КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Чумаченко Артем Васильович
Вільчинський Станіслав Йосипович
Приходько Олена Олександрівна

Вибрані задачі з

квантової механіки

частина 2

Методичний посібник для студентів фізичного факультету

Київ – 2019

ЗМІСТ

Вступ

Даний посібник являє собою збірку методичних рекомендацій для розв'язку основних задач курсу релятивістської квантової механіки для студентів фізичного факультету. Метою посібника є ознайомлення студентів з основними методами квантової механіки та необхідним математичним апаратом, використовуючи при цьому відомі точно розв'язувані задачі. Детальний розв'язок основних прикладів та наявність задач різного рівня складності, а також велика кількість задач, що пропонуються для самостійного розв'язку, дозволяють опанувати курс студентам з різним рівнем математичної підготовки.

За необхідності певний теоретичний мінімум, що потрібний для розв'язання задачі, подано на початку Заняття, а також у Додатку. Для більш детального ознайомлення з теорією автори пропонують звернутись до курсів квантової механіки А.М. Федорченка, І. О. Вакарчука і W. Greiner. Розмірності та числові значення деяких необхідних фізичних величин подано нижче.

Постійна Планка	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,62559 \cdot 10^{-27}/2\pi$ ерг·сек;
число	$\pi = 3.14159265359$;
маса спокою електрона	$m_e = 9,10908 \cdot 10^{-28}$ г;
елементарний заряд	$e = 4,80298 \cdot 10^{-10}$;
Борівський радіус	$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5,2917720859(36) \cdot 10^{-11}$ м;
стала Рідберга	$R = 10973731,568539\text{м}^{-1}$.

ЧАСТИНА II
Вибрані задачі з квантової механіки

1

Властивості матриць Паулі та Дірака.

Алгебра матриць Паулі. У навчально-методичному посібнику "Вибрані задачі квантової механіки. Частина І."у Занятті 13 матриці Паулі були отримані як результат усереднення операторів $\hat{J}$ повного моменту кількості руху частинки для квантового числа $j = 1/2$. Матриці Паулі мають наступні властивості

1. Ермітовість $\sigma_i = \sigma_i^+, \quad i = x, y, z;$
2. Унітарність $\sigma_i \sigma_i^+ = E_2$, де E_2 – одинична матриця другого порядку;
3. Визначник матриць Паулі $\det \sigma_i = |1|$;
4. Піднесення до степені
$$\sigma_i^n = \begin{cases} \sigma_i, & n = 2k+1, \\ E_2, & n = 2k; \end{cases}$$
5. Комутатор матриць Паулі $[\sigma_i, \sigma_j] = i2\ \varepsilon_{ijk}\sigma_k$;
6. Антикомутатор матриць Паулі $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2E_2\delta_{ij}$;
7. Матриці $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, E_2$ утворюють базис лінійного простору елементи якого є квадратні матриці другого порядку.

Корисні співвідношення (довести самостійно):

- $(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = E_2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + i\vec{\sigma}[\vec{a} \times \vec{b}]$;
- $\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\vec{a}) = E_2\vec{a} - i[\vec{\sigma} \times \vec{a}]$;
- $(\vec{\sigma}\vec{a})\vec{\sigma} = E_2\vec{a} + i[\vec{\sigma} \times \vec{a}]$,

де $\vec{\sigma} = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – вектор Паулі.

Алгебра матриць Дірака. Представлення Дірака-Паулі.

Матриці Дірака у представленні Дірака-Паулі [1]

$$\beta = \begin{bmatrix} E_2 & 0_2 \\ 0_2 & -E_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0_2 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0_2 \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

мають наступні властивості:

1. $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 + \beta^2 = E_4$;
2. $\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2E_4\delta_{ij}, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$;
3. ермітовість $\beta = \beta^+, \alpha_i = \alpha_i^+$.

Алгебра матриць Дірака. Представлення Вейля та Майорани.

Перехід від представлення Дірака-Паулі до представлення Вейля та Майорани здійснюється за допомогою матриць переходу S_v та S_m відповідно

$$S_v = \begin{bmatrix} E_2 & E_2 \\ E_2 & -E_2 \end{bmatrix}, \quad S_m = \begin{bmatrix} E_2 & \sigma_y \\ \sigma_y & -E_2 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Матриці S_v та S_m є ермітовими та унітарними. Перехід до нових представлень реалізується за допомогою співвідношення

$$\alpha_i' = S^+\alpha_i S^{-1}, \quad \beta' = S^+\beta S^{-1}, \quad \Psi' = S\Psi,$$

де Ψ це розв'язки рівняння Дірака.

Завдання для самостійної підготовки Довести, що властивості матриць Дірака у нових представленнях лишаються незмінними.

Оператор спіну. Оператор $\hat{S}$, власними значеннями якого є проекції власного магнітного моменту частинки на вибраний напрямок, є оператор спіну. Для частинки власний магнітний момент якої характеризується квантовим числом $j = 1/2$ оператор може бути представлений за допомогою вектора Паулі $\vec{\sigma}$ наступним чином

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

[1]Тут і далі в тексті E_4 одинична матриця четвертого порядку, а 0_2 нульова матриця другого порядку.

Завдання для самостійної підготовки Використовуючи властивості матриць Паулі та Дірака

1. Знайти $\hat{\vec{S}}^2$.

2. Показати, що між компонентами оператора спіну існують наступні комутаційні співвідношення $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} S_k$, де індекси приймають значення $i, j, k = x, y, z$, а ε_{ijk} – антисиметричний тензор третього рангу (тензор Леві-Чівіта).

3. Показати, що комутатори компонент оператора спіну з матрицями Дірака задаються наступними співвідношеннями

$$[\hat{S}_i, \alpha_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad [\hat{S}_i, \beta] = 0.$$

Закони збереження у теорії Дірака.

