Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Боровий М.О., Оліх О.Я., Овсієнко І.В.,
Цареградська Т.Л., Козаченко В.В.,
Подолян А.О., Ісаєв М.В.

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ.
ЗБІРНИК ЗАДАЧ.

Частина 1. Механіка.
Молекулярна фізика та термодинаміка

Київ

2018

УДК
ББК
К

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 6 від 26.12.2017 р.)

***Рецензенти**:*
д-р фіз.-мат. наук, проф. Гололобов Ю.П.
д-р фіз.-мат. наук, проф. Семенько М.П.

Боровий М.О., Оліх О.Я., Овсієнко І.В., Цареградська Т.Л., Козаченко В.В., Подолян А.О., Ісаєв М.В.
ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ. ЗБІРНИК ЗАДАЧ.
Частина 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка. Збірник задач . – К.: 2018. – 155 с.

За структурою та змістом збірник задач відповідає програмі курсу фізики хімічних факультетів закладів вищої освіти України. В посібнику викладено теоретичні відомості, основні методи розв'язання задач з курсу фізики та завдання для самостійної роботи.

Для студентів закладів вищої освіти України.

ББК
ISBN

Зміст

ЧАСТИНА 1.

МЕХАНІКА
Теоретичні відомості

Механіка – це наука про рух та рівновагу тіл.

Механічний рух – переміщення тіла в просторі відносно інших тіл.

КІНЕМАТИКА

Кінематика – це розділ механіки, в якому вивчається рух тіл, не розглядаючи причин його виникнення.

Матеріальна точка – фізична модель тіла, розмірами якого у даній задачі можна знехтувати.

Радіус-вектор точки $\vec{r}$ – вектор, проведений з початку координат у дану точку простору. Радіус-вектор однозначно визначає положення точки у просторі.

Матеріальна точка при своєму русі описує деяку лінію. Ця лінія називається *траєкторією руху*. Залежно від форми траєкторії розрізняють прямолінійний та криволінійний рух. Частковим випадком криволінійного руху є рух по колу.

Нехай точка переміщується вздовж деякої траєкторії з точки 1 в точку 2. Відстань від точки 1 до точки 2, відрахована вздовж траєкторії, називається пройденим *шляхом* (s). Вектор $\vec{r}_{12}$, проведений з точки 1 у точку 2, називається *переміщенням*.

Середня швидкість руху.

Якщо за час Δt радіус-вектор матеріальної точки змінюється на величину $\Delta\vec{r}$, то відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \langle\vec{v}\rangle$ називається *середньою швидкістю за час* Δt.

Миттєва швидкість руху дорівнює

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad |\vec{v}| = \frac{d\,s}{dt}.$$

Вектор миттєвої швидкості спрямований за дотичною до траєкторії матеріальної точки, що рухається.

У свою чергу, шлях, пройдений тілом за час t, описується виразом

$$s=\int_0^t |\vec{v}|\,dt=\int_0^t \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\,dt\ ,$$

де v_x, v_y, v_z – проекції вектора швидкості на координатні вісі.

Прискорення матеріальної точки:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$$

де $\vec{a}_\tau$ – *тангенційне прискорення*, $\vec{a}_n$ – *нормальне прискорення.*

Тангенційне прискорення:

$$\vec{a}_\tau=\frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau}=\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, спрямований за дотичною до траєкторії руху.

Нормальне прискорення:

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{R}\cdot\vec{n},$$

де R – радіус кривизни траєкторії, $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований вздовж радіуса кривизни траєкторії, тобто перпендикулярно до $\vec{\tau}$.

При рівноприскореному прямолінійному русі

$$a=const,\quad v=v_0+at,\quad s=v_0t+\frac{at^2}{2},$$

де v_0 – початкова швидкість руху.

Кутова швидкість:

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

де $\vec{\varphi}$ – кут повороту,

напрям вектора $d\vec{\varphi}$ визначається правилом правого гвинта.

Кутове прискорення:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Зв’язок між лінійними та кутовими величинами

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right], \ \vec{a}_\tau = \beta R\vec{\tau}, \quad \vec{a}_n = \omega^2 R\vec{n}$$

При рівномірному обертанні ($\vec{\omega} = const$) модуль кутової швидкості ω також називають *кутовою частотою обертання*. Величина $\nu = \omega/2\pi$ називається *частотою обертання*. Частота обертання визначає число обертів за одиницю часу. $[\nu] = 1/\text{c} = \text{Гц}$. Час одного оберту $T = \nu^{-1} = 2\pi/\omega$ називається *періодом обертання*.

ДИНАМІКА

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчається рух у взаємозв'язку з причинами, що його зумовлюють.

У класичній механіці розглядають рух тіл з швидкістю, що є набагато меншою, ніж швидкість світла.

Сила – кількісна характеристика механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів.

Закони Ньютона.

1. Будь-яке тіло перебуває у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно, якщо дії на тіло усіх інших тіл скомпенсовані (векторна сума всіх прикладених сил - рівнодійюча сила, дорівнює нулеві). Системи відліку, в яких виконується цей закон, називаються *інерціальними системами відліку* (ІСВ).

2. Прискорення тіла прямо пропорційне рівнодіючій усіх прикладених до нього сил $\vec{F}$ та обернено пропорційне інертній масі тіла *m*: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Такий запис є правильним в рамках класичної механіки для ІСВ. У загальному вигляді $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$.

3. Будь-яка дія тіл одне на одного має характер взаємодії. Сили, з якими взаємодіють тіла, рівні за величиною та протилежні за напрямком: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (F_{12} – сила, яка діє з боку першого тіла на друге, F_{21} – сила з боку другого на перше)

Сили, що розглядаються у механіці:

1. *Сила пружності:*

$$F = k\,\Delta x\,,$$

де k – коефіцієнт пружності, $\Delta x = \left(x - x_0\right)$ – абсолютна деформація, x_0 і x – початкова і кінцева довжина деформованого тіла; напрямок сили визначається спрямований проти деформації.

2. *Сила гравітаційної взаємодії між двома тілами* (закон всесвітнього тяжіння). Сила, з якою перше тіло діє на друге, визначається як

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\,,$$

де γ – гравітаційна стала, m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл, $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, проведений від першого тіла до другого. Модуль гравітаційної сили: $F_{12} = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$. Поблизу поверхні Землі сила гравітаційної взаємодії тіла з Землею (сила тяжіння біля поверхні Землі) набуває вигляду $F = \gamma \dfrac{mM}{R^2} = mg,\ g = \gamma \dfrac{M}{R^2}$, де R – радіус Землі, M – маса Землі, g – прискорення вільного падіння біля поверхні Землі.

3. *Вага тіла* – це сила, з якою тіло внаслідок притягання до Землі діє на опору або підвіс. Для нерухомого тіла вага тіла чисельно дорівнює силі тяжіння. Сила тяжіння прикладається до центру мас тіла або системи тіл, вага тіла прикладається до опори або підвіса.

4. *Сила тертя ковзання:*

$$F_t = \mu\,N\,,$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання, N – сила реакції опори (завжди перпендикулярна до поверхні тіла); сила F_τ спрямована протилежно напрямку руху тіла.

Механічна робота. Нескінченно мала робота dA, яку виконує сила $\vec{F}$ при нескінченно малому переміщенні тіла $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Робота сили $\vec{F}$ при кінцевому переміщенні $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right).$$

Миттєва потужність:

$$P = \frac{dA}{dt};$$

якщо сила не залежить від часу, то

$$P = \frac{d}{dt}\left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,,$$

де $\vec{v}$ – швидкість руху матеріальної точки, до якої прикладена сила $\vec{F}$.

Якщо сили взаємодії залежать тільки від координат взаємодіючих тіл і робота цих сил при переході системи з довільного початкового у довільний кінцевий стан не залежить від форми траєкторії руху тіл, а визначається тільки початковою і кінцевою конфігурацією системи, то такі сили називаються *консервативними*. Для консервативних сил робота по замкненому шляху дорівнює нулю.

Прикладами консервативних сил у механіці є сила гравітаційної взаємодії та сила пружності. Для систем, де діють лише консервативні сили, вводиться поняття *потенціальної енергії.* Для цього деяку довільно обрану конфігурацію системи умовно визначають як нульову. Потенціальна енергія системи у данному стані чисельно дорівнюватиме роботі, яку мають виконати консервативні сили для переведення системи з цього стану у нульовий стан. Потенціальна енергія системи визначається з точністю до сталої величини.

Потенціальна енергія

а) пружно деформованого тіла

$$E_n = \frac{1}{2} k \left(\Delta x\right)^2;$$

б) гравітаційної взаємодії двох тіл

$$E_n = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r};$$

в) тіла, що знаходиться у полі сили тяжіння Землі

$$E_n = m g h.$$

Кінетична енергія тіла, що рухається поступально

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

Повна механічна енергія системи - це сума кінетичних енергій тіл системи та потенціальних енергій їх взаємодії між собою.

Закон збереження механічної енергії: повна механічна енергія ізольованої системи, в якій не діють сили тертя, не змінюється з перебігом часу

$$E = E_n + E_k = const.$$

Основна теорема механіки: робота сили при переміщенні тіла дорівнює зміні кінетичної енергії тіла: $A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$.

Робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи: $A = -\Delta E_n = E_{n1} - E_{n2}$.

Зв'язок між консервативними силами і потенціальною енергією системи: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_n(r)$.

Імпульс тіла масою *m*, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Закон збереження імпульсу системи тіл:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}',$$

де $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ – сума імпульсів тіл системи, $\vec{F}'=\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i$ – сума прикладених зовнішніх сил.

Для ізольованої системи:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0,\ \vec{p}=const,$$

Центр мас (центр інерції системи) – це така точка системи, радіус вектор $\overrightarrow{R_C}$ якої визначається наступним чином:

$$\vec{R}_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{R}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

де $\vec{R}_i$ – радіус вектор i-ої точки системи, n – кількість точок у системі, m_i – маса i-ої точки системи.

Імпульс системи:

$$\vec{p}=\vec{V}_C\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i,$$

де $\vec{V}_C$ – швидкість руху центру мас системи.

Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі системи, до якої прикладена результуюча всіх зовнішніх сил, що діють на тіла системи.

Абсолютно пружний удар. При абсолютно пружному ударі тіл зберігається повний імпульс системи та сумарна механічна енергія системи.

Абсолютно непружний удар. У результаті абсолютно непружного удару тіла починають рухатись з однаковою швидкістю. При цьому повний імпульс системи зберігається, а повна механічна енергія системи не зберігається, оскільки частина її перетворюється на теплоту.

Динаміка обертального руху

Моментом сили $\vec{F}$ **відносно точки *O*** називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки *O* до точки прикладання сили, на вектор сили $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Момент сили $\vec{M}$ не змінюється при паралельному переносі векторів $\vec{r}$ та $\vec{F}$.

Повний момент сил, що діє на тіло відносно деякої точки, дорівнює сумі моментів окремих сил відносно тієї ж точки:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i ,$$

де n – загальна кількість сил.

Момент сили відносно осі – це проекція моменту сили відносно точки *O* на деяку вісь *OZ*, що проходить через дану точку:

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z$$

У випадку, якщо сила перпендикулярна до осі *OZ,* момент M_z визначається як $M_z = \left|\vec{M}\right| \cos\alpha = Fr\sin(\frac{\pi}{2})\cos\alpha = FR$, де α - кут між вектором $\vec{M}$ та віссю *OZ*, $R = r\cos\alpha$ – плече сили, тобто довжина перпендикуляру від осі до лінії дії сили.

Момент імпульса (момент кількості руху) матеріальної точки відносно точки *O:*

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор матеріальної точки з імпульсом $\vec{p},$ проведений з точки .,

Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі - це проекція моменту імпульсу відносно точки *O* на деяку вісь *OZ*, що проходить через дану точку

$$L_z = [\vec{r}, \vec{p}]_z ,$$

Закон збереження моменту імпульсу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{'},$$

де $\vec{L}$ – сумарний момент імпульсу системи, $\vec{M}^{'}$ – результуючий момент зовнішніх сил, що діють на систему, взятий відносно тієї ж точки, відносно якої береться момент імпульсу $\vec{L}$.

Для ізольованої системи:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \ \vec{L} = const,$$

Основне рівняння динаміки обертального руху системи матеріальних точок відносно осі обертання OZ

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{I_z d\omega_z}{dt} = I_z \beta_z \ ,$$

де ω_z та β_z, відповідно, проекції кутової швидкості та кутового прискорення на вісь обертання OZ, I_z – момент інерції системи відносно цієї осі.

Момент інерції системи матеріальних точок відносно осі OZ:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \ ,$$

де m_i – маса i-ої матеріальної точки, R_i – відстань від осі обертання до i-ої матеріальної точки.

Момент інерції абсолютно твердого тіла відносно осі обертання OZ

$$I_z = \int_m R^2 dm = \int_V R^2 \rho \, dV \ ,$$

де R – відстань від осі обертання до нескінченно малого об'єму dV, ρ – густина тіла, V – об'єм тіла.

Теорема Штейнера-Гюйгенса:

$$I_z = I_{z0} + md^2,$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, I – момент інерції відносно паралельної осі, яка знаходиться на відстані d від першої, m – маса тіла.

Таблиця моментів інерції

Тіло	Розташування осі обертання	Момент інерції
Однорідний тонкий стрижень довжиною l	Через центр маси перпендикулярно довжині	$m\frac{l^2}{12}$
	Через кінець перпендикулярно довжині	$m\frac{l^2}{3}$
Прямокутна пластина зі сторонами a і b	Через центр маси перпендикулярно площині	$m\frac{a^2+b^2}{12}$
Суцільний циліндр радіусом r і висотою h	Через вісь циліндру	$m\frac{r^2}{2}$
	Через центр мас перпендикулярно осі циліндру	$m\left(\frac{h^2}{12}+\frac{r^2}{4}\right)$
Суцільна куля радіусом r	Уздовж діаметру	$2mr^2/5$
	Уздовж дотичної	$7mr^2/5$

Закон збереження моменту імпульсу системи n тіл, що обертаються навколо нерухомої осі OZ

$$\sum_{i=1}^{n} I_{zi}\omega_{zi} = const .$$

Кінетична енергія тіла, зумовлена обертальним рухом тіла

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 .$$

Робота зовнішніх сил при обертанні твердого тіла навколо осі OZ:

$$A = \int_{\varphi} |M_z| d\varphi ,$$

де φ – кут обертання.

Рух відносно неінерціальних систем відліку

Рівняння Ньютона в неінерціальних системах відліку (НеІСВ):

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in},$$

де $\vec{a}'$ –прискорення відносно НеІСВ, $\vec{F}_{in}$ – сили інерції.

$$\vec{F}_{in} = -m(\vec{a} - \vec{a}') = -m\vec{w},$$

де $\vec{w}$ – різниця між прискоренням тіла в ІСВ та НеІСВ.

Сили інерції $\vec{F}_{in}$ зумовлені властивостями НеІСВ.

Відцентрова сила інерції $\vec{F}_{вц}$ діє в НеІСВ, яка обертається відносно ІСВ, незалежно від руху тіла і описується виразом:

$$\vec{F}_{вц} = m[\vec{\omega}[\vec{r}', \vec{\omega}]], \left|\vec{F}_{вц}\right| = m\,\omega^2\, r',$$

де $\vec{\omega}$ – стала кутова швидкість обертання НеІСВ відносно ІСВ, $\vec{r}'$ – вектор, проведений від осі обертання НеІСВ перпендикулярно вісі до матеріальної точки.

Сила Коріоліса $\vec{F}_k$ діє на тіло, що рухається зі швидкістю $\vec{v}'$ відносно НеІСВ, яка обертається: $\vec{F}_k = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$.

Повний вираз для сил інерції:

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0 + m[\vec{\omega}[\vec{r}', \vec{\omega}]] + 2m[\vec{v}', \vec{\omega}],$$

де $\vec{a}_0$ – поступальне прискорення НеІСВ відносно ІСВ.

Релятивістська механіка

Перетворення Галілея:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \qquad ,$$

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad \vec{F} = \vec{F}'$$

де просторово-часові координати зі штрихом стосуються системи відліку, яка рухається відносно іншої (нештрихованої) зі швидкістю *V*, спрямованою вздовж осі OX.

У класичній механіці прискорення, маса та сила є інваріантами, тобто мають однакові значення в усіх ІСВ.

Перетворення Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}},$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{c^2}}$$

де c – швидкість світла у вакуумі, яка є інваріантною при переході між різними системами відліку.

За умови $V<<c$ перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея.

Наслідки з перетворень Лоренца.

1. *Відносність поняття одночасності*: події, одночасні в одній ІСВ, не є одночасними в будь-якій іншій ІСВ, що рухається відносно першої.

2. *Скорочення довжини тіла в напрямку руху*: довжина l тіла, яке рухається зі швидкістю V у напрямку довжини відносно деякої системи відліку, пов’язана з його довжиною l_0 у цій системі (так званою власною довжиною) співвідношенням

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},$$

3. *Сповільнення часу в системі відліку, що рухається.* Проміжок часу τ в системі, яка рухається зі швидкістю V відносно нерухомого спостерігача, пов'язаний з проміжком часу τ_0 у нерухомій для спостерігача системі співвідношенням

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

τ_0 – власний час життя (час життя відносно нерухомої системи відліку).

Релятивістський імпульс тіла:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою.

Повна механічна енергії вільної частинки

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Енергія спокою $E_0 = m_0c^2$.

Кінетична енергія вільної частинки:

$$E_k = E - E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2.$$

Зв'язок між повною енергією вільної частинки та релятивістським імпульсом (інваріант):

$$E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ

Приклад 1.1. *Тіло кинуте під кутом* α_0 *до горизонту з швидкістю* υ_0. *Визначити: швидкість і координати тіла через t секунд після кидка, час польоту* t_n, *максимальну висоту підйому H, дальність польоту в горизонтальному напрямку S, швидкість тіла* $\vec{v}_к$ *в момент падіння. Записати рівняння траєкторії. Опором повітря знехтувати.*

Розв'язок:

α_0,
$\vec{v}_0$,
t

$\vec{v}$ – ?
x – ?,
y – ?
t_n – ?
H – ?
S – ?
$\vec{v}_к$ – ?
$y(x)$ – ?

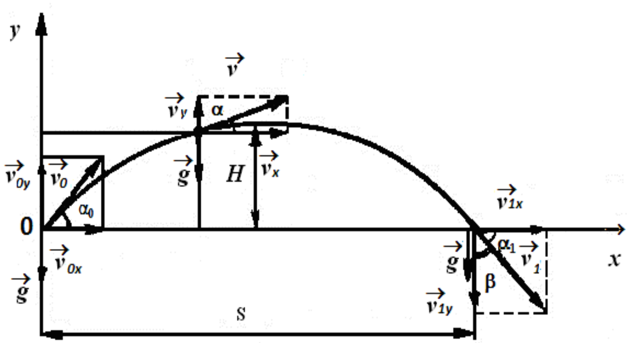


Рис. 1.1

Оберемо систему координат з початком у точці кидку тіла, вісь OY спрямуємо вертикально вгору, вісь OX спрямуємо в бік, куди кинуте тіло (рис. 1.1). За початок відліку часу оберемо момент кидка. В такій системі координат рух тіла можна уявити як результат додавання двох прямолінійних рухів: рівномірного руху вздовж вісі OX з швидкістю $\vec{v}_{0x}$ та рівносповільненого руху тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю $\vec{v}_{0y}$, вздовж вісі OY.

Запишемо початкові умови; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha_0$, $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha_0$. Проекції прискорення на координатні вісі: $a_x = 0$, $a_y = - g$.

Рух вздовж вісі OX рівномірний, проекція швидкості v_x від часу не залежить: $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha_0$.

Рух вздовж вісі OY є рівносповільненим: $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \cdot \sin\alpha_0 - gt$. Звідси визначаємо модуль і напрямок вектора швидкості в момент часу t

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 + (v_0 \sin \alpha_0 - gt)^2} = \\ = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2}, \quad (1)$$

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha_0 - gt}{v_0 \cos \alpha_0}. \quad (2)$$

Координати тіла в момент часу :

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t, \quad (3)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{gt^2}{2}. \quad (4)$$

В момент падіння тіла $y = 0$, $t = t_n$, де t_n – час польоту.

З рівняння (4) отримаємо

$$0 = (v_0 \sin \alpha_0)t_n - \frac{gt_n^2}{2}.$$

Звідси

$$t_n = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}. \quad (5)$$

Значення $t_n = 0$ відповідає моменту кидка, оскільки в цей момент часу теж $y = 0$.

Час підйому до максимальної висоти t_H знайдемо з рівняння для v_y, враховуючи, що в верхній точці траєкторії $v_y = 0$, $t = t_H$:

$$0 = v_0 \sin \alpha_0 - gt_H,$$

звідси $t_H = \dfrac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$.

Максимальну висоту підйому H визначаємо з рівняння (4), підставивши в нього t_H замість t

$$H = v_0 \sin \alpha_0 \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}.$$

Дальність польоту S знайдемо з рівняння (3), враховуючи, що в момент падіння $x = S$, $t = t_n$

$$S = v_0 \cos\alpha_0 \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

З отриманого результату можна зробити висновок, що при заданій початковій швидкості v_0 найбільша дальність польоту має місце при $\sin 2\alpha_0 = 1$, тобто, при куті кидку 45^0. При цьому

$$S_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Модуль і напрямок швидкості $\vec{v}_к$ в момент падіння тіла знайдемо, підставивши значення t_n з формули (5) в формули (1) та (2)

$$v_к = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha_0 + g^2 t^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}\sin\alpha_0 + g^2\left(\frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}\right)^2} = v_0,$$

$$tg\alpha_к = \frac{v_0 \sin\alpha_0 - gt}{v_0 \cos\alpha_0} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 - g\dfrac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}}{v_0 \cos\alpha_0} = -tg\alpha_0.$$

Таким чином, модуль швидкості тіла в момент падіння дорівнює модулю початкової швидкості, а $\alpha_к = -\alpha_0$. Кут падіння $\beta = (\pi/2) - \alpha_0$.

Щоб отримати рівняння траєкторії тіла, потрібно виключити час з рівнянь (3) та (4). З рівняння (3) знайдемо $t = x/(v_0 cos\alpha_0)$ і підставимо це значення в (4)

$$y = x \cdot tg\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2.$$

Як відомо, графіком функції $y = ax^2 + bx$ при $a < 0$ є парабола з опуклістю догори, яка проходить через початок координат. Таким чином, тіло, кинуте під кутом до горизонту, рухається по параболі.

Зауважимо, що рух тіла, кинутого вертикально вгору, можна розглядати як частковий випадок руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, при цьому $\alpha_0 = \pi/2$.

Приклад 1.2. *Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $V_0 = 4$ м/с. В момент часу, коли тіло досягло максимальної висоти, з тієї ж початкової точки вертикально вгору кинуле інше тіло з такою же початковою швидкістю. На якій відстані h від початкової точки зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.*

Розв’язок:

$V_0 = 4$ м/с
h – ?

Нехай початок системи відліку співпадає з початковою точкою. Спрямуємо координатну вісь ОХ вертикальну вгору (рис. 1.2). В цій системі відліку спочатку знайдемо, скільки часу буде підніматися на максимальну висоту перше тіло.

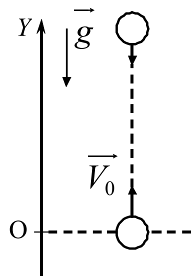


Рис.1.2.

Тіло рухається з постійним прискоренням, рівним g і спрямованим протилежно додатному напрямку осі та напрямку початкової швидкості. В цьому випадку залежності від часу швидкості V_1 і координати точки положення x_1 першого тіла описуються рівняннями

$$V_1(t) = V_0 - g\,t\,, \tag{1}$$

$$x_1(t) = V_0 t - \frac{g\,t^2}{2}\,. \tag{2}$$

У рівнянні (2) враховано, що в момент часу $t = 0$ тіло перебувало в точці з координатою $x = 0$.

Тіло буде підніматися доти, поки його швидкість буде більше нуля, тому час підйому t_n можна визначити з умови

$$V(t_n) = V_0 - g\,t_n = 0\,,$$

отже,

$$t_n = \frac{V_0}{g}. \qquad (3)$$

Закон зміни координати другого тіла також можна описати залежністю, схожою на рівняння (2), тільки необхідно врахувати, що рух цього тіла розпочався на час $\Delta t = t_n$ пізніше. Координата другого тіла

$$x_2(t) = V_0(t - t_n) - \frac{g(t - t_n)^2}{2}. \qquad (4)$$

Тіла зустрінуться у момент часу $t = t_0$, коли $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Тобто, з врахуванням (2) та (4), маємо

$$V_0 t_0 - \frac{g t_0^2}{2} = V_0(t_0 - t_n) - \frac{g(t_0 - t_n)^2}{2}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно t_0, отримуємо

$$t_0 = \frac{3V_0}{2g}. \qquad (5)$$

Тоді висота h, на якій зустрінуться тіла, визначається як

$$h = x_1(t_0) = V_0 t_0 - \frac{g t_0^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{V_0^2}{g} - \frac{9}{8}\frac{V_0^2}{g} = \frac{3}{8}\frac{V_0^2}{g}. \qquad (6)$$

Перевіримо розмірність отриманого виразу

$$[h] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}.$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо

$$h = \frac{3}{8}\cdot\frac{4^2}{9{,}81} \approx 0{,}61\,(\text{м}).$$

Приклад 1.3. *Радіус-вектор матеріальної точки змінюється з часом* t *за законом* $\vec{r}(t) = (\alpha\cdot t)\vec{i} + (\beta\cdot t^2)\vec{j}$, *де* α, β *– сталі;* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *– орти осей* OX та OY. *Знайти:*

1) рівняння траєкторії руху точки $y(x)$*;*

2) залежність від часу швидкості $\vec{v}$*, прискорення* $\vec{a}$ *і модулів цих величин;*

3) залежність від часу кута φ *між векторами* $\vec{a}$ *і* $\vec{v}$.

Розв’язок:

$\vec r(t) = (\alpha\cdot t)\vec i + (\beta\cdot t^2)\vec j$ $\alpha,\ \beta = \mathrm{const}$
$y(x) - ?$ $\vec v(t) - ?$ $\vec a(t) - ?$ $\lvert\vec v(t)\rvert - ?$ $\lvert\vec a(t)\rvert - ?$ $\varphi(t)$ –?

1) Радіус-вектор $\vec r(t)$ як векторна функція від часу t в загальному випадку має вигляд:

$$\vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j, \qquad (1)$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – проекції радіус-вектора на осі OX і, відповідно, OY.

Порівнюючи (1) із заданим в умові задачі законом зміни $\vec r$ із часом, бачимо, що $x(t) = \alpha t$; $y(t) = \beta t^2$.

Із рівняння $x = \alpha t$ знаходимо параметр $t = \dfrac{x}{\alpha}$. Підставляючи отримане значення t у рівняння $y = \beta t^2 = \beta\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2 = \dfrac{\beta}{\alpha^2}x^2$, отримаємо рівняння траєкторії руху точки $y(x)$. Як бачимо, це парабола.

2) Для визначення залежності від часу швидкості $\vec v$ і прискорення $\vec a$ візьмемо першу і, відповідно, другу похідні за часом від $\vec r$:

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \alpha\vec i + 2\beta t\vec j; \qquad (2)$$

$$\vec a = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \frac{d\vec v}{dt} = 2\beta\vec j. \qquad (3)$$

Із рівняння (2) випливає, що проекція $\vec v$ на вісь x: $v_x = \alpha$, проекція $\vec v$ на вісь y: $v_y = 2\beta t$.

Подібним чином, використовуючи рівняння (3), знаходимо: $a_x = 0$, $a_y = 2\beta$.

Одержимо залежність від часу модулів швидкості $\lvert\vec v\rvert$ і прискорення $\lvert\vec a\rvert$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}; \qquad (4)$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\beta; \qquad (5)$$

3) Із видно з (2) і (4), швидкість матеріальної точки з часом змінюється як за напрямком, так і за модулем в той час, як рівняння (3) та (5) показують, що прискорення матеріальної точки є сталою величиною, тобто, не змінюється ні за напрямком, ні за модулем і спрямоване вздовж осі OY (паралельно $\vec{j}$).

Отже, залежність від часу кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{v}$ знайдемо із співвідношення

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\alpha}{2\beta t}.$$

Приклад 1.4. *Точка рухається по колу, що має радіус R = 30 см, з постійним кутовим прискоренням. Знайти тангенційне прискорення точки* a_τ*, якщо відомо, що за час t = 4 с вона зробила три оберти, а в кінці третього оберту її нормальне прискорення* $a_n = 2{,}7$ *м/с*^{2}.

$R = 0{,}3$ м $t = 4$ с $a_n = 2{,}7$ м/с^2 $N = 3$	Розв'язок: Під час руху точки по колу радіусом R її кутове прискорення β і тангенційне прискорення a_τ зв'язані співвідношенням:
a_τ – ?	$$a_\tau = \beta R, \qquad (1)$$

тобто, якщо за умовою кутове прискорення точки є сталим, то сталою залишається і величина a_τ. З іншого боку:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \qquad (2)$$

Таким чином, можна зробити висновок, що лінійна швидкість точки та пройдений нею шлях у даному випадку змінюються за законами рівноприскореного руху:

$$V = a_\tau t + V_0, \qquad (3)$$

$$S = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \tag{4}$$

де V_0 і V – швидкості точки перед початком N обертів і після їх завершення, відповідно; t – час, витрачений на N обертів, S – шлях, що пройшла точка при цьому

$$S = 2\pi RN. \tag{5}$$

Прирівнюючи рівняння (5) і (4), маємо

$$2\pi RN = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

$$V_0 = \frac{2\pi RN}{t} - \frac{a_\tau t}{2}. \tag{6}$$

При русі по колу радіусом R нормальне прискорення a_n зв'язане зі швидкістю співвідношенням:

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

звідси

$$V = \sqrt{a_n R}. \tag{7}$$

Підставивши вирази (7) та (6) у рівність (3), в результаті отримуємо

$$\sqrt{a_n R} = a_\tau t + \frac{2\pi RN}{t} - \frac{a_\tau t}{2}$$

$$a_\tau = \frac{2}{t}\left(\sqrt{a_n R} - \frac{2\pi RN}{t}\right) \tag{8}$$

Перевіримо розмірність

$$[a_\tau] = \frac{1}{c}\left(\left(\text{м}\times\text{с}^{-2}\times\text{м}\right)^{1/2} - \frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = \frac{1}{c}\cdot\text{м}\times\text{с}^{-1} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Використовуючи формулу (8), знаходимо

$$a_\tau = \frac{2}{4}\left(\sqrt{2,7\cdot 0,3} - \frac{2\cdot 3,14\cdot 0,3\cdot 3}{4}\right) \approx -0,26\ (\text{м/с}^2)$$

Від'ємне значення тангенційного прискорення означає, що модуль швидкості точки з часом зменшується.

