Турбулентні процеси
в гідродинамічному та магнітогідродинамічному середовищі

Козак Л.В.[1]

16 червня 2020 р.

[1]gutovska@ukr.net

Зміст

Передмова

Турбулентність - це природний стан як гідродинамічних так і магнітогідродинамічних потоків. Більшість течій рідин, газів і плазми в природі і в технічних пристроях є турбулентними. Ламінарний режим течії є скоріше винятком з правил, і він спостерігається він досить рідко. Рух повітря в земній атмосфері, води в річках і морях, газу і плазми в атмосферах зірок і в міжзоряних туманностях, течії в трубах, каналах, струменях, в граничних/прикордонних потоках і т.д. - всі ці процеси носять турбулентний характер.

Крім того, існує велика різноманітність методів прогнозування розвитку турбулентних потоків, починаючи від простих емпіричних кореляцій, через строгі (але обмежені) припущення з рівнянь Нав'є-Стокса, до розробки статистичних моделей, заснованих на аналогіях між хаотичною поведінкою турбулентності та молекулярним хаосом гідродинамічних потоків.

Навчальний посібник написаний на основі курсу лекцій який читався автором на кафедрі астрономії та фізики космосу для студентів старших курсів спеціальності "Фізика космосу".

Для того щоб спростити сприйняття матеріалу в посібник включено додаток в якому зібрано основні формули і означення фізики плазми. Знання даних формул буде необхідним для продовження досліджень в фізиці космічної плазми і для аналізу широкого класу процесів включаючи і турбулентні.

Подяки

- Автор вдячний рецензентам за слушні зауваження і коментарі (буде доповнено)

- Студентам 2-го курсу магістратури яким вперше читався даний матеріал.

- Робота виконувалась у відповідності з цільовою комплексною програмою НАН України по фізиці плазми, в рамках спільних науково-дослідних проектів учених Київського національного університету імені Тараса Шевченка та НАНУ на 2019—2020 роки та за підтримки гранту 90312 фонду Фольксваген (VW-Stiftung).

1

Напівемпірична картина турбулентного потоку

Мета даного розділу - представити стисле резюме постановки проблеми турбулентності. Ми починаємо з рівнянь руху рідини і розглядаємо середні значення, щоб отримати рівняння для середньої швидкості. На цьому етапі кореляції обмежуються значеннями, прийнятими в одній точці простору та часу, на відміну від багатоточкових багаторазових кореляцій фундаментального підходу. Важливим аспектом є показ того, що прості емпіричні кореляції можна використовувати як надійні методи прогнозування, і для того, щоб вказати на наявність загальної поведінки середовища. Для початку розглядаємо саме гідродинамічну турбулентність. Крім того, ми обмежимося наближенням нестисливої рідини/нестисливого газу, яке може бути застосовано до багатьох завдань фізики атмосфери і океану.

Важливість вивчення турбулентності для динаміки атмосфери і океану обумовлена її визначальною роллю в процесах обміну імпульсом, енергією, теплом і речовиною. Турбулентні вихори забезпечують додатковий перенос цих характеристик, який істотно перевищує молекулярне перенесення. Опис найважливіших геофізичних процесів, таких як динаміка погоди і клімату, формування первинної продуктивності в океані, транспорт домішок в океані і атмосфері, динаміка течій в зовнішньому рідкому ядрі Землі є неможливим без урахування турбулентності. Турбулентність потоків необхідно брати до уваги і в численних інженерно-технічних завданнях (розрахунок обтікання авіалайнерів, морських суден і автомобілів, рух рідин і газів по трубопроводах і ін.).

1.1 Турбулентність: означення та генерація

Перші згадки про турбулентність пов'язують з ім'ям великого італійського художника, інженера і вченого Леонардо да Вінчі. Саме в його рукописі, що датується приблизно 1500 р, є перше задокументоване спостереження турбулентності. При цьому Леонардо да Вінчі, звичайно, не створював ніяких теорій турбулентності, він виступив швидше як уважний спостерігач природних явищ. Ввів термін «турбулентність», в коло наукової термінології, британський фізик Вільям Томсон (лорд Кельвін).

Активне вивчення турбулентності почалося в 19-м столітті в зв'язку з аналізом режимів течій рідин і газів. Пізніше, в 20-му столітті, було виявлено, що перехід від регулярного або ламінарного руху до хаотичного або турбулентного властивий не тільки гідродинамічним течіям, а й іншим середовищам і полям (акустичним полям у твердих тілах і газах, електромагнітних полів в плазмі і т. п.). Відомо і таке явище як хвильова турбулентність.

Роботи по дослідженню гідродинамічної турбулентності почалися з аналізу режимів течій в трубах [Hagen, 1839; Poiseuille, 1840]. Але найбільш відома серед фахівців по турбулентності публікація на цю тему належить Осборну Рейнольдсу [Reynolds, 1883].

Згідно означення у фізичній енциклопедії: *Турбулентність* (від лат. безладний) - складна, невпорядкована в часі і просторі поведінка дисипативного середовища (або поля), деталі якого не можуть бути відтворені на великих інтервалах часу при як завгодно точному введені початкових і граничних умов. Така поведінка є наслідком власної складної динаміки середовища, яка визначається нестійкістю індивідуальних рухів, і не пов'язана з неповнотою опису, флуктуаціями або дією зовнішніх шумів. При цьому, *дисипативне середовище* - фізична система, в якій енергія одних рухів або полів (зазвичай упорядкованих) необоротним чином переходить в енергію інших рухів або полів (зазвичай хаотичних).

Вище було дано «загальнофізичний» визначення турбулентності. У гідродинаміці визначення турбулентних потоків дещо відрізняється. Але перед тим як ввести поняття турбулентних течій слід зазначити що в рідинах і газах розрізняють як ламінарні так і турбулентні течії. Ламінарні - спокійні і плавні течії, що змінюються лише в зв'язку з змінами діючих сил або зовнішніх умов. Турбулентні - течії, в яких швидкість, тиск, температура і інші гідродинамічні величини відчувають хаотичні флуктуації, що виникають завдяки наявності в цих течіях численних вихорів різних розмірів, причому відсутній однозначний зв'язок між розмірами вихорів і періодом їх обертання, а зсув по фазі між коливаннями різних характеристик хаотично змінюються з частотою таких коливань. Турбулентним потокам властиво явище чергування ламінарної і турбулентної форм руху, що має назву переміжність. Приклади ламінарних і турбулентних течій представлено на рис. 1.1 та рис. 1.2

У означені гідродинамічної турбулентності слід звернути увагу на три наступних важливих моменти:

(1) Хаотичність. Але не будь-який хаотичний потік буде турбулентним. Наприклад, в природних умовах (в океані або атмосфері) супер-

позиція акустичних, поверхневих і внутрішніх хвиль може призводити до рухів, які характеризуються досить значною нерегулярністю.

(2) Наявність вихорів, тобто турбулентний потік обов'язково є вихровим.

(3). Розмір вихору не пов'язаний з періодом його обертання. Іншими словами, для вихорів не існує зв'язку аналогічного до дисперсійного співвідношення, яке властиве хвильовим процесам. Завдяки наявності дисперсионного співвідношеня хвильові рухи можна відрізнити від турбулентності. Можна констатувати, що означення гідродинамічної турбулентності по суті доповнює «загальнофізичне» визначення ознаками явища, які дозволяють на практиці класифікувати ту чи іншу течію як турбулентну.

1.1.1 Експерименти Осборна Рейнольдса. Число Рейнольдса

Експериментальне дослідження переходу від ламінарного потоку в трубі до турбулентного було виконано Осборном Рейнольдсом в другій половині 19-го століття. У той час миттєва фотографія ще не була поширена, тому експерименти документовані не фотографіями, а малюнками. Оригінальна версія малюнків опублікована в статті [Reynolds, 1883].

Суть експерименту полягала в наступному: в басейні з прозорими стінками, який заповнювався водою, розташовувалася скляна трубка з воронкоподібним розширенням на кінці. В експериментах Рейнольдс використовував трубки трьох різних діаметрів: 1, 1/2 і 1/4 дюйма (1 дюйм = 2.54 см). Басейн був піднятий так, щоб забезпечити критичні швидкості течії води в трубі за рахунок перепаду тиску. Швидкість течії контролювалася вимірами рівня води в басейні. Для візуалізації режимів течії біля входу в воронку в воду вводилася тонка цівка барвника. При малих швидкостях течії підфарбована цівка витягується уздовж осі трубки протягом усього її довжини. При досить великих швидкостях в деякій точці, яка завжди була розташована досить далеко від воронкоподібного входу, підфарбована цівка раптово змішувалася з навколишнім водою. Підсвічування течії спалахами електричних розрядів дозволила Рейнольдсу розрізнити в області змішування окремі вихори (Рис. 1.3).

Експерименти Рейнольдса показали, що перехід від ламінарного до турбулентного режиму проходить, коли безрозмірна величина, складена з швидкості течії, діаметра труби і в'язкості (число Рейнольдса) перевищить критичне значення. Тобто вище критичної швидкості було встановлено, що турбулентність є нормальним станом потоку, хоча ламінарний потік можна підтримувати як метастабільний стан шляхом ретельного усунення всіх порушень чи збурень. Рейнольдс встановив, що критерій переходу від ламінарного до турбулентного потоку може бути виражений у загальній (універсальній) формі, безрозмірне представлення

$$R = UL/\nu$$

де R - те, що ми зараз називаємо числом Рейнольдса. Тут L і U є репрезентативними масштабами довжини і швидкості, в цьому випадку діаметр труби і (об'ємна) середня швидкість потоку (визначається шляхом вимірювання об'ємної витрати потоку та ділення на площу поперечного перерізу труби).

Важливою особливістю експериментів Рейнольдса є те що він зауважив, що з ростом температури перехід до турбулентності настає при менших швидкостях течії. Цей ефект був правильно інтерпретований Рейнольдсом як прояв зменшення в'язкості води зі зростанням температури.

Перехід від ламінарного режиму течії до турбулентного відбувається в результаті втрати стійкості. Для тих, хто знайомий з класичною механікою, звичним є поняття стійкості положення рівноваги. При цьому в реальній ситуації будь-яке положення рівноваги постійно зондується на стійкість наявністю різних флуктуацій.

Поняття стійкості може бути застосовано не тільки до положення рівноваги, а й до режиму руху, наприклад, до режиму течії рідини або газу. У найбільш простих випадках мова йде про стійкість стаціонарних течій. Але можлива постановка задачі і про стійкість нестаціонарних, наприклад періодичних течій (детальне визначення різних типів нестійкості буде приведено в окремому розділі. У цьому пункті буде дано тільки «феноменологічне» уявлення нестійких течій).

Найбільш відомий в гідродинаміці вид нестійкості - зсувна нестійкість (нестійкість тангенціальних розривів швидкості або нестійкість Кельвіна-Гельмгольца), яка реалізується, коли один шар рідини "ковзає"по іншому. Зазначена ситуація властива багатьом реальним природним течіям. Нестійкості в даному випадку піддається границя між шарами рідини, які рухаються з різними швидкостями.

Фізичну інтерпретацію нестійкості Кельвіна-Гельмгольца можна дати на основі рівняння Бернуллі яке пояснює відомий парадокс гідромеханіки: "тиск у вузькій частині труби менший, ніж в широкій". Зв'яжемо систему відліку з одним з шарів рідини. У такій системі відліку нижній шар знаходиться у спокої, а верхній рухається з деякою швидкістю. Шари розділені поверхнею (площиною), на якій швидкість течії зазнає розриву. Припустимо, що в результаті деяких флуктуацій поверхня розриву вигинається в бік області, де швидкість течії більша. Тоді, відповідно до рівняння Бернуллі, тиск над виступом (в «вузькій частині труби») зменшиться, і, отже, реалізується «додатній» зворотний зв'язок - поверхня розділення продовжить вигинатися. Можна ще сказати, що на вигин з боку потоку буде діяти підйомна сила - як на крило літака. Очевидно, що в разі, коли поверхня розриву випадковим чином вигнеться в іншу сторону, знову виникне позитивний зворотний зв'язок - підвищення тиску в «широкій частині труби», яке сприятиме зростанню вихідного збурення. Іншими словами, поверхня розділення між шарами рідини, є нестійкою по відношенню до нескінченно малих флуктуацій. Звернемо увагу на те, що відповідно до рівняння Бернуллі, зміна тиску визначається зміною швидкості течії. При цьому можна відзначити що «джерело нестійкості» якимось чином пов'язаний з нелінійністю рівнянь гідродинаміки.

Нестійкості Кельвіна-Гельмгольца протистоїть молекулярна в'язкість, яка забезпечує незворотний потік імпульсу на молекулярному рівні з областей з більшою швидкістю в області з меншою швидкістю. Математичне вираження цього процесу закладено в рівнянні Навье-Стокса.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \mathrm{t}} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla \mathrm{p}}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} \tag{1.1}$$

Якщо зміну швидкості пов'язувати лише з силами в'язкості, то в лінійному наближенні з рівняння (1.1) отримуємо рівняння типу рівняння дифузії

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \mathrm{t}} = \nu\Delta\vec{v} \tag{1.2}$$

Характер розв'язку даного рівняння добре відомий: будь-яка просторова неоднорідність з часом «розпливається» у просторі. Отже, якщо на поверхні тангенціального розриву (або в будь-який інший області рідини) виникає деяке збурення (просторова неоднорідність поля швидкості), то в'язкість сприятиме знищенню цієї неоднорідності. Другі похідні, які входять у складові оператора Лапласа, завжди мають «потрібний знак» для усунення просторової неоднорідності. До речі, сам тангенціальний розрив являє собою «модельну конструкцію», яка в реальності, через дії в'язкості, не може існувати як стаціонарне утворення. Якщо ввести, як уже хгадувалося вище, характерні масштаби швидкості U та довжини L, то в рівнянні Нав'є-Стокса можна перейти до безрозмірних змінних (позначимо їх значком «*») у відповідності з наступними формулами:

$$\vec{v}^* = \vec{v}/\mathrm{U}, \mathrm{t}^* = \mathrm{tU/L}, \nabla^* = \nabla/\mathrm{L}, \mathrm{p}^* = \mathrm{p}/\rho\mathrm{U}^2, \Delta^* = \Delta/\mathrm{L}^2 \tag{1.3}$$

Рівняння Нав'є Стокса в безрозмірних змінних набуває вигляду:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^*\nabla^*)\,\vec{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re}\Delta^*\vec{v}^* \tag{1.4}$$

У правій частині рівняння з'явилася безрозмірна величина Re - число Рейнольдса. Фактично ця величина являє собою відношення членів рівняння Нав'є-Стокса, які «працюють» на розвиток нестійкості $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ і проти неї $\nu\Delta\vec{v}$

$$\frac{(v\nabla)v}{\nu\Delta v} \sim \frac{\mathrm{U}^2/\mathrm{L}}{\nu\mathrm{U}/\mathrm{L}^2} = \frac{\mathrm{UL}}{\nu} \equiv \mathrm{Re}$$

Тому логічно розглядати число Рейнольдса в якості критерію стійкості руху. Якщо число Рейнольдса перевищує деяке критичне значення, то рух нестійкий і розвивається турбулентність, в іншому випадку потік залишається ламінарним.

Універсального для всіх систем значення критичного числа Рейнольдса не існує з наступних причин. По-перше, характерні величини L і U не можуть бути однозначно визначені для систем з різною «геометрією». По-друге, критичне значення числа Рейнольдса залежить від рівня фонових збурень. Втім, для систем з певною «геометрією» можна однозначно визначити критичне значення Re для нескінченно малих збурень. Таке значення розраховується теоретично (лінійний аналіз стійкості) або знаходиться експериментально при ретельно контрольованому рівні фонових збурень.

1.1.2 Конвективная нестійкість. Число Релея

Розглянемо ще один поширений в природних системах вид нестійкості. Конвективною нестійкістю (нестійкістю Релея-Бенара) називається нестійкість в середовищі, що знаходиться в полі сили тяжіння $\vec{g}$ і в якому спостерігається потік тепла з компонентою в напрямку, протилежному вектору $\vec{g}$. Цей тип нестійкості пояснюється появою сили плавучості при випадкових вертикальних переміщеннях елемента речовини.

Уявімо собі ситуацію, коли більш щільний (холодний) шар рідини або газу знаходиться вище менш щільного (теплого) шару.

Здається, що така ситуація завжди є нестійкою. Покажемо, що це не зовсім так. Якщо легка частинка нижнього шару переміщується в верхній важчий шар, то, зрозуміло, виникне сила плавучості (різниця між силою Архімеда і силою тяжіння), що підтримує цей рух. Але такий сценарій справедливий за умови, що переміщення було досить швидким, і температура між часткою і навколишнім середовищем не встигла вирівнятися. Тому основне питання щодо стійкості може бути сформульований так: чи встигне відрелаксувати різниця температури між виділеним елементом і його середовищем, поки цей елемент переміщується?

Нехай $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 > 0$ - перепад температур в шарі рідини товщиною d (див. Рис. 1.4). Початок системи відліку розташуємо на нижній поверхні, що має температуру T_2, а, вісь 0z направимо протилежно вектору прискорення сили тяжіння - вертикально вгору. Якщо конвективні течії в рідини відсутні, то через рідину буде йти молекулярний потік тепла, і встановиться стаціонарний лінійний профіль температур

$$\mathrm{T(z)} = \mathrm{T}_2 - \frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\mathrm{d}}\mathrm{z}$$

Для подальшого аналізу конкретизуємо задачу. Розглянемо область рідини з характерним розміром r (для визначеності можна говорити про сферичну область радіуса r). Нехай ця область перемістилася вгору на відстань Δz . Значення за модулем величини перепаду густини між елементом речовини що змістився та її оточенням буде:

$$|\Delta\rho| = \alpha\rho\Delta \mathrm{T} = \alpha\rho\frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\mathrm{d}}\Delta \mathrm{z},$$

де α - коефіцієнт об'ємного температурного розширення. Оцінимо силу плавучості $\mathrm{F_{up}}$, що діє на область об'ємом V

$$\mathrm{F_{up}} = \mathrm{gV}\Delta\rho = \mathrm{g}\frac{4\pi \mathrm{r}^3}{3}\alpha\rho\frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\mathrm{d}}\Delta \mathrm{z}.$$

Сила плавучості при русі врівноважується силою в'язкого тертя F_s (формула Стокса)

$$\mathrm{F_s} = 6\pi\rho\nu \mathrm{rU}$$

де U - швидкість руху, ν - кінематична в'язкість. Прирівнюючи сили плавучості і сили в'язкого тертя знаходимо швидкість

$$\mathrm{U} = \mathrm{g}\alpha\frac{2\mathrm{r}^2}{9}\frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\nu \mathrm{d}}\Delta \mathrm{z} \sim \mathrm{g}\alpha \mathrm{r}^2\frac{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1}{\nu \mathrm{d}}\Delta \mathrm{z}$$

Знаючи швидкість, оцінимо час, необхідний для подолання елементу об'єму відстані Δz

$$\tau_{\Delta z} \sim \frac{\Delta z}{U} = \frac{d\nu}{g\alpha r^2 \left(T_2 - T_1\right)}$$

Тепер оцінимо час температурної релаксації частинки радіуса r. Використовуючи розмірності вхідних величин з простих міркувань отримуємо

$$\tau_{\mathrm{T}} \sim \mathrm{r}^2/\chi$$

де χ, [м^2/с] - молекулярний коефіцієнт температуропровідності. Зрозуміло, що чим більша область рідини, тим вона більш схильна до руху (більше час релаксації і вище швидкість). Тому при дослідженні умови виникнення руху доцільно розглядати частки з максимально можливими розмірами, тобто r$\sim d$. Отже, рух елемента рідини буде підтримуватися, якщо час температурної релаксації істотно перевищує час руху частинки: $\tau_T >> \tau_{\Delta z}$. Використовуючи вирази для температурної релаксації та час руху отримаємо:

$$\frac{g\alpha \left(T_2 - T_1\right) d^3}{\chi\nu} \equiv Ra >> 1$$

Отримана безрозмірна комбінація параметрів називається числом Релея і являє собою критерій конвективної нестійкості. Отримати число Релея можна строго - в результаті приведення рівнянь Буссінеска до безрозмірного вигляду. Відзначимо, що в рівняннях Буссінеска виникає не тільки число Релея, але і число Прандтля Pr ($Pr = \nu/\chi$). Таким чином, режим конвекції визначається не одним, а двома безрозмірними параметрами: Ra і Pr. У загальному випадку критичне значення числа Релея залежить від типу меж. Можна відзначити, що стійкість гідродинамічного середовища сильно залежить від його товщини d. (наприклад, при підігріві знизу шару води товщиною $d = 1$ м нестійкість виникає вже при мізерно малому перепаді температур 10^{-7}, при $d = 1$ см критичний перепад температур складає ~ 0.1, а шар товщиною $d = 1$ мм практично абсолютно стійкий).

Слід підкреслити, що розвитку конвективної нестійкості перешкоджає не тільки молекулярна в'язкість, але і молекулярна температуропровідність. За інших рівних умов розвиток конвекції в середовищі з високим значенням молекулярної температуропроводности суттєво менше.

На Рис. 1.5 представлений приклад візуалізації процесу розвитку конвективної нестійкості.

1.1.3 Термогравітаційна конвекція в нестисливому середовищі. Рівняння Буссінеска. Числа Грассгофа, Прандтля і Релея

Опис термогравітаційної конвекції засноване на системі рівнянь Нав'є-Стокса і рівнянні переносу тепла (температури), записаних в наближенні Буссінеска. Зазначене наближення передбачає, що тиск слабо змінюється уздовж рідини, так що зміною густини під впливом зміни тиску можна знехтувати. Істотні для даної задачі зміни густини пов'язані тільки з варіаціями температури рідини. Саме вони призводить до появи архімедівських сил (сил плавучості), що викликають конвективний рух. Будемо вважати, що температура задається у вигляді

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}',$$

де T_0 - деяке постійне середнє значення, від якого відраховується нерівномірність температури ($\mathrm{T}' << \mathrm{T}_0$). Зважаючи на малі зміни температури малі зміни густини до яких вони призводять

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$
$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\mathrm{p}} \mathrm{T}' = -\rho_0 \alpha \mathrm{T}'$$

де α - температурний коефіцієнт розширення рідини (будемо вважати $\alpha > 0$). Тиск також представимо у вигляді суми $\mathrm{p} = \mathrm{p}_0 + \mathrm{p}'$ де p_0 відповідає рівновазі при температурі T_0 і густині ρ_0. Згідно рівнянню гідростатичної рівноваги маємо $\mathrm{p}_0 = \rho_0 \vec{\mathrm{g}}\vec{\mathrm{r}} + \mathrm{const}$ Знаючи, що швидкість звуку визначається як $c^2 = (\partial p/\partial \rho)_s$, де ($s = const$, процес адіабатичний) можна оцінити межі застосування даної теорії. Варіація густини, пов'язана зі зміною тиску при зміні глибини Δh, визначається формулою

$$\Delta\rho^{\mathrm{p}} \sim \frac{1}{\mathrm{c}^2}\Delta\mathrm{p} = \frac{\rho\mathrm{g}}{\mathrm{c}^2}\Delta\mathrm{h}.$$

Величина $\Delta\rho^{\mathrm{p}}$ повинна бути істотно менше варіації густини що спричинена зміною температури $\Delta\rho^{\mathrm{T}} \sim \rho\alpha\Delta\mathrm{T}$. В результаті отримуємо шукану умову $\Delta\rho^{\mathrm{p}} << \Delta\rho^{\mathrm{T}} \Rightarrow (\mathrm{g}/\mathrm{c}^2) << \alpha(\Delta\mathrm{T}/\Delta\mathrm{h})$. Проведемо лінеаризацію рівнянь Нав'є-Стокса $((\partial\vec{v}/\partial t) + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g})$. В результаті перший доданок з правого боку набуде вигляду

$$\frac{\nabla\mathrm{p}}{\rho} = \frac{\nabla\left(\mathrm{p}_0 + \mathrm{p}'\right)}{\rho_0 + \rho'} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\nabla\left(\mathrm{p}_0 + \mathrm{p}'\right)}{1 + \rho'/\rho_0} \approx \frac{1 - \rho'/\rho_0}{\rho_0}\nabla\left(\mathrm{p}_0 + \mathrm{p}'\right) =$$

$$= \frac{\nabla\mathrm{p}_0}{\rho_0} + \frac{\nabla\mathrm{p}'}{\rho_0} - \frac{\rho'\nabla\mathrm{p}_0}{\rho_0^2},$$

$$\frac{\nabla\mathrm{p}}{\rho} = \frac{\nabla\mathrm{p}_0}{\rho_0} + \frac{\nabla\mathrm{p}'}{\rho_0} - \frac{\rho'\nabla\mathrm{p}_0}{\rho_0^2} = \vec{g} + \frac{\nabla\mathrm{p}'}{\rho_0} + \alpha\mathrm{T}'\vec{g}$$

Тоді рівняння Нав'є-Стокса можна записати як

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho_0} - \alpha T'\vec{g} + \nu\Delta\vec{v} \tag{1.5}$$

в праву частину даного рівняння входить величина, що описує силу плавучості (суперпозицію сили тяжіння і сили Архімеда) «$-\alpha T'\vec{g}$». Дане рівняння слід доповнити рівнянням переносу температури, в якому ми нехтуємо джерелами тепла, пов'язаними з дисипацією:

$$\frac{\partial\mathrm{T}'}{\partial\mathrm{t}} + (\vec{v}\nabla)\mathrm{T}' = \chi\Delta\mathrm{T}'.$$

Крім того, система не буде повною без рівняння неперервності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0,$$

яке для аналізу лінійних збурень набуде вигляду

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 div\vec{v} + div\rho'\vec{v} = 0$$

Слід відмітити, що ми робимо чергове важливе припущення: добавкою густини ρ' ми нехтуємо, вона залишається лише в доданку, що описує силу плавучості. В результаті отримуємо

$$div\vec{v} = 0$$

Система Буссінеска, що включає в себе рівняння руху, рівняння перенесення температури та рівняння неперервності, включає п'ять рівнянь, що визначають п'ять невідомих функцій: $\vec{v}$, p'/ρ_0, T'. Система містить три параметри: ν, χ, $\mathrm{g}\alpha$. Крім того, є характерна довжина h і характерний перепад температур ΔT. Важливо відзначити, що характерна швидкість в даній задачі відсутня. Із зазначених п'яти параметрів можна скласти дві незалежні безрозмірні комбінації. В якості зазначених комбінацій зазвичай виступають число Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ і число Релея $\mathrm{Ra} = \mathrm{g}\alpha\Delta \mathrm{Th}^3/\chi\nu$. Досить часто використовують і число Грассгофа, яке показує відношення архімедівських і в'язких сил $\mathrm{G} = \mathrm{g}\alpha\Delta\mathrm{Th}^3/\nu^2 = \mathrm{Ra}/\mathrm{Pr}$

Число Прандтля є фізичним параметром рідини, що характеризує відношення коефіцієнтів кінематичної в'язкості і температуропровідності. У середовищах з малим числом Прандтля теплопередача ефективніше конвекції, при високих значеннях Pr температура «вморожена» в рідину і перенесення тепла за рахунок конвекції стає більш ефективним, ніж молекулярний теплообмін.

1.1.4 Конвективна стійкість. Критичне число Релея

Задачу про конвективну стійкість вперше роз'вязав Релей в 1916 році. Він розглянув горизонтальний шар рідини товщини h з вільними, але такими що не деформуються, межами, на яких підтримується різниця температур ΔT. Для подальшого аналізу потрібно перевести систему рівнянь Буссінеска до безрозмірного вигляду.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{Pr}(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{Pr}\nabla p + RaT\vec{e}_z + \Delta\vec{v}$$

$$Pr\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + (\vec{v}\nabla)\mathrm{T} = \Delta\mathrm{T}$$

$$div\vec{v} = 0.$$

Де використано, що одиниця довжини це h, температури - ΔT, час - h^2/ν, швидкість - χ/h, тиск - $\rho_0\chi^2/\mathrm{h}^2$.

Дотримуючись викладок Релея, будемо розглядати двовимірну задачу в площині 0xz. Вісь 0z спрямована вертикально вгору, а вісь 0x - горизонтально. В цьому випадку конвективний рух буде мати вигляд валів, витягнутих уздовж осі 0y. Граничні умови вибирають у вигляді:

$$z = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T = 1,$$

$$z = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T = 0.$$

Дані умови фізично означають що ми маємо межі які не деформуються, але вони є вільними. Такі умови не зовсім реальні (шар рідини з вільними верхньою і нижньою межами), але саме вони дають найпростішу математичну постановку задачі.

Нехай температура описується функцією виду $T = \vartheta + (1 - z)$, де ϑ - відхилення температури від рівноважного лінійного розподілу $T_0 = (1 - z)$. Введемо функцію потоку так, що $\mathrm{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{z}}, \mathrm{w} = \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}$.

Розгляд задачі ведеться в рамках лінійної теорії, тому з рівнянь можна відкинути всі члени, квадратичні по швидкості і збуреню профілю температури.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} + \Delta \mathrm{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{Pr}\frac{\partial p}{\partial z} + Ra \cdot T + \Delta w$$

Запишемо вирази для швидкості через функцію потоку і перехресно продиференціюємо по координатам x i z.

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z} = -\frac{1}{Pr}\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad |\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{Pr}\frac{\partial p}{\partial z} + Ra \cdot T + \Delta\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad |\frac{\partial}{\partial x}$$

Віднімаючи другого рівняння перше, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = \Delta\Delta\psi + \mathrm{Ra}\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{x}} \tag{1.6}$$

Далі скористаємося функцією опису температури.

$$Pr\frac{\partial(\vartheta + 1 - z)}{\partial t} + u\frac{\partial(\vartheta + 1 - z)}{\partial x} + w\frac{\partial(\vartheta + 1 - z)}{\partial z} = \Delta(\vartheta + 1 - z)$$

В результаті перетворень отримуємо

$$Pr\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} - w = \Delta\vartheta$$

Другий і третій доданки в лівій частині даного рівняння містять квадрати малих величин, отже, ними можна знехтувати. У підсумку приходимо до наступного рівняння:

$$Pr\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \Delta\vartheta + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.7}$$

Із граничними умовами $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \vartheta = 0$ або $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$, $\psi = 0, \vartheta = 0$.

Будемо шукати розв'язок системи (1.6), (1.7) у вигляді періодичних збурень з експоненційної залежністю амплітуди від часу:

$$\psi = \psi_0 \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}} \sin(\pi \mathrm{nz}) \sin(\pi \mathrm{ax}) \tag{1.8}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\pi \mathrm{nz}) \cos(\pi \mathrm{ax}) \tag{1.9}$$

Дані співвідношення задовольняють граничні умови. Підставивши вигляд розв'язків у рівняння (1.6), (1.7) отримаємо:

$$\psi_0 \left[\lambda \pi^2 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right) - \pi^4 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)^2\right] + \vartheta_0 [\mathrm{Ra}(\pi \mathrm{a})] = 0$$

$$\psi_0 [\pi \mathrm{a}] + \vartheta_0 \left[\lambda Pr - \pi^2 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)\right] = 0$$

Вийшла система однорідних лінійних рівнянь щодо амплітуд ψ_0 та ϑ_0. Щоб дана система мала нетривіальний розв'язок, її визначник повинен дорівнювати нулю.

$$\begin{vmatrix} \lambda \pi^2 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right) - \pi^4 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)^2 & \mathrm{Ra}(\pi \mathrm{a}) \\ \pi \mathrm{a} & \lambda \mathrm{Pr} - \pi^2 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

Розкриваючи визначник, отримуємо квадратне рівняння щодо декремента λ:

$$Pr \lambda^2 - \pi^2 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right) (1 + Pr) \lambda + \pi^4 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)^2 - \frac{\mathrm{a}^2 \mathrm{Ra}}{\left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)} = 0$$

Розв'язуючи його отримаємо два кореня:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi^2 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right) (1 + \mathrm{Pr})}{2\mathrm{Pr}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{\pi^4 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)^2 (1 - \mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{Pr}^2} + \frac{\mathrm{a}^2 \mathrm{Ra}}{Pr \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)}}$$

Із вигляду розв'язку можна зробити наступні висновки:

1. При $Ra > 0$ (тобто при нагріванні знизу) вираз під коренем буде завжди додатнім. Отже, обидва кореня будуть дійсними і амплітуда збурень еволюціонує монотонно. При цьому один корінь завжди додатній, а другий при деякому значенні $Ra > 0$ змінює знак, і амплітуда збурень починає експоненціально наростати.

