

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. Ю. Кутовий

**ОПТИКА НЕОДНОРІДНИХ ТА АНІЗОТРОПНИХ
СЕРЕДОВИЩ**

**Навчальний посібник
(конспект лекцій)
для студентів фізичного факультету**

Київ 2019

Оптика неоднорідних та анізотропних середовищ

Навчальний посібник (конспект лекцій) для студентів фізичного факультету.

© Кутовий С. Ю.

Київ, 2016, 92 с.

Рецензенти

А.М.Негрійко, чл.-кор. АН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.

С.В. Кондратенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рекомендовано до друку

Вченою Радою фізичного факультету

20 травня 2019 р.

Коротко викладено закони поширення світла в неоднорідних, шаруватих, та – більш детально – в однорідних анізотропних середовищах. Також коротко описано рідкокристалічне середовище. Основна увага приділяється опису властивостей анізотропних середовищ.

Посібник призначений для студентів фізичних спеціальностей університетів. Зміст посібника відповідає програмам курсів “Вступ до фотоніки”, “Оптика неоднорідних та анізотропних середовищ”, які читаються студентам фізичного факультету спеціалізації «фотоніка» Київського університету імені Тараса Шевченка впродовж ряду років.

Вступ.

Навчальний посібник містить матеріал лекційного курсу, який автор читає протягом ряду років студентам фізичного факультету.

Викладено закони поширення світла в неоднорідних, шаруватих та однорідних анізотропних середовищах, також коротко описано рідкокристалічне середовище. Основну увагу при цьому приділено опису властивостей анізотропних середовищ та поширенню світла в них.

Посібник складається з трьох розділів. У першому коротко викладено закони поширення світла в неоднорідних середовищах: вводяться основні поняття геометричної оптики – променю та ейконалу, з рівнянь Максвелла виводиться основне рівняння цього розділу – рівняння ейконалу, аналізуються його розв'язки та застосування. Вводиться поняття інтенсивності в геометричній оптиці, описано загальні властивості променів, що поширюються в неоднорідному середовищі. У другому розділі подано елементи теорії Абеле шаруватих середовищ, вводиться поняття характеристичної матриці, наведено різні її форми. На основі властивостей характеристичної матриці описано можливості застосування тонких плівок в оптичних дослідженнях та прикладній оптиці.

Третій розділ – найбільший за об'ємом – присвячено поширенню світла в однорідних анізотропних середовищах. Спочатку наведено основні властивості тензора діелектричної проникності ϵ_{ij} – «матеріального тензора» середовища, пояснюється його визначальна роль для властивостей електромагнітних хвиль (променів), які поширюються в електрично анізотропних середовищах. Виходячи з конкретних властивостей тензора ϵ_{ij} , описано явище часової та просторової дисперсії, та пов'язаного з просторовою дисперсією явища гіротропії. Далі з рівнянь Максвелла отримано рівняння Френеля кристалооптики, проаналізовано його розв'язки. Описано поверхні, пов'язані з різними формами запису рівняння Френеля (поверхня показників заломлення, поверхня нормалей, променева поверхня), а також прямий та обернений еліпсоїд Френеля (оптична індикатриса). Відповідно, виходячи з розв'язків рівняння Френеля та форми відповідних поверхонь, а також виду тензора ϵ_{ij} вводяться поняття та аналізуються властивості одновісних та двовісних кристалів. Як один з важливих проявів властивостей анізотропних середовищ описано явище конічної рефракції. Короткий перелік властивостей анізотропних слабо поглинаючих середовищ подано у порівнянні з відповідними властивостями середовищ непоглинаючих.

Наведено ряд прикладів застосування оптичних елементів і приладів, створених на основі описаних явищ і законів.

В додатках до відповідних розділів дано поняття про рідкокристалічне середовище та його властивості, також приведені основні характеристики гаусових пучків.

Посібник призначений для студентів фізичних спеціальностей університетів. Зміст посібника відповідає програмі курсу “Оптика неоднорідних та анізотропних середовищ”, який є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр" спеціальності "фізика" і викладається студентам фізичного факультету спеціалізації «фотоніка» Київського університету імені Тараса Шевченка.

РОЗДІЛ I.

Поширення світла в неоднорідному середовищі.

Довжина λ електромагнітної хвилі видимого діапазону достатньо мала ($\lambda \sim 10^{-5}$ см) для того, щоб при вирішенні багатьох задач оптики в першому наближенні довжиною хвилі взагалі можна було знехтувати. Розділ оптики, де нехтують λ , тобто працюють у наближенні $\lambda \rightarrow 0$, називають *геометричною оптикою*; оптичні закони (закони поширення світла) формулюються в геометричній формі. Тобто геометрична оптика описує оптичні явища в термінах геометрії, після граничного переходу $\lambda \rightarrow 0$.

Одним з основних понять геометричної оптики є поняття *променя*. В геометричній оптиці вважається, що світлова енергія поширюється вздовж деяких ліній (прямих у однорідних середовищах, у загальному випадку оптично неоднорідних середовищ – кривих) – світлових *променів*. Модель пучка променів: світло від джерела знехтуванно малих розмірів, що пройшло крізь невеликий отвір, формує *пучок променів*. Іншими словами, якщо на шляху світлового потоку поставити непрозорий екран з малим отвором, можна виділити пучок променів (прямих ліній), вздовж яких поширюється світло. Якщо отвір зменшувати до нескінченно малого, отримаємо модель світлового променя як нескінченно тонкої трубки потоку світлової енергії. Звичайно, реальна картина проходження світла через малий отвір визначається дифракцією світла на отворі, що призводить до дифракційного розширення пучка та формування складної дифракційної картини за екраном: після проходження отвору межа світло-тінь нерізка – спостерігаються швидкі затухаючі періодичні зміни (коливання) інтенсивності світла, пучок починає розширюватись. Оскільки такі дифракційні явища проявляються в області $d \sim \lambda$, d – розмір отвору, то таке визначення променя є справедливим при $d \gg \lambda$. Отже, якщо довжина хвилі є знехтуванно малою, тобто можна вважати що $\lambda \rightarrow 0$, то при будь-якому, в тому числі і нескінченно малому отворі межа пучка буде різкою, а сам він не буде розхідним ($\varphi \sim \lambda/d \sim 0$ при $\lambda \sim 0$). Тобто при $\lambda \sim 0$ дифракцією можна знехтувати, а пучок, що пройшов через отвір нескінченно

малих розмірів, теж буде нескінченно тонким при $\lambda \rightarrow 0$. Вказаний нескінченно тонкий пучок світла і є *промінь*.

Можна показати [1], що: 1) зміна перерізу пучка є мірою зміни інтенсивності світла; 2) з променем можна пов'язати стан поляризації.

Взагалі, для коротких хвиль загальний характер поля є таким, як і для плоскої хвилі. Більш того: закони заломлення та відбивання для плоских хвиль, що падають на плоску межу поділу двох середовищ, залишаються справедливими в геометричній оптиці і при більш загальних умовах; можна сказати, що наближення $\lambda \rightarrow 0$ „ховає” деякі некоректності.

1.1. Рівняння ейконала.

Рівняння *ейконала* – основне в геометричній оптиці – можна отримати із скалярного хвильового рівняння при $\lambda \rightarrow 0$, або з основних рівнянь хвильової оптики – рівнянь Максвелла. Тут рівняння ейконала буде отримано з рівнянь Максвелла [1].

Рівняння Максвелла для непровідного ($\sigma = 0$, σ – провідність) ізотропного середовища без струмів і зарядів ($\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$, \mathbf{j} – густина струму, ρ – густина заряду) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Розв'язками цих рівнянь є функції виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Де поля – електричне \mathbf{E}_0 та магнітне \mathbf{H}_0 є комплексними векторними функціями положення. Фізичними полями є дійсні частини гармонічних полів (1.1) [1].

Нагадаємо, гармонічними полями загального виду є поля, поширення яких описується гармонічною функцією виду $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cos(\omega t - f(\mathbf{r}))$, і яка є дійсним розв'язком хвильового рівняння. Причому хвиля може бути неоднорідною, для неї поверхні сталої амплітуди і фази не співпадають.

Підставляючи (1.1) в (1.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{c} i\omega \mathbf{B}_0 = ik_0 \mu \mathbf{H}_0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 &= -\frac{1}{c} i\omega \mathbf{D}_0 = -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_0 = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$$

Тобто, поля \mathbf{E}_0 та \mathbf{H}_0 вдовольняють рівнянням Максвелла у формі, що не залежить від часу. Тут $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$, ϵ та μ – діелектрична та магнітна проникність, відповідно. Поля \mathbf{E}_0 та \mathbf{H}_0 можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e} \exp(ik_0 n(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})) \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h} \exp(ik_0 n(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ці поля описують однорідну плоску хвилю, яка розповсюджується в середовищі з показником заломлення $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ в напрямку, що задається вектором \mathbf{s} . Тут \mathbf{e} , \mathbf{h} – сталі вектори, в загальному випадку комплексні (для врахування можливих поляризацій); \mathbf{r} – радіус-вектор точки поля; $\mathbf{k} = k_0 n \mathbf{s}$ – хвильовий вектор, $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$, \mathbf{s} – одиничний вектор, що задає напрям поширення хвилі. У вакуумі $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{s}$. Відповідно, напруженості поля у вакуумі ($n = 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Такий самий вигляд має поле випромінюючого диполя, а \mathbf{r} – радіус-вектор точки поля, ϵ відстанню від диполя, що є джерелом поля; вектори \mathbf{e} , \mathbf{h} вже не є сталими, але на великих відстанях від джерела, у т.зв. «хвильовій зоні» ($r \gg \lambda$) їх можна вважати такими.

Відповідно, поля більш загального виду на великих віддальх від джерела можна записати так:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}(\mathbf{r}) \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h}(\mathbf{r}) \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $S(\mathbf{r})$ – «оптичний шлях» – дійсна скалярна функція положення (а не просто \mathbf{r}), $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ та $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ – також векторні комплексні функції положення. Функцію $S(\mathbf{r})$ називають також *ейконалом*; дещо більш загально ейконал вводять як $kS(\mathbf{r})$:

$\mathbf{E} = \mathbf{e} \exp(iS(\mathbf{r}))$, тоді похідна по часу визначає частоту: $\frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\omega$, а похідна по просторовим координатам – хвильовий вектор: $\operatorname{grad} S(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}$, а отже і напрям променя в кожній точці простору.

Використавши визначення поля (1.6), а також векторні співвідношення

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.7),$$

отримаємо замість (1.3):

$$\begin{aligned}
\text{grad } S \times \mathbf{h} + \varepsilon \mathbf{e} &= -\frac{1}{ik_0} \text{rot } \mathbf{h}; \\
\text{grad } S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} &= -\frac{1}{ik_0} \text{rot } \mathbf{e}; \\
\mathbf{e} \cdot \text{grad } S &= -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{e} \cdot \text{grad } \ln \varepsilon + \text{div } \mathbf{e}); \\
\mathbf{h} \cdot \text{grad } S &= -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{h} \cdot \text{grad } \ln \mu + \text{div } \mathbf{h})
\end{aligned} \tag{1.8}$$

(Тут і далі скалярний добуток позначаємо як “·”, векторний як “×”, без дужок).

Зазначимо, що на практиці рівняння з \mathbf{e} та \mathbf{h} можна отримати замінами (А.Пістолькорс) $\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{h}$, $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$ (див. пари рівнянь (1.8)).

Після граничного переходу до геометричної оптики, тобто $\lambda \rightarrow 0$, а отже і $\frac{1}{k_0} \rightarrow 0$, праві частини рівнянь (1.8) прямують до нуля, і отримаємо:

$$\begin{aligned}
\text{grad } S \times \mathbf{h} + \varepsilon \mathbf{e} &= 0 \\
\text{grad } S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} &= 0 \\
\mathbf{e} \cdot \text{grad } S &= 0 \\
\mathbf{h} \cdot \text{grad } S &= 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Причому другу пару рівнянь (1.9) можна отримати, домноживши скалярно на $\text{grad } S$ першу пару (оскільки $\text{grad } S \cdot (\text{grad } S \times \mathbf{h}) = 0$ як скалярний добуток ортогональних векторів).

Для прикладу отримаємо найпростіше з вигляду рівняння системи (1.9) $\mathbf{e} \cdot \text{grad } S = 0$; для цього розглянемо третє з рівнянь (1.3):

$$\text{div } \mathbf{D}_0 = 0,$$

$$\text{або} \quad \text{div } \varepsilon \mathbf{E}_0 = 0$$

Використаємо перше з співвідношень (1.7), вважаючи $\varepsilon \mathbf{e}$ вектором, а $\exp(ik_0 S(\mathbf{r}))$ - скаляром. Тоді

$$\begin{aligned}
\text{div } \varepsilon \mathbf{E}_0 &= \text{div}(\varepsilon \mathbf{e} \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))) = \\
&= \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \text{div } \varepsilon \mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{e} \cdot \text{grad } \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) = \\
&= \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \text{div } \varepsilon \mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{e} \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) ik_0 \text{grad } S(\mathbf{r});
\end{aligned}$$

Поділивши отримане на $\exp(ik_0 S(\mathbf{r}))$, застосовуючи те ж саме векторне співвідношення ще раз до $\text{div } \varepsilon \mathbf{e}$, і далі, враховуючи, що $\frac{\text{grad } \varepsilon}{\varepsilon} = \text{grad } \ln \varepsilon$, отримуємо

$$\varepsilon \text{div } \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \text{grad } \varepsilon + ik_0 \varepsilon \mathbf{e} \cdot \text{grad } S(\mathbf{r}) = 0;$$

або

$$\mathbf{e} \cdot \text{grad } S(\mathbf{r}) = -\frac{1}{ik_0} (\text{div } \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \text{grad } \ln \varepsilon)$$

Рівняння отримано.

Виразимо в (1.9) одне поле (**h**) через інше (**e**), маємо:

$$\begin{aligned} \text{grad } S \times \mathbf{h} &= \text{grad } S \times \frac{1}{\mu} \text{grad } S \times \mathbf{e} = \\ &= \frac{1}{\mu} (\text{grad } S \cdot (\mathbf{e} \cdot \text{grad } S) - \mathbf{e} \cdot (\text{grad } S \cdot \text{grad } S)) = \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbf{e} \cdot \text{grad } S = 0$, то

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{e} \cdot (\text{grad } S)^2 = \varepsilon \cdot \mathbf{e} \quad (1.10)$$

А оскільки $\mathbf{e} \neq 0$ і, крім того, $\varepsilon \mu = n^2$, то маємо остаточно

$$(\text{grad } S)^2 = n^2 \quad (1.11)$$

Тобто

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (1.12)$$

Або

$$\text{grad } S = n\mathbf{s} \quad (1.13)$$

Це і є рівняння **ейконала**. $S(\mathbf{r})$ – **ейконал** (фаза). Поверхні сталого ейконалу $S(\mathbf{r}) = \text{const}$ називають **геометричними хвильовими фронтами**, або **геометричними хвильовими поверхнями**.

Як вже згадувалось, ейконалом також називають не $S(\mathbf{r})$, а $kS(\mathbf{r})$, тобто **просторову фазу**.

Зазначимо, що можна показати, що в багатьох важливих випадках вектори \mathbf{E}_0 та \mathbf{H}_0 можна (і зручно) розкласти в асимптотичні ряди вигляду:

$$\mathbf{E}_0 = \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \sum_{m \geq 0} \frac{\mathbf{e}^{(m)}}{(ik_0)^{(m)}}, \quad \mathbf{H}_0 = \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \sum_{m \geq 0} \frac{\mathbf{h}^{(m)}}{(ik_0)^{(m)}}, \quad (1.14)$$

$\mathbf{e}^{(m)}$, $\mathbf{h}^{(m)}$ – функції координат, а $S(\mathbf{r})$ – та ж функція, що і раніше, в (1.6). Таким чином, множник типу $\frac{1}{(ik_0)^{(m)}}$ в рівняннях поля далеко не випадковий.

Геометричній оптиці відповідають перші члени таких рядів.

1.2. Інтенсивність в геометричній оптиці

Густина енергії електромагнітного поля:

$$w = w_e + w_m, \quad w_e = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}), \quad w_m = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.15)$$

Вектор Умова-Пойнтінга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

Усереднена в часі густина електричної та магнітної енергії для поля, визначеного за (1.4), має вигляд [1]:

$$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) \quad \langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*) \quad (1.16)$$

Можна показати, що ці величини рівні

$$\begin{aligned} \langle w_e \rangle &= \frac{\varepsilon}{16\pi} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) = -\frac{\varepsilon}{16\pi} \mathbf{e} \cdot \frac{1}{\varepsilon} (\text{grad} S \times \mathbf{h}^*) = \frac{1}{16\pi} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{h}^* \times \text{grad} S); \\ \langle w_m \rangle &= \frac{\mu}{16\pi} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*) = \frac{\mu}{16\pi} \mathbf{h}^* \cdot \frac{1}{\mu} (\text{grad} S \times \mathbf{e}) = \frac{1}{16\pi} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{h}^* \times \text{grad} S). \end{aligned} \quad (1.17)$$

(у вираз для w_e введено \mathbf{h} , для w_m – \mathbf{e} з системи рівнянь (1.9); таким чином, отримано хоч і громіздкіші, але *однакові* вирази).

Отже, в наближенні геометричної оптики середні значення густини електричної та магнітної енергії рівні.

Для вектора Умова-Пойнтінга, з використанням (1.9), маємо:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* = \frac{c}{8\pi} \mathbf{e} \times \frac{1}{\mu} \text{grad} S \times \mathbf{e}^* = \\ &= \frac{c}{8\pi\mu} [\text{grad} S \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) - \underbrace{\mathbf{e}^* \cdot (\mathbf{e} \cdot \text{grad} S)}_{=0}] = \frac{c}{8\pi\mu} \text{grad} S \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Далі, враховуючи, що $\varepsilon\mu = n^2$ та $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) = \frac{16\pi}{\varepsilon} \langle w_e \rangle$, отримаємо:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2c}{n^2} \langle w_e \rangle \text{grad} S$$

Оскільки $\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle$, то $2\langle w_e \rangle = \langle w \rangle$, і крім того, вектор $\frac{\text{grad} S}{n} = \mathbf{s}$ є одиничним вектором, то випливає, що \mathbf{S} напрямлений вздовж усередненого в часі вектора Умова-Пойнтінга, тобто

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n} \langle w \rangle \mathbf{s} = v \langle w \rangle \mathbf{s} = \langle w \rangle \mathbf{v} \quad (1.19)$$

Отже, напрям усередненого в часі вектора Умова-Пойнтінга – *по нормалі до геометричного хвильового фронту*, а його величина є добутком середньої густини енергії на швидкість c/n . Отриманий результат є таким же, як і у випадку поширення плоских хвиль [1].

Отже, в наближенні геометричної оптики середня густина енергії розповсюджується з швидкістю c/n . Тепер *геометричні світлові промені* можна визначити, як *траєкторії, що ортогональні до геометричних хвильових фронтів* $S = \text{const}$ (S – *ейконал*). Ці лінії мають напрямок, такий, що в кожній точці він співпадає з напрямком усередненого вектора Пойнтінга.

Визначимо *інтенсивність* як модуль середнього в часі вектора Умова-Пойнтінга:

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = \langle w \rangle v \quad (1.20)$$

Рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{j} = nev = \rho \mathbf{v}, \quad \mathbf{S} = w \mathbf{v} \quad (1.22)$$

Крім того, ці величини можна представити як компоненти 4-векторів $j_i(\mathbf{j}, ic\rho)$, $S_i(\mathbf{S}, icw)$. Тут n – концентрація носіїв заряду.

Порівнюючи вирази в (1.22), можна написати

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{dw}{dt} = 0 \quad (1.23)$$

якщо залежності від часу немає, то $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$, тобто

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = 0$$

Або

$$\operatorname{div}(\mathbf{I} \mathbf{s}) = 0 \quad (1.24)$$

Нехай є трубка з течією (рис.1.1).

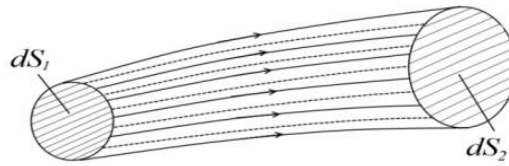


Рис.1.1.

Інтегруємо (1.24) по об'єму трубки та застосовуємо теорему Гауса-Остроградського

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{I} \mathbf{s}) dV = \oint_S \mathbf{I} \mathbf{s} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{I} \mathbf{s} \cdot \mathbf{N} dS = 0$$

Потік вектора через бічні поверхні трубки течії дорівнює нулю, оскільки вектор потоку \mathbf{s} та зовнішня нормаль до трубки \mathbf{N} взаємно ортогональні; тобто є потоки лише через S_1 та S_2 , і вони рівні і протилежні за знаком. Відповідно, загальний потік дорівнює нулю.

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{N} = \begin{cases} 1 & \text{на } dS_2 \\ -1 & \text{на } dS_1 \\ 0 & \text{на бічній} \end{cases}$$

Тобто $I_1 dS_1 = I_2 dS_2$, або

$$I dS = \text{const} \quad (1.25)$$

вздовж трубки течії. Це є *закон інтенсивності в геометричній оптиці*.

У однорідному середовищі всі промені прямолінійні. У цьому випадку закон інтенсивності (1.25) можна сформулювати в іншій формі:

-в будь-якій точці прямолінійного променя інтенсивність пропорційна гаусовій кривині хвильового фронту, що проходить через цю точку.

$$I \sim \frac{1}{R_1 R_2} \quad (1.26)$$

Величина $\frac{1}{R_1 R_2}$ називається другою або гаусовою кривиною хвильового фронту (рис.1.2.). R_1 та R_2 – радіуси кривини, які задають елемент поверхні dS хвильового фронту; центри кривини не співпадають.

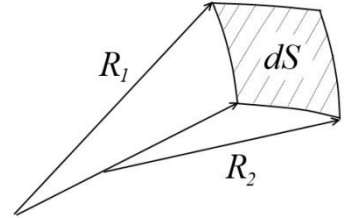


Рис.1.2.

Якщо ж всі (прямолінійні) промені виходять з однієї точки, тобто мають спільний центр кривини, то тоді

$$I \sim \frac{1}{R^2}$$

І ми отримуємо відомий закон обернених квадратів відстаней.

1.3. Загальні властивості променів.

1. Інтеграл $\int n dl$ вздовж деякої кривої \mathcal{L} називається оптичною довжиною шляху.

$$dS = S(P_2) - S(P_1) = [P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n dl \quad (1.27)$$

Тут оптичну довжину шляху позначено як $[P_1 P_2]$, n – показник заломлення.

Рівняння ейконала (1.13) $\text{grad} S = n \mathbf{s}$ можна записати в іншій формі

$$\frac{dS}{dl} = n, \quad \text{або} \quad dS = n dl \quad (1.28)$$

Вся зміна фази між точками 1 та 2

$$\int_1^2 n dl = \int_1^2 \frac{c}{v} dl = \int_1^2 c dt,$$

де dt – час проходження енергією відстані dl вздовж променя, отже

$$[P_1 P_2] = c \int_{P_1}^{P_2} dt \quad (1.29)$$

тобто оптична довжина шляху є добуток швидкості світла в вакуумі на час проходження променя від P_1 до P_2 .

З поняттям оптичної довжини шляху пов'язано один з найважливіших принципів геометричної оптики – *принцип Ферма*:

Дійсний шлях розповсюдження світла (променя) між двома точками є таким, що для його проходження потрібен мінімальний час у порівнянні з часом, потрібним для проходження променем будь-якого іншого шляху між тими ж точками.

Або:

Промінь обирає таку траєкторію, щоб затратити найменший час на подолання віддалі між двома точками.

Тобто для дійсного шляху має виконуватись мінімальність $\int_{P_2}^{P_1} dt$.

Оскільки, як видно з (1.27), (1.29), час проходження променем шляху між двома точками пов'язаний з оптичним шляхом, то принцип Ферма можна сформулювати у вигляді вимоги реалізації мінімальності оптичного шляху між тими ж двома точками:

Оптична довжина реального променя, що проходить між точками P_1 та P_2 менша за оптичну довжину будь-якої іншої кривої, яку можна провести між цими двома точками, тобто значення інтеграла $\int_{P_2}^{P_1} n ds$ має бути мінімальним.

Принцип Ферма, сформульований для геометричної оптики, є частинним випадком, або ж проявом, більш загального *принципу мінімальної дії Гамільтона* класичної механіки, який можна сформулювати так [6]:

Якщо механічна система в моменти часу $t=t_1$ та $t=t_2$ характеризується наборами значень координат та швидкостей (імпульсів) $q_1 = \{q_i\}$, $\dot{q}_1 = \{\dot{q}_i\}$ та $q_2 = \{q_j\}$, $\dot{q}_2 = \{\dot{q}_j\}$, то між цими двома положеннями вона рухається так, що інтеграл дії

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.30)$$

має найменше з можливих значень.

Функція $L(q, \dot{q}, t)$ є функцією Лагранжа $L = T - U$.

Це твердження, тобто *принцип мінімальної дії* можна записати у вигляді

$$\delta S = \delta \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (1.31)$$

З принципу мінімальної дії отримуються дуже важливі в механіці рівняння стану механічної системи – *рівняння Лагранжа*.

Принципом мінімальної дії рух механічної системи визначається повністю. Якщо обмежитись простішою задачею визначення лише *траєкторії* руху, то принцип мінімальної дії можна сформулювати у простішій формі *принципу Мопертьюї*:

Якщо функція Лагранжа не містить явної залежності від часу, так що енергія системи зберігається, $H(p, q) = E = \text{const}$, то (1.31) можна представити у вигляді

$$\delta \int \sqrt{2m(E - U)} dl = \delta \int p dl = 0 \quad (1.32)$$

В свою чергу, (1.32) можна перетворити до вигляду «для оптики»:

$$\delta \int p dl \rightarrow \delta \int k dl = \delta \int k_0 n dl \rightarrow \delta \int n dl = 0 \quad (1.33)$$

У формулюванні часу:

$$\delta \int n dl = \delta \int \frac{c}{v} dl = \delta \int c dt \rightarrow \delta \int dt = 0 \quad (1.34)$$

тобто маємо принцип Ферма.

Для практичних застосувань важливішою є форма запису $\delta \int n dl = 0$, причому у формулюванні *не мінімальності*, а *стаціонарності* оптичного шляху:

Малі зміни траєкторії не приводять у першому наближенні до зміни оптичної довжини шляху, тобто реалізується стаціонарність часу проходження траєкторії, і стаціонарність оптичної довжини.

Простий приклад – збиральна лінза: паралельний пучок променів, що падає на неї, сходиться у фокусі; всі промені проходять однаковий оптичний шлях за один і той же час. Це є *тавтохронізм* оптичної системи. З точки зору хвильової оптики це означає, що всі хвилі в точці фокуса накладаються в фазі, інтенсивність світла в цій точці висока. Інший приклад – еліпсоїд-дзеркало: якщо джерело знаходиться в одному з фокусів, то всі промені, які вийшли з цього джерела і віддзеркалились від внутрішньої поверхні еліпсоїда, зберуться в іншому фокусі, пройшовши *однаковий* оптичний шлях.

Зазначимо, що існують оптичні системи, в яких умова (1.33) означає не мінімальність, а максимальність оптичного шляху, і відповідно, часу проходження певної траєкторії. Це зрозуміло з того, що, взагалі кажучи, умова (1.33) є умовою екстремуму, а що конкретно реалізується – максимум, мінімум, чи стаціонарність – залежить від виду оптичної системи.

2. Якщо радіус-вектор $\mathbf{r}(s)$ довільної точки на промені розглядати як функцію довжини дуги s променя¹, то його зміна (див. Рис.1.3)

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s} \quad (1.35)$$

А оскільки було $n\mathbf{s} = \text{grad}S$, або ж $\mathbf{s} = \frac{\text{grad}S}{n}$, то тоді рівняння променя можна записати у вигляді:

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad}S \quad (1.36)$$

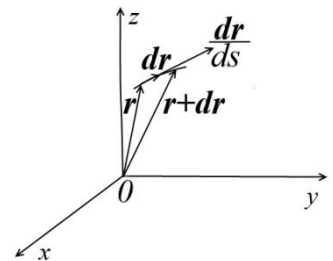


Рис.1.3

¹ не плутати s – довжину дуги та \mathbf{s} – одиничний вектор напрямку променя, $|\mathbf{s}|=1$.