Фізичні величини зберігаються з часом, якщо відповідні їм оператори явно не залежать від часу і комутують з Гамільтоніаном $\hat{H}$ даної системи. Гамільтоніан $\hat{H}_D$ теорії Дірака має вигляд

$$\hat{H}_D = c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + \beta mc^2, \tag{1.4}$$

де c – швидкість світла, m – маса частинки, $\vec{p}$ – вектор імпульсу частинки.

Приклад 1: Показати, що оператор спіральності $\hat{\vec{S}}\hat{\vec{p}}$ комутує з гамільтоніаном Дірака.

Враховуючи лінійність комутатора, треба розрахувати комутатори окремо для першого та другого доданків гамільтоніану Дірака:

$$c[\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{S}}\hat{\vec{p}}] = \frac{c\hbar}{2}\left\{ \begin{bmatrix} 0_2 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \\ \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_2 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \\ \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{c\hbar}{2}\left\{ \begin{bmatrix} 0_2 & (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})^2 \\ (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})^2 & 0_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_2 & (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})^2 \\ (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})^2 & 0_2 \end{bmatrix} \right\} = 0_2. \tag{1.5}$$

$$
\begin{aligned}
& mc^2[\vec{\beta}, \hat{\vec{S}}\hat{\vec{p}}] = \qquad (1.6)\\
& = \frac{mc^2\hbar}{2}\left\{\begin{bmatrix} E_2 & 0_2 \\ 0_2 & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_2 & 0_2 \\ 0_2 & E_2 \end{bmatrix}\right\} = \\
& = \frac{m^2\hbar}{2}\left\{\begin{bmatrix} \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \\ 0_2 & -\vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \\ 0_2 & -\vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \end{bmatrix}\right\} = 0_2.
\end{aligned}
$$

Тобто, цим ми довели, що оператор спіральності комутує з гамільтоніаном $[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}\hat{\vec{p}}] = 0$, а отже проекції спіну на напрямок руху частинки в теорії Дірака зберігаються з часом.

Приклад 2:

Доведемо, що в теорії Дірака зберігається повний момент кількості руху частинки, який є сумою орбітального та власного магнітного моментів.

Для цього розрахуємо комутатори операторів спіну $\hat{\vec{S}}$ та орбітального моменту $\hat{\vec{L}}$ з гамільтоніаном Дірака:

$$
\begin{aligned}
& c[\hat{\vec{S}}, \vec{\alpha}\hat{\vec{p}}] = \frac{c\hbar}{2}\left\{\begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0_2 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \\ \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_2 & \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} \\ \vec{\sigma}\hat{\vec{p}} & 0_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}\right\} = \\
& = \frac{\hbar}{2}\left\{-\begin{bmatrix} 0_2 & (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})\vec{\sigma} \\ (\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})\vec{\sigma} & 0_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 & \vec{\sigma}(\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}) \\ \vec{\sigma}(\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}) & 0_2 \end{bmatrix}\right\} = \qquad (1.7)\\
& = c\hbar\begin{bmatrix} 0_2 & -i[\vec{\sigma}\times\vec{p}] \\ -i[\vec{\sigma}\times\vec{p}] & 0_2 \end{bmatrix} = -ic\hbar[\vec{\alpha}\times\hat{\vec{p}}],
\end{aligned}
$$

де було використані співвідношення, запропоновані для самостійного доведення у розділі про алгебру матриць Паулі.

Значення другого комутатора зручніше шукати окремо для кожної компоненти:

$$[\hat{\vec{L}}, \hat{H}_D] = [\hat{L_x}, \hat{H}_D]\vec{e_x} + [\hat{L_y}, \hat{H}_D]\vec{e_y} + [\hat{L_z}, \hat{H}_D]\vec{e_z}. \qquad (1.8)$$

Проведемо розрахунок лише для x компоненти, для інших вин буде аналогічним:

$$[\hat{L_x}, \hat{H}_D] = [\hat{L_x}, \left\{c(\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}) + \beta mc^2\right\}], \qquad (1.9)$$

очевидно, що скаляр $\hat{L_x}$ комутуватиме з числовою матрицею βmc^2, тому лишається знайти комутатор

$$ic\hbar[(y\hat{p_z} - z\hat{p_y}), (\alpha_x\hat{p_x} + \alpha_y\hat{p_y} + \alpha_z\hat{p_z})] = ic\hbar(\alpha_y p_z - \alpha_z p_y) = ic\hbar[\vec{\alpha}\times\vec{p}]\vec{e_x}. \tag{1.10}$$

Таким чином можна бачити, що окремо оператор спіну та орбітального моменту не комутують з гамільтоніаном Дірака. Але оператор повного моменту $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ комутує, а отже повний момент зберігається з часом:

$$[(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}), \hat{H_D}] = -ic\hbar[\vec{\alpha}\times\vec{p}] + ic\hbar[\vec{\alpha}\times\vec{p}] = 0. \tag{1.11}$$

2

Гамма-матриці. Базис у просторі матриць четвертого порядку. Розклад по базису.

Зручно використовувати представлення матриць Дірака у вигляді компонент чотиривектора $\gamma_0 = \beta$ і $\gamma^i = \beta\alpha^i$, що задовольняють співвідношенню [3, 4, 5]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} E_4,$$

де

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

метричний тензор, а індекси $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Отримані матриці формують чотири з шістнадцяти елементів базису матриць четвертого порядку.

Завдання для самостійної підготовки Довести, що матриця $\gamma^0 = \gamma^{0^+}$ є ермітовою, а три інші матриці – антиермітові $\gamma^{i^+} = -\gamma^i$. Знайти явний вигляд гамма-матриць у представленнях Дірака-Паулі, Вейля та Майорани.

