу гравітаційного поля, β – коефіцієнт теплового розширення, ΔT – характерна зміна температури в системі, L – характерна довжина, ν – кінематична в'язкість рідини, χ – коефіцієнт термічної дифузії. За малих Ra рідина є у рівновазі і теплопередача здійснюється завдяки дифузії. Критичне значення числа Релея є точкою біфуркації для динаміки рідини, за якою виникає конвекція.

³Число Прандтля $Pr = \nu/\chi$.

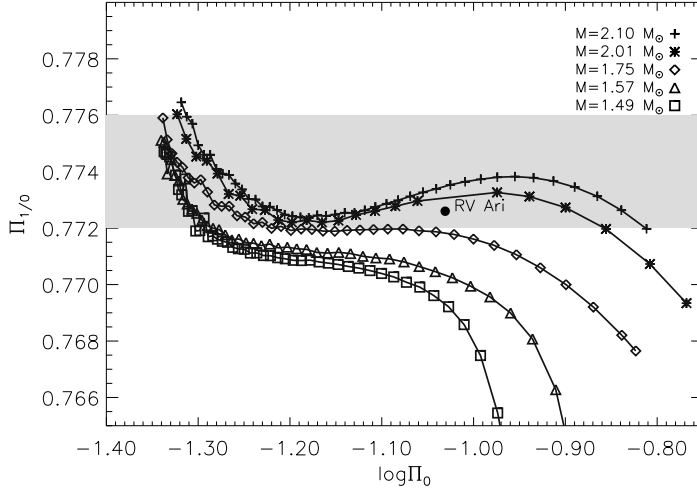


Figure 9.2: Теоретичні розрахунки діаграм Петерсена для різних мас пульсуючих зірок. По абсцисі: Π_0 – період головної моди (доби), по ординаті: $\Pi_{1/0}$ – відношення періодів першого обертоу та головного. Сіра область відповідає типовим значенням для зірок популяції I. Жирна точка представляє спостережні дані для зорі RV Ari типу δ Scuti. Джерело: [33].

Відповідно, гідродинамічні змінні розділяють на середню (плавну) та флуктуюючу частину, наприклад для швидкості та температури маємо $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_1$, $T = \bar{T} + T_1$. У результаті усереднення в рівняння для плавних змінних входять кореляції другого порядку ($\langle U_{1,i} U_{1,j} \rangle$, $\langle T_1^2 \rangle$ тощо). Виникає стандартна для задач статистичної гідродинаміки ситуація із зачепленням кореляцій. Для замикання системи кореляції другого порядку моделюють за допомогою феноменологічних співвідношень, при цьому виникає низка додаткових параметрів. У результаті задачу зводять до одновимірної системи рівнянь у частинних похідних, чи до системи більш високої просторової розмірності [7], [33], [30], [15], [32]. У сферичному наближенні рівняння враховують потоки енергії завдяки конвекції, випромінюванню та теплопередачі, в них входять тензор турбулентних натягів Рейнольдса, турбулентний потік, радіальна швидкість, густина, питома енергія на одиницю маси, швидкість конвекції, звичайний та турбулентний тиск, що пов'язаний із тензором натягів Рейнольдса (див., напр., [13]). Останніми роками, слідом за розрахунками сонячної конвекції [36], помітне просування у бік тривимірного підходу [37, 38], [39]. Тривимірні моделі конвекції, що виводяться з перших принципів, дозволяють позбавитися від феноменологічних параметрів, які визначають шляхом порівняння зі спостереженнями, і які інколи важко обґрунтувати з фізичних міркувань. Ціною цього є складність

комп'ютерних розрахунків та більший обчислювальний час.

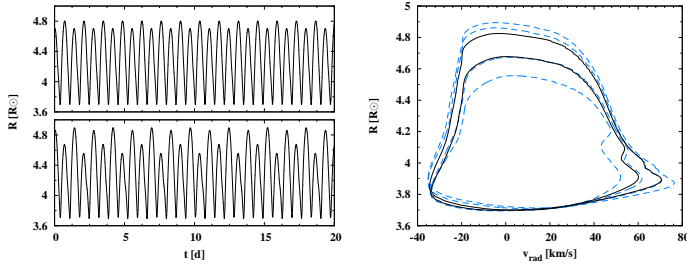


Figure 9.3: Біфуркації подвоєння періоду в гідродинамічній моделі RR Ліри (RR Lyr) з урахуванням випромінювання (чисельні розрахунки). Біфуркаційним параметром є коефіцієнт турбулентної в'язкості. На рисунках зліва – залежності радіусу зорі (в одиницях R_{\odot}) від часу (сутки); справа – ті ж розв'язки у площині "радіальна швидкість V_{rad} (км/с) – радіус". Розв'язку з подвоєнням періоду відповідають лівий верхній рисунок та справа – суцільна лінія. Після наступної біфуркації (чотири періоди) маємо лівий нижній рисунок та пунктирну лінія справа. Джерело: [10].

