МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**С. П. Бєлих, Н. В. Майко,
О. С. Тарнавський**

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Вступ до аналізу. Границя й неперервність функції скалярного аргументу

Навчально-методичний посібник

Київ – 2026

УДК 517(075.8)

Автори:
Бєлих Світлана Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Майко Наталія Валентинівна, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Тарнавський Олександр Станіславович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти:
С. Й. Вільчинський, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
В. Л. Рябічев, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
(протокол № від 2026 року)

Ухвалено науково-методичною комісією фізичного факультету
(протокол № від 2026 року)

Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Границя і неперервність функції скалярного аргументу / С. П. Бєлих, Н. В. Майко, О. С. Тарнавський. – К.: 2026. – 225 с.

Викладено матеріали для практичних занять та самостійної роботи з дисципліни "Математичний аналіз", яка є обов'язковою для студентів спеціальності E5 "Фізика та астрономія" першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Запропоновано завдання та методичні вказівки з тем "Вступ до аналізу" та "Границя й неперервність функції скалярного аргументу", що вивчаються в першому семестрі. Кожне завдання подано у вигляді 24 варіантів однакового рівня складності. На початку кожного завдання наведено зразки оформлення розв'язання. Розміщено варіанти індивідуальних самостійних і контрольних робіт.

Для студентів і викладачів, які керують самостійною й дистанційною роботою студентів природничих факультетів Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

УДК 517(075.8)

ЗМІСТ

П Е Р Е Д М О В А

Цей посібник створений із щирим бажанням допомогти студентам першого курсу фізичних та інших природничих спеціальностей зробити успішними перші кроки у вивченні обов'язкової дисципліни "Математичний аналіз". Досвід свідчить, що ці кроки не завжди прості, оскільки вони вимагають від учорашніх школярів швидкої адаптації до високого рівня математичної абстракції та засвоєння нових базових концепцій і методів.

Саме тому вивчення дисципліни традиційно починається із *вступу*, який є перехідною ланкою між елементарною математикою та математичним аналізом у його класичному розумінні. До вступу зазвичай включають елементи математичної логіки (символи логічних операцій і квантори), елементи теорії множин (операції над множинами та їхні властивості), бінарні відношення (еквівалентність і частковий порядок), класифікацію функцій (ін'єкція, сюр'єкція, бієкція, обернена й параметрично задана функції, елементарні й неелементарні функції), аксіоми дійсних чисел та деякі наслідки (лема про точну верхню межу і лема про вкладені сегменти), базові відомості про комплексні числа (арифметичні операції, формула Муавра і формула добування кореня).

Після опанування вступу відбувається перехід до вивчення основного методу аналізу – граничного переходу. *Теорію границь* викладено спочатку для числової послідовності як важливого окремого випадку функції скалярного аргументу (означення границі, граничний перехід у рівностях і нерівностях, монотонні послідовності й теорема Вейєрштрасса, число Ейлера e, теорема Штольца, критерій Коші, часткові границі), а потім – для загального випадку функції однієї змінної. Теорія границь завершується вивченням *неперервних функцій* скалярного аргументу (означення за Коші й за Гейне, односторонні неперервності, класифікація точок розриву й особливих точок, теорема Больцано–Коші про проміжне значення, перша й друга теореми Вейєрштрасса, рівномірна неперервність і теорема Кантора). Систематичне й глибоке вивчення теорії границь функції однієї змінної закладе міцний фундамент для успішного опанування наступних розділів аналізу – диференціального та інтегрально числення.

Автори сподіваються, що пропонований посібник стане для студентів добрим порадником і корисним тренажером для набуття й закріплення ними практичних навичок, а для колег-викладачів – якісним методичним ресурсом, що допоможе зробити навчальний процес більш структурованим і результативним.

Р О З Д І Л 1

ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

1.1. Функції та їх графічне зображення

Завдання 1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{\cos x^2}$.

Розв'язання. Розглянемо нерівність:

$$\cos x^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+2\pi k \le x^2 \le \frac{\pi}{2}+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})\,;$$

при $k=-1,-2,\ldots$ розв'язків немає; при $k=0$ знайдемо

$$-\frac{\pi}{2}\le x^2 \le \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x|\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

при $k=1,\ 2,\ldots$ маємо $\sqrt{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}\le |x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$.

Відповідь: $|x|\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}\le |x|\le\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$ $(k\in\mathbb{N})$. ►

Примітка. У поданих нижче завданнях $[u]$ – ціла частина виразу u.

1. $f(x)=\arccos\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

2. $f(x)=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

3. $f(x)=\lg\big(\cos(\lg x)\big)$.

4. $f(x)=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

5. $f(x)=\arccos(2\sin x)$.

6. $f(x)=\sqrt[4]{\lg\operatorname{tg}x}$.

7. $f(x)=\operatorname{ctg}(\pi x)+\arcsin(2^x)$.

8. $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

9. $f(x)=\arcsin\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)$.

10. $f(x)=\sqrt{x\sin^2(\pi x)}$.

11. $f(x)=\ln\big(\sqrt{3}-2\cos x\big)$.

12. $f(x)=\sqrt{1-2|\sin x^2|}$.

13. $f(x)=\sqrt{\cos\sqrt{\pi x}}$.

14. $f(x)=\ln\big(1+2\sin x\big)$.

15. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-|\cos x|}}$.

16. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$.

17. $f(x)=\ln\lg\log_2\dfrac{1}{\log_4 x}$.

18. $f(x)=\arccos\left(\ln\dfrac{e}{x}\right)$.

19. $f(x)=\arcsin(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)$.

20. $f(x)=\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}+\sqrt{x-|x|}$.

21. $f(x)=\dfrac{\ln[\sin\pi x]}{2x-1}$.

22. $f(x)=\dfrac{1}{[4\pi^{-1}\arcsin x]}$.

23. $f(x)=\sqrt{\ln\left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)}$.

24. $f(x)=\dfrac{\arccos(101-x^2)}{\lg(\lg|x|)}$.

Завдання 2. Побудувати графік функції $y=y(x)$:

а) $y=\left|x^2-8|x|+7\right|$;

б) $y=\left|\dfrac{3|x|+10}{2|x|-5}\right|$;

в) $y=-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$;

г) $y=\log_2\left||x-1|-2\right|$.

Примітка. Скористатися відомими перетвореннями графіків:

1) $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=f(ax)$, зокрема $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=f(-x)$;

2) $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=f(x+b)$;

3) $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=cf(x)$, зокрема $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=-f(x)$;

4) $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=f(x)+d$;

5) $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=f(|x|)$; 6) $y=f(x)\ \Rightarrow\ y=|f(x)|$.

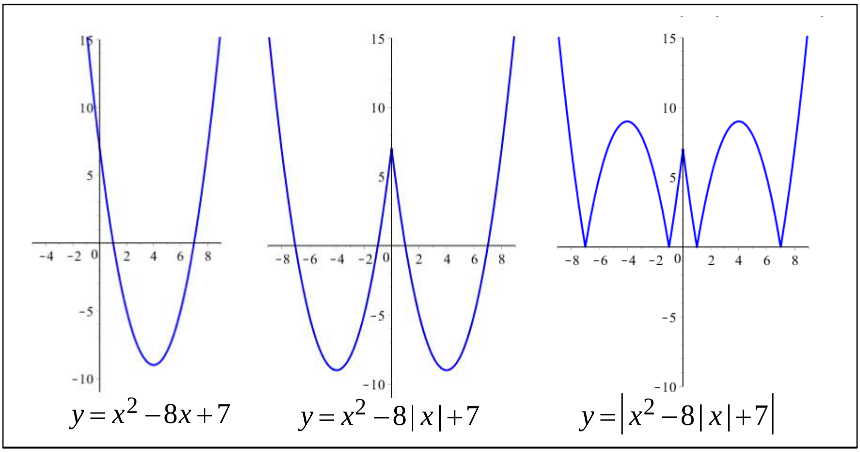


Рис. 1. Завдання 2 а)

Розв'язання. а) Складемо план побудови:

$$1)\ y=x^2-8x+7;\quad 2)\ y=|x|^2-8|x|+7;\quad 3)\ y=\left|x^2-8|x|+7\right|.$$

Відповідне перетворення графіків зображено на рис. 1.

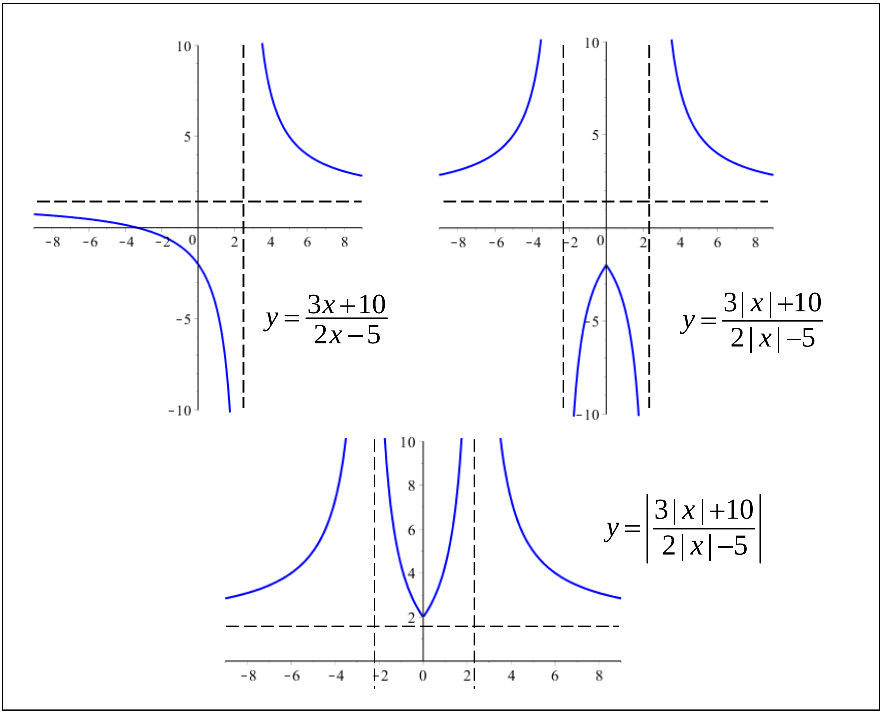


Рис. 2. Завдання 2 б)

б) Складемо план побудови:

$$1)\ y=\frac{3x+10}{2x-5};\quad 2)\ y=\frac{3|x|+10}{2|x|-5};\quad 3)\ y=\left|\frac{3|x|+10}{2|x|-5}\right|.$$

Відповідне перетворення графіків зображено на рис. 2.

Зазначимо, що для побудови графіка дробово-лінійної функції $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$ достатньо зобразити вертикальну й горизонтальну асимптоти гіперболи та позначити будь-яку її точку (наприклад, точку перетину з віссю Ox або віссю Oy):

1) $cx+d\neq 0$, а отже, $x=-\dfrac{d}{c}$ – вертикальна асимптота;

2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{c+\dfrac{d}{x}}\underset{x\to\infty}{\to}\dfrac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{a}{c}$ – горизонтальна асимптота;

3) $y(0)=\dfrac{b}{d} \quad \Rightarrow \quad \left(0;\dfrac{b}{d}\right)$ – точка перетину гіперболи з віссю Oy,

$\dfrac{ax+b}{cx+d}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\dfrac{b}{a};0\right)$ – точка перетину гіперболи з віссю Ox.

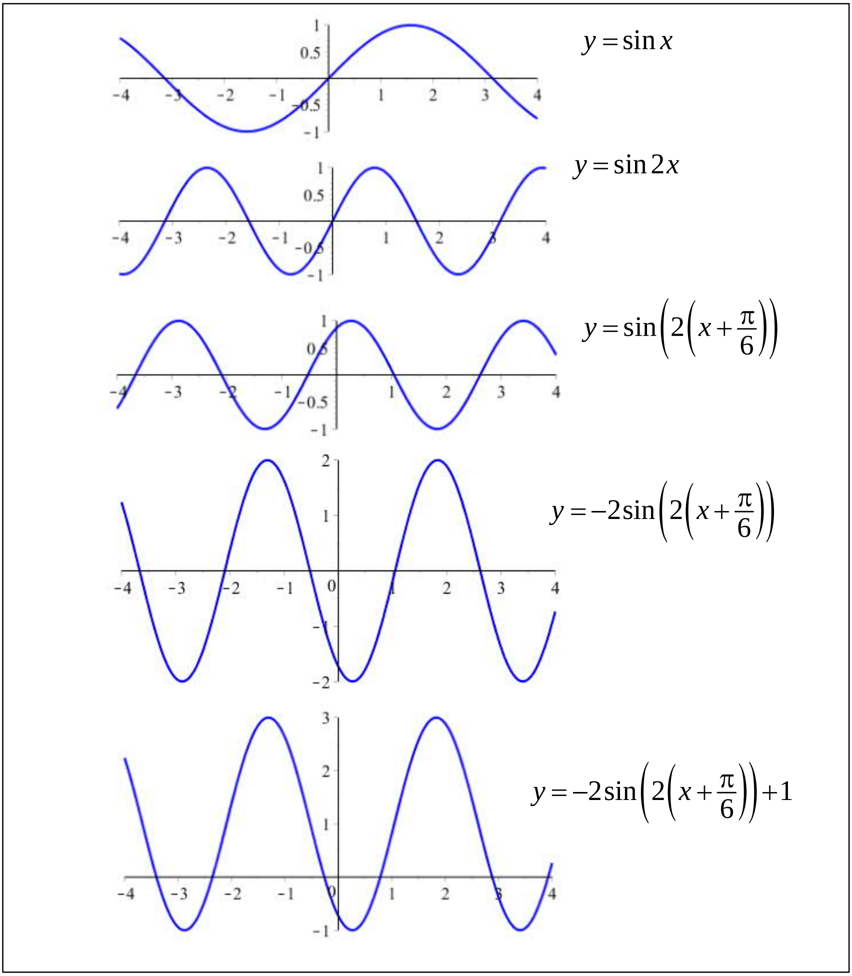


Рис. 3. Завдання 2 в)

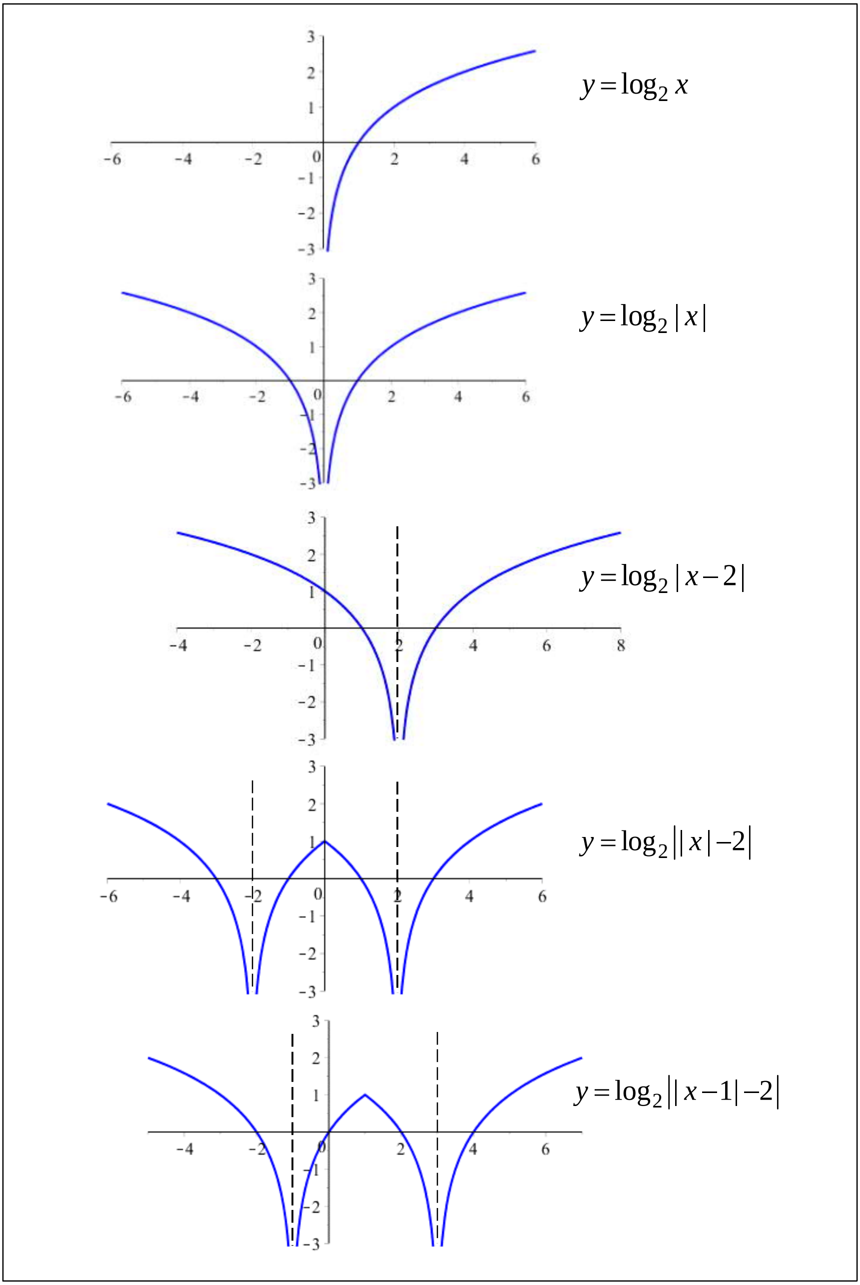


Рис. 4. Завдання 2 г)

в) Складемо план побудови:

$$1)\ y=\sin x;\quad 2)\ y=\sin 2x;\quad 3)\ y=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right);$$

$$4)\ y=-2\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right);\quad 5)\ y=-2\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)+1.$$

Відповідне перетворення графіків зображено на рис. 3. Зазначимо, що можна і так:

$$1)\ y=\sin x;\quad 2)\ y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right);\quad 3)\ y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right);$$

$$4)\ y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right);\quad 5)\ y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1.$$

г) Складемо план побудови:

$$1)\ y=\log_2 x;\quad 2)\ y=\log_2|x|;\quad 3)\ y=\log_2|x-2|;$$

$$3)\ y=\log_2\left||x|-2\right|;\quad 5)\ y=\log_2\left||x-1|-2\right|.$$

Відповідне перетворення графіків зображено на рис. 4. ►

1. а) $y=\left|x^2+2|x|-3\right|$; б) $y=\left|\dfrac{6|x|-5}{7|x|-4}\right|$;

в) $y=-3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$; г) $y=\operatorname{sh}\left|2|x|-3\right|+4$.

2. а) $y=\left|x^2-|x|-2\right|$; б) $y=\left|\dfrac{8|x|-3}{5|x|-4}\right|$;

в) $y=-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-3$; г) $y=\left|\operatorname{ch}(3|x|-4)-5\right|$.

3. а) $y=\left|x^2-6|x|+8\right|$; б) $y=\left|\dfrac{5|x|+2}{4|x|-3}\right|$;

в) $y=-4\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$; г) $y=\operatorname{th}\left|4|x|-5\right|+2$.

4. а) $y=\left|x^2-|x|-6\right|$; б) $y=\left|\dfrac{11|x|-7}{5|x|+2}\right|$;

в) $y=-3\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-2$; г) $y=\operatorname{cth}\left|5|x|-6\right|+3$.

5. а) $y=\left|x^2-7|x|+6\right|$; б) $y=\left|\dfrac{8|x|-5}{3|x|+10}\right|$;

в) $y=-2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+3$; г) $y=\operatorname{sh}\left|3|x|-2\right|-4$.

6. а) $y=\left|x^2-3|x|-4\right|$; б) $y=\left|\frac{9|x|+5}{4|x|-3}\right|$;

в) $y=-4\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)-1$; г) $y=\left|\operatorname{ch}(4|x|-3)-5\right|$.

7. а) $y=\left|x^2+|x|-2\right|$; б) $y=\left|\frac{2|x|-5}{3-7|x|}\right|$;

в) $y=-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2$; г) $y=\left|\operatorname{th}(4|x|+5)-2\right|$.

8. а) $y=\left|x^2-2|x|-3\right|$; б) $y=\left|\frac{3-4|x|}{6|x|-5}\right|$;

в) $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3$; г) $y=\operatorname{cth}\left|5|x|-6\right|-3$.

9. а) $y=\left|x^2+3|x|-4\right|$; б) $y=\left|\frac{10|x|+3}{7-5|x|}\right|$;

в) $y=-4\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-1$; г) $y=\operatorname{sh}\left|3|x|-2\right|+4$.

10. а) $y=\left|x^2+|x|-6\right|$; б) $y=\left|\frac{6-7|x|}{8|x|+5}\right|$;

в) $y=-3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+2$; г) $y=\left|\operatorname{ch}(4|x|-3)-2\right|$.

11. а) $y=\left|x^2-4|x|-5\right|$; б) $y=\left|\frac{4|x|-3}{5|x|-2}\right|$;

в) $y=-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)-3$; г) $y=\operatorname{th}\left|5|x|-4\right|+2$.

12. а) $y=\left|x^2-3|x|+2\right|$; б) $y=\left|\frac{9|x|-5}{4|x|-3}\right|$;

в) $y=-4\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$; г) $y=\operatorname{cth}\left|6|x|-5\right|+3$.

13. а) $y=\left|x^2+5|x|-6\right|$; б) $y=\left|\frac{9|x|+4}{3|x|-5}\right|$;

в) $y=-3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-2$; г) $y=\operatorname{sh}\left|3|x|-6\right|-4$.

14. а) $y=\left|x^2-2|x|-8\right|$; б) $y=\left|\dfrac{4|x|-5}{3|x|+2}\right|$;

в) $y=-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+3$; г) $y=\left|\operatorname{ch}(4|x|-3)-2\right|$.

15. а) $y=\left|x^2+3|x|-10\right|$; б) $y=\left|\dfrac{5|x|-2}{4|x|+3}\right|$;

в) $y=-4\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$; г) $y=\operatorname{th}\left|5|x|-4\right|-2$.

16. а) $y=\left|x^2-4|x|+3\right|$; б) $y=\left|\dfrac{8|x|+3}{5|x|-4}\right|$;

в) $y=-3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)-2$; г) $y=\operatorname{cth}\left|6|x|-7\right|-3$.

17. а) $y=\left|x^2+4|x|-5\right|$; б) $y=\left|\dfrac{10-3|x|}{4|x|-7}\right|$;

в) $y=-2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{9}\right)+3$; г) $y=\operatorname{sh}\left|6|x|-5\right|+4$.

18. а) $y=\left|x^2-3|x|-10\right|$; б) $y=\left|\dfrac{2-7|x|}{5|x|-4}\right|$;

в) $y=-3\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{9}\right)-1$; г) $y=\operatorname{ch}\left|5|x|-4\right|+3$.

19. а) $y=\left|x^2-5|x|+6\right|$; б) $y=\left|\dfrac{7|x|+4}{5-2|x|}\right|$;

в) $y=-4\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{9}\right)-2$; г) $y=\operatorname{th}\left|4|x|-3\right|+2$.

20. а) $y=\left|x^2+2|x|-8\right|$; б) $y=\left|\dfrac{4-9|x|}{10|x|+3}\right|$;

в) $y=-2\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{9}\right)+3$; г) $y=\operatorname{cth}\left|3|x|-2\right|+5$.

21. а) $y=\left|x^2-5|x|+4\right|$; б) $y=\left|\dfrac{21|x|-7}{5|x|-2}\right|$;

в) $y=-3\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)-1$; г) $y=\operatorname{sh}\left|5|x|-6\right|-4$.

22. а) $y=\left|x^2-5|x|-6\right|$; б) $y=\left|\dfrac{10|x|-3}{5|x|-7}\right|$;

в) $y=-4\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+2$; г) $y=\operatorname{ch}\left|5|x|-4\right|-3$.

23. а) $y=\left|x^2-6|x|+5\right|$; б) $y=\left|\dfrac{5|x|+3}{2|x|-7}\right|$;

в) $y=-2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+3$; г) $y=\operatorname{th}\left|4|x|-8\right|-1$.

24. а) $y=\left|x^2-7|x|+10\right|$; б) $y=\left|\dfrac{6|x|-4}{3|x|+1}\right|$;

в) $y=-4\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)-1$; г) $y=\operatorname{cth}\left|3|x|-6\right|-5$.

1.2. Бінарні відношення

Завдання 3. Нехай $X=Y=[0;5]$. Зобразити декартів добуток $X\times Y$ і бінарне відношення $\Gamma\subset X\times Y$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x+1\le y\le x+2\}$. Визначити такі множини:

$$\Gamma_1=\pi_1(\Gamma)=\{x\in X\mid \exists y\in Y:(x,y)\in\Gamma\}$$

(*перша проєкція* бінарного відношення Γ),

$$\Gamma_2=\pi_2(\Gamma)=\{y\in Y\mid \exists x\in X:(x,y)\in\Gamma\}$$

(*друга проєкція* бінарного відношення Γ),

$$\Gamma_1(x)=\{y\in Y\mid (x,y)\in\Gamma\}$$

(*перший переріз* бінарного відношення Γ для елемента $x\in X$),

$$\Gamma_2(y)=\{x\in X\mid (x,y)\in\Gamma\}$$

(*другий переріз* бінарного відношення Γ для елемента $y\in Y$).

Чи є бінарне відношення Γ функціональним?

Розв'язання. Маємо (рис. 5):

$$\Gamma_1=[0;4],\ \Gamma_2=[1;5];$$

$$\Gamma_1(x)=\begin{cases}[x+1;x+2], & \text{якщо } x\in[0;3];\\ [x+1;5], & \text{якщо } x\in(3;4];\\ \varnothing, & \text{якщо } x\in(4;5];\end{cases}$$

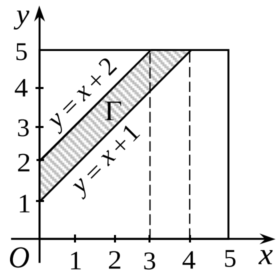


Рис. 5. Завдання 3

$$\Gamma_2(y)=\begin{cases}\varnothing, & \text{якщо } y\in[0;1);\\ [0;y-1], & \text{якщо } y\in[1;2];\\ [y-2;y-1], & \text{якщо } y\in(2;5].\end{cases}$$

Бінарне відношення Γ не є функціональним, оскільки, наприклад, $(1;2),\ (1;3)\in\Gamma$ (*функціональне бінарне відношення* не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими координатами). ►

1. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=1,\ [y]=-1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 4x^2+y^2\le 9\}$.

2. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=1,\ [y]=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+4y^2\le 9\}$.

3. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=1,\ [y]=1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 9x^2+y^2\le 4\}$.

4. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=0,\ [y]=-1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+9y^2\le 4\}$.

5. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=0,\ [y]=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 9x^2+y^2\le 16\}$.

6. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=0,\ [y]=1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+9y^2\le 16\}$.

7. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=-1,\ [y]=-1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 16x^2+y^2\le 9\}$.

8. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=-1,\ [y]=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+16y^2\le 9\}$.

9. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn}x=-1,\ [y]=1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 25x^2+y^2\le 4\}$.

10. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=1, [x]=-1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+25y^2\le 4\}$.

11. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=1, [x]=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 4x^2+y^2\le 25\}$.

12. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=1, [x]=1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+4y^2\le 25\}$.

13. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=0, [x]=-1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 9x^2+y^2\le 25\}$.

14. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=0, [x]=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+9y^2\le 25\}$.

15. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=0, [x]=1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 25x^2+y^2\le 9\}$.

16. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=-1, [x]=-1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+25y^2\le 9\}$.

17. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=-1, [x]=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 16x^2+y^2\le 4\}$.

18. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=-1, [x]=1\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+16y^2\le 4\}$.

19. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} x=1, \{y\}=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 4x^2+y^2\le 16\}$.

20. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} x=0, \{y\}=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+4y^2\le 16\}$.

21. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} x=-1, \{y\}=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid 36x^2+y^2\le 4\}$.

22. а) $X=Y=[-1;1]$, $\Gamma=\{(x;y)\mid \operatorname{sgn} y=1, \{x\}=0\}$;

б) $X=Y=\mathbb{R}$, $\Gamma=\{(x;y)\mid x^2+36y^2\le 4\}$.

23. а) $X = Y = [-1;1]$, $\Gamma = \{(x;y) \mid \operatorname{sgn} y = 0,\ \{x\} = 0\}$;

б) $X = Y = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{(x;y) \mid 4x^2 + y^2 \le 36\}$.

24. а) $X = Y = [-1;1]$, $\Gamma = \{(x;y) \mid \operatorname{sgn} y = -1,\ \{x\} = 0\}$;

б) $X = Y = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{(x;y) \mid x^2 + 4y^2 \le 36\}$.

1.3. Формула бінома Ньютона

Завдання 4. Користуючись *формулою бінома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,\ n \in \mathbb{N},$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0! = 1)$ – *біномні коефіцієнти*, розкрити дужки у виразі $(2x^5 - 3y)^4$.

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона маємо

$$(2x^5 - 3y)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k (2x^5)^{4-k} (-3y)^k =$$

$$= C_4^0 (2x^5)^4 (-3y)^0 + C_4^1 (2x^5)^3 (-3y)^1 + C_4^2 (2x^5)^2 (-3y)^2 +$$

$$+ C_4^3 (2x^5)^1 (-3y)^3 + C_4^4 (2x^5)^0 (-3y)^4.$$

Знайдемо біномні коефіцієнти, ураховуючи їх симетричність $(C_n^k = C_n^{n-k})$:

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{0!\,4!} = 1 = C_4^4, \quad C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4 = C_4^3,$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

Тоді

$$(2x^5 - 3y)^4 =$$

$$= (2x^5)^4 + 4(2x^5)^3(-3y) + 6(2x^5)^2(-3y)^2 + 4(2x^5)^1(-3y)^3 + (-3y)^4 =$$

$$= 2^4 x^{20} - 4 \cdot 2^3 \cdot 3x^{15} y + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 x^{10} y^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3^3 x^5 y^3 + 3^4 y^4 =$$

$$= 16x^{20} - 96x^{15} y + 216x^{10} y^2 - 216x^5 y^3 + 81y^4.$$

Відповідь: $16x^{20} - 96x^{15} y + 216x^{10} y^2 - 216x^5 y^3 + 81y^4$. ►

1. $(2y^9-3z)^6$. **2.** $(3b-4c^8)^6$. **3.** $(4c^7-5d)^6$.
4. $(5d-6e^8)^6$. **5.** $(6e^5-7f)^6$. **6.** $(7f-8g^3)^6$.
7. $(8g^2-9h)^6$. **8.** $(9h-8j^2)^6$. **9.** $(8j^3-7k)^6$.
10. $(7k-6l^3)^6$. **11.** $(6l^7-5m)^6$. **12.** $(5m-4n^8)^6$.
13. $(4n^7-3p)^6$. **14.** $(3p-2q^9)^6$. **15.** $(2q^9-5r)^6$.
16. $(5r-7s^4)^6$. **16.** $(7s^5-9t)^6$. **18.** $(3t-5u^4)^6$.
19. $(5u^6-8v)^6$. **20.** $(4v-7w^2)^6$. **21.** $(2w^8-7x)^6$.
22. $(4y-7z^5)^6$. **23.** $(5a^4-9z)^6$. **24.** $(4b-9y^3)^6$.

Завдання 5. Користуючись формулою бінома Ньютона, знайти в розкладі виразу $\left(x^2+\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ доданок, який не містить x.

Розв'язання. За формулою бінома Ньютона маємо

$$\left(x^2+\frac{3}{x^3}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(x^2)^{15-k}\left(\frac{3}{x^3}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k 3^k x^{2(15-k)-3k}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k 3^k x^{30-5k}.$$

За умовою задачі $30-5k=0$, звідки $k=6$. Отже,

$$\left(x^2+\frac{3}{x^3}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k 3^k x^{30-5k}=\cdots+C_{15}^6 3^6 x^0+\cdots.$$

Відповідь: $C_{15}^6 3^6=5005\cdot 729=3\,648\,645$. ►

Знайти у розкладі даного виразу зазначений доданок:

1. $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, доданок з x^4. Відповідь: $C_{12}^8x^4=495x^4$.

2. $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, доданок з x^9. Відповідь: $C_{12}^6x^9=924x^9$.

3. $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, доданок з x^{14}. Відповідь: $C_{12}^4x^{14}=495x^{14}$.

4. $\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, доданок з x^{19}. Відповідь: $C\ \ x^{19}=66x^{19}$.

5. $\left(x^3-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{15}$, доданок з x^{13}. Відповідь: $C_{15}^{10}x^{13}=3003x^{13}$.

6. $\left(x^3-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{15}$, доданок з x^{29}. Відповідь: $-C_{15}^{5}x^{13}=-3003x^{13}$.

7. $\left(x^4-\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{16}$, доданок з x^{14}. Відповідь: $C_{16}^{12}x^{14}=1820x^{14}$.

8. $\left(x^4-\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{16}$, доданок з x^{39}. Відповідь: $C_{16}^{6}x^{39}=8008x^{39}$.

9. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$, доданок з x^2. Відповідь: $C_{18}^{2}x^2=153x^2$.

10. $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$, доданок без x. Відповідь: $-C_{10}^{1}x^0=-10$.

11. $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$, доданок з x. Відповідь: $-C_{10}^{1}x=-10x$.

12. $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^6}\right)^{9}$, доданок з $\dfrac{1}{x^{16}}$. Відповідь: $-\dfrac{C_9^3}{x^{16}}=-\dfrac{84}{x^{16}}$.

13. $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^6}\right)^{9}$, доданок з $\dfrac{1}{x^{35}}$. Відповідь: $\dfrac{C_9^6}{x^{35}}=\dfrac{84}{x^{35}}$.

14. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$, доданок з x^4. Відповідь: $-C_{13}^{3}x^4=-286x^4$.

15. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14}$, доданок з $\dfrac{1}{x^3}$. Відповідь: $\dfrac{C_{14}^{12}}{x^3}=\dfrac{91}{x^3}$.

16. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$, доданок без x. Відповідь: $-C_{15}^{9}x^0=-5005$.

17. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, доданок з x^3. Відповідь: $C_{16}^{6}x^3=8008x^3$.

18. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{16}$, доданок з x^5. Відповідь: $C_{16}^{4}x^5=1820x^5$.

19. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{17}$, доданок з x^4. Відповідь: $C_{17}^{6}x^4=12376x^4$.

20. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{17}$, доданок з x^4. Відповідь: $C_{17}^{6}x^4=12376x^4$.

21. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{20}$, доданок з x^3. Відповідь: $C_{20}^{10}x^3=184\,756x^3$.

22. $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{13}$, доданок з x^2. Відповідь: $C_{13}^{4}x^2=715x^2$.

23. $\left(\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{11}$, доданок з $\sqrt{x}$. Відповідь: $C_{11}^{5}\sqrt{x}=-462\sqrt{x}$.

24. $\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, доданок без x. Відповідь: $C_{14}^{4}x^0=1001$.

1.4. Метод математичної індукції

Завдання 6. Довести рівність:

$$S_n=\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}=\frac{n}{15n+9},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції.

1) (база індукції). При $n=1$ рівність правильна, оскільки

$$S_1=\frac{1}{(5\cdot 1-2)(5\cdot 1+3)}=\frac{1}{3\cdot 8}=\frac{1}{24}\ \text{ і }\ \frac{1}{15\cdot 1+9}=\frac{1}{24}.$$

2) (крок індукції). Припустимо, що рівність виконується для $n\in\mathbb{N}$. Доведемо, що вона справджується й для наступного значення $n+1$, тобто

$$S_{n+1}=\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{\big(5(n+1)-2\big)\cdot\big(5(n+1)+3\big)}=\frac{n+1}{15(n+1)+9}.$$

Маємо

$$S_{n+1}=\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}+\frac{1}{(5n+3)(5n+8)}=$$

$$=S_n+\frac{1}{(5n+3)(5n+8)}=\frac{n}{3(5n+3)}+\frac{1}{(5n+3)(5n+8)}=\frac{5n^2+8n+3}{3(5n+3)(5n+8)}.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння:

$$5n^2+8n+3=0,$$
$$n_1=-1,\quad n_2=-3/5,$$

та розкладемо квадратний тричлен на множники:

$$5n^2+8n+3=5(n+1)(n+3/5)=(n+1)(5n+3).$$

Тоді

$$S_n=\frac{(n+1)(5n+3)}{3(5n+3)(5n+8)}=\frac{n+1}{3(5n+8)}=\frac{n+1}{15n+24}=\frac{n+1}{15(n+1)+9}.$$

Отже, рівність доведено для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Зазначимо, що суму S_n можна знайти й безпосередньо:

$$S_n=\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}=$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{18}\right)+\ldots+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-2}-\frac{1}{5n+3}\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{5n-2}-\frac{1}{5n+3}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3}\right]=\frac{1}{5}\cdot\frac{5n}{3(5n+3)}=\frac{n}{15n+9}.$$

З огляду на взаємне знищення доданків суму S_n називають *телескопічною*. ►

Примітка. Для безпосереднього відшукання сум S_n можна скористатися формулами:

а) $\dfrac{1}{a(a+d)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+d}\right)$, наприклад: $\dfrac{1}{7\cdot 10}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)$;

б) $a(a+d)=\dfrac{(a-d)a(a+d)-a(a+d)(a+2d)}{-3d}$, наприклад:

$$7\cdot 10=\frac{4\cdot 7\cdot 10-7\cdot 10\cdot 13}{-9};$$

в) $\dfrac{1}{a(a+d)(a+2d)}=\dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{1}{a(a+d)}-\dfrac{1}{(a+d)(a+2d)}\right)$, наприклад:

$$\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7\cdot 10}-\frac{1}{10\cdot 13}\right);$$

г) $a(a+d)(a+2d)=\dfrac{(a-d)a(a+d)(a+2d)-a(a+d)(a+2d)(a+3d)}{-4d}$,

наприклад: $7\cdot 10\cdot 13=\dfrac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13-7\cdot 10\cdot 13\cdot 16}{-12}$.

1. а) $S_n=\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{n}{6n+4},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $S_n=2\cdot 5+5\cdot 8+\cdots+(3n-1)(3n+2)=3n^3+6n^2+n,\ n\in\mathbb{N}$;

в) $S_n=\dfrac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\dfrac{1}{5\cdot 8\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}=$

$=\dfrac{3n^2+7n}{20(3n+2)(3n+5)},\ n\in\mathbb{N}$;

г) $S_n=2\cdot 5\cdot 8+5\cdot 8\cdot 11+\cdots+(3n-1)(3n+2)(3n+5)=$

$=\dfrac{27n^4+126n^3+153n^2+14}{4},\ n\in\mathbb{N}$.

2. а) $S_n=\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\dfrac{n}{12n+9},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $S_n=3\cdot 7+7\cdot 11+\cdots+(4n-1)(4n+3)=\dfrac{16n^3+36n^2+11n}{3},\ n\in\mathbb{N}$;

в) $S_n=\dfrac{1}{3\cdot 7\cdot 11}+\dfrac{1}{7\cdot 11\cdot 15}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}=$

$=\dfrac{2n^2+5n}{21(4n+3)(4n+7)},\ n\in\mathbb{N}$;

г) $S_n=3\cdot 7\cdot 11+7\cdot 11\cdot 15+\cdots+(4n-1)(4n+3)(4n+7)=$

$=16n^4+80n^3+110n^2+25n,\ n\in\mathbb{N}$.

