Механічні коливання

Коливальний рух х-ться регулярною повторюваністю (періодичністю) мех. стану частинки (Ѕ частинок)
Коливання, які відбуваються без зовнішніх [illegible] – вільні (власні)

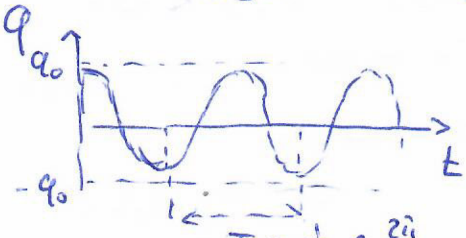
$m\ddot{x} = -kx$ $\qquad$ $I\ddot{\varphi} = \overbrace{-mgl\sin\varphi}^{M_z}$ $\qquad$ $I\ddot{\varphi} = -k\varphi$

$\sin\varphi \approx \varphi$ (малі зміщення)!!

ті, що відбув за sin (cos)

$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ – загальний вигляд р-ня для гармонічних коливань

q – узагальнена координата (зміщення, кут повороту, тощо)
рівняння, що описує малі коливання поблизу рівноваги за наявності лише консервативних сил.



$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$

$2\pi\nu = \omega$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

Загальний розв'язок

$q = q_0 \cos(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{\text{фаза}})$

амплітуда $\quad$ фаза $\quad$ початкова фаза

$\mu\ddot{q} = -\varkappa q \qquad \omega_0^2 = \frac{\varkappa}{\mu}$

Повна механічна енергія $\quad E = T + U = \frac{\mu\dot{q}^2}{2} + \frac{\varkappa q^2}{2} = const$

$E = \frac{1}{2}\mu q_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{\varkappa}{2}q_0\cos^2(\omega_0 t+\varphi) =$

$\frac{1}{2}q_0^2\left[\mu\frac{\varkappa}{\mu}\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \varkappa\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\right] = \frac{1}{2}q_0^2\varkappa \qquad \boxed{E \sim q_0^2}$

Тіло на пружині $\quad \mu = m,\ \varkappa = k \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Мат. маятник $\quad \mu = I = ml^2,\ \varkappa = mgl \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Згасаючі коливання – наявність дисипативних сил => зменшення E, а отже q_0 ↓

Важливий випадок, коли $\vec{F}_{дис} = -\alpha\vec{v}$

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{пруж} + \vec{F}_{оп.}$

Ox: $\quad m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad 2\beta = \frac{\alpha}{m};\ \frac{k}{m} = \omega_0^2$

Розв'язок шукаємо у вигляді $x(t) = A e^{\alpha t}$

A та α – сталі, які потрібно визначити, щоб задовольнити р-ню та початковим умовам

$$\alpha^2 A e^{\alpha t} + 2\beta\cdot\alpha A e^{\alpha t} + \omega_0^2 A e^{\alpha t} = 0$$

$A e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2) = 0$ $\quad A = 0$, $x(t) = 0$ тривіальний р-к

$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$ – характеристичне р-ня

$$D = (2\beta)^2 - 4\cdot\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2)$$

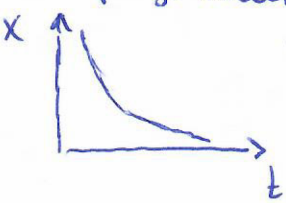
$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2-\omega_0^2)}}{2\cdot 1} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$ $\quad A_{1,2}$ – з початкових умов $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \vartheta_0$

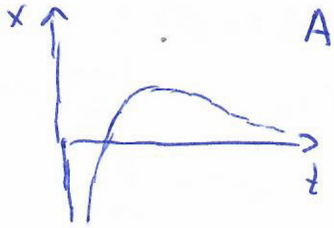
1) $\beta \geq \omega_0$ $\quad \alpha_{1,2} < 0$, $|\alpha_{1,2}| > 0$

сильне згасання $\quad x(t) = A_1 e^{-|\alpha_1| t} + A_2 e^{-|\alpha_2| t}$

аперіодичний рух



при $A_1\cdot A_2 > 0$ зміщення не змінює знак



$A_1\cdot A_2 < 0$ змінює знак, але перехід через стан рівноваги не більше одного разу

2) $\beta < \omega_0$ – слабке згасання

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i\omega_\beta$ $\quad \alpha_{1,2} = -\beta \pm i\omega_\beta$

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + i\omega_\beta)t} + A_2 e^{-(\beta - i\omega_\beta)t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega_\beta t} + A_2 e^{-i\omega_\beta t}\right)$$

x має бути дійсною величиною $x = x^*$ $\quad$ "$*$": $i \to (-i)$

$$A_1 e^{i\omega_\beta t} + A_2^{-i\omega_\beta t} = A_1^* e^{-i\omega_\beta t} + A_2^* e^{i\omega_\beta t}$$

щоб це виконувалося при $\forall t$ ~~та~~ ~~[illegible]~~ необх.