На рис. 9.4 показана ділянка кривої блиску у змінної CoRoT 962 типу RR Lyr. (за даними спостережень космічної місії CoRoT); тут чітко видно чергування різновисоких максимумів, відзначених різними символами.

9.4. Біфуркації та хаос у змінних зорях

Хаос і біфуркації є типовими для нелінійних систем і рівняння динаміки пульсуючих зір не є виключенням. Підкреслимо, що у цьому параграфі не йдеться про турбулентність, яка притаманна гідродинамічній системі внаслідок нескінченної кількості степеней вільності. Як було зазначено в Розділі 4, хаотична поведінка виникає навіть у системах звичайних диференціальних рівнянь з розмірністю, починаючи з трьох. Виходячи з цих загальних міркувань, навіть у найбільш простих сферично-симетричних моделях змінних зір також можна очікувати явища переходу до хаотичної поведінки – через послідовність біфуркацій подвоєння періоду, або іншим чином, тобто через типові сценарії, що можуть реалізовуватися у нелінійних системах.

Але кожна пульсуюча зоря є однією з реалізацій відповідної динамічної системи з фіксованими параметрами; хіба що можна очікувати повільні зміни цих параметрів завдяки більш тривалим фізичним процесам. Тому вивчення питань залежності від параметрів пов'язано більше з теоретичними моделями. Тим не менш, з спостережень можна оцінювати тип якісної поведінки (періодичність чи хаос); також інколи можна виявити ознаки переходу через точку біфуркації. Наприклад, якщо до точки біфуркації крива блиску $m(t)$ є періодичною з періодом P , то за точкою

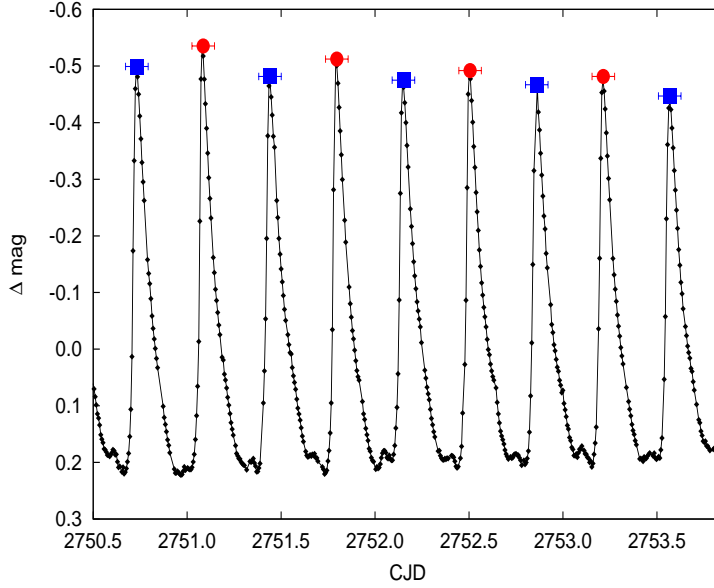


Figure 9.4: Ознаки біфуркації подвоєння періоду у змінної зорі CoRoT 962 типу RR Lyr. Джерело: [35].

біфуркації послідовні коливання починають трохи відрізнятися, при цьому вони (в ідеальному варіанті) точно повторюються через період $2P$. Така поведінка, наприклад, є характерною ознакою змінних типу RV Tau (RV Tauri), де присутні послідовні більш глибокі і менш глибокі мінімуми кривої блиску. Приклад розрахунку [10] таких кривих для змінних RR Ліри показано на Рис. 9.3.

Про ознаки хаотичної поведінки у певних типах змінних зір стверджувалося: у деяких Цефеїд типу II RV Tau [4, 25], у напів-регулярних змінних [6] та у змінних Mira – в [24].