3. а) $S_n=\dfrac{1}{4\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 14}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-1)(5n+4)}=\dfrac{n}{20n+16},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $S_n=4\cdot 9+9\cdot 14+\cdots+(5n-1)(5n+4)=\dfrac{25n^3+60n^2+23n}{3},\ n\in\mathbb{N}$;

в) $S_n=\dfrac{1}{4\cdot 9\cdot 14}+\dfrac{1}{9\cdot 14\cdot 19}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-1)(5n+4)(5n+9)}=$

$=\dfrac{5n^2+13n}{72(5n+4)(5n+9)},\ n\in\mathbb{N}$;

г) $S_n = 4\cdot 9\cdot 14 + 9\cdot 14\cdot 19 + \dots + (5n-1)(5n+4)(5n+9) =$

$$= \frac{125n^4 + 650n^3 + 955n^2 + 286n}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

4. а) $S_n = \frac{1}{5\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 19} + \dots + \frac{1}{(7n-2)(7n+5)} = \frac{n}{35n+25},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 5\cdot 12 + 12\cdot 19 + \dots + (7n-2)(7n+5) = \frac{n(49n^2 + 105n + 26)}{3},\ n \in \mathbb{N}$;

в) $S_n = \frac{1}{5\cdot 12\cdot 19} + \frac{1}{12\cdot 19\cdot 26} + \dots + \frac{1}{(7n-2)(7n+5)(7n+12)} =$

$$= \frac{7n^2 + 17n}{120(7n+5)(7n+12)},\ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 5\cdot 12\cdot 19 + 12\cdot 19\cdot 26 + \dots + (7n-2)(7n+5)(7n+12) =$

$$= \frac{343n^4 + 1666n^3 + 2177n^2 + 374n}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

5. а) $S_n = \frac{1}{6\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 20} + \dots + \frac{1}{(7n-1)(7n+6)} = \frac{n}{42n+36},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 6\cdot 13 + 13\cdot 20 + \dots + (7n-1)(7n+6) = \frac{49n^3 + 126n^2 + 59n}{3},\ n \in \mathbb{N}$;

в) $S_n = \frac{1}{6\cdot 13\cdot 20} + \frac{1}{13\cdot 20\cdot 27} + \dots + \frac{1}{(7n-1)(7n+6)(7n+13)} =$

$$= \frac{7n^2 + 19n}{156(7n+6)(7n+13)},\ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 6\cdot 13\cdot 20 + 13\cdot 20\cdot 27 + \dots + (7n-1)(7n+6)(7n+13) =$

$$= \frac{343n^4 + 1862n^3 + 2933n^2 + 1102n}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

6. а) $S_n = \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + \dots + \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{n}{21n+49},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 7\cdot 10 + 10\cdot 13 + \dots + (3n+4)(3n+7) = 3n^3 + 21n^2 + 46n,\ n \in \mathbb{N}$;

в) $S_n = \frac{1}{7\cdot 10\cdot 13} + \frac{1}{10\cdot 13\cdot 16} + \dots + \frac{1}{(3n+4)(3n+7)(3n+10)} =$

$$= \frac{3n^2 + 17n}{140(3n+7)(3n+10)},\ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 7\cdot 10\cdot 13 + 10\cdot 13\cdot 16 + \dots + (3n+4)(3n+7)(3n+10) =$

$$=\frac{27n^4+306n^3+1233n^2+2074n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

7. а) $S_n=\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\dots+\frac{1}{(3n+5)(3n+8)}=\frac{n}{24n+64},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=8\cdot 11+11\cdot 14+\dots+(3n+5)(3n+8)=3n^3+24n^2+61n,\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{8\cdot 11\cdot 14}+\frac{1}{11\cdot 14\cdot 17}+\dots+\frac{1}{(3n+5)(3n+8)(3n+11)}=$

$$=\frac{3n^2+19n}{176(3n+8)(3n+11)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=8\cdot 11\cdot 14+11\cdot 14\cdot 17+\dots+(3n+5)(3n+8)(3n+11)=$

$$=\frac{27n^4+342n^3+1557n^2+3002n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

8. а) $S_n=\frac{1}{9\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 19}+\dots+\frac{1}{(5n+4)(5n+9)}=\frac{n}{45n+81},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=9\cdot 14+14\cdot 19+\dots+(5n+4)(5n+9)=\frac{25n^3+135n^2+218n}{3},\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{9\cdot 14\cdot 19}+\frac{1}{14\cdot 19\cdot 24}+\dots+\frac{1}{(5n+4)(5n+9)(5n+14)}=$

$$=\frac{5n^2+23n}{252(5n+9)(5n+14)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=9\cdot 14\cdot 19+14\cdot 19\cdot 24+\dots+(5n+4)(5n+9)(5n+14)=$

$$=\frac{125n^4+1150n^3+3655n^2+4646n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

9. а) $S_n=\frac{1}{10\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 24}+\dots+\frac{1}{(7n+3)(7n+10)}=\frac{n}{70n+100},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=10\cdot 17+17\cdot 24+\dots+(7n+3)(7n+10)=$

$$=\frac{49n^3+210n^2+251n}{3},\ n\in\mathbb{N};$$

в) $S_n=\frac{1}{10\cdot 17\cdot 24}+\frac{1}{17\cdot 24\cdot 31}+\dots+\frac{1}{(7n+3)(7n+10)(7n+17)}=$

$$=\frac{7n^2+27n}{340(7n+10)(7n+17)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=10\cdot 17\cdot 24+17\cdot 24\cdot 31+\dots+(7n+3)(7n+10)(7n+17)=$

$$=\frac{343n^4+2646n^3+6797n^2+6534n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

10. а) $S_n=\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\dots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}=\frac{n}{10n+4},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=2\cdot 7+7\cdot 12+\dots+(5n-3)(5n+2)=\frac{25n^3+30n^2-13n}{3},\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{2\cdot 7\cdot 12}+\frac{1}{7\cdot 12\cdot 17}+\dots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)(5n+7)}=$

$$=\frac{5n^2+9n}{28(5n+2)(5n+7)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=2\cdot 7\cdot 12+7\cdot 12\cdot 17+\dots+(5n-3)(5n+2)(5n+7)=$

$$=\frac{125n^4+450n^3+295n^2-198n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

11. а) $S_n=\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 17}+\dots+\frac{1}{(7n-4)(7n+3)}=\frac{n}{21n+9},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=3\cdot 10+10\cdot 17+\dots+(7n-4)(7n+3)=\frac{49n^3+63n^2-22n}{3},\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{3\cdot 10\cdot 17}+\frac{1}{10\cdot 17\cdot 24}+\dots+\frac{1}{(7n-4)(7n+3)(7n+10)}=$

$$=\frac{7n^2+13n}{60(7n+3)(7n+10)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=3\cdot 10\cdot 17+10\cdot 17\cdot 24+\dots+(7n-4)(7n+3)(7n+10)=$

$$=\frac{343n^4+1274n^3+917n^2-494n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

12. а) $S_n=\frac{1}{4\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 22}+\dots+\frac{1}{(9n-5)(9n+4)}=\frac{n}{36n+16},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=4\cdot 13+13\cdot 22+\dots+(9n-5)(9n+4)=27n^3+36n^2-11n,\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{4\cdot 13\cdot 22}+\frac{1}{13\cdot 22\cdot 31}+\dots+\frac{1}{(9n-5)(9n+4)(9n+13)}=$

$$=\frac{9n^2+17n}{104(9n+4)(9n+13)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=4\cdot 13\cdot 22+13\cdot 22\cdot 31+\dots+(9n-5)(9n+4)(9n+13)=$

$$=\frac{729n^4+2754n^3+2079n^2-986n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

13. а) $S_n = \frac{1}{5\cdot 14} + \frac{1}{14\cdot 23} + \cdots + \frac{1}{(9n-4)(9n+5)} = \frac{n}{45n+25}$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 5\cdot 14 + 14\cdot 23 + \cdots + (9n-4)(9n+5) = 27n^3 + 45n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $S_n = \frac{1}{5\cdot 14\cdot 23} + \frac{1}{14\cdot 23\cdot 32} + \cdots + \frac{1}{(9n-4)(9n+5)(9n+14)} =$

$$= \frac{9n^2 + 19n}{140(9n+5)(9n+14)}, \ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 5\cdot 14\cdot 23 + 14\cdot 23\cdot 32 + \cdots + (9n-4)(9n+5)(9n+14) =$

$$= \frac{729n^4 + 3078n^3 + 3051n^2 - 418n}{4}, \ n \in \mathbb{N}.$$

14. а) $S_n = \frac{1}{2\cdot 15} + \frac{1}{15\cdot 28} + \cdots + \frac{1}{(13n-11)(13n+2)} = \frac{n}{26n+4}$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 2\cdot 15 + 15\cdot 28 + \cdots + (13n-11)(13n+2) =$

$$= \frac{169n^3 + 78n^2 - 157n}{3}, \ n \in \mathbb{N};$$

в) $S_n = \frac{1}{2\cdot 15\cdot 28} + \frac{1}{15\cdot 28\cdot 41} + \cdots + \frac{1}{(13n-11)(13n+2)(13n+15)} =$

$$= \frac{13n^2 + 17n}{60(13n+2)(13n+15)}, \ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 2\cdot 15\cdot 28 + 15\cdot 28\cdot 41 + \cdots + (13n-11)(13n+2)(13n+15) =$

$$= \frac{2197n^4 + 5746n^3 + 143n^2 - 4726n}{4}, \ n \in \mathbb{N}.$$

15. а) $S_n = \frac{1}{7\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(5n+2)(5n+7)} = \frac{n}{35n+49}$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 7\cdot 12 + 12\cdot 19 + \cdots + (5n+2)(5n+7) =$

$$= \frac{25n^3 + 105n^2 + 122n}{3}, \ n \in \mathbb{N};$$

в) $S_n = \frac{1}{7\cdot 12\cdot 17} + \frac{1}{12\cdot 17\cdot 22} + \cdots + \frac{1}{(5n+2)(5n+7)(5n+12)} =$

$$= \frac{5n^2 + 19n}{168(5n+7)(5n+12)}, \ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 7\cdot 12\cdot 17 + 12\cdot 17\cdot 22 + \cdots + (5n+2)(5n+7)(5n+12) =$

$$=\frac{125n^4+950n^3+2395n^2+2242n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

16. а) $S_n=\frac{1}{8\cdot17}+\frac{1}{17\cdot26}+\cdots+\frac{1}{(9n-1)(9n+8)}=\frac{n}{72n+64},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $S_n=8\cdot17+17\cdot26+\cdots+(9n-1)(9n+8)=27n^3+72n^2+37n,\ n\in\mathbb{N}$;

в) $S_n=\frac{1}{8\cdot17\cdot26}+\frac{1}{17\cdot26\cdot35}+\cdots+\frac{1}{(9n-1)(9n+8)(9n+17)}=$

$$=\frac{9n^2+25n}{272(9n+8)(9n+17)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=8\cdot17\cdot26+17\cdot26\cdot35+\cdots+(9n-1)(9n+8)(9n+17)=$

$$=\frac{729n^4+4050n^3+6615n^2+2750n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

17. а) $S_n=\frac{1}{9\cdot16}+\frac{1}{16\cdot23}+\cdots+\frac{1}{(7n+2)(7n+9)}=\frac{n}{63n+81},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $S_n=9\cdot16+16\cdot23+\cdots+(7n+2)(7n+9)=$

$$=\frac{49n^3+189n^2+194n}{3},\ n\in\mathbb{N};$$

в) $S_n=\frac{1}{9\cdot16\cdot23}+\frac{1}{16\cdot23\cdot30}+\cdots+\frac{1}{(7n+2)(7n+9)(7n+16)}=$

$$=\frac{7n^2+25n}{288(7n+9)(7n+16)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=9\cdot16\cdot23+16\cdot23\cdot30+\cdots+(7n+2)(7n+9)(7n+16)=$

$$=\frac{343n^4+2450n^3+5705n^2+4750n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

18. а) $S_n=\frac{1}{10\cdot13}+\frac{1}{13\cdot16}+\cdots+\frac{1}{(3n+7)(3n+10)}=\frac{n}{30n+100},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $S_n=10\cdot13+13\cdot16+\cdots+(3n+7)(3n+10)=3n^3+30n^2+97n,\ n\in\mathbb{N}$;

в) $S_n=\frac{1}{10\cdot13\cdot16}+\frac{1}{13\cdot16\cdot19}+\cdots+\frac{1}{(3n+7)(3n+10)(3n+13)}=$

$$=\frac{3n^2+23n}{260(3n+10)(3n+13)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=10\cdot13\cdot16+13\cdot16\cdot19+\cdots+(3n+7)(3n+10)(3n+13)=$

$$=\frac{27n^4+414n^3+2313n^2+5566n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

19. а) $S_n=\frac{1}{11\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 19}+\dots+\frac{1}{(4n+7)(4n+11)}=\frac{n}{44n+121},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=11\cdot 15+15\cdot 19+\dots+(4n+7)(4n+11)=$

$$=\frac{16n^3+132n^2+347n}{3},\ n\in\mathbb{N};$$

в) $S_n=\frac{1}{11\cdot 15\cdot 19}+\frac{1}{15\cdot 19\cdot 23}+\dots+\frac{1}{(4n+7)(4n+11)(4n+15)}=$

$$=\frac{2n^2+13n}{165(4n+11)(4n+15)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=11\cdot 15\cdot 19+15\cdot 19\cdot 23+\dots+(4n+7)(4n+11)(4n+15)=$

$$=16n^4+208n^3+974n^2+1937n,\ n\in\mathbb{N}.$$

20. а) $S_n=\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 16}+\dots+\frac{1}{(7n-5)(7n+2)}=\frac{n}{14n+4},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=2\cdot 9+9\cdot 16+\dots+(7n-5)(7n+2)=\frac{49n^3+42n^2-37n}{3},\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{2\cdot 9\cdot 16}+\frac{1}{9\cdot 16\cdot 23}+\dots+\frac{1}{(7n-5)(7n+2)(7n+9)}=$

$$=\frac{7n^2+11n}{36(7n+2)(7n+9)},\ n\in\mathbb{N};$$

г) $S_n=2\cdot 9\cdot 16+9\cdot 16\cdot 23+\dots+(7n-5)(7n+2)(7n+9)=$

$$=\frac{343n^4+1078n^3+413n^2-682n}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

21. а) $S_n=\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\dots+\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}=\frac{n}{14n+49},\ n\in\mathbb{N};$

б) $S_n=7\cdot 9+9\cdot 11+\dots+(2n+5)(2n+7)=\frac{4n^3+42n^2+143n}{3},\ n\in\mathbb{N};$

в) $S_n=\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(2n+5)(2n+7)(2n+9)}=$

$$=\frac{n^2+8n}{63(2n+7)(2n+9)},\ n\in\mathbb{N};$$

в) $S_n=7\cdot 9\cdot 11+9\cdot 11\cdot 13+\dots+(2n+5)(2n+7)(2n+9)=$

$$= 2n^4 + 32n^3 + 187n^2 + 472n,\ n \in \mathbb{N}.$$

22. а) $S_n = \frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \cdots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)} = \frac{n}{28n+16},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 4 \cdot 11 + 11 \cdot 18 + \cdots + (7n-3)(7n+4) = \frac{49n^3 + 84n^2 - n}{3},\ n \in \mathbb{N}$;

в) $S_n = \frac{1}{4 \cdot 11 \cdot 18} + \frac{1}{11 \cdot 18 \cdot 25} + \cdots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)(7n+11)} =$

$$= \frac{7n^2 + 15n}{88(7n+4)(7n+11)},\ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 4 \cdot 11 \cdot 18 + 11 \cdot 18 \cdot 25 + \cdots + (7n-3)(7n+4)(7n+11) =$

$$= \frac{343n^4 + 1470n^3 + 1505n^2 - 150n}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

23. а) $S_n = \frac{1}{5 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 27} + \cdots + \frac{1}{(11n-6)(11n+5)} = \frac{n}{55n+25},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 5 \cdot 16 + 16 \cdot 27 + \cdots + (11n-6)(11n+5) =$

$$= \frac{121n^3 + 165n^2 - 46n}{3},\ n \in \mathbb{N};$$

в) $S_n = \frac{1}{5 \cdot 16 \cdot 27} + \frac{1}{16 \cdot 27 \cdot 38} + \cdots + \frac{1}{(11n-6)(11n+5)(11n+16)} =$

$$= \frac{11n^2 + 21n}{160(11n+5)(11n+16)},\ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 5 \cdot 16 \cdot 27 + 16 \cdot 27 \cdot 38 + \cdots + (11n-6)(11n+5)(11n+16) =$

$$= \frac{1331n^4 + 5082n^3 + 3949n^2 - 1722n}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

24. а) $S_n = \frac{1}{6 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 28} + \cdots + \frac{1}{(11n-5)(11n+6)} = \frac{n}{66n+36},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $S_n = 6 \cdot 17 + 17 \cdot 28 + \cdots + (11n-5)(11n+6) =$

$$= \frac{121n^3 + 198n^2 - 13n}{3},\ n \in \mathbb{N};$$

в) $S_n = \frac{1}{6 \cdot 17 \cdot 28} + \frac{1}{17 \cdot 28 \cdot 37} + \cdots + \frac{1}{(11n-5)(11n+6)(11n+17)} =$

$$= \frac{11n^2 + 23n}{204(11n+6)(11n+17)},\ n \in \mathbb{N};$$

г) $S_n = 6\cdot 17\cdot 28 + 17\cdot 28\cdot 37 + \cdots + (11n-5)(11n+6)(11n+17) =$

$$= \frac{1331n^4 + 5566n^3 + 5401n^2 - 874n}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

Завдання 7. Довести, що $a_n = 5\cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, кратне 19.

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції.

1) (база індукції). При $n = 1$ твердження правильне, оскільки

$$a_1 = 5\cdot 2 + 3^2 = 10 + 9 = 19 \text{ кратне 19.}$$

2) (крок індукції). Припустимо, що твердження правильне для $n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що воно справджується і для наступного значення $n+1$, тобто $a_{n+1} = 5\cdot 2^{3(n+1)-2} + 3^{3(n+1)-1}$ кратне 19. Маємо:

$$a_{n+1} = 5\cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2} = 8\cdot(5\cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}) + 19\cdot 3^{3n-1} = a_n + 19\cdot 3^{3n-1},$$

а отже, a_{n+1} кратне 19. Твердження доведено. ►

1. $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n$ ділиться на 6.

2. $a_n = n^3 + 35n$ ділиться на 6.

3. $a_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ ділиться на 6.

4. $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n$ ділиться на 3.

5. $a_n = 11n^3 + 3n^2 + n$ ділиться на 3.

6. $a_n = 8n^3 + 3n^2 + 7n$ ділиться на 6.

7. $a_n = 4n^3 + 3n^2 + 5n$ ділиться на 6.

8. $a_n = n^4 + 2n^3 + 5n^2$ ділиться на 4.

9. $a_n = 3n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 4n$ ділиться на 12.

10. $a_n = 5n^4 + 2n^3 + n^2$ ділиться на 4.

11. $a_n = 7n^4 + 2n^3 + n^2 + 6n$ ділиться на 4.

12. $a_n = 3n^4 - 2n^3 - n$ ділиться на 6.

13. $a_n = 9n^4 + 2n^3 + 3n^2 - 2n$ ділиться на 12.

14. $a_n = n^5 + 5n^3 + 4n$ ділиться на 10.

15. $a_n = 2n^5 + 5n^4 + 3n$ ділиться на 10.

16. $a_n = 3n^5 + 2n$ ділиться на 5.

17. $a_n = 4n^5 + 5n^4 + 5n^2 + 6n$ ділиться на 20.

18. $a_n = 8n^5 + 5n^2 + 7n$ ділиться на 10.

19. $a_n = 6n^5 + 5n^3 + 4n$ ділиться на 15.

20. $a_n = 2n^5 + 5n^3 + 3n$ ділиться на 5.

21. $a_n = 4n^5 - 14n$ ділиться на 5.

22. $a_n = n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$ ділиться на 7.

23. $a_n = 2n^7 - 37n$ ділиться на 7.

24. $a_n = n^9 + 274n^5 - 221n$ ділиться на 3.

1.5. Комплексні числа

Завдання 8. Знайти дійсні розв'язки x і y рівняння

$$\frac{2i-7}{1-i^3}x + \frac{13+3i}{2}y = 22.$$

Розв'язання. Виконуючи арифметичні дії над комплексними числами, знайдемо значення виразу:

$$\frac{2i-7}{1-i^3} = \frac{2i-7}{1+i} = \frac{(2i-7)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i-2i^2-7+7i}{1-i^2} = \frac{-5+9i}{2}.$$

Тоді рівняння запишеться так:

$$\frac{-5+9i}{2}x + \frac{13+3i}{2}y = 22;$$

звідси

$$(-5+9i)x + (13+3i)y = 44, \quad -5x + 13y + (9x+3y)i = 44.$$

За аксіомою рівності комплексних чисел складемо СЛАР:

$$\begin{cases} -5x + 13y = 44, \\ 9x + 3y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -44x = 44, \\ y = -3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $x = -1,\ y = 3$. ►

1. $\dfrac{(7-2i)x}{i+i^2} + (5i+6)y = 3 - 25i^3$. Відповідь: $x = 18,\ y = 14$.

2. $(3i-6i^2)x+\frac{12+8(1+i)^2}{1-2i}y=41i+58i^{10}$. Відповідь: $x=-5, y=7$.

3. $\frac{(6i^8-4i)x}{1+3i}+(i-1)y=98+28(1-i)^2$. Відповідь: $x=-15, y=-89$.

4. $\frac{(3+i)}{4i-1}x=12+2(1+i)^4-10i^5+y(1+i)$. Відповідь: $x=17, y=-3$.

5. $\frac{(1-i)}{2i+7}x=(i^{17}+3)y+(1+i)^4 i^6(3i+1)$. Відповідь: $x=-53, y=-3$.

6. $\frac{5(4-i)}{1-2i^7}x-(3+4i)y=35i-70$. Відповідь: $x=-11, y=16$.

7. $\frac{10(2-i)x}{3i^{21}+1}+(y-20)(4+i)=1+20i^3$. Відповідь: $x=3, y=21$.

8. $\frac{(1+4i)x}{2i-1}+yi=11i^{28}-5i+(1+i)^4$. Відповідь: $x=5, y=1$.

9. $\frac{(i^{48}+2i)x}{3+i}+y(2-i)=\frac{5-i}{2}$. Відповідь: $x=1, y=1$.

10. $\frac{(4-3i)x}{1+2i}+i^2(i-6)y=10+\frac{i}{18}+i^{12}$. Відповідь: $x=-\frac{5}{6}, y=\frac{16}{9}$.

11. $\frac{(2i-3)x}{4-i}+(2i+4i^2)y=i-6$. Відповідь: $x=17, y=-2$.

12. $\frac{(2+i)x}{3-i}+(5i-8i^{24})y=35-17i^5$. Відповідь: $x=6, y=-4$.

13. $\frac{(10+3i)x}{1-i^5}=\frac{(5-4i)y}{2}-186i^{10}$. Відповідь: $x=16, y=-52$.

14. $\frac{(5+3i)x}{1-2i}=\frac{i^{15}y}{3+i}+\frac{12-i}{i^{10}}+5i^3$. Відповідь: $x=10, y=-100$.

15. $\frac{(4-3i)x}{1+2i}+\frac{(3+4i)y}{2+i}=i^5x+y+i^4$. Відповідь: $x=5/14,\ y=8/7$.

16. $\frac{(1+5i)x}{3+i}+\frac{(2-i)y}{4i+3}=\frac{x}{i^8}+\frac{1}{i^9}-i^{10}$. Відповідь: $x=15,\ y=50$.

17. $\frac{(1+i)x}{6-8i}+\frac{i^{21}y}{3i+4i^2}=\frac{17(i-3)}{49-i^6}$. Відповідь: $x=-9,\ y=-10.$

18. $\dfrac{(4+5i)x}{2-3i}+\dfrac{(i^3-5)y}{3+2i}=-xi^{15}-\dfrac{y+1}{i^{60}}+2i^9$. Відповідь: $x=-1,\ y=5$.

19. $\dfrac{(3-i)x}{1+7i}+\dfrac{(1+5i)y}{7-i^7}=\dfrac{32(1+i)^2}{25}+\dfrac{64}{1-7i}$. Відповідь: $x=-37,\ y=-7$.

20. $\dfrac{(3-i)x}{1+i}+\dfrac{(5+3i)y}{2-i}=(2i-1)^2(i^{13}+6i^6)$. Відповідь: $x=\dfrac{19}{5},\ y=13$.

21. $\dfrac{(1-i)(x-iy)}{3+i}+\dfrac{x+iy}{25i^{24}}=\dfrac{124i^{68}}{7-i}$. Відповідь: $x=9,\ y=-38$.

22. $\dfrac{x+2i}{8+i}+\dfrac{y-3i}{1-8i}=\dfrac{(2-i)^2}{13i^{512}}+\dfrac{(1+i)^2}{10}$. Відповідь: $x=9/10,\ y=-16/5$.

23. $\dfrac{5i^{16}+6i^{15}}{1-i}x+\dfrac{1+i}{6-2i^{99}}y=\dfrac{13(i+2)^2}{10}$. Відповідь: $x=-1,\ y=47$.

24. $\dfrac{x+8i}{(1+i)^2}+\dfrac{3-i}{(3i+1)^2}y=1+\dfrac{i^{99}}{2}$. Відповідь: $x=-1,\ y=10$.

Завдання 9. Для комплексного числа $z=-\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}$ знайти модуль $|z|$, аргумент $\operatorname{Arg} z$ та *головне значення аргументу*

$$\arg z,\ -\pi<\arg z\le\pi.$$

Подати z в *тригонометричній формі* $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Знайти z^{30} за *формулою Муавра* $z^n=\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in\mathbb{Z}$.

Примітка. Головне значення аргументу комплексного числа $z=x+iy$ можна знайти за формулою

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x>0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{якщо } x<0 \text{ і } y\ge 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{якщо } x<0 \text{ і } y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y, & \text{якщо } x=0 \text{ і } y\ne 0.\end{cases}$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Маємо:

$$x=-\cos\frac{\pi}{5},\quad y=-\sin\frac{\pi}{5},$$

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\cos(\pi/5)\right)^2+\left(-\sin(\pi/5)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\cos^2(\pi/5)+\sin^2(\pi/5)}=\sqrt{1}=1;$$

оскільки $x=-\cos(\pi/5)<0,\quad y=-\sin(\pi/5)<0$, то

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi=\operatorname{arctg}\frac{-\sin(\pi/5)}{-\cos(\pi/5)}-\pi=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)-\pi=\frac{\pi}{5}-\pi=-\frac{4\pi}{5}.$$

Отже, $z=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, $\operatorname{Arg} z=-\frac{4\pi}{5}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$,

$$z^{30}=\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)^{30}=\cos\left(-\frac{120\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{120\pi}{5}\right)=$$

$$=\cos(-24\pi)+i\sin(-24\pi)=1.$$

2-й спосіб. Виконаємо перетворення:

$$z=-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}=-\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=(\cos\pi+i\sin\pi)\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5},$$

звідси $|z|=1$, $\operatorname{Arg} z=\frac{6\pi}{5}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$,

$$z^{30}=\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)^{30}=\cos\frac{6\pi\cdot 30}{5}+i\sin\frac{6\pi\cdot 30}{5}=$$

$$=\cos 36\pi+i\sin 36\pi=1.$$

Оскільки кут $\frac{6\pi}{5}$ не належить проміжку $(-\pi;\pi]$, то

$$\arg z=\frac{6\pi}{5}-2\pi=-\frac{4\pi}{5}.$$

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=-\frac{4\pi}{5}$, $z=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$,

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{4\pi}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad z^{30}=1.\ \blacktriangleright$$

1. $z = i\cos\frac{5\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{17\pi}{18}$, $z^{45} = -i$.

2. $z = \sin\frac{5\pi}{9} - i\cos\frac{5\pi}{9}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{18}$, $z^{45} = i$.

3. $z = i\cos\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{9}$, $n = 45$

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{\pi}{18}$, $z^{45} = -i$.

4. $z = \cos\frac{5\pi}{9} - i\sin\frac{5\pi}{9}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{5\pi}{9}$, $z^{45} = -1$.

5. $z = -\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{4\pi}{9}$, $z^{45} = 1$.

6. $z = -i\cos\frac{5\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{17\pi}{18}$, $z^{45} = i$.

7. $z = i\cos\frac{9\pi}{5} - \sin\frac{9\pi}{5}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{3\pi}{10}$, $z^{45} = -i$.

8. $z = \sin\frac{9\pi}{5} - i\cos\frac{9\pi}{5}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{7\pi}{10}$, $z^{45} = i$.

9. $z = i\cos\frac{9\pi}{5} + \sin\frac{9\pi}{5}$, $n = 45$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{7\pi}{10}$, $z^{45} = -i$.

10. $z=\cos\frac{9\pi}{5}-i\sin\frac{9\pi}{5}$ $n=45$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=\frac{\pi}{5}$, $z^{45}=-1$.

11. $z=-\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}$ $n=45$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=-\frac{4\pi}{5}$, $z^{45}=1$.

12. $z=-i\cos\frac{9\pi}{5}-\sin\frac{9\pi}{5}$, $n=45$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=-\frac{3\pi}{10}$, $z^{45}=i$.

13. $z=i\cos\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}$, $n=63$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=-\frac{13\pi}{18}$, $z^{63}=i$.

14. $z=\sin\frac{7\pi}{9}-i\cos\frac{7\pi}{9}$, $n=63$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=\frac{5\pi}{9}$, $z^{63}=-1$.

15. $z=i\cos\frac{7\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}$, $n=63$

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=-\frac{5\pi}{18}$, $z^{63}=i$.

16. $z=\cos\frac{7\pi}{9}-i\sin\frac{7\pi}{9}$, $n=63$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=-\frac{7\pi}{9}$, $z^{63}=-1$.

17. $z=-\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}$, $n=63$.

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=\frac{2\pi}{9}$, $z^{63}=1$.

18. $z=-i\cos\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}$, $n=63$

Відповідь: $|z|=1$, $\arg z=\frac{13\pi}{18}$, $z^{63}=-i$.

19. $z = i\cos\frac{9\pi}{7} - \sin\frac{9\pi}{7}$, $n = 63$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{3\pi}{14}$, $z^{63} = i$.

20. $z = \sin\frac{9\pi}{7} - i\cos\frac{9\pi}{7}$, $n = 63$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{11\pi}{14}$, $z^{63} = -i$.

21. $z = i\cos\frac{9\pi}{7} + \sin\frac{9\pi}{7}$, $n = 63$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{11\pi}{14}$, $z^{63} = i$.

22. $z = \cos\frac{9\pi}{7} - i\sin\frac{9\pi}{7}$, $n = 63$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{5\pi}{14}$, $z^{63} = -1$.

23. $z = -\cos\frac{9\pi}{7} + i\sin\frac{9\pi}{7}$, $n = 63$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{2\pi}{7}$, $z^{63} = 1$.

24. $z = -i\cos\frac{9\pi}{7} - \sin\frac{9\pi}{7}$, $n = 63$.

Відповідь: $|z| = 1$, $\arg z = \frac{3\pi}{14}$, $z^{63} = -i$.

Завдання 10. Зобразити на комплексній площині геометричне місце точок, які задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \geq \frac{1}{6}$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$\bar{z} = x - iy,$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Розв'яжемо нерівність:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\geq\frac{1}{6} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{x^2+y^2}\geq\frac{1}{6} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+y^2-6x}{6(x^2+y^2)}\leq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2+y^2-6x\leq 0, \\ x^2+y^2\neq 0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x-3)^2+y^2\leq 9, \\ x^2+y^2\neq 0. \end{cases}$$

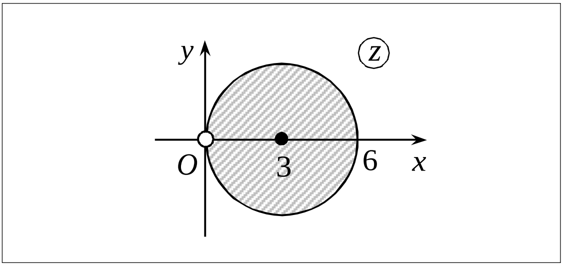


Рис. 6. Завдання 10

Відповідь: замкнений круг радіуса 3 із центром у точці $(3;0)$ без точки $O(0;0)$ (рис. 6). ▶

1. $|z|>2+\mathrm{Im}\,z$.

2. $|z|=\mathrm{Re}\,z+1$.

3. $\mathrm{Im}\frac{1}{\overline{z}}+\mathrm{Re}\frac{1}{z}=1$.

4. $\mathrm{Im}\frac{1}{z}<-\frac{1}{2}$.

5. $1<|z-2+i|<2$.

6. $|z-1|<|z-i|$.

7. $\mathrm{Re}\frac{1}{\overline{z}}=1$.

8. $\mathrm{Re}\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$.

9. $\mathrm{Im}\overline{(z^2-\overline{z})}=2-\mathrm{Im}\,z$.

10. $z^2+\overline{z}^2=1$.

11. $|z-2|=|1-2\overline{z}|$.

12. $|z|-\mathrm{Re}\,z\leq 0$.

13. $\mathrm{Re}\,(z^2+\overline{z})=0$.

14. $\mathrm{Im}\,z^2>2$.

15. $\mathrm{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right)=0$.

16. $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{z}\right)=0$.

17. $\mathrm{Re}(z^2+2z\overline{z})\geq 1$.

18. $\mathrm{Re}\,z^2+\mathrm{Im}\,z^2<0$.

19. $\mathrm{Im}\,z>\mathrm{Re}\,z^2$.

20. $\mathrm{Re}(z\,\mathrm{Re}\,z)>\mathrm{Im}(\overline{z}\,\mathrm{Re}\,z)$.

21. $\mathrm{Re}\frac{z-1}{z+1}=1$.

22. $\mathrm{Re}\frac{1}{\overline{z}}+\mathrm{Im}\frac{1}{z}=1$.

23. $\mathrm{Re}(z^2-2z)>2\,\mathrm{Im}\,z$.

24. $\mathrm{Im}\left(z^2(\overline{z}+1)\right)=0$.

Завдання 11. Користуючись *формулою добування кореня* n*-го степеня* з комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1 \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

знайти всі значення кореня $\sqrt[n]{z}$, перевірити, що їх сума дорівнює нулю, та зобразити їх на комплексній площині.

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[3]{8}$; в) $\sqrt[3]{-1-i}$; г) $\sqrt[4]{16}$; д) $\sqrt[4]{-1}$.

Примітка. Можна показати, що всі значення кореня $\sqrt[n]{z}$ є вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат.

Розв'язання. а) Маємо:

$$w = \sqrt{i} = \sqrt{1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}, \quad k = 0, 1,$$

звідки

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{при } k = 0),$$

$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{при } k = 1).$$

Знайдемо $w_0 + w_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. Відрізок довжини 2 з кінцями в точках w_0 і $w_1 = -w_0$ зображено на рис. 7.

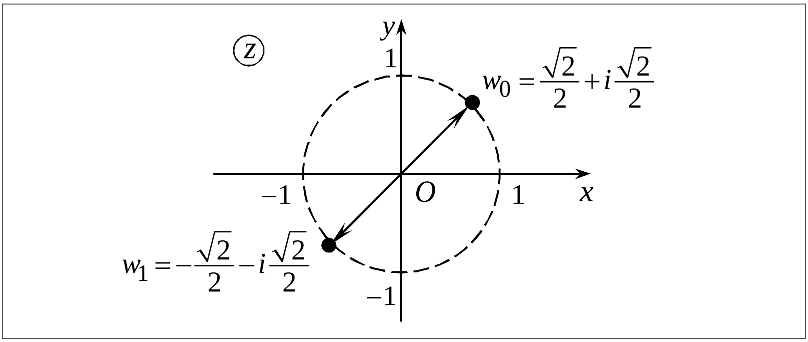


Рис. 7. Завдання 11 а)

б) Маємо:

$$w=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8(\cos 0+i\sin 0)}=2\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2,$$

звідки

$$w_0=2(\cos 0+i\sin 0)=2 \quad (\text{при } k=0),$$

$$w_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3} \quad (\text{при } k=1),$$

$$w_2=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3} \quad (\text{при } k=2).$$

Знайдемо $w_0+w_1+w_2=2+(-1+i\sqrt{3})+(-1-i\sqrt{3})=0$.

Правильний трикутник з вершинами в точках w_0, w_1, w_2, вписаний у коло радіуса 2 з центром у точці O, зображено на рис. 8.

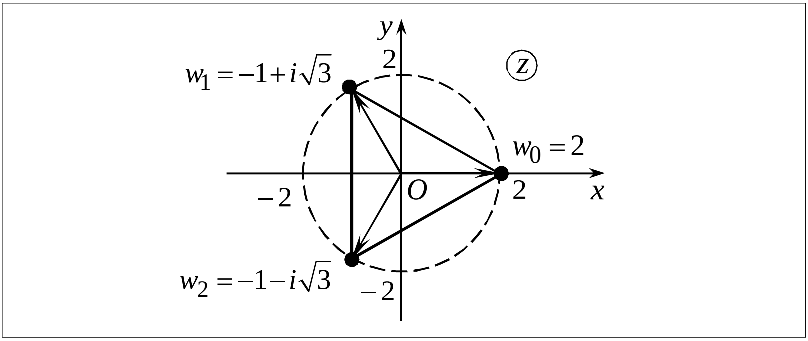


Рис. 8. Завдання 11 б)

в) Маємо

$$w=\sqrt[3]{-1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2,$$

звідки

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \quad (\text{при } k=0),$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right) \quad (\text{при } k=1),$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right) \quad (\text{при } k=2).$$

Застосовуючи тригонометричні формули

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

обчислимо суму

$$w_0+w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)+\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{13\pi}{12}\right)+\sqrt[6]{2}\left(\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{13\pi}{12}\right)i=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(2\cos\frac{9\pi}{12}\cos\frac{4\pi}{12}+2\sin\frac{9\pi}{12}\cos\frac{4\pi}{12}i\right)=\sqrt[6]{2}\left(2\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}i\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right).$$

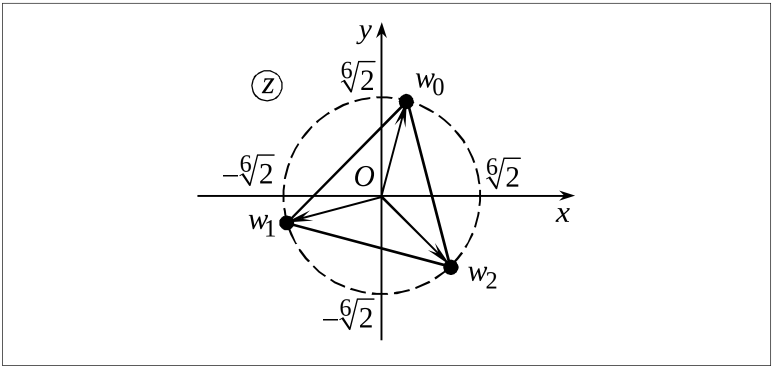


Рис. 9. Завдання 11 в)

Користуючись формулами зведення, перетворимо w_3:

$$w_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{21\pi}{12}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{21\pi}{12}-2\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right).$$

Тоді $w_0+w_1+w_2=0$. Правильний трикутник з вершинами в точках w_0, w_1, w_2, вписаний у коло радіуса $\sqrt[6]{2}$ з центром у точці O, зображено на рис. 9.

г) Маємо:

$$w=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{16(\cos 0+i\sin 0)}=2\left(\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}\right),\quad k=0,1,2,3,$$

звідки

$$w_0=2(\cos 0+i\sin 0)=2\quad (\text{при } k=0),$$

$$w_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i\quad (\text{при } k=1),$$

$$w_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2\quad (\text{при } k=2),$$

$$w_3=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i\quad (\text{при } k=3).$$

Знайдемо $w_0+w_1+w_2+w_3=2+2i-2-2i=0$.

Квадрат з вершинами в точках w_0, w_1, w_2, w_3, вписаний у коло радіуса 2 з центром у точці O, зображено на рис. 10.

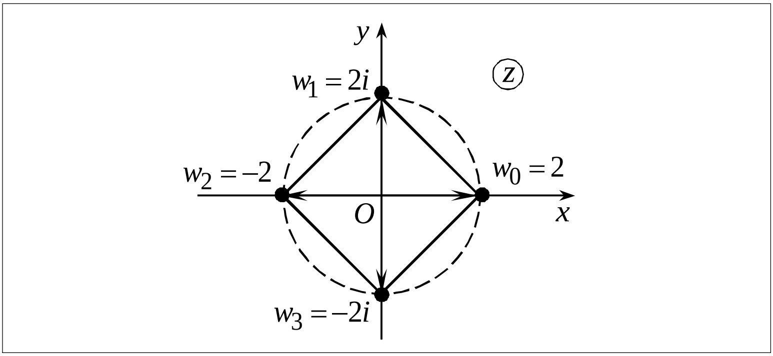


Рис. 10. Завдання 11 г)

д) Маємо:

$$w=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1(\cos\pi+i\sin\pi)}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4},\quad k=0,1,2,3,$$

звідки

$$w_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\quad (\text{при } k=0),$$

$$w_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\quad (\text{при } k=1),$$

$$w_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\quad (\text{при } k=2),$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{при } k = 3).$$

Оскільки $w_2 = -w_0$, $w_3 = -w_1$, то

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = w_0 + w_1 - w_0 - w_1 = 0.$$

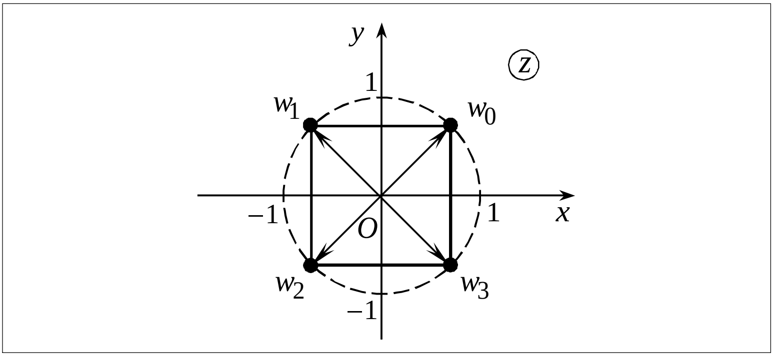


Рис. 11. Завдання 11 д)

Квадрат з вершинами в точках w_0, w_1, w_2, w_3, вписаний в одиничне коло з центром у точці O, зображено на рис. 11. ►

1. а) $\sqrt{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{i-1}$; в) $\sqrt[4]{-121^2}$; г) $\sqrt[6]{-64}$.

2. а) $\sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; б) $\sqrt[3]{i\frac{\sqrt{27}}{8}}$; в) $\sqrt[4]{-81i}$; г) $\sqrt[6]{343}$.

3. а) $\sqrt{100i}$; б) $\sqrt[3]{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}}$; в) $\sqrt[4]{256}$; г) $\sqrt[6]{\frac{81i}{4-\sqrt{12}}}$.

4. а) $\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{3}} + i}$; б) $\sqrt[3]{-27\sqrt{8}i}$; в) $\sqrt[4]{324i}$; г) $\sqrt[6]{-4096i}$.

5. а) $\sqrt{-4+4i}$; б) $\sqrt[3]{-\sqrt{216}}$; в) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[6]{-81\sqrt{32}}$.

6. а) $\sqrt[6]{\sqrt{64}}$; б) $\sqrt[3]{27}$; в) $\sqrt[4]{1-i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{-7-2\sqrt{10}}$.

7. а) $\sqrt{-16-16i}$; б) $\sqrt[3]{1+i}$; в) $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-3i}$; г) $\sqrt[6]{-125i}$.

8. а) $\sqrt{-1-i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{8-8i}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$; г) $\sqrt[6]{(3+\sqrt{4})i}$.

9. а) $\sqrt{-\sqrt[3]{4}i}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{64i}{125}}$; в) $\sqrt[4]{-6-\sqrt{32}}$; г) $\sqrt[6]{\dfrac{8}{\sqrt{729}}}$.

10. а) $\sqrt{\dfrac{1}{3}-\dfrac{i}{\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt[3]{-512}$; в) $\sqrt[4]{25^6}$; г) $\sqrt[6]{-27i}$.

11. а) $\sqrt{\sqrt{8}-i\sqrt{8}}$; б) $\sqrt[3]{-\dfrac{1+i}{2}}$; в) $\sqrt[4]{196i}$; г) $\sqrt[6]{-16}$.

12. а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}}$; б) $\sqrt[3]{0{,}125}$; в) $\sqrt[4]{-\dfrac{(3+\sqrt{8})i}{9}}$; г) $\sqrt[6]{729i}$.

13. а) $\sqrt{-1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt[3]{27(1+i)}$; в) $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+3i}$; г) $\sqrt[6]{-\dfrac{1}{64}}$.

14. а) $\sqrt{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{6}}}$; б) $\sqrt[3]{-\dfrac{i}{8}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-3i}$; г) $\sqrt[6]{\dfrac{9}{3-\sqrt{8}}i}$.

15. а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{i}{4}}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$; в) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[6]{125}$.

16. а) $\sqrt{-(6+2\sqrt{5})}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{125}}$; в) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[6]{-25i}$.

17. а) $\sqrt{-1225i}$; б) $\sqrt[3]{1000}$; в) $\sqrt[4]{-16}$; г) $\sqrt[6]{10^{-6}}$.

18. а) $\sqrt{\dfrac{(7+2\sqrt{6})i}{9}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}i}$; в) $\sqrt[4]{81\pi^2}$; г) $\sqrt[6]{-2025i}$.

19. а) $\sqrt{\dfrac{1}{6}+\dfrac{i}{2\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt[3]{-\sqrt{10}}$; в) $\sqrt[4]{1296i}$; г) $\sqrt[6]{-125}$.

20. а) $\sqrt{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{-2i\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{-9i}$; г) $\sqrt[6]{4\sqrt[3]{512}i}$.

21. а) $\sqrt{-\sqrt{4}-i\sqrt{12}}$; б) $\sqrt[6]{-64i}$; в) $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+i}$; г) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

22. а) $\sqrt{\sqrt{5}-i\sqrt{15}}$; б) $\sqrt[3]{-3-3i}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-i}$; г) $\sqrt[6]{-\dfrac{1}{625}}$.

23. а) $\sqrt{(4+2\sqrt{3})i}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{64}(1+i)}$; в) $\sqrt[4]{-\sqrt{12}-6i}$; г) $\sqrt[6]{216}$.

24. а) $\sqrt{-(5+2\sqrt{6})i}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{729}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{12}+6i}$; г) $\sqrt[6]{216i}$.

Завдання 12. Виразити через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ дану функцію кратного кута: а) $\cos 2\varphi$; б) $\sin 2\varphi$.

Розв'язання. Скористаємося послідовно формулою Муавра і формулою бінома Ньютона:

а) $\cos 2\varphi = \mathrm{Re}\,(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \mathrm{Re}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 =$

$$= \mathrm{Re}\left(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cdot i\sin\varphi + (i\sin\varphi)^2\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi\right) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi;$$

б) $\sin 2\varphi = \mathrm{Im}\,(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \mathrm{Im}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 =$

$$= \mathrm{Im}\left(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cdot i\sin\varphi + (i\sin\varphi)^2\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi\right) = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Одержали відомі з курсу тригонометрії *формули подвійного аргументу*:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi. \ ►$$

1. $\sin 9\varphi$.	**2.** $\cos 9\varphi$.	**3.** $\sin 8\varphi$.
4. $\cos 8\varphi$.	**5.** $\sin 7\varphi$.	**6.** $\cos 7\varphi$.
7. $\sin 6\varphi$.	**8.** $\cos 6\varphi$.	**9.** $\sin 5\varphi$.
10. $\cos 5\varphi$.	**11.** $\sin 4\varphi$.	**12.** $\cos 4\varphi$.
13. $\sin 10\varphi$.	**14.** $\cos 10\varphi$.	**15.** $\sin 11\varphi$.
16. $\cos 11\varphi$.	**17.** $\sin 12\varphi$.	**18.** $\cos 12\varphi$.
19. $\sin 13\varphi$.	**20.** $\cos 13\varphi$.	**21.** $\sin 14\varphi$.
22. $\cos 14\varphi$.	**23.** $\sin 3\varphi$.	**24.** $\cos 3\varphi$.

Завдання 13. Користуючись *формулами Ейлера*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

понизити степінь виразу: а) $\cos^2\varphi$; б) $\sin^2\varphi$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу бінома Ньютона, маємо:

а) $\cos^2\varphi = \left(\dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^{2i\varphi} + 2e^{i\varphi}e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi}\right) = \frac{1}{4}(2 + 2\cos 2\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi);$$

б) $\sin^2\varphi=\left(\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2=\dfrac{1}{4i^2}\left(e^{2i\varphi}-2e^{i\varphi}e^{-i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)=$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{2i\varphi}-2+e^{-2i\varphi}\right)=-\frac{1}{4}\left(2\cos 2\varphi-2\right)=\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi).$$

Одержали відомі з курсу тригонометрії *формули пониження*:

$$\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2},\quad \sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}.\ \blacktriangleright$$

1. $\cos^3\varphi$.	**2.** $\sin^3\varphi$.	**3.** $\cos^4\varphi$.
4. $\sin^4\varphi$.	**5.** $\cos^5\varphi$.	**6.** $\sin^5\varphi$.
7. $\cos^6\varphi$.	**8.** $\sin^6\varphi$.	**9.** $\cos^7\varphi$.
10. $\sin^7\varphi$.	**11.** $\cos^8\varphi$.	**12.** $\sin^8\varphi$.
13. $\cos^9\varphi$.	**14.** $\sin^9\varphi$.	**15.** $\cos^{10}\varphi$.
16. $\sin^{10}\varphi$.	**17.** $\cos^{11}\varphi$.	**18.** $\sin^{11}\varphi$.
19. $\cos^{12}\varphi$.	**20.** $\sin^{12}\varphi$.	**21.** $\cos^{13}\varphi$.
22. $\sin^{13}\varphi$.	**23.** $\cos^{14}\varphi$.	**24.** $\sin^{14}\varphi$.

1.6. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 1

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $(0,8-0,2i)+(0,1-1,3i)-(1,5+0,7i)-(2,3-0,6i)$;

б) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{8}\right)+\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{i}{3}\right)-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{i}{6}\right)$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{10}-1}\right)^4$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $(1-i)^{26}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2-1=i$; б) $z^3+8=0$; в) $z^2+|z|^2=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=\frac{2}{-i}+i(1+i)$; б) $z=(1+i)(1-3i)$; в) $z=-\pi$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z=-1$; в) $z=4-i$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{2-2i}$; б) $\sqrt[4]{4i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re} z>0$; б) $\operatorname{Im} z<-3$.

10. Довести рівність $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Варіант 2

1. Обчислити: а) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}i\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}i\right)$; б) $\frac{(1-i)^2}{(1+i)}+i^7$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\frac{1-3i}{i}\right)^3$; б) $(1+i)^8$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2+4=0$; б) $z^3=1$; в) $z^2+(i-1)(i+1)=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=4$; б) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i^{23}$; б) $z=4$; в) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; б) $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[4]{16(\cos\pi+i\sin\pi)}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:
а) $\operatorname{Re} z < -1$; б) $-1 < \operatorname{Im} z < 2$.

10. Довести рівність $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Варіант 3

1. Обчислити: а) $(4-\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$; б) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

2. Піднести до степеня: а) $(2+\sqrt{3}i)^2$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\dfrac{2i}{(1-i)^4}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3 = -8$; б) $z^3 + 2zi = 0$; в) $z^3 = i$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$; б) $z = \dfrac{9+2i}{4-i} + \dfrac{1}{i}$; в) $z = -5$.

6. Подати в тригонометричній формі число:
а) $z = 4$; б) $z = i^{25} + i$; в) $z = 1 - i$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:
а) $z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $z = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[4]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:
а) $\operatorname{Re} z > a$ і $\operatorname{Im} z \le b$, де $a, b \in \mathbb{R}$; б) $-1 < \operatorname{Im} z < 1$.

10. Довести рівність $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Варіант 4

1. Обчислити: а) $\dfrac{3+4i}{5+2i}$; б) $\dfrac{2-i}{2+i} + \dfrac{2+i}{2-i}$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$; б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\dfrac{512}{(1+i\sqrt{3})^{13}}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^4 = 16$; б) $z^4 + i = 0$; в) $z^5 - 32i = 0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = \dfrac{1-i}{1+i}$; б) $z = \dfrac{1-i^3}{(1+i)^3}$; в) $z = -2$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = 1 - i$; б) $z = i - \sqrt{3}$; в) $z = i^{13} + 1$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re} z < -2$; б) $1 \le \operatorname{Im} z \le 2$.