Приклад 1.5. *Матеріальна точка обертається по колу з постійною кутовою швидкістю* ω_0=*3 рад/с. В деякий момент* *часу у неї з'являється кутове прискорення $\beta(t)=(1-t)$ рад/с^2. Через який час t зупиниться матеріальна точка? Який шлях S вона пройде до повної зупинки? Радіус кола R = 1 м.*

$\omega_0 = 3$ рад/с $\beta(t)=(1-t)$ рад/с^2 $R = 1$ м	Розв'язок:
$t-?$ $S-?$	

Зв'язок між кутовою швидкістю і кутовим прискоренням визначається співвідношенням

$$\omega = \int \beta\, dt + C$$

де величина константи C визначається з початкових умов. Для нашого випадку маємо

$$\omega = \int (1-t)dt + C = t - \frac{1}{2}t^2 + C\,. \tag{1}$$

Враховуючи, що в момент часу $t = 0$ (момент, коли у точки з'явилося кутове прискорення), $\omega = \omega_0$, то, згідно з (1), можемо визначити, що $C = \omega_0$. Таким чином, залежність кутової швидкості матеріальної точки від часу описується виразом:

$$\omega(t) = \omega_0 + t - \frac{1}{2}t^2\,. \tag{2}$$

Матеріальна точка зупиниться, коли її швидкість буде рівна нулеві, тобто, для моменту часу зупинки $t_з$ справедливе співвідношення

$$\omega(t = t_з) = \omega_0 + t_з - \frac{1}{2}t_з{}^2 = 0\,. \tag{3}$$

Підставляючи числові значення та розв'язуючи квадратне рівняння (3) відносно $t_з$, отримуємо $t_з \approx 3{,}65$ с.

Кут φ, на який повернеться точка за час $t_з$, можна знайти наступним чином

$$\varphi = \int_0^{t_з} \omega(t)dt = \int_0^{t_з}\left(\omega_0 + t - \frac{1}{2}t^2\right)dt = \left(\omega_0 t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3\right)\Bigg|_0^{t_з} = \\ = \omega_0 t_з + \frac{1}{2}t_з{}^2 - \frac{1}{6}t_з{}^3 \,. \tag{4}$$

Тоді шлях, пройдений матеріальною точкою,

$$S = \varphi R = \left(\omega_0 t_з + \frac{1}{2} t_з{}^2 - \frac{1}{6} t_з{}^3 \right) R \approx 9{,}5(\text{м}).$$

Приклад 1.6. *Два тіла, зв'язані пружною нерозтяжною ниткою, ковзають по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут нахилу α = 30 (рис. 1.3). Маси тіл M = 10 г та m = 5 г, коефіцієнти тертя між тілами і площиною* μ_1 *= 0,1 та* μ_2 *= 0,3, відповідно. Знайти силу натягу нитки T.*

M = 0,01 кг
m = 0,005 кг
μ_1 = 0,1
μ_2 = 0,3
α = 30°

T - ?

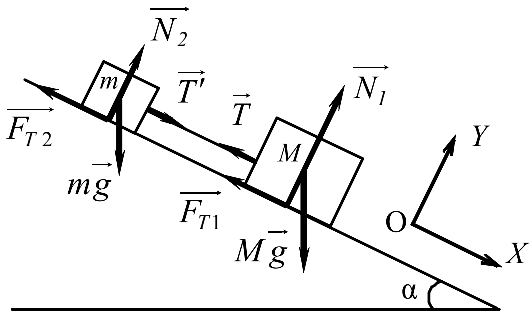


Рис. 1.3.

Розв'язок:

Під час розв'язання будь-яких задач з динаміки необхідний порядок дій можна описати наступною послідовністю:

1) зробити рисунок та розставити сили, які діють на всі тіла даної системи;

2) записати другий закон Ньютона для кожного тіла системи у вигляді

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \tag{1}$$

де m – маса тіла, $\vec{a}$ – вектор прискорення тіла. В правій частині рівняння стоїть векторна сума всіх сил, що діють на тіло;

3) вибрати систему координат та спроектувати рівняння (1) на осі цієї системи;

4) розв'язати систему отриманих скалярних рівнянь.

Для розв'язку даної задачі скористаємося запропонованою схемою.

1. Сили, що діють на кожне тіло, вказані на рис.1.2. На тіло масою M діють: сила тяжіння $M\vec{g}$ з боку Землі; сила з боку площини (цю силу можна розкласти на дві: силу нормальної реакції опори $\vec{N}_1$, спрямовану перпендикулярно до площини, та силу тертя $\vec{F}_{T1}$); і сила натягу нитки $\vec{T}$. На тіло масою m діють, відповідно, сили $m\vec{g}$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{T2}$ і $\vec{T}'$. Оскільки нитка, що з'єднує тіла, пружна і нерозтяжна, то сили натягу, які діють на кожне з тіл, однакові за величиною та протилежні за напрямом, тобто $\vec{T} = \vec{T}'$.

2. Закони руху кожного з тіл описуються рівняннями

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{T1}, \tag{2}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}' + \vec{N}_2 + \vec{F}_{T2}. \tag{3}$$

В рівняннях (2) і (3) враховано, що, так як нитка нерозтяжна, то прискорення тіл однакові, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$.

3. В даному випадку рух тіл відбувається в площині, і тому нам достатньо користуватися двовимірною системою координат. Виберемо її таким чином, щоб вісь OX була паралельна похилій площині, а вісь OY – перпендикулярна до неї – див. рис.1.3.

Спроектувавши рівняння (2) і (3) на OX та OY, отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathrm{OX}:\quad & Ma = Mg\sin\alpha - T - F_{T1} \\ & ma = mg\sin\alpha + T - F_{T2} \\ \mathrm{OY}:\quad & 0 = -Mg\cos\alpha + N_1 \\ & 0 = -mg\cos\alpha + N_2 \end{aligned} \tag{4}$$

4. З врахуванням того, що під час ковзання тіла величини сили нормальної реакції N та сили тертя F_T зв'язані між собою співвідношенням $F_T = \mu N$, систему рівнянь (4) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} Ma = Mg\,sin\,\alpha - T - \mu_1 N_1 \\ ma = mg\,sin\,\alpha + T - \mu_2 N_2 \\ 0 = -Mg\,cos\,\alpha + N_1 \\ 0 = -mg\,cos\,\alpha + N_2 \end{cases}. \qquad (5)$$

Отримали систему чотирьох рівнянь, в якій невідомими величинами є a, T, N_1 та N_2.

5. Розв’язуючи систему (5) відносно T та підставляючи числові данні, отримуємо

$$T = \frac{Mmg\cos\alpha\left(\mu_2 - \mu_1\right)}{M + m} =$$

$$= \frac{0{,}1\,\text{кг} \cdot 0{,}05\,\text{кг} \cdot (9{,}81\,\text{кг}/\text{м}^2) \cdot \cos 30^0 \left(0{,}3 - 0{,}1\right)}{0{,}1\,\text{кг} + 0{,}05\,\text{кг}} \approx 5{,}7 \cdot 10^{-3}\left(\text{Н}\right).$$

Приклад 1.7. *Через блок перекинута нитка, до кінців якої підвішені вантажі масами $m_1 = 2$ кг та $m_2 = 2{,}1$ кг. Початкові швидкості вантажів дорівнюють нулю. Чому дорівнює переміщення s вантажів за час $t = 3$ с? Яка сила натягу нитки T?*

$m_1 = 2$ кг
$m_2 = 2{,}1$ кг
$v_0 = 0$ м/с
$\tau = 3$ с

---

s – ?
T – ?

Розв’язок:

Сили, що діють на вантажі, показані на рис. 1.4. Складемо рівняння Ньютона для обох вантажів:

$$m_i\vec{a}_i = m_i\vec{g} + \vec{T}_i, \qquad (1)$$

де $i = 1$ в рівнянні для першого вантажу та $i = 2$ в рівнянні для другого вантажу.
Оберемо додатній напрямок вісі OY як на рис. 1.4.

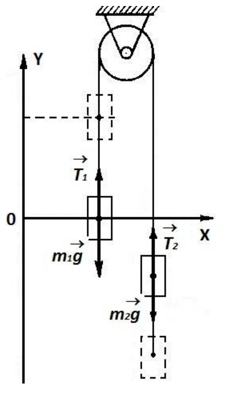


Рис. 1.4.

Початок координат суміщаємо з початковим положенням лівого вантажу. З врахуванням умови $T_1 = T_2 = T$, запишемо проекції рівняння (1) для кожного з вантажів на вісь OY:

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \\ -m_2 a = T - m_2 g \end{cases} \qquad (2)$$

Віднімаємо від першого рівняння системи друге і отримуємо

$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2).$$

Звідси

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Рівняння для координати лівого вантажу запишеться так

$$y = \frac{at^2}{2}.$$

В момент часу τ координата $y = s$.
Таким чином, модуль переміщення

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{g(m_2 - m_1)\tau^2}{m_1 + m_2} \approx 0{,}86 \text{ м}.$$

Сила натягу нитки, відповідно:

$$T = \frac{2gm_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx 20{,}1 \text{ Н}.$$

Приклад 1.8. *Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості $k_1 = 400$ Н/м та $k_2 = 250$ Н/м з'єднані послідовно і одним кінцем закріплені. До вільного кінця системи прикладено деяку зовнішню силу (рис. 1.5). Виявилось, що у стані рівноваги абсолютна деформація першої пружини $\Delta l_1 = 2$ см. Визначити абсолютну деформацію другої пружини Δl_2.*

$k_1 = 400$ Н/м

$k_2 = 250$ Н/м

$\Delta l_1 = 0{,}02$ м

$\Delta l_2 - ?$

Розв'язок:

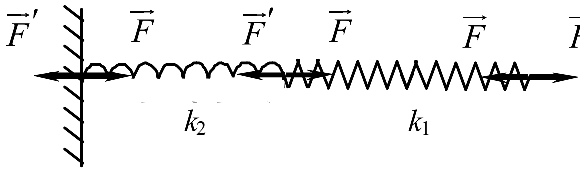


Рис. 1.5

Згідно із законом Гука сила пружності, що виникає у деформованій пружині, дорівнює

$$F = k\,\Delta x\,, \qquad (1)$$

де k – жорсткість пружини, Δx – її абсолютна деформація. У стані рівноваги ця сила за величиною дорівнює зовнішній силі, яка деформує пружину. У випадку послідовного з'єднання пружин на них діють однакові за величиною сили.
Тому для першої та другої пружин можемо записати

$$F = k_1\,\Delta l_1\,, \qquad (2)$$

$$F = k_2\,\Delta l_2\,. \qquad (3)$$

Прирівнюючи (2) та (3), отримуємо

$$k_1\,\Delta l_1 = k_2\,\Delta l_2$$

$$\Delta l_2 = \frac{k_1}{k_2}\Delta l_1 = \frac{400}{250}\cdot 0{,}02\ \text{м} = 0{,}032\ \text{м}$$

Приклад 1.9. *Визначити лінійну V та кутову ω швидкості супутника Землі, що обертається по коловій орбіті на висоті h над її поверхнею. Прискорення вільного падіння g та радіус Землі R вважати відомими.*

h

g

R

$V - ?$

$\omega - ?$

Розв'язок:

Рівняння руху супутника масою m по коловій орбіті навколо землі має вигляд:

$$\frac{mV^2}{(h+R)} = \gamma\frac{mM}{(h+R)^2} \qquad (1)$$

де $\dfrac{V^2}{(h+R)}$ – доцентрове прискорення, пов'язане з обертанням супутника (V – лінійна швидкість супутника, $(h+R)$ – відстань між супутником і центром Землі); $\gamma\dfrac{mM}{(h+R)^2}$ – сила гравітаційної взаємодії Землі і супутника (M – маса Землі).

З рівняння (1) отримуємо:

$$V^2 = \frac{\gamma M}{h+R}. \qquad (2)$$

Якби супутник знаходився на поверхні Землі, на нього діяла б гравітаційна сила F

$$F = \gamma\frac{mM}{R^2}. \qquad (3)$$

З іншого боку,

$$F = mg. \qquad (4)$$

Прирівнявши вирази (3) та (4), отримуємо

$$g = \gamma\frac{M}{R^2}$$

або

$$\gamma M = gR^2. \qquad (5)$$

Підставляючи (5) в (2), для лінійної швидкості супутника знаходимо

$$V = R\sqrt{\frac{g}{h+R}}. \qquad (6)$$

При обертанні тіла по колу радіусом $(h+R)$ його лінійна швидкість V і кутова швидкість ω пов'язані співвідношенням $\omega = \dfrac{V}{h+R}$.

Отже

$$\omega = \frac{R}{h+R}\sqrt{\frac{g}{h+R}}.$$

Приклад 1.10. *Металевий ціпок довжиною L = 1 м та масою m = 1 кг лежить на столі так, що зі столу звішується 1/5 його частина. До кінця ціпка підвішено вантаж масою m_0 = 100 г, під дією якого ціпок починає ковзати. Знайти швидкість V ціпка у момент часу, коли він відривається від краю стола. Коефіцієнт тертя між столом та ціпком μ = 0,1.*

$L = 1$ м	
$m = 1$ кг	
$m_0 = 0{,}1$ кг	
$\mu = 0.1$	
$V - ?$	

Розв'язок:

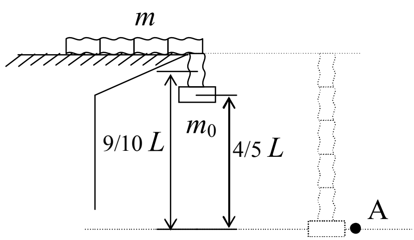


Рис. 1.6

Приймемо за нульовий рівень потенціальної енергії рівень, що відповідає точці А (рис. 1.6). Тоді в початковий момент часу, коли ціпок був нерухомий, повна енергія E_1 системи "ціпок-вантаж" складалась лише з потенціальної і дорівнювала

$$E_1 = m_0 g \frac{4}{5} L + \frac{1}{5} m\, g \frac{9}{10} L + \frac{4}{5} m\, g\, L\,, \qquad (1)$$

де перший доданок описує енергію вантажу, другий – тієї частина ціпка, яка звішувалась зі столу, третій – частини ціпка, яка перебувала на столі.

Повна енергія E_2 системи "ціпок-вантаж" в момент часу, коли ціпок відривається від краю стола, може бути записана в наступному вигляді

$$E_2 = \frac{(m + m_0)V^2}{2} + m\, g \frac{1}{2} L\,, \qquad (2)$$

де перший доданок – кінетична енергія ціпка і вантажу, які рухаються зі швидкістю V, а другий – потенціальна енергія ціпка.

Тоді за законом збереження енергії

$$E_1 = E_2 + A_T\,, \qquad (3)$$

де A_T – робота сили тертя.

Як відомо, величина сили тертя ковзання F_T залежить від коефіцієнта тертя і сили нормального тиску на поверхню. В нашому випадку сила нормального тиску визначається вагою тієї частини ціпка, яка знаходиться на столі і, отже, величина F_T змінюється з часом. Залежність F_T від шляху, який проковзав ціпок, має вигляд, зображений на рис. 1.7.

Роботу сили тертя можна обчислити, як площу під графіком $F_T(x)$.

Очевидно, що

$$A_T = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}mg\mu\cdot\frac{4}{5}L = \frac{8}{25}mg\mu L. \quad (4)$$

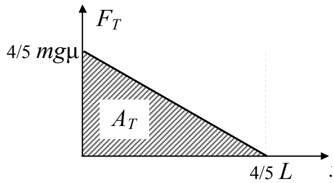


Рис. 1.7.

Підставляючи вирази (1), (2) та (4) у рівняння (3) і виражаючи V, остаточно отримуємо:

$$\frac{4}{5}m_0gL + \frac{49}{50}mgL = \frac{(m+m_0)V^2}{2} + \frac{1}{2}mgL + \frac{8}{25}mg\mu L,$$

$$V = \sqrt{\frac{2gL}{(m+m_0)}\left[\frac{4}{5}m_0 + \frac{8}{50}m(3-2\mu)\right]}. \quad (5)$$

Використовуючи формулу (5), знаходимо

$$V = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 1}{(1+0{,}1)}\left[\frac{4}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{8}{50}\cdot 1\cdot(3-2\cdot 0{,}1)\right]} \approx 3{,}1\,(\text{м/с}).$$

Приклад 1.11. *З шахти глибиною $h = 600$ м за допомогою канату, кожен метр якого має масу $\rho_l = 1{,}5$ кг, рівномірно піднімають вантаж масою $M = 3$ т (рис. 1.8). Яка робота A при цьому виконується? Який ККД η підйомного пристрою?*

h = 600 м $M = 3\times10^3$ кг ρ_l = 1,5 кг/м	
A – ? η – ?	

Розв'язок:

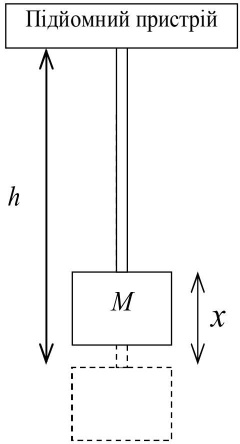


Рис.1.8.

Виконану роботу можна знайти за допомогою виразу:

$$A = \int_0^h F\,dx\,, \tag{1}$$

де F – сила з боку підйомного пристрою, прикладена для підняття вантажу. У формулі (1) враховано, що напрям сили F (вертикально вгору) співпадає з напрямком переміщення вантажу і тому скалярний добуток $\vec{F}d\vec{r} = F\,dr\cos 0^\circ = Fdx$.

Оскільки вантаж рухається без прискорення (підйом рівномірний), то у кожний момент часу сила F має зрівноважувати силу тяжіння, яка діє на вантаж і на канат:

$$F = \left[M + \rho_l(h - x)\right]g\,, \tag{2}$$

де x – відстань, на яку піднявся вантаж над дном шахти, (h - x) – довжина канату в цей момент часу.

Таким чином, сила, необхідна для підняття, залежить від глибини місцезнаходження вантажу.

Підставляючи (2) у (1), знаходимо

$$A=\int_0^h\left[M+\rho_1(h-x)\right]g\,dx=\left(M\,g\,x+\rho_1\,g\,h\,x-\frac{1}{2}\rho_1\,g\,x^2\right)\Big|_0^h=$$
$$=g\left(M\,h+\rho_1 h^2-\frac{1}{2}\rho_1 h^2\right)=g\,h\left(M+\frac{1}{2}\rho_1 h\right). \quad (3)$$

ККД η підйомного пристрою у даному випадку

$$\eta=\frac{A_k}{A}\times 100\%, \quad (4)$$

де $A_к$ – корисна робота, затрачена на підняття саме вантажу (без врахування канату)

$$A_к=\int_0^h M\,g\,dx=M\,g\,h. \quad (5)$$

Підставляючи (3) та (5) у (4), знаходимо:

$$\eta=\frac{M\,g\,h}{g\,h\left(M+\frac{1}{2}\rho_1 h\right)}\times 100\%=\frac{2M}{2M+\rho_1 h}\times 100\%. \quad (6)$$

Використовуючи формули (3) та (6), знаходимо

$$A=9{,}81\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 600\text{ м}\cdot\left(3\cdot 10^3\text{ кг}+\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot 600\text{ м}\right)\approx 2\cdot 10^7\left(\frac{\text{м}\times\text{м}\times\text{кг}}{\text{с}^2}\right)=20\text{ МДж}.$$

$$\eta=\frac{2\cdot 3\cdot 10^3}{2\cdot 3\cdot 10^3+1{,}5\cdot 600}\times 100\%\approx 87\%.$$

Приклад 1.12. *Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув вперед гирю масою m = 5 кг, надавши їй відносно льоду швидкість V = 2 м/с. Визначити роботу A, яку виконав ковзаняр під час кидання гирі, якщо його маса M = 70 кг. Тертям знехтувати.*

$m = 5$ кг
$M = 70$ кг
$V = 2$ м/с

$A - ?$

Розв'язок

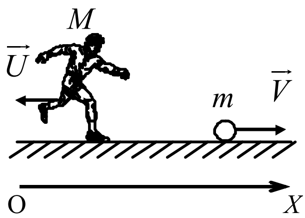


Рис. 1.9

Для розв'язку задачі спочатку знайдемо швидкість U, яку отримав ковзаняр після кидка (рис. 1.9). Для цього скористаємося законом збереження імпульсу. Імпульс системи "ковзаняр-гиря" у початковий момент часу дорівнював нулеві (тіла нерухомі). Після кидка імпульс цієї системи буде складатися з суми імпульсів гирі та ковзаняра, тому

$$0 = m\vec{V} + M\vec{U} . \tag{1}$$

Спроектувавши рівняння (1) на вісь OX, отримуємо

$$0 = mV - MU ,$$

звідки

$$U = \frac{m}{M} V . \tag{2}$$

Згідно із законом збереження енергії робота, виконана ковзанярем, дорівнює зміні енергії системи "ковзаняр-гиря", тобто сумі кінетичних енергій гирі і ковзаняра після кидка

$$A = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} MU^2 . \tag{3}$$

Підставляючи вираз (2) у (3), маємо

$$A = \frac{m(M+m)}{2M} V^2 . \tag{4}$$

Перевіримо розмірність

$$[A] = \frac{\text{кг}\times\text{кг}}{\text{кг}} \times\text{м}\times\text{с}^{-2} = \text{кг}\times\text{м}\times\text{с}^{2}\times\text{м} = \text{Н}\times\text{м} = \text{Дж} .$$

Використовуючи формулу (4): $A = \dfrac{5\cdot(70+5)}{2\cdot 70}2^2 \approx 10{,}7\,(\text{Дж})$.

Приклад 1.13. *Нейтрон влітає в речовину, яка складається з нерухомих атомів, ядра яких мають масу в n = 100 разів більші за масу нейтрона. Нейтрон стикається абсолютно пружно, змінюючи напрям швидкості після кожного удару на кут 90°. Яку кількість N таких зіткнень має здійснити нейтрон, щоб зменшити свою кінетичну енергію в k = 100 разів?*

$n = 100$
$k = 100$

$N - ?$

Розв'язок:

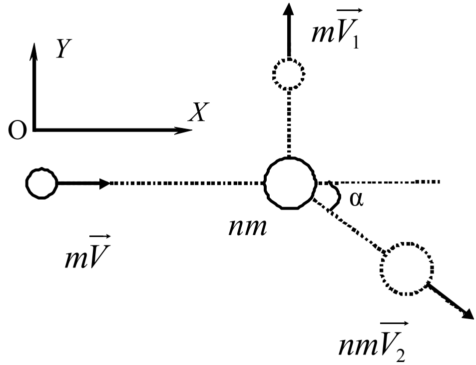


Рис. 1.10.

Розглянемо одне зіткнення нейтрона масою m з атомом масою nm. Нехай до зіткнення нейтрон мав швидкість V, після зіткнення – швидкість V_1, а швидкість атому після зіткнення V_2 і направлена вона під кутом α до початкового напряму руху нейтрона (рис. 1.10). Закон збереження імпульсу для даного зіткнення буде мати вигляд

$$m\vec{V} = m\vec{V}_1 + n\,m\vec{V}_2. \qquad (1)$$

Спроектувавши векторне рівняння (1) на осі координат, отримуємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{aligned} OX:&\quad mV = n\,mV_2\cos\alpha \\ OY:&\quad 0 = mV_1 - n\,mV_2\sin\alpha. \end{aligned} \qquad (2)$$

Крім того, оскільки удар абсолютно пружний, то сумарні кінетичні енергії нейтрона і атома до та після співудару будуть однакові:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{n\,mV_2^2}{2}. \tag{3}$$

Використовуючи рівняння (2) і (3), знайдемо зв'язок між швидкостями нейтрона до і після зіткнення. З (2) маємо:

$$\cos\alpha = \frac{V}{nV_2}, \quad \sin\alpha = \frac{V_1}{nV_2},$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{V_1^2}{n^2V_2^2} = 1 - \frac{V^2}{n^2V_2^2}, \text{ звідки } V^2 + V_1^2 = n^2V_2^2.$$

Спираючись на рівняння (3), можемо записати:

$V^2 - V_1^2 = nV_2^2$. Отже, $\dfrac{V^2 + V_1^2}{V^2 - V_1^2} = n$, або $V_1^2 = \dfrac{n-1}{n+1}V^2$.

Таким чином, в результаті одного співудару кінетична енергія нейтрона зменшується в k_0 разів

$$k_0 = \frac{\frac{1}{2}mV^2}{\frac{1}{2}mV_1^2} = \frac{V^2}{V_1^2} = \frac{n+1}{n-1}. \tag{4}$$

В результаті N зіткнень кінетична енергія зміниться в k разів

$$k = k_o^{\,N} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^N. \tag{5}$$

Отже,

$$N = \frac{\ln k}{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}. \tag{6}$$

Користуючись формулою (6), отримуємо:

$$N = \frac{\ln 100}{\ln\left(\frac{100+1}{100-1}\right)} \approx 230.$$

Приклад 1.14. *Визначити положення центра тяжіння однорідної круглої пластини з радіусом R, в якій вирізано квадратний отвір зі стороною а = R/2, як показано на рис. 1.11.*

R *a =R/2*	Розв'язок:
x – ?	

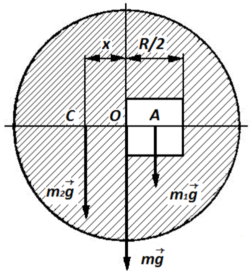


Рис. 1.11

Розмістимо пластинку з отвором так, щоб ось симетрії була горизонтальна. Уявно заповнемо отвір речовиною, з якої зроблена пластина. Тоді сила тяжіння всього тіла

$$mg = m_1g + m_2g,$$

де m_1g сила тяжіння квадрата, прикладена в центрі квадрату, m_2g – сила тяжіння пластинки з отвором, прикладена в центрі тяжіння пластинки в точці *C* (рис. 1.11).

Відносно вісі, що проходить через спільний центр тяжіння *O*, сума моментів всіх сил тяжіння дорівнює нулю

$$\frac{m_1gR}{4} - m_2gx = 0,$$

де x – відстань від точки *O* до точки *C* (центра тяжіння пластини з отвором). Звідси

$$x = \frac{m_1R}{4m_2}. \qquad (1)$$

Нехай h – товщина пластини, ρ – густина речовина, з якої вона виготовлена.

Тоді:

$$m_1 = \rho\left(\frac{R}{2}\right)^2 h = \frac{\rho R^2 h}{4},$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\pi R^2 h - \frac{\rho R^2 h}{4} = \frac{1}{4}\rho R^2 h\left[4\pi - 1\right].$$

Підставив в (1) вирази для m_1 та m_2, отримаємо:

$$x = \frac{R}{4(4\pi - 1)}.$$

Приклад 1.15. *Визначити момент інерції тонкого однорідного стрижня масою* m *та завдовжки* L*, який обертається відносно осі* OO'*, яка проходить через його кінець.*

m	
L	
$I - ?$	

Розв'язок:

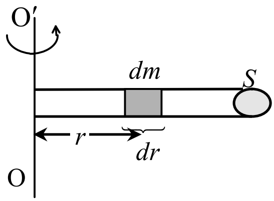


Рис. 1.12

Розіб'ємо стрижень на нескінченно велику кількість елементів масою dm і довжиною dr. Позначимо відстань від осі OO' до одного з таких елементів через r (рис. 1.12).

Момент інерції елемента стрижня

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho S dr.$$

Момент інерції всього стрижня

$$I = \int_0^L dI = \rho S \int_0^L r^2 dr = \frac{1}{3}\rho S L^3.$$

Маса стрижня $m = \rho S L$, де ρ – густина речовини, з якої виготовлений стрижень, S – площа поперечного перерізу стрижня.

Тому: $I = \frac{1}{3} m L^2$

Приклад 1.16. *Під яким мінімальним кутом* α *до горизонту може стояти драбина, яка доторкається верхнім кінцем до гладкої вертикальної стіни, якщо центр її маси знаходиться посередині. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою* $\mu = 0,4$.

Розв’язок:

$\mu = 0,4$
$\alpha - ?$

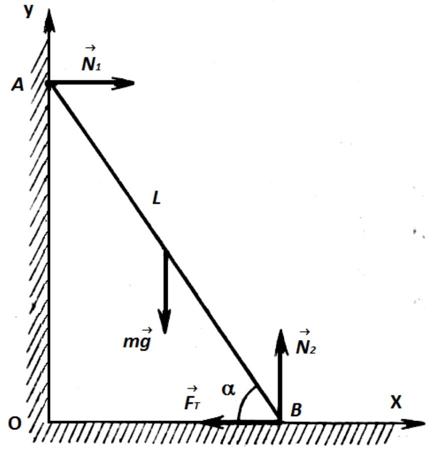


Рис. 1.13

На драбину діють сила тяжіння $m\vec{g}$, сили нормальних реакцій опори стіни $\vec{N}_1$ та підлоги $\vec{N}_2$, сила тертя $\vec{F}_T$ (рис. 1.13). Другий закон Ньютона для драбини матиме наступний вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_T\ ,$$

де m – маса драбини.

Драбина знаходиться в стані рівноваги, тому суми проекцій всіх сил на осі OX та OY дорівнюють нулю

$$\begin{aligned} &\mathrm{OX}: \quad N_1 - \mu N_2 = 0,\ F_T = \mu N_2 \\ &\mathrm{OY}: \quad N_2 = mg = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Нехай l – довжина драбини. Запишемо рівняння моментів всіх сил, що діють на драбину, відносно осі, що проходить через точку B

$$\vec{M}_{mg} + \vec{M}_{N_1} + \vec{M}_{N_2} + \vec{M}_{F_T} = 0.$$

Або в скалярному вигляді

$$N_1 l\sin\alpha - mg\cos\alpha \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

При цьому враховано, що моменти сил N_2 та F_T нульові, так як нульову довжину мають відповідні плечі. Звідси

$$tg\alpha = \frac{mg}{2N_1}. \tag{3}$$

Виразивши з другого рівняння системи (1) $N_2 = mg$ і підставив це значення в перше рівняння системи, знайдемо $N_1 = \mu mg$. Підставив цей вираз в (3), отримаємо:

$$\alpha = arctg\frac{1}{2\mu} \approx 52^0.$$

Приклад 1.17. *Вздовж дотичної до шківа маховика, який являє собою диск діаметром D = 75 см та масою m = 40 кг, прикладено силу F = 1 кН (рис. 1.14). Визначити кутове прискорення β та частоту обертання n маховика через час t = 10 с після початку дії сили, якщо радіус шківа r = 12 см. Силою тертя знехтувати.*

$D = 0{,}75$ м $r = 0{,}12$ м $m = 40$ кг $F = 1000$ Н $t = 10$ с	Розв'язок:
β – ? n – ?	

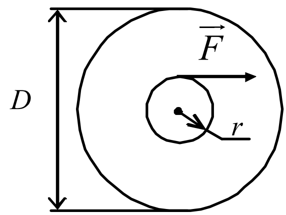


Рис. 1.14

Рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі має вигляд

$$I\beta = M, \tag{1}$$

де I – момент інерції тіла відносно осі обертання, β – кутове прискорення тіла, M – момент зовнішніх сил відносно цієї осі.