$A_1 = A_2^*$, $A_2 = A_1^*$ – тобто ці величини мають бути комплексно спряженими.

$\forall$ компл. числа $z = a + ib = |z| e^{i\varphi}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $tg\varphi = \frac{b}{a}$

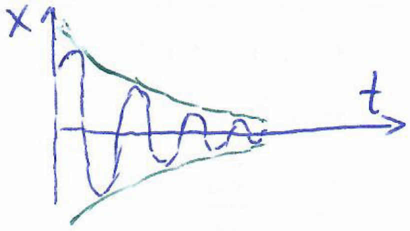
Припустимо, що $A_1 = \frac{a_0}{2} e^{i\varphi}$; $A_2 = \frac{a_0}{2} e^{-i\varphi}$ – дві ~~невідомі~~ константи були, дві лишилося

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(\frac{a_0}{2} e^{i\varphi} e^{i\omega_\beta t} + \frac{a_0}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\omega_\beta t}\right) =$$

$$= a_0 e^{-\beta t}\, \frac{1}{2}\left(e^{i(\omega_\beta t+\varphi)} + e^{-i(\omega_\beta t+\varphi)}\right) =$$

$$= a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_\beta t+\varphi) = A(t)\cos(\omega_\beta t+\varphi)$$

$A(t) = a_0 e^{-\beta t}$ - амплітуда залежить від часу.



$\omega_\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ час релаксації $\tau = \frac{1}{\beta}$

час протягом якого амплітуда зменшується в e разів

$$A(t) = a_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$T_\beta = \frac{2\pi}{\omega_\beta}$ - але в принципі колив не періодичні (немає відтворення амплітуди)

декремент затухання $d = \frac{A(t)}{A(t+T_\beta)} = \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T_\beta)}} = e^{+\beta T_\beta}$

логарифмічний декремент затух $\Lambda = \ln d = \beta T_\beta$

Втрати енергії

$$E(t) = \frac{1}{2} A(t)\cdot k = \underbrace{\frac{1}{2} k a_0^2}_{E(t=0)=E_0} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}$$

Втрата за період

$$\Delta E = E(t) - E(t+T_\beta) = E_0 e^{-2\beta t} - E_0 e^{-2\beta(t+T_\beta)} =$$

$$= E_0 e^{-2\beta t}\left(1 - e^{-2\beta T_\beta}\right)$$

припустимо затухання слабке $2\beta T_\beta \ll 1$

$$\Delta E \approx \underbrace{E_0 e^{-2\beta t}}_{E(t)}\left(1 - 1 + 2\beta T_\beta\right) = E(t)\cdot 2\beta\cdot T_\beta$$

Відносна зміна $\frac{\Delta E}{E(t)} = 2\beta\cdot T_\beta = 2\beta\frac{2\pi}{\omega_\beta} = \frac{4\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \underset{\omega_0 \gg \beta}{\approx} \frac{4\pi\beta}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\nu_0}$

При малому згасанні $\frac{2\beta}{\nu_0} \ll 1$, що не дуже добре при розрахунках

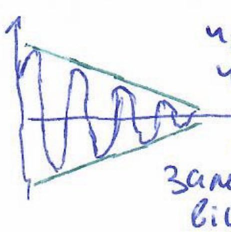
Добротність $Q = 2\pi\frac{E(t)}{\Delta E} = \frac{2\pi\omega_0}{4\pi\beta} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{2}\omega_0\tau$

на практиці Q визначають

$Q = \pi\cdot N_\tau$

к-ть коливань за час згасання

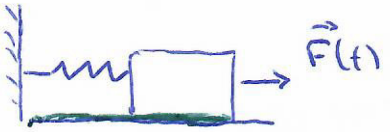
* сухе тертя
(сила не залежить від швидкості