10. Довести рівність $e^{i2\pi k} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Варіант 5

1. Обчислити: а) $\dfrac{5}{1+2i}$; б) $\dfrac{9+2i}{4-i} - \dfrac{2-5i}{5+2i} + \dfrac{1}{i}$.

2. Піднести до степеня: а) $(-\sqrt{3}-i)^4$; б) $\left(\dfrac{2-2i}{1-2i}\right)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\dfrac{2i}{(1-i)^4}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^6 + 64 = 0$; б) $|z| + 2z + 1 = 0$; в) $z^2 + 4 = 4\overline{z}$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z = \dfrac{2}{-i} + i(1+i)$; б) $z = \dfrac{i}{2+i}$; в) $z = \dfrac{2+i}{i}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$; в) $z = i^{13} - 1$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; б) $z = \dfrac{1}{8}(\cos 0 + i\sin 0)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[4]{1}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $3<\operatorname{Re} z<4$; б) $z^2+\overline{z}^2=2$.

10. Довести рівність $e^{i\pi k}=(-1)^k \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Варіант 6

1. Обчислити: а) $\dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{2-2i}{1-2i}$; б) $\dfrac{1+i}{i}+\dfrac{i}{1+i}$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$; б) $(1+i)^3$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{84}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2-1=i$; б) $z^3+8=0$; в) $z+|z|-1+i=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$; б) $z=\dfrac{7}{5+i\sqrt{2}}$; в) $z=\dfrac{7}{5\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $z=i-1$; в) $z=\sin\dfrac{\pi}{3}-i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=7\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $z=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{1-i}$; б) $\sqrt[3]{8}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $-\pi/2<\operatorname{Arg} z<\pi/2$; б) $\operatorname{Im}(z^2)=2$.

10. Довести рівність $e^{i(\varphi+2\pi k)}=e^{i\varphi} \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Варіант 7

1. Обчислити: а) $\dfrac{(1-2i)(2+i)}{i}$; б) $\dfrac{(1-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{(1+i\sqrt{3})^2}$.

2. Піднести до степеня: а) $(2+\sqrt{3}i)^2$; б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3=i$; б) $z^4=1$; в) $z^2+|z|^2=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=\frac{i}{1+2i}+\frac{1+2i}{i}$; б) $z=\frac{2}{i}+i(1-i)$; в) $z=i+\sqrt{3}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-i$; б) $z=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$; в) $z=10$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; б) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{i-1}$; б) $\sqrt[5]{-32i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Im}(1/z)<-1/2$; б) $|z+i|=5$.

10. Довести рівність $(e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$.

Варіант 8

1. Обчислити:

а) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$; б) $(1+i)^2(1-i)$.

2. Піднести до степеня: а) i^{23}; б) $(i+\sqrt{3})^4$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $(\sqrt{3}+i)^{127}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2-12x+45=0$; б) $3x^2+7x+5=0$; в) $|z|+2z+1=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=-1$; б) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=-\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = i + 1$; б) $z = -1 + i$; в) $z = -\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = \left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $z = \dfrac{\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{1-i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z+2+i|<1$; б) $|z-1|<|z-i|$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^3\varphi$.

Варіант 9

1. Обчислити:

а) $(0,8i - 0,2) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}i\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}i\right)$; б) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i} + \frac{2-2i}{1-2i}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} + \frac{i-1}{1+i}$; б) $\left(\frac{2}{-i} + i(2-i)\right)^3$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2 + 2z + 5 = 0$; б) $z^2 - 2iz - 5 = 0$; в) $z^3 - 1 = 0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = \frac{7}{5+i\sqrt{2}}$; б) $z = (1+i)(1-3i)$; в) $z = -e$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = -i$; б) $z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$; в) $z = 9i^{10}$.

7. Довести співвідношення: а) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$; б) $\overline{(\overline{z})}=z$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{-2i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\overline{z}^2=4$; б) $|z-1|=\operatorname{Re}z$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^3\varphi$.

Варіант 10

1. Обчислити: а) $\dfrac{(1-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{(1-3i)^3}{i}+i^{21}$.

2. Виконати арифметичні дії над комплексними числами z_1 і z_2, якщо: а) $z_1=-i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=2+2i$, $z_2=i^{15}-i^{10}$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$;

б) $(z+1)^4-16=0$; в) $z^4+18z^2+81=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=1-i\sqrt{3}$; б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; в) $z=\dfrac{1+i^5}{(1-i)^5}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$; в) $z=10i^9$.

7. Довести співвідношення: а) $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z$; б) $|\overline{z}|=|z|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{32}$; б) $\sqrt[3]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z-1|=|\operatorname{Re}z|$; б) $\operatorname{Re}z+1=|z|$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^4\varphi$.

Варіант 11

1. Обчислити:

а) $i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}$; б) $\left(\frac{1}{8}-\frac{i}{2}\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{i}{2}\right)-\left(\frac{5}{6}-\frac{i}{3}\right)$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=x^2-y$ і $z_2=(y^2-1)i+1$ рівні?

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $z=(\sqrt{3}-i)^{127}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^4-(1+i)z^2+2(1+i)=0$;

б) $z^6+4z^3+3=0$; в) $z^4+1=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $z=\frac{1+i}{1-i}$; в) $z=i^5-i^4$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=1-i$; б) $z=i+\sqrt{3}$; в) $z=i\cos\frac{\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}$.

7. Довести співвідношення: а) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}$; б) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=0$; б) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=0$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^4\varphi$.

Варіант 12

1. Обчислити:

а) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$; б) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

2. При яких дійсних значеннях x і y є спряженими комплексні числа $z_1=9y^2-4-10xi$ і $z_2=8y^2+20i^7$?

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^8+15z^4-16=0$; б) $z^4+4=0$; в) $z^3+8i=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=\frac{7+24i}{5}$; б) $z=-3-4i$; в) $z=3\sin\frac{\pi}{10}-3i\cos\frac{\pi}{10}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i+\sqrt{3}$; б) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=-i\pi+ie$.

7. Довести співвідношення:

а) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; б) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$; б) $\sqrt[6]{-1}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Im}\frac{z-i}{z-1}=0$; б) $\operatorname{Re}\frac{z-i}{z-1}=0$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^5\varphi$.

Варіант 13

1. Обчислити: а) $\frac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}+\frac{2}{-i}+(1+i)i$; б) $\frac{3}{1+i}+\frac{3}{2-i}+\frac{1}{1+2i}$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=x^2+i(x+y)$ і $z_2=(y+6)+i(x-2)$ є рівними?

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2+(i+1)(i-1)=0$; б) $z^4-81=0$; в) $z^3=1$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=5-12i$; б) $z=-2+i$; в) $z=\sin\frac{\pi}{13}+i\cos\frac{\pi}{13}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-i$; б) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; в) $z=-\frac{\pi}{4}$.

7. Довести співвідношення:

а) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$; б) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $z^2+\overline{z}^2=2$; б) $\operatorname{Re}|z^2-\overline{z}|=2$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^5\varphi$.

Варіант 14

1. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\frac{1+i}{1-i}+(2+3i)^3$; б) $z=\frac{(1-i)^2}{1+i}+i^7$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=9y^2-4-10xi$ і $z_2=8y^2+20i^7$ є спряженими?

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 3\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3=-8$; б) $z^3+27i=0$; в) $z^4=25$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$; б) $z=\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$; в) $z=-3-4i$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$; б) $z=-i$; в) $z=-\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

7. Довести співвідношення:

а) $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)$; б) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[6]{1}$; б) $\sqrt[5]{-1-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z+1|+|z-1|\le 3$; б) $\pi/4<\operatorname{Arg}(z+i)<\pi/2$.

10. Довести співвідношення $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Варіант 15

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

а) $z_1 = 1+2i$ і $z_2 = 2-5i$;   б) $z_1 = \sqrt{2}+i$ і $z_2 = 1-i\sqrt{2}$.

2. Піднести до степеня: а) $(1+i)^8$; б) $(2+\sqrt{3}i)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 3\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^4 = 9$; б) $x^2 - 12x + 45 = 0$; в) $z^3 = 125i$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z = -1-\sqrt{3}i$; б) $z = i\sqrt{5}$; в) $z = -2$.

6. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 40\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $z = 2i(\cos 0 + i\sin 0)$; в) $z = i^{15}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} - i^{14}$.

7. Довести співвідношення:

а) $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$; б) $|z|^2 = z\bar{z}$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{27i}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\frac{z-\alpha}{z+\alpha} = 0$;   б) $0 < \operatorname{Arg}\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}$.

10. Довести співвідношення $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Варіант 16

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

а) $z_1 = 4+3i$ і $z_2 = i-1$;   б) $z_1 = (1-5i)^2$ і $z_2 = (1-5i)^2$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$; б) $\left(\frac{1-3i}{i}+i\right)^4$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 4\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^4 + i = 0$; б) $3x^2 + 7x + 5 = 0$; в) $z^3 = -27$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$; б) $z=-1$; в) $z=12i-5$.

6. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=3(\cos\pi+i\sin\pi)$; б) $z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

в) $z=i\sin(3\pi/4)\cos(\pi/4)-i^{16}$.

7. Довести нерівність $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{i}$; б) $\sqrt[4]{2+2i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z-1|<1$; б) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\ge 1$.

10. Довести співвідношення $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Варіант 17

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

а) $z_1=2+\sqrt{5}i$ і $z_2=2-\sqrt{5}i$; б) $z_1=(3-i)^2$ і $z_2=1+2i$.

2. Піднести до степеня: а) $(1-i)^{26}$; б) $\left(\frac{1+i}{-2i}+i^2\right)^3$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 4\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^5-32i=0$; б) $z^2-2iz-5=0$; в) $z^3-64i=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=1-\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$; б) $z=e^2-9$; в) $z=-12-5i$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$; б) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=-5i-5i^8$.

7. Довести нерівність $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{i-1}$; б) $\sqrt[5]{-8i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z-1|=|\operatorname{Re} z|$; б) $2<|z-3i-4|\le 5$, $\operatorname{Im} z\ge 4$.

10. Довести співвідношення $e^{i2\pi k}=1$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Варіант 18

1. Обчислити: а) $i^{10}+i^{11}+i^{12}$; б) $\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{8}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{6}\right)$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=(3+2\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}i)+\frac{1}{i}$; б) $z=(1+i)(1-3i)$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 5\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^6+64=0$; б) $|z|+2z+1=0$; в) $z^3+8i=0$.

5. Піднести до степеня: $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=\frac{1-i}{1+i}$; б) $z=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; в) $z=(e-\pi)i$.

7. Довести рівності: а) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$; б) $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[5]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=4$; б) $\begin{cases}\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z<1,\\ |z-1|<1.\end{cases}$

10. Довести співвідношення $e^{i\pi k}=(-1)^k$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Варіант 19

1. Обчислити: а) $i^{37}-i^{28}+(\sqrt{3}+i)^6$; б) $\frac{(1-3i)^3}{i}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$; б) $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 5\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2-1=i$; б) $z^2+4=4\overline{z}$; в) $z^4+16=0$.

5. Обчислити: $\dfrac{2i}{(1-i)^8}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=i-\sqrt{3}$; в) $z=i^{19}-i^{20}$.

7. Довести рівності: а) $\overline{(\overline{z})}=z$; б) $|\overline{z}|=|z|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{\dfrac{2+2i}{2-2i}}$; б) $\sqrt[3]{2-2i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $-1<\operatorname{Im}z<2$; б) $\operatorname{Im}z+1=|z|$.

10. Довести співвідношення $e^{i(\varphi+2\pi k)}=e^{i\varphi}$ ($k\in\mathbb{Z}$).

Варіант 20

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1=-i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=(-1+2i)^2$, $z_2=1-i$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\dfrac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; б) $z=\dfrac{1-i^3}{(1+i)^3}$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 6\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3+8=0$; б) $z^3=i$; в) $z^4=-81$.

5. Обчислити: $\dfrac{512}{(1+i\sqrt{3})^{13}}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=i-\sqrt{3}$; в) $z=i^{19}-i^{20}$.

7. Довести рівності: а) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; б) $|z^n|=|z|^n$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt{(1-i)(1+i)}$; б) $\sqrt[4]{4i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}z\le -1$; б) $0\le\arg z\le\pi/3$.

10. Довести співвідношення

$$(e^{i\varphi})^{1/n}=e^{i(\varphi+2k\pi)/n}\quad (k=0,1,\ldots,n-1;\ n\in\mathbb{N}).$$

В а р і а н т 2 1

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = i^{15} - i^{10}$; б) $z_1 = (-3 - i)^2$, $z_2 = (1 - i)(2 + i)$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z = \dfrac{3}{1+i} + \dfrac{3}{2-i}$; б) $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 6\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^4 = 1$; б) $z^6 - 1 = 0$; в) $(z - i)^2 = -i$.

5. Обчислити: $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{84}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = i^{23}$; б) $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z = (1 - i)^8$.

7. Довести рівності: а) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$; б) $\overline{az} = a\overline{z}$ $(a \in \mathbb{R})$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[4]{i^4}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $1 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z$; б) $-\pi/2 \le \arg z \le \pi$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^3\varphi$.

В а р і а н т 2 2

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1 = (1 - i)^3$, $z_2 = i^2 - i^3 + i^4$;

б) $z_1 = (\sqrt{3} - 3i)^6$, $z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; б) $z = \dfrac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}} + \dfrac{i}{2}$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^6=-64$; б) $|z|+2z+1=0$; в) $(iz-3)^2=4i$.

5. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=20\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $z=3(\cos 0+i\sin 0)$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i^{25}+i$; б) $z=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$; в) $z=1-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

7. Довести рівність $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|+|z_2|\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z|\le 4$; б) $0<|z-2i|<3$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^3\varphi$.

Варіант 23

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1=\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}$, $z_2=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$;

б) $z_1=(2-2i)^4+3i^{121}$, $z_2=(1+i)^3$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\frac{1+i^5}{(1-i)^5}$; б) $z=\frac{i}{2+i}+i$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{60}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z+|z|-1+i=0$; б) $z^2-\overline{z}=0$; в) $(iz+2)^4=-256$.

5. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)$; б) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=1-i$; б) $z=\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$; в) $z=1+\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$.

7. Довести рівність $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{2-2i}$; б) $\sqrt[4]{-4}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z| > 1$; б) $1 < |z+i| \le 2$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^4\varphi$.

Варіант 24

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1 = 4+3i$, $z_2 = i-1$; б) $z_1 = (\sqrt{3}i - \sqrt{3})^2$, $z_2 = (1-i)^{24}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z = \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{i}{2-i}$; б) $z = \dfrac{2-i}{2+i} + \dfrac{2+i}{2-i}$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2 + |z|^2 = 0$; б) $z^2 + 4 = 4\overline{z}$; в) $(iz)^3 = 64i$.

5. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = 1 - i\sqrt{3}$; б) $z = -i$; в) $z = -1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

7. Довести рівність $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; б) $\sqrt[4]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z+3| < 2$; б) $1 < |z+i| \le 2$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^4\varphi$.

РОЗДІЛ 2
ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ

2.1. Границя числової послідовності

Завдання 14. Знайти формулу загального члена послідовності, заданої рекурентним співвідношенням:

а) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n,\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n,\ n \in \mathbb{N}$;

в) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. а) Шукатимемо послідовність вигляду $\{\lambda^n\}$, яка задовольняє умову $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n,\ n \in \mathbb{N}$. Поклавши тут $x_n = \lambda^n$, дістанемо *характеристичне рівняння* $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, корені якого $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$. Кожна з послідовностей $\{\lambda_1^n\}$ і $\{\lambda_2^n\}$ задовольняє співвідношення $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$. Для довільних чисел C_1 і C_2 послідовність із загальним членом $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ теж задовольняє це співвідношення. Знайдемо C_1 і C_2 такі, що

$$x_1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = a, \quad x_2 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = b,$$

звідси $C_1 = \frac{1}{3}(b - 2a),\ C_2 = \frac{1}{6}(a + b)$. Остаточно маємо

$$x_n = \frac{(-1)^n}{3}(b - 2a) + \frac{2^n}{6}(a + b), \quad n \in \mathbb{N}.$$

б) Характеристичне рівняння $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ має один двократний корінь $\lambda = \frac{1}{2}$. Кожна з послідовностей $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ і $\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ задовольняє умову $x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n,\ n \in \mathbb{N}$. Для довільних чисел C_1 і C_2 послідовність із загальним членом

$$x_n = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

також задовольняє це співвідношення. Визначивши сталі C_1 і C_2 із системи рівнянь

$$x_1 = C_1\cdot\frac{1}{2} + C\cdot\frac{1}{2} = a, \quad x_2 = C_1\cdot\frac{1}{4} + C_2\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = b,$$

дістанемо $C_1 = 4a - 4b,\ C_2 = 4b - 2a$, а отже,

$$x_n = \frac{4a - 4b + n(4b - 2a)}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

в) У цьому випадку характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ має комплексні корені

$$\lambda_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ і } \lambda_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

Послідовність, що задовольняє співвідношення $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$, шукаємо у вигляді $x_n = C_1 e^{\frac{n\pi}{3}i} + C_2 e^{-\frac{n\pi}{3}i}$. З умов $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ одержимо систему двох лінійних алгебричних рівнянь:

$$x_1 = C_1 e^{\frac{\pi}{3}i} + C_2 e^{-\frac{\pi}{3}i} = 0, \quad x_2 = C_1 e^{\frac{2\pi}{3}i} + C_2 e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 1,$$

звідки $C_1 = \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{3}i},\ C_2 = -\frac{1}{i\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{3}i}$, а тому

$$x_n = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{\frac{i\pi(n-1)}{3}} - e^{-\frac{i\pi(n-1)}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi(n-1)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Відповідь: а) $x_n = \frac{(-1)^n}{3}(b - 2a) + \frac{2^n}{6}(a + b), \quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \frac{4a - 4b + n(4b - 2a)}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$; в) $x_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi(n-1)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}$. ▶

Примітка. Послідовність, задана рекурентною формулою вигляду

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} \equiv \sum_{p=1}^{k} a_p x_{n-p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq k,$$

де $a_1, \ldots, a_k$ і k – задані числа, $k \in \mathbb{N}$, називається *зворотною послідовністю порядку* k. Якщо послідовність $\{x_n\}$ задана рекурентним співвідношенням

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто є зворотною послідовністю порядку $k = 2$, то формулу її загального члена x_n знаходять так:

1) якщо характеристичне рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ має два різні дійсні корені λ_1 і λ_2, то $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) якщо характеристичне рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ має два однакові корені $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, то $x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$;

3) якщо характеристичне рівняння має два комплексно спряжені корені $\lambda_1 = re^{i\theta}$ і $\lambda_2 = re^{-i\theta}$, то $x_n = r^n(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$.

Сталі C_1 і C_2 визначаються з початкових умов $x_1 = a$, $x_2 = b$.

1. а) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \dfrac{b-3a}{10}(-2)^n + \dfrac{2a+b}{15}3^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{-4a-b}{4}(-2)^n + \dfrac{2a+b}{4}n(-2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. а) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \dfrac{3a+b}{10}2^n + \dfrac{b-2a}{15}(-3)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{4a-b}{4}2^n + \dfrac{b-2a}{4}n2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. а) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \dfrac{3a-b}{2}2^n + \dfrac{b-2a}{3}3^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{-6a-b}{9}(-3)^n + \dfrac{3a+b}{9}n(-3)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4. а) $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=(3a+b)(-2)^{n-1}-(2a+b)(-3)^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{6a-b}{9}3^n+\dfrac{b-3a}{9}n3^n,\ n\in\mathbb{N}$.

5. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-3x_{n+1}-10x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+10x_{n+1}+25x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{b-5a}{14}(-2)^n+\dfrac{2a+b}{35}5^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{-10a-b}{25}(-5)^n+\dfrac{5a+b}{25}n(-5)^n,\ n\in\mathbb{N}$.

6. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+3x_{n+1}-10x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-10x_{n+1}+25x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{5a+b}{14}2^n+\dfrac{b-2a}{35}(-5)^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{10a-b}{25}5^n+\dfrac{b-5a}{25}n5^n,\ n\in\mathbb{N}$.

7. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-7x_{n+1}+10x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+8x_{n+1}+16x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{5a-b}{6}2^n+\dfrac{b-2a}{15}5^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{4a+b}{16}(-4)^n-\dfrac{8a+b}{16}n(-4)^n,\ n\in\mathbb{N}$.

8. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+7x_{n+1}+10x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-8x_{n+1}+16x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{-5a-b}{6}(-2)^n+\dfrac{2a+b}{15}(-5)^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{8a-b}{16}4^n+\dfrac{b-4a}{16}n4^n,\ n\in\mathbb{N}$.

9. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-x_{n+1}-12x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+12x_{n+1}+36x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{-4a+b}{21}(-3)^n+\dfrac{3a+b}{28}4^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{-12a-b}{36}(-6)^n+\dfrac{6a+b}{36}n(-6)^n,\ n\in\mathbb{N}$.

10. а) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} + x_{n+1} - 12x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} - 12x_{n+1} + 36x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = -\dfrac{4a+b}{21}3^n + \dfrac{b-3a}{28}(-4)^n,\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{12a-b}{36}6^n + \dfrac{b-6a}{36}n6^n,\ n \in \mathbb{N}$.

11. а) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} + 14x_{n+1} + 49x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = (4a-b)3^{n-1} + (b-3a)4^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = -\dfrac{14a+b}{49}(-7)^n + \dfrac{7a+b}{49}n(-7)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

12. а) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} + 7x_{n+1} + 12x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} - 14x_{n+1} + 49x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = (4a+b)(-3)^{n-1} - (3a+b)(-4)^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{14a-b}{49}7^n + \dfrac{b-7a}{49}n7^n,\ n \in \mathbb{N}$.

13. а) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} - 2x_{n+1} - 15x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} + 16x_{n+1} + 64x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \dfrac{b-5a}{24}(-3)^n + \dfrac{3a+b}{40}5^n,\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{-16a-b}{64}(-8)^n + \dfrac{8a+b}{64}n(-8)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

14. а) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} + 2x_{n+1} - 15x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \dfrac{5a+b}{24}3^n + \dfrac{b-3a}{40}(-5)^n,\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{16a-b}{64}8^n + \dfrac{b-8a}{64}n8^n,\ n \in \mathbb{N}$.

15. а) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_{n+2} + 18x_{n+1} + 81x_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \dfrac{5a-b}{6}3^n + \dfrac{b-3a}{10}5^n,\ n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \dfrac{-18a-b}{81}(-9)^n + \dfrac{9a+b}{81}n(-9)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

16. а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 15x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} - 18x_{n+1} + 81x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \frac{-5a-b}{6}(-3)^n + \frac{3a+b}{10}(-5)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \frac{18a-b}{81}9^n + \frac{b-9a}{81}n9^n$, $n \in \mathbb{N}$.

17. а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} - x_{n+1} - 20x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} + 20x_{n+1} + 100x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \frac{b-5a}{36}(-4)^n + \frac{4a+b}{45}5^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \frac{-20a-b}{100}(-10)^n + \frac{10a+b}{100}n(-10)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

18. а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} + x_{n+1} - 20x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} - 20x_{n+1} + 100x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \frac{5a+b}{36}4^n + \frac{b-4a}{45}(-5)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \frac{20a-b}{100}10^n + \frac{b-10a}{100}n10^n$, $n \in \mathbb{N}$.

19. а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 20x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $9x_{n+2} + 6x_{n+1} + x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \frac{5a-b}{4}4^n + \frac{b-4a}{5}5^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = (-1)^n\frac{6a+9b}{3^n} + (-1)^n\frac{3a+9b}{3^n}n$, $n \in \mathbb{N}$.

20. а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} + 9x_{n+1} + 20x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $9x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = (5a+b)(-4)^{n-1} - (4a+b)(-5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n = \frac{6a-9b}{3^n} + \frac{9b-3a}{3^n}n$, $n \in \mathbb{N}$.

21. а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 24x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $16x_{n+2} + 8x_{n+1} + x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n = \frac{b-6a}{40}(-4)^n + \frac{4a+b}{60}6^n$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $x_n=(-1)^{n+1}\dfrac{8a+16b}{4^n}+(-1)^n\dfrac{4a+16b}{4^n}n,\ n\in\mathbb{N}$.

22. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+2x_{n+1}-24x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad 16x_{n+2}-8x_{n+1}+x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{6a+b}{40}4^n+\dfrac{b-4a}{60}(-6)^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{8a-16b}{4^n}+\dfrac{16b-4a}{4^n}n,\ n\in\mathbb{N}$.

23. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}-10x_{n+1}+24x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad 25x_{n+2}+10x_{n+1}+x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{6a-b}{8}4^n+\dfrac{b-4a}{12}6^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=(-1)^{n+1}\dfrac{10a+25b}{5^n}+(-1)^n\dfrac{5a+25b}{5^n}n,\ n\in\mathbb{N}$.

24. а) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}+10x_{n+1}+24x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$;

б) $x_1=a,\quad x_2=b,\quad 25x_{n+2}-10x_{n+1}+x_n=0,\quad n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $x_n=\dfrac{-6a-b}{8}(-4)^n+\dfrac{4a+b}{12}(-6)^n,\ n\in\mathbb{N}$;

б) $x_n=\dfrac{10a-25b}{5^n}+\dfrac{25b-5a}{5^n}n,\ n\in\mathbb{N}$.

Завдання 15. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{3n+4}=\dfrac{2}{3}$.

Примітка. Запис $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, де $a=\text{const}\in\mathbb{R}$, означає, що послідовність $\{x_n\}$ *збіжна* і *має скінченну границю* $a\in\mathbb{R}$, тобто

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\quad\forall n>N\quad |x_n-a|<\varepsilon.$$

Розв'язання. Візьмемо довільне $\varepsilon>0$. Маємо:

$$|x_n-a|=\left|\frac{2n-5}{3n+4}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{3(2n-5)-2(3n+4)}{3(3n+4)}\right|=\left|\frac{-23}{3(3n+4)}\right|=$$

$$=\frac{23}{3(3n+4)}<\frac{23}{n}<\varepsilon\quad\forall n>\frac{23}{\varepsilon}.$$

Отже, $N=\left[\dfrac{23}{\varepsilon}\right]+1$. ►

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4}{4n+5}=\dfrac{3}{4}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-5}{5n+6}=\dfrac{4}{5}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-6}{6n+7}=\dfrac{5}{6}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-7}{7n+8}=\dfrac{6}{7}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-8}{8n+9}=\dfrac{7}{8}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-9}{9n+10}=\dfrac{8}{9}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{4n+5}=\dfrac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4}{5n+6}=\dfrac{3}{5}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-5}{6n+7}=\dfrac{2}{3}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-6}{7n+8}=\dfrac{5}{7}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-7}{8n+9}=\dfrac{3}{4}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-8}{9n+10}=\dfrac{7}{9}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{5n+6}=\dfrac{2}{5}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4}{6n+7}=\dfrac{1}{2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-5}{7n+8}=\dfrac{4}{7}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-6}{8n+9}=\dfrac{5}{8}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-7}{9n+10}=\dfrac{2}{3}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-8}{10n+11}=\dfrac{7}{10}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-5}{3n+4}=\dfrac{4}{3}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-6}{4n+5}=\dfrac{5}{4}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-7}{5n+6}=\dfrac{6}{5}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-8}{6n+7}=\dfrac{7}{6}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-9}{7n+8}=\dfrac{8}{7}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n-10}{8n+9}=\dfrac{9}{8}$.

Завдання 16. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n+1}=\infty$.

Примітка. Запис $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ означає, що

$$\forall \mathrm{E}>0\quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \ \forall n>N\quad x_n>\mathrm{E}.$$

Запис $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ означає, що

$$\forall \mathrm{E}>0\quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \ \forall n>N\quad x_n<-\mathrm{E}.$$

Запис $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$, тобто

$$\forall \mathrm{E}>0\quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \ \forall n>N\quad |x_n|>\mathrm{E}$$

(у такому випадку послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою*).

Розв'язання. Візьмемо довільне $\mathrm{E}>0$. Маємо:

$$|x_n|=|(-1)^n\sqrt{n+1}|=\sqrt{n+1}>\sqrt{n}>\mathrm{E}\quad \forall n>\mathrm{E}^2.$$

Отже, $N=[\mathrm{E}^2]+1$. ►

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\log_3(n+1)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2^{\sqrt[3]{n}}+n^4\right)=-\infty$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\ln n+n}=\infty$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+100\sqrt{n+4})=+\infty$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{1/2}\log_3(n^4+1)=-\infty$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(n^5+n+\sqrt[n]{5}\right)=\infty$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^{\sqrt[4]{n+1}}-n^5\right)=+\infty$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}-\sqrt[3]{n}(n+\ln n)^2=-\infty$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{n-1}n!+3^n\right)=\infty$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((2n)!!+(-1)^n\cos n\right)=+\infty$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}(-\sqrt[3]{n+\sqrt{n}+2^{-n}})=-\infty$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(6n^5-\cos^2 n\right)=\infty$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{n^9+n-\sin^2(n!)}=+\infty$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{1/5}(n^n+10^{-n})=-\infty$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}(5n-\sqrt{7n^3})^n=\infty$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((2n-1)!!-\sin n\right)=+\infty$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}(10-6^{\sqrt{5+\sqrt[4]{n}}})=-\infty$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt[n]{n^{n+1}+2}=\infty$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\log_5(n^4+3^{-n}+\sqrt[n]{3})=+\infty$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{2/3}(4^n+n^6)=-\infty$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\left(2^n+\cos\frac{1}{n}\right)=\infty$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\sqrt[n]{n^8+\ln n}=+\infty$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n-\operatorname{arctg} n)\sqrt{n+1}=-\infty$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n n!+n^4-\sin n\right)=\infty$.

Примітка. Далі будуть потрібні *важливі границі* послідовностей:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1),\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^\mu}{a^n}=0\quad(|a|>1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^\mu}=0\quad(\mu>0,\ 0<a\neq 1).$$

Завдання 17. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Розв'язання. а) З'ясуємо тип невизначеності $\left[(+\infty)-(+\infty)\right]$, помножимо і поділимо різницю квадратних коренів $\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-2n+3}$ на спряжений вираз $\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2-2n+3}$ та скористаємося формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Одержимо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)=\left[(+\infty)-(+\infty)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)\left(\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2-2n+3}\right)}{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2-2n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\cancel{n^2}+5n)-(\cancel{n^2}-2n+3)}{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2-2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n-3}{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2-2n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(7-\dfrac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\sqrt{1+\dfrac{5}{n}}+\cancel{n}\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}}=\frac{7}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{7}{2}.$$

б) З'ясуємо тип невизначеності $\left[(+\infty)-(+\infty)\right]$, помножимо і поділимо різницю кубічних коренів $\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt[3]{n^3-n^2}$ на спряжений вираз $\sqrt[3]{(n^3+5)^2}+\sqrt[3]{n^3+5}\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}$ та скористаємося формулою різниці кубів $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. Одержимо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)=\left[(+\infty)-(+\infty)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+5)^2}+\sqrt[3]{n^3+5}\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n^3+5)^2}+\sqrt[3]{n^3+5}\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+5)-(n^3-n^2)}{\sqrt[3]{(n^3+5)^2}+\sqrt[3]{n^3+5}\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+5)^2}+\sqrt[3]{(n^3+5)(n^3-n^2)}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(\frac{5}{n^2}+1\right)}{\cancel{n^2}\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^2}+\cancel{n^2}\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n^3}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}+\cancel{n^2}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n^2}+1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n^3}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: а) $7/2$; б) $1/3$. ▶

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(2n-1)^2+14n}-\sqrt{(4n-3)(n+2)+5}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+9n-1}-\sqrt[3]{n^3-2n^2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{2}{3}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(3n-2)(3n+7)+4}-\sqrt{(3n-1)^2+10n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-\sqrt[3]{n^3+7n+1}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{11}{6}$; б) $-\frac{2}{3}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(25n+1)(n-1)+8}-\sqrt{(5n-4)^2+13n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+7n+1}-\sqrt[3]{n^3+5n^2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{3}{10}$; б) $-\frac{5}{3}$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(6n-5)^2+11n}-\sqrt{(12n-7)(3n+1)+4}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2-1}-\sqrt[3]{n^3-5}\right)$.

Відповідь: а) $-10/3$; б) $4/3$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(7n-3)^2+16n}-\sqrt{(49n-40)(n+5)+9}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt[3]{n^3+8n^2+1}\right)$.

Відповідь: а) $-33/2$; б) $-8/3$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(20n-13)(n+2)+13n}-\sqrt{5(2n-1)^2+3}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5n^2-9}-\sqrt[3]{n^3+7}\right)$.

Відповідь: а) $3\sqrt{5}$; б) $\dfrac{5}{3}$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(4n-3)^2+5}-\sqrt{(2n-1)(8n-7)+6n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+7n+1}-\sqrt[3]{n^3-15n^2}\right)$.

Відповідь: а) -1; б) 5.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{25(2n-1)^2+6}-\sqrt{(10n+3)(10n-7)+4n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-7n^2}-\sqrt[3]{n^3+6n+5}\right)$.

Відповідь: а) $-\dfrac{16}{5}$; б) $-\dfrac{7}{3}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(2n+1)^2+15n}-\sqrt{(4n-1)(n+3)+10}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-10n+7}-\sqrt[3]{n^3-9n^2}\right)$.

Відповідь: а) 2; б) 3.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(3n-2)^2+11n}-\sqrt{(9n-4)(n+3)+7}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+10n^2-1}-\sqrt[3]{n^3-9n}\right)$.

Відповідь: а) -4; б) $\dfrac{10}{3}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(5n-4)(5n+3)+12}-\sqrt{(5n-2)^2+7n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-7n+1}-\sqrt[3]{n^3+5n^2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{4}{5}$; б) $-\frac{5}{3}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4(3n-2)^2+9n}-\sqrt{(6n-5)(6n+1)+13}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-5}-\sqrt[3]{n^3+6n}\right)$.

Відповідь: а) $-\frac{5}{4}$; б) $\frac{1}{3}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(49n-5)(n+1)+3}-\sqrt{(7n-4)^2+2n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+4n}-\sqrt[3]{n^3+4n^2-5}\right)$.

Відповідь: а) 7; б) $-\frac{4}{3}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5(2n-3)^2+7}-\sqrt{(4n-3)(5n+9)+19n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+7n^2}-\sqrt[3]{n^3-4n+6}\right)$.

Відповідь: а) $-5\sqrt{5}$; б) $\frac{7}{3}$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(4n-3)(4n+7)+1}-\sqrt{(4n-5)^2+6n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-7n+5}-\sqrt[3]{n^3+9n^2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{25}{4}$; б) -3.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(10n-3)^2+8n}-\sqrt{4(5n-1)(5n+1)+9}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+7n^2+4}-\sqrt[3]{n^3-2n}\right)$.

Відповідь: а) $-\frac{13}{5}$; б) $\frac{7}{3}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4(n-1)^2+9n}-\sqrt{(2n-1)(2n+5)+3}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-5n+4}-\sqrt[3]{n^3-3n^2}\right)$.

Відповідь: а) $-7/4$; б) 1.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9(n-2)^2+5}-\sqrt{(3n-1)(3n-2)+8}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+10n^2-3n}-\sqrt[3]{n^3+4}\right)$.

Відповідь: а) $-\frac{9}{2}$; б) $\frac{10}{3}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(25n-7)(n+1)+3}-\sqrt{(5n-3)^2+24n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-8n^2+5}-\sqrt[3]{n^3-2n^2}\right)$

Відповідь: а) $\frac{12}{5}$; б) -2.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(6n-1)^2+n}-\sqrt{(36n-19)(n+1)+15}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-\sqrt[3]{n^3-4n^2+7}\right)$.

Відповідь: а) $-\frac{7}{3}$; б) $\frac{13}{3}$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(7n-3)(7n+5)+9}-\sqrt{49(n-1)^2+42n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+4n-3}-\sqrt[3]{n^3+5n^2}\right)$.

Відповідь: а) 5; б) $-\frac{5}{3}$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{20(n-1)^2+17}-\sqrt{(2n-1)(10n-7)+4n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+6n^2}-\sqrt[3]{n^3-5n+8}\right)$.

Відповідь: а) $-\sqrt{5}$; б) 2.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(16n-15)(n+2)+7n}-\sqrt{4(2n-5)^2+9}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+9n-4}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

Відповідь: а) 13; б) $-\dfrac{1}{3}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(10n-3)^2+15n}-\sqrt{(20n-7)(5n+2)+8}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}-\sqrt[3]{n^3-10n^2+2}\right)$.

Відповідь: а) $-5/2$; б) 3.

Завдання 18. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(12k-5)(12k+7)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(12k-5)(12k+7)(12k+19)}$.

Розв'язання. а) Перетворимо суму:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(12k-5)(12k+7)}=\frac{1}{7\cdot19}+\frac{1}{19\cdot31}+\ldots+\frac{1}{(12n-5)(12n+7)}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{7}-\cancel{\frac{1}{19}}\right)+\frac{1}{12}\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\cancel{\frac{1}{31}}\right)+\ldots+\frac{1}{12}\left(\cancel{\frac{1}{12n-5}}-\frac{1}{12n+7}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12n+7}\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{12n+7}\right)=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{7}-0\right)=\dfrac{1}{84}$.

б) Перетворимо суму:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(12k-5)(12k+7)(12k+19)}=$$

$$=\frac{1}{7\cdot19\cdot31}+\frac{1}{19\cdot31\cdot43}+\ldots+\frac{1}{(12n-5)(12n+7)(12n+19)}=$$

$$=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{7\cdot 19}-\cancel{\frac{1}{19\cdot 31}}\right)+\frac{1}{24}\left(\cancel{\frac{1}{19\cdot 31}}-\cancel{\frac{1}{31\cdot 43}}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{24}\left(\cancel{\frac{1}{(12n-5)(12n+7)}}-\frac{1}{(12n+7)(12n+19)}\right)=$$

$$=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{7\cdot 19}-\frac{1}{(12n+7)(12n+19)}\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{24}\left(\frac{1}{7\cdot 19}-\frac{1}{(12n+7)(12n+19)}\right)=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{7\cdot 19}-0\right)=\frac{1}{3192}$.

Відповідь: а) $1/84$; б) $1/3192$. ▶

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{60}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-5)(9k+4)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-5)(9k+4)(9k+13)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{936}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-1)(5k+4)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-1)(5k+4)(5k+9)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{20}$; г) $\frac{1}{360}$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-2)(7k+5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-2)(7k+5)(7k+12)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{35}$; б) $\frac{1}{840}$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-1)(7k+6)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-1)(7k+6)(7k+13)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{42}$; б) $\frac{1}{1092}$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+4)(3k+7)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+4)(3k+7)(3k+10)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{21}$; б) $\frac{1}{420}$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+5)(3k+8)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+5)(3k+8)(3k+11)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{24}$; г) $\frac{1}{528}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-3)(7k+4)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-3)(7k+4)(7k+11)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{28}$; г) $\frac{1}{616}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(11k-5)(11k+6)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(11k-5)(11k+6)(11k+17)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{66}$; б) $\frac{1}{2244}$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-3)(5k+2)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-3)(5k+2)(5k+7)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{10}$; г) $\frac{1}{140}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-4)(7k+3)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-4)(7k+3)(7k+10)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{21}$; б) $\frac{1}{420}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)(4k+7)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{168}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-4)(9k+5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-4)(9k+5)(9k+14)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{45}$; б) $\frac{1}{1260}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-3)(9k+6)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-3)(9k+6)(9k+15)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{54}$; б) $\frac{1}{1620}$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k+2)(5k+7)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k+2)(5k+7)(5k+12)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{35}$; г) $\frac{1}{840}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k+4)(5k+9)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k+4)(5k+9)(5k+14)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{45}$; б) $\frac{1}{260}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k+2)(7k+9)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k+2)(7k+9)(7k+16)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{63}$; б) $\frac{1}{2016}$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+7)(3k+10)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+7)(3k+10)(3k+13)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{30}$; б) $\frac{1}{780}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k+7)(4k+11)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k+7)(4k+11)(4k+15)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{44}$; б) $\frac{1}{1320}$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-5)(7k+2)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-5)(7k+2)(7k+9)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{14}$; б) $\frac{1}{252}$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-2)(5k+3)(5k+8)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{1}{240}$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-1)(9k+8)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(9k-1)(9k+8)(9k+17)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{72}$; б) $\frac{1}{2448}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(11k-6)(11k+5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(11k-6)(11k+5)(11k+16)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{55}$; б) $\frac{1}{1760}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k+3)(7k+10)(7k+17)}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{70}$; б) $\frac{1}{2380}$.

Завдання 19. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{5}{12}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{100}+\sqrt{n}-5^{n+1}}{5^n-\sqrt[n]{n}+2}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+1)!+8}{5n!n+6}$.

Розв'язання. а) Знайдемо суму n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{5}{12}\right)^k=\left[b_1=-\frac{5}{12},\ q=-\frac{5}{12},\ S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\right]=$$

$$=\frac{-\frac{5}{12}\left(1-\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{5}{12}\right)}=\frac{-\frac{5}{12}\left(1-\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right)}{\frac{17}{12}}=-\frac{5}{17}\left(1-\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right).$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{5}{17}\left(1-\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right)=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ \ (|q|<1),\\ q=-\frac{5}{12},\ \ |q|=\frac{5}{12}<1\end{array}\right]=-\frac{5}{17}$.

б) Скористаємося деякими із важливих границь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}+\sqrt{n}-5^{n+1}}{5^n-\sqrt[n]{n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{5^n}\left(\frac{n^{100}}{5^n}+\frac{\sqrt{n}}{5^n}-5\right)}{\cancel{5^n}\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{5^n}+\frac{2}{5^n}\right)}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\mu}}{a^n}=0\ \ (|a|>1)\right]=\frac{0+0-5}{1-0+0}=\frac{-5}{1}=-5\,.$$

в) Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}q^n=0\ \ (|q|<1),\ q=-\frac{2}{3},\ |q|=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}<1\right]=\frac{0+1}{-2\cdot 0+3}=\frac{1}{3}\,.$$

г) Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)!+8}{5n!\,n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(3+\frac{8}{(n+1)!}\right)}{n!\,n\left(5+\frac{6}{n!\,n}\right)}=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)}{n!\,n}=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}\,.$$

Відповідь: а) $-\frac{5}{17}$; б) -5; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{3}{5}$. ►

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{100}-4^n+\cos n}{4^{n+1}-3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^{n-2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

Відповідь: а) $-\frac{2}{5}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) 27; г) 0.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{5}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+\sqrt[n]{5}}{\sin(n!)-3^n+10}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!n^2}{(n+3)!}$.