2. При $Ra < 0$ дійсна частина обох коренів завжди додатня, отже, при підігріві зверху всі збурення загасають. Але зі зростанням величини підігріву виникає ситуація, коли вираз під коренем стає від'ємним, тобто з'являються два комплексно-спряжені корені, які вказують про реалізацію згасаючих коливальних режимів. Цей перехід відбувається при значенні числа Релея

$$\mathrm{Ra}^* = -\frac{\pi^4 \left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{n}^2\right)^3 (1 - \mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{a}^2 \mathrm{Pr}}$$

Отже, існують три області значень: затухаючі коливальні збурення, монотонно затухаючі збурення і монотонно наростаючі збурення. Визначимо критичне значення числа Релея, при досягненні якого починається наростання збурень.

$$\frac{\pi^4\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{n}^2\right)^2(1+\mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{Pr}^2}-\frac{\pi^4\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{n}^2\right)^2(1-\mathrm{Pr})^2}{4\mathrm{Pr}^2}=\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{Ra_c}}{Pr\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{n}^2\right)},$$

$$\mathrm{Ra_c}=\frac{\pi^4\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{n}^2\right)^3}{\mathrm{a}^2}$$

З отриманої формули слідує цікавий висновок: критичне число Релея не залежить від числа Прандтля. Для знаходження мінімуму/критичного значення числа Рейнольдса достатньо знайти екстремум даної функції (продиференціювати даний вираз по параметру a і прирівняти отримане співвідношення до нуля).

2

Елементи теорії динамічних систем

Хаос і турбулентність довгий час асоціювалися з системами, що мають величезну кількість ступенів вільності. Розвинена турбулентність вважалася позбавленої будь-якого порядку. Лише з кінця 60-х років минулого століття намітився прогрес в розумінні структури хаосу і природи турбулентності.

По-перше, була встановлена можливість хаотичного поведінки нелінійних динамічних систем з малим числом ступенів вільності.

По-друге, було зрозуміло, що навіть в самому розвиненому турбулентному потоці існують певні закономірності, а число ступенів вільності значно менше очікуваного. У 70-80-х роках з'являються роботи, присвячені когерентним структурам в турбулентних потоках, і робляться спроби опису турбулентності на мові фракталів.

Зазвичай розглядають маломірні динамічні системи, що описують хаотичну поведінку в часі невеликого числа заданих в просторі мод. Реальним прообразом таких динамічних систем можуть служити течії поблизу порогу нестійкості (при малих надкритичностях). Незважаючи на те що, справжня розвинена турбулентність хаотична не тільки в часі, але і в просторі, теорія маломірних динамічних систем надзвичайно корисна для розуміння шляхів розвитку турбулентності (сценаріїв переходу до хаосу) і для відпрацювання методів опису хаотичних систем.

Важливо відзначити, що нелінійність є необхідною, але не достатньою умовою виникнення хаотичної поведінки. Виникнення хаосу пов'язано з особливою властивістю нелінійних систем експоненціально швидко змінювати ситуацію в обмеженій області фазового простору, а не з наявністю джерел шуму або нескінченного числа ступенів вільності. Нерегулярну поведінку нелінійних систем, еволюція яких однозначно описується динамічними рівняннями при заданих початкових умовах, називають детермінованим хаосом.

У цьому розділі будуть введені основні поняття теорії динамічних систем, виведена система рівнянь Лоренца і проведено короткий аналіз режимів, що в ній реалізуються. Також будуть розглянуті хаотичні режими, яким властиво існування дивного аттрактора.

2.1 Базові поняття теорії динамічних систем

Динамічною системою називається математичне представлення, яке відповідає реальним системам (фізичних, хімічних, біологічних та ін.), еволюція яких однозначно визначається початковим станом. Динамічні системи з кінцевим числом змінних описуються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{dx_i}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{F_i}(\vec{\mathrm{x}}, \vec{\lambda}) \tag{2.1}$$

Де $\vec{\lambda}$ - вектор «керуючих» параметрів, а функції $F_i(\vec{x}, \vec{\lambda})$ не залежать явно ні від просторової координати, ні від часу. Простір координат x_i називається фазовим простором. За зміну стану системи в часі відповідає рух точки в фазовому просторі уздовж деякої лінії, яка називається фазовою траєкторією. Перший і найпростіший тип траєкторії у фазовому просторі визначається умовою $\mathrm{dx_i/dt} = 0$. Ця траєкторія є виродженою, тобто вона являє собою точку (нерухому точку). Нерухома точка є особливою точкою, тому що в ній не визначена дотична до траєкторії. Всі інші точки фазового простору, де $\Sigma \mathrm{F_i^2} \neq 0$ називаються регулярними точками.

На Рис. 2.1. на прикладі двовимірного фазового простору показані варіанти поведінки фазових траєкторій поблизу особливих точок. Залежно від того, як поводяться траєкторії, особливі точки поділяються на (а) стійкі і (б) нестійкі вузли, (в) стійкі і (г) нестійкі фокуси, (д) сідловидні точки (стійкі по одному і нестійкі по іншому напрямку) і (е) центри (траєкторії, що представляють собою замкнуті лінії).

Об'єкти фазового простору, які, будучи обмежені, відображаються самі на себе в ході еволюції системи, називаються інваріантними множинами. Крім нерухомих точок до інваріантних множин відносяться замкнуті криві, які називаються граничними циклами (Рис.2.2).

Двовимірному фазового простору властива більша різноманітність траєкторій і, отже, двовимірна динамічна система може поводити себе більш складно. Для багатовимірних систем траєкторії мають ще більшу «свободу» уникати один одного. Завдяки цій "свободі"стають можливими нові типи динамічного поведінки, в тому числі хаотичний або турбулентний.

Динамічна система називається консервативною, коли у відсутності зовнішнього впливу залишаються незмінними її повна енергія, кількість руху, момент кількості руху (ті ін. характеристики). Процеси в консервативних системах оборотні в часі.

При наявності дисипації фазова траєкторія дисипативної системи на великих часових проміжках виходить на аттрактор – граничний цикл, що являє собою замкнену лінію.

2.2 Біфуркації

Біфуркацією (від лат. bifurcus - роздвоєний) називається розгалуження і зливання положень рівноваги розв'язків при зміні керуючих параметрів динамічної системи. Основи теорії біфуркацій були закладені А. Пуанкаре і А.М.Ляпунова на початку 20 ст., Математично біфуркація - це зміна топологічної структури розбиття фазового простору динамічної системи на траєкторії при малій зміні її параметрів. Це визначення спирається на поняття топологічної еквівалентності динамічних систем. Дві системи топологічно еквівалентні, тобто мають однакову структуру розбиття фазового простору на траєкторії, якщо рухи однієї з них можуть бути зведені до рухів іншої безперервною заміною координат і часу.

Найбільш цікавим є біфуркація Хопфа, коли з нерухомої стійкої точки народжується стійкий граничний цикл.

2.3 Дивний атрактор. Фрактальна розмірність

Раніше ми розглядали дискретні системи, які описуються кінцевим числом змінних. У разі просторово розподілених систем поступають наступним чином. Поля (швидкості, тиску та ін.) представляють у вигляді рядів Фур'є. В результаті виникають нові змінні - амплітуди гармонік. Якщо такі гармоніки, розташувати в порядку зменшення масштабів, то, очевидно, ряд буде кінцевим, так як масштаби вихорів завжди обмежені знизу дією в'язкості. Тому і фазовий простір залишається скінченновимірним. Крім того, обмеженість амплітуд пульсацій швидкості забезпечує обмеженість об'єму простору станів, в якому розташовуються траєкторії, що відповідають режиму течії в'язкої рідини. Траєкторії можуть прагнути до граничного циклу (періодичний рух) або просто вести себе складно і заплутано. Складний і заплутаний рух можна уявити собі, якщо припустити, що всі траєкторії нестійкі. Нестійкість означає, що дві як завгодно близькі точки фазового простору з плином часу здатні розійтися на велику відстань - такий рух і асоціюється з турбулентністю.

Множина нестійких траєкторій в фазовому просторі дисипативної системи які притягуються називається стохастичним або дивним аттрактором. На перший погляд нестійкість всіх траєкторій, що належать до дивного аттрактору, і вимога про те, що б всі сусідні траєкторії до нього притягувалися це несумісні поняття. Але це не є суперечкою. Справа в тому, що траєкторії можуть бути нестійкими за одними напрямами і стійкими, тобто такими що притягуються, по іншим напрямкам.

Дивний аттрактор має такі властивості.

По-перше, він притягує фазові траєкторії з області притягування (в іншому випадку цей об'єкт не був би аттрактором). По-друге, дивний аттрактор є чутливим до початкових умов (близькі траєкторії розходяться). По-третє, дивний аттрактор має дробову (фрактальную) розмірність.

Друга властивість дивного аттрактора (чутливість до початкових умов) створює принципові складності на шляху вирішення прогностичних завдань. Так, наприклад, неможливим виявляється точне передбачення погоди на тривалий термін: для прогнозу на 1-2 місяці наперед потрібно знати початкові умови з неймовірно великою відносною точністю 10^{-5}.

Третя властивість заслуговує на конкретизацію. Завдяки дисипативності системи об'єм аттрактора має дорівнювати нулю. Для того щоб об'єм множини точок був рівний нулеві топологічна розмірність цієї множини повинна бути менше розмірності фазового простору (для тривимірного фазового простору менше трьох). Але в двовимірному просторі дивний аттрактор не існує, отже, його розмірність більше двох але менше трьох. Тобто, приходимо до висновку, що дивний аттрактор має дробову топологічну розмірність. Об'єкти, що мають дробову топологічну розмірність називаються фракталами.

Фрактальна розмірність (Хаусдорфа-Безиковича) визначається наступним чином. Нехай $N(\varepsilon)$ - найменше число кубів з ребром ϵ (сфер з діаметром ε), яке покриває всі точки множини. Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича –

$$\mathrm{D} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln \mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \tag{2.2}$$

Покажемо, що дане визначення дає цілочисельні значення розмірності для звичайних добре відомих множин. Так, для множини, що складається з кінцевого числа ізольованих точок N, мінімальне число сфер, за допомогою яких можна покрити цю множину, при досить малому розмірі сфер збігається, очевидно, з кількістю точок і не залежить від радіуса цих сфер. Отже, згідно з формулою (2.2), фрактальна розмірність цієї множини $D = 0$, що збігається з топологічною розмірністю точки. Для відрізка прямої лінії довжиною L мінімальне число відрізків розміру ε , за допомогою яких можна цілком покрити даний відрізок, $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$. У цьому випадку, згідно з формулою (2.2), фрактальна розмірність $D = 1$, що збігається з топологічної розмірністю відрізка прямої. Аналогічний результат очевидно буде отримано, якщо розглядати не пряму лінію, а відрізок деякий кривої.

Продовжуючи міркування, нескладно показати, що розмірність ділянки деякій поверхні має розмірність $D = 2$, а об'єкти, що представляють собою області тривимірного простору обмежені поверхнями (куб, призма, еліпсоїда і т.д.), мають топологічну розмірність $D = 3$.

Розглянемо два простих приклад:

(1) прямокутник з довжинами сторін a і b,

(2) прямокутний паралелепіпед з довжинами сторін a, b і c.

У першому випадку мінімальне число квадратиків з розміром ребра ε , за допомогою яких можна цілком покрити даний прямокутник становить $N(\varepsilon) = ab/\varepsilon^2$. Застосовуючи формулу (2.2), отримуємо $D = 2$. У другому випадку мінімальне число кубиків з довжиною ребра ε, яке потрібно для покриття паралелепіпеда, становить $N(\varepsilon) = abc/\varepsilon^3$. Формула (2.2) дає топологічну розмірність паралелепіпеда $D = 3$.

Найпростішим і класичним прикладом об'єкта, що має дробну розмірність, є Канторова множина. Будується Канторова множина наступним чином (Рис.2.3). На першому кроці маємо множину що складається з одиничного відрізку прямої. На другому кроці видалимо середню третину цього відрізка. Тепер множина складається з двох відрізків. На третьому кроці видалимо середню третину з кожного з двох, що залишилися відрізків. Залишилося чотири відрізка. Повторюючи цю процедуру знову і знову, в границі отримаємо множину, яка називається Канторовою множиною.

Визначимо розмірність Канторової множини. Нехай індекс m - номер кроку. Тоді число необхідних кубів при $m = 1$ є $N = 1$, при $m = 2 - N = 2$ і т. д. На кроці m число кубів складе $N = 2^m$. Розмір ребра куба $\varepsilon = (1/3)^m$. Застосовуючи формулу (2.2), отримуємо

$$\mathrm{D} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln \mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln 2^m}{\ln 3^m}\right) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631$$

Виявилося, що Канторова множина має не цілочислену топологічну розмірність. Таким чином, топологічний «статус» цієї множини лежить десь між точкою і відрізком прямої.

В якості наступного прикладу фрактальної множини розглянемо килим Серпінського (квадрат Серпінського). Цей об'єкт був запропонований польським математиком Вацлавом Серпінським і він являє собою один з двовимірних аналогів безлічі Кантора.

Побудова квадрата Серпінського багато в чому аналогічна побудові множини Кантора. Звичайний одиничний квадрат ділиться прямими, паралельними його сторонам, на 9 рівних квадратів, після чого центральний квадрат видаляється. Виходить множина, що складається з 8 квадратів. Проводячи аналогічну процедуру (поділ на 9 рівних частин і видалення центральної частини) з кожним з решти 8 квадратів, отримаємо множину що складається з 64 квадратів. Повторюючи цей процес до нескінченності, приходимо до множини, яка називається килим Серпінського (Рис. 2.4).

Для визначення топологічної розмірності килима Серпінського діємо за вже відпрацьованою вище схемою. Мінімальна кількість кубів (квадратів), необхідних для покриття об'єкта на кроці m становить $N = 8^m$, а розмір ребра куба - $\varepsilon = (1/3)^m$. Застосовуючи формулу (2.2), отримуємо

$$\mathrm{D} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln \mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{\ln 8^{\mathrm{m}}}{\ln 3^m} \right) = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.893$$

Знову топологічна розмірність об'єкта виявилася неціло́ю. Цього разу можна стверджувати, що топологічний «статус» килима Серпінського знаходиться між лінією і поверхнею. Тривимірний аналог килима Серпінського - губка Менгера (Рис. 2.5).

Ще один широко відомий приклад фрактального об'єкта крива Коха (описана в 1904 році шведським математиком Хельге фон Кохом). Опишемо процес її побудови (Рис.2.6а). Беремо одиничний інтервал, поділяємо його на три рівні частини і замінюємо середній інтервал рівностороннім трикутником без цього сегмента. В результаті утворюється ламана, що складається з чотирьох ланок довжини 1/3. На наступному кроці повторюємо операцію для кожної із чотирьох одержаних ланок. Нескінченно повторюючи цю процедуру, в результаті отримуємо криву Коха. Якщо з'єднати три однакові криві Коха, так як це показано на Рис. 2.6б, то вийде об'єкт, іменований сніжинкою Коха. Визначення топологічної розмірності кривої (або сніжинки) Коха дає наступну величину (число кубів $N = 4^m$, довжина ребра куба $\varepsilon = (1/3)^m$)

$$\mathrm{D} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln \mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{\ln 4^m}{\ln 3^m} \right) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.262$$

Слід зауважити, що фрактали не є відірваними від життя (абстрактними) штучними математичними побудовами, вони широко поширені в природі. Найбільш відомим природним фракталом є, наприклад, берегова лінія [Мандельброт, 2002]. Крім того, область, в якій відбувається дисипація енергії турбулентного потоку, також має фрактальну розмірність.

2.4 Теорема про лінійну стійкість

Визначимо лінійну стійкість системи використовуючи узагальнений підхід.

Розглянемо динамічну систему

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{F}(\mathrm{X}, \lambda) \tag{2.3}$$

де F - оператор, який діє в просторі, в якому визначений вектор X. Внаслідок зворотних зв'язків, що існують в системі, оператор F зазвичай є нелінійним. Уявімо, що система (2.3) має деякий розв'язок X_s (стандартний стан), який постійно "зондується"зовнішніми збуреннями або внутрішніми флуктуаціями на предмет стійкості. Випадок, коли X_s не залежить від часу і координат, є самим тривіальним. Взагалі кажучи, стандартний стан може являти собою залежний від часу і координат розв'язок, який має певну симетрією, що допускається зовнішніми умовами. У будь-якому випадку стандартний стан задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \mathrm{X_s}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{X^s}, \lambda\right). \tag{2.4}$$

Роль збурень можна врахувати, припускаючи, що

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}^s + \mathrm{x}$$

де x - збурення стандартного стану. Підставимо даний розклад в систему (2.3)

$$\frac{\partial \mathrm{X_s}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{X_s} + \mathrm{x}, \lambda\right)$$

Далі, використовуючи рівняння (2.4), отримуємо

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{X_s} + \mathrm{x}, \lambda\right) - \mathrm{F}\left(\mathrm{X_s}, \lambda\right) \tag{2.5}$$

Праву частину рівняння (2.5) доцільно розкласти в ряд поблизу стандартного стану за ступенями x. Будемо вважати, що такий розклад можливий. Формально розклад можна представити у вигляді

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{X_s} + \mathrm{x}, \lambda\right) - \mathrm{F}\left(\mathrm{X_s}, \lambda\right) = \left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \mathrm{X}}\right)_{\mathrm{X_s}} \mathrm{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta \mathrm{X}^2}\right)_{\mathrm{X_s}} \mathrm{xx} + \ldots \tag{2.6}$$

де об'єкти виду

$$(\delta \mathrm{F}/\delta \mathrm{X})_{\mathrm{X}_s} \tag{2.7}$$

представляють собою узагальнення похідних, і називаються похідними Фреше.

Система (2.5) з урахуванням розкладу (2.6), як правило, настільки ж складна, як і вихідна задача (2.3). Але тепер, завдяки розкладу в ряд, ми можемо виокремити з рівняння (2.5) лінійну і нелінійну частини.

Отже, ми маємо нелінійну задачу

$$\frac{\partial x}{\partial t} = L(\lambda)x + h(x, \lambda) \tag{2.8}$$

де

$$\mathrm{L}(\lambda) = (\delta \mathrm{F}/\delta \mathrm{X})_{\mathrm{X}_s}, \mathrm{h}(\mathrm{x}, \lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta \mathrm{X}^2}\right)_{\mathrm{X_s}} \mathrm{xx} + \ldots$$

і відповідну їй допоміжну лінійну задачу

$$\frac{\partial x}{\partial t} = L(\lambda)x. \tag{2.9}$$

Обидві задачі однорідні, тому що їм задовольняє тривіальний розв'язок x = 0.

Теорема про лінійної стійкості стверджує наступне:

1. Якщо тривіальний розв'язок x = 0 линеаризованої задачі (2.9) асимптотично стійке, то x = 0 є асимптотично стійкий розв'язок нелінійної задачі (2.8). 2. Якщо тривіальний розв'язок x = 0 линеаризованої задачі (2.9) нестійкий, то, x = 0 являє собою нестійкий розв'язок нелінійної задачі (2.8).

Важливо відзначити, що саме завдяки цій теоремі, аналіз стійкості динамічних систем зводиться до вирішення простих і зручних для аналізу лінійних задач.

Грунтуючись на аналізі лінеаризованих систем, ми, зрозуміло, втрачаємо багато важливих особливості динамічної поведінки при великих відхиленнях системи від стандартного стану, але лінійний аналіз дає можливість намітити поведінку системи і зрозуміти, причину утворення дисипативних структур. Дисипативні структури - стійкі просторово неоднорідні структури, що виникають в результаті розвитку нестійкостей в однорідному нерівноважному дисипативному середовищі (термін запропонований І. Пригожиним).

Прикладів дисипативних структур велика кількість (рис.2.7). Це і стоячі хвилі (брижі Фарадея) і комірка Бенара і вихори Тейлора і доріжка Кармана.

Підводячи підсумок можна відмітити загальну властивість динамічних систем. У більшості випадків, у міру збільшення потоку енергії (речовини), що проходить через динамічну систему, вона (система), як правило, виявляє такі три типи поведінки:

(1) детермінований або «ламинарний» рух, коли потік енергії невеликий;

(2) утворення дисипативних структур, коли потік енергії достатній для «виживання» однієї або невеликого числа просторових гармонік;

(3) хаотичний або турбулентний рух, коли потік енергії виявляється настільки великий, що утворюються і взаємодіють безліч просторових гармонік.

При постановці серії експериментів з однаковими умовами ми виявимо, що в першому випадку результат експерименту завжди буде незмінний. У другому випадку загальний вигляд дисипативних структур також не змінюватиметься від експерименту до експерименту, але тут вже можливий елемент випадковості (наприклад, напрямок циркуляції в осередках Бенара система «вибирає» випадковим чином). У третьому випадку поведінка системи виявляється надзвичайно чутливою до неконтрольованих мізерно малих варіацій умов експерименту, отже, всякий новий експеримент дасть новий результат - цей тип поведінки і асоціюється з турбулентністю.

2.5 Маломодова модель конвекції Лоренца

можливо є сенс перенести цей пункт в додатки

Отримаємо багатовимірні проекції рівнянь руху рідини, в результаті яких буде отримана система звичайних диференціальних рівнянь (система Лоренца), що описує конвективні рухи [Lorenz, 1963].

Будемо розглядати плоскі рухи рідини (конвективні вали), що виникають в шарі рідини товщини h, який обмежений двома горизонтальними площинами. Нижня площина має температуру T_1, верхня – T_2. Початок системи координат розташуємо на нижній площині. Ось 0z направимо вертикально вгору, а вісь 0x - горизонтально. Рівняння Буссінеска запишемо в покомпонентному вигляді

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} + \nu\Delta \mathrm{u}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w + g\alpha T, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} = \chi\Delta \mathrm{T}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2.13}$$

Ведемо функцію потоку ψ, так що $\mathrm{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{z}}, \quad \mathrm{w} = \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}$ і, зберігаючи в рівняннях нелінійні члени, отримаємо:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\Delta\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x} + g\alpha T \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} = \chi\Delta T \tag{2.16}$$

Після звичайної процедури диференціювання рівняння (2.14) по z і рівняння (2.15) по x маємо

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{z}} - \nu\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial \mathrm{z}^2} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial x^2} =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}\partial \mathrm{x}} + \nu\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{g}\alpha\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} \tag{2.18}$$

Скорочуючи в виразах (2.17) і (2.18) подібні доданки, які мають різні знаки Отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} = \nu\Delta\Delta\psi + g\alpha\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.19}$$

Далі, групуючи доданки при $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ і $\frac{\partial\psi}{\partial}$ отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = \nu\Delta\Delta\psi + g\alpha\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.20}$$

З огляду на лінійну залежність рівноважної температури від вертикальної координати, представимо температуру в наступному вигляді:

$$\mathrm{T} = \vartheta + \mathrm{T}_1 - \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{h}}(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2) \tag{2.21}$$

де ϑ - відхилення температури від рівноважного значення. З урахуванням формули (3.4.12) рівняння (2.16) і (2.20) приймають вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{(T_1 - T_2)}{h} = \chi\Delta\vartheta \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = \nu\Delta\Delta\psi + g\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \tag{2.23}$$

Для спрощення запису використовуємо дужки Пуассона

$$\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{x}} \tag{2.24}$$

З урахуванням (2.24) рівняння (2.22) і (2.23) виглядають наступним чином:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \{\psi, \vartheta\} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{(T_1 - T_2)}{h} = \chi\Delta\vartheta \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \{\psi, \Delta\psi\} = \nu\Delta\Delta\psi + g\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \tag{2.26}$$

Отриману систему рівнянь необхідно доповнити граничними умовами

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \psi = 0, \vartheta = 0$$

при $z = 0$, h.

Розв'язок (2.25) - (2.26) шукаємо у вигляді Фур'є представлення з амплітудами гармонік, залежними від часу

$$\psi(\mathrm{x},\mathrm{z},\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{m,n}} \psi_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) \sin\left(\frac{\pi \mathrm{mx}}{\mathrm{h}}\right) \sin\left(\frac{\pi \mathrm{nz}}{\mathrm{h}}\right) \tag{2.27}$$

$$\vartheta(\mathrm{x},\mathrm{z},\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{m,n}} \vartheta_{\mathrm{mn}}(\mathrm{t}) \cos\left(\frac{\pi \mathrm{mx}}{\mathrm{h}}\right) \sin\left(\frac{\pi \mathrm{nz}}{\mathrm{h}}\right) \tag{2.28}$$

Розв'язок в формі (2.27), (2.28) автоматично задовольняє граничним умовам задачі. Якщо вирази (2.27) і (2.28) підставити в систему рівнянь, і потім прирівняти коефіцієнти при однакових функціях x і z, то отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів $\psi_{\mathrm{mn}}(\mathrm{t})$ і $\vartheta_{\mathrm{mn}}(\mathrm{t})$. Така система, взагалі кажучи, містить нескінченне число рівнянь. Але існують фізичні причини, що обмежують число членів в рядах (2.27) і (2.28). Це обумовлено тим, що члени ряду з великими індексами m і n описують збурення на малих просторових масштабах. Але в силу дії молекулярних механізмів (в'язкість і температуропровідність), масштаби збурень завжди обмежені знизу, отже, в розглянутих рядах завжди можна обмежитися кінцевим числом членів. Особливістю моделі Лоренца є використання гранично малого числа членів в розкладах (2.27) і (2.28). Однак, це мінімальне число членів зберігає нелінійність системи. Дотримуючись позначень зроблених Лоренцом, позначимо амплітуди відповідних мод як X, Y і Z. Для приведення рівнянь до безрозмірного вигляду використовуються наступні (не зовсім звичайні) одиниці вимірювань: довжина - h, час - $\tau = \mathrm{h}^2/\left[\pi^2\chi\left(1+\mathrm{a}^2\right)\right]$, функція потоку - h^2/τ, температура - $(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)$. Параметр a визначено в п.1.1.4, параметр $b = 4/\left(1+a^2\right)$. Крім того, вводиться нормоване число Релея

$$r = \frac{Ra}{Ra_{np}} = \frac{g\alpha\Delta T h^3 a^2}{\chi\nu\pi^4\left(a^2+1\right)^3}.$$

Зауважимо, що розмірність функції потоку ψ - $м^2/c$, тому що похідна по простору дає величину з розмірністю швидкості. Нагадаємо, що (див. п.1.1.4)

$$\mathrm{Ra} = \frac{\mathrm{g}\alpha\Delta\mathrm{Th}^3}{\chi\nu}$$

$$\mathrm{Ra}_{\mathrm{xp}} = \left.\frac{\pi^4\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{n}^2\right)^3}{\mathrm{a}^2}\right|_{\mathrm{n}=1} = \frac{\pi^4\left(\mathrm{a}^2+1\right)^3}{\mathrm{a}^2}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \{\psi, \vartheta\} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{b}{4\pi^2}\Delta\vartheta \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \{\psi, \Delta\psi\} = \frac{bPr}{4\pi^2}\Delta\Delta\psi + \frac{4Prr}{ba^2}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \tag{2.30}$$

Лоренц вибрав один член розкладу для функції $\psi(\mathrm{x,z,t})$ і два члени для функції $\vartheta(\mathrm{x,z,t})$:

$$\psi(\mathrm{x,z,t}) = \mathrm{X(t)}\frac{\sqrt{2}}{\pi^2\mathrm{a}}\sin(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) \tag{2.31}$$

$$\vartheta(\mathrm{x,z,t}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\mathrm{r}}\mathrm{Y(t)}\cos(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) - \frac{1}{\pi\mathrm{r}}\mathrm{Z(t)}\sin(2\pi\mathrm{z}) \tag{2.32}$$

Доцільність саме такого вибору зумовлена результатами чисельних досліджень скінченновимірних систем рівнянь, виконаних в роботі [Saltzman, 1962]. Легко переконатися, що при підстановці виразу (2.31) в рівняння (2.32) дужки Пуассона зануляються.

$$\{\psi, \Delta\psi\} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) =$$

$$= -\psi^2\pi^2\mathrm{a}\left(-\pi^2\mathrm{a}^2 - \pi^2\right) + \psi^2\pi^2\mathrm{a}\left(-\pi^2\mathrm{a}^2 - \pi^2\right) = 0$$

Скорочуючи подібні доданки, приходимо до звичайного диференціального рівняння для амплітуд гармонік.

$$\dot{\mathrm{X}} = -Pr\mathrm{X} + Pr\mathrm{Y} \tag{2.33}$$

Рівняння (2.33) - перше з рівнянь системи Лоренца. Далі скористаємося рівнянням (2.29), підстановка в нього виразів (2.31) і (2.32) дає

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi\mathrm{r}}\dot{\mathrm{Y}}\cos(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) - \frac{1}{\pi\mathrm{r}}\dot{\mathrm{Z}}\sin(2\pi\mathrm{z}) +$$

$$+\mathrm{XY}\frac{2}{\pi\mathrm{r}}\sin(\pi\mathrm{ax})\cos(\pi\mathrm{z})\sin(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) +$$

$$+\mathrm{X}\frac{\sqrt{2}}{\pi\mathrm{r}}\cos(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z})[\sqrt{2}\mathrm{Y}\cos(\pi\mathrm{ax})\cos(\pi\mathrm{z}) - 2\mathrm{Z}\cos(2\pi\mathrm{z})] =$$

$$= \mathrm{X}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) - \frac{\sqrt{2}}{\pi\mathrm{r}}\mathrm{Y}\cos(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) + \frac{\mathrm{b}}{\pi\mathrm{r}}\mathrm{Z(t)}\sin(2\pi\mathrm{z})$$

Групуємо члени при XY.

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi\mathrm{r}}\dot{\mathrm{Y}}\cos(\pi\mathrm{ax})\sin(\pi\mathrm{z}) - \frac{1}{\pi\mathrm{r}}\dot{\mathrm{Z}}\sin(2\pi\mathrm{z}) +$$

$$+\frac{\mathrm{XY}}{\pi \mathrm{r}}\sin(2\pi \mathrm{z}) - \mathrm{XZ}\frac{2\sqrt{2}}{\pi \mathrm{r}}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z})\cos(2\pi \mathrm{z}) =$$

$$= \mathrm{X}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) - \frac{\sqrt{2}}{\pi \mathrm{r}}\mathrm{Y}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) + \frac{\mathrm{b}}{\pi \mathrm{r}}\mathrm{Z}\sin(2\pi \mathrm{z})$$

Виконуємо проміжні спрощення.

$$\sqrt{2}\dot{\mathrm{Y}}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) - \dot{\mathrm{Z}}\sin(2\pi \mathrm{z}) +$$

$$+\mathrm{XY}\sin(2\pi \mathrm{z}) - \mathrm{XZ}2\sqrt{2}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z})\cos(2\pi \mathrm{z}) =$$

$$= \mathrm{Xr}\sqrt{2}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) - \sqrt{2}\mathrm{Y}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) + \mathrm{bZ}\sin(2\pi \mathrm{z})$$

$$\dot{\mathrm{Y}}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) - \dot{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\pi \mathrm{z}) +$$

$$+\mathrm{XY}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\pi \mathrm{z}) - \mathrm{XZ}2\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z})\cos(2\pi \mathrm{z}) =$$

$$= \mathrm{Xr}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) - \mathrm{Y}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{bZ}\sin(2\pi \mathrm{z})$$

Групуємо члени при однакових комплексах тригонометричних функцій.

$$\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z})[\dot{\mathrm{Y}} - \mathrm{Xr} + \mathrm{Y}] - 2\mathrm{XZ}\cos(\pi \mathrm{ax})\sin(\pi \mathrm{z})\cos(2\pi \mathrm{z}) =$$

$$= \sin(2\pi z)\frac{1}{\sqrt{2}}[\dot{Z} - XY + bZ] \tag{2.34}$$

$$\cos(\pi\,\mathrm{ax})\sin(\pi z)[\dot{Y} - Xr + Y] - 2XZ\cos(\pi ax)\sin(\pi z)\cos(2\pi z) = \\ = \sin(2\pi z)\tfrac{1}{\sqrt{2}}[\dot{Z} - XY + bZ] \tag{2.35}$$

Рівняння (2.35) розділяється на два диференціальних рівняння шляхом множення на $\sin(\pi z)$ і $\sin(2\pi z)$ з подальшим інтегруванням по координаті z в межах від 0 до 1. У першому випадку, при множенні на $\sin(\pi z)$ маємо:

$$\int_0^1 \sin^2(\pi z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\int_0^1 \sin^2(\pi z)\cos(2\pi z)dz = -\frac{1}{4} \neq 0$$

$$\int_0^1 \sin(\pi z)\sin(2\pi z)dz = 0$$

В результаті отримаємо друге диференціальне рівняння системи Лоренца

$$\dot{Y} = Xr - Y - XZ \tag{2.36}$$

У другому випадку, при множенні рівняння (2.35) на $\sin(2\pi z)$ і інтегруванні його по dz в межах від 0 до 1, маємо

$$\int_0^1 \sin(\pi z)\sin(2\pi z)dz = 0$$

$$\int_0^1 \sin(\pi z)\cos(2\pi z)\sin(2\pi z)dz = 0$$

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi z)dz = \frac{1}{2} \neq 0$$

В результаті отримаємо третє рівняння системи Лоренца:

$$\dot{Z} = XY - bZ \tag{2.37}$$

Зауважимо, що отримана система рівнянь (2.34), (2.36) і (2.37) описує реальні конвективні руху, але при невеликих надкритичностях, тобто відносне число Релея не повинно значно перевищувати одиницю.