Тоді

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dS}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad}S \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n$$

(помноживши (1.36) на $\text{grad}S$, і враховуючи, що $(\text{grad}S)^2 = n^2$, маємо

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \text{grad}S = (\text{grad}S)^2 = n^2; \quad \text{або} \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \text{grad}S = n, .$$

Тобто

$$\frac{dS}{ds} = n, \quad dS = nds, \quad (1.37)$$

Тобто відстань вздовж променя ds між двома точками перетину нормалей з хвильовими фронтами, фаза яких відрізняється на dS , пропорційна $\sim 1/n$, або $\sim v$. Тобто ейконал (фаза) найшвидше змінюється там, де n – більший, тобто більша оптична густина середовища.

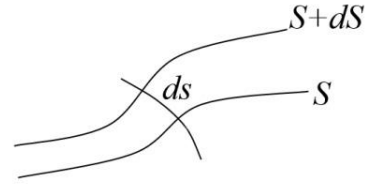


Рис.1.4.

Зокрема, якщо промінь поширюється в неоднорідному середовищі, то при зміні оптичного шляху (фази хвильового фронту, ейконала) в усій області на dS має бути $ds_1 < ds_2$ при $n_1 > n_2$, і, крім того, оскільки напрям поширення променя завжди перпендикулярний до поверхні хвильового фронту, то можна зробити висновок, що *промінь при поширенні загинається в область з більшою оптичною густиною*.

3. З рівняння (1.36) простими перетвореннями можна отримати рівняння, яке описує поведінку променів не ейконалом $S(\mathbf{r})$, а показником заломлення $n(\mathbf{r})$. Якщо продиференціювати (1.36) по s ,

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\text{grad}S) \quad (1.38)$$

То, враховуючи (1.37), можна отримати

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\text{grad}S) = \text{grad} \frac{dS}{ds} = \text{grad}n$$

Тобто

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad}n \quad (1.39)$$

Це є векторна форма диференціальних рівнянь для світлових променів.

Зокрема, в однорідному середовищі $n=\text{const}$, тоді

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 \quad (1.40)$$

звідки

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b} \quad (1.41)$$

тут \mathbf{a}, \mathbf{b} - деякі сталі вектори (сталі інтегрування).

Це є рівняння прямої, напрямленої вздовж \mathbf{a} , і такої, що проходить через точку $\mathbf{b}=\mathbf{r}$. Тобто, в однорідному середовищі промені – це прямі лінії.

Якщо середовище характеризується центральною симетрією, тобто показник заломлення є функцією відстані від центру, $n=n(r)$, то можна показати [1], що виконується

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{s} = \text{const} \quad (1.42)$$

Це означає, що всі промені є плоскими кривими, і лежать в площині, що проходить через початок координат. Вздовж кожного променя виконується умова

$$nr \sin \varphi = \text{const} \quad (1.43)$$

де φ – кут між радіусом-вектором в точку на промені і дотичною до променя в цій точці (рис.1.5).

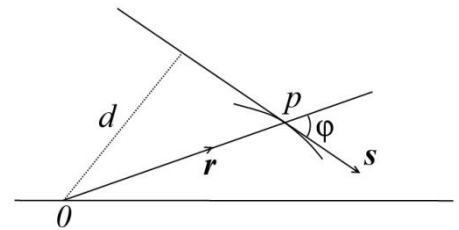


Рис.1.5

Оскільки $r \sin \varphi = d$ – відстань від початку координат до дотичної до променя, то (1.42) можна записати як

$$nd = \text{const} \quad (1.44)$$

Це є формула Бугера.

4. Вектор кривини \mathbf{K} можна задати формулою Френе класичної геометрії

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{s}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{R} \quad (1.45)$$

тут \mathbf{N} – одиничний вектор нормалі до променя (див. рис.1.6), R – радіус кривини променя; варто звернути увагу, що похідна $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$ паралельна до напрямку нормалі

\mathbf{N} , а не до напрямку променя \mathbf{s} ; тобто напрям похідної $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$ перпендикулярний до напрямку самого променя \mathbf{s} ; $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{s})=0$.

З (1.39), (1.45) можна отримати:

$$n\mathbf{K} = \text{grad}n - \frac{dn}{ds} \mathbf{s} \quad (1.46)$$

Це означає, що градієнт показника заломлення лежить в дотичній площині променя.

(Формулу (1.46) отримано так

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{s}) = \frac{dn}{ds} \mathbf{s} + n \frac{d\mathbf{s}}{ds},$$

де

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{dr} \frac{dr}{ds} = s \cdot \text{grad} n ;$$

тоді

$$n \frac{ds}{ds} = (s \cdot s) \cdot \text{grad} n - s \cdot (s \cdot \text{grad} n) ;$$

або

$$n \frac{ds}{ds} = nK = n \frac{N}{R} = (s \cdot s) \cdot \text{grad} n - s \cdot (s \cdot \text{grad} n) .$$

Помноживши обидві частини на N , і враховуючи, що $(Ns)=0$, отримаємо

$$\frac{1}{R} = \frac{N \cdot \text{grad} n}{n} = N \cdot \text{grad} \ln n$$

Помноживши (1.46) скалярно на K

$$nK \cdot K = n|K|^2 = K \cdot \text{grad} n - \frac{dn}{ds} s \cdot K ;$$

а враховуючи (1.45), отримаємо

$$n \left(\frac{N}{R} \right)^2 = \frac{N}{R} \text{grad} n - \frac{dn}{ds} \frac{sN}{R}$$

Але $(sN)=0$, тоді

$$|K| = \frac{1}{R} = \frac{N \cdot \text{grad} n}{n} = N \cdot \text{grad} \ln n \quad (1.47)$$

Або, помноживши на K

$$K = \text{grad} \ln n$$

З цього маємо, що, оскільки завжди $R>0$, то вздовж головної нормалі показник заломлення зростає, або ж – кривина променя збільшується зі зростанням показника заломлення, або, іншими словами, **промінь загинається в область з більшим показником заломлення**. Раніше це було отримано з дещо інших міркувань.

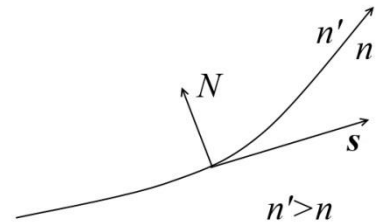


Рис.1.6.

Зокрема, якщо $n=const$, то $\text{grad} n = 0$, кривина $K=0$, отже, в однорідному середовищі промені – прямі лінії, що також було показано раніше.

1.4. Закони заломлення та відбивання

До цього вважалося, що показник заломлення n – неперервна функція. Зараз буде розглянуто поведінку променів, що перетинають поверхню, яка розділяє два однорідні середовища з різними показниками заломлення.

Враховуючи тотожність $\text{rotgrad}\varphi \equiv 0$, знаходимо, що у відповідності з (1.36) вектор

$$ns = n \frac{dr}{ds} \quad (1.48)$$

який називають *променевим вектором*, задовольняє співвідношення:

$$\text{rot} ns = 0 \quad (1.49)$$

Замінімо поверхню перехідним шаром, де ϵ, μ, n змінюються швидко, але неперервно від значень біля поверхні з одної сторони до значень біля поверхні з іншої сторони.

Розглянемо тепер елемент перехідного шару, сторони якого P_1Q_1 та P_2Q_2 паралельні, а P_1P_2 та Q_1Q_2 перпендикулярні до поверхні (рис.1.7). Якщо \mathbf{b} - одиничний вектор нормалі до цього елемента, то інтегруючи (1.49) по поверхні елемента $S(P_1Q_1Q_2P_2)$ та використовуючи теорему Стокса, отримаємо:

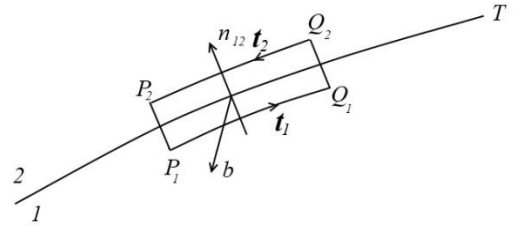


Рис.1.7.

$$\int_S (\text{rot} ns) \cdot \mathbf{b} dS = \int_L ns \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.50)$$

де другий інтеграл береться по контуру $L(P_1Q_1Q_2P_2)$, що обмежує елемент поверхні. Якщо сторони P_1Q_1 (dl_1) та P_2Q_2 (dl_2) елемента поверхні малі, то переходячи до межі при $\delta h \rightarrow 0$, отримуємо

$$n_1 s_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + n_2 s_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0, \quad (1.51)$$

оскільки вклад в інтеграл від бічних сторін елемента нульовий, а значення ns під інтегралом можна замінити сталими значеннями $n_1 s_1$ та $n_2 s_2$. Якщо \mathbf{t} - одиничний вектор, дотичний до поверхні, то одиничні вектори, дотичні до P_1Q_1 та P_2Q_2 , \mathbf{t}_1 та \mathbf{t}_2 :

$$\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t} = -\mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}; \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12},$$

а

$$d\mathbf{l}_1 = \mathbf{t}_1 dl_1; \quad d\mathbf{l}_2 = \mathbf{t}_2 dl_2,$$

тоді

$$(n_1 s_1 \cdot \mathbf{t}_1 + n_2 s_2 \cdot \mathbf{t}_2) dl = (-n_1 s_1 \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}] + n_2 s_2 \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}]) dl = 0$$

$$(n_2 s_2 - n_1 s_1) \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}] = 0$$

Виконавши циклічну перестановку в змішаному добутку векторів в останньому виразі, отримаємо

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{n}_{12} \times (n_2 s_2 - n_1 s_1)] = 0 \quad (1.52)$$

Оскільки орієнтація вибраного прямокутного елемента поверхні, а отже і одиничного вектора \mathbf{b} довільна, то

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{n}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{n}_1 \mathbf{s}_1) = 0 \quad (1.53)$$

або

$$\mathbf{n}_2 \mathbf{s}_2 = \mathbf{n}_1 \mathbf{s}_1, \quad (38)$$

або

$$\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_2) = \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_1) \quad (1.54)$$

Тобто *тангенційна складова вектора променя $\mathbf{n}\mathbf{s}$ неперервна при переході через поверхню поділу*, або, що те ж саме, вектор $\mathbf{N}_{12} = \mathbf{n}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{n}_1 \mathbf{s}_1$ перпендикулярний до цієї поверхні.

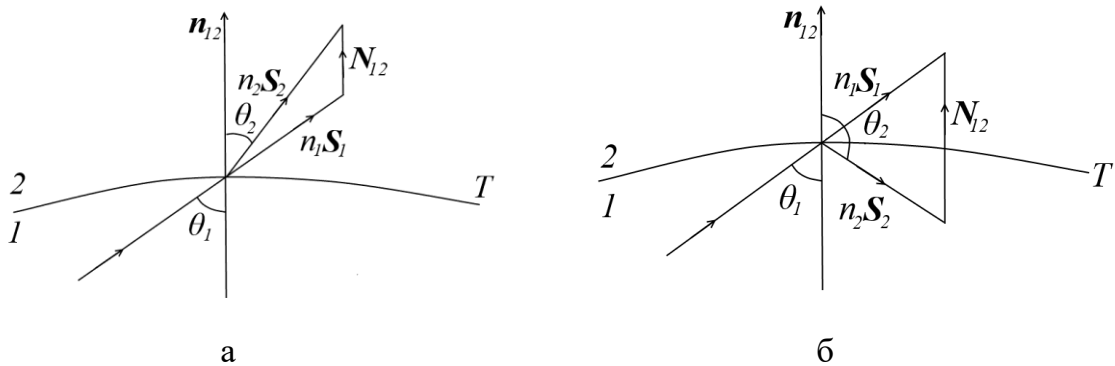


Рис.1.8.

З (1.54) видно, що

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (1.55)$$

маємо закон заломлення Снеліуса (рис.1.8а), тобто:

- заломлений промінь лежить в площині, утвореній падаючим променем і нормаллю до поверхні, тобто у *площині падіння*, це виражено у (1.54);
- відношення синуса кута заломлення до синуса кута падіння дорівнює відношенню показників заломлення; це твердження виражено формулою (1.55).

Перше твердження випливає з того, що вектори, які є добутками $\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_1$ та $\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_2$ паралельні, або, що те ж саме, $\mathbf{N}_{12} \parallel \mathbf{n}_{12}$.

Крім хвилі заломленої, буде існувати і хвиля відображена, яка повертається назад у перше середовище. Для відбивання (рис.1.8б) потрібно покласти $n_1 = n_2$, тоді отримаємо, що *відображений промінь лежить у площині падіння*, а

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_1, \text{ і, отже, } \theta_2 = \pi - \theta_1 \quad (1.56)$$

Співвідношення (1.56) виражають закон відбивання.

Зазначимо, отриманий тут закон заломлення є більш загальним, ніж відомий дещо спрощений закон, справедливий для заломлення плоских хвиль з довільним значенням λ на плоскій поверхні. В даному випадку поверхня поділу середовищ, а також падаюча хвиля можуть бути більш загального вигляду при достатньо невеликих значеннях довжини хвилі (тобто $\lambda \rightarrow 0$); це означає, що радіуси кривизни поверхні хвильового фронту та поверхні розділу мають бути великими у порівнянні з довжиною хвилі λ падаючого світла.

1.5. Конгруенція.

Рівняння ейконала

$$\text{grad}S = ns$$

можна записати в іншій формі, взявши rot від обох частин. Оскільки $\text{rotgrad}\phi = 0$, то маємо:

$$\text{rot}(ns) = 0$$

Якщо середовище однорідне, то $n = \text{const}$, і

$$\text{rots} = 0 \quad (1.57)$$

якщо середовище неоднорідне, то, використовуючи (1.7):

$$\text{rot}ns = n\text{rots} + (\text{grad}n) \times s = 0$$

і домножуючи отримане скалярно на s , маємо

$$s \cdot \text{rots} = 0 \quad (1.58)$$

Цей вираз визначає всі системи променів, які можуть існувати в неоднорідному ізотропному середовищі, і виділяє їх з ще більш загальних систем кривих.

Система кривих, що заповнює простір так, що через кожну точку проходить одна крива, називається *конгруенцією*.

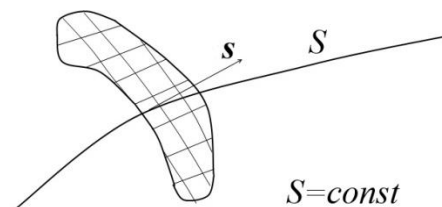


Рис.1.9.

Конгруенція *нормальна*, якщо існує система поверхонь, які перетинають кожну криву під прямим кутом; якщо такої системи немає – конгруенція *коса*. Конгруенція *прямолінійна*, якщо всі криві, що складають конгруенцію є прямими.

Таким чином, умова (1.58) – є умовою *нормальної конгруенції*, а (1.57) – умовою *прямолінійної нормальної конгруенції*.

Кожна точка поверхні сталого ейконала $S = \text{const}$ – поверхні хвильового фронту перетинається під прямим кутом променем; тобто криві конгруенції – промені, а поверхні, які перетинають кожну криву під прямим кутом – хвильові фронти; якщо середовище однорідне, то промені – прямі, а фронти – плоскі.

1.6. Повне внутрішнє відбивання променя

Закон Снеліуса: $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$; якщо $n_2 < n_1$ – тобто світло падає на оптично менш густе середовище, то існує граничний кут падіння $i_{\text{гр}}$, для якого виконується $\sin i_{\text{гр}} = \frac{n_2}{n_1}$ ($\sin r = 1$); при цьому *світло поширюється вздовж межі поділу*. При більших кутах падіння, тобто якщо $i > i_{\text{гр}}$ – кут заломлення r уявний, світло в друге середовище не проходить, має місце відбивання в перше середовище.

Можна показати, що компонента вектора Умова-Пойнтінга, перпендикулярна до межі поділу, в загальному випадку відмінна від нуля, проте її усереднене в часі значення рівне нулю: $S_{\langle t \rangle}^{(z)} = 0$, тобто постійний потік енергії через межу поділу *відсутній*. При цьому, оскільки при $z=0$ ($z \perp$ поверхні поділу) $S_{\langle t \rangle}^{(x)}, S_{\langle t \rangle}^{(y)} \neq 0$, то енергія поширюється вздовж межі. Поле в другому середовищі відмінне від нуля, воно *неоднорідне* і затухає при віддаленні від поверхні як

$$\exp\left(-k_2 z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{(n_2 / n_1)^2} - 1}\right) \quad (1.59)$$

а глибина проникнення $\sim \lambda$ (характерна глибина для подібних процесів $a \sim \frac{1}{k_2} = \frac{v_2}{\omega} = \frac{\lambda_2}{2\pi}$). При цьому електромагнітна хвиля в середовищі 2 не лише неоднорідна, а й *непоперечна* - компоненти поля вздовж напрямку поширення відмінні від нуля: $E_x \neq 0$, $k_x \neq 0$).

За допомогою формул Френеля [1] можна показати, що при повному внутрішньому відбиванні для амплітуд поля падаючого (A) та відбитого (R) світла виконується $|R_{\parallel}| = |A_{\parallel}|$, $|R_{\perp}| = |A_{\perp}|$, тобто для обох компонент поляризації інтенсивність відбитої хвилі рівна інтенсивності падаючої.

Щодо різниці фаз,

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = e^{i\delta_{\parallel}}, \quad \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = e^{i\delta_{\perp}}$$

то можна показати, що зміна фаз при відбиванні різна для E_{\perp} та E_{\parallel}

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} &= -\frac{\sqrt{\sin^2 i - (n_2 / n_1)^2}}{(n_2 / n_1)^2 \cos i} \\ \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} &= -\frac{\sqrt{\sin^2 i - (n_2 / n_1)^2}}{\cos i} \end{aligned} \quad (1.60)$$

А отже при повному внутрішньому відбиванні початково лінійна поляризація електромагнітної хвилі стає еліптичною.

Відносна різниця фаз ($\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$):

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos i \sqrt{\sin^2 i - (n_2 / n_1)^2}}{\sin^2 i} \quad (1.61)$$

Видно, що $\delta = 0$ при $i = \pi/2$ (ковзне падіння) та при $i_{\text{гр}}$ ($\sin i_{\text{гр}} = \frac{n_2}{n_1}$, падіння під граничним кутом).

Між цими нулями є кути, при якому $\delta = \delta_{\text{max}}$.

$$\frac{d}{di} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) = 0 = \frac{2(n_2 / n_1)^2 - (1 + (n_2 / n_1)^2) \sin^2 i}{\sin^3 i \sqrt{\sin^2 i - (n_2 / n_1)^2}} \quad (1.62)$$

це виконується при

$$\sin^2 i = \frac{2(n_2 / n_1)^2}{1 + (n_2 / n_1)^2} \quad (1.63)$$

Підставляючи (1.63) в (1.61), отримуємо для максимуму δ_{max} відносної різниці фаз

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\text{max}}}{2} = \frac{1 - (n_2 / n_1)^2}{2(n_2 / n_1)^2} \quad (1.64)$$

З (1.61) видно, що при заданому n_2/n_1 існує два значення кута падіння i для кожного значення δ .

Це використовується, зокрема, для того, щоб отримати з лінійної кругову поляризацію за допомогою *ромба Френеля*.

Ромб Френеля. Амплітуди компонент падаючого світла вирівнюють $A_{\parallel} = A_{\perp}$, вибираючи площину поляризації падаючої хвилі під кутом 45° щодо нормалі до площини падіння. Тоді буде $R_{\parallel} = R_{\perp}$. Відношення n_2/n_1 та кут i вибирають так, щоб відносна різниця фаз $\delta = \pi/2$.

Для цього при одному відбитті потрібно:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 < \frac{1 - (n_2 / n_1)^2}{2(n_2 / n_1)^2},$$

тобто $(n_2 / n_1) < \sqrt{2} - 1 = 0.414$. Або ж, (n_1 / n_2) має бути принаймні 2.41. Такі речовини існують (алмаз, наприклад), проте зручніше використовувати дешевше скло з двома відбиваннями. Якщо $n=1.51$, то $\delta_{\text{max}} = 45^\circ 56'$ при $i = 51^\circ 20'$, а $\delta = 45^\circ$ при $i = 48^\circ 37'$ та $i = 54^\circ 37'$. Різниця фаз 90° виникає при двох послідовних (повних внутрішніх) відбиттях у скляному *ромбі Френеля*

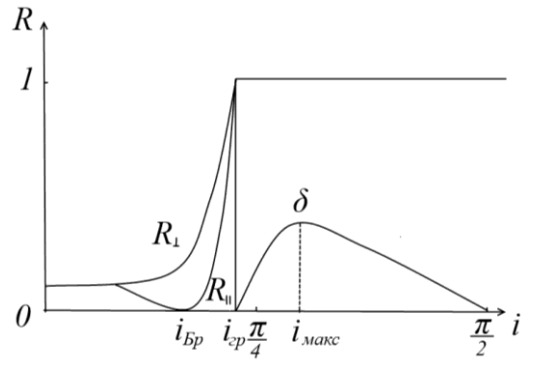


Рис.1.10.

(рис.1.11). На виході отримаємо, таким чином, *кругову* поляризацію світла. Якщо азимут падаючого лінійно поляризованого світла $\alpha \neq 45^\circ$, то отримується *еліптично* поляризоване світло. Можливі і інші варіанти.

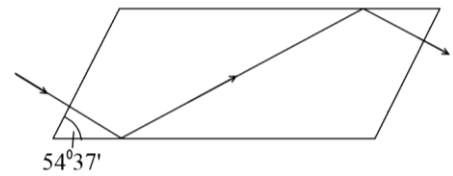


Рис.1.11.

На явищі повного внутрішнього відбивання заснована дія **оптичних хвильоводів** (схематично хід променів показано на рис.1.12а).

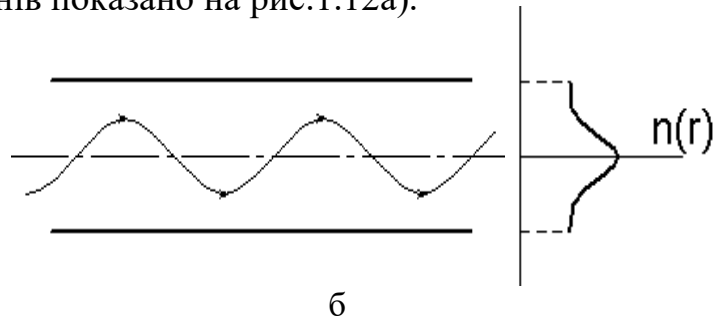
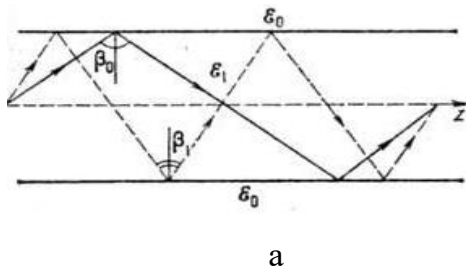


Рис.1.12.

Для таких «традиційних» оптоволокон суттєвими є втрати на межі середовищ, оскільки частина випромінювання, з ряду причин, виходить за межі хвильоводу. Для зменшення втрат на межі поділу, зокрема, використовують середовище зі змінним показником заломлення (*градієнтні* світловоди) – якщо n зменшується по радіусу від центру до периферії, то промені до межі поділу середовищ практично не доходять, відповідно, втрати на межі поділу менші (рис.1.12б).

Додаток 1

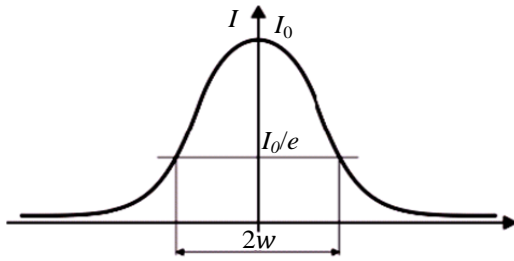
Гаусові пучки

Амплітуда світлової хвилі не завжди стала в площині хвильового фронту; існує багато випадків, коли ця амплітуда є певною функцією розподілу на його поверхні. Одним з важливих випадків є той, коли функція розподілу світлової (електромагнітної) хвилі в площині хвильового фронту описується гаусовою функцією:

$$E(x, y) = E_0 \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2w^2}\right] \quad (\text{д1.1})$$

де w - ширина розподілу інтенсивності, тобто область, в якій зосереджена енергія хвилі (або інтенсивність, яка пропорційна $\sim E^2$); на відстані w від центру пучка інтенсивність хвилі зменшується в e раз: $E^2 \sim \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{w^2}\right]$.

Важливим є те, що «гаусовість» пучка зберігається в просторі (звичайно, якщо середовище однорідне, лінійне і т.д.). Тобто, якщо в якомусь місці сферичного хвильового фронту розподіл амплітуди поля та інтенсивності має



вигляд гаусової кривої, то ці властивості зберігаються у всьому просторі – змінюється лише радіус кривизни хвильового фронту і ширина розподілу.

Рис.д1.1.

Така хвиля має назву *гаусової хвилі*, або *гаусового пучка*; для плоского хвильового фронту вона має вигляд

$$E = E_0 \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2w^2} \right] \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (\text{д1.2})$$

Гаусові пучки природно розглядати з точки зору теорії дифракції. При розгляді класичних випадків дифракції на круглому чи прямокутному отворі функції розподілу інтенсивності дифрагованого світла в площині перетину пучка не відрізняються принципово від функції, яка описує розподіл інтенсивності у гаусовому пучку – вона лише задає дещо інший розподіл, ніж гаусів (д1.1). Тобто, поле в довільній точці хвильового фронту можна вирахувати методами теорії дифракції, а саме – обчисленням інтеграла Френеля-Кірхгофа по хвильовому фронту як результату інтерференції пучків від окремих ділянок фронту, згідно принципу Гюйгенса-Френеля:

$$E = \iint \frac{E_0(x', y')}{r} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dx' dy' \quad (\text{д1.3})$$

де $r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}$ – відстань від точки $M'(x', y', 0)$ до $M(x, y, z)$, див.рис.д1.2, $E_0(x', y') = e_0 \exp \left[-\frac{(x'^2 + y'^2)}{2w_0^2} \right]$ – гаусів пучок. Вираз під інтегралом в (д1.3) задає коливання в точці $M(x, y, z)$, що обумовлені вторинними хвилями від елемента $dx' dy'$ хвильового фронту в площині $z = 0$. $E = \frac{E_0}{r} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ – сферична хвиля від вторинного джерела $dx' dy'$, амплітуда якої $E \sim \frac{1}{r}$ (а інтенсивність $I \sim \frac{1}{r^2}$, оскільки енергія хвилі розподіляється по все більшій поверхні). Якщо $0 \leq x' \leq a$, $0 \leq y' \leq c$, то вираз (д1.3) в цілому описує дифракцію на прямокутному отворі зі сторонами a , c , який знаходиться в площині $z = 0$.

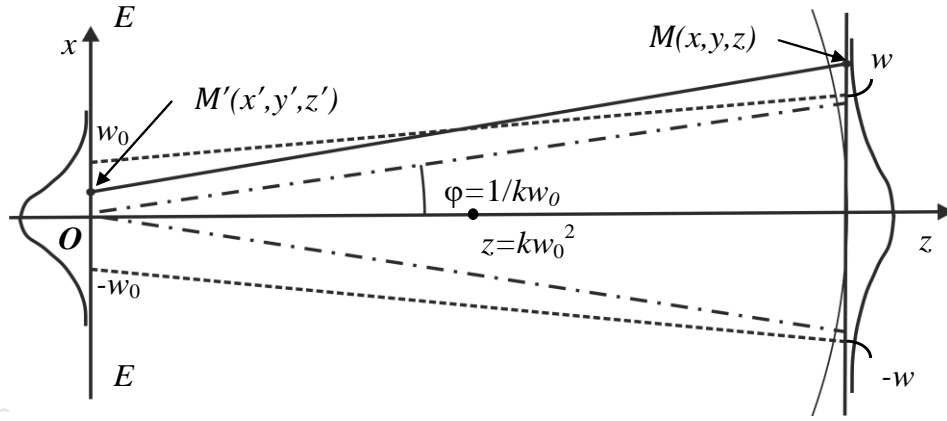


Рис.д1.2.