Для диску масою m і діаметром D, який обертається навколо осі симетрії, момент інерції

$$I=\frac{1}{2}m\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{1}{8}mD^2\,. \qquad (2)$$

Сили, прикладені до маховика, це – зовнішня сила F, сила тяжіння та сила реакції вала, на якому закріплено маховик (рис. 1.14). Напрямки двох останніх сил перетинають вісь обертання, і тому моменти цих сил відносно осі дорівнюють нулеві. Силу F прикладено вздовж дотичної до шківа, і тому її момент відносно осі обертання:

$$M=F\cdot r\,. \qquad (3)$$

Підставляючи вирази (3) і (2) у рівняння (1) для β, отримуємо

$$\frac{1}{8}mD^2\beta=F\cdot r$$

$$\beta=\frac{8Fr}{mD^2}\,. \qquad (4)$$

При рівноприскореному обертанні кутова швидкість ω зв’язана з кутовим прискоренням співвідношенням

$$\omega=\beta t\,, \qquad (5)$$

де t – час обертання. У формулі (5) вважається, що у момент часу $t=0$ тіло почало обертання з нерухомого положення. У свою чергу, частота обертання n та кутова швидкість ω також пов’язані між собою:

$$n=\frac{\omega}{2\pi}\,. \qquad (6)$$

Остаточно, враховуючи вирази (4-6), отримуємо

$$n=\frac{4Frt}{m\pi D^2}\,. \qquad (7)$$

Користуючись формулами (4) та (7), знаходимо

$$\beta=\frac{8\cdot 1000\cdot 0{,}12}{40\cdot(0{,}75)^2}\approx 42{,}7\left(\text{рад}\times\text{с}^{-2}\right),$$

$$n=\frac{4\cdot 1000\,\frac{\text{кг}\times\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 0{,}12\ \text{м}\cdot 10\ \text{с}}{40\ \text{кг}\cdot 3{,}14\cdot(0{,}75\ \text{м})^2}\approx 67{,}9\left(\text{с}^{-1}\right).$$

Приклад 1.18. *Циліндр скочується без проковзування по похилій площини, яка утворює кут* $\alpha = 30°$ *з горизонтом. Визначити прискорення а центру мас циліндра. Яким має бути коефіцієнт тертя* μ *між циліндром та площиною, щоб проковзування не відбувалося?*

$\alpha = 30°$
$a - ?$
$\mu - ?$

Розв'язок:

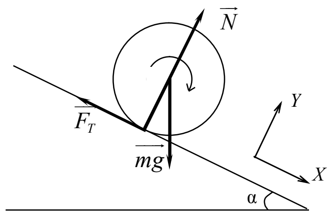


Рис.1.15

Для розв'язку даної задачі потрібно одночасно розглядати як другий закон Ньютона, так і основне рівняння динаміки обертального руху.

На циліндр діють сили: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила тертя $\vec{F}_T$ і сила реакції площини $\vec{N}$ (рис. 1.15). Отже, другий закон Ньютона для даної системи матиме вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T, \qquad (1)$$

де $\vec{a}$ – прискорення центра мас циліндру, m – його маса.

Рівняння обертального руху циліндра відносно його осі симетрії матиме вигляд

$$I\beta = RF_T, \qquad (2)$$

де I – момент інерції циліндра відносно цієї осі, β – кутове прискорення, R – радіус циліндру. В рівнянні (2) враховано, що напрямки сил тяжіння і реакції площини проходять через вісь обертання, і тому у правій частині рівняння необхідно враховувати лише момент сили тертя, яка направлена вздовж дотичної до поверхні циліндру.

Вибравши систему координат, як показано на рис.1. 14, і спроектувавши на її осі рівняння (1), отримуємо

$$\begin{aligned} \text{OX}: \quad & ma = mg\sin\alpha - F_T \\ \text{OY}: \quad & 0 = -mg\cos\alpha + N \end{aligned} . \qquad (3)$$

Зауважимо, що при коченні співвідношення $F_T = \mu \cdot N$, справедливе для ковзання, не виконується. При русі циліндра без проковзування a і β зв'язані між собою співвідношенням $a = \beta R$. З врахуванням цього, а також, виразивши з рівняння (2) F_T і підставивши в перше рівняння системи (3), отримуємо

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{I\beta}{R} = mg\sin\alpha - \frac{Ia}{R^2}.$$

Врахувавши, що для циліндру його момент інерції відносно осі симетрії $I = \frac{1}{2}mR^2$, остаточно отримуємо

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{mR^2 a}{2R^2},$$

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha. \qquad (4)$$

Рух буде відбуватися без проковзування, якщо F_T не перевищуватиме максимального значення сили тертя спокою $F_T = \mu N$, тобто, необхідно, щоб виконувалась умова

$$F_T \le F_{T0} \qquad (5)$$

З врахуванням (4) маємо:

$$F_T = \frac{Ia}{R^2} = \frac{mR^2}{2R^2}\frac{2}{3}g\sin\alpha = \frac{1}{3}mg\sin\alpha.$$

З другого рівняння системи (3) випливає, що $N = mg\cos\alpha$. Підставивши ці вирази в нерівність (5), отримуємо

$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha,$$

$$\mu \ge \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (6)$$

Використовуючи вирази (4) та (6), отримуємо:

$$a = \frac{2}{3}\cdot 9{,}81\cdot\sin 30^0 \approx 3{,}3\,(\text{м/с}^2), \qquad \mu \ge \frac{1}{3}tg\,30^0 \approx 0{,}2.$$

Приклад 1.19. *Диск масою m = 5 кг та радіусом R = 30 см обертається з частотою ω = 20 рад/с навколо осі, яка співпадає з його віссю симетрії (Рис. 1.16). Для гальмування диска до його плоскої поверхні притискають деяку іншу плоску поверхню і утримують її нерухомою. Сила, з якою притискають цю поверхню, дорівнює F = 200 Н. Через який час t диск зупиниться? Коефіцієнт тертя між поверхнями μ = 0,5.*

m = 5 кг
R = 0,3 м
ω = 20 рад/с
F = 200 Н
μ = 0,5

t – ?

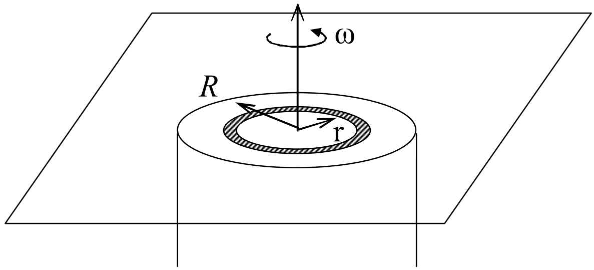


Рис. 1.16

Розв'язок:

Для розв'язку задачі скористаємося основним рівнянням динаміки обертального руху

$$I\beta = M \tag{1}$$

де I – момент інерції диску, $I = \dfrac{1}{2} m R^2$; β – кутове прискорення, з яким сповільнюється диск; M – момент сили тертя, яка діє на диск і спричинює сповільнення.

Для знаходження M розіб'ємо диск на тонкі циліндричні шари радіусом r і товщиною dr. Силу тертя $dF_{T,r}$, яка діє на кожен такий шар, можна знайти як добуток площі шару dS_r на тиск, з яким зовнішню плоску поверхню притискають до диску, і на коефіцієнт тертя

$$d\,F_{T,r} = d\,S_r \frac{F}{\pi R^2} \mu\,, \tag{2}$$

де πR^2 – площа поверхні всього диску. В свою чергу,

$$d\,S_r = 2\pi r\,d\,r\,.$$

Оскільки $dF_{T,r}$ направлена по дотичній до циліндричного шару, то відносно осі обертання момент сили dM_r, який діє на цей шар, може бути обчислений як

$$dM_r = rdF_{T,r} = \frac{2F\mu r^2}{R^2}dr\,. \qquad (3)$$

Для знаходження загального моменту сили тертя необхідно просумувати dM_r по всім шарам

$$M = \int_0^R dM_r = \int_0^R \frac{2F\mu r^2}{R^2}dr = \frac{2F\mu}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2F\mu}{R^2}\cdot\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R = \frac{2}{3}F\mu R \qquad (4)$$

З урахуванням виразів (1) та (4) для кутового прискорення диску, можемо записати

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{4F\mu}{3mR}. \qquad (5)$$

Тоді час, через який зупиниться диск

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{3mR\omega}{4F\mu}. \qquad (6)$$

Використовуючи формулу (6), знаходимо

$$t = \frac{3\cdot 5\text{кг}\cdot 0.3\text{м}\cdot 20\text{с}^{-1}}{4\cdot 200\dfrac{\text{кг}\times\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 0{,}5} \approx 0{,}2\,(\text{с}).$$

Приклад 1.20. *Платформа у вигляді суцільного однорідного диску обертається за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі, яка співпадає з віссю симетрії диску. На краю платформи стоїть людина, маса якої в n = 4 рази менша за масу платформи. Як і у скільки разів зміниться швидкість обертання платформи, якщо людина перейде ближче до центра на відстань r, що дорівнює половині радіуса платформи R?*

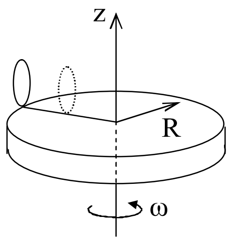


Рис. 1.17.

$n = 4$	Розв'язок:
$r = 0,5\,R$	Нехай вісь OZ – вісь обертання (рис. 1.17).
ω_2/ω_1 – ?	Оскільки платформа обертається за інерцією,

то можна вважати, що момент зовнішніх сил відносно осі обертання дорівнює нулеві. Отже, згідно з законом збереження моменту імпульсу, момент імпульсу L системи "платформа-людина" відносно осі OZ залишається сталим. Тобто,

$$L_1 = L_2\,. \tag{1}$$

де L_1 – момент імпульсу системи до того моменту часу, як людина здійснила свій перехід, L_2 – після переходу.
У свою чергу

$$\begin{aligned} L_1 &= \omega_1 I_1 \\ L_2 &= \omega_2 I_2 \end{aligned}\,. \tag{2}$$

де ω_1 і ω_2 – кутові швидкості обертання платформи з людиною до і після переходу, відповідно; I_1 та I_2 – моменти інерції системи відносно осі OZ, які дорівнюють сумі моментів інерції людини I' та платформи I''

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' \\ I_2 &= I_2' + I_2'' \end{aligned}\,. \tag{3}$$

Індекси 1 і 2 відповідають моментам часу до і після переходу. Після переміщення людини момент інерції платформи не змінюється, тобто $I_1' = I_2'$ і дорівнює моменту інерції диску радіусом R та масою M відносно його осі симетрії:

$$I_1' = I_2' = \frac{1}{2} M\,R^2\,. \tag{4}$$

Якщо розглядати людину як матеріальну точку масою m, то

$$\begin{aligned} I_1'' &= m\,R^2, \\ I_2'' &= m\,r^2 = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m\,R^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Підставляючи (4) та (5) у (3), а (3) та (2) до (1), отримуємо

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2 = \frac{1}{2} R^2 (M + 2m)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{4} m R^2 = \frac{1}{4} R^2 (2M + m)$$

$$\omega_1 \frac{1}{2} R^2 (M + 2m) = \omega_2 \frac{1}{4} R^2 (2M + m)$$

$$2\omega_1 m \left(\frac{M}{m} + 2 \right) = \omega_2 m \left(2\frac{M}{m} + 1 \right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2\left(\frac{M}{m} + 2 \right)}{\left(2\frac{M}{m} + 1 \right)} \qquad (6)$$

За умовою задачі $\frac{M}{m} = n = 4$, тому

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2(n+2)}{(2n+1)} = \frac{2\cdot(4+2)}{(2\cdot 4+1)} = \frac{4}{3}.$$

Таким чином, після переходу людини з краю платформи ближче до центру швидкість обертання платформи зросте у 4/3 рази.

Приклад 1.21. *Визначити кінетичну енергію тонкого обруча масою M, що котиться без ковзання горизонтальною поверхнею зі швидкістю v (рис. 1.18).*

M

v

$E_k - ?$

Розв’язок:

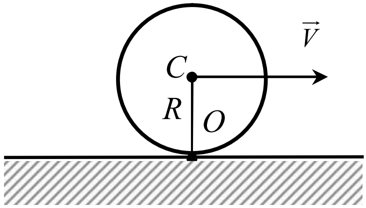


Рис. 1.18

Розглядаємо рух обруча як обертання навколо миттєвої осі, яка проходить перпендикулярно до його площини через точку дотику О обруча й поверхні. Кінетична енергія обруча дорівнює $E_k = \dfrac{I_0\omega^2}{2}$. Момент інерції відносно осі О I_0 можна виразити через момент інерції відносно осі *C* I_c. Згідно із теоремою Штейнера: $I_0 = I_C + MR^2$ (*R* – радіус обруча).

Отже, $I_0 = 2MR^2$, $v = \omega R$, $\omega = \dfrac{v}{R}$.

Підставляючи I_0 та ω у формулу для енергії E_k, одержимо

$$E_k = Mv^2$$

Приклад 1.22. *Добове обертання Землі зумовлює відхилення поверхні води в річках від горизонтального положення. Обчислити кут нахилу поверхні води в річці до горизонтальної поверхні, якщо річка тече на широті* φ *з півночі на південь. Швидкість течії* v.

φ
V

α – ?

Розв’язок:

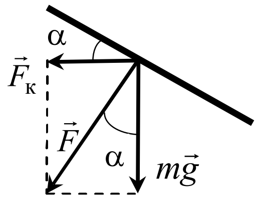


Рис. 1.19

Розглянемо довільний елемент поверхні води (рис. 1.19). На нього діють:

1) сила тяжіння $m\vec{g}$;

2) сила інерції Коріоліса $\vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$, модуль якої дорівнює $F_к = 2mv\omega\sin\varphi$.

Ці дві сили взаємно перпендикулярні, а їх рівнодіюча $\vec{F}$ перпендикулярна до поверхні рівня води, який встановиться в річці. Охарактеризуймо його кутом нахилу α до горизонту і остаточно запишемо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_k}{mg} = \frac{2mv\omega\sin\varphi}{mg} = \frac{2v\omega\sin\varphi}{g}$$

Приклад 1.23. *π-мезон є нестабільною частинкою. Власний час життя π-мезона $\tau_0 = 2,6\cdot10^{-8}$ с$^{-1}$. Яку відстань S пролетить π-мезон до розпаду, якщо він рухається зі швидкістю V = 0,99 с*

(с – швидкість світла у вакуумі)?

$\tau_0 = 2,6\cdot10^{-8}$ с$^{-1}$ $V = 0,99$с	Розв'язок: Згідно до виразу для лоренцевого сповільнення часу
S – ?	

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

де τ_0 – проміжок часу у системі координат, яка рухається разом з тілом зі швидкістю V (у власній системі координат), τ – проміжок часу у нерухомій системі координат.

В даній задачі τ_0 – власний час життя π-мезона, τ – час життя π-мезона у системі відліку, яка пов'язана зі спостерігачем на Землі.

За час τ π-мезон, рухаючись рівномірно відносно Землі, подолає відстань S:

$$S = \tau V \text{, або } S = \frac{\tau_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Підставляючи числові значення у формулу (2), отримуємо

$$S = \frac{2,6\cdot10^{-8}\cdot0,99\cdot3\cdot10^{8}}{\sqrt{1-(0,99)^2}} \approx 54,7(\text{м}).$$

Задачі для самостійного розв'язку

Кінематика

1.1. Точка рухається в площині XY за законом: $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1-\beta t)$, α, $\beta = const$, α, $\beta > 0$. Знайти: а) рівняння траєкторії руху; б) вектори швидкості та прискорення та їх модулі в залежності від часу.

1.2. Радіус-вектор точки А відносно початку координат змінюється за законом $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$; $\alpha, \beta = const$. Знайти: а) рівняння траєкторії руху точки; б) залежність від часу векторів швидкості $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$, а також модулів цих векторів; в) залежність від часу кута φ між векторами швидкості та прискорення.

1.3. За проміжок часу τ точка пройшла половину кола радіуса R. Розрахувати за цей час: а) середнє значення модуля швидкості $\langle|v|\rangle$; б) модуль середнього вектора швидкості $\langle|\vec{v}|\rangle$.

1.4. Частинка рухається в додатному напрямку вісі OX так, що її швидкість змінюється за законом $v = \alpha\sqrt{x}$, де α – додатна стала. В момент часу $t = 0$ частинка знаходиться в точці $x = 0$. Знайти: а) залежності швидкості та прискорення частинки від часу; б) середню швидкість частинки за час, протягом якого вона пройде перші s метрів шляху.

1.5. Точка рухається уповільнюючись по прямій з прискоренням, модуль якого залежить від швидкості v за законом $a = \alpha\sqrt{v}$, де $\alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$. В початковий момент часу $t_0 = 0$ швидкість точки дорівнює v_0. Який шлях s пройде точка до зупинки? За який час t цей шлях буде пройдений?

1.6. З вишки висотою $h = 10$ м стрибає спортсмен і через час $t = 1{,}8$ с падає у воду. На скільки опір повітря збільшує час стрибка? Початкову швидкість прийняти рівною нулю.

1.7. Камінь кинули з вишки в горизонтальному напрямку. Через $t = 2$ с він впав на землю на відстані $S = 40$ м від вишки.

Визначити висоту вишки h, початкову v_0 та кінцеву v швидкості каменя. Скласти рівняння траєкторії каменя. Опір повітря не враховувати.

1.8. Тіло кинуто вертикально вгору з швидкістю $v_0 = 10$ м/с. На якій висоті h швидкість тіла буде в $n = 2$ рази меншою? Опором повітря нехтувати.

1.9. Аеростат піднімається вертикально вгору зі сталою швидкістю v_0. До аеростату прив'язаний на мотузці вантаж. Мотузку перерізають в той момент часу, коли вантаж знаходиться на висоті h_0. Скільки часу вантаж буде падати на землю? Яка швидкість вантажу при торканні з поверхнею Землі? Опором повітря знехтувати.

1.10. На якій висоті швидкість тіла, кинутого під кутом $\alpha_0 = 45^0$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с, буде складати з горизонтом кут $\alpha = 30^0$? Опір повітря не враховувати.

1.11. З висоти h над поверхнею землі тіло кинуте під кутом α до горизонту з швидкістю v_0. Чому дорівнює швидкість v, з якою тіло падає на землю?

1.12. Автомобіль рухався наступним чином: половину шляху він пройшов зі швидкістю $V_1 = 80$ км/год, а частину шляху, яка залишилися, він половину часу рухався зі швидкістю $V_2 = 70$ км/год, а другу половину – з $V_3 = 60$ км/год. Знайти середню швидкість $\langle V \rangle$ автомобіля.

1.13. Тіло, рухаючись з сталим прискоренням із стану спокою, пройшло деякий шлях. Чому дорівнює відношення середньої швидкості тіла на другій половині шляху до середньої швидкості на першій половині шляху?

1.14. Два тіла кинуті вертикально вгору з однаковими початковими швидкостями v_0 та проміжком часу між кидками τ. Перше тіло кинуте з поверхні землі, друге тіло кинуте з деякої висоти h_0. Через який проміжок часу тіла будуть на однаковій висоті?

1.15. Два тіла кинуті з однією і тією же швидкістю під кутами α і $(\pi/2)-\alpha$ до горизонту. Знайти відношення найбільших висот, на які піднімалися тіла.

1.16. В морі рухаються два кораблі з швидкостями $\boldsymbol{v_1}$ та $\boldsymbol{v_2}$ під кутом α один до одного. Знайти модуль швидкість другого корабля відносно першого та напрямок вектора швидкості.

1.17. Тіло, що вільно падає, пройшло останні l = 63,7 м за час t = 1 с. З якої висоти падало тіло?

1.18. Камінь кинули під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту зі швидкістю v_0=10 м/с. Через який час камінь буде на висоті h = 1 м?

1.19. Під яким кутом до горизонту треба кинути тіло, щоб дальність польоту була в чотири рази більша, ніж найбільша висота підйому? Опором повітря знехтувати.

1.20. Нормальне прискорення точки, що рухається по колу радіусом r = 4 м, змінюється за законом $a_n = d + bt + ct^2$. Знайти тангенційне прискорення точки a_t, шлях s, який пройшло тіло за час t_1 = 6 с після початку руху, та повне прискорення a в момент часу t_2 = 2/3 с, якщо d = 1 м/с^2, b = 3 м/с^3, c = 2,25 м/с^4.

1.21. Точка рухається в площині XY за законом: $x = A \sin\omega t$, $y = A(1 - \cos\omega t)$, A, ω – додатні сталі. Знайти шлях s, що проходить точка за час τ, і кут між векторами швидкості та прискорення.

1.22. Знайти кутову швидкість обертання ω Землі навколо своєї вісі та лінійні швидкості v точок на поверхні Землі на екваторі та на географічній широті $\varphi = 51^0$.

1.23. Точка рухається по колу з швидкістю $v = \alpha t$, де α = 0,5 м/с^2. Знайти повне прискорення a точки в момент, коли вона пройде n = 0,1 довжини кола після початку руху.

1.24. Залежність швидкості матеріальної точки від часу при одномірному русі має вигляд, наведений на рис 1.20. Вважаючи, що в момент часу t = 0 точка знаходилась в початку координат, побудувати залежності прискорення матеріальної точки, її координати та пройденого шляху від часу.

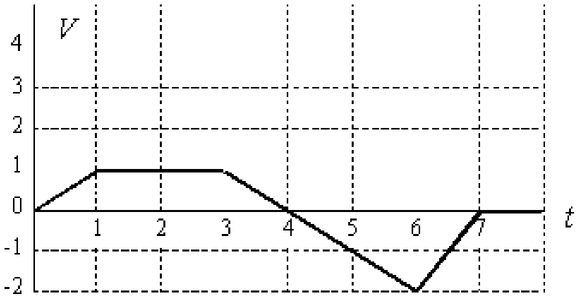


Рис.1.20.

1.25. Тіло, що має певну початкову швидкість, рухається рівноприскорено. За час t воно пройшло шлях S, збільшивши швидкість при цьому в n разів. Знайти прискорення, з яким рухається тіло.

1.26. Радіус-вектор матеріальної точки змінюється за законом $\vec{r}(t) = \left(1+t^2\right)\vec{i} + t^2\vec{j} + 3\vec{k}$. Знайти: а) шлях, який проходить точка за третю секунду; б) кут між векторами V і a у момент часу t = 3 с; в) середню швидкість за перші десять секунд руху.

1.27. Знайти швидкості точок A, B, C, D обруча (рис. 1.21), який рухається без проковзування по горизонтальній поверхні, якщо швидкість поступального руху центру обруча дорівнює V.

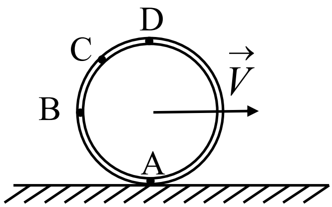


Рис.1.21.

1.28. Точка обертається по колу радіусом r навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A+Bt+Ct^2$. Знайти повне прискорення точки в момент часу t.

1.29. Нерухоме тіло починає обертатися по колу з кутовим прискоренням $\beta = t(1+2t)$ рад/с^2. Скільки повних обертів виконає тіло за перші 10 секунд руху? Чому дорівнює кут між векторами швидкості V та повного прискорення a у цей момент часу?

1.30. У першому наближенні можна вважати, що електрон в атомі водню рухається по коловій орбіті зі сталою швидкістю. Знайти кутову швидкість ω обертання електрона навколо ядра та його нормальне прискорення a_n. Радіус орбіти електрона $r = 0{,}5\cdot10^{-10}$ м, швидкість електрона на орбіті $v = 2{,}2\cdot10^6$ м/с.

1.31. Знайти швидкість та прискорення частинки, положення якої в кожний момент часу задається радіус вектором:
а) $\vec{r} = \sin(\omega t)\cdot\exp(-\alpha t)\vec{i} + \sin(\omega t)\cdot\exp(-\alpha t)\vec{j}$, $\alpha, \omega = const$
б) $\vec{r} = \sin(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j} + t^2\exp(-\lambda t)\vec{k}$, $\lambda, \omega = const$.

1.32. Знайти залежність положення частинки та її швидкості від часу, якщо її прискорення задається виразом:
а) $\vec{a} = \alpha t^2\vec{i} - \omega^2\sin(\omega t)\vec{j} + \lambda^2\exp(\lambda t)\vec{k}$, $\alpha, \omega, \lambda = const$;
б) $\vec{a} = \alpha t^2\vec{i} - \dfrac{v_0}{2}\cos(\omega t)\vec{j} + \exp(\lambda t)\vec{k}$, $\alpha, \omega, \lambda = const$.
В початковий момент часу частинка знаходилась в точці початку відліку та мала швидкість а) $\vec{v}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + v_0\vec{k}$;
б) $\vec{v}_0 = 0\vec{i} + \dfrac{v_0}{2}\vec{j} + \dfrac{v_0}{2}\vec{k}$.

1.33. Швидкість частинки задається виразом
а) $\vec{v} = \omega\sin(\omega t)\vec{i} + \cdot\omega\cos(\omega t + \varphi_0)\vec{j} + \lambda\exp(-\lambda t)\vec{k}$, $\lambda, \omega, \varphi_0 = const$;
б) $\vec{v} = \omega\sin(\omega t)\vec{i} + \lambda^2\exp(-\lambda t)\vec{j} + \alpha\cos^2(\omega t)\vec{k}$, $\lambda, \omega, \alpha = const$.
Знайти залежність радіус вектора та прискорення частинки від часу, якщо частинка в початковий момент знаходилась в точці з радіус-вектором а) $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$; б) $\vec{r}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + z_0\vec{k}$.

1.34. Знайти залежність від часу кута обертання та кутового прискорення частинки, яка обертається з кутовою швидкістю а) $\vec{\omega} = t^2\vec{i} + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\vec{j} + \lambda \exp(-\lambda t)\vec{k}$, $\lambda, \omega_0, \varphi_0 = const$;

б) $\vec{\omega} = \alpha(t^3 + 5t^2)\vec{i} + \lambda t \exp(-\lambda t)\vec{j} + \omega_0 \cos(\omega_0 t)\vec{k}$, $\lambda, \omega_0, \alpha = const$.

В початковий момент часу кут обертання частинки задавався виразом $\vec{\varphi}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

1.35. Частинка обертається навколо осі. Знайти часову залежність кутового прискорення та кутової швидкості, якщо залежність кута обертання задається виразом:

а) $\vec{\varphi} = \lambda \exp(-\lambda t)\sin(\omega_0 t)\vec{i} + t^2\omega_0 \sin(\omega_0 t)\vec{j}$, $\lambda, \omega_0, = const$;

б) $\vec{\varphi} = \omega_0 t^2 \cos(\omega_0 t)\vec{i} + \omega_0 t^2 \sin(\omega_0 t)\vec{j} + \dfrac{\exp(-\lambda t)}{\lambda}\vec{k}$, $\lambda, \omega_0, = const$;

в) $\vec{\varphi} = e^{-\lambda t^2} \sin^2(\omega t)\vec{i} + e^{-\lambda t^2} \cos^2(\omega t)\vec{j}$, $\lambda, \omega, = const$.

1.36. Частинка обертається навколо осі. Залежність кутового прискорення від часу задається виразом:

$$\vec{\beta} = \omega_0 \cos(\omega_0 t)\vec{i} + \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)\vec{j} + \frac{\exp(-\lambda t)}{\lambda}\vec{k}, \ \lambda, \omega_0, = const.$$

Знайти залежність кута та кутової швидкості від часу. В початковий момент часу частинка мала кутову швидкість $\vec{\omega}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega_0\vec{k}$ та знаходилась в точці початку відліку.

Динаміка

1.37. Тіло рухається по горизонтальній площині під дією сили F, спрямованій під кутом α до горизонту. Початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти прискорення тіла, якщо його маса m, а коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює μ. При якому значенні сили рух буде рівномірним?

1.38. Автомобіль починає рухатись із стану спокою вгору по похилій площині з кутом нахилу α та коефіцієнтом тертя μ. Знайти час t, за який автомобіль пройде шлях l.

1.39. Від легкого поштовху тіло почало рівномірно ковзати вниз по похилій площині з кутом нахилу α до горизонту. Знайти коефіцієнт тертя ковзання.

1.40. Вантаж масою $m = 20$ кг переміщується вгору по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$ і коефіцієнтом тертя $\mu = 0{,}05$. До вантажу паралельно основі прикладена сила $F = 500$ Н. Знайти прискорення вантажу.

1.41. Дах будинку нахилено під кутом $\alpha = 20^0$ до горизонту. Чи пройде людина вгору по покритому льодом даху, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}03$?

1.42. Тіло масою $m_1 = 3$ кг ковзає по горизонтальній поверхні під дією вантажу масою $m_2 = 1$кг, прикріпленого до кінця шнура. Шнур прив'язаний до тіла масою m_1 і перекинутий через нерухомий блок. Визначити прискорення системи і силу натягу шнура.

1.43. Два бруски масами $m_1 = 0{,}4$ кг та $m_2 = 0{,}6$ кг рухаються без тертя рівноприскорено під дією сили $F = 2$ Н, прикладеної до другого бруска. З яким прискоренням рухаються бруски? Яка сила натягу нитки між ними?

1.44. До бруска масою $m_1 = 2$ кг, що лежить на столі, прив'язана нитка. До другого кінця нитки, перекинутої через закріплений на краю стола блок, прив'язаний вантаж масою $m_2 = 0{,}5$ кг. Визначити коефіцієнт тертя μ бруска по столу, якщо, рухаючись без початкової швидкості, брусок за час $t = 2$ с пройшов шлях $s = 1$ м.

1.45. Тіло масою m_1 рухається вгору по похилій площині під дією зв'язаного з ним невагомою ниткою вантажу масою m_2. (рис. 1.22). Початкові швидкості тіла і вантажу

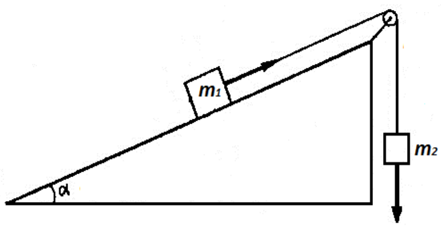


Рис. 1.22.

дорівнюють нулю, коефіцієнт тертя тіла по площині дорівнює μ, кут нахилу площини α. Визначити прискорення, з яким рухається тіло, та силу натягу нитки. Блок невагомий і обертається без тертя.

1.46. Планета являє собою однорідну кулю густиною ρ. Чому дорівнює період обертання штучного супутника, що рухається поблизу поверхні планети?

1.47. Два вантажі масами m_1 = 4 кг та m_2 = 1 кг зв'язані ниткою, перекинутою через блок, який прикріплений до вершини призми, і можуть ковзати по граням цієї призми (рис.1.23). Початкові швидкості вантажів дорівнюють нулю.

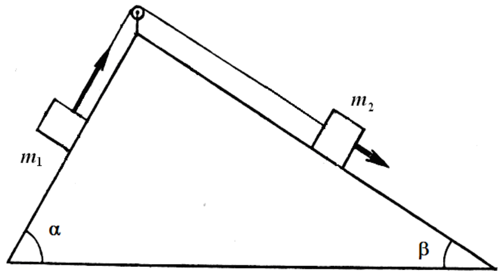


Рис. 1.23.

Знайти прискорення вантажів, якщо $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, а коефіцієнт тертя μ = 0,2.

1.48. В скільки разів період обертання супутника, що обертається по коловій орбіті на висоті h над поверхнею Землі (радіус Землі R), перевищує період супутника, що обертається безпосередньо біля поверхні планети (h = 0)?

1.49. Під дією сили F, спрямованої вздовж горизонтальної площини, по її поверхні починає ковзати без початкової швидкості тіло масою m = 4 кг і через час t = 3 с після початку руху набуває швидкості v = 0,6 м/с. Знайти силу F, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ = 0,2.

1.50. Тіло масою m = 20 кг тягнуть з силою F = 120 Н по горизонтальній поверхні. Якщо ця сила прикладена під кутом

$\alpha_1 = 60^0$ до горизонту, то тіло рухається рівномірно. З яким прискоренням буде рухатись тіло, якщо цю силу прикласти під кутом $\alpha_2 = 30^0$ до горизонту?