П'ятим елементом базису обирають ермітову і унітарну матрицю $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, яка антикомутує з усіма γ^μ. Властивості цієї матриці:

$$(\gamma^5)^+ = \gamma^5, (\gamma^5)^2 = E_4, \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0,$$

легко довести з її визначення та основного співвідношення для гамма-матриць (2.1):

$$(\gamma^5)^+ = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^+ = -i\gamma^{3^+}\gamma^{2^+}\gamma^{1^+}\gamma^{0^+} = \tag{2.1}$$
$$= (-1)^{1+3} i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = ... = (-1)^{10} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5;$$

$$(\gamma^5)^2 = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = (-1)^1 + 3(\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 =$$
$$= (-1)^{1+3+2}i(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = ... = (-1)^{10}E_4; \qquad (2.2)$$

Остання властивість антикомутації легко доводиться через те, що в γ^5 по одній зустрічаються кожна з матриць γ^μ.

$$\gamma^2\gamma^5 = \gamma^2 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-1)i\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3 =$$
$$= (-1)^2 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3 = (-1)^3 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = -\gamma^5\gamma^2, \qquad (2.3)$$

аналогічно можна довести антикомутацію для інших трьох матриць.

Наступні шість елементів базису $-2i\sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ отримуються з комутаторів гамма-матриць γ^μ. Властивості цих елементів базису наступні

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}, \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0.$$

Ще чотири елементи базису отримуються як добутки $\gamma^5\gamma^{mu}$, а останній це одинична матриця E_4. Будь який добуток гамма-матриць можна розкласти по базису цих 16 елементів користуючись тим що слід від добутку будь-якої пари базисних елементів дорівнює нулю.

Обрахунок слідів матриць Дірака.

Відомо, що слід від добутку двох матриць A та B задовольняють співвідношенню $Tr(AB) = Tr(BA)$. Використовуючи його і основне співвідношення для гамма-матриць (2.1) отримаємо:

1.
$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \qquad (2.4)$$

Для доведення візьмемо слід від обох частин (2.1):

$$2g^{\mu\nu}TrE_4 = Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu), \qquad (2.5)$$

враховуючи, що $TrE_4 = 4$ співвідношення доведено.

2.
$$Tr(\sigma^{\mu\nu}) = 0. \qquad (2.6)$$

Дійсно:

$$Tr(\sigma^{\mu\nu}) = \frac{i}{2}(Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) - Tr(\gamma^\nu\gamma^\mu)) = 0. \qquad (2.7)$$

3. Слід від добутку непарної кількості гамма-матриць рівний нулю:

$$Tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \ldots . \tag{2.8}$$

Для доведення цього співвідношення домножимо добуток матриць на одиничну матрицю, представлену як добуток двох матриць γ^5:

$$\begin{aligned}
&Tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}) = Tr(\gamma^5\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}})) = \\
&= -Tr(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^5\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}) = \\
&= (-1)^{2n+1}Tr(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma^5) = \\
&= -Tr(E_4\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

де у передостанній рівності ми скористались властивістю сліду від добутку матриць. Отже, отримуємо число рівне самому собі з іншим знаком, таким є лише нуль. Очевидними наслідками отриманої рівності є

$$Tr(\gamma^\mu) = 0,$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^5) = 0.$$

4. Слід від добутку парної кількості гамма-матриць можна записати у вигляді:

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}). \tag{2.10}$$

Доведемо останню рівність послідовно комутуючи матрицю γ^μ наліво з іншими трьома матрицями, а потім як і у попередньому прикладі скористаємось у останньому доданку властивістю сліду від добутку матриць:

$$\begin{aligned}
&Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = Tr((2g^{\mu\nu}E_4 - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\alpha\gamma^\beta) = \\
&= 2g^{\mu\nu}Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta) - Tr(\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - Tr(\gamma^\nu(2E_4g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha\gamma^\mu)\gamma^\beta) = \ldots \\
&= 8(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) - Tr(\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Таким чином співвідношення доведене. Наслідком його буде рівність $Tr\gamma^5 = Tr(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0$, оскільки недіагональні елементи метричного тензора рівні нулю.

5. Слід від добутку матриць:

$$Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0. \tag{2.12}$$

Пропонуємо читачу довести це співвідношення самостійно.

6. Слід від добутку парної кількості гамма-матриць:

$$Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{2.13}$$

де $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ повністю антисиметричний тензор четвертого рангуз умовою $\varepsilon^{0123} = -1$.

Для доведення цієї рівності зазначимо, що перестановка будь-якої пари гамма-матриць матиме наслідком зміну знаку сліду від добутку матриць, а парна кількість перестановок не змінює знаку сліду. Така поведінка лівої частини рівності (2.13) відповідає властивостям тензора $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ у її правій частині. Числовий коефіцієнт $C = 4i$ при тензорі можна легко отримати фіксуючи індекси гамма-матриць, наприклад $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\alpha = 2$ і $\beta = 3$, тоді

$$\begin{aligned} C\varepsilon^{0123} = -C = Tr(\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \\ = Tr(-i\gamma^5\gamma^5) = -iTr(E_4) = -4i, \end{aligned} \tag{2.14}$$

тобто $C = 4i$, що і треба було довести.

Розклад по базису матриць Дірака.

Будь-яку матрицю розмірності 4 можна розкласти по базису з 16 елементів:

$$\gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu\gamma^5, \quad \sigma^{\mu\nu}, \quad E_4.$$

Для знаходження розкладу добутку будь-якої кількості гамма-матриць достатньо знайти добутки розкладів наступних комбінацій $\gamma^\alpha\gamma^\beta$, $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5$ і $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu$. Доведення даної теореми ляшаємо на самостійне виконання. Отримаємо розклади згаданих комбінацій:

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta = g^{\alpha\beta}E_4 - i\sigma^{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

Доведення першого розкладу не вимагає проведення виликих розрахунків:

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha) + \frac{1}{2}(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)() = g^{\alpha\beta}E_4 - i\sigma^{\alpha\beta}. \quad (2.16)$$

Розклад по базису добутку $\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5$ потребує іншого підходу. Запишемо розклад з навизначеними коефіцієнтами:

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5 = A^{\alpha\beta}\gamma^5 + B^{\alpha\beta\mu}\gamma_\mu + C^{\alpha\beta\mu}\gamma_\mu\gamma^5 + D^{\alpha\beta\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + E^{\alpha\beta}(I \equiv E_4). \quad (2.17)$$

Кожен коефіцієнт розкладу може бути знайдений з умови, що слід від добутку двох різних базисних елементів дорівнює нулю. Ця властивість виступає аналогом звичного скалярного добутку двох ортогональних векторів.