3

Коротко про магнітогідродинамічні процеси

Магнітна гідродинаміка (МГД) описує макроскопічну поведінку електропровідного середовища/рідини (іонізованого або частково іонізованого газу). Під макроскопічними ми розуміємо просторові масштаби, що перевищують власні масштабні довжини плазми, такі як дебаївська довжина і радіус Лармора заряджених частинок. У цьому розділі ми спочатку сформулюємо рівняння МГД і обговоримо локальну термодинаміку. Оскільки більшість астрофізичних систем обертаються, буде розглянуто рівняння імпульсу в неінерціальній системі відліку, де з'являються сили інерції. Потім будуть розглянуті наближення Буссінеска в МГД, а також ідеальні інваріанти (інтегральні величини, що зберігаються в ідеальній (тобто недисипативній) системі). В рамках цього розділу також буде представлено короткий огляд конфігурацій магнітостатичної рівноваги, які більш важливі в плазмі, ніж стаціонарні потоки в гідродинаміці. В кінці розділу ми введемо параметри Ельзассера, які використовують для опису динамічних величин в МГД-турбулентності.

3.1 Рівняння магнітогідродинаміки

Повністю іонізована плазма. Рівняння руху в МГД може бути отримано простим евристичним способом з урахуванням сил, що діють на елемент рідини δV з масою $\rho\delta V$, де ρ - масова густина. Сюди можна віднести наступні сили:

- Сила Лоренца. В електромагнітному полі частинка з зарядом q_j піддається впливу сили Лоренца $q_j(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathrm{B}})$, де $\vec{v}$ – швидкість рідини (провідного середовища). Сила для макроскопічного елементу рідини являє собою суму сил, що діють на окремі частинки $\delta q(\vec{\mathrm{E}} + \delta\vec{J} \times \vec{\mathrm{B}})$ де

δq - сумарний заряд, а $\delta \bar{J}$ - електричний струм, що переноситься елементом рідини. Оскільки в більшості рідин, що представляють інтерес, електростатичні поля забезпечують нейтральність заряду на макроскопічних масштабах, $\delta q \simeq 0$ (умова квазінейтральності) то впливу електростатичного поля не буде і сила Лоренца набуде вигляду $\delta V(\vec{j} \times \vec{\mathrm{B}})$ де $\vec{j}$ - густина струму.

- Сила (теплового) тиску. За умови виконання умов близьких до локальної термодинамічної рівноваги, тензор тиску буде ізотропним $p_{ij} = p\delta_{ij}$ і вираз для сили буде

$$\oint pdS = -\delta V \nabla p$$

де інтеграл взято по поверхні що охоплює досліджуваний елемент рідини.

- Сила гравітації, яка зазвичай в замагніченій плазмі суттєво менше сили Лоренца, і нею нехтують, задається співвідношенням: $\delta V \rho \vec{g}$.

- Сила вязкості. Аналогічно до тиску вона є поверхневою силою:

$$\oint \sigma^{(\mu)} \cdot d\vec{S} = \delta V \nabla \sigma^{(\mu)},$$

де $\sigma^{(\mu)}$ - в загальному випадку це тензор в'язких напруг $\left(\sigma_{ij}^{(\mu)}\right)$

$$\sigma_{ij}^{(\mu)} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \vec{v} \right]$$

μ- в'язкість, доданок в круглих дужках – це тензор деформації швидкостей. Таким чином, із врахуванням приведених вище сил рівняння руху може бути записано у вигляді:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho \vec{g} + \mu \left(\nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \tag{3.1}$$

Слід відмітити, що в магнітогідродинаміці вираз для масової густини середовища ρ задається співідношенням:

$$\rho = \rho^i + \rho^e = n_i m_i + n_e m_e$$

а для швидкості $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{n_i m_i \vec{v}_i + n_e m_e \vec{v}_e}{n_i m_i + n_e m_e}$$

Якщо у нас один тип іонів то умова квазінейтральності буде мати вигляд $n_i \approx n_e = n$ і отримаємо вираз для густини $\rho = n m_i$ оскільки $m_e \ll m_i$. Значення тиску отримують зі співідношення

$$p = p^i + p^e = n_i k_B T_i + n_e k_B T_e = n k_B \left(T_i + T_e \right)$$

За умови рівності температур $p = 2nk_BT, T_e \approx T_i = T$. Враховуючи, що густина струму пов'язана із магнітним полем рівнянням Максвела $\left(rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}\right)$, вираз для сили Лоренца можна переписати через тензор магнітних напруг T_{ij}^M:

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\nabla \cdot T_{ij}^M,$$

де

$$T_{ij}^M = \frac{1}{2\mu_0}B^2\delta_{ij} - \frac{1}{\mu_0}B_iB_j$$

.

Параметром, що характеризує силу магнітного поля в плазмі є плазмовий параметр бета (β):

$$\beta = \frac{\text{газовий тиск}}{\text{магнітний тиск}} = \frac{p}{B^2/2\mu_0}.$$

Плазма належить до плазми з низьким бета, коли $\beta \ll 1$, і до плазми з високим бета, якщо $\beta \approx 1$. Динаміка магнітного поля визначається із закону Фарадея:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3.2}$$

а електричне поле визначається законом Ома, який пов'язує густину струму із електричним полем $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ де σ – електропровідність середовища, в загальному випадку – тензорна величина. $\vec{E}$ – напруженість загального електричного поля і повинна включати електричне поле, що виникає в результаті руху рідини через магнітні поля. Враховуючи це, густина струму буде

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{3.3}$$

В рамках МГД теорії ми нехтуємо струмами зміщення. Оцінимо, при яких характеристиках дана умова виконується. Щоб знехтувати струмом зміщення $\left|\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right| = \varepsilon_0\left|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right| \approx \varepsilon_0\frac{|\vec{E}|}{T}$, потрібно, щоб дане співвідношення було набагато менше струму провідності $|\vec{j}|$:

$$\varepsilon_0\frac{|\vec{E}|}{T} \ll |\vec{j}| = |\vec{\nabla} \times \vec{H}| \approx \frac{H}{L} = \frac{B}{\mu_0 L} \tag{3.4}$$

Розглядаючи середовище, що характеризується великою провідністю ($\sigma \to \infty$), із рівняння (3.3) будемо мати $|\vec{E}| = |\vec{v} \times \vec{B}|$. Тоді (3.4) можна переписати у вигляді:

$$\varepsilon_0 v\frac{B}{T} \ll \frac{B}{\mu_0 L}$$

а розв'язуючи відносно часу, отримаємо: $T \gg \frac{vL}{c^2}$ де c – швидкість світла $\left(c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0\right)$. Для випадку $v/c \ll 1$ струмом зміщення можна нехтувати, коли $T \gg L/c$. Фізично це означає, що характерний час варіацій електромагнітних величин (T) повинен бути набагато більшим, ніж час, за який світло проходить характерну відстань L. Рівняння зміни з часом магнітного поля можна отримати із підстановки рівняння (3.3) в рівняння Максвела $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \sigma\mu_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{3.5}$$

Від рівняння (3.5) візьмемо ротор, при цьому слід врахувати, що $\operatorname{rotrot}\vec{f} = \operatorname{graddiv}\vec{f} - \Delta\vec{f}$:

$$-\Delta\vec{B} = \sigma\mu_0(rot\vec{E} + \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B})),$$

а, оскільки, $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ то:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B} \tag{3.6}$$

Отримане рівняння (3.6) є рівнянням для зміни магнітного поля з часом, а $\frac{1}{\sigma\mu_0} = \eta$ - називають коефіцієнтом дифузії магнітного поля, або ще коефіцієнтом магнітної в'язкості. При отриманні рівняння (3.6) враховано також що $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Рівняння неперервності в МГД отримують із закону збереження маси в елементарному об'ємі δV. В рамках даного закону зміна маси з часом буде визначатися потоком через поверхню, що охоплює даний об'єм –

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \rho\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Використовуючи теорему Остроградського-Гауса отримаємо

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{v} = 0 \tag{3.7}$$

Враховуючи, що при розгляді суцільного середовища повна похідна по часу від будь-якої функції (в нашому випадку від масової густини $\rho(x, y, z, t)$) задається співвідношенням

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

рівняння (3.7) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0 \tag{3.8}$$

Для нестискуваного потоку, коли виконується умова $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ маємо умову збереження густини з часом. Щоб описати рух провідного середовища в МГД наближенні, потрібне рівняння, яке пов'язує між собою густину, тиск і температуру. Таким рівнянням є рівняння стану[1].

[1]Зазвичай вважають середовище або адіабатичним, або ізотермічним

$$\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0$$

Слід добавити, що для вмороженої в магнітне поле плазми, не можна використовувати термін ізотропної дифузії, оскільки процеси переносу суттєво відрізняються від напрямку розгляду (вздовж чи впоперек до магнітного поля). Введені вище ефекти дисипації мають форму дифузійних процесів з кінематичною в'язкістю $\nu = \mu/\rho$, з магнітною в'язкістю $(1/\sigma\mu_0 = \eta)$ та тепловою дифузією (теплопередачею). У чисельних дослідженнях турбулентності, однак, часто практично використовувати оператори дифузії вищого порядку або гіпердифузію,

$$\nabla^2 \to \nabla^{2\alpha}, \alpha > 1.$$

Такий розгляд дозволяє сильніше сконцентрувати дисипацію на най-

---

– адіабатична рідина,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$$

– ізотермічна рідина, де $\gamma = C_P/C_V$, а C_P і C_V – теплоємності при сталому тиску і об'ємі, відповідно. Значення γ визначається також через кількість ступенів вільності системи (i): $\gamma = (i+2)/i$. Для ізотермічного випадку $\gamma = 1$; при умові $\gamma \to \infty$ маємо нестискуване середовище. Рівняння стану для адіабатичного середовища, використовуючи послідовно процедуру логарифмування та диференціювання, можемо переписати у вигляді:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0$$

а врахування ріняння неперервності призведе до співвідношення

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)p + \gamma p(\nabla \cdot \vec{v}) = 0.$$

Якщо теплопровідність є незначною, слід розглянути рівняння для зміни внутрішньої енергії, або зміну температури з часом. Для початку аналізують зміну температури з часом в адіабатичному випадку, а потім добавляють доданок що відповідає за зміни в результаті теплопровідності. Диференціюючи по часу рівняння адіабати $T^\gamma p^{1-\gamma} = \mathrm{const}$ в змінних (T, p) будемо мати:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{T}{p}\frac{dp}{dt},$$

$\frac{dp}{dt}$ виключаємо за допомогою рівняння стану:

$$dp = \rho R dT + RT d\rho, pV = RT \to p = \rho RT,$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{T}{\rho RT}\left[\rho R\frac{dT}{dt} + RT\frac{d\rho}{dt}\right],$$

$$\frac{dT}{dt}\left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right] = \frac{\gamma - 1}{\gamma}T\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Отримаємо

$$\frac{dT}{dt} = (\gamma - 1)T\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

чи, врахувавши рівняння неперервності:

$$\frac{dT}{dt} = -(\gamma - 1)T\nabla\vec{v}.$$

менших масштабах і таким чином уникнути дисипативного забруднення інерційного діапазону. Показник степені α називається коефіцієнтом дисипації (дисипативності) і пов'язаний, по суті, із певним додатковим фізичним процесом.

Частково іонізоване середовище. За наявності нейтральних складових густина частинок (s - сорт частинок) і їх середня швидкість задовольняють рівняння неперервності

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \mathrm{div}\left(n_s \vec{V}_s\right) = 0$$

Аналогічні рівняння, мають місце, очевидно, і для масових густин електронів (mn_e), іонів (Mn_i) і нейтралів (Mn_n), а також для густини зарядів електронів ($-en_e$) і іонів (en_i). Для запису єдиним чином подальших співвідношень для всіх сортів частинок, включаючи нейтрали, будемо користуватися позначенням q_s для заряду частинки сорту s, маючи на увазі, що для електронів $q_e = -e$, для іонів $q_i = e$ і для нейтралів $q_n = 0$.

Рівняння неперервності містить дві невідомі функції: густина частинок n_s і їх середню швидкість $\vec{V}_s$. Рівняння для $\vec{V}_s$ в загальному може бути отримано з кінетичного рівняння/підходу (перший момент) і є законом збереження імпульсу

$$m_s n_s \frac{\partial \vec{V}_s}{\partial t} + m_s n_s \left(\vec{V}_s \cdot \nabla\right) \vec{V}_s =$$

$$= n_s q_s \left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V}_s \times \vec{B}\right]\right\} - \nabla \cdot \widehat{\mathcal{P}}_s - \sum m_s n_s \nu_{sr} \left(\vec{V}_s - \vec{V}_N\right) \qquad (3.9)$$

Останній доданок в правій частині рівняння (3.9) обумовлений інтегралом зіткнень і визначається частотою зіткнень частинок сорту s з частинками сорту N, а $\widehat{\mathcal{P}}_s$ представляє собою тензор тиску, який визначається співвідношенням

$$\widehat{\mathcal{P}_s}(\vec{r}, t) = m_s \int \left(\vec{v} - \vec{V}_s\right) \left(\vec{v} - \vec{V}_s\right) F_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

Де,

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \Leftrightarrow V_\beta \partial V_\alpha / \partial x_\beta, \nabla \cdot \hat{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \partial \mathcal{P}_{\alpha\beta} / \partial x_\beta, (\vec{v} - \vec{V})(\vec{v} - \vec{V}) \Leftrightarrow (v_\alpha - V_\alpha)(v_\beta - V_\beta),$$

F_s - функція розподілу частинок сорту s.

Якщо функція розподілу F_s залежить тільки від модуля швидкості, тензор $\widehat{\mathcal{P}}_s$ є діагональним, причому всі його ненульові (діагональні) елементи рівні скалярному тиску:

$$\mathcal{P}_s(\mathrm{r}, t) = \frac{m_s}{3} \int (\mathrm{v} - \mathrm{V}_s)^2 F_s(\mathrm{r}, \mathrm{v}, t) d\mathrm{v} \equiv n_s T_s$$

де T_s - температура s-й компоненти в енергетичних одиницях. Звернемо увагу, що в цьому випадку температура s-й компоненти однозначно виражається через її тиск і густину, так що з цих трьох величин тільки дві є незалежними. Ми бачимо, що гідродинамічна система рівнянь для густини і середньої швидкості частинок знову виявляється незамкненою, так як містить нову невідому величину - тензор тиску (тобто більш високий (у порівнянні з густиною і середньою швидкістю) момент функції розподілу). І це є спільною ситуацією: при отриманні рівняння для нового моменту функції розподілу, в нього входить величина більш високого моменту. Тому для замикання системи гідродінамічних рівнянь необхідно зробити певні припущення щодо функції розподілу частинок, що дасть можливість виразити цей вищий момент функції розподілу через попередні, наприклад, виразити тиск через густину. Вхідні в рівняння руху електричні та магнітні поля підпорядковуються, як і раніше, рівнянням Максвелла, в яких густина заряду і струму дорівнюють відповідно $\rho = \sum_s q_s n_s$, $\mathrm{j} = \sum_s q_s n_s \mathrm{V}_s$.

Густина струму в плазмі може бути представлена у вигляді

$$\vec{j} = en_e\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right) + e\left(n_i - n_e\right)\vec{V}_e + e\left(n_i - n_e\right)\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right) \equiv$$

$$\equiv en_e\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right) + \rho\vec{V}_e + \rho\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right)$$

У МГД-процесах виконуються наступні нерівності:

$$en_e\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right) \gg \rho\vec{V}_e \gg \rho\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right)$$

Тому густина струму визначається, головним чином, першим доданком

$$\vec{j} \simeq en_e\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right)$$

Крім цього, в магнітогідродинамічних рухах плазми швидкості всіх її компонент близькі, тому мають місце нерівності

$$\left|\vec{V}_s - \vec{V}_N\right| \ll \left|\vec{V}_s\right|, \left|\vec{V}_N\right|$$

І як наслідок

$$m\frac{\partial\vec{V}_e}{\partial t} + m\left(\vec{V}_e\cdot\nabla\right)\vec{V}_e \ll M\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial t} + M\left(\vec{V}_i\cdot\nabla\right)\vec{V}_i$$

Частоти зіткнень ν_{sr} пов'язані співвідношеннями $m_s n_s \nu_{sr} = m_r n_r \nu_{rs}$, які гарантують збереження енергії і імпульсу при зіткненні, і, зокрема, дають

$$m\nu_{ei} = M\nu_{ie}, \quad mn\nu_{en} = Mn_n\nu_{ne}, \quad n\nu_{in} = n_n\nu_{ni}$$

Крім того, частоти зіткнень заряджених частинок з нейтралами обернено пропорційні кореню з маси зарядженої частинки, тобто

$$\nu_{in} \sim \sqrt{m/M}\nu_{en} \ll \nu_{en}$$

Тому

$$\nu_{ne} = \frac{mn}{Mn_n}\nu_{en} \quad \nu_{ni} = \frac{n}{n_n}\nu_{in} \sim \sqrt{\frac{m}{M}}\frac{n}{n_n}\nu_{en}$$

$$\nu_{ne} \sim \sqrt{m/M}\nu_{ni} \ll \nu_{ni}$$

Рівняння (3.9) мають місце для всіх сортів частинок. Додамо тепер відповідні рівняння для електронів та іонів і врахуємо записані вище співвідношення для частоти зіткнень. Будемо мати

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + \left(\vec{V}_i \cdot \nabla\right)\vec{V}_i + \nu_{in}\vec{V}_i = \nu_{in}\vec{V}_n + \frac{1}{cnM}[\vec{j} \times \vec{B}] - \frac{\nabla \cdot \left(\widehat{P}_e + \widehat{\widehat{P}}_i\right)}{nM}$$

Помножимо тепер рівняння для електронів на e/m, а рівняння для іонів на e/M і віднімемо перше від другого. З урахуванням наведених вище співвідношень отримаємо для густини струму

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\vec{V}_i\vec{j} + \vec{j}\vec{V}_i - \rho\vec{V}_i\vec{V}_i - en\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right)\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right)\right] + \nu_e\vec{j} =$$

$$= \frac{ne^2}{m}\vec{E} - \frac{e}{mc}[\vec{j} \times \vec{B}] + \frac{ne^2}{mc}\left[\vec{V}_i \times \vec{B}\right] + en\nu_{en}\left(\vec{V}_i - \vec{V}_n\right) + \frac{e}{m}\nabla \cdot \widehat{\mathcal{P}}_e \quad (3.10)$$

Де $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$.

Можемо врахувати, що третій і четвертий доданки в квадратних дужках в лівій частині рівняння (3.10) набагато менші перших двох. При виконанні умов $\left|\vec{V}_s - \vec{V}_N\right| \ll \left|\vec{V}_s\right|, \left|\vec{V}_N\right|$ другий член в правій частині рівняння (3.10) набагато менше третього. Проте, навіть утримуючи цей доданок, ми можемо не розрізняти між собою n_e і n_i в третьому доданку в силу умови $en_e\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right) \gg \rho\vec{V}_e \gg \rho\left(\vec{V}_i - \vec{V}_e\right)$.

Для швидкості нейтралів рівняння руху буде мати вигляд

$$\frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} + \left(\vec{V}_n \cdot \nabla\right)\vec{V}_n + \nu_{ni}\vec{V}_n = \nu_{ni}\vec{V}_i - \frac{\nabla \cdot \widehat{\mathcal{P}_n}}{n_nM}$$

Тобто ми маємо систему рівнянь для величин $\vec{V}_i, \vec{j}$ і $\vec{V}_n$, в якій величина $\vec{V}_i$ відіграє роль масової швидкості заряджених компонент плазми.

Як було зазначено вище, ця система не є замкнутою, оскільки містить тензори тисків всіх компонент плазми.

Для отримання замкнутої МГД-системи рівняння руху, рівняння неперервності, рівняня Максвелла, слід, як і у випадку розгляду повністю іонізаваного середовища, доповнити ще рівнянням стану. Рівняння стану в цьому випадку, по суті, буде визначати залежність тиску як функції від густини і магнітного поля. Вибір цієї залeності, і тим самим спосіб замикання МГД-системи, є найбільш тонким питанням магнітної гідродинаміки. Найбільш вживаною є теорія Чу-Гольбергера-Лоу (Chew et. Al., 1956), яку часто скорочено називають теорією ЧГЛ. У цій теорії передбачається, що тензор тиску в локальній системі координат з віссю z, спрямованої уздовж магнітного поля, є діагональним і має вигляд

$$\widehat{\mathcal{P}_s} = \begin{pmatrix} p_{s\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{s\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{s\|} \end{pmatrix}$$

з різними значеннями $p_{s\perp}$ і $p_s\|$. Такий вид тензора тисків слід очікувати, коли частота зіткнень частинок одного сорту в замагніченій плазмі не достатньо велика, щоб забезпечити ізотропізацію функції розподілу, так що поздовжні і поперечні по відношенню до магнітного поля компоненти тиску не збігаються. Самі ж значення компонент тиску в теорії ЧГЛ визначаються рівняннями

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \nabla\right)\left(\frac{p_{s\perp}}{n_p B}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \nabla\right)\left(\frac{p_{s\|} B^2}{n_s^3}\right) = 0$$

через густину частинок і напруженість магнітного поля. Дані рівняння тісно пов'язані з двома адіабатичними інваріантами руху частинок в слабо змінному (в просторі і часі) магнітному полі «пробкової/конусної» конфігурації. Тому теорію ЧГЛ іноді ще називають двічі адіабатичною теорією.

Неінерціальна система відліку. Більшість астрофізичних об'єктів, таких як планети, зірки, акреційні диски та галактики, в зв'язку із наявністю закону збереження кутового моменту під час гравітаційної диференціації/конденсації, обертаються. В таких ситуаціях часто корисним є розгляд динаміки в неінерціальній системі відліку.

Вираз для швидкості в даному випадку буде задаватися співвідношенням $\vec{v} = \vec{u} + \Omega \times \vec{r}$, де $\vec{u}$ і $\vec{\Omega}$ - відповідно швидкість та кутова швидкість обертання в неінерціальній системі. І рівняння руху (3.1) можна записати у вигляді

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho\vec{g} + \rho\{2\vec{u} \times \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})\} + \mu\nabla^2\vec{u},$$

де t' - час в неінерційній системі відліку. Перший доданок у фігурних дужках це сила Коріоліса, а другий доданок – відцентрова сила. Відцентрову силу можна переписати через градієнт $\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) = \nabla \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{\Omega})^2$ який може бути включено в вираз для тиску або в гравітаційний потенціал $\phi_g, \vec{g} = -\nabla \phi_g$.

3.2 Рівняння вихору для нестискуваного середовища

В більшості випадків при аналізі турбулентних процесів можна використати умову нестискуваності потоку ($d\rho/dt = 0, div\vec{v} = 0$) що суттєво спрощує аналіз процесів і дозволяє виключити тиск із рівняння руху. Для цього візьмемо ротор від даного рівняння (3.1), зробимо заміну $\vec{\omega} = rot\vec{v}$ і врахувавши математичні тотожності [2] можемо записати рівняння для вихору у вигляді:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho}(\vec{B} \cdot \nabla \vec{j} - \vec{j} \cdot \nabla \vec{B}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \tag{3.11}$$

Швидкість може бути визначена із рівняння

$$\nabla^2 \vec{v} = -\nabla \times \nabla \times \vec{v} \equiv -\nabla \times \vec{\omega}$$

Взявши дивергенцію від рівняння руху (3.1) і врахувавши умову нестискуваності і рівняння Максвела ($rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$) можемо знайти вираз для тиску:

$$\nabla^2 \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left(\rho(\vec{v} \cdot \nabla) v - \frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

Нестискуване середовище – математична модель суцільного середовища густина якого зберігається при зміні тиску. Дивегренція вектора швидкості в даній моделі, як вказувалося вище, рівна нулеві, тому поле швидкостей має соледоїдальний характер, а швидкість звуку нескінченна (збурення миттєво передається по всьому потоку). Оскільки в реальних рідинах і газах швидкість звуку – скінченна величина, то представлення нестискуваного середовища може бути використане лише у випадку коли швидкість потоку мала порівняно зі швидкістю звуку (мале число Маха), а також коли час поширення збурення на масштабах характерного лінійного розміру, малий в порівнянні з часом суттєвої зміни руху

[2]
$$\nabla \times \nabla f \equiv 0, \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0,$$
$$\nabla^2 \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A},$$
$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{C}) \equiv \vec{A}(\nabla \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{C},$$
(f- позначення для скалярної величини, $\vec{A}, \vec{C}$ - вектори)

середовища. На практиці умова нестискуваності дуже часто виконується як для гідродинамічних так і для магнітогідродинамічних потоків і дозволяє суттєво спростити розгляд процесів в даних середовищах навіть при наявності турбулентності. Для нестискуваного середовища, похідна по часу в рівнянні стану повинна бути набагато меншою ніж адвективний доданок $(\vec{v}\cdot\nabla)$. При розгляді плазми з високим параметром β, що аналогічно до розгляду гідродинамічного середовища, рівняння стану набуде вигляду: $\gamma p\nabla\cdot\vec{v}\simeq-\vec{v}\cdot\nabla p$. Значення для ∇p можна отримати із рівняння руху (3.1) $\nabla p\simeq-\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$. Отримаємо співвідношення $\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\gamma\rho}{p}\vec{v}\cdot\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\sim M_s^2\frac{v}{L}$, де $M_s=v/v_s$- акустичне чи звукове число Маха, $v_s=\sqrt{\gamma p/\rho}$ - швидкість звуку, L - характерний просторовий масштаб (значення викликане наявністю градієнта). При розгляді плазми із сильним магнітним полем (низький параметр β), ми маємо відмінності між поздовжніми і перпендикулярними до магнітного поля рухами, а магнітний тиск є домінуючим у рівнянні руху. Помноживши рівняння руху (3.1) на швидкість $\vec{v}$ і врахувавши що повна похідна по часу складається із локальної похідної плюс конвективної $d/dt=\partial/\partial t+\vec{v}\cdot\nabla$ отримаємо залежність $\rho\vec{v}\cdot\nabla v^2=-\vec{v}\cdot\nabla B^2/\mu_0$ з якої можна оцінити значення аналогічне до попереднього розгляду $\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\mu_0\rho}{B^2}\vec{v}\cdot\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\sim M_A^2\frac{v}{L}$, де $M_A=v/v_A$ - альфвенівське число Маха, $v_A=B/\sqrt{\rho\mu_0}$ - альфвенівська швидкість (фазова швидкість поширення Альфвенівської хвилі). Отже, як і вказувалося вище, для нестискуваного середовища повинна виконуватися умова $M_s\ll 1$, а для плазми із низьким параметром β при рухах в перпендикулярному напрямку - $M_A\ll 1$. Слід відмітити, що трапляються випадки, коли при аналізі рухів в перпендикулярному напрямку ми можемо використовувати умову настискуваності, а при аналізі рухів в напрямку магнітного поля стискуваністю середовища знехтувати не можна.

3.3 Наближення Буссінеска в МГД

При аналізі нестискуваності середовища ми розглядали однорідний розподіл густини. В гравітаційному полі зміна густини задовільняє рівнянню гідростатичної рівноваги

$$\nabla p_0=\vec{g}\rho_0, \tag{3.12}$$

а характерний лінійний масштаб задається співвідношенням $L_g=p_0/\left(g\rho_0\right).$ Конвективні і турбулентні в стратифікованому середовищі зручно описувати в наближенні Буссінеска. В рамках даного підходу ми розбиваємо наше досліджуване середовище на шари в яких виконується умова $L\ll L_g$ і знову маємо справу із квазіоднорідною системою. У даній системі, в рамках шару, відхилення динамічних змінних $(\bar{v}=\vec{v},p,\rho,\vec{B})$ від середніх рівноважних значень $\left(p_0,\rho_0,\vec{B}_0\right)$ малі (порядку L/L_g). Слід зауважити, що ці величини, хоч і невеликі, але все ж не нульові, тому наближення Буссінеска не передбачає лінеаризації рівняння руху. Оскільки швидкість невелика, рухи рідини можна вважати нестискуваними. У наближенні Буссінеска рівняння руху з врахування сил інерції можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{1}{\rho_0}\vec{j} \times \left(\vec{B}_0 + \vec{B}\right) + \frac{1}{\rho_0}\vec{g}\rho + 2[\vec{v} \times \vec{\Omega}] + \nu\Delta\vec{v}$$

Взявши ротор від даного рівняння ми можемо записати рівняння для вихору в наближенні Буссінеска

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega}\nabla)\vec{v} = \tfrac{1}{\rho_0}\left[\left(\vec{B}_0\nabla\right)\hat{\bar{j}} - (\bar{j}\nabla)\left(\vec{B}_0 + \vec{B}\right)\right] \\ &+\tfrac{1}{\rho_0}\nabla\rho \times \vec{g} + 2(\vec{\Omega}\nabla)\vec{v} + \nu\Delta\vec{\omega} \end{aligned} \tag{3.13}$$

В даному рівнянні від змін/флуктуацій густини зазвичай переходять до змін/флуктуацій температури. Такий перехід можливий завдяки використання рівняння гідростатичної рівноваги. Зокрема

$$\frac{p}{p_0} \sim \frac{L}{L_g}\frac{\rho}{\rho_0} \ll \frac{\rho}{\rho_0}$$

тому можна вважати що зміни/флуктуації тиску не суттєві. Використовуючи рівняння стану для ідеального газу $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{T}{T_0}$ можемо перейти від змін густини до змін температури $\frac{\rho}{\rho_0} \approx -\frac{T}{T_0}$.

В загальному випадку дане рівняння можна переписати у вигляді $\rho/\rho_0 = -\alpha_p T$, де α_p - коефіцієнт теплового розширення. Для нестисливого середовища зміни/флуктуації температури задовільняють рівнянню: $\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)(T + T_0) = \kappa\Delta T$. Градієнт середньої температури (T_B) можна виключити вибором граничних умов і ми отримаємо скалярне рівняння для опису адвективної дифузії:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)T = \kappa\Delta T$$

За умови, що $B = g = \Omega = 0$ рівняння для вихору (3.13) набуде простого вигляду:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega}\nabla)\vec{v} = v\Delta\vec{\omega}, \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}\nabla)\vec{v} + \nu\Delta\vec{\omega} \tag{3.14}$$

В випадку сильно замагніченої плазми ми маємо суттєві відміності в рухах в поздовжньому і перпендикулярному напрямку. Для таких випадків зручно використовувати двовимірні рівняння МГД в наближенні нестискуваності потоку. При цьому введемо функцію потоку ϕ в площині x-y і ψ - в напрямку z. При такому розгляді $\vec{v} = \vec{e}_z \times \nabla\phi, \vec{B} = \nabla \times A_z\vec{e}_z =$

$\vec{e}_z \times \nabla\psi$ де A_z - компонента векторного потенціалу магнітного поля, а вихор і густина струму будуть мати тільки z-тову складову

$$\omega = \omega_z = \Delta\phi, j = j_z = \frac{1}{\mu_0}\Delta\psi.$$

Тоді, рівняння руху для вихору (3.13), без врахування гравітаційної взаємодії та обертання, в двовимірному наближенні можна записати як

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{\omega} = \frac{1}{\rho_0}(\vec{B}\nabla)\vec{j} + \nu\Delta\vec{\omega}.$$

а рівняння зміни магнітного поля (3.6) буде подібним до скалярного рівняння для опису адвективної дифузії:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\psi = \eta\Delta\psi.$$

Отже компоненти швидкості і магнітного поля не повязані із динамічними процесами в площині x-y. При цьому вони не повинні бути постійними величинами чи бути рівні нулеві.

3.4 Закони збереження

Закони збереження в МГД відображають обмеження, накладені на динаміку середовища, які порушуються лише дисипативними ефектами. Існує два класи інваріантів, перші включають зміну густини, швидкості та внутрішньої енергії, а другі - включають тільки магнітне поле.