причому число припинення коливань - залишкове відхилення

Вимушені коливання

всі коливання - затухаючі. Один з простих варіантів підтримання амплітуди (енергії) - періодична зовнішня сила, напрям якої збігається з v у даний момент (качеля, гойдалка)



$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + F(t) \quad , \quad F(t+T) = F(t)$$

* $F = F_0\cos\omega t$ - це не частковий випадок, який важко реалізувати, це загальний

бо для ∀ сили $F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \qquad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

неод. диф. рівняння, загальний р-к знаємо, потрібен частковий

$$f_0 e^{i\omega t} = f_0\cos\omega t + i\sin\omega t$$

Спробуємо розв'язати рівняння

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + \omega_0^2 X = f_0 e^{i\omega t}$$

і взяти його дійсну частину $x(t) = Re(\dot{X}(t))$

р-к шукаємо у вигляді

$$X = b e^{i\omega t}$$

$$-b\omega^2 e^{i\omega t} + 2\beta i\omega b e^{i\omega t} + \omega_0^2 b e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 b + i2\beta\omega b + \omega_0^2 b = f_0$$

$$b = \frac{f_0}{\underbrace{(\omega_0^2-\omega^2) + 2i\beta\omega}} \qquad z = |z|e^{i\varphi} \qquad |z| = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}$$

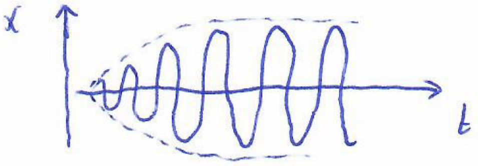
$$tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$b = \frac{f_0}{|z|}e^{-i\varphi}$$

$$X(t) = \frac{f_0}{|z|}e^{i(\omega t-\varphi)} \qquad x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

частковий

$$x(t) = \underbrace{\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}}\cos(\omega t - \delta)}_{\text{змушені коливання під дією періодичної сили}} + \underbrace{a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{t\to\infty \quad \to 0}$$



$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t+\delta)$$

стаціонарні змушені коливання

Резонанс – збільшення амплітуди при наближенні частоти змушуючої сили до певної (визначається вл-ми д) частоти

$$B(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$\omega \to 0$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0\,\cancel{m}}{mk} = \frac{F_0}{k}$$ – стале зміщення

$\omega \to \infty$ $B \to 0$ (внаслідок інерції)

Знайдемо екстремум, достатньо дослідити підкореневий вираз

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2 = \psi(\omega)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow 2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot(-2\omega)+8\beta^2\omega = 0$$

$$-4\omega[\omega_0^2-\omega^2-2\beta^2] = 0$$

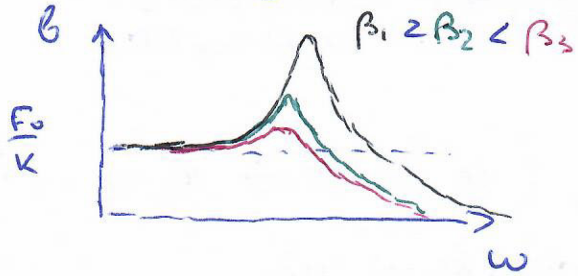
а) $\omega_1 = 0$ – дно

б) $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ фіз. зміст "+" $\Rightarrow$

резонансна частота $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

а) $\omega_{рез} < \omega_0$

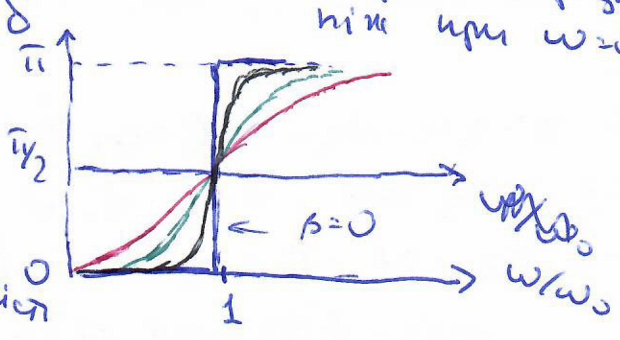
б) $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{рез}$ ↗ при β ↗



при $\omega = \omega_0$ $$B = \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{\frac{2\beta}{\omega_0}\, m\, \frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}\cdot Q$$

тобто амплітуда в Q разів більша, ніж при $\omega = 0$

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$



1) змушені коливання завжди відстають ← до інерційності

2) при $\omega = \omega_0$ $\delta = \pi/2$

при $\beta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ явище резонансу щезає

параметричний резонанс, автоколивання не брав

при $\omega = \omega_{рез}$

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+2\beta^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

при $\beta \to 0$ $B \to \infty$, але малі коливання.