Домножимо зліва обидві частини виразу (2.17) на матрицю γ^5 і обрахуємо сліди обох частин виразу:

$$Tr(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5) = A^{\alpha\beta}Tr(\gamma^5\gamma^5) = 4A^{\alpha\beta}, \quad (2.18)$$

тут перший доданок, враховуючи $Tr(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5) = Tr(\gamma^\alpha\gamma^\beta)$ ми вже обраховували вище, отже перший коефіцієнт рівний

$$A^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}.$$

Тепер домножимо вихідний розклад зліва на $\gamma^{\mu'}$ і знов шукаємо слід від двох частин виразу:

$$Tr(\gamma^{\mu'}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5) = B^{\alpha\beta\mu}Tr(\gamma^{\mu'}\gamma_\mu) = 4B^{\alpha\beta\mu'}, \quad (2.19)$$

оскільки зліва маємо слід від непарної кількості матриць Дірака то коефіцієнт $B^{\alpha\beta\mu'}$ рівний нулю.

З тих самих міркувань коефіцієнти $C^{\alpha\beta\mu}$ та $E^{\alpha\beta}$ також зануляються. Знайдемо останній коеффіцієнт $D^{\alpha\beta\mu\nu}$. Легко помітити, що він має бути антисиметричним за індексами μ і ν, тобто:

$$D^{\alpha\beta\mu\nu} = -D^{\alpha\beta\nu\mu} \to D^{\alpha\beta\mu\mu} = 0.$$

Також для зручності його можна представити як

$$D^{\alpha\beta\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = iD^{\alpha\beta\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu - E_4 g_{\mu\nu}) = iD^{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu.$$

Таким чином тепер можемо домножити вираз (2.17) на значно простішу ніж $\sigma_{\mu\nu}$ комбінацію $\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}$ і знов шукати слід від обох частин:

$$Tr(\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{5}) = iD^{\alpha\beta\mu\nu}Tr(\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}), \tag{2.20}$$

враховучи отримані вище рівності, маємо

$$4i\varepsilon^{\mu'\nu'\alpha\beta} = 4iD^{\alpha\beta\mu\nu}(g^{\mu'}g^{\nu'}g_{\mu\nu} - g^{\mu'}_{\mu}g^{\nu'}_{\nu} + g^{\mu'}_{\nu}g^{\nu'}_{\mu}). \tag{2.21}$$

Проводячи підсумовування за повторюваними індексами у правій частині отримаємо:

$$4i\varepsilon^{\alpha\beta\mu'\nu'} = 4i(-D^{\alpha\beta\mu'^{\nu'}} + D^{\alpha\beta\nu'\nu'}, \tag{2.22}$$

отже

$$D^{\alpha\beta\mu'\nu'} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu'\nu'}. \tag{2.23}$$

Таким чином остаточно розклад добутку (2.17) має вигляд:

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{5} = g^{\alpha\beta}\gamma^{5} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}. \tag{2.24}$$

Завдання для самостійної підготовки. Знайти розклад по базису матриць Дірака добутку $\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}$.

3

Релятивістська інваріантність рівняння Дірака. Перетворення біспінорів при власних і невласних перетвореннях Лоренця.

Завдання 1: Отримати явний вигляд оператора перетворення $\hat{S}$ для розв'язків рівняння Дірака при перетвореннях Лоренця Λ^{μ}_{ν}:
а) повільному русі системи координат вздовж осі Ox;
б) обертанні системи координат навколо осі Oz.

Розв'язок: Нехай маємо рівняння Дірака записане у вигляді [6, 7]

$$(\gamma_\mu p^\mu - mc)\Psi = 0, \quad p^\mu = \{\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\vec{\nabla}\} \tag{3.1}$$

де γ_μ – гамма-матриці Дірака, p^μ – чотиривектор імпульсу, m – маса частинки, c – швидкість світла.

Рівняння, якому має задовольняти оператор $\hat{S}$ має вигляд (спробуйте вивести його самостійно [8, 9, 10, 11]):

$$\gamma_\mu \hat{S}\Lambda^\mu_\nu = \hat{S}\gamma_\nu. \tag{3.2}$$

Перетворення Лоренца [12, 13] при обертанні і прямолінійному зсуві системи координат називають власними. Визначник матриці переходу для таких перетворень $\det \Lambda^\mu_\nu = 1$. Для отримання явного вигляду оператора при русі системи координат вздовж осі Ox треба записати відповідне перетврення Лоренця:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa\beta & 0 & 0 \\ \kappa\beta & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{3.3}$$

де v – швидкість руху системи координат.

Після підстановки (3.3) у (3.2) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}&\gamma_0\hat{S}\kappa+\gamma_1\hat{S}\kappa\beta=\hat{S}\gamma_0,\\&\gamma_0\hat{S}\kappa\beta+\gamma_1\hat{S}\kappa=\hat{S}\gamma_1,\\&\gamma_2\hat{S}=\hat{S}\gamma_2,\\&\gamma_3\hat{S}=\hat{S}\gamma_3.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Оскільки ми шукаємо оператор перетворення хвильової функції $\Psi = \hat{S}\Psi'$, де Ψ є біспінором (чотирикомпонентним вектором стану), тоді $\hat{S}$ є лінійним оператором що діє у просторі розмірності 4. Отже можна розкласти $\hat{S}$ за базисом гамма-матриць:

$$\hat{S}=A\gamma_5+B^{\mu}\gamma_{\mu}C^{\mu}\gamma_{\mu}\gamma_5+D^{\mu\nu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}+E(E_4\equiv I),\tag{3.5}$$

де I – одинична матриця.