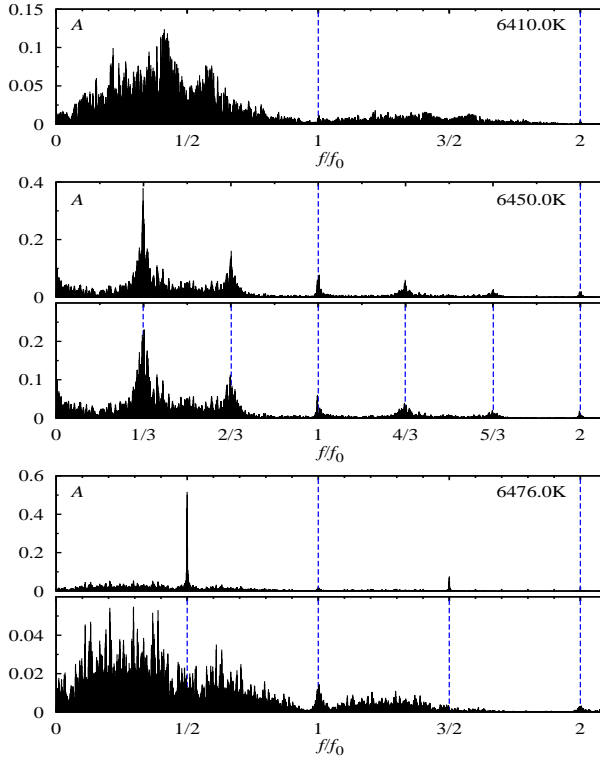


Figure 9.5: Фур'є-спектри кривих блиску, розраховані для змінних BL Herculis у роботі [17] для трьох різних ефективних температур T . Вертикальні пунктири відповідають частотам періодичних складових, що були вилучені (основна мода та гармоніки для усіх рисунків, а також додаткові частоти для двох нижніх рисунків з $T = 6450\text{ K}$ та $T = 6476\text{ K}$. Джерело [17].

Bibliography

9.5. Література до розділу 9

- [1] Гоффмейстер К., Рихтер Г., Венцель В. Переменные звезды // Москва: 'Наука'. - 1990. - **483**. - 360 с.
- [2] Пульсирующие звезды. Под ред. Б.В.Кукаркина // Москва: 'Наука'. - 1970. - 372 с.
- [3] *Buchler J.R.* A dynamical systems approach to nonlinear stellar pulsations // Astrophysics and Space Science. - 1993. - **210**. - P. 9-31.
- [4] *Buchler J.R., Kolláth Z., Serre T., Mattei J.* Nonlinear Analysis of the Lightcurve of the Variable Star R Scuti // ApJ. - 1996. - **462**. - P. 489-501 - astro-ph/9707116.
- [5] *Buchler J.R., Kollath Z.* Nonlinear Analysis of Irregular Variables // In: Stellar pulsation - nonlinear studies, Eds.: Mine Takeuti and Dimitar D. Sasselov, Astrophysics and space science library. - 2001. - **257**. - P. 185-213 - astro-ph/0003341
- [6] *Buchler J.R., Koll'ath Z., Cadmus R.R.* Evidence for Low-Dimensional Chaos in Semiregular Variable Stars // ApJ. - 2004. - **613**. - P. 532-547 - astro-ph/0406109
- [7] *Buchler J.R.* The State of Cepheid Pulsation Theory // AIP Conf. Proc. - 2009. - **1170**. - P. 51-58 - arxiv:0907.1766
- [8] *Dorfi E.A., Feuchtinger M.U.* Nonlinear stellar pulsations. I - Numerical methods, basic physics, initial models and first results // A& A. - 1991. - **249**. - P. 417-427.
- [9] *Gastine T., Dintrans B.* Nonlinear simulations of the convection-pulsation coupling // Proc. of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics. - 2011. - P. 215-219 - arxiv:1110.2010
- [10] *Koll'ath Z., Molnar R., Szabo R.* Period doubling bifurcation and high-order resonances in RR Lyrae hydrodynamical models // MNRAS. - 2011. - **414**. - P. 1111-1118. - arxiv:1102.0157
- [11] *Marconi M.* RR Lyrae pulsation theory // AIP Conf. Proc. - 2009. - **1170**. - P. 223-234. - arxiv:0909.0900
- [12] Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation. Edited by H.A.Hill and W.A.Dziembowski // Springer-Verlag. - 1980. - 500 P.
- [13] *Olivier E.A., Wood P.R.* Non-linear pulsation models of red giants // MNRAS. - 2005. - **362**. - P 1396-1412.