Додавання коливань гармонічних

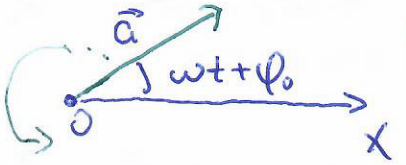
$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

а) однаковий напрям, однакова частота

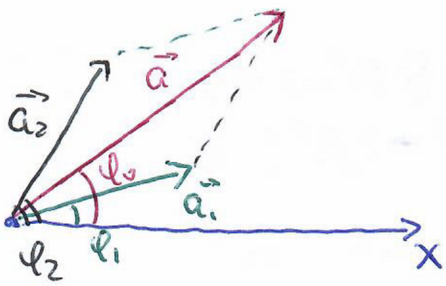
$$x(t) = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

метод векторних діаграм



фактично $a\cos(\omega t + \varphi)$ - як проекція на Ox в-ра довжиною a, що обертається з ω навколо т. O (свого кінця

два коливання - 2 вектора



$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$, частота та сама

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\cos(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}}) \cdot a_1 \cdot a_2}$$

$\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}} = \varphi_2 - \varphi_1$ - див. рис

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$$ - з трикутника, катети якого утворюються проекціями

$$x_1(t) + x_2(t) = a\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$E_1 \sim a_1^2$, $E_2 \sim a_2^2$ $\Rightarrow$ $E \neq E_1 + E_2$ (за винятком $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi/2$)

б) однаковий напрям, $\cancel{\omega_2}$ $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_1, \omega_2$ близькі

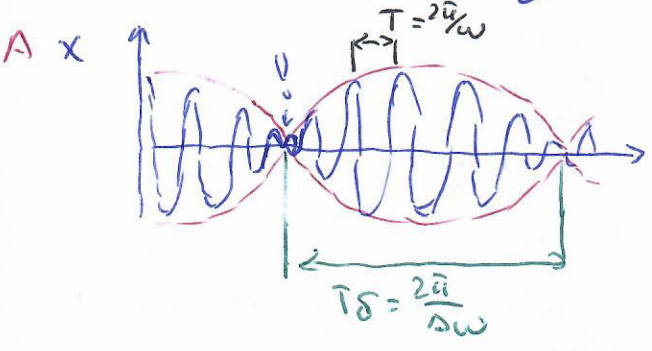
* $a_1 = a_2$

Так як частоти різні, завжди можна вибрати початок відліку часу так, щоб $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$

$$x(t) = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t = 2a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t)$$

$$A(t) = 2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right), \quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

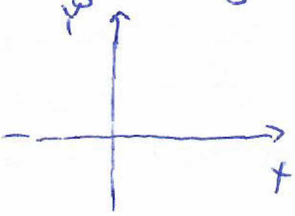


биття

налаштування муз. інструментів за допомогою камертону в) взаємоперпендикулярні коливання, $\omega_1 = \omega_2$

два ступені вільності частинки $\quad x(t) = a\cos(\omega t + \varphi_x)$

$y(t) = b\cos(\omega t + \varphi_y)$



Виберемо початок відліку, щоб $\varphi_x = 0$

$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \varphi_y$

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) \\ y(t) = b\cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases}$$

Якщо хочемо р-ня траєкторії – необх. виключити t

$\frac{x}{a} = \cos\omega t \qquad \frac{y}{b} = \cos(\omega t + \Delta\varphi) = \cos\omega t\cos\Delta\varphi - \sin\omega t\sin\Delta\varphi$

$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\Delta\varphi \Rightarrow \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\Delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\Delta\varphi$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\cos^2\Delta\varphi - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi - \frac{x^2}{a^2}\sin^2\Delta\varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$ – загальне р-ня еліпса

$\Delta\varphi = 0 \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0 \quad y = \frac{b}{a}x$ – пряма

$\Delta\varphi = \pi \qquad y = -\frac{b}{a}x$ – в інших чвертях

$\Delta\varphi = \pm\pi/2,\ b = a \Rightarrow$ коло

$0 < \Delta\varphi < \pi$ – за годинниковою стрілкою, $\quad \pi < \Delta\varphi < 2\pi$ – проти