3.4.1 Потокові інваріанти

Закон збереження маси розглянуто в пункті 3.2 - рівняння (3.7), (3.8) – рівняння неперервності; тому починаємо наш розгляд із закону збереження імпульсу. Перепишемо рівняння (3.1) у вигляді

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = \nabla\cdot\hat{T} + \rho\vec{g} \tag{3.15}$$

де $\hat{T}$ - це тензор

$$\begin{aligned}\hat{T} \equiv T_{ij} = &-\left(p + \tfrac{B^2}{2\mu_0}\right)\delta_{ij} - \left(\rho v_i v_j - \tfrac{B_i B_j}{\mu_0}\right) + \\ &+\mu\left(\left(\tfrac{\partial v_j}{\partial x_i} + \tfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \tfrac{2}{3}\delta_{ij} div\vec{v}\right)\end{aligned}$$

Проінтергуємо рівняння (3.15) по об'єму і використаємо теорему Остроградського-Гауса

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV = \oint_S \hat{T}\cdot d\vec{S} + \int_V \rho\vec{g}dV.$$

В результаті отримаємо що зміна імпульсу відбувається в результаті тисків на поверхню об'єму і в результаті дії об'ємних сил. Оскільки магнітні поля можуть діяти на границі средовищ, то закон збереження імпульсу в цьому випдку може порушуватися. Закон збереження енергії можна отримати із рівняння руху помноживши його на вираз $\rho\vec{v}$. Зручно буде також використати запис вектора прискорення вільного падіння через гравітаційний потенціал $\vec{g} = -\nabla\phi_g$.

В результаті отримаємо співвідношення для зміни загальної густини енергії у вигляді [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \phi_g\right) + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) + \nabla\cdot\vec{F}^E = 0 \tag{3.16}$$

де $u = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$ - внутрішня енергія, $\vec{F}^E$ - потік енергії,

$\vec{F}^E = \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \phi_g\right)\rho\vec{v} - \hat{\sigma}^{(\mu)}\cdot\vec{v} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$, h - ентальпія, $h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = u + \frac{p}{\rho}$. Інтегруючи рівняння (3.16) по об'єму отримаємо закон збереження енергії

$$\frac{dE_T}{dt} = -\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{F}^E.$$

Отже в випадку ізольованої системи повна енергія

$$E_T = \int\left(\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \phi_g\right) + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)dV \tag{3.17}$$

зберігається. Слід також зазначити, що сила Коріоліса, оскільки вона перепендикулярна до швидкості, не впливає на зміну енергії. Для нестискуваного потоку, внутрішня енергія не є незалежною динамічною змінною і вона виключається із виразу для повної енергії оскільки $\rho u = p/(\gamma-1) \to 0$ при $\gamma \to \infty$. Тоді повна енергія буде складатися із суми кінетичної, потенціальної та магнітної енергій

$$E_T = \int\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\phi_g + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)dV$$

Дуже часто в рівнянні (3.17) з правого боку окремо виділяють доданки які містить дисипативні складові і які їх не містять.

$$\frac{dE_T}{dt} = -\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{F}^E - D^E$$

де $\vec{F}$ - не містить дисипативних доданків

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho\phi_g\right)\vec{v} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times(\vec{v}\times\vec{B}),$$

[3] Із детальним виведенням закону збереження можна ознайомитися в посібнику Козак Л.В. Вступ до фізики плазми.

а D^E - включає дисипативні складові $D^E = \int \left(\frac{1}{\sigma}\vec{j}^2 + \mu\vec{\omega}^2\right) dV$. Також в МГД розгляді величиною що зберігається є перехресна спіральність $H^C = \int \vec{v} \cdot \vec{B} dV$. Закон збереження для перехресної спіральності можна отримати використовуючи рівняння руху (3.1) помножене на $\vec{B}/\rho$ та рівняння для індукції магнітного поля (3.6) помножене на $\vec{v}$. Отриманні співвідношення потрібно додати і проінтегрувати по об'єму

$$\frac{dH^C}{dt} = -\oint_S \vec{F}^C \cdot d\vec{S} - D^C, \tag{3.18}$$

де

$$\vec{F}^c = \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \left(\phi_g + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right)\vec{B}, \tag{3.19}$$

$$D^C = (v + \eta) \int dV \left(\sum_{i,j} \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{3.20}$$

Для нестискуваного середовища вираз (3.20) набуде вигляду $D^C = (v + \eta) \int (\vec{j} \cdot \vec{\omega}) dV$.

3.4.2 Магнітні інваріанти

Закони збереження енергії та перехресної спіральності включають в себе як гідродинамічні доданки так і магнітне поле. Використовуючи рівняння зміни індукції магнітного поля (3.6) ми можемо отримати інші закони збереження – закон збереження потоку магнітного поля та магнітної спіральності. За означенням магнітний потік $\left(\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right)$ – потік вектора індукції магнітного поля через поверхню яка обмежена замкнутим контуром $L(t)$. Для аналізу магнітного потоку спочатку проінтегруємо рівняння індукції магнітного поля по поверхні

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_S \mathrm{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{\sigma\mu_0} \int_S \Delta\vec{B} d\vec{S}$$

Для подальшого розгляду потрібно використати рівняння Максвела $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ та $div\vec{B} = 0$. Візьмемо від першого рівняння ротор і врахувавши, що rotrotf= graddiv $\vec{f} - \Delta\vec{f}$ отримаємо:

$$\mathrm{rotrot}\vec{B} = \nabla(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu_0 rot\vec{j} \Rightarrow \Delta\vec{B} = -\mu_0 rot\vec{j}$$

Підставимо даний вираз в другий доданок інтегралу і використаємо теорему Стокса, що дозволить перейти від інтегрування по поверхні до інтегрування по контуру :

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \frac{1}{\sigma} \oint_L \vec{j} \cdot d\vec{l} \tag{3.21}$$

Врахувавши, що ми маємо і бічний контур (рис.3.1) зміна магнітного потоку з часом буде в загальному задаватися співвідношенням

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS + \oint_L \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}).$$

Тоді рівняння (3.21) набуде вигляду

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \oint_L \vec{j} \cdot d\vec{l}$$

Отже, магнітний потік зберігається, є магнітним інваріантом, коли електропровідність прямує до нескінченності. Збереження магнітного потоку призводить до виконання умови вмороженості магнітного поля в плазму.

Оскільки рівняння для вихору в найпростішому випадку має вигляд $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - rot(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0$ то зважаючи на викладки проведені вище можемо відразу вказати, що потік вихору $\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$, який ще називають циркуляцією, буде зберігатися. Для опису структури силових ліній магнітного поля використовують магнітну спіральність H^M:

$$H^M = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV$$

де $\vec{A}$ - векторний потенціал ($\vec{B} = rot\vec{A}$). Слід відмітити що магнітна спіральність схожа за виглядом на вираз для кінетичної спіральності ($\int_V \vec{v} \cdot \vec{\omega} dV$), яка зберігається в ідеальній гідродинаміці, але, на відміну від кінетичної спіральності магнітна спіральність залежить від калібрування. Поаналізуємо це виконавши калібрувальні перетворення $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla\chi$. В результаті отримаємо співвідношення

$$H^{M'} - H^M = \int \vec{B} \cdot \nabla\chi dV = \oint \chi \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{3.22}$$

Отже для виконання умов калібрувальних інваріантності нормальна компонента (B_n) до межі поверхні повинна прямувати до нуля (χ- довільний параметр). Тільки в особливих випадках, таких як випадки з періодичними граничними умовами стає можливим наявність ненульового значення B_n. Тим не менш, розгляд великої кількості магнітних конфігурацій, особливо в астрономії, які характеризуються наявністю “відкритих"силових ліній що простягаються в “нескінченність” (прикладом може бути плазма сонячного вітру), чи наявних границь і схрещених конфігурацій магнітного поля (приклад корональні петлі, обмежені фотосферою) суттєво спрощуєть при аналізі саме магнітної спіральності. Тому було введено альтернанивний вираз:

$$H^M_{alt} = \int \left(\vec{A} + \vec{A}_0\right) \cdot \left(\vec{B} - \vec{B}_0\right) dV,$$

де $\vec{B}_0 = \mathrm{rot}\,\vec{A}_0$ - це деяке референтне поле, яке слід вибрати в залежності від умов поставленої задачі. Так у відкритій системі $\vec{B}_0$ може бути статичним полем з тими ж асимптотичними властивостями, що і $\vec{B}$, тоді як у обмеженій системі нормальні компоненти $\vec{B}_0$ і $\vec{B}$ повинні бути рівними. В такому представленні H^M_{alt} є калібрувальним інваріантом, навіть при окремих калібрувальних перетвореннях для $\vec{A}_0$ і $\vec{A}$. При отриманні закону збереження для магнітної спіральності використаємо рівняння Максвела/закон Фарадея ($rot\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$) та виберемо систему (за рахунок наявності інваріантності) таким чином щоб скалярний потенціал був рівний нулеві ($\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$). Отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}dV = \int \left(\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)dV \\
&\int \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}dV = -2\int(\vec{E}\cdot\vec{B})dV + \oint[\vec{A}\times\vec{E}]\cdot d\vec{S}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Використовуючи закон Ома, рівняння Максвела $div\vec{B} = 0, B_n = 0$, а також використовуючи $\oint(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}\cdot d\vec{S}dt = \int(\vec{A}\cdot\vec{B})dV$, знайдемо

$$\frac{dH^M}{dt} = \int \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}dV + \oint(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{v}\cdot d\vec{S} = -\frac{2}{\sigma}\int(\vec{j}\cdot\vec{B})dV$$

Отже магнітна спіральність зберігається при наявності високої електропровідності $\sigma \to \infty$. Квадратичні доданки магнітної та перехресної спіральності широко використовуються в наближеннях гомогенно-турбулентності з періодичними граничними умовами. В цьому випадку інтеграли по поверхні будуть прямувати до нуля і магнітна і перехресгна спіральність зберігаються, за умови нехтування дисипацією. Тому розглянуті величини називають ще ідеальними інваріантами. Слід відмітити, що, дисипативні ефекти можуть бути суттєвими в турбулентному середовищі, але, тим не менш, поведінка ідеальної системи виявляє важливі особливості каскадної динаміки для випадку реальної дисипативної турбулентності. Для випадку двовимірного нестисливого середовища енергія і перехресна спіральність зберігаються і задаються співвідношеннями:

$$E = \int d^2x\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \int d^2x\left(\frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2 + \frac{(\nabla\psi)^2}{2\mu_0}\right)$$

$$H^c = \int d^2x(\vec{v}\cdot\vec{B}) = -\int d^2x\omega\psi$$

Замість магнітної спіральності, яка зникає в двовимірному випадку використовуючи рівняння для адвективної дифузії ($\partial\psi/\partial t + (\vec{v}\nabla)\psi = \eta\Delta\psi$) отримаємо що будь-який момент функції ψ зберігається. Для прикладу квадратичний - $\int\psi^2 d^2x$ який називається середньоквадратичним магнітним потенціалом.

3.5 Конфігурації рівноваги

Хоча ця книга стосується турбулентності, яка є найбільш динамічним станом рідини, статичні конфігурації мають певне значення в цьому контексті, або як початкові стани, з яких у разі нестабільності турбулентність розвивається аналогічно нестабільності нерухомого зсуву гідродинамічної течії, або як граничні/кінцеві стани, до яких турбулентність розпадається. При $\vec{v}=0$ рівняння імпульсу зводиться до

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}.$$

Спочатку ми розглянемо випадок сильного магнітного поля, для якого гравітація незначна. Тоді $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$. Отже, ∇p перпендикулярний як до магнітного поля, так і до струму. Оскільки взагалі j і B не паралельні, вони охоплюють поверхню $\psi(x, y, z) = \text{const}$, яку називають магнітною, або потоковою, поверхнею, де p постійний, $p = p(\psi)$. Для справжнього стану рівноваги ця поверхня повинна поширюватися по всій лінії поля, продовжуючись або до нескінченності, як у більшості астрофізичних систем, або працює на невизначений час у кінцевому об'ємі, типовий випадок для тороїдальної лабораторної плазми. Тобто, така магнітна конфігурація повинна бути достатньо простою, щоб задовольнити стан рівноваги в математичному представленні. Прикладом рівноважного стану є система неперервної симетрії. Рівняння рівноваги можна також записати через загальний тиск P. Враховуючи, що $\vec{j} = rot\vec{B}/\mu_0$ рівняння руху можна переписати у вигляді

$$\vec{\nabla} p = \frac{1}{\mu_0}[rot\vec{B} \times \vec{B}] \Rightarrow \vec{\nabla} p = \frac{1}{\mu_0}\left\{-\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2}\right) + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{B}\right\},$$

$$\nabla\left(p + \frac{B|^2}{2\mu_0}\right) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \Rightarrow \nabla P = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Для одномірного випадку - $p(x)$ та $\vec{B} = \{0, B_y(x), B_z(x)\}$ отримаємо

$$P = p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{ const}$$

Таку конфігурацію називають ще плоским пінчем. В циліндричній геометрії будемо мати гвинтовий пінч, оскільки лінії магнітного поля обмотуються навколо осі. При цьому, $p(r)$ та $\vec{B} = \{0, B_\theta(r), B_z(r)\} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

Мірою стійкості рівноваги гвинтового пінча є кут повороту лінії поля навколо осі (ι): $\iota = LB_\theta/(rB_z)$ де L - довжина плазмового стовпа. При

$\iota > 2\pi$ маємо умову нестабільності системи. Для опису плазми токамаків дуже часто використовується обернена величина $2\pi/\iota$, що називається коефіцієнтом безпеки. Магнітні конфігурації, що представляють особливий інтерес для астрофізики, виникають у випадках, коли сила тиску незначна, $\vec{j} \times \vec{B} = 0$. Такі конфігурації називають безсиловими. Оскільки сила Лоренца зникає, струми течуть тільки вздовж магнітнітних силових ліній. Спеціальний клас складають поля $\vec{j} = \lambda \vec{B}$, де $\lambda = const$, які називаються лінійними безсиловими полями. Вони відіграють важливу роль в затуханні МГД турбулентності. За відсутності сильного магнітного поля градієнт тиску може підтримуватися гравітацією, $\nabla p = \rho \vec{g}$. Зміна густини залежить від рівняння стану. Для політропного випадку $p = p_0 \left(\rho/\rho_0\right)^\gamma$ і в припущені, що $\vec{g} = -g e_z$ ми отримаємо

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{z}{L_g}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

з характерною/масштабною довжиною $L_g = P_0/\left(g\rho_0\right)$. Таким чином, висота стратифікованої атмосфери є скінчена, $\rho \to 0$, для $z > L_g \gamma/(\gamma - 1)$. Тільки в окремому випадку $\gamma = 1$, що відповідає ізотермічним умовам,

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/L_g}$$

- барометричний закон зміни густини з висотою.

3.6 Лінійні хвилі

Плазма у спокійному стані зустрічається в природі дуже рідко. Зазвичай спостерігаються коливання відносно середнього стану, які виникають або через локальну нестабільність системи, або, що трапляється частіше, збуджуються в одному місці, а згодом розповсюджуються до іншого. Слід зазначити, що дані коливання, по суті, утворюють основні елементи турбулентності, тому в даному пункті, ми проведемо аналіз лінійних мод або хвиль в рамках МГД.

3.6.1 Хвилі в однорідній намагніченій системі

На відміну від нестискуваної гідродинаміки, в якій збурення не розповсюджуються. В рамках МГД спостерігаються декілька типів хвиль навіть при наближенні нестискуваного середовища. Спочатку розглянемо найпростіший випадок однорідної плазми з параметрами p_0, ρ_0 та $\vec{B}_0$. При цьому в результаті проходження хвилі фіксуються малі збурення $p_1 \ll p_0, \rho_1 \ll \rho_0, \vec{B}_1 \ll \vec{B}_0$. Якщо дана умова виконується то ми можемо провести процедуру лінеаризації рівнянь МГД. Процедура лінеаризації полягає в наступному: всі змінні представляються у вигляді суми рівноважної і збуреної складової $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$, наприклад $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \rho = \rho_0 + \rho_1$

та ін., потім підставляємо їх у рівняння (у нас це рівняння руху, рівняння зміни магітного поля/рівняння індукції, рівняння неперервності та рівняння стану) і залишаємо величини тільки першого порядку (нульовий порядок описує рівноважний стан без поширення хвилі, а врахування вищих порядків не доречно із-за малості величин/збурень). Отримаємо

$$\begin{aligned}
&\rho_0 \tfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \tfrac{1}{\mu_0}\left[rot\vec{B}_1 \times \vec{B}_0\right] + \mu\Delta\vec{v}_1 \\
&\tfrac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right] + \eta\Delta\vec{B}_1 \\
&\tfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\gamma p_0 \,\mathrm{div}\, \vec{v}_1 \\
&\tfrac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \,\mathrm{div}\, \vec{v}_1
\end{aligned}$$

Шукаємо розв'язок величин першого порядку у вигляді плоских монохроматичних хвиль (Фур'є перетворення в просторі і часі):

$$f_1 = f_1' \exp\left\{-i\left(\omega' t - \vec{k}\vec{r}\right)\right\},$$

де ω' - частота хвилі, а $\vec{k}$ - хвильовий вектор. Це призведе до того, що із системи із диференційних операторів ми перейдемо завдяки співвідношенням

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} div \vec{f} \to -\vec{k}(\vec{k}\vec{f}), \Delta\vec{f} \to -\vec{k}^2\vec{f}, \tfrac{\partial \vec{f}}{\partial t} \to -i\omega\vec{f} \\
&\tfrac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} \to -\omega^2\vec{f}, \nabla\times\vec{f} \to i\vec{k}\times\vec{f}
\end{aligned}$$

до системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
&-i\omega'\rho_0\vec{v}_1 = -i\vec{k}p_1 + \tfrac{1}{\mu_0}\left[\left[i\vec{k}\times\vec{B}_1\right]\times\vec{B}_0\right] - \mu k^2\vec{v}_1 \\
&-i\omega'\vec{B}_1 = i\vec{k}\times\left[\vec{v}_1\times\vec{B}_0\right] - \eta k^2\vec{B}_1 \\
&-i\omega' p_1 = -\gamma p_0 i\vec{k}\cdot\vec{v}_1 \\
&-i\omega'\rho_1 = -\rho_0 i\vec{k}\cdot\vec{v}_1
\end{aligned}$$

Дану систему можемо переписати для однієї змінної $\vec{v}_1$. В випадку нехтування дисипативними процесами отримаємо наступне рівняння:

$$\omega'^2\rho_0\vec{v}_1 = \left(\frac{\vec{B}_0\times\left[\vec{k}\times\vec{B}_0\right]}{\mu_0} + \gamma p_0\vec{k}\right)\vec{k}\cdot\vec{v}_1 - \frac{1}{\mu_0}\vec{k}\cdot\vec{B}_0\left[\vec{k}\times\vec{v}_1\right]\times\vec{B}_0 \quad (3.24)$$

Із рівняння видно, що є як поздовжні хвилі (хвилі стиснення) $\propto \vec{k}\cdot\vec{v}_1$ так і поперечні хвилі (хвилі зсуву) $\propto \vec{k}\times\vec{v}_1$. Виберемо систему координат таким чином, щоб $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z, \vec{k} = k_\perp\vec{e}_x + k_\parallel\vec{e}_z$. Тоді рівняння (3.24) можна записати у матричному представленні

$$\begin{pmatrix} \omega' - k_\parallel^2 v_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega' - k_\perp^2 c_s^2 - k^2 v_A^2 & -k_\perp k_\parallel c_s^2 \\ 0 & -k_\perp k_\parallel c_s^2 & \omega' - k_\parallel^2 c_s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

де $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho}$ - альфвенівська швидкість, $c_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ швидкість звуку, а $k^2 = k_\perp^2 + k_\parallel^2$. Якщо детермінант матриці дорівнює нулеві, ми отримаємо рівняння на власні значення, яке називають дисперсійним співвідношенням (описує характеристики хвилі і визначає зв'язок між хвильовим числом і частотою хвилі):

$$\left(\omega'^2 - k_\parallel^2 v_A^2\right)\left\{\omega'^4 - \omega'^2 k^2\left(c_s^2 + v_A^2\right) + k^2 c_s^2 k_\parallel^2 v_A^2\right\} = 0 \tag{3.26}$$

Із системи (3.25) слідує три типи власних мод (типів хвиль).

(I) Альфвенівська хвиля

$$\omega'^2 = \omega_A = k_\parallel^2 v_A^2 \tag{3.27}$$

У цьому випадку маємо рух плазми в поперечному напрямку $\left(\vec{k}\cdot\vec{v}_1 = 0\right)$ і виконується умова нестискуваності. Швидкість також перпендикулярна до $\vec{B}_0$, а збурення магнітного поля задається співвідношенням $\vec{B}_1 = \pm\sqrt{\mu_0\rho_0}\vec{v}_1$, яке виникає за рахунок доданку $(\vec{B}\nabla)\vec{B}$ в силі Лоренца і призводить до пружного вигину силових ліній магнітного поля.

(II) Швидка магнітозвукова хвиля.

$$\omega'^2 = \omega_{fast}^2 = \frac{k^2}{2}\left[v_A^2 + c_s^2 + \sqrt{\left(v_A^2 + c_s^2\right)^2 - 4v_A^2 c_s^2 k_\parallel^2/k^2}\right] \tag{3.28}$$

Ця хвиля є хвилею стиснення. Фазова швидкість знаходиться в діапазоні $v_A^2 + c_s^2 \geq (\omega'/k)^2 \geq v_A^2$. Це "найшвидша" хвиля в напрямку перпендикулярному до магнітного поля $\vec{B}_0$. Для поздовжнього/паралельного розповсюдження,

$$\omega'^2 = \omega_{fast}^2 = \frac{1}{2}k^2\left(v_A^2 + c_s^2 + \left|v_A^2 - c_s^2\right|\right),$$

хвиля при малому параметрі β, коли $v_A > c_s$ переходить у рівняння для Альфвенівської хвилі (3.27) в той час як для плазми із високим параметром $\beta\,(c_s > v_A)$ маємо чисто поздовжні моди, які відповідають незамагніченим звуковим хвилям - $\omega'^2 = k^2 c_s^2$.

(III) Повільна магнітозвукова хвиля.

$$\omega'^2 = \omega_{slow}^2 = \frac{k^2}{2}\left[v_A^2 + c_s^2 - \sqrt{\left(v_A^2 + c_s^2\right)^2 - 4v_A^2 c_s^2 k_\parallel^2/k^2}\right] \tag{3.29}$$

Ця хвиля, також, в загальному, є хвилею стиснення. Фазова швидкість знаходиться в діапазоні $0 \leq (\omega'/k)^2 \leq c_s^2$. Для поздовжнього/паралельного розповсюдження фазова швидкість має верхню межу

$$\omega_{slow}^2 = \frac{1}{2}k^2\left(v_A^2 + c_s^2 - \left|v_A^2 - c_s^2\right|\right),$$

при $v_A > c_s$ маємо звукову хвилю, а при $c_s > v_A$, альфвенівську швидкість. Очевидним є співвідношення для фазових швидкостей $(v_{ph} = \omega'/k)$ для розглянутих мод хвиль $v_{fast} \geq v_A \geq v_{slow}$.

3.6.2 Хвилі в стратифікованій системі

Розглянемо збурення густини в стратифікованому середовищі ($\rho_0(z)$) під дією сили тяжіння. Оскільки в наближенні Буссінеска ми нехтуємо просторовими варіаціями рівноважних величин, тому можемо знову представити збурення в вигляді Фур'є перетворення. Нехтуючи магнітними полями та в'язкістю в рівнянні Буссінеска (3.13), а також використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги ($\nabla p_0 = \vec{g}\rho_0$) отримаємо залежності для вихору та рівняння неперервності

$$-i\omega'\vec{\omega}_1 = \frac{g}{\rho_0}\vec{e}_z \times i\vec{k}\rho_1 + 2i(\vec{k}\vec{\Omega})\vec{v}_1 \tag{3.30}$$

$$-i\omega'\rho_1 = -\rho_0' v_{1z} \tag{3.31}$$

де враховано що $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Рівняння (3.30) можемо переписати враховуючи що $i\vec{k} \times \vec{\omega}_1 = k^2\vec{v}_1$:

$$-i\omega' k^2\vec{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0}\left(gk_z\vec{k} - g\vec{e}_z\right)\rho_1 - 2i(\vec{k}\vec{\Omega})\vec{\omega}_1 \tag{3.32}$$

Використавши залежність для ρ_1 і розглянувші z-тові компоненти рівнянь (3.30) та (3.32) ми отримаємо систему однорідних рівнянь для v_{1z} та ω_{1z} із яких можна відразу записати дисперсійне співвідношення

$$\omega'^2 k^2 + k_{\perp'}^2 \frac{g\rho_0'}{\rho_0} - 4(\vec{k}\vec{\Omega})^2 = 0 \tag{3.33}$$

В даному рівнянні індекс $\perp'$ означає напрямок перпендикулярний до $\vec{g}$. Вираз $-g\rho_0'/\rho_0 = N^2$ - квадрат частоти Бранта-Вяяйсяля (N). Із рівняння (3.33) можемо знайти частоту збурень у стратифікованій системі:

$$\omega'^2 = \frac{N^2 k_{\perp'}^2 + 4(\vec{k}\vec{\Omega})}{k^2}. \tag{3.34}$$

Якщо плазма не обертається $\vec{\Omega} = 0$, то із рівняння (3.34) ми отримаємо умову для внутрішніх гравітаційних хвиль у вигляді

$$\omega' = \pm N k_{\perp'}/k,$$

якщо

$$N^2 > 0 \Leftarrow g\rho_0' < 0,$$

і маємо ситуацію стійкої стратифікації (легка рідина зверху). При цьому частота набагато менша, ніж частота звуку, завдяки цьому гравітаційні хвилі не стискаються. У протилежному випадку нестійкої стратифікації, $g\rho_0' > 0$ (важка рідина зверху), збурення не поширюється, а зростають експоненціально, в результаті будемо мати нестійкість Релей-Тейлора. В іншому граничному випадку $N = 0$ із рівняння (3.34) знайдемо рівняння для інерційних хвиль:

$$\omega' = \pm 2(\vec{k} \cdot \vec{\Omega})/k \tag{3.35}$$

Із рівняння (3.34) слідує, що швидке обертання стабілізує нестабільність Релея-Тейлора.

3.7 Ельзассерні поля та нормалізація альфвенівського часу

Оскільки інтерес до теорії турбулентності МГД орієнтований на рухи плазми, що не стискаються, альфвенівська хвиля є найважливішою лінійною модою (лінійним параметром) режимом. Як ми бачили в попередньому розділі, альфвенівська швидкість та збурення магнітного поля паралельні $\left(\vec{v}_1 = \pm \vec{B}_1/\sqrt{\mu_0 \rho}\right)$. Фундаментальна особливість альфвенівських хвиль в МГД стає помітною при записі (нелінійних) рівнянь МГД в полях Ельзассера (Elsasser, 1950):

$$\vec{z}^{\pm} = \vec{v} \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \vec{b} \tag{3.36}$$

Для спрощення позначень ми нормалізуємо рівняння МГД відносно альфвенівського часу $\tau_A = L/v_A$:

$$\frac{t}{\tau_A} := t, \frac{x}{L} := x, \frac{B}{B_0} := b, \frac{p}{\left(\rho_0 v_A^2\right)} := p \tag{3.37}$$

де L - зручна довжина шкали, B_0 - типове магнітне поле, а $v_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho}$ - альфвенівська швидкість. У цих одиницях магнітна дифузність чи питомий опір, як її ще називають, буде оберненою величиною до числа Ландкуіста $S = v_A L/\eta$ Тоді поля Ельзассера (3.36) тепер просто

$$\vec{z}^{\pm} = \vec{v} \pm \vec{b} \tag{3.38}$$

Додаючи рівняння руху (3.1) та рівняння для індукції магнітного поля (3.6) або віднімаючи (3.6) від (3.1), і припускаючи, що у нас виконується умова нестискуваності, ми отримаємо

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{z}^{\pm}}{\partial t} + \vec{z}^{\pm} \cdot \nabla \vec{z}^{\pm} = -\nabla P + \frac{1}{2}(\nu + \eta)\nabla^2 \vec{z}^{\pm} + \frac{1}{2}(\nu - \eta)\nabla^2 \vec{z}^{\pm} \\ \nabla \cdot \vec{z}^{\pm} = 0 \end{gathered} \tag{3.39}$$

де P знову загальний тиск, $P = p + \frac{1}{2}B^2$ в наших нових одиницях. Якщо лінеаризувати дані рівняння, прийняти що магнітне поле однорідне та знехтувавши дисипативним доданком отримаємо просте співвідношення

$$\frac{\partial \vec{z}^{\pm}}{\partial t} \mp \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{z}^{\pm} = 0 \tag{3.40}$$

З рівняння (3.40) прослідковується, що z^- описує альфвенівські хвилі, що поширюються в напрямку $\vec{B}_0, z^-\left(\vec{x}-\vec{B}_0 t\right)$ а z^+ описують альфвенівські хвили що розповсюджуються в напрямку протилежному до $\vec{B}_0, \quad z^+\left(\vec{x}+\vec{B}_0 t\right)$. Цікавою властивістю полів Ельзассера є те, що в (3.39) не існує однакових складових в нелінійному розгляді, а лише перехресне поєднання z^+ та z^-. Це основа ефекту Альфвена, який описує фундаментальний процес взаємодії.

Оскільки поля Ельсассера, власне кажучи, є більш фундаментальними змінними в теорії нестискуваної МГД, ми також виражаємо ідеальні інваріанти щодо цих полів. Енергія (E_T (3.17) та перехресна спіральність ($H^C = \int \vec{v}\cdot\vec{B}dV$) набувають вигляду

$$E_T = \frac{1}{4}\int\left[\left(\vec{z}^+\right)^2 + \left(\vec{z}^-\right)^2\right]dV, \tag{3.41}$$

$$H^C = \frac{1}{4}\int\left[\left(\vec{z}^+\right)^2 - \left(\vec{z}^-\right)^2\right]dV, \tag{3.42}$$

в той час як магнітна спіральність H^M не має відношення до альфвенівської хвилі і, отже, не є зручною для вираження в формалізмі поля Ельсассера. Однак існує ще одна величина, яка, хоч і не є інваріантною, відіграє важливу роль у турбулентності МГД. Це різниця між кінетичною енергією та магнітною енергією, яка у формалізмі поля Ельсассера набуває вигляду

$$E^R = \frac{1}{2}\int\left[\vec{v}^2 - \vec{b}^2\right]dV = \int \vec{z}^+\vec{z}^- dV \tag{3.43}$$

Дана величина називається ще залишковою енергією.

4

Нестійкості в плазмі

Спостережні дані свідчать, що плазмові системи в космосі часто нестійкі. Наприклад, сонячні спалахи та полярні сяйва представляють нестійкі явища космічної плазми. В даному розділі буде розглянуто основні поняття та методи опису нестійкостійких конфігурацій. Вказано за яких умов стійкі рівноважні структури стають нестійкими. Приклади масштабних нестійкостей розглядаються на прикладі теорії МГД. Ми розглянемо декілька найбільш відомих нестійких конфігурацій в МГД.

У плазмових системах можуть спостерігатися різноманітні нестійкості. Зручна схема класифікації об'єднує нестійкості у два класи: конфігураційні та нестійкості простору швидкості. Нестійкість конфігураційного простору включає системи з обмеженими розмірами, а нестійкість призводить до зменшення енергетичного стану, спотворюючи форму. Ці нестійкості не передбачають розподілу швидкості частинок, і їх зазвичай вивчають за допомогою рівнянь гідродинаміки. Нестійкості простору швидкості, з іншого боку, передбачають функцію розподілу частинок. Це мікроскопічні нестійкості, і вони виникають, коли функція розподілу, відрізняється розподілу Максвела. Ці нестійкості мають кінетичну природу і їх вивчають використовуючи рівняннями Больцмана-Власова. Плазмові нестійкості можна додатково підрозділити на електростатичні та електромагнітні. Електростатична нестійкість передбачає зростання електростатичних хвиль, спричинене зростанням накопичення зарядів. Електромагнітна нестійкість передбачає наявність електромагнітних хвиль, що виникають внаслідок зростаючої густини струму в плазмі.

При описі плазми за допомогою тієї чи іншої моделі основні рівняння можуть мати стаціонарні розв'язки, які не відповідають термодинамічній рівновазі. Так, наприклад, при кінетичному описі плазми стаціонарна функція розподілу може відрізнятися від максвеллівської, що може призводити до розвитку нестійкості. При гідродинамічному описі плазми стаціонарний розв'язок МГД-рівнянь може відповідати різним значенням тиску уздовж і поперек магнітного поля, а в разі неоднорідної плазми, зокрема, зовнішнього магнітного поля, стаціонарні значення густини, тиску, швидкості і температури можуть змінюватися в просторі. У цих випадках стаціонарний розв'язок основних рівнянь також може виявитися нестійким, тобто малі відхилення параметрів плазми від стаціонарних значень можуть наростати, що призведе до істотного відхилення системи від заданого стаціонарного стану.