Скориставшись наближеннями дифракції Фраунгофера [1], можна вважати, що $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{z} = \text{const}$ (у дуже витягнутого прямокутного трикутника довжини більшого катета і гіпотенузи відрізняються мало) і винести цей множник з-під інтеграла в (д1.3), а r в показнику експоненти замінити наближеним виразом

$$r \approx r_0 - \frac{(xx' - yy')}{z} \quad \left(z \gg \frac{\varpi_0^2}{\lambda} \right) \quad (\text{д1.4})$$

де r – відстань між точками $M'(x', y', 0)$ та $M(x, y, z)$, $r_0 = OM$ – відстань між точками $M'(0, 0, 0)$ та $M(x, y, z)$; вираз (д1.4) отримано як розклад r по ступенях $\frac{x'}{z}$ та $\frac{y'}{z}$, де знехтувано квадратичними і вищими членами, а це припустимо при $z \gg \frac{\varpi_0^2}{\lambda} \approx kw_0^2$, тобто в зоні дифракції Фраунгофера.

Тоді в результаті інтегрування можна отримати:

$$E = 2\pi \frac{e_0 w_0^2}{z} \exp\left\{-\frac{(kw_0)^2}{2z^2} (x^2 + y^2)\right\} \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t)\} \quad (\text{д1.5})$$

Тобто дифрагована хвиля залишається сферичною (фаза є сталою на сферичній поверхні $r_0 = \text{const}$) і гаусовою (з шириною розподілу інтенсивності

$$\varpi = \frac{z}{kw_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{2w_0} z, \text{ або, в кутовій мірі: } \varphi \approx \frac{w}{z} = \frac{1}{kw_0} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{2w_0}).$$

Отримано, таким чином, ті ж результати, що і при дифракції Фраунгофера плоскої хвилі. Зокрема, енергія зосереджена в інтервалі кутів, що визначаються відношенням $\frac{\lambda}{w_0}$; для плоскої хвилі ця величина $\sim \frac{\lambda}{b}$, тобто b – ширина щілини – є аналогом $2w_0$; при цьому кількісно кутова ширина для гаусових пучків менша в π раз порівняно з плоскою хвилею, для якої $\varphi = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{b}$.

З (д1.5) також видно, що має місце *монотонне* – без осциляцій і ліній нульової інтенсивності – затухання інтенсивності при збільшенні кута дифракції від 0 до $\frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{2w_0}$, а також швидким спадом інтенсивності на «крилах»

розподілу. Ця властивість є важливою для оптичних приладів, в яких інколи спеціально вводять швидке затухання інтенсивності на периферійних ділянках площини дифракції (площини щілини) $z = 0$ (анодизація хвилі).

Важливо, що гаусовість пучка зберігається і в областях, проміжних між отвором, на якому відбувається дифракція, і зоною дифракції Фраунгофера ($z \gg \frac{w_0^2}{\lambda} \approx kw_0^2$), тобто ця властивість «гаусовості» зберігається для всіх z , в тому числі в зоні дифракції Френеля. Можна показати, що більш загальний випадок, порівняно з (д1.5), описується виразом:

$$E = \frac{2\pi}{k} e_0 \frac{w_0^2}{\sqrt{w_0^4 + (z/k)^2}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2w^2}\right\} \exp\left\{i\left(k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2R}\right) - \omega t + \alpha\right)\right\} \quad (\text{д1.6})$$

де $R = z + \frac{kw_0^2}{z}$; $\text{tg}\alpha = \frac{kw_0^2}{z}$, а w – ширина гаусового розподілу на відстані z від екрану:

$$w^2 = w_0^2 + \left(\frac{z}{kw_0}\right)^2, \quad (\text{д1.7})$$

квадрат якої, як видно, є сумою квадратів розподілу в площині $z = 0$ та розподілу, який розраховується за формулою розподілу в зоні Фраунгофера (див. (д1.5)).

Таким чином, ширина розподілу $w_0 \rightarrow w(z)$ стає функцією віддалі від екрана. При цьому:

- якщо $z \rightarrow \infty$ (практично при $z \gg kw_0^2 = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}$), то $w \rightarrow \frac{z}{kw_0}$, що властиво для дифракції Фраунгофера; при малих z ($z \rightarrow 0$; $z \ll kw_0^2$) $w \rightarrow w_0$.

- відстань $z = kw_0^2$ можна вважати межею між областями дифракції Френеля і Фраунгофера (при цьому, зокрема, $w = \sqrt{2}w_0$).

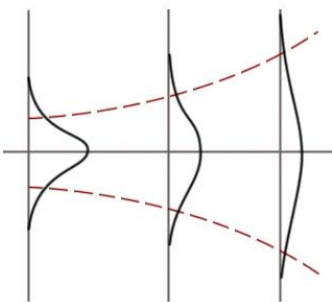


Рис.д1.3. Зростання ширини гаусового розподілу вздовж z від w_0 до асимптотичного фраунгоферового значення $\frac{z}{kw_0}$.

Можна бачити, що фаза хвилі (д1.6) є сталою на поверхні $z + \frac{(x^2+y^2)}{2R} = \text{const}$, де $R \approx z + \frac{(kw^2)^2}{z}$. (д1.8)

При малих значеннях $(x^2 + y^2)$ (тобто при $\frac{x^2}{R^2} \ll 1$, $\frac{y^2}{R^2} \ll 1$) це є рівняння сфери, і, отже, R є радіусом кривизни сферичного фронту хвилі. Якщо $z \gg kw_0^2$ то $R \approx z$, це відповідає дифракції Фраунгофера (R велике); якщо $z \ll kw_0^2$ то $R \approx \left(\frac{kw_0^2}{z}\right)^2$ і при $z \rightarrow 0$ хвильовий фронт стає плоским; мінімальне значення

радіусу кривини $R_{min} = 2kw_0^2$ досягається при $z = kw_0^2$ - тобто на межі областей дифракції Френеля і Фраунгофера.

Побудуємо зони Френеля в площині отвору $z = 0$. Радіус m -ї зони Френеля $r_m = \sqrt{mz\lambda}$. Якщо покласти $z = kw_0^2$ (межове значення), то для нього $r_m = \sqrt{m\pi} \sqrt{2}w_0$, тобто перша зона Френеля має радіус, в $\sqrt{\pi}$ разів більший від ширини розподілу амплітуди $\sqrt{2}w_0$ в площині $z = 0$. При $z > kw_0^2$ область концентрації поля буде мати розміри, ще менші у порівнянні з розмірами першої зони Френеля. А співвідношення $w_0 \ll r_1$ є однією з основних ознак дифракції Фраунгофера. Навпаки, наближення точки спостереження z до площини $z = 0$ призводить до зменшення радіусів зон Френеля, і на ширині розподілу амплітуд $\sqrt{2}w_0$ вкладається багато зон Френеля (приблизно $\frac{kw_0^2}{\pi z}$), і поширення хвиль в напрямку зростання потрібно розглядати методами аналізу дифракції Френеля. (Детально про дифракцію Френеля і Фраунгофера див. [1]).

З викладеного можна зробити загальний висновок: *Якщо в якомусь місці хвильовий фронт є сферичним, а розподіл амплітуди має вигляд гаусової кривої, то ці властивості зберігаються у всьому просторі, змінюється лише радіус кривини хвильового фронту і ширина розподілу амплітуди.*

Лінза. Це приклад оптичної системи, при проходженні якої гаусів пучок зберігається.

Якщо на збиральну лінзу падає гаусовий світловий пучок з нульовою кривизною хвильового фронту (тобто хвильовий фронт плоский), то після лінзи пучок сходиться в точку фокуса, і тепер кривина фронту хвилі стає $1/f$ (f - фокусна відстань). Тобто, до лінзи – радіус хвильового фронту $R = \infty$, кривина фронту $C = 0$; після лінзи радіус хвильового фронту $R = f$, кривина фронту $C = 1/f$

Якщо ж на лінзу падає сферичний світловий пучок з кривиною хвильового фронту $1/R$, (Рис.д1.4) то дія лінзи зведеться до зміни кривини хвильового фронту на величину $1/f$: $1/R' = 1/R - 1/f$.

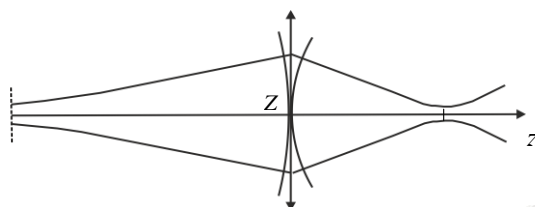


Рис.д1.4.

Фаза хвилі до проходження нею лінзи, в площині лінзи $z = z_0$:

$$k \left(z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) - \omega t + \alpha$$

Після лінзи:

$$k \left(z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{f} \right) \right) - \omega t + \alpha$$

Розподіл амплітуди при цьому не змінюється.

Таким чином, після проходження лінзи світловий пучок залишається гаусовим, але радіус кривини хвильового фронту тепер визначається як

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}$$

Якщо лінза достатньо короткофокусна, так що $f < R$, то $R' < 0$, тобто кривина хвильового фронту після лінзи буде мати протилежний знак, і тепер гаусів пучок буде мати вигляд хвилі, що сходиться

Інший приклад оптичної системи, для якої важлива наявність гаусового розподілу амплітуди світлового пучка – **оптичний резонатор**. Пучки гаусового типу існують в лазерах з певними типами резонаторів.

Нагадаємо, що оптичні резонатори є одним з основних елементів лазерів; вони забезпечують зворотний зв'язок, необхідний для взаємодії лазерного випромінювання з активним середовищем. Прикладом найпростішого оптичного резонатора є інтерферометр Фабрі-Перо, що складається з двох плоских паралельних дзеркал.

Оскільки поперечні розміри дзеркал і активного середовища обмежені, то поширення хвиль в резонаторі супроводжується дифракційними явищами.

Якщо дзеркала плоскі, то розподіл амплітуди хвилі по фронту такий, який виникає при дифракції кількох когерентних плоских хвиль, що падають на екран з отвором під невеликими кутами, а форма отвору відповідає формі дзеркал; функція розподілу амплітуди на хвильовому фронті в залежності від поперечних координат x, y , а також поздовжньої координати z тоді

$$f(x, y, z) \sim \sin\left(\frac{\pi}{a} mx\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} ny\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} qz\right)$$

А частота, що відповідає такій хвилі (моді генерації)

$$\omega_{mnq} = 2\pi \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{l}\right)^2}$$

Тут m, n, q – цілі числа, l – поздовжній розмір резонатора, a, b – поперечні розміри дзеркал.

Якщо ж дзеркала співвісні *сферичні*, то світло, що генерується, має вигляд гаусових пучків. Такі пучки здатні відтворювати себе на протязі одного циклу,

тобто для них виконується умова *циклічності*, що є необхідним для функціонування лазера.

Нормальні типи коливань в таких *активних інтерферометрах Фабрі-Перо* відповідають такому розподілу на апертурі інтерферометра, який самовідтворюється при послідовному проходженні між дзеркалами.

Приклад цього – гаусові пучки в сферичному резонаторі (рис.д1.5).

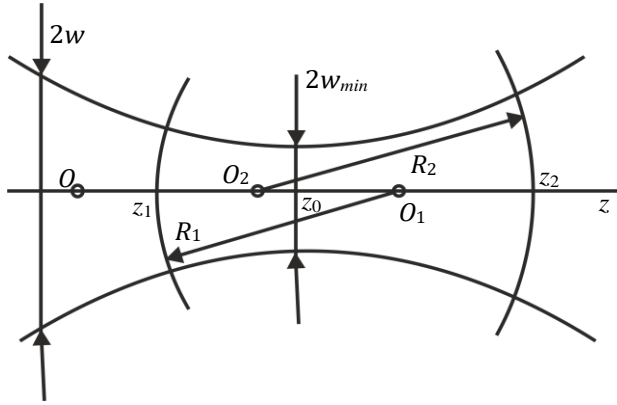


Рис.д1.5.

Можна показати що гаусів пучок, який існує в площині z_0 , залишається гаусовим і після відбиття в двох дзеркалах. Це зрозуміло вже з аналогії з лінзою: у проміжку від z_0 до z_1 пучок гаусів, після відбиття, – як і після лінзи – він залишається гаусовим; ці міркування справедливі і при відбиванні пучка від другого дзеркала z_2 .

При цьому, звичайно, діаметр пучка $2w$ має бути суттєво меншим діаметру дзеркал (практично в 2-3 рази: при цьому повз дзеркало проходить всього $\sim 0.01\%$ потоку) – тільки при такій умові зберігається «гаусовість» пучка (в іншому випадку діафрагмування пучка спотворює його гаусову форму).

Так, для конфокального резонатора (детальніше про нього див.нижче), якщо $\lambda = 0.633$ мкм (He-Ne лазер), $l = 1$ м, то $w_{min} = \sqrt{\lambda l / 4\pi} = 0.32$ мм, і необхідний розмір дзеркал лежить в межах 1.5-2 мм.

Серед сферичних резонаторів важливим (зокрема, із-за зручності юстування системи) є *конфокальний* (телескопічний) резонатор. В ньому фокуси дзеркал співпадають, а центри кривизни кожного з дзеркал знаходяться на сусідньому дзеркалі, $R_1 = R_2 = R$, $f = R/2$, $l = R = 2f$, (рис.д1.6а), збільшення такої системи рівне -1).

Поперечний розподіл поля в такому резонаторі наближено задається виразом

$$f(x, y) \sim H_m(x/w) H_n(y/w) \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2w^2} \right] \quad (\text{д1.9})$$

Тут H_m – поліноми Ерміта m - порядку, w - ширина розподілу.

Можна показати, що ширина розподілу мінімальна у фокальній площині резонатора, тобто при $z = z_0$ (див.рис.д1.5) і для конфокального резонатора рівна $w_0 = w_{min} = \sqrt{\lambda l / 4\pi}$. Цю величину називають ще *радіусом перетяжки* (або шийки) каустики. З виразу для w_{min} та (д1.6) можна бачити, що на дзеркалах, тобто при поширенні пучка на відстань $l/2$ від центру резонатора, де пучок найвужчий, ширина розподілу для основної моди 00 зростає вдвічі: $w = 2w_{min}$. Відповідно, необхідний розмір дзеркал конфокального резонатора при довжині 1 м – 1.5-2 мм. Також зрозуміло, що розбіжність вихідного пучка моди 00 лазерного випромінювання визначається не поперечними, а *повздожніми* розмірами резонатора.

Цей та інші типи резонаторів показано на рис.д1.6.

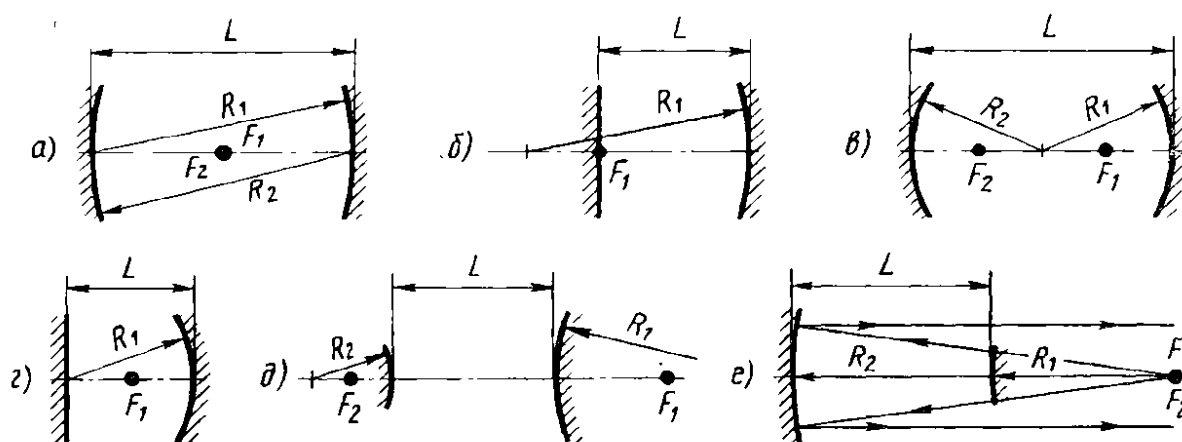


Рис.д1.6. Типи резонаторів зі сферичними дзеркалами: а) конфокальний ($R_1 = R_2 = L$), б) напівконфокальний ($R_1 = 2L$, $R_2 = \infty$), в) концентричний ($R_1 = R_2 = L/2$), г) напівконцентричний ($R_1 = L$, $R_2 = \infty$), д) нестійкий резонатор, загальний випадок, е) телескопічний нестійкий резонатор

Для оптичних резонаторів є дуже важливим питання *стійкості* резонатора, тобто збереження форми і ширини пучка при багатократному відбитті від дзеркал при мінімальних втратах. Відповідно, резонатори є *стійкими* і *нестійкими* (в яких пучок розширюється до діаметру, більшого ніж діаметри дзеркал, і, як наслідок, з великими радіаційними втратами).

Можна показати, що, якщо ввести параметр $g = (1 - \frac{L}{R})$, то для стійкого резонатора має виконуватись $0 \leq g_1 g_2 = (1 - \frac{L}{R_1})(1 - \frac{L}{R_2}) \leq 1$. Відповідно, резонатор зі сферичними дзеркалами $R_1 \neq R_2$ може бути стійким, а може бути і нестійким (рис.д1.7, області стійкості заштриховані).

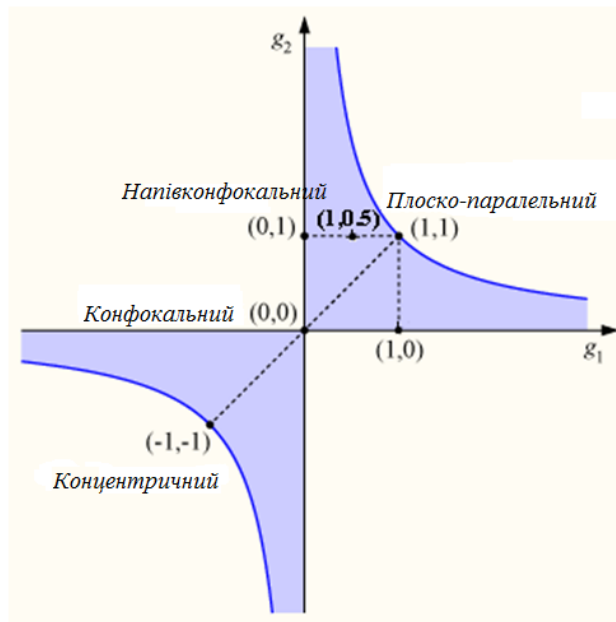


Рис.д1.7. Діаграма стійкості оптичних резонаторів.

- Точці (1,1) відповідає резонатор з плоскими дзеркалами (межовий);
- точці (0,0) відповідає конфокальний резонатор;
- точці (-1,-1) відповідає концентричний резонатор (межовий; якщо $R_1, R_2 > L/2$, резонатор стійкий);
- точкам (0.5,1) і (-0.5,-1) відповідає напівконфокальний резонатор;
- точкам (1,0) і (0,1) відповідає напівконцентричний резонатор (межовий; якщо $R_1 > L$, резонатор стійкий).

Для прикладу нижче, рис.д1.8, наведено вигляд поперечного розподілу лазерного пучка для різних мод генерації для плоского та сферичного резонаторів

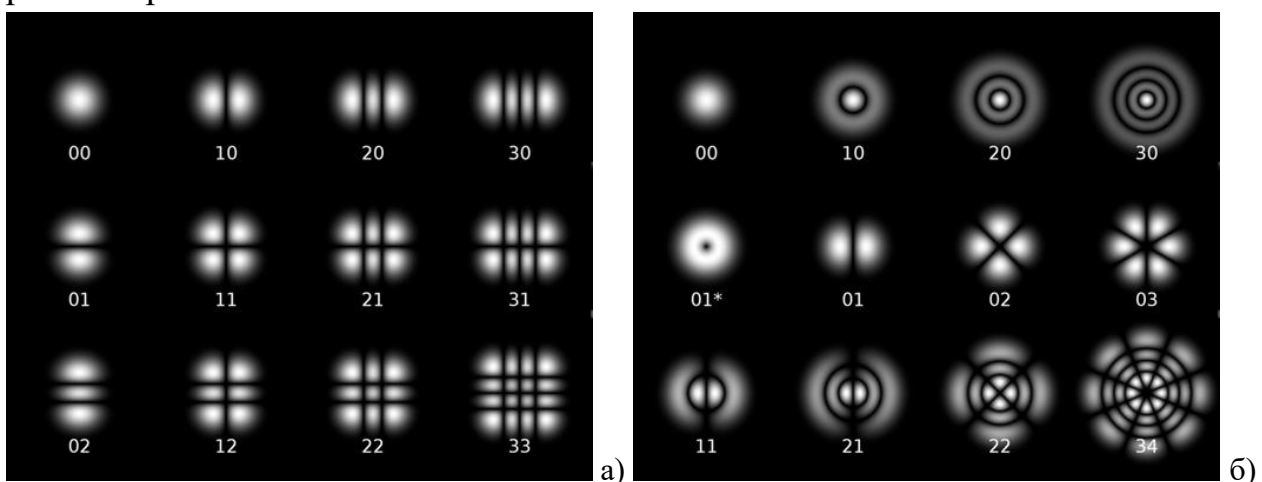


Рис.д1.8. Поперечні моди оптичного резонатора з плоскими квадратними дзеркалами (а) та зі сферичними дзеркалами (б).

РОЗДІЛ II

Поширення світла в шаруватих середовищах.

2.1. Поширення світла в шаруватих середовищах. Діелектричні плівки

Середовище, властивості якого є сталими на кожній площині, перпендикулярній до фіксованого напрямку (z), називається *шаруватим*. При цьому $\varepsilon=\varepsilon(z)$, $\mu=\mu(z)$, тобто діелектрична ε та магнітна μ проникності є функціями лише z .

Важливими в оптиці є *багатошарові* системи, тобто системи тонких плоскопаралельних плівок. Такі системи можна виготовити з заданими властивостями щодо, наприклад, відбивальної здатності, і пов'язаних з нею можливостей просвітлення оптики (створення покриттів, які суттєво зменшують відбивання від заданих поверхонь), розділення світлових пучків, створення фільтрів, поляризаторів та ін.

Розглянемо такі середовища на основі *теорії Абеле*.

Нехай є плоска монохроматична ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, $\mathbf{A} = \mathbf{E}, \mathbf{H}$) електромагнітна хвиля, що падає на шарувате середовище і далі в ньому поширюється. При цьому говорять про *ТЕ-хвилі* – поперечні *електричні* хвилі, вектор поля \mathbf{E} яких перпендикулярний до площини падіння, та *ТМ-хвилі* – поперечні *магнітні* хвилі, вектор поля \mathbf{H} яких перпендикулярний до площини падіння.

Будь-яку лінійно поляризовану хвилю можна розкласти на *ТЕ+ТМ* хвилі – вони є незалежними, оскільки є незалежними граничні умови для цих компонент (аналог цього при розгляді формул Френеля – представлення хвилі сумою компонент $E_{\parallel} + E_{\perp}$ щодо площини падіння). При цьому, якщо знайдено

розв'язки для TE -хвиль, то заміною $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\varepsilon \rightarrow -\mu^2$ можна отримати розв'язки для TM -хвиль. Тому тут ми будемо розглядати лише рівняння і розв'язки для TE -хвиль.

Нехай площина падіння - yz , напрямок z перпендикулярний шарам). При такому виборі можна записати скалярні рівняння Максвела для компонент E_x , H_y , H_z , ($E_y=E_z=H_x=0$ за вибором, рис.2.1), і з них, виключивши H_y , H_z , отримати хвильове рівняння для E_x [1]:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 E_x = \frac{d}{dz} (\ln \mu) \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Таким чином, компоненти поля E_x , H_y , H_z залежать лише від y та z .

Розв'язок рівняння (2.1) $E_x = E_x(y, z)$ шукаємо у вигляді $Y(y)U(z)$.

Тоді, після поділу змінних:

$$\frac{1}{Y} Y''_{yy} = -\frac{1}{U} U''_{zz} - n^2 k_0^2 + \frac{d(\ln \mu)}{dz} \frac{1}{U} U'_z \equiv -k^2 \quad (2.2)$$

Обидві частини рівняння залежать від різних змінних, отже, вони є константою.

При цьому для $Y(y)$ – рівняння просте:

$$\frac{1}{Y} Y''_{yy} = -k^2 = -k_0^2 \alpha^2 \quad (2.3)$$

(зручно ввести позначення $k^2 = k_0^2 \alpha^2$); його розв'язок:

$$Y = \text{const} \cdot \exp(ik_0 \alpha y) \quad (2.4)$$

Тобто:

$$E_x = U(z) \exp[i(k_0 \alpha y - \omega t)] \quad (2.5)$$

Із початкових скалярних рівнянь Максвела слідує, що H_y , H_z мають таку ж форму:

$$H_y = V(z) \exp[i(k_0 \alpha y - \omega t)]$$

$$H_z = W(z) \exp[i(k_0 \alpha y - \omega t)]$$

Рівняння для U, W, V – складніші – це є рівняння другого порядку (див.(2.2)). Наприклад, для U та V :

$$U''_{zz} - \frac{d}{dz} [(\ln \mu)] U'_z + k_0^2 (n^2 - \alpha^2) U = 0 \quad (2.6)$$

$$V''_{zz} - \frac{d}{dz} \left[\ln \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) \right] V'_z + k_0^2 (n^2 - \alpha^2) V = 0$$

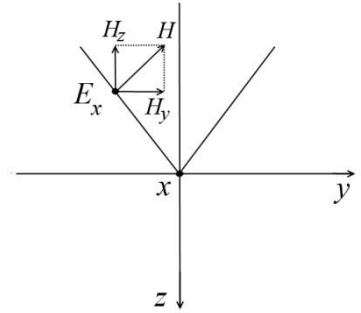


Рис.2.1.

² Умови Пістолькорса; крім того, при такій заміні не змінюється система рівнянь Максвела, або ж при такій заміні можна перейти від одного до іншого відповідного рівняння Максвела, еквівалентного з точки зору математики, тобто пошуку його розв'язків.

З рівнянь Максвелла для актуальних компонент поля E_x, H_y, H_z можна отримати рівняння зв'язку між U, W, V :

$$\begin{aligned} V'_z &= ik_0 (\alpha W + \varepsilon U) \\ U'_z &= ik_0 \mu V \\ \alpha U + \mu W &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Виключивши з першого з них W , отримаємо

$$V'_z = ik_0 (\alpha W + \varepsilon U) = ik_0 \left(\alpha \left(-\frac{\alpha}{\mu} U \right) + \varepsilon U \right) = ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U,$$

І тоді пара зв'язаних рівнянь для U та V має вигляд:

$$\begin{aligned} V'_z &= ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U \\ U'_z &= ik_0 \mu V \end{aligned} \quad (2.8)$$

Можна записати також і окремі рівняння для функцій U та V , типу правої частини в (2.2).

Скориставшись співвідношеннями Пістолькорса, можна записати відповідні рівняння та їхні розв'язки для TM -хвиль (де відмінні від нуля компоненти H_x, E_y, E_z):

$$\begin{cases} H_x = U(z) \exp[i(k_0 \alpha y - \omega t)] \\ E_y = -V(z) \exp[i(k_0 \alpha y - \omega t)] \\ E_z = -W(z) \exp[i(k_0 \alpha y - \omega t)] \end{cases} \quad \begin{cases} U'_z = i\varepsilon k_0 V \\ V'_z = ik_0 \left(\mu - \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \right) U \\ \alpha U - \varepsilon W = 0 \end{cases}$$

Оскільки взагалі, U, V, W – комплексні функції, то поверхня сталої амплітуди поля E_x (див.(2.5)) визначається умовою $|U(z)| = const$, оскільки $U(z) = |U(z)|e^{i\varphi(z)}$, а поверхня сталої фази умовою $\varphi(z) + k_0 \alpha y = const$. В загальному випадку ці поверхні не співпадають, а це означає, що хвилі – *неоднорідні*.

Для невеликого зміщення по поверхні сталої фази (dy, dz) :

$$\varphi'_z dz + k_0 \alpha dy = 0$$

Якщо θ - кут між нормаллю до поверхні сталої фази хвилі та віссю z (рис.2.2), то

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{dz}{dy} = \frac{k_0 \alpha}{\varphi'_z}$$

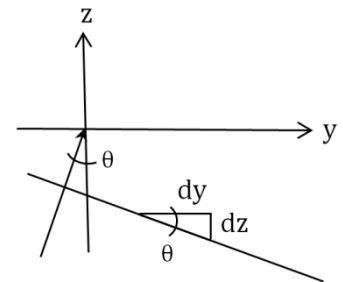


Рис.2.2.