Якщо $\omega_1 \neq \omega_2$ але $n\omega_1 = m\omega_2$

цілі $\Rightarrow$ фігури Ліссажу

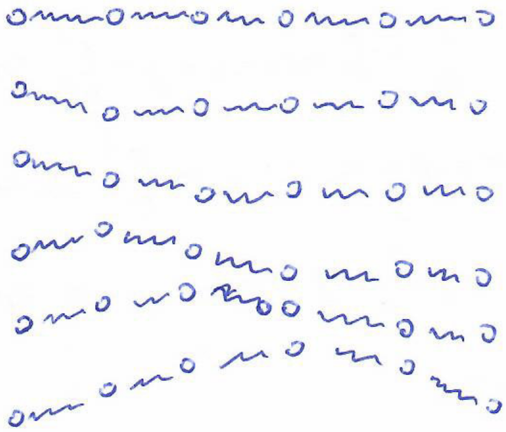
(траєкторії – замкнені криві)

Пружні хвилі, елементи акустики

Коливання, що виникли у певній ділянці простору середовища (або й одній частинці середовища) не залишаються локалізованими у місцях збудження. Вони поширюються зі скінченною швидкістю внаслідок вз-ї між частинками середовища

Процес поширення коливань – хвиля.

Якщо вз-я між частинками ~~...~~ завдяки силам пружності, що виникають під час деформації – пружні хвилі



Залежно від напрямку коливання частинок ~~розрізняють~~ відносно напрямку поширення хвиль розрізняють поперечні та повздовжні хвилі

↑ тв. тіла

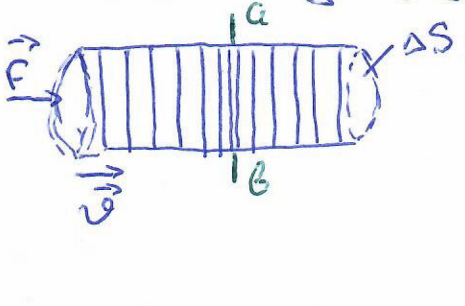
↑ тв. тіла, рідини, гази

[Хвильовий] фронт – поверхня, що розмежовує область середовища, яка вже залучена до хвильового процесу від ділянки, де коливання ще не виникли.

Хвильова поверхня проходить через місце розташування частинок, які коливаються в одній фазі

Розрізняють плоскі, сферичні, циліндричні... хвилі

Оцінимо швидкість поширення хвиль у суцільному пружному середовищі. Виділимо циліндричний елемент



У місцях стиску густина середовища змінюється на $\Delta\rho$. За час Δt через переріз ab буде перенесена маса

$$\Delta m = S\cdot v\,\Delta t\,\Delta\rho$$

зміна імпульсу $\Delta m\cdot v = S\,\Delta t\,\Delta\rho\, v^2 = F\Delta t = \Delta p\, S\,\Delta t$

$$v = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}}$$

гази $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ γ – показник адіабати

$\Delta\rho = \varepsilon\rho$; $\Delta p = \alpha\cdot\varepsilon$, ε – відносна деформація, α – коеф. пружності

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$$

стержень $v = \sqrt{E/\rho}$ – повздовжні

$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$

в рідинах / газах $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ – мод. всебічного стиску

поперечні $v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

вздовж осей куба $v_{\parallel} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$ $v_{\perp} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$

кисень 316

повітря 331 H_2O 1490 м/с?

гелій 965 сталь 4180 м/с?

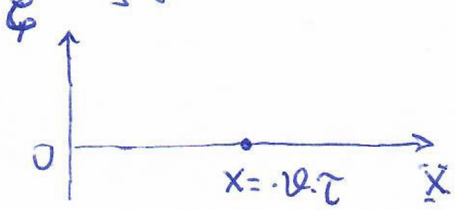
$\leftarrow$ аналог $q = q_0 \cos(\omega t + \alpha)$

Рівняння хвилі — закон руху частинки середовища, що бере участь в хв. процесі

$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t)$: $\xi(x, y, z, t)$ зміщення частинки від рівноважного положення, яке х-ться $\vec{r}$

ζ дзета

ξ ξ ксі



ф-я має бути періодичн і по часу, і по координатам.