Відповідь: а) $-\frac{2}{7}$; б) -9; в) $-\frac{1}{5}$; г) 7.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{7}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n+\cos^2 n-3n!}{7n!-2^{n+3}+\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+4}-2^n}{3^{n-1}+2^{n-3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

Відповідь: а) $-2/9$; б) $-3/7$; в) 243; г) 3.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{2}{9}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n!-5^n+\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{5^{n+2}+\sqrt[10]{n}-4n!}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^{n-2}}{7^{n-1}-2^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

Відповідь: а) $-2/11$; б) $-7/4$; в) $1/7$; г) 0.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+1}-\sqrt[n]{n^2}+\arccos(1/n)}{\sin n-3\cdot 7^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-2}+5^{n+2}}{5^{n-1}-3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3}{7}$; б) $-\dfrac{7}{3}$; в) 125; г) 1.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\sqrt{n}-7\cdot 6^n+n\arcsin(1/n)}{6^{n+1}-n^{20}+15}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}+7^{n-2}}{3^{n+2}-7^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+2)-(n-1)!}{(n-1)!(1-n^2)+n!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3}{8}$; б) $-\dfrac{7}{6}$; в) $-\dfrac{1}{343}$; г) -1.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{3}{7}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+10n!-\sqrt[3]{n^{100}}}{3n!-5^{n+1}+\operatorname{arctg}(n+1)}\dfrac{10}{3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+2}-3^{n-2}}{4^{n-1}+3^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot n!-(n-1)!(n-1)}{(n+1)!+3\cdot n!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3}{10}$; б) $\dfrac{10}{3}$; в) 64; г) 0.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{3}{8}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n!-\sqrt[n]{n^{100}}+\cos\left(\sqrt[n]{n^{10}+\ln n}\right)}{\operatorname{arctg} n-9n!}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+2}-7^{n-1}}{7^{n-2}+5^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)!-(3n-1)!}{(3n)!n-(3n-1)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3}{11}$; б) $-\dfrac{4}{9}$; в) -7; г) 3.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-\sqrt[n]{n}+\ln n}{10-7n^2+\arcsin(3+n^{20})}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-3}+9^{n-1}}{9^{n+1}-2^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!-(2n-1)!}{(2n-1)!3n+(2n)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3}{13}$; б) $-\dfrac{6}{7}$; в) $\dfrac{1}{81}$; г) $\dfrac{2}{5}$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n^n)-4n^3+\sqrt[n]{7}}{5n^3-\cos(n^n)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-3}-8^{n+1}}{3^{n+2}+8^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)!-(n+5)!}{(n+6)!n}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{4}{9}$; б) $-\dfrac{4}{5}$; в) -64; г) 1.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{4}{7}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(n!)-4n!+9^n}{8n!+\cos(2^n)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n-10^{n+1}}{7^{n-1}+10^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!(n+1)^2}{(2n-1)!-(2n+1)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{4}{11}$; б) $-\dfrac{1}{2}$; в) -100; г) $-\dfrac{1}{4}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{4}{9}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n-8^n+\operatorname{arcctg}(n^9)}{5\cdot 2^{3n}+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-2}+10^{n-3}}{10^{n+1}-3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n-1)-(n+1)!n}{(n+2)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{4}{13}$; б) $-\dfrac{1}{5}$; в) 10^{-4}; г) -1.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{5}{6}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^{n+1}-\operatorname{arcctg}(n^2)}{\sqrt[n]{n}+2^{n+2}\cdot 3^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n-9^{n+1}}{9^{n-1}+7^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\big((2n-1)!-(2n+1)!\big)}{(2n)!-(2n+2)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{5}{11}$; б) $\dfrac{3}{2}$; в) -81; г) $\dfrac{1}{2}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{5}{7}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{5n}\cdot 2^n-\sin(\sqrt{n})}{\sqrt[n]{n}-2^{n+3}+\ln(n^4)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+3}-9^{n+2}}{5^{n-1}-9^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!^2-(n-1)!(n+1)!}{(n+1)!^2}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{5}{12}$; б) $-\dfrac{1}{8}$; в) 9; г) 0.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{5}{8}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n\operatorname{arctg}n-n^{10}}{\operatorname{arctg}^2 n-2^n\cdot 5^{n+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+2}+10^{n-2}}{7^{n-2}+10^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)!\,n-(3n+1)!\,n}{(3n+3)!-(3n+2)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{5}{13}$; б) $-\dfrac{\pi}{10}$; в) $\dfrac{1}{1000}$; г) $\dfrac{1}{3}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{5}{9}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n-3^n\cdot\sqrt[n]{7n^8}}{3^n\operatorname{arcctg}n-3^{n+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7\cdot 9^{n+1}-9\cdot 7^{n-1}}{9\cdot 7^{n+1}+7\cdot 9^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!\,n-(2n+1)!}{2n(2n+1)!-(2n+2)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{5}{14}$; б) $\dfrac{1}{3}$; в) 81; г) $\dfrac{1}{2}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{6}{7}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}+4n^3-\sqrt[n]{n^3}}{\sin n-5n^3+\operatorname{arcctg}(n^3+1)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+3}-11^n}{3\cdot 11^{n-1}+2^{n-3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n-(n-1)!(2n+1)}{n!(2n-1)-(n-1)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{6}{13}$; б) $-\dfrac{4}{5}$; в) $-\dfrac{11}{3}$; г) $\dfrac{1}{2}$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{7}{8}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n\cdot n!+\sin^n(\pi/3)}{\cos^n(\pi/3)-(n+1)!}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}+11^{n-1}}{3^{n-1}+2\cdot 11^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n(2n)!!-(2n-2)!!}{(2n+2)!!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{7}{15}$; б) -4; в) $\dfrac{1}{242}$; г) $\dfrac{3}{2}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{7}{9}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2-\ln n+n\sqrt{n+3}}{(n-\ln n)^2+\sin(\ln n)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 11^{n}-5^{n-1}}{11^{n+1}-5^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!-(2n+1)!}{(2n+3)!-(2n-1)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{7}{16}$; б) 10; в) $\dfrac{5}{11}$; г) 1.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{7}{10}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}-3(n+2)!}{(2n+1)^2 n!+17}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 11^{n-1}-7^{n+1}}{7^{n}+11^{n-2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!n!-(2n)!(n-1)!}{n!(2n-1)!n^2}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{7}{17}$; б) $-\dfrac{3}{4}$; в) 22; г) 4.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4\operatorname{arctg}n-n^3\cdot\sqrt[n]{n}}{(2n+1)^4+\sqrt{n}}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+3}-5\cdot 14^{n}}{2\cdot 14^{n+1}+3^{n-1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!-(2n+2)!}{(2n+3)!+(2n+1)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{8}{17}$; б) $\dfrac{\pi}{32}$; в) $-\dfrac{5}{28}$; г) 1.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{9}{10}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100-7^{n}\operatorname{arctg}n+\sin n}{7^{n+1}+\sqrt[n]{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^{n+2}+10^{n-1}}{9^{n+3}-10^{n+3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)!-(3n-2)!}{(3n+1)!-(3n)!}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{9}{19}$; б) $-\dfrac{\pi}{14}$; в) -10^{-4}; г) 0.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{2}{11}\right)^{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{10}-10^{n}+\cos^{n}n}{10^{n-1}n\sin(2/n)+\sqrt[n]{10}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+5}-15^{n-1}}{15^{n-2}+2^{n+3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n+3)!-(5n+2)!}{(5n+1)!n^2}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{2}{13}$; б) -5; в) -15; г) 25.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-\dfrac{3}{11}\right)^k$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^4 n-4^{n-1}+n^4}{4^{n+1}+\operatorname{arctg}^4 n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7\cdot 10^{n-2}-11^{n+3}}{10^{n+1}+5\cdot 11^{n+2}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(7n+2)!-(7n+1)!}{(7n-1)!n^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3}{14}$; б) $-\dfrac{1}{16}$; в) $-\dfrac{11}{5}$; г) 343.

Завдання 20. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n+3}{\sqrt[5]{2n^{10}+7k^3+4}}$.

Примітка. Нагадаємо *теорему про затиснуту послідовність*: якщо

$$x_n \le z_n \le y_n \quad \forall n \ge n_0 \ \text{ і } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

то й $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Розв'язання. Знайдемо найменший і найбільший доданки та оцінимо суму:

$$\frac{n(n+3)}{\sqrt[5]{2n^{10}+7n^3+4}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n+3}{\sqrt[5]{2n^{10}+7k^3+4}} \le \frac{n(n+3)}{\sqrt[5]{2n^{10}+11}}.$$

Оскільки границі лівого й правого дробів рівні:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+3)}{\sqrt[5]{2n^{10}+7n^3+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n^2}\sqrt[5]{2+\frac{7}{n^7}+\frac{4}{n^{10}}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+3)}{\sqrt[5]{2n^{10}+11}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n^2}\sqrt[5]{2+\frac{11}{n^{10}}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}},$$

тоді за теоремою про затиснуту послідовність

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3}{\sqrt[5]{2n^{10}+7k^3+4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$. ►

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2n+7}{\sqrt[3]{5n^6+3k^2+4}}$. Відповідь: $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{7n+2}{\sqrt[4]{3n^8+4k^3+5}}$. Відповідь: $\frac{7}{\sqrt[4]{3}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3n+4}{\sqrt[5]{2n^{10}+7k^3+4}}$. Відповідь: $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{4n+3}{\sqrt[6]{5n^{12}+2k^5+3}}$. Відповідь: $\frac{4}{\sqrt[6]{5}}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{5n+2}{\sqrt[3]{3n^6+4k^2+7}}$. Відповідь: $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2n+5}{\sqrt[4]{4n^8+7k^3+2}}$. Відповідь: $\sqrt{2}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{8n+9}{\sqrt[5]{7n^{10}+4k^3+3}}$. Відповідь: $\frac{8}{\sqrt[5]{7}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{9n+8}{\sqrt[6]{2n^{12}+3k^5+4}}$. Відповідь: $\frac{9}{\sqrt[6]{2}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3n+5}{\sqrt[3]{4n^6+7k^2+2}}$. Відповідь: $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{5n+3}{\sqrt[4]{5n^8+2k^3+7}}$. Відповідь: $\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{7n+2}{\sqrt[5]{4n^{10}+3k^3+1}}$. Відповідь: $\frac{7}{\sqrt[5]{4}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2n+7}{\sqrt[6]{3n^{12}+8k^5+4}}$. Відповідь: $\dfrac{2}{\sqrt[6]{3}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4n+3}{\sqrt[3]{7n^{6}+2k^2+5}}$. Відповідь: $\dfrac{4}{\sqrt[3]{7}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3n+4}{\sqrt[4]{2n^{8}+7k^3+3}}$. Відповідь: $\dfrac{3}{\sqrt[4]{2}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{8n+7}{\sqrt[5]{3n^{10}+k^3+2}}$. Відповідь: $\dfrac{8}{\sqrt[5]{3}}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{7n+8}{\sqrt[6]{8n^{12}+4k^5+5}}$. Відповідь: $\dfrac{7}{\sqrt[6]{8}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{9n+2}{\sqrt[3]{2n^{6}+5k^2+3}}$. Відповідь: $\dfrac{9}{\sqrt[3]{2}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2n+9}{\sqrt[4]{7n^{8}+3k^3+4}}$. Відповідь: $\dfrac{2}{\sqrt[4]{7}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3n+8}{\sqrt[5]{4n^{10}+2k^3+1}}$. Відповідь: $\dfrac{3}{\sqrt[5]{4}}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{8n+3}{\sqrt[6]{2n^{12}+5k^5+4}}$. Відповідь: $\dfrac{8}{\sqrt[6]{2}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{5n+4}{\sqrt[3]{9n^{6}+2k^2+7}}$. Відповідь: $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4n+5}{\sqrt[4]{3n^{8}+8k^3+1}}$. Відповідь: $\dfrac{4}{\sqrt[4]{3}}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{7n+12}{\sqrt[5]{2n^{10}+7k^3+4}}$. Відповідь: $\dfrac{7}{\sqrt[5]{2}}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{12n+7}{\sqrt[6]{5n^{12}+2k^5+3}}$. Відповідь: $\dfrac{12}{\sqrt[6]{5}}$.

Завдання 21. Застосовуючи теорему Вейєрштрасса, довести, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{2^n}=0$.

Примітка. Нагадаємо формулювання *теореми Вейєрштрасса*: якщо послідовність $\{x_n\}$ неспадна й обмежена зверху (або незростаюча й обмежена знизу), то вона збіжна.

Розв'язання. а) Позначимо $x_n=\frac{2^n}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$. Перевіримо виконання умов теореми Вейєрштрасса:

1) $x_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$, а отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена знизу (числом 0);

2) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\le 1\quad\forall n\in\mathbb{N}$, а отже, послідовність $\{x_n\}$ незростаюча ($x_n\downarrow$).

Зазначимо, що умову 2) можна замінити на таку:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{2^n}{n!}=\frac{2^{n+1}-2^n(n+1)}{(n+1)!}=\frac{2^n(1-n)}{(n+1)!}\le 0\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

звідки знову випливає, що $x_n\downarrow$.

За теоремою Вейєрштрасса послідовність $\{x_n\}$ збіжна. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Знайдемо a:

$$x_{n+1}=\frac{2}{n+1}\cdot x_n,\quad \lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n,\quad a=0\cdot a,\quad a=0.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

б) Позначимо $x_n=\frac{n^{100}}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$. Перевіримо виконання умов теореми Вейєрштрасса:

1) $x_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$, а отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена знизу (числом 0);

2) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{10}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}$, звідки $\frac{x_{n+1}}{x_n}\le 1\ \forall n\ge n_0$, а отже, при $n\ge n_0$ послідовність $\{x_n\}$ незростаюча ($x_n\downarrow$ при $n\ge n_0$).

За теоремою Вейєрштрасса послідовність $\{x_n\}$ збіжна. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Знайдемо a:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} x_n\,, \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n\,,$$

$$a = \frac{1}{2}\cdot a\,, \quad a = 0\,.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{2^n} = 0$. ►

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n-1)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^n} = 0$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{4^n} = 0$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{(2n-1)!!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{5^n} = 0$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{(2n)!!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{6^n} = 0$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^n n!}{(2n-1)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^6}{7^n} = 0$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n n!}{(2n)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^7}{8^n} = 0$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8^n}{(2n+1)!!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^8}{9^n} = 0$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9^n}{(2n+2)!!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^9}{10^n} = 0$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n (n+1)!}{(2n+3)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{11^n} = 0$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{11^n (n-1)!}{(2n+2)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{11}}{12^n} = 0$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{26^n (n!)^3}{(3n-2)!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = 0$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25^n(n!)^3}{(3n-1)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{3^n}=0$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{24^n(n!)^3}{(3n)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{4^n}=0$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{23^n(n!)^3}{(3n+1)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6}{5^n}=0$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{22^n(n!)^3}{(3n+2)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7}{6^n}=0$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{21^n(n!)^2}{(3n-2)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^8}{7^n}=0$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{20^n(n!)^2}{(3n-1)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^9}{8^n}=0$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19^n(n!)^2}{(3n)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{10}}{9^n}=0$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19^n(n!)^2}{(3n+1)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{11}}{10^n}=0$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{18^n(n!)^2}{(3n+2)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{12}}{11^n}=0$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{17^n n!}{(3n-2)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{13}}{12^n}=0$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16^n n!}{(3n-1)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{14}}{13^n}=0$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15^n n!}{(3n)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{15}}{14^n}=0$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{14^n n!}{(3n+1)!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{16}}{15^n}=0$.

Завдання 22. Знайти границю послідовності, задану рекурентним співвідношенням:

$$x_1\in(1;2),\quad x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язання. Проведемо такі міркування (рис. 12):

1) побудуємо графік функції $y=x^2-2x+2$ (парабола) і пряму $y=x$;

2) позначимо кілька перших членів послідовності $\{x_n\}$.

Звідси випливають такі припущення:

1) $1<x_n<2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$; 2) $x_n\downarrow$ (точніше, $x_n\downarrow\downarrow$); 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

Доведемо їх.

1) Покажемо, що $1<x_n<2 \ \forall n\in\mathbb{N}$, за допомогою методу математичної індукції. При $n=1$ (база індукції) нерівність виконується, оскільки $1<x_1<2$ за умовою задачі. Припустимо (крок індукції), що нерівність виконується для $n\in\mathbb{N}$, і доведемо її для $n+1$, тобто $1<x_{n+1}<2$. Маємо:

$$1<x_n<2, \quad 0<x_n-1<1, \quad 0<(x_n-1)^2<1, \quad 1<(x_n-1)^2+1<2,$$

звідки $1<x_{n+1}<2$, а отже, нерівність $1<x_n<2$ справджується для всіх $n\in\mathbb{N}$.

2) Покажемо, що $x_n\downarrow$ (і навіть $x_n\downarrow\downarrow$). З урахування щойно доведеного маємо:

$$x_{n+1}-x_n=\left(x_n^2-2x_n+2\right)-x_n=x_n^2-3x_n+2=\underbrace{(x_n-1)}_{>0}\underbrace{(x_3-2)}_{<0}<0 \ \ \forall n\in\mathbb{N},$$

а отже, послідовність $\{x_n\}$ спадна.

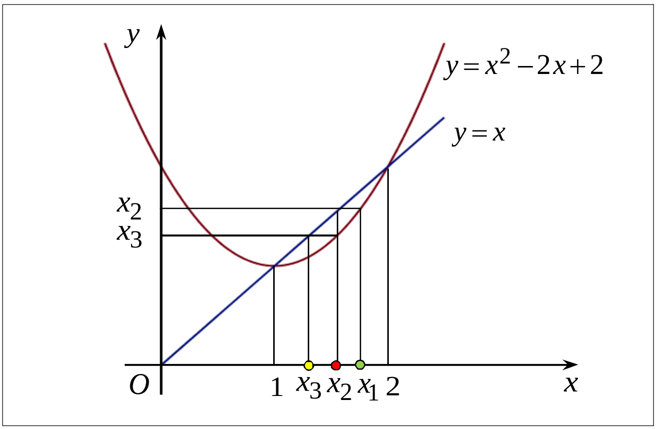


Рис. 12. Завдання 22

3) Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. За теоремою Вейєрштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Знайдемо a:

$$x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2,$$

$$a=a^2-2a+2,\quad a^2-3a+2=0,\quad \left[\begin{array}{l} a=1; \\ a=2-\text{сторонній корінь.}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. ►

1. $x_1=2,\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

2. $x_1=3,\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

3. $x_1=1,\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

4. $x_1\in(2;3),\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

5. $x_1\in(1;2),\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

6. $x_1\in(3;+\infty),\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

7. $x_1\in(-\infty;1),\quad x_{n+1}=x_n^2-4x_n+6,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

8. $x_1=3,\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

9. $x_1=4,\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

10. $x_1=2,\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

11. $x_1\in(3;4),\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

12. $x_1\in(2;3),\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

13. $x_1\in(4;+\infty),\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

14. $x_1\in(-\infty;2),\quad x_{n+1}=x_n^2-6x_n+12,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

15. $x_1=4,\quad x_{n+1}=x_n^2-8x_n+20,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

16. $x_1=5,\quad x_{n+1}=x_n^2-8x_n+20,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=5$.

17. $x_1=3,\quad x_{n+1}=x_n^2-8x_n+20,\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=5$.

18. $x_1\in(4;5),\quad x_{n+1}=x_n^2-8x_n+20,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

19. $x_1\in(3;4),\quad x_{n+1}=x_n^2-8x_n+20,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

20. $x_1\in(5;+\infty),\quad x_{n+1}=x_n^2-8x_n+20,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

21. $x_1\in(-\infty;3),\quad x_{n+1}=x_n^2-7x_n+12,\ n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

22. $x_1\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right],\quad x_{n+1}=x_n^2+\frac{1}{4},\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

23. $x_1\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right],\quad x_{n+1}=x_n^2+\frac{1}{4},\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

24. $x_1\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right],\quad x_{n+1}=x_n^2+\frac{1}{4},\quad n\in\mathbb{N}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

Завдання 23. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n^4+n^2+5}{9n^4-3n+1}\right)^{(2n-3)(n-4)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+5}{\ln n+3}\right)^{\ln(2n^3+7)}$.

Примітка. Границю $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}$, де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, називають *невизначеністю типу* $[1^\infty]$. Для розкриття (тобто обчислення) її виконують такі дії:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=[1^\infty]=e^A,\ \text{де}\ A=\lim_{n\to\infty}(x_n-1)y_n.$$

Розв'язання. а) Знайдемо границі основи й показника степеня:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^4+n^2+5}{9n^4-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(9+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^4}\right)}{n^4\left(9-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{9-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=$$

$$=\frac{9+0+0}{9-0+0}=1,\qquad \lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}(2n-3)(n-4)=+\infty,$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^4+n^2+5}{9n^4-3n+1}\right)^{(2n-3)(n-4)}=[1^\infty]=e^A,$$

де $A=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1)y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9n^4+n^2+5}{9n^4-3n+1}-1\right)(2n-3)(n-4)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+4)(2n-3)(n-4)}{9n^4-3n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\cancel{n}\left(2-\frac{3}{n}\right)\cancel{n}\left(1-\frac{4}{n}\right)}{\cancel{n^4}\left(9-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}=\frac{1\cdot 2\cdot 1}{9}=\frac{2}{9}.$$

б) Знайдемо границю основи степеня:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+5}{\ln n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\ln n}\left(1+\frac{5}{\ln n}\right)}{\cancel{\ln n}\left(1+\frac{3}{\ln n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{\ln n}}{1+\frac{5}{\ln n}}=\frac{1+0}{1+0}=1,$$

а також границю показника степеня:

$$\lim_{n\to\infty}\ln(2n^3+7)=+\infty,$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n+5}{\ln n+3}\right)^{\ln(2n^3+7)}=[1^\infty]=e^A,$$

де

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n+5}{\ln n+3}-1\right)\ln(2n^3+7)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln(2n^3+7)}{\ln n+3}=$$

$$=\left[\ln(2n^3+7)=\ln\left(n^3\left(2+\frac{7}{n^3}\right)\right)=3\ln n+\ln\left(2+\frac{7}{n^3}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(3\ln n+\ln\left(2+\frac{7}{n^3}\right)\right)}{\ln n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{\ln n}\left(3+\frac{1}{\ln n}\ln\left(2+\frac{7}{n^3}\right)\right)}{\cancel{\ln n}\left(1+\frac{3}{\ln n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(3+\frac{1}{\ln n}\ln\left(2+\frac{7}{n^3}\right)\right)}{1+\frac{3}{\ln n}}=\frac{2(3+0)}{1+0}=\frac{6}{1}=6.$$

Відповідь: а) $e^{2/9}$; б) e^{6}. ►

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3-2}\right)^{(4n-5)(2-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-1}{5n^2+6}\right)^{n^2-3\sqrt{n}+\frac{\ln^{200}n}{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+2}{\ln n+3}\right)^{\ln(6n^5+4)}$. Відповідь: а) e^{-4}; б) $e^{-7/5}$; в) e^{-5}.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-2}{n^3+n+1}\right)^{(5n+4)(3-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+5n-1}{7n^2-n+3}\right)^{2n+\frac{\sin^{100}n}{\sqrt{n}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+3}{\ln n+4}\right)^{\ln(7n^6+5)}$. Відповідь: а) e^{5}; б) $e^{12/7}$; в) e^{-6}.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-3n+1}{n^3+5}\right)^{(2n+5)(n-7)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-\sqrt{n}}{n^2+1}\right)^{n\sqrt{3n}+4\operatorname{arctg}^{50}n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+4}{\ln n+5}\right)^{\ln(8n^7+6)}$. Відповідь: а) e^{-6}; б) $e^{-\sqrt{3}}$; в) e^{-7}.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+5}{n^3-3n+1}\right)^{(5n-2)(2n-1)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2+1}{6n^2-5}\right)^{-\frac{2}{3}n^2+\sqrt[n]{n}+\cos^{10}n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+5}{\ln n+6}\right)^{\ln(9n^8+7)}$. Відповідь: а) e^{30}; б) $e^{-2/3}$; в) e^{-8}.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+4}{n^3-3}\right)^{(3n-5)(9-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+9}{2n^3-n}\right)^{\sqrt{5}n^2-n\cos(n!)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+6}{\ln n+7}\right)^{\ln(10n^9+8)}$. Відповідь: а) e^{-3}; б) $e^{\sqrt{5}/2}$; в) e^{-9}.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-3}{n^3+n+4}\right)^{(6n+1)(10-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2-3}{4n^2-1}\right)^{(n+\ln n)(n-\operatorname{arctg}^{100}n)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+6}{\ln n+2}\right)^{\ln(5n^4+3)}$. Відповідь: а) e^{6}; б) $e^{-1/2}$; в) e^{16}.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+5n+1}{n^3-3}\right)^{(2n-3)(7-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4-\ln 2}{n^4+1}\right)^{(n+\sin n)(n^3-5n\sqrt[n]{n})}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+5}{\ln n+6}\right)^{\ln(4n^3+2)}$. Відповідь: а) e^{-10}; б) $\dfrac{1}{2e}$; в) e^{-3}.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-3}{n^3+5n+1}\right)^{(3n+2)(13-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^4-1}{3n^4+\ln 5}\right)^{(n^3+2)(\cos(n!)+2n)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+4}{\ln n+5}\right)^{\ln(3n^2+6)}$. Відповідь: а) e^{15}; б) $(5e)^{-2/3}$; в) e^{-2}.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-n+1}{n^3+n}\right)^{(3n+4)(4n-5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n\ln n+3}{4n\ln n+2}\right)^{n\sqrt{\ln n}\,(\sqrt[n]{n}+\sqrt{5\ln n})}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+3}{\ln n+4}\right)^{\ln(2n^6+5)}$. Відповідь: а) e^{-24}; б) $e^{\sqrt{5}/4}$; в) e^{-6}.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+2}{n^3-n+1}\right)^{(5n-4)(4n+5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n\sqrt{n}-5n}{7n\sqrt{n}+2n}\right)^{3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}\sin n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+7}{\ln n+3}\right)^{\ln(6n^5+4)}$. Відповідь: а) e^{20}; б) e^{-3}; в) e^{20}.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^3+3n-1}{n^3+4}\right)^{(2n-3)(3n+4)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n^3-2\sqrt{n}}{9n^3+7\sqrt{n}}\right)^{n^2\sqrt{n}+\ln^5 n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+6}{\ln n+7}\right)^{\ln(5n^4+3)}$. Відповідь: а) e^{18}; б) e^{-1}; в) e^{-4}.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^3+4}{n^3-3n-1}\right)^{(2n-5)(5n+3)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^4-n\sqrt{\pi}}{3n^4-2}\right)^{\operatorname{arctg}\sqrt{n}-n^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+5}{\ln n+6}\right)^{\ln(4n^3+7)}$. Відповідь: а) e^{30}; б) $e^{\sqrt{\pi}/3}$; в) e^{-3}.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^3-7n-2}{n^3+1}\right)^{(n-1)(5-2n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+3n}{2n^3-1}\right)^{\frac{n^2}{2}-n+\sqrt[n]{n}-5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+4}{\ln n+5}\right)^{\ln(3n^7+6)}$. Відповідь: а) e^{14}; б) $e^{3/4}$; в) e^{-7}.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+7n-2}\right)^{(3n+4)(4-5n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^{10}-3n}{4n^{10}+5n}\right)^{\sqrt{n}\cos(n!)+7n^9}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+8}{\ln n+4}\right)^{\ln(7n^6+5)}$. Відповідь: а) e^{105}; б) e^{-14}; в) e^{24}.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-6n+10}{n^3-1}\right)^{(2n+7)(n-5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^5+3n-9}{2n^5+n+4}\right)^{\frac{5n^4}{13}-7n+\sqrt[10]{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+7}{\ln n+8}\right)^{\ln(6n^5+4)}$. Відповідь: а) e^{-12}; б) $e^{5/13}$; в) e^{-5}.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{n^3+6n+5}\right)^{(2n+7)(5-2n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^5+3}{2n^5-1}\right)^{\frac{n^2(n^2-1)(n+\ln n-\sqrt[n]{n})}{5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+6}{\ln n+7}\right)^{\ln(5n^4+8)}$. Відповідь: а) e^{24}; б) $e^{2/5}$; в) e^{-4}.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-2n+7}{n^3-10}\right)^{(10-n)(2n+5)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^7-2\sqrt{n}}{3n^7+7\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^6(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})}{5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+5}{\ln n+6}\right)^{\ln(4n^8+7)}$. Відповідь: а) e^{4}; б) $e^{-3/5}$; в) e^{-8}.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-10}{n^3-2n+5}\right)^{(3-4n)(n-1)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n^3-8}{10n^3-3}\right)^{n\sqrt{n}\left(\frac{\operatorname{arctg} n}{n}-n\sqrt{n}\right)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+9}{\ln n+5}\right)^{\ln(8n^7+6)}$. Відповідь: а) e^{-8}; б) $e^{1/2}$; в) e^{28}.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-n+1}{n^3-1}\right)^{(5n+4)(2-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^7-2n}{5n^7+4n}\right)^{7n^6-\frac{\cos(\sqrt{n})}{2n}+10^{-n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+8}{\ln n+9}\right)^{\ln(7n^6+5)}$. Відповідь: а) e^{5}; б) $e^{-42/5}$; в) e^{-6}.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-2}{n^3+n+1}\right)^{(5n+4)(3-n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10^n+7}{10^n+3}\right)^{2^n(\sqrt[n]{7}-5^n+n^{3/2})}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+7}{\ln n+8}\right)^{\ln(6n^5+9)}$. Відповідь: а) e^5; б) e^{-4}; в) e^{-5}.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-3n+1}{n^3-5}\right)^{(n-7)(4-3n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3-2\sqrt[n]{n}}{5n^3+\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{n}-5n^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+6}{\ln n+7}\right)^{\ln(5n^9+8)}$. Відповідь: а) e^9; б) e^3; в) e^{-9}.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+5}{n^3-3n+1}\right)^{(5n-2)(2n-1)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^3-\sqrt[n]{2}}{6n^3-5\cdot\sqrt[n]{2}}\right)^{(7-n^2)(n+3)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+10}{\ln n+6}\right)^{\ln(9n^8+7)}$. Відповідь: а) e^{30}; б) $e^{-2/3}$; в) e^{32}.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-4n+7}{n^3-3}\right)^{(9-n)(2n+9)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3\cdot 2^n-1}{3\cdot 2^n+5}\right)^{10^{-n}+2^n+\ln n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+9}{\ln n+10}\right)^{\ln(8n^7+6)}$. Відповідь: а) e^8; б) e^{-2}; в) e^{-7}.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-3}{n^3-n+4}\right)^{(5n+1)(2n-7)}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+9}{4n-1}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n}\ln n-n+\cos(2^n)}{2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n+8}{\ln n+9}\right)^{\ln(7n^6+10)}$. Відповідь: а) e^{10}; б) $e^{-5/4}$; в) e^{-6}.

Завдання 24. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+5}\sum\limits_{k=1}^{3^n+10^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^3+n^{10}}\dfrac{1}{k}$.

Примітка. Для розв'язання знадобиться формула

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1),$$

де $\gamma = 0{,}5772\ldots$ – *стала Ейлера–Маскероні*, $o(1)$ – нескінченно мала послідовність.

Розв'язання. а) Застосуємо формулу для суми та виконаємо перетворення:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+5}\sum_{k=1}^{3^n+10^n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3^n+10^n)+\gamma+o(1)}{2n+5}=$$

$$=\left[\ln(3^n+10^n)=\ln\left(10^n\left(\frac{3^n}{10^n}+1\right)\right)=n\ln 10+\ln\left(\left(\frac{3}{10}\right)^n+1\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln 10+\ln\left(\left(\frac{3}{10}\right)^n+1\right)+\gamma+o(1)}{2n+5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left[\ln 10+\dfrac{\ln\left(\left(\frac{3}{10}\right)^n+1\right)+\gamma+o(1)}{n}\right]}{\cancel{n}\left(2+\frac{5}{n}\right)}=\frac{\ln 10+0}{2+0}=\frac{\ln 10}{2}=\ln\sqrt{10}\,.$$

б) Застосуємо формулу з примітки та виконаємо перетворення.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\ln n+5}\sum_{k=1}^{n^3+n^{10}}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^3+n^{10})+\gamma+o(1)}{2\ln n+5}=$$

$$=\left[\ln(n^3+n^{10})=\ln\left(n^{10}\left(\frac{1}{n^7}+1\right)\right)=10\ln n+\ln\left(\frac{1}{n^7}+1\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\ln n+\ln\left(\frac{1}{n^7}+1\right)+\gamma+o(1)}{2\ln n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\ln n}\left[10+\dfrac{\ln\left(\frac{1}{n^7}+1\right)+\gamma+o(1)}{n}\right]}{\cancel{\ln n}\left(2+\frac{5}{\ln n}\right)}=$$

$$=\frac{10+0}{2+0}=\frac{10}{2}=5\,.$$

Відповідь: а) $\ln\sqrt{10}$; б) 5. ►

1. а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}\sum_{k=1}^{4^n+5^n}\frac{1}{k}$; б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\ln n+3}\sum_{k=1}^{n^4+n^5}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 5}{2}$; б) $\frac{5}{2}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n+2}\sum\limits_{k=1}^{3^n+4^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5\ln n+2}\sum\limits_{k=1}^{n^3+n^4}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{2\ln 2}{5}$; б) $\frac{4}{5}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n+5}\sum\limits_{k=1}^{2^n+3^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^2+n^3}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 3}{4}$; б) $\frac{3}{4}$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+4}\sum\limits_{k=1}^{5^n+2^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3\ln n+4}\sum\limits_{k=1}^{n^5+n^2}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 5}{3}$; б) $\frac{5}{3}$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2}\sum\limits_{k=1}^{4^n+5^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3\ln n+2}\sum\limits_{k=1}^{n^4+n^5}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 5}{3}$; б) $\frac{5}{3}$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+5}\sum\limits_{k=1}^{3^n+4^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^3+n^4}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\ln 2$; б) 2.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n+4}\sum\limits_{k=1}^{2^n+3^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5\ln n+4}\sum\limits_{k=1}^{n^2+n^3}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 3}{5}$; б) $\frac{3}{5}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n+3}\sum\limits_{k=1}^{5^n+2^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4\ln n+3}\sum\limits_{k=1}^{n^5+n^2}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 5}{4}$; б) $\frac{5}{4}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+4}\sum\limits_{k=1}^{5^n+6^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3\ln n+4}\sum\limits_{k=1}^{n^5+n^6}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 6}{3}$; б) 2.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6n+1}\sum\limits_{k=1}^{4^n+5^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6\ln n+1}\sum\limits_{k=1}^{n^4+n^5}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 5}{6}$; б) $\frac{5}{6}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n+6}\sum\limits_{k=1}^{3^n+4^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5\ln n+6}\sum\limits_{k=1}^{n^3+n^4}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 4}{5}$; б) $\frac{4}{5}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n+5}\sum\limits_{k=1}^{6^n+3^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^6+n^3}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 6}{4}$; б) $\frac{3}{2}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n+3}\sum\limits_{k=1}^{5^n+6^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4\ln n+3}\sum\limits_{k=1}^{n^5+n^6}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 6}{4}$; б) $\frac{3}{2}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7n+6}\sum\limits_{k=1}^{4^n+5^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7\ln n+6}\sum\limits_{k=1}^{n^4+n^5}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 5}{7}$; б) $\frac{5}{7}$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6n+5}\sum\limits_{k=1}^{3^n+4^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^3+n^4}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n+4}\sum\limits_{k=1}^{6^n+3^n}\frac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5\ln n+4}\sum\limits_{k=1}^{n^6+n^3}\frac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 6}{5}$; б) $\frac{6}{5}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5n+6}\sum\limits_{k=1}^{7^n+8^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5\ln n+6}\sum\limits_{k=1}^{n^7+n^8}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3\ln 2}{5}$; б) $\dfrac{8}{5}$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{8n+5}\sum\limits_{k=1}^{6^n+7^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{8\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^6+n^7}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\ln 7}{8}$; б) $\dfrac{7}{8}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{7n+8}\sum\limits_{k=1}^{5^n+6^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{7\ln n+8}\sum\limits_{k=1}^{n^5+n^6}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\ln 6}{7}$; б) $\dfrac{6}{7}$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{6n+7}\sum\limits_{k=1}^{8^n+5^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{6\ln n+7}\sum\limits_{k=1}^{n^8+n^5}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\ln 5}{6}$; б) $\dfrac{5}{6}$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{6n+5}\sum\limits_{k=1}^{7^n+8^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{6\ln n+5}\sum\limits_{k=1}^{n^7+n^8}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\ln 2}{2}$; б) $\dfrac{4}{3}$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5n+8}\sum\limits_{k=1}^{6^n+7^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5\ln n+8}\sum\limits_{k=1}^{n^6+n^7}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\ln 7}{5}$; б) $\dfrac{7}{5}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{8n+7}\sum\limits_{k=1}^{5^n+6^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{8\ln n+7}\sum\limits_{k=1}^{n^5+n^6}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\ln 6}{8}$; б) $\dfrac{3}{4}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{7n+6}\sum\limits_{k=1}^{8^n+5^n}\dfrac{1}{k}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{7\ln n+6}\sum\limits_{k=1}^{n^8+n^5}\dfrac{1}{k}$.

Відповідь: а) $\frac{\ln 8}{7}$; б) $\frac{8}{7}$.

Завдання 25. Застосовуючи теорему Штольца, знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(5k-9)^{11}}{n^{12}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-3}}$,

Примітка. За *теоремою Штольца*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\left[y_n\uparrow\uparrow\underset{n\to\infty}{\to}+\infty\right]\overset{\text{Ш}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

(запис $y_n\uparrow\uparrow$ означає, що послідовність $\{y_n\}$ строго зростає, а літера Ш над знаком рівності свідчить про застосування теореми Штольца).

Розв'язання. а) Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(5k-9)^{11}}{n^{12}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(5k-9)^{11}}{n^{12}}=\left[\begin{array}{c}x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(5k-9)^{11},\\ y_n=n^{12}\uparrow\uparrow\underset{n\to\infty}{\to}+\infty\end{array}\right]\overset{\text{Ш}}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(5k-9)^{11}-\sum\limits_{k=1}^{n}(5k-9)^{11}}{(n+1)^{12}-n^{12}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5(n+1)-9\right)^{11}}{\left(\cancel{n^{12}}+C_{12}^{1}n^{11}+C_{12}^{2}n^{10}+\ldots+1\right)-\cancel{n^{12}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n-4)^{11}}{12n^{11}+66n^{10}+\ldots+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{11}\left(5-\frac{4}{n}\right)^{11}}{n^{11}\left(12+\frac{66}{n}+\ldots+\frac{1}{n^{11}}\right)}=\frac{5^{11}}{12}.$$

б) Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-3}}}{\sqrt{n}}=\left[\begin{array}{c}x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-3}},\\ y_n=\sqrt{n}\uparrow\uparrow\underset{n\to\infty}{\to}+\infty\end{array}\right]\overset{\text{Ш}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{5k-3}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{5k-3}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5(n+1)-3}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5n+2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{5n+2}\left((n+1)-n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{5n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{5+\frac{2}{n}}} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{\sqrt{5+0}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: а) $5^{11}/12$; б) $2/\sqrt{5}$. ►

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(9k-10)^3}{n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$.

Відповідь: а) $\frac{9^3}{4}$; б) $\sqrt{2}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(10k-9)^3}{n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{10^3}{4}$; б) $\sqrt{2}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(8k-9)^4}{n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Відповідь: а) $\frac{8^4}{5}$; б) $\sqrt{2}$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(9k-8)^4}{n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{9^4}{5}$; б) $\sqrt{2}$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(7k-8)^5}{n^6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$.

Відповідь: а) $7^5/6$; б) $\sqrt{2}$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(8k-7)^5}{n^6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $8^5/6$; б) $\sqrt{2}$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(6k-7)^6}{n^7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k-1}}$.

Відповідь: а) $\frac{6^6}{7}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(7k-6)^6}{n^7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) 7^5; б) $2/\sqrt{3}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(5k-6)^7}{n^8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k-2}}$.

Відповідь: а) $\frac{5^7}{8}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(6k-5)^7}{n^8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{6^7}{8}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-5)^8}{n^9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$.

Відповідь: а) $\frac{4^8}{9}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(5k-4)^8}{n^9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{5^8}{9}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(3k-4)^9}{n^{10}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k-3}}$.

Відповідь: а) $\frac{3^9}{10}$; б) 1.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-3)^9}{n^{10}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n-3}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{4^9}{10}$; б) 1.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(8k-9)^3}{n^4}$. б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k-1}}$.

Відповідь: а) $\frac{8^3}{4}$; б) 1.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(9k-8)^3}{n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{9^3}{4}$; б) 1.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(7k-8)^4}{n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k+1}}$

Відповідь: а) $\frac{7^4}{5}$; б) 1.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(8k-7)^4}{n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{8^4}{5}$; б) 1.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(6k-7)^5}{n^6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k+3}}$.

Відповідь: а) 6^4; б) 1.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(7k-6)^5}{n^6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+3}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{7^5}{6}$; б) 1.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(5k-6)^6}{n^7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-1}}$.

Відповідь: а) $\frac{5^6}{7}$; б) 1.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(6k-5)^6}{n^7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5n-1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{6^6}{7}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(4k-5)^7}{n^8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5k-2}}$.

Відповідь: а) $\frac{4^7}{8}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(5k-4)^7}{n^8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5n-2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Відповідь: а) $\frac{5^7}{8}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Завдання 26. Користуючись критерієм Коші, довести збіжність послідовності $\{x_n\}$:

а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos(k!)}{9^n+\sqrt{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(\sqrt{k})}{(9k-4)(9k+5)},\ n\in\mathbb{N}$.

Примітка. За *критерієм Коші*, послідовність $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ збіжна тоді і тільки тоді, коли вона *фундаментальна*, тобто

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall n>N\quad\forall p\in\mathbb{N}\qquad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

Доведення. а) Візьмемо довільне $\varepsilon>0$. Маємо:

$$|x_{n+p}-x_n|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n+p}\frac{\cos(k!)}{9^n+\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k!)}{9^n+\sqrt{k}}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos(k!)}{9^n+\sqrt{k}}\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\cos(k!)}{9^n+\sqrt{k}}\right|=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\cos(k!)|}{9^n+\sqrt{k}}\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{9^n}=\left[S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\right]=\frac{\frac{1}{9^{n+1}}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^p\right)}{1-\frac{1}{9}}=$$

$$=\frac{1}{8\cdot 9^n}\left(1-\frac{1}{9^p}\right)<\frac{1}{9^n}<\varepsilon\quad\forall n>\log_9\frac{1}{\varepsilon}\quad\forall p\in\mathbb{N}.$$

Звідси $N = \max\left(\left[\log_9 \frac{1}{\varepsilon}\right]; 0\right) + 1$. Тоді за критерієм Коші $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

б) Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Маємо

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin(\sqrt{k})}{(9k-4)(9k+5)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{(9k-4)(9k+5)}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(\sqrt{k})}{(9k-4)(9k+5)}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\sin(\sqrt{k})}{(9k-4)(9k+5)}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\left|\sin(\sqrt{k})\right|}{(9k-4)(9k+5)} \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(9k-4)(9k+5)} = \left[\frac{1}{(9k-4)(9k+5)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9k-4} - \frac{1}{9k+5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9(n+1)-4} - \frac{1}{9(n+p)-4}\right) < \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9(n+1)-4} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9n+5} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\forall n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Звідси $N = [1/\varepsilon] + 1$. Тоді за критерієм Коші $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ▶

1. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^2)}{3^k + \sqrt{k+1}}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{(3k-1)(3k+2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^3)}{4^k + \sqrt{k+2}}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{(3k+2)(3k+5)}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^4)}{5^k + \sqrt{k+3}}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{(4k-1)(4k+3)}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^5)}{6^k + \sqrt{k+4}}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{(4k+3)(4k+7)}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^6)}{7^k + \sqrt{k+5}}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{(5k-1)(5k+4)}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^7)}{8^k + \sqrt{k+6}}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{(5k+4)(5k+9)}$, $n \in \mathbb{N}$.

7. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k^2)}{3^k+\ln k},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{(6k-1)(6k+5)},\ n\in\mathbb{N}$.

8. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k^3)}{4^k+\ln k},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{(6k+5)(6k+11)},\ n\in\mathbb{N}$.

9. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k^4)}{5^k+\ln k},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{(7k-2)(7k+5)},\ n\in\mathbb{N}$.

10. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k^5)}{6^k+\ln k},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{(7k+5)(7k+12)},\ n\in\mathbb{N}$.

11. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k^6)}{7^k+\ln k},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{(8k-3)(8k+5)},\ n\in\mathbb{N}$.

12. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k^7)}{8^k+\ln k},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{(8k+5)(8k+13)},\ n\in\mathbb{N}$.

13. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(\ln k)}{3^k+\sqrt[4]{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{(9k-5)(9k+4)},\ n\in\mathbb{N}$.

14. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\ln k)}{4^k+\sqrt[5]{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{(9k+4)(9k+13)},\ n\in\mathbb{N}$.

15. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(\ln k)}{5^k+\sqrt[6]{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{(10k-3)(10k+7)},\ n\in\mathbb{N}$.

16. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\ln k)}{6^k+\sqrt[7]{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{(10k+7)(10k+17)},\ n\in\mathbb{N}$.

17. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(\ln k)}{7^k+\sqrt[8]{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{(3k-2)(3k+1)},\ n\in\mathbb{N}$.

18. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(\ln k)}{8^k+\sqrt[9]{k}},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{(3k+1)(3k+4)},\ n\in\mathbb{N}$.

19. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k!)}{3^k+k^2},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k^k)}{(4k-1)(4k+3)},\ n\in\mathbb{N}$.

20. а) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{4^k+k^3},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k^k)}{(4k+3)(4k+7)},\ n\in\mathbb{N}$.

21. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k!)}{5^k + k^4}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k^k)}{(5k-2)(5k+3)}$, $n \in \mathbb{N}$.

22. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k!)}{6^k + k^5}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k^k)}{(5k+3)(5k+8)}$, $n \in \mathbb{N}$.

23. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k!)}{7^k + k^6}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k^k)}{(6k-5)(6k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

24. а) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k!)}{8^k + k^7}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k^k)}{(6k+1)(6k+7)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Завдання 27. Знайти $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, якщо:

а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. а) При $n = 2k, k = 1, 2, \ldots$, маємо підпослідовність

$$x_{2k} = (-1)^{2k-1}\left(2 + \frac{3}{2k}\right) = -\left(2 + \frac{3}{2k}\right) \uparrow \underset{k\to\infty}{\to} -2;\ x_2 = -\frac{7}{2}.$$

При $n = 2k-1, k = 1, 2, \ldots$, маємо підпослідовність

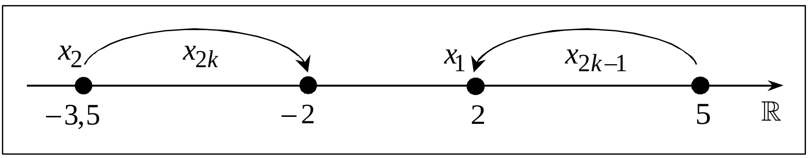
$$x_{2k-1} = (-1)^{2k-2}\left(2 + \frac{3}{2k-1}\right) = 2 + \frac{3}{2k-1} \downarrow \underset{k\to\infty}{\to} 2;\ x_1 = 5.$$

Отже, множина *часткових границь* $X = \{-2; 2\}$. Тоді

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \min X = -2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$ (*нижня границя* послідовності $\{x_n\}$),

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \max X = 2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}$ (*верхня границя* послідовності $\{x_n\}$).

Знайдемо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 5 = x_1 = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = -3{,}5 = x_2 = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.