Для однорідної плоскої хвилі

$$\varphi(z) = k_0 n z \cos \theta; \quad \alpha = n \sin \theta.$$

$$(\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_0 n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_0 n (y \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t,$$

$$\text{з чого випливає } \alpha = n \sin \theta; \quad \varphi(z) = k_0 n z \cos \theta)$$

Отже, співвідношення

$$\alpha = n \sin \theta = \text{const}$$

є узагальненням закону Снеліуса для шаруватих середовищ.

2.2. Характеристична матриця для шаруватого середовища.

Розв'язки записаних диференціальних рівнянь зручно представляти в матричній формі.

Оскільки рівняння для $U(z)$ та $V(z)$ – другого порядку, то їхні розв'язки можна записати у вигляді лінійної комбінації двох частинних розв'язків; причому ці частинні розв'язки $U_{1,2}(z)$, $V_{1,2}(z)$ мають задовольняти співвідношення (2.7).

$$\begin{cases} U'_1 = ik_0 \mu V_1 \\ V'_1 = ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U_1 \end{cases} \quad \begin{cases} U'_2 = ik_0 \mu V_2 \\ V'_2 = ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

або

$$\begin{cases} \frac{U'_1}{V_1} = ik_0 \mu \\ \frac{U'_2}{V_2} = ik_0 \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{V'_1}{U_1} = ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) \\ \frac{V'_2}{U_2} = ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

тобто

$$V_1 U'_2 - U'_1 V_2 = 0; \quad U_1 V'_2 - U_2 V'_1 = 0$$

Після віднімання отримуємо

$$\frac{d}{dz}(U_1 V_2 - U_2 V_1) = 0$$

або

$$D = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{vmatrix} = \text{const} \quad (2.11)$$

І це справедливо для двох довільних розв'язків системи (2.8). Отже, визначник D – *інваріант* системи рівнянь (що $D = \text{const}$ можна отримати і із закону збереження енергії).

Частинні розв'язки зручно вибрати так, щоб виконувалось:

$$\begin{aligned} U_1 &= f(z); \quad U_2 = F(z); \quad V_1 = g(z); \quad V_2 = G(z); \\ f(z=0) &= G(z=0) = 0; \quad F(z=0) = g(z=0) = 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

(на плівку падає одна плоска хвиля, «звичайна», її амплітуда не є $f(z)$).

Тоді розв'язок з $U(z=0) = U_0$, $V(z=0) = V_0$ можна записати як

$$U = F U_0 + f V_0; \quad V = G U_0 + g V_0 \quad (2.13)$$

Або, в матричній формі

$$Q = N Q_0 \quad (2.14)$$

де

$$Q = \begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \end{pmatrix}; \quad Q_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} F(z) & f(z) \\ G(z) & g(z) \end{pmatrix}$$

Або для оберненої матриці (так зручніше, як правило):

$$\begin{aligned} N^{-1}Q &= N^{-1}NQ_0 \\ Q_0 &= N^{-1}Q \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} N^{-1} &= M \\ Q_0 &= MQ \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$M = \begin{pmatrix} g(z) & -f(z) \\ -G(z) & F(z) \end{pmatrix}$$

Оскільки $D = \text{const}$ для будь-якого z , то, значить, і для $z = 0$, отже:

$$\det(N) = F(0)g(0) - G(0)f(0) = 1$$

$$\det(M) = g(0)F(0) + G(0)f(0) = 1$$

Таким чином $|N| = |M| = 1$.

Матриця M зв'язує x - та y -компоненти векторів \mathbf{E} та \mathbf{H} на площині $z = 0$ з цими ж компонентами на довільних площинах $z = \text{const}$. Тобто для повного визначення поля досить знати функції U, V . Отже, для того, щоб знати, як розповсюджується плоска монохроматична хвиля через шарувате середовище, його потрібно охарактеризувати відповідною унімодулярною ($|N| = |M| = 1$) матрицею розмірності 2×2 . Відповідно, матриця M називається *характеристичною матрицею* шаруватого середовища.

2.3. Форма характеристичної матриці

Однорідна діелектрична плівка:

Вважаємо параметри $\varepsilon, \mu, n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ сталими; $\alpha = n \sin \theta$, θ – кут між нормаллю до хвильового фронту та віссю z . Тоді відповідні до (2.6) рівняння для $U(z)$ та $V(z)$ TE -хвилі мають вигляд:

$$\begin{aligned} U''_{zz} + (k_0^2 n^2 \cos^2 \theta)U &= 0 \\ V''_{zz} + (k_0^2 n^2 \cos^2 \theta)V &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

З рівняннями зв'язку

$$\begin{aligned} U'_z &= ik_0 \mu V \\ V'_z &= ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U \\ (U''_{zz} = ik_0 \mu V'_z = ik_0 \mu ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) U = -k_0^2 (n^2 - \alpha^2)U = (k_0^2 n^2 \cos^2 \theta)U) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Розв'язок рівнянь (2.17), що задовольняє рівнянням зв'язку (2.18):

$$U(z) = A \cos(k_0 n z \cos \theta) + B \sin(k_0 n z \cos \theta)$$

$$V(z) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta (B \cos(k_0 n z \cos \theta) - A \sin(k_0 n z \cos \theta))$$

Відповідно, частинні розв'язки, які вдовольняють (2.12)

$$U_1 = f(z) = \frac{i}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin(k_0 n z \cos \theta)$$

$$V_1 = g(z) = \cos(k_0 n z \cos \theta)$$

$$U_2 = F(z) = \cos(k_0 n z \cos \theta)$$

$$V_2 = G(z) = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta \sin(k_0 n z \cos \theta)$$

Якщо покласти

$$p = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta$$

то характеристична матриця буде мати вигляд:

$$M(z) = \begin{pmatrix} \cos(k_0 n z \cos \theta) & -\frac{i}{p} \sin(k_0 n z \cos \theta) \\ -i p \sin(k_0 n z \cos \theta) & \cos(k_0 n z \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Тут z , власне, товщина плівки: $z = z - 0$.

Якщо зробити заміну $p \rightarrow q = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cos \theta$, то отримані рівняння будуть рівняннями для TM -хвилі, і можна записати відповідну характеристичну матрицю.

Шарувате середовище з тонких однорідних плівок

Нехай є два суміжних шаруватих середовища: від $z = z_0 = 0$ до $z = z_1$ та від $z = z_1$ до $z = z_2$. M_1 та M_2 – їхні характеристичні матриці. Тоді

$$Q_0 = M_1(z_1 - z_0)Q(z_1), \quad Q(z_1) = M_2(z_2 - z_1)Q(z_2)$$

Або

$$Q_0 = M(z_2)Q(z_2),$$

де

$$M(z_2) = M_1(z_1 - z_0)M_2(z_2 - z_1) \quad (2.20)$$

Якщо маємо неперервний ряд шаруватих середовищ в областях

$$0 \leq z \leq z_1; \quad z_1 \leq z \leq z_2 \dots z_{N-1} \leq z \leq z_N,$$

То, відповідно

$$Q_0 = M(z_N)Q(z_N) \quad (2.21)$$

$$M(z_N) = M_1(z_1 - z_0)M_2(z_2 - z_1) \dots M_N(z_N - z_{N-1}) \quad (2.22)$$

Таким чином, для будь-якого шаруватого середовища можна записати характеристичну матрицю: потрібно розбити це середовище на дуже велику кількість тонких плівок з товщинами $\delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_N$ і скористатись (2.22).

Якщо їхні товщини малі, то можна вважати ε , μ , n сталими величинами у кожній плівці. З (2.19) можна бачити, що у цьому випадку характеристична матриця j -ї плівки наближено рівна

$$M_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{p_j} k_0 n_j \delta z_j \cos \theta_j \\ -ip_j k_0 n_j \delta z_j \cos \theta_j & 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

($\cos x \approx 1$, $\sin x \approx x$ при малих x), а характеристична матриця M для всього середовища, яке представляється сукупністю тонких плівок, наближено рівна

$$M = \prod_{j=1}^N M_j = \begin{pmatrix} 1 & -ik_0 B \\ -ik_0 A & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

де

$$A = \sum_{j=1}^N p_j k_0 n_j \delta z_j \cos \theta_j = \sum_{j=1}^N \left(\varepsilon_j - \frac{\alpha^2}{\mu_j} \right) \delta z_j$$

$$B = \sum_{j=1}^N \frac{n_j}{p_j} \delta z_j \cos \theta_j = \sum_{j=1}^N \mu_j \delta z_j$$

(Зовнішня подібність матриць (2.23) та (2.24) обумовлена тим, що в (2.24) в результаті багатократного множення залишено члени лише першого порядку по δz (перше наближення)).

Переходячи до межі при $N \rightarrow \infty$ так, що $\delta z_j \rightarrow 0$, отримаємо:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -ik_0 \mathcal{A} \\ -ik_0 \mathcal{B} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

де

$$\mathcal{A} = \int \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) dz, \quad \mathcal{B} = \int \mu dz.$$

(інтегрування провадиться по всьому інтервалу зміни z).

Якщо потрібно отримати характеристичну матрицю більш точно, тобто в наступних наближеннях, то в розкладі залишаються величини $\cos(k_0 n \delta z \cos \theta)$, $\sin(k_0 n \delta z \cos \theta)$, а в добутку (2.24) члени більш високих порядків по δz ; крім того, оскільки в даному випадку середовище непоглинаюче, тобто μ , ε – дійсні, то характеристична матриця непоглинаючого шаруватого середовища має загальний вигляд

$$M = \begin{pmatrix} a & -ib \\ -ic & d \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

де a, b, c, d – дійсні величини.

2.4. Коефіцієнти відбивання і пропускання.

Нехай плоска хвиля падає на шарувате середовище товщиною $z = 0 \rightarrow z = z_1$. З обох сторін воно межує з однорідними напівнескінченими середовищами.

Отримаємо вирази для амплітуди та інтенсивності відбитої хвилі та хвилі, що пройшла (електричного вектора \mathbf{E} для TE -хвилі та магнітного \mathbf{H} для TM -хвилі). При цьому A, R, T – комплексні амплітуди падаючої, відбитої та хвилі, що пройшла; $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_l, \mu_l$ – діелектричні та магнітні проникності першого та останнього середовища, θ_1, θ_l – кути між нормальними до падаючої хвилі, та хвилі, що пройшла, і між віссю z (напрямок *стратифікації*).

Оскільки з граничних умов випливає неперервність тангенціальних компонент для \mathbf{E} та \mathbf{H} , і, крім того $\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}$, то для TE -хвилі можна отримати наступне:

$$\begin{cases} U_0 = A + R \\ V_0 = p_1(A - R) \end{cases} \quad \begin{cases} U_1(z_1) = T \\ V_1(z_1) = p_l T \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\text{де } p_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_1, \quad p_l = \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\mu_l}} \cos \theta_l$$

Чотири величини U_0, V_0, U_1, V_1 пов'язані співвідношенням (2.16) $Q_0 = MQ$, з чого можна отримати

$$\begin{aligned} A + R &= (m_{11} + m_{12}p_l)T \\ p_1(A - R) &= (m_{21} + m_{22}p_l)T \end{aligned}$$

де m_{ij} – значення матриці M при $z = z_1$.

З останніх співвідношень можна отримати вирази для амплітудних коефіцієнтів відбивання та пропускання:

$$r = \frac{R}{A} = \frac{(m_{11} + m_{12}p_l) - (m_{21} + m_{22}p_l)}{(m_{11} + m_{12}p_l) + (m_{21} + m_{22}p_l)} \quad (2.28)$$

$$t = \frac{T}{A} = \frac{2p_1}{(m_{11} + m_{12}p_l) + (m_{21} + m_{22}p_l)} \quad (2.29)$$

які є функціями параметрів m_{ij}, p_k .

Відповідно, відбивальна та пропускна здатність:

$$\mathcal{R} = |r|^2, \quad \mathcal{T} = \frac{p_l}{p_1} |t|^2 \quad (2.30)$$

При цьому фаза δ_r величини r є зміною фази при відбитті на першій межі поділу між однорідним та шаруватим середовищами, а фаза δ_t величини t – зміною фази при пропусканні на останній межі поділу між шаруватим та однорідним середовищами

Варто зазначити, що для пропускну здатності $\mathcal{T} \neq |t|^2$, оскільки в цьому випадку потрібно брати співвідношення не амплітуд поля, а «амплітуд енергії», тобто компонент вектора Пойнтінга, внаслідок чого і з'являється відношення параметрів p_i для межуючих середовищ. Маємо

$$\mathcal{R} = \frac{|R|^2}{|A|^2}, \quad \mathcal{T} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \frac{|T|^2}{|A|^2}$$

2.5. Однорідна діелектрична плівка

В оптиці досить широке застосування отримали вже одношарові покриття – однорідні плівки, що знаходяться між двома однорідними середовищами. Вважаємо, що середовище немагнітне ($\mu = 1$), товщина плівки h , розміщена вона між $z = 0$ та $z = z_1$. З виду характеристичної матриці для однорідної плівки (2.19) отримуємо:

$$m_{11}=m_{22}=\cos \beta, \quad m_{12}=-\frac{i}{p_2} \sin \beta, \quad m_{21}=-ip_2 \sin \beta \quad (2.31)$$

$$\text{де} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 h \cos \theta_2 \quad (2.32)$$

$$p_j = \sqrt{\epsilon_j} \cos \theta_j = n_j \cos \theta_j, \quad j=1,2,3$$

Вирази для коефіцієнтів r та t можна отримати, підставляючи m_{ij} з (2.31) у вирази (2.28), (2.29) при $l = 3$. При цьому остаточні формули для цих коефіцієнтів зручно виразити через відповідні r_{12} , r_{23} , t_{12} , t_{23} , пов'язані з відбиванням та пропусканням на першій та останній (тут – другій) межі поділу середовищ. Згідно з формулами Френеля [1] для TE -хвилі можна записати – для першої межі поділу:

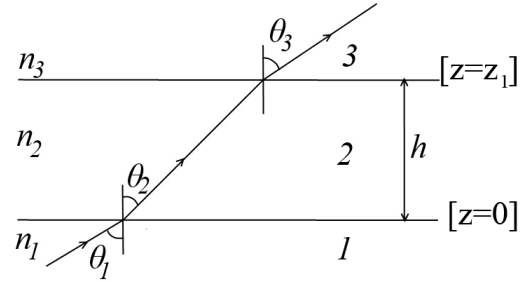


Рис.2.3.

$$r_{12} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \quad (2.33a)$$

$$t_{12} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2p_1}{p_1 + p_2} \quad (2.33b)$$

Аналогічні вирази можна записати і для другої межі поділу – для коефіцієнтів r_{23} та t_{23} . Підставивши ці вирази у формули (2.28), (2.29) для r та t , отримаємо

$$r = \frac{r_{12} + r_{23} e^{2i\beta}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2i\beta}} \quad (2.34)$$

$$t = \frac{t_{12} t_{23} e^{2i\beta}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2i\beta}} \quad (2.35)$$

Для відбивальної та пропускну здатності:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = |r|^2 &= \frac{r_{12} + r_{23} e^{2i\beta}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2i\beta}} \cdot \frac{r_{12} + r_{23} e^{-2i\beta}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-2i\beta}} = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{12} r_{23} e^{2i\beta} + r_{12} r_{23} e^{-2i\beta}}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + r_{12} r_{23} e^{2i\beta} + r_{12} r_{23} e^{-2i\beta}} = \\ &= \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12} r_{23} \cos 2\beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + r_{12} r_{23} \cos 2\beta} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\mathcal{T} = \frac{p_3}{p_1} |t|^2 = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \cdot \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + r_{12} r_{23} \cos 2\beta} \quad (2.37)$$

При цьому $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$.

З (2.34), (2.35) можна отримати вирази і для зміни фаз:

$$\operatorname{tg} \delta_r = \operatorname{tg}(\operatorname{arg} r) = \frac{r_{23}(1 - r_{12}^2) \sin 2\beta}{r_{12}(1 + r_{23}^2) + r_{23}(1 + r_{12}^2 \cos 2\beta)} \quad (2.38)$$

$$\operatorname{tg} \delta_t = \operatorname{tg}(\operatorname{arg} t) = \frac{1 - r_{12} r_{23}}{1 + r_{12} r_{23}} \operatorname{tg} \beta \quad (2.39)$$

Висновки.

З аналізу отриманих формул можна зробити висновки щодо можливого застосування однорідних діелектричних плівок.

1. Формули (2.36), (2.37) для відбивальної та пропускну здатності \mathcal{R} , \mathcal{T} не змінюється, якщо товщина плівки зміниться на певну величину Δh :

$$h \rightarrow h + \Delta h, \quad \Delta h = \frac{\lambda_0}{2n_2 \cos \theta_2} \quad (2.40)$$

Це можна бачити з того, що формули (2.36), (2.37) залишаються незмінними при $\beta \rightarrow \beta + \pi$: $\cos 2\beta$ в (2.36), (2.37) не змінюється при $2\beta \rightarrow 2\beta + 2\pi$ або при $\beta \rightarrow \beta + \pi$, тобто:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 h \cos \theta_2$$

$$\beta + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 (h + \Delta h) \cos \theta_2$$

$$\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 \Delta h \cos \theta_2$$

звідки

$$\Delta h = \frac{\lambda_0}{2n_2 \cos \theta_2} \quad (2.41)$$

Тобто *плівки, які відрізняються на $\Delta h = \frac{\lambda_0}{2n_2 \cos \theta_2}$ мають одну і ту ж відбивальну і пропуску здатності.*

2. Оптична товщина $H = n_2 h$, при якій відбивальна здатність \mathcal{R} має максимум або мінімум:

$$\text{Умова цього: } \frac{d\mathcal{R}}{dH} = 0$$

Це означає, що в (2.36) після диференціювання

$$\sin 2\beta = 0, \text{ або } 2\beta = m\pi \ (m=0,1,2,3\dots), \text{ або } \frac{m\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n h \cos \theta, \text{ або}$$

$$n h \equiv H = \frac{m\lambda_0}{4 \cos \theta} \quad (2.42)$$

Тобто, *якщо для оптичної товщини плівки виконується умова $h \equiv H = \frac{m\lambda_0}{4 \cos \theta}$, то відбивальна здатність \mathcal{R} досягає максимуму чи мінімуму.*

При цьому потрібно розрізняти два випадки:

а) m – непарне, тобто:

$$H = \frac{(2k+1)\lambda_0}{4\cos\theta_2} = \frac{\lambda_0}{4\cos\theta_2}; \frac{3\lambda_0}{4\cos\theta_2}; \frac{5\lambda_0}{4\cos\theta_2}; \dots \quad (2.43)$$

(«чвертьхвильові» плівки); тоді $2\beta = (2k+1)\pi$, $\cos 2\beta = -1$, і з (2.36)

маємо:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{r_{12}-r_{23}}{1-r_{12}r_{23}} \right)^2$$

для нормального падіння, з (2.33) можна отримати

$$r_{12} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$$

$$r_{23} = \frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}$$

і тоді

$$\mathcal{R} = \left(\frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2} \right)^2 \quad (2.44)$$

б) m – парне, тобто оптична товщина:

$$H = \frac{2k\lambda_0}{4\cos\theta_2} = \frac{\lambda_0}{2\cos\theta_2}, \frac{2\lambda_0}{2\cos\theta_2}, \frac{3\lambda_0}{2\cos\theta_2}, \dots$$

(«півхвильові» плівки); тоді $2\beta = 2k\pi$, $\cos 2\beta = 1$, і з (2.36) маємо:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{r_{12}+r_{23}}{1+r_{12}r_{23}} \right)^2$$

А для нормального падіння можна отримати

$$\mathcal{R} = \left(\frac{n_1-n_3}{n_1+n_3} \right)^2 \neq f(n_2) \quad (2.45)$$

Тобто \mathcal{R} не залежить від показника заломлення n_2 плівки.

Для похилого падіння необхідно всього лише величини n_j замінити на $n_j \cos\theta_j$; висновок не зміниться. Таким чином, **плівка з оптичною товщиною $\frac{m\lambda_0}{2\cos\theta_2}$, $m=1,2,3,\dots$ не впливає на інтенсивність відбитого та пропущеного світла.**

Для визначення характеру цих екстремальних значень \mathcal{R} в залежності від оптичної товщини H необхідно дослідити знак другої похідної $\frac{d^2\mathcal{R}}{dH^2}$.

Для максимуму має бути $\frac{d^2\mathcal{R}}{dH^2} < 0$, для мінімуму – $\frac{d^2\mathcal{R}}{dH^2} > 0$.

Можна показати, що при оптичних товщинах $H = \frac{m\lambda_0}{4\cos\theta}$, $m=1,2,3,\dots$ це відповідає знаку виразу

$$(-1)^m \cdot r_{12} \cdot r_{23} \cdot (1 + r_{12}^2 \cdot r_{23}^2 - r_{12}^2 - r_{23}^2)$$

А саме, для максимуму:

$$(-1)^m \cdot r_{12} \cdot r_{23} \cdot (1 + r_{12}^2 \cdot r_{23}^2 - r_{12}^2 - r_{23}^2) > 0$$

Для мінімуму:

$$(-1)^m \cdot r_{12} \cdot r_{23} \cdot (1 + r_{12}^2 \cdot r_{23}^2 - r_{12}^2 - r_{23}^2) < 0$$

Конкретно, при нормальному падінні:

$$\max: (-1)^m \cdot (n_1 - n_2) \cdot (n_2 - n_3) > 0$$

$$\min: (-1)^m \cdot (n_1 - n_2) \cdot (n_2 - n_3) < 0.$$

Оскільки звичайно $n_1 \approx 1$ (повітря), то для плівки з оптичною товщиною $\frac{\lambda_0}{4}, \frac{3\lambda_0}{4}, \frac{5\lambda_0}{4}, \dots$ («чвертьхвильові» плівки) відбивна здатність \mathcal{R} досягає максимуму чи мінімуму в залежності від того, чи перевищує показник заломлення плівки (n_2) показник останнього середовища (n_3) чи ні. Для «півхвильових» плівок $\frac{\lambda_0}{2}, \frac{2\lambda_0}{2}, \frac{3\lambda_0}{2}, \dots$ – навпаки – множник $(-1)^m$ має інший знак (+).

Як ілюстрацію викладеного, див. рис.2.4.

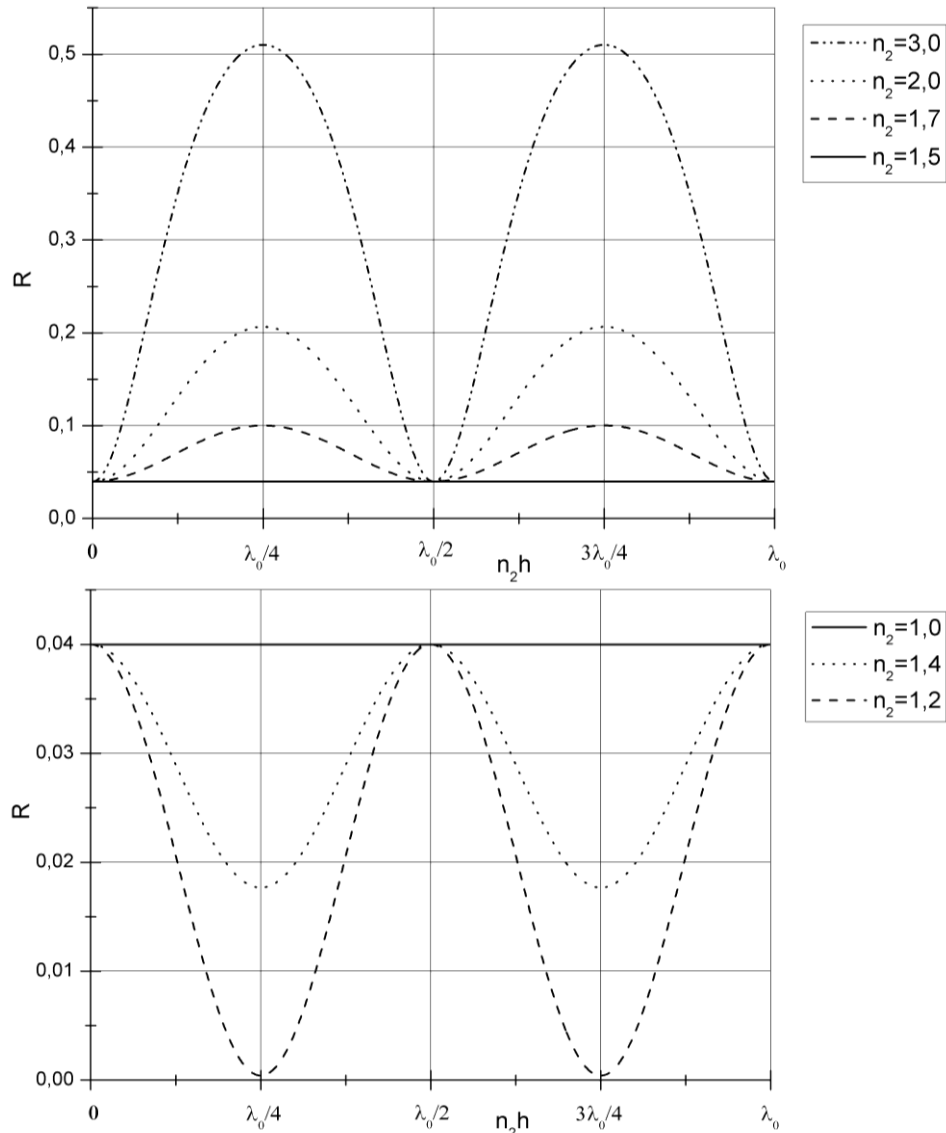


Рис.2.4.

Відбивальна здатність плівки з різним n_2 ; $n_1 = 1, n_3 = 1.5, \theta_1 = 0$.

Застосування:

1. Чвертьхвильові пластинки (плівки) товщиною $(2k+1)\frac{\lambda}{4}$ з невеликим показником n_2 можна застосовувати в якості просвітлюючого покриття для зменшення втрат на відбивання від поверхні оптичних елементів (оскільки \mathcal{R} досягає мінімуму («просвітлення оптики»)).

При нормальному падінні ($\theta_1 = 0$) $\mathcal{R} = 0$ точно при $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ (див.(2.44)), і якщо $n_1 = 1$ (повітря), $n_3 = 1,5$ (скло), то має бути $n_2 \approx 1.22$. Такої речовини, на жаль, немає.

2. Проте, як виявляється, можна забезпечити $\mathcal{R} = 0$ при похилому падінні для *ТМ*-хвилі (при цьому \mathbf{E} лежить в площині падіння), але не для *ТЕ*. Тобто, можна забезпечити одночасно $\mathcal{R}_{\parallel} = 0$, $\mathcal{R}_{\perp} \neq 0$, і, отже, така тонка плівка є *поляризатором*, що працює на відбивання.

3. Навпаки, якщо плівка має досить великий n_2 (на склі, $n_3 = 1,5$), то можна досягти значень $\mathcal{R} \approx 0,5$ (тобто і $\mathcal{T} \approx 0,5$), а така плівка може слугувати досить хорошим *подільником пучка* (реально — Sb_2S_3 , $n \approx 2,8$, тоді $\mathcal{R} \approx \mathcal{T} \approx 0,46$, але 8% поглинається; без поглинання — TiO_2 , $n \approx 2,45$, або ZnS , $n \approx 2,3$; для них $\mathcal{R} \approx 0,3$).

4. Ще одне застосування однорідних плівок — *фільтри*, дія яких заснована на явищі повного внутрішнього відбивання на першій поверхні поділу. При цьому має бути

$$n_1 \sin \theta_1 > n_2, \quad n_1 \sin \theta_1 < n_3, \quad \text{а також } n_2 \cos \theta_2 = -i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2},$$

(останній вираз можна отримати із співвідношень

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad n_2 \cos \theta_2 = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{(n_2/n_1)} - 1})$$

тобто, якщо взяти

$$\beta = k_0 n_2 h \cos \theta_2 = ib, \quad \text{де } b = -\frac{2\pi}{\lambda_0} h \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2},$$

то отримаємо

$$r = \frac{r_{12} + r_{23} e^{-2b}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-2b}}$$

оскільки $|r_{12}| = |r_{23}| = 1$, то $r_{12} = e^{i\varphi_{12}}$, $r_{23} = e^{i\varphi_{23}}$, і

$$\mathcal{R} = |r|^2 = \frac{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\varphi_{12} - \varphi_{23})}{e^{2b} + e^{-2b} + 2\cos(\varphi_{12} + \varphi_{23})} \quad (2.46)$$

При великих b відбивальна здатність $\mathcal{R} \sim 1$, але $b \sim \frac{1}{\lambda}$, отже *короткі* хвилі не пропускаються, і така плівка є *фільтром нижніх частот*, що пропускає лише довгі хвилі.