1.51. Радіус Місяця приблизно в $n_1 = 3{,}8$ разів менший, ніж радіус Землі, а маса Місяцю в $n_2 = 81$ разів менша, ніж маса Землі. Знайти прискорення вільного падіння на Місяці, якщо відомо, що біля поверхні Землі прискорення $g_з = 9{,}8$ м/с^2. В скільки разів треба змінити початкову швидкість, щоб кинуте вертикально вгору тіло піднялося на так ж висоту на Місяці, як на Землі?

1.52. Трактор, рухаючись вгору з кутом нахилу α, тягне санчата масою m. На шляху S швидкість санчат зростає від v_0 до v. Вважаючи коефіцієнт тертя санчат по дорозі рівним μ, знайти силу тяги.

1.53. До кінців нитки, перекинутої через нерухомий блок, прикріплені вантажі масами $m_1 = 1$ кг та $m_2 = 2$ кг. Обидва вантажі рухаються з прискоренням $a = 3{,}27$ м/с^2. Знайти значення прискорення вільного падіння для даної місцевості.

1.54. Знайти радіус кола, по якому автомобіль може рухатись з швидкістю $v = 36$ км/год., якщо мінімальний коефіцієнт тертя ковзання, при якому автомобіль не “заносить”, $\mu = 0{,}2$.

1.55. Куля масою m висить на мотузці довжиною l, прикріпленій до пласкої стінки. Знайти силу, з якою куля тисне на стіну, якщо її радіус R.

1.56. Водій автомобіля різко загальмував при швидкості $v = 72$ км/год. Через який час τ автомобіль зупиниться, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}6$? Чому дорівнює гальмівний шлях l автомобіля?

1.57. Тіло масою $M = 20$ г лежить на горизонтальній поверхні. До нього прикладають силу $F = 0{,}1$ Н, спрямовану під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. За який час t тіло пройде шлях $S = 80$ см, якщо коефіцієнт тертя між ним та площиною $\mu = 0{,}2$?

1.58. Дана система (рис.1.24).

Маси вантажів m і M, коефіцієнт тертя μ між меншим вантажем і площиною відомі.

Знайти прискорення вантажів.

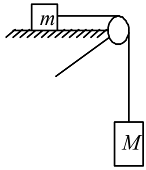


Рис.1.24.

1.59. Поїзд вагою $P = 4400$ кН рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю $V = 27$ км/год. Знайти час, протягом якого зможе зупинитися поїзд, якщо гальмуюча сила $F = 44$ кН.

1.60. На ідеально гладкій ($\mu = 0$) нахиленій площині, що утворює кут α з горизонтом, лежить дошка масою M. З яким прискоренням і в якому напрямі повинна бігти людина масою m, щоб дошка не ковзала вниз вздовж площини.

1.61. Плита масою $M = 30$ кг і довжиною $L = 1$ м лежить на ідеально гладкій горизонтальній поверхні (рис.1.25). На краю плити знаходиться тіло масою $m = 2$ кг, до якого прикладена горизонтальна сила $F = 10$ Н. Коефіцієнт тертя між тілом і плитою $\mu = 0{,}2$. Вважаючи, що обидва тіла рухаються, знайти 1) прискорення тіл a_1 і a_2 відносно землі; 2) час t, за який верхнє тіло сповзе з плити.

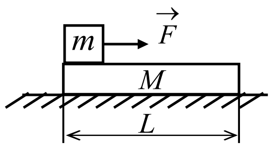


Рис.1.25.

1.62. Дві пружини з коефіцієнтами пружності k_1 і k_2 з’єднали послідовно. З яким коефіцієнтом пружності потрібно взяти пружину, щоб вона замінила ці дві послідовно з’єднані пружини?

1.63. Визначити, з якою частотою ω потрібно обертати диск, щоб тіло, яке знаходиться на відстані $l = 10$ см від вісі обертання, почало ковзати (коефіцієнт тертя між тілом і диском $\mu = 0{,}2$).

1.64. Велосипедист проходить закруглення радіусом R зі швидкістю V. Який повинен бути коефіцієнт тертя, щоб він не впав? На який кут йому потрібно нахилитися?

1.65. Ракета встановлена на поверхні Землі для запуску у вертикальному напрямі. При якій мінімальній швидкості V, наданій ракеті, вона віддалиться від поверхні на відстань R, що дорівнює радіусу Землі? Вважати, що на ракету діє тільки гравітаційна сила з боку Землі.

1.66. На якій висоті h над полюсом Землі прискорення вільного падіння зменшується а) на один процент; б) в два рази?

1.67. Уявіть собі, що ви створили модель Сонячної системи в η разів меншу, ніж дійсна. Однак, середні густини Сонця і планет при цьому залишилися незмінними. Як зміняться при цьому періоди обертання планет навколо Сонця?

1.68. Супутник, що рухається по коловій орбіті радіусом $R = 2\times10^4$ км в екваторіальній площині Землі з Заходу на Схід, з'являється над певним пунктом на екваторі через кожні $\tau = 11{,}6$ год. Розрахувати на підставі цих даних масу $M_з$ Землі. Значення гравітаційної сталої вважати відомим.

1.69. Тіло починають піднімати вгору вздовж похилої площини, прикладаючи до нього горизонтальну силу, величина якої вдвічі більше, ніж сила тяжіння. Висота похилої площини $h = 3$ м, її довжина $l = 5$ м. Знайдіть прискорення тіла a, якщо коефіцієнт тертя дорівнює тіла по площині $\mu = 0{,}2$. За який час t тіло підніметься на вершину площини?

1.70. При швидкості снігоходу $v_0 = 100$ км/год водій вимкнув двигун. Який шлях пройде снігохід до зупинки, якщо коефіцієнт тертя снігоходу по снігу $\mu = 0{,}3$.

1.71. Знайти швидкість v, яку потрібно надати супутнику для того, щоб вивести його на кругову орбіту на висоті $h = 1600$ км над поверхнею Землі. Вважати, що радіус Землі $R = 6400$ км, прискорення вільного падіння біля поверхні Землі $g = 9{,}81$ м/с^2.

1.72. На кінці лінійки довжиною L, яка лежить на горизонтальній площині, знаходиться маленький вантаж.

Лінійку починають піднімати за кінець на якому лежить вантаж, з постійною швидкістю u, яка спрямована вертикально вгору. Через який час t вантаж почне зісковзувати? Коефіцієнт тертя між вантажем і лінійкою μ.

1.73. На скільки подовжиться риболовна волосінь жорсткістю $k = 0{,}5$ кН/м, якщо її піднімати вертикально вгору в повітрі разом з рибою масою $m = 200$ г? Розглянути два випадки: волосінь піднімають рівномірно та волосінь піднімають рівноприскорено з прискоренням $a = 5$ м/с^2.

1.74. До пружини довжиною $l_0 = 5$ см прикріпили вантаж масою $m = 300$ г. Якою стала довжина l пружини? Як зміниться довжина пружини, якщо вантаж почне опускатися з прискоренням $a = 2$ м/с^2. Жорсткість пружини $k = 300$ Н/м.

1.75. Санчата з сумарним вантажем $m = 45$ кг починають розганятися по горизонтальній поверхні під дією сили $F = 100$ Н, спрямованої під кутом $\alpha = 30^o$ до горизонту. Знайти коефіцієнт тертя між санчатами та дорогою, якщо за перші $t = 5$ с санчата розігнались до швидкості $v = 2{,}5$ м/с. Яку роботу A_t виконали сили тертя за цей проміжок часу?

1.76. На горизонтальній поверхні лежать два вантажі масами $m_1 = 2$ кг та $m_2 = 3$ кг. Вантажі зв'язані невагомою нерозтяжною ниткою. З яким прискоренням будуть рухатися тіла, якщо на більш важке подіяти горизонтальною силою $F = 10$ Н? Коефіцієнт тертя між вантажами та поверхнею $\mu = 0{,}05$.

1.77. Дві гирі зв'язані між собою невагомою нерозтяжною ниткою, яку перекинули через невагомий блок таким чином, що більш важка масою $m_1 = 2$ кг знаходиться вище легшої на відстань $l = 100$ см. Знайти масу m_2 другої гирі, якщо після початку руху гирі опинилися на одній висоті через одну секунду після початку руху.

1.78. На екваторі деякої планети тіло має вагу, вдвічі меншу, ніж на полюсі. Густина речовини цієї планети $\rho = 3\cdot10^3$ кг/м^3. Визначити період обертання цієї планети.

1.79. В кабіні ліфта розміщений динамометр, до якого підвішений вантаж масою m. Визначити покази динамометра, якщо: а) ліфт не рухається; б) ліфт піднімається вгору з прискоренням a_1; в) ліфт опускається вниз з прискоренням a_2; г) ліфт вільно падає.

Закони збереження в механіці

1.80. Тіло масою m починає ковзати по похилій площині довжиною l, яка утворює кут нахилу α з горизонтом. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ. Знайти роботи сили тертя A_t та сили тяжіння A_{mg} за час ковзання тіла. Визначити потужність сили P_t тертя в момент часу t після початку руху.

1.81. Знайти роботу сили $F = 30$ Н, в результаті дії якої вантаж масою $m = 2$ кг піднімається по похилій площині на висоту $h = 2{,}5$ м з прискоренням $a = 5$ м/с^2. Сила діє паралельно похилій площині. Тертям о площину знехтувати.

1.82. Під дією сталої сили тіло масою $m = 100$ кг піднімається на висоту $h = 15$ м протягом $t = 10$ с. Визначити роботу цієї сили. Початкова швидкість тіла дорівнює нулю.

1.83. Яку мінімальну роботу необхідно виконати, щоб телеграфний стовп масою $m_1 = 200$ кг, до вершини якого прикріплена хрестовина масою $m_2 = 30$ кг, перевести з горизонтального положення у вертикальне. Довжина стовпа $l = 10$ м.

1.84. Санчата з’їжджають з гори висотою h і кутом нахилу α і далі рухаються по горизонтальній ділянці. Коефіцієнт тертя на всьому шляху санчат однаковий і дорівнює μ. Визначити відстань s, яку пройдуть санчата по горизонтальній ділянці до повної зупинки.

1.85. Яку мінімальну роботу треба виконати, щоб однорідний куб, який знаходиться на горизонтальні площині, перевернути з однієї грані на сусідню? Маса куба $m = 100$ кг, довжина ребра $l = 50$ см.

1.86. Частинка здійснила переміщення за деякою траєкторією з точки з радіус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ в точку з радіус-вектором $\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. При цьому на частинку діяли деякі сили, одна з яких $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Знайти роботу A, яку виконала сила F.

1.87. Тіло кинуте вертикально вгору з швидкістю $v = 49$ м/с. На якій висоті його кінетична енергія буде в два рази більша, ніж потенціальна? Опором повітря знехтувати.

1.88. Камінь кинули під кутом до горизонту з швидкістю $\boldsymbol{v_0}$. Нехтуючи опором повітря, визначити, на якій висоті від горизонту швидкість каміння зменшиться вдвічі.

1.89. Під яким кутом до горизонту треба кинути камінь, щоб його кінетична енергія в точці максимального підйому складала 25% його кінетичної енергії в точці кидку?

1.90. В результаті вибуху камінь розлетівся на три частини. Два шматки летять під прямим кутом один до одного: шматок масою $m_1 = 1$ кг зі швидкістю $V_1 = 12$ м/с, шматок масою $m_2 = 2$ кг з швидкістю $V_2 = 8$ м/с. Третій шматок відлітає з швидкістю $V_3 = 40$ м/с. Яка його маса і в якому напрямку він летить?

1.91. Платформа з піском рухається зі швидкістю $v_1 = 1$ м/с по горизонтальній поверхні без тертя. Назустріч платформі летить куля масою $m = 3$ кг зі швидкістю $v_2 = 8$ м/с, спрямованій під кутом $\alpha = 60^0$ до горизонту. Після зустрічі з платформою куля застряє в піску. З якою швидкістю V і в який бік буде рухатися платформа після зустрічі з кулею? Маса платформи з піском $M = 10$ кг.

1.92. Між двома тілами з масами m_1 та m_2 відбувається абсолютно непружне зіткнення. Швидкості тіл до зіткнення V_1 та V_2. Визначити зміну кінетичної енергії при зіткненні.

1.93. Тіло масою m_1 зіштовхується абсолютно непружно з тілом масою m_2. Знайти частку q втраченої при цьому кінетичної енергії, якщо тіло масою m_2 до зіткнення було в спокої.

1.94. Вантаж масою m зісковзує без тертя з похилої дошки на нерухому платформу. З якою швидкістю почне рухатися платформа, коли вантаж впаде на неї? Маса платформи M, висота початкового положення вантажу над рівнем платформи h, кут нахилу дошки до горизонту α. Тертя відсутнє.

1.95. З верхньої точки похилої площини довжиною $l = 18$ м, що утворює кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом, зісковзує тіло масою $m = 2$ кг. Яка кількість теплоти Q виділяється при терті тіла по площині, якщо початкова швидкість тіла дорівнює нулю, а швидкість у основи $v = 6$ м/с?

1.96. Знайти кількість теплоти, яка виділилася при абсолютно непружному зіткненні двох куль, які рухалися назустріч одна одній. Маса першої кулі $m_1 = 0{,}4$ кг, її швидкість $v_1 = 3$ м/с. Маса другої кулі $m_2 = 0{,}2$ кг, її швидкість $v_2 = 12$ м/с.

1.97. Дерев'яний куб масою M лежить на штативі, нижня частина якого зроблена у вигляді кільця. Знизу в куб попадає куля, яка летить вертикально, і пробиває його. При цьому куб піднімається на висоту H. На яку висоту h підніметься куля над штативом, якщо її швидкість перед ударом по кубу дорівнювала v. Маса кулі m.

1.98. Тіло масою $m = 40$ г кинуте з поверхні Землі під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Через $t = 5$ с воно впало на Землю. Визначити роботу, затрачену на кидок. Тертям між тілом і повітрям знехтувати.

1.99. Яка робота A буде виконана силами гравітаційного поля при падінні на Землю тіла масою $m = 2$ кг а) з висоти $h = 1000$ км; б) з нескінченності?

1.100. Шайба масою m починає ковзати без початкової швидкості по похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом, і, пройшовши по горизонталі відстань L, зупиняється. Знайти роботу сил тертя A на всьому шляху. Вважати, що коефіцієнт тертя всюди однаковий і рівний μ.

1.101. З пружинного пістолета вистрілили кулькою, маса якої m. Жорсткість пружини k. Пружина до пострілу була стиснута на Δx. Визначити швидкість кульки v при її вильоті з пістолета. Знайти висоту h, на яку підніметься кулька, якщо постріл спрямувати вертикально вгору.

1.102. Від двохступеневої ракети загальною масою M в момент, коли вона досягла швидкості V_0, відділилась друга ступінь масою m. Швидкість цієї ступені при цьому збільшилась до V_2. Визначити, з якою швидкістю V_1 буде рухатися перша ступінь. Швидкості вказано відносно спостерігача на Землі.

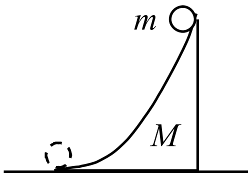


Рис.1.26.

1.103. З клина масою M, який стоїть на гладкій горизонтальній поверхні, зісковзує тіло масою m. Кут нахилу клину плавно змінюється до нуля в нижній частині (рис.1.26). При переході на горизонтальну площину швидкість тіла V. Визначити висоту h, з якої зісковзує тіло.

1.104. На гладкій горизонтальній площині знаходиться тіло масою M і на ньому шайба маси m (рис.1.27). Шайбі надали швидкість V в горизонтальному напрямі. На яку максимальну висоту h (порівняно з початковим рівнем) підніметься шайба після відриву від тіла M. Тертям знехтувати.

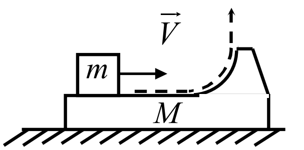


Рис.1.27.

1.105. Два човна рухаються паралельними курсами назустріч один одному. Коли човни порівнялися, з одного з них на інший обережно переклали вантаж масою m. Після чого човен з вантажем зупинився, а човен без вантажу продовжував рухатися зі швидкістю V. З якими швидкостями V_1 і V_2 рухалися човни до зустрічі, якщо маса човна, в який переклали вантаж, M?

1.106. Снаряд летів горизонтально зі швидкістю $V = 50$ м/с. Він розірвався на два уламки однакової маси. Один уламок полетів вертикально вгору зі швидкістю $V_1 = 25$ м/с відносно поверхні Землі. Визначити швидкість V_2 другого уламку.

1.107. Між частинкою, яка має масу m та швидкість V, і нерухомою частинкою масою M відбувається абсолютно пружне зіткнення. При цьому напрям швидкості частинки m змінюється на 90°. Чому дорівнюють швидкості частинок після зіткнення? Який кут розльоту частинок?

1.108. Куля лежить у стані спокою на горизонтальній поверхні. На неї налітає така ж сама куля. Чому дорівнює кут розльоту куль після абсолютно пружного удару?

1.109. Дві маленькі кульки масами M і m підвішені на нитках довжиною l кожна в одній точці. Кульку масою M відхилили на кут α від вертикалі і відпустили. На яку висоту H піднімуться кульки після абсолютно непружного зіткнення? Скільки тепла Q при цьому виділиться?

1.110. По невеликому шматку заліза масою m_1, який лежить на наковальні, б'є молот масою m_2. Визначити ККД удару, якщо удар абсолютно непружний. Корисною вважати енергію, витрачену на деформацію шматка заліза.

1.111. Тіло масою $m = 20$ г лежить на горизонтальній поверхні. До нього прикладають силу $F = 0,1$ Н, спрямовану під кутом $\alpha = 60^{\circ}$ до горизонту. Яку роботу A_t виконають сили тертя при переміщенні тіла на відстань $l = 80$ см, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,2$?

1.112. Частинка масою M зіштовхнулася з нерухомою частинкою масою m. Знайти швидкість v' частинок після удару у випадку, якщо удар абсолютно непружний. Відомо, що під час удару енергія U перейшла у деформацію кульок.

1.113. Дві частинки підвішені на нитці в одній точці. Меншу частинку відхили на кут α. Знайти на які кути відхиляться частинки після абсолютно пружного зіткнення. Вважати відомими маси кульок.

Динаміка обертального руху

1.114. Знайти момент інерції I_z тонкого однорідного стержня масою m, довжиною l, площею перерізу S, який обертається відносно вісі, що проходить 1) через його центр; 2)через його кінець.

1.115. Знайти момент інерції I диску масою m і радіусом R відносно осей, що перпендикулярні до його площини і проходять а) через його центр; б) через його обід.

1.116. Знайти момент інерції I_z однорідного суцільного конусу відносно його вісі симетрії, якщо маса конусу m, радіус основи R.

1.117. Знайти момент інерції I_z прямокутної пластини з сторонами a та $в$ і масою m відносно вісі, що проходить через центр мас пластини перпендикулярно площині пластини.

1.118. Визначити момент інерції I_z суцільної кулі масою $m = 0{,}5$ кг і радіусом $R = 0{,}1$ м відносно вісі, що проходить через центр тяжіння кулі.

1.119. Однорідний диск радіуса R має круглий отвір (торкається краю диску та центру симетрії диску, рис. 1.28). Маса такого диску m. Знайти момент інерції такого диску відносно вісі, що проходить через точку О перпендикулярно площині диску.

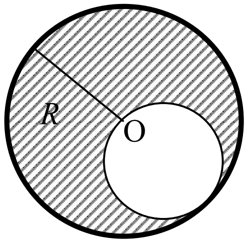


Рис. 1.28.

1.120. Молекулу HCl можна уявити у вигляді двох маленьких кульок масами m_1 і m_2, які знаходяться на відстані l одна від одної. Визначити момент інерції I молекули відносно осі, що проходить через центр мас системи перпендикулярно до прямої, що з’єднує атоми.

1.121. Дві однорідні кулі з одного матеріалу, радіуси яких $R_1 = 3$ см та $R_2 = 2$ см, скріплені в точці торкання. На якій відстані x від точки скріплення знаходиться центр тяжіння системи?

1.122. Дві однорідні кулі, алюмінієва та цинкова, однакового радіуса $R = 10$ см, скріплені в точці торкання. Знайти відстань r від центра тяжіння такої системи до центра цинкової кулі. Густина алюмінію $\rho_{al} = 2,7 \cdot 10^3$кг/м^3, густина цинку $\rho_{zn} = 7,1 \cdot 10^3$кг/м^3.

1.123. Визначити положення центра тяжіння однорідної круглої пластини радіуса $R = 30$ см, в якій вирізаний круглий отвір з радіусом $r = R/2$, який торкається краю пластинки (рис. 1.28).

1.124. Циліндрична труба з малим діаметром та масою $m = 2$ тонни лежить на землі. Яку найменшу силу F необхідно прикласти, щоб підняти трубу за один з її кінців?

1.125. До кінців горизонтального стержня довжиною $l = 0,8$ м і масою $M = 2$ кг підвішені два вантажі: зліва масою $m_1 = 1$ кг, справа масою $m_2 = 3$кг. На якій відстані x з боку більшої маси треба підперти стержень, щоб він залишився в стані рівноваги?

1.126. Однорідний масивний стержень з прикріпленими на його кінцях вантажами масами $m_1 = 5,5$ кг та $m_2 = 1$ кг знаходиться в стані рівноваги, якщо його підперти на відстані, що дорівнює 1/5 його довжини від більш важкого вантажу. Яка маса стержня?

1.127. Однорідна балка лежить на платформі таким чином, що один її край на 1/4 довжини звисає з платформи. До цього краю прикладають силу F, направлену вертикально вниз. Коли ця сила стає рівною 15 Н, протилежний кінець балки починає підніматися. Знайти масу m балки.

1.128. На яку максимальну висоту може піднятися людина масою $m = 75$ кг по драбині довжиною $l = 5$ м, приставленій до рівної стінки? Максимальна сила тертя між драбиною і підлогою $F_{тер} = 300$ Н, кут між драбиною і підлогою $\alpha = 60^0$. Масою драбини знехтувати.

1.129. Однорідний стержень покоїться, опираючись на гладку стіну та шерстку підлогу. Маса стержня $m = 10$ кг, кут між стержнем і підлогою $\alpha = 45^0$. Знайти силу тертя F_t.

1.130. На циліндр масою $m = 10$ кг і радіусом $R = 15$ см, закріплений на кронштейні, намотана нитка (рис.1.29). В момент часу $t = 0$ до кінця нитки у напрямку дотичної до циліндра почала діяти сила $F = 10$ Н. За який час τ циліндр зробить $N = 5$ обертів?

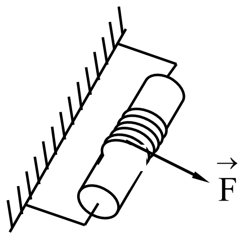


Рис. 1.29

1.131. Через блок у вигляді суцільного диску масою m перекинута тонка нерозтяжна нитка, до кінців якої підвішено вантажі масами m_1 і m_2. Визначити прискорення вантажів, якщо їх відпустити. Тертям і масою нитки знехтувати.

1.132. Пробірка довжиною $l = 15$ см, яка стояла вертикально, починає падати на стіл. Тертя настільки велике, що її нижній кінець не ковзає. Яку кутову та лінійну швидкість буде мати в кінці падіння середина пробірки?

1.133. На легкому столику, який вільно обертається з кутовою швидкістю ω_1, стоїть людина і тримає на випростаних руках на відстані l_1 одна від одної дві однакові гирі масою m кожна. Потім людина зблизила гирі до відстані l_2 і кутова швидкість обертання столика при цьому зросла до ω_2. Вважаючи момент інерції людини відносно осі обертання столика сталим, знайти роботу A, яку вона виконала.

1.134. Диск радіусом $R = 0{,}1$ м та масою $m = 3$ кг обертається з частотою $\nu = 3$ об/с навколо осі, що проходить через його центр. Яку силу F слід прикласти до обода диску, щоб він збільшив швидкість обертання вдвічі за час $\Delta t = 3$ с? Момент інерції диску $I = mR^2/2$.

1.135. До стрижня, який може обертатися навколо свого кінця, прикладена сила F_1 в точці, яка знаходиться на відстані $\frac{2l}{3}$ від осі обертання та сила F_2 в точці, яка знаходиться на другому кінці стрижня. F_1 та F_2 направлені в один бік. Визначити, яку кутову швидкість ω буде мати стрижень за час τ дії сил. Довжина стрижня l, його маса m.

1.136. До диску масою m і радіусом R прикладена сила F на відстані $r = R/3$ від осі обертання. Якою буде швидкість обертання циліндра через час τ.

1.137. Диск масою m і радіусом R обертається з кутовою швидкістю ω. Через який час зупиниться диск, якщо до обода диска прикласти гальмуючу силу F?

1.138. До стрижня, який може обертатися навколо свого центра, прикладена певна сила F в точці, яка знаходиться на відстані $\frac{l}{3}$ від осі обертання. За час τ дії сили стрижень отримав кутову швидкість ω. Довжина стрижня l, його маса m. Визначити величину сили F.

1.139. Маховик у формі диска з радіусом $R = 0{,}25$ м і масою $m = 10$ кг, обертається з частотою $\nu = 40$ об/с. Коли вимкнули привід, маховик зробив ще $N = 200$ обертів і зупинився. Визначити момент сил тертя.

Неінерціальні системи відліку

1.140. Горизонтальний диск обертають з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. По одному з діаметрів диску рухається невелике тіло масою m з постійної відносно диску швидкістю V'. Знайти силу F, з якою диск діє на це тіло в момент, коли воно знаходиться на відстані r від осі обертання.

1.141. На екваторі з висоти $h = 500$ м на поверхню Землі падає тіло (без початкової швидкості відносно Землі). Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань і в який бік відхилиться від вертикалі тіло при падінні.

1.142. Гвинтівку навели на вертикальну риску мішені, що знаходиться точно в північному напрямку, і зробили постріл. Нехтуючи опором повітря, знайти, на скільки сантиметрів і в який бік куля, попав в мішень, відхилилася від риски. Постріл зроблений в горизонтальному напрямку на широті $\varphi = 60°$, швидкість кулі v = 900 м/с і відстань до мішені s = 1,0 км.

1.143. З вершини гладкої сфери радіусу R = 1 м починає зісковзувати невелике тіло масою m = 0,30 кг. Сфера обертається з постійною кутовою швидкістю ω = 6,0 рад/с навколо вертикальної вісі, що проходить через її центр. Знайти в системі відліку, пов'язаній з сферою, відцентрову силу інерції $F_{вц}$ і силу Коріоліса F_K в момент відриву тіла від поверхні сфери.

Елементи спеціальної теорії відносності

1.144. Знайти власну довжину стрижня l_0, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $V = \beta c$, довжина l, кут між ним і напрямом руху дорівнює θ.

1.145. Стрижень рухається в повздовжньому напрямку з постійною швидкістю v відносно інерціальної K - системи відліку. При якому значенні v довжина стрижня в цій системи відліку буде на n = 0,50% меншою, ніж його власна довжина?

1.146. В прямокутному трикутнику довжина катету дорівнює a = 5 м, а кут між цим катетом та гіпотенузою довжиною l складає $\alpha = 30^0$. Знайти в системі відліку K', що рухається відносно цього трикутника з швидкістю $V = 0{,}866\,c$ вздовж катету a: а) відповідне значення кута α'; б) довжину гіпотенузи l' та її відношення до власної довжини l.

1.147. Стрижень AB, орієнтований вздовж вісі ОХ K-системи відліку, рухається з постійною швидкістю в додатному напрямку вісі ОХ, так що переднім по ходу руху кінцем стрижня є точка A, а, відповідно, заднім кінцем стрижня є точка B. Знайти: 1) власну довжину стрижня, якщо в момент часу t_A координата точка A дорівнює x_A, а в момент часу t_B координата точки B дорівнює x_B; 2) через який проміжок часу необхідно зафіксувати координати початку і кінця стрижня в K - системі, щоб різниця координат дорівнювала власній довжині стрижня?

1.148. Власний час життя $\Delta\tau$ деякої нестабільної частинки складає 7 нс. Яку відстань s пролетить ця частинка до розпаду в лабораторній системі відліку, де її час життя складає Δt = 17 нс?

1.149. З якою швидкістю V рухався в лабораторній системі відліку годинник, якщо за час $t = 5$ с (в лабораторній системі) він відстав від годинника цієї системи на час $\Delta t = 0{,}1$ с?

1.150. Деяка нестабільна частинка рухається з швидкістю *v'* в *K'*-системі відліку вздовж її вісі O'Y'. *K'* - система, в свою чергу, переміщується відносно *K* - системи з швидкістю V в додатному напрямку вісі OX. Вісі OX та O'X' співпадають, вісі OY та O'Y' залишаються весь час паралельними. Знайти шлях s, який частинка пролетить в *K* - системі, якщо її власний час життя $\Delta\tau_0$?

1.151. Знайти відстань S, яку пролетіла в *K* - системі відліку нестабільна частинка від моменту народження до її розпаду, якщо її час життя у цій системі відліку $\Delta t = 3$ мкс, а власний час життя $\Delta t_0 = 2{,}2$ мкс.

1.152. Дві нестабільні частинки рухаються в *K* - системі відліку вздовж однієї прямої в однаковому напрямі з однаковою швидкістю $V = 0{,}99\ c$. Відстань між ними в цій системі $l = 12$ м. В деякий момент часу обидві частинки розпалися одночасно в *K'* - системі відліку, пов'язаній з ними. Знайти: а) проміжок часу між моментами розпаду в *K* - системі відліку; б) визначити яка частинка розпалася пізніше.

1.153. Дві релятивістські частинки рухаються під прямим кутом одна до одної в лабораторній системі відліку, причому одна зі швидкістю V_1, а друга зі швидкістю V_2. Знайти їх відносну швидкість.

1.154. В площині XY *K* - системи рухається частинка, проекції швидкості якої v_x та v_y. Знайти швидкість *v'* цієї частинки в системі *K'*, яка рухається відносно *K* - системи в додатному напрямку вісі X з сталою швидкістю V.

1.155. Частинка рухається в *K* - системі з швидкістю v під кутом θ до вісі OX. Знайти відповідний кут в *K'* - системі, що рухається з швидкістю V відносно *K* - системи в додатному напрямку її вісі OX, якщо вісі OX та O'X' співпадають.

1.156. *K'* - система переміщується з постійною швидкістю V відносно *K* - системи. Знайти прискорення *a'* частинки відносно *K'* - системи, якщо відносно *K* - системи вона рухається з швидкістю v та прискоренням a по прямій:

а) в напрямку вектору V; б) перпендикулярно до вектору V. Вісі OX та OX' співпадають, вісі OY та O'Y'є паралельними.

1.157. Визначити швидкість електрону, який має кінетичну енергію E_k.
1.158. При якій швидкості протона його кінетична енергія складає 90% від повної енергії?
1.159. Визначити релятивістський імпульс електрону з кінетичною енергією E_k. Знайти швидкість частинки, кінетична енергія якої $E_к = 500$ МеВ та імпульс $p = 865$ МеВ/с.
1.160. Знайти швидкість частинки, кінетична енергія якої $E_к = 500$ МеВ та імпульс $p = 865$ МеВ/с.
1.161. При якій швидкості кінетична енергія частинки дорівнює її енергії спокою?
1.162. Знайти швидкість v, при якій релятивістський імпульс частинки в $n = 2$ рази перевищує її ньютонівський імпульс.
1.163. Яку роботу A необхідно виконати, щоб збільшити швидкість частинки з масою спокою m_0 від 0,6 c до 0,8 c? Порівняти з нерелятивістським значенням.
1.164. Частинка з масою спокою m_0 почала рухатися під дією постійної сили F. Знайти залежність швидкості частинки від часу.
1.165. В K - системі відліку частинка з масою спокою m_0 та кінетичною енергією E_k налітає на іншу, нерухому, таку саму частинку. Знайти масу спокою M_0 та швидкість V утвореної частинки.
1.166. Знайти порогову енергію фотона для народження пари електрон - позитрон в полі нерухомого протону, якщо маси спокою e^- та e^+ дорівнюють m_0, а маса протона – M_0.
1.167. В скільки разів релятивістська маса частинки, швидкість якої відрізняється від швидкості світла на 0,010%, перевищує її масу спокою?
1.168. Скільки енергії (в розрахунку на одиницю маси) необхідно витратити, щоб надати космічному кораблю, що знаходиться у стані спокою, швидкість $\boldsymbol{v} = 0,980\ c$?