- [14] *Plachy E., Kolláth Z.* Elimination of long-term variation from chaotic light curves // AN. - 2013. - **334**. - P. 984-987. - arxiv:1303.3560
- [15] *Plachy E., Kolláth Z., Molnar Z.* Low-dimensional chaos in RR Lyrae models // MNRAS. - 2013. - **433**. - P. 3590-3596. - arxiv:1306.1526
- [16] *Smolec R., Moskalik P.* Non-linear modelling of beat Cepheids: Resonant and non-resonant models // A&A. - 2010. - **524**. - id.A40, 12 pp. - arxiv:1008.3906
- [17] *Smolec R., Moskalik P.* Chaos in hydrodynamic BL Herculis models // MNRAS. - 2014. - **441**. - P. 101-115. - arxiv:1403.4937
- [18] *Szabo R., Kolláth Z., Buchler J.R.* Automated nonlinear stellar pulsation calculations: Application to RR Lyrae stars // Astronomy and Astrophysics. - 2004. - **425**. - P. 627-639.
- [19] *Buchler J.R., Kovács G.* 1987, ApJL, 320, L57
- [20] *Buchler J.R., Moskalik P.* 1992, ApJ, 391, 736
- [21] *Buchler J.R., Kolláth Z.* 2011, ApJ Lett., 731, 24
- [22] *Buchler J.R., Kolláth Z., Serre T., Mattei J.* 1996. Nonlinear Analysis of the Light Curve of the Variable Star R Scuti // ApJ, 462, 489
- [23] *Buchler J.R., Kolláth Z., Cadmus R.R.* 2004, ApJ, 613, 532
- [24] *Kiss L.L., Szatmáry K.* 2003. Period-doubling events in the light curve of R Cygni: Evidence for chaotic behaviour // A&A, 390, 585
- [25] *Kolláth Z., Buchler J.R., Serre T., Mattei J.* 1998. Analysis of the irregular pulsations of AC Herculis // A&A, 329, 147
- [26] *Kovács G., Buchler J.R.* 1988, ApJ, 334, 971
- [27] *Letellier C., Gouesbet G., Soufi F., Buchler J.R., Kolláth Z.* 1996, Chaos, 6, 466
- [28] *Plachy E., Kolláth Z., Molnár L.* 2013, MNRAS, 433, 3590
- [29] *Serre T., Kolláth Z., Buchler J.R.* 1996. Search for low-dimensional nonlinear behavior in irregular variable stars. The global flow reconstruction method // A&A, 311, 845
- [30] *Smolec R., Moskalik P.* 2012. Period doubling and Blazhko modulation in BL Herculis hydrodynamic models // MNRAS, 426, 108
- [31] *Netzel H., Smolec R., Moskalik P.* 2015. Double-mode radial-non-radial RR Lyrae stars in the OGLE photometry of the Galactic bulge // MNRAS 447, 1173-1183
- [32] *Smolec R., I. Soszyński I., Udalski A., et al.* 2015. Intriguing triple-mode RR Lyrae star with period doubling // 2015 MNRAS 447, 3873-3879
- [33] *Casas R.; Suárez J. C., Moya A., Garrido R.* 2006. A comprehensive asteroseismic modelling of the high-amplitude d Scuti star RV Arietis // A&A 455, 1019-1029
- [34] *Garg A., Cook K. H., Nikolaev S., et al.* 2010. High-amplitude δ -Scutis in the Large Magellanic Cloud // AJ, 140, 328-338

- [35] *Szabó R., Benkő J. M., Paparó M., et al.* 2014. Revisiting CoRoT RR Lyrae stars: detection of period doubling and temporal variation of additional frequencies // *A&A*, 570, id.A100, 20 pp.
- [36] *Nordlund A., Stein R. F., Asplund M.* 2005. Solar Surface Convection // *Liv. Rev. in Solar Physics*, 6, no. 2
- [37] *Geroux C.M., Deupree R.G.* 2011. Radial Stellar Pulsation and Three-dimensional Convection. I. Numerical Methods and Adiabatic Test Cases // *ApJ*, 731, id.18, 8pp.
- [38] *Geroux C.M., Deupree R.G.* 2014. Radial Stellar Pulsation and Three-dimensional Convection. III. Comparison of Two-dimensional and Three-dimensional Convection Effects on Radial Pulsation // *ApJ*, 783, id.107, 7 pp.
- [39] *Mundprecht E., Muthsam H.J., Kupka F.* 2013 Multidimensional realistic modelling of Cepheid-like variables - I. Extensions of the ANTARES code//*MNRAS* 435, 3191-3205