2.6. Періодичні шаруваті структури

В шаруватому періодичному середовищі з періодом h діелектрична та магнітна проникності, як і раніше, залежать лише від z , причому

$$\varepsilon(z + jh) = \varepsilon(z), \quad \mu(z + jh) = \mu(z),$$

j – ціле число з заданого інтервалу: $1 \leq j \leq N$.

Якщо M – характеристична матриця одного періоду,

$$M(Nh) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

то матриця всієї плівки з N періодів

$$M(h) = [M(h)]^N \quad (2.48)$$

Звичайно багатошарова періодична система складається з однорідних шарів, що чергуються, з малим n_2 та великим n_3 показниками заломлення та товщинами h_2 та h_3 (тобто період такої структури $h = h_2 + h_3$). Ці шари розміщені між двома однорідними середовищами з показниками n_1 та n_l .

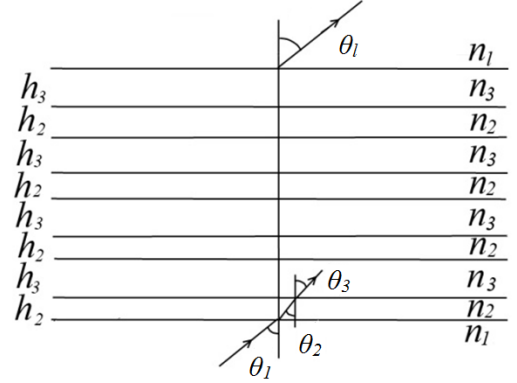


Рис.2.5.

Вважаємо середовище немагнітним ($\mu = 1$). Як і раніше, див. (2.32), можна ввести зручні параметри

$$\beta_j = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_j h_j \cos \theta_j \quad p_j = \sqrt{\varepsilon_j} \cos \theta_j = n_j \cos \theta_j, \quad j=2,3.$$

і виразити через них матричні елементи в матрицях кожного шару $M_2(h_2)$, $M_3(h_3)$ та періоду $M(h) = M_2(h_2) \cdot M_3(h_3)$.

$$M_j(h_j) = \begin{bmatrix} \cos \beta_j & -\frac{i}{p_j} \sin \beta_j \\ -ip_j \sin \beta_j & \cos \beta_j \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Характеристична матриця всієї багатошарової плівки з N періодами та $2N$ шарами

$$M_{2N}(Nh) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

має складний (але визначений) вигляд, де \mathcal{M}_{ij} є функціями β_j , p_j та поліномів Чебишева порядку $N-2, N-1$ складного аргументу $a = a(\beta_j, p_j)$. (Детальніше див. [1]).

Важливим окремим випадком є плівка, в якій обидва шари h_2 та h_3 періоду мають однакову оптичну товщину (звичайно, $\frac{\lambda_0}{4}$), тобто коли $n_2 h_2 = n_3 h_3$, а падіння – нормальне ($\theta_1 = 0$). Тоді

$$\beta_2 = \beta_3 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 h_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_3 h_3 = \beta$$

І для чвертьхвильових плівок ($n_2 h_2 = n_3 h_3 = \frac{\lambda_0}{4}$) при нормальному падінні $\beta = \frac{\pi}{2}$, $p_2 = n_2$, $p_3 = n_3$ матриця одного періоду (2.47) має простий вигляд

$$M(h) = \begin{bmatrix} -\frac{n_3}{n_2} & 0 \\ 0 & -\frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

А вся характеристична матриця багатошарової періодичної системи (з повним числом шарів (плівок) $2N$) з $n_2 h_2 = n_3 h_3 = \frac{\lambda_0}{4}$ має вигляд

$$M_{2N}(Nh) = \begin{bmatrix} \left(-\frac{n_3}{n_2}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n_2}{n_3}\right)^N \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Згідно з (2.28) та (2.30) можна знайти відбивальну здатність \mathcal{R} такої плівки:

$$\mathcal{R}_{2N} = \left(\frac{1 - \frac{n_1}{n_3} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1 + \frac{n_1}{n_3} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}} \right)^2 \quad (2.53)$$

Звідки видно, що відбивальна здатність \mathcal{R}_{2N} зростає при збільшенні відношення n_2/n_3 , а для фіксованого значення цього відношення зростає з ростом N .

Для прикладу наведемо характеристики багатошарового покриття для одного з типів інтерферометра Фабрі-Перо. Плівкові шари наносять так, що показники заломлення утворюють ряд $n_2, n_3, n_2, n_3, \dots, n_2, n_3, n_2$. Характеристична матриця такої системи

$$M_{2N+1} = M_{2N} M$$

де M_{2N} визначається (2.52), а M – характеристична матриця останнього шару такої плівки.

Для чвертьхвильових плівок при нормальному падінні M_{2N} визначається виразом (2.52), а матриця останнього шару визначається за (2.49) при $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, відповідно, вся матриця M_{2N+1} має вигляд

$$M_{2N+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{n_2} \left(-\frac{n_3}{n_2}\right)^N \\ -in_2 \left(-\frac{n_2}{n_3}\right)^N & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

А відбивальна здатність такої плівки

$$\mathcal{R}_{2N+1} = \left(\frac{1 - \frac{n_2 n_2}{n_1 n_l} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1 + \frac{n_2 n_2}{n_1 n_l} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}} \right)^2 \quad (2.55)$$

Видно, що відбивальна здатність швидко зростає зі зростанням відношення n_2/n_3 та N ; див. також таблицю, в якій наведено значення відбивальної здатності \mathcal{R}_{2N+1} в залежності від кількості періодів N , при нормальному падінні ($n_1 = 1$, $n_2 = 2.3$, $n_3 = 1.35$, $n_2 h_2 = n_3 h_3 = \frac{\lambda_0}{4}$, $\lambda_0 = 546$ нм, $\theta_1 = 0$).

N	\mathcal{R}_{2N+1}
0	0.306
1	0.676
2	0.872
3	0.954
4	0.984

РОЗДІЛ III

Поширення світла в однорідному анізотропному середовищі

3.1. Поняття про тензор ϵ_{ij} . Елементи симетрії фізичних об'єктів

Середовище, властивості якого не залежать від напрямку, або існує *симетрія щодо вибору напрямку*, є *ізотропним*; якщо ж властивості середовища залежать від напрямку, то воно є *анізотропним*. Щодо одних властивостей середовище може бути ізотропним, щодо інших – анізотропним. Може різнитися також ступінь анізотропії. В кристалах анізотропія обумовлена структурою кристалічної ґратки. Завдяки тому, що в кристалах в різних напрямках різними є відстані і сили зв'язку між частинками, майже всі властивості в кристалах є різними в різних напрямках – але однаковими в симетричних напрямках.

В подальшому розгляді вважаємо, що середовище є немагнітним ($\mu=1$), непровідним (провідність $\sigma = 0$), та *електрично анізотропним* – тобто електричне збудження (індукція) залежить від напрямку електричного поля. Тоді

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (3.1)$$

($i, j = (x, y, z)$, або $(1, 2, 3)$).

Тут діелектрична проникність вже є не скаляром, а *тензором другого рангу* – *тензором діелектричної проникності* ϵ_{ij} . Відповідно, в цьому випадку вектори \mathbf{D} та \mathbf{E} не паралельні.

Це означає, наприклад, що в присутності електричного поля \mathbf{E} в середовищі виникає поляризація \mathbf{P} , і ці два вектори також *не паралельні*:

$$P_i = \alpha_{ij} E_j \quad (3.2)$$

α_{ij} - тензор поляризованості (діелектричної сприйнятливості).

Оскільки

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

$$D_i = E_i + 4\pi P_i = E_i + 4\pi\alpha_{ij} E_j = \delta_{ij} E_j + 4\pi\alpha_{ij} E_j = (\delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}) E_j = \epsilon_{ij} E_j,$$

де δ_{ij} - символ Кронекера.

Отже,

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij} \quad (3.3)$$

В ізотропному середовищі $\alpha_{ij} = \alpha$ – скаляр, відповідно, співвідношення (3.2) має вигляд:

$$P_i = \alpha E_i$$

Тому, власне, $\mathbf{P} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$ - тобто поляризуюча дія поля однакова в усіх напрямках.

В загальному випадку, з (3.2) маємо:

- якщо навіть $\mathbf{E} = E(E_x, 0, 0)$ – є лише одна компонента електричного поля, то $\mathbf{P} = P(P_x, P_y, P_z)$. Тобто одна компонента електричного поля породжує всі компоненти поляризації:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x; \quad P_y = \alpha_{yx}E_x; \quad P_z = \alpha_{zx}E_x$$

- і навпаки: кожна компонента вектора поляризації обумовлена всіма компонентами поля:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z$$

Взагалі, зв'язок між поляризацією \mathbf{P} та полем \mathbf{E} нелінійний:

$$P_i = \alpha_{ij}E_j + \beta_{ijk}E_jE_k + \gamma_{ijkl}E_jE_kE_l + \dots \quad (3.4)$$

Проте в даному розгляді ми обмежимося *наближенням лінійної оптики*, тобто будемо вважати, що зв'язок між поляризацією та полем лінійний: $P_i = \alpha_{ij}E_j$.

Властивості ε_{ij} :

♦В загальному випадку тензор ε_{ij} – комплексний: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$. Уявна частина тензора з'являється в середовищі з поглинанням.

♦В області, далекій від резонансів (близько до резонансу $\varepsilon \sim \frac{1}{\omega - \omega_0}$), тензор ε – симетричний: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$; відповідно, симетричним є і тензор α_{ij} . Доводиться це з закону збереження енергії електромагнітного поля (див. [1]), для якого вираз для густини енергії можна записати у вигляді:

$$W = W_e + W_m, \quad W_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} E_k \varepsilon_{kl} E_l, \quad W_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{8\pi} \mu H^2$$

♦Оскільки будь-який симетричний дійсний тензор другого рангу можна привести до головних осей, тобто вибрати певну систему відліку – так звану *систему головних осей тензора*, де тензор має діагональний вигляд, – можна вибрати таку систему і для тензора ε :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & & \\ & \varepsilon_{22} & \\ & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (\varepsilon_{11} = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_z) \quad (3.5)$$

При цьому вважається, що тензор ε_{ij} – дійсний, тобто поглинання не враховано.

В реальних кристалах ці осі пов'язані з кристалографічними осями, які, взагалі кажучи, визначають симетрію кристалу.

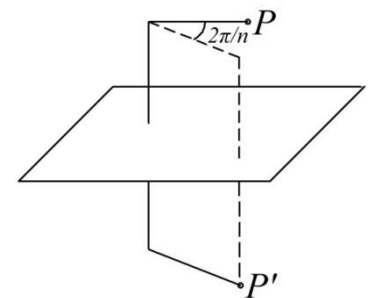
Елементи симетрії фізичних об'єктів

В широкому значенні цього слова *симетрія* означає наявність в об'єктах та явищах чогось незмінного, *інваріантного* по відношенню до певних перетворень. Геометрична симетрія фізичного тіла, конкретно, визначається тими переміщеннями, які суміщають тіло саме з собою (*перетворення симетрії*). Будь-яке з можливих перетворень симетрії можна представити у вигляді трьох основних типів перетворень:

- **Поворот тіла на певний кут навколо вибраної осі.** Якщо тіло суміщається саме з собою при повороті навколо деякої осі на кут $2\pi/n$, то така вісь називається *віссю симетрії n -го порядку*, де $n=1,2,3,4,6$. Цю операцію позначають C_n . Значення $n=1$ відповідає повороту на 2π (або на 0), тобто тотожному перетворенню. Якщо повторювати операцію повороту кілька разів, можна отримати повороти на кути $-2(2\pi/n)$, $3(2\pi/n)$, які теж суміщають тіло з самим собою; ці повороти позначають як C_n^2 , C_n^3 , ... C_n^k ... Зробивши поворот n разів, ми отримаємо тотожне перетворення: $C_n^n = E$. В реальних кристалах не зустрічається осей 5-го порядку, та осей порядку вище 6-го; в молекулах осі 5-го порядку зустрічаються дуже рідко. Для систем з аксіальною та сферичною симетрією характерними є осі порядку $n=\infty$, C_∞ .

- **Дзеркальне відображення в деякій площині.** Якщо тіло суміщається з самим собою при дзеркальному відбиванні в деякій площині, то така площина називається *площиною симетрії*. Операцію відбивання позначають символом σ . Двократне відбивання в одній площині є тотожне перетворення: $\sigma^2 = E$.

- **Дзеркально-поворотні перетворення.** Вони є комбінацією перших двох. Тіло має *дзеркально-поворотну вісь n -го порядку*, якщо воно суміщається з самим собою при повороті навколо цієї осі на кут $2\pi/n$ і подальшому відбиванні в площині, перпендикулярній до осі (див. рис.). Дзеркально-поворотні перетворення позначають символом S_n . Позначаючи відбивання в площині, перпендикулярній до даної осі, як σ_h , можемо написати:



$S_n = C_n \sigma_h = \sigma_h C_n$. Важливим окремим випадком є дзеркально-поворотна вісь другого порядку. Поворот на кут π з наступним відбиванням в площині, перпендикулярній до осі обертання, еквівалентний перетворенню *інверсії*, що відповідає зміні знаку всіх координат точки, при цьому будь-яка пряма, проведена через особливу точку – *центр симетрії*, або *центр інверсії* – зустрічає відповідні (однакові) точки тіла по обидві сторони від неї і на однаковій відстані (тобто точка P тіла перетворюється в точку P' , що лежить на продовженні прямої, яка з'єднує P з точкою O перетину осі з площиною так, що відстані OP і OP' однакові).

- Тіло, симетричне відносно такого перетворення, має *центр симетрії*, або *центр інверсії*. Операцію інверсії позначають символом I : $I \equiv S_2 = C_2 \sigma_h$. Також $I \sigma_h = C_2$, $I C_2 = \sigma_h$, тобто наявність будь-яких двох елементів з трьох (I , C_2 , σ) означає наявність і третього.

Необхідно зазначити, що S_n є новим елементом симетрії (крім поворотів і відбиття) *лише при парному n* (оскільки має бути $S_n^n = E$, а це виконується лише при парному n). При непарному n : $S_n^n = \sigma_h$ (оскільки кут повороту – 2π , як і має бути, а непарна кількість відбиттів еквівалентна одному відбиттю). При непарному n елемент S_n зводиться до одночасної наявності незалежних C_n та σ_h .

Замість дзеркально-поворотних осей можна ввести інші осі, які також є добутком двох елементів – повороту C_n та інверсії I ; відповідні осі називаються *інверсійними*. Із дзеркально-поворотними осями S_n вони пов'язані наступним чином: $\bar{1} = C_1 I = I = S_2$; $\bar{2} = C_2 I = S_1 = \sigma_h$; $\bar{3} = C_3 I = S_6$; $\bar{4} = C_4 I = S_4$; $\bar{6} = C_6 I = S_3$. Звертаємо увагу, що $\bar{3} = S_6$, $\bar{6} = S_3$! Взагалі кажучи, використання інверсійних осей замість дзеркально-поворотних осей є більш коректним.

Також зазначимо, що, крім перерахованих випадків (перетворень симетрії), об'єкт може суміститись сам з собою в результаті *паралельного переносу* на певну відстань. Зрозуміло, що таке перетворення може існувати лише для необмеженого середовища (яким можна вважати, зокрема, кристалічну ґратку). Молекула, очевидно, таким типом симетрії не характеризується, а для кристалічних середовищ *трансляція* як елемент симетрії має дуже велике значення.

Всього є 32 кристалографічні класи кристалів (32 точкові групи симетрії), вони групуються в 7 сингоній (систем), які визначаються наявністю певних елементів симетрії; системи, в свою чергу, поділяються на три категорії.

а) низька категорія (три системи):

- *триклінна* (тричі похила) – немає ні осей, ні площин симетрії, може бути центр інверсії. Форма елементарної комірки – косий паралелепіпед. Тут

головні осі тензора ϵ_{ij} не пов'язані з кристалографічними, більш того, їхній напрям є функцією частоти – це так звана *дисперсія осей*.

Зазначимо, що тут всюди вважаємо, що $\epsilon = \epsilon(\omega)$, а не $\epsilon = \epsilon(\omega, \mathbf{k})$, тобто має місце *частотна дисперсія*, а *просторовою* дисперсією нехтуємо (далі буде). Фізично це означає, що електрична поляризація в даній точці визначається значенням поля *лише в цій точці* (локальність зв'язку).

- *моноклінна* - є вісь другого порядку C_2 або площина симетрії, яка орієнтована вздовж однієї з головних осей ϵ_{ij} . В таких кристалах $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$;

- *ромбічна* – є три перпендикулярних між собою осі C_2 , головні осі тензора ϵ_{ij} орієнтовані вздовж цих осей. В таких кристалах також $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$.

Кристали з такою симетрією є **двовісними**.

б) середня категорія (три системи):

- *тригональна, тетрагональна та гексагональна* системи з симетрією, серед елементів якої є – що важливо – осі C_3 , C_4 , C_6 , відповідно, а також інші елементи. Тоді вісь z (головну для ϵ_{ij}) можна вибрати вздовж напрямку відповідної осі найвищого порядку для даної системи, а дві інші головні осі – перпендикулярні до z і між собою, але довільно. Тобто вони фіксовані (три осі перпендикулярні між собою), але з певним ступенем свободи вибору. Для таких структур $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon_z = \epsilon_{\parallel}$ – отже, має місце аксіальна симетрія. Це **одновісні** кристали.

д) висока категорія (одна система):

- *кубічна*: $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$. Головні осі перпендикулярні між собою і задаються довільним чином. Кристали є *оптично ізотропними*. Для них виконується $D_i = \epsilon \delta_{ij} E_j = \epsilon E_i$ – зв'язок між \mathbf{D} та \mathbf{E} такий же, як і в ізотропному середовищі.

Аналогічні міркування (проте дещо складніші, оскільки \mathbf{H} є аксіальним вектором, або ж антисиметричним тензором другого рангу) можна провести і для магнітно-анізотропного середовища, де $M_i = \chi_{ij} H_j$; $B_i = \mu_{ij} H_j$; $\mu_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}$.

3.2. Частотна та просторова дисперсія.

3.2.1. Частотна (часова) дисперсія. Змінне в часі електромагнітне поле з необхідністю є змінним і в просторі. *Просторовим періодом* поля є довжина хвилі λ , *просторовою частотою* – хвильовий вектор $k = 2\pi/\lambda$ (зр. з $\omega = 2\pi/T$).

Це поле викликає поляризацію в середовищі $P(t)$; якщо поле E слабе, то зв'язок $P = \alpha E$ – лінійний (що не є наслідком якогось фізичного закону – лише залишено перший член в розкладі залежності $P(E) \sim \alpha E + \beta E^2 + \gamma E^3 + \dots$).

Поляризація пов'язана із зміщенням, а оскільки електрони та іони мають масу, і, отже, є інерційними частинками, то для зміщення потрібен певний час. Але за цей час поле зміниться, тому поляризація *відстає* від поля, тобто *поляризація в даний момент часу t в загальному випадку визначається полем в усі попередні моменти часу $\tau \leq t$* :

$$P(t) = \int_t f(t, \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

(інтеграл - по «минулому» часу; вклад часового інтервалу $d\tau$ має бути пропорційним величині самого інтервалу та поля, з певним коефіцієнтом пропорційності $f(t, \tau)$, залежним і від t , і від τ).

Конкретніше,

$$P(t) = \int_{-\infty}^t f(t, \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Тут закладено принципи: лінійності зв'язку; причинності; нелокальності зв'язку P та E (в розумінні часу, а не простору – тут ми розглядаємо дисперсію часову, а не просторову).

При цьому, оскільки час однорідний, $f(t, \tau) = f(t - \tau)$, отже

$$P(t) = \int_{-\infty}^t f(t - \tau) E(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Коефіцієнт $f(t, \tau)$ зменшується з ростом $t - \tau$ (зменшується вплив віддалених моментів часу).

Розкладемо D та E в інтеграл Фур'є.

Пряме та обернене перетворення Фур'є для даного випадку можна записати як

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \quad E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.9)$$

Оскільки $D(t) = E(t) + 4\pi P(t)$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega + 4\pi \int_{-\infty}^t f(t - \tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \left[1 + 4\pi \int_{-\infty}^t f(t - \tau) e^{i\omega(t - \tau)} d\tau \right] e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Якщо ввести

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_{-\infty}^t f(t-\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \quad (3.10)$$

отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} [D(\omega) - \varepsilon(\omega)E(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

Тобто

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega)E(\omega) \quad (3.11)$$

Таким чином, простий лінійний зв'язок між D та E в один і той же момент часу порушується за наявності дисперсії і виконується лише для Фур'є-компонент поля та індукції.

Отже, частотна дисперсія $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ (а також $n = n(\omega)$) є наслідком того, що поляризація в будь-якій точці простору не встановлюється миттєво під дією поля, а визначається значенням поля в усі попередні моменти часу (нелокальність зв'язку P та E в часі).

Якщо ввести $x = t - \tau$, то $\varepsilon(\omega)$ з (3.10) можна записати в зручнішому вигляді ($dx = -d\tau$):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (3.12)$$

З викладеного можна отримати деякі важливі **властивості** $\varepsilon(\omega)$:

1. Якщо $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ – має місце частотна дисперсія.
2. В загальному випадку $\varepsilon(\omega)$ – комплексна:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

При цьому

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \\ \varepsilon''(\omega) &= 4\pi \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \end{aligned}$$

Якщо дисперсією можна знехтувати, то тоді ε – дійсна величина:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (3.13)$$

Нехтування дисперсією означає, що власні частоти ω_0 системи великі у порівнянні з частотою електромагнітного поля ω ($\omega_0 = 2\pi/\tau \gg \omega = 2\pi/T$), або ж, що те саме, система характеризується малим часом релаксації τ – і встигає за зміною поля. Тоді $\sin(\omega x) \rightarrow 0$, $\cos(\omega x) \rightarrow 1$ і маємо (3.13).

3. $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$, причому $\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega)$ – дійсна частина діелектричної проникності є парною функцією частоти; $\varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega)$, уявна – непарною (тому, зокрема, в розкладі $\varepsilon'(\omega)$ є член, який не залежить від частоти при малих частотах, а в $\varepsilon''(\omega)$ – немає).

4. При необмеженому зростанні частоти $\varepsilon \rightarrow 1$. Тут навпаки, на дуже великих частотах система «не встигає» за полем і поводить себе як вакуум.

5. За відсутності простого прямого зв'язку між $\mathbf{D}(t)$ та $\mathbf{E}(t)$: $\mathbf{D}(t) \neq \varepsilon \mathbf{E}(t)$; аналогічну до електростатичної просту формулу можна зберегти, якщо написати:

$$\mathbf{D}(t) = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}(t) \quad (3.14)$$

де $\hat{\varepsilon}$ – інтегральний оператор, який представляє $\mathbf{E}(t)$ рядом Фур'є по частотах:

$$\mathbf{D}(t) = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.15)$$

Або ж

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau \quad (3.16)$$

(тут введено перепозначення, аналогічно до (3.12): $x = t - \tau$, і далі $\tau \equiv x$).

Простий зв'язок між Фур'є компонентами $\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$ зберігається.

6. Має місце важливе *дисперсійне співвідношення Крамерса-Кроніга* (1927), що пов'язує між собою $\varepsilon'(\omega)$ і $\varepsilon''(\omega)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} v.p. \int \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} dx \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} v.p. \int \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

тут $v.p. \int$ – головне значення інтеграла відносно полюса:

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\omega_0 - \eta} f(\omega) d\omega + \int_{\omega_0 + \eta}^{+\infty} f(\omega) d\omega = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega$$

Ці співвідношення мають значення далеко за межами електродинаміки.

З другого співвідношення (3.17) можна отримати (інтегруванням), що при нехтуванні дисперсією, тобто якщо $\varepsilon' \neq \varepsilon'(\omega)$, то $\varepsilon'' = 0$ і тензор ε – дійсний. Протилежне твердження несправедливе: якщо $\varepsilon'' = 0$, то це *не означає*, що $\varepsilon' \neq \varepsilon'(\omega)$; адже нехтування дисперсією означає не просто відсутність поглинання ($\varepsilon'' = 0$), а робота в області частот, далекій від поглинання. При цьому тензор ε – дійсний, але $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega)$.

Детальніше про властивості $\varepsilon(\omega)$ див. [2].

3.2.2. Поняття про просторову дисперсію. Гіротропія. [5,2]. При розгляді часової дисперсії вважалось, що індукція $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ визначалась полем $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ в тій же точці простору (локальність зв'язку в просторі), хоча – при наявності дисперсії – і всіма попередніми моментами часу $t' \leq t$. Проте це не завжди справедливо, і в загальному випадку значення $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ залежить і від значень поля $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$ в певній області простору навколо точки \mathbf{r} . Відповідно, більш загальний порівняно з (3.16) вираз:

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + 4\pi \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{r}' f_{ij}(t'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t - t', \mathbf{r}') \quad (3.18)$$

Такий *нелокальний просторовий* зв'язок означає наявність *просторової* дисперсії, тобто, як можна показати, залежності ε від λ (або ж від \mathbf{k} , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$).

Відповідні формули тепер мають вигляд:

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + i\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \quad (3.20)$$

де

$$E_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\omega d\mathbf{k}$$

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt$$

В більшості випадків просторова дисперсія відіграє суттєво меншу роль, ніж часова, оскільки, зокрема, ядро перетворення f_{ij} інтегрального оператора в (3.18) стає малим вже на відстанях $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, всього лише дещо більших від атомних розмірів a (стала ґратки, наприклад). Але макроскопічні поля, усереднені по фізично нескінченно малих об'ємах, мають за визначенням слабо змінюватись на відстанях $\sim a$. Тому ефекти просторової дисперсії можуть проявитися лише як малі поправки. Можна сказати, що ефекти просторової дисперсії є ефектами другого порядку (другого наближення): «нульовим» наближенням є припущення $\varepsilon = \text{const}$ – дисперсія відсутня; «першим» – $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ – має місце частотна дисперсія; «другим» – $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ – крім частотної є і просторова дисперсія.

Проте, як виявляється, ці малі поправки можуть призводити до якісно нових фізичних явищ, а тому у певних випадках бути дуже суттєвими. Так, навіть слаба просторова дисперсія є причиною, наприклад, такого відомого явища, як *природна оптична активність (природна гіротропія)*.

Для пояснення цього явища необхідно, зокрема, щоб тензор ε був несиметричним $\varepsilon_{ij} \neq \varepsilon_{ji}$; але при залежності його лише від ω це в звичайних умовах не реалізується. Традиційно гіротропія розглядалась як окреме явище введенням недиагональних комплексноспряжених між собою компонент

тензора ε виду $\varepsilon_{12} = ia$, $\varepsilon_{21} = -ia$, проте її краще розглядати як один з випадків просторової дисперсії.

Розклад тензора $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ по ступенях \mathbf{k} з точністю до членів першого порядку має вигляд:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)k_l \quad (3.21)$$

Можна показати, що тензор третього рангу γ_{ijl} антисиметричний по перших двох індексах і дійсний; його можна представити у вигляді $\gamma_{ijl} = \frac{c}{\omega} e_{ijk} g_{kl}$, де e_{ijk} – повністю антисиметричний одиничний тензор (Леві-Чивіта), а g_{kl} – тензор *гірації*. Якщо в середовищі g_{kl} відмінний від нуля, то кажуть, що середовищу властива *природна оптична активність*, або ж *природна гіротропія*. Відмінність від нуля тензора g_{kl} означає, що тензор діелектричної проникності оптично активних середовищ має уявні недіагональні члени. В такому середовищі має бути відсутній центр симетрії (центр інверсії), оскільки:

-в негіротропному середовищі тензор ε_{ij} – симетричний:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3.22)$$

-але має виконуватись і більш загальне співвідношення (яке виводиться з принципу симетрії кінетичних коефіцієнтів – принципу Онсагера):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}), \quad (3.23)$$

З цих співвідношень, (3.22), (3.23), слідує, що для негіротропних середовищ має виконуватись

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{k}) \quad (3.24)$$

Але для гіротропії має існувати *хоча б один напрям, не еквівалентний просто протилежному* – а це означає відсутність центру інверсії.