ЧАСТИНА 2.

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА
Теоретичні відомості

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Молекулярна фізика – розділ фізики, в якому вивчаються фізичні властивості речовини на основі її молекулярної будови.

Молекулярно-кінетична теорія – фізична модель речовини, яка базується на наступних положенях:1) усі речовини складаються з найменших частинок, що зберігають їх хімічні властивості (молекул, атомів); 2) атоми та молекули перебувають у стані неперервного хаотичного руху; 3) між молулами та атомами існують сили взаємодії (притягання та відштовхування).

1) ***Число (стала) Авогадро*** – це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості структурних одиниць (атомів, молекул) в 1 молі речовини. Визначається як кількість атомів у 12 грамах чистого ізотопу вуглецю C^{12} .

2) Кількість речовини визначається співвідношенням:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

де N – кількість молекул речовини, N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$ – стала Авогадро, m – маса речовини, M – молярна маса даної речовини.

3) Рівняння стану ідеального газу
(Менделєєва-Клапейрона):

$$PV = \frac{m}{M} RT,$$

де P – тиск газу, V – об'єм, який газ займає, T – абсолютна температура газу, R = 8,31 Дж/(К·моль) – *універсальна газова стала.*

4) Об'єднаний газовий закон: якщо маса ідеального газу залишається сталою ($m = const$), то

$$\frac{PV}{T} = const\,.$$

5) Рівняння для ізопроцесів, які відбуваються при сталій масі ідеального газу ($m = const$):

а) **закон Бойля-Маріотта** (ізотермічний процес, $T = const$)

$$PV = const\,;$$

б) **закон Гей-Люссака** (ізобарний процес, $P = const$)

$$\frac{V}{T} = const\,;$$

в**) закон Шарля** (ізохорний процес, $V = const$)

$$\frac{P}{T} = const\,;$$

г) **рівняння Пуассона** (*адіабатичний процес* - це процес без теплообміну з навколишнім середовищем)

$$PV^{\gamma} = const\,,$$

де γ – показник адіабати.

6) **Закон Дальтона:**: тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші

$$P = \sum_{i=1}^{z} P_i\,,$$

де z – кількість компонентів суміші.

Парціальний тиск - це тиск, який мав би кожен з компонентів суміші окремо, якщо б він при даній температурі заповнював весь об'єм.

7) **Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів**

$$P = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon_{пост} \right\rangle,$$

де n – концентрація молекул, $\left\langle \varepsilon_{пост} \right\rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули.

8) Повна середня кінетична енергія однієї молекули

$$\left\langle \varepsilon_{повн} \right\rangle = \frac{i}{2} kT\,,$$

де $k = \dfrac{R}{N_{\text{А}}}$ =1,38·10^{-23} Дж/К – *стала Больцмана;*

$$i = i_{пост} + i_{об} + 2i_{кол},$$

а $i_{пост}$, $i_{об}$, $i_{кол}$ – кількості поступальних, обертальних і коливальних ступенів вільності молекули, відповідно.

При зниженні температури молекула поступово перестає приймати участь у певному русі, відповідні ступені вільності стають неактивними. Про такі ступені вільності говорять, що вони "заморожені". Температура, вище якої потрібно нагріти газ, щоб його молекули ефективно приймали участь у відповідному русі, називається характеристичною. Так, наприклад, для молекули водню характеристична температура обертального руху дорівнює 175 К, а коливального – 6000 К.

Статистичні розподіли молекул газу

1) Функція розподілу молекул за модулями швидкостей (***функція розподілу Максвелла***):

$$dN(\upsilon) = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)4\pi\upsilon^2\, d\upsilon,$$

де dN – кількість молекул, які при температурі T мають швидкість, модуль якої знаходиться в інтервалі $[\upsilon, \upsilon + d\upsilon]$; m_0 – маса однієї молекули, N – загальна кількість молекул.

Функція розподілу Максвелла визначає ймовірность для молекули мати значення модулю швидкості v в одиничному інтервалі швидкостей.

2) Найбільш імовірна, середня і середня квадратична швидкості молекул визначаються за формулами

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \ ,$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \ .$$

3) Функція розподілу молекул газу у потенціальному полі (***функція розподілу Больцмана***):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E - E_0}{kT} \right),$$

де n і n_0 – концентрації молекул в областях простору, де їх потенціальні енергії дорівнюють E та E_0, відповідно.

Реальні гази

1) Рівняння стану реального газу ***Ван дер Ваальса***

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2} \right)\left(V - \nu b \right) = \nu RT \ ,$$

де a і b – сталі Ван дер Ваальса.

2) *Критичний стан речовини* у випадку чистої (однокомпонентної) речовини – це термодинамічний стан двофазної системи, при якому співіснуючі зрівноважені фази стають тотожними за всіма своїми властивостями. Такий стан, наприклад, буде у чистої води при тиску $2{,}2 \cdot 10^7$ Па і температурі 651 К, коли рідина і пара матимуть однакову густину, в'язкість, стисливість.

Зв'язок між сталими a і b та критичними параметрами речовини

$$T_{кр} = \frac{8a}{27bR}, \quad V_{кр}^{/} = 3b, \quad P_{кр} = \frac{a}{27b^2} \ ,$$

де $V_{кр}^{/}$ – об'єм, який займає один моль речовини у критичному стані. Слід зауважити, що критичний стан довільної маси газу m

може існувати при $P_{кр}$ і $T_{кр}$ лише в певному об'ємі $V_{кр}$, який дорівнює

$$V_{кр} = \frac{m}{M} V_{кр}^{/}.$$

Це означає, що критичний стан можливий тільки тоді, коли об'єм посудини V_n, в якій міститься маса газу *m,* дорівнює критичному об'єму $V_{кр}$. Якщо $V_n > V_{кр}$, то рідина, яка нагрівається, повністю випарується до досягнення критичної температури. Якщо $V_n < V_{кр}$, то газ скраплюється до досягнення критичної температури.

3) Середня довжина вільного пробігу молекули газу

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\,\sigma^2 n},$$

де σ – ефективний діаметр молекули, *n* – концентрація молекул.

ТЕРМОДИНАМІКА

Термодинаміка – розділ фізики, в якому вивчаються загальні способи передачі та претворення енергії у макроскопічних системах.

Термодинамічна система – це макроскопічна система взаємодіючих частинок. *Термодинамічний процес* – зміна стану термодинамічної системи, яка пов'язана із зміною хоча б одного із її термодинамічних параметрів.

Термодинамічні параметри стану системи	
Термічні	**Калориметричні**
Вимірюються експериментально: *T, P, V*	Не вимірюються експериментально: *U* – внутрішня енергія, *H* – ентальпія, *S* – ентропія

Термодинамічна рівновага – це стан системи, при якому термодинамічні параметри не змінюються з часом і відсутні стаціонарні потоки. ***Функції стану*** – це такі термодинамічні величини, зміна яких при переході системи з одного стану в інший визначається тільки термодинамічними параметрами початкового і кінцевого станів.

1) ***Теплоємністю тіла*** C_m називається величина, яка дорівнює кількості теплоти, яку потрібно надати тілу, щоб змінити його температуру на один кельвін

$$C_m = \delta Q / dT \ .$$

Молярна теплоємність C – це теплоємність одного моля речовини
$$C = \frac{C_m}{\nu}$$

$\nu = m / M = N / N_A$ – кількість молей речовини.

Питома теплоємність $C_П$ – це теплоємність одиниці маси речовини
$$C_П = \frac{C_m}{m}$$

Зв'язок між молярною та питомою теплоємностями

$$C_П = C / M \ .$$

2) Кількість теплоти, отримана тілом внаслідок нагрівання, залежить від його маси, питомої теплоємності речовини та різниці температур у кінцевому і початковому станах

$$Q = C_П m \Delta T \ ,$$

де $C_П$ – питома теплоємність.

3) Якщо нагрівання речовини відбувається при постійному об'ємі (V = const), то говорять про *молярну теплоємність* C_V *при постійному об'ємі.*

Якщо нагрівання відбувається при постійному тиску *(*P = const*)*, то говорять про *молярну теплоємність* C_P *при постійному тиску.*

Рівняння Майера для ідеального газу

$$C_P = C_V + R \ .$$

Відношення теплоємностей

$$\gamma = C_P / C_V = \frac{i+2}{i} .$$

де γ – показник адіабати, i – число ступенів вільності молекули.

Молекули ідеального газу не взаємодіють між собою, тому внутрішню енергію одного моля ідеального газу U_M дорівнює

$$U_M = N_A \langle E \rangle = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT = C_V T, \text{ де } C_V = \frac{i}{2} R.$$

Внутрішня енергія газу Ван дер Ваальса:

$$U = \nu C_V T - \frac{a\nu^2}{V}.$$

4) Важливим класом термодинамічних процесів є такі процеси, що відбуваються при сталій теплоємності $C = const$. Вони отримали назву **політропних процесів.** Для політропного процесу, який відбувається зі сталою масою ідеального газу, справедливе рівняння:

$$PV^n = const,$$

де показник політропи $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V}$ (C – молярна теплоємність).

Граничними випадками політропного процесу є ізотермічний та адіабатичний.

Для ідеального газу ізохорний та ізобарний процеси є також політропними.

Процес	n	C	Робота
ізобарний	0	C_P	$P(V_2 - V_1)$
ізохорний	∞*	C_V	0
ізотермічний	1	∞	$\frac{m}{M} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
адіабатичний	γ	0	$\frac{P_1 V_1}{(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$

**Рівняння політропи отримують при* $C \neq C_V$, *тому перехід до вказаної границі не є коректним*

5) Коефіцієнт корисної дії **(ККД)** теплової машини**:**

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де Q_1 – кількість теплоти, отримана за цикл робочим тілом машини від нагрівача, Q_2 – кількість теплоти, що передана за цикл холодильнику.

У випадку, якщо теплова машина працює за ***циклом Карно***

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 і T_2 – абсолютні температури нагрівача і холодильника, відповідно.

Цикл Карно – це оборотний коловий процес, що складається з двох адіабатичних та двох ізотермічних процесів. Теплова машина Карно, що працює за даним циклом, має максимально можливий ККД. Для збільшення коефіцієнта корисної дії циклу Карно необхідно зробити температуру нагрівача якомога більшою, а температуру охолоджувача – якомога меншою. ККД може складати 100 % лише в тому випадку, якщо температура холодильника дорівнює абсолютному нулю.

Принципи термодинаміки

Принципи термодинаміки – це сукупність постулатів, що лежать в основі термодинаміки. Принципи термодинаміки були встановлені у результаті експериментальних досліджень. Спираючись на такі принципи, термодинаміка описує макроскопічні параметри систем без конкретних припущень щодо їх мікроскопічної будови. Питаннями внутрішньої будови займається статистична фізика. Принципи термодинаміки незалежні, тобто жоден з них не може бути отриманий з інших принципів.

І принцип термодинаміки. Внутрішня енергія ізольованої системи змінюється тільки у результаті двох нееквівалентних процесів: отримання або передача теплоти δQ і виконання над системою роботи δA:

$$dU = \delta Q - \delta A.$$

δA та δQ не є функціями стану системи, оскільки вони характеризують не запас енергії, а лише процес переходу частини внутрішньої енергії із системи до зовнішніх тіл та навпаки, причому, співвідношення між роботою та кількістю теплоти ув різних процесах не є сталою величиною.

- ***При ізобарному процесі***
  $\delta Q = dU + \delta A = C_P dT + PdV$ **.**
- ***При ізохорному процесі***
  $\delta A = PdV = 0$**:** $\delta Q = dU = C_V dT$**.**
- ***При ізотермічному процесі***
  $dU = 0$: $\delta Q = \delta A$**,** $Q = A = RT \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.
- ***При адіабатичному процесі***
  $\delta Q = 0$: $\delta A = -dU$,

тобто, система виконуватиме роботу тільки за рахунок зменшення внутрішньої енергії**.**

II принцип термодинаміки. Якщо в ізольованій макросистемі відбуваються необоротні процеси, ентропія цієї системи зростає (закон збільшення ентропії).

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Рівність справедлива для систем у рівноважному стані.

Ентропія. Ентропія є мірою невпорядкованості системи. Згідно з визначенням Больцмана, ентропія є логарифмом числа допустимих станів в системі $S = k \ln g(N,E)$, де $g(N,E)$ – число допустимих станів в системі або кількість мікроскопічних станів, які відповідають даному макроскопічному стану. Чим більша невпорядкованість системи, тим через більшу кількість мікростанів може реалізуватись даний макростан, тим більша термодинамічна ймовірність, а з нею ентропія. Рівноважний стан системи характеризується максимальним значенням її ентропії. Кожна система при незмінних умовах прямує до рівноважного (найбільш ймовірного) стану, отже до максимуму ентропії. Ентропія – статистичний параметр системи, не пов'язаний з середнім значенням параметрів цієї системи. Тому ентропію не можна безпосередньо виміряти приладом, вона визначається за допомогою розрахунків.

III принцип термодинаміки. Ентропія рівноважної термодинамічної системи прямує до нуля, коли до нуля прямує абсолютна температура: $\lim\limits_{T \to 0} S(T) \to 0$.

Нульовий (загальний) принцип термодинаміки

1. Постулат про існування термодинамічної рівноваги.

Замкнена система прямує до стану термодинамічної рівноваги незалежно від початкового стану та самостійно вийти з нього не може.

2. Постулат про транзитивність термічної рівноваги.

Якщо дві термодинамічні системи, розділені жорсткою та непроникною для речовини перегородкою, знаходяться у стані термічної рівноваги між собою, то будь-яка третя система, що знаходиться у термічній рівновазі з однією з перших двох систем, буде знаходитися також у термічній рівновазі з іншою з цих систем.

Термодинамічні потенціали

Термодинамічними потенціалами або характеристичними функціями називають функції, які містять усю термодинамічну інформацію про систему.

Найбільше значення мають чотири основних термодинамічних потенціали:

1) внутрішня енергія $U\,(S, V)$,
2) ентальпія $H\,(S, P) = U + PV$,
3) вільна енергія Гельмгольца $F\,(T, V) = U - TS$,
4) термодинамічний потенціал Гіббса

$$G\,(T, P) = H - TS = F + PV.$$

У дужках вказані термодинамічні параметри, які отримали назву незалежних змінних для термодинамічних потенціалів. Усі потенціали мають розмірність енергії і всі вони не мають абсолютного значення, оскільки визначені з точністю до постійної, яка дорівнює внутрішньої енергії при абсолютному нулі. Знаючи будь-який з чотирьох потенціалів як функцію природних змінних, можна за допомогою основного рівняння термодинаміки знайти всі інші термодинамічні функції і параметри системи.

Термодинамічний потенціал (в дужках – незалежні змінні)	Об'єднане рівняння I та II принципів термодинаміки	Умова термодинамічної рівноваги
$U(S, V)$	$dU = TdS - PdV$	$dU = 0,\ d^2U > 0$
$H(S, P)$	$dH = TdS + VdP$	$dH = 0,\ d^2H > 0$
$F(T, V)$	$dF = -SdT - PdV$	$dF = 0,\ d^2F > 0$
$G(T, P)$	$dG = -SdT + VdP$	$dG = 0,\ d^2G > 0$

Ці рівняння записані для закритих однокомпонентних систем, в яких виконується тільки механічна робота.

Термодинамічні співвідношення Максвела

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P.$$

Явища переносу

Хаотичний рух молекул газу, який супроводжується співударами молекул з передачею імпульсу та енергії, призводить до неперервного перемішування газу. Процес перемішування зумовлює явища переносу – ***дифузію, внутрішнє тертя і теплопровідність***.

Перенос маси (дифузія), ***кількості руху*** (внутрішнє тертя) і ***кінетичної енергії*** (теплопровідність) у певному напрямку в газі можливий тільки тоді, коли у цьому напрямку існує ***градієнт,*** відповідно, ***густини ρ, переносної швидкості V, температури T.***

1) **Закон Фіка (рівняння дифузії):** у процесі дифузії маса речовини, яка перенесена через елемент площі ΔS за час Δt, дорівнює

$$m = -D\frac{d\rho}{dr}\Delta S\,\Delta t\,,$$

де $\dfrac{d\rho}{dr}$ – градієнт густини речовини у напрямку, перпендикулярному до ΔS; D – коефіцієнт дифузії.

2) Закон Фур'є (рівняння теплопровідності): у процесі теплопередачі кількість теплоти, яка перенесена через елемент площі ΔS за час Δt внаслідок теплопровідності, дорівнює

$$Q = -\chi\frac{dT}{dr}\,\Delta S\,\Delta t\,,$$

де $\dfrac{dT}{dr}$ – градієнт температури у напрямку, перпендикулярному до ΔS ; χ – коефіцієнт теплопровідності.

3) Закон Ньютона (рівняння, що описує внутрішнє тертя): сила, що діє на елемент площі ΔS між двома шарами речовини, які рухаються з різними швидкостями (сила внутрішнього тертя)

$$F = -\eta\frac{d\upsilon}{dr}\Delta S\,,$$

де $\dfrac{d\upsilon}{dr}$ – градієнт швидкості течії у напрямку, перпендикулярному до ΔS; η – коефіцієнт в'язкості.

Для газу справедливі формули:

$$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda, \qquad \eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda\rho, \qquad \chi = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda\rho\, c_V.$$

де $\langle\upsilon\rangle$ – середня швидкість молекул, c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі, λ – довжина вільного пробігу молекул.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ

Молекулярна фізика

Приклад 2.1. *У балоні знаходиться кисень масою* $m = 16$ *мг. Через отвір кожну секунду вилітає* $\Delta N = 1$ *млрд. молекул. За який час t газ витече з балону?*

Розв'язок:

Кількість речовини ν, яка відповідає масі *m*, визначається за формулою

$$\nu = \frac{m}{M}, \qquad (1)$$

де *M* – молярна маса речовини; $M(\mathrm{O_2}) = 0{,}032$ кг/моль.

Згідно з законом Авогадро в одному молі будь-якої речовини міститься однакова кількість молекул, яка дорівнює $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Тоді, в речовині масою *m,* кількість молекул *N* дорівнює

$$N = \nu\, N_A = \frac{m}{M} N_A. \qquad (2)$$

Якщо за одну секунду з балону вилітає ΔN молекул, то весь газ витече за час

$$t = \frac{N}{\Delta N} = \frac{m\, N_A}{M\, \Delta N} \approx 3 \cdot 10^{11}\ (\mathrm{c}).$$

Приклад 2.2. У *балоні об'ємом* $V = 15$ *л знаходиться аргон. Тиск у балоні* $P_1 = 600$ *кПа, температура* $T_1 = 300$ *К. Коли з балону відібрали певну кількість газу, тиск у ньому знизився до* $P_2 = 400$ *кПа, а температура – до* $T_2 = 260$ *К. Визначити масу m аргону, яку було відібрано.*

Розв’язок:

Ar $V = 0{,}015$ м^3 $P_1 = 6 \cdot 10^5$ Па $P_2 = 4 \cdot 10^5$ Па $T_1 = 300\ K$ $T_2 = 260\ K$ ——— $m - ?$	Припустимо, що спочатку у балоні знаходився аргон масою m_0. Тоді його тиск P_1, об’єм V і температура T_1 зв’язані між собою рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$P_1 V = \frac{m_0}{M} R T_1, \qquad (1)$$

де M – молярна маса;
для аргону $M\left(\text{Ar}\right) = 0{,}04$ кг/моль

Після того, як газ масою m було відібрано з балону, для газу, який залишився і має вже тиск P_2 та температуру T_2, можна записати

$$P_2 V = \frac{m_0 - m}{M} R T_2. \qquad (2)$$

З рівняння (2) випливає

$$m = m_0 - \frac{M V P_2}{R T_2}. \qquad (3)$$

Знаходячи масу m_0 з рівняння (1), отримуємо

$$m_0 = \frac{M V P_1}{R T_1}.$$

Остаточно маємо

$$m = \frac{M V P_1}{R T_1} - \frac{M V P_2}{R T_2} = \frac{M V}{R T_1 T_2}\left(P_1 T_2 - P_2 T_1\right). \qquad (4)$$

Перевіримо розмірність отриманого виразу

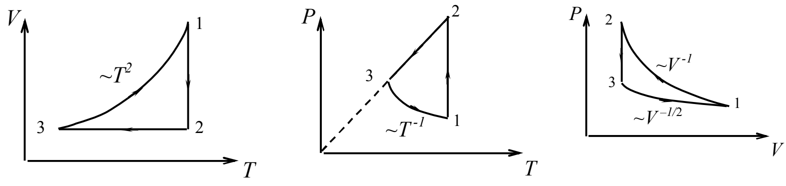
$$\left[m\right] = \frac{\text{кг}\times\text{моль}^{-1}\times\text{м}^3}{\text{Дж}\times\text{моль}^{-1}\times\text{К}^{-1}\times\text{К}^2}\times\text{Па}\times\text{К} = \frac{\text{кг}\times\text{м}^3\times\text{Па}}{\text{Дж}} =$$

$$= \frac{\text{кг}\times\text{м}^3\times\text{Н}\times\text{м}^{-2}}{\text{Н}\times\text{м}} = \text{кг}.$$

Використовуючи формулу (4), знаходимо

$$m = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}015}{8{,}31 \cdot 300 \cdot 260}\left(6 \cdot 10^5 \cdot 260 - 4 \cdot 10^5 \cdot 300 \right) \approx 3{,}3 \times 10^{-2}\,(\text{кг})$$

Приклад 2.3. *На рис. 2.1.а наведено VT- діаграму замкненого циклу, який здійснюється певною масою газу. Побудувати PT- та PV-діаграми.*



а б в

Рис. 2.1

Розв'язок:

Розіб'ємо цикл на окремі процеси 1-2, 2-3 і 3-1 та розглянемо окремо, як змінювався стан газу на цих ділянках.

1-2: Під час цього процесу $T = const$, тому згідно з законом Бойля-Маріотта $PV = const$. Таким чином, $P \sim V^{-1}$. Крім того, оскільки у стані 1 об'єм газу більший, ніж у стані 2, то тиск газу в стані 1 має бути меншим, ніж у 2. Ці міркування дозволяють побудувати ділянки 1-2 на рис.2.1.б та рис.2.1.в.

2-3: У даному випадку об'єм не змінювався, тому згідно з законом Шарля $\dfrac{P}{T} = const$, отже $P \sim T$. До того ж, оскільки у стані 2 температура більша, ніж у стані 3, то під час процесу 2-3 тиск зменшується. Ці міркування дозволяють побудувати ділянки 2-3 на рис.2.1.б та рис.2.1.в.

3-1: У цьому процесі $V = aT^2$, де a – стала. Для постійної маси газу виконується співвідношення $\dfrac{VP}{T} = const$, тому

$\dfrac{aT^2 P}{T} = const$, тобто $P \sim T^{-1}$. Згідно з рис.2.1, $T \sim \sqrt{V}$ і тому $P \sim V^{-1/2}$, і це дозволяє закінчити побудову графіків на рисунку (2.1.б) та (2.1.в).

Приклад 2.4. *Водень знаходиться при температурі $T = 300\ K$. Знайти середню кінетичну енергію обертального руху $<\varepsilon_{об}>$ однієї молекули, а також сумарну кінетичну енергію $E_к$ всіх молекул газу, кількість речовини якого $\nu = 0.5$ мол.*

H_2
$T = 300\ K$
$\nu = 0{,}5$ *моль*
$<\varepsilon_{об}> - ?$
$E_к - ?$

Розв'язок:

Згідно з теоремою Больцмана про рівнорозподіл енергії за ступенями вільності, на кожен ступінь вільності однієї молекули газу припадає середня енергія

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT . \tag{1}$$

Молекула водню складається з двох атомів; така молекула має два обертальні ступені вільності. Таким чином, середня енергія обертального руху молекули водню

$$\langle \varepsilon_{об} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT \approx 4{,}14 \cdot 10^{-21} (\text{Дж}) .$$

За такої температури, як в умові задачі, молекула водню бере участь лише у поступальному та обертальному рухах, оскільки ефективне збудження коливальних ступенів вільності відбувається лише при температурах, більших за $6000\ \text{K}$. Отже, загальна кількість ступенів вільності в цьому випадку дорівнює 5 (3 поступальних і 2 обертальних), а загальна кінетична енергія однієї молекули дорівнює

$$\langle \varepsilon_к \rangle = \frac{5}{2} kT . \tag{2}$$

Сумарна кінетична енергія N молекул:

$$E_к = N \langle \varepsilon_к \rangle . \tag{3}$$

Згідно з законом Авогадро, кількості речовини ν відповідає ($N_A \nu$) молекул. Тому

$$E_к = N_A \nu \frac{5}{2} kT = \frac{5}{2} \nu RT \approx 3116 \,(\text{Дж}).$$

Приклад 2.5. *Визначити кількість елементарних комірок z в одиниці об'єму кристалу барію (ґратка кубічна об'ємоцентрована). Густина барію* $\rho = 3{,}5 \cdot 10^3$ *кг/м³* .

Ва, ОЦК $\rho = 3{,}5 \cdot 10^3$ *кг/м³*
z – ?

Розв'язок:

На рис. 2.2. наведена елементарна комірка об'ємоцентрованої кубічної ґратки. Підрахуємо, яка кількість *n* атомів припадає на одну елементарну комірку такої структури.

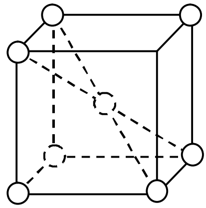


Рис.2.2.

Кожен з атомів у вершинах кубу знаходиться одночасно у восьми сусідніх комірках і тому на одну комірку припадає лише 1/8 цього атома. Всього таких атомів у вершинах вісім. Атом в центрі кубу повністю належить даній комірці. Таким чином $n = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$. Масу m_i одного атому речовини можна обчислити як

$$m_i = M / N_A . \tag{1}$$

Для барію M = 0,137 кг/моль. Маса елементарної комірки m_k:

$$m_k = m_i \, n = (M\, n)/N_A . \tag{2}$$

Об'єм елементарної комірки V_k:

$$V_k = \frac{m_k}{\rho} = \frac{M\, n}{N_A \rho} . \tag{3}$$

Кількість комірок в одиниці об'єму:

$$z = \frac{1}{V_k} = \frac{N_A \rho}{M\, n} \approx 7{,}67 \cdot 10^{27} \,(\text{м}^3).$$

Статистичні розподіли молекул газу

Приклад 2.6. *Знайти найбільш імовірну швидкість молекул ідеального газу, який підлягає розподілу Максвела.*

Розв'язок:

Вигляд функції функції розподілу молекул за швидкостями

$$\frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \qquad (1)$$

свідчить, що вона повинна мати максимум при певному значенні швидкості v.

Перепишемо (1) у вигляді

$$F(v) = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2, \qquad (2)$$

де A – множник, який не залежить від v, m – маса молекули, k – стала Больцмана.

Умова екстремуму функції (2) має вигляд

$$\frac{dF(v)}{dv} = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v\left(2-\frac{mv^2}{kT}\right) = 0.$$

Звідси екстремальне значення $v_{ім}$ (найбільш імовірна швидкість) дорівнює

$$v_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Приклад 2.7. *Який відсоток газових молекул мають швидкості, що відрізняються: а) від найбільш імовірної не більше ніж на 1%? б) від середньої не більше ніж на 1%?*

Розв'язок:

Розрахунки ґрунтуються на безпосередньому обчисленні частки молекул, тобто $dN(v)/N$.

Згідно з умовою

а) $v = v_{ім} = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}} = \alpha$, $\quad dv = 0{,}02\alpha$.

Підставляючи ці дані у формулу розподілу Максвела, знаходимо

$$\frac{dN(v)}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\alpha^3}e^{\frac{-v^2}{\alpha^2}}\alpha^2\cdot 0{,}02\alpha\approx\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}0{,}02\approx 0{,}0167\approx 1{,}7\%\,.$$

б) $v=\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$, $dv=0{,}02\langle v\rangle=\frac{0{,}04}{\sqrt{\pi}}\alpha$.

Звідси маємо $\frac{dN(v)}{N}=\frac{4}{\pi^{1/2}}\frac{\alpha^3\cdot 8}{\alpha^3\cdot\pi^{3/2}}e^{\frac{-4}{\pi}}\cdot 0{,}02\approx 0{,}02\approx 2\%$.

Приклад 2.8. *Використовуючи функцію розподілу молекул за модулями швидкостей, отримати вираз для середньоквадратичної швидкості.*

Розв'язок:

Функція розподілу молекул за модулями швидкостей (функція розподілу Максвелла) має вигляд

$$dN(\upsilon)=N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)4\pi\upsilon^2\,d\upsilon\,. \qquad (1)$$

Ця функція визначає кількість молекул *dN*, модуль швидкості яких знаходиться в інтервалі $[\upsilon,\ \upsilon+d\upsilon]$ при даній температурі *T*. При цьому загальна кількість молекул *N*; m_0 – маса однієї молекули.

За визначенням, середньоквадратична швидкість υ_{KB} це

$$\upsilon_{кв}=\sqrt{\langle\upsilon^2\rangle}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i^2}{N}}, \qquad (2)$$

де $\langle\upsilon^2\rangle$ – середнє значення квадрату швидкості молекули. Якщо врахувати, що деякі молекули мають однакові швидкості, то вираз для $\langle\upsilon^2\rangle$ можна записати у наступному вигляді:

$$\langle\upsilon^2\rangle=\frac{1}{N}\sum_j\Delta N(\upsilon_j)\upsilon_j^2\,, \qquad (3)$$

де $\Delta N\left(\upsilon_j\right)$ – кількість молекул, швидкість яких дорівнює υ_j. Підсумовування у формулі (3) відбувається по різним значенням величини швидкості молекул, тоді як в (2) підсумовування здійснюється по номерам молекул. У загальному випадку модуль швидкості молекули може бути будь-якої величиною – від нуля до нескінченності. З врахуванням цього, суму у формулі (3) можна замінити інтегралом і для значення величини $\Delta N\left(\upsilon_j\right)$ використати вираз (1), тобто

$$\begin{aligned}\left\langle \upsilon^2 \right\rangle &= \frac{1}{N}\int_0^\infty \upsilon^2\, dN(\upsilon) = \\ &= \frac{1}{N}\int_0^\infty \upsilon^2\, N\left(\frac{m_0}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) 4\pi\upsilon^2\, d\upsilon \end{aligned} \tag{4}$$

Виносячи за знак інтегралу всі величини, які не залежать від υ, отримуємо

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \left(\frac{m_0}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^\infty exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^4\, d\upsilon . \tag{5}$$

Введемо нову змінну: $x = \sqrt{m_0/(2kT)}\,\upsilon$. Отже,

$d\upsilon = \sqrt{(2kT)/m_0}\, dx$, $\upsilon^4 = \left(\frac{2kT}{m_0}\right)^2 x^4$, і тоді

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \left(\frac{m_0}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \left(\frac{2kT}{m_0}\right)^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty x^4\, exp\left(-x^2\right) dx . \tag{6}$$

Значення інтегралу отримаємо за допомогою методу інтегрування частинами

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{2}x^3 e^{-x^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty 3x^2 e^{-x^2} dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^{\infty} x^2 d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{3}{4}x^2 e^{-x^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{3}{4}\int_0^{\infty} 2x\, e^{-x^2} dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^{\infty} x\, d\left(e^{-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}xe^{-x^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{3}{4}\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

Таким чином,

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \frac{4\pi}{\pi^{3/2}}\frac{2kT}{m_0}\frac{3\sqrt{\pi}}{8} = \frac{3k\pi}{m_0},\ \upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3k\pi}{m_0}}.$$

Приклад 2.9. *При температурі $T = 273$ К водень масою $m = 2$ г займає об'єм $V = 2,5$ л. Визначити середню кількість $\langle z \rangle$ зіткнень молекул водню за час $\tau = 1$ с.*

H_2
$m = 2\cdot 10^{-3}$ кг
$V = 2,5\cdot 10^{-3}$ м^3
$T = 273\ K$
$\tau = 1\ c$
$\langle z \rangle$ – ?