4.1 Гідродинамічні нестійкості

У разі нерівноважної, але однорідної плазми дослідження її стійкості може бути виконано за допомогою аналізу дисперсійного рівняння при наявності збурень. Цей метод полягає в тому, що на стаціонарний стан «накладаються» малі збурення а систему основних рівнянь лінеаризують відносно малих збурень параметрів плазми, тобто відкидаються всі доданки, крім лінійних. Розв'язки отриманих таким чином рівнянь шукають у вигляді плоских хвиль з однією і тієї ж частотою і хвильовим вектором для всіх збурених величин. Оскільки за своїм змістом дана лінійна система є однорідною, то вимога, щоб система мала нетривіальний розв'язок, дає дисперсійне рівняння (зв'язок між ω і k). Якщо при дійсному хвильовому векторі k величина ω виявляється комплексною з додатньою уявною частиною, то малі відхилення параметрів плазми від стаціонарних значень будуть експоненціально наростати з часом.

І дійсно оскільки

$$\exp i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)=\exp i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_R t\right)\exp\left(\omega_I t\right),$$

а $\omega=\omega_R+i\omega_I$, де ω_R і ω_I - дійсні величини, то ω_I визначає, чи зростає хвиля ($\omega_I>0$) або з часом розпадається ($\omega_I<0$).

Щоб побачити, як структура МГД стає нестійкою, розглянемо довільну межу плазми, через яку існує градієнт густини (Рис 4.1). Плазми з обох сторін можуть рухатися або знаходитися в спокої. Нехай зовнішня сила F, немагнітна постійна сила, діє перпендикулярно до границі (F може бути, наприклад, градієнтом тиску, силою кривизни або силою гравітації). Проблема полягає в тому, щоб вивчити умови, при яких такі конфігурації стають нестійкими.

4.1.1 Нестійкість Релея-Тейлора

Знаменита конфігурація Релея-Тейлора відповідає випадку, коли F - гравітаційна сила. На одній стороні існує намагнічена рідина, а з другого - магнітне поле (верхня діаграма рисунка 4.1). Нехай межа площини знаходиться в площині yz і нехай буде градієнт густини в напрямку -x.

Нехай $\vec{B}_0$ буде в z-напрямку. Ми припускаємо, що плазма з низьким параметром β ($\beta \ll 1$), щоб ми могли пропустити $kT_e \approx kT_i \approx 0$. Звідси випливає, що діамагнітного струму немає і, оскільки плазма залишається холодною, робимо висновок, що магнітне поле залишиться однорідним. Система знаходиться в рівновазі. Початкова статична конфігурація визначається рівнянням

$$m_i n_0 \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla\right) \vec{u}_0 = q n_0 \vec{u}_0 \times \vec{B}_0 + m_i \vec{g} \tag{4.1}$$

Доданок $(\vec{u}_0 \cdot \nabla)$ може бути проігнорований, якщо $\vec{u}_0$ однорідне у просторі, що виправдано, якщо сила є однорідною та постійною. Помножимо рівняння (4.1) векторно на $\vec{B}_0$ і знайдемо швидкість:

$$\vec{u}_0 = m_i \vec{g} \times \frac{\vec{B}}{qB^2}$$

$$\vec{u}_0 = -\frac{\vec{g}}{\Omega_c} \hat{y}$$

що є лише дрейфом ведучого центру в полі гравітаційної сили. Тут m_i - маса іона, а $\Omega_c = qB/m_i$ - гірочастота (ларморівська частота) іона. Ми можемо отримати подібне рівняння для електронів, що дрейфують у зворотному напрямку. Однак оскільки у нас $m_e/m_i \to 0$, то вклад електронів можна ігнорувати. Введемо тепер невелике збудження, щоб межа/границя почала рухатися (див. нижню діаграму рисунка). Оскільки дрейф $\vec{g} \times \vec{B}$ залежить від маси, іони будуть дрейфувати швидше, ніж електрони. Отже, легко можна зробити висновок, що дрейф іонів призведе до накопичення зарядів (схематично показано на рисунку). Це розділення заряду призведе до появи електричного поля і, оскільки знак зарядів змінюється між мінімумом і максимумом пульсацій/коливання, $\vec{E}_1 \times \vec{B}$ направлене по x. Амплітуда пульсації флуктуацій при цьому наростає, а межа стає нестійкою. Щоб продовжити аналіз збурень, нехай $n = n_0 + n_1$ і $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1$, де індекси 0 і 1 позначають рівноважні та збурені величини. Тоді рівняння руху іонів набуде вигляду

$$m_1 \left(n_0 + n_1\right) \frac{d}{dt} \left(\vec{u}_0 + \vec{u}_1\right) = e \left(n_0 + n_1\right) \left[\vec{E}_1 + \left(u_0 + u_1\right) \times \vec{B}_0\right] + m_1 \left(n_0 + n_1\right) \vec{g} \tag{4.2}$$

Помножимо рівняння (4.1) на $(1 + n_1/n_0)$:

$$m_i \left(n_0 + n_1\right) \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla\right) \vec{u}_0 = c \left(n_0 + n_1\right) \vec{u}_0 \times \vec{B}_0 + m_i \left(n_0 + n_1\right) \vec{g} \tag{4.3}$$

Віднімемо (4.3) від (4.2) і залишимо доданки тільки першого порядку

$$m_i n_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \left(\vec{u}_0 \cdot \nabla\right) \vec{u}_1\right] = e n_0 \left(\vec{E}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{B}_0\right) \tag{4.4}$$

Можна відмітити, що прискорення вільного падіння тут явно не входить, Воно входить «неявно через $\vec{u}_0$». Надалі використаємо той самий метод як і при аналізі хвиль – всі збурення пропорційні $\exp i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$. В нашому випадку збурення розповсюджується в напрямку y. Із рівняння (4.4) отримаємо

$$m_{\mathrm{i}}\left(\omega-ku_0\right)\vec{u}_1=ie\left(\vec{E}_1+\vec{u}_1\times\vec{B}_0\right) \tag{4.5}$$

Тут $\omega-ku_0$ - Доплерівський зсув частоти хвилі. Вважаючи, що $E_x=0$ і що $(\omega-ku_0)\ll\Omega_{\mathrm{c}}$, розв'язком рівняння (4.5) буде

$$u_{1ix}=\frac{E_y}{B_0}$$

$$u_{1iy}=-i\frac{\omega-ku_0}{\Omega_c}\frac{E_y}{B_0} \tag{4.6}$$

Перше рівняння - звичайний дрейф електричного поля. Друге рівняння - це поляризаційний дрейф у системі відліку іонів. Аналогічний аналіз руху збурених електронів у наближенні $m_e/m_i\to 0$ призводить до системи (ми знову ж таки залишили тільки доданки першого порядку)

$$u_{1ex}=\frac{E_y}{B_0}$$

$$u_{1ey}=0 \tag{4.7}$$

Для того щоб виключити із даних рівнянь напруженість електричного поля використаємо рівняння неперервності, а також умову квазінейтральності. Рівняння неперервності при наявності збурень буде мати вигляд:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}+\nabla\cdot(n_0\vec{u}_0)+(\vec{u}_0\cdot\nabla)\,n_1+n_1\nabla\cdot\vec{u}_0+(\vec{u}_1\cdot\nabla)\,n_0+n_0\nabla\cdot\vec{u}_1+\nabla\cdot(n_1\vec{u}_1)=0 \tag{4.8}$$

Доданок $\nabla\cdot(n_0\vec{u}_0)$ зникає, оскільки $\vec{u}_0$ перпендикулярний до ∇n_0 і $\nabla\cdot\vec{u}_0$ зникає, якщо $\vec{u}_0$ постійний/однорідний. Залишивши тільки доданки першого порядку і використавши представлення збурень у вигляді хвилі отримаємо:

$$-i\omega n_1+iku_0n_1+u_{1ix}\frac{\partial n_0}{\partial x}+ikn_0u_{1iy}=0 \tag{4.9}$$

Для електронів рівняння неперервності має вигляд

$$-i\omega n_1+u_{1ex}\frac{\partial n_0}{\partial x}=0 \tag{4.10}$$

де вважаємо що $\vec{u}_{e0} = 0$ і $u_{1ey} = 0$. Поєднуючи (4.6) і (4.9) отримаємо

$$(\omega - ku_0)\, n_1 + i\frac{E_v}{B_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} + ikn_0\frac{\omega - ku_0}{\Omega_c}\frac{E_y}{B_0} \tag{4.11}$$

А із рівнянь (4.7) та (4.10) будемо мати:

$$\omega n_1 + i\frac{E_y}{B_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} = 0$$

Отже,

$$\frac{E_y}{B_0} = i\omega n_1 \left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)^{-1} \tag{4.12}$$

Використовуючи (4.12) виключимо E_y із рівняння (4.11), отримаємо

$$(\omega - ku_0)\, n_1 - \left(\frac{\partial n_0}{\partial x} + kn_0\frac{\omega - ku_0}{\Omega_c}\right)\frac{\omega n_1}{(\partial n_0/\partial x)} = 0$$

Та

$$\omega\,(\omega - ku_0) + \frac{u_0 S_c}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} = 0$$

Підставляючи в останній доданок вираз для швидкості ($\vec{u}_0 = -\vec{g}\hat{y}/\Omega_c$) отримаємо квадратичне рівняння. Розв'язок якого буде у вигляді

$$\omega = \frac{ku_0}{2} \pm \left[\frac{k^2 u_0^2}{4} + \frac{g}{n_0}\left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)\right]^{1/2} \tag{4.13}$$

За умови

$$-\frac{g}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} > \frac{k^2 u_0^2}{4} \tag{4.14}$$

Ми будемо мати розвиток нестійкості (частота уявна і збурення наростають) Тобто на розвиток нетійкості впливає напрямок зміни концентрації. Незважаючи на те, що ми працювали над вищезазначеною проблемою, припускаючи що F - гравітаційна сила, у нас можуть бути і інші інерційні сили. Рушійним механізмом при цьому є гравітаційний дрейф. Це означає, що яка б сила не була, вона повинна виробляти дрейф, паралельний границі, що спричиняє поділ заряду, що, в свою чергу, виробляє електричне поле, яке може спричинити зростаючу амплітуду після появи збурень. Зауваживши це, розглянемо плазмову конфігурацію, де замість плоскої межі маємо вигнуту границю (ця геометрія є більш доречною в космічній плазмі (найбільш поширеним випадком є моделювання магнітопаузи). При наявності кривизни дрейф ведучого центру буде задаватися співвідношенням [1]

$$\vec{w} = \frac{m}{qB^4}\left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right)\left[\vec{B} \times \nabla\left(\frac{B^2}{2}\right)\right]$$

[1] Козак Л.В. Вступ до фізики космічної плазми, ВЦП КНУ, 2010

Цей дрейф паралельний границі і завдяки наявності у формулі заряду (іони і електрони дрейфують у різних напрямках) даний дрейф породжує струм і електричне поле може призводити до генерації нестійкості. Введемо параметр – радіус кривизни ρ для нашої конфігурації:

$$\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)}{B}\frac{\vec{B}}{B} = -\frac{\rho}{\rho^2}$$

якщо $\nabla \times \vec{B} = 0$, то

$$\frac{\nabla_\perp B}{B} = -\frac{\rho}{\rho^2}$$

Тоді, використовуючи результати попереднього (гравітаційного) розгляду, можемо отримати умову нестійкості за умови вигнутості магнітного поля. Для цього у рівнянні (4.14) потрібно перейти до

$$g \to \left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right)\frac{\rho}{\rho^2}$$

Якщо ρ збігається за напрямком із градієнтом густини/концентрації, конфігурація стабільна, в протилежному випадку, конфігурація нестійка. На практиці це означає що якщо магнітне поле «відхиляється» від плазми, то електричне поле, що утворюється залежним від заряду дрейфом, буде послаблювати коливання і призведе до відновлення рівноваги. При іншому напрямку магнітного поля, електричне поле, що утворюється в результаті дрейфу, призведе до наростання збурень і межа буде нестійкою. Пульсації на границі називають "флейти і ці нестійкості також носять таку назву.

4.1.2 Дрейфово-хвильова нестійкість

Розглянемо тепер випадок конфігурації меж плазми, в якій, на відміну від попереднього прикладу, плазма є теплою. Нестійкість буде обумовлена градієнтом тиску. Для простоти розгляду будемо вважати що температура постійна. Рівноважні та збурені конфігурації цього розгляду показані на рисунку 4.2. Для градієнта густини в напрямку -x та магнітного поля в напрямку z, діамагнітні дрейфи іонів і електронів нульового порядку задаються

$$\vec{v}_{i0} = \frac{kT_i}{eB_0}\frac{\nabla n_0}{n_0}\hat{y}$$

$$\vec{v}_{e0} = -\frac{kT_e}{eB_0}\frac{\nabla n_0}{n_0}\hat{y}$$

Дрейфові хвилі по суті є іонними акустичними хвилями, модифікованими наявністю градієнта густини. Нехай хвильовий вектор направлений вздовж магнітного поля (вісь z). При цьому $\vec{k} = k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$.

Електрони, що рухаються в напрямку магнітного поля, розігріваються, а збурення концентрації задовільняє Больцманівському розподілу.

$$n_{e1} \approx \frac{n_0 e\psi}{kT_e}$$

Напруженість електричного поля $\vec{E} = -\nabla\psi$. Рівняння неперервності для збуреня при врахуванні що $k_z/k_y \ll 1$ буде

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + u_{1x}\frac{\partial n_0}{\partial x} = 0$$

За умови, що u_{1x} є однорідним у напрямку х. Це припущення еквівалентно тому що рідина є нестисливою і ми ігноруємо доданок $n_0\nabla \cdot \vec{u}_1$. Можна відмітити, що зміщення плазми у напрямку градієнта густини призводить до зміни густини. Ця зміна густини відбувається тому, що збурення за рахунок $\vec{E}_1 \times \vec{B}$ дрейфу переносить об'єм більш густої плазми в області нижчої густини (і навпаки). Дрейфова хвиля передбачає рух рідини назад і вперед в напрямку х ((напрямок градієнта густини), коли хвиля рухається в напрямку – у. Рух рідини в х-напрямку задається співвідношенням

$$u_{1x} = \frac{E_y}{B_0}$$

$$u_{1x} == \frac{-ik_y\psi}{B_0}$$

Використовуючи даний вираз та вираз для концентрації можемо переписати рівняння неперервності для збурення у вигляді

$$-i\omega n_1 = \frac{i\omega n_0 e\psi}{kT_e}$$

$$-i\omega n_1 = ik_y\frac{\psi}{B_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}$$

А фазова швидкість буде:

$$\frac{\omega}{k_y} = -\frac{kT_e}{eB_0}\frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}$$

Ці хвилі рухаються з діамагнітною швидкістю дрейфу електронів і їх називають дрейфовими хвилями. Дані хвилі поєднуючись із рухом електронів можуть наростати і ставати нестійкими при обміні енергією між плазмою і хвилею. Умову нестійкості можна отримати в рамках кінетичного представлення.

4.1.3 Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца

Низькочастотні хвилі МГД, які збуджуються на границі за рахунок наявності різних швидкостей, називаються хвилями Кельвіна-Гельмгольца. Хвилі Кельвіна-Гельмгольца - це поверхневі хвилі низької частоти, які можуть наростати і ставати нестійкими. Дана нестійкість в космічній плазмі вивчена досить добре при аналізі змін (тангенціальних розривів) на границі магнітопаузи (при взаємодії сонячного вітру і магнітного поля планет). Розглянемо границю, двох середовищ, для простоти припустимо, що дві рідини ідеальні ($\sigma = \infty$), нестисливі, а тиск ізотропний. Параметри плазми запишемо у вигляді Де індекс 0 відноситься до рівноважного стану, а δ до збуреної величини: $\vec{u} = \vec{U}_0 + \delta\vec{U}$, $p = p_0 + \delta p$, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}$ Виберемо декартову систему координат таким чином, щоб вісь z була направлена вздовж нормалі до площини розриву. У випадку тангенціального розриву $\vec{U}_0$ та $\vec{B}_0$ лежать у площині ху. Нехай збурення призводять до появи хвиль, що поширюються в площині ху, але розпадаються у напрямку z. Збурені параметри задовільняють розкладу у вигляді $\exp i\,(k_x x + k_y y - k_z z - \omega' t)$. Тут ω' - з врахуванням доплерівського зміщення, частота хвилі, виміряна нерухомим спостерігачем на границі.

Для аналізу використаємо рівняння МГД у вигляді

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E},$$

$$\vec{E} = -\vec{U} \times \vec{B},$$

$$\rho_m \frac{d\vec{U}}{dt} = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B}$$

Для простоти розгляду вважаємо що тиск у нас має скалярний вигляд. Магнітне поле та густина струму пов'язані між собою як $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Розв'язок у вигляді плоскої хвилі призведе до того, що ми будемо мати $\partial/\partial t \to -i\omega', \nabla \to i\vec{k}_t + k_z\hat{z}, \nabla\cdot \to \left(i\vec{k}_t + k_z\hat{z}\right), \nabla\times \to (ik_t + k_z\hat{z}) \times$ $(\vec{k}_t = (k_x\hat{x} + k_y\hat{y}))$

Тоді рівняння для індукції магнітного поля набуде вигляду:

$$-i\omega'\delta\vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{U} - (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$-i\omega'\delta\vec{B} = \left(\vec{B}_0 \cdot \nabla\right)\delta\vec{U} - \left(\vec{U}_0 \cdot \nabla\right)\delta\vec{B}$$

$$-i\omega'\delta\vec{B} = i\vec{k}_t \cdot \left(B_0\delta\vec{U} - U_0\delta\vec{B}\right)$$

Використовуючи $\omega' = \omega + \vec{k} \cdot \vec{U}_0$ перепишемо дане рівняння як

$$\omega\delta\vec{B} = -\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{k}_t\right)\delta\vec{U}$$

Для нестискуваного середовища $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ і $\kappa_{\pm} \cdot \delta\vec{U} = 0$, де $\kappa_{\pm} = (k_x\hat{x} + k_y\hat{y}) \pm k_z\hat{z}$ - хвильове число κ_+ для $z > 0$, і κ_- для $z < 0$. Рівняння руху набуде вигляду

$$\omega\rho_m\delta\vec{U} - \kappa_{\pm}\delta p = -\frac{\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{k}_t\right)\delta\vec{B}}{\mu_0} + \frac{\left(\vec{B}_0 \cdot \delta\vec{B}\right)\kappa_{\pm}}{\mu_0}$$

Тут враховано, що $\rho_m d\vec{U}/dt = -i\omega\rho_m\delta\vec{U}, \nabla p = \kappa_{\pm}\delta p, (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \nabla B^2/2, \left(\vec{B}_0 \cdot \nabla\right)\vec{B}_1 + \nabla\left(B_0^2/2 + \vec{B}_0 \cdot \delta\vec{B}\right) = \left(\vec{B}_0 \cdot \kappa_{\pm}\right)\delta\vec{B} - i\kappa_{\pm}\left(\vec{B}_0 \cdot \delta\vec{B}\right)$ Загальний тиск $p^* = p + B^2/2\mu_0$, для першого порядку по збуреним величинам будемо мати

$$\delta p^* = \delta p + \frac{\vec{B}_0 \cdot \delta\vec{B}}{\mu_0}$$

Підставивши це в рівняння руху будемо мати

$$\kappa_{\pm}\delta p^* = \frac{\rho_m}{\omega}\left[\omega^2 - \frac{\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{k}_t\right)^2}{\mu_0\rho_m}\right]\delta\vec{U} \tag{4.15}$$

Для отримання властивостей поверхневих хвиль помножимо скалярно дане рівняння на $\kappa_{\pm}$, врахувавши, що $\kappa_{\pm} \cdot \delta\vec{U} = 0$, отримаємо

$$\kappa_{\pm}^2\delta p^* = 0$$

Це рівняння справджується за умови

$$\delta p^* = 0$$

що виконується згідно (4.15) для Альфвенівських хвиль, $\omega/k = \pm V_A$, де $V_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_m}$ або у випадку $\kappa_{\pm}^2 = 0$. Другий варіант відповідає повехневим хвилям

$$k_t^2 = k_z^2 \tag{4.16}$$

Рівняння (4.16) – визначає довжину затухання збурень, що знаходиться на певній відстані від поверхні розриву $k_z^{-1} = k_t^{-1}$ Помноживши рівняння (4.15) скалярно на $\hat{z}$ отримаємо

$$\delta p_t\kappa_{\pm} \cdot \hat{z} = \rho_m\left[\omega^2 - \frac{(B_0 \cdot k_t)^2}{\mu_0\rho}\right]\delta U \cdot \hat{z}$$

При цьому

$$\kappa_{\pm} \cdot \hat{z} = \pm ik_z$$

$$\delta\vec{U} \cdot \hat{z} = \frac{d\delta z}{dt}$$

$$\delta\vec{U}\cdot\hat{z}=\frac{\partial\delta z}{\partial t}+(U_0\cdot\nabla)\,\delta z$$

$$\delta\vec{U}\cdot\hat{z}=i\left(\omega'-kU_0\right)\delta z$$

$$\delta\vec{U}\cdot\hat{z}=i\omega\delta z$$

Оскільки $\omega'=\omega+\vec{U}_0\cdot\vec{k}$, то будемо мати рівняння

$$\pm k_2\delta p^*=\left[\omega^2-\left(\vec{V}_A\cdot\vec{k}\right)^2\right]\rho_m\delta z \tag{4.17}$$

де $\vec{V}_A=\vec{B}_0/\left(\mu_0\rho_m\right)^{1/2}$ - альфвенівська швидкість вздовж $\vec{B}_0$. Загальний тиск через тангенціальну розрив є неперервним, $[p^*]=0$. Також зміщення двох рідин у напрямку z має бути неперервним, щоб уникнути розділення або взаємопроникнення рідин, $[\delta z]=0$. Рівняння (4.17) це рівняння у вигляді $\delta p^*=A\delta z$. Звідси, $[\delta p^*]=[A\delta z]=[A][\delta z]=0$ означає $[A]=0$. При цьому (4.17) можна записати явно для обох сторін границі

$$\rho_{m1}\left[\omega_1^2-\left(\vec{V}_{A1}\cdot\vec{k}\right)^2\right]+\rho_{m2}\left[\omega_2^2-\left(\vec{V}_{A2}\cdot\vec{k}\right)^2\right]=0 \tag{4.18}$$

Частота, виміряна спостерігачем, дорівнює $\omega'=\omega_1+\vec{U}_{01}\cdot\vec{k}=\omega_2+\vec{U}_{02}\cdot\vec{k}$ і вона однакова з обох сторін. Враховуючи це можемо записати рівняння (4.18) для ω' у вигляді

$$\omega'=\frac{\rho_{m1}\mathrm{U}_{01}\cdot\vec{k}+\rho_{m2}\mathrm{U}_{02}\cdot\vec{k}}{(\rho_{m1}+\rho_{m2})}\pm\frac{1}{(\rho_{m1}+\rho_{2})}\cdot$$

$$\cdot\left\{(\rho_{m1}+\rho_{m2})\left[\rho_{m1}\left(\vec{V}_{A1}\cdot\vec{k}\right)^2+\rho_{m2}\left(\vec{V}_{A2}\cdot\vec{k}\right)^2\right]-\rho_{m1}\rho_{m2}(\Delta\vec{U}\cdot\vec{k})^2\right\}^{1/2} \tag{4.19}$$

де $\Delta\mathrm{U}=\mathrm{U}_{01}-\mathrm{U}_{02}$ - зсув потоку. Тут ми використали відношення $\vec{V}_{A1}=\vec{B}_{01}\cdot\vec{k}/\left(\mu_0\rho_1\right)^{1/2}$ і $\vec{V}_{A2}=\vec{B}_{02}\cdot\vec{k}/\left(\mu_0\rho_{m2}\right)^{1/2}$. B_{01} і B_{02} - це магнітні поля нульового порядку з двох сторін. Рівняння (4.19) - дисперсійне співвідношення для хвиль Кельвіна-Гельмгольца. Хвилі Кельвіна-Гельмгольца нестійкі, коли ω' має уявну частину. Рівняння A1.55) показує, що коли виконується умова

$$\rho_{m1}\rho_{m2}(\Delta\vec{U}\cdot\vec{k})^2>\frac{1}{\mu_0}\left(\rho_{m1}+\rho_{m2}\right)\left[\left(\vec{B}_{01}\cdot\vec{k}\right)^2+\left(\vec{B}_{02}\cdot\vec{k}\right)^2\right]$$

Амплітуда хвилі буде наростати. При цьому U, B і k всі лежать у площині xy. Можна відмітити, що напруга в магнітному полі буде протистояти будь-якій силі, що діє на нього, щоб розтягнути його. Тому зростання хвиль може відбуватися лише тоді, коли зсув швидкості перевищує магнітну напругу. Записана нерівність може мати місце якщо B_{01}і і B_{02}

перпендикулярні k, тоді права частина зникає і $(\Delta\vec{U} \cdot \vec{k})^2 > 0$ (тобто межа нестійка при довільно малому зсуві через границю). Для інших орієнтацій швидкість зростання залежить від відносних напрямків B, k і $\Delta\vec{U}$. Можна відмітити, що $\Delta\vec{U} \cdot \vec{k})^2$ - має максимум, якщо $\Delta\vec{U}$ і k паралельні. Однак фактичне значення залежить від відносних напрямків B_{01} і B_{02} щодо k. Нехай α - кут між $\Delta\vec{U}$ і k, а θ_1 і θ_2 - кути між k і B_{01} і B_{02}. Тоді умову нестійкості можна записати як

$$\Delta U^2 \cos^2\alpha > \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{\rho_{m1}} + \frac{1}{\rho_{m2}}\right)\left(B_{01}^2\cos^2\theta_1 + B_{02}^2\cos^2\theta_2\right)$$

Зазначимо, що оскільки $\vec{B}_0$ та $\vec{U}_0$ лежать в площині xy, то при розгляді магнітосфери Землі вона найчастіше має місце з підсонячного боку.

4.1.4 Шлангова нестійкість

Фазова швидкість хвиль, що поширюються вздовж напрямку магнітного поля, коли тиск є анізотропним,

$$\frac{\omega}{k} = V_A\left(1 - \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2/\mu_0}\right)^{1/2}$$

Це співвідношення показує, що для плазми із низьким параметром β ($p_\parallel$ або $p_\perp \ll B^2/\mu_0$) або для майже ізотропних плазм фазова швидкість зменшується до альфвенівської швидкості. В іншому випадку швидкість більша за альфвенівську, якщо $p_\parallel < p_\perp$. Однак зауважте, що ω стає уявним, якщо $p_\parallel > p_\perp + B^2/\mu_0$. В результаті ми будемо мати шлангову нестійкість. Амплітуда даної нестійкості наростає за умови

$$\omega_I = 1\frac{k}{\sqrt{\rho_m}}\left(p_\parallel - p_\perp - \frac{B^2}{\mu_0}\right)^{1/2}$$

де $p_\parallel = n\int mv_\parallel^2 f d^3v$, а $p_\perp = n\int\left(mv_\perp^2/2\right) f d^3v$.

Щоб уявити, як виникає ця нестійкість можна розглянути альфвенівські хвилі (пружні коливання силових ліній) в анізотропному середовищі. Тоді якщо розглянемо збурення, що створюють невеликі вигини в лініях магнітного поля, то при викривленні силової лінії виникає відцентрова сила, пропорційна енергії поздовжнього (уздовж силової лінії) руху частинок яка прагне збільшити викривлення. Оскільки при високій електропровідності у нас виконується умова вмороженості (частинки прив'язані до силових ліній - густина стає більшою, коли магнітне поле інтенсивніше) та зберігається магнітний момент, то ця сила виявляється більшою, ніж повертаючі сили, пов'язані з натягом силових ліній і з діамагнітними властивостям плазми. В результаті силова лінія буде ще більше викривлюватися - ситуація схожа із поведінкою шланга, по якому подається сильний струмінь води (аналогію проводять із пожежним шлангом).

Отже, посилене збурення буде протистояти локальній густині енергії в перпендикулярному напрямку. Нестійкість виникає тоді, коли збурення, викликані тиском в поздовжньому напрямку не можуть бути збалансовані стабілізуючими силами – тиском в перпендикулярному напрямку та тиском магнітного поля.

Нестійкість розглянутого типу можлива в плазмі сонячного вітру, і із нею пов'язують диссипацію на фронті міжпланетних ударних хвиль.

Детальний опис шлангової нестійкості можна отримати використовуючи теорію Чу-Гольбергера-Лоу в якій передбачається, що тензор тиску в локальній системі координат з віссю z, спрямованої уздовж магнітного поля, є діагональним.

$\widehat{\mathcal{P}} = \widehat{\mathcal{P}}_e + \widehat{\mathcal{P}_i}$ - сумарний тензор тиску електронів та іонів, який в системі координат з віссю z, спрямованою уздовж магнітного поля, має вигляд

$$\widehat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix}$$

причому величини $p_\perp$p і $p\|$ пов'язані з ρ_M і B співвідношеннями

$$\frac{p_\perp}{\rho_M B} = \text{const}, \frac{p_\parallel B^2}{\rho_M^3} = \text{ const} \tag{4.20}$$

Ці рівняння є по суті рівняннями стану в теорії ЧГЛ. Вони спільно із рівняннями МГД представляють собою замкнуту систему 15 рівнянь для величин $\vec{V}$, $\vec{j}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ_M, $p_\perp$ і $p\|$.

Дана система рівнянь має стаціонарний розв'язок, в якому V = j = E = 0, а інші величини постійні. Досліджуємо тепер стійкість цього розв'язку, використовуючи метод малих збурень. Для цього представимо всі величини у вигляді суми своїх стаціонарних значень, які (якщо такі є) будемо позначати індексом 0, плюс малі добавки першого порядку. Далі проводимо лінеаризацію отриманої системи, вважаючи що всі величини першого порядку пропорційні $\exp{(ikr - i\omega t)}$. Як завжди будемо вважати, що зовнішнє постійне магнітне поле B_0 направлено вздовж осі z, а хвильовий вектор k лежить в площині (x, z), тобто k = $(k_x, 0, k_z)$.

Із рівнянь МГД отримаємо

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{\mu_0 \rho_0 \omega}\left[\vec{k}\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1\right) - \vec{B}_1\left(\vec{k} \cdot \vec{B}_0\right)\right] - \frac{i\nabla \cdot \widehat{\mathcal{P}}}{\omega \rho_0}$$

$$\vec{B}_1 + \frac{1}{\omega}\left[\vec{V}_1\left(\vec{k} \cdot \vec{B}_0\right) - \vec{B}_0\left(\vec{k} \cdot \vec{V}_1\right)\right] = 0$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\omega}\left(\vec{k}\cdot\vec{V}_1\right) \tag{4.21}$$

де індексом 1 відзначені малі величини першого порядку. Виключаючи з першого рівняння (4.21) величину $\vec{B}_1$ за допомогою другого, отримаємо рівняння для швидкості у вигляді

$$\vec{V}_1 + \frac{v_A^2}{\omega^2}\left[\widehat{z}\left(\vec{k}\cdot\vec{V}_1\right)k_z - k_z^2\vec{V}_1 - \vec{k}\left(k_x V_{1x}\right)\right] + \frac{i\nabla\cdot\widehat{\mathcal{P}}}{\omega\rho_0} = 0$$

де $\widehat{z}$ - одиничний вектор уздовж осі z, і введено позначення для альвеновской швидкості $v_A^2 = B_0^2/\mu_0\rho_0$

Важливо відзначити, діагональне представлення тензору тиску $\widehat{P}$ записане вище має такий має вигляд в системі координат з віссю z, яка спрямована уздовж сумарного магнітного поля $\left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1\right)$, модуль якого також входить в співвідношення (4.20), причому цей напрямок, разом з величиною $\vec{B}_1$, залежить від координат і часу. Тому обчислення величини $\nabla\cdot\widehat{P}$, що входить в рівняння для швидкості, не є тривіальним. Ця величина за допомогою співвідношень (4.20) і останнього з рівнянь (4.21) може бути виражена через швидкість $\vec{V}_1$.