Природна оптична активність проявляється в тому, що площина поляризації лінійно поляризованого світла, яке падає на оптично активне середовище, при поширенні в ньому повертається на певний кут.

Це є ефект порядку ak (або ж $\frac{a}{\lambda}$), це видно з (3.21); оскільки для оптичного діапазону $a \ll \lambda$, то легко бачити, що в кристалооптиці ефекти просторової дисперсії мають бути малими.

В кристалооптиці важливим є і обернений до ε_{ij} тензор (зокрема, він визначає важливу для аналізу поширення світла поверхню – *оптичну індикатрису* (див.далі); для нього також можна написати співвідношення, подібне до (3.21).

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) + i\delta_{ijl}(\omega)k_l \quad (3.25)$$

Незважаючи на відносну слабкість ефектів, для деяких явищ просторова дисперсія є вирішальною. Приклади:

♦В кристалах з центром симетрії лінійні члени $\sim \frac{a}{\lambda}$ відсутні, але проявляються ефекти, обумовлені членами порядку $(\frac{a}{\lambda})^2$. Хоч ефекти і малі, але вони можуть бути якісно новими: наприклад, в кубічних кристалах ϵ_{ij} – скаляр, середовище є оптично ізотропним: $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$, проте, врахувавши члени $\sim (\frac{a}{\lambda})^2$ отримаємо анізотропію:

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \epsilon_{ij}(\omega) + \alpha_{ijklm} k_l k_m \quad (3.26)$$

Цей вираз до скаляру не зводиться.

На появу анізотропії порядку $\sim (\frac{a}{\lambda})^2$ в кубічних середовищах звернув увагу ще Лоренц (1878).

♦Просторова дисперсія (її врахування) важлива при розгляді повздовжніх хвиль (без врахування просторової дисперсії групова швидкість таких хвиль $v_{gp} = 0$). Це важливо при розгляді плазми, але «плазмові» хвилі є і в твердому тілі.

♦В кристалічному середовищі в загальному випадку напрям групової швидкості $v_{gp} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ не співпадає з напрямом фазової швидкості $v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$, але кут між цими напрямками незначний і, як правило, суттєво менший від $\frac{\pi}{2}$: $v_{gp} \wedge v_{\phi} < \frac{\pi}{2}$; з врахуванням просторової дисперсії цей кут може бути довільно великим, в тому числі і π – тобто напрямки групової і фазової швидкостей можуть бути навіть протилежними. Це породжує нові ефекти при розповсюдженні хвиль порівняно з «класичною» кристалооптикою.

♦Ефекти просторової дисперсії важливі в області смуг поглинання: в області резонансів дуже зростає значення показника заломлення, а, отже член $\frac{a}{\lambda}$ вже не є малим ($\frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\lambda_0} n$).

♦При врахуванні просторової дисперсії в околі екситонного поглинання у кристалах виникають додаткові світлові хвилі, коли у кристалі поширюються хвилі, які мають однакову поляризацію та напрям поширення, але різні швидкості. Як виявилось, ефекти просторової дисперсії поблизу екситонних резонансів настільки сильні, що є причиною виникнення нових хвиль. Зазначимо, що це явище було відкрите на фізичному факультеті Київського університету професором С.І. Пекаром.

(Екситони (лат. *excito* – «збуджую») – це квазічастинки, що являють собою електронні збудження в кристалах, які можуть мігрувати по кристалу і які не пов'язані з переносом електричного заряду, тобто це *безструмові* збудження.

Екситон може утворитись, коли фотон поглинається кристалом. При цьому електрон збуджується з валентної зони в зону провідності, а у валентній зоні залишається (формується) позитивно заряджена *дірка* (місце, з якого був вивільнений електрон), і яку теж можна розглядати як квазічастинку з певним зарядом і масою. Електрон у зоні провідності притягується до дірки кулонівською взаємодією, яка забезпечує стабілізуючий енергетичний баланс. Тобто, екситон має дещо нижчу енергію, ніж незв'язані електрон і дірка, і є енергетично вигідним утворенням. Таким чином, за своєю природою екситон – зв'язаний стан електрона й дірки, причому ці електрон і дірка можуть бути локалізовані на одному вузлі кристалічної ґратки (екситон Френкеля, $a < a_0$, a - радіус екситона, a_0 - період ґратки), а можуть на відстанях, значно більших за міжатомні (екситон Ваньє - Мотта, $a \gg a_0$). В напівпровідниках за рахунок високої діелектричної проникності утворюються екситони Ваньє - Мотта, в молекулярних кристалах – екситони Френкеля.

Більш широко, за Пекаром, екситонами, як елементарними збудженнями в кристалі, що мають певні характеристики, називають також оптичні фонони (оптичні коливання кристалічної ґратки), віброни (електронно-коливальні збудження), маґнони (спінові збудження) та ін.

Екситони, як і інші квазічастинки в кристалі, можуть поглинати енергію, відповідно, формується смуга поглинання в певному діапазоні частот. Якщо ці смуги є вузькими і інтенсивними (є члени типу $\frac{1}{\omega - \omega_k}$), їх називають «гострими резонансами». У вузькій спектральній області в околі цих резонансів просторова дисперсія не є малою, і, як показав Пекар, в кристалі можуть поширюватись т.зв. «додаткові» у порівнянні з «класичною» кристалооптикою (тобто без врахування просторової дисперсії) електромагнітні хвилі. Так, у даному напрямі можуть поширюватись не одна, а дві хвилі з певною частотою і поляризацією, але з різними швидкостями; можуть реалізовуватись і складніші випадки, наприклад, при існуванні в цій області двох екситонів, існують вже три хвилі з однаковою поляризацією, але різними показниками заломлення [8]. Визначається це ступенем рівняння відносно n^2 (квадратне чи кубічне). При виході за межі вузької спектральної області в околі резонансу амплітуда таких «додаткових» хвиль стає знехтуванно малою.

♦Взагалі основною задачею кристалооптики вважається дослідження поширення в середовищі плоских монохроматичних хвиль з певними ω , k . Такі хвилі називаються *нормальними*, вони є розв'язками відповідних *однорідних* хвильових рівнянь. А оскільки рівняння, в основному, такі і є, то важливим є дослідження саме нормальних хвиль. При врахуванні просторової дисперсії *не*

втрачаються інші можливі розв'язки рівнянь, тобто просторова дисперсія є важливою при вивченні можливостей появи *нових* нормальних хвиль.

Додаток.

Нормальні хвилі

Нормальними електромагнітними хвилями є всі пропорційні множнику $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ розв'язки однорідних рівнянь поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \quad (\rho = 0, \mathbf{j} = 0), \end{aligned}$$

або однорідного хвильового рівняння

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0$$

яке отримується з рівнянь поля. Розв'язками *однорідних* рівнянь є *однорідні хвилі*, які можуть бути навіть із затуханням: $\mathbf{k} = (k' + ik'')\mathbf{s}$, але при цьому k' і k'' мають бути напрямлені однаково; в неоднорідних $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$, де $\mathbf{k}' = k'\mathbf{s}'$, $\mathbf{k}'' = k''\mathbf{s}''$. Для неоднорідних хвиль поверхні сталої фази (визначається з $e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})}$: $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \text{const}$) та сталої амплітуди (визначається з $e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r})}$: $\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} = \text{const}$) не співпадають.

Прикладом неоднорідної хвилі може бути плоска хвиля після похилого падіння на межу поділу з поглинаючим середовищем; після заломлення ця хвиля є неоднорідною: напрям \mathbf{k}' визначається законами заломлення, а вектор \mathbf{k}'' направлений по нормалі до межі поділу середовищ.

Неоднорідні хвилі також можуть бути нормальними. Нормальними можуть бути і повздовжні хвилі (при $\varepsilon = 0$ $\mathbf{E} = E\mathbf{s}$).

Нормальних хвиль у твердому тілі існує багато, і називаються вони, як правило, за назвою квазічастинок, які характеризують т.зв. *елементарні збудження* при квантовому розгляді станів твердого тіла: фонони, плазмони, фотони, поляритони, полярони, екситони та ін. *Спектроскопія конденсованого стану* зазвичай має справу з нормальними хвилями, всі інші типи хвиль виражаються через них.

Наведемо деякі загальні формули при наявності і часової і просторової дисперсії, тобто нелокальності зв'язку і в часі, і в просторі.

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t') \quad (3.27)$$

Як і раніше, залежність $\varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ є залежністю $\varepsilon_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$, оскільки *середовище однорідне і в часі, і просторово*, тому

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t') \quad (3.28)$$

А оскільки $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, то

$$D_i(\mathbf{r}, t) = E_i(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \alpha_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t') \quad (3.29)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) = \delta_{ij} + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \alpha_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}_j(\mathbf{r}', t') \quad (3.30)$$

Цікаво, що ε_{ij} можна інтерпретувати як індукцію, що виникає як відгук на поле \mathbf{E} у вигляді δ -функції: якщо $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}\delta(t)\delta(\mathbf{r})$; $|\mathbf{e}| = 1$; $t' < t$, то $\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_j$, що видно з (3.28).

Для Фур'є-образів (змінні - ω, \mathbf{k}):

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p} - \omega\tau)} \varepsilon_{ij}(\tau, \mathbf{p}) = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k})$$

$$\alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} \alpha_{ij}(\tau, \mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p} - \omega\tau)} \\ (\tau = t - t', \mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) D_j(\omega, \mathbf{k})$$

Співвідношення Крамерса-Кроніга:

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''_{ij}(x, \mathbf{k})}{x - \omega} dx \quad (3.31)$$

$$\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_{ij}(x, \mathbf{k}) - \delta_{ij}}{x - \omega} dx \quad (3.32)$$

Для негіротропного середовища:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^*(-\omega, \mathbf{k});$$

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon'_{ij}(-\omega, \mathbf{k})$$

$$\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\varepsilon''_{ij}(-\omega, \mathbf{k})$$

А взагалі має виконуватись

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}^*(-\omega, -\mathbf{k})$$

Дамо визначення гіротропії за Федоровим [4]:

Гіротропія - властивість матеріальних середовищ, яка проявляється в тому, що хвилі, які поширюються в ньому по всіх (або майже по всіх) напрямках, і які є однорідними плоскими хвилями, при відсутності дисипації енергії мають еліптичну поляризацію:

У цьому визначенні важливі всі елементи. Так, умова відсутності дисипації енергії пов'язана з тим, що в *негіротропних поглинаючих* кристалах хвилі також мають еліптичну поляризацію; умова однорідності хвиль пов'язана з тим, що для неоднорідних хвиль існує певна специфіка щодо поляризації; поширення *майже по всіх* напрямках – бо при поширенні в деяких напрямках характерною є лінійна або кругова поляризація, і т.д.

Варто відмітити, що в поглинаючих кристалах низьких сингоній (низька симетрія) важко відділити властивості хвиль, і явища при поширенні таких хвиль, обумовлені гіротропією, від ефектів, обумовлених поглинанням. Для середніх сингоній це зробити простіше, оскільки, в таких кристалах поляризація майже лінійна, і ефекти гіротропії простіше виділити; крім того,

загальний вид тензора ε в таких середовищах – $\varepsilon = \alpha + i\beta + i\gamma$, але чим вища симетрія, тим помітнішими стають відмінності уявних частин тензора (власне, матричних елементів тензорів β та γ), які відповідають за різні явища – поглинання та гіротропію.

Наостанок зазначимо, що, при всій відмінності проявів, ефекти часової і просторової дисперсії є наслідком одного явища – *дисперсії*; часова дисперсія пов'язана з четвертими компонентами 4-векторів $r_i(\mathbf{r}, ict)$ та $k_i(\mathbf{k}, i\omega/c)$, а просторова – перших трьох (просторових) компонент цих 4-векторів.

3.3. Рівняння Френеля кристалооптики.

3.3.1. Рівняння Френеля. Рівняння Френеля – одне з найважливіших рівнянь кристалооптики, воно визначає закони поширення хвиль в анізотропному середовищі і їхні властивості. Отримаємо його і проведемо короткий аналіз розв'язків.

Вважаємо, що у нас середовище електрично анізотропне ($D_i = \varepsilon_{ij}E_j$), немагнітне ($\mathbf{B}=\mathbf{H}$, $\mu=1$) і прозоре. Крім того, середовище без струмів і зарядів ($\sigma=0$, $\rho=0$).

Тоді рівняння Максвела:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} & \text{div}\mathbf{D} &= 0 \\ \text{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & \text{div}\mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

Для плоских монохроматичних хвиль, тобто якщо амплітуда поля представляється функцією $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, де $\mathbf{A} = \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, можна перейти до алгебраїчної форми запису рівнянь – оскільки у цьому випадку

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik_x = i\frac{\omega}{c}n_x \quad \text{і тоді} \quad \text{div}\mathbf{A} \rightarrow i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}), \quad \text{rot}\mathbf{A} \rightarrow i(\mathbf{k} \times \mathbf{A}).$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{D} = 0 &\rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \text{div}\mathbf{H} = 0 &\rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} &\rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{H} \\ \text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &\rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D} \end{aligned} \tag{3.33}$$

З рівнянь одразу видно, що вектори $\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ взаємно перпендикулярні, крім того, $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$. Оскільки вектор \mathbf{H} перпендикулярний одночасно до трьох векторів $\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$, то це означає, що останні три вектори лежать в одній площині. Крім того, трійки векторів $(\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H})$, $(\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{H})$ – праві. Вектор напрямку потоку енергії $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ перпендикулярний до \mathbf{E} та \mathbf{H} і також лежить в площині

векторів $\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$. При цьому кут між \mathbf{S} та \mathbf{k} той же, що і між \mathbf{E} та \mathbf{D} . Взаємне положення векторів показано на рис.3.1.

Оскільки вектор \mathbf{S} задає напрям швидкості протікання енергії, тобто групової швидкості \mathbf{v}_{gr} , а вектор \mathbf{k} – фазової \mathbf{v}_ϕ , то видно, що в *анізотропному середовищі напрямки групової та фазової швидкості не співпадають*. Кут α між ними – це кут між \mathbf{S} та \mathbf{k} .

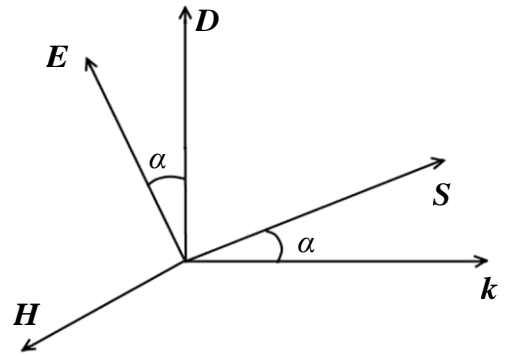


Рис.3.1

Виключимо з рівнянь (3.33) \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{D}$$

Враховуючи, що $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$; \mathbf{n} - вектор рефракції, $|\mathbf{n}|$ - показник заломлення, отримуємо

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - n^2 \mathbf{E} + \mathbf{D} = 0 \quad (3.34)$$

або

$$n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.35)$$

Це *рівняння Френеля* кристалооптики еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь

$$n^2 E_i - n_i (n_j E_j) - \epsilon_{ij} E_j = 0 \quad (3.36)$$

($i, j = x, y, z$; по j – сума, як звичайно);

Оскільки $E_i = \delta_{ij} E_j$, то

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}) E_j = 0 \quad (3.37)$$

Це однорідна система трьох алгебраїчних рівнянь для компонент електричного поля \mathbf{E} .

Зазначимо, що рівняння (3.34) є алгебраїчним аналогом диференціального хвильового рівняння

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0$$

Система (3.37) алгебраїчних рівнянь має нетривіальні розв'язки за умови рівності нулю детермінанта системи $\Delta = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} n^2 - n_x^2 - \varepsilon_{xx} & -n_x n_y - \varepsilon_{xy} & -n_x n_z - \varepsilon_{xz} \\ -n_y n_x - \varepsilon_{yx} & n^2 - n_y^2 - \varepsilon_{yy} & -n_y n_z - \varepsilon_{yz} \\ -n_z n_x - \varepsilon_{zx} & -n_z n_y - \varepsilon_{zy} & n^2 - n_z^2 - \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

В системі головних осей тензора ε_{ij} маємо:

$$\begin{vmatrix} n^2 - n_x^2 - \varepsilon_{xx} & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_y n_x & n^2 - n_y^2 - \varepsilon_{yy} & -n_y n_z \\ -n_z n_x & -n_z n_y & n^2 - n_z^2 - \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

Розкривши визначник, отримаємо кубічне рівняння щодо n^2 ; а з врахуванням, що $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$ його можна звести до квадратного щодо n^2 (члени шостого порядку взаємно скорочуються). Це пов'язано з тим, що хвиля має два, а не три незалежних напрямки поляризації.

$$n^2(\varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2) - [n_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + n_y^2 \varepsilon_y (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + n_z^2 \varepsilon_z (\varepsilon_x + \varepsilon_y)] + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0 \quad (3.40)$$

Рівняння (3.40) також називають рівнянням Френеля кристалооптики. Взагалі, це рівняння має досить багато форм запису.

Для ізотропного середовища: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$; $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; тоді (3.40) зводиться до

$$\varepsilon n^4 - 2\varepsilon^2 n^2 + \varepsilon^3 = 0$$

або

$$\varepsilon(n^4 - 2\varepsilon n^2 + \varepsilon^2) = 0$$

або

$$\varepsilon(n^2 - \varepsilon)^2 = 0$$

Його розв'язки:

- $\varepsilon = 0$ (цей випадок рідко зустрічається),
- $\varepsilon = n^2$, що і має бути для ізотропного середовища.

Зафіксувавши напрям \mathbf{k} (або \mathbf{n} , бо $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$) – можна величини n_x^2, n_y^2, n_z^2 виразити через $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ та кути ϑ, φ ; в результаті отримаємо квадратичне щодо n^2 рівняння з розв'язками:

$$n_{1,2}^2 = n_{1,2}^2(\varphi, \vartheta, \omega)$$

в результаті аналізу яких можна отримати, що:

-- в кожному напрямку може розповсюджуватись дві хвилі з різними показниками заломлення, тобто з різними фазовими швидкостями $\frac{\omega}{c} n_{1,2}$ (в ізотропному середовищі завжди $n^2 = \epsilon$, швидкість – одна).

-- поляризація цих двох хвиль – лінійна і взаємно-перпендикулярна, для цих двох хвиль має місце, як кажуть, «існування власних поляризацій» (в ізотропному середовищі поляризація може бути довільною). Це видно зі співвідношення $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0$, яке можна отримати з рівняння Френеля.

-- на межі середовища повинно бути подвійне променезаломлення.

Крім того:

-- у системі координат, де вздовж осей відкладено n_x, n_y, n_z - рівняння Френеля описує поверхню 4-го порядку, двооболонкову, в загальному випадку самопересічну – *поверхню показників заломлення*, яку можна визначити так:

Якщо з початку координат в кожному напрямку відкласти відрізки, рівні двом показникам заломлення для даного напрямку, то їхні кінці будуть ГМТ (геометричним місцем точок), які утворюють *поверхню показників заломлення*. Якщо з початку координат провести вектор в довільному напрямку, то він перетне цю поверхню в двох точках, і це будуть два значення показника заломлення $n_{1,2}$ для даного напрямку \mathbf{n} (або $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$) поширення хвиль в середовищі. Є два особливі напрямки в середовищі, при поширенні хвилі вздовж яких значення показників заломлення (або ж значення фазових швидкостей) співпадають: $n_1 = n_2$. Це напрямки *оптичних осей*. Можна також сказати, що оптична вісь – це напрямок, при поширенні вздовж якого фазова швидкість хвилі не залежить від стану (лінійної) поляризації хвилі.

Для відносно симетричних кристалів, т.зв. *одновісних* (мають одну оптичну вісь, тобто один напрямок, для якого $n_1 = n_2$), ця поверхня сформована з дотичних у двох точках сфери (поверхня 2-го порядку) і вписаного в неї або описаного навколо неї еліпсоїда (поверхня 2-го порядку). Для низькосиметричних кристалів – *двовісних* (дві оптичні осі), – коло або еліпс отримуємо при перетині поверхні координатними площинами. (Детальніше про форму поверхні та оптичні осі див. далі).

Якщо вказану поверхню побудувати в іншому масштабі, відкладаючи по осях не n_i , а $k_i = \frac{\omega}{c} n_i$, отримаємо *поверхню хвильових векторів*.

Якщо в кожному напрямку відкладати відрізки, рівні не n , а $\frac{1}{n}$ – (або, в іншому масштабі $\sim \frac{c}{n} = v_\phi$), то це задає двооболонкову самопересічну поверхню 6-го порядку (сфера+овалоїд для одновісних кристалів) – *поверхню індексів (нормалей, хвильових нормалей)*.

Рівняння Френеля можна записати в дещо іншій формі, порівняно з (3.40):

$$s^2(\varepsilon_y \varepsilon_z s_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_z s_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y s_z^2) - [s_x^2(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + s_y^2(\varepsilon_x + \varepsilon_z) + s_z^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] + 1 = 0 \quad (3.41)$$

яку можна отримати за процедурами, схожими до виведення (3.40) з рівнянь (3.33), а можна отримати і простіше, знаючи, що від рівнянь, які містять \mathbf{E} , \mathbf{n} , ε_{ij} можна перейти до рівнянь, що містять \mathbf{D} , \mathbf{s} , ε_{ij}^{-1} замінами $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{s}$, $\varepsilon_{ij} \leftrightarrow \varepsilon_{ij}^{-1}$ [2]. Вектор \mathbf{s} тут – *променевий* вектор, який задає напрям променя, або ж групової швидкості, або ж потоку енергії, вектор \mathbf{n} – одиничний вектор, що задає напрям $\mathbf{k} = kn$; для них виконується умова $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$. (Зазначимо, що при зовнішній простоті зв'язку \mathbf{n} та \mathbf{s} , зв'язок між їхніми компонентами, n_i та s_i , виражений через ε_i , задається досить громіздкими співвідношеннями [2], які, при певних напрямках, мають ще й особливості типу невизначеностей 0/0 (див. далі про явище конічної рефракції). Ця *променева* поверхня є також двооболонковою самопересічною 4-го порядку. Для неї також можна вказати два особливих напрямки, при поширенні вздовж якої рівні тепер величини *групових* швидкостей.

Як вже згадувалось, рівняння Френеля можна представити у різних формах запису. Зручність використання тієї чи іншої форми обумовлена конкретними питаннями, які розглядаються. Про описані вище форми рівняння Френеля і відповідні поверхні детальніше див. [2].

3.3.2. Інші форми рівняння Френеля. Променева поверхня та поверхня нормалей. Ще дві, крім описаних, зручні форми запису рівняння Френеля представлено в [1]. Це поверхні для фазових та групових швидкостей; як і у попередніх випадках поверхня фазових швидкостей – *поверхня нормалей* – 6-го порядку, поверхня групових швидкостей – *променева* – 4-го. Відповідні рівняння Френеля для *поверхні нормалей*:

$$\frac{\sigma_x^2}{v_\phi^2 - v_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{v_\phi^2 - v_y^2} + \frac{\sigma_z^2}{v_\phi^2 - v_z^2} = 0 \quad (3.42)$$

або

$$\frac{\sigma_x^2}{n^2 - \varepsilon_x} + \frac{\sigma_y^2}{n^2 - \varepsilon_y} + \frac{\sigma_z^2}{n^2 - \varepsilon_z} = \frac{1}{n^2}$$

де $v_\phi = \frac{c}{n}$, $v_{x,y,z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{x,y,z}}}$ – т.зв. *головні швидкості поширення*, $\boldsymbol{\sigma}$ – одиничний вектор нормалі, який задає напрямок фазової швидкості (хвильового вектора: $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{\omega}{c} n \boldsymbol{\sigma}$).

Якщо з початку координат в кожному напрямку відкласти відрізки, рівні двом значенням фазової швидкості для даного напрямку, то їхні кінці будуть

ГМТ, які утворюють *поверхню нормалей*. Вектор, проведений з початку координат в довільному напрямку, перетне цю поверхню в двох точках, і це будуть два значення фазової швидкості $v_{\phi 1,2}$ поширення хвиль в середовищі для даного напрямку.

Звичайно, для цієї поверхні також можна вказати напрямки, при поширенні хвилі вздовж яких значення фазових швидкостей співпадають $v_{\phi_1} = v_{\phi_2}$ (або ж $n_1 = n_2$). Це напрями *оптичних осей* – *бінормалей*.

Для *променевої поверхні* рівняння Френеля можна записати у вигляді:

$$\frac{\tau_x^2}{1/v_{zp}^2 - 1/v_x^2} + \frac{\tau_y^2}{1/v_{zp}^2 - 1/v_y^2} + \frac{\tau_z^2}{1/v_{zp}^2 - 1/v_z^2} = 0 \quad (3.43)$$

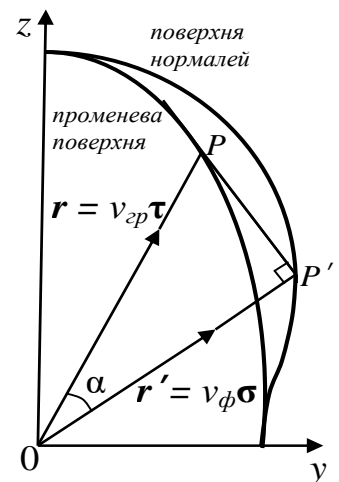
(τ – одиничний вектор, який задає напрямок групової швидкості.)

Рівняння (3.43) – квадратичне щодо v_{zp}^2 – описує поверхню 4-го порядку: якщо з початку координат в кожному напрямку відкласти відрізки, рівні двом значенням променевої (групової) швидкості для даного напрямку, то їхні кінці будуть ГМТ, які утворюють *променеву поверхню*. Вектор, проведений з початку координат в довільному напрямку, перетне цю поверхню в двох точках, і це будуть два значення групової швидкості $v_{zp1,2}$ поширення хвиль в середовищі для даного напрямку. Як і для поверхні нормалей, є два напрямки, при поширенні хвиль вздовж яких співпадають значення швидкостей, тепер – *групових* $v_{zp1} = v_{zp2}$. Це напрями *променевих оптичних осей* – *бірадіалей*.

Зв'язок між поверхнею нормалей та променевою: нехай на *променевій* поверхні маємо довільну точку P , на поверхні *нормалей* – точку P' ; можна показати, що площина, *дотична до променевої поверхні* в точці P , є *перпендикулярною до хвильової нормалі*, проведеної з початку координат в точку P' поверхні нормалей (рис.3.2).

Тобто, *поверхня нормалей* є ГМТ *основ перпендикулярів*, опущених з початку координат на площини, *дотичні до променевої поверхні*, і навпаки, *променева поверхня* є *огинаючою площин*, проведених через точки *поверхні нормалей*, *перпендикулярно до радіусів-векторів цих точок*.

Описані поверхні, пов'язані з рівнянням Френеля – не всі, які розглядаються в кристалооптиці; як уже зазначалось, рівняння Френеля можна представити в інших формах, відповідно, отримаємо інші поверхні. Детальніше про це див. [3].



Для подальшого важливо відмітити наступне.

Рівняння Френеля можна представити у вигляді: $f(n_x, n_y, n_z, \omega) = 0$; причому $n = n(\omega)$; розв'язавши обернене рівняння $\omega = \omega(n)$ і підставивши у початкове, маємо тотожність: $f(n_x, n_y, n_z, \omega(n)) \equiv 0$, яку можна диференціювати; наприклад, по ∂n_x :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n_x} \right)_{\omega} + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)_k \frac{\partial \omega}{\partial n_x} = 0$$

Або, після переходу від n до k : $F(k_x, k_y, k_z, \omega(k_x, k_y, k_z)) = 0$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial k_x} \right)_{\omega} + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_k \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = 0$$

Оскільки

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}_{ep} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad u_x = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \quad \text{тоді}$$

$$u_x = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = - \left(\frac{\partial F}{\partial k_x} \right)_{\omega} / \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_k = - \underbrace{\frac{c}{\omega} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_k \right]^{-1}}_{\text{скаляр}} \cdot \frac{\partial f}{\partial n_x}, \quad \text{то, отже,}$$

$$\mathbf{u} = a \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = a \nabla_n f \equiv a \cdot \text{grad}_n f \quad (3.44)$$

Тобто *групові швидкості пропорційні градієнту від рівняння Френеля для показників заломлення; її напрям – по нормалі до поверхні.*

3.3.3. Еліпсоїд Френеля та оптична індикатриса. Розглянуті поверхні 4-го та 6-го порядку досить складні для аналізу. Багато корисної інформації можна отримати з розгляду простіших поверхонь.