Завдання 1.1. Враховуючи, що $\hat{S}$ комутує з матрицями γ_2 та γ_3 і не комутує з γ_0 та γ_1 довести, що оператор $\hat{S}$ треба шукати у вигляді $\hat{S}=EI_4+D^{10}\gamma_1\gamma_0$.

Враховуючи отриманий результат, з перших двох рівнянь (3.4) отримаємо

$$\begin{aligned}&\gamma_0\left[a(\kappa-1)-\kappa\beta b\right]+\gamma_1\left[a\kappa\beta-b\kappa-b\right]=0,\\&\gamma_0\left[a\kappa\beta-b(1+\kappa)\right]+\gamma_1\left[-b\kappa\beta-a\kappa-a\right]=0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

де для зручності використані перепозначення $a\equiv E$ та $b\equiv D^{10}$. Умовою існування нетривіального розв'язку даної системи рівнянь є рівність нулю визначника

$$\begin{vmatrix}\kappa-1 & -\kappa\beta\\ \kappa\beta & -(1+\kappa)\end{vmatrix}=0,\tag{3.7}$$

яка з урахуванням (3.3) задовольняється тотожно, а отже система має безліч розв'язків:

$$\frac{a}{b}=\frac{\kappa\beta}{1+\kappa}.\tag{3.8}$$

Нагадаємо, що значення параметра $\beta=v/c$ можуть змінюватись неперервно в межах від нуля до одиниці в залежності від швидкості системи координат v. Таку саму область значень має функція $\tanh\alpha$

де кут α змінюється від нуля до нескінченності. Виконуючи заміну $\beta = \tanh\alpha$, отримаємо

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\alpha$$

і відповідно для (3.8) знайдемо вирази для констант $a = A\cosh\frac{\alpha}{2}$ та $b = A\sinh\frac{\alpha}{2}$ через Лоренців (узагальнений) кут повороту α. Оператор $\hat{S}$ з урахуванням вигляду констант та b запишемо як

$$\hat{S} = A\left(\cosh\frac{\alpha}{2} + \gamma_1\gamma_0\sinh\frac{\alpha}{2}\right). \tag{3.9}$$

За умовою задачі рух є повільним, а отже $\beta = \tanh\alpha << 1$ і відповідно $\alpha \to 0$.

Завдання 1.2. Розкладаючи в (3.9) гіперболічні функції в ряд Тейлора і враховуючи, що $(\gamma_1\gamma_0)^n = 1$ для парних n отримати

$$\hat{S} = Ae^{\frac{\alpha}{2}\gamma_1\gamma_0}. \tag{3.10}$$

Для виконання другого пункту задачі запишемо перевтворення Лоренця, що відповідає просторовому повороту на кут φ навколо осі Oz:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Система рівнянь аналогічна до (3.4) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\gamma_0\hat{S} = \hat{S}\gamma_0, \\ &\gamma_1\hat{S}\cos\varphi - \gamma_2\hat{S}\sin\varphi = \hat{S}\gamma_1, \\ &\gamma_1\hat{S}\sin\varphi + \gamma_2\hat{S}\cos\varphi = \hat{S}\gamma_2, \\ &\gamma_3\hat{S} = \hat{S}\gamma_3. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Завдання 1.3. Враховуючи, що $\hat{S}$ комутує з матрицями γ_0 та γ_3 і не комутує з γ_1 та γ_2 довести, що оператор $\hat{S}$ треба шукати у вигляді $\hat{S} = EI_4 + D^{21}\gamma_2\gamma_1$.

З другого та третього рівнянь отримуємо систему відносно невідомих констант розкладу $a \equiv E$ та $b \equiv D^{21}$

$$\begin{aligned} &\gamma_1(a - a\cos\varphi + b\sin\varphi) - \gamma_2(b + b\cos\varphi + a\sin\varphi) = 0 \\ &\gamma_2(a - a\cos\varphi + b\sin\varphi) + \gamma_1(b + b\cos\varphi + a\sin\varphi) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Визначник цієї системи теж, як і у попередньому прикладі тотожно рівний нулю

$$\begin{vmatrix} (1-\cos\varphi) & \sin\varphi \\ \sin\varphi & (\cos\varphi+1) \end{vmatrix} = 0, \tag{3.14}$$

що знов вказує на нескінченну кількість розв'язків, де

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = -\tan\frac{\varphi}{2}. \tag{3.15}$$

Для малих поворотів $\varphi \ll 1$ шуканий вираз для оператора перетворення

$$\hat{S} = A\exp^{\gamma_2\gamma_1\frac{\varphi}{2}}, \tag{3.16}$$

можна отримати розкладаючи тригонометричні функції в ряд і, використовуючи, що

$$(\gamma_2\gamma_1)^n = \begin{cases} (-1), & n = 2, 6, 10, ...; \\ 1, & n = 4, 8, 12, ...; \\ -\gamma_2\gamma_1, & n = 3, 7, 11, ...; \\ \gamma_2\gamma_1, & n = 5, 9, 13, ... \end{cases} . \tag{3.17}$$

З вигляду оператора (3.16) можна бачити, що вектор стану $\Psi' = \hat{S}\Psi$ не зміниться при повороті системи координат на кут $\varphi = 4\pi$. За означенням вектори, які перетворюються за таким законом називають спінорами.

Завдання для самостійної підготовки.

Отримати явні вирази для оператора $\hat{S}$ при русі системи координат вздовж осей Oy та Oz, а також поворотах навколо Ox і Oy.