Для випадку, коли хвильове поле B_1 набагато менше зовнішнього магнітного поля B_0, компоненти вектора $(\nabla\cdot\widehat{\mathcal{P}})$ в системі координат з віссю z уздовж зовнішнього магнітного поля мають вигляд:

$$\begin{array}{l} (\nabla\cdot\widehat{\mathcal{P}})_x = \frac{\partial p_\perp}{\partial x} + \left(p_\parallel - p_\perp\right)\frac{\partial b_x}{\partial z} \\ (\nabla\cdot\widehat{\mathcal{P}})_y = \left(p_\parallel - p_\perp\right)\frac{\partial b_y}{\partial z} \\ (\nabla\cdot\widehat{\mathcal{P}})_z = \frac{\partial p_\parallel}{\partial z} + \left(p_\parallel - p_\perp\right)\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_z^2}{\partial z}\right) \end{array} \tag{4.22}$$

де b - одиничний вектор у напрямку повного магнітного поля, причому в лінійному наближенні $b_x = B_{1x}/B_0, b_y = B_{1y}/B_0, b_z = 1$

Використовуючи залежність $\vec{B}_1$ від координат і часу і співвідношення між $\vec{B}_1$ і $\vec{V}_1$ (див. друге рівняння (4.22)), похідні одиничного вектора $\vec{b}$ можуть бути виражені через $\vec{V}_1$ наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial x} &= \frac{ik_x B_x}{B_0} = -\frac{ik_x k_z}{\omega}V_{1x} \\ \frac{\partial b_x}{\partial z} &= \frac{ik_z B_x}{B_0} = -\frac{ik_z^2}{\omega}V_{1x} \\ \frac{\partial b_y}{\partial z} &= \frac{ik_z B_y}{B_0} = -\frac{ik_z^2}{\omega}V_{1y} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Що ж стосується похідних $p_\perp$ і $p_\parallel$, то за допомогою співвідношень (4.20) вони можуть бути виражені через похідні B_1 і ρ_1.

$$\frac{\partial p_\perp}{\partial x} = ik_x p_{\perp 0}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{B_{1z}}{B_0}\right) = ik_x p_{\perp 0}\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{V}_1}{\omega} + \frac{k_x V_{1x}}{\omega}\right)$$

$$\frac{\partial p_\parallel}{\partial z} = ik_z p_{\parallel 0}\left(\frac{3\rho_1}{\rho_0} - \frac{2B_{1z}}{B_0}\right) = ik_z p_{\parallel 0}\left(\frac{3\left(\vec{k}\cdot\vec{V}_1\right)}{\omega} - \frac{2k_x V_{1x}}{\omega}\right) \tag{4.24}$$

Підстановка (4.23), (4.24) в рівняння для швидкості дозволить нам отримати замкнуту систему рівнянь для компонент швидкості

$$\begin{aligned} V_{1x}\left[\omega^2 - k^2 v_A^2 - 2k_x^2 c_\perp^2 + k_z^2\left(c_\parallel^2 - c_\perp^2\right)\right] - V_{1z}k_x k_z c_\perp^2 = 0 \\ V_{1y}\left[\omega^2 - k_z^2 v_A^2 + k_z^2\left(c_\parallel^2 - c_\perp^2\right)\right] = 0 \\ V_{1x}k_x k_z c_\perp^2 - V_{1z}\left(\omega^2 - 3k_z^2 c_\parallel^2\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Де введено позначення

$$c_\perp^2 = \frac{p_{\perp 0}}{\rho_0}, c_\parallel^2 = \frac{p_{\parallel 0}}{\rho_0}$$

Ми бачимо, що система (4.25) розбивається на дві незалежні підсистеми: рівняння для V_{1y} і систему двох рівнянь для V_{1x} і V_{1z}. Рівняння для V_{1y} має нетривіальний розв'язок, якщо ω і k пов'язані дисперсійним співвідношенням

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 - k_z^2\left(c_\parallel^2 - c_\perp^2\right)$$

яке відповідає модифікованій альвенівській хвилі. В цій хвилі $V_{1y} \neq 0$, а $V_{1x} = V_{1z} = 0$. При $c_\parallel^2 > c_\perp^2 + v_A^2$ частота цієї хвилі стає чисто уявною, і відповідний розв'язок наростає з часом, що і відповідає розвитку шлангової нестійкості.

Другий тип розв'язку відповідає хвилі, в якій $V_{1y} = 0$, а V_{1x} і V_{1z} відмінні від нуля. Дисперсійне рівняння для цього типу хвиль має вигляд

$$\left[\omega^2 - k^2 v_A^2 - 2k_x^2 c_\perp^2 + k_z^2\left(c_\parallel^2 - c_\perp^2\right)\right]\left(\omega^2 - 3k_z^2 c_\parallel^2\right) - k_x^2 k_z^2 c_\perp^4 = 0 \tag{4.26}$$

Це рівняння є біквадратним рівнянням по ω, і його розв'язок може бути записано в явному вигляді. Наведемо цей розв'язок для двох окремих випадків: чисто поздовжнього і чисто поперечного поширення. У першому випадку $(k_x = 0, k_z = k)$ дисперсійне рівняння має два розв'язки:

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 - k^2\left(c_\parallel^2 - c_\perp^2\right)$$

та

$$\omega^2 = 3k_z^2 c_\parallel^2.$$

Перший з цих розв'язків описує магнітогідродинамічну хвилю. При поздовжньому поширенні ця хвиля (яка при відхиленні хвильового вектора від напрямку зовнішнього магнітного поля переходить в магнітозвукову) не відрізняється від модифікованої альвеновской хвилі. Друге рівняння описує іонно-звукову хвилю, що поширюється уздовж зовнішнього магнітного поля. При чисто поперечному розповсюдженні ($k_z = 0, k_x = k$) дисперсійне рівняння (4.26) має один розв'язок:

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 + 2k^2 c_\perp^2$$

який відповідає магнітозвуковим хвилям в плазмі з анізотропним тиском.

4.1.5 Двохпотокова нестійкість

Двопотокова нестійкість передбачає високочастотні плазмові коливання. Розглянемо плазмову систему, в якій іони знаходяться в спокої, а електрони рухаються зі швидкістю $\vec{u}_0$ по відношенню до іонів. Нехай плазма буде холодною як для іонів, так і для електронів, тобто, $k_b T_c = k_b T_i = 0$. Щоб ігнорувати ефекти магнітного поля, нехай електрони течуть уздовж напрямку магнітного поля. Тоді рівняння руху для іонів та електронів, для першого порядку, буде

$$m_i n_0 \frac{\partial \vec{u}_{i1}}{\partial t} = e n_0 \vec{E}_1$$

$$m_p n_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla)\, \vec{u}_{e1} \right] = -e n_0 \vec{E}_1$$

Доданок

$$(\vec{u}_0 \cdot \nabla)\, \vec{u}_i$$

не з'являється, тому що ми припустили, що $\vec{u}_{i0}$. Також оскільки швидкість однорідна в просторі то доданка $(\vec{u}_{e1} \cdot \nabla)\, \vec{u}_0$ також немає. У нас електростатичне електричне поле і $\vec{E}_1 = E \exp i(kz - \omega t)\hat{z}$, де z - напрям $\vec{u}_0$. Після проведення плоскохвильового аналізу за цими рівняннями отримаємо

$$-i\omega m_i n_0 \vec{u}_{i1} = e n_0 \vec{E}_1$$

$$i m_c n_0 \left(-\omega + k u_0\right) \vec{u}_{i1} = -e n_0 \vec{E}_{\vec{1}}$$

Тоді швидкість збурених іонів та електронівана з цих рівнянь, є

$$\vec{u}_{i1} = \frac{icE}{m_i \omega} \hat{z}$$

$$\vec{u}_{e1} = -\frac{ie}{m_e} \frac{E\hat{z}}{\omega - k u_0}$$

Рівняння неперервності для іонів та електронів записуються у вигляді:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{I1} = 0$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} + (\vec{u}_0 \cdot \nabla)\, n_{e1} = 0$$

В нашому розгляді робиться припущення $\vec{u}_0 = \nabla n_0 = 0$ і, отже, $n_{\mathrm{i}1} \nabla \cdot \vec{u}_{\mathrm{i}0} = (\vec{u}_{i0} \cdot \nabla)\, n_{i1} = (\vec{u}_{i1} \cdot \nabla)\, n_{i0} = 0$. Із рівняння неперервності можемо отримати зміну концентрації іонів та електронів

$$n_{i1} = \frac{k n_0 \vec{u}_{i1}}{\omega}$$

$$n_{e1} = \frac{n_0 k}{\omega - k u_0} \vec{u}_{e1}$$

Якщо ми використаємо отримані раніше співвідношення для швидкостей то ці рівняння набувають вигляду

$$n_{i1} = \frac{i e n_0 k E}{m_i \omega^2}$$

$$n_{e1} = -\frac{i e n_0 k E}{m_e (\omega - k u_0)^2} \tag{4.27}$$

Оскільки тут задіяні високі частоти то будемо мати дисбаланс заряду. Збурене електричне поле і збурені густини пов'язані рівнянням Пуассона

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = e\,(n_{i1} - n_{e1})$$

Враховуючи (4.27) отримаємо

$$-\epsilon_0 i k E = e\,(i e n_0 k E) \left[\frac{1}{m_i n_i \omega^2} + \frac{1}{m_e (\omega - k u_0)^2}\right]$$

яке може бути переписано як

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k u_0)^2} \tag{4.28}$$

де ω_{pi}^2 та ω_{pe}^2 - квадрати плазмових частот іонів та електронів. Рівняння (4.28) є дисперсійним свідношенням і є рівнянням четвертого порядку по частоті. Його можна розв'язати для довільних значень хвильового вектора. Частота буде у нас комплексною величиною. При цьому якщо уявна частина буде більше нуля ми будемо спостерігати наростаючі флуктуації, якщо уявна частина рівна нулеві будемо мати постійні в часі коливання , за інших умов будемо мати затухання. Рівняння (4.28) можна спростити, якщо врахувати що маса електрона набагато менше маси іонів ($m_e/m_i \to 0$). Тоді першим доданком у рівнянні (4.28) можна знехтувати. В результаті отримаємо

$$\omega = ku_0 \pm \omega_{pe}$$

Аналізувати рівняння дисперсії (4.28) можна і в загальному вигляді. Зручним способом для цього - графічне відображення (4.28) (рис. 4.3) Визначаємо праву частину (4.28), а графік $F(\omega, k)$ як функцію

$$F(\omega, k) = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku_0)^2} \tag{4.29}$$

На рис. 4.3 ордината - $F(\omega, k)$, а ω - абсциса. Функція $F(\omega, k)$ має сингулярність при $\omega = 0$ та $\omega = ku_0$. Лінія $F(\omega, k) = 1$ дає значення, що задовольняють дисперсійному співвідношенню. Рівняння (4.28) має чотири корені коли потоки стабільні, коли всі частоти дійсні (ліва діаграма). Із чотирьох коренів два можуть бути комплексними. Їх поява призводить до розвитку нестійкості. Це відбувається, наприклад, коли мінімальне значення $F(\omega, k) > 1$ (права діаграма). $F_{min}(\omega, k)$ визначається з (4.29), обчислюючи екстремум ($\partial F/\partial\omega = 0$).

$$\omega_{\min} \approx \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} ku_0 \tag{4.30}$$

При умові $\omega/ku_0 \gg 1$. Потім підставляючи (4.30) в (4.29) знайдемо

$$F_{\min}(\omega, k) \approx \frac{\omega_{pi}^2}{(m_e/m_i)^{2/3}} k^2 u_0^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_0^2}$$

Отже нестійкість буде мати місце за умови $|ku_0| < \omega_{pe}$. Це передбачає широкий діапазон нестійких хвильових чисел $-\omega_{pe}/u_0 < k < \omega_{pe}/u_0$.

4.2 Кінетичні нестійкості

При описі плазми за допомогою тієї чи іншої моделі основні рівняння можуть мати стаціонарні розв'язки, які не відповідають термодинамічній рівновазі. Так, наприклад, при кінетичному описі плазми стаціонарна функція розподілу може відрізнятися від максвеллівської, що може призводити до розвитку нестійкості.

Розглянемо випадок, коли в незбуреному стані плазми присутні потоки частинок. Більш точно, будемо вважати, що іони не рухаються і холодні, а електрони холодні і рухаються відносно іонів з різними швидкостями V_α. Іншими словами, будемо вважати, що функція розподілу іонів $F_i = n_i\delta(\vec{V})$, а функція розподілу електронів дорівнює $F_e \equiv \sum_\alpha F_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha \delta\left(\mathrm{V} - \mathrm{V}_\alpha\right)$ де сумовування йде по всіх групах електронів і передбачається, що $\sum_\alpha n_\alpha == n_i$. Оскільки тепер, крім напрямку хвильового вектора, є й інші виділені напрямки, а саме, напрямки потоків, то в дисперсійному рівнянні потрібно проводити інтегрування по поперечним (по відношенню до хвильового вектору k) швидкостям. Дисперсійне рівняння із кінетичної теорії плазми має вигляд

$$1-\frac{e^2}{\epsilon_0 m_e k^2}\sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{v}}{(\vec{k}\cdot\vec{v}-\omega)}\left(\vec{k}\cdot\frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{v}}\right)-\frac{e^2}{\epsilon_0 m_i k^2}\int_{(\vec{k}\cdot\vec{v}-\omega)}^{\infty}\frac{d^3\vec{v}}{\partial\vec{v}}\left(\vec{k}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial}\right)=0$$

Підставляючи в даний вираз наведені вище вирази для функцій розподілу іонів і електронів і проводячи інтегрування по частинах, отримаємо

$$1-\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\left(\vec{k}\cdot\vec{V}_\alpha-\omega\right)^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}=0 \qquad (4.31)$$

де ω_{pi}^2, $\omega_{p\alpha}^2$ - квадрати відповідних плазмових частот.

Оскільки ні $\omega = 0$ ні $\omega = \mathrm{k}\cdot\mathrm{V}_\alpha$ не є розв'язками дисперсійного рівняння (4.31), тому інтегрування по частинах з зазначеними функціями розподілу є правомірним.

4.2.1 Бунеманівська нестійкість

Нехай в незбуреному стані плазми присутній струм, пов'язаний з відносним рухом електронів та іонів, наприклад, нехай електрони рухаються щодо нерухомих (в даній системі координат) іонів зі швидкістю V. Такий незбурений стан виявляється нестійким по відношенню до генерації електростатичних хвиль. Це проявляється в тому, що корені дисперсійного рівняння (4.31), що визначають частоту коливань при заданому дійсному хвильовому числу, виявляються комплексними, тобто такі коливання експоненціально наростають з часом. Ця нестійкість була відкрита Бунеманом (Buneman, 1959) і носить його ім'я. У разі, коли всі електрони рухаються з однією швидкістю V, дисперсійне співвідношення (4.31) має вигляд

$$\omega^2\left(k_\parallel V-\omega\right)^2-\omega^2\omega_{pe}^2-\left(k_\parallel V-\omega\right)^2\omega_{pi}^2=0 \qquad (4.32)$$

де $k_\parallel$ - проекція хвильового вектора на напрямок швидкості потоку електронів. Дисперсійне співвідношення (4.32) є алгебраїчним рівнянням четвертого порядку, яке визначає можливі значення частот хвиль, що генеруються. Вводячи безрозмірну частоту $\Omega = \omega/\omega_{pe}$, перепишемо співвідношення (4.32) у вигляді

$$(\Omega-\iota-1)(\Omega-\iota+1)\Omega^2=\xi(\Omega-\iota)^2 \qquad (4.33)$$

Де

$$\iota = \frac{k_{\|} V}{\omega_{pe}}, \xi = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2}$$

Величина ι відіграє роль безрозмірного хвильового вектора в дисперсійному співвідношенні (4.33), яке також залежить від малого параметра ξ. Для кожного значення ι існує, очевидно, чотири (можливо комплексних) значення частоти Ω. При одночасній зміні знака ι і Ω, дисперсійне рівняння (4.33) не змінюється; іншими словами, корені рівняння є непарними функціями ι. Тому досить розглянути рівняння (4.33) для одного, наприклад, додатнього ι, а потім екстраполювати отримані розв'язки в область негативних ι. При цьому слід мати на увазі, що якщо при $\iota > 0$ то розв'язок має додатню уявну частину, тобто маємо нестійкість, тоді розвязок при $\iota < 0$ буде вже стійким.

Корені дисперсійного рівняння (4.33) (дійсні частини), що дають можливі хвильові моди коливань в плазмі, в якій електрони рухаються щодо іонів зі швидкістю V подано на рис.4.4. Для кожного значення k існує чотири, комплексних розв'язки дисперсійного рівняння. В області, де існує два дійсних і два комплексних розв'язки, останні є комплексно-спряженими і мають одне і те ж значення дійсної частини частоти.

Оскільки права частина рівняння (4.33) залишається малою, і множник $(\Omega - \iota + 1)\Omega^2$ в лівій частині рівняння не має ніяких особливостей при $\Omega = 1 + \iota$, то один з коренів рівняння лежить поблизу $1 + \iota$ і з точністю до квадратичних членів по ξ дорівнює

$$\Omega_1 = 1 + \iota + \frac{\xi}{2(1+\iota)^2}$$

Інші три кореня визначаються з рівняння

$$(\Omega - \iota + 1) \cdot \Omega^2 = \xi \frac{(\Omega - \iota)^2}{(\Omega - \iota - 1)} \tag{4.34}$$

причому, оскільки ці корені вже не рівні $1+\iota$, то права частина рівняння (4.34) знову є малою величиною. Тому корені цього рівняння лежать поблизу нулів множників в лівій частині, тобто поблизу $\Omega = 0$ і $\Omega = -1+\iota$. При цьому, особлива ситуація, яку слід розглянути окремо, виникає при $\iota \simeq 1$, коли ці корені збігаються. Для кореня, що лежить поблизу $-1 + \iota$ при $\iota \neq 1$ маємо

$$\Omega_2 = -1 + \iota - \frac{\xi}{2(1-\iota)^2}$$

а для коренів, що лежать поблизу нуля, але також за умови $\iota \neq 1$, з (4.34) отримаємо

$$\Omega_{3,4} = \pm \frac{\xi^{1/2} \iota}{\sqrt{\iota^2 - 1}}$$

При $|\iota| < 1$ ці корені чисто уявні, причому один з них відповідає експоненціальному наростанню збурень з інкрементом

$$\gamma = \omega_{pi}\frac{\iota}{\sqrt{1-\iota^2}}$$

Як було зазначено вище, випадок $\iota = 1$ є особливим, і його слід розглянути окремо. Як ми побачимо, в цьому випадку всі корені рівняння (4.34) задовольняють умові $|\Omega| \ll 1$, тому в правій частині рівняння, яка пропорційна малій величині ξ, ми можемо покласти $\Omega = 0$, що дає

$$\Omega^3 = -\frac{\xi}{2}$$

Це рівняння має один дійсний корінь

$$\widetilde{\Omega}_2 = -\frac{\xi^{1/3}}{2^{1/3}}$$

і два комплексно-спряжених корені

$$\widetilde{\Omega}_{3,4} = \frac{\xi^{1/3}}{2^{4/3}} \pm i\xi^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}}$$

один з яких (з позитивною уявною частиною) і відповідає нестійкості Бунемана (Рис.4.5).

4.2.2 Пучкова нестійкість

Розглянемо тепер випадок, коли іонна компонента плазми, як і в разі нестійкості Бунемана, утворює холодний нерухомий фон, а електронна компонента складається з двох частин: холодних нерухомих електронів з густиною n_c і холодного пучка малої густини n_b, що рухається зі швидкістю V_b. Так само, як і вище, обмежимося випадком електростатичних хвиль в однорідній ізотропній плазмі, дисперсійне співвідношення для яких задається рівнянням (4.31). При наявності пучка дане рівняння набуває вигляду

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{pc}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{(k_{\mathrm{I}}V_b - \omega)^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0 \qquad (4.35)$$

де введені позначення

$$k_{\|} = \vec{k}\cdot\vec{V}_b/V_b, \omega_{pc}^2 = \frac{n_c e^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad \omega_{pb}^2 = \frac{n_b e^2}{\epsilon_0 m_e}.$$

Ми будемо вважати густину пучка малою, а оскільки $n_c + n_b = n_i$, то $n_c \simeq n_i$. Крім того, обмежимося розглядом досить високих частот, які відповідають умові $\omega^2 \gg \omega_i^2$.

Тоді іонним доданком в рівнянні (4.35) можна знехтувати в порівнянні з електронним доданком. Слід зазначити, що хоча густина пучка передбачається малою, відповідним доданком в дисперсионном рівнянні знехтувати не можна, оскільки він перестає бути малим при $\omega \simeq k_{\parallel} V_b$. Опускаючи іонний член і вводячи безрозмірні величини

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{pc}}, \iota = \frac{k_1 V_b}{\omega_{pc}}, \eta = \frac{\omega_{pb}^2}{\omega_{pc}^2} \equiv \frac{n_b}{n_c}$$

Можна перерисати рівняння (4.35) у вигляді

$$(\Omega + 1)(\Omega - 1)(\Omega - \iota)^2 = \eta \Omega^2 \tag{4.36}$$

Аналіз розв'язків рівняння (4.36) аналогічний до виконаного вище аналізу для нестійкості Бунемана.

Корені рівняння (4.36) також є непарними функціями ι, тому достатньо розглянути тільки область $\iota > 0$. У цій області рівняння (4.36) має, очевидно, дійсний корінь, який лежить поблизу -1 і, з точністю до η^2, дорівнює

$$\Omega^{(1)} = -1 - \frac{\eta}{2(1+\iota)^2}$$

Решта коренів визначаються рівнянням, яке виходить після ділення (4.36) на $(\Omega + 1)$:

$$(\Omega - 1)(\Omega - \iota)^2 = \eta \frac{\Omega^2}{(\Omega + 1)}$$

В результаті отримаємо

$$\Omega^{(2)} = 1 + \frac{\eta}{2(1-\iota)^2}, \Omega^{(3,4)} = \iota \pm \frac{\eta^{1/2}\iota}{\sqrt{\iota^2 - 1}}$$

Одна з гілок коливань (третій розв'язок),є нестійкою. Її інкремент дорівнює

$$\frac{\gamma^{(3)}}{\omega_{pc}} = \frac{\omega_{pb}\iota}{\sqrt{1-\iota^2}}$$

Корені дисперсійного рівняння (4.36) (дійсні частини), що дають можливі хвильові моди коливань в плазмі в наявності пучка малої густини ($n_b/n_c = 0,01$) подано на рис.4.6, а частота (а) і інкремент (б) наростаючих хвиль в залежності від хвильового вектора для пучкової нестійкості на Рис.4.7.

4.2.3 Розривна (тірінг) нестійкість

Розривна нестійкість забезпечує механізм, завдяки якому магнітна енергія перетворюється на енергію частинок. Нестійкість режиму розриву вперше вивчали Коппі, Лаваль та Пелат (1966). Поштовхом для введення і аналізу цієї нестійкості послужило відкриття нейтрального шару в геомагнітному хвості (1965). Перед тим як аналізувати дану потрібно зупинитися на моделі струмового шару Харріса

Отже проблема зі струмовим шаром Харріса розпочалася з функції розподілу Максвелла з постійним дрейфом у напрямку струму. Для електронів чи іонів цей розподіл набуває вигляду

$$f_o = n_o \left(\frac{m_j}{2\pi\kappa T}\right) \exp\left(-\frac{mV}{2\kappa T^2}\right) \exp\left(-\frac{\epsilon}{\kappa T} + \frac{p_y V}{\kappa T}\right)$$

де V - постійний дрейф у напрямку струму, $\epsilon = mv^2/2$ - енергія, а $p_y = mv_y + qA_{ov}(z)$ - узагальнений імпульс. Ми припускаємо тут квазінейтральність і тому електростатичний потенціал рівний нулеві. В рамках моделі Харріса магнітне поле і концентрація задаються співвідношеннями:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \tanh z/\Delta$$

та

$$n(z) = \frac{n_o}{\cosh^2(z/\Delta)},$$

Де Δ - товщина струмового шару, а n_o - концентрація в центрі нейтрального шару. Припустимо, що струмовий шар може бути представлений струмовими «філаментами», рівномірно розподіленими уздовж шару. Нехай, невелике збурення змінює розподіл струму, в сусідніх шарах, але окремо від інших. Посилення та ослаблення локалізованих струмів можуть створювати магнітні вузли та нульові області. Цей перерозподіл струмів змінить початкову топологію магнітного поля і шар може стати нестійким. Нестійкість режиму розриву без зіткнень вважається актуальною для розуміння того, як в геомагнітному хвості під час суббурь відбуваються масштабні реконфігурації магнітного поля. Розглянемо збурення магнітного поля, представлене векторним потенціалом у формі

$$\delta A = A_y(z) \exp i(kx - \omega t)$$

Збурення векторного потенціалу задовольняє умові

$$\nabla^2 \delta\vec{A} = -q \int \vec{v} \delta f d^3\vec{v}$$

Електростатичний потенціал при цьому рівний нулеві за рахунок умови квазінейтральності

$$\phi = q \int \left(\delta f^+ - \delta f^-\right) d^3\vec{v} = 0$$

Розглянемо тепер плазму, що складається з одного сорту іонів та електронів. Лінеаризоване рівняння Больцмана для збуреної функції розподілу δf буде

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\delta f + \frac{q}{m}\left(\vec{v} \times \vec{B}_0\right) \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \vec{v}} = -\frac{q}{m_j}(\delta \vec{E} + \vec{v} \times \delta \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \quad (4.37)$$

де $\delta \vec{E} = -\partial \delta \vec{A}/\partial t$ і $\delta \vec{B} = \nabla \times \delta \vec{A}$. Праву частину (4.37) можна переписати з точки зору функції рівноважного розподілу. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\delta f + \frac{q}{m}\left(\vec{v} \times \vec{B}_0\right) \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \vec{v}} = \frac{q f_o}{\kappa T}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) V \delta A_y - \frac{\partial}{\partial t}\left(v_y \delta A_y\right)\right]$$

Галеєв і Зелений в 1976 році показали, що розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді інтеграла по траєкторіях частинок,

$$\delta f = \frac{q f_o}{\kappa T}\left(V \delta A_y + i\omega \int_{-\infty}^{t} v_v\left(t'\right) \delta A_y\left(x\left(t'\right), t'\right) dt'\right)$$

Перший доданок обумовлений адіабатичною зміною функції розподілу, а другий доданок виникає - завдяки не замагніченим частинкам, що рухаються в області нейтрального шару. Інтегрування по t' здійснюється вздовж орбіт частинок всередині та зовні нейтрального шару. Ці частинки можна розглядати як вільні частинки, що рухаються між двома ідеально відбиваючими стінками, при z = ± d, де d - половина товщини шару, де магнітне поле не впливає на рух частинок. Тоді інтегрування по часу може бути здійснене вздовж траєкторії $x = v_x t$. Після тривалих алгебраїчних перетворень можна отримати

$$\delta f = \frac{q f_0}{\kappa T}\left(V \delta A_y - \frac{\omega v_y \delta A_y}{\omega - k v_x}\right) = \delta f_{\text{adiahatic}} + \delta f_{\text{nonadiabatic}}$$

Розглянемо тепер енергетичний баланс між енергією коливання магнітного поля $|\delta \vec{B}|^2$ та дисипацією енергії струму $\delta \vec{j} \cdot \delta \vec{E}^*$в шарі Харріса,

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\int |\delta \vec{B}|^2 dz = -\int \delta \vec{j} \cdot \delta \vec{E}^* dz$$

Де * - позначає комплексну величину. Розглянемо праву частину рівняння для визначення адіабатичного внеску. Оскільки струм $\delta \vec{j} = \int q\vec{v}\delta f d^3\vec{v}$ і $\delta \vec{E} = -\partial \delta \vec{A}/\partial t$, то зміна енергії для адіабатичного процесу –

$$\int \delta j_y^{adiab} \delta E_y^* dz = -\frac{q^2 V^2}{2\kappa T}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{n(z)}{n(0)}|A(z)|^2 dz$$

Для розрахунку вкладу неадіабатичних процесів, зауважимо, що внесок будуть давати низькочастотні збурення. Для фазових швидкостей, значно менших, ніж теплова швидкість іонів буде виконуватися умова

$$\frac{1}{(\omega/k - v_y)} \approx P\left(1/v_x\right) + i\pi\delta\left(v_x\right)$$

де P – інтегрування в сенсі головного значення (виникає при виключенні сингулярності), а інший член - залишок. Тоді,

$$\int \delta j_y^{\text{nonadiab}}\, \delta E_y^* dz d^3\vec{v} = \frac{\pi q}{k\kappa T} \frac{\partial}{\partial t} \int f_o \delta(z) \left| \delta A_y \right| v_y \Big|^2 dz d^3\vec{v}$$

Зважаючи на це

$$\int \delta\vec{j} \cdot \delta\vec{E}^* dz = \frac{\pi}{k} \frac{q}{\kappa T} \frac{\partial}{\partial t} \int dz \int f_o \delta\left(v_x\right) \left(\delta A_y v_y\right)^2 d^3\vec{v} -$$

$$-\frac{q^2 V^2}{2\kappa T} \frac{\partial}{\partial t} \int dz \frac{n(z)}{n(0)} \left| \frac{\delta A_v}{\Delta} \right|^2$$

Перший доданок являє собою зміну кінетичної енергії для резонансних частинок, що містяться в області $|z| < \Delta$. Другий член представляє зміну через втрату макроскопічної кінетичної енергії решти частинок. Коппі, Лаваль та Пеллат показали, що для іонів кінетичний резонансний доданок менший, ніж для електронів (приблизно на квадратний корінь співвідношення гіро-радіусів електронів та іонів). Тому в кінцевий результат будуть включені лише електрони, а загальна енергія резонансних електронів при цьому буде дорівнювати

$$\frac{1}{\tau} \int dz \int f_v \delta\left(v_x\right) \left(\delta A_y v_y\right)^2 d^3 v =$$

$$= -\frac{k\kappa T_e}{2c^2} \int dz \left[\left| \frac{\partial \delta A_y}{\partial z} \right|^2 + \left| \delta A_y \right|^2 \left(k^2 - \frac{2}{\Delta^2 \cosh^2(z/\Delta)} \right) \right]$$

Хвильове число - k, а $1/\tau = -i\omega$ - швидкість наростання. Нестійкість розриву суттєво зростає і існує для довгохвильових довжин хвиль, для яких $k^2\Delta^2 < 1$. Швидкість зростання оцінюється приблизно

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\left(\Delta / r_{L_e}\right)^2 d_e}{v_{\text{th}}}$$

Де v_{th} - теплова швидкість іонів, $\Delta = 2\kappa\left(T_i + T_e\right)/qB_0\left(V_i - V_e\right), d_e = \sqrt{\left(r_L \Delta\right)}$, а r_L - середній гірорадіус частинок. Режим розриву передає вільну макроскопічну енергію резонансним електронам у товщині $d_c = \sqrt{\left(r_{Le}\Delta\right)}$, зосередженій навколо нейтрального шару. Нестійкість режиму розриву порушує стан вмороженості магнітного поля, оскільки він включає дисипативні процеси та генерування нових струмів. Використовуючи опубліковані дані вимірів в хвості магнітосфери Землі і зокрема в нейтральному шарі Коппі, Лаваль та Пеллат оцінили швидкість наростання даної нестійкості - менше 60 с.

5

Статистична теорія турбулентності

Величезний діапазон масштабів турбулентного руху в реальних природних течіях (наприклад, в океані розмір вихорів варіюється від тисяч кілометрів до часток міліметра) робить технічно неможливим прямі чисельні розрахунки задачі. Крім того, зрозуміло, що відтворювати всі деталі турбулентного потоку недоцільно, і можливі підходи до опису турбулентного руху, які дозволять знехтувати маломасштабною структурою потоку. Наприклад, можна застосувати до руху методи усереднення і отримати потоки "ламінарного типу тобто повільні і плавні, які можуть бути досліджені традиційними методами. Причому правила усреднення, застосовані до рівнянь гідродинаміки, повинні давати прості рівняння щодо середніх значень. Процедура усереднення з успіхом застосовується в гідродинамічних потоках (задачах із молекулярної фізики). Великий розрив між масштабами мікроскопічного і макроскопічного рухів дозволяє обґрунтувати застосовність такої процедури. У разі турбулентного руху ситуація виявляється більш складною. Відомо, що майже вся реальна турбулентність має безперервний спектр. Але процедура усереднення передбачає заздалегідь, що турбулентний рух може бути розбитий на повільний і швидкий. У зв'язку з цим, питання про усреднення і про правила обчислення середніх значень є «тонким» питанням теорії турбулентності.

Статистичні методи широко застосовуються в сучасній теорії турбулентності. Їх основи були закладені в другій широко відомій праці Осборна Рейнольдса [Reynolds, 1895]. Опис цих методів можна знайти в багатьох статтях і монографіях. Але найбільш детальний виклад статистичної теорії турбулентності міститься в двотомній монографії [Монін, Яглом, Т.1 - 1965, Т.2 - 1967].