Розв'язок:

Середню кількість зіткнень можна визначити як відношення повного шляху L, який пройде молекула за час τ, до середньої довжини вільного пробігу молекули λ

$$\langle z \rangle = L/\lambda. \tag{1}$$

В свою чергу, для L можемо записати

$$L = \langle \upsilon \rangle\, \tau, \tag{2}$$

де $\langle \upsilon \rangle$ – середня швидкість молекули, яка визначається співвідношенням

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{3}$$

T – температура газу; M – молярна маса газу, для водню $M(H_2) = 2\cdot 10^{-3}$ кг/моль. Для величини середньої довжини вільного пробігу молекули справедливий вираз

$$\lambda = \left(\sqrt{2}\,\pi\,\sigma^2 n\right)^{-1}, \tag{4}$$

де σ – ефективний діаметр молекули (для молекули водню $\sigma = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м); n – концентрація молекул

$$n = \frac{N}{V} \tag{5}$$

де N – загальна кількість молекул газу; V – об'єм, який займає цей газ.

Згідно з законом Авогадро, в одному молі речовини міститься N_A молекул. Тому кількість молекул у речовині масою m дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A . \tag{6}$$

Остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \frac{\langle \upsilon \rangle \tau}{\lambda} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\, \tau \, \frac{\sqrt{2}\, \pi \sigma^2 m N_A}{M V} = \\ &= \frac{4 m \tau N_A \sigma^2}{V M} \sqrt{\frac{R T \pi}{M}} . \end{aligned} \tag{7}$$

Перевіримо, чи є величина $\langle z \rangle$, отримана за формулою (7), безрозмірною

$$[\langle z \rangle] = \frac{\text{кг} \times \text{с} \times \text{моль}^{-1} \times \text{м}^2}{\text{м}^3 \times \text{кг} \times \text{моль}^{-1}} \left(\frac{\text{Дж} \times \text{моль}^{-1} \times \text{К}^{-1} \times \text{К}}{\text{кг} \times \text{моль}^{-1}} \right)^{1/2} = \frac{\text{с}}{\text{м}} \left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\text{с}}{\text{м}} \left(\frac{\text{Н} \times \text{м}}{\text{кг}} \right)^{1/2} = \frac{\text{с}}{\text{м}} \left(\frac{\text{кг} \times \text{м} \times \text{с}^{-2} \times \text{м}}{\text{кг}} \right)^{1/2} = \frac{\text{с}}{\text{м}} \left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right)^{1/2} = 1.$$

Використовуючи формулу (7), знаходимо:

$$\langle z \rangle = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot (2{,}3 \cdot 10^{-10})^2}{2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot 3{,}14}{2 \cdot 10^{-3}}} \approx$$

$$\approx 9{,}6 \cdot 10^{10}.$$

Реальні гази

Приклад 2.10. *Знайти тиск, який необхідно прикласти до вуглекислого газу при температурі 300 К, аби його густина стала рівною 500 г/л. Розрахунок провести як для ідеального, так і для реального (ван дер ваальсовського) газу.*

CO_2	Розв'язок:
$T = 300$ K $\rho = 500$ кг/м^3 $M(CO_2) = 4{,}4\cdot10^{-2}$ кг/моль $a = 0{,}36$ Н·м^4/моль^2 $b = 42{,}8$ см^3/моль	Для ідеального газу $P_1V = \frac{m}{M}RT = \frac{\rho V}{M}RT$, $P_1 = \frac{\rho}{M}RT = 283\cdot10^5$ Па. Для реального газу $\left(P_2 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$, $\nu = \frac{m}{M}$
P_1 – ? P_2 – ?	

$$\left(P_2 + \frac{a\rho^2V^2}{M^2V^2}\right)V\left(1 - \frac{\rho b}{M}\right) = \frac{\rho V}{M}RT,$$

$$\left(P_2 + \frac{a\rho^2}{M^2}\right) = \frac{\rho}{M}RT\frac{M}{M-\rho b},\ P_2 = \frac{\rho RT}{M-\rho b} - \frac{a\rho^2}{M^2} = 80\cdot10^5 \text{ Па.}$$

Отже, для ідеального газу тиску дорівнює $283\cdot10^5$ Па, а для реального – $80\cdot10^5$ Па.

Термодинаміка

Приклад 2.11. *Азот масою $m = 2\ кг$, який має температуру $T = 288\ K$, адіабатично стискають, збільшуючи тиск в $n = 10$ разів. Визначити роботу, витрачену на стиснення газу.*

Розв'язок:

N_2 $m = 2\ кг$ $T = 288\ K$ $n = 10$ $\Delta Q = 0$ $A - ?$	Робота A, яка виконується над газом зовнішньою силою при його стисканні від об'єму V_1 до об'єму V_2, може бути визначена за формулою

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV\ . \qquad (1)$$

При адіабатичному процесі тиск газу P і його об'єм V пов'язані між собою співвідношенням

$$PV^{\gamma} = \mathrm{const}\,, \qquad (2)$$

де γ – відношення теплоємності газу при сталому тиску до теплоємності при сталому об'ємі. При умовах, близьких до нормальних, двоатомні молекули азоту беруть участь у поступальному та обертальному рухах, отже $\gamma = 1{,}4$.

З рівняння (2) випливає, що $P = \dfrac{\mathrm{const}}{V^{\gamma}}$,

таким чином

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{const}}{V^{\gamma}}\,dV = -\mathrm{const}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = -\mathrm{const}\,\frac{1}{1-\gamma}V^{1-\gamma}\Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= \mathrm{const}\,\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right) = \frac{1}{1-\gamma}\,\frac{\mathrm{const}}{V_1^{\gamma}}\,V_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (3)$$

З рівняння (2) випливає, що

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad P_1=\frac{\text{const}}{V_1^{\gamma}}, \tag{4}$$

де P_1 і P_2 – тиски газу у початковому (коли він мав об'єм V_1) та кінцевому станах, відповідно.
З врахуванням рівностей (4) вираз (3) приймає вигляд

$$A=\frac{1}{1-\gamma}\,P_1V_1\left[1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{5}$$

У початковому стані газ мав температуру T, згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$P_1V_1=(m/M)RT\,. \tag{6}$$

Враховуючи також, що згідно з умовою задачі $P_2/P_1=n$, остаточно отримуємо

$$A=\frac{mRT}{(1-\gamma)M}\left[1-n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\approx 3{,}98\cdot 10^5\ (\text{Дж}).$$

При обчисленні враховано, що молярна маса азоту $M(\mathrm{N}_2)=0{,}028$ кг/моль.

Приклад 2.12. У *скільки разів збільшиться об'єм, який займає* $\nu=0.4$ *моль водню, при ізотермічному розширенні, якщо при цьому газ отримав теплоту* $Q=800$ *Дж ? Температура водню* $T=300$ *К* .

Дано	Розв'язок
H_2 $\nu=0{,}4$ моль $Q=800$ *Дж* $T=300$ *К* V_2/V_1 – ?	Відповідно до першого принципу термодинаміки $$Q=\Delta U+A\,, \tag{1}$$ де Q – кількість теплоти, яка передана газу, A – робота, виконана газом; ΔU – зміна внутрішньої енергії газу:

$$\Delta U=\nu\,C_V\Delta T\,, \tag{2}$$

де ν – кількість речовини, C_V – молярна теплоємність газу при сталому об’ємі, ΔT – зміна температури газу. За умовою процес відбувався ізотермічно, тобто $\Delta T = 0$, отже і $\Delta U = 0$. Враховуючи це, рівняння (1) для ізотермічного процесу можна переписати у вигляді

$$Q = A. \tag{3}$$

За означенням, робота, виконана газом при зміні його об’єму від V_1 до V_2, дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV, \tag{4}$$

де P – тиск газу. Спираючись на рівняння Менделєєва-Клапейрона, можемо записати

$$P = \frac{\nu R T}{V}. \tag{5}$$

Підставляючи вираз (5) у формулу (4) і враховуючи, що при ізотермічному процесі добуток $\nu R T$ залишається сталим, отримуємо

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T}{V} dV = \nu R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R T \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu R T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

З рівняння (5), враховуючи співвідношення (3), отримуємо

$$\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{Q}{\nu R T}\right) \approx 2{,}23.$$

Приклад 2.13. *В двох теплоізольованих циліндрах об'ємами $V_1 = 3$ л і $V_2 = 5$ л знаходяться однакові гази, які мають тиски $P_1 = 100$ кПа і $P_2 = 150$ кПа та температури $T_1 = 300$ К і $T_2 = 320$ К, відповідно. Циліндри сполучені трубкою з краном. Кран відкривають і гази змішуються.. Яка температура T і який тиск P встановляться в циліндрах після змішування? Об’ємом трубки знехтувати.*

$V_1 = 3\cdot 10^{-3}$ $м^3$ $V_2 = 5\cdot 10^{-3}$ $м^3$ $P_1 = 1\cdot 10^5$ Па $P_2 = 1{,}5\cdot 10^5$ Па $T_1 = 300\ K$ $T_2 = 320\ K$	Розв'язок:
T - ? P - ?	

Система з двох циліндрів з газом теплоізольована, тому кількість теплоти, яка їй передається, дорівнює нулеві. Сумарний об'єм системи також не змінюється, тому дорівнює нулеві і загальна робота, виконана газом ($d\,A = P\,dV = 0$). Тому, згідно з першим принципом термодинаміки повна внутрішня енергія системи не змінюється. Отже,

$$U_1 + U_2 = U = const\ , \tag{1}$$

де U_1 і U_2 – внутрішні енергії газів в першому та другому циліндрах до змішування, відповідно; U – внутрішня енергія системи після змішування.

Якщо розглядати гази як ідеальні, то для U_1, U_2 та U можемо записати

$$\begin{gathered} U_1 = \nu_1 C_v T_1\,, \\ U_2 = \nu_2 C_v T_2\,, \\ U = (\nu_1 + \nu_2) C_v T\,, \end{gathered} \tag{2}$$

де ν_1 та ν_2 – число молів газу в першому та другому циліндрах, C_v – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі. Користуючись рівнянням Менделєєва-Клапейрона, для ν_1 та ν_2 отримуємо

$$\nu_1 = \frac{m_1}{M} = \frac{P_1 V_1}{R T_1}, \qquad \nu_2 = \frac{P_2 V_2}{R T_2}. \tag{3}$$

Підставляючи вирази (2) та (3) у рівність (1), маємо

$$\frac{P_1 V_1}{R T_1} C_V T_1 + \frac{P_2 V_2}{R T_2} C_V T_2 = \left(\frac{P_1 V_1}{R T_1} + \frac{P_2 V_2}{R T_2}\right) C_V T\ ,$$

звідки

$$T = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{\dfrac{P_1 V_1}{T_1} + \dfrac{P_1 V_1}{T_2}} = \frac{(P_1 V_1 + P_2 V_2) T_1 T_2}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1}. \tag{4}$$

Тиск, який встановиться після змішування, можна знайти, скориставшись законом Дальтона

$$P = P_1^/ + P_2^/ = \frac{\nu_1 RT}{V_1 + V_2} + \frac{\nu_2 RT}{V_1 + V_2}, \tag{5}$$

де $P_1^/$ та $P_2^/$ – парціальні тиски газів з першого та другого циліндрів. Підставляючи у формулу (5) вирази (3) та (4), остаточно маємо

$$P = \frac{R}{V_1 + V_2}\left(\frac{P_1V_1}{RT_1} + \frac{P_2V_2}{RT_2}\right)\frac{\left(P_1V_1 + P_2V_{21}\right)T_1T_2}{\left(P_1V_1T_2 + P_2V_2T_1\right)} = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2}. \tag{6}$$

Користуючись формулами (4) та (6), знаходимо:

$$T = \frac{\left(10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\right) \cdot 300 \cdot 320}{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 320 + 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 300} \approx 314\left(\text{К}\right),$$

$$P = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}31 \cdot 10^5\left(\text{Па}\right).$$

Приклад 2.14. *Циліндрична посудина закрита поршнем, який за допомогою пружини з'єднаний з дном посудини – див. рис. 2.3. Всередині посудини знаходиться ν молей ідеального газу. Температура газу починає зростати. Записати рівняння процесу, що відбувається з газом. Знайти залежність теплоємності C ідеального газу від положення поршня. Площа поперечного перерізу посудини S, жорсткість пружини k_0, зовнішній тиск весь час сталий і дорівнює P_0. Вважати, що пружина не деформована у випадку, коли поршень віддалений на відстань h від дна посудини.*

Розв'язок:

За означенням, теплоємність *C* дорівнює відношенню кількості теплоти *dQ,* яку потрібно надати тілу, щоб змінити його температуру на величину *dT,* до цього інтервалу температур:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \tag{1}$$

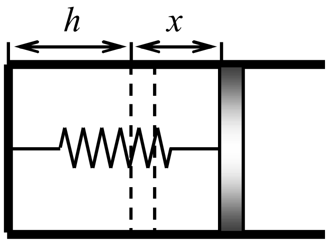


Рис. 2.3.

Згідно з першим принципом термодинаміки для газу справедлива формула

$$dQ = dU + P\,dV\,, \tag{2}$$

де dU – зміна внутрішньої енергії газу при наданні йому кількості теплоти dQ, $P\,dV$ – робота, виконана газом.

Для ідеального газу

$$d\,U = \nu\, C_v d\,T\,, \tag{3}$$

де ν – кількість речовини газу, C_V – молярна теплоємність при сталому об'ємі (величина, яка залежить від кількості ступенів вільності молекули газу).

Згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$PV = \nu\, R T\,. \tag{4}$$

Диференціюємо цей вираз, отримаємо

$$PdV + V\,dP = \nu\, R\,dT\,. \tag{5}$$

В нашому випадку газ, нагріваючись, буде розширюватися і при будь-якому відхиленні поршня x від положення рівноваги тиск у газі буде складатися з зовнішнього тиску і тиску з боку поршня

$$P(x) = P_0 + \frac{k_0\, x}{S}, \tag{6}$$

де ($k_0\, x$) – сила пружності, що діє на поршень з боку деформованої пружини. Таким чином, при зміні відхилення поршня на dx тиск змінюється на величину

$$d\,P(x) = \frac{k_0\, dx}{S} = \frac{k_0\, dV}{S^2}\,, \tag{7}$$

де $S\,dx = dV$ – зміна об'єму, який займає газ. Інтегруючи рівняння (7), отримуємо

$$P = \frac{k_0\, V}{S^2} + A\,, \tag{8}$$

де $V = (h + x)S$ – об'єм, який займає газ; A – стала інтегрування. Її легко визначити з граничних умов: при $x = 0$ поршень знаходиться у положенні рівноваги, пружина не деформована, тиск газу дорівнює зовнішньому тиску, тобто $P = P_0$ і $V = V_0 = hS$.

Таким чином

$$P_0 = \frac{k_0 V_0}{S^2} + A,$$

$$A = P_0 - \frac{k_0 V_0}{S},$$

і отже, рівняння процесу, в якому бере участь газ, має вигляд

$$\frac{P - P_0}{V - V_0} = \frac{k_0}{S^2} = const. \qquad (9)$$

Підставивши вираз (7) у рівняння (5) та врахувавши співвідношення (6), матимемо

$$PdV + V\frac{k_0\, dV}{S^2} = \nu R\, dT,$$

$$\left(1 + \frac{Vk_0}{PS^2}\right) P\, dV = \nu R\ dT,$$

$$\left[1 + \frac{(h + x) S k_0}{\left(P_0 + \frac{k_0 x}{S}\right) S^2}\right] PdV = \left[1 + \frac{(h + x) k_0}{(S P_0 + k_0 x)}\right] P\, dV = \nu R\ dT$$

$$P\, dV = \nu R \left[1 + \frac{(h + x) k_0}{(S P_0 + k_0 x)}\right]^{-1} dT. \qquad (10)$$

Підставляючи вирази (10) та (3) у рівняння (2), отримуємо

$$dQ = \nu C_v d\, T + \frac{\nu R}{\left[1 + \frac{(h + x) k_0}{(S P_0 + k_0 x)}\right]} dT. \qquad (11)$$

Остаточно, порівнюючи вирази (1) та (11), можемо записати

$$C = \nu\left(C_v + \frac{R}{\left[1 + \dfrac{(h+x)k_0}{(S P_0 + k_0 x)} \right]} \right).$$

Приклад 2.15. *Теплова машина здійснює цикл, який складається з ізотерми, ізобари та ізохори. Робочим тілом машини є ідеальний газ з показником адіабати $\gamma = 1{,}4$ Максимальна температура газу при цьому $T_{max} = 600\ K$, мінімальна – $T_{min} = 300\ K$; максимальний об'єм, який займає газ – $V_{max} = 2\ л$, мінімальний – $V_{min} = 1\ л$. Обчислити ККД (η) цієї машини.*

$\gamma = 1{,}4$

$V_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}\ м^3$

$V_{\min} = 1 \cdot 10^{-3}\ м^3$

$T_{\max} = 600\ K$

$T_{min} = 300\ K$

$\eta - ?$

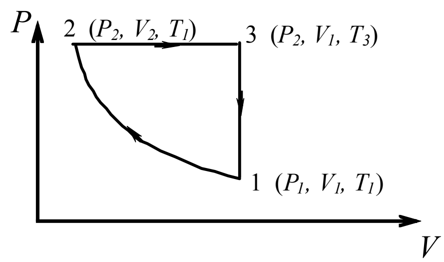


Рис.2.4.

Розв'язок:

Діаграму циклу в координатах *P-V* подано на рис. 2.4: процес 1-2 ізотермічний ($T_2 = T_1$), 2-3 – ізобаричний ($P_3 = P_2$), 3-1 – ізохоричний ($V_3 = V_1$).

Спочатку визначимо, в які моменти циклу температура та об'єм набуватимуть максимальних і мінімальних значень.
З діаграми видно, що $V_{\max} = V_1$, $V_{\min} = V_2$.

Згідно із законом Гей-Люссака $\dfrac{V_2}{T_2} = \dfrac{V_3}{T_3}$, або, з врахуванням вигляду циклу, $\dfrac{V_2}{T_1} = \dfrac{V_1}{T_3}$.

Таким чином $\left(T_3/T_1\right)=\left(V_1/V_2\right)>1$ і, отже $T_{\max}=T_3$, $T_{\min}=T_1$.
Коефіцієнт корисної дії теплової машини η дорівнює

$$\eta=\left(Q_1-Q_2\right)/Q_1\ , \tag{1}$$

де Q_1 і Q_2 – кількості теплоти, отримані та віддані газом за цикл, відповідно. Для знаходження цих величин розглянемо кожен з процесів, з яких складається цикл, окремо.

1-2: При ізотермічній зміні об’єму, кількість теплоти, отримана газом, визначається за формулою

$$Q_{1-2}=\nu\, R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \tag{2}$$

де ν – кількість речовини газу. Так як в нашому випадку $V_2<V_1$, то величина $Q_{1\text{-}2}$ – від’ємна, тобто під час ізотермічного стискування газ віддає теплоту.

2-3: При ізобаричному процесі

$$Q_{2-3}=\nu\, C_p\left(T_3-T_2\right)=\nu\, C_p\left(T_3-T_1\right), \tag{3}$$

де C_p – молярна теплоємність газу при сталому тиску. Так як $T_3>T_1$, то під час цього процесу газ отримує теплоту.

3-1: При ізохоричному процесі

$$Q_{3-1}=\nu\, C_v\left(T_1-T_3\right), \tag{4}$$

де C_V – молярна теплоємність газу при сталому об’ємі.
Очевидно, що $Q_{3\text{-}1}<0$.

Отже

$$Q_1=Q_{2-3},\quad Q_2=-\left(Q_{1-2}+Q_{3-1}\right). \tag{5}$$

Таким чином, з урахуванням виразів (2-5), формула (1) набуде вигляду

$$\eta = \frac{\nu C_p (T_3 - T_1) - \nu R T_1 \ln(V_1/V_2) - \nu C_v (T_3 - T_1)}{\nu C_p (T_3 - T_1)} =$$
$$= \frac{(C_p - C_V)(T_3 - T_1) - R T_1 \ln(V_1/V_2)}{C_p (T_3 - T_1)}. \quad (6)$$

Оскільки для ідеального газу справедливі співвідношення $C_p - C_V = R$, $\frac{R}{C_p} = 1 - \frac{C_V}{C_p} = 1 - \frac{1}{\gamma}$, то остаточно для ККД отримуємо

$$\eta = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{T_{min}}{T_{max} - T_{min}} \ln\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right)\right) \approx 0{,}09 .$$

Приклад 2.17. *Визначити зміну ентропії при нагріванні $m = 100$ г азоту від $t_1 = 17^0$ до $t_2 = 100^0$ при сталому тиску.*

N_2
$P = const$
$m = 0{,}1$ *кг*
$T_1 = 290$ *К*
$T_2 = 373$ *К*
$\Delta S - ?$

Розв'язок:

Зміна ентропії ΔS при нагріванні тіла від температури T_1 до T_2 описується виразом:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}, \quad (1)$$

де Q – кількість теплоти, яка передається тілу.

При ізобаричному процесі для зміни температури тіла масою m на величину dT необхідна кількість теплоти:

$$dQ = m\, C_p dT, \quad (2)$$

де C_p – питома теплоємність при постійному тиску. Якщо вважати газ ідеальним, то

$$C_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}, \quad (3)$$

де M – молярна маса газу, $M(N_2) = 0{,}028$ кг/моль; i – кількість ступенів вільності молекули газу. Оскільки азот – двоатомний газ, то для нього при вказаних температурах $i = 5$. Таким чином,

$$C_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M}. \qquad (4)$$

Підставляючи вираз (2) у формулу (1) та враховуючи рівність (4), отримуємо

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{7\,R\,m\,dT}{2M\,T} = \frac{7\,m\,R}{2M}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \frac{7\,m\,R}{2M}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \approx 26\left(\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right)$$

Приклад 2.18. *Знайти приріст ентропії одного молю діоксиду вуглецю* CO_2 *при збільшенні його абсолютної температури в n разів, якщо процес нагрівання: а) ізохорний; б) ізобарний. Газ вважати ідеальним.*

Розв'язок:

а) Запишемо зміну ентропії в ізохорному процесі

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2}\frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{nT_0}\frac{C_V dT}{T} = C_v(\ln nT_0 - \ln T_0) = C_v \ln n,$$

За допомогою співвідношення $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ та рівняння Майєра $C_P = C_V + R$, знайдемо, що $C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1}$.

Отже, $\Delta S = \dfrac{R}{n-1}\ln n \cdot$

б) Запишемо зміну ентропії в ізобарному процесі

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2}\frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{nT_0}\frac{C_P dT}{T} = C_p(\ln nT_0 - \ln T_0) = \gamma C_v \ln n$$

Отже, $$\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln n.$$

Приклад 2.19. *Об'єм ідеального газу з показником адіабати* γ *змінюють за законом* $V = \dfrac{a}{T}$, *a – стала. Знайти кількість теплоти, що отримано одним молем газу в цьому процесі, якщо температура газу має приріст* ΔT.

Розв’язок:

Запишемо перший принцип термодинаміки:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A \text{, отже } \Delta Q = \Delta U + \Delta A .$$

Знайдемо роботу

$$\Delta A = \int P dV . \tag{1}$$

З рівняння стану ідеального газу $PV = RT,$ отримаємо,

підставивши об’єм $V = \frac{a}{T}$: $P\frac{a}{T} = RT.$

Отже, тиск дорівнює

$$P = \frac{RT^2}{a} . \tag{2}$$

Продиференціюємо вираз $V = \frac{a}{T}$, маємо

$$dV = -\frac{a}{T^2} dT . \tag{3}$$

Підставимо вирази (2) і (3) в (1)

$$\Delta A = \int_{T_1}^{T_2} P dV = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{RT^2}{a} \cdot \frac{a}{T^2} dT = -R(T_2 - T_1) = -R\Delta T .$$

Внутрішня енергія дорівнює: $\Delta U = C_V \Delta T$.

За допомогою співвідношення $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ та рівняння Майєра

$C_P = C_V + R$, знайдемо, що $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$.

Отже, $\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1} \Delta T$.

Отже, кількість теплоти дорівнює

$$\Delta Q = \frac{R}{\gamma - 1} \Delta T - R\Delta T = \frac{R\Delta T}{\gamma - 1}(2 - \gamma).$$

Приклад 2.20. *Внутрішня енергія деякої системи відома як функція ентропії та об'єму U(S,V). Знайти температуру та теплоємність цієї системи.*

Розв'язок:

З об'єднаного рівняння першого та другого принципів термодинаміки для внутрішньої енергії $dU = TdS - PdV$ випливає, що температура – це частинна похідна внутрішньої енергії за ентропією: $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$.

Ізохорна теплоємність визначає швидкість зміни ентропії з температурою: $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$. Скориставшись властивостями частинних похідних, можна виразити похідну ентропії за температурою через другу похідну внутрішньої енергії:

$$C_V = \frac{T}{\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V} = \frac{T}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_V} = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_V}.$$

Відповідь: $C_V = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_V}$.

Приклад 2.21. *Знайти вирази похідних* $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V$ *та* $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U$ *через температуру та тиск.*

Розв'язок:

Запишемо об'єднане рівняння першого та другого принципів термодинаміки для внутрішньої енергії $dU = TdS - PdV$.

Звідси $dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV$.

Отже, $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}$, $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T}$.

Відповідь: $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}$, $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T}$.

Приклад 2.22. *Використовуючи об'єднане рівняння першого та другого принципів термодинаміки, знайдіть залежність ентальпії від тиску при сталій температурі для ідеального газу.*

Розв'язок:

З об'єднаного рівняння першого та другого принципів термодинаміки для ентальпії
$dH = TdS + VdP$, отримаємо

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V .$$

Похідну ентропії за тиском можна виразити за допомогою співвідношення Максвелла: $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. Отже

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V .$$

Для ідеального газу $V(T) = nRT/P$.

Підставляємо цю функцію в останню тотожність, отримаємо

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{nR}{P}\right) + \frac{nRT}{P} = 0$$

Отже, ентальпія ідеального газу не залежить від тиску.

Приклад 2.23. *Доведіть наступне співвідношення між ізобарною та ізохорною теплоємностями:*

$$C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P .$$

Розв'язок:

Запишемо визначення ізобарної та ізохорної теплоємностей

$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P$ – теплоємність одного моля речовини при сталому тиску;

$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ – теплоємність одного моля речовини при сталому об'ємі.

Запишемо перший принцип термодинаміки в наступному вигляді $\delta Q = dU(T,V) + PdV$.

Диференціал функції $U(T,V)$ можна записати так

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV .$$

Отже, $$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV . \qquad (1)$$

При $P = const$ з (1) отримаємо

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P . \qquad (2)$$

При $V = const$ з (1) отримаємо $C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. (3)

Отже: $$C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P . \qquad (4)$$

Перетворимо праву частину рівняння (4), використовуючи наступні означення та співвідношення
$F = E - TS$; $dF = -SdT - PdV$. Отже,

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T ;$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V ; \quad P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T ;$$

$$P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Отже, $C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

Приклад 2.24. *При політропічному процесі молярна теплоємність деякої кількості газу Ван дер Ваальса дорівнює С. Отримати рівняння цього політропічного процесу.*

Розв’язок:

Згідно з означенням політропічного процесу, його теплоємність C не залежить від температури. Отже, при політропічній зміні стану газу Ван дер Ваальса кількість теплоти dQ, яка передається тілу, і зміна його температури dT пов’язані співвідношенням

$$d\,Q = \nu\, C\, dT\ , \tag{1}$$

де ν – кількість речовини газу. З другого боку, згідно з першим принципом термодинаміки

$$dQ = dU + p\, dV\ , \tag{2}$$

де P – тиск газу, V – об’єм, який він займає, U – внутрішня енергія газу. Оскільки для газу Ван дер Ваальса справедлива формула $U = \nu\, C_V T - \left(a\nu^2\right)/V$, то

$$d\,U = \nu\, C_V\, d\,T + \frac{a\nu^2}{V^2} d\,V\ , \tag{3}$$

де C_V – молярна теплоємність ідеального газу при сталому об'ємі. Підставляючи вирази (1) та (3) у формулу (2), отримуємо

$$\nu C\,dT = \nu C_V dT + \frac{a\nu^2}{V^2}dV + P\,dV = \nu C_V dT + \left(\frac{a\nu^2}{V^2} + P\right)dV \,. \quad (4)$$

Оскільки з рівняння стану реального газу випливає, що $\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) = \frac{\nu RT}{(V - \nu b)}$, то спираючись на рівняння (4) можемо записати

$$\nu C\,dT = \nu C_V dT + \frac{\nu RT}{(V - \nu b)}dV \,,$$

$$(C - C_V)\frac{dT}{T} = \frac{R}{(V - \nu b)}dV \,,$$

$$(C - C_V)\ln T = R\ln(V - \nu b) + \mathrm{const}' \,,$$

$$T^{\frac{(C - C_V)}{R}}(V - \nu b)^{-1} = \mathrm{const}\,. \quad (5)$$

Співвідношення (5) і є рівнянням політропічного процесу газу Ван дер Ваальса.

За допомогою рівняння стану його можна перетворити до більш звичного вигляду: оскільки $T = \left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\frac{(V\text{-}\nu b)}{\nu R}$, то

$$\left\{\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)\frac{(V - \nu b)}{\nu R}\right\}^{\frac{(C - C_V)}{R}}(V - \nu b)^{-1} = \mathrm{const}\,. \quad (6)$$

Враховуючи, що процес відбувається при сталій кількості газу, остаточно отримуємо

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b)^{\frac{C - C_V - R}{C - C_V}} = \mathrm{const}.$$

Явища переносу

Приклад 2.25. *Знайти масу* Δm *азоту, що переноситься за рахунок дифузії через площадку* $\Delta S = 10^{-2}$ *м*^{2} *за час* $\Delta t = 10$ *с, якщо градієнт густини в напрямку, перпендикулярному площині,* *дорівнює* $\Delta\rho/\Delta x = -1{,}26$ *кг/м*^{4}. *Температура азоту T=300 K; середня довжина вільного пробігу молекул азоту* $\lambda = 10^{-7}$ *м.*

N_2	Розв'язок:
$\Delta S = 10^{-2}$ м^2 $\Delta t = 10$ с $T = 300$ *К* $\Delta\rho/\Delta x = -1{,}26$ кг/м^4 $\lambda = 10^{-7}$ м.	Відповідно до закону Фіка, $\Delta m = -\frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$, де $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, $M = 0{,}028$ кг/моль – молярна маса азоту.
Δm – ?	