Завдання 2: Отримати явний вигляд оператора перетворення $\hat{P}$ для розв'язків рівняння Дірака при невласному перетворенні Лоренца (інверсії) Λ^μ_ν.

Розв'язок: Матриця переходу при інверсії координатних осей має вигляд

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Таке перетворення не може бути отримане як результат інфінітезімальних поворотів, на відміну від обертання і трансляцій. Визначник матриці переходу для такого перетворення дорівнює $\det \Lambda^\mu_\nu = -1$. Для отримання вигляду оператора $\hat{P}$ скористаємося рівнянням (3.2) але записаним у вигляді [**?**]:

$$\hat{P}\gamma^\mu \hat{P}^{-1} = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu. \tag{3.19}$$

Подіємо зліва ще одним перетворенням Λ^σ_μ на обидві частини рівняння (3.19) і скористаючись тим, що лише діагональні елементи матриці (3.18) відмінні від нуля запишемо

$$\hat{P}\sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\sigma_\mu \gamma^\mu \hat{P}^{-1} = \delta^\sigma_\nu \gamma^\nu = \gamma^\sigma, \tag{3.20}$$

де δ^σ_ν – символ Кронекера. Виконуючи підсумовування у лівій частині і діючи оператором $\hat{P}$ з права, остаточно отримаємо систему з чотирьох рівнянь

$$\hat{P}\Lambda^\sigma_\sigma \gamma^\sigma = \gamma^\sigma \hat{P}, \quad \sigma = 0, 1, 2, 3, \tag{3.21}$$

з якої видно, що шуканий оператор комутує з γ_0 і антикомутує з усіма іншими гамма-матрицями.

Завдання 1.4. Враховуючи, що $\hat{P}$ комутує з матрицями γ_0 і антикомутує з γ_1, γ_2 і γ_3 довести, що $\hat{P} = e^{i\varphi}\gamma_0$, де φ – довільна фаза.

Оскільки хвильова функція з розв'язку рівняння Дірака перетворюється як спінор то за цією аналогією вважаємо $\hat{P}^4 = 1$. Таким чином фаза φ прийматиме лише певні значення так, що $\exp[i\varphi] = \pm 1, \pm i$.

Завдання для самостійної підготовки.

Враховуючи явний вигляд операторів $\hat{S}$ і $\hat{P}$ для власних і невласних перетворень Лоренца довести співвідношення

$$\hat{S}^{-1} = \gamma_0 \hat{S}^{+} \gamma_0.$$

Додаткові завдання з квантової механіки підвищеної складності.

1. **Ефект Штарка.** Поясніть, чому у воднеподібних атомах спостерігається лінійний ефект Штарка, а у атома натрію – тільки квадратичний.

2. **Атом тритію.** Електрон знаходиться в основному стані атома тритію ^{3}H. Ядерна реакція змінює ядра на аналогічні до атома гелію ^{3}He.

   (a) Розрахуйте ймовірність того, що електрон лишиться в основному стані атома ^{3}He.

   (b) Яка ймовірність того, що електрон стане вільним?

3. **Нестаціонарне магнітне збурення.** Атом водню спочатку знаходиться у основному стані з повним кутовим моментом $J = L + S = 0$. Цей стан відрізняється від стану з $J = 1$ малою різницею енергій ΔE. На атом починає діяти слабке магнітне поле, що направлене вздовж осі z, що дається функцією

$$B_z(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ B_0 e^{-\gamma t}, & \text{при } t > 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

   де B_0 та γ константи.

   (a) Напишіть ефективний гамільтоніан взаємодії атома з магнітним полем. Поясніть, чому можна знехтувати взаємодією протона з магнітним полем.

   (b) Розрахуйте ймовірність, що у далекому майбутньому, коли поле повністю зникне, атом буде знаходитись у стані з $J = 1$. При розв'язку задачі не розглядайте можливість випромінення фотонів атомом.

4. **Протони у магнітному полі.** Протони з магнітним моментом μ знаходяться у магнітному полі $\vec{B} = (B_0 \cos \omega t, B_0 \sin \omega t, B_z)$, де B_z та B_0 – константи. В момент часу $t = 0$ усі протони поляризовані в напрямку осі z.

   (a) Яке значення частоти ω буде резонансним, якщо $B_0 \ll B_z$?

(b) Яка ймовірність перевороту спіну протона в момент часу t, якщо $B_z \ll B_0$?

5. **Оптична теорема.** Розглянемо частинку, що летить з нескінченності вздовж осі z і пружньо розсіюється на деякому центрально-симетричному потенціалі $U(r)$, що достатньо швидко спадає з відстанню. Щоб знайти хвильову функцію цієї частинки, спочатку дослідимо загальний розв'язок рівняння Шредінгера. Його можна шукати у вигляді розкладу за поліномами Лежандра:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r), \tag{3.23}$$

де A_l — довільні коефіцієнти, а функції $R_{kl}(r)$ визначаються радіальним рівнянням Шредінгера:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{kl}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\right)R_{kl} = 0 \tag{3.24}$$

(a) Знайдіть розв'язок цього рівняння для випадку $U(r) = 0$ та переконайтесь, що асимптотика при $r \to \infty$ дається виразом:

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \tag{3.25}$$

(b) Обґрунтуйте, що увімкнення короткодіючого потенціалу $U(r)$ модифікує асимптотику наступним чином:

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{3.26}$$

Величини δ_l називаються *фазою розсіяння.*

З іншого боку, хвильова функція частинки при розсіянні повинна мати вигляд плоскої хвилі та сферичної хвилі, що розходиться,

$$\Psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr}. \tag{3.27}$$

Функція $f(\theta)$ називається *амплітудою розсіяння.*

(a) Користуючись розкладом плоскої хвилі за поліномами Лежандра

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \left((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr} \right),$$

доведіть, що асимптотика хвильової функції Ψ має вигляд

$$\Psi \simeq \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \left((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{i\delta_l} e^{ikr} \right). \tag{3.28}$$

Знайдіть звязок між амплітудою розсіяння $f(\theta)$ та фазами розсіяння δ_l.