5.1 Умови усереднення Рейнольдса

На практиці усереднення відбувається на кінцевиму проміжку часу або області простору. З математичної точки зору просторово-часове усереднення розглядається наступним чином:

$$\overline{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}},\mathrm{t})} = \int \iiint \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}-\vec{\xi},\mathrm{t}-\tau)\omega(\vec{\xi},\tau)\mathrm{d}\vec{\xi}\mathrm{d}\tau$$

$\omega(\vec{\xi},\tau)$ - вагова функція, рівна "0"за межами деякої кінцевої області простору-часу. Вагова функція вибирається так, що

$$\int \iiint \omega(\vec{\xi},\tau)d\vec{\xi}d\tau = 1.$$

Вважаючи що $\omega(\vec{\xi},\tau) = \omega(\vec{\xi})\delta(\tau)$ або $\omega(\vec{\xi},\tau) = \omega(\tau)\delta(\vec{\xi})$ переходимо до просторового або часового усереднення. Очевидно, що "середнє значення в даному випадку залежить від виду вагової функції. Як вибрати найкращу вагову функцію? Яке з цих "середніх значень"буде найкращим? Однозначної відповіді на ці питання не існує. Використання усереднення з ваговою функцією, звичайно, дуже зручне і зрозуміле, але призводить до складнощів при аналітичних розрахунках, крім того, для будь-якого завдання необхідно вирішувати питання про конкретний вид вагової функції. Тому логічно, що постало питання, що потрібно знайти якийсь інший, більш універсальний, підхід до усереднення. Найбільш перспективним і зручним тут виявляється теоретико-імовірнісний підхід, який трактує поля гідродинамічних величин в турбулентному потоці як випадкові поля. Перейдемо від розгляду одного турбулентного потоку до статистичної сукупності аналогічних потоків при однакових зовнішніх умовах. Важливою допомогою буде те, що при ламінарному обтіканні перешкоди у нас весь час реалізується однаковий потік!!! Але при турбулентному обтіканні кожен раз виникає нова картина, тому що малі збурення потоку неконтролюються змінами початкових і граничних умов.

Будемо вважати кожну з реалізацій поля швидкості, тиску, концентрації домішки і т.п. представником деякого безлічі реалізацій. Якщо зафіксувати початкові і граничні умови (з тим ступенем точності, на яку ми здатні) і багаторазово повторювати експеримент, то середнє арифметичне всіх реалізацій виявляється стійким, тобто воно слабо коливається щодо деякого середнього рівня. Наявність стійких середніх величин означає, що реалізується статистичний ансамбль. А отримане таким чином середнє значення будемо називати теоретико-ймовірнісним середнім значенням. Надалі введемо функцію густини ймовірності $\mathrm{p}(\mathrm{u})$, так що

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{u}_1 < \mathrm{u} < \mathrm{u}_2\right) = \int_{\mathrm{u}_1}^{\mathrm{u}_2} \mathrm{p}(\mathrm{u})\mathrm{du},$$

Де $\mathrm{P}(\mathrm{u}_1 < \mathrm{u} < \mathrm{u}_2)$ - ймовірність того, що в деякій заданій точці параметр u (наприклад, компонента швидкості течії) знаходиться у вказаних в інтегралі межах. Величини, що мають певну густину ймовірності, називаються випадковими величинами.

Теоретико-ймовірнісне середнє значення довільної величини, як відомо, дається формулою $\overline{\mathrm{u}} = \int \mathrm{up(u)du}$, а теоретико-ймовірнісне середнє значення довільної функції F від випадкової величини u визначається як $\overline{\mathrm{F(u)}} = \int \mathrm{F(u)p(u)du}$. Отже, з точки зору теорії ймовірностей, значення швидкості в точці турбулентного потоку являє собою випадкову величину, яка характеризується певним розподілом ймовірності.

Всі міркування, пророблені вище, стосувалися значення деякого параметра потоку (тиск, компонента швидкості і т.п.) у фіксованій точці в фіксований момент часу. Але можна говорити і про множину випадкових полів і будь-яке конкретно реалізоване в експерименті поле розглядати як одного «представника». Чим же замінюється в даному випадку щільність ймовірності?

У випадковому полі в будь-якій фіксованій точці M=(x, t) величина u(M) є випадковою величиною, отже, будь-якій точці M має місце своя густина ймовірності. Якщо ми розглянемо дві точки то існує двохпотокова функція густини ймовірності для якої

$$\mathrm{P}(\mathrm{u}_1 < \mathrm{u}_1(\mathrm{M}_1) < \mathrm{u}_1 + \mathrm{du}_1 \mathrm{u}_2 < \mathrm{u}_2(\mathrm{M}_2) < \mathrm{u}_2 + \mathrm{du}_2) =$$

$$= \mathrm{p}_{\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)\,\mathrm{du}_1\mathrm{du}_2$$

Якщо у нас N довільних точок простору-часу, то їм відповідає функція N змінних $\mathrm{P}_{\mathrm{M}_1}, \mathrm{M}_2, \ldots \mathrm{M}_\mathrm{N}$, яка є N-мірною густиною ймовірності. Два турбулентних потоки ми будемо вважати однаковими, якщо (одномірні і багатовимірні) густини ймовірності у них збігаються.

Наведемо основні властивості багатовимірної функцій густини ймовірності:

- $$\mathrm{p}_{\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots\mathrm{M}_\mathrm{N}} > 0$$

- $$\iiint\limits_{\mathrm{N}} \mathrm{p}_{M_1,M_2,\ldots M_\mathrm{N}} \mathrm{du}_1\mathrm{du}_2 \ldots \mathrm{du}_\mathrm{N} = 1$$

- Точки M_i можна змінювати в довільному порядку

- $$\mathrm{p}_{\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots\mathrm{M}_\mathrm{K}} = \iiint\limits_{\mathrm{N}} \mathrm{p}_{M_1\ldots M_K, M_{K+1}\ldots M_\mathrm{N}} \mathrm{du}_{K+1} \ldots \mathrm{du}_\mathrm{N}$$

Тепер середнє значення довільної функції може бути обчислено за формулою

$$\overline{F} = \iiint\limits_{N} F\left(u_1, \dots u_N\right) p_{M_1, M_N}\left(u_1, \dots u_N\right) du_1 \dots du_N. \qquad (5.1)$$

Оскільки ми припустили існування розподілів ймовірності для всіх гідродинамічних полів, то можна застосовувати апарат теорії ймовірностей. Однак, при такому підході відразу ж виникає питання про зіставлення висновків теорії з даними вимірювань. Згідно теоретико-ймовірнісного визначення, під середнім мається на увазі середнє значення як середнє, узяте по всіх можливих значеннях розглянутої величини. Тому для емпіричного визначення середніх значень зі значною точністю ми повинні були б мати результати дуже великого числа аналогічних дослідів. Т.ч. припущення про існування розподілів ймовірності саме по собі ще не знімає питання про законність використання в теорії турбулентності звичайних часових або просторових середніх, а лише змінює постановку питання. Тепер, замість дослідження окремих властивостей того чи іншого методу усереднення, ми повинні з'ясувати, наскільки близькі відповідні емпіричні середні до ймовірнісних середніх значень.

В статистичній фізиці Ви вже стикалися із тим що замінювали теоретичні "середні по ансамблю"(середні за сукупністю можливих станів системи) безпосередньо спостережуваними часовими (просторовими) середніми. Справедливість такої заміни може бути в деяких спеціальних випадках доведена строго (ергодична теорема Дж. Біркгофа), в інших випадках використовується ергодична гіпотеза (середні значення при необмеженому збільшенні інтервалу усереднення (простору і / або часу) сходяться до відповідних теоретичних середніх значеннь (Больцман, 1887 р.)).

При ламінарному потоці рівняння гідродинаміки дозволяють однозначно визначити значення всіх характеристик потоку в будь-який момент майбутнього за початковими значеннями полів (і граничним умовам). У турбулентному потоці значення початкових умов також будуть визначати за допомогою рівнянь гідродинаміки всі майбутні значення, але ці майбутні значення будуть істотно залежати від незначних неконтрольованих збурень початкових і граничних умов. І, крім того, будуть мати складний і заплутаний характер, тому точне визначення їх - це практично марна завдання, отже, рівняння гідродинаміки слід використовувати для дослідження відповідних розподілів ймовірності.

Приведемо ще декілька теоретико-ймовірносних понять які будуть корисні для подальшого розуміння матеріалу:

Моменти випадкових величин

$$B_{k_1,k_2,\dots N} = \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots\dots u_N^{k_N}} = \iiint\limits_{N} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots\dots u_N^{k_N} p\left(u_1, u_2, \dots u_N\right) du_1 du_2 \dots du_N$$

де $\mathrm{k_1, k_2, \ldots k_N}$ - цілі невід'ємні числа, $\sum \mathrm{k_i}$ - порядок моменту.

Центральні моменти (моменти відхилень величин від їх середніх значень)

$$\mathrm{b_{k_1,k_2,k_N}} = \overline{\mathrm{(u_1 - \overline{u}_1)^{k_1} (u_2 - \overline{u_2})^{k_2} \ldots (u_N - \overline{u_N})^{k_N}}}$$

Стаціонарні випадкові функції (процеси)

$$\mathrm{p_{t_1,t_2,\ldots,t_N} (u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{t_1+h,t_2+h,\ldots t_N+h} (u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{t_2-t_1,\ldots t_N-t_1} (u_1, u_2, \ldots u_N)}\,,$$

$$\overline{\mathrm{u(t)}} = \mathrm{u = const},$$

$$\mathrm{\widetilde{u}(t)} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \mathrm{u(t+\tau)d\tau \to \overline{u}(t), (T \to \infty)}\,.$$

Однорідні випадкові поля

$$\mathrm{p_{x_1,x_2,\ldots,x_N} (u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{x_1+h,x_2+h,\ldots x_N+h} (u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{x_2-x_1,\ldots x_N-x_1} (u_1, u_2, \ldots u_N)}\,,$$

Теоретико-ймовірнісні середні значення мають п'ять важливих властивостей, які в теорії турбулентності називаються умовами усереднення Рейнольдса:

- $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$,
- $\overline{\mathrm{a}f} = \mathrm{a}\overline{f}$, (при a= $const$),
- $\overline{\mathrm{a}} = \mathrm{a}$,
- $\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$,
- $\overline{\bar{f} g} = \bar{f}\bar{g}$.

Вводячи величину $f' = f - \bar{f}$, яку в подальшому будемо називати пульсацією, запишемо декілька очевидних, але дуже важливих наслідків умов осреднения Рейнольдса:

- $\overline{f'} = 0$,
- $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$,
- $\overline{\overline{f}\overline{g}} = \overline{f}\overline{g}$,
- $\overline{\overline{f} g'} = 0$

Умови усереднення Рейнольдса і наслідки з них використовуються для усереднення рівнянь гідро- та магнітогідродинаміки.

5.2 Система рівнянь Рейнольдса

Вище вже зазначалося, що складна структура гідродинамічних полів турбулентного потоку ставить під питання доцільність опису всіх тонкощів цієї структури при вирішенні практичних завдань. Тому далі ми будемо вивчати усереднені статистичні характеристики сукупності аналогічних течій, припускаючи, що всі гідродинамічні поля є випадковими полями, тобто існують відповідні багатовимірні (багатоточкові) густини ймовірності $p_{M_1, M_2, \ldots M_N}(u_1, u_2, \ldots u_N)$.

Крім того, ми будемо припускати, що існує статистичний ансамбль аналогічних течій, що характеризується певними безперервними розподілами ймовірності.

На практиці зазвичай використовуються не середні по ансамблю, а часові або просторові середні, отже, випадкові поля повинні задовольняти умовам ергодичної теореми, або слід прийняти ергодичного гіпотезу. Найважливіша і найпростіша статистична характеристика випадкового гідродинамічного поля - середнє значення u. Середнє в теорії турбулентності зазвичай позначають рисою зверху.

Величина $u' = u - \overline{u}$ називається пульсацією і позначається штрихом. Розкладання гідродинамічних полів на середні і пульсації - це основне в міркуваннях Рейнольдса. В принципі можна вважати, що просторові і часові турбулентні неоднорідності можуть мати як завгодно малі масштаби аж до довжини вільного пробігу молекул і часу між послідовними зіткненнями молекул. Але в разі малих масштабів використання макроскопічних рівнянь гідродинаміки було б незаконним. Насправді, турбулентні неоднорідності ніколи не мають настільки малих просторово-часових розмірів. На мікроскопічних масштабах витрати енергії на подолання сил в'язкого тертя стають такі великі, що саме існування таких рухів неможливо.

Мінімальні часові та просторові масштаби турбулентних пульсацій у всіх випадках на кілька порядків перевищують відповідні характеристики молекулярних рухів. Отже, на відстанях порядку турбулентних неоднорідностей все поля змінюються плавно, функції є диференційованими і, отже, застосування звичайних диференціальних рівнянь гідродинаміки цілком виправдано. Однак, безпосереднє використання цих рівнянь, як вже було встановлено раніше, неможливо через нестійкість, тобто існує залежність вигляду розв'язків від найдрібніших непідконтрольних деталей початкових умов. Це, однак, не означає, що рівняння гідродинаміки взагалі не можуть бути використані при вивченні турбулентності. В силу того, що індивідуальні реалізації гідродинамічних полів підпорядковуються рівнянням гідродинаміки, то, отже, і статистичні характеристики цих полів повинні бути пов'язані цілим рядом співвідношень.

При виведенні усереднених рівнянь, які називаються рівняннями Рейнольдса, будемо виходити з системи Нав'є-Стокса в припущенні нестисливої рідини.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}$$
$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

Швидкість течії рідини і тиск представимо у вигляді суми середнього [1] та флуктуаційного/пульсаційного доданку

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} + \vec{v}', p = \overline{p} + p'$$

При процедурі усереднення рівнянь будемо виходити з умов усереднення Рейнольдса і наслідків з них. Процедуру усереднення почнемо з рівняння неперервності.

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}} = 0$$

З огляду на, що середнє від пульсації дорівнює нулю, приходимо до рівняння нерозривності традиційного виду, але вже для середнього руху

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

або $\operatorname{div}\overline{\vec{v}} = 0$ Слід відмітити, що рівняння неперервності виконується і для пульсацій $\operatorname{div}\vec{v}' = 0$ оскільки $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\overline{\vec{v}} + \operatorname{div}\vec{v}' = 0$.

Виконаємо усереднення динамічного рівняння на прикладі x – вої компоненти рівняння Нав'є-Стокса

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} + v\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}^2}\right)$$

Підставимо в дане рівняння записані покомпонентно вирази для швидкості і тиску

$$\mathrm{u} = \bar{\mathrm{u}} + \mathrm{u}', \mathrm{v} = \bar{\mathrm{v}} + \mathrm{v}', \mathrm{w} = \overline{\mathrm{w}} + \mathrm{w}', \mathrm{p} = \bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p}'$$

і виконаємо операцію усереднення відповідно до умов Рейнольдса. При цьому використаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

[1] На практиці середня швидкість зазвичай розраховується за формулою

$$\overline{U}(x,t) = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} U\left(x, t+t'\right) dt'$$

де $2T$ - час усереднення, який повинен бути достатньо довгим, щоб згладити турбулентні коливання, але достатньо коротким, щоб не оцінити будь-яку «нав'язану» залежність від часу. Однак здебільшого ми розглянемо лише потоки, середня швидкість яких є постійною у часі.

Останній доданок при цьому стає рівним нулеві за рахунок нестискуваності середовища.

Далі послідовно застосуємо правила усереднення Рейнольдса і наслідки з них до нелінійного доданку. В результаті будемо мати

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{uu})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{uv})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{uw})}=\overline{\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{uu})}+\overline{\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{uv})}+\overline{\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{uw})}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\overline{\mathrm{uu}})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\overline{\mathrm{uv}})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\overline{\mathrm{uw}})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\overline{(\overline{\mathrm{u}}+\mathrm{u}')(\overline{\mathrm{u}}+\mathrm{u}')})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\overline{(\overline{\mathrm{u}}+\mathrm{u}')(\overline{\mathrm{v}}+\mathrm{v}')})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\overline{(\overline{\mathrm{u}}+\mathrm{u}')(\overline{\mathrm{w}}+\mathrm{w}')})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\overline{\overline{\mathrm{u}}\overline{\mathrm{u}}+2\overline{\mathrm{u}}\mathrm{u}'+\mathrm{u}'\mathrm{u}'})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\overline{\overline{\mathrm{u}}\overline{\mathrm{v}}+\overline{\mathrm{u}}\mathrm{v}'+\overline{\mathrm{v}}\mathrm{u}'+\mathrm{u}'\mathrm{v}'})+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\overline{\overline{\mathrm{u}}\overline{\mathrm{w}}+\overline{\mathrm{u}}\mathrm{w}'+\overline{\mathrm{w}}\mathrm{u}'+\mathrm{u}'\mathrm{w}'})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u}\overline{u}+\overline{u'u'})+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u}\overline{v}+\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u}\overline{w}+\overline{u'w'})$$

На останньому етапі викладок ми скористалися тим, що

$$\overline{\overline{u}u'}=\overline{\overline{u}v'}=\overline{\overline{v}u'}=\overline{\overline{u}w'}=\overline{\overline{w}u'}=0.$$

В результаті маємо:

$$\frac{\partial\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}}+\overline{\mathrm{u}}\frac{\partial\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}}+\overline{\mathrm{v}}\frac{\partial\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{y}}+\overline{\mathrm{w}}\frac{\partial\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{z}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\mathrm{p}}}{\partial \mathrm{x}}+v\left(\frac{\partial^2\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2\overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{z}^2}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\overline{\mathrm{u}'\mathrm{u}'})-\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\overline{\mathrm{u}'\mathrm{v}'})-\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\overline{\mathrm{u}'\mathrm{w}'})$$

У даному рівнянні з'явилися нові невідомі виду $\overline{\mathrm{u}'_i\mathrm{u}'_j}$, які називають моментами другого порядку. Корисно аналогічні операції провести в тензорних позначеннях. Нагадаємо, що тензорні позначення мають на увазі підсумовування по індексу що повторюється.

Рівняння Нав'є Стокса і рівняння неперервності в тензорних позначеннях набудуть вигляду

$$\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}}+\mathrm{u}_\alpha\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x_i}}+\nu\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left(\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}_\alpha}{\partial \mathrm{x}_\alpha}=0$$

Як це вже було показано вище, в силу того, що виконується рівняння нерозривності, має місце і наступне співвідношення:

$$\mathrm{u}_\alpha\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}(\mathrm{u_i}\mathrm{u}_\alpha)$$

Градієнт тиску представимо через символ Кронекера ($\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} p\delta_{i\alpha}$) і введемо тензор в'язких напруг для нестискуваного середовища[2]

$$\sigma_{ij} = \rho\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Для тензора в'язких напруг виконується співвідношення

$$\frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = \rho\nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) = \rho\nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right)$$

Тут враховано незалежність змішаної похідної від порядку диференціювання і рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0) = 0$$

Таким чином рівняння Нав'є-Стокса можна записати в наступному вигляді:

$$\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha} \left[\mathrm{u_i u}_\alpha + \frac{\mathrm{p}}{\rho}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - \frac{\sigma_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho} \right] = 0$$

Далі, користуючись правилами усереднення Рейнольдса, отримуємо:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\left(\overline{u_i} + u_i'\right)\left(\overline{u_j} + u_j'\right)} = \overline{u_i}\,\overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'}$$

У підсумку приходимо до системи рівнянь Рейнольдса в тензорних позначеннях

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha} \left[\overline{\mathrm{u_i}}\,\overline{\mathrm{u}_\alpha} + \overline{\mathrm{u_i' u_\alpha'}} + \frac{\overline{\mathrm{p}}}{\rho}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - \frac{\overline{\sigma}_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho} \right] = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\alpha}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = 0 \tag{5.3}$$

[2]Якщо розглянемо в якості конкретного прикладу постійний потік між нескінченними пластинами, які лежать паралельно площині (x_1, x_2). Потік відбувається виключно в напрямку x_1, а поле швидкості задається $\{U_1(x_2), 0, 0\}$. За цих обставин в рівняння руху зникає нелінійний доданок і рівняння приймає форму

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}$$

Зауважимо, що зникнення нелінійного доданку є загальною властивістю однонаправлених ламінарних потоків, і що в цій конкретній ситуації рівняння імпульсу описує баланс між градієнтом тиску та резистивними в'язкими напругами. Для цього випадку тензор вязких напруг можна записати як

$$\sigma_{12} = \rho\nu \frac{dU_1}{dx_2}$$

Це рівняння дає як визначення, так і спосіб вимірювання динамічної в'язкості $\mu = \rho\nu$. Фізично ефект в'язкості можна інтерпретувати як незворотний потік імпульсу в напрямку x_2.

Перше рівняння системи можемо переписати у вигляді

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1 \partial \overline{p}}{\rho \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha} - \overline{u_i' u_\alpha'}\right)$$

Величина $\tau_{\mathrm{ij}} = -\rho\overline{\mathrm{u_i' u_j'}}$ - тензор напруг Рейнольдса (тензор додаткових напруг). Ці напруги виникають через наявність турбулентних пульсацій і своїм походженням вони зобов'язані нелінійності рівнянь гідродинаміки. Слід ще зазначити, що якщо в вихідному рівнянні Нав'є-Стокса присутня якась зовнішня сила, яку можна уявити як суму середнього значення і пульсації, то в результаті процедури усереднення в рівнянні Рейнольдса також з'явиться додатковий член, що описує дію усередненої зовнішньої сили. Отримані рівняння Рейнольдса це рівняння балансу імпульсу усередненого руху, а напруги Рейнольдса, що входять у дане рівняння описують турбулентне перенесення цього імпульсу.

Схожі рівняння можуть бути отримані і для зміни інших параметрів системи які виникають в результаті руху середовища. Так для зміни температури можна записати рівняння:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}_\alpha \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = \chi \Delta \mathrm{T} \tag{5.4}$$

Де χ - коефіцієнт молекулярної температуропровідності. В загальному випадку – коефіцієнт дифузії досліджуваного параметра. Виконуємо традиційне для теорії турбулентності наближення $\mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}} + \mathrm{T}'$, $\mathrm{u} = \overline{\mathrm{u}} + \mathrm{u}'$ Далі перетворимо другий доданок

$$\mathrm{u}_\alpha \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}(\mathrm{T}\mathrm{u}_\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}(\mathrm{T}\mathrm{u}_\alpha) = \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} + \mathrm{T}\underbrace{\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}\right)}_{=\mathrm{div}\vec{v}=0}$$

Усереднення рівняння (5.4) дає рівняння переносу, в нашому випадку температури, в турбулентному потоці

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{t}} + \overline{\mathrm{u}_\alpha}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = \chi \Delta \overline{\mathrm{T}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}(\overline{\mathrm{u}_\alpha' \mathrm{T}'}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left(\chi \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} - \overline{\mathrm{u}_\alpha' \mathrm{T}'}\right) \tag{5.5}$$

Де $\overline{\mathrm{u}_\alpha' \mathrm{T}'}$ - турбулентний потік.

Система рівнянь Рейнольдса є незамкненою, оскільки число рівнянь менше, ніж число невідомих функцій. Ми маємо систему із 4-х рівнянь для десяти невідомих функцій!!!

Незамкнутість системи Рейнольдса - це «розплата» за перехід до середніх значень. Для замикання системи отримують динамічні рівняння на величини $\overline{\mathrm{u_i' u_j'}}$. Для цього використовується метод Фрідмана-Келлера.

Суть даного методу полягає в наступному. На першому етапі до шуканої величини $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i' u_j'})$ застосовуються стандартні правила диференціювання в поєднанні з правилами усереднення Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i' u_j'}) = \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial t} u_j'} + \overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial t}} \tag{5.6}$$

На другому етапі, згідно з визначенням, пульсація під знаком похідної за часом виражається через повну і середню швидкість

$$\frac{\partial \mathrm{u_i'}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \overline{\mathrm{u}}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{t}} \tag{5.7}$$

Перший доданок в правій частині (5.7) прямо виражається із рівняння Нав'є-Стокса, а другий - з рівняння Рейнольдса. Останній і найбільш громіздкий етап полягає в множенні отриманого результату на пульсацію швидкості (5.6) з подальшим виконанням процедури усереднення.

При цьому отримуються рівняння для моментів другого порядку, але вони містять нові невідомі функції - моменти другого і третього порядку! Для цих нових невідомих функцій знову можна скористатися методом Фрідмана-Келлера і скласти еволюційні рівняння, але в них, зрозуміло, виникнуть нові невідомі - моменти вищого порядку [3]. У загальному випадку в еволюційне рівняння для моменту порядку N будуть завжди входити моменти N + 1 порядку. Причому з ростом порядку моменту N

[3] Ми можемо дати загальне (досить спрощене) пояснення цьому питанню. Перепишемо рівняння Нав'є-Стокса в символічному представленні:

$$L_0 U = L_1 U U + L_2 P$$

де L_0, L_1 і L_2 - означають відповідні диференціальні оператори, і ми тимчасово «опустили» тензорні показники для простоти. Тепер усереднимо кожен доданок, щоб отримати рівняння для середньої швидкості:

$$L_0 \overline{U} = L_1 \overline{UU} + L_2 \overline{P}$$

На цьому етапі слід зазначити, що P пов'язаний з U через рівняння неперервності. Таким чином розв'язок для $\overline{U}$ залежить (в принципі) лише від моменту другого порядку $\overline{UU}$. Рівняння для $\overline{UU}$ легко отримується шляхом множення кожного доданку рівняння Нав'є-Стокса на U, а потім усереднення:

$$L_0 \overline{UU} = L_1 \overline{UUU} + L_2 \overline{UP}$$

Множення по черзі на UU, UUU, ..., перед усередненням формує ієрархію рівнянь моменту

$$L_0 \overline{UUU} = L_1 \overline{UUUU} + L_2 \overline{UUP}$$
$$L_0 \overline{UUUU} = L_1 \overline{UUUUU} + L_2 \overline{UUUP}$$

і так далі.

Тобто тепер у нас є відкритий набір n рівнянь для n + 1 моментів. Проблему закриття ієрархії моментів зазвичай називають «проблемою закриття» і є основою проблеми теорії турбулентності.

що знаходимо розрив між числом невідомих і числом рівнянь буде тільки збільшуватися. Проте, складання таких рівнянь представляє певний інтерес, тому що дозволяє зробити ряд якісних висновків про властивості турбулентних течій. Особливо корисним виявляється рівняння балансу турбулентної енергії, що описує зміну густини кінетичної енергії пульсаційного руху.

5.2.1 Рівняння для густини кінетичної енергії в потоці нестисливої рідини

У цьому параграфі буде отримано рівняння для густини кінетичної енергії в потоці нестисливої рідини. Для цього буде використано рівняння Нав'є Стокса

$$\frac{\partial \rho \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\rho \mathrm{u_i u_\alpha} + \mathrm{p}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - \sigma_{\mathrm{i}\alpha}\right] = 0 \tag{5.8}$$

Та метод Фрідмана-Келлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{u_i u_j} = \rho \mathrm{u_i}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{t}} + \rho \mathrm{u_j}\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}} \tag{5.9}$$

При цьому, в якості компонент швидкості у формулі (5.9), можуть, з однаковим успіхом виступати, повні швидкості, пульсації або середні значення. Для початку, використовуючи рівняння Нав'є-Стокса (5.8) і формулу (5.9), отримаємо еволюційне рівняння для величини $\rho \mathrm{u_i u_j}$. При виведенні рівняння ми використовуємо наступну тотожність

$$\mathrm{u_j}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\mathrm{F}_{\mathrm{i}\alpha} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left(\mathrm{u_j F_{i\alpha}}\right) - \mathrm{F}_{\mathrm{i}\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}$$

Отже, для першого доданка у правій частині формули (5.9) отримуємо

$$\rho \mathrm{u_i}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\rho \mathrm{u_i u_j u_\alpha} + \mathrm{p u_i}\delta_{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{u_i}\sigma_{\mathrm{j}\alpha}\right] =$$
$$= \rho \mathrm{u_j u_\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} + \mathrm{p}\delta_{\mathrm{j}\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} - \sigma_{\mathrm{j}\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} \tag{5.10}$$

Для другого доданка отримаємо аналогічне рівняння

$$\rho \mathrm{u_j}\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\rho \mathrm{u_j u_i u_\alpha} + \mathrm{p u_j}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{u_j}\sigma_{\mathrm{i}\alpha}\right] =$$
$$= \rho \mathrm{u_i u_\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} + \mathrm{p}\delta_{\mathrm{i}\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} - \sigma_{\mathrm{i}\alpha}\frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} \tag{5.11}$$

Додаючи (5.10) і (5.11), отримуємо шукане еволюційне рівняння для $\rho \mathrm{u_i u_j}$:

$$\frac{\partial \rho \mathrm{u_i u_j}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[2\rho \mathrm{u_i u_j u_\alpha} + \mathrm{p}\left(\mathrm{u_i}\delta_{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{u_j}\delta_{\mathrm{i}\alpha}\right) - \left(\mathrm{u_i}\sigma_{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{u_j}\sigma_{\mathrm{i}\alpha}\right)\right] =$$

$$= \rho u_\alpha \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \right) + p \left(\delta_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \delta_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \right) - \left(\sigma_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \right) \tag{5.12}$$

Перетворимо перший доданок в правій частині рівняння (5.12)

$$\rho u_\alpha \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \right) = \rho u_\alpha \frac{\partial \left(u_i u_j \right)}{\partial x_\alpha}$$

і внесемо компоненту швидкості u_α під знак похідної (остання операція правомірна в силу рівняння нерозривності).

Тепер нескладно помітити, що перший член в правій частині рівняння (5.12) дорівнює половині другого члена лівій частині, отже, в результаті взаємного знищення зникає множник "2"і перший доданок правої частини. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho u_i u_j u_\alpha + p \left(u_i \delta_{j\alpha} + u_j \delta_{i\alpha} \right) - \left(u_i \sigma_{j\alpha} + u_j \sigma_{i\alpha} \right) \right] =$$

$$= p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \left(\sigma_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \right) \tag{5.13}$$

Із рівняння (5.13) можна отримати рівняння для густини кінетичної енергії

$$E = \rho u_\beta u_\beta / 2$$

Для цього формально слід покласти $i = j \equiv \beta$ і підсумувати по новим повторюваним індексам β. Фактично ця процедура означає, що з 9 формально існуючих рівнянь (5.13) ми вибираємо 3 рівняння і додаємо їх.

$$\frac{\partial 2E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[2E u_\alpha + 2p u_\beta \delta_{p\alpha} - 2u_\beta \sigma_{\beta\alpha} \right] = 2p \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} - 2\sigma_{\beta\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{5.14}$$

З огляду на, те що $u_\beta \delta_{\beta\alpha} = u_\alpha$ і $\partial u_\beta / \partial x_\beta = 0$ остаточно отримаємо

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[E u_\alpha + p u_\alpha - u_\beta \sigma_{\beta\alpha} \right] = -\sigma_{\beta\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \equiv -\rho\varepsilon \tag{5.15}$$

де $\rho\varepsilon$ - питома (на одиницю часу і об'єму) дисипація кінетичної енергії. В результаті перетворень

$$\rho\varepsilon = \sigma_{\beta\alpha} \frac{\partial u_p}{\partial x_\alpha} = \rho\nu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} =$$

$$= \frac{\rho\nu}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = \frac{\rho\nu}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2 \tag{5.16}$$

отримуємо, що знак доданка, що описує дисипацію енергії, строго визначений. Через диссипацію (перехід в тепло) енергія потоку завжди зменшується. Інші доданки рівняння (5.15) також мають простий фізичний зміст. Доданок $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}[\mathrm{Eu}_\alpha]$ описує адвективне перенесення енергії потоком, доданок $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}[\mathrm{pu}_\alpha]$ - роботу сил тиску, а доданок $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[-u_\beta \sigma_{\beta\alpha}]$ - роботу сил в'язкого тертя.

5.2.2 Рівняння для компонент тензора Рейнольдса і рівняння балансу турбулентної енергії

Тепер отримаємо рівняння на компоненти тензора Рейнольдса $\rho\overline{u_i' u_j'}$. Із формули $\overline{\mathrm{u_i u_j}} = \overline{\mathrm{u_i}}\ \overline{\mathrm{u_j}} + \overline{\mathrm{u_i' u_j'}}$ отримаємо

$$\frac{\partial \rho \overline{\mathrm{u_i' u_j'}}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial \rho \overline{\mathrm{u_i u_j}}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \rho \overline{\mathrm{u_i}}\overline{\mathrm{u_j}}}{\partial \mathrm{t}} = \overline{\frac{\partial \rho \mathrm{u_i u_j}}{\partial \mathrm{t}}} - \frac{\partial \rho \overline{\mathrm{u_i}}\overline{\mathrm{u_j}}}{\partial \mathrm{t}} \tag{5.17}$$

Величина $\frac{\partial \rho \mathrm{u_i u_j}}{\partial \mathrm{t}}$ з (5.17) визначається вже отриманим в попередньому пункті рівнянням (5.13). Для отримання шуканого рівняння нам ще необхідно знати величину $\partial \rho \overline{\mathrm{u_i}}\ \overline{\mathrm{u_j}}/\partial t$. Оскільки тепер мова йде про середній рух, то потрібно виходити із рівнянь Рейнольдса

$$\frac{\partial \rho \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho \overline{u_i}\cdot\overline{u_\alpha} + \rho\overline{u_i' u_\alpha'} + \overline{p}\delta_{i\alpha} - \overline{\sigma_{i\alpha}}\right] = 0 \tag{5.18}$$

вид якого практично аналогічний рівнянню Нав'є-Стокса. При отриманні рівняння (5.13) ми неодноразово користувалися рівнянням неперервності для повної швидкості. І оскільки рівняння неперервності виконується і для середнього потоку, то ми можемо отримати дані рівняння формальною заміною $\mathrm{u_i} \to \overline{\mathrm{u_i}}$. При цьому, слід врахувати член, що описує напруги Рейнольдса.