Остаточно одержимо

$$\Delta m = \frac{1}{3}\langle\lambda\rangle\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t .$$

$$\Delta m = 2\cdot 10^{-6}\ кг .$$

Приклад 2.26. *Знайти коефіцієнт внутрішнього тертя* η *азоту при нормальних умовах, якщо коефіцієнт дифузії для нього при цих умовах* $D = 1{,}42\cdot 10^{-5}$ *м*^{2}*/с.*

N_2	Розв'язок:
$D = 1{,}42\cdot 10^{-5}$ м^2/с. $M = 0{,}028$ кг/моль	Коефіцієнт внутрішнього тертя дорівнює: $\eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\rho = D\rho$,
η – ?	де ρ – густина азоту.

Величину ρ одержимо з рівняння:

$$\rho = PM/RT ,$$

де P і T – тиск і температура; $M = 0{,}028$ кг/моль – молярна маса азоту.

При нормальних умовах $P = 10^5$ Па і $T = 273$ К. Таким чином,

$$\eta = D\frac{PM}{RT} , \quad \eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}\ кг/(м\times с) .$$

Приклад 2.27. *Звичайний термос являє собою посудину з подвійними стінками, між якими знаходиться дуже розріджений газ (наприклад, водень), для якого довжина вільного пробігу молекул значно більша відстані між стінками.*

Визначити, нижче якого значення повинен бути тиск P водню, щоб його теплопровідність була менша, ніж при атмосферному тиску, якщо відстань між стінками посудини $d = 8\cdot10^{-3}$ м, *температура* $T = 300$ *К, а діаметр молекул водню* $\sigma = 2{,}3\cdot10^{-10}$ м.

H_2	Розв'язок:
$d = 8\cdot10^{-3}$ м $T = 300$ К $\sigma = 2{,}3\cdot10^{-10}$ м	Для того, аби коефіцієнт теплопровідності водню став меншим, ніж при атмосферному тиску, повинна мати місце нерівність
$P - ?$	$\lambda > d$ або $\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0} > d$,

де n_0 – число молекул в одиниці об'єму, яке пов'язане з тиском P співвідношенням

$$n_0 = \frac{P}{kT},$$

де k – стала Больцмана; T – температура газу.

Пояснимо необхідність виконання умови $\lambda > d$.
Якщо $\lambda > d$ то теплопровідність χ знаходять з рівняння

$$\chi = \frac{1}{3} d\rho \langle v \rangle C_V = \frac{1}{3} d m n_0 \langle v \rangle C_V,$$

де m – маса молекули водню.

Отож, бачимо, що починаючи з певних значень n_0 (відповідно P_0) теплопровідність починає зменшуватись пропорційно n_0.

При $\lambda \le d$ теплопровідність не залежить від тиску (від n_0), бо:

$$\chi = \frac{1}{3}\lambda\rho\langle v\rangle C_V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0} m n_0 \langle v\rangle C_V = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{\sqrt{2}\pi\sigma^2}\langle v\rangle C_V .$$

З умови $\lambda > d$ одержимо, що тиск P задовольняє умові

$$P < \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}.$$

Якщо підставити числові значення, то одержимо

$$P < \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\, Дж/К \cdot 300К}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot \left(2{,}3 \cdot 10^{-10}\right)^2 м^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}\, м}, \quad P < 2 \text{ Па}.$$

Приклад 2.28. *Простір між двома концентричними сферами радіусами R_1 та R_2 заповнений газом при високому тиску. Температури обох сфер сталі і дорівнюють відповідно T_1 та T_2. Визначити розподіл температури між сферами*

Розв'язок:

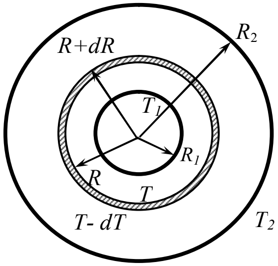


Рис. 2.5

Для визначеності припустимо, що $R_2 > R_1$, $T_1 > T_2$. Для того, щоб визначити розподіл температури, тобто з'ясувати вигляд функції *T(R),* де *R* – відстань від центру сфер, виконаємо наступні дії.

Виберемо тонкий сферичний шар товщиною *dR* і радіусом *R* ($R_1 < R < R_2$), центр якого співпадає з центрами сфер – див. рис. 2.5. Припустимо, що температура внутрішньої поверхні цього шару – *T*, а зовнішньої – $(T - dT)$.

Рівняння для кількості теплоти, що проходить за одиницю часу через цей шар (рівняння теплопровідності) буде мати вигляд

$$\frac{dQ}{dt} = -\chi \frac{dT}{dR} \Delta S\,, \tag{1}$$

де χ – коефіцієнт теплопровідності газу,

dT/dR – градієнт температури в місці знаходження сферичного шару, $\Delta S = 4\pi R^2$ – площа поверхні цього шару.

Очевидно, що в задачі розглядається стаціонарний випадок – температури обох сфер залишаються сталими. Це означає, що кількість теплоти, яку виділяє щосекунди в оточуючий простір зовнішня сфера, дорівнює кількості теплоти, яка щосекунди надходить до цієї сфери з боку газу.

Одночасно, ця кількість теплоти дорівнює кількості теплоти, що проходить щосекунди через будь-яку сферу проміжного радіуса *R*.

Тобто $\frac{dQ}{dt} = -\chi \frac{dT}{dR} 4\pi R^2 = \text{const}$,

Отже, $B_1 \frac{dR}{R^2} = -dT$, (2)

де $B_1 = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{4\pi\chi}$ – стала. Інтегруючи рівняння (2), отримуємо

$$\frac{B_1}{R} = T + B_2, \tag{3}$$

де B_2 – стала інтегрування.

Сталі B_1 та B_2 можна обчислити, використавши граничні умови, а саме:

$$R = R_1,\ T = T_1,$$
$$R = R_2,\ T = T_2.$$

Отже

$$\begin{cases} \dfrac{B_1}{R_1} = T_1 + B_2 \\ \dfrac{B_1}{R_2} = T_2 + B_2 \end{cases}. \tag{3}$$

З останньої системи рівнянь знаходимо

$$B_1 = \frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1}, \quad B_2 = \frac{T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Таким чином, розподіл температури в просторі між сферами має вигляд

$$T(R) = \frac{R_1 R_2 (T_1 - T_2)}{R_2 - R_1} \cdot \frac{1}{R} + \frac{T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Задачі для самостійного розв'язку

2.1. Знайти кількість молекул в одиниці об'єму газу за нормальних умов (число Лошмідта).

2.2. Виходячи з рівняння Менделєєва-Клапейрона, отримати:

а) закон Бойля-Маріотта (ізотермічний процес);

б) закон Гей-Люссака (ізобарний процес);

в) закон Шарля (ізохорний процес).

Зобразити графіки таких процесів в координатах (T, V), (V, P), (T, P).

2.3. Визначити масу m_i молекули води та кількість N молекул, що містяться в об'ємі $V = 1$ мм^3. Оцінити радіус r_0 молекули води.

2.4. У кімнаті об'ємом V випарували m грамів ароматичної речовини з молярною масою M. Яка кількість N молекул цієї речовини потрапляє в легені людини об'ємом V_0 при кожному вдиханні?

2.5. Скільки електронів міститься в 1 см^3 свинцю? Густина свинцю $\rho = 11000$ кг/м^3.

2.6. Дано дві закриті посудини об'ємами V_1 і V_2. Тиск газу в першій посудині P_1, в другій – P_2. Температури газів однакові. Який тиск встановиться в кожній з посудин, якщо їх сполучити?

2.7. В посудині знаходиться кисень масою m_1 і водень масою m_2. У скільки разів зміниться тиск в посудині, якщо весь кисень прореагує з необхідною для цього частиною водню? Температура стала. Тиском водяної пари знехтувати.

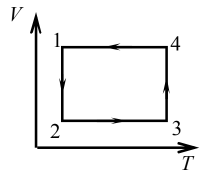
2.8. Бульбашка повітря піднімається з дна басейну глибиною H. Знайти залежність радіуса бульбашки r від глибини h її місцезнаходження в даний момент часу, якщо її об'єм на дні дорівнює V_0. Сили поверхневого натягу не враховувати. Атмосферний тиск P_0, густина води в басейні ρ. Температура води не залежить від глибини.

2.9. Два з'єднані тонкою трубкою балони об'ємами $V_1 = 4$ л і $V_2 = 3$ л містять певну кількість азоту. Перший балон має незмінну температуру t_1 = 27°C. До якої температури T потрібно нагріти другий балон для того, щоб в ньому залишилася тільки 1/3 загальної кількості азоту?

2.10. У тонкостінний стальний сферичний балон, маса якого $m_б$, нагнітають азот при температурі T. Знайти максимальну масу азоту, що може вміститися у балоні, якщо допустиме напруження стінок балона σ. Густина сталі ρ.

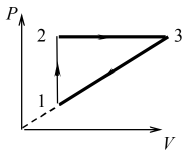
2.11. Димар виносить дим при температурі T_1 = 333 К. Визначити статичний тиск P, який зумовлює тягу в димарі. Температура зовнішнього повітря T_1 = 263 К, висота димаря L = 50 м. Зовнішній атмосферний тиск повітря вважати нормальним (101 кПа), густина повітря за нормальних умов

2.12. На рисунку приведена VT-діаграма замкненого циклу. Побудувати PT і PV-діаграми.



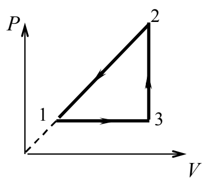
2.13. У балоні об'ємом V знаходиться гелій під тиском P_1 і при температурі T_1. Після того, як з балону вилучили гелій масою m, температура понизилася до T_2. Визначити тиск P_2 гелію, що залишився в балоні.

2.14. Газ здійснює цикл, PV-діаграма якого наведена на рисунку. Температура газу у станах 1 та 2 відома і дорівнює T_1 і T_2, відповідно. Знайти температуру в стані 3.



2.15. Вертикальний циліндр розділено рухомим горизонтальним поршнем масою m і площею S на дві частини. У верхній частині знаходиться азот при температурі T і тиску P, у нижній – кисень при температурі $2T$. Посудину перевертають і встановлюють горизонтально. На скільки градусів необхідно змінити температуру азоту, щоб об'єми газів не змінилися?

2.16. На рисунку наведена PV-діаграма замкненого циклу. Побудувати VT- та PT-діаграми.



2.17. У процесі нагрівання газу при постійному об'ємі на 1 К його тиск збільшився на 0,2%. При якій початковій температурі знаходився газ?

2.18. В циліндрі об'ємом V під поршнем знаходиться газ при температурі T. Знайти роботу розширення газу при нагріванні його на ΔT. Маса поршня m, площа S, атмосферний тиск P_0.

2.19. Посудина об'ємом V містить m грамів азоту при температурі T. Чому дорівнює тиск газу, якщо кожна друга молекула азоту дисоційована на атоми?

2.20. За час $t = 10$ діб із склянки повністю випарилося $m = 100$ г води. Скільки в середньому молекул вилітало з поверхні води за 1 секунду?

2.21. Посудина об'ємом 40 літрів містить 1,98 кг CO_2 та витримує тиск не більше за 3 МПа. При якій температурі існує небезпека вибуху?

2.22. Посудина, що містить $m_1 = 2$ г гелію, розірвалася при температурі $t_1 = 400^0$C. Яку максимальну масу азоту можна зберігати в такий посудині при температурі $t_2 = 30^0$C та п'ятикратному запасі міцності?

2.23. Визначити густину суміші, що складається з $m_1 = 4\cdot10^{-3}$ кг водню та $m_2 = 32\cdot10^{-3}$ кг кисню при температурі $T = 280$ К і загальному тиску $P = 9{,}3\cdot10^4$ Па.

2.24. Гумова куля містить $V_1 = 2$ л повітря, яке знаходиться при температурі $T_1 = 20^0$C та атмосферному тиску $P_0 = 10^5$ Па. Який об'єм займе повітря, якщо куля буде опущена в воду на глибину $h = 10$ м? Температура води $T_2 = 4^0$C.

2.25. Посудина містить стиснений газ при температурі $t_1 = 27^0$C і тиску $P_1 = 2$ МПа. Яким буде тиск, якщо із балону випустити $n = 0{,}3$ маси газу, а температуру знизити до $t_2 = 12^0$C?

2.26. Вертикальний циліндр з важким поршнем наповнений азотом, маса якого $m = 0{,}1$ кг. Після зростання температури азоту на $\Delta T = 100$ К поршень піднявся на висоту $h = 0{,}1$ м. Над поршнем зберігається нормальний атмосферний тиск $P_0 = 10^5$ Па. Площа поршня $S = 0,02$ м^2. Визначити масу поршня.

2.27. В закритій посудині ємністю $V = 2$ м^3 знаходиться $m_1 = 0,9$ кг води та $m_2 = 1,6$ кг кисню. Знайти тиск в посудині при температурі $t = 500^0$C, враховуючи, що при цій температурі вся вода перетворилася на пару.

2.28. На якій висоті вміст водню в повітрі по відношенню до вуглекислого газу зросте вдвічі? Середню по висоті температуру вважати 40^0С.

2.29. У посудині об'ємом V знаходиться газ масою m. Визначити тиск газу, якщо середньоквадратична швидкість його молекул $\upsilon_{кв}$?

2.30. Суміш водню та гелію знаходяться при температурі 300 К. При якому значенні швидкості молекул значення функцій розподілу за швидкостями Максвелла будуть однаковими для обох газів?

2.31. Водень масою $m = 0,3$ г знаходиться в посудині ємністю $V = 2$ л під тиском $P = 200$ кПа. Визначити середню квадратичну швидкість і середню кінетичну енергію поступального руху молекул водню.

2.32. Обчислити найбільш ймовірну швидкість молекул газу, у якого при нормальному атмосферному тиску густина дорівнює

1,2 г/м^3.

2.33. Для газоподібного азоту знайти температуру, при якій швидкостям молекул υ_1 і υ_2 відповідають однакові значення функції розподілу Максвелла.

2.34. При якій температурі газу кількість молекул, які мають швидкості, що знаходяться в заданому інтервалі $[\upsilon, \upsilon + d\upsilon]$ буде максимальним? Маса кожної молекули дорівнює m_0.

2.35. Знайти силу, що діє на частинки з боку однорідного поля, якщо концентрації цих частинок на двох рівнях, які розташовані на відстані Δh (вздовж силової лінії поля) відрізняються в η разів. Температура системи T.

2.36. У довгій вертикальній посудині знаходиться газ, що складається з двох сортів молекул з масами m_1 і m_2 ($m_2 > m_1$). Концентрація цих молекул біля дна посудини – n_{10} і n_{20}, відповідно ($n_{20} > n_{10}$). Вважаючи, що по всій висоті підтримується одна й та ж температура *T,* знайти висоту, на якій концентрації молекул кожного сорту будуть однакові. Прискорення вільного падіння у всіх точках системи дорівнює *g*.

2.37. Знайти різницю середніх кількостей ударів молекул повітря в зовнішнє скло вікна N_1 та внутрішнє скло вікна N_2 за час $\Delta t = 1\ \text{с}$. Вважати, що температура у кімнаті дорівнює $t_1 = 20^\circ C$, а температура ззовні дорівнює $t_2 = -20^\circ C$. Атмосферний тиск $P = 750\ \text{мм.рт.ст}$. Розмір скла $S = 45\ \text{см} \times 110\ \text{см}$.

2.38. Для води стала Ван дер Ваальса *b* дорівнює $b = 3{,}06 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}$. Визначити критичний об'єм $m = 1$ кг води.

2.39. При якому тиску *P* густина газоподібного азоту, що має температуру $t = -73^0 C$, становить сорок відсотків від густини води ρ_0 при кімнатній температурі ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3). Сталі Ван дер Ваальса для азоту $a = 0{,}136\ \text{Н}\times\text{м}^4/\text{моль}^2$, $b = 3{,}9\times 10^{-5}\ \text{м}^3/\text{моль}$.

2.40. Знайти сталі Ван дер Ваальса *a* та *b* для азота, якщо відомі критична температура $T_{кр}$= 126 К та критичний тиск $P_{кр}$= 3,39 МПа.

2.41. Яке гранична кількість молекул газу може знаходитись в сферичній посудині діаметром *D*, щоб між ними не відбувалося зіткнень. Діаметр молекули газу σ.

2.42. Визначити, яка частина молекул газу: а) пролітає без зіткнень відстані, що перевищують середню довжину вільного пробігу λ; б) мають довжини вільного пробігу в інтервалі від λ до 2λ.

2.43. Параметр кубічної гранецентрованої ґратки кристалу кальцію дорівнює a. Знайти густину кристалу ρ.

2.44. Знайти мінімальну відстань d між сусідніми атомами в кристалі у випадку:
а) кубічної ґранецентрованої ґратки,
б) кубічної об'ємоцентрованої ґратки,
в) простої кубічної ґратки.
Параметр ґратки дорівнює a.

2.45. Отримати вирази для роботи ідеального газу при:
а) ізохорному; б) ізобарному; в) ізотермічному процесах.

2.46. Отримати рівняння адіабати ідеального газу в змінних T і V та T і P.

2.47. Отримати вираз для роботи ідеального газу в адіабатному процесі.

2.48. Отримати вираз для внутрішньої енергії 1 молю ідеального газу, якщо відомо, що його теплоємність при сталому об'ємі дорівнює C_v.

2.49. Моль ідеального газу із стану з температурю $T = 100$ К розширяється ізобарно, а потім ізохорно переходить в стан з початковою температурою. В скільки разів зміниться при цьому об'єм газу, якщо для переведення газу з початкового стану в кінцевий до нього підвели теплоту $Q = 831$ кДж?

2.50. Газ знаходиться в циліндрі під невагомим поршнем, площа якого $S = 100\ \text{см}^2$. При температурі $T_1 = 280$ К на поршень встановили гирю масою $m = 10$ кг. При цьому поршень дещо опустився. На скільки необхідно нагріти газ в циліндрі, щоб поршень повернувся на початкову висоту? Атмосферний тиск P =101 кПа.

2.51. При ізотермічному розширенні азоту масою m = 100 г, що мав температуру $T = 280$К, його об'єм збільшився в 3 рази.

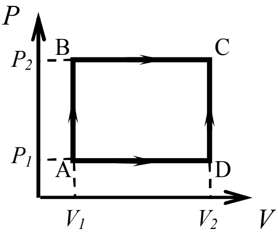
Знайти: роботу, виконану газом при розширенні, зміну внутрішньої енергії газу, кількість теплоти, переданої газу.

2.52. У вертикальному циліндрі місткістю $V = 2$ л під важким поршнем знаходиться газ при температурі $T = 300$ К. Маса поршня $m = 50$ кг, його площа $S = 50$ см^2. Температуру газу збільшили на $\Delta T = 100$К. Знайти зміну внутрішньої енергії газу, якщо теплоємність газу $C = 5$Дж/К. Атмосферний тиск $P_0 = 10^5$ Па. Тертя поршня об стінки не враховувати.

2.53. Теплоізольована циліндрична посудина поділена невагомим поршнем на дві рівні частини об'ємом V кожна. З одного боку поршня міститься ідеальний газ, маса якого m, молекулярна маса M, молярна теплоємність при сталому тиску C_V. З другого боку поршня створено вакуум. Початкова температура газу T_0. Поршень відпускають, і він, вільно рухаючись, дає можливість газу заповнити весь об'єм циліндра. Після цього, поступово збільшуючи тиск на поршень, повільно повертають газ до початкового об'єму. Визначити зміну внутрішньої енергії газу ΔU в цьому процесі.

2.54. Тиск і об'єм певної маси кисню політропічно змінюються від значень $P_1 = 404$ кПа і $V_1 = 1$ л до $P_2 = 101$ кПа і $V_2 = 1$ л. Яку кількість теплоти Q отримав кисень від зовнішнього середовища? На яку величину ΔU змінилась його внутрішня енергія?

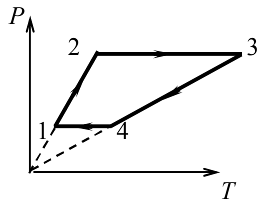
2.55. Якщо над ідеальним газом здійснюють процес А-В-С (див. рисунок), то газу надають кількість теплоти Q. Яку кількість теплоти надають газу при здійснені процесу A-D-C? Величини P_1, P_2, V_1 і V_2 відомі.



2.56. Кисень масою m займає об'єм V_1 і знаходиться під тиском P_1. Газ спочатку нагрівають при сталому тиску до об'єму V_2, а потім – при сталому об'ємі до тиску P_3. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу, виконану ним роботу A і передану газу кількість теплоти Q.

2.57. В циліндрі знаходиться деяка маса водню при температурі T, яка займає об'єм V і має тиск P. При незмінному тиску над газом виконують роботу $A > 0$. На яку величину змінилася температура водню?

2.58. Кисень масою m виконує замкнений процес – див.рисунок. Температура газу в станах 1, 2, 3, і 4 дорівнює T_1, T_2, T_3, T_4, відповідно. Яка робота A виконана газом за цикл? Яка кількість теплоти Q передана газу при цьому? Як змінилася внутрішня енергія газу при переході зі стану 1 у стан 3?



2.59. Ідеальний газ із показником адіабати γ розширили за законом $P = \alpha V$, де α – стала. Початковий об'єм газу V_0. У результаті розширення об'єм газу збільшився в η разів. Знайти зміну внутрішньої енергії ΔU, роботу розширення газу A, молярну теплоємність газу C_M.

2.60. Температура нагрівача теплового двигуна, який працює за циклом Карно, $T_H = 480$ К, температура холодильника – $T_X = 290$ К. Якою повинна стати температура нагрівача T'_H, щоб при тій самій температурі холодильника, ККД двигуна збільшився у 2 рази?

2.61. Теплова машина здійснює цикл, який складається з двох ізотерм з температурами T_1 і T_2 та двох ізохор з об’ємами V_1 і V_2. Обчислити ККД теплової машини, якщо її робочим тілом є ідеальний газ з показником адіабати γ.

2.62. Визначити показник адіабати γ ідеального газу, який при температурі $T = 350$ К, тиску $P = 0{,}4$ Па займає об'єм $V = 300$ л і має теплоємність $C_V = 857$ Дж/К.

2.63. Визначити питомі теплоємності газу C_P і C_V, якщо відомо, що його молярна маса $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а відношення питомих теплоємностей $C_P / C_V = 1{,}67$.

2.64. Визначити рівняння процесу, при якому молярна теплоємність $C = C_P + R$. Газ вважати ідеальним.

2.65. У скільки разів необхідно ізотермічно збільшити об'єм $\nu = 2$ молів ідеального газу, щоб його ентропія зросла на $\Delta S = 30$ Дж/К?

2.66. У кожній з двох посудин 1 і 2 знаходиться ν молей ідеального газу, молярна теплоємність якого при сталому об’ємі дорівнює C_V. Відношення об'ємів посудин $V_2/V_1 = \alpha$, а відношення температур $T_1/T_2 = \beta$. Знайти різницю ентропій газів у посудинах.

2.67. У деякій посудині знаходяться N молекул. Подумки розділимо посудину на дві однакові половини A і B. Знайти ймовірність P і статистичну вагу Ω того, що в половині A знаходиться n молекул.

2.68. Гелій масою m адіабатично розширили в n разів, а потім ізобарично стиснули до початкового об'єму. Знайти приріст ентропії газу в цьому процесі. Газ вважати ідеальним.

2.69. Процес розширення ν молей газу з молярною теплоємністю при сталому об’ємі C_V відбувається таким чином, що тиск газу змінюється прямо пропорційно його об'єму. Знайти приріст ентропії газу при збільшені об'єму в α разів.

2.70. Нагріта вода масою m, температура якої дорівнює T_1, змішується в термостаті з такою самою масою холодної води, температура якої дорівнює T_2. Чому дорівнює загальна зміна ентропії в системі ΔS після встановлення рівноваги? Питома теплоємність води C.

2.71. Один моль кисню знаходиться при температурі $T = 350$ К. Обчислити відносну похибку визначення внутрішньої енергії газу $\eta = \dfrac{U_{ід} - U_B}{U_B} \times 100\%$, де $U_{ід}$ – значення, отримане при розгляді газу як ідеального, U_B – як газу Ван дер Ваальса. Розрахунки виконати для двох значень об’єму:

а) $V = 2$ л; б) $V = 0{,}2$ л.

2.72. Дві посудини з об’ємами V_1 і V_2 сполучені трубкою з краном. Коли кран закритий, в кожній посудині міститься по одному молю газу Ван дер Ваальса. Температури газу в обох посудинах однакові. Наскільки зміниться температура газу якщо кран відкрити? Стінки посудини і трубки вважати теплонепроникними. Стала Ван дер Ваальса a і молярна теплоємність при сталому об’ємі C_V відомі.

2.73. Записати внутрішню енергію як функцію термодинамічного потенціалу Гіббса, температури та тиску.

2.74. Записати ентальпію як функцію температури, об’єму та вільної енергії Гельмгольца.

2.75. Доведіть тотожність: $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$.

2.76. Вільна енергія Гельмгольца одного моля деякої речовини описується наступним співвідношенням: $F = d + T(a - b \ln T - c \ln V)$, де a, b, c d – константи. Знайти тиск, ентропію та теплоємність C_V даної речовини.

2.77. Показати, що внутрішня енергія повітря в кімнаті не залежить від температури, якщо тиск є сталим. Знайти внутрішню енергію, якщо тиск дорівнює нормальному, а об’єм кімнати дорівнює 40 м^3.

2.78. Газоподібний водень, що знаходиться при нормальних умовах в закритій посудині об’ємом 5 літрів охолодили на 55 К. Знайти приріст внутрішньої енергії та кількість відданого тепла.

2.79. Існує ідеальний газ, молярна теплоємність якого при сталому об’ємі дорівнює C_V. Зайти молярну теплоємність газу як функцію його об’єму, якщо газ здійснює процес за законом:
а) $T = T_0 e^{\alpha V}$ б) $P = P_0 e^{\alpha V}$, T_0, P_0 та α – сталі.

2.80. Теплоізольована посудина з ідеальним газом, молярна маса якого μ і відношення теплоємностей $C_P/C_V = \gamma$, рухається зі швидкістю v. Знайти приріст температури ΔT газу при миттєвій зупинці посудини.

2.81. У вертикальному циліндрі під поршнем знаходиться один моль деякого ідеального газу при температурі T. Простір під поршнем є відкритим. Яку роботу треба виконати для того, аби повільно піднімаючи поршень ізотермічно збільшити об'єм газу в n разів (тертям поршня знехтувати)

2.82. Ідеальний газ з показником адіабати γ розширюють так , що надана газу кількість теплоти дорівнює зменшенню його внутрішньої енергії. Знайти: 1) молярну теплоємність газу в цьому процесі; 2) рівняння процесу в координатах (T, V) .

2.83. Молярна теплоємність ідеального газу в деяких процесах змінюється за законами:
1) $C = C_V + \alpha T$, 2) $C = C_V + \beta V$, 3) $C = C_V + \eta P$.
Знайти рівняння відповідних процесів в координатах (T, V).

2.84. Один моль ідеального газу з відомою ізохорною теплоємністю C_V виконує процес, при якому його ентропія залежить від температури як $S = \dfrac{\alpha}{T}$, $\alpha = \mathrm{const}$. Температура змінюється від T_1 до T_2.

Знайти:

1) залежність теплоємності від температури;

2) кількість теплоти, надану газу;

3) роботу, яку виконав газ.

2.85. В деякому процесі температура речовини T залежить від ентропії S наступним чином $T \sim S^n$. Знайти теплоємність речовини C як функцію ентропії S. За якої умови теплоємність буде від'ємною?

2.86. Шматок міді масою m_1 і температурою T_1 занурили у воду масою m_2 і температурою T_2. Теплоємність міді і води C_1 та C_2 відповідно. Знайти приріст ентропії системи до моменту вирівнювання температур. (Теплоємністю калориметра знехтувати)

2.87. Дві однакові теплоізольовані посудини з'єднані трубкою з краном і містять по одному молю однакового ідеального газу з молярною ізохорною теплоємністю C_V. Початкові температури газу в посудинах T_1 і T_2 відповідно. Кран відкрили і система перейшла в новий стан рівноваги. Знайти приріс ентропії системи.

2.88. Знайти приріст ентропії алюмінієвого бруска масою m при нагріванні його від температури T_1 до температури T_2, якщо в цьому інтервалі температур питома теплоємність дорівнює $C = a + bT$, де a, b – сталі.

2.89. Ідеальний газ з показником адіабати γ здійснює процес за законом $P = P_0 - \alpha V$, де P_0 та α – додатні сталі, V – об'єм. При якому значенні об'єму ентропія буде максимальною?

2.90. В результаті деякого процесу коефіцієнт в'язкості ідеального газу збільшився в α разів, а коефіцієнт дифузії – в β разів. У скільки разів змінився тиск газу?

ВІДПОВІДІ

Механіка

1.2. $y = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2, v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}, tg\varphi = \frac{\alpha}{2\beta t}$.

1.3. $\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{\pi \cdot R}{\tau}$, $|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{2R}{\tau}$.

1.4. $v = \frac{\alpha^2 t}{2}, a = \frac{\alpha^2}{2}, \langle v \rangle_s = \frac{\alpha\sqrt{s}}{2}$.

1.5. $s = \frac{2}{3\alpha} \cdot v_0^{\frac{3}{2}}, \quad t = \frac{2\sqrt{v_0}}{\alpha}$.

1.6. $\Delta t = t - \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,38$ с.

1.7. $h = \frac{gt^2}{2} = 19,6$ м, $\upsilon_0 = \frac{S}{t} = 20$ м/с, $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2} = 28$ м/с,

$tg\alpha = \frac{\upsilon_0}{gt}$, $\alpha = 45^0$, $y = \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2$.

1.8. $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 3,83$ м.

1.9. $t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}, v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$.

1.10. $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\left(tg^2\alpha_0 - tg^2\alpha\right)\cos^2\alpha_0 = 68$ м.

1.11 $v = \sqrt{2gh + v_0^2}$.

1.12 $\langle V \rangle = \frac{2V_1(V_2 - V_3)}{2V_1 + V_2 + V_3} \approx 39,9$ м/с .

1.13. $\frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} = \sqrt{2} + 1$.

1.14. $t = \frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} - \frac{h_0}{g\tau}$.

Необхідно, щоб виконувалася умова. $\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} > \frac{h_0}{g\tau}$.

1.15. $\frac{H_1}{H_2} = tg^2\alpha$.

$$\upsilon_2' = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha},$$

1.16. $\cos\beta = \frac{\upsilon_2\cos\alpha - \upsilon_1}{\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha}}$.

1.17. $H = \frac{g}{2}\left(\frac{l}{g} + \frac{t^2}{2}\right)^2 \approx 240$ м.

1.18. $t_{1,2} = \frac{\upsilon_0\sin\alpha \mp \sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\alpha - 2gh}}{g}$, $t_1 = 0,28$ с, $t_2 = 0,75$ с.