Переріз розсіяння визначається наступною формулою:

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

(a) Користуючись знайденим вище зв'язком між амплітудою та фазами розсіяння доведіть *оптичну теорему*:

$$\mathrm{Im} f(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma.$$

6. **Тривимірний дельта-потенціал.** Частинка маси m взаємодіє з тривимірним сферично симетричним потенціалом $V(r) = -C\delta(r-a)$, де C та a є достатніми константами.

   (a) Знайдіть мінімальне значення C для якого існує зв'язаний стан.

   (b) Розгляньте експеримент з розсіяння в якому частинка налітає на потенціал з малою швидкістю. Розрахуйте переріз розсіяння і кутовий розподіл у цьому наближенні.

7. **Розсіяння на сферичній прямокутній ямі.** Розрахуйте переріз розсіяння низькоенергетичної частинки маси m на потенціалі

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{при } r < a, \\ 0, & \text{при } r > a, \end{cases} \tag{3.29}$$

де $V_0 > 0$. Результат порівняйте з Борнівським наближенням.

8. **Розсіяння у потенціалі Пешля-Теллера.** Частинка маси m розсіюється на центральному потенціалі

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\cosh^2(r/a)}, \tag{3.30}$$

де a — константа розмірності довжини. Розрахуйте внесок s-хвилі до повного перерізу розсіяння для енергії E.

9. **Дві частинки у нескінченній ямі.** Дві неідентичні частинки однакової маси m знаходяться у нескінченній потенціальній ямі шириною L.

   (a) Запишіть хвильові функції трьох перших станів з найменшою енергією (для яких щонайбільше одна частинка перебуває у збудженому стані), якщо частинки не взаємодіють між собою.

   (b) Нехай потенціал взаємодії між частинками $V_{12} = \lambda\delta(x_1 - x_2)$. Знайдіть поправки до енергій цих станів у першому порядку теорії збурень.

10. **Магнітна сприйнятливість атома гелію.** Оцінити магнітну сприйнятливість атома гелію у основному стані. Він є парамагнетиком чи діамагнетиком?

11. **Молекула порфірину.** Порфіринове кільце це молекула, яка міститься у хлорофілі, гемоглобіні та інших важливих речовинах. Приблизний спектр молекули можна отримати якщо змоделювати її як 18 вільних ідентичних електронів що знаходяться на кільці радіуса $R = 4$ Å.

    (a) Запишіть хвильові функції даної багатоелектронної системи з певними значенням енергії.

    (b) Знайдіть найнижчу енергію збудження і відповідне чисельне значення довжини хвилі.

12. **Вектор Рунге-Ленца.** Для кулонівського потенціалу $V(r) = -\dfrac{e^2}{r}$ в класичній механіці існує інтеграл руху:

$$\vec{A} = \frac{1}{m}\left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - \frac{e^2\vec{q}}{q}, \tag{3.31}$$

де m – маса електрона, а $\vec{p}$, $\vec{q}$ та $\vec{L}$ – імпульс, координата та момент імпульсу відповідно.

(a) Знайдіть відповідний ермітовий оператор у квантовій механіці. Перевірте, що він зберігається для гамільтоніану з кулонівським потенціалом;

(b) Запишіть інший оператор симетрії даного гамільтоніану, окрім тривимірних поворотів;

(c) Доведіть наступні вирази:

$$\hat{A}^2 = e^4 + \frac{2}{m}\left[\hat{L}^2 + \hbar^2\right]\hat{H} \tag{3.32}$$

$$(\hat{A}\cdot\hat{L}) = (\hat{L}\cdot\hat{A}) = 0$$

(d) Знайдіть такий оператор $\hat{J}$, що $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$ і вираз (3.32) переписується як співвідношення тільки на $\hat{J}$ та $\hat{H}$;

(e) Таким чином, покажіть, що власні значення гамільтоніану залежать лише від одного квантового числа.

13. **Нерівність Белла** *Теорії з прихованими параметрами* – це альтернативні до квантової механіки теорії, у яких припускається, що ймовірнісна природа квантового вимірювання пов'язана зі складною, але класичною динамікою прихованих степенів вільності. У цих теоріях квантовий стан можна ефективно описувати класичним розподілом імовірності $P(\mathcal{O}_1, ..., \mathcal{O}_n)$, де $\mathcal{O}_i$ – релевантні для даного досліду спостережувані.

Белл (1964) запропонував наступний дослід, що дозволяє однозначно перевірити дієздатність таких теорій з прихованими параметрами. Розглянемо дві квантові частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ у синглетному стані. Ці частинки розділяють та направляють до ізольованих між собою камер. Нехай у камері 1 вимірюється проекція спіну на вісь $\vec{a}_1$. Результат вимірювання $\pm\frac{1}{2}$ (в одиницях сталої Планка $\hbar$) назвемо A_1. У другій камері вимірюється проекція спіну A_2 на вісь $\vec{a}_2$. Проводячи повторно цей дослід, отримано деяке середнє значення добутку $\langle A_1 A_2\rangle$.

(a) Допускаючи усі можливі напрямки $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, у яких межах може змінюватись величина $\langle A_1 A_2\rangle$?

Тепер розглянемо величину

$$R = |\langle A_1 A_2 \rangle + \langle B_1 A_2 \rangle + \langle B_1 B_2 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle|,$$

де B_1 та B_2 відповідають деяким новим осям $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ (індекси 1, 2 відповідають камерам 1, 2). Припустимо, що дана система описується теорією з прихованими параметрами. В такому разі наш дослід має повністю описуватись деяким розподілом імовірностей $P = P(A_1, A_2, B_1, B_2)$.