$\nearrow$ плоска хвиля, поширюється вздовж OX (хв. поверхні $\perp$ OX)

$$\xi = \xi(x, t)$$

Для частинки $x = 0$ $\quad \xi = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$

з довільною координатою x — відставання по фазі

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos(\omega(t - \tau) + \alpha)$$

де τ - час поширення $\tau = x/\upsilon$

$$\xi(x, t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \alpha\right)$$

Значення ξ, яке відповідає певному знач. фази $\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \alpha\right) = const$ переміщується у бік зростання X. Миттєва швидкість цього переміщення

$$d\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \alpha\right) = 0$$

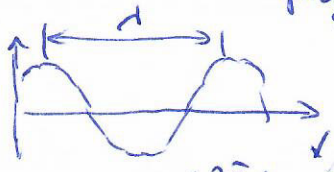
$$\omega\left(dt - \frac{dx}{\upsilon}\right) = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = \upsilon \text{ - фазова шв-ть}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad \xi = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{T}\frac{x}{\upsilon} + \alpha\right)$ $\quad T \cdot \upsilon = \lambda$ - довжина хвилі (просторовий період)

$$\xi = a \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right)$$

$\nearrow$ $x = x_0$ коливання з початковою фазою $-\frac{2\pi x_0}{\lambda} + \alpha$

$\nearrow$ $t = t_0$



$$\xi(x) = a \cos\left(-\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi t_0}{T} + \alpha\right)$$

початкова фаза

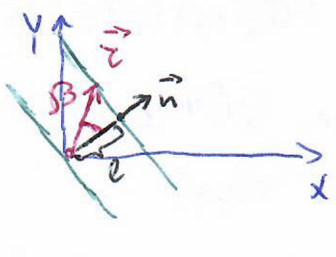
хвильове число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}$ $\qquad \xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$

$\upsilon = \frac{\omega}{k}$ - фазова шв-ть $\qquad$ р-ня плоскої хвилі

Для сферичної хвилі $\quad \xi = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$

$\leftarrow$ амплітуда зменшується

$\nearrow$ плоска хвиля, $\nparallel$ осі



для точки на хвильовій поверхні

$$\xi = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right) + \alpha\right)$$

l - відстань хв. поверхні від початку координат

$\vec{r}$ - радіус-вектор $\forall$ хвильової поверхні

$\vec{n}$ - одиничний в-р, $\perp$ до $\uparrow$. $\qquad \vec{n}\cdot\vec{r} = r\cdot\cos\beta = l$

$$\xi = a\cos(\omega t - \frac{\omega}{v}\vec{n}\cdot\vec{r} + \alpha)$$

$\vec{k}$ - хвильовий в-р, $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n} = k\cdot\vec{n}$

$$\xi = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \qquad \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z$$

Спробуємо знайти хвильове рівняння (описує процес поширення хвильового процесу, аналог $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Знайдемо други похідні

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -a\omega^2\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2\xi$$

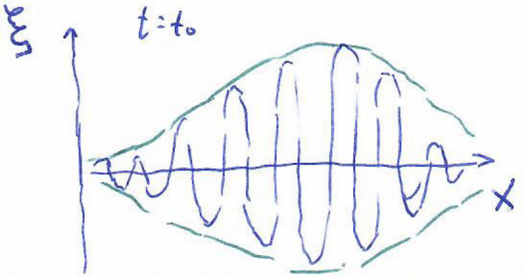
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2\xi \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2\xi \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2\xi \;\Big|_+$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k^2\xi = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2} \qquad \Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ - хвильове р-ня

$\forall$ ф-я, що його задовольняє ...

* збурення - суперпозиція групи плоских гармонічних хвиль (хвильовий пакет) з близькими частотами



Утворюються, наприклад, при ударному збудженні

Групова швидкість - швидкість поширення обвідної

* пакет з двох хвиль

$$\xi(x,t) = a_1\cos(\omega_1 t - k_1 x) + a_2\cos(\omega_2 t - k_2 x) \qquad \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$$

якщо $a_1 = a_2 = a$ $\quad \xi(x,t) = 2a\cos[\frac{1}{2}(\omega_1 t - k_1 x - \omega_2 t + k_2 x)]\times$

$\times\cos[\frac{1}{2}(\omega_1 t + \omega_2 t - k_1 x - k_2 x)] = 2a\cos[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x]\cdot$

$\cdot\cos[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x]$

$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

$$\xi(x,t) = 2a\cos(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k x)\cdot\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x) = a_0(x,t)\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x)$$

a_0 - "амплітуда" (загалом, за визначенням ампл. завжди >0)

визначає форму хвилі, має вигляд біжучої хвилі

Поширення обвідної відбувається зі швидкістю

$$v_{гр} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$ т.я. частоти близькі

Якщо фазова шв-ть усіх компонент однакова $\omega_1 = v_ф k_1$, $\omega_2 = v_ф k_2$ ...
то $v_{гр} = v_ф$ і форма зберігається. Насправді існує дисперсія.