б) При $n = 3k, k = 1, 2, \ldots$, маємо підпослідовність

$$x_{3k}=\frac{3k-1}{3k+1}\cos\frac{2\pi\cdot 3k}{3}=\frac{3k-1}{3k+1}\cos 2\pi k=1-\frac{2}{3k+1}\uparrow\underset{k\to\infty}{\to}1,\quad x_3=\frac{1}{2}.$$

При $n=3k-1, k=1,2,\dots$, маємо підпослідовність

$$x_{3k-1}=\frac{(3k-1)-1}{(3k-1)+1}\cos\frac{2\pi(3k-1)}{3}=\frac{3k-2}{3k}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)=$$

$$=\left(1-\frac{2}{3k}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3k}\right)\downarrow\underset{k\to\infty}{\to}-\frac{1}{2},\quad x_2=-\frac{1}{6}.$$

При $n=3k-2, k=1,2,\dots$, маємо підпослідовність

$$x_{3k-2}=\frac{(3k-2)-1}{(3k-2)+1}\cos\frac{2\pi(3k-2)}{3}=\frac{3k-3}{3k-1}\cos\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)=$$

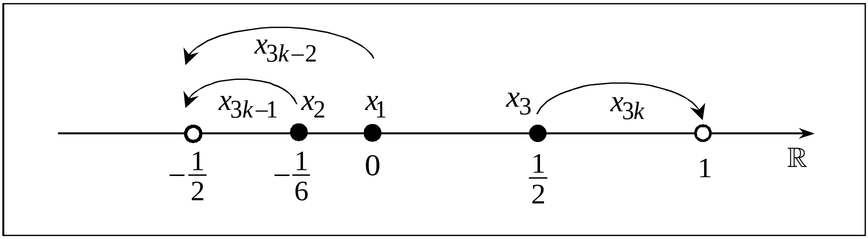
$$=\left(1-\frac{2}{3k-1}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3k-1}\right)\downarrow\underset{k\to\infty}{\to}-\frac{1}{2},\quad x_1=0.$$

Отже, множина часткових границь $X=\{-1/2;1\}$. Тоді

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n=\min X=-\frac{1}{2}=\lim_{k\to\infty} x_{3k-1}=\lim_{k\to\infty} x_{3k-2}\ (\textit{нижня границя}),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n=\max X=1=\lim_{k\to\infty} x_{3k}\ (\textit{верхня границя}).$$

Знайдемо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=1,\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=-\dfrac{1}{2}$.



Відповідь:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-2$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=5=x_1$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=-3{,}5=x_2$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\dfrac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=1$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=-\dfrac{1}{2}$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=1$. ▶

1. а) $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-3}$, $n\in\mathbb{N}$;   б) $x_n=\dfrac{10n+1}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, 1$; б) $-10, 10, -10, 10$.

2. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 - \frac{9}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{2n+5}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-2, 2, -7, \frac{5}{2}$; б) $-2, 2, -3, \frac{13}{5}$.

3. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{2n-5},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{n-4}{n+1}\sin\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, 3$; б) $-1, 1, -\frac{3}{2}, 1$.

4. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 - \frac{5}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{2n+3}{2n+1}\sin\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-2, 2, -3, 2$; б) $-1, 1, -\frac{9}{7}, \frac{5}{3}$.

5. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{2n-7},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{3n+1}{3n-2}\cos\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -4, \frac{5}{3}$; б) $-\frac{1}{2}, 1, -2, \frac{10}{7}$.

6. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 - \frac{7}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{n-5}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-2, 2, -5, 2$; б) $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 1$.

7. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{3n-2},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{2n+1}{2n-1}\sin\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 1$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(3 - \frac{14}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{n-7}{n+2}\sin\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-3, 3, -11, 4$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{8}$.

9. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{3n-4},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{3-n}{n+2}\cos\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, \frac{3}{5}$; б) $-1, 1, -1, 1$.

10. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(3 - \frac{4}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{2n}{2n-1}\sin\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-3, 3, -3, 3$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{4\sqrt{3}}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{3n-5},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{n-4}{n+1}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, -2, \frac{1}{3}$; б) $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$.

12. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{7}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{n+4}{n+3}\operatorname{tg}\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-3, 3, -4, 3$; б) $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

13. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{3n-7},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)\cos\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{5}, 2$; б) $-1, 1, -\frac{7}{4}, 2\sqrt{2}$.

14. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{9}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-3, 3, -6, 3$; б) $-2, 2, -13/6, 5/2$.

15. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{4n-5},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{2n+7}{n+2}\cos\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1, \frac{3}{7}$; б) $-2, 2, -\frac{13}{5}, \frac{19}{8}$.

16. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(4-\frac{5}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{4n-3}{2n+1}\sin\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-4, 4, -4, 4$; б) $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

17. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{4n-7},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{4n}{2n-1}\cos\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -2, \frac{3}{5}$; б) $-2, 2, -\frac{16}{7}, 2\sqrt{2}$.

18. а) $x_n = (-1)^{n-1}\left(4-\frac{7}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \left(3+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-4, 4, -4, 4$; б) $-3, 3, -19/6, 7/2$.

19. а) $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{5n-6},\ n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \left(2-\frac{5}{n}\right)\sin\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -1, \frac{1}{3}$; б) $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$.

20. а) $x_n=(-1)^{n-1}\left(5-\dfrac{6}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\left(5-\dfrac{2}{n}\right)\cos\dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-5, 5, -5, 5$; б) $-5, 5, -5, 5$.

21. а) $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n-7},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\left(4-\dfrac{3}{n}\right)\cos\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, -1, \dfrac{3}{11}$; б) $-2, 4, -2, 4$.

22. а) $x_n=(-1)^{n-1}\left(6-\dfrac{7}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\left(1+\dfrac{4}{n}\right)\sin\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-6, 6, -6, 6$; б) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

23. а) $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{7n-8},\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\left(1+\dfrac{10}{n}\right)\cos\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}, -1, \dfrac{3}{13}$; б) $-1, 1, -6, \dfrac{7}{2}$.

24. а) $x_n=(-1)^{n-1}\left(7-\dfrac{8}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}$; б) $x_n=\left(1-\dfrac{9}{n}\right)\sin\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: а) $-7, 7, -7, 7$; б) $-1, 1, -8, 2$.

2.2. Границя функції

Завдання 28. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}$; г) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}$.

Розв'язання. У запропонованих границях одна й та сама функція $f(x)$, але різні значення x_0: $x_0=\infty,\ x_0=-1/2,\ x_0=1,\ x_0=9$ відповідно. Знайдемо:

$$\text{а) }\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(4-\dfrac{33}{x}-\dfrac{27}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\dfrac{17}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{33}{x}-\frac{27}{x^2}}{2-\frac{17}{x}-\frac{9}{x^2}}=\frac{4-0-0}{2-0-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to-1/2}\frac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}=\left[\frac{-19/2}{0}\right]=\infty;$

в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}=\frac{4-33-27}{2-17-9}=\frac{-56}{-24}=\frac{7}{3};$

г) $\lim\limits_{x\to9}\frac{4x^2-33x-27}{2x^2-17x-9}=\left[\frac{324-297-27}{162-153-9}=\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to9}\frac{(4x+3)\cancel{(x-9)}}{(2x+1)\cancel{(x-9)}}=$

$$=\lim_{x\to9}\frac{4x+3}{2x+1}=\frac{39}{19}$$

(для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ многочлени розкладено на множники, одним із яких є двочлен $x-9$).

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) ∞; в) $\frac{7}{3}$; г) $\frac{39}{19}$. ►

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to2/3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x-6}$.

Відповідь: а) $\frac{2}{3}$; б) ∞; в) 1; г) $\frac{7}{11}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-1/2}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-5x-6}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}$; б) ∞; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{11}{7}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1/2}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3}{2}$; б) ∞; в) 2; г) $\dfrac{7}{5}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{2}{3}$; б) ∞; в) $\dfrac{3}{4}$; г) $\dfrac{5}{7}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-1}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2/3}\dfrac{4x^2+3x-1}{3x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+3x-1}{3x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+3x-1}{3x^2+x-2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{4}{3}$; б) ∞; в) 3; г) 1.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1/4}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-3x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-3x-1}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3}{4}$; б) ∞; в) $\dfrac{1}{3}$; г) 1.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-9x-2}{4x^2-9x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{5x^2-9x-2}{4x^2-9x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-9x-2}{4x^2-9x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-9x-2}{4x^2-9x+2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{5}{4}$; б) ∞; в) 2; г) $\dfrac{11}{7}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+9x+2}{5x^2+9x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/5}\dfrac{4x^2+9x+2}{5x^2+9x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+9x+2}{5x^2+9x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+9x+2}{5x^2+9x-2}$.

Відповідь: а) $\frac{4}{5}$; б) ∞; в) $\frac{5}{4}$; г) $\frac{7}{11}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+11x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/4}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+11x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+11x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+11x-3}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) ∞; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{7}{13}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-11x-3}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1/2}\frac{4x^2-11x-3}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-11x-3}{2x^2-5x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{2x^2-5x-3}$.

Відповідь: а) 2; б) ∞; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{13}{7}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-5x-2}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{7x^2-5x-2}{2x^2-3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2-5x-2}{2x^2-3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{7x^2-5x-2}{2x^2-3x+1}$.

Відповідь: а) $\frac{7}{2}$; б) ∞; в) $\frac{5}{3}$; г) 9.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{7x^2+5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2/7}\frac{2x^2+3x+1}{7x^2+5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+3x+1}{7x^2+5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{7x^2+5x-2}$.

Відповідь: а) $\frac{2}{7}$; б) ∞; в) $\frac{3}{16}$; г) $\frac{1}{9}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+11x-4}{4x^2+15x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/4}\frac{3x^2+11x-4}{4x^2+15x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+11x-4}{4x^2+15x-4}$; г) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{3x^2+11x-4}{4x^2+15x-4}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{4}$; б) ∞; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{13}{17}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-15x-4}{3x^2-11x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{4x^2-15x-4}{3x^2-11x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2-15x-4}{3x^2-11x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4x^2-15x-4}{3x^2-11x+4}$.

Відповідь: а) $\dfrac{4}{3}$; б) ∞; в) $\dfrac{3}{2}$; г) $\dfrac{17}{13}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-13x+15}{3x^2-13x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to-2/3}\dfrac{2x^2-13x+15}{3x^2-13x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-13x+15}{3x^2-13x-10}$; г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-13x+15}{3x^2-13x-10}$.

Відповідь: а) $\dfrac{2}{3}$; б) ∞; в) $-\dfrac{1}{5}$; г) $\dfrac{7}{17}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+13x-10}{2x^2+7x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to3/2}\dfrac{3x^2+13x-10}{2x^2+7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+13x-10}{2x^2+7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3x^2+13x-10}{2x^2+7x-15}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3}{2}$; б) ∞; в) -1; г) $\dfrac{17}{13}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-16x+4}{5x^2-7x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-3/5}\dfrac{7x^2-16x+4}{5x^2-7x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^2-16x+4}{5x^2-7x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{7x^2-16x+4}{5x^2-7x-6}$.

Відповідь: а) $\dfrac{7}{5}$; б) ∞; в) $\dfrac{5}{8}$; г) $\dfrac{12}{13}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-6}{7x^2+16x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-2/7}\dfrac{5x^2+7x-6}{7x^2+16x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+7x-6}{7x^2+16x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x^2+7x-6}{7x^2+16x+4}$.

Відповідь: а) $\dfrac{5}{7}$; б) ∞; в) $\dfrac{2}{9}$; г) $\dfrac{13}{12}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-17x+30}{4x^2-23x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-1/4}\dfrac{2x^2-17x+30}{4x^2-23x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-17x+30}{4x^2-23x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-17x+30}{4x^2-23x-6}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{2}$; б) ∞; в) $-\dfrac{3}{5}$; г) $\dfrac{7}{25}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+23x-6}{2x^2+17x+30}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}}\dfrac{4x^2+23x-6}{2x^2+17x+30}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+23x-6}{2x^2+17x+30}$; г) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{4x^2+23x-6}{2x^2+17x+30}$.

Відповідь: а) 2; б) ∞; в) $\dfrac{3}{7}$; г) $\dfrac{25}{7}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-20x-7}{4x^2-25x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}}\dfrac{3x^2-20x-7}{4x^2-25x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-20x-7}{4x^2-25x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-20x-7}{4x^2-25x-21}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3}{4}$; б) ∞; в) $\dfrac{4}{7}$; г) $\dfrac{22}{31}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+13x-7}{4x^2+27x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{2x^2+13x-7}{4x^2+27x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+13x-7}{4x^2+27x-7}$; г) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+13x-7}{4x^2+27x-7}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{2}$; б) ∞; в) $\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{15}{29}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-29x-24}{2x^2-17x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-29x-24}{2x^2-17x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-29x-24}{2x^2-17x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{4x^2-29x-24}{2x^2-17x+8}$.

Відповідь: а) 2; б) ∞; в) -3; г) $\dfrac{35}{17}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+22x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+22x-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+22x-16}$; г) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+22x-16}$.

Відповідь: а) $\frac{2}{3}$; б) ∞; в) 1; г) $\frac{17}{26}$.

Завдання 29. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(10x^2-16x+11)^{50}(12-13x)^{17}}{(14x-15)^{117}}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(10x^2-16x+11)^{50}(12-13x)^{17}}{(14x-15)^{117}}$.

Розв'язання. а) Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(10x^2-16x+11)^{50}(12-13x)^{17}}{(14x-15)^{117}}=\frac{11^{50}12^{17}}{(-15)^{117}}=-\frac{11^{50}12^{17}}{15^{117}}.$$

б) Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(10x^2-16x+11)^{50}(12-13x)^{17}}{(14x-15)^{117}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^{100}}\left(10-\frac{16}{x}+\frac{11}{x^2}\right)^{50}\cancel{x^{17}}\left(\frac{12}{x}-13\right)^{17}}{\cancel{x^{117}}\left(14-\frac{15}{x}\right)^{117}}=\frac{10^{50}(-13)^{17}}{14^{117}}=-\frac{10^{50}13^{17}}{14^{117}}.$$

Відповідь: а) $-\frac{11^{50}12^{17}}{15^{117}}$; б) $-\frac{10^{50}13^{17}}{14^{117}}$. ▶

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(10x-7)^{40}}{(3x^2-4x+2)^{15}(5x-3)^{10}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(10x-7)^{40}}{(3x^2-4x+2)^{15}(5x-3)^{10}}$.

Відповідь: а) $\frac{7^{40}}{2^{15}3^{10}}$; б) $\frac{10^{40}}{3^{15}5^{10}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x^5+7)^3(2-7x^3)^{15}}{(5x^2-3)^{30}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^5+7)^3(2-7x^3)^{15}}{(5x^2-3)^{30}}$.

Відповідь: а) $\frac{7^3 2^{15}}{3^{30}}$; б) $-\frac{2^3 7^{15}}{5^{30}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x-2)^{70}}{(4x^2-x+3)^{25}(1-3x)^{20}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-2)^{70}}{(4x^2-x+3)^{25}(1-3x)^{20}}$.

Відповідь: а) $\dfrac{2^{70}}{3^{25}}$; б) $-\dfrac{5^{70}}{4^{25}3^{20}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x^6-1)^5(2-x^3)^8}{(5x^2-3)^{27}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^6-1)^5(2-x^3)^8}{(5x^2-3)^{27}}$.

Відповідь: а) $\dfrac{2^8}{3^{27}}$; б) $\dfrac{4^5}{5^{27}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x^{14}-4)^3}{(4x^2+5)^{10}(5x^{11}-6)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^{14}-4)^3}{(4x^2+5)^{10}(5x^{11}-6)^2}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{4^3}{5^{10}6^2}$; б) $\dfrac{3^3}{4^{10}5^2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x^4-6)^7(6x^8+7)^4}{(7x^6-8)^{10}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x^4-6)^7(6x^8+7)^4}{(7x^6-8)^{10}}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{6^7 7^4}{8^{10}}$; б) $\dfrac{5^7 6^4}{7^{10}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(8x^5-9)^9}{(9x^{15}-10)^2(2x^3-1)^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(8x^5-9)^9}{(9x^{15}-10)^2(2x^3-1)^5}$.

Відповідь: а) $\dfrac{9^9}{10^2}$; б) $\dfrac{2^{22}}{9^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(7x^9-8x+1)^3(x^5+6)^5}{(10x^4-7)^{13}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(7x^9-8x^6+1)^3(x^5+6)^5}{(10x^4-7)^{13}}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{6^5}{7^{13}}$; б) $\dfrac{7^3}{10^{13}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x^7-3x^4+8)^6}{(5x^4+4)^5(x^{11}-4)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^7-3x^4+8)^6}{(5x^4+4)^5(x^{11}-4)^2}$.

Відповідь: а) 16; б) $\dfrac{4^6}{5^5}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x^5-7)^6(8x^6+4)^7}{(6x^9-10)^8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^5-7)^6(8x^6+4)^7}{(6x^9-10)^8}$.

Відповідь: а) $\dfrac{7^6 2^6}{5^8}$; б) $\dfrac{2^{25}}{3^8}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(13x^{12}-11)^4}{(11x^2+10)^{12}(10-9x^8)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(13x^{12}-11)^4}{(11x^2+10)^{12}(10-9x^8)^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{11^4}{10^{15}}$; б) $-\dfrac{13^4}{11^{12}9^3}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(6x^5+7)^8(7-6x^3)^6}{(5x^2-6)^{29}}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(6x^5+7)^8(7-6x^3)^6}{(5x^2-6)^{29}}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{7^{14}}{6^{29}}$; б) $\dfrac{6^{14}}{5^{29}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(10x^8-7)^5}{(3x^{15}-4x+2)^2(5x^2-3)^5}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(10x^8-7)^5}{(3x^{15}-4x+2)^2(5x^2-3)^5}$.

Відповідь: а) $\dfrac{7^5}{2^2 3^{10}}$; б) $\dfrac{2^5}{3^2}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(7x^3+2)^5(7-2x^{15})^3}{(3x^{30}-5)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(7x^3+2)^5(7-2x^{15})^3}{(3x^5-5)^{12}}$.

Відповідь: а) $\dfrac{2^5 7^3}{5^2}$; б) $-\dfrac{7^5 2^3}{3^{12}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x^{35}-5)^2}{(3x^{25}-4x+1)^2(3-x^{20})}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x^{35}-5)^2}{(3x^{25}-4x+1)^2(3-x^{20})}$.

Відповідь: а) $\dfrac{25}{3}$; б) $-\dfrac{4}{9}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x^{15}+1)^2(17-2x^8)^3}{(3x^{27}+2)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(4x^{15}+1)^2(17-2x^8)^3}{(3x^{27}+2)^2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{17^3}{4}$; б) $-\dfrac{128}{9}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x^3+3)^{14}}{(5x^{10}-4)^2(6x^2-5)^{11}}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(4x^3+3)^{14}}{(5x^{10}-4)^2(6x^2-5)^{11}}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{3^{14}}{4^2 5^{11}}$; б) $\dfrac{4^{14}}{5^2 6^{11}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(6x^{14}-5)^2(7x^4+6)^8}{(8x^{10}-7)^6}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(6x^{14}-5)^2(7x^4+6)^8}{(8x^{10}-7)^6}$.

Відповідь: а) $\frac{5^2 6^8}{7^6}$; б) $\frac{6^2 7^8}{8^6}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(9x^9+8)^5}{(10x^2+9)^{15}(x^5-2)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(9x^9+8)^5}{(10x^2+9)^{15}(x^5-2)^3}$.

Відповідь: а) $-\frac{2^{12}}{9^{15}}$; б) $\frac{9^5}{10^{15}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(8x^3-x^2+7)^9(1-6x^5)^5}{(7x^{13}-10)^4}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(8x^3-x^2+7)^9(1-6x^5)^5}{(7x^{13}-10)^4}$.

Відповідь: а) $\frac{7^9}{10^4}$; б) $-\frac{8^9 6^5}{7^4}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x^6+8x^3-4)^7}{(4x^5-5)^4(4x^2+1)^{11}}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(3x^6+8x^3-4)^7}{(4x^5-5)^4(4x^2+1)^{11}}$.

Відповідь: а) $-\frac{4^7}{5^4}$; б) $\frac{3^7}{4^{15}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(7x^{10}-4)^3(4x^7-9)^6}{(10x^9-6)^8}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(7x^{10}-4)^3(4x^7-9)^6}{(10x^9-6)^8}$.

Відповідь: а) $-\frac{4^3 9^6}{6^8}$; б) $\frac{7^3 4^6}{10^8}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(11x^4-13)^{12}}{(10x^{12}-11)^2(10x^3+9)^8}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(11x^4-13)^{12}}{(10x^{12}-11)^2(10x^3+9)^8}$.

Відповідь: а) $-\frac{13^{12}}{11^2 9^8}$; б) $\frac{11^{12}}{10^{10}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(7x^8-6)^5(6-7x^6)^3}{(6x^{29}+5)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(7x^8-6)^5(6-7x^6)^3}{(6x^{29}+5)^2}$.

Відповідь: а) $-\frac{6^8}{5^2}$; б) $-\frac{7^8}{6^2}$.

Завдання 30. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)^{\frac{x^2+x+1}{3x^2-2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)^{\frac{x^2+x+1}{3x^2-2}}$.

Розв'язання. Позначимо

$$u(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2},\quad v(x)=\frac{x^2+x+1}{3x^2-2}.$$

Для обох границь а) і б) маємо

$$\lim_{x\to\pm\infty} v(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{3}.$$

Для границі а) знайдемо

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{1}{2},$$

і тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u(x)\right)^{v(x)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Для границі б) знайдемо

$$\lim_{x\to-\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = -\frac{1}{2},$$

і тоді $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(u(x)\right)^{v(x)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. ►

1. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+10x+2}-\sqrt{x^2-9}\right)^{\frac{x^2+4x+5}{3x^2-7}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+10x+2}-\sqrt{x^2-9}\right)^{\frac{x^2+4x+5}{3x^2-7}}$. Відповідь: а) $\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt[3]{5}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2+10x+2}\right)^{\frac{2x^2-7}{x^2+4x+5}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2+10x+2}\right)^{\frac{2x^2-7}{x^2+4x+5}}$. Відповідь: а) 25; б) 25.

3. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)^{\frac{x^2+x+1}{5x^2-2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)^{\frac{x^2+x+1}{5x^2-2}}$. Відповідь: а) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x+1}\right)^{\frac{3x^2-2}{x^2+x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x+1}\right)^{\frac{3x^2-2}{x^2+x+1}}$. Відповідь: а) $-\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{8}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)^{\frac{x^2-3x+1}{7x^2+5}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)^{\frac{x^2-3x+1}{7x^2+5}}$. Відповідь: а) $\sqrt[7]{\frac{3}{2}}$; б) $-\sqrt[7]{\frac{3}{2}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+3x+1}\right)^{\frac{4x^2+5}{x^2-3x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+3x+1}\right)^{\frac{4x^2+5}{x^2-3x+1}}$. Відповідь: а) $\frac{81}{16}$; б) $\frac{81}{16}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+4x+1}{9x^2-3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+4x+1}{9x^2-3}}$. Відповідь: а) $\sqrt[9]{2}$; б) $-\sqrt[9]{2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)^{\frac{5x^2-3}{x^2+4x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)^{\frac{5x^2-3}{x^2+4x+1}}$. Відповідь: а) -32; б) 32.

9. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+5}-\sqrt{x^2-4}\right)^{\frac{x^2+3x+2}{3x^2-5}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+5}-\sqrt{x^2-4}\right)^{\frac{x^2+3x+2}{3x^2-5}}$. Відповідь: а) $\sqrt[3]{4}$; б) $-\sqrt[3]{4}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x+5}\right)^{\frac{6x^2-5}{x^2+8x+2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x+5}\right)^{\frac{6x^2-5}{x^2+8x+2}}$. Відповідь: а) 64; б) 64.

11. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+9}-\sqrt{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+4x+1}{5x^2-2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+9}-\sqrt{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+4x+1}{5x^2-2}}$. Відповідь: а) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x+9}\right)^{\frac{7x^2-2}{x^2+4x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x+9}\right)^{\frac{7x^2-2}{x^2+4x+1}}$. Відповідь: а) $-\frac{1}{128}$; б) $\frac{1}{128}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+5x+1}{7x^2-3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+5x+1}{7x^2-3}}$. Відповідь: а) $\sqrt[7]{\frac{5}{2}}$; б) $-\sqrt[7]{\frac{5}{2}}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)^{\frac{8x^2-3}{x^2+5x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)^{\frac{8x^2-3}{x^2+5x+1}}$. Відповідь: а) 256; б) 256.

15. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-27x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)^{\frac{x^2-x+1}{3x^2+2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-27x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)^{\frac{x^2-x+1}{3x^2+2}}$. Відповідь: а) $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-6x+1}\right)^{\frac{2x^2+9}{x^2-x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-6x+1}\right)^{\frac{2x^2+9}{x^2-x+1}}$. Відповідь: а) 9; б) 9.

17. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{5x^2+7}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{5x^2+7}}$. Відповідь: а) $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$; б) $-\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+8x-5}\right)^{\frac{3x^2+7}{x^2+10x-1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+8x-5}\right)^{\frac{3x^2+7}{x^2+10x-1}}$. Відповідь: а) -64; б) 64.

19. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x-2}-\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+8x-3}{7x^2+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x-2}-\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+8x-3}{7x^2+1}}$. Відповідь: а) $\sqrt[7]{3}$; б) $-\sqrt[7]{3}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+\sqrt{6}x-2}\right)^{\frac{4x^2+1}{x^2+8x-3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+\sqrt{6}x-2}\right)^{\frac{4x^2+1}{x^2+8x-3}}$. Відповідь: а) 9; б) 9.

21. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{x^2+10x+3}{9x^2-11}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{x^2+10x+3}{9x^2-11}}$. Відповідь: а) $\sqrt[9]{2}$; б) $-\sqrt[9]{2}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x+5}\right)^{\frac{5x^2-11}{x^2+6x+3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x+5}\right)^{\frac{5x^2-11}{x^2+6x+3}}$. Відповідь: а) -1; б) 1.

23. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+16x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)^{\frac{x^2+5x+1}{3x^2-10}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+16x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)^{\frac{x^2+5x+1}{3x^2-10}}$. Відповідь: а) 2; б) -2.

24. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-10}-\sqrt{x^2+6x+3}\right)^{\frac{6x^2-10}{x^2+5x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-10}-\sqrt{x^2+6x+3}\right)^{\frac{6x^2-10}{x^2+5x+1}}$. Відповідь: а) 729; б) 729.

Завдання 31. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{23}}{x^2-144}$; б) $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{23}}{x^3-12^3}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Перевіривши, що границя є невизначеністю $\left[\frac{0}{0}\right]$, виконаємо перетворення дробу. Розкладемо знаменник на множники за формулою для різниці квадратів $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ та помножимо чисельник і знаменник на вираз $\sqrt{2x-1}+\sqrt{23}$, спряжений до чисельника:

$$\lim_{x\to 12}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{23}}{x^2-144}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 12}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{23}\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{23}\right)}{(x-12)(x+12)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{23}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{2x-1-23}{(x-12)(x+12)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{23}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{2\cancel{(x-12)}}{\cancel{(x-12)}(x+12)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{23}\right)}=\lim_{x\to 12}\frac{2}{(x+12)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{23}\right)}=$$

$$=\frac{2}{24\cdot 2\sqrt{23}}=\frac{1}{24\sqrt{23}}.$$

б) Перевіривши, що границя є невизначеністю $\left[\frac{0}{0}\right]$, виконаємо перетворення дробу. Розкладемо знаменник на множники за формулою для різниці кубів $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ та помножимо чисельник і знаменник на вираз $\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23^2}$, спряжений до чисельника:

$$\lim_{x\to 12}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{23}}{x^3-12^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{23}\right)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23^2}\right)}{(x-12)(x^2+12x+12^2)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{2x-1-23}{(x-12)(x^2+12x+12^2)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 12}\frac{2\cancel{(x-12)}}{\cancel{(x-12)}(x^2+12x+12^2)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23^2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 12} \frac{2}{(x^2+12x+12^2)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{23^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot 12^2\cdot 3\sqrt[3]{23^2}} = \frac{1}{648\sqrt[3]{23^2}}.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{24\sqrt{23}}$; б) $\frac{1}{648\sqrt[3]{23^2}}$. ▶

1. а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+3}-\sqrt{11}}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{11}}{x^3-8}$.

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{11}}{22}$; б) $\frac{\sqrt[3]{11}}{99}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{4x-3}-\sqrt[3]{9}}{x^3-27}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{729}\sqrt[3]{9}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{16}}{x^3-64}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{64}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{384}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{11}}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt[3]{11}}{x^3-125}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{220}\sqrt{11}$; б) $\frac{\sqrt[3]{11}}{825}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{20}}{x^2-36}$; б) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{20}}{x^3-216}$.

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{5}}{80}$; б) $\frac{\sqrt[3]{20}}{2160}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{19}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{19}}{x^3-343}$.

Відповідь: а) $\frac{3\sqrt{19}}{532}$; б) $\frac{\sqrt[3]{19}}{2793}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{19}}{x^2-64}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{19}}{x^3-512}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{19}}{304}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{19}}{5472}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{15}}{x^2-729}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{15}}{x^3-729}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{15}}{270}$; б) $\dfrac{2}{10935}\sqrt[3]{15}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{5}}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x-3}-\sqrt[3]{5}}{x^3-8}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{45}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x+3}-\sqrt{15}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{15}}{x^3-27}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{15}}{45}$; б) $\dfrac{4}{1215}\sqrt[3]{15}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{8}}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt[3]{8}}{x^3-64}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3\sqrt{2}}{64}$; б) $\dfrac{1}{192}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{19}}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{19}}{x^3-125}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3\sqrt{19}}{380}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{19}}{1425}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{3x-2}-4}{x^2-36}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4}}{x^3-216}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{32}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{864}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{23}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{23}}{x^3-343}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3\sqrt{23}}{644}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{23}}{3381}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{13}}{x^2-64}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{13}}{x^3-512}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{13}}{208}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{13}}{3744}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{21}}{x^2-81}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{21}}{x^3-729}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{21}}{378}$; б) $\dfrac{2}{15309}\sqrt[3]{21}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{10}}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{10}}{x^3-8}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3\sqrt{10}}{80}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{120}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{5}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt[3]{5}}{x^3-27}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{135}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{17}}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{4x+1}-\sqrt[3]{17}}{x^3-64}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{17}}{68}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{17}}{612}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{19}}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt[3]{19}}{x^3-125}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{19}}{95}$; б) $\dfrac{4}{4275}\sqrt[3]{19}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{4x+3}-\sqrt{27}}{x^2-36}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{27}}{x^3-216}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\sqrt{3}}{54}$; б) $\dfrac{1}{729}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{4x-3}-5}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-3}-\sqrt[3]{25}}{x^3-343}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{35}$; б) $\dfrac{4}{11025}\sqrt[3]{25}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{26}}{x^2-64}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{26}}{x^3-512}$.

Відповідь: а) $3\sqrt{26}/832$; б) $\sqrt[3]{26}/4992$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{3x-2}-5}{x^2-81}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{25}}{x^3-729}$.

Відповідь: а) $1/60$; б) $\sqrt[3]{25}/6075$.

Завдання 32. Перевірити, чи є функція $f(x)$ нескінченно малою при $x\to 10$: а) $f(x)=\dfrac{x^3-14x^2+35x+50}{x^2-5x-50}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-19x^2+80x+100}{x^2-5x-50}$.

Примітка. Функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x\to x_0$ і пишуть $f(x)\underset{x\to x_0}{=}o(1)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Розв'язання. а) Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 10} f(x)=\lim_{x\to 10}\frac{x^3-14x^2+35x+50}{x^2-5x-50}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{\cancel{(x-10)}(x^2-4x-5)}{\cancel{(x-10)}(x+5)}=\lim_{x\to 10}\frac{x^2-4x-5}{x+5}=\frac{11}{3}\neq 0,$$

а отже, функція $f(x)$ не є нескінченно малою при $x\to 10$.

Зазначимо, що для ділення многочлена $x^3-14x^2+35x+50$ на двочлен $x-10$ та отримання розкладу на множники

$$x^3-14x^2+35x+50=(x-10)(x^2-4x-5)$$

можна скористатися стовпчиком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3-14x^2\;\;+35x\;\;+50 & x-10 \\
\underline{x^3-10x^2\qquad\qquad\qquad} & \overline{x^2-4x-5} \\
-\;-4x^2\;\;+35x\;\;+50 & \\
\underline{-4x^2\;\;+40x\qquad} & \\
-\;-5x\;\;+50 & \\
\underline{-5x\;\;+50} & \\
0 &
\end{array}$$

або схемою Горнера:

	1	−14	35	50
10	1	−4	−5	0

б) Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 10} f(x) = \lim_{x\to 10}\frac{x^3-19x^2+80x+100}{x^2-5x-50} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 10}\frac{\cancel{(x-10)}\,(x^2-9x-10)}{\cancel{(x-10)}\,(x+5)} = \lim_{x\to 10}\frac{x^2-9x-10}{x+5} = \frac{0}{15} = 0\,,$$

а отже, функція $f(x)$ є нескінченно малою при $x\to 10$.

Зазначимо, що для ділення многочлена $x^3-19x^2+80x+100$ на двочлен $x-10$ та розкладу на множники

$$x^3-19x^2+80x+100=(x-10)(x^2-9x-10)$$

можна скористатися стовпчиком:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -19x^2 & +80x & +100 & \;x-10 \\
\cline{5-5}
-\;x^3 & -10x^2 & & & \;x^2-9x-10 \\
\cline{1-2}
 & -9x^2 & +80x & +100 & \\
 & -\;-9x^2 & +90x & & \\
\cline{2-3}
 & & -10x & +100 & \\
 & & -\;-10x & +100 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

або схемою Горнера:

	1	−19	80	100
10	1	−9	−10	0

Відповідь: а) ні; б) так. ►

1. а) $f(x)=\dfrac{x^3-8x^2-4x+32}{x^2+6x-16}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+36x-32}{x^2+6x-16}$;

$x_0=2$. Відповідь: а) ні; б) так.

2. а) $f(x)=\dfrac{x^3-8x^2+x+42}{x^2+4x-21}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-13x^2+51x-63}{x^2+4x-21}$;

$x_0=3$. Відповідь: а) ні; б) так.

3. а) $f(x)=\frac{x^3-7x^2+2x+40}{x^2+x-20}$; б) $f(x)=\frac{x^3-13x^2+56x-80}{x^2+x-20}$;

$x_0=4$. Відповідь: а) ні; б) так.

4. а) $f(x)=\frac{x^3-9x^2+8x+60}{x^2+x-30}$; б) $f(x)=\frac{x^3-16x^2+85x-150}{x^2+x-30}$;

$x_0=5$. Відповідь: а) ні; б) так.

5. а) $f(x)=\frac{x^3-8x^2+4x+48}{x^2-2x-24}$; б) $f(x)=\frac{x^3-16x^2+84x-144}{x^2-2x-24}$;

$x_0=6$. Відповідь: а) ні; б) так.

6. а) $f(x)=\frac{x^3-8x^2+x+42}{x^2-4x-21}$; б) $f(x)=\frac{x^3-17x^2+91x-147}{x^2-4x-21}$;

$x_0=7$. Відповідь: а) ні; б) так.

7. а) $f(x)=\frac{x^3-8x^2-4x+32}{x^2-6x-16}$; б) $f(x)=\frac{x^3-18x^2+96x-128}{x^2-6x-16}$;

$x_0=8$. Відповідь: а) ні; б) так.

8. а) $f(x)=\frac{x^3-8x^2-11x+18}{x^2-8x-9}$; б) $f(x)=\frac{x^3-19x^2+99x-81}{x^2-8x-9}$;

$x_0=9$. Відповідь: а) ні; б) так.

9. а) $f(x)=\frac{x^3+8x^2-4x-32}{x^2-10x+16}$; б) $f(x)=\frac{x^3+4x^2-28x+32}{x^2-10x+16}$;

$x_0=2$. Відповідь: а) ні; б) так.

10. а) $f(x)=\frac{x^3+2x^2-29x+42}{x^2-10x+21}$; б) $f(x)=\frac{x^3+x^2-33x+63}{x^2-10x+21}$;

$x_0=3$. Відповідь: а) ні; б) так.

11. а) $f(x)=\frac{x^3-x^2-22x+40}{x^2-9x+20}$; б) $f(x)=\frac{x^3-3x^2-24x+80}{x^2-9x+20}$;

$x_0=4$. Відповідь: а) ні; б) так.

12. а) $f(x)=\frac{x^3-x^2-32x+60}{x^2-11x+30}$; б) $f(x)=\frac{x^3-4x^2-35x+150}{x^2-11x+30}$;

$x_0=5$. Відповідь: а) ні; б) так.

13. а) $f(x)=\frac{x^3-4x^2-20x+48}{x^2-10x+24}$; б) $f(x)=\frac{x^3-8x^2-12x+144}{x^2-10x+24}$;

$x_0 = 6$. Відповідь: а) ні; б) так.

14. а) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2-13x+42}{x^2-10x+21}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-11x^2+7x+147}{x^2-10x+21}$;

$x_0 = 7$. Відповідь: а) ні; б) так.

15. а) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2-28x-32}{x^2-10x+16}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-14x^2+32x+128}{x^2-10x+16}$;

$x_0 = 8$. Відповідь: а) ні; б) так.

16. а) $f(x)=\dfrac{x^3-10x^2+7x+18}{x^2-10x+9}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-17x^2+63x+81}{x^2-10x+9}$;

$x_0 = 9$. Відповідь: а) ні; б) так.

17. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+29x-18}{x^2+7x-18}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-13x^2+40x-36}{x^2+7x-18}$;

$x_0 = 2$. Відповідь: а) ні; б) так.

18. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+35x-24}{x^2+5x-24}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-14x^2+57x-72}{x^2+5x-24}$;

$x_0 = 3$. Відповідь: а) ні; б) так.

19. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+39x-28}{x^2+3x-28}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-15x^2+72x-112}{x^2+3x-28}$;

$x_0 = 4$. Відповідь: а) ні; б) так.

20. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+41x-30}{x^2+x-30}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-16x^2+85x-150}{x^2+x-30}$;

$x_0 = 5$. Відповідь: а) ні; б) так.

21. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+41x-30}{x^2-x-30}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-17x^2+96x-180}{x^2-x-30}$;

$x_0 = 6$. Відповідь: а) ні; б) так.

22. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+39x-28}{x^2-3x-28}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-18x^2+105x-196}{x^2-3x-28}$;

$x_0 = 7$. Відповідь: а) ні; б) так.

23. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+35x-24}{x^2-5x-24}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-19x^2+112x-192}{x^2-5x-24}$;

$x_0 = 8$. Відповідь: а) ні; б) так.

24. а) $f(x)=\dfrac{x^3-12x^2+29x-18}{x^2-7x-18}$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-20x^2+117x-162}{x^2-7x-18}$;

$x_0=9$. Відповідь: а) ні; б) так.

Примітка. Для відшукання границь часто використовують *п'ять визначних границь* та їхні наслідки у вигляді *асимптотичних формул*:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*перша визначна границя*), тобто

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \sin x \underset{x\to 0}{=} x+o(x);$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (*друга визначна границя*);

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, тобто $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \ln(1+x)\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, тобто $e^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x,\quad e^x\underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$, і взагалі

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ \ (0<a\neq 1)$, тобто

$$a^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x\ln a,\quad a^x\underset{x\to 0}{=} 1+x\ln a+o(x);$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$, тобто

$$(1+x)^\alpha-1\underset{x\to 0}{\sim}\alpha x,\quad (1+x)^\alpha\underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+o(x).$$

Наведемо також низку *корисних границь* і відповідних *асимптотичних формул*:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, тобто $\operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, тобто $\arcsin x\underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \arcsin x\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$, тобто $\operatorname{arctg} x\underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \operatorname{arctg} x\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}=1$, тобто $\operatorname{sh} x\underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \operatorname{sh} x\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x}=1$, тобто $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arsh} x}{x}=1$, тобто $\operatorname{arsh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\operatorname{arsh} x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arth} x}{x}=1$, тобто $\operatorname{arth} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\operatorname{arth} x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, тобто $1-\cos \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Наслідком деяких визначних і корисних границь та властивостей рефлексивності й транзитивності відношення еквівалентності $\sim$ є такий ланцюжок еквівалентних функцій:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x\sim\operatorname{sh} x\sim\operatorname{th} x\sim$$

$$\sim\operatorname{arsh} x\sim\operatorname{arth} x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\quad\text{при}\ \ x\to 0\,.$$

Зазначимо, що в добутках і частках (але, взагалі кажучи, не в сумах і різницях) можна заміняти функції на еквівалентні їм функції (зазвичай простіші або зручніші), наприклад:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\ln(1+x^3)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x\,(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x\,(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}=$$

$$=\left[\operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{\sim} x,\ 1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2},\ \ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}\,.$$

Завдання 33. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 25x}{\sin 26x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 25x}{\operatorname{tg} 26x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 25x}{\operatorname{tg} 26x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 25x}{\sin 26x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} 25x}{\operatorname{tg} 26x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 25x}{\operatorname{tg} 26x}$.

Примітка. Для розв'язання знадобляться *асимптотичні формули* $\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x$, $\operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{\sim} x$ та *формули зведення*

$$\sin(x+\pi n)=(-1)^n\sin x,\quad \operatorname{tg}(x+\pi n)=\operatorname{tg} x\quad (n\in\mathbb{Z})\,.$$

Розв'язання. Маємо:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 25x}{\sin 26x}=\left[\begin{array}{c}\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u,\\ u=25x \underset{x\to 0}{\to} 0,\ u=26x \underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x}{26x}=\dfrac{25}{26}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 25x}{\operatorname{tg} 26x}=\left[\begin{array}{c}\operatorname{tg} u \underset{u\to 0}{\sim} u,\\ u=25x \underset{x\to 0}{\to} 0,\ u=26x \underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x}{26x}=\dfrac{25}{26}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 25x}{\operatorname{tg} 26x}=\left[\begin{array}{c}\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u,\ u=25x \underset{x\to 0}{\to} 0;\\ \operatorname{tg} u \underset{u\to 0}{\sim} u,\ u=26x \underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x}{26x}=\dfrac{25}{26}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 25x}{\sin 26x}=[x=t+\pi]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(25t+25\pi)}{\sin(26t+26\pi)}=$

$$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin 25t}{\sin 26t}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 25t}{\sin 26t}=-\frac{25}{26};$$

д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} 25x}{\operatorname{tg} 26x}=[x=t+\pi]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(25t+25\pi)}{\operatorname{tg}(26t+26\pi)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 25t}{\operatorname{tg} 26t}=\dfrac{25}{26}$;

е) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 25x}{\operatorname{tg} 26x}=[x=t+\pi]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(25t+25\pi)}{\operatorname{tg}(26t+26\pi)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(-1)^{25}\sin 25t}{\operatorname{tg} 26t}=$

$$=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 25t}{\sin 26t}=-\frac{25}{26}.$$

Відповідь: а) $\dfrac{25}{26}$; б) $\dfrac{25}{26}$; в) $\dfrac{25}{26}$; г) $-\dfrac{25}{26}$; д) $\dfrac{25}{26}$; е) $-\dfrac{25}{26}$. ►

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{2}{3}$; г) $-\dfrac{2}{3}$; д) $\dfrac{2}{3}$; е) $\dfrac{2}{3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $-\frac{3}{4}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $-\frac{3}{4}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Відповідь: а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $-\frac{4}{5}$; д) $\frac{4}{5}$; е) $\frac{4}{5}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 6x}$.

Відповідь: а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{5}{6}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $-\frac{5}{6}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 7x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 6x}{\sin 7x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 7x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 7x}$.

Відповідь: а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{6}{7}$; в) $\frac{6}{7}$; г) $-\frac{6}{7}$; д) $\frac{6}{7}$; е) $\frac{6}{7}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 8x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x}$.

Відповідь: а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{7}{8}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $-\frac{7}{8}$; д) $\frac{7}{8}$; е) $-\frac{7}{8}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 9x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 8x}{\operatorname{tg} 9x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 9x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 8x}{\sin 9x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg} 8x}{\operatorname{tg} 9x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 9x}$.

Відповідь: а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{8}{9}$; г) $-\frac{8}{9}$; д) $\frac{8}{9}$; е) $\frac{8}{9}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 10x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 9x}{\operatorname{tg} 10x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 10x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 9x}{\sin 10x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}9x}{\mathrm{tg}10x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 9x}{\mathrm{tg}10x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{9}{10}$; б) $\dfrac{9}{10}$; в) $\dfrac{9}{10}$; г) $-\dfrac{9}{10}$; д) $\dfrac{9}{10}$; е) $-\dfrac{9}{10}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\sin 11x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}10x}{\mathrm{tg}11x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\mathrm{tg}11x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 10x}{\sin 11x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}10x}{\mathrm{tg}11x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 10x}{\mathrm{tg}11x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{10}{11}$; б) $\dfrac{10}{11}$; в) $\dfrac{10}{11}$; г) $-\dfrac{10}{11}$; д) $\dfrac{10}{11}$; е) $\dfrac{10}{11}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{\sin 12x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}11x}{\mathrm{tg}12x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{\mathrm{tg}12x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 11x}{\sin 12x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}11x}{\mathrm{tg}12x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 11x}{\mathrm{tg}12x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{11}{12}$; б) $\dfrac{11}{12}$; в) $\dfrac{11}{12}$; г) $-\dfrac{11}{12}$; д) $\dfrac{11}{12}$; е) $-\dfrac{11}{12}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{\sin 13x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}12x}{\mathrm{tg}13x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{\mathrm{tg}13x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 12x}{\sin 13x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}12x}{\mathrm{tg}13x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 12x}{\mathrm{tg}13x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{12}{13}$; б) $\dfrac{12}{13}$; в) $\dfrac{12}{13}$; г) $-\dfrac{12}{13}$; д) $\dfrac{12}{13}$; е) $\dfrac{12}{13}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 13x}{\sin 14x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}13x}{\mathrm{tg}14x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 13x}{\mathrm{tg}14x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 13x}{\sin 14x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}13x}{\mathrm{tg}14x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 13x}{\mathrm{tg}14x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{13}{14}$; б) $\dfrac{13}{14}$; в) $\dfrac{13}{14}$; г) $-\dfrac{13}{14}$; д) $\dfrac{13}{14}$; е) $-\dfrac{13}{14}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}2x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{3}{2}$; б) $\dfrac{3}{2}$; в) $\dfrac{3}{2}$; г) $-\dfrac{3}{2}$; д) $\dfrac{3}{2}$; е) $-\dfrac{3}{2}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,4x}{\mathrm{tg}\,3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\,3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\mathrm{tg}\,4x}{\mathrm{tg}\,3x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

Відповідь: а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{4}{3}$; г) $-\frac{4}{3}$; д) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{4}{3}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,5x}{\mathrm{tg}\,4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}\,4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\mathrm{tg}\,5x}{\mathrm{tg}\,4x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}\,4x}$.