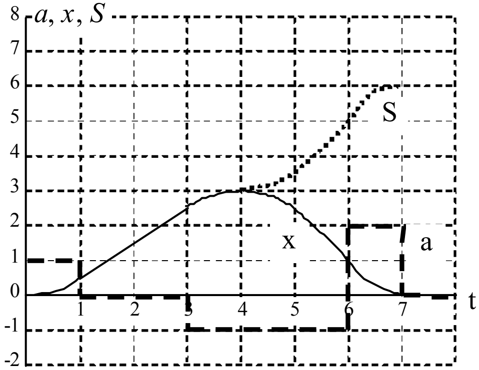
1.19. $\alpha = 45^0$.

1.20. $a_t = 3$ м/с^2, $s = 66$ м, $a = 5$ м/с^2.

1.21. $S = A\cdot\omega\cdot\tau$, $\vec{v} \perp \vec{a}$.

1.22. $\omega = 7,3\cdot10^{-5}$ рад/с, $v_{екв} = 460$ м/с, $v_\varphi = 294$ м/с.

1.23. $a = \alpha\sqrt{1 + 4\pi^2 n^2} \approx 0,76\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.24. 

1.25. $a = \dfrac{2S(n-1)}{t^2(n+1)}$.

1.26. а) S ≈ 7,1 м; б) α = 0°, в) $\langle V \rangle = 2{,}8$ м/с .

1.27. $V_A = 0$, $V_B = \sqrt{2}\,V$, $V_C = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,V$, $V_D = 2V$.

1.28. $a = r\sqrt{4C^2 + (B + 2Ct)^4}$.

1.29. $N = 29$, $\alpha = 16^0$.

1.30. $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с, $\omega = 4{,}4 \cdot 10^{16}$ $с^{-1}$, $a_n = 9{,}7 \cdot 10^{22}$ м/с^2.

1.37. $a = \dfrac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g,$

$F = \dfrac{\mu m g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

1.38. $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}}$.

1.39. μ = tgα.

1.40. $a = \dfrac{F}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) -$

$g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \approx 15.7 m/\sec^2$

1.41. Пройде, якщо tgα < (μ/g)

1.42. $a = \dfrac{g m_2}{m_1 + m_2}$, $T = \dfrac{g m_2 m_1}{m_1 + m_2}$, $a = 2{,}5$ м/с^2, $T = 7{,}5$ Н.

1.43. $a=\dfrac{F}{m_1+m_2}$, $a=2$ м/с^2, $T=\dfrac{Fm_1}{m_1+m_2}$, $T=0{,}8$ Н.

1.44. $\mu=\dfrac{m_2gt^2-2(m_1+m_2)s}{m_1gt^2}$, $\mu\approx 0{,}2$.

1.45. $a=\dfrac{g(m_2-m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))}{m_1+m_2}$, $T=\dfrac{m_1m_2g(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}$.

1.46. $T=\sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}$.

1.47. $a=g\dfrac{m_1(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}-\dfrac{m_2(\sin\beta+\mu\cos\beta)}{m_1+m_2}$.

1.48. $\dfrac{T_1}{T_2}=\sqrt{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^3}$.

1.49. $F=m\left(\mu g+\dfrac{v}{t}\right)=8{,}6$ Н.

1.50. $a=\dfrac{F}{m}\left(\cos\alpha_2-\dfrac{mg-F\sin\alpha_2}{mg-F\sin\alpha_1}\cos\alpha_1\right)$, $a=0{,}825$ м/с^2.

1.51. $g_M=g_З\dfrac{n_1^2}{n_2}=1{,}7$, $\dfrac{v_{0З}}{v_{0M}}=\dfrac{\sqrt{n_2}}{n_1}=2{,}4$.

1.52. $F=m\left(\dfrac{v^2-v_0^2}{2s}+g(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)\right)$.

1.53. $g=\dfrac{(m_1+m_2)a}{m_2-m_1}$, $g=9{,}81$ м/с^2.

1.54. $R=\dfrac{v^2}{\mu g}$, $R=51$ м.

1.55. $N=\dfrac{mgR}{\sqrt{l^2+2RL}}$.

1.56. $\tau=\dfrac{v_0}{\mu g}, l=\dfrac{v_0^2}{2\mu g}$,

$\tau\approx 3{,}4$с, $l\approx 34$ м.

1.57. μ = 0,2, $t \approx 1{,}1$ с.

1.58. $a = \dfrac{g\left(M - \mu m\right)}{M + m}$.

1.59. $\tau = \dfrac{VP}{Fg} \approx 76{,}5$ с.

1.60. $a = \left(1 + \dfrac{M}{m}\right) g \sin\alpha$

1.61. $a_1 = 0{,}2$ м/с^2, $a_2 = 3{,}0$ м/с^2, $t = 0{,}85$ с.

1.62. $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

1.63. $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{l}} \approx 0{,}7$ с$^{-1}$

1.64. $\mu = \dfrac{V^2}{Rg}$, $\alpha = arctg\left(\dfrac{Rg}{V^2}\right)$.

1.65. $V = \sqrt{gR}$

1.66. а) $h \approx 3{,}2 \cdot 10^4$ м, б) $h \approx 2{,}6 \cdot 10^6$ м.

1.67. Не зміняться

1.68. $M_з = \dfrac{4\pi^2 R^3}{\gamma T_з^2}\left(\dfrac{T_з}{\tau} + 1\right)^2 \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг

1.69. $a = \dfrac{g}{l}\left(\sqrt{l^2 - h^2} \cdot (2 - \mu) - h(2\mu + 1)\right) \approx 5{,}88$ м/с^2, $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} \approx 1{,}3$ с

1.70. $s = \dfrac{v_0^2}{\mu g}$, $s \approx 134{,}24$ м

1.71. $v = 7090$ м/с.

1.72. $t = \dfrac{l}{u} \cdot \dfrac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

1.73. $\Delta x = 4$ мм, $\Delta x = 6$ мм.

1.74. $l = 6$ см, $\Delta l = 8$ мм.

1.75. $\mu = \frac{F\cos\alpha}{mg} - \frac{v}{gt} = 0{,}142,\ A = 400$ Дж.

1.76. $a = \frac{F - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = 1{,}5$ м/с^2.

1.77. $m_2 = \frac{m_1\left(g - \frac{h}{t^2}\right)}{g + \frac{h}{t^2}} = 1{,}63$ кг.

1.78. $T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho}}$.

1.79. $P = mg,\ P = m(a+g),\ P = m(g-a),\ P = 0$.

$A_T = -\mu\, m\, g\, l\cos\alpha$

.

1.80. $A_{mg} = m\, g\, l\sin\alpha$

$P_t = \mu\, m\, g^2\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$

1.81. $A = \frac{Fmgh}{F - ma} = 73{,}5$ Дж.

1.82. $A = m\left(g + \frac{2h}{t^2}\right)h$.

1.83. $A = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)gl$, $A = 12{,}7$ пДж.

1.84. $s = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{tg\alpha}\right),\ \mu < tg\alpha$.

1.85. $A \approx 98$ Дж.

1.86. $A = -17$.

1.87. $h = \frac{v_0^2}{6g}$. , $h = 40{,}8$ м

1.88. $h = \frac{3v_0^2}{8g}$.

1.89. $\alpha = 60^0$.

1.90. $m_3 = \dfrac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{v_3}, \alpha = arctg\left(\dfrac{(m_2v_2)}{(m_1v_1)}\right) = 53^0$.

1.91. $V = \dfrac{mv_1 - mv_2 \cos \alpha}{M + m} \approx -0{,}9$ м/с.

1.92. $\Delta E_k = \dfrac{m_1m_2(V_1+V_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

1.93. $q = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$.

1.94. $V = \dfrac{m\sqrt{2gh}\cos\alpha}{m+M}$.

1.95. $Q = m\left(gl\sin\alpha - \dfrac{v^2}{2}\right) = 140$ Дж.

1.96. $Q = 15$ Дж.

1.97. $h = \dfrac{\left(mv - M\sqrt{2gh}\right)^2}{2m^2g}$.

1.98. $A = \dfrac{mt^2g^2}{8\sin^2\alpha}$, $A = 48$ Дж.

1.99.

а) $A = \dfrac{\gamma\, m M\, h}{R_з(R_з + h)} \approx 1{,}7 \cdot 10^7$ Дж,

б) $A = \dfrac{\gamma\, m M}{R_з} \approx 1{,}25 \cdot 10^8$ Дж.

1.100. $A = \dfrac{m g\, \mu L}{1 - \mu\, ctg\alpha}$.

1.101. $V = \Delta x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $h = \dfrac{k\,\Delta x^2}{2mg}$.

1.102. $V_1 = \dfrac{mV_2 - M V_0}{M - m}$.

1.103. $h=\frac{V^2}{2g}\left(1+\frac{m}{M}\right)$.

1.104. $h=\frac{MV^2}{2g(M+m)}$.

1.105. $V_1=\frac{m}{M}V\ , V_2=V.$

1.106. $V_2=\sqrt{4V^2+V_1^2}\approx 103$ м/с.

1.107. $V_1=V\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$, $V_2=V\sqrt{\frac{2m^2}{M(M+m)}}$, $\theta=arctg\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$.

1.108. $\alpha=90^0$.

1.109. $H=\frac{M^2 l(1-\cos\alpha)}{(M+m)^2}$, $Q=g\,l(1-\cos\alpha)\frac{M\,m}{M+m}$.

1.110. $\eta=\frac{m_1}{m_1+m_2}$.

1.111. $A_t=l\mu(mg-F\sin\alpha)$.

1.112. $v'=\sqrt{\frac{2UM}{m(m+M)}}$.

1.113. $$\cos\alpha'=1-\frac{(m-M)^2}{(m+M)^2}\cdot(1-\cos\alpha),$$
$$\cos\alpha''=1-\frac{4m^2}{(m+M)^2}\cdot(1-\cos\alpha)$$

1.114. $I_z=\frac{ml^2}{12}, I_z=\frac{ml^2}{3}$.

1.115. $I=\frac{1}{2}mR^2$, $I=\frac{3}{2}mR^2$.

1.116. $I_z=\frac{3mR^2}{10}$.

1.117. $I_z=\frac{m(a^2+b^2)}{12}$.

1.118. $I_z = \dfrac{2mR^2}{5}$

I_z = 0,04 кг·м^2

1.119. $I_z = \dfrac{13mR^2}{24}$.

1.120. $I = \dfrac{m_1 m_2 l^2}{m_1 + m_2}$.

1.121. $x = \dfrac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^3 + R_2^3} = 1{,}86$ см.

1.122. $r = 0{,}55R$, $r = 5{,}5$ см.

1.123. $l = R/6 = 6$ см.

1.124. $F = \dfrac{mg}{2}, F = 10$ кН.

1.125. $x = \dfrac{l\left(m_1 + \dfrac{M}{2}\right)}{m_1 + m_2 + M} = 0{,}27$ м.

1.126. $m = \dfrac{2m_1 - 8m_2}{3} = 1$ кг.

1.127. $m \approx 1{,}53$ кг.

1.128. $h = \dfrac{F_{тер} l}{mg} tg\alpha \cdot \sin\alpha = 3$ м.

1.129. $F_t \approx 50$ Н.

1.130. $\tau = \sqrt{\dfrac{2\pi N m R}{F}} = 2{,}2$ с.

1.131. $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2} g$.

1.132. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}} \approx 14$ с$^{-1}$, $V = \dfrac{1}{2}\sqrt{3gl} \approx 1$ м/с.

1.133. $A=\frac{1}{4}m\omega_1\omega_2\left(l_1^2-l_2^2\right)$.

1.134. $F=\frac{mR\ \pi\upsilon}{\Delta t}=0{,}94$ Н.

1.135. $\omega=\frac{3F_1+2F_2}{2ml}\cdot 3\tau$.

1.136. $\omega=\frac{2F\tau}{3mR}$.

1.137. $t=\frac{mR\omega}{2F}$.

1.138. $F=\frac{ml\omega}{4t}$.

1.139. $M_{F_t}=\frac{\pi\upsilon^2 mR^2}{N}=15{,}24$ Н·м.

1.140. $F=m\sqrt{g^2+\left(\omega^2 r\right)^2+\left(2V'\omega\right)^2}$.

1.141. $\Delta l=\frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}=0{,}24$ м.

1.142. На схід. $\Delta l=\frac{\omega s^2\sin\varphi}{v}\approx 0{,}07$ м.

1.143. $F_{вц}=\frac{\sqrt{5}}{3}m\omega^2 R=8$ Н, $F_K=\frac{2}{3}mv\sqrt{5\omega^2R^2+\frac{8gR}{3}}=17$ Н.

1.144. $l_0=l\sqrt{\frac{1-\beta^2\sin^2\theta}{1-\beta^2}}$.

1.145. $v=0{,}10\,c$.

1.146. 1) $\mathrm{tg}\,\alpha'=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\approx 49^0$, 2) $l'=a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha-\beta^2}\approx 3{,}8$ м,

3) $\frac{l'}{l}=\frac{a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha-\beta^2}}{a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$.

1.147. 1) $l_0 = \dfrac{x_A - x_B - v(t_A - t_B)}{\sqrt{1-\beta^2}}$, 2) $\Delta t = \dfrac{l_0}{V}\cdot\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)$.

1.148. $s = c\Delta t\sqrt{1-\dfrac{(\Delta\tau)^2}{(\Delta t)^2}}$.

1.149. $V = c\sqrt{\left(2-\dfrac{\Delta t}{t}\right)\dfrac{\Delta t}{t}} \approx 0{,}6\cdot 10^8$ м/с.

1.150. $s = \dfrac{\Delta\tau_0\sqrt{V^2 + v'^2_2\left(1-\beta^2\right)}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

1.151. $S \approx 0{,}6$ км.

1.152. $\Delta t = \dfrac{l\beta^2}{1-\beta^2} \approx 2\cdot 10^{-6}\,c$, та, що рухалась попереду.

1.153. $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - \dfrac{V_1^2 V_2^2}{c^2}}$.

1.154. $v' = \dfrac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2\left(1-\beta^2\right)}}{1-\dfrac{v_x V}{c^2}}$.

1.155. $tg\theta' = \dfrac{\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta - \dfrac{V}{v}}$.

1.156.

а) $a_x' = \dfrac{a_x\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\dfrac{v_x V}{c^2}\right)^3}$,

б) $a_y' = \dfrac{a_y\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\dfrac{v_x V}{c^2}\right)}$.

1.157. $V=c\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{\left(E_k+m_0c^2\right)^2}}$.

1.158. $V=\sqrt{0.99}\,c$.

1.159. $p=\frac{1}{c}\sqrt{E_k\left(E_k+2\,m_0c^2\right)}$.

1.160. $v=\frac{2\,pE_k}{p^2+\frac{E_k^2}{c^2}}=0.87c$.

1.161. $V\approx 0{,}85\ c$.

1.162. $v=\frac{c}{n}\sqrt{n^2-1}=c\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.163. $A_p = 0{,}42m_0c^2$, $A_{нр} = 0{,}14m_0c^2$.

1.164. $v(t)=\frac{Ft}{m_0\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}}$.

1.165. $M_0=\frac{1}{c}\sqrt{2m_0\left(E_k+2m_0c^2\right)}$ $\qquad V=c\sqrt{\frac{E_k}{E_k+2m_0c^2}}$

1.166. $E=2m_0c^2\left(1+\frac{m_0}{M_0}\right)$.

1.167. ≈ 70 разів.

1.168. $3.6\cdot10^{17}$Дж/кг.

Молекулярна фізика та термодинаміка

2.1. $2{,}7\cdot10^{25}$ м^3.

2.3. $m_1 \approx 2{,}99\cdot10^{-26}$ кг; $N \approx 3{,}34\cdot10^{19}$; $r_0 \approx 1{,}9\cdot10^{-10}$ м.

2.4. $N = \dfrac{V_0\, m\, N_A}{V\, M}$.

2.5. $2{,}6\cdot10^{24}$.

2.6. $P = \dfrac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2}$.

2.7. $\dfrac{p^/}{p} = \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)\left(\dfrac{8M_2}{8m_2 - m_1}\right)$.

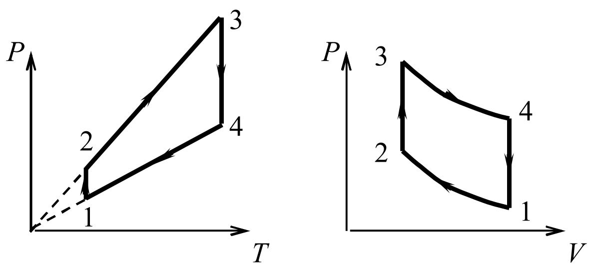
2.8. $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V_0}{4\pi}\dfrac{\left(\rho g H + P_0\right)}{\left(\rho g h + P_0\right)}}$.

2.9. $T = 2T_1\dfrac{V_2}{V_1} = 450\,\text{К}$.

2.10. $m = \dfrac{2\sigma M\left(N_2\right)m_б}{3RT\rho}$.

2.11. $\rho_0 = 1{,}3\ \text{кг/м}^3$, $P \approx 1{,}4\cdot10^2$ Па.

2.12.



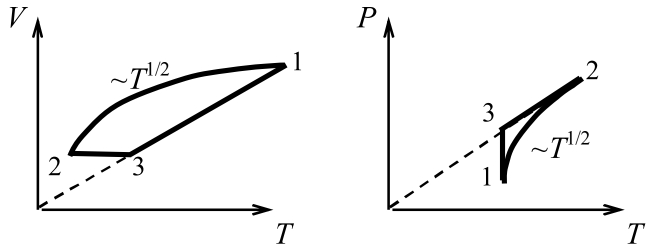
.

2.13. $P_2 = \left(\frac{MP_1V}{RT_1} - m \right) \frac{RT_2}{MV}$.

2.14. $T_3 = \frac{T_2^2}{T_1}$.

2.15. $\Delta T = \frac{mgT}{PS}$.

2.16.



.

2.17. 500 К.

2.18. $A = \frac{(P_0S + mg)V\Delta T}{ST}$.

2.19. $P = \frac{3mRT}{2MV}$.

2.20. $n = \frac{mN_A}{Mt} = 4 \cdot 10^{18}$ с$^{-1}$.

2.21. $T = 48^0$C.

2.22. $m_2 = \frac{m_1T_1M_2}{M_1T_2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} = 6$ г.

2.23. $\rho = \dfrac{P\left(m_1 + m_2\right)}{RT\left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)} = 0{,}5$ кг/м^3.

2.24. $V_2 = \dfrac{P_0 V_1 T_2}{T_1\left(\rho g h + P_0\right)} = 0{,}95 \cdot 10^{-3}$ м^3.

2.25. $P_2 = \dfrac{\left(1-n\right) P_1 T_2}{T_1} = 1$ МПа .

2.26. $m_p = \dfrac{mR\Delta T}{Mgh} - \dfrac{P_0 S}{g} = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг.

2.27. $P = \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)\dfrac{RT}{V} = 3{,}2 \cdot 10^5$ Па.

2.28. $h = \dfrac{kT\ln 2}{g(m_2 - m_1)} = 4{,}19 \cdot 10^3$ м.

2.29. $P = \dfrac{m\upsilon_{кв}^2}{3V}$.

2.30. $v = \sqrt{\dfrac{3kTln\dfrac{m_2}{m_1}}{m_2 - m_1}}$.

2.31. $\left\langle v \right\rangle = \sqrt{\dfrac{3PV}{m}} = 2000$ м/с, $\left\langle E \right\rangle = \dfrac{3PVM}{2mN_A} = 7 \cdot 10^{-21}$ Дж.

2.32. $\upsilon_{iм} = \sqrt{\dfrac{2P_0}{\rho}} = 411$ м/с.

2.33. $T = \dfrac{M\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{4R\,ln\left(\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)}$.

2.34. $T = \dfrac{m_0 V^2}{3k}$.

2.35. $F = \dfrac{kT}{\Delta h} ln\,\eta$.

2.36. $h = \dfrac{kT}{g(m_2 - m_1)} \ln\left(\dfrac{n_{20}}{n_{10}}\right)$.

2.37. $N_1 - N_2 = \dfrac{PS\Delta t}{k}\sqrt{\dfrac{R}{2M\pi}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{T_1}} - \dfrac{1}{\sqrt{T_2}}\right) \approx -1{,}1\cdot 10^{26}$.

2.38. $V_к = 5{,}1\cdot 10^{-3}$ $м^3$.

2.39. $P = \dfrac{0{,}4RT\rho_0}{M - 0{,}4\rho_0 b} - \dfrac{0{,}16\rho_0^2 a}{M^2} \approx 2{,}6\cdot 10^7$ Па.

2. 40. $a = 0{,}137$ Па·м^6/моль^2, $b = 3{,}9\cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

2.41. $N = \dfrac{D^2}{6\sqrt{2}\sigma^2}$.

2.42. а) ≈ 37%; б) ≈ 23%.

2.43. $\rho = \dfrac{4M}{N_A a^3}$.

2.44. а) $d = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; б) $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; в) $d = a$.

2.45. $A = 0$, $A = P\left(V_2 - V_1\right)$, $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} \dfrac{m}{M} RT \dfrac{dV}{V} = \dfrac{m}{M} RT \ln\dfrac{V_2}{V_1}$.

2.46. $TV^{\gamma-1}=\text{const}$; $\dfrac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}}$=const.

2.47. $A=\dfrac{P_1V_1}{(\gamma-1)}\left[1-\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$

2.48. $U=C_VT$.

2.49. $\dfrac{V_2}{V_1}=1+\dfrac{Q}{RT}=2.$

2.50. $\Delta T=T_2-T_1=\dfrac{mgT_1}{SP}=27$ К.

2.51. $A=\dfrac{m}{M}RT\ln\dfrac{V_2}{V_1}=9{,}13$ Дж, $\Delta U=0, Q=A.$

2.52. $\Delta U=C\Delta T-\dfrac{\left(P_0+\dfrac{mg}{S}\right)V\Delta T}{T}=370$ Дж.

2.53. $\Delta U=\dfrac{m}{M}C_VT_0\left[2^{\frac{R}{C_V}}-1\right].$

2.54. $\Delta Q=\dfrac{3}{2}P_1V_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}-1\right)=-3{,}03\cdot10^2$ Дж.

$\Delta U=\dfrac{5}{2}P_1V_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}-1\right)=-5{,}05\cdot10^2$ Дж.

2.55. $Q_x=Q-(P_2-P_1)(V_2-V_1).$

2.56. $\Delta U=\dfrac{5}{2}(P_3V_2-P_1V_1)$, $A=P_1(V_2-V_1)$, $Q=\Delta U+A$.

2.57. $\Delta T=\dfrac{TA}{PV}$.

2.58. $A = Q = \frac{m}{M} R\left(T_1 + T_3 - T_2 - T_4\right)$,

$\Delta U_{13} = \frac{5}{2}\frac{m}{M} R\left(T_3 - T_1\right)$.

2.59. $A = \frac{1}{2}\alpha V_0^2\left(\eta^2 - 1\right)$, $\Delta U = \frac{\alpha}{\alpha\text{-}1} V_0^2\left(\eta^2 - 1\right)$,

$C_M = \frac{R\left(\gamma + 1\right)}{2\left(\gamma - 1\right)}$.

2.60. $T_н^{/} = \frac{T_x T_н}{2T_x - T_н} = 624$ К .

2.61. $\eta = \frac{\left(\gamma - 1\right)\left(T_1 - T_2\right)\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\left(\gamma - 1\right)T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \left(T_1 - T_2\right)}$.

2.62. $\gamma = 1 + \frac{PV}{Tc_V} = 1{,}4$.

2.63. $c_p = \frac{R}{M}\frac{c_p/c_V}{\left(c_p/c_V - 1\right)} = 5{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кг \cdot К}$,

$c_V = \frac{R}{M}\frac{1}{\left(c_p/c_V - 1\right)} = 3{,}1 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{кг \cdot К}$.

2.64. $P^2 V = const$.

2.65. $n = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right) \approx 6$.

2.66. $\Delta S = \nu\left(R\ln\alpha - C_V \ln\beta\right)$.

2.67. $\Omega = \frac{N!}{\left(N - n\right)!n!}$, $P = \frac{N!}{2^N\left(N - n\right)!n!}$.

2.68. $\Delta S=-\dfrac{5\,m\,R}{2\,M}\ln n$.

2.69. $\Delta S=\nu\left(2C_V+R\right)\ln\alpha$.

2.70. $\Delta S=c\,m\ln\left(\dfrac{\left(T_1+T_2\right)^2}{4T_1\,T_2}\right)$.

2.71. а) $\eta\approx 0{,}95\%$; б) $\eta\approx 10\%$.

2.72. $\Delta T=-\dfrac{a}{2\,C_V}\dfrac{\left(V_1-V_2\right)^2}{\left(V_1+V_2\right)V_1V_2}$.

2.73. $E=G-T\left(\dfrac{\partial G}{\partial T}\right)_P-P\left(\dfrac{\partial G}{\partial P}\right)_T$.

2.74. $H=F-T\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V-V\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T$.

2.76. $P=\dfrac{cT}{V}$, $S=-a+(1+\ln T)+c\ln V$, $C_V=b$.

2.77. $U=\dfrac{PV}{\gamma-1}=10^7$ Дж.

2.78. $\Delta Q=\Delta U=-255{,}16$ Дж.

2.79. $C=C_V+\dfrac{R}{\alpha V}$, $C=C_V+\dfrac{R}{1+\alpha V}$.

2.80. $\Delta T=\dfrac{\mu(\gamma-1)v^2}{2R}$.

2.81. $A=RT(n-\ln n-1)$.

2.82. $C=-\dfrac{R}{\gamma-1}$, $TV^{(\gamma-1)/2}=\text{const.}$.

2.83. $V\exp\left(-\alpha T/R\right)=\text{const}$,

$T\exp\left(R/\beta V\right)=\text{const}$,

$V-\eta T=\text{const.}$.

2.84. $C(T) = -\dfrac{\alpha}{T}$, $\Delta Q = -\alpha \ln \dfrac{T_2}{T_1}$,

$A = C_V(T_1 - T_2) + \alpha \ln \dfrac{T_1}{T_2}$.

2.85. $C = \dfrac{S}{n}$, $C < 0$ при $n < 0$.

2.86. $\Delta S = c_1 m_1 \ln \dfrac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln \dfrac{T}{T_2}$, $T = \dfrac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$.

2.87. $\Delta S = C_V \ln \dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2}$.

2.88. $\Delta S = am \ln \dfrac{T_2}{T_1} + m(bT_2 - bT_1)$.

2.89. $V = \dfrac{\gamma P_0}{(1+\gamma)\alpha}$.

2.90. $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{\alpha^3}{\beta}$.

ДОДАТОК

ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ

(Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка)

Швидкість світла в вакуумі	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с
Гравітаційна стала	$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Стандартне прискорення вільного падіння	g = 9,807 м/с^2
Стала Авогадро	$N_А = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Стала Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$
Молярна газова стала	$R = 8{,}31$ Дж·моль$^{-1}$ · К$^{-1}$
Стандартний об’єм моля газу	$V_0 = 22{,}4$ л/моль

ГУСТИНИ РЕЧОВИН

Гази (за нормальних умов)	ρ , кг/м^3	**Тверді речовини**	ρ , 10^{3}кг/м^3
Азот	1,25	Алмаз	3,5
Аміак	0,77	Алюміній	2,7
Водень	0,09	Вольфрам	19,1
Повітря	1,293	Графіт	1,6
Кисень	1,43	Залізо	7,8
Метан	0,72	Золото	19,3
Вуглекислий газ	1,98	Кадмій	8,65
Хлор	3,21	Кобальт	8,9
		Лід	0,916
Рідини	ρ , 10^{3}кг/м^3	Мідь	8,9
Бензол	0,88	Молібден	10,2
Вода	1,00	Натрій	0,97
Гліцерин	1,26	Нікель	8,9
Гас	0,80	Олово	7,4
Ртуть	13,6	Платина	21,5
Спирт	0,79	Свинець	11,3
Важка вода	1,1	Срібло	10,5
Ефір	0,72	Титан	4,5
		Уран	19,0
		Цинк	7,0

ПРУЖНІ КОНСТАНТИ

Матеріал	**Модуль Юнга, *E*, ГПА**	**Модуль зсуву, *G*, ГПА**	**Коефіцієнт Пуассона, μ**
Алюміній	70	26	0,34
Мідь	130	40	0,34
Свинець	16	5,6	0,44
Сталь (залізо)	200	81	0,29
Скло	60	30	0,25

КОНСТАНТИ ГАЗІВ

Газ та його відносна молекулярна маса	$\gamma = C_P/C_V$	χ, мВт/(м·К) **теплопровідність**	η, мкПа·с **в'язкість**	d, нм **діаметр молекули**	**Сталі Ван дер Ваальса**	
					a, Па·м^6/моль^2	b, 10^{-6} м^3/моль
He (4)	1,67	141,5	18,9	0,20	–	–
Ar (40)	1,67	16,2	22,1	0,35	0,132	32
H_2 (2)	1,41	168,4	8,4	0,27	0,024	27
N_2 (28)	1,40	24,3	16,7	0,37	0,137	39
O_2 (32)	1,40	24,4	19,2	0,35	0,137	32
CO_2 (44)	1,30	23,2	14,0	0,40	0,367	43
H_2O (18)	1,32	15,8	9,0	0,30	0,554	30
Повітря (29)	1,40	24,1	17,2	0,35	–	–

(Примітка. Значення γ, χ, η – за нормальних умов)

КОНСТАНТИ РІДИН І ТВЕРДИХ ТІЛ

Речовина	C, **Дж/г·К, питома теплоємність***	***r*, Дж/г, питома теплота пароутворення****	λ, **Дж/г, питома теплота плавлення**	σ, **мН/м, поверхневий натяг***
Вода	4,18	2250	–	73
Гліцерин	2,42	–	–	66
Ртуть	0,14	284	–	490
Спирт	2,42	853	–	22
Алюміній	0,90	–	321	–
Залізо	0,46	–	270	–
Лід	2,09	–	333	–
Мідь	0,39	–	175	–
Срібло	0,23	–	88	–
Свинець	0,13	–	25	–

*) За нормальних умов

**) При нормальному атмосферному тиску

ЛІТЕРАТУРА

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учебное пособие. М., 1988.

2. Боровий М.О., Оліх О.Я. Збірник задач з механіки та молекулярної фізики для студентів природничих факультетів, Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2004.

3. Корочкіна Л.М., Оглобля В.І., Горідько М.Я., Лозовий В.І. Збірник задач з курсу фізики для студентів біологічного факультету. – К:, 1998.

4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М., 1985.

5. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике: Учебное пособие. – М., 1983.

6. Макара В.А., Оглобля В.І. Плющай І.В., Цареградська Т.Л. Навчальний посібник „Загальна фізика для біологів. Збірник задач”, ВПЦ "Київський університет", 2011.

7. Савченко Н.Е. Решение задач по физике. Справочное пособие. – Минск, 1988.

Навчальне видання

Микола Олександрович Боровий
Олег Ярославович Оліх
Ірина Володимирівна Овсієнко
Тетяна Леонідівна Цареградська
Віктор Васильович Козаченко
Артем Олександрович Подолян
Микола Вікторович Ісаєв

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ДЛЯ ХІМІКІВ.
ЗБІРНИК ЗАДАЧ.
Частина 1. Механіка.
Молекулярна фізика та термодинаміка.

Збірник задач
(українською мовою)

Друкується в авторській редакції

Підписано до друку

Формат 60х84/16.Папір офсетний

Ум.-друк. арк. . Наклад 300 прим. Зам. №

Свідоцтво: