Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
фізичний факультет

Методичні вказівки до розв'язування задач з аналітичної геометрії

для студентів фізичного факультету

Київ – 2023

Методичні вказівки до розв'язування задач з аналітичної геометрії для студентів фізичного факультету/ Упорядники: М.Ф. Ледней. – Київ, 2023. – 49 с.

Рецензенти: С.Й. Вільчинський, доктор фіз.-мат. наук, професор,
Д.А. Гаврюшенко, доктор фіз.-мат. наук, професор

Рекомендовано до друку
вченою радою
фізичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
протокол № __
від “ __ ” ____________ 2023 року

Передмова

Даний навчально-методичний посібник орієнтований на студентів фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які слухають навчальний курс “Лінійна алгебра та аналітична геометрія”. У посібнику наведені розв’язки понад 90 найбільш типовіших задач з аналітичної геометрії. Зміст завдань повністю відповідає програмі курсу “Лінійна алгебра та аналітична геометрія”, затвердженій Міністерством освіти та науки України, у тій її частині, яка стосується аналітичної геометрії. Набір задач розрахований на “середньостатистичного” студента і відповідає тому мінімуму знань, вмінь і навичок з аналітичної геометрії, якими повинен володіти кожен студент. Перед кожним розділом приведено основні теоретичні відомості та формули, які використовуються при розв’язанні подальших задач. Наприкінці кожного розділу наведені завдання для самостійної роботи. Даний посібник також полегшить складання робочого плану викладачам, які приступають до проведення семінарських занять з аналітичної геометрії.

Усі номери завдань зазначені за таким збірником задач:

1. Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии.* – М.: Высш. школа, 1972.

1. Векторна алгебра

- *Якщо відомі координати точок* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *та* $M_2(x_2; y_2; z_2)$, *то компонентами вектора (напрямленого відрізка)* $\mathbf{M_1M_2}$ *є:*

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{1}$$

- *Модуль вектора* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *визначається як*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{2}$$

- *Скалярний добуток векторів* $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ *і* $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ *у ПДСК має такий вигляд:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i. \tag{3}$$

  Якщо кут між векторами $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *позначити як* φ, *то скалярний добуток можна визначити такою формулою:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi. \tag{4}$$

- *Проекція вектора* $\mathbf{S}$ *на вісь* u, *яка складає кути* α, β, γ *з координатними осями, обчислюється за такою формулою:*

$$p_u\mathbf{S} = (\mathbf{S}, \mathbf{e}) = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma, \tag{5}$$

  де X, Y, Z *– компоненти вектора* $\mathbf{S}$, *а вектор* $\mathbf{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ *– напрямляючий вектор прямої* u.

- *Проекції суми* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *векторів* $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ *і* $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ *є*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3). \tag{6}$$

  Проекції вектора $\alpha\mathbf{a}$, *де* α *– число є:*

$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3). \tag{7}$$

- *Векторний добуток векторів* $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ *і* $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ *у ПДСК визначається такою формулою:*

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

За модулем цей векторний добуток дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$. *Якщо кут між векторами позначити через* φ, *то модуль векторного добутку можна записати так:*

$$\big|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\big| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi. \tag{9}$$

Для подвійного векторного добутку має місце тотожність

$$\big[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\big] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{10}$$

- *Змішаний добуток векторів* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *визначається як*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \big([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \mathbf{c}\big). \tag{11}$$

Має місце така тотожність:

$$\big([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \mathbf{c}\big) = \big(\mathbf{a}, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\big) = \big([\mathbf{b} \times \mathbf{c}], \mathbf{a}\big). \tag{12}$$

Тотожність Якобі:

$$\big[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\big] + \big[\mathbf{c} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\big] + \big[\mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\big] = 0. \tag{13}$$

За модулем змішаний добуток (1.11) дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. *Тому, якщо вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *– компланарні, то* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. *Змішаний добуток* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *має від'ємний знак, якщо вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *утворюють ліву трійку, і додатний – якщо праву трійку.*

- *Якщо вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$ *задані своїми координатами в ПДСК, то змішаний добуток визначається такою формулою:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Задача 1

Обчислити модуль вектора $\mathbf{a} = (6; 3; -2)$.
Розв'язок:

Застосовуючи формулу (1.2), отримуємо: $|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7$.

Задача 2

Визначити початок вектора $\mathbf{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1; -1; 2)$.

Розв'язок:

Використовуючи формулу (1.1), знаходимо координати x_1, y_1, z_1 початку вектора:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - a_1 = 1 - 2 = -1; \\ y_1 &= y_2 - a_2 = -1 - (-3) = 2; \\ z_1 &= z_2 - a_3 = 2 - (-1) = 3. \end{aligned}$$

Задача 3

На площині задані два вектори $\mathbf{p} = (2; -3)$, $\mathbf{q} = (1; 2)$. Знайти розклад вектора $\mathbf{a} = (9; 4)$ за базисом $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Розв'язок:

Для знаходження коефіцієнтів розкладу $\mathbf{a} = a_p\mathbf{p} + a_q\mathbf{q}$ перепишемо його у проекціях на координатні осі. Враховуючи (1.6) та (1.7), маємо:

$$a_1 = a_p p_1 + a_q q_1 \Longrightarrow 2a_p + 1a_q = 9, \tag{1.15}$$

$$a_2 = a_p p_2 + a_q q_2 \Longrightarrow -3a_p + 2a_q = 4. \tag{1.16}$$

Розв'язуючи дану систему лінійних рівнянь, знаходимо шуканий розклад: $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$.

Задача 4

Дано вершини трикутника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ та $C(3; -2; 1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B.

Розв'язок:

Використовуючи (1.4) знаходимо, що косинус внутрішнього кута φ при вершині B трикутника дорівнює: $\cos\varphi = \dfrac{(\mathbf{BA}, \mathbf{BC})}{|\mathbf{BA}||\mathbf{BC}|}$. Координати векторів $\mathbf{BA}$, $\mathbf{BC}$, їхні модулі та скалярний добуток знаходимо відповідно до формул (1.1) – (1.3). Звідси косинус внутрішнього кута при вершині B, який є кутом між векторами $\mathbf{BA}$ та $\mathbf{BC}$, визначається як $\cos\varphi = \frac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{5\cdot\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тобто шуканий кут $\varphi = 45^0$.

Задача 5

Дані дві точки: $A(3;-4;-2)$ і $B(2;5;-1)$. Знайти проекцію вектора $\mathbf{AB}$ на вісь, яка складає з координатними осями Ox та Oy кути $\alpha = 60^0$, $\beta = 150^0$, а з віссю Oz – тупий кут γ.
Розв'язок:

Оскільки $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, а за умовою задачі кут γ – тупий, тобто $\cos\gamma < 0$, отримуємо: $\cos\gamma = -\sqrt{1 - 1/2^2 - 1/2^2} = -1/\sqrt{2}$. Координати вектора $\mathbf{AB}$ знаходимо відповідно до (1.1). Тому шукана проекція згідно з (1.5) дорівнює $-1\cdot\cos 60^0 + 9\cdot\cos 150^0 + 0 = -5$.

Задача 6

Дані точки: $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ і $C(5;2;6)$. Обчислити площу трикутника ABC.
Розв'язок:

Площу S трикутника можна обчислити за такою формулою: $S = \dfrac{1}{2}\big|[\mathbf{AB}\times\mathbf{BC}]\big|$. Векторний добуток обчислюємо за формулою (1.8). Координати векторів $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{BC}$ знаходимо, використовуючи (1.1): $\mathbf{AB} = (2;-2;-3)$, $\mathbf{BC} = (2;2;9)$. Остаточно маємо: $S = 14$.

Задача 7

Сила $\mathbf{P} = (2;2;9)$ прикладена до точки $A(4;2;-3)$. Визначити величину та направляючі косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2;4;0)$.
Розв'язок:

Момент $\mathbf{M}$ сили $\mathbf{P}$ відносно точки C знаходимо як $\mathbf{M} = [\mathbf{P}\times\mathbf{CA}]$. Координати вектора $\mathbf{CA}$ знаходимо за формулою (1.1): $\mathbf{CA} = (2;-2;-3)$. Для знаходження векторного добутку використаємо (1.8). Остаточно маємо: $\mathbf{M} = (-12;-24;8)$, $|\mathbf{M}| = 28$. Компоненти вектора $\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} = (\cos\alpha;\cos\alpha;\cos\gamma)$ є направляючими косинусами цього вектора (див. (1.5)). Звідки отримуємо: $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.

Задача 8

Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ розташовані в одній площині.
Розв'язок:

Точки A, B, C, D розташовані в одній площині за умови

$(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = 0$, тобто об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює нулю (див. (1.11)). Координати векторів знаходимо за формулою (1.1): $\mathbf{AB} = (-1; -1; 6)$, $\mathbf{AC} = (-2; 0; 2)$, $\mathbf{AD} = (1; -1; 4)$. Змішаний добуток знаходимо відповідно до (1.14). Обчислюючи визначник, переконуємось, що умова $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = 0$ виконується, тобто дійсно задані точки розташовані в одній площині.

Задача 9

Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого розташовані в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ і $D(4; 1; 3)$.
Розв'язок:

Шуканий об'єм дорівнює $V = \dfrac{1}{6}\big|(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD})\big|$. Компоненти векторів знаходимо, використовуючи (1.1): $\mathbf{AB} = (3; 6; 3)$, $\mathbf{AC} = (1; 3; -2)$, $\mathbf{AD} = (2; 2; 2)$. Вираховуючи змішаний добуток за формулою (1.14), отримуємо, що шуканий об'єм $V = 3$.

Задача 10

Довести: $\big([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]\big) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.
Розв'язок:

Спочатку скористаємось тотожністю (1.12), а потім обчислимо виникаючий подвійний векторний добуток за формулою (1.10): $\big([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]\big) = \big(\mathbf{a}, \big[\mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]\big]\big) = \big(\mathbf{a}, \big(\mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{b}, \mathbf{c})\big)\big) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, що і потрібно було довести.

Завдання для самостійної роботи:

N 749, 751, 753, 762, 766, 804, 815, 819, 851, 853, 860, 865 (2, 4), 874 (2, 3), 877, 883 (4, 6, 8, 10).

2. Елементарні задачі аналітичної геометрії

- *Відстань між двома точками $A(x_a, y_a)$ і $B(x_b, y_b)$ на площині дорівнює: $l = |\mathbf{AB}|$ або,*

$$l = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \tag{1}$$

- *Площа S паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$*, визначається такими співвідношеннями:*

$$S = \big|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\big|, \tag{2}$$

або

$$S^2 = \det \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

- *Об'єм V паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$*, визначається такими співвідношеннями:*

$$V = \big|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\big|, \tag{4}$$

або

$$V^2 = \det \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Задача 11

На осі ординат знайти таку точку M, відстань від якої до точки $N(-8; 13)$ дорівнює 17.
Розв'язок:

Використаємо вираз для відстані l між двома точками на площині (2.1). У даному випадку $l = 17$. Точка M розташована на осі ординат, тому її координати мають вигляд $M(0; y)$, де y – шукана ордината. Тоді маємо рівняння на y: $17^2 = (-8-0)^2 + (13-y)^2$. Розв'язуючи це квадратне рівняння, одержуємо два розв'язки: $y_1 = 28$, $y_2 = -2$. Тобто, існують дві точки: $M_1(0; 28)$ і $M_2(0; -2)$, які задовольняють умові задачі.

Задача 12

Вершинами трикутника є такі точки: $(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$ і $C(-2\sqrt{3}; 2)$. Обчислити його зовнішній кут при вершині A.
Розв'язок:

Зовнішній кут при вершині A дорівнює $180^0 - \alpha$, де α — внутрішній кут. Використовуючи формули (1.2) і (1.3), маємо: $\cos\alpha = \dfrac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})}{|\mathbf{AB}||\mathbf{AC}|}$. Із умови задачі знаходимо: $\mathbf{AB} = (0+\sqrt{3}; 2-1)$, $\mathbf{AC} = (-2\sqrt{3}+\sqrt{3}; 2-1)$. Тоді $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, тобто $\alpha = 120^0$. Звідки зовнішній кут дорівнює: $180^0 - 120^0 = 60^0$.

Задача 13

Обчислити площу трикутника, вершинами якого є точки $A(2;-3)$, $B(3;2)$ та $C(-2;5)$.

Розв'язок:

Для обчислення площі в даному випадку скористаємось (2.3). Очевидно, площа трикутника дорівнює $\frac{1}{2}S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$. Враховуючи, що $\mathbf{AB} = (3-2; 2+3)$, $\mathbf{AC} = (-2-2; 5+3)$, і використовуючи формули (1.3) і (2.3), знаходимо, що шукана площа дорівнює 14.

Задача 14

Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ і $D(4,1,3)$.

Розв'язок:

Розв'язок задачі аналогічний попередньому. Скористаємось формулою (2.5). Об'єм тетраедра дорівнює $\frac{1}{6}V$, де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ і $\mathbf{AD}$. Ураховуючи, що $\mathbf{AB} = (5-2; 5+1; 4-1)$, $\mathbf{AC} = (3-2; 2+1; -1-1)$, $\mathbf{AD} = (4-2; 1+1; 3-1)$, і, використовуючи формули (1.3) і (2.5), знаходимо, що шуканий об'єм дорівнює 3.

Завдання для самостійної роботи:

N 48, 50, 727, 741, 101, 104, 118, 122, 818, 821, 858, 878.

3. Рівняння площини і прямої

- *Рівняння*

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{1}$$

або

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \tag{2}$$

визначає площину, яка має нормальний вектор $\mathbf{n} = (A; B; C)$ *та проходить через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *із радіус-вектором* $\mathbf{r}_0$. *Рівняння площини у вигляді (3.1) називається векторним.*

- *Розкривши дужки в (3.2) і позначивши число* $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ *літерою* D, *це рівняння можна переписати у такому вигляді:*

  $$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3}$$

  яке називається загальним рівнянням площини.

- *Якщо в рівнянні (3.3) жоден із коефіцієнтів* A, B, C *не дорівнює нулю, тоді це рівняння можна привести до такого вигляду:*

  $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{4}$$

  де $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ *є величини відрізків, які площина відсікає на координатних осях. Рівняння (3.4) називається рівнянням площини у відрізках.*

- *Нормальним рівнянням площини називається рівняння, яке записано у такому вигляді:*

  $$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{5}$$

  де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ *– направляючі косинуси нормалі до площини,* p *– відстань від площини до початку координат. При обчисленні направляючих косинусів нормалі слід уважати, що вона напрямлена від початку координат до площини.*

- *Якщо позначити через* d *відстань від точки* M^* *до площини, тоді відхиленням* δ *точки* M^* *від цієї площини називається число* $+d$, *якщо точка* M^* *і початок координат розташовані по різні боки від площини, та* $-d$, *якщо вони знаходяться по один бік від площини. Якщо точка* M^* *має координати* x^*, y^*, z^*, *а площина задана нормальним рівнянням (3.5), тоді відхиленням точки* M^* *від цієї площини є:*

  $$\delta = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p. \tag{6}$$

  Загальне рівняння площини (3.3) приводиться до нормального вигляду (3.5) множенням на нормуючий множник, а саме:

  $$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + C^2 + D^2}}. \tag{7}$$

Знак нормуючого множника вибирається протилежним до знака вільного члена рівняння, яке нормується.

- *Пряма як перетин двох площин визначається сумісним заданням рівнянь цих площин, а саме:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{cases} \tag{8}$$

за умовою, що коефіцієнти A_1, B_1, C_1 першого з них не пропорційні коефіцієнтам A_2, B_2, C_2 другого (інакше ці рівняння визначають паралельні площини).

- *Кожний не рівний нулю вектор $\mathbf{a} = (l; m; n)$, який є паралельним прямій, називається напрямляючим вектором цієї прямої. Якщо відома одна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої з радіус-вектором $\mathbf{r}_0$ та її напрямляючий вектор $\mathbf{a}$, то пряма може бути задана рівняннями такого вигляду:*

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] = 0, \tag{9}$$

або

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{10}$$

Рівняння прямої у вигляді (3.9) називається векторним, а у вигляді (3.10) — канонічними.

- *Канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, мають такий вигляд:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{11}$$

- *Якщо позначити через t кожне відношення в (3.10), тоді рівняння прямої набуває такого вигляду:*

$$\begin{cases} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{cases} \tag{12}$$

Ці рівняння – параметричні рівняння прямої.

Задача 15

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; 1; -1)$ і має нормальний вектор $\mathbf{a} = (1; -2; 3)$.

Розв'язок:

Використаємо загальне рівняння площини (3.2). Враховуючи, що $(x_0; y_0; z_0) = (2; 1; -1)$, а також $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$, знаходимо $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Задача 16

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3; 4; -5)$ і паралельна векторам $\mathbf{a}_1 = (3; 1; -1)$ та $\mathbf{a}_2 = (1; -2; 1)$.

Розв'язок:

Використаємо загальне рівняння площини (3.2). У даному випадку $(x_0; y_0; z_0) = (3; 4; -5)$. Вектор $\mathbf{n} = [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]$ буде нормальним до площини. Використовуючи формулу (1.8) для знаходження компонент векторного добутку в ПДСК, отримуємо $\mathbf{n} = (-7; -4; -1)$. Шукане рівняння має такий вигляд: $7(x - 3) + 4(y - 4) + (z + 5) = 7x + 4y + z - 32 = 0$.

Задача 17

Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають паралельні площини:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0, \quad 2x - 3y + 5z + 3 = 0;$

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0, \quad 2x + y + 2z - 1 = 0.$

Розв'язок:

Площини паралельні, якщо $[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = 0$, де $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$ – вектори нормалей до площин. Користуючись формулою (1.8), знаходимо:

1) $[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = (0; 0; 0)$, тобто площини паралельні;

2) $[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = (8; -16; 0)$, тобто площини не є паралельними.

Задача 18

Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають перпендикулярні площини:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0, \quad x + 9y - 3z + 2 = 0;$

2) $2x + 3y - z - 3 = 0, \quad x - y - z + 5 = 0.$

Розв'язок:

Площини перпендикулярні, якщо $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$, де $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$ – вектори нормалей до площин. Користуючись формулою (1.3), знаходимо:

1) $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$, тобто площини перпендикулярні;

2) $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = -3$, тобто площини неперпендикулярні.

Задача 19

Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині: $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

Розв'язок:

Шукана площина має нормальний вектор, який є нормальним до паралельної їй площини, тобто $\mathbf{n} = (5; -3; 2)$. Вільний член у загальному рівнянні площини дорівнює нулю, оскільки вона проходить через початок координат. Отже, шукане рівняння має такий вигляд: $5x - 3y + 2z = 0$.

Задача 20

Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки: $M_1(1; -1; -2)$ та $M_2(3; 1; 1;)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Розв'язок:

Візьмемо в рівнянні (3.2) шуканої площини $(x_0; y_0; z_0) = M_1(1; -1; -2)$, а вектор нормалі $\mathbf{n} = [\mathbf{M_1M_2} \times \mathbf{n_0}]$, де $\mathbf{n}_0 = (1; -2; 3)$ – вектор нормалі до заданої площини. Користуючись (1.1), знаходимо $\mathbf{M_1M_2} = (2; 2; 3)$. Користуючись далі (1.8), знаходимо також $\mathbf{n} = (12; -3; -6) \| (4; -1; -2)$. Тоді шукане загальне рівняння площини має наступний вигляд: $4(x - 1) - (y + 1) - 2(z + 2) = 4x - y - 2z - 9 = 0$.

Задача 21

Знайти точки перетину площини $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ з координатними осями.

Розв'язок:

Приведемо задане загальне рівняння площини до рівняння площини у відрізках (3.4). Маємо: $\dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{8} - \dfrac{z}{6} = 1$. Звідси знаходимо (див. (3.4)), що точками перетину площини з координатними осями Ox, Oy, Oz є відповідно точки $(12; 0; 0), (0; -8; 0), (0; 0; -6)$.

Задача 22

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; -3; -4)$ та відсікає на координатних осях відрізки однакової довжини (вважати кожний відрізок, напрямленим від початку координат).
Розв'язок:

Використовуючи (3.2), запишемо загальне рівняння площини $A(x-2)+B(y+3)+C(z+4) = Ax+By+Cz+D = 0$, де $D = -2A+3B+4C$. Позначимо довжину відрізків, що їх відсікає площина на координатних осях через α. Для знаходження коефіцієнтів A, B, C перетворимо загальне рівняння на рівняння (3.4) площини у відрізках. Тоді з умови рівності відрізків маємо: $a = b = c = \alpha$ (де a, b, c задані співвідношеннями в (3.4)). Звідси отримуємо, що $A = B = C = \alpha$. Тоді: $D = 5\alpha$. Підставляючи знайдені коефіцієнти в загальне рівняння площини та скоротивши на α, остаточно отримуємо рівняння шуканої площини, а саме: $x + y + z + 5 = 0$.

Задача 23

Скласти рівняння площини, яка відсікає на осі OZ відрізок $c = -5$ та перпендикулярна до вектора $\mathbf{n} = (-2; 1; 3)$.
Розв'язок:

Координата кінця відрізка c, що його відсікає шукана площина на осі Oz, за умовою, дорівнює: $c = -D/C = 5$ (див. (3.4)). Вектори $(A;\ B;\ C)$ та $\mathbf{n} = (A_1;\ B_1;\ C_1) = (-2; 1; 3)$, де A, B, C – коефіцієнти в загальному рівнянні шуканої площини (див. (3.3)), колінеарні, оскільки згідно з умовою площина ортогональна до вектора $\mathbf{n}$. Тому можна записати, що: $A/A_1 = B/B_1 = C/C_1$, або $A/(-2) = B = C/3$. Тобто: $A = -2C/3$, $B = C/3$ та $D = -5C$. Підставляючи знайдені A, B, C, D у загальне рівняння площини (3.3) і скоротивши на $C/3$, остаточно отримуємо рівняння шуканої площини, а саме: $-2x + y + 3z - 15 = 0$.

Задача 24

Привести наступні рівняння до нормального вигляду:

1) $2x - 2y + z - 18 = 0$;

2) $5y - 12z + 26 = 0$;

3) $y + 2 = 0$.

Розв'язок:

У всіх трьох випадках обчислюємо нормуючий множник μ за правилом (3.7) (звернути увагу на правило вибору знака у нормуючого множника). Після ділення на цей множник даного рівняння, воно набуває нормального вигляду, а саме:

1) $\mu = 9$ і нормальне рівняння $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} - 6 = 0$;

2) $\mu = -13$ і нормальне рівняння $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0$;

3) $\mu = -1$ і нормальне рівняння $-y - 2 = 0$.

Задача 25

Обчислити відстань d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через такі три точки: $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ та $M_3(4;-5;-2)$.
Розв'язок:

Спочатку запишемо загальне рівняння площини, яка проходить через задані точки. Нормаллю до площини буде: $\mathbf{n} = [\mathbf{M_1M_2} \times \mathbf{M_1M_3}]$. Компоненти векторів $\mathbf{M_1M_2}$ та $\mathbf{M_1M_3}$ знаходимо за фомулою (1.1): $\mathbf{M_1M_2} = (-3;2;2)$, $\mathbf{M_1M_3} = (3,-4;-3)$. Векторний добуток обчислюємо за формулою (1.8), тоді $\mathbf{n} = (2;-3;6)$. Якщо за точку, яка розташована в площині, взяти точку M_1, то відповідно до формули (3.2) загальне рівняння площини має такий вигляд: $2(x-1) - 3(y+1) + 6(z-1) = 2x - 3y + 6z - 11 = 0$. Приведемо це рівняння до нормальної форми (3.5). Відповідно до (3.7) знаходимо нормуючий множник – $\mu = 7$, розділивши на який загальне рівняння площини, отримуємо це рівняння у нормальній формі, а саме: $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{11}{7} = 0$. Підставляючи тепер у це рівняння координати точки P, відповідно до (3.6) отримуємо, що відхилення цієї точки від площини: $\delta = -4$. За модулем це число і є шукана відстань від точки P до площини, тобто $d = 4$.

Задача 26

Довести, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(3;-2;1)$ та $M_2(-2;5;2)$.
Розв'язок:

Площина перетинає відрізок M_1M_2, якщо точки M_1 і M_2 розташовані по різні боки від площини, тобто згідно із (3.6) відхилення цих точок від площини, відповідно δ_1 і δ_2, мають різні знаки. Для обчислення відхилень перепишемо задане загальне рівняння площини у нормальному вигляді. Відповідно до (3.7) знаходимо нормуючий множник $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{29}}$, розділивши на який отримуємо рівняння у нормальному вигляді, а саме: $-\dfrac{3}{\sqrt{29}}x + \dfrac{4}{\sqrt{29}}y + \dfrac{2}{\sqrt{29}}z - \dfrac{5}{\sqrt{29}} = 0$. Підставляючи тепер координати точок M_1 і M_2 у це рівняння, отримуємо, що $\delta_1 = -\dfrac{20}{\sqrt{29}}$ і $\delta_2 = \dfrac{17}{\sqrt{29}}$. Тобто дійсно відхилення мають різні знаки, а тому площина перетинає заданий відрізок.

Задача 27

Скласти рівняння площин, паралельних площині $2x - 2y - z - 3 = 0$ і розташованих на відстані $d = 5$ від неї.

Розв'язок:

Нормаллю до шуканих площин буде вектор, який є нормаллю до заданої площини: $\mathbf{n}_1 = (2; -2; -1)$. Отримаємо рівняння шуканих площин у нормальному вигляді (див. (3.5)), для чого нормуємо $\mathbf{n}_1$ на одиницю, тобто розділимо кожну компоненту вектора на $|\mathbf{n}_1| = 3$: $\mathbf{n} = (\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$. Тут $\mathbf{n}$ уже одинична нормаль. Залишається визначити лише вільні члени p_1, p_2 у рівняннях площин у нормальному вигляді. Рівняння заданої площини у нормальному вигляді має такий вигляд: $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z - 1 = 0$ (див. (3.5)). Умову на вільні члени в рівняннях шуканих площин у нормальному вигляді можна отримати, якщо підставити в рівняння заданої площини у нормальному вигляді координати будь-якої точки, яка належить площині, що віддалена від заданої на відстань d, і скористатися потім (3.6). Остаточно маємо, що умова на вільні члени має такий вигляд: $|p - 1| = d$. Це рівняння має розв'язки: $p_1 = 6$, $p_2 = -4$. Тобто рівняння шуканих площин мають наступний вигляд: $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z - 6 = 0$ та $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + 4 = 0$.

Задача 28

Скласти рівняння площини, яка ділить навпіл той двогранний кут між площинами $2x - y + 2z - 3 = 0$ та $3x + 2y - 6z - 1 = 0$, в якому розташована точка $M(1; 2; -3)$.

Розв'язок:

Зрозуміло, що будь-яка точка площини, яка задовольняє умові задачі, розташована на однаковій відстані від плошин, котрі утворюють двогранний кут. Для обчислення відстаней від точки до площин перепишемо рівняння заданих площин у нормальній формі відповідно до (3.5), (3.7): $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$, $\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{4}{7}=0$. Точка $M^*(x;y;z)$ належить шуканій площині за умови $|\delta_1|=|\delta_2|$, де $\delta_{1,2}$ є відповідно відхиленням точки M^* від заданих площин. Відхилення обчислюємо за формулою (3.6). Тоді маємо таке рівняння: $\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1\right| = \left|\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{4}{7}\right|$. Залишається лише правильно вибрати знак при знятті модуля. Це потрібно зробити так, щоб отримане рівняння відповідало площині, яка ділить навпіл той кут, де розташована точка M. Для цього обчислимо відхилення точки M від заданих площин (знову за формулою (3.6)): $\delta_1^M=1, \delta_2^M=3$. Ці відхилення мають однаковий – додатний – знак, тобто точка M і початок координат розташовані по різні боки обох площин (див. (3.6)). Це твердження буде також справедливим для точок шуканої площини. Тобто при знятті модуля в отриманому рівнянні потрібно залишити знак незмінним: $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{4}{7}$. Остаточно, після спрощення, рівняння шуканої площини набуває наступного вигляду: $23x-y-4z-24=0$.

Задача 29

Дано вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$ та $C(-7;11;6)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси зовнішнього кута при вершині A.
Розв'язок:

Очевидно, що направляючий вектор шуканої прямої може бути вибраний паралельним вектору $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_{AB}-\mathbf{n}_{AC}$, де $\mathbf{n}_{AB}$, $\mathbf{n}_{AC}$ – одиничні вектори відповідно вздовж сторін AB і AC трикутника. Знаходимо $\mathbf{n}_{AB}=\frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}=\left(\frac{3}{\sqrt{34}};\frac{3}{\sqrt{34}};-\frac{4}{\sqrt{34}}\right)$, $\mathbf{n}_{AC}=\frac{\mathbf{AC}}{|\mathbf{AC}|}=\left(-\frac{9}{3\sqrt{34}};\frac{12}{3\sqrt{34}};\frac{9}{3\sqrt{34}}\right)$. Тобто за направляючий може бути вибраний вектор $\mathbf{n}=\sqrt{34}\mathbf{n_1}=(6;-1;-7)$. Якщо A вершину трикутника взяти за точку, яка розташована на прямій, то рівняння прямої відповідно до (3.10) запишеться так: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$.

Задача 30

Скласти канонічні рівняння наступних прямих:

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 &= 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 &= 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + y + z &= 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 &= 0. \end{cases}$

Розв'язок:

Для знаходження канонічного рівняння заданої прямої необхідно відшукати відповідно до (3.10) її направляючий вектор і будь-яку точку, яка розташована на прямій. Якщо пряма задана як перетин площин (див. (3.8)), тоді направляючий вектор прямої можна вибрати у вигляді $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2]$, де $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ є відповідно вектори нормалей до першої і другої площини (див. (3.2), (3.3)). Векторний добуток обчислюємо за формулою (1.8). За координати точки, яка розташована на прямій, можна взяти будь-який розв'язок заданої системи, зокрема поклавши $z = 0$, або, якщо в цьому випадку немає розв'язків, поклавши $x = 0$, або $y = 0$. Тоді маємо:

1) $\mathbf{n}_1 = (1; -2; 3), \mathbf{n}_2 = (3; 2; -5)$. Знаходимо направляючий вектор прямої : $\mathbf{a} = (4; 14; 8)$. Поклавши в системі $z = 0$, знаходимо $x = 2$, $y = -1$. Тобто координатами точки M, розташованої на прямій, є $(2; -1; 0)$. Тоді канонічні рівняння прямої мають такий вигляд: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{14} = \dfrac{z}{8}$.

2) Аналогічно попередньому пункту знаходимо: $\mathbf{n}_1 = (5; 1; 1), \mathbf{n}_2 = (2; 3; -2)$. Направляючий вектор прямої: $\mathbf{a} = (-5; 12; 13)$. Поклавши $x = 0$, із системи знаходимо точку прямої $M(0; -1; 1)$. Остаточно канонічні рівняння прямої мають такий вигляд: $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$.

Задача 31

Визначити косинус кута між такими прямими:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 &= 0, \\ 2x + y - 2z - 4 &= 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 &= 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 &= 0. \end{cases}$$

Розв'язок:

Кут φ між прямими є кутом між їхніми направляючими векторами. Якщо відомі координати направляючих векторів, тоді за формулою (1.3) можна обчислити їхній скалярний добуток, а потім за допомогою (1.4) (означення скалярного добутку) знайти косинус кута між ними. Координати направляючих векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ заданих прямих знаходимо аналогічно тому, як це зроблено у попередній задачі. Маємо $\mathbf{a}_1 = (6; -6; 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-42; -21; 14)$, довжину яких для зручності можна перенормувати, розділивши їхні компоненти відповідно на 3 і 7: $\mathbf{a}_1 = (2; -2; 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-6; -3; 2)$. Тоді: $\cos\varphi = -4/21$.

Задача 32

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно до вектора $\mathbf{a} = (6; -2; -2)$ і перетинає пряму:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}.$$

Розв'язок:

Точка, яка розташована на шуканій прямій, задана – це точка M_1. Для знаходження канонічних рівнянь прямої залишається відповідно до (3.10) знайти компоненти її направляючого вектора. Перше рівняння на компоненти l, m, n направляючого вектора отримуємо з умови ортогональності шуканої прямої і вектора $\mathbf{a}$, тобто з умови, що їхній скалярний добуток має дорівнювати нулеві. Обчислюючи скалярний добуток за формулою (1.3), маємо: $6l - 2m - 2n = 0$. Для знаходження ще двох рівнянь, які разом з отриманим вище, утворюють систему на шукані величини l, m, n, запишемо рівняння шуканої прямої в параметричному вигляді (3.12): $x = -1 + lt$; $y = 2 + mt$; $z = -3 + nt$ і підставимо ці рівняння в канонічні рівняння заданої прямої, тобто використаємо умову, що шукана пряма перетинає задану пряму. Остаточно маємо наступну систему, яка визначає напрямок направляючого вектора шуканої прямої:

$$\begin{cases} 6lt - 2mt - 2nt = 0, \\ \dfrac{-2+lt}{3} = \dfrac{3+mt}{2}, \\ \dfrac{3+mt}{2} = \dfrac{-6+nt}{-5}. \end{cases}$$

Перше рівняння ми домножили на t. Розв'язуючи цю систему, знаходимо $(lt, mt, nt) = (2; -3; 6)$, тобто фактично шуканий направляючий вектор прямої (оскільки вектори $(lt; mt; nt)$ та $(l; m; n)$ – паралельні). Остаточно маємо наступні канонічні рівняння шуканої прямої: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$.

Задача 33

Скласти параметричні рівняння спільного перпендикуляра двох прямих, заданих такими рівняннями:

$$x = 3t-7,\ y = -2t+4,\ z = 3t+4 \quad \text{і} \quad x = t+1,\ y = 2t-8,\ z = -t-12.$$

Розв'язок:

Для розв'язку задачі відповідно до (3.12) необхідно знайти компоненти направляючого вектора $\mathbf{a}$ перпендикуляра та координати будь-якої його точки. Зрозуміло, що можна вибрати $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]$, де $\mathbf{a}_1 = (3; -2; 3), \mathbf{a}_2 = (1; 2; -1)$ – направляючі вектори першої і другої заданих прямих. Обчислюючи векторний добуток за формулою (1.8), маємо: $\mathbf{a} = (-4; -6; 8)$, або, розділивши компоненти на (-2), отримаємо: $\mathbf{a} = (2; 3; -4)$. Тоді рівняння прямої набувають такого вигляду: $x = 2t + x_0$, $y = 3t + y_0$, $z = -4t + z_0$. Координати x_0, y_0, z_0 точки, яка належить спільному перпендикуляру, знаходимо з умови перетину заданих прямих цим перпендикуляром. Тоді, наприклад, маємо, що координата x_0 визначається наступними рівняннями: $3t - 7 = 2t + x_0$, $t + 1 = 2t + x_0$. Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо $t = 4$ та $x_0 = -3$. Аналогічно знаходимо: $y_0 = 1$, $z_0 = -1$.

Завдання для самостійної роботи:

N 915, 918, 927, 947, 964 (2, 4), 984, 987, 1006, 1017, 1020.

4. Криві другого порядку

- *Рівняння*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{1}$$

  визначає коло радіуса R із центром $O(a; b)$.

- *Нормальне рівняння прямої має такий вигляд: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, де α – полярний кут нормалі до прямої, а p – відстань від прямої до початку координат. Якщо позначити через d відстань від точки M^* до даної прямої, то відхиленням δ точки M^* від прямої називається число $+d$, якщо дана точка і початок координат лежать по різні боки від даної прямої, та $-d$, якщо дана точка і* *початок координат розташовані по один бік від даної прямої. Відхилення δ точки $M^*(x^*; y^*)$ від даної прямої може бути обчислене за такою формулою:*

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p. \tag{2}$$

Загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$ приводиться до нормального вигляду множенням на нормуючий множник $\mu = = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак нормуючого множника вибирається протилежним до знака вільного члена рівняння, яке нормується.

- *Рівняння*

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

  визначає еліпс із півосями a і b ($a > b$) та фокусами $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
  Число

  $$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4}$$

  де a, велика піввісь, називається ексцентриситетом еліпса. Очевидно, $\varepsilon < 1$ (для кола $\varepsilon = 0$).
  Якщо еліпс визначається рівнянням (4.3) і $a > b$, то прямі

  $$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{та} \quad x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{5}$$

  називаються директрисами еліпса.
  Фокальні радіуси довільної точки $M(x, y)$ еліпса обчислюються за такими формулами:

  $$|F_1M| = r_1 = a + \varepsilon x, \qquad |F_2M| = r_2 = a - \varepsilon x. \tag{6}$$

- *Рівняння*

  $$y^2 = 2px \tag{7}$$

  є канонічним рівнянням параболи з параметром p і фокусом $F(p/2; 0)$.
  Директриса даної параболи визначається таким рівнянням:

  $$x = -\frac{p}{2}. \tag{8}$$

  Фокальний радіус довільної точки $M(x; y)$ параболи обчислюється за такою формулою:

  $$|FM| = r = x + \frac{p}{2}. \tag{9}$$

- *Рівняння*
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$
є канонічним рівнянням гіперболи з півосями a *і* b *та фокусами* $F_1(-c;0)$ *і* $F_2(c;0)$, *де* $c = \sqrt{a^2+b^2}$. *Ексцентриситет гіперболи та рівняння її директрис (як і для еліпса) відповідно визначаються формулами (4.4) та (4.5). Очевидно,* $\varepsilon > 1$.
Рівняння асимптот гіперболи такі:
$$y = -\frac{b}{a}x, \qquad y = \frac{b}{a}x. \tag{11}$$
Фокальні радіуси $r_1 = |F_1M|$ *та* $r_2 = |F_2M|$ *точки* $M(x;y)$ *правої вітки гіперболи обчислюються за такими формулами:*
$$r_1 = \varepsilon x + a, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \tag{12}$$
а точки $M(x;y)$ *лівої вітки – за такими:*
$$r_1 = -\varepsilon x - a, \qquad r_2 = -\varepsilon x + a. \tag{13}$$

- *Полярне рівняння для еліпса, однієї вітки гіперболи та параболи однакове за формою і має наступний вигляд:*
$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}, \tag{14}$$
де ρ, θ *– полярні координати довільної точки лінії,* p *– фокальний параметр,* ε *– ексцентриситет (у випадку параболи* $\varepsilon = 1$*).*

- *Загальне рівняння лінії другого порядку має такий вигляд:*
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{15}$$

- *Точка* $S(x_0;y_0)$ *є центром лінії, визначеної рівнянням (4.15), тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівнянням:*
$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{cases} \tag{16}$$
Якщо визначник цієї системи (дискримінант старших членів) $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ *(ознака центральної лінії другого порядку), то координати центра можуть бути обчислені за наступними формулами:*
$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

Рівняння (4.15) називаєтьcя еліптичним, якщо $\delta > 0$; гіперболічним, якщо $\delta < 0$; і параболічним, якщо $\delta = 0$.

- *Якщо $S(x_0; y_0)$ – центр лінії другого порядку (4.15), то внаслідок перетворення координат $x = \tilde{x} + x_0$, $y = \tilde{y} + y_0$ (що відповідає переносу початку координат у центр лінії) її рівняння набуває такого вигляду:*

$$A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0, \tag{18}$$

де $\tilde{F} = Dx_0 + Ey_0 + F$, *або* $\tilde{F} = \Delta/\delta$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

- *При перетворенні координат*

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ \tilde{y} &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned} \tag{19}$$

що відповідає повороту осей на кут α, рівняння (4.18) лінії другого порядку в нових координатах спрощується і набуває наступного вигляду:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + \tilde{F} = 0, \tag{20}$$

де $A' \neq 0$, $C' \neq 0$.
Кут α повороту осей координат визначаєтьcя таким рівнянням:

$$B\mathrm{tg}^2\alpha - (C - A)\mathrm{tg}\alpha - B = 0, \quad \textit{або} \quad \mathrm{ctg}2\alpha = (A - C)/(2B). \tag{21}$$

Між коефіцієнтами рівнянь (4.18) та (4.20) існують співвідношення

$$A'C' = AC - B^2 \quad \textit{та} \quad A' + C' = A + C, \tag{22}$$

які дозволяють визначити коефіцієнти A' і C', не проводячи безпосередньо перетворення координат.

- *Середини паралельних хорд лінії другого порядку лежать на одній прямій, яка називаєтьcя її діаметром. Діаметр, який ділить навпіл яку-небудь хорду, називаєтьcя спряженим цій хорді. Усі діаметри еліпса та гіперболи проходять через їхній центр. Діаметр, спряжений хордам із кутовим коефіцієнтом k, відповідно визначаєтьcя наступним рівнянням:*

– *для еліпса (4.3) та гіперболи (4.10)*

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 k} x, \tag{23}$$

де знак “$-$” відповідає еліпсу, а “$+$” – гіперболі;

– *для параболи (4.7)*

$$y = p/k. \tag{24}$$

- *Якщо один із двох діаметрів еліпса або гіперболи ділить навпіл хорди, паралельні другому, то другий діаметр ділить навпіл хорди, паралельні першому. Такі два діаметри називаються взаємно спряженими. Якщо k, k' – кутові коефіцієнти двох взаємно спряжених діаметрів еліпса (4.3), або гіперболи (4.10), то*

$$kk' = \mp \frac{b^2}{a^2}, \tag{25}$$

де знак “$-$” відповідає еліпсу, а “$+$” – гіперболі.

Задача 34

Вивести рівняння геометричного місця точок (ГМТ), однаково віддалених від координатних осей.
Розв'язок:

Відстані від шуканої точки $M(x; y)$ до координатних осей Ox та Oy дорівнюють модулям її ординати та абсциси відповідно. Тому згідно з умовою задачі рівняння геометричного місця точок має такий вигляд: $|y| = |x|$, або, знявши модуль, $y = \pm x$.

Задача 35

Із точки $P(6; -8)$ проведені всі можливі промені до перетину з віссю абсцис. Скласти рівняння геометричного місця їхніх середин.
Розв'язок:

Візьмемо довільну точку $M(x; 0)$ на осі абсцис. Середина відрізка MP має такі координати: $C(\frac{x+6}{2}; \frac{0-8}{2})$. Тому шукане геометричне місце точок є пряма $y = -4$.

Задача 36

Дано рівняння кола $x^2+y^2=25$. Скласти рівняння геометричного місця середин тих хорд цього кола, довжина яких дорівнює 8.

Розв'язок:

Шукане геометричне місце точок, очевидно, є колом із центром, що збігається з центром $O(0;0)$ даного кола, і радіусом, який дорівнює відстані від центра заданого кола до його хорди, тобто: $r=\sqrt{5^2-4^2}=3$. Звідси шукане рівняння (див. (4.1)) має такий вигляд: $x^2+y^2=9$.

Задача 37

Скласти рівняння кола, яке має центр на прямій $2x+y=0$ і дотикається до прямих $4x-3y+10=0,\ 4x-3y-30=0$.

Розв'язок:

Очевидно прямі, які дотикаються до кола, паралельні, тому відстань між ними дорівнює діаметру кола: $D=8$. Тоді центр кола є точкою перетину прямих: $2x+y=0$ та $4x-3y-10=0$ (остання паралельна дотичним і рівновіддалена від них). Звідси координати центра $O(1;-2)$ і згідно з (4.1) рівняння кола $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Задача 38

Написати рівняння кола, яке проходить через точку $A(-1;5)$ і дотикається двох прямих, що перетинаються: $3x+4y-35=0,\ 4x+3y+14=0$.

Розв'язок:

Центр кола $O(x;y)$ має бути рівновіддаленим від даних прямих і точки A. Причому відхилення точок O і A від кожної з двох заданих прямих мають бути однакові за знаком. Ураховуючи вищесказане та використовуючи (4.2), отримуємо відносно невідомих x і y наступну систему двох рівнянь: $\frac{1}{5}(3x+4y-35)=-\frac{1}{5}(4x+3y+14)=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}=R$, де R – радіус кола. Звідси отримуємо два розв'язки: $x_1=-\frac{202}{49}$, $y_1=\frac{349}{49}$, $R_1=\frac{185}{49}$ та $x_2=2$, $y_2=1$, $R_2=5$. Використовуючи (4.1), легко отримати шукані рівняння двох кіл.

Задача 39

Які з нижченаведених рівнянь визначають коло? Знайти центр C і радіус R кожного з них:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$;

2) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$;

3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Розв'язок:

1) Згідно з (4.1) рівняння описує коло з центром $C(5;-2)$ і радіусом $R=5$.

2) Згідно з (4.1) рівняння визначає єдину точку $C(5;-2)$.

3) Виділивши повний квадрат, отримуємо рівняння $(x-1)^2+(y+$ $+2)^2=25$, яке описує коло з центром $C(1;-2)$ і радіусом $R=5$.

Задача 40

Скласти рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=5$ у точці $A(-1;2)$.
Розв'язок:

Неважко переконатися, що точка A належить даному колу з центром $O(0;0)$ і радіусом $\sqrt{5}$. Очевидно, $(\mathbf{a},\mathbf{OA})=0$, де $\mathbf{a}=(l,m)$ – направляючий вектор дотичної. Використовуючи формулу (3.10) канонічного рівняння прямої, що проходить через точку A і має направляючий вектор $\mathbf{a}$, легко отримати рівняння дотичної, а саме: $x-2y+5=0$.

Задача 41

Із точки $A(5/3;-5/3)$ проведені дотичні до кола $x^2+y^2=5$. Отримати їхні рівняння.
Розв'язок:

Позначимо точку дотику через $M(x_0;y_0)$, де відповідно x_0, y_0 задовольняють рівнянню кола. Враховуючи, що $(\mathbf{OM},\mathbf{AM})=0$, де $O(0;0)$ – центр кола, отримуємо дві можливі точки дотику: $M_1(1;-2)$, $M_2(2;-1)$. Враховуючи (3.11), неважко отримати відповідно два можливих рівняння дотичної, а саме: $x-2y-5=0$ і $2x-y-5=0$.

Задача 42

Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротші відстані до двох даних кіл $(x+3)^2+y^2=1$ та $(x-3)^2+y^2=81$ рівні між собою.
Розв'язок:

Перше рівняння описує коло з центром $O_1(-3;0)$ і радіусом $r_1=1$, а друге – коло з центром $O_2(3;0)$ і радіусом $r_2=9$, яке повністю містить усередині себе перше коло. Оскільки найкоротша відстань до кола вимірюється за прямою, що проходить через його центр, то шукане ГМТ знаходиться тільки між цими колами, і не може попадати ні всередину першого, ні ззовні другого кола. Тоді відстані від шуканої точки $M(x; y)$ до першого і другого кола відповідно дорівнюють: $l_1 = |\mathbf{O}_1\mathbf{M}| - r_1$ та $l_2 = r_2 - |\mathbf{O}_2\mathbf{M}|$. Використовуючи (2.1), із рівняння $l_1 = l_2$ отримуємо, що шукане ГМТ описується рівнянням еліпса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Задача 43

Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

1) його півосі дорівнюють 5 і 2;

2) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами — $2c = 10$;

3) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет — $\varepsilon = 3/5$.

Розв'язок:

1) Використовуючи (4.3) і враховуючи, що $a = 5$, $b = 2$, отримуємо шукане рівняння еліпса, а саме: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

2) Оскільки $2b = 24$, то велика піввісь еліпса дорівнює $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 13$. Звідки отримуємо таке рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$.

3) Оскільки $2a = 20$, то із (4.4) знаходимо піввідстань між фокусами еліпса $c = 6$ і, відповідно, його малу піввісь: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 8$. Тоді шукане рівняння має наступний вигляд: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

Задача 44

Визначити півосі таких еліпсів:

1) $x^2/4 + y^2 = 1$;

2) $x^2 + 5y^2 = 15$;

3) $9x^2 + 25y^2 = 1$.

Розв'язок:

1) Використовуючи (4.3), отримуємо $a = 2$, $b = 1$.
2) Розділивши дане рівняння на 15, легко бачити, що $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{3}$.
3) Приймаючи до уваги (4.3), отримуємо: $a = 1/3$, $b = 1/5$.

Задача 45

Обчислити відстань від фокуса $F(c; 0)$ еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ до односторонньої з цим фокусом директриси.
Розв'язок:

Оскільки фокус еліпса лежить на осі абсцис, то $a > b$, а одностороння з цим фокусом директриса перпендикулярна до осі абсцис. Тому шукана відстань, використовуючи (4.4), (4.5), дорівнює: $l = \dfrac{a^2}{c} - c = \dfrac{b^2}{c}$.

Задача 46

Переконавшись, що точка $M_1(-4; 2.4)$ належить еліпсу $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, визначити фокальні радіуси точки M_1.
Розв'язок:

Прямою підстановкою переконуємося, що координати точки M_1 задовольняють рівнянню еліпса. Із (4.3), (4.4) отримуємо: $a = 5$, $\varepsilon = 3/5$. Використовуючи (4.6), знаходимо фокальні радіуси точки M_1: $r_1 = 2.6$, $r_2 = 7.4$.

Задача 47

Вивести рівняння ГМТ, для яких найкоротші відстані до даного кола $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ і до даної прямої $x + 2 = 0$ рівні між собою.
Розв'язок:

Нехай $M(x; y)$ довільна точка шуканого ГМТ. Оскільки коло з центром $O(5; 0)$ і радіусом $R = 3$ та пряма не перетинаються, то точка M не може попадати всередину кола або знаходитися на ньому. Очевидно, відстань від точки M до кола дорівнює $l_1 = |\mathbf{OM}| - R$ і до заданої прямої $l_2 = x + 2$. Із умови $l_1 = l_2$ отримується, що шукане ГМТ задовольняє рівнянню параболи $y^2 = 20x$.

Задача 48

Знайти фокус F і рівняння директриси параболи $y^2 = 24x$.
Розв'язок:

Використовуючи (4.7) і (4.8), неважко бачити, що парабола має фокус $F(6;0)$ і відповідно рівняння директриси має такий вигляд: $x = -6$.

Задача 49

Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки M дорівнює 6.
Розв'язок:

Підставивши ординату точки M у рівняння параболи, знаходимо, що її абсциса дорівнює 3. Згідно з (4.9) фокальний радіус точки M дорівнює 6.

Задача 50

Скласти рівняння параболи, якщо задані її фокус $F(4;3)$ і директриса $y + 1 = 0$.
Розв'язок:

Для довільної точки $M(x;y)$ параболи відстань до фокуса F дорівнює відстані до директриси. Згідно з (4.2) відстань від точки M до директриси дорівнює: $l = |y+1|$. Із умови $l = |\mathbf{MF}|$ отримуємо наступне рівняння параболи: $y = \dfrac{1}{8}x^2 - x + 3$.

Задача 51

Дано вершину параболи $A(-2;-1)$ та рівняння її директриси: $x + 2y - 1 = 0$. Скласти рівняння цієї параболи.
Розв'язок:

Оскільки вісь параболи проходить через її вершину A перпендикулярно до директриси, то вона описується рівнянням $y = 2x + 3$ і перетинає директрису в точці $B(-1;1)$. Вершина A параболи ділить відрізок BF навпіл, звідки координати фокуса параболи $F(-3;-3)$. Відстань від довільної точки $M(x;y)$ параболи до фокуса дорівнює відстані l до директриси. Тому з умови $l = |\mathbf{MF}|$, використовуючи (2.1) та (4.2), отримуємо рівняння параболи у наступному вигляді: $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$.

Задача 52

Вивести рівняння ГМТ, для яких відношення відстані до даної точки $F(-5;0)$ до відстані до даної прямої $5x+16=0$ дорівнює $5/4$.
Розв'язок:

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка лінії. Із умови $|\mathbf{MF}| = 5l/4$, де l – відстань від точки M до заданої прямої. Використовуючи (4.2), легко бачити, що $l = |x+16/5|$. Звідки шукане ГМТ описується таким рівнянням гіперболи: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Задача 53

Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) півосі a і b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.
Розв'язок:

Розділимо рівняння гіперболи на 144.

1) Згідно з (4.10) матимемо $a=3$ і $b=4$.

2) Очевидно фокуси гіперболи мають такі координати: $F_1(-5;0)$ і $F_2(5;0)$.

3) Із (4.4) слідує, що ексцентриситет гіперболи дорівнює: $\varepsilon = 5/3$.

4) Із (4.11) слідує, що гіпербола має асимптоти: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$.

5) Згідно з (4.5) рівняння директрис мають такий вигляд: $x = \pm 9/5$.

Задача 54

Знайти точки гіперболи $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 7.
Розв'язок:

Використовуючи (4.10), знаходимо координати лівого фокуса гіперболи $F_1(-5;0)$. Нехай $M(x;y)$ шукана точка гіперболи. Розв'язуючи рівняння $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| = 7$ сумісно з рівнянням гіперболи, отримуємо, що шуканих точок дві, а саме: $M_1(-6;-4\sqrt{3})$ та $M_2(-6;4\sqrt{3})$.

Задача 55

Довести, що площа паралелограма, обмеженого асимптотами гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ та прямими, проведеними через довільну її точку паралельно асимптотам, є величина постійна, що дорівнює $ab/2$.
Розв'язок:

Очевидно, прямі, які проходять через довільну точку $M(x_0; y_0)$ гіперболи паралельно її асимптотам, описуються таким рівнянням: $y = \pm\frac{b}{a}(x - -x_0) + y_0$. Розглядаючи це рівняння сумісно з рівняннями асимптот гіперболи, отримуємо координати вершин шуканого паралелограма: $O(0; 0)$, $M(x_0; y_0)$, $A(\frac{x_0}{2} + \frac{a}{2b}y_0; \frac{b}{2a}x_0 + \frac{y_0}{2})$, $B(\frac{x_0}{2} - \frac{a}{2b}y_0; -\frac{b}{2a}x_0 + \frac{y_0}{2})$. Використовуючи (2.3), знаходимо, що площа паралелограма $OAMB$ дорівнює: $S = ab/2$.

Задача 56

Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в її точці $M_1(x_1; y_1)$.
Розв'язок:

Якщо $M_1(x_1; y_1)$ – точка дотику, то рівняння дотичної має такий вигляд: $y = k(x - x_1) + y_1$. Кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній функції в точці дотику, тобто: $k = y'_x(x_1)$. Продиференціювавши по x рівняння гіперболи, отримуємо: $k = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_1}{y_1}$. Ураховуючи, що x_1 та y_1 задовольняють рівнянню гіперболи, отримуємо рівняння дотичної у такому вигляді: $\dfrac{x_1}{a^2}x - \dfrac{y_1}{b^2}y = 1$.

Задача 57

Із правого фокуса гіперболи $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ під кутом α ($\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$) до осі Ox напрямлений промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Дійшовши до гіперболи, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.
Розв'язок:

Згідно з (4.10) фокуси гіперболи лежать у точках $F_1(-3; 0)$ і $F_2(3; 0)$. Рівняння прямої, на якій лежить промінь, що вийшов з фокуса F_2, має такий вигляд: $y = 2x - 6$. Розглядаючи сумісно отримане рівняння прямої з рівнянням гіперболи та враховуючи, що кут α, під яким промінь світла напрямлений до осі Ox, лежить у межах $\pi < \alpha < 3\pi/2$, знаходимо координати точки $M(5/2; -1)$, в якій промінь попадає на гіперболу. Згідно з властивостями гіперболи відбитий промінь лежатиме на прямій F_1M. Використовуючи (3.11), отримуємо рівняння прямої F_1M у такому вигляді: $2x + 11y + 6 = 0$.

Задача 58

Встановити, які з наступних ліній є центральними (тобто мають єдиний центр), які не мають центра, які мають нескінченно багато центрів:

1) $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12y - 7 = 0$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;
3) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$;
4) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$.

Розв'язок:

1) Використовуючи (4.15) та (4.16), неважко бачити, що дана лінія другого порядку має єдиний центр, а саме: $S(-3/2; 3/2)$, тобто є центральною.
2) Очевидно, система (4.16) розв'язку не має, а відповідна лінія другого порядку не є центральною.
3) Із (4.16) слідує, що крива є центральною з центром у точці $S(-13/6; 1/3)$.
4) Із (4.16) отримуємо, що крива другого порядку не має центра.

Задача 59

Встановити, що наступні ліні є центральними, і для кожної з них знайти координати центра:

1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;
2) $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$.

Розв'язок:

Використовуючи (4.16), (4.17), переконуємось, що дана лінія другого порядку є центральною з центром у точці: 1) $S(3; -2)$; 2) $S(0; 0)$.

Задача 60

Встановити, що наступні рівняння визначають центральні лінії; перетворити кожне з них шляхом переносу початку координат у центр:

1) $3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$;

2) $4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$.

Розв'язок:

1) Використовуючи (4.16), (4.17), знаходимо, що лінія другого порядку має центр $S(-1/3; -1)$. Унаслідок перетворення координат $x = \tilde{x} - 1/3$, $y = \tilde{y} - 1$, враховуючи (4.18), рівняння лінії набуде такого вигляду: $9\tilde{x}^2 - 18\tilde{x}\tilde{y} + 6\tilde{y}^2 + 2 = 0$.

2) Розв'язавши систему (4.16), знаходимо центр лінії другого порядку $S(-1; 3)$. Зробивши перетворення координат $x = \tilde{x} - 1$, $y = \tilde{y} + 3$ і врахувавши (4.18), отримаємо рівняння лінії у наступному вигляді: $4\tilde{x}^2 + 6\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2 - 5 = 0$.

Задача 61

При яких значеннях m і n рівняння $mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 13 = 0$ визначає:

а) центральну лінію;

б) лінію без центра;

в) лінію, яка має нескінченно багато центрів.

Розв'язок:

а) Необхідно, щоб визначник системи (4.16) (дискримінант старших членів рівняння лінії) був відмінний від нуля. Це досягається, коли $m \neq 4$, а n – може бути довільним.

б) У цьому випадку система (4.16) має бути несумісна. Необхідно, щоб її визначник дорівнював нулеві, тобто $m = 4$. А визначники, що стоять у чисельнику у виразах для x_0 та y_0 (див. (4.17)), не повинні водночас дорівнювати нулеві, тобто $n \neq 6$.

в) Система (4.16) повинна мати нескінченне число розв'язків. Визначник системи і визначники, що стоять у чисельнику у виразах для x_0 та y_0 (див. (4.17)), повинні водночас дорівнювати нулеві, тобто $m = 4$, $n = 6$.

Задача 62

Визначити тип кожного з наступних рівнянь; кожне з них шляхом паралельного переносу осей координат звести до простішого виду; встановити, які геометричні образи вони визначають:

1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

2) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$;

3) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$;

Розв'язок:

1) Визначник системи (4.16) $\delta > 0$, тобто рівняння є еліптичним, а відповідна лінія другого порядку має центр $S(5; -2)$ (див. (4.17)). Перемістивши в центр лінії початок координат, використовуючи (4.18), легко отримати таке рівняння еліпса: $\dfrac{\tilde{x}^2}{9} + \dfrac{\tilde{y}^2}{4} = 1$.

2) Оскільки визначник системи (4.16) $\delta > 0$, то рівняння описує еліпс із центром $S(-1; 1)$. Перемістивши початок координат у центр лінії, згідно з (4.18) отримуємо рівняння $\dfrac{\tilde{x}^2}{4} + \dfrac{\tilde{y}^2}{9} = -1$, яке не визначає жодного геометричного образу та є рівнянням уявного еліпса.

3) Аналогічно отримуємо, що $\delta > 0$, тобто рівняння описує еліпс із центром $S(-2; 1)$. Згідно з (4.18), перемістивши початок координат у центр S лінії, отримуємо її рівняння у такому вигляді: $2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 0$. Отримане рівняння є рівнянням виродженого еліпса, тобто визначає єдину точку – його центр.

Задача 63

Кожне з наступних рівнянь привести до канонічного виду; визначити тип кожного з них; встановити, які геометричні образи вони визначають:

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

2) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

3) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

Розв'язок:

1) Розв'язуючи систему (4.16), отримуємо $\delta < 0$, тобто рівняння є гіперболічним, а відповідна йому лінія другого порядку є гіпербола з центром $S(2; -1)$. Виконуючи перетворення координат $x = \tilde{x} + 2$, $y = \tilde{y} - 1$, що відповідає переносу початку координат у центр лінії, використовуючи при цьому (4.18), отримуємо рівняння лінії у наступному вигляді: $3\tilde{x}^2 + 10\tilde{x}\tilde{y} + 3\tilde{y}^2 - 8 = 0$. Отримане рівняння лінії спрощується при перетворенні координат, а саме: $\tilde{x} = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, що відповідає повороту осей на кут $\alpha = \pi/4$ (див. (4.21)). Використовуючи (4.20), (4.22) і враховуючи, що в нових координатах x', y' фокуси гіперболи мають лежати на осі абсцис, отримуємо канонічне рівняння гіперболи такого виду: $x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1$.

2) Із (4.16), (4.17) отримуємо, що рівняння описує гіперболу ($\delta < 0$) із центром $S(3; -4)$. Унаслідок перетворення координат $x = \tilde{x} + 3$, $y = \tilde{y} - 4$ згідно з (4.18) рівняння лінії набуває наступного вигляду: $4\tilde{x}\tilde{y} + 3\tilde{y}^2 - 36 = 0$. Далі здійснюємо перетворення координат виду $\tilde{x} = \frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$, $\tilde{y} = \frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$, що відповідає повороту осей на кут α $(0 < \alpha < \pi/2)$, де згідно з (4.21) $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Ураховуючи, що в нових координатах x' і y' фокуси гіперболи мають лежати на осі абсцис, і використовуючи (4.22), отримуємо таке канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{36} = 1$.

3) Аналогічно попереднім двом задачам рівняння описує гіперболу $(\delta < 0)$ із центром $S(-2; 0)$. При перетворенні координат $x = \tilde{x} - 2$, $y = \tilde{y}$ рівняння лінії набуває такого вигляду: $7\tilde{x}^2 + 6\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2 = 0$. Унаслідок перетворення координат $\tilde{x} = \frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y} = \frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$, що відповідає повороту осей на кут α $(-\pi/2 < \alpha < 0)$, де $\operatorname{tg}\alpha = -3$, отримуємо рівняння $x'^2 - 4y'^2 = 0$, яке визначає вироджену гіперболу, тобто пару прямих, що перетинаються.

Задача 64

Не проводячи перетворення координат, встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає еліпс, і знайти величини його півосей:

1) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$;

2) $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$.

Розв'язок:

1) Визначник системи (4.16) $\delta > 0$, тобто рівняння є еліптичним, а лінія, яку воно описує, — еліпс. Із (4.20) випливає, що півосі еліпса дорівнюють: $a^2 = -\tilde{F}/A'$, $b^2 = -\tilde{F}/C'$. Ураховуючи (4.18), отримуємо $\tilde{F} = -45$. Використовуючи (4.22), знаходимо $A' = 5$, $C' = 45$. Звідки півосі еліпса дорівнюють: $a = 3$ і $b = 1$.

2) Аналогічно попередній задачі, оскільки визначник системи (4.16) $\delta > 0$, то рівняння визначає еліпс. Із (4.18) отримуємо, що $\tilde{F} = -72$. Використовуючи (4.22), матимемо: $A' = 8$, $C' = 18$. Звідки знаходимо, що півосі еліпса дорівнюють: $a = 3,\ b = 2$.

Задача 65

Не проводячи перетворення координат, встановити, що рівняння $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$ визначає єдину точку (вироджений еліпс), та знайти її координати.

Розв'язок:

Розв'язуючи систему (4.16), встановлюємо, що її визначник $\delta > 0$, тобто рівняння визначає еліпс із центром $S(2; 3)$. Із (4.18) отримуємо $\tilde{F} = 0$. Використовуючи (4.22), неважко переконатися, що $A', C' \neq 0$. Тому згідно з (4.20) наше рівняння визначає вироджений еліпс — єдину точку S.

Задача 66

Встановити, що рівняння $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$ є параболічним; привести його до найпростішого виду; встановити, який геометричний образ воно визначає.

Розв'язок:

Розв'язуючи систему (4.16), встановлюємо, що рівняння є параболічним ($\delta = 0$), а відповідна лінія має нескінченно багато центрів. Унаслідок перетворення координат $x = \frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}$, що відповідає повороту осей на кут α $(0 < \alpha < \pi/2)$, де згідно з (4.21) $\operatorname{tg}\alpha = 2/3$, рівняння лінії має такий вигляд: $(x' - \frac{4}{\sqrt{13}})^2 = 1$. Роблячи перетворення координат $x' = x'' + \frac{4}{\sqrt{13}}$, $y' = y''$, отримуємо рівняння $x''^2 = 1$, що визначає вироджену параболу – пару паралельних прямих.

Задача 67

Те саме завдання, що і в попередній задачі, виконати для наступного рівняння: $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

Розв'язок:

Як і в попередній задачі, рівняння є параболічним ($\delta = 0$), а відповідна лінія має нескінченно багато центрів. При перетворенні координат $x = \frac{3x'+2y'}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{-2x'+3y'}{\sqrt{13}}$, що відповідає повороту осей на кут α ($-\pi/2 < \alpha < 0$), де згідно з (4.21) $\operatorname{tg}\alpha = -2/3$, рівняння лінії має такий вигляд: $(y' - \frac{1}{\sqrt{13}})^2 = 0$. Унаслідок перетворення $x' = x''$, $y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{13}}$ отримуємо рівняння виродженої параболи $y''^2 = 0$, що описує пару прямих, які злились та збігаються з віссю абсцис.

Задача 68

Не проводячи перетворення координат, встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає параболу, і знайти параметр цієї параболи:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$.

Розв'язок:

Нехай рівняння (4.15) лінії другого порядку визначає параболу ($\delta = AC - B^2 = 0$). Неважко переконатися, що внаслідок перетворення координат (4.19) (кут α задовольняє рівнянню (4.21)) і подальшого зсуву осей, отримується канонічне рівняння параболи. Параметр параболи у випадку $\Delta \neq 0$ визначається такою формулою: $p = \sqrt{\frac{-\Delta}{(A+C)^3}}$, де Δ – знаходимо із формули (4.18).

1) Із системи (4.16) випливає, що рівняння є параболічним ($\delta = 0$), а відповідна лінія не має центра. Використовуючи (4.18), знаходимо $\Delta = -140625$, звідки параметр параболи $p = 3$.

2) Як і в попередній задачі, рівняння є параболічним, а відповідна лінія не має центра. Очевидно, $\Delta = -16$, звідки $p = \sqrt{2}$.

Задача 69

Дано рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Скласти його полярне рівняння, вважаючи, що напрямок полярної осі збігається з додатним напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться в лівому фокусі еліпса.

Розв'язок:

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. Згідно з (4.6) фокальний радіус точки M дорівнює $|\mathbf{F}_1\mathbf{M}| = a + \varepsilon x = \rho$, де $x = \rho\cos\theta - c$. Ураховуючи (4.3), (4.4), маємо $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$, де фокальний параметр еліпса $p = a - \varepsilon c = b^2/a$. Звідки рівняння еліпса в полярних координатах таке: $\rho = \frac{16}{5-3\cos\theta}$.

Задача 70

Дано рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Скласти полярне рівняння її правої вітки, вважаючи, що напрямок полярної осі збігається з додатним напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться в правому фокусі гіперболи.
Розв'язок:

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка правої вітки гіперболи. Її фокальний радіус (4.12) $|\mathbf{F}_2\mathbf{M}| = \varepsilon x - a = \rho$, де $x = \rho\cos\theta + c$. Ураховуючи (4.10), отримуємо: $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$, де фокальний параметр гіперболи $p = \varepsilon c - a = b^2/a$. Звідки $\rho = \frac{9}{4-5\cos\theta}$.

Задача 71

Дано рівняння параболи $y^2 = 6x$. Скласти її полярне рівняння, вважаючи, що напрямок полярної осі збігається з додатним напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи.
Розв'язок:

Позначимо через $M(x;y)$ довільну точку параболи. Фокальний радіус точки M згідно з (4.9) дорівнює $|\mathbf{FM}| = x + \frac{p}{2} = \rho$, де $x = \frac{p}{2} + \rho\cos\theta$. Звідси полярне рівняння параболи $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$, де p – параметр параболи, $p = 3$.

Задача 72

Визначити, які лінії описують наступні рівняння в полярних координатах:

1) $\rho = \frac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$;

2) $\rho = \frac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\theta}$;

3) $\rho = \frac{1}{3-3\cos\theta}$.

Розв'язок:

1) Приймаючи до уваги загальне полярне рівняння (4.14) лінії другого порядку, матимемо: $p = 5$, $\varepsilon = 1/2$. Оскільки $\varepsilon < 1$, то дане рівняння описує еліпс.

2) Згідно з (4.14) маємо: $p = 10$, $\varepsilon = 3/2$. Оскільки $\varepsilon > 1$, то рівняння описує вітку гіперболи.

3) Ураховуючи (4.14), отримуємо $p = 1/3$, $\varepsilon = 1$, значить рівняння описує параболу.

Задача 73

Встановити, що рівняння $\rho = \dfrac{144}{13 - 5\cos\theta}$ визначає еліпс та знайти його півосі.
Розв'язок:

Використовуючи (4.14), маємо: $p = 144/13$, $\varepsilon = 5/13 < 1$. Згідно з задачею 69 фокальний параметр еліпса $p = b^2/a$. Ураховуючи (4.3), (4.4), неважко встановити, що $a = 13$, $b = 12$.

Задача 74

Встановити, що рівняння $\rho = \dfrac{21}{5 - 2\cos\theta}$ визначає еліпс, і скласти полярні рівняння його директрис.
Розв'язок:

Згідно з (4.14) фокальний параметр лінії $p = 21/5$, ексцентриситет $\varepsilon = 2/5 < 1$. Очевидно задане рівняння описує еліпс. Ураховуючи (4.3), (4.4) та результат задачі 69, легко отримати: $a = 5$, $b = \sqrt{21}$, $c = 2$. Очевидно полюс знаходиться в лівому фокусі еліпса $F_1(-2; 0)$. Оскільки $x = \rho\cos\theta - c$, то рівняння директрис еліпса згідно з (4.5) у полярних координатах мають такий вигляд: лівої — $\rho = -\frac{21}{2\cos\theta}$, правої — $\rho = \frac{29}{2\cos\theta}$.

Задача 75

Встановити, що рівняння $\rho = \dfrac{16}{3 - 5\cos\theta}$ визначає праву вітку гіперболи, і скласти полярні рівняння директрис та асимптот цієї гіперболи.
Розв'язок:

Очевидно, $p = 16/3$, $\varepsilon = 5/3 > 1$. Ураховуючи (4.10) та результати задачі 70, отримуємо: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, а полюс, очевидно, знаходиться в правому фокусі гіперболи $F_2(5; 0)$. Оскільки $x = \rho\cos\theta + c$, то рівняння директрис гіперболи згідно з (4.5) у полярних координатах мають такий вигляд: лівої – $\rho = -\frac{34}{5\cos\theta}$, правої – $\rho = -\frac{16}{5\cos\theta}$. Відповідно, рівняння (4.11) асимптот гіперболи мають наступний вигляд: $\rho = \frac{20}{3\sin\theta - 4\cos\theta}$, $\rho = -\frac{20}{3\sin\theta + 4\cos\theta}$.

Задача 76

Скласти рівняння діаметра еліпса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, що проходить через середину його хорди, яка відтинається від прямої: $2x - y - 3 = 0$.

Розв'язок:

Використовуючи (4.3) та (4.23), отримуємо рівняння діаметра $8x + 25y = 0$.

Задача 77

Скласти рівняння діаметра гіперболи $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, що проходить через середину її хорди, яка відтинається від прямої: $2x - y + 3 = 0$.

Розв'язок:

Використовуючи (4.10) та (4.23), отримуємо рівняння діаметра у такому вигляді: $2x - 5y = 0$.

Задача 78

Скласти рівняння діаметра параболи $y^2 = 12x$, що проходить через середину її хорди, яка відтинається від прямої: $3x + y - 5 = 0$.

Розв'язок:

Згідно з (4.7) та (4.24) рівняння діаметра параболи має такий вигляд: $y = -2$.

Задача 79

Скласти рівняння двох взаємно спряжених діаметрів еліпса $x^2 + 3y^2 = 1$, з яких один перпендикулярний до прямої $3x + 2y - 7 = 0$.

Розв'язок:

Очевидно, усі діаметри еліпса проходять через його центр $O(0;0)$. Діаметр, що перпендикулярний до прямої, має кутовий коефіцієнт $k = 2/3$, і відповідно його рівняння таке: $2x - 3y = 0$. Використовуючи (4.25), отримуємо рівняння діаметра, спряженого першому, у наступному вигляді: $x + 2y = 0$.

Задача 80

Скласти рівняння двох спряжених діаметрів гіперболи $x^2 - 4y^2 = 4$, з яких один проходить через точку $A(8;1)$.
Розв'язок:

Усі діаметри гіперболи проходять через її центр $O(0;0)$. Тому діаметр, що проходить через точку A, задається таким рівнянням: $x - 8y = 0$. Згідно з (4.25) спряжений йому діаметр описується наступним рівнянням: $2x - y = 0$.

Задача 81

Дана парабола $y^2 = 20x$. Скласти рівняння її хорди, яка проходить через точку $A(2;5)$ та ділиться точкою A навпіл.
Розв'язок:

Очевидно діаметр параболи, спряжений хорді, задається рівнянням $y = 5$. Згідно з (4.24) кутовий коефіцієнт хорди дорівнює 2, а її рівняння має наступний вигляд: $2x - y + 1 = 0$.

Завдання для самостійної роботи:

N 392, 398 (1, 3, 5, 7, 9), 410, 424, 449, 513, 519, 540, 580, 590, 596, 628 (2), 629 (2), 634, 637, 639, 644, 653, 657, 663, 665 (2, 4), 667, 674 (2, 4), 675 (1, 3), 677 (2, 4, 6), 684, 689 (1), 690 (1), 692.

5. Поверхні обертання

- *Рівняння*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$
є канонічним рівнянням еліпсоїда з півосями a, b, c.

- *Гіперболоїдами називають поверхні, які визначаються такими рівняннями:*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{3}$$
Рівняння (5.2) визначає однополий гіперболоїд, а рівняння (5.3) – двополий.

- *Однополий гіперболоїд (5.2) має дві системи прямолінійних твірних, які визначаються наступними рівняннями:*

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{4}$$

  де α і β – деякі числа, які не дорівнюють нулеві водночас.

- *Рівняння*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \tag{5}$$

  визначає еліптичний параболоїд, а рівняння

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \tag{6}$$

  – гіперболічний параболоїд, де p і q – параметри параболоїда.

- *Рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{7}$$

  є канонічним рівнянням конуса.

- *Рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2=2px \tag{8}$$

  відповідно визначають еліптичний, гіперболічний та параболічний циліндри. Дані циліндри складаються з прямих ліній, паралельних осі Oz.

- *Рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$ в її точці $M(x_0;y_0;z_0)$ має такий вигляд:*

$$z-z_0=(x-x_0)\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M+(y-y_0)\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M. \tag{9}$$

Задача 82

Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ навколо осі Ox.