Відповідь: а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{5}{4}$; г) $-\frac{5}{4}$; д) $\frac{5}{4}$; е) $-\frac{5}{4}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,6x}{\mathrm{tg}\,5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 6x}{\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\mathrm{tg}\,6x}{\mathrm{tg}\,5x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 6x}{\mathrm{tg}\,5x}$.

Відповідь: а) $\frac{6}{5}$; б) $\frac{6}{5}$; в) $\frac{6}{5}$; г) $-\frac{6}{5}$; д) $\frac{6}{5}$; е) $\frac{6}{5}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,7x}{\mathrm{tg}\,6x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\mathrm{tg}\,6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\sin 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\mathrm{tg}\,7x}{\mathrm{tg}\,6x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\mathrm{tg}\,6x}$.

Відповідь: а) $\frac{7}{6}$; б) $\frac{7}{6}$; в) $\frac{7}{6}$; г) $-\frac{7}{6}$; д) $\frac{7}{6}$; е) $-\frac{7}{6}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,8x}{\mathrm{tg}\,7x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\,7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 8x}{\sin 7x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\mathrm{tg}\,8x}{\mathrm{tg}\,7x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\,7x}$.

Відповідь: а) $\frac{8}{7}$; б) $\frac{8}{7}$; в) $\frac{8}{7}$; г) $-\frac{8}{7}$; д) $\frac{8}{7}$; е) $\frac{8}{7}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,9x}{\mathrm{tg}\,8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\mathrm{tg}\,8x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 9x}{\sin 8x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\mathrm{tg}\,9x}{\mathrm{tg}\,8x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 9x}{\mathrm{tg}\,8x}$.

Відповідь: а) $\frac{9}{8}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{9}{8}$; г) $-\frac{9}{8}$; д) $\frac{9}{8}$; е) $-\frac{9}{8}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}10x}{\operatorname{tg}9x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{\operatorname{tg}9x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg}10x}{\operatorname{tg}9x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 10x}{\operatorname{tg}9x}$.

Відповідь: а) $\frac{10}{9}$; б) $\frac{10}{9}$; в) $\frac{10}{9}$; г) $-\frac{10}{9}$; д) $\frac{10}{9}$; е) $\frac{10}{9}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{\sin 10x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}11x}{\operatorname{tg}10x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{\operatorname{tg}10x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 11x}{\sin 10x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg}11x}{\operatorname{tg}10x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 11x}{\operatorname{tg}10x}$.

Відповідь: а) $\frac{11}{10}$; б) $\frac{11}{10}$; в) $\frac{11}{10}$; г) $-\frac{11}{10}$; д) $\frac{11}{10}$; е) $-\frac{11}{10}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{\sin 11x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}12x}{\operatorname{tg}11x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{\operatorname{tg}11x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 12x}{\sin 11x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg}12x}{\operatorname{tg}11x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 12x}{\operatorname{tg}11x}$.

Відповідь: а) $\frac{12}{11}$; б) $\frac{12}{11}$; в) $\frac{12}{11}$; г) $-\frac{12}{11}$; д) $\frac{12}{11}$; е) $\frac{12}{11}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 13x}{\sin 12x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}13x}{\operatorname{tg}12x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 13x}{\operatorname{tg}12x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 13x}{\sin 12x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg}13x}{\operatorname{tg}12x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 13x}{\operatorname{tg}12x}$.

Відповідь: а) $\frac{13}{12}$; б) $\frac{13}{12}$; в) $\frac{13}{12}$; г) $-\frac{13}{12}$; д) $\frac{13}{12}$; е) $-\frac{13}{12}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 14x}{\sin 13x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}14x}{\operatorname{tg}13x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 14x}{\operatorname{tg}13x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 14x}{\sin 13x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{tg}14x}{\operatorname{tg}13x}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 14x}{\operatorname{tg}13x}$.

Відповідь: а) $\frac{14}{13}$; б) $\frac{14}{13}$; в) $\frac{14}{13}$; г) $-\frac{14}{13}$; д) $\frac{14}{13}$; е) $\frac{14}{13}$.

Завдання 34. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x-\sin 12x}{13x-14x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x+\sin 12x}{13x-14x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos 12x}{13x^2-14x^5}$.

Примітка. Нагадаємо тригонометричні формули

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

та *асимптотичні формули*

$$\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x,\quad \sin x\underset{x\to 0}{=}x+o(x),\quad \cos x\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Розв'язання. Маємо:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x-\sin 12x}{13x-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x\cos 11x}{13x-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cancel{x}\cos 11x}{\cancel{x}(13-14x^4)}=-\dfrac{2}{13}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x+\sin 12x}{13x-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 11x\cos x}{13x-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 11\cancel{x}\cos 11x}{\cancel{x}(13-14x^4)}=\dfrac{22}{13}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos 12x}{13x^2-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 11x\sin x}{13x^2-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 11\cancel{x}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x^2}(13-14x^3)}=\dfrac{22}{13}$.

Можна розв'язувати й так:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x-\sin 12x}{13x-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(10x+o(x))-(12x+o(x))}{13x-14x^5}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+o(x)}{13x-14x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(-2+o(1))}{\cancel{x}(13-14x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2+o(1)}{13-14x^4}=\frac{-2}{13}=-\frac{2}{13};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x+\sin 12x}{13x-14x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(10x+o(x))+(12x+o(x))}{13x-14x^5}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{22x+o(x)}{13x-14x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(22+o(1))}{\cancel{x}(13-14x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{22+o(1)}{13-14x^4}=\frac{22}{13};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos 12x}{13x^2-14x^5}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{(10x)^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{(12x)^2}{2}+o(x^2)\right)}{13x^2-14x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{22x^2+o(x^2)}{13x^2-14x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(22+o(1)\right)}{\cancel{x^2}\,(13-14x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{22+o(1)}{13-14x^3}=\frac{22}{13}.$$

Відповідь: а) $-\frac{2}{13}$; б) $\frac{22}{13}$; в) $\frac{22}{13}$. ►

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{4x+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{4x+5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{4x^2+5x^3}$. Відповідь: а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{5}{8}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{5x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{5x+3x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{5x^2+3x^3}$. Відповідь: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{5}$; в) $-\frac{6}{5}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 4x}{3x+2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin 4x}{3x+2x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 4x}{3x^2+2x^3}$. Відповідь: а) $\frac{1}{3}$; б) 3; в) $-\frac{3}{2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 5x}{2x+4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 5x}{2x+4x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{2x^2+4x^3}$. Відповідь: а) –1; б) 4; в) 4.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 4x}{5x-6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{5x-6x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 4x}{5x^2-6x^3}$. Відповідь: а) $-\frac{1}{5}$; б) $\frac{7}{5}$; в) $\frac{7}{10}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{6x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin 3x}{6x-4x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{6x^2-4x^3}$. Відповідь: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $-\frac{4}{3}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x-\sin 5x}{4x-3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+\sin 5x}{4x-3x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 5x}{4x^2-3x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{11}{4}$; в) $-\dfrac{11}{8}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 6x}{3x-5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 6x}{3x-5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{3x^2-5x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{10}{3}$; в) $\dfrac{10}{3}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 5x}{6x+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 5x}{6x+7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 5x}{6x^2+7x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{6}$; б) $\dfrac{3}{2}$; в) $\dfrac{3}{4}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 4x}{7x+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 4x}{7x+5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{7x^2+5x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{2}{7}$; б) $\dfrac{10}{7}$; в) $-\dfrac{10}{7}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 6x}{5x+4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 6x}{5x+4x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 6x}{5x^2+4x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{5}$; б) $\dfrac{13}{5}$; в) $-\dfrac{13}{10}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 7x}{4x+6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 7x}{4x+6x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{4x^2+6x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{2}$; б) 3; в) 3.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 6x}{7x-8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 6x}{7x-8x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 6x}{7x^2-8x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{11}{7}$; в) $\dfrac{11}{4}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 5x}{8x-6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 5x}{8x-6x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 5x}{8x^2-6x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{3}{2}$; в) $-\dfrac{3}{2}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 7x}{6x-5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 7x}{6x-5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-\cos 7x}{6x^2-5x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{6}$; б) $\dfrac{5}{2}$; в) $-\dfrac{5}{4}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 8x}{5x-7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 8x}{5x-7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 8x}{5x^2-7x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{2}{5}$; б) $\dfrac{14}{5}$; в) $\dfrac{14}{5}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 7x}{8x+9x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+\sin 7x}{8x+9x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 7x}{8x^2+9x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{8}$; б) $\dfrac{13}{8}$; в) $\dfrac{13}{16}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 6x}{9x+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 6x}{9x+7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-\cos 6x}{9x^2+7x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{2}{9}$; б) $\dfrac{14}{9}$; в) $-\dfrac{14}{9}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x-\sin 8x}{7x+6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 8x}{7x+6x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 8x}{7x^2+6x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{17}{7}$; в) $-\dfrac{17}{14}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 9x}{6x+8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 9x}{6x+8x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 9x}{6x^2+8x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{8}{3}$; в) $\dfrac{8}{3}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 8x}{9x-10x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 8x}{9x-10x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 8x}{9x^2-10x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{9}$; б) $\dfrac{5}{3}$; в) $\dfrac{5}{6}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x-\sin 7x}{10x-8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 7x}{10x-8x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 7x}{10x^2-8x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{5}$; б) $\dfrac{8}{5}$; в) $-\dfrac{8}{5}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x-\sin 9x}{8x-7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x+\sin 9x}{8x-7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos 9x}{8x^2-7x^3}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{8}$; б) $\dfrac{19}{8}$; в) $-\dfrac{19}{16}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 10x}{7x-9x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 10x}{7x-9x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 8x-\cos 10x}{7x^2-9x^3}$. Відповідь: а) $-\dfrac{2}{7}$; б) $\dfrac{18}{7}$; в) $-\dfrac{18}{7}$.

Завдання 35. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-10x}}{\ln(1-6x)-\ln(1+8x)}$.

Примітка. Нагадаємо *асимптотичні формули*

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x),\quad \ln(1+x)\underset{x\to 0}{=} x+o(x).$$

Розв'язання. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-10x}}{\ln(1-6x)-\ln(1+8x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\big(1+7x+o(x)\big)-\big(1-10x+o(x)\big)}{\big(-6x+o(x)\big)-\big(8x+o(x)\big)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{17x+o(x)}{-14x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{17+o(1)}{-14+o(1)}=\frac{17}{-14}=-\frac{17}{14}.$$

Відповідь: $-\dfrac{17}{14}$. ▶

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: 1.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: 5.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: –5.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{-3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: –1.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: $\dfrac{1}{9}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{9}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: –1.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: $\dfrac{5}{9}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: $-\dfrac{5}{9}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: -5.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: $-\dfrac{5}{9}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: $\dfrac{5}{9}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: 5.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{-3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1+5x)}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{9}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{-3x}}{\ln(1+4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: $\dfrac{1}{9}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{-3x}}{\ln(1-4x)-\ln(1-5x)}$. Відповідь: 1.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{4x}}{\ln(1+5x)-\ln(1+7x)}$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{4x}}{\ln(1+5x)-\ln(1+7x)}$. Відповідь: $\dfrac{7}{2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-4x}}{\ln(1+5x)-\ln(1+7x)}$. Відповідь: $-\dfrac{7}{2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{-4x}}{\ln(1+5x)-\ln(1+7x)}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{4x}}{\ln(1-5x)-\ln(1+7x)}$. Відповідь: $\dfrac{1}{12}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{4x}}{\ln(1+5x)-\ln(1-7x)}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{12}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{4x}}{\ln(1-5x)-\ln(1-7x)}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{4x}}{\ln(1-5x)-\ln(1+7x)}$. Відповідь: $\dfrac{7}{12}$.

Завдання 36. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[10]{1+7x}}{9x-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt[10]{1+7x}}{9x-x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[10]{1+10x}}{9x^2-x^4}$.

Примітка. Нагадаємо *асимптотичну формулу*

$$(1+x)^{\alpha}\underset{x\to 0}{=}1+\alpha x+o(x).$$

Розв'язання. Маємо:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[10]{1+7x}}{9x-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\cdot 3x+o(x)\right)-\left(1+\frac{1}{10}\cdot 7x+o(x)\right)}{9x-x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{5}x+o(x)}{9x-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{5}+o(1)}{9-x^3}=\frac{\frac{4}{5}}{9}=\frac{4}{45};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt[10]{1+7x}}{9x-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\cdot(-3x)+o(x)\right)-\left(1+\frac{1}{10}\cdot 7x+o(x)\right)}{9x-x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{11}{5}x+o(x)}{9x-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{11}{5}+o(1)}{9-x^3}=\frac{-\frac{11}{5}}{9}=-\frac{11}{45};$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[10]{1+10x}}{9x^2-x^4}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}(1+2x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(2x)^2+o(x^2)=1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\\ (1+10x)^{1/10}=1+\frac{1}{10}\cdot 10x+\frac{\frac{1}{10}\left(-\frac{9}{10}\right)}{2!}(10x)^2+o(x^2)=1+x-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(1+x-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)}{9x^2-x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+o(x^2)}{9x^2-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{4+o(1)}{9-x^2}=\frac{4}{9}$$

Відповідь: а) $\frac{4}{45}$; б) $-\frac{17}{60}$; в) $\frac{4}{9}$. ►

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[5]{1+6x}}{2x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[5]{1+5x}}{2x^2+3x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{15}$; б) $\dfrac{1}{2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-4x}-\sqrt[5]{1+6x}}{2x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-\sqrt[5]{1+5x}}{2x^2+3x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{19}{15}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[5]{1-6x}}{2x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[6]{1+6x}}{2x^2+3x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{19}{15}$; б) $\dfrac{3}{4}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-4x}-\sqrt[5]{1-6x}}{2x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-\sqrt[6]{1+6x}}{2x^2+3x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{15}$; б) $\dfrac{1}{2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+5x}-\sqrt[6]{1+7x}}{3x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-\sqrt[6]{1+6x}}{3x^2-4x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{36}$; б) $\dfrac{1}{3}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1-5x}-\sqrt[6]{1+7x}}{3x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[6]{1+6x}}{3x^2-4x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{29}{36}$; б) $\dfrac{1}{6}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+5x}-\sqrt[6]{1-7x}}{3x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-\sqrt[7]{1+7x}}{3x^2-4x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{29}{36}$; б) $\dfrac{1}{2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1-5x}-\sqrt[6]{1-7x}}{3x-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[7]{1+7x}}{3x^2-4x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{36}$; б) $\dfrac{1}{3}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[7]{1+8x}}{4x+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[7]{1+7x}}{4x^2+5x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{70}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-6x}-\sqrt[7]{1+8x}}{4x+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+6x}-\sqrt[7]{1+7x}}{4x^2+5x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{41}{70}$; б) $\dfrac{1}{8}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[7]{1-8x}}{4x+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[8]{1+8x}}{4x^2+5x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{41}{70}$; б) $\dfrac{3}{8}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-6x}-\sqrt[7]{1-8x}}{4x+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+6x}-\sqrt[8]{1+8x}}{4x^2+5x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{70}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+7x}-\sqrt[8]{1+9x}}{5x-6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+6x}-\sqrt[8]{1+8x}}{5x^2-6x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{1}{120}$; б) $\dfrac{1}{5}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1-7x}-\sqrt[8]{1+9x}}{5x-6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+7x}-\sqrt[8]{1+8x}}{5x^2-6x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{11}{24}$; б) $\dfrac{1}{10}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+7x}-\sqrt[8]{1-9x}}{5x-6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+6x}-\sqrt[9]{1+9x}}{5x^2-6x^3}$.

Відповідь: а) $\dfrac{11}{24}$; б) $\dfrac{3}{10}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1-7x}-\sqrt[8]{1-9x}}{5x-6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+7x}-\sqrt[9]{1+9x}}{5x^2-6x^3}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{120}$; б) $\dfrac{1}{5}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+3x}-\sqrt[7]{1+6x}}{6x+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[6]{1+6x}}{6x^2+7x^3}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{56}$; б) $\frac{1}{4}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-3x}-\sqrt[7]{1+6x}}{6x+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+4x}-\sqrt[6]{1+6x}}{6x^2+7x^3}$.

Відповідь: а) $-\frac{15}{56}$; б) $\frac{1}{6}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+3x}-\sqrt[7]{1-6x}}{6x+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[7]{1+7x}}{6x^2+7x^3}$.

Відповідь: а) $\frac{15}{56}$; б) $\frac{1}{3}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-3x}-\sqrt[7]{1-6x}}{6x+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+4x}-\sqrt[7]{1+7x}}{6x^2+7x^3}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{56}$; б) $\frac{1}{4}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+5x}-\sqrt[9]{1+8x}}{7x-8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[8]{1+8x}}{7x^2-8x^3}$.

Відповідь: а) $-\frac{1}{126}$; б) $\frac{3}{14}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1-5x}-\sqrt[9]{1+8x}}{7x-8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+6x}-\sqrt[8]{1+8x}}{7x^2-8x^3}$.

Відповідь: а) $-\frac{31}{126}$; б) $\frac{1}{7}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+5x}-\sqrt[9]{1-8x}}{7x-8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[9]{1+9x}}{7x^2-8x^3}$.

Відповідь: а) $\frac{31}{126}$; б) $\frac{2}{7}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1-5x}-\sqrt[9]{1-8x}}{7x-8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+6x}-\sqrt[9]{1+9x}}{7x^2-8x^3}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{126}$; б) $\frac{3}{14}$.

Примітка. Границю $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$, де $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, називають *невизначеністю* типу $[1^\infty]$ й обчислюють, або *розкривають*, так: $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=[1^\infty]=e^A$, де $A=\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)$.

Завдання 37. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}\right)^{2x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x-2}\right)^{3\sqrt{x}+4}$.

Розв'язання. а) Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(2x+7)=\infty,$$

тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+6x+5}\right)^{2x+7}=[1^\infty]=e^A$, де

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+6x+5}-1\right)(2x+7)=\lim_{x\to\infty}\frac{(-6x-6)(2x+7)}{x^2+6x+5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(-6-\frac{6}{x}\right)\cancel{x}\left(2+\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}==\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-6-\frac{6}{x}\right)\left(2+\frac{7}{x}\right)}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{-6\cdot 2}{1}=-12,$$

а отже, $e^A=e^{-12}$.

б) Маємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3\sqrt{x}+4)=+\infty,$$

тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x-2}\right)^{3\sqrt{x}+4}=[1^\infty]=e^A$, де

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}+3)(3\sqrt{x}+4)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}+3)(3\sqrt{x}+4)}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\cancel{\sqrt{x}}\left(3+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(3+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1\cdot3}{1}=3,$$

а отже, $e^A=e^3$.

Відповідь: а) e^{-12}; б) e^3. ▶

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x+1}{x^3-2}\right)^{3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+6\sqrt{x}+5}\right)^{7\sqrt{x}+2}$.

Відповідь: а) e^3; б) e^{-42}.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^3+x^2+1}\right)^{4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-10}\right)^{6\sqrt{x}+5}$.

Відповідь: а) e^{-4}; б) e^6.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+5x+1}{x^3-3}\right)^{2x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+2\sqrt{x}-6}\right)^{3\sqrt{x}-5}$.

Відповідь: а) e^{10}; б) e^{-6}.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3}{x^3+5x^2+1}\right)^{3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6\sqrt{x}+1}{x-5}\right)^{2\sqrt{x}+10}$.

Відповідь: а) e^{-15}; б) e^{12}.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4x+1}{x^3-3}\right)^{2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-\sqrt{x}+1}\right)^{4\sqrt{x}+3}$.

Відповідь: а) e^8; б) e^4.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-3}{x^3+4x^2+1}\right)^{5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}+7}{x-4}\right)^{5\sqrt{x}-1}$.

Відповідь: а) e^{-20}; б) e^{-10}.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{x^3+2}\right)^{3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-9}{x+7\sqrt{x}-8}\right)^{2-\sqrt{x}}$.

Відповідь: а) e^{-3}; б) e^{7}.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-x^2+1}\right)^{5x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-6\sqrt{x}+7}{x+4}\right)^{3\sqrt{x}-1}$.

Відповідь: а) e^{5}; б) e^{-18}.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{x^3+2}\right)^{3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-5\sqrt{x}-1}\right)^{4\sqrt{x}+2}$.

Відповідь: а) e^{-3}; б) e^{20}.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-x^2+1}\right)^{4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+9}\right)^{4\sqrt{x}+5}$.

Відповідь: а) e^{4}; б) e^{-8}.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x-1}{x^3+4}\right)^{2-5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-10\sqrt{x}-9}\right)^{\sqrt{x}-6}$.

Відповідь: а) e^{-15}; б) e^{10}.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+3x^2-1}\right)^{2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}-1}{x+3}\right)^{7\sqrt{x}-6}$.

Відповідь: а) e^{-6}; б) e^{7}.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+7x-2}{x^3+1}\right)^{3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2\sqrt{x}+9}\right)^{8\sqrt{x}-3}$.

Відповідь: а) e^{21}; б) e^{-16}.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+7x^2-2}\right)^{4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}-1}{x+6}\right)^{\sqrt{x}+10}$.

Відповідь: а) e^{-28}; б) e^{4}.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+6x+5}{x^3-1}\right)^{2x^2+7}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-2\sqrt{x}+9}\right)^{5-2\sqrt{x}}$.

Відповідь: а) e^{12}; б) e^{-4}.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+6x^2+5}\right)^{7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}+13}{x-6}\right)^{8-\sqrt{x}}$.

Відповідь: а) e^{-42}; б) e.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3-10}\right)^{6x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+6\sqrt{x}+7}\right)^{6\sqrt{x}+4}$.

Відповідь: а) e^{6}; б) e^{-36}.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-10}{x^3+x^2+1}\right)^{5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+13}{x-11}\right)^{2\sqrt{x}-6}$.

Відповідь: а) e^{-5}; б) e^{8}.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3-2}\right)^{4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+12}{x-9\sqrt{x}+6}\right)^{7-\sqrt{x}}$.

Відповідь: а) e^{4}; б) e^{-9}.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x^3+x^2+1}\right)^{5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+8\sqrt{x}-3}{x+11}\right)^{\sqrt{x}-5}$.

Відповідь: а) e^{-5}; б) e^{8}.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x^3+5}\right)^{2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-14}{x-5\sqrt{x}+6}\right)^{4\sqrt{x}+9}$.

Відповідь: а) e^{-6}; б) e^{20}.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+5}{x^3-3x^2+1}\right)^{5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-9\sqrt{x}-4}{x-3}\right)^{2\sqrt{x}-3}$.

Відповідь: а) e^{15}; б) e^{-18}.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+4}{x^3-3}\right)^{3x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-11\sqrt{x}+2}\right)^{6-\sqrt{x}}$.

Відповідь: а) e^{3}; б) e^{-11}.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-3}{x^3+x^2+4}\right)^{6x+1}$. б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-4}{x-9}\right)^{8\sqrt{x}+5}$

Відповідь: а) e^{-6}; б) e^{24}.

Завдання 38. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{8x^2}}$.

Примітка. Нагадаємо *асимптотичні формули*

$$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad \cos x-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{8x^2}}=[1^\infty]=e^A,$$

де $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos 10x-1)\dfrac{1}{8x^2}=\left[\begin{array}{c}\cos u-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{u^2}{2},\\ u=10x \underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{(10x)^2}{2}}{8x^2}=-\dfrac{25}{4}$,

а отже, $e^A=e^{-25/4}$.

Відповідь: $e^A=e^{-25/4}$. ▶

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 13x)^{\frac{1}{2x^2}}$. Відповідь: $e^{-169/4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 12x)^{\frac{1}{3x^2}}$. Відповідь: e^{-24}.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 11x)^{\frac{1}{4x^2}}$. Відповідь: $e^{-121/8}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{5x^2}}$. Відповідь: e^{-10}.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 9x)^{\frac{1}{6x^2}}$. Відповідь: $e^{-27/4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 8x)^{\frac{1}{7x^2}}$. Відповідь: $e^{-32/7}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{\frac{1}{8x^2}}$. Відповідь: $e^{-49/16}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\frac{1}{9x^2}}$. Відповідь: e^{-2}.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{10x^2}}$. Відповідь: $e^{-5/4}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{11x^2}}$. Відповідь: $e^{-8/11}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{12x^2}}$. Відповідь: $e^{-3/8}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{13x^2}}$. Відповідь: $e^{-2/13}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 14x)^{\frac{1}{2x^2}}$. Відповідь: e^{-49}.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 15x)^{\frac{1}{3x^2}}$. Відповідь: $e^{-75/2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 16x)^{\frac{1}{4x^2}}$. Відповідь: e^{-32}.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 17x)^{\frac{1}{5x^2}}$. Відповідь: $e^{-289/10}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 18x)^{\frac{1}{6x^2}}$. Відповідь: e^{-27}.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 19x)^{\frac{1}{7x^2}}$. Відповідь: $e^{-361/14}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{14x^2}}$. Відповідь: $e^{-1/7}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{15x^2}}$. Відповідь: $e^{-3/10}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{16x^2}}$. Відповідь: $e^{-1/2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{17x^2}}$. Відповідь: $e^{-25/34}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\frac{1}{18x^2}}$. Відповідь: e^{-1}.

24. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{\frac{1}{19x^2}}$. Відповідь: $e^{-49/38}$.

Завдання 39. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{25^{x^2}+36^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{25^{x^2}+36^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Примітка. Нагадаємо визначну границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(0<a\neq 1)$ та її наслідки у вигляді *асимптотичних формул*

$$a^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln a, \quad a^x \underset{x\to 0}{=} 1+x\ln a+o(x).$$

Розв'язання. а) Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{25^{x^2}+36^x}{2}\right)^{1/x}=[1^\infty]=e^A,$$

де $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{25^{x^2}+36^x}{2}-1\right)\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{25^{x^2}-1}{x}+\dfrac{36^x-1}{x}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\ln 25+o(x^2)}{x}+\frac{x\ln 36+o(x)}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\big(x\ln 25+o(x)+\ln 36+o(1)\big)=\frac{1}{2}\ln 36=\ln 6,$$

а отже, $e^A=e^{\ln 6}=6$

б) Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{25^{x^2}+36^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}=[1^\infty]=e^A,$$

де $A=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{25^{x^2}+36^{x^2}}{2}-1\right)\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{25^{x^2}-1}{x^2}+\frac{36^{x^2}-1}{x^2}\right)=$

$$=\frac{1}{2}(\ln25+\ln36)=\ln30,$$

а отже, $e^A=e^{\ln30}=30$

Відповідь: а) 6; б) 30. ▶

1. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^{x^2}+13^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+13^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{26}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+13^{x^2}}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^{x^2}+13^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{26}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^{x^2}+12^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^x+12^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{12}$; б) 6.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^x+12^{x^2}}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^{x^2}+12^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{3}$; б) 6.

5. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4^{x^2}+11^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4^x+11^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{11}$; б) $2\sqrt{11}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4^x+11^{x^2}}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4^{x^2}+11^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) 2; б) $2\sqrt{11}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5^{x^2}+10^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5^x+10^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5^x+10^{x^2}}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5^{x^2}+10^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{5}$; б) $5\sqrt{2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^{x^2}+9^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^x+9^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) 3; б) $3\sqrt{6}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^x+9^{x^2}}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^{x^2}+9^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{6}$; б) $3\sqrt{6}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7^{x^2}+8^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7^x+8^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{8}$; б) $2\sqrt{14}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7^x+8^{x^2}}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7^{x^2}+8^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{7}$; б) $2\sqrt{14}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x^2}+25^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+25^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) 5; б) $5\sqrt{2}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^{x^2}+24^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^{x^2}+24^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $2\sqrt{6}$; б) $6\sqrt{2}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4^{x^2}+23^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4^x+23^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{23}$; б) $\sqrt{92}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5^{x^2}+22^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5^{x^2}+22^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{22}$; б) $\sqrt{110}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^{x^2}+21^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^{x}+21^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{21}$; б) $\sqrt{126}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7^{x^2}+20^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7^{x^2}+20^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $2\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{35}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{8^{x^2}+19^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{8^{x}+19^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{19}$; б) $2\sqrt{38}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9^{x^2}+18^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9^{x^2}+18^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $3\sqrt{2}$; б) $9\sqrt{2}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{10^{x^2}+17^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{10^{x}+17^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{170}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{11^{x^2}+16^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{11^{x^2}+16^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) 4; б) $4\sqrt{11}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{12^{x^2}+15^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{12^{x}+15^x}{2}\right)^{1/x}$.

Відповідь: а) $\sqrt{15}$; б) $6\sqrt{5}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{13^{x^2}+14^x}{2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{13^{x^2}+14^{x^2}}{2}\right)^{1/x^2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{182}$.

Завдання 40. Перевірити правильність рівності:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x}\right)^{1/x^2}=e^{-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{arsh} 2x}\right)^{1/x^2}=1$.

Примітка. Скористатися *асимптотичними формулами* при $x \to 0$:

1) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^3)$; 2) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$;

3) $\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$; 4) $\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$;

5) $\operatorname{acrsin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$; 6) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$;

7) $\operatorname{arsh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$; 8) $\operatorname{arth} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$.

Розв'язання. а) Скористаємося правилом розкриття невизначеності $[1^\infty]$ та формулами 1 і 2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x}\right)^{1/x^2} = [1^\infty] = e^A \text{, де}$$

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x} - 1\right)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{2x} - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right) - \left(\cancel{2x} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)\right)}{2x \cdot x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^3 + o(x^3)}{2x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-2 + o(1)\right) = -2,$$

тоді, $e^A = e^{-2}$. Отже, рівність правильна.

б) Скористаємося правилом розкриття невизначеності $[1^\infty]$ та формулами 1 і 7:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{arsh} 2x}\right)^{1/x^2} = [1^\infty] = e^A \text{, де}$$

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{arsh} 2x} - 1\right)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - \operatorname{arsh} 2x}{\operatorname{arsh} 2x \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{2x} - \cancel{\frac{(2x)^3}{3!}} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right) - \left(2x - \cancel{\frac{(2x)^3}{6}} + \frac{3(2x)^5}{40} + o(x^5)\right)}{2x \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{32}{15}x^5 + o(x^5)}{2x^3} == \lim_{x\to 0}\left(-\frac{16}{15}x^2 + o(x^2)\right) = 0$$

тоді $e^A = e^0 = 1$. Отже, рівність правильна. ►

1. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{sh}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-3}$.

2. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{th}3x}\right)^{1/x^2}=e^{3/2}$.

3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\arcsin 3x}\right)^{1/x^2}=e^{-3}$.

4. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{arctg}3x}\right)^{1/x^2}=e^{3/2}$.

5. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{arth}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-9/2}$.

6. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{sh}3x}\right)^{1/x^2}=e^{3/2}$.

7. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{th}3x}\right)^{1/x^2}=e^{6}$.

8. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\arcsin 3x}\right)^{1/x^2}=e^{3/2}$.

9. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{arctg}3x}\right)^{1/x^2}=e^{6}$.

10. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{arsh}3x}\right)^{1/x^2}=e^{9/2}$.

11. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{arth}3x}\right)^{1/x^2}=1$.

12. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}3x}{\operatorname{th}3x}\right)^{1/x^2}=e^{9/2}$.

13. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}3x}{\arcsin 3x}\right)^{1/x^2}=1$.

14. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}3x}{\operatorname{arctg}3x}\right)^{1/x^2}=e^{9/2}$.

15. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}3x}{\operatorname{arsh}3x}\right)^{1/x^2}=e^{3}$.

16. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}3x}{\operatorname{arth}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-3/2}$.

17. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{th}3x}{\arcsin 3x}\right)^{1/x^2}=e^{-9/2}$.

18. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{th}3x}{\operatorname{arctg}3x}\right)^{1/x^2}=1$.

19. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{th}3x}{\operatorname{arsh}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-3/2}$.

20. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{th}3x}{\operatorname{arth}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-6}$.

21. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg}3x}\right)^{1/x^2}=e^{9/2}$.

22. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arsh}3x}\right)^{1/x^2}=e^{3}$.

23. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin 3x}{\operatorname{arth}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-3/2}$.

24. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg}3x}{\operatorname{arth}3x}\right)^{1/x^2}=e^{-6}$.

Завдання 41. Знайти границі:

а) $\lim_{x\to0}\left(\frac{2+x10^x}{2+x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x^2)}$; б) $\lim_{x\to0}\left(\frac{2-x10^x}{2-x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x^2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x10^x}{2+x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x10^x}{2-x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x)}$.

Розв'язання. а) Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x10^x}{2+x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x^2)}=[1^\infty]=e^A \text{, де}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x10^x}{2+x11^x}-1\right)\frac{1}{\ln(1+9x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x10^x-x11^x}{(2+x11^x)\ln(1+9x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x11^x\left(\left(\frac{10}{11}\right)^x-1\right)}{(2+x11^x)\ln(1+9x^2)}=\left[\begin{array}{c} a^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x\ln a; \\ \ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u,\quad u=9x^2\underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right]=$$

$$==\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}11^x\cancel{x}\ln\left(\frac{10}{11}\right)}{(2+x11^x)9\cancel{x^2}}=\frac{\ln\left(\frac{10}{11}\right)}{18}=\ln\left(\frac{10}{11}\right)^{1/18},$$

а отже, $e^A=e^{\ln\left(\frac{10}{11}\right)^{1/18}}=\left(\dfrac{10}{11}\right)^{1/18}$.

б) Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x10^x}{2-x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x^2)}=[1^\infty]=e^A$, де

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x10^x}{2-x11^x}-1\right)\frac{1}{\ln(1+9x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x11^x-x10^x}{(2-x11^x)\ln(1+9x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x10^x\left(\left(\frac{11}{10}\right)^x-1\right)}{(2-x11^x)\ln(1+9x^2)}=\left[\begin{array}{c} a^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x\ln a; \\ \ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u,\quad u=9x^2\underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}10^x\cancel{x}\ln\left(\frac{11}{10}\right)}{(2-x11^x)9\cancel{x^2}}=\frac{\ln\left(\frac{11}{10}\right)}{18}=\ln\left(\frac{11}{10}\right)^{1/18},$$

а отже, $e^A=e^{\ln\left(\frac{11}{10}\right)^{1/18}}=\left(\dfrac{11}{10}\right)^{1/18}$.

в) Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x10^x}{2+x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x)}=[1^\infty]=e^A$, де

$$A=\lim_{x\to0}\left(\frac{2-x10^x}{2+x11^x}-1\right)\frac{1}{\ln(1+9x)}=\lim_{x\to0}\frac{-x10^x-x11^x}{(2+x11^x)\ln(1+9x)}=$$

$$=\left[\ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u,\quad u=9x\underset{x\to0}{\to}0\right]=\lim_{x\to0}\frac{-\cancel{x}(10^x+11^x)}{(2+x11^x)9\cancel{x}}=\frac{-2}{2\cdot9}=-\frac{1}{9},$$

а отже, $e^A=e^{-1/9}$.

г) Маємо: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x10^x}{2-x11^x}\right)^{1/\ln(1+9x)}=[1^\infty]=e^A$, де

$$A=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+x10^x}{2-x11^x}-1\right)\frac{1}{\ln(1+9x)}=\lim_{x\to0}\frac{x10^x+x11^x}{(2+x11^x)\ln(1+9x)}=$$

$$=\left[\ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u,\quad u=9x\underset{x\to0}{\to}0\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(10^x+11^x)}{(2+x11^x)9\cancel{x}}=\frac{2}{2\cdot9}=\frac{1}{9},$$

а отже, $e^A=e^{1/9}$.

Відповідь: а) $(10/11)^{1/18}$; б) $(11/10)^{1/18}$; в) $e^{-1/9}$; г) $e^{1/9}$. ►

1. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5+x2^x}{5+x3^x}\right)^{1/\sin^2(4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5-x2^x}{5-x3^x}\right)^{1/\sin^2(4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5-x2^x}{5+x3^x}\right)^{1/\sin(4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5+x2^x}{5-x3^x}\right)^{1/\sin(4x)}$.

Відповідь: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/80}$; б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/80}$; в) $e^{-1/10}$; г) $e^{1/10}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5+x3^x}{5+x4^x}\right)^{1/\sin^2(2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5-x3^x}{5-x4^x}\right)^{1/\sin^2(2x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5-x3^x}{5+x4^x}\right)^{1/\sin(2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5+x3^x}{5-x4^x}\right)^{1/\sin(2x)}$.

Відповідь: а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/20}$; б) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/20}$; в) $e^{-1/5}$; г) $e^{1/5}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5+x4^x}{5+x2^x}\right)^{1/\sin^2(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5-x4^x}{5-x2^x}\right)^{1/\sin^2(3x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5-x4^x}{5+x2^x}\right)^{1/\sin(3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5+x4^x}{5-x2^x}\right)^{1/\sin(3x)}$.

Відповідь: а) $2^{1/45}$; б) $2^{-1/45}$; в) $e^{-2/15}$; г) $e^{2/15}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x3^x}{2+x4^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x3^x}{2-x4^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2(5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x3^x}{2+x4^x}\right)^{1/\mathrm{tg}(5x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x3^x}{2-x4^x}\right)^{1/\mathrm{tg}(5x)}$.

Відповідь: а) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1/50}$; б) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/50}$; в) $e^{-1/5}$; г) $e^{1/5}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x4^x}{2+x5^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x4^x}{2-x5^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2(3x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x4^x}{2+x5^x}\right)^{1/\mathrm{tg}(3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x4^x}{2-x5^x}\right)^{1/\mathrm{tg}(3x)}$.

Відповідь: а) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/18}$; б) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{1/18}$; в) $e^{-1/3}$; г) $e^{1/3}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x5^x}{2+x3^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2(4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x5^x}{2+x3^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2(4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x5^x}{2+x3^x}\right)^{1/\mathrm{tg}(4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+x5^x}{2-x3^x}\right)^{1/\mathrm{tg}(4x)}$.

Відповідь: а) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{1/32}$; б) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{1/32}$; в) $e^{-1/4}$; г) $e^{1/4}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5+x3^x}{5+x2^x}\right)^{1/\arcsin^2(4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5-x3^x}{5-x2^x}\right)^{1/\arcsin^2(4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5-x3^x}{5+x2^x}\right)^{1/\arcsin(4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5+x3^x}{5-x2^x}\right)^{1/\arcsin(4x)}$.

Відповідь: а) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/80}$; б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/80}$; в) $e^{-1/10}$; г) $e^{1/10}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5+x2^x}{5+x4^x}\right)^{1/\arcsin^2(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5-x2^x}{5-x4^x}\right)^{1/\arcsin^2(3x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-x2^x}{5+x4^x}\right)^{1/\arcsin(3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5+x2^x}{5-x4^x}\right)^{1/\arcsin(3x)}$.

Відповідь: а) $2^{-1/45}$; б) $2^{1/45}$; в) $e^{-2/15}$; г) $e^{2/15}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5+x4^x}{5+x3^x}\right)^{1/\arcsin^2(2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-x4^x}{5-x3^x}\right)^{1/\arcsin^2(2x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-x4^x}{5+x3^x}\right)^{1/\arcsin(2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5+x4^x}{5-x3^x}\right)^{1/\arcsin(2x)}$.

Відповідь: а) $(4/3)^{1/20}$; б) $(3/4)^{1/20}$; в) $e^{-1/5}$; г) $e^{1/5}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x4^x}{2+x3^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}^2(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x4^x}{2-x3^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}^2(5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x4^x}{2+x3^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}(5x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x4^x}{2-x3^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}(5x)}$.

Відповідь: а) $(4/3)^{1/50}$; б) $(3/4)^{1/50}$; в) $e^{-1/5}$; г) $e^{1/5}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x5^x}{2+x4^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}^2(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x5^x}{2-x4^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}^2(3x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x5^x}{2+x4^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}(3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x5^x}{2-x4^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}(3x)}$.

Відповідь: а) $(5/4)^{1/18}$; б) $(4/5)^{1/18}$; в) $e^{-1/3}$; г) $e^{1/3}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x3^x}{2+x5^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}^2(4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x3^x}{2-x5^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}^2(4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x3^x}{2+x5^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}(4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x3^x}{2-x5^x}\right)^{1/\operatorname{arctg}(4x)}$.

Відповідь: а) $(3/5)^{1/32}$; б) $(5/3)^{1/32}$; в) $e^{-1/4}$; г) $e^{1/4}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x4^x}{3+x5^x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2(6x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x4^x}{3-x5^x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2(6x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x4^x}{3+x5^x}\right)^{1/\operatorname{sh}(6x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x4^x}{3-x5^x}\right)^{1/\operatorname{sh}(6x)}$.

Відповідь: а) $(4/5)^{1/108}$; б) $(5/4)^{1/108}$; в) $e^{-1/9}$; г) $e^{1/9}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x5^x}{3+x6^x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2(4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x5^x}{3-x6^x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2(4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x5^x}{3+x6^x}\right)^{1/\operatorname{sh}(4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x5^x}{3-x6^x}\right)^{1/\operatorname{sh}(4x)}$.

Відповідь: а) $(5/6)^{1/48}$; б) $(6/5)^{1/48}$; в) $e^{-1/6}$; г) $e^{1/6}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x6^x}{3+x4^x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x6^x}{3-x4^x}\right)^{1/\operatorname{sh}^2(5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x6^x}{3+x4^x}\right)^{1/\operatorname{sh}(5x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x6^x}{3-x4^x}\right)^{1/\operatorname{sh}(5x)}$.

Відповідь: а) $(3/2)^{1/75}$; б) $(2/3)^{1/75}$; в) $e^{-2/15}$; г) $e^{2/15}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x5^x}{4+x6^x}\right)^{1/\operatorname{th}^2(7x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x5^x}{4-x6^x}\right)^{1/\operatorname{th}^2(7x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x5^x}{4+x6^x}\right)^{1/\operatorname{th}(7x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x5^x}{4-x6^x}\right)^{1/\operatorname{th}(7x)}$.

Відповідь: а) $(5/6)^{1/196}$; б) $(6/5)^{1/196}$; в) $e^{-1/14}$; г) $e^{1/14}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x6^x}{4+x7^x}\right)^{1/\operatorname{th}^2(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x6^x}{4-x7^x}\right)^{1/\operatorname{th}^2(5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x6^x}{4+x7^x}\right)^{1/\operatorname{th}(5x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x6^x}{4-x7^x}\right)^{1/\operatorname{th}(5x)}$.

Відповідь: а) $(6/7)^{1/100}$; б) $(7/6)^{1/100}$; в) $e^{-1/10}$; г) $e^{1/10}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x7^x}{4+x5^x}\right)^{1/\operatorname{th}^2(6x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x7^x}{4-x5^x}\right)^{1/\operatorname{th}^2(6x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x7^x}{4+x5^x}\right)^{1/\operatorname{th}(6x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x7^x}{4-x5^x}\right)^{1/\operatorname{th}(6x)}$.

Відповідь: а) $(7/5)^{1/144}$; б) $(5/7)^{1/144}$; в) $e^{-1/12}$; г) $e^{1/12}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x5^x}{7+x4^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}^2(6x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7-x5^x}{7-x4^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}^2(6x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7-x5^x}{7+x4^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}(6x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x5^x}{7-x4^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}(6x)}$.

Відповідь: а) $(5/4)^{1/252}$; б) $(4/5)^{1/252}$; в) $e^{-1/21}$; г) $e^{1/21}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x6^x}{7+x5^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}^2(4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7-x6^x}{7-x5^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}^2(4x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7-x6^x}{7+x5^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}(4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x6^x}{7-x5^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}(4x)}$.

Відповідь: а) $(6/5)^{1/112}$; б) $(5/6)^{1/112}$; в) $e^{-1/14}$; г) $e^{1/14}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x4^x}{7+x6^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}^2(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7-x4^x}{7-x6^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}^2(5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7-x4^x}{7+x6^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}(5x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x4^x}{7-x6^x}\right)^{1/\operatorname{arsh}(5x)}$.

Відповідь: а) $(2/3)^{1/175}$; б) $(3/2)^{1/175}$; в) $e^{-2/35}$; г) $e^{2/35}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x6^x}{4+x5^x}\right)^{1/\operatorname{arth}^2(7x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x6^x}{4-x5^x}\right)^{1/\operatorname{arth}^2(7x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x6^x}{4+x5^x}\right)^{1/\operatorname{arth}(7x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x6^x}{4-x5^x}\right)^{1/\operatorname{arth}(7x)}$.

Відповідь: а) $(6/5)^{1/196}$; б) $(5/6)^{1/196}$; в) $e^{-1/14}$; г) $e^{1/14}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x7^x}{4+x6^x}\right)^{1/\operatorname{arth}^2(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x7^x}{4-x6^x}\right)^{1/\operatorname{arth}^2(5x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x7^x}{4+x6^x}\right)^{1/\operatorname{arth}(5x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x7^x}{4-x6^x}\right)^{1/\operatorname{arth}(5x)}$.

Відповідь: а) $(7/6)^{1/100}$; б) $(6/7)^{1/100}$; в) $e^{-1/10}$; г) $e^{1/10}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x5^x}{4+x7^x}\right)^{1/\operatorname{arth}^2(6x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x5^x}{4-x7^x}\right)^{1/\operatorname{arth}^2(6x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-x5^x}{4+x7^x}\right)^{1/\operatorname{arth}(6x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x5^x}{4-x7^x}\right)^{1/\operatorname{arth}(6x)}$.

Відповідь: а) $(5/7)^{1/144}$; б) $(7/5)^{1/144}$; в) $e^{-1/12}$; г) $e^{1/12}$.

Завдання 42. Знайти односторонні границі $f(+0)$ і $f(-0)$ функції

$$f(x)=\frac{e^{-8|x|}-1-8x}{13x+19|x|}.$$

Розв'язання. Знайдемо праву границю:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{e^{-8|x|}-1-8x}{13x+19|x|}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{e^{-8x}-1-8x}{13x+19x}=\left[e^u=1+u+o(u),\quad u=-8x\underset{x\to 0}{\to}0\right]=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\cancel{1}-8x+o(x)\right)-\cancel{1}-8x}{32x}=\lim_{x\to+0}\frac{-16x+o(x)}{32x}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)=-\frac{1}{2};$$

знайдемо ліву границю:

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{e^{-8|x|}-1-8x}{13x+19|x|}=$$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{e^{8x}-1-8x}{13x-19x}=\left[e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+o(u^2),\quad u=8x\underset{x\to 0}{\to}0\right]=$$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{\left(\cancel{1+8x}+32x^2+o(x^2)\right)\cancel{-1-8x}}{-6x}=\lim_{x\to-0}\frac{32x^2+o(x^2)}{-6x}=$$

$$=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{16}{3}x+o(x)\right)=0.$$

Відповідь: $f(+0)=-\dfrac{1}{2}$, $f(-0)=0$. ►

1. а) $f(x)=\dfrac{e^{2|x|}-1+2x}{3x+4|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-2|x|}-1+2x}{3x+4|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=\dfrac{4}{7}$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=-4$.

2. а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1+2|x|}{3|x|-4x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-2x}-1+2|x|}{3|x|-4x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=-4$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=\dfrac{4}{7}$.

3. а) $f(x)=\dfrac{e^{3|x|}-1+3x}{4x+2|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-3|x|}-1+3x}{4x+2|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=1$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=3$.

4. а) $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1+3|x|}{4|x|-2x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-3x}-1+3|x|}{4|x|-2x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=3$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=1$.

5. а) $f(x)=\dfrac{e^{4|x|}-1+4|x|}{2x+3|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-4|x|}-1+4|x|}{2x+3|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=\dfrac{8}{5}$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=-8$.

6. а) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4|x|}{2|x|-3x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-4x}-1+4|x|}{2|x|-3x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=-8$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=\dfrac{8}{5}$.

7. а) $f(x)=\dfrac{e^{3|x|}-1+3x}{4x+5|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-3|x|}-1+3x}{4x+5|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=\dfrac{2}{3}$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=-6$.

8. а) $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1+3|x|}{4|x|-5x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-3x}-1+3|x|}{4|x|-5x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=-6$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=\dfrac{2}{3}$.

9. а) $f(x)=\dfrac{e^{4|x|}-1+4x}{5x+3|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-4|x|}-1+4x}{5x+3|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=1$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=4$.

10. а) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1+4|x|}{5|x|-3x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-4x}-1+4|x|}{5|x|-3x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=4$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=1$.

11. а) $f(x)=\dfrac{e^{5|x|}-1+5x}{3x+4|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-5|x|}-1+5x}{3x+4|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=\dfrac{10}{7}$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=-10$.

12. а) $f(x)=\dfrac{e^{5x}-1+5|x|}{3|x|-4x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-5x}-1+5|x|}{3|x|-4x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=-10$, $f(-0)=0$; б) $f(+0)=0$, $f(-0)=\dfrac{10}{7}$.

13. а) $f(x)=\dfrac{e^{4|x|}-1-4x}{5x+6|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-4|x|}-1-4x}{5x+6|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=8$; б) $f(+0)=-\dfrac{8}{11}$, $f(-0)=\dfrac{10}{7}$.

14. а) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1-4|x|}{5|x|-6x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-4x}-1-4|x|}{5|x|-6x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=-\dfrac{8}{11}$; б) $f(+0)=8$, $f(-0)=0$.

15. а) $f(x)=\dfrac{e^{5|x|}-1-5x}{6x+4|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-5|x|}-1-5x}{6x+4|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=-5$; б) $f(+0)=-1$, $f(-0)=0$.

16. а) $f(x)=\dfrac{e^{5x}-1-5|x|}{6|x|-4x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-5x}-1-5|x|}{6|x|-4x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=-1$; б) $f(+0)=-5$, $f(-0)=0$.

17. а) $f(x)=\dfrac{e^{6|x|}-1-6x}{4x+5|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-6|x|}-1-6x}{4x+5|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=12$; б) $f(+0)=-\dfrac{4}{3}$, $f(-0)=0$.

18. а) $f(x)=\dfrac{e^{6x}-1-6|x|}{4|x|-5x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-6x}-1-6|x|}{4|x|-5x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=-4/3$; б) $f(+0)=12$, $f(-0)=0$.

19. а) $f(x)=\dfrac{e^{5|x|}-1-5x}{6x+7|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-5|x|}-1-5x}{6x+7|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0$, $f(-0)=10$; б) $f(+0)=-\dfrac{10}{13}$, $f(-0)=0$.

20. а) $f(x)=\dfrac{e^{5x}-1-5|x|}{6|x|-7x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-5x}-1-5|x|}{6|x|-7x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0,\ f(-0)=-\dfrac{10}{13}$; б) $f(+0)=10,\ f(-0)=0$.

21. а) $f(x)=\dfrac{e^{6|x|}-1-6x}{7x+5|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-6|x|}-1-6x}{7x+5|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0,\ f(-0)=-6$; б) $f(+0)=-1,\ f(-0)=0$.

22. а) $f(x)=\dfrac{e^{6x}-1-6|x|}{7|x|-5x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-6x}-1-6|x|}{7|x|-5x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0,\ f(-0)=-1$; б) $f(+0)=-6,\ f(-0)=0$.

23. а) $f(x)=\dfrac{e^{7|x|}-1-7x}{5x+6|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-7|x|}-1-7x}{5x+6|x|}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0,\ f(-0)=14$; б) $f(+0)=-\dfrac{14}{11},\ f(-0)=0$.

24. а) $f(x)=\dfrac{e^{7x}-1-7|x|}{5|x|-6x}$; б) $f(x)=\dfrac{e^{-7x}-1-7|x|}{5|x|-6x}$.

Відповідь: а) $f(+0)=0,\ f(-0)=-\dfrac{14}{11}$; б) $f(+0)=14,\ f(-0)=0$.

Завдання 43. Для функції $f(x)$ знайти *головну степеневу частину* вигляду Cx^{α} $(C\neq 0)$ при $x\to 0$ (тобто таку, що $f(x)\sim Cx^{\alpha}$ при $x\to 0$, або, що те саме, $f(x)=Cx^{\alpha}+o(x^{\alpha})$ при $x\to 0$):

а) $f(x)=e^{x}\sin x-x(1+x)$; б) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}-1$;

в) $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$.

Примітка. Важливими є *п'ять асимптотичних формул*:

1) $e^{x}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\left[\begin{array}{l}o(x^n)\\ O(x^{n+1})\end{array}\right.$ при $x\to 0$;

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\left[\begin{array}{l}o(x^{2n-1})\vee o(x^{2n})\\ O(x^{2n+1})\end{array}\right.$ при $x\to 0$;

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\left[\begin{array}{l}o(x^{2n})\vee o(x^{2n+1})\\ O(x^{2n+2})\end{array}\right.$ при $x\to 0$;

4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\left[\begin{array}{l} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{array}\right.$ при $x\to 0$;

5) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\left[\begin{array}{l} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{array}\right. \text{при } x\to 0 .$$

Розв'язання. а) Скориставшись формулами 1 і 2, одержимо

$$f(x)=e^x\sin x-x(1+x)=$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)=$$

$$=\cancel{x+x^2}+x^3\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+o(x^3)-\cancel{x(1+x)}=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{3}x^3,$$

звідки $C=\dfrac{1}{3},\ \alpha=3$.

б) Подамо функцію $f(x)=(\cos x)^{\sin x}-1$ у вигляді

$$f(x)=(\cos x)^{\sin x}-1=e^{\sin x\ln(\cos x)}-1 .$$

Скористаємося формулами 2, 3 і 4:

$$\sin x\underset{x\to 0}{=}x+o(x^2),\quad \cos x\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{2}+o(x^3),\quad \ln(1+u)\underset{u\to 0}{=}u+o(u),$$

$$u=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\underset{x\to 0}{\to}0,\quad \ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\underset{x\to 0}{=}-\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

Тоді

$$f(x)=e^{\left(x+o(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}-1=e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^4)}-1=$$

$$=\left[e^u\underset{u\to 0}{=}1+u+o(u),\quad u=-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\underset{x\to 0}{\to}0\right]=$$

$$=1+\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right)+o\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right)-1=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{2},$$

звідки $C=-\dfrac{1}{2},\ \alpha=3$.

Зазначимо, що з урахуванням асимптотичної формули

$$e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u, \quad u = -\frac{x^3}{2} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

можна розв'язувати так:

$$f(x) = e^{\left(x+o(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} - 1 = e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^4)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}.$$

в) Скористаємося формулою 5:

$$f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x} = (1-2x)^{1/2} - (1-3x)^{1/3} =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 + o(x^2)\right] -$$

$$- \left[1 + \frac{1}{3}(-3x) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(-3x)^2 + o(x^2)\right] =$$

$$= \left[\cancel{1} - \cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] - \left[\cancel{1} - \cancel{x} - x^2 + o(x^2)\right] = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2,$$

звідки $C = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$.

Відповідь: а) $C = \frac{1}{3}$, $\alpha = 3$; б) $C = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 3$; в) $C = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$. ▶

1. $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) - \frac{2}{3}\sqrt{9 + 3x^3}$. Відповідь: $C = \frac{1}{4}$, $\alpha = 4$.

2. $f(x) = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1 - \frac{x^2}{2}$. Відповідь: $C = -\frac{1}{24}$, $\alpha = 4$.

3. $f(x) = 1 - (\cos x)^{\sin x} - \frac{x^3}{2}$. Відповідь: $C = -\frac{1}{8}$, $\alpha = 6$.

4. $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + \ln\cos x$. Відповідь: $C = -\frac{1}{4}$, $\alpha = 4$.

5. $f(x) = \sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}$. Відповідь: $C = \frac{19}{90}$, $\alpha = 5$.

6. $f(x) = \mathrm{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}$. Відповідь: $C = -\frac{1}{4}$, $\alpha = 4$.

7. $f(x) = \ln\cos x + e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Відповідь: $C = \frac{1}{24}$, $\alpha = 4$.

8. $f(x)=(x-1)e^{\sin x}+\cos x+\sqrt{1-2x^3}-1.$ Відповідь: $C=-\frac{1}{3}$, $\alpha=3$.

9. $f(x)=\sin^2 x-x^2e^{-\frac{x^2}{3}}.$ Відповідь: $C=-\frac{1}{90}$, $\alpha=6$.

10. $f(x)=1-\sqrt{1+x^2}\cos x-\frac{x^4}{3}.$ Відповідь: $C=-\frac{13}{90}$, $\alpha=6$.

11. $f(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big)-\cos x+e^{-\frac{x^3}{6}}-x.$ Відповідь: $C=-\frac{1}{24}$, $\alpha=4$.

12. $f(x)=\sin(\operatorname{th} x)-x+\frac{x^3}{2}.$ Відповідь: $C=\frac{37}{120}$, $\alpha=5$.

13. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}-\frac{4x}{3}.$ Відповідь: $C=\frac{44}{81}$, $\alpha=3$.

14. $f(x)=xe^{\sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)}-\operatorname{th} x-\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{3}}\right).$ Відповідь: $C=\frac{2}{3}$, $\alpha=3$.

15. $f(x)=\ln\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+\sqrt{1+\sin^4 x}.$ Відповідь: $C=\frac{7}{24}$, $\alpha=4$.

16. $f(x)=\sqrt[5]{1+5x}+\sqrt{1-2x}-2+5x\sin\left(\frac{x}{2}\right).$ Відповідь: $C=\frac{11}{2}$, $\alpha=3$.

17. $f(x)=(x^2+x-1)e^{x-\frac{x^2}{2}}+\sqrt{1-4x^2}.$ Відповідь: $C=\frac{4}{3}$, $\alpha=3$.

18. $f(x)=x^2e^{\sin x}-\operatorname{sh}(x^2)-x^2\operatorname{th} x.$ Відповідь: $C=\frac{1}{2}$, $\alpha=4$.

19. $f(x)=\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt[4]{1+x}+\frac{x}{4(1+x^2)}.$ Відповідь: $C=-\frac{39}{128}$, $\alpha=3$.

20. $f(x)=\ln(1+x^2)-x^2\cos(2x)-\frac{3x^4}{2+3x^4}.$ Відповідь: $C=-\frac{1}{3}$, $\alpha=6$.

21. $f(x)=\sqrt{1-9x^2}-\cos(3\sin x).$ Відповідь: $C=-15$, $\alpha=4$.

22. $f(x)=\sqrt{1+2\sin(x^2)}-e^{x^2}.$ Відповідь: $C=-1$, $\alpha=4$.

23. $f(x)=\sqrt{\cos x}-e^{-\operatorname{tg}(x^2/4)}.$ Відповідь: $C=-\frac{1}{24}$, $\alpha=6$.

24. $f(x)=\frac{1+x}{1+x+x^2}-\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)\operatorname{ch} x.$ Відповідь: $C=1$, $\alpha=3$.

Завдання 44. З'ясувати, чи виконуються при $x \to +\infty$ асимптотичні рівності $f(x)=O^*\big(g(x)\big)$, $f(x)=O\big(g(x)\big)$, $f(x)=o\big(g(x)\big)$, $f(x)\sim g(x)$, для таких функцій:

а) $f(x)=\dfrac{6x^2+\sqrt{x}-\cos 3x}{\operatorname{arctg} x+\sqrt{9x^{10}+x^4+1}}$, $g(x)=\dfrac{2x-\sin 9x}{x^4+5\ln x+7}$;

б) $f(x)=\dfrac{x+\ln(1+\sin^2 x)}{5x^3+\cos^{10} x}$, $g(x)=\dfrac{(4^{1/x}+4^{-x})\operatorname{arctg} x}{x^2+\sqrt{x}}$.

Примітка. Нагадаємо *важливі границі функцій*:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^x}=0 \quad (a>1), \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \quad (\alpha>0).$$

Розв'язання. а) Знайдемо границю

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6x^2+\sqrt{x}-\cos 3x\right)\left(x^4+5\ln x+7\right)}{\left(\operatorname{arctg} x+\sqrt{9x^{10}+x^4+1}\right)(2x-\sin 9x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{1}{6x\sqrt{x}}-\dfrac{\cos 3x}{6x^2}\right)\cancel{x^4}\left(1+\dfrac{5\ln x}{x^4}+\dfrac{7}{x^4}\right)}{3\cancel{x^5}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{3x^5}+\sqrt{1+\dfrac{1}{9x^6}+\dfrac{1}{9x^{10}}}\right)2\cancel{x}\left(1-\dfrac{\sin 9x}{2x}\right)}=\frac{6\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=1.$$

Зазначимо, що величину A можна знайти й по-іншому: оскільки

$$f(x)=\frac{6x^2+\sqrt{x}-\cos 3x}{\operatorname{arctg} x+\sqrt{9x^{10}+x^4+1}}=\frac{6x^2\left(1+\dfrac{1}{6x\sqrt{x}}-\dfrac{\cos 3x}{6x^2}\right)}{3x^5\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{3x^5}+\sqrt{1+\dfrac{1}{9x^6}+\dfrac{1}{9x^{10}}}\right)}\underset{x\to+\infty}{\sim}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{6x^2}{3x^5}=\frac{2}{x^3},$$

$$g(x)=\frac{2}{x^3+5\ln x+7}=\frac{2}{x^3\left(1+\dfrac{5\ln x}{x^3}+\dfrac{7}{x^3}\right)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{x^3},$$

то $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2/x^3}{2/x^3}=1$. Звідси випливають такі висновки.

Рівність $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}O^*\big(g(x)\big)$ виконується, оскільки $A=\mathrm{const}\neq 0$.

Рівність $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$ виконується, оскільки $A \in \mathbb{R}$.

Рівність $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(g(x)\big)$ не виконується, оскільки $A \neq 0$.

Рівність $f(x) \sim g(x)$ виконується, оскільки $A = 1$.

б) Знайдемо границю

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(x+\ln(1+\sin^2 x)\big)\big(x^2+\sqrt{x}\big)}{\big(5x^3+\cos^{10}x\big)(4^{1/x}+4^{-x})\operatorname{arctg} x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{x}\right)\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)}{\cancel{x^3}\left(5+\dfrac{\cos^{10}x}{x^3}\right)(4^{1/x}+4^{-x})\operatorname{arctg} x} = \frac{1\cdot 1}{5\cdot 1\cdot \pi/2} = \frac{2}{5\pi}.$$

Зазначимо, що величину A можна знайти і так:

$$f(x) = \frac{x+\ln(1+\sin^2 x)}{5x^3+\cos^{10}x} = \frac{x\left(1+\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{x}\right)}{x^3\left(5+\dfrac{\cos^{10}x}{x^3}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5x^2},$$

$$g(x) = \frac{(4^{1/x}+4^{-x})\operatorname{arctg} x}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{(4^{1/x}+4^{-x})\operatorname{arctg} x}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{x^2},$$

тоді $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{5x^2}}{\frac{\pi/2}{x^2}} = \dfrac{2}{5\pi}$. Звідси випливають такі висновки.

Рівність $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O^*\big(g(x)\big)$ виконується, оскільки $A = \text{const} \neq 0$.

Рівність $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$ виконується, оскільки $A \in \mathbb{R}$.

Рівність $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(g(x)\big)$ не виконується, оскільки $A \neq 0$.

Рівність $f(x) \sim g(x)$ не виконується, оскільки $A \neq 1$.

В і д п о в і д ь. а) так, так, ні, так; б) так, так, ні, ні. ►

1. $f(x)=\dfrac{3x-\sin^5 x+\sqrt[3]{x+1}}{\ln x+\sqrt{4x^6+5}}$, $g(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(4x^9)}{x^2+1+\sqrt[3]{x}}$. Вказівка: $A=\dfrac{3}{\pi}$.

2. $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{9x^8+\cos^2 5x}}{x+\operatorname{arctg} x}$, $g(x)=\dfrac{3x^5+4\sin^3 x}{\ln x+x^2}$. Вказівка: $A=1$.

3. $f(x)=\dfrac{(5x-\sin x)^2}{\sqrt{4x^{10}+x^7\sqrt{x}}}$, $g(x)=\dfrac{\ln x+\operatorname{arctg} x+x}{(x^2+3)^2}$. Вказівка: $A=\dfrac{25}{2}$.

4. $f(x)=\dfrac{3x^2+4\sin^4 x\cos x}{2\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+3x^3}{\sqrt{\pi^2x^2+\ln x}}$. Вказівка: $A=1$.

5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\ln x-x}{(1+x\sqrt{3})^2}$, $g(x)=\dfrac{4\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}{\pi\sqrt[6]{64x^6+7}}$. Вказівка: $A=-\dfrac{1}{3}$.

6. $f(x)=\dfrac{2x+\sin(x^8)}{\sqrt{49x^8+3}}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+\operatorname{arctg} x}}{\ln x+7x^4+9}$. Вказівка: $A=1$.

7. $f(x)=\dfrac{(x+\operatorname{arctg} x)^3}{\sqrt[5]{32x^5+9}}$, $g(x)=\dfrac{x^3\operatorname{arctg} x}{(\ln x+\sqrt{x})^2}$. Вказівка: $A=\dfrac{1}{\pi}$.

8. $f(x)=\dfrac{5\sqrt{x}+(2x-1)^3}{\sqrt{x}\operatorname{arctg} x+x^2}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{64x^8+x^7\cos x}}{\ln^2 x+x^3}$. Вказівка: $A=1$.

9. $f(x)=\dfrac{\sin x^2+40x}{\pi\sqrt{25x+3\ln x}}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{4x+\cos x}}{\operatorname{arcctg}^2 x+\operatorname{arctg} x}$. Вказівка: $A=2$.

10. $f(x)=\dfrac{3x^3+\ln\sin^2 x}{\sqrt{36x^8+\operatorname{arctg} x}}$, $g(x)=\dfrac{4x^9+\cos x}{8x^{10}+\sqrt{x+7}}$. Вказівка: $A=1$.

11. $f(x)=\dfrac{5x^4+4x^3+3}{\sqrt{\sin^2 x+16x^6}}$, $g(x)=\dfrac{\ln(x^{10}+3)+5x^6}{\ln(10x+9)+6x^5}$. Вказівка: $A=\dfrac{3}{2}$.

12. $f(x)=\dfrac{(3x+4\cos x\ln x)^2}{(x+2\ln x)^3}$, $g(x)=\dfrac{9x+\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^6+10}}$. Вказівка: $A=1$.

13. $f(x)=\dfrac{x\ln x-x^5}{4\sqrt{x+\ln x}+3x}$, $g(x)=\dfrac{\pi x^7-2x\operatorname{arctg} x}{\sin^4 x-\sqrt{x^9+4}}$. Вказівка: $A=\dfrac{1}{4\pi}$.

14. $f(x)=\dfrac{5x-\cos 6x+\ln x}{\sqrt{25x^4-\operatorname{arcctg} x}}$, $g(x)=\dfrac{4\operatorname{arctg} x}{2\pi x+\sqrt[6]{x+7}}$. Вказівка: $A=1$.

15. $f(x)=\dfrac{\cos^6 x-5x}{\sqrt{9x^4+5}-\ln x}$, $g(x)=\dfrac{5\pi(1-x)^3}{6x^4\operatorname{arctg} x+\sqrt[3]{x}}$. Вказівка: $A=1$.

16. $f(x)=\dfrac{x2^x-(\ln x-\sqrt{x})^2}{2^{x+1}x^2+\operatorname{arcctg} x}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^8+3^{-x}}}{x\operatorname{arctg} x-x^3}$. Вказівка: $A=-\dfrac{1}{2}$.

17. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}-x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2+\ln x}}$, $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x+1}\right)^2}{\sqrt[4]{x^5}-\sin(2^x)}$. Вказівка: $A=1$.

18. $f(x)=\dfrac{(2x-1)(3x+\ln x)}{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x+x^{10}}}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{36x^4+\cos x}}{x^5+x^4\ln x}$. Вказівка: $A=1$.

19. $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}\sin x-x^{12}}{x2^{1/x}+\operatorname{arcctg} x}$, $g(x)=\dfrac{(3x+1)^5(4-x)^8}{\sqrt{\ln x+x^2}}$. Вказівка: $A=0$.

20. $f(x)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg}^2 x+e^{-x}}}{(\sqrt{3}x^4+\cos x)^2}$, $g(x)=\dfrac{\pi x e^{1/x}+\ln x}{\sqrt{36x^{18}+1}}$. Вказівка: $A=1$.

21. $f(x)=\dfrac{x(2x+5^{-1/x})}{\sqrt[3]{8x^9-\ln x}}$, $g(x)=\dfrac{x(5^{-x}-8x)}{(\ln^{10}x-2x)^3}$. Вказівка: $A=1$.

22. $f(x)=\dfrac{\sqrt[10]{x^{100}+\cos(\ln x)}}{(\operatorname{arctg} x-2x)^3}$, $g(x)=\dfrac{x\operatorname{arctg} x-x^{11}}{\sqrt{\pi\ln x+x^6}}$. Вказівка: $A=0$.

23. $f(x)=\dfrac{x\ln x+x^2}{\sqrt{16x^6+x\operatorname{acctg} x}}$, $g(x)=\dfrac{x^3\operatorname{arctg} x}{\pi(x^2-\cos x)^2}$. Вказівка: $A=\dfrac{1}{2}$.

24. $f(x)=\dfrac{9x^3+3^{1/x}\cos x}{\cos^2 x+(3x-2)^4}$, $g(x)=\dfrac{\ln x+\operatorname{arcctg} x}{x\ln x+3^{-x}}$. Вказівка: $A=\dfrac{1}{9}$.

Завдання 45. Задати значення $f(0)$ для неперервності функції $f(x)$ в цій точці, якщо:

а) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+o(x^3)}{6x^2+o(x^4)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[8]{\cos 10x}}{1-\cos 12x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 22x+\sin 10x}{e^{15x}-e^{39x}}$.

Примітка. Для розв'язання потрібні такі *асимптотичні формули*:

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2) \text{ або } 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2!},$$

$$\cos^{\mu} x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{\mu x^2}{2!}+o(x^2) \text{ або } 1-\cos^{\mu} x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\mu x^2}{2!},$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x+o(x), \quad e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x).$$

Розв'язання. а) Оскільки

$$\lim_{x\to 0} f(x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+o(x^3)}{6x^2+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(x-3+o(x)\right)}{\cancel{x^2}\left(6+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3+o(x)}{6+o(x^2)}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2},$$

то слід покласти $f(0)=-1/2$.

б) Оскільки

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[8]{\cos 10x}}{1-\cos 12x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}\frac{(10x)^2}{2!}}{\frac{(12x)^2}{2!}}=\frac{100}{8\cdot 144}=\frac{25}{288},$$

то слід покласти $f(0)=25/288$.

в) Оскільки

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 22x+\sin 10x}{e^{15x}-e^{39x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(22x+o(x)\right)+\left(10x+o(x)\right)}{\left(1+15x+o(x)\right)-\left(1+39x+o(x)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{32x+o(x)}{-24x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{32+o(1)}{-24+o(1)}=\frac{32}{-24}=-\frac{4}{3}.$$

то слід покласти $f(0)=-4/3$.

Відповідь: а) $f(0)=-1/2$; б) $f(0)=25/288$; в) $f(0)=-4/3$. ▶

1. а) $f(x)=\dfrac{x^2+x^3+o(x^3)}{2x^3-3x^2+o(x^2)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 4x}}{1-\cos 5x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{e^{5x}-e^{8x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{16}{75}$; в) $\dfrac{1}{3}$.

2. а) $f(x)=\dfrac{6x-3x^2+o(x^2)}{5x^3+x+o(x^3)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[5]{\cos 3x}}{1-\cos 4x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 5x-\sin 2x}{e^{8x}-e^{3x}}$. Відповідь: а) 6; б) $\dfrac{9}{80}$; в) $\dfrac{3}{5}$.

3. а) $f(x)=\dfrac{3x^2-5x^4+o(x^3)}{x^3-4x^2+o(x^2)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 8x-\sin 5x}{e^{3x}-e^{2x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{25}{36}$; в) 3.

4. а) $f(x)=\dfrac{7x^2-x^4+o(x^6)}{7x^2-x+o(x^5)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos 3x}}{1-\cos 5x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 3x-\sin 8x}{e^{2x}-e^{5x}}$. Відповідь: а) 0; б) $\dfrac{9}{100}$; в) $\dfrac{5}{3}$.

5. а) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^3+o(x^4)}{2x^3-x^5+o(x^3)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 4x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin 4x}{e^{7x}-e^{11x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{5}{2}$; б) $\dfrac{25}{48}$; в) $\dfrac{1}{2}$.

6. а) $f(x)=\dfrac{3x^2+x^3+o(x^4)}{x^3-x+o(x^3)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[5]{\cos 4x}}{1-\cos 3x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{e^{11x}-e^{4x}}$. Відповідь: а) 0; б) $\dfrac{16}{45}$; в) $\dfrac{5}{7}$.

7. а) $f(x)=\dfrac{x^2+3x^4+o(x^3)}{x^3-4x^2+o(x^2)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos 5x}}{1-\cos 6x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 11x-\sin 7x}{e^{4x}-e^{2x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{25}{144}$; в) 2.

8. а) $f(x)=\dfrac{x^4-5x^3+o(x^3)}{x^3+x^5+o(x^5)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[6]{\cos 4x}}{1-\cos 5x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 4x-\sin 11x}{e^{2x}-e^{7x}}$. Відповідь: а) -5; б) $\dfrac{8}{75}$; в) $\dfrac{7}{5}$.

9. а) $f(x)=\dfrac{x^5-4x^3+o(x^4)}{2x^3+x^4+o(x^5)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[5]{\cos 6x}}{1-\cos 4x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 3x-\sin 4x}{e^{6x}-e^{10x}}$. Відповідь: а) -2; б) $\dfrac{9}{20}$; в) $\dfrac{1}{4}$.

10. а) $f(x)=\dfrac{x+2x^2+o(x^2)}{3x+4x^2+o(x)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[5]{\cos 4x}}{1-\cos 6x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 6x-\sin 3x}{e^{10x}-e^{4x}}$. Відповідь: а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{4}{45}$; в) $\dfrac{1}{2}$.

11. а) $f(x)=\dfrac{3x^8-7x^6+o(x^6)}{x^6+x^7+o(x^7)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos 6x}}{1-\cos 5x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 10x-\sin 6x}{e^{4x}-e^{3x}}$. Відповідь: а) -7; б) $\dfrac{9}{25}$; в) 4.

12. а) $f(x)=\dfrac{x^3+5x^4+o(x^4)}{4x^2-x^3+o(x^3)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[6]{\cos 5x}}{1-\cos 4x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 4x-\sin 10x}{e^{3x}-e^{6x}}$. Відповідь: а) 0; б) $\dfrac{25}{96}$; в) 2.

13. а) $f(x)=\dfrac{7x^4+x^5+o(x^5)}{x^6-7x^4+o(x^4)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[5]{\cos 6x}}{1-\cos 7x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{e^{8x}-e^{5x}}$. Відповідь: а) -1; б) $\dfrac{36}{245}$; в) $\dfrac{5}{3}$.

14. а) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+o(x^3)}{2x-x^2+o(x^2)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[7]{\cos 5x}}{1-\cos 6x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 5x+\sin 2x}{e^{3x}-e^{8x}}$. Відповідь: а) -4; б) $\dfrac{25}{252}$; в) $-\dfrac{7}{5}$.

15. а) $f(x)=\dfrac{x^7+9x^3+o(x^7)}{x^3-x^8+o(x^9)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[6]{\cos 7x}}{1-\cos 5x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 8x+\sin 5x}{e^{2x}-e^{3x}}$. Відповідь: а) 9; б) $\dfrac{49}{150}$; в) -13.

16. а) $f(x)=\dfrac{x^{10}-2x^5+o(x^{11})}{x^6+3x^5+o(x^6)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[6]{\cos 5x}}{1-\cos 7x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 3x+\sin 8x}{e^{5x}-e^{2x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{25}{294}$; в) $\dfrac{11}{3}$.

17. а) $f(x)=\dfrac{x^8-8x^2+o(x^2)}{3x^2+x^4+o(x^5)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[5]{\cos 7x}}{1-\cos 6x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{e^{11x}-e^{7x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{8}{3}$; б) $\dfrac{49}{180}$; в) $\dfrac{3}{2}$.

18. а) $f(x)=\dfrac{x^5+5x+o(x^4)}{7x-x^6+o(x^7)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[7]{\cos 6x}}{1-\cos 5x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 7x+\sin 2x}{e^{4x}-e^{11x}}$. Відповідь: а) $\dfrac{5}{7}$; б) $\dfrac{36}{175}$; в) $-\dfrac{9}{7}$.

19. а) $f(x)=\dfrac{3x^8-x^4+o(x^9)}{x^4+x^9+o(x^5)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[6]{\cos 7x}}{1-\cos 8x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 11x+\sin 7x}{e^{2x}-e^{4x}}$. Відповідь: а) -1; б) $\dfrac{49}{384}$; в) -9.

20. а) $f(x)=\dfrac{x^3+x^5+o(x^7)}{x^2-3x^3+o(x^2)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[8]{\cos 6x}}{1-\cos 7x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 4x+\sin 11x}{e^{7x}-e^{2x}}$. Відповідь: а) 0; б) $\dfrac{9}{98}$; в) 3.

21. а) $f(x)=\dfrac{x^6-x^5+o(x^6)}{8x^5-x^7+o(x^7)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[7]{\cos 8x}}{1-\cos 6x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 3x+\sin 4x}{e^{10x}-e^{6x}}$. Відповідь: а) $-\dfrac{1}{8}$; б) $\dfrac{16}{63}$; в) $\dfrac{7}{4}$.

22. а) $f(x)=\dfrac{6x^3+x^4+o(x^5)}{x^4-2x^3+o(x^4)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[7]{\cos 6x}}{1-\cos 8x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 6x+\sin 3x}{e^{4x}-e^{10x}}$. Відповідь: а) -3; б) $\dfrac{9}{112}$; в) $-\dfrac{3}{2}$.

23. а) $f(x)=\dfrac{5x-x^{10}+o(x^{12})}{x-x^2+o(x)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[6]{\cos 8x}}{1-\cos 9x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 10x+\sin 6x}{e^{3x}-e^{4x}}$. Відповідь: а) 5; б) $\dfrac{32}{147}$; в) -16.

24. а) $f(x)=\dfrac{2x^7+x^8+o(x^9)}{4x^9-x^7+o(x^8)}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[8]{\cos 7x}}{1-\cos 6x}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin 4x+\sin 10x}{e^{6x}-e^{3x}}$. Відповідь: а) -2; б) $\dfrac{49}{288}$; в) $\dfrac{14}{3}$.

Примітка. За означенням Коші, функція $f: X\to\mathbb{R}$, $X=D(f)\subset\mathbb{R}$, *неперервна в точці* $x_0\in X$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$ таке, що для всіх точок $x\in X$, які задовольняють умову $|x-x_0|<\delta$, справджується нерівність $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. У цьому разі пишуть $f\in C(x_0)$.

Можливі два випадки.

Якщо $x_0\in X$ – *ізольована точка* множини X (тобто існує окіл цієї точки, який має з множиною X одноточковий перетин $\{x_0\}$), то означення виконується автоматично, а отже, функція f є неперервною в кожній ізольованій точці області визначення.

Якщо ж $x_0\in X$ – *гранична точка* множини X (тобто будь-який проколотий окіл цієї точки має з множиною X непорожній перетин), то неперервність функції f у точці $x_0\in X$ означає, що існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. У задачах зазвичай трапляється саме цей випадок.

Зазначимо, що сукупність граничних точок множини X позначають символом X', а отже, якщо x_0 – гранична точка множини X, то пишуть $x_0\in X'$. Таким чином, для точки $x_0\in X$, яка є граничною точкою множини X, використовують скорочений запис $x_0\in X\bigcap X'$. Підкреслимо також, що, узагалі кажучи, гранична точка множини не обов'язково належить цій множині.

Функція f, неперервна в кожній точці множини X, називається неперервною на цій множині. У цьому разі пишуть $f\in C(X)$.

Якщо для точки $x_0\in X\bigcap X'$ рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ не виконується, то функцію f називають *розривною в точці* x_0 і пишуть

$f \notin C(x_0)$, а точку x_0 – *точкою розриву* функції f.

Розглянемо *класифікацію точок розриву* для випадку, коли точка розриву $x_0 \in X \bigcap X'$ є граничною точкою водночас для кожної з двох множин $X \bigcap (x_0;+\infty)$ і $X \bigcap (-\infty; x_0)$, тобто будь-який проколотий окіл цієї точки має непорожній перетин як з множиною $X \bigcap (x_0;+\infty)$, так і з множиною $X \bigcap (-\infty; x_0)$.

Якщо існують скінченні односторонні границі $f(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \text{const}$, але принаймні одна з них не дорівнює значенню $f(x_0)$, то точку x_0 називають *точкою розриву 1-го роду,* а величину $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ – *стрибком* функції f у точці x_0. Зокрема, якщо $[f]_{x_0} = 0$, тобто $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву* функції f (адже розрив у точці x_0 можна усунути, якщо замінити значення $f(x_0)$ на спільне значення односторонніх границь $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, а отже, виконати *умову неперервності* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$).

У решті випадків, тобто коли принаймні одна з односторонніх границь $f(x_0 \pm 0)$ не існує (зокрема, є нескінченною), точку x_0 називають *точкою розриву 2-го роду*.

Завдання 46. Дослідити функцію $f(x)$ на неперервність залежно від $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x+20}{(x-30)\left(1+\dfrac{20}{x}\right)}, \ x \neq -20, \ x \neq 0, \ x \neq 30;$$

$$f(-20) = a, \quad f(0) = b, \quad f(30) = c.$$

Розв'язання. Маємо $D(f) = \mathbb{R}$ (функція визначена в усіх точках множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел). При $x \neq -20$, $x \neq 0$, $x \neq 30$ функція f неперервна як елементарна функція, причому

$$f(x) = \frac{x+20}{(x-30)\left(1+\dfrac{20}{x}\right)} = \frac{x}{x-30}.$$

Кожна з точок $x=-20$, $x=0$, $x=30$ є граничною точкою області визначення $D(f)$.

Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=-20$. Знайдемо

$$\lim_{x\to-20} f(x)=\lim_{x\to-20}\frac{x}{x-30}=\frac{-20}{-50}=\frac{2}{5};$$

звідси випливає, що при $a=\frac{2}{5}$ функція f неперервна в цій точці, а при $a\neq\frac{2}{5}$ має усувний розрив.

Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=0$. Знайдемо

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-30}=\frac{0}{-30}=0;$$

звідси випливає, що при $b=0$ функція f неперервна в цій точці, а при $b\neq 0$ має усувний розрив.

Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=30$. Знайдемо

$$\lim_{x\to 30} f(x)=\lim_{x\to 30}\frac{x}{x-30}=\left[\frac{30}{0}\right]=\infty,$$

точніше, $\lim\limits_{x\to 30\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 30\pm 0}\frac{x}{x-30}=\left[\frac{30}{\pm 0}\right]=\pm\infty$. Звідси випливає, що для будь-якого $c\in\mathbb{R}$ функція f має в точці $x=30$ розрив 2-го роду.

Відповідь:

1) при $a=\frac{2}{5}$, $b=0$ і будь-якому $c\in\mathbb{R}$ $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{30\})$, $x=30$ – точка розриву 2-го роду;

2) при $a\neq\frac{2}{5}$, $b=0$ і будь-якому $c\in\mathbb{R}$ $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{-20;30\})$, $x=30$ – точка розриву 2-го роду, $x=-20$ – точка усувного розриву;

3) при $a=\frac{2}{5}$, $b\neq 0$ і будь-якому $c\in\mathbb{R}$ $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{0;30\})$, $x=30$ – точка розриву 2-го роду, $x=0$ – точка усувного розриву;

4) при $a\neq\frac{2}{5}$, $b\neq 0$ і будь-якому $c\in\mathbb{R}$ $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{-20;0;30\})$, $x=30$ – точка розриву 2-го роду, $x=-20$ і $x=0$ – точки усувного розриву. ►

1. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-3)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$, $x\neq-2$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(-2)=a$, $f(0)=b$, $f(3)=c$.

2. $f(x)=\dfrac{x-2}{(x+3)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$, $x\neq-3$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(-3)=a$, $f(0)=b$, $f(2)=c$.

3. $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-2)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$, $x\neq-3$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(-3)=a$, $f(0)=b$, $f(2)=c$.

4. $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+2)\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$, $x\neq-2$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(-2)=a$, $f(0)=b$, $f(3)=c$.

5. $f(x)=\dfrac{x+4}{(x-5)\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}$, $x\neq-4$, $x\neq 0$, $x\neq 5$; $f(-4)=a$, $f(0)=b$, $f(5)=c$.

6. $f(x)=\dfrac{x-4}{(x+5)\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}$, $x\neq-5$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(-5)=a$, $f(0)=b$, $f(4)=c$.

7. $f(x)=\dfrac{x+5}{(x-4)\left(1+\dfrac{5}{x}\right)}$, $x\neq-5$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(-5)=a$, $f(0)=b$, $f(4)=c$.

8. $f(x)=\dfrac{x-5}{(x+4)\left(1-\dfrac{5}{x}\right)}$, $x\neq-4$, $x\neq 0$, $x\neq 5$; $f(-4)=a$, $f(0)=b$, $f(5)=c$.

9. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-4)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$, $x\neq-2$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(-2)=a$, $f(0)=b$, $f(4)=c$.

10. $f(x)=\dfrac{x-2}{(x+4)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$, $x\neq-4$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(-4)=a$, $f(0)=b$, $f(2)=c$.

11. $f(x)=\dfrac{x+4}{(x-2)\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}$, $x\neq-4$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(-4)=a$, $f(0)=b$, $f(2)=c$.

12. $f(x)=\dfrac{x-4}{(x+2)\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}$, $x\neq-2$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(-2)=a$, $f(0)=b$, $f(4)=c$.

13. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-5)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$, $x\neq -2,\ x\neq 0,\ x\neq 5;\ f(-2)=a,\ f(0)=b,\ f(5)=c.$

14. $f(x)=\dfrac{x-2}{(x+5)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$, $x\neq -5,\ x\neq 0,\ x\neq 2;\ f(-5)=a,\ f(0)=b,\ f(2)=c.$

15. $f(x)=\dfrac{x+5}{(x-2)\left(1+\dfrac{5}{x}\right)}$, $x\neq -5,\ x\neq 0,\ x\neq 2;\ f(-5)=a,\ f(0)=b,\ f(2)=c.$

16. $f(x)=\dfrac{x-5}{(x+2)\left(1-\dfrac{5}{x}\right)}$, $x\neq -2,\ x\neq 0,\ x\neq 5;\ f(-2)=a,\ f(0)=b,\ f(5)=c.$

17. $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-4)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$, $x\neq -3,\ x\neq 0,\ x\neq 4;\ f(-3)=a,\ f(0)=b,\ f(4)=c.$

18. $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+4)\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$, $x\neq -4,\ x\neq 0,\ x\neq 3;\ f(-4)=a,\ f(0)=b,\ f(3)=c.$

19. $f(x)=\dfrac{x+4}{(x-3)\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}$, $x\neq -4,\ x\neq 0,\ x\neq 3;\ f(-4)=a,\ f(0)=b,\ f(3)=c.$

20. $f(x)=\dfrac{x-4}{(x+3)\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}$, $x\neq -3,\ x\neq 0,\ x\neq 4;\ f(-3)=a,\ f(0)=b,\ f(4)=c.$

21. $f(x)=\dfrac{x+3}{(x-5)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$, $x\neq -3,\ x\neq 0,\ x\neq 5;\ f(-3)=a,\ f(0)=b,\ f(5)=c.$

22. $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+5)\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}$, $x\neq -5,\ x\neq 0,\ x\neq 3;\ f(-5)=a,\ f(0)=b,\ f(3)=c.$

23. $f(x)=\dfrac{x+5}{(x-3)\left(1+\dfrac{5}{x}\right)}$, $x\neq -5,\ x\neq 0,\ x\neq 3;\ f(-5)=a,\ f(0)=b,\ f(3)=c.$

24. $f(x)=\dfrac{x-5}{(x+3)\left(1-\dfrac{5}{x}\right)}$, $x\neq -3,\ x\neq 0,\ x\neq 5;\ f(-3)=a,\ f(0)=b,\ f\,5)=c.$

Завдання 47. Дослідити функцію $f(x)$ на неперервність залежно від $a,b\in\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{x}{20^{\frac{x}{x-30}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 30$; $f(0)=a$, $f(30)=b$.

Розв'язання. Маємо $D(f)=\mathbb{R}$ (функція визначена в усіх точках множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел). При $x\neq 0$, $x\neq 30$ функція f неперервна як елементарна функція. Кожна з точок $x=0$ і $x=30$ є граничною точкою області визначення $D(f)$.

Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=0$. Знайдемо

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{20^{\frac{x}{x-30}}-1}=\left[a^u-1\underset{u\to 0}{\sim} u\ln a,\quad u=\frac{x}{x-30}\underset{x\to 0}{\to} 0\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{x-30}\ln 20}=\lim_{x\to 0}\frac{x-30}{\ln 20}=-\frac{30}{\ln 20};$$

звідси випливає, що при $a=-\dfrac{30}{\ln 20}$ функція f неперервна в цій точці, а при $a\neq-\dfrac{30}{\ln 20}$ має усувний розрив.

Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=30$. Знайдемо

$$\lim_{x\to 30+0}\frac{x}{20^{\frac{x}{x-30}}-1}=\left[\frac{30}{20^{+\infty}-1}=\frac{30}{+\infty}\right]=0,$$

$$\lim_{x\to 30-0}\frac{x}{20^{\frac{x}{x-30}}-1}=\left[\frac{30}{20^{-\infty}-1}=\frac{30}{-1}\right]=-30;$$

звідси випливає, що при будь-якому $b\in\mathbb{R}$ функція f має в цій точці розрив 1-го роду (зі стрибком $[f]_{x=30}=0-\left(-\dfrac{30}{\ln 20}\right)=\dfrac{30}{\ln 20}$).

Відповідь:

1) при $a=-\dfrac{30}{\ln 20}$ і будь-якому $b\in\mathbb{R}$ $f\in C\left(\mathbb{R}\setminus\{30\}\right)$, $x=30$ – точка розриву 1-го роду;

2) при $a\neq-\dfrac{30}{\ln 20}$ і будь-якому $b\in\mathbb{R}$ $f\in C\left(\mathbb{R}\setminus\{0;30\}\right)$, $x=0$ – точка усувного розриву, $x=30$ – точка розриву 1-го роду. ►

1. $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{x-3}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(0)=a$, $f(3)=b$.

2. $f(x)=\dfrac{x}{3^{\frac{x}{x-2}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(0)=a$, $f(2)=b$.

3. $f(x)=\dfrac{x}{3^{\frac{x}{x-4}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(0)=a$, $f(4)=b$.

4. $f(x)=\dfrac{x}{4^{\frac{x}{x-3}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(0)=a$, $f(3)=b$.

5. $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{x-4}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(0)=a$, $f(4)=b$.

6. $f(x)=\dfrac{x}{4^{\frac{x}{x-2}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(0)=a$, $f(2)=b$.

7. $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{x-5}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 5$; $f(0)=a$, $f(5)=b$.

8. $f(x)=\dfrac{x}{5^{\frac{x}{x-2}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(0)=a$, $f(2)=b$.

9. $f(x)=\dfrac{x}{3^{\frac{x}{x-5}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 5$; $f(0)=a$, $f(5)=b$.

10. $f(x)=\dfrac{x}{5^{\frac{x}{x-3}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(0)=a$, $f(3)=b$.

11. $f(x)=\dfrac{x}{4^{\frac{x}{x-5}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 5$; $f(0)=a$, $f(5)=b$.

12. $f(x)=\dfrac{x}{5^{\frac{x}{x-4}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(0)=a$, $f(4)=b$.

13. $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{x-6}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 6$; $f(0)=a$, $f(6)=b$.

14. $f(x)=\dfrac{x}{6^{\frac{x}{x-2}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(0)=a$, $f(2)=b$.

15. $f(x)=\dfrac{x}{3^{\frac{x}{x-6}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 6$; $f(0)=a$, $f(6)=b$.

16. $f(x)=\dfrac{x}{6^{\frac{x}{x-3}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(0)=a$, $f(3)=b$.

17. $f(x)=\dfrac{x}{4^{\frac{x}{x-6}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 6$; $f(0)=a$, $f(6)=b$.

18. $f(x)=\dfrac{x}{6^{\frac{x}{x-4}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 4$; $f(0)=a$, $f(4)=b$.

19. $f(x)=\dfrac{x}{5^{\frac{x}{x-6}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 6$; $f(0)=a$, $f(6)=b$.

20. $f(x)=\dfrac{x}{6^{\frac{x}{x-5}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 5$; $f(0)=a$, $f(5)=b$.

21. $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{x-7}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 7$; $f(0)=a$, $f(7)=b$.

22. $f(x)=\dfrac{x}{7^{\frac{x}{x-2}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 2$; $f(0)=a$, $f(2)=b$.

23. $f(x)=\dfrac{x}{3^{\frac{x}{x-7}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 7$; $f(0)=a$, $f(7)=b$.

24. $f(x)=\dfrac{x}{7^{\frac{x}{x-3}}-1}$, $x\neq 0$, $x\neq 3$; $f(0)=a$, $f(3)=b$.

Завдання 48. Знайти $a \in \mathbb{R}$ такі, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{10-6x}, & \text{якщо } x \le 1; \\ a\sin\dfrac{\pi x}{6}, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

неперервна на $\mathbb{R}$.

Розв'язання. Маємо $D(f) = \mathbb{R}$ (функція визначена в усіх точках множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел). При $x \ne 1$ функція f неперервна як елементарна функція. Точка $x = 1$ є граничною точкою області визначення $D(f)$. Дослідимо функцію f на неперервність у цій точці. Знайдемо:

$$f(1) = \sqrt{10-6\cdot 1} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \sqrt{10-6x} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} a\sin\frac{\pi x}{6} = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2}.$$

Умова неперервності $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ виконується, якщо всі три значення рівні: $\dfrac{a}{2} = 2$, звідки $a = 4$.

Відповідь: $a = 4$. ►

1. $f(x) = \begin{cases} ax^2+5, & \text{якщо } x < 4; \\ \sqrt{2x+1}, & \text{якщо } x \ge 4. \end{cases}$ Відповідь: $a = -\dfrac{1}{8}$.

2. $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & \text{якщо } x \le 2; \\ \sqrt{3x+10}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$ Відповідь: $a = \dfrac{3}{4}$.

3. $f(x) = \begin{cases} ax^2+2, & \text{якщо } x < 4; \\ \sqrt{2x+1}, & \text{якщо } x \ge 4. \end{cases}$ Відповідь: $a = \dfrac{1}{16}$.

4. $f(x) = \begin{cases} ax^2+6, & \text{якщо } x \le 2; \\ \sqrt{3x+10}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$ Відповідь: $a = -\dfrac{1}{2}$.

5. $f(x) = \begin{cases} ax^2+3, & \text{якщо } x < 4; \\ \sqrt{2x+1}, & \text{якщо } x \ge 4. \end{cases}$ Відповідь: $a = 0$.

6. $f(x) = \begin{cases} ax^2+4, & \text{якщо } x \le 2; \\ \sqrt{3x+10}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$ Відповідь: $a = 0$.

7. $f(x)=\begin{cases} ax^2+9, \text{ якщо } x<12; \\ \sqrt{2x+1}, \text{ якщо } x\geq 12. \end{cases}$ Відповідь: $a=-\frac{1}{36}$.

8. $f(x)=\begin{cases} ax^2+2, \text{ якщо } x\leq 5; \\ \sqrt{3x+10}, \text{ якщо } x>5. \end{cases}$ Відповідь: $a=\frac{3}{25}$.

9. $f(x)=\begin{cases} ax^2+4, \text{ якщо } x<12; \\ \sqrt{2x+1}, \text{ якщо } x\geq 12. \end{cases}$ Відповідь: $a=\frac{1}{144}$.

10. $f(x)=\begin{cases} ax^2+9, \text{ якщо } x\leq 5; \\ \sqrt{3x+10}, \text{ якщо } x>5. \end{cases}$ Відповідь: $a=-\frac{4}{25}$.

11. $f(x)=\begin{cases} ax^2+5, \text{ якщо } x<12; \\ \sqrt{2x+1}, \text{ якщо } x\geq 12. \end{cases}$ Відповідь: $a=0$.

12. $f(x)=\begin{cases} ax^2+5, \text{ якщо } x\leq 5; \\ \sqrt{3x+10}, \text{ якщо } x>5. \end{cases}$ Відповідь: $a=0$.

13. $f(x)=\begin{cases} ax+3, \text{ якщо } x<2; \\ \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, \text{ якщо } x\geq 2. \end{cases}$ Відповідь: $a=-\frac{4}{3}$.

14. $f(x)=\begin{cases} ax-4, \text{ якщо } x\leq 2; \\ \frac{1}{\sqrt{5x+6}}, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$ Відповідь: $a=\frac{17}{8}$.

15. $f(x)=\begin{cases} ax-2, \text{ якщо } x<2; \\ \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, \text{ якщо } x\geq 2. \end{cases}$ Відповідь: $a=\frac{7}{6}$.

16. $f(x)=\begin{cases} ax+1, \text{ якщо } x\leq 2; \\ \frac{1}{\sqrt{5x+6}}, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$ Відповідь: $a=-\frac{3}{8}$.

17. $f(x)=\begin{cases} ax+\frac{1}{3}, \text{ якщо } x<2; \\ \frac{1}{\sqrt{4x+1}}, \text{ якщо } x\geq 2. \end{cases}$ Відповідь: $a=0$.

18. $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{4}, & \text{якщо } x\le 2; \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x+6}}, & \text{якщо } x>2. \end{cases}$ Відповідь: $a=0$.

19. $f(x)=\begin{cases} ax+5, & \text{якщо } x<6; \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}, & \text{якщо } x\ge 6. \end{cases}$ Відповідь: $a=-\dfrac{4}{5}$.

20. $f(x)=\begin{cases} ax-1, & \text{якщо } x\le 6; \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x+6}}, & \text{якщо } x>6. \end{cases}$ Відповідь: $a=\dfrac{7}{36}$.

21. $f(x)=\begin{cases} ax-3, & \text{якщо } x<6; \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}, & \text{якщо } x\ge 6. \end{cases}$ Відповідь: $a=\dfrac{8}{15}$.

22. $f(x)=\begin{cases} ax+2, & \text{якщо } x\le 6; \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x+6}}, & \text{якщо } x>6. \end{cases}$ Відповідь: $a=-\dfrac{11}{36}$.

23. $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{5}, & \text{якщо } x<6; \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}, & \text{якщо } x\ge 6. \end{cases}$ Відповідь: $a=0$.

24. $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{6}, & \text{якщо } x\le 6; \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x+6}}, & \text{якщо } x>6. \end{cases}$ Відповідь: $a=0$.

Завдання 49. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

а) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+\cos x-x^3 5^{tx}}{2+x5^{tx}}$; б) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+\cos x+x5^{tx}}{2+x^3 5^{tx}}$.

Розв'язання. а) При $x>0$ знайдемо

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x^3\cancel{5^{tx}}\left(\dfrac{1+\cos x}{x^3 5^{tx}}-1\right)}{x\cancel{5^{tx}}\left(\dfrac{2}{x5^{tx}}+1\right)}=x^2\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{1+\cos x}{x^3 5^{tx}}-1}{\dfrac{2}{x5^{tx}}+1}=x^2\cdot\frac{-1}{1}=-x^2;$$

при $x<0$ маємо $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{2}$; знайдемо $f(0)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+\cos 0-0}{2+0}=1$.

Остаточно маємо (рис. 13)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{2}, & \text{якщо } x<0;\\ 1, & \text{якщо } x=0;\\ -x^2, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Звідси випливає, що $D(f)=\mathbb{R}$ і $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ як елементарна функція. Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=0$. Знайдемо

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}-x^2=0,\ \ f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1+\cos x}{2}=1=f(0),$$

а отже, $x=0$ – точка розриву 1-го роду зі стрибком

$$[f]_{x=0}=f(+0)-f(-0)=0-1=-1.$$

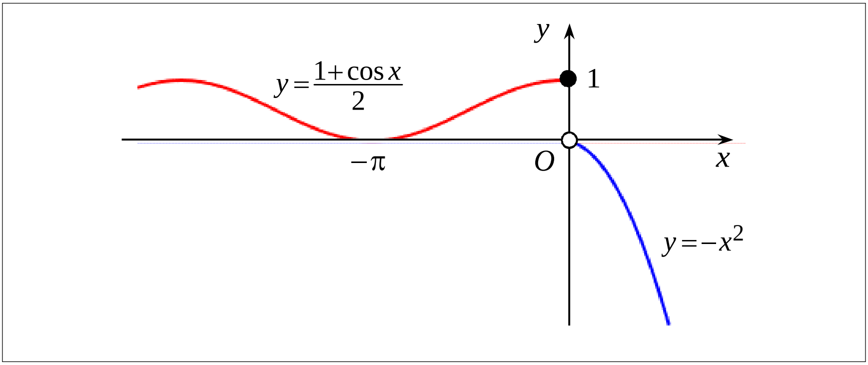


Рис. 13. Завдання 49 а)

б) При $x>0$ знайдемо

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x\cancel{5^{tx}}\left(\dfrac{1+\cos x}{x^3 5^{tx}}+1\right)}{x^3\cancel{5^{tx}}\left(\dfrac{2}{x5^{tx}}+1\right)}=\frac{1}{x^2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{1+\cos x}{x^3 5^{tx}}+1}{\dfrac{2}{x5^{tx}}+1}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{x^2};$$

при $x<0$ маємо $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{2}$; знайдемо $f(0)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+\cos 0+0}{2+0}=1$.

Остаточно маємо (рис. 14)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\cos x}{2}, & \text{якщо } x<0; \\ 1, & \text{якщо } x=0; \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{якщо } x>0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $D(f)=\mathbb{R}$ і $f \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ як елементарна функція. Дослідимо функцію f на неперервність у точці $x=0$. Маємо:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty\,,\quad f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1+\cos x}{2}=1=f(0)\,,$$

а отже, $x=0$ – точка розриву 2-го роду (рис. 13).

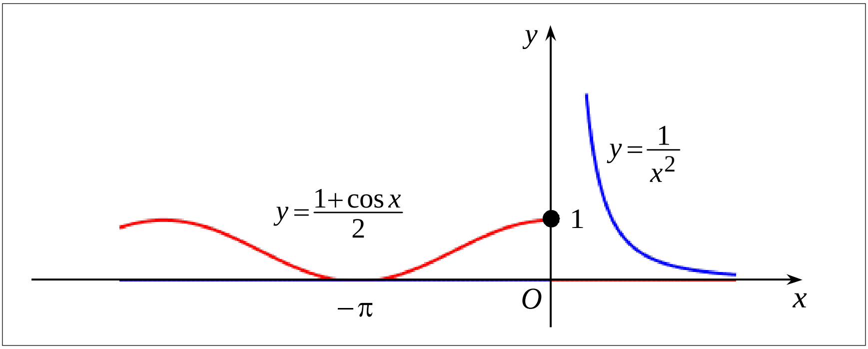


Рис. 14. Завдання 49 б)

Відповідь: а) $x=0$ – точка розриву 1-го роду; б) $x=0$ – точка розриву 2-го роду. ▶

1. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+(x^2+1)2^{tx}}{3+2^{tx}}$.

2. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2+(x+1)2^{tx}}{3+2^{tx}}$.

3. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+(x^2+x)2^{tx}}{3+2^{tx}}$.

4. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+1+x^2 2^{tx}}{3+2^{tx}}$.

5. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+x^2+x2^{tx}}{3+2^{tx}}$.

6. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2+x+2^{tx}}{3+2^{tx}}$.

7. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2+1+x2^{tx}}{2+x3^{tx}}$.

8. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+1+{}^2\,2^{tx}}{2+x3^{tx}}$.

9. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2+x2^{tx}}{1+x^2 3^{tx}}$.

10. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2+x2^{tx}}{x^2+3^{tx}}$.

11. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+(x^2+1)3^{tx}}{x+3^{tx}}$.

12. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2+(x+1)3^{tx}}{x^2+3^{tx}}$.

13. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^3-(x+1)4^{tx}}{3+4^{tx}}$.

14. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+(x^3-1)4^{tx}}{3+4^{tx}}$.

15. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^3-(x+1)4^{tx}}{3+4^{tx}}$.

16. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+(x^3-1)4^{tx}}{3+4^{tx}}$.

17. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1+x-x^3 4^{tx}}{3+4^{tx}}$.

18. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x-x^3 4^{tx}}{3+4^{tx}}$.

19. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x4^{tx}}{3+x4^{tx}}$.

20. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^3+1-x^2 4^{tx}}{3+x4^{tx}}$.

21. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2-x^3+x4^{tx}}{1+x^2 4^{tx}}$.

22. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2x-x^3 4^{tx}}{x^2+4^{tx}}$.

23. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2x^3-x4^{tx}}{2+x^2 4^{tx}}$.

24. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^3-x-x^2 4^{tx}}{x+4^{tx}}$.

Примітка. Точку $x_0\in\mathbb{R}$ називатимемо *особливою точкою* функції $f: X\to\mathbb{R},\ X=D(f)\subset\mathbb{R}$, якщо ця точка є граничною точкою області визначення ($x_0\in X'$), але не належить їй ($x_0\notin X$).

Розглянемо *класифікацію особливих точок* для випадку, коли особлива точка x_0 функції f є граничною точкою водночас для кожної з двох множин $X\bigcap(x_0;+\infty)$ і $X\bigcap(-\infty;x_0)$, тобто будь-який проколотий окіл цієї точки має непорожній перетин як з множиною $X\bigcap(x_0;+\infty)$, так і з множиною $X\bigcap(-\infty;x_0)$.

Якщо існують скінченні односторонні границі $f(x_0\pm 0)=\text{const}$, то точку x_0 називатимемо *особливою точкою 1-го роду,* а величину $[f]_{x_0}=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ – *стрибком* функції f у точці x_0. Зокрема, якщо $[f]_{x_0}=0$, тобто $f(x_0+0)=f(x_0-0)$, то точку x_0 назвемо *точкою усувної особливості* (адже особливість у точці x_0 можна усунути, якщо покласти $f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0-0)$, тобто виконати *умову неперервності* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$).

У решті випадків, тобто коли принаймні одна з односторонніх границь $f(x_0 \pm 0)$ не існує (зокрема, є нескінченною), точку x_0 називають *особливою точкою 2-го роду*.

Завдання 50. Дослідити на неперервність функцію (рис. 15)

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}},\ x\neq 0;\quad f(0)=a\,.$$

У випадку точок розриву або особливих точок визначити їхній тип.

Розв'язання. Маємо $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, причому

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{(x-1)x}}=\frac{x-1}{x+1},\quad x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1\,.$$

Функція f неперервна на множині $\mathbb{R}\setminus\{0;\pm 1\}$ як елементарна функція.

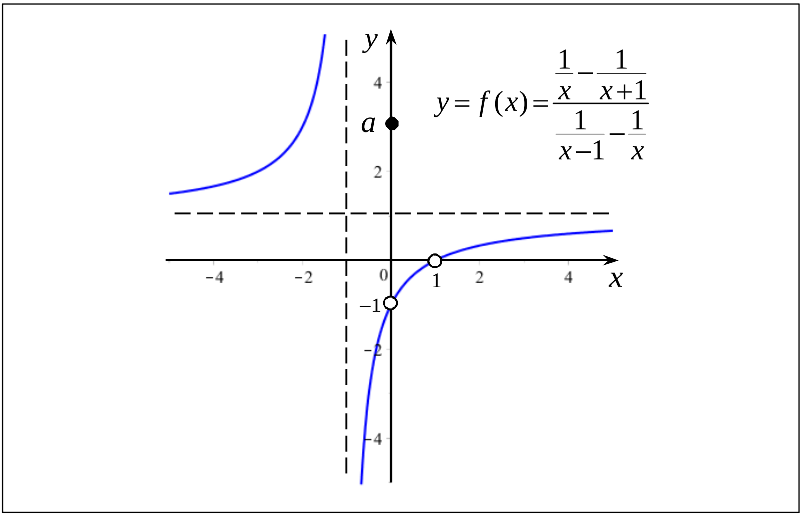


Рис. 15. Завдання 50

Точка $x=0$ належить області визначення $D(f)$ та є її граничною точкою. Дослідимо функцію на неперервність у цій точці. Знайдемо

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-1}{1}=-1\,.$$

Звідси випливає, що при $a=-1$ умова неперервності $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ виконується, а отже, функція неперервна в точці $x=0$. При $a\neq -1$ функція f має в точці $x=0$ усувний розрив.

Точка $x=-1$ не належить області визначення $D(f)$, але є її граничною точкою, тому $x=-1$ – особлива точка. З'ясуємо її тип. Знайдемо

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f(x)=\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x-1}{x+1}=\left[\frac{-2}{\pm 0}\right]=\mp\infty,$$

а отже, $x=-1$ – особлива точка 2-го роду функції f.

Точка $x=1$ теж не належить області визначення $D(f)$, але є її граничною точкою, тому $x=1$ – особлива точка. З'ясуємо її тип. Знайдемо

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0,$$

а отже, $x=1$ – точка усувної особливості функції f.

Відповідь: 1) при $a=-1$ $f\in C\left(\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\right)$; 2) при $a\neq -1$ $f\in C\left(\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}\right)$, $x=0$ – точка усувного розриву. Точка $x=-1$ – особлива точка 2-го роду, $x=1$ – точка усувної особливості. ▶

1. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{x^2-1}$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{5^{\frac{2x+1}{x-1}}-5}$.

3. $f(x)=x\cdot \operatorname{ctg} 2x$.

4. $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x}}$.

6. $f(x)=\dfrac{e^{|x|}-1}{x^2-|x|}$.

7. $f(x)=\dfrac{x+2}{\operatorname{arctg}(x^2+x-2)}$.

8. $f(x)=\dfrac{x-|x|}{x-\sin x}$.

9. $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{x-1}-2^{x-1}}$.

10. $f(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$.

11. $f(x)=e^{\frac{2x-1}{2x^2+3x-2}}$.

12. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\ln|x-1|}\right)$.

13. $f(x)=x\cdot\ln\ln(1+x^2)$.

14. $f(x)=\dfrac{\operatorname{th}(\sqrt{x}-1)}{x^2-1}$.

15. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

16. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

17. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{|x-1|}\right)$.

18. $f(x)=(1-x)\cdot\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

19. $f(x)=(1+\sin^2 x)^{\frac{2}{x\operatorname{tg}x}}$.

20. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\operatorname{ctg}x$.

21. $f(x)=|x-1|^{\frac{x}{\sin\pi x}}$.

22. $f(x)=\dfrac{2^{x(x-1)}-1}{x(3^x-3)}$.

23. $f(x)=\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

24. $f(x)=\dfrac{x(x-2)\ln|x|}{5^x-25}$.

Завдання 51. Дослідити функцію $f(x)$ на рівномірну неперервність на множині X за означенням:

а) $f(x)=8x^2-9x+10,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10x-7}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=8\sin 9x-9\cos 10x,\ X=\mathbb{R}$.

Примітка. За означенням, функція $f(x)$ *рівномірно неперервна на множині* $X\subset\mathbb{R}$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ таке, що для будь-яких точок $x'\in X$, $x''\in X$, які задовольняють умову $|x'-x''|<\delta$, виконується нерівність $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Для розв'язання може знадобитися *нерівність трикутника*

$$|a+b|\le|a|+|b|\quad (a,b\in\mathbb{R}).$$

Розв'язання. а) Візьмемо довільне $\varepsilon>0$; нехай $x',\ x''\in X$. Маємо:

$$|f(x')-f(x'')|=\left|(8x'^2-9x'+10)-(8x''^2-9x''+10)\right|=$$
$$=\left|8(x'-x'')(x'+x'')-9(x'-x'')\right|\le 8|x'-x''|\cdot|x'+x''|+9|x'-x''|$$
$$\le 8\cdot 6|x'-x''|+9|x'-x''|=57|x'-x''|<57\delta\le\varepsilon$$

при $0<\delta\le\varepsilon/57$. Наприклад, можна взяти $\delta=\varepsilon/57$.

Тут використано оцінку $|x'+x''|\le 6$, яка випливає з умови задачі, оскільки $-1\le x'\le 3$, $-1\le x''\le 3$, а отже, $-2\le x'+x''\le 6$.

б) Візьмемо довільне $\varepsilon>0$; нехай $x',\ x''\in X=X=[1;2]$. Маємо:

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{\sqrt{10x'-7}}-\frac{1}{\sqrt{10x''-7}}\right|=$$

$$=\frac{\left|\sqrt{10x''-7}-\sqrt{10x'-7}\right|}{\sqrt{10x'-7}\sqrt{10x''-7}}=\frac{\left|(10x''-7)-(10x'-7)\right|}{\sqrt{10x'-7}\sqrt{10x''-7}\left(\sqrt{10x''-7}+\sqrt{10x'-7}\right)}=$$

$$=\frac{10|x''-x'|}{\sqrt{10x'-7}\sqrt{10x''-7}\left(\sqrt{10x''-7}+\sqrt{10x'-7}\right)}\le$$

$$=\frac{10|x''-x'|}{\sqrt{3}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{10|x''-x'|}{6\sqrt{3}}<\frac{10\delta}{6\sqrt{3}}\le\varepsilon$$

при $0<\delta\le 3\sqrt{3}\varepsilon/5$. Наприклад, можна взяти $\delta=3\sqrt{3}\varepsilon/5$.

Тут було використано оцінку

$$\frac{10}{\sqrt{10x'-7}\sqrt{10x''-7}\left(\sqrt{10x''-7}+\sqrt{10x'-7}\right)}\le\frac{10}{6\sqrt{3}},$$

яка випливає з умови задачі. Справді, оскільки $1\le x'\le 2$, $1\le x''\le 2$, то $10x'-7\ge 3,\ 10x''-7\ge 3$, а отже,

$$\sqrt{10x'-7}+\sqrt{10x''-7}\ge\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3},\quad \sqrt{10x'-7}\sqrt{10x''-7}\ge\sqrt{3}\sqrt{3}=3.$$

в) Візьмемо довільне $\varepsilon>0$; нехай $x',\ x''\in X=\mathbb{R}$. Маємо:

$$|f(x')-f(x'')|=\left|(8\sin 9x'-9\cos 10x')-(8\sin 9x''-9\cos 10x'')\right|=$$

$$=\left|8(\sin 9x'-\sin 9x'')-9(\cos 10x'-\cos 10x'')\right|=$$

$$=\left|8\cdot 2\sin\frac{9(x'-x'')}{2}\cos\frac{9(x'+x'')}{2}+9\cdot 2\sin\left(5(x'-x'')\right)\sin\left(5(x'+x'')\right)\right|\le$$

$$\le 16\left|\sin\frac{9(x'-x'')}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{9(x'+x'')}{2}\right|+18\left|\sin\left(5(x'-x'')\right)\right|\cdot\left|\sin\left(5(x'+x'')\right)\right|\le$$

$$\le 16\cdot\frac{9|x'-x''|}{2}+18\cdot 5|x'-x''|=162|x'-x''|<162\delta\le\varepsilon$$

при $0<\delta\le\varepsilon/162$. Наприклад, можна взяти $\delta=\varepsilon/162$.

Тут використано нерівності $|\sin\alpha|\le|\alpha|,\ |\sin\alpha|\le 1,\ |\cos\alpha|\le 1\ (\alpha\in\mathbb{R})$.

Відповідь: а) наприклад, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{57}$; б) наприклад, $\delta=\dfrac{3\sqrt{3}\varepsilon}{5}$; в) наприклад, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{162}$. ▶

1. а) $f(x)=2x^2-3x+4,\ X=[-1;5]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}},\ X=[1;5]$;

в) $f(x)=4\sin 3x-2\cos 4x,\ X=\mathbb{R}$.

2. а) $f(x)=4x^2-2x+3,\ X=[-1;5]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}},\ X=[1;5]$;

в) $f(x)=3\sin 2x-4\cos 3x,\ X=\mathbb{R}$.

3. а) $f(x)=3x^2-4x+2,\ X=[-1;5]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+3}},\ X=[1;5]$;

в) $f(x)=2\sin 4x-3\cos 2x,\ X=\mathbb{R}$.

4. а) $f(x)=3x^2-2x+4,\ X=[-1;5]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}},\ X=[1;5]$;

в) $f(x)=4\cos 2x+3\sin 4x,\ X=\mathbb{R}$.

5. а) $f(x)=2x^2+4x-3,\ X=[-1;5]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}},\ X=[1;5]$;

в) $f(x)=3\cos 4x+2\sin 3x,\ X=\mathbb{R}$.

6. а) $f(x)=4x^2+3x-2,\ X=[-1;5]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}},\ X=[1;5]$;

в) $f(x)=2\cos 3x+4\sin 2x,\ X=\mathbb{R}$.

7. а) $f(x)=3x^2-4x+5,\ X=[-1;4]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+5}},\ X=[1;4]$;

в) $f(x)=4\sin 3x-5\cos 4x,\ X=\mathbb{R}$.

8. а) $f(x)=4x^2-5x+3,\ X=[-1;4]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}},\ X=[1;4]$;

в) $f(x)=5\sin 4x-3\cos 5x,\ X=\mathbb{R}$.

9. а) $f(x)=5x^2-3x+4,\ X=[-1;4]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+3}},\ X=[1;4]$;

в) $f(x)=3\sin 5x-4\cos 3x,\ X=\mathbb{R}$.

10. а) $f(x)=5x^2-4x-3,\ X=[-1;4]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}},\ X=[1;4]$;

в) $f(x)=4\cos 5x+3\sin 4x,\ X=\mathbb{R}$.

11. а) $f(x)=3x^2+5x-4,\ X=[-1;4]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x-3}},\ X=[1;4]$;

в) $f(x)=5\cos 3x+4\sin 5x,\ X=\mathbb{R}$.

12. а) $f(x)=4x^2+5x-3,\ X=[-1;4]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x-4}},\ X=[1;4]$;

в) $f(x)=3\cos 4x+5\sin 3x,\ X=\mathbb{R}$.

13. а) $f(x)=4x^2-5x+6,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x+4}},\ X=[1;3]$;

в) $f(x)=5\sin 6x-4\cos 5x,\ X=\mathbb{R}$.

14. а) $f(x)=6x^2-4x+5,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+6}},\ X=[1;3]$;

в) $f(x)=4\sin 5x-6\cos 4x,\ X=\mathbb{R}$.

15. а) $f(x)=5x^2-6x+4,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+6}},\ X=[1;3]$;

в) $f(x)=6\sin 4x-5\cos 6x,\ X=\mathbb{R}$.

16. а) $f(x)=4x^2-6x-5,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+4}},\ X=[1;3]$;

в) $f(x)=5\cos 4x+6\sin 5x,\ X=\mathbb{R}$.

17. а) $f(x)=6x^2+5x-4,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x-5}},\ X=[1;3]$;

в) $f(x)=4\cos 6x+5\sin 4x,\ X=\mathbb{R}$.

18. а) $f(x)=5x^2+4x-6,\ X=[-1;3]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x-4}},\ X=[1;3]$;

в) $f(x)=6\cos 5x+4\sin 6x,\ X=\mathbb{R}$.

19. а) $f(x)=5x^2-6x+7,\ X=[-1;2]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{7x+5}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=6\sin 7x-5\cos 6x,\ X=\mathbb{R}$.

20. а) $f(x)=6x^2-7x+5,\ X=[-1;2]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+7}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=7\sin 5x-6\cos 7x,\ X=\mathbb{R}$.

21. а) $f(x)=7x^2-5x+6,\ X=[-1;2]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x+7}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=5\sin 6x-7\cos 5x,\ X=\mathbb{R}$.

22. а) $f(x)=6x^2-5x-7,\ X=[-1;2]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x+5}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=5\cos 7x-6\sin 5x,\ X=\mathbb{R}$.

23. а) $f(x)=7x^2+6x-5,\ X=[-1;2]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{7x-5}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=6\cos 5x+7\sin 6x,\ X=\mathbb{R}$.

24. а) $f(x)=5x^2+7x-6,\ X=[-1;2]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{7x-6}},\ X=[1;2]$;

в) $f(x)=7\cos 6x+5\sin 7x,\ X=\mathbb{R}$.

2.4. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 2

Варіант 1

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3+2x^2+4x-8}=O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ при $x\to\infty$;

б) $x^2+\sin^2 x=o(x)$ при $x\to 0$;

в) $x^m+a_1x^{m+1}+\ldots+a_nx^{m+n}\sim x^m$ при $x\to 0$

$\left(\{m,n\}\subset\mathbb{N},\ \{a_1,\ldots,a_n\}\subset\mathbb{R}\right)$;

г) $100x+x\sin x=O(x)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to 0$ функції

$$f(x)=\sin 2x+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\quad (C\neq 0 \text{ – стала}).$$

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-\sin^2 x}{x^2+\ln(1+3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[5]{\sin x}}{\cos^2 x}$.

4. При яких значеннях α і β функція $f(x)=x^\alpha\sin(x^{-\beta})$ є нескінченно малою при $x\to +0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x+\cos x,\ X=\mathbb{R}$.

Варіант 2

1. Перевірити правильність твердження:

а) $(2+\sin x)x=O(x)$ при $x\to\infty$;

б) $(1+x)^n = 1+nx+o(x)$ при $x \to 0$ ($n \in \mathbb{N}$);

в) $x^m + a_1 x^{m+1} + \ldots + a_n x^{m+n} \sim a_n x^{m+n}$ при $x \to +\infty$

$$\big(\{m,n\} \subset \mathbb{N},\ \{a_1,\ldots,a_n\} \subset \mathbb{R},\ a_n \neq 0\big);$$

г) $x = O(100x + x\sin x)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to 0$ функції $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{\sin 4x + \operatorname{tg}^2 x}$.

4. При яких значеннях α і β функція $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ є нескінченно малою при $x \to +0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = 1/x$, $X = (0; a)$ ($a > 0$).

Варіант 3

1. Перевірити правильність твердження:

а) $(x^{-1} + \sin x)x = O(x)$ при $x \to \infty$;

б) $\ln x = o(x^{-\varepsilon})$ при $x \to +0$ ($\varepsilon > 0$);

в) $e^{2x} - e^x \sim \sin 2x - \sin x$ при $x \to 0$;

г) $x + x\sin x = O(x)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to 0$ функції $f(x) = \sin x - 2\sin(x/2)$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $\big(\{a,b\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x^2/2) + \sin^4 x}{\ln\big(1+\operatorname{tg}(x^4/8)\big)}$.

4. При яких значеннях α і β функція $f(x) = x^\alpha \operatorname{arctg}(x^{-\beta})$ є нескінченно малою при $x \to +0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [0; +\infty)$.

Варіант 4

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{3x^2+2x+4}{x^3+4x^2+7x+5}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$;

б) $2^{-1/x}=o(x^n)$ при $x\to+0$ ($n\in\mathbb{N}$);

в) $1-x=O^*(1-\sqrt[3]{x})$ при $x\to1$;

г) $x=O(x+\sin x)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

($C\neq0$ – стала, $m\in\mathbb{N}$, $\{a_0,\ldots,a_m\}\subset\mathbb{R}$, $a_0\neq0$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x\cdot\arcsin3x+\sin^2(x/2)}$.

4. При яких значеннях α і β функція $f(x)=(1-x^{\alpha})x^{\beta}$ є нескінченно малою при $x\to+0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\lg x$, $X=(0;10)$.

Варіант 5

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^m)\cdot O(x^n)=O(x^{m+n})$ при $x\to+\infty$ ($n>0$);

б) $1+x+x^2=o(x^3)$ при $x\to+\infty$;

в) $\sec x-\operatorname{tg}x=O^*(\pi-2x)$ при $x\to\pi/2$;

г) $\sqrt{x^2+1}-|x|=O(x^{-1})$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\alpha_1}{x^2}+\ldots+\dfrac{\alpha_{m-1}}{x^m}$ ($C\neq0$ – стала, $m\in\mathbb{N}$, $m>1$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin x-2x^2+x^3}{4\operatorname{tg}x-2\sin^2x+5x^5}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^5$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = 2x - 1$, $X = \mathbb{R}$.

Варіант 6

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ при $x \to +\infty$ ($n > m > 0$);

б) $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = o(x^{m+1})$ при $x \to +\infty$
($m \in \mathbb{N}$, $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$);

в) $\left(1 + x\right)^n - 1 \sim nx$ при $x \to 0$ ($n \in \mathbb{N}$);

г) $x^{-1} = O\left(\sqrt{x^2 + 1} - |x|\right)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = 13x^3 + x^2 \ln x + 1$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\operatorname{tg}(x^2/2)\right) + \sin^2 x}{\ln \cos 5x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^4 - 2$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = x^{-1}$, $X = [a; +\infty)$ ($a > 0$).

Варіант 7

1. Перевірити правильність твердження:

а) $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$ при $x \to +\infty$ ($n > 0$, C – стала);

б) $x^m = o(2^x)$ при $x \to +\infty$ ($m \in \mathbb{N}$);

в) $3^x + x2^x + \ln x + 1 \sim 3^x$ при $x \to +\infty$;

г) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\sin(\pi x)}-1}{\ln(x^2-3x+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x\to 0$ функції $f(x)=1-x^4-\cos(x^2)$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $X=[0;2]$.

Варіант 8

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{n+m})$ при $x\to 0$ ($n>0$);

б) $\ln x=o(x^{\varepsilon})$ при $x\to +\infty$ ($\varepsilon>0$);

в) $\sqrt{x^2+x+1}-x\sim 1/2$ при $x\to +\infty$;

г) $x^2=o(x)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to +\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x}-1+\sin^2 x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x\to 0$ функції $f(x)=2\sin x-\operatorname{tg}2x$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sin(x^2)$, $X=(-3;3]$.

Варіант 9

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{x^5+4x^4+3x^3+x^2-12}{(x^6+4x^3+12)\operatorname{arctg}2x}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$;

б) $x^{13}2^x=o(3^x)$ при $x\to +\infty$;

в) $n^2+2n\ln n+1\sim n^2$ при $n\to\infty$; г) $x=o(x^2)$ при $x\to 0$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x + a\sqrt{x}}$ ($C \neq 0$ – стала, $a \in \mathbb{R}$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \arcsin 2x} - \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2 + 9} - 3\right)$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = x \sin(1/x)$, $X = (0; \pi]$.

Варіант 10

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ при $x \to 0$ ($m > n > 0$);

б) $x^{13} 2^{-x} = o(x^{-m})$ при $x \to +\infty$ ($m \in \mathbb{N}$);

в) $1 - \dfrac{1}{1 + x} \sim x$ при $x \to 0$;

г) $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to 0$ функції $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{4 + x^2} - 2\right)$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x) = \sqrt[3]{1 - 4x} - \sqrt{1 - 6x}$ і $g(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні при $x \to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $X = [1; +\infty)$.

Варіант 11

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \log_5\left(1 + \dfrac{4}{x}\right) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$;

б) $\ln(\ln x)=o(\ln x)$ при $x\to+\infty$;

в) $n^{n+\frac{1}{n}}+n!+2^n\sim n^n$ при $n\to\infty$;

г) $\sqrt{x^2+x}-x=o(1)$ при $x\to+\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x+\operatorname{tg}^2 x)}{e^{\operatorname{tg}2x}-1}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x\to 0$ функції $f(x)=2^{x^2}-1$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sin(1/x)$, $X=(0;1)$.

Варіант 12

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x\ln x=o(x^{3/2})$ при $x\to+\infty$;

б) $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}\sim\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ при $x\to 0$;

в) $3x+x^2+x^3+\ln(1+x)=O(x)$ при $x\to 0$;

г) $\sqrt{x^2+x}-x=o(1)$ при $x\to+\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+1-\cos x+\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x+\operatorname{arctg}^2 x+\ln(1+\sin x)}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^4+x+1}$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x^2$, $X=[0;+\infty)$.

Варіант 13

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\sqrt{x^6-3x^4+2}-x^3=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $x^{\ln x}=o(e^x)$ при $x\to+\infty$;

в) $1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\sim\dfrac{x}{2}$ при $x\to0$; г) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при $x\to+\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}$ ($C\neq0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin5x-\sin3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin4x+\sin^2x)}{e^{\sin5x}-1}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sin2x,\ X=[-\pi;\pi]$.

Варіант 14

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $\log_a x=o(x^{\alpha})$ при $x\to+\infty$ ($\alpha>0,\ 0<a\neq1$);

в) $1-\cos^3x\sim\dfrac{3}{2}\sin^2x$ при $x\to0$;

г) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^3+ax^2+1}$ ($C\neq0$ – стала, $a\in\mathbb{R}$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}{\operatorname{tg}x\cdot\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin^3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x \to 1$ функції $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$ відносно функції $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = kx + b,\ X = \mathbb{R}$ ($k \neq 0$ і b – сталі).

Варіант 15

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{1}{x} + x \cdot 2^{-x} = O\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$ при $x \to +\infty$;

б) $x^{\alpha} \log_a x = o(1)$ при $x \to +0$ ($\alpha > 0,\ 0 < a \neq 1$);

в) $\cos x - \cos 2x = O^*(x^2)$ при $x \to 0$;

г) $\sqrt{x^2 - 1} - x = O^*(1/x)$ при $x \to +\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to \infty$ функції $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} 2x}{\ln \cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \sin 3x - \cos 4x + \operatorname{tg} x}{\ln(1 + \sin 4x) + 1 - \cos(x/9) + \operatorname{arctg} x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x \to 0$ функції $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x^3$ відносно функції $g(x) = 1/x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = x^2,\ X = (-1; 1]$.

Варіант 16

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^5 2^{-x} + \dfrac{1}{x} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$;

б) $x^3 = o(x^2 \sqrt{|x|})$ при $x \to 0$;

в) $\dfrac{2x+1}{x^2+2} = O^*\left(\dfrac{3}{x}\right)$ при $x \to \infty$;

г) $3x^2 + 2x + 5 = O^*(2x^3 + 2x + 1)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x)=\sqrt{2^{-x}+\sqrt{x+1}}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x \to +0$ функції $f(x)=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$ відносно функції $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x^3$, $X=(-3;5)$.

Варіант 17

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^{-1}+x^{-3}+x^{-4}=O(x^{-1})$ при $x\to+\infty$;

б) $x^3\cdot\sqrt{|x|}=o(x^3)$ при $x\to 0$;

в) $x^3-x^2-x+1=O^*\left((x^3-x)^2\right)$ при $x\to 1$;

г) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+9x}}{1-\sqrt{1-x/2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(1+\sin 3x)}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\sin^2 2x+\arcsin^2 x+2\operatorname{arctg} x^2$ і $g(x)=\alpha x^{\beta}$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=e^x$, $X=[0;10]$.

Варіант 18

1. Перевірити правильність твердження:

а) $2^x\ln^3 x+1=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $x^4 = o(x^2 \sin x)$ при $x \to 0$;

в) $\sqrt[3]{x+a} = O^*(\sqrt[3]{x})$ при $x \to \infty$ $(a \in \mathbb{R})$;

г) $x^3 - x^2 - x + 1 = O^*(x^3 - x)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$ $(C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + ax)}{\sin bx}$ $\big(\{a,b\} \subset \mathbb{R},\ b \neq 0\big)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^5 x + (1-\cos 2x)^4 + x^5}{7\operatorname{tg}^7 x + \sin^6 x + 2\sin^5 x}$.

4. При яких значеннях α і β функції $g(x) = 1 - \cos\big(1 - \cos(1/x)\big)$ і $f(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні при $x \to \infty$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \dfrac{x}{2-x^2}$, $X = [-1; 1]$.

Варіант 19

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\sqrt{x^4 + 3x^3 + 1} - x^2 = O(x)$ при $x \to +\infty$;

б) $(x-1)^3 = o\big(\sin(x-1)^2\big)$ при $x \to 1$;

в) $x^2 + x \sim x^2$ при $x \to \infty$; г) $\dfrac{2x+1}{x^2+2} = O^*\left(\dfrac{3}{x}\right)$ при $x \to +\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x^3 + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x^2+1}$ $(C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[7]{\dfrac{x^3+x}{x^3+1}} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - 1 + \arcsin 15x}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x) = \dfrac{1}{[x]}$ і $g(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні при $x \to \infty$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x+\operatorname{arctg}x,\ X=\mathbb{R}$.

Варіант 20

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^2\ln^{10}x+x=O(x^{2+\varepsilon})$ при $x\to+\infty$ $(\varepsilon>0)$;

б) $(x-1)^2=o\left(\frac{(x-1)^2}{\ln x}\right)$ при $x\to 1$;

в) $\sin\sin\operatorname{tg}(x^2/2)\sim x^2/2$ при $x\to 0$;

г) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=O^*(x^{-1})$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x\to 1$ функції $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(1+1/x)^x}{e}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)+\operatorname{tg}^2\sqrt{x/2}}{\sin 5x}$.

4. Нехай $x\to+0$. Довести, що нескінченно мала функція $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ не порівнянна з нескінченно малою функцією $g(x)=x^n$ ($n>0$), яке б не було значення n, тобто при жодному n не може справджуватися рівність $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K$, де $0\neq K\in\mathbb{R}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=e^{-1/x},\ X=(0;1]$.

Варіант 21

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x\sin x+\sqrt{x}=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $\frac{1}{x^3}=o\left(\frac{1}{x^3\sin x}\right)$ при $x\to\infty$; в) $\ln\cos 3x\sim-\frac{9x^2}{2}$ при $x\to 0$;

г) $\dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2+x+1} = O^*(1)$ при $x \to +\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x \to 1$ функції $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin \ln \sqrt{\cos \dfrac{\pi}{n}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + 4\sin x - \operatorname{tg}^3 x - x^2 + 3x^4}{\operatorname{arctg}^3 x - 6\sin^2 x + 2x - 8x^3}$.

4. Нехай $x \to 0$. Довести, що нескінченно мала функція $f(x) = e^{-1/x^2}$ не порівняння з нескінченно малою функцією $g(x) = x^n$ ($n > 0$), яке б не було значення n, тобто при жодному n не може справджуватися рівність $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, де $0 \neq K \in \mathbb{R}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ X = (0;1)$.

Варіант 22

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x2^x + x^{10} + 7 = O(3^x)$ при $x \to +\infty$;

б) $\dfrac{1}{x^4} = o\left(\dfrac{1}{(x-1)^4 \operatorname{arctg}(1/x)}\right)$ при $x \to +\infty$;

в) $\sqrt{1+x^2} \sim 1 + \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$;

г) $x\cos(1/x) = O^*(x)$ при $x \to 0$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x \to 1$ функції $f(x) = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{3x}}{\sin(x^2/2) - \sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \sqrt[3]{x} \ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt[3]{x}} - 1)}$.

4. При яких значеннях α і β функції $g(x)=\sqrt{3x+\sqrt{2x+\sqrt{5x}}}$ і $f(x)=\alpha x^{\beta}$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X : $f(x)=x\sin x,\ X=[1;+\infty)$.

Варіант 23

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x+2^{x+1}=O(2^{x})$ при $x\to+\infty$;

б) $\dfrac{x+1}{x^4+x^2+1}=o\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\right)$ при $x\to+\infty$;

в) $\operatorname{ch}(\pi/n)\sim 1+\pi^2/(2n^2)$ при $n\to\infty$;

г) $\sec x-\operatorname{tg} x\sim \pi-2x$ при $x\to\pi/2$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x\to 1$ функції $f(x)=e^x-e$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(e^{x^3}+2\sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\operatorname{tg} x)^2+(1-\cos 2x)^4+x^5}{7\operatorname{tg}^7 x+\sin^6 x+2\arcsin^5 x}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ і $g(x)=\alpha x^{\beta}$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X : $f(x)=\operatorname{arcctg} x,\ X=\mathbb{R}$.

Варіант 24

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m=O(x^m)$ при $x\to+\infty$

$(\{a_1,\dots,a_m\}\subset\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N})$;

б) $(1-\sqrt{x})^2=o\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ при $x\to 1$;

в) $e^{\frac{1}{n}}\sim 1+\dfrac{1}{n}$ при $n\to\infty$; г) $1-x\sim(1-\sqrt[3]{x})$ при $x\to 1$.

2. Визначити головну частину вигляду C/x^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-x^2+x^3}{\operatorname{tg} x+2\sin^2 x+5x^4}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-5x}$ і $g(x)=\alpha x^\beta$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x^3$, $X=\mathbb{R}$.

ЛІТЕРАТУРА

Основні джерела

1. *Ляшко І. І.* Математичний аналіз, ч. 1 / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К. : Вища школа, 1992. – 495 с.
2. *Ляшко І. І.* Математичний аналіз, ч. 2 / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К. : Вища школа, 1993. – 375 с.
3. *Кривошея С. А.* Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи студентів. Частина 1: Навчально-методичний посібник / С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Прощенко. – К: ВПЦ "Київський університет", 2013. – 324 с. (Гриф МОН України, лист 1/11-4092 від 24.03.2014). – 323 с.
4. *Кривошея С. А.* Математичний аналіз. Неперервність, похідна, інтеграл: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів / С. А. Кривошея, Н. В. Майко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 271 с.
5. *Александрович І. М.* Вступ до математичного аналізу: збірник задач / І. М. Александрович, А. В. Анікушин, О. К. Боярчук, О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов, В. В. Семенов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2018. – 239 с.

Додаткові джерела

6. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз, ч. 1 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1994. – 320 с.
7. *Радченко О. М.* Математичний аналіз, ч. 1 / О. М. Радченко. – К. : ТВіМС, 2003. – 264 с.
8. *Грязнова В. О.* Методичні вказівки до проведення практичних занять з математичного аналізу. Частина I / В. О. Грязнова, С. А. Кривошея, Ю. В. Придатченко, А. Т. Янішевський. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2003. – 88 с.