Вектор Умова

Виділимо в середовищі, де поширюється хвиля ΔV
кінетична енергія частинок в цьому об'ємі

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho \Delta V \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$$

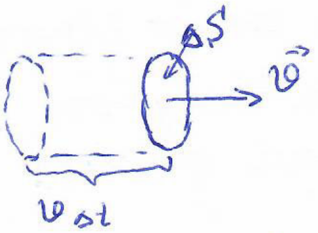
Потенціальна (пружна деформація, ізотропне ти циліндр)

$$\Delta U = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2} E \Delta V \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \qquad \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$ відносна деформ.

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = \frac{1}{2}\left(\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right)\cdot \Delta V$$

об'ємна густина енергії

$$w_E = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$



Потік - енергія, що переноситься через деяку поверхню за одиницю часу

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad [\Phi] = \frac{Дж}{с} = Вт$$

В загальному випадку енергія розподілена в просторі неоднорідно. Вводять густину потоку енергії

$$J = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} \qquad [J] = \frac{Вт}{м^2} = \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$$

Якщо v - швидкість поширення хвилі, то $\Delta E = w_E \cdot \Delta V = w_E \Delta S \cdot v \Delta t$

$$J = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} = \frac{w_E \Delta S v \Delta t}{\Delta t \cdot \Delta S} = w_E \cdot v$$

в-р густини потоку енергії $\vec{J} = w_E \vec{v}$ - в-р Умова

$$\Phi = \int_S \vec{J}\, d\vec{S}$$

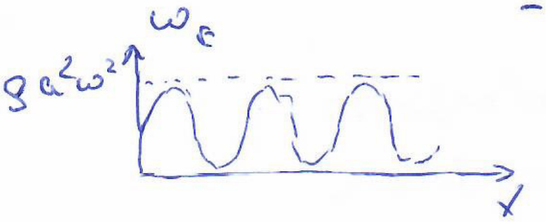
Плоска хвиля. $\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha)$

$$w_E = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha) + \frac{1}{2} E k^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha)$$

потенц. та кінет. енергії змінюються у фазі на відміну від коливань

$k = \frac{\omega}{v}$, $E = \rho v^2$

$$w_E = \rho \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2\left[1 - \cos(2\omega t - 2kx + 2\alpha)\right]$$



- ~~ем~~ поширення хвилі об'ємної густини енергії з v, але удвічі меншими просторовими та часовими інтервалами

$\langle w_E \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2$

$\langle \vec{J} \rangle = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 a^2 \vec{v} = I = \langle J \rangle$ ← інтенсивність

Група хвиль

$$J \sim a^2 = 4a^2\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \Rightarrow$$

густина потужності утворює максимуми, що переміщуються в просторі з $v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$ ($v_{гр}$ - швидкість перенесення енергії групою хвиль)

Для хвиль існує явище інтерференції ← ж пряма та відбита

ж дві хвилі поширюються на зустріч ($\omega_1=\omega_2=\omega$, $a_1=a_2=a$ однакова поляризація

$$\xi = a\cos(\omega t - kx) + a\cos(\omega t + kx) =$$
$$= 2a\cos(-kx)\cdot\cos(\omega t) = A(x)\cdot\cos(\omega t)$$

$A(x) = 2a\cdot\cos(kx)$

вираз не описує біжучу хвилю (бо не має аргументу $\omega(t-\frac{x}{v})$), час та координата входять окремо — стояча хвиля (стаціонарний розподіл у просторі "амплітуди" хвилі

$$|A| = |2a\cos(kx)| = \left|2a\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right|$$

$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi n$, $n=0,1,2$ - $|A|=2a$ - пучності

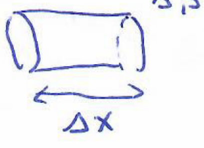
$= (2n+1)\pi$ $|A|=0$ - вузли.