Розглядаємо тензор ε_{ij} , або, більш загально, пов'язану з ним поверхню другого порядку

$$\varepsilon_{ij} x_i x_j = 1$$

$$\varepsilon_{xx} x^2 + \varepsilon_{yy} y^2 + \varepsilon_{zz} z^2 + 2\varepsilon_{yz} yz + 2\varepsilon_{xz} xz + 2\varepsilon_{xy} xy = 1 \quad (3.45)$$

Ліва частина цього рівняння – додатновизначена квадратична форма, оскільки при заміні $x_i \rightarrow \frac{E_i}{\sqrt{8\pi w_e}}$ отримаємо $8\pi w_e$, а енергія w_e завжди є додатною:

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \sum_{ij} E_i \varepsilon_{ij} E_j$$

Рівняння (3.45) є рівнянням еліпсоїда; в системі його головних осей:

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1 \quad (3.46)$$

Це рівняння поверхні другого порядку можна отримати з виразу для енергії w_e , записаного в системі *головних діелектричних осей* (головних осей тензора ε_{ij})

$$w_e = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2) \quad (3.47)$$

після заміни $x_i \rightarrow \frac{E_i}{\sqrt{8\pi w_e}}$.

Це є *еліпсоїд Френеля*, або еліпсоїд «прямого» ε_{ij})

При заміні $x_i \rightarrow \frac{D_i}{\sqrt{8\pi w_e}}$ у виразі для енергії w_e , записаного через D_i

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right) \quad (3.48)$$

отримаємо еліпсоїд *оберненої діелектричної проникності* – еліпсоїд «оберненого» ε_{ij} , який часто називають *оптичною індикатрисою*

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1 \quad (3.49)$$

Або, більш загально – $\varepsilon_{ij}^{-1} x_i x_j = 1$.

Можна вказати наступну геометричну інтерпретацію еліпсоїда «оберненого» ε_{ij} :

-Якщо взяти деяке \mathbf{k} або \mathbf{n} , і провести через початок координат площину, перпендикулярну до \mathbf{k} , то переріз цією площиною еліпсоїда є еліпс; головні півосі цього еліпса задають два значення $n_{1,2}$ (або, в іншому масштабі, обернені значення фазових швидкостей $v = c/n$), а їхні напрямки – напрями поляризації вектора \mathbf{D} для двох хвиль, що поширюються в середовищі у заданому напрямку.

Для еліпсоїда *прямого* ε - аналогічно, але тепер величини півосей пропорційні груповим швидкостям, їх напрямки – напрямки поляризації вектора \mathbf{E} , а площина перерізу еліпса перпендикулярна до вибраного напрямку променя \mathbf{s} .

Тепер дещо зрозумілішим має бути поняття *дисперсії осей* – оскільки $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega)$, то в залежності від частоти змінюються як значення компонент тензора ε_{ij} , в тому числі і головні значення ε_{ii} , так і *напрями* головних осей. Але це спостерігається лише в кристалах з низькою симетрією, де природним чином не можна виділити три взаємно ортогональні напрямки.

3.4. Одновісні кристали. Подвійне променезаломлення.

Це кристали тригональної, тетра- та гексагональної систем; серед елементів симетрії має бути вісь принаймі третього порядку.

В таких кристалах два з трьох головних значень тензора ϵ рівні:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}; \quad \epsilon_z = \epsilon_{\parallel}; \quad \epsilon_{\perp} \neq \epsilon_{\parallel}. \quad (3.50)$$

В рівнянні Френеля $f = 0$ ліва частина розщеплюється:

$$f = f_1 \cdot f_2 = 0$$

де (див.(3.40))

$$f_1 = n^2 - \epsilon_{\perp},$$

$$f_2 = \epsilon_{\parallel} \cdot n_z^2 + \epsilon_{\perp} \cdot (n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}.$$

Має бути або $f_1 = 0$ або $f_2 = 0$ (випадок коли одночасно $f_1 = 0$ та $f_2 = 0$ не розглядаємо).

▪ Нехай $f_1 = 0, f_2 \neq 0$, тоді

$$n^2 - \epsilon_{\perp} = 0, \quad n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}. \quad (3.51)$$

Є одне значення n , незалежно від напрямку поширення хвилі; відповідно, хвиля, яка поширюється, подібна до хвилі в ізотропному середовищі з $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$ – це є *звичайна* хвиля. Показник заломлення для неї позначається n_o (від фр. *ordinaire* – звичайний).

Для неї групова швидкість (напрямок поширення енергії):

$$\mathbf{u} = a \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = a \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (f_1 f_2) = a \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}} f_2 + a \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{n}} f_1 = a f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}}$$

$$u_x = a f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n_x} = a f_2 \frac{\partial}{\partial n_x} (n^2 - \epsilon_{\perp}) = 2 a f_2 n_x$$

Аналогічно і для компонент u_y, u_z :

$$u_y = 2 a f_2 n_y, \quad u_z = 2 a f_2 n_z$$

Як видно, коефіцієнти зв'язку між компонентами \mathbf{u} та \mathbf{n} однакові, отже, і напрями їх співпадають. Тобто, що для *звичайної хвилі* напрями *групової та фазової швидкостей співпадають*, як і в ізотропному середовищі.

▪ Нехай тепер $f_1 \neq 0, f_2 = 0$, тоді

$$\epsilon_{\parallel} \cdot n_z^2 + \epsilon_{\perp} \cdot (n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} = 0 \quad (3.52)$$

Або

$$\frac{(n_x^2 + n_y^2)}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{n_z^2}{\epsilon_{\perp}} = 1 \quad (3.53)$$

Виберемо напрям оптичної осі (C) вздовж z (*оптична вісь* в кристалах – зокрема, це напрям осей $C_n, n = 3, 4, 6$) і введемо кут $\vartheta = \angle(\mathbf{n}, z)$ між напрямком поширення хвилі і оптичною віссю. Тоді

$$\begin{aligned} n_z^2 &= n^2 \cos^2 \vartheta & n_x^2 + n_y^2 &= n^2 \sin^2 \vartheta \\ \frac{n^2 \sin^2 \vartheta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{n^2 \cos^2 \vartheta}{\varepsilon_{\perp}} &= 1 \\ \frac{\sin^2 \vartheta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\varepsilon_{\perp}} &= \frac{1}{n^2} \\ n^2 &= \frac{\varepsilon_{\perp} \cdot \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta} \\ n &= \left(\frac{\varepsilon_{\perp} \cdot \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Отже, тепер значення n залежить від напрямку (від кута між напрямком поширення хвилі та оптичною віссю z). Така хвиля називається *незвичайною*. Показник заломлення для неї позначається як n_e (від фр. *extraordinaire* – незвичайний).

Оптична індикатриса $f_2 = 0$, яка характеризує поширення незвичайної хвилі, є еліпсоїдом обертання, тобто має місце аксіальна симетрія (n не залежить від аксіального кута φ ; перетин еліпсоїда площиною $\perp z$, є круг).

При цьому,

- якщо $\vartheta = \pi/2$, то $n = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$,
- якщо $\vartheta = 0$, то $n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$,
- якщо $\vartheta \in (0, \pi/2)$, то $n = n(\vartheta)$,

-тобто, при поширенні вздовж оптичної осі z ($\vartheta = 0$), значення $n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ – таке ж, як і для звичайної хвилі – *при поширенні вздовж оптичної осі фазові швидкості звичайного та незвичайного променів співпадають*; при поширенні перпендикулярно до оптичної осі ($\vartheta = \pi/2$) $n = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$, при цьому *різниця між показниками заломлення для звичайної і незвичайної хвилі є максимальною*: $\Delta n = |\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} - \sqrt{\varepsilon_{\perp}}| = \max$.

Напрямок групової швидкості для незвичайної хвилі:

$$\mathbf{u} = a \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = a f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{n}}$$

По компонентах

$$u_x = 2af_1 \varepsilon_{\perp} n_x, \quad u_y = 2af_1 \varepsilon_{\perp} n_y, \quad u_z = 2af_1 \varepsilon_{\parallel} n_z \quad (3.55)$$

З чого видно, що напрями \mathbf{u} та \mathbf{n} , тобто *напрямки групової та фазової швидкостей для незвичайної хвилі не співпадають*.

Проведемо площину, що містить оптичну вісь z і напрям \mathbf{n} поширення хвилі – *площину головного перерізу кристала*. Нехай це площина (xz) , (або $(n_x n_z)$, при цьому $n_y=0$).

Тоді вектор \mathbf{S} потоку енергії лежить у площині головного перерізу, оскільки $S_y=0$ (напрямки \mathbf{S} та \mathbf{u} співпадають, але якщо $n_y=0$, то і $u_y=0$, отже і $S_y=0$), але при цьому напрямки \mathbf{S} та \mathbf{n} не співпадають.

Якщо ввести кути $\vartheta' = \angle(\mathbf{S}, z)$, $\vartheta = \angle(\mathbf{n}, z)$, то

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{S_x}{S_z} = \frac{u_x}{u_z}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{n_x}{n_z}$$

а з (3.55) маємо

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{u_x}{u_z} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \cdot \frac{n_x}{n_z} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \cdot \operatorname{tg} \vartheta \quad (3.56)$$

Цим отримано зв'язок між ϑ' та ϑ , причому ϑ' може бути як більшим так і меншим від ϑ , в залежності від того, чи ε_{\perp} більше чи менше за ε_{\parallel} .

- Якщо $\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}$ (тобто $n_e < n_o$, $v_{\phi}^e > v_{\phi}^o$) – то це *від'ємний одноосний кристал* ($\vartheta' > \vartheta$).

- Якщо $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$ (тобто $n_e > n_o$, $v_{\phi}^e < v_{\phi}^o$) – то це *додатний одноосний кристал* ($\vartheta' < \vartheta$).

Щодо поляризації:

Раніше було показано, що в загальному випадку в анізотропному середовищі вектори $(\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{S})$ лежать в одній площині, при цьому напрямки векторів \mathbf{D} та \mathbf{E} не співпадають.

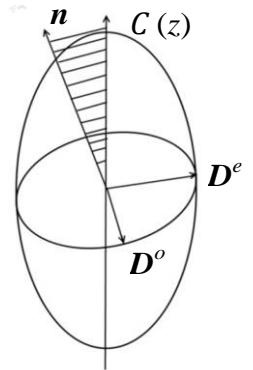


Рис.3.3.

Для одноосного кристала вказана площина є площиною головного перерізу, і в ній лежать вектори \mathbf{D} та \mathbf{E} незвичайного променя. Таким чином, незвичайний промінь поляризований в площині головного перерізу кристала; відповідно, звичайний промінь поляризований перпендикулярно до площини головного перерізу (див. рис.3.3 та 3.4).

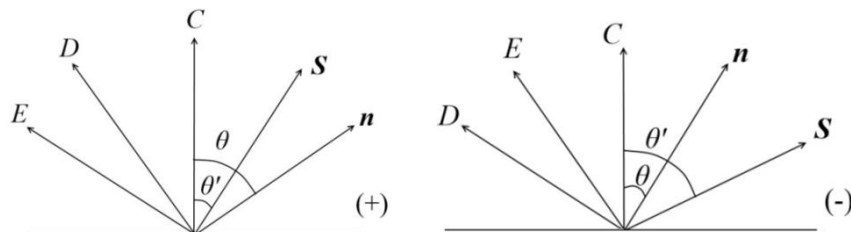


Рис.3.4.

Форма поверхні показників заломлення.

Рівняння Френеля $f = 0$ для одновісного кристала можна представити у вигляді $f = f_1 \cdot f_2 = 0$, де

$$f_1 = n^2 - \varepsilon_{\perp},$$

$$f_2 = \varepsilon_{\parallel} \cdot n_z^2 + \varepsilon_{\perp} \cdot (n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}.$$

Відповідно, поверхня $f = 0$ є, як кажуть, “двохлистовою”.

Один лист

$$f_1 = 0, \quad n^2 - \varepsilon_{\perp} = 0 \quad (3.57)$$

є сферою з радіусом $n \equiv n_0 = \varepsilon_{\perp}$.

Інший лист є еліпсоїдом обертання

$$f_2 = 0, \quad \frac{(n_x^2 + n_y^2)}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = 1 \quad (3.58)$$

Перетин поверхні $f = 0$ площиною $n_y = 0$:

-для першого листа – $n_x^2 + n_z^2 = \varepsilon_{\perp}$ – коло,

-для другого $\frac{n_x^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = 1$ – еліпс.

В залежності від того, чи є кристал додатнім, чи від’ємним, еліпс вписаний в коло, або описаний навколо кола:

-додатній: $v_{\phi}^o > v_{\phi}^e$ $n_o < n_e$, $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$

– еліпс описаний навколо кола.

-від’ємний: $v_{\phi}^o < v_{\phi}^e$ $n_o > n_e$,

$\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}$ – еліпс вписаний в коло.

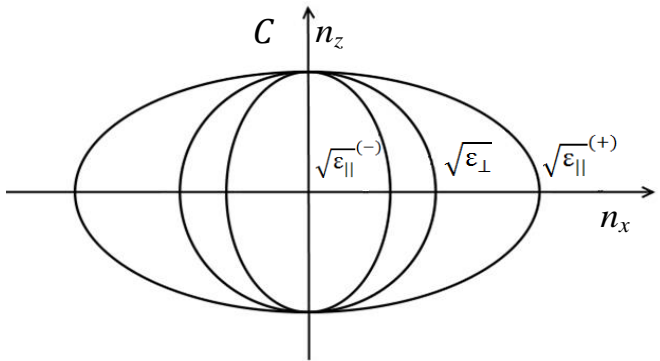


Рис.3.5.

Нагадаємо, все описане вище, стосувалось поверхні 4-го порядку – поверхні *показників заломлення*.

Для поверхні 6-го порядку – поверхні *індексів* (нормалей) – справедливі аналогічні міркування, але тепер кривими перерізу є коло (переріз сфери) та овал (переріз овалоїда), відповідно вписаний або описаний навколо кола.

3.5. Двовісні кристали.

В одновісних кристалах, як було показано, рівняння Френеля $f = 0$ розщеплюється $f = f_1 \cdot f_2 = 0$, а дві поверхні $f_1 = 0$ та $f_2 = 0$ дотикаються лише в двох точках, задаючи напрям оптичної осі, при якому $n_o = n_e$, і $v_{\phi}^o = v_{\phi}^e = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$. Ці ж висновки можна отримати і з геометричних міркувань - еліпсоїд оберненого ε (оптична індикатриса, еліпсоїд нормалей) є еліпсоїдом обертання і має один круговий переріз, отже, його півосі співпадають, тобто $n_o = n_e$ – і маємо ті ж висновки.

Для двовісних кристалів оптична індикатриса є еліпсоїдом загального виду з трьома різними значеннями півосей $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$. З геометрії відомо, що еліпсоїд загального виду має два кругових перерізи, а отже у двовісних кристалах є два напрямки, ортогональні до цих перерізів, при поширенні вздовж яких $n_1 = n_2$, ($v_{\phi_1} = v_{\phi_2}$), тобто такі кристали мають *дві* оптичні осі (власне, тому вони так і називаються) – *бінормалі*. З точки зору поверхні, яку задає рівняння Френеля ($f = 0$), це означає наявність чотирьох точок перетину двох поверхонь, $f_1 = 0$ та $f_2 = 0$, причому ці точки розміщені попарно, на оптичних осях. Зрозуміло, що при $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ ці дві осі зливаються, кристал – *одновісний*, а при $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ будь-який напрям є оптичною віссю, а кристал – оптично ізотропним.

Промені у двовісних кристалах не можна характеризувати як звичайний та незвичайний, у вищеописаному сенсі вони обидва є *незвичайними*.

Нехай для визначеності $\varepsilon_x < \varepsilon_y < \varepsilon_z$, ($v_x > v_y > v_z$).

Для двовісних кристалів потрібно розглядати загальне рівняння (3.40). Поклавши в ньому $n_z = 0$, отримаємо криві перетину загальної поверхні координатною площиною (xy). Рівняння (3.40) розщеплюється на два множники

$$(n^2 - \varepsilon_z) \cdot (\varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y) = 0$$

Звідки видно, що кривими перетину є коло

$$n^2 = \varepsilon_z$$

та еліпс

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon_y} + \frac{n_y^2}{\varepsilon_x} = 1$$

причому еліпс знаходиться всередині кола. Аналогічно можна отримати, що перерізи поверхні показників заломлення площинами (yz) та (xz) також є кола та еліпси, але в площині (yz) еліпс описаний навколо кола, а в площині (xz) вони перетинаються (рис.3.6, 3.7).

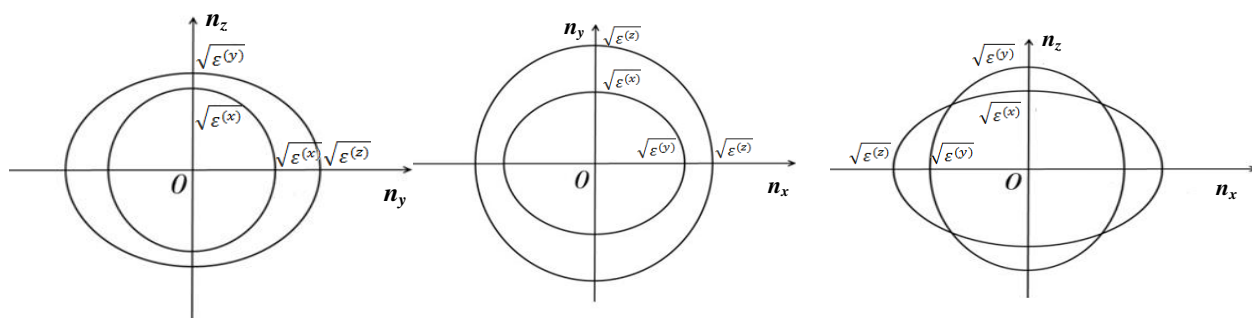


Рис.3.6.

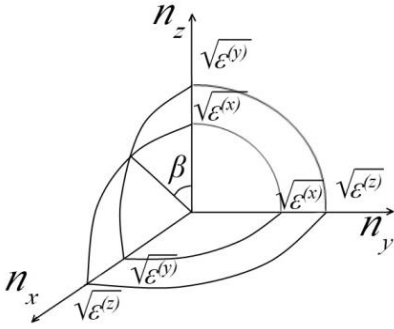


Рис.3.7.

Поверхня показників заломлення є самопересічною, і має чотири особливих точки – точки самоперетину. З рівняння (3.40) можна отримати вираз для кута β між віссю z (n_z) та напрямом на точку самоперетину поверхні показників заломлення (при $n_y = 0$, тобто в площині (xz)). Очевидно, кут між оптичними осями, які розміщені симетрично відносно осі z , є вдвічі більшим: 2β .

$$\frac{n_x}{n_z} = \operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_z(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{\varepsilon_x(\varepsilon_z - \varepsilon_y)}} \quad (3.59)$$

Або, через головні швидкості:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{n_x}{n_z} = \pm \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}}$$

Зазначимо, що головні швидкості v_x, v_y, v_z не є компоненти якогось вектора; але через них можна виразити, наприклад, фазові швидкості поширення хвилі вздовж координатних осей. Так, розглядаючи еліпсоїд нормалей (оптичну індикатрису) при поширенні хвилі вздовж, наприклад, осі x , можна побачити, що фазові швидкості двох хвиль вздовж цього напрямку є $v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$ та $v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}$. Відповідно, неважко отримати результати при поширенні хвиль вздовж осей y та z .

Якщо розглядати не поверхню показників заломлення, а променеву (теж 4-го порядку), то наведені міркування справедливі і для неї (з заміною, як вже було зазначено, $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{s}$, $\varepsilon_{ij} \leftrightarrow \varepsilon_{ij}^{-1}$). Оптичні осі тепер – бірадіалі, тобто вони задають напрямки поширення, в яких співпадають значення групових швидкостей для двох хвиль, що поширюються в даному напрямку. Кут між променевою оптичною віссю та віссю z

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{u_x}{u_z} = \frac{s_x}{s_z} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_y}} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}} \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (3.60)$$

Або, через головні швидкості:

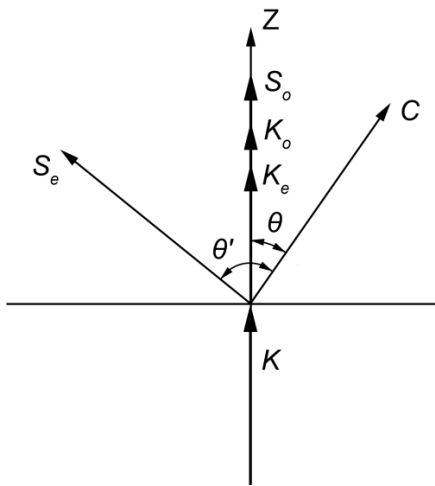
$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{v_z}{v_x} \cdot \sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}} = \pm \frac{v_z}{v_x} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

В залежності від того, чи $\varepsilon_x > \varepsilon_z$ чи $\varepsilon_x < \varepsilon_z$, $\gamma > \beta$, або $\gamma < \beta$. Кут між бірадіаліями (променевими оптичними осями), які також лежать в площині (xz) – 2γ .

Аналогічні міркування можна навести і щодо інших поверхонь – наприклад, поверхні нормалей (6-го порядку) – але тепер мова йтиме не про сферу (коло) та еліпсоїд (еліпс), а про сферу то овалоїд (овал).

3.6. Подвійне променезаломлення на межі анізотропного та ізотропного середовищ

Загальний випадок заломлення на поверхні двоосного кристала є дуже складним для розгляду; обидві заломлені хвилі є незвичайними, і їхні *промені*, наприклад, *не лежать* в площині падіння, а простий закон Снелліуса щодо заломлення виконується лише для хвильових векторів (напрямків **n**). Для одновісних кристалів звичайний і незвичайний промені *лежать* в площині падіння, а закон Снелліуса про заломлення виконується і для звичайного променя.



Розглянемо нормальне падіння на межу вакуум - *одновісний* кристал. Виберемо осі координат так, щоб оптична вісь *C* лежала в площині (*xz*). На межу поділу середовищ з вакууму нормально падає плоска монохроматична хвиля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Оскільки тангенційні складові вектора **E** на межі поділу двох середовищ рівні (неперервні), то і в кристалі вектори **k_o**, **k_e** напрямлені нормально до межі поділу. Кристал нехай від'ємний, тобто $k_o = \frac{\omega}{c} n_o >$

$$k_e = \frac{\omega}{c} n_e.$$

Рис.3.8.

Для звичайного променя напрямки фазової та групової швидкості співпадають, тобто $\mathbf{k}_o \uparrow \mathbf{S}_o$, для незвичайного – ні, причому, оскільки кристал від'ємний, кут $\vartheta = \angle(\mathbf{k}_e \mathbf{C}) < \vartheta' = \angle(\mathbf{S}_e \mathbf{C})$, див. (3.56), та рис.3.8:

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \vartheta, \quad \varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}, \quad \vartheta' > \vartheta.$$

Введемо кут відхилення $\alpha = \vartheta' - \vartheta$, тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\vartheta' - \vartheta) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta' - \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \operatorname{tg} \vartheta' \operatorname{tg} \vartheta} = \frac{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \operatorname{tg} \vartheta}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} \operatorname{tg}^2 \vartheta}$$

Оскільки $\varepsilon_{\parallel} \approx \varepsilon_{\perp}$, є сенс ввести позначення $\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel} = \Delta$, $\frac{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}}{2} = \varepsilon$, тоді

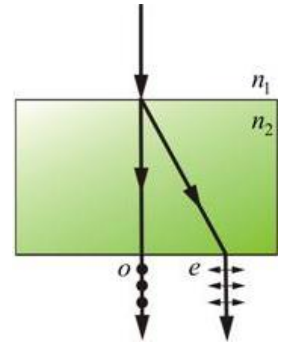
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta}{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\operatorname{tg} \vartheta} + \varepsilon_{\perp} \operatorname{tg} \vartheta} = \frac{\Delta}{\varepsilon_{\parallel} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} + \varepsilon_{\perp} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}} = \frac{\Delta \sin \vartheta \cos \vartheta}{\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta} = \frac{\Delta \sin 2\vartheta}{2\varepsilon}$$

Відхилення α досягає максимуму α_{\max} при $2\vartheta = \frac{\pi}{2}$, тобто $\vartheta = \frac{\pi}{4}$:

$$\alpha_{\max} = \frac{\Delta}{2\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}} \quad (3.61)$$

Приклад:

На плоскопаралельну пластинку товщиною $h=10$ см, вирізану паралельно до оптичної осі з кристалу ісландського шпату (кальцит, CaCO_3 , $n_o=1.658$, $n_e=1.486$, $\alpha \approx 6^\circ$) падає нормально плоска хвиля. Оскільки обидва промені (o, e) при проходженні пластинки лежать в площині падіння, то звичайний промінь пройде пластинку без відхилення, а незвичайний при поширенні в пластинці відхилиться по горизонталі від точки входу на $l = h \operatorname{tg} \alpha \approx 1$ см, і після заломлення на другій межі поділу піде знову по нормалі до поверхні.



3.7. Конічна рефракція (двовісні кристали).

Напрямки оптичних осей у двовісному кристалі – і бінормалей, і бірадіалей – є особливими. Особливості пов'язані з тим, що при поширенні хвиль вздовж оптичної осі зв'язок між відповідними векторами (фазової \mathbf{v}_ϕ та групової \mathbf{v}_{gr} швидкостей, або \mathbf{n} та \mathbf{s} , $\boldsymbol{\sigma}$ та $\boldsymbol{\tau}$) містить невизначеності типу $0/0$. Так, наприклад, при поширенні вздовж бінормалі, з певною \mathbf{v}_ϕ , значення і напрямок групової швидкості \mathbf{v}_{gr} стає невизначеним – їй відповідає нескінченна кількість напрямів, які, проте утворюють певну конічну поверхню навколо напрямку \mathbf{v}_ϕ (чи \mathbf{n}) – конус *внутрішньої конічної рефракції*. Навпаки, при поширенні вздовж променевої оптичної осі – бірадіалі – з визначеним значенням і напрямком \mathbf{v}_{gr} , їй відповідає нескінченна кількість напрямів \mathbf{v}_ϕ , які, в свою чергу, утворюють конічну поверхню навколо напрямку \mathbf{v}_{gr} – конус *зовнішньої конічної рефракції*.

Виникнення цих невизначеностей можна зрозуміти з геометричних міркувань. Поблизу особливих точок – точок самоперетину поверхонь показників заломлення та променевої зовнішня та внутрішня порожнини являють собою конуси зі спільною вершиною. В цій вершині – особливій точці – напрям нормалі до поверхні стає невизначеним, а саме він визначає напрям іншого з пари векторів – вектора \mathbf{v}_{gr} , при заданому \mathbf{v}_ϕ , і навпаки.

Згадані конічні поверхні і визначають явище *конічної рефракції* – *зовнішньої або внутрішньої*.

Спостереження конічної рефракції:

Внутрішня рефракція: плоска монохроматична хвиля падає на плоскопаралельну пластинку двовісного кристала, вирізаного так, що її поверхні перпендикулярні до бінормалі. Поверхня пластинки закрита діафрагмою з малим отвором. В пластинці хвильовий вектор має той же напрям вздовж бінормалі, а енергія поширюється в пустотілому конусі (конусі *внутрішньої конічної рефракції*); на виході промені утворюють циліндр, а на екрані буде спостерігатись світле кільце сталих розмірів при будь-якому положенні екрана (рис.3.9а).