Розв'язок:

Нехай $M(X;Y;0)$ – довільна точка еліпса. При обертанні навколо осі Ox точка M описує коло радіуса $r=\sqrt{y^2+z^2}$, де $r=Y$. Для всіх точок кола координата x однакова: $x=X$. Звідки рівняння поверхні обертання має наступний вигляд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$.

Задача 83

Визначити, при якому значенні m площина $x-2y-2z+m=0$ дотикається еліпсоїда $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$.
Розв'язок:

Нехай $M(x_0;y_0;z_0)$ – точка дотику площини до еліпсоїда. Диференціюючи по x і y рівняння еліпсоїда та враховуючи (5.9), отримуємо $z'_x(M)=-\frac{x_0}{16z_0}=\frac{1}{2}$, $z'_y(M)=-\frac{y_0}{4z_0}=-1$, $m=2y_0+2z_0-x_0$. Приймаючи до уваги, що координати точки M мають задовольняти рівнянню еліпсоїда, легко отримати таке: $m=\pm 18$.

Задача 84

Коефіцієнт рівномірного стиску простору до площини yOz дорівнює $3/5$. Скласти рівняння поверхні, в яку при такому стиску перетвориться сфера $x^2+y^2+z^2=25$.
Розв'язок:

Унаслідок рівномірного стиску простору до площини yOz із коефіцієнтом $\frac{3}{5}$ матимемо: $x'=\frac{3}{5}x$, $y'=y$, $z'=z$. Звідки отримуємо рівняння еліпсоїда наступного виду: $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2+z'^2}{25}=1$.

Задача 85

Складати рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а направляюча задана такими рівняннями:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=b; \end{cases}$$

3) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases}$

Розв'язок:

1) Оскільки $\dfrac{z}{c} = 1$, то рівняння конуса таке: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

2) Оскільки $\dfrac{y}{b} = 1$, то шукане рівняння таке: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

3) Аналогічно рівняння конуса таке: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Задача 86

Довести, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ має одну спільну точку з площиною $4x - 3y + 12z - 54 = 0$, та знайти її координати.
Розв'язок:

Нехай $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка дотику до еліпсоїда площини, вектор нормалі якої має вигляд $\mathbf{n} = (4; -3; 12)$. Диференціюючи по x і y рівняння еліпсоїда та враховуючи (5.9), отримуємо: $z'_x(M) = -\frac{x_0}{9z_0} = = -\frac{1}{3}$, $z'_y(M) = -\frac{y_0}{4z_0} = \frac{1}{4}$. Якщо площина, задана в умові задачі, є дотичною до еліпсоїда, то згідно з (5.9) координати точки дотику мають задовольняти наступному рівнянню: $\frac{9}{2} = \frac{x_0}{3} - \frac{y_0}{4} + z_0$. Розглядаючи отримане рівняння сумісно з рівнянням еліпсоїда, отримуємо, що точка M єдина і має такі координати: $M(6; -2; 2)$. Значить площина, задана в умові задачі, дійсно є дотичною до еліпсоїда.

Задача 87

Довести, що двополий гіперболоїд, який визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, може бути отриманий унаслідок обертання гіперболи $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $y = 0$ навколо осі Oz і наступного рівномірного стиску простору до площини xOz.
Розв'язок:

Нехай $M(X; 0; Z)$ – довільна точка гіперболи. При обертанні навколо осі Oz точка M описує коло радіуса $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $r = X$. Для всіх точок кола координата z однакова $z = Z$. Рівняння поверхні обертання має такий вигляд: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1$. Унаслідок рівномірного стиску простору до площини xOz із коефіцієнтом стиску $q = \frac{b}{a}$ матимемо: $x' = x$,

$y' = \frac{b}{a}y$, $z' = z$. Звідки отримуємо рівняння двополого гіперболоїда, а саме: $\frac{z'^2}{c^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

Задача 88

Встановити, при яких значеннях m площина $x + mz - 1 = 0$ перетинає двополий гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = -1$: а) по еліпсу; б) по гіперболі.
Розв'язок:

Розглядаючи сумісно дані рівняння поверхонь, отримуємо таке рівняння лінії другого порядку: $(1 - \frac{1}{m^2})x^2 + y^2 + \frac{2}{m^2}x + 1 - \frac{1}{m^2} = 0$. Використовуючи (4.16), легко встановити, що отримане рівняння буде гіперболічним, якщо $|m| < 1$, та еліптичним, якщо $|m| > 1$. В останньому випадку необхідно, щоб еліпс був дійсним. Виділивши в рівнянні лінії повний квадрат і вимагаючи, щоб вільний член був від'ємним, отримуємо: $1 < |m| < \sqrt{2}$.

Задача 89

Встановити, що площина $z + 1 = 0$ перетинає однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гіперболі; знайти її півосі та вершини.
Розв'язок:

Очевидно лінія перетину є гіперболою, що задається наступними рівняннями:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = -1. \end{cases}$$

Згідно з (4.10) півосі гіперболи дорівнюють 4 і 3, а вершини мають такі координати: $A_1(-4; 0; -1)$ та $A_2(4; 0; -1)$.

Задача 90

Довести, що двополий гіперболоїд $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ має одну спільну точку з площиною $5x + 2z + 5 = 0$, та знайти її координати.
Розв'язок:

Нехай $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка дотику до двополого гіперболоїда площини, вектор нормалі якої має вигляд $\mathbf{n} = (5; 0; 2)$. Диференціюючи по x та y рівняння еліпсоїда та враховуючи (5.9), отримуємо $z'_x(M) = \frac{25x_0}{3z_0} = -\frac{5}{2}$, $z'_y(M) = \frac{25y_0}{4z_0} = 0$. Якщо площина, задана в умові задачі, є дотичною до еліпсоїда, то згідно з (5.9) координати точки дотику мають задовольняти рівнянню: $-\frac{5}{2} = \frac{5x_0}{2} + z_0$. Розглядаючи отримане рівняння сумісно з рівнянням еліпсоїда, отримуємо, що точка M єдина і має координати $M(3;0;-10)$. Значить площина, задана в умові задачі, дійсно є дотичною до двополого гіперболоїда.

Задача 91

Скласти рівняння прямолінійних твірних однополого гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, паралельних площині $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.
Розв'язок:

Направляючий вектор твірної гіперболоїда $\mathbf{l} = [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] = (\frac{\beta^2-\alpha^2}{12}; \frac{\alpha\beta}{4}; \frac{\alpha^2+\beta^2}{6})$, де $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ – вектори нормалей до площин, перетином яких є твірна (див. (5.4)). Ураховуючи, що $(\mathbf{l}, \mathbf{n}) = 0$, де $\mathbf{n} = (6;4;3)$ – вектор нормалі до площини, заданої в умові задачі, отримуємо $\beta = 0$ або $\beta = -\alpha$. Звідси отримуються два рівняння твірної: $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{-2}$ та $\frac{x+2}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$.

Задача 92

Довести, що еліптичний параболоїд, який задається рівнянням $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, може бути отриманий унаслідок обертання параболи $x^2 = 2pz$, $y = 0$ навколо осі Oz і наступного рівномірного стиску простору до площини xOz.
Розв'язок:

Нехай $M(X;0;Z)$ – довільна точка параболи. При обертанні навколо осі Oz точка M описує коло радіуса $r = \sqrt{x^2+y^2}$, де $r = X$. Для всіх точок кола координата z однакова, $z = Z$. Рівняння поверхні обертання має такий вигляд: $x^2 + y^2 = 2pz$. Унаслідок рівномірного стиску простору до площини xOz із коефіцієнтом стиску $\sqrt{\frac{q}{p}}$ матимемо: $x' = x$, $y' = \sqrt{\frac{q}{p}}\,y$, $z' = z$. Звідси отримуємо рівняння еліптичного параболоїда у наступному вигляді: $\frac{x'^2}{p} + \frac{y'^2}{q} = 2z'$.

Задача 93

Скласти рівняння поверхні, утвореної рухом параболи за умови, що ця парабола весь час залишається в площині, перпендикулярній до осі Oy, причому вісь параболи не змінює свого напрямку, а вершина ковзає по іншій параболі, яка задана такими рівняннями: $y^2 = -2qz$, $x = 0$. Рухома

парабола в одному із своїх положень задана наступними рівняннями: $x^2 = 2pz$, $y = 0$.
Розв'язок:

Очевидно рухома парабола визначається наступними рівняннями: $x'^2 = 2pz'$, $y' = 0$ (у рухомій системі координат), якщо має місце таке перетворення координат: $x = x'$, $y = y' + Y$, $z = z' - \frac{Y^2}{2q}$. Звідси неважко отримати, що рівняння поверхні, утвореної рухом параболи, має такий вигляд: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.

Задача 94

Довести, що рівняння $z = xy$ визначає гіперболічний параболоїд.
Розв'язок:

Виконавши перетворення координат $x = \frac{x'}{\sqrt{2p}} + \frac{y'}{\sqrt{2q}}$, $y = \frac{x'}{\sqrt{2p}} - \frac{y'}{\sqrt{2q}}$, $z = z'$, отримуємо рівняння гіперболічного параболоїда, а саме: $\frac{x'^2}{p} - \frac{y'^2}{q} = 2z'$.

Задача 95

Встановити, що площина $y + 6 = 0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболі; знайти її параметер і вершину.
Розв'язок:

Розглядаючи сумісно рівняння площини та гіперболічного параболоїда, легко бачити, що лінія їхнього перетину є парабола, яка внаслідок перетворення координат $x = x'$, $y = y' - 6$, $z = z' - 3/2$ описуватиметься рівняннями: $x'^2 = 30z'$, $y' = 0$. Звідси параметр параболи дорівнює 15, а координати вершини — $O(0; -6; -3/2)$.

Задача 96

Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\mathbf{n} = (2; -1; -2)$ і дотикається еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$.
Розв'язок:

Нехай $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка дотику шуканої площини до еліптичного параболоїда. Використовуючи (5.9), отримуємо $z'_x(M) = \frac{x_0}{3} = 1$, $z'_y(M) = \frac{y_0}{4} = -\frac{1}{2}$, звідки координати точки дотику $M(3; -2; 2)$. Відповідно рівняння дотичної площини має такий вигляд: $2x - y - 2z - 4 = 0$.

Задача 97

Довести, що площина $2x - 12y - z + 16 = 0$ перетинає гіперболічний параболоїд $x^2 - 4y^2 = 2z$ уздовж прямолінійних твірних. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.
Розв'язок:

Розглядаючи сумісно рівняння площини та гіперболічного параболоїда, отримуємо рівняння наступного виду: $(x-2y+4)(x+2y-8) = = 0$, якому мають задовольняти координати точок лінії їхнього перетину. Звідси видно, що перетинаються вони вздовж прямолінійних твірних, які описуються такими рівняннями:

$$\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи:

N 1157, 1159, 1162, 1167, 1173, 1175, 1180 (1, 2), 1185.