Пружні хвилі, які поширюються у суцільних середовищах наз. звуковими: частота 16...20000 Гц ← інфразвук, ультра (гіпер) звук

Об'єктивні х-ки: інтенсивність (сила), склад, частота

Суб'єктивні: гучність, тембр, висота

Звук - поширення змін тиску



циліндр у звуковому полі, вздовж осі плоска хвиля

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

Внаслідок перепаду тиску діятиме сила $\frac{dp}{dx}\Delta x \cdot \Delta S$ (Δp)

ІІ з.Н:
$$\underbrace{\rho \Delta S \Delta x}_{m} \frac{d^2\xi}{dt^2} = + \frac{dp}{dx}\Delta x \Delta S$$

$$\rho\left(-a\omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha)\right) = + \frac{dp}{dx}$$

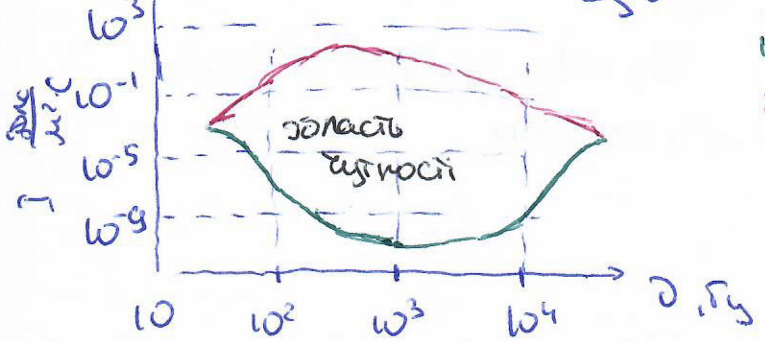
$$dp = -\rho a \omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha)\, dx \qquad \Delta p = \frac{\rho a \omega^2}{k} \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

$$k = \frac{\omega}{v} \qquad \Delta p = \underbrace{a\rho\omega v}_{\Delta p_0} \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

Δp_0 – амплітуда звукового тиску

($\rho \cdot v$) – хвильовий (звуковий) опір

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 v = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}$$



поріг чутності

больовий поріг

наближений фізіологічний з-н Вебера-Фехнера

$$L \sim \lg\frac{I}{I_0}$$

гучність; I_0 ← больовий поріг.

при $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$ [L] – децибел (дБ)

для вимірів беруть $I_0 = 10^{-12}\ \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$ (для 1кГц)

Тембр визначається спектральним складом (відтінок складного звуку, якими відрізняються один від одного звуки однакової сили і висоти)

Ефект Доплера

Швидкість поширення зв. хвиль у середовищах не залежить від руху джерела і приймача звуку. Проте якщо вони у русі відносно середовища поширення, частота звуку, який генерує джерело, може відрізнятися від тієї, яку реєструє приймач.

а) [Дж] $\xleftarrow{v^*_{пр}}$ [Пр]

всі шв-ті відносно середовища

ν_0 – частота генерації

v – шв-ть звуку

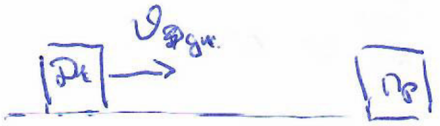
$\lambda_0 = v/\nu_0$

$\lambda = const$, тому Пр "зустріне" більше максимумів

$$\nu' = \frac{v + v^*_{пр}}{\lambda_0} = \nu_0 \frac{v + v^*_{пр}}{v} = \nu_0\left(1 + \frac{v^*_{пр}}{v}\right)$$

якщо рух в протилежне бік $\nu' = \nu_0\left(1 - \frac{v^*_{пр}}{v}\right)$

– 8.14



за t : хвиля пошириться на $v T_0$

джерело $v_{дж} T_0$

Тоді довжина хвилі λ' (відстань між максимумами) $\lambda' = (v - v_{дж}) T_0$

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{дж}) T_0} = \nu_0 \frac{v}{v - v_{дж}}$$

якщо віддаляється $\nu' = \nu_0 \frac{v}{v + v_{дж}}$

якщо рухаються обидва — верхній знак – наближення

$$\nu' = \nu_0 \frac{v \pm v_{пр}}{v \mp v_{дж}}$$

Якщо шв-ті не вздовж прямої Дж–Пр, то ефект Доплера визначається проекціями на цей напрям