(a) Допускаючи довільний розподіл P та напрямки осей $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$ та $\vec{b}_2$ – яке максимальне значення може набувати величина R? Відповідне обмеження називається *нерівністю Белла.*

Доведемо, що квантова механіка передбачає порушення цієї нерівності. Для простоти, розглянемо вісі $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$ та $\vec{b}_2$, що лежать у одній площині.

(a) Знайдіть власні стани матриці $(\vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}})$ проекції спіну на вісь $\vec{n}$, скориставшись сферичними координатами для $\vec{n}$. Скористайтесь результатом, щоб виразити величину R через відносні кути між осями. Знайдіть хоча б одне розташування осей, при якому можна очікувати порушення нерівності Белла.

14. **Стохастичний осцилятор.** Частинка з масою m знаходиться у одновимірному гармонічному осциляторному потенціалі $V_1 = \frac{1}{2}kx^2$.

(a) У початковий момент частинка знаходиться у основному стані. Константа k раптово подвоюється, тобто новий потенціл стає рівним $V_2 = kx^2$, після чого енергія частинки вимірюється. Яка ймовірність того, що частинка опиниться у основному стані нового потенціалу V_2?

(b) Розглянемо інший експеримент, де константа k у потенціалі раптово подвоюється так само як і у попередньому пункті, але енергія частинки не вимірюється. Замість цього через час T після переходу до потенціалу V_2 відбувається зворотна зміна потенціалу до V_1. Знайдіть такі моменти часу T, що система буде знайдена у основному стані для V_1 з ймовірністю 100%.

(c) Чи будуть існувати такі моменти часу T з попереднього пункту, якщо V_2 — деякий довільний потенціал? Якщо ні, то яким умовам повинен задовольняти потенціал V_2 для існування таких T?

15. **Осциляції нейтральних K-мезонів.** У цій задачі ми будемо розглядати нестабільні частинки. Для їх спрощеного опису ми будемо використовувати неермітові гамільтоніани $H^+ \neq H$.

    (a) Розглянемо частинку у стані спокою, що описується гамільтоніаном $\hat{H} = M - \frac{i}{2}\Gamma$, де M, Γ — дійсні додатні числа. Покажіть що ймовірність спостереження частинки підкорюється закону радіоактивного розпаду з часом життя $\hbar/\Gamma$. Величину Γ називаюсь *шириною розпаду*.

У природі існує 2 нейтральні K-мезона $|K^0\rangle$ та $|\bar{K}^0\rangle$, що мають кварковий склад $d\bar{s}$ та $\bar{d}s$ відповідно. Відомо, що ці стани переходять один в одного під дією CP симетрії, яка є симетрією квантової хромодинаміки. Будемо записувати хвильову функцію системи як

$$|\Psi\rangle = a|K^0\rangle + b|\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

У цьому представленні гамільтоніан K-мезонів у стані спокою має вигляд

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K & 0 \\ 0 & M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Стан $|K^0\rangle$ може переходити у стан $|\bar{K}^0\rangle$ через слабку взаємодію, що ми будемо описувати за допомогою оператора $\hat{V}_W$. Припустимо, що слабка взаємодія CP-інваріантна (це не зовсім так, але порушення CP інваріантності дуже мале і ми його розглядати далі не будемо).

(a) Покажіть, що

$$\langle K^0|\hat{V}_W|\bar{K}^0\rangle = \langle \bar{K}^0|\hat{V}_W|K^0\rangle = \Delta, \tag{3.35}$$

де Δ деяке комплексне число. Тоді повний вираз для гамільтоніану вільних K-мезонів

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K & \Delta \\ \Delta & M_K - \frac{i}{2}\Gamma_K \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

(b) Діагоналізуйте цей гамільтоніан. Покажіть що власні стани цього гамільтоніану є власними станами оператору CP симетрії з власними значеннями ± 1.

CP-парний стан називають $|K_S^0\rangle$, а CP-непарний $|K_L^0\rangle$. Їм відповідають частинки з певними масами m_S, m_L та ширинами розпаду Γ_S, Γ_L.

(a) Пов'яжіть між собою параметри нашої моделі M_K, Γ_K, Δ з фізично спостережуваними властивостями частинок.

Нехай у початковий момент часу утворюється нерухома частинка у стані $\Psi(0) = |K^0\rangle$.

(a) Знайдіть ймовірність $P(t)$ детектування частинки у стані $|\bar{K}^0\rangle$ у момент часу t. Відповідь запишіть через спостережувані параметри системи. У який час t ця ймовірність максимальна і чому вона рівна?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вакарчук І.О.* Квантова механіка. Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2007.-848 с.

2. *Федорченко А.М.* Основы квантовой механики. К. Вища школа, 1979.- 271 с.

3. *Walter Greiner* Relativistic quantum mechanics: wave equations. Berlin, Springer 2000.

4. *Дэк. Д. Бъёркен, С. Д. Дрелл* Релятивистская квантовая теория. М. Наука, 1978. - 297 с.

5. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. — Ижевск: РХД, 2002. — 784 с.

6. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979. — 440 с.

7. *Дирак П. А. М.* Релятивистское волновое уравнение электрона (рус.) // Успехи физических наук. — 1979. — Т. 129, вып. 4. — С. 681—691.

8. *Дайсон Ф.* Релятивистская квантовая механика. — Ижевск: РХД, 2009. — 248 с.

9. *Шифф Л.* Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1959. — 476 с.

10. *Shankar R.* Principles of Quantum Mechanics. — Plenum, 1994.

11. *Thaller B.* The Dirac Equation. — Springer, 1992.

12. *Forshaw, J. R.; Smith, A. G.* Dynamics and Relativity. Manchester Physics Series. John Wiley and Sons Ltd, 2009. pp. 124–126.

13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 512 с.