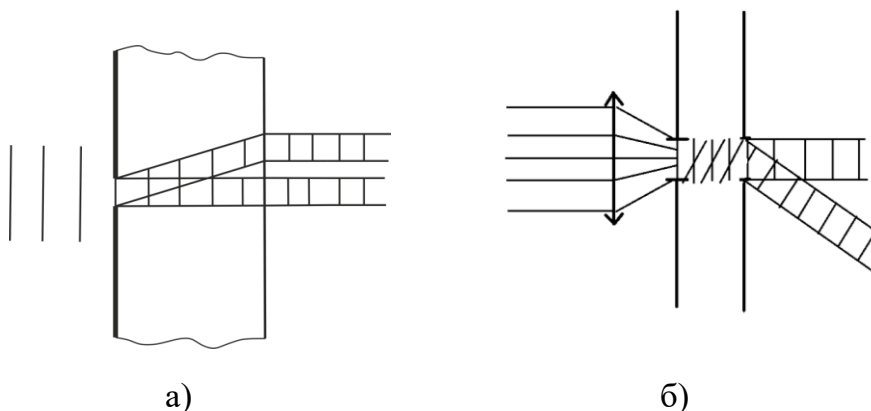
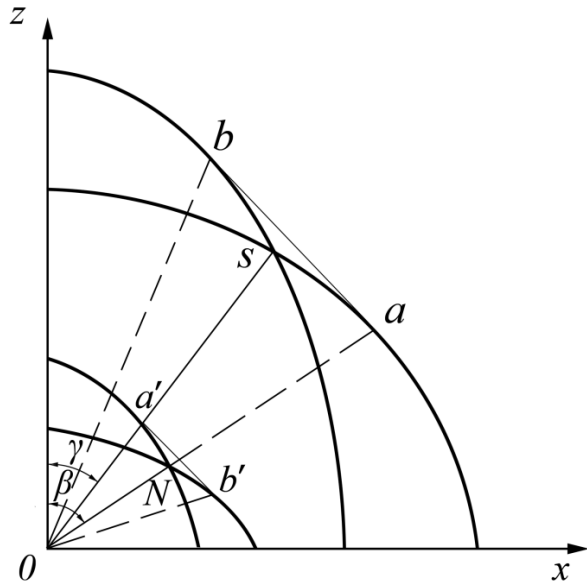


Рис.3.9. Конічна рефракція – внутрішня (а), та зовнішня (б).

Зовнішня рефракція: світло падає на пластинку, вирізану так, що поверхні перпендикулярні до променевої осі (бірадіалі). Обидві поверхні закриті діафрагмами з малими отворами, що знаходяться один проти одного. Вхідний отвір освітлюється збіжним пучком світла. Вихідного отвору досягнуть лише ті промені, напрямки яких близькі до напрямку променевої осі – тобто *нормалі* цих хвиль утворять конус зовнішньої конічної рефракції, і після пластинки буде конус світла. На екрані теж буде світле кільце, розміри якого будуть зростати при віддаленні екрана (рис.3.9б).

Як згадувалось, особливості поширення хвиль вздовж оптичних осей обумовлені невизначеностями у формулах зв'язку між відповідними векторами.

На рис.3.10 показано перетин поверхонь показників заломлення («внутрішня») та променевої («зовнішня»), у довільних масштабах, координатною площиною (xz). Бінормаль – ON , бірадіаль (променева оптична вісь) – OS . Нехай хвиля з певною \mathbf{v}_ϕ (або \mathbf{n}) поширюється вздовж бінормалі ON (рис.3.10). Напрямок \mathbf{v}_{gr} задається вектором, проведеним з початку координат в точку дотику площини, перпендикулярної до ON і дотичної до променевої поверхні. Але в даному випадку площина, перпендикулярна до ON , дотикається до променевої поверхні не в *одній* точці, задаючи тим самим *одне* визначене значення і напрямок групової швидкості, а по колу (на рисунку



показано дві точки дотику a, b), і всі можливі вектори \mathbf{v}_{ep} формують конус Oab внутрішньої конічної рефракції. Навпаки, якщо хвиля (з \mathbf{v}_{ep}) поширюється вздовж бірадіалі OS , то площина, перпендикулярна до цього напрямку, дотикається до поверхні показників заломлення по колу, визначаючи тим самим конус зовнішньої конічної рефракції $Oa'b'$.

Рис.3.10.

Зазначимо, що реально \mathbf{v}_ϕ та \mathbf{v}_{ep} відрізняються мало, так що відмінності в напрямках бірадіалей та бінормалей слабо позначаються на спостереженні звичайних оптичних явищ в кристалах.

3.8. Поширення світла в поглинаючих анізотропних кристалах

В поглинаючих середовищах тензор ε_{ij} комплексний. Можна показати, що це означає наявність ненульової провідності середовища: $\sigma \neq 0$ (причому в анізотропному середовищі провідність також є тензором другого рангу σ_{kl}). Ненульова провідність середовища означає, що в ньому під дією поля можуть виникнути струми, а зі струмами пов'язано виділення тепла, і, відповідно, дисипація енергії. Оскільки $\sigma \neq 0$, рівняння Максвелла для $\text{rot}\mathbf{H}$ тепер записується у формі

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.62)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} - \frac{1}{c} i\omega \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} - \frac{1}{c} i\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \left(\frac{4\pi}{c} \sigma - \frac{i\omega \varepsilon}{c} \right) \mathbf{E}$$

В середовищі без струмів (тобто $\sigma = 0$) було

$$\text{rot}\mathbf{H} = \left(-\frac{i\omega \varepsilon}{c} \right) \mathbf{E}$$

Тобто, при наявності провідності

$$-\frac{i\omega \varepsilon}{c} \rightarrow \frac{4\pi}{c} \sigma - \frac{i\omega \varepsilon}{c}$$

або

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma \quad (3.63)$$

діелектрична проникність ε стає комплексною $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$.

Комплексними стають і інші пов'язані з ε величини (n , k , v_ϕ , v_{zp}), але формально всі отримані для них раніше формули зберігають свій вигляд – потрібно лише мати на увазі, що тепер ці величини комплексні, і це значно ускладнює аналіз отриманих співвідношень.

Так, наприклад, рівняння (3.62) можна записати в алгебраїчній формі:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{ic} \mathbf{j} - \frac{\omega}{c} \mathbf{D}$$

Домноживши його скалярно на \mathbf{k} , отримуємо

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = \frac{4\pi}{ic} \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} - \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}$$

Зліва маємо змішаний добуток, який рівний нулю, а права частина

$$\frac{4\pi}{ic} \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}, \text{ або } \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \neq 0$$

Отже, вектори \mathbf{k} та \mathbf{D} не ортогональні, як це мало би бути в непоглинаючому середовищі.

Проте цей та інші, пов'язані з поглинанням, ефекти, як правило, слабкі, оскільки в діелектриках провідність незначна, а саме вона визначає величину уявної частини ε , отже, і поглинання (див. (3.63)):

$$\varepsilon \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \text{ або } \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1.$$

Таким чином, затухання можна вважати малим, а отже можна знехтувати членами вже другого порядку по κ порівняно з 1 (κ – коефіцієнт затухання у виразі для показника заломлення в поглинаючому середовищі, $\hat{n} = n(1 + i\kappa)$).

Рівняння Френеля типу (3.40), записане для поглинаючого середовища, також є квадратним рівнянням щодо n^2 – отже, щодо нього справедливі всі висновки, зроблені раніше для непоглинаючого середовища, з поправкою на слабе поглинання. Тепер, наприклад, дві незалежні поляризації \mathbf{D} – еліптичні (а не лінійні), хоча ступінь еліптичності незначний; \mathbf{k} та \mathbf{D} – не ортогональні, хоча компонента \mathbf{D} вздовж \mathbf{k} невелика у порівнянні з величиною самого вектора \mathbf{D} ; швидкості поширення хвиль – комплексні, але їхні уявні частини невеликі, і т.д. Проте, завдяки комплексності величин, фізичні інтерпретації, будуть дещо іншими.

Зрозуміло, що якщо знехтувати поглинанням взагалі, тобто і членами першого порядку по κ , то не буде, очевидно, наприклад, і еліптичної поляризації хвиль.

Рівняння Френеля, записані у формі (3.42), (3.43) для фазових та групових швидкостей також збережуть форму запису, але тепер в них швидкості – комплексні.

Оскільки ефект малий, як кажуть, «порядку поглинання», то, нехтуючи квадратичними по κ членами, можна написати:

$$\hat{v}_\phi = \frac{c}{\hat{n}} = \frac{c}{n(1+i\kappa)} \approx v_\phi(1 - i\kappa)$$

(використано $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$).

$$\hat{n}^2 \approx n^2(1 + 2i\kappa)$$

$$\hat{v}_\phi^2 \approx v_\phi^2(1 - 2i\kappa)$$

і т.д.

При цьому,

-в одновісних кристалах: для звичайного променя $\hat{n}_o = n_o(1+i\kappa_o)$ – поглинання *не залежить* від напрямку, для незвичайного $\hat{n}_e = n_e(1+i\kappa_e)$, $n_e, \kappa_e = f(\phi, \vartheta, \omega)$ – поглинання є функцією напрямку.

-в двовісних кристалах взагалі не існує напрямків, для яких комплексні фазові швидкості однакові, тобто немає $\hat{v}_{\phi 1} = \hat{v}_{\phi 2}$; проте є напрямки, для яких однаковими є *дійсні частини* (незатухаючі множники хвиль) фазових швидкостей $v_{\phi 1} = v_{\phi 2}$, і для них справедливі аналогії з непоглинаючими кристалами. Так, ці напрямки, як і для прозорих кристалів, називаються *оптичними осями*.

З аналізу розв'язків рівняння Френеля слідує, що, як і раніше, буде два значення \hat{n}^2 , тобто два значення \hat{v}_ϕ , але тепер $n_{1,2} = n_{1,2}(1 + \kappa_{1,2})$, і для кожного напрямку поширення маємо не лише по два значення показника заломлення, а й по два значення показника затухання. Це означає, зокрема, що дві хвилі, які поширюються в одному напрямку, поглинаються по різному, причому κ_1 і κ_2 є функціями частоти $\kappa_{1,2} = f(\omega)$. Це означає, що якщо на кристал падає біле світло, то кристал буде забарвленим, а його кольори визначаються напрямом розповсюдження, власне, затуханням в цих напрямках, тобто значеннями κ_1 і κ_2 . Це явище називається *плеохроїзмом*, яке для випадку одновісних кристалів звичайно називають *дихроїзмом*, а для двовісних – *трихроїзмом*; пов'язано це з тим, що для одновісного кристала характерними є два кольори, для двовісного – три. Проте може бути і випадок, коли для двох хвиль, які поширюються в одному напрямку, показники заломлення різні, а показники затухання – однакові.

Зазначимо, що часто середовище називають дихроїчним, якщо його коефіцієнт поглинання залежить від стану поляризації падаючого на середовище світла, а відповідне явище – *дихроїзмом*. Дихроїзм *лінійний*, якщо по-різному поглинається світло з лінійними ортогональними поляризаціями, *круговий* – з круговими правою та лівою поляризаціями, *еліптичний* – якщо по-різному поглинаються хвилі з взаємно ортогональними еліпсами поляризацій та з однаковим напрямком обходу.

Ця властивість покладена в основу дії *дихроїчних поляризаторів*:

--Якщо на дихроїчне середовище (кристалічну пластинку товщиною l) падає світло з амплітудою на вході E_0 , то при його проходженні через пластинку:

$$E_1 = E_0 \exp(-a\kappa_1 l),$$

$$E_2 = E_0 \exp(-a\kappa_2 l)$$

$$(\text{тут } a = \frac{\omega}{c} n)$$

$$\frac{E_1}{E_2} \sim \exp(-a(\kappa_1 - \kappa_2)l)$$

стан поляризації зміниться (світло з природною поляризацією стане частково поляризованим).

Якщо κ_1 і κ_2 дуже відрізняються, то вже на невеликій товщині світло стане (майже) лінійно поляризованим, оскільки одна з хвиль практично повністю затухла (поглинулась), а інша має слабу еліптичність.

Реальні дихроїчні поляризатори (поляроїди) виготовляють не з кристалів, а з синтетичних органічних полімерів, в яких певна структура ланцюжків з молекул забезпечує необхідну анізотропію структури.

В поглинаючих *гіротропних* кристалах кругова поляризація має місце лише для хвиль, які поширюються вздовж оптичних осей (як і в гіротропних непоглинаючих). При цьому не спостерігається повороту площини поляризації лінійно поляризованого світла, бо обидва комплексні показники заломлення відрізняються і дійсними, і уявними частинами. Але оскільки хвилі з правою і лівою круговими поляризаціями поглинаються по-різному, має місце явище кругового дихроїзму. Наприклад, лінійно поляризоване світло, після проходження пластинки з поглинаючого гіротропного кристала, вирізаній перпендикулярно до оптичної осі, стає еліптично поляризованим.

Поняття про рідкі кристали

Рідкокристалічний, або *мезоморфний* стан речовини – стан, який характеризується властивостями і рідини (напр., плинністю), і деякими властивостями твердих кристалів (напр., анізотропією). Мезоморфний стан речовини є проміжною фазою (*мезофаза*) між ізотропною рідиною і кристалічним твердим тілом. Речовини, молекули яких за певних умов здатні утворювати рідкокристалічні фази, називаються *мезогенами*. Деякі мезогени можуть утворювати кілька мезофаз (поліморізм).

За структурою рідкі кристали (РК) є в'язкими рідинами, які складаються з дипольних молекул витягнутої або дископодібної (менш поширеної) форми, які завдяки міжмолекулярній взаємодії є певним чином упорядкованими в усьому об'ємі рідини; як наслідок, в рідині утворюється виділений напрямок.

Рідкі кристали є або *термотропні*, або *ліотропні*.

♦ *термотропні* – речовини, що існують в мезоморфному стані в деякому інтервалі температур і тисків; при нижчих температурах це тверді кристали, при вищих – звичайна рідина (наприклад, пропиловий спирт холестерину в діапазоні 102-116°C).

♦ *ліотропні* – дво- чи багатокомпонентні системи – розчини деяких речовин в полярних розчинниках (приклад – водний розчин мила).

Молекули, які формують термотропні рідкі кристали, мають на одному кінці полярну групу, а більша частина стержня є гнучким гідрофобним вуглецевим ланцюжком.

Ліотропні рідкі кристали проявляють властивості мезофаз при певних концентраціях мезогену в розчиннику, в той час як *термотропні* РК є мезофазами в певних температурних межах. Останні в свою чергу поділяються в залежності від способу впорядкування молекул (в залежності від симетрії) на *нематичні* рідкі кристали (*нематики*) та *смектичні* рідкі кристали (*смектики*).

Нематики, молекули яких мають довгасту стержневидну або пластинчасту форму, характеризуються далеким *орієнтаційним* порядком, проте не мають далекого *трансляційного* порядку (має місце орієнтація поздовжніх осей молекул вздовж деякого напрямку, але не існує упорядкованість поперечних осей молекул та їхніх центрів мас: молекули – паралельні, проте їхній поздовжній зсув хаотичний, вони не мають шаруватої структури). Тобто, існує певний переважний напрям орієнтації довгих осей молекул нематика, який характеризується одиничним вектором ***n*** і називається *директором*.

У нематиків внаслідок відсутності упорядкованості поперечних осей молекул має місце вільність зсувів (поступальних рухів), отже, в'язкість нематиків приблизно така, як і в'язкість в аморфному рідкому стані.

Нематичні фази зустрічаються тільки в таких речовинах, молекули яких не мають відмінностей між правою та лівою формами, молекули тотожні своєму дзеркальному зображенню (*ахіральні*, див. далі).

Смектична мезофаза відрізняється від нематичної наявністю далекого трансляційного порядку. Тобто, молекули смектиків орієнтовані паралельно, і зібрані шарами; товщина шару визначається довжиною молекул. Таким чином, *ступінь молекулярної упорядкованості вищий у смектичних кристалів.*

У смектиків в'язкість (плинність) реалізується за рахунок взаємного ковзання смектичних площин, в'язкість смектиків суттєво вища, ніж у нематиків.

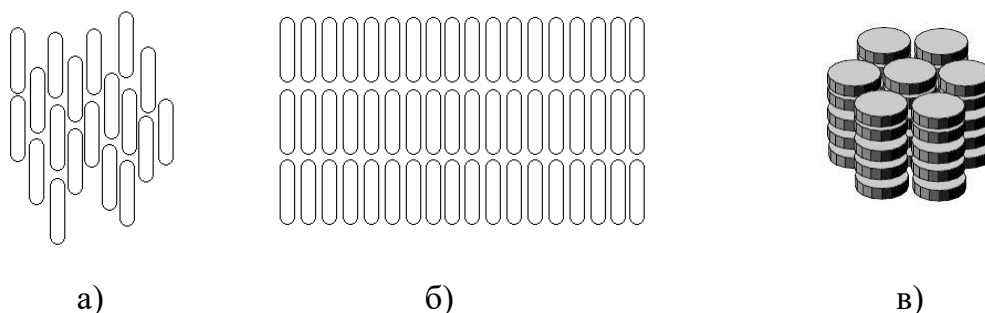


Рис.д.2.1. Схематичний малюнок розташування молекул: а) нематик, б) смектик, в) колонкова структура.

Крім згаданих структур рідких кристалів існують ще так звані *колонкові* фази, які утворені дископодібними молекулами, і які розміщені одна на одній у вигляді багатошарових колон, з паралельними оптичними осями. Часто їх називають «рідкими нитками», вздовж яких молекули мають трансляційні ступені вільності.

При підвищенні температури для мезогенів є характерними структурні фазові переходи I роду за схемою:

Твердий кристал → смектик → нематик → аморфна рідина
(як і має бути згідно загальних принципів симетрії).

Рідкі кристали – це *флюїди*, тобто речовини, поведінку яких при деформаціях можна описати законами механіки рідин, їхні молекули певним чином впорядковані, тобто *існує певна симетрія структури*. Як наслідок, існує анізотропія механічних, електричних, магнітних та оптичних властивостей речовин цього класу. Анізотропія характерна, зокрема, для таких параметрів як пружність, електропровідність (провідність – тензор σ_{ij}). Спостерігається анізотропія магнітна (магнітна проникність – тензор μ_{ij}) та електрична

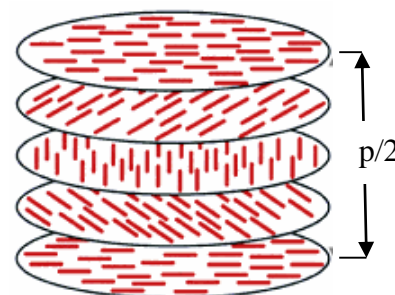
Необхідно зазначити, що, поєднуючи властивості рідин та твердих тіл (текучість, анізотропія), рідкі кристали проявляють і специфічні ефекти, багато з яких не спостерігаються у рідинах та твердих тілах.

Хіральність (грец. - *рука*) – відсутність симетрії правої і лівої сторони об'єкта, або ж здатність будь-якого об'єкта мати своє дзеркальне відбиття, не тотожне оригіналу, іншими словами – об'єкт і його дзеркальне відбиття не можуть бути суміщені тільки обертанням і лінійним переміщенням. Якщо відбиття об'єкта в плоскому дзеркалі відрізняється від самого об'єкта, то кажуть, що об'єкту властива хіральність. Очевидним прикладом хірального об'єкта є рука, звідси й назва поняття. Будь-які дві частини руки несиметричні, права рука в дзеркалі відображається як ліва.

Хіральні молекули є оптично-активними, оскільки вони по різному взаємодіють із світлом лівої та правої кругової поляризації (причому їхня оптична активність на 2-3 порядки вища, ніж у твердих кристалів). Однакові за хімічним складом та структурою молекули, які відрізняються хіральністю, називаються енантіомерами, або, зазначаючи їхню хіральність, кажуть про *L* (лівий) та *D* (правий) ізомери.

Свою назву холестеричні рідкі кристали отримали завдяки тому, що багато з них є похідними холестеролу.

Холестеричні рідкі кристали характеризуються далеким порядком в одному напрямку, в якому директор є періодичною функцією, тобто його орієнтація періодично змінюється в просторі вздовж певної осі (див.рис.д.2.3). Період p зміни напрямку директора (віддаль вздовж осі між двома шарами з однаковою орієнтацією директора) називається *кроком спіралі*. Крок спіралі холестеричних рідких кристалів дуже залежить від температури, і тому вони міняють колір при нагріванні чи охолодженні.



Завдяки своїй періодичній структурі холестеричні рідкі кристали є природними дифракційними ґратками.

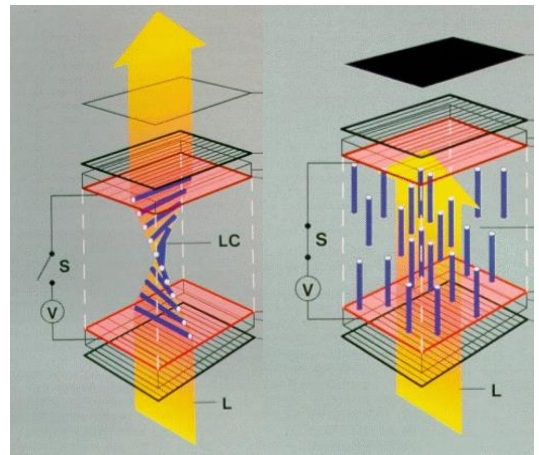
Рис.д.2.3.

Бреггівське розсіяння світла на цих ґратках призводить до того, що плівки холестеричних рідких кристалів яскраво забарвлені, причому їхній колір залежить від температури (різка зміна кольору при $\Delta T \sim 0,001^\circ\text{C}$). Відповідно, холестеричні рідкі кристали використовуються для виготовлення термодатчиків, зокрема, у вигляді плівок, які є індикаторами температури різних ділянок контрольованих об'єктів.

Застосування РК в різних областях науки і техніки зараз досить широке. Так, за їх допомогою реєструють незначні концентрації пари певних хімічних сполук, РК можуть бути індикаторами гамма- та УФ-випромінювання, детекторами ультразвуку, датчиками тиску.

Найбільш широко рідкі кристали застосовуються в інформаційній техніці для виготовлення різних типів рідкокристалічних дисплеїв. Принцип дії таких пристроїв заснований на *ефекті Фредерікса* – переорієнтації молекул рідкого кристалу в комірці за наявності прикладеної до цієї комірки напруги. Характерною особливістю рідких кристалів є те, що молекули переорієнтуються при дуже малому полі – достатньо напруги в кілька мВ.

Перехід Фредерікса — явище переорієнтації молекул рідкого кристалу під дією електричного поля: в залежності від того, чи кристал є додатним чи від'ємним, молекули повертаються або вздовж напрямку електричного поля, або впоперек напрямку поля. Кут повороту при цьому залежатиме від прикладеної напруги. *Перехід Фредерікса* широко



використовується в рідкокристалічних дисплеях. Кожен піксель такого дисплею містить комірку з рідким кристалом, орієнтованим певним чином завдяки поверхневим силам. Прикладення напруги до такої комірки змінює орієнтацію молекул в проміжку між поверхнями. В результаті змінюється оптична активність комірки, а, отже, її здатність пропускати поляризоване світло, створюючи можливість для відображення бажаної інформації.

Питання для самоконтролю

1. Рівняння ейконала.
2. Загальні властивості променів.
3. Інтенсивність в геометричній оптиці.
4. Конгруенція.
5. Повне внутрішнє відбивання. Ромб Френеля.
6. Повне внутрішнє відбивання. Поняття про оптичні хвильоводи.
7. Поширення світла в шаруватих середовищах. Діелектричні плівки.
8. Характеристична матриця для шаруватого середовища.
9. Однорідна діелектрична плівка. Чверть- та півхвильові товщини.
10. Однорідна діелектрична плівка. Застосування.
11. Однорідна діелектрична плівка. Просвітлення оптики.
12. Однорідна діелектрична плівка. Подільник пучка. Поляризатор.
13. Однорідна діелектрична плівка. Фільтр.
14. Періодичні шаруваті структури. Приклад: Інтерферометр Фабрі-Перо.
15. Гаусові пучки, їхні властивості.
16. Поняття про оптичні резонатори.
17. Тензор діелектричної проникності. Властивості.
18. Елементи симетрії фізичних об'єктів
19. Частотна дисперсія.
20. Просторова дисперсія. Просторова дисперсія та гіротропія.
21. Властивості тензора ϵ_{ij} .
22. Рівняння Максвела в алгебраїчній формі.
23. Рівняння Френеля кристалооптики.
24. Променева поверхня та поверхня хвильових нормалей.
25. Еліпсоїд Френеля та оптична індикатриса.
26. Одновісні кристали. Подвійне променезаломлення.
27. Двовісні кристали. Подвійне променезаломлення.
28. Подвійне променезаломлення на межі двовісний кристал – ізотропне середовище.
29. Конічна рефракція.
30. Поширення світла в поглинаючому анізотропному середовищі. Плеохроїзм, лінійний та круговий дихроїзм.
31. Нормальні хвилі в анізотропному середовищі. Спектроскопія конденсованого стану – спектроскопія нормальних хвиль.
32. Поняття про рідкі кристали. Мезоморфний стан речовини.
33. Термотропні та ліотропні рідкі кристали
34. Термотропні кристали: нематики та смектики. Холестерики.
35. Оптичні властивості рідких кристалів. Застосування.

Література

1. *М. Борн, Э. Вольф.* Основы оптики. Москва, «Наука», 1973.
2. *Л. Ландау, Е. Лифшиц.* Электродинамика сплошных сред (VIII), Москва, «Наука», 1982.
3. *Ю. Сиротин, М. Шаскольская.* Основы кристаллофизики. Москва, «Наука», 1979.
4. *Ф. Федоров.* Теория гиротропии. Минск, 1958.
5. *В. Агранович, В. Гинзбург.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Москва, «Наука», 1979.
6. *Л. Ландау, Е. Лифшиц.* Механика, Москва, «Наука», 1973.
7. *М. Виноградова, О. Руденко, А. Сухоруков.* Теория волн. Москва, «Наука», 1979.
8. *С. И. Пекар.* Кристаллооптика и добавочные световые волны. Киев, «Наукова думка», 1982.
9. *М. І. Грищенко.* Фізика рідких кристалів. Київ, «Академія», 2012.
10. *А. С. Сонин.* Введение в физику жидких кристаллов. Москва, «Наука», 2016.
11. *С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто.* «Дифракция и волноводное распространение оптического излучения», Москва, «Мир», 1989,
12. *Ю. А. Ананьев.* Оптические резонаторы и лазерные пучки, Москва, «Наука», 1990.
13. *Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников.* Современная оптика гауссовых пучков, Москва, Физматлит, 2010.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Розділ 1. Поширення світла в неоднорідному середовищі.	
Градiєнтна	
оптика.....	5
1.1. Рівняння ейконала.....	6
1.2. Інтенсивність в геометричній оптиці.....	9
1.3. Загальні властивості променів.....	12
1.4. Закони заломлення та відбивання.....	17
1.5. Конгруенція.....	20
1.6. Повне внутрішнє відбивання. Приклади застосування.....	21
Додаток 1. Гаусові пучки, їхні властивості. Поняття про оптичні резонатори.....	23
Розділ 2. Поширення світла в шаруватих середовищах.....	32
2.1. Поширення світла в шаруватих середовищах. Діелектричні плівки.....	32
2.2. Характеристична матриця для шаруватого середовища.....	35
2.3. Форма характеристичної матриці.....	36
2.4. Коефіцієнти відбивання і пропускання.....	38
2.5. Однорідна діелектрична плівка. Застосування.....	40
2.6. Періодичні шаруваті структури.....	45
Розділ 3. Поширення світла в однорідному анізотропному середовищі.....	48
3.1. Поняття про тензор діелектричної проникності ϵ_{ij} . Елементи симетрії фізичних об'єктів.....	48
3.2. Частотна та просторова дисперсія.....	52
3.2.1. Частотна дисперсія.....	52
3.2.2. Поняття про просторову дисперсію. Гіротропія. Тензор $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$	56
Додаток. Нормальні хвилі в анізотропному середовищі. Спектроскопія конденсованого стану – спектроскопія нормальних хвиль.....	60
3.3. Рівняння Френеля кристалооптики.....	62
3.3.1. Рівняння Френеля. Поверхня показників заломлення. Поверхня індексів.....	62
3.3.2. Інші форми рівняння Френеля. Променева поверхня та поверхня хвильових нормалей.....	66
3.3.3. Еліпсоїд Френеля та оптична індикатриса.....	68
3.4. Одновісні кристали. Подвійне променезаломлення.....	70
3.5. Двовісні кристали.....	73
3.6. Подвійне променезаломлення на межі анізотропного та ізотропного середовищ.....	76

3.7. Конічна рефракція.....	77
3.8. Поширення світла в поглинаючому анізотропному середовищі.....	79
<i>Додаток 2. Елементи оптики рідких кристалів.....</i>	<i>83</i>
Питання для самоконтролю.....	88
Література.....	89
Зміст.....	90