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho \overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_\alpha} + \overline{p}\left(\overline{u}_i\delta_{j\alpha} + \overline{u}_j\delta_{i\alpha}\right) - \left(\overline{u}_i\,\overline{\sigma}_{j\alpha} + \overline{u}_j\,\overline{\sigma}_{i\alpha}\right)\right) \\ \left. + \rho\overline{\mathrm{u_i' u_\alpha'}}\overline{\mathrm{u_j}} + \rho\overline{\mathrm{u_j' u_\alpha'}}\overline{\mathrm{u_i}}\right] = \\ = \overline{p}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \left(\overline{\sigma_{i\alpha}}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\sigma_{j\alpha}}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right) \\ + \left(\rho\overline{\mathrm{u_i' u_\alpha'}}\frac{\partial \overline{\mathrm{u_j}}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} + \rho\overline{\mathrm{u_j' u_\alpha'}}\frac{\partial \overline{\mathrm{u_i}}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\right)\end{gathered} \tag{5.19}$$

Для густини кінетичної енергії усередненого руху $E_s = \frac{1}{2}\rho\overline{u_\beta}\,\overline{u_\beta}$ із (5.19) отримуємо таке рівняння:

$$\frac{\partial \mathrm{E_s}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\mathrm{E_s}\overline{\mathrm{u}_\alpha} + \overline{\mathrm{p}}\,\overline{\mathrm{u}_\alpha} - \overline{\mathrm{u}_\beta}\,\overline{\sigma_{\beta\alpha}} + \rho\overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta}\overline{\mathrm{u}_\beta}\right] = -\rho\varepsilon_\mathrm{s} + \rho\overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta}\frac{\partial\overline{\mathrm{u_p}}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = \tag{5.20}$$

де

$$\rho\varepsilon_\mathrm{s} = \overline{\sigma_{\beta\alpha}}\frac{\partial\overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = \frac{\rho v}{2}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\overline{\mathrm{u}_\alpha}}{\partial \mathrm{x}_\beta} + \frac{\partial\overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\right)^2$$

- питома диссипация енергії усередненого руху під дією молекулярної в'язкості. Доданок $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}[\rho\overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta}\overline{\mathrm{u}_\beta}]$ описує роботу турбулентних напруг. Інші члени в лівій частині мають такий же зміст, як відповідні члени рівняння (5.15). Далі, для визначення величини $\frac{\partial\rho\overline{u_i u_j}}{\partial t}$, усереднимо рівняння (5.13). Для цього перетворимо перший доданок в квадратних дужках

$$\overline{\mathrm{u_i u_j u_\alpha}} = \overline{\left(\overline{\mathrm{u_i}} + \mathrm{u'_i}\right)\left(\overline{\mathrm{u_j}} + \mathrm{u'_j}\right)\left(\overline{\mathrm{u}_\alpha} + \mathrm{u}'_\alpha\right)} =$$

$$= \overline{\left(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i}u'_j + \overline{u_j}u'_i + u'_i u'_j\right)\left(\overline{u_\alpha} + u'_\alpha\right)} =$$

$$= \overline{\overline{\mathrm{u_i u_j u_\alpha}} + \overline{\mathrm{u_i u_\alpha}}\mathrm{u'_j} + \overline{\mathrm{u_j u_\alpha}}\mathrm{u'_i} + \overline{\mathrm{u}_\alpha}\mathrm{u'_i u'_j} + \overline{\mathrm{u_i u_j}}\mathrm{u}'_\alpha + \overline{\mathrm{u_i}}\mathrm{u'_j u'_\alpha} + \overline{\mathrm{u_j}}\mathrm{u'_i u'_\alpha} + \mathrm{u'_i u' u'_\alpha}} =$$

$$= \overline{\mathrm{u_i u_j u_\alpha}} + \overline{\mathrm{u_\alpha u'_i u'_j}} + \overline{\mathrm{u_i u'_j u'_\alpha}} + \overline{\mathrm{u_j u'_i u'_\alpha}} + \overline{\mathrm{u'_i u' u'_\alpha}} \tag{5.21}$$

Використовуючи правила усереднення Рейнольдса з рівняння (5.13) отримуємо

$$\frac{\partial\rho\overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_a}[\overline{u_i u_j u_a} + \overline{\rho u_a u'_i u'_j} + \overline{\rho u_i u'_j u'_\alpha} + \overline{\rho u_j u'_i u'_\alpha} + \overline{\rho u'_i u' u'_\alpha} +$$

$$+ \overline{\mathrm{pu_i}}\delta_{\mathrm{j}\alpha} + \overline{\mathrm{pu_j}}\delta_{\mathrm{i}\alpha} + \overline{\mathrm{p'u'_i}}\delta_{\mathrm{j}\alpha} + \overline{\mathrm{p'u'_j}}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - (\overline{\mathrm{u_i}\sigma_{\mathrm{j}\alpha}} + \overline{\mathrm{u_j}\sigma_{\mathrm{i}\alpha}} + \overline{\mathrm{u'_i}\sigma'_{\mathrm{j}\alpha}} + \overline{\mathrm{u'_j}\sigma'_{\mathrm{i}\alpha}})\Big] =$$

$$= \left(\overline{p}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{p}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} + \overline{p'\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{p'\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}\right) - \left(\overline{\sigma_{ja}}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_a} + \overline{\sigma_{i\alpha}}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_a} + \overline{\sigma'_{ja}\frac{\partial u'_i}{\partial x_a}} + \overline{\sigma'_{ia}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}}\right) \tag{5.22}$$

Використовуючи записані вище співвідношення можемо отримати компоненти тензора напруг Рейнольдса:

$$\frac{\partial\rho\overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left[\rho\overline{u'_i u'_j}\overline{u_a} + \rho\overline{u'_i u'_j u'_a} + \left(\overline{p' u'_i}\delta_{j\alpha} + \overline{p' u'_j}\delta_{i\alpha}\right) - (\overline{u'_i\sigma'_{j\alpha}} + \overline{u'_j\sigma'_{i\alpha}})\right] =$$

$$= \overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} - (\overline{\sigma'_{i\alpha}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}} + \overline{\sigma'_{j\alpha}\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}}) - \left(\rho\overline{u'_i u'_\alpha}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_\alpha} + \rho\overline{u'_j u'_\alpha}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right) \quad (5.23)$$

Рівняння (5.23), крім середньої швидкості і напруг Рейнольдса, містить цілий ряд нових невідомих: треті центральні моменти $\rho\overline{u'_i u'_j u'_\alpha}$, взаємні моменти тиску і швидкості $\overline{p'u'_i}$ і $\overline{p'\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$ та другі моменти пульсації швидкості, що входять до виразів $\overline{u'_i\sigma'_{j\alpha}}$ і $\overline{\sigma'_{i\alpha}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}}$.

Тут слід ще раз підкреслити, що рівняння Рейнольдса, навіть будучи доповненими рівняннями для напруг Рейнольдса (5.23), не утворюють замкнутої системи і, отже, не можуть бути вирішені без будь-яких додаткових припущень.

З рівняння (5.23) після підсумовування по $i = j \equiv \beta$ отримуємо рівняння для середньої густини кінетичної енергії пульсаційного руху $E_t = \rho\overline{u'_\beta u'_\beta}/2$.

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_t\overline{u_\alpha} + \frac{1}{2}\rho\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{p'u'_\alpha} - \overline{u'_\beta\sigma'_{\alpha\beta}}\right] =$$

$$= -\rho\overline{\varepsilon_t} - \rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha} \quad (5.24)$$

де

$$\rho\overline{\varepsilon_t} = \overline{\sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{\rho\nu}{2}\sum_{\alpha\beta}\overline{\left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2}$$

- середня питома диссипация енергії пульсаційного руху під дією в'язкості.

У лівій частині рівняння (5.24) в квадратних дужках стоїть густина потоку турбулентної енергії, пов'язана з адвективним перенесенням, турбулентною в'язкістю (тобто пульсаційної компонентою швидкості), пульсаціями тиску і молекулярної в'язкістю. Доданок, що входить в праву частину рівнянь (5.20) і (5.24) з різними знаками $\rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha}$, описує взаємні перетворення енергії усередненого і пульсаційного рухів.

Рівняння балансу турбулентної енергії доповнює рівняння Рейнольдса, тому що встановлює нові додаткові зв'язки між статистичними характеристиками турбулентності. Воно, звичайно, містить нові невідомі, але фізичний сенс складових цього рівняння досить очевидний, і це полегшує спроби виразити їх через більш прості характеристики.

6

Замикання рівнянь Рейнольдса: підходи та теорії

У першому розділі була виведена система рівнянь Рейнольдса, що встановлює зв'язок між статистичними характеристиками турбулентності. В силу того, що число рівнянь в цій системі менше числа невідомих функцій, система виявляється незамкненою, і, отже, вона не може бути вирішена без введення додаткових зв'язків (рівнянь). Спроби отримати додаткові зв'язки, використовуючи метод Фрідмана-Келлера і складаючи рівняння для компонент тензора Рейнольдса або для моментів більш високого порядку, не вирішують проблему незамкнутості: розрив між числом невідомих функцій і числом рівнянь тільки збільшується. Звідси випливає висновок, що відсутні зв'язки повинні бути задані незалежно від рівнянь Рейнольдса. У деяких випадках додаткові зв'язки можуть бути визначені за допомогою теорії розмірності з точністю до емпіричних констант. Найчастіше, однак, теорія розмірності призводить до співвідношень, що містить невідомі функції або константи, які знову ж таки необхідно визначати експериментально. Цей факт завжди стимулював дослідників до пошуку універсальних зв'язків, які можуть бути застосовані до багатьох потоків. У цьому розділі будуть розглянуті основні підходи до замикання системи рівнянь Рейнольдса і, попутно, викладені необхідні фундаментальні теоретичні уявлення про гідродинамічну та магнітогідродинамічну турбулентність, а також основні експериментальні результати дослідження турбулентних течій.

Детальніше можна із матеріалом можна ознайомитися [Монін, Яглом, 1965; Фрік, 1998 ч1,ч2; Frisch,1995].

6.1 Підходи в теорії турбулентності

Найпростіший шлях замикання рівнянь Рейнольдса полягає у встановленні зв'язків між напруженнями Рейнольдса і усередненими полями.

Для наочності розглянемо плоскопаралельний турбулентний потік, в якому середня швидкість має єдину відмінну від нуля компоненту $\overline{\vec{v}} = (\overline{u}(z), 0, 0)$, а пульсації швидкості - дві компоненти $\vec{v}' = (u'(x,z,t), 0, w'(x,z,t))$. В такому випадку єдине, з чим можна пов'язати турбулентні напруги - це профіль швидкості середньої течії ($\overline{u}(z)$. Користуючись аналогією з молекулярним перенесенням імпульсу, який визначається коефіцієнтом в'язкості, Буссінеск висунув припущення про існування коефіцієнта турбулентної в'язкості K [Boussinesq, 1897]. Права частина рівняння Рейнольдса для перенесення імпульсу дійсно має вигляд, який сам по собі наводить на можливість такого нововведення

$$\rho\frac{d}{dz}\left(\nu\frac{d\overline{u}}{dz} - \overline{u'w'}\right) = \rho\frac{d}{dz}\left([\nu + K]\frac{d\overline{u}}{dz}\right), \tag{6.1}$$

де $K = -\rho\overline{u'w'}/\rho\frac{d\overline{u}}{dz}$

Аналогічно можна ввести і коефіцієнт турбулентної дифузії K_θ

$$\frac{d}{dz}\left(\chi\frac{d\overline{\theta}}{dz} - \overline{w'\theta'}\right) = \frac{d}{dz}\left([\chi + K_\theta]\frac{d\overline{\theta}}{dz}\right), \tag{6.2}$$

де $K_\theta = -\overline{w'\theta'}/\frac{d\overline{\theta}}{dz}$

Зауважимо, що насправді співвідношення (6.1) і (6.2), звичайно, не вирішують проблему замикання, а тільки замінюють одні невідомі функції $\overline{u'w'}$ і $\overline{w'\theta'}$ іншими невідомими функціями - коефіцієнтами турбулентної в'язкості і дифузії. Причому на відміну від молекулярних коефіцієнтів, турбулентні коефіцієнти характеризують не фізичні властивості рідини або газу, а статистичні властивості турбулентного руху, отже, вони зовсім не зобов'язані бути постійними величинами. Як правило, дані коефіцієнти залежать від просторових координат і часу. Крім того, далеко від стінок їх значення суттєво перевищують відповідні молекулярні характеристики: $K >> \nu$, $K_\theta >> \chi$.

Вирішити проблему замикання – в даному конкретному випадку - можна, якщо припустити, що коефіцієнт турбулентності залежить від координат певним чином. При цьому ми приходимо до напівемпіричної теорії, заснованої на гіпотезі, яка в подальшому може бути перевірена на експерименті.

В якості найбільш простого припущення можна прийняти K=const. Фактично дане припущення еквівалентно введеню нового значення в'язкості, яке, як ми вже відзначали вище, значно перевершує молекулярний коефіцієнт. Зауважимо, що при наближенні до твердої непроникної поверхні припущення K=const, не відповідає дійсності оскільки зазвичай використовують умову що він буде прямувати до нуля.

Інший «більш складний» варіант залежності має вигляд $K(z) = \alpha z$, де α - константа, а z - відстань від стінки/границі (ми розглядаємо область не надто близьку до стінки/границі, де дія сил в'язкості не є визначальною).

Таке припущення узгоджується з теорією розмірностей і має експериментальне підтвердження. Існують, звичайно, і інші види залежностей $\mathrm{K(z)}$.

На практиці досить часто використовують напівемпіричну теорію, що була запропонована Джефрі Інграмом Тейлором [Taylor, 1932]. Теорія базується на понятті шляху перемішування для вихору швидкості. При цьому використана теорема Томсона - циркуляція швидкості для нев'язкої рідини зберігається. Нагадаємо, що турбулентний рух відбувається при великих числах Рейнольдса, такий розгляд еквівалентний нехтуванню малою в'язкостю. Як і раніше будемо розглядати плоскопаралельний турбулентний потік. Формула для вихору плоского руху буде мати вигляд

$$\omega_{\mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}}$$

В даному потоці дві інші компоненти вихору будуть рівні нулеві. Крім того, відразу зауважимо, що в силу того, що $\overline{\mathrm{w}} = 0$, для вихору середнього руху маємо формулу: $\overline{\omega_{\mathrm{y}}} = \frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{z}}$

Знайдемо похідну по координаті z від компоненти тензора Рейнольдса

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\overline{\mathrm{u}'\mathrm{w}'}) = \overline{-\mathrm{u}'\frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \mathrm{z}} - \mathrm{w}'\frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \mathrm{z}}} \tag{6.3}$$

З плоского рівняння нерозривності для пульсацій $\partial\mathrm{u}'/\partial\mathrm{x}+\partial\mathrm{w}'/\partial\mathrm{z} = 0$ знайдемо величину $\partial\mathrm{w}'/\partial\mathrm{z}$ і підставимо її в вираз (6.3). Крім того, додамо до правої частини виразу (6.3) і, для дотримання рівності, одночасно віднімемо величину $\overline{\mathrm{w}'\frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \mathrm{x}}}$. Схема перетворень має такий вигляд:

$$\overline{-\mathrm{u}'\frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \mathrm{z}} - \mathrm{w}'\frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \mathrm{z}}} = \overline{\mathrm{u}'\frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{w}'\frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \mathrm{z}} + \mathrm{w}'\frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{w}'\frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \mathrm{x}}} =$$

$$= \overline{-\mathrm{w}'\left(\frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{u}'^2 - \mathrm{w}'^2\right)} = -\overline{\mathrm{w}'\omega_{\mathrm{y}}'} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\overline{\mathrm{u}'^2} - \overline{\mathrm{w}'^2}) \tag{6.4}$$

В силу того, що середні показники потоку не залежать від поздовжньої координати, похідна по x від середніх величин в (6.4) дорівнює нулю. Остаточно отримуємо

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\rho\overline{\mathrm{w}'\omega_{\mathrm{y}}'}. \tag{6.5}$$

Використовуючи поняття шляху перемішування для вихору а також означення вихору будемо мати

$$\omega_{\mathrm{y}}' = l_1' \frac{\partial \overline{\omega_y}}{\partial \mathrm{z}} = l_1' \frac{\mathrm{d}^2\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}^2}$$

Для подальшого аналізу робиться припущення, що пульсації поздовжньої і поперечної швидкості мають один порядок $\mathrm{u}' \sim \mathrm{w}' = l' \frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}}$

Отримуємо

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dz}} = \rho l_1^2 \frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}} \frac{\mathrm{d}^2\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}^2}$$

де $l_1 = \sqrt{-l' l_1'}$ - нова довжина перемішування.

Даний підхід (підхід Тейлора) звичайно не вирішує повністю питання про зв'язок між напруженнями Рейнольдса і полем середньої швидкості, тому що в них виникає нова невідома величина - довжина шляху перемішування.

У 1930 р Теодор фон Карман запропонував гіпотезу про локальну кінематичну подібність поля турбулентних пульсацій швидкості [Karman, 1930]. Відповідно до гіпотези Кармана, поля турбулентних пульсацій швидкості в околиці кожної точки розвиненого турбулентного потоку (за винятком точок в'язкого підшару) подібні один одному і відрізняються лише масштабами довжини і часу (або довжини і швидкості). Математичне формулювання гіпотези наступне. У кожній точці $\vec{\mathrm{x}}_0$ можуть бути визначені такий масштаб довжини $l\left(\vec{\mathrm{x}}_0\right)$ і такий масштаб швидкості $U\left(\vec{\mathrm{x}}_0\right)$, що в околиці цієї точки поле турбулентних пульсацій матиме вигляд

$$\vec{\mathrm{u}}'(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{U}\left(\vec{\mathrm{x}}_0\right) \vec{\mathrm{V}}(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mathrm{x}}_0 - \overline{\vec{\mathrm{u}}}\left(\vec{\mathrm{x}}_0\right) \mathrm{t}}{l\left(\vec{\mathrm{x}}_0\right)},$$

де функція $\vec{\mathrm{V}}(\vec{\xi})$ - універсальна, тобто не залежить від точки $\vec{\mathrm{x}}_0$ і від поля середньої швидкості. Насправді гіпотеза Кармана накладає занадто сильні обмеження на індивідуальні реалізації поля пульсаційної швидкості, яка досить примхлива і непостійна за своєю природою.

Але гіпотезу про локальну подібність можна застосувати до середнього поля швидкості, в цьому випадку вимоги які накладаються вже не є надто жорсткими. Отже, будемо вважати, що в кожній точці турбулентного потоку може бути обраний такий масштаб $l\left(z_0\right)$, для якого з точністю до малих третього порядку щодо даного масштабу в інтервалі $z_0 \leq z \leq z_0 + l$ виконується наступна умова:

$$\frac{\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{z}) - \overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0\right)}{\overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0 + l\right) - \overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0\right)} = \mathrm{f}(\xi)$$

Де $\xi = \frac{z - z_0}{l(z_0)}$. Утримуючи перші три члена розкладу даного рівняння в ряд Тейлора, отримуємо

$$\frac{\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{z}) - \overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0\right)}{\overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0 + l\right) - \overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0\right)} = \frac{\left(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0\right)\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}}\right)_{z_0} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z_0}}{l\left(\mathrm{z}_0\right)\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}}\right)_{z_0} + \frac{1}{2} l^2\left(\mathrm{z}_0\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}^2}\right)_{z_0}} =$$

$$= \frac{\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \left[l\left(z_0\right) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)_{z_0} / \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_{z_0} \right]}{1 + \frac{1}{2} \left[l\left(z_0\right) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)_{z_0} / \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_{z_0} \right]} \tag{6.6}$$

Відповідно до прийнятої гіпотези, вираз (6.6) не повинен залежати від z_0. Для цього повинна виконуватися умова

$$l\left(z_0\right) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)_{z_0} / \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_{z_0} = \text{const}$$

І для масштабу довжини ми отримаємо

$$l\left(z_0\right) = \left| \text{ const } \cdot \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_{z_0} / \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)_{z_0} \right| \tag{6.7}$$

Величина взята за модулем, оскільки масштаб довжини не може бути від'ємним. Константа, яка фігурує в рівняння називається сталою Кармана.

Формула (6.7) може бути отримана і з наступних загальних міркувань. В силу інваріантності (Галілея) рівнянь руху масштаб $l\left(z_0\right)$ не може залежати від абсолютного значення середньої швидкості $\overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}_0\right)$, а залежить лише від її зміни в даній точці (тобто від похідних по простору). При розкладанні функції $\overline{\mathrm{u}}\left(\mathrm{z}\right)$ в ряд в точці z_0, перша можливість скласти з похідних $\left(\frac{d^n\bar{u}}{dz^n}\right)_{z_0}$ комбінацію з розмірністю довжини виникне вже при врахуванні перших двох похідних. Звідси відразу і випливає формула (6.7).

Знаючи масштаб $l\left(z_0\right)$, можна отримати формулу Кармана для абсолютної величини турбулентної напруги

$$\tau = \rho\kappa^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^4 / \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)^2 \tag{6.8}$$

Важливо, що формула Кармана (6.8) не містить ніяких нових невідомих функцій, а пов'язує турбулентну напругу з полем середньої швидкості безпосередньо. Але формула (6.8) має і суттєвий недолік. Вона не може бути застосована для течій, профіль яких харакеризується точкою перегину, в якій занюляється друга похідна. У цій точці турбулентна напруга прямує до нескінченності, що фізично некоректно.

6.2 Два експериментальних закони розвиненої турбулентності

Усереднення рівнянь гідродинаміки (навіть доповнене напівемпіричні теоріями) не дозволяє повністю вирішити проблему опису турбулентного руху. Необхідні для замикання системи Рейнольдса додаткові зв'язки і величини емпіричних коефіцієнтів можна отримати, спираючись на результати фізичних експериментів. У цьому розділі мова піде про розвинену турбулентність (Re»1), яка має місце далеко від твердих стінок/різких границь. З безлічі різноманітних експериментальних даних про турбулентні потоки такого роду, слідуючи монографії [Фріш, 1998], виділимо два основних емпіричних закони розвиненої турбулентності:

1. закон «двох третіх»;
2. закон кінцевої дисипації енергії.

Відповідно до закону «двох третіх», в турбулентному потоці при дуже великих числах Рейнольдса середній квадрат різниці швидкостей в двох точках, що знаходяться на відстані r один від одного, дорівнює $C(\varepsilon r)^{2/3}$, де C -універсальна числова стала (рис. 6.1). Іншою формою цього закону є закон «п'яти третіх», згідно з яким густина розподілу кінетичної енергії по спектру хвильових чисел k має вигляд $C_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$.

Характерний вигляд спектра турбулентного потоку представлений на Рис. 6.2.

Закон «двох третіх» («п'яти третіх») проявляється тільки в певному інтервалі масштабів, який називається інерційний інтервал. Зі зростанням числа Рейнольдса інерційний інтервал розширюється і може досягати 2-3 порядків.

Багаточислені експериментальні підтвердження закону "2/3"("5/3") дають хороші результати не тільки в гідродинамічних а й в магнітогідродинамічних потоках.

Закон кінцевої дисипації енергії формулюється наступним чином. Якщо в експерименті з турбулентним потоком всі параметри підтримуються постійними, крім в'язкості, яка знижується до мінімально можливої, то питома дисипація прямує до позитивного кінцевого значення $(\lim_{v\to 0}\bar{\varepsilon} = \text{ const } > 0)$

В експерименті цей закон проявляється, наприклад, в тому, що диссипация енергії ε не залежить від в'язкості (хоча при цьому, безумовно, саме властивість дисипації є прояв в'язкості).

Питома диссипация енергії задається формулою

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\nu\sum_{ij}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2} \tag{6.9}$$

Оскільки ми розглядаємо турбулентність при дуже великих числах Рейнольдса, то безпосередня дисипація енергії усередненого потоку під дією молекулярної в'язкості є дуже малою і нею можна знехтувати.

Ефективний перехід кінетичної енергії течії в тепло відбувається тільки на малих просторових масштабах. Розписуючи формулу (6.9) в термінах середніх величин і пульсацій і враховуючи, що $\partial\overline{u_i}/\partial x_j << \partial u_i'/\partial x_j$, отримуємо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\nu \sum_{ij} \overline{\left(\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_i}}{\partial \mathrm{x}_j} + \frac{\partial \mathrm{u}'_i}{\partial \mathrm{x}_j} + \frac{\partial \overline{\mathrm{u}_j}}{\partial \mathrm{x}_i} + \frac{\partial \mathrm{u}'_j}{\partial \mathrm{x}_i}\right)^2} \approx \frac{1}{2}\nu \sum_{ij} \overline{\left(\frac{\partial \mathrm{u}'_i}{\partial \mathrm{x}_j} + \frac{\partial \mathrm{u}'_j}{\partial \mathrm{x}_i}\right)^2}. \quad (6.10)$$

При цьому закон кінцевої дисипації енергії виконується автоматично.

Поставити фізичний експеримент, в якому всі параметри будуть підтримуватися постійними, а в'язкість змінюватися в широких межах, досить складно. Своє реальне підтвердження другий закон знаходить в експериментах з вивчення сили (опору), що діє з боку потоку рідини або газу при його обтіканні. З принципу подібності для нестисливого потоку випливає наступна проста формула для сили:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\mathrm{C}\rho \mathrm{S}\mathrm{U}^2,$$

де U - швидкість потоку подалі від тіла яке обтікається, S - площа поперечного перерізу, ρ - густина рідини (газу), C - безрозмірний коефіцієнт опору, який не є константою, але функцією числа Рейнольдса C=C(Re). Число Рейнольдса в даному випадку визначимо як $\mathrm{Re} = \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{S}}/\nu$. Відповідно до принципу подібності, для тіл однакової форми функція C (Re) повинна мати універсальний вигляд. Визначення сили опору являє собою надзвичайно затребувану практичну задачу, тому функція C(Re) була багаторазово і детально виміряна для тіл різної форми. Типова залежність коефіцієнта опору від числа Рейнольдса показана на Рис.6.3. При малих числах Рейнольдса (Re<10) $\mathrm{C} \sim \mathrm{Re}^{-1}$, тобто F пропорційне U (закон Стокса). В діапазоні $10^2 < \mathrm{Re} < 10^5$ коефіцієнт залишається приблизно постійним. При $\mathrm{Re} \sim 10^5$ настає «провал»: коефіцієнт опору C зменшується в кілька разів. Причому в деяких випадках зменшення це настільки значне, що навіть сама сила F зменшується при збільшенні швидкості!

Це явище, іменоване кризою опору, відбувається через те, що турбулентна область «здувається» вниз по потоку. Слід зауважити, що криза опору спостерігається не завжди. Так, наприклад, при обтіканні диска, поставленого поперек потоку, область відриву завжди знаходиться на краю диска. Для нас, однак, важливий не факт існування кризи опору, а наявність діапазону, в якому коефіцієнт C не залежить від числа Рейнольдса, а, отже, і від в'язкості. Робота, що здійснюється силою F, очевидно йде на розвиток турбулентності, енергія якої, врешті-решт, переходить в тепло. Для усталеного руху генерація і дисипація турбулентної енергії повинні збігатися. Тому дисипацію турбулентної енергії можна розрахувати як потужність роботи, виробленої силою F

$$\mathrm{W} = \mathrm{U}\mathrm{F} = \frac{1}{2}\mathrm{C}\rho \mathrm{S}\mathrm{U}^3$$

Від в'язкості в даному виразі залежить тільки коефіцієнт опору. Сталість цього коефіцієнта в діапазоні чисел Рейнольдса $10^2 < \mathrm{Re} < 10^5$ і підтверджує існування скінченної границі $\lim_{\upsilon\to 0}\bar{\varepsilon} = \mathrm{const} > 0$.

6.3 Застосування теорії розмірностей до розвиненої турбулентності. Каскад Річардсона

Для подальшого розвитку уявлень про турбулентні потоки використаємо поняття структурного підходу закладенні Льюїсом Фрайдом Річардсоном [Richardson, 1922].

Розвиток турбулентності відбувається у відповідності з наступним сценарієм. При зростанні числа Re спочатку виникають великомасштабні пульсації (чим менше масштаб руху, тим пізніше такі пульсації з'являться). При дуже великих числах Рейнольдса в турбулентному потоці присутні пульсації різних масштабів, але основну роль відіграють саме великомасштабні пульсації, розмір яких близький до лінійного розміру системи/області L (величину L ще називають зовнішнім масштабом турбулентності). Великомасштабні вихрові рухи створюють пульсації швидкості, які можна порівняти зі зміною середньої швидкості потоку на відстані L. Дрібномасштабні турбулентні рухи беруть участь в потоці зі значно меншими амплітудами, і їх можна розглядати як дрібну структуру, що накладається на основні великомасштабні турбулентні рухи. У дрібномасштабних пульсаціях закладена мала частина всієї кінетичної енергії середовища. Таким чином, на великих відстанях L зміна пульсаційної швидкості визначається великомасштабними пульсаціями, при цьому мають порядок відношення середньої швидкості u до розмірів L: u/L. На малих відстанях $\lambda << \mathrm{L}$ зміна швидкості пов'язана з пульсаціями малих масштабів $\sim \mathrm{v}_\lambda/\lambda >> \Delta\mathrm{u}/\mathrm{L}$. Можна ввести поняття числа Рейнольдса для різних масштабів турбулентності

$$\mathrm{Re}_\lambda = \frac{\upsilon_\lambda \lambda}{\nu}$$

Чим менше число Re_λ, тим менше масштаб руху. При великих Re великі також і Re_λ великомасштабних пульсацій. Але великі значення Re_λ еквівалентні малим в'язкостям, отже, для великомасштабного турбулентного руху в'язкість ролі не грає, і в великомасштабних пульсаціях не відбувається помітної дисипації енергії. Разом з тим, саме великомасштабний рух і є основним в турбулентному потоці.

Розвиток уявлень про дисипації енергії в турбулентному потоці пов'язують з ім'ям Льюїса Фрай Річардсона. Він був першим, хто запропонував розглядати розвинену турбулентність як ієрархію вихорів, різних порядків, в якій "вихори"даного порядку виникають за рахунок втрати стійкості більшими "вихорами"попереднього порядку, запозичуючи у них енергію і, в свою чергу, втрачаючи стійкість, породжують дрібніші "вихори"наступного порядку, яким вони передають енергію. Таким чином, виникає своєрідний каскадний процес. Від пульсацій великих масштабів енергія переходить до пульсацій з меншими масштабами практично без втрат. В тепло енергія починає переходити тільки на рівні самих дрібномасштабних пульсацій (для стаціонарного потоку, зрозуміло, повинено існувати джерело енергії турбулентності).

В силу того, що в'язкість рідини істотна тільки для малих масштабів. То параметри потоку не будуть залежати від в'язкості. Або, іншими словами, ці величини не повинні змінюватися при зміні в'язкості.

Така обставина звужує коло параметрів, що визначають властивості турбулентного руху, отже, міркування подібності та розмірностей стають дуже важливими. Розглянемо середню кількість дисипуючої енергії за одинию часу в одиниці маси (розмірність ε - [Дж/(кг·с)]=[м^2/с^3]).

Таким чином ε - потік енергії, що постійно передається від вихорів більшого масштабу до вихорів меншого масштабу.

Порядок величини ε можна визначити за допомогою величин, характерних для великомасштабних рухів. Існує єдина відповідна комбінація

$$\varepsilon \sim \frac{\Delta \mathrm{u}^3}{\mathrm{L}} \sim \frac{\mathrm{b}^{3/2}}{\mathrm{L}} \left[\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{c}^3}\right]$$

де b - енергія турбулентного руху $\mathrm{b} = \frac{1}{2}\sum \mathrm{u}_\mathrm{i}'^2$.

Характеристикою турбулентних рухів є турбулентна в'язкість K $\left[\mathrm{M}^2\mathrm{c}^{-1}\right]$. З величин $\rho, \mathrm{L}, \Delta\mathrm{u}$ можемо скласти таку комбінацію необхідної розмірності:

$$\mathrm{K} \sim \mathrm{L}\Delta\mathrm{u} = \mathrm{L}\sqrt{\mathrm{b}} \left[{}^2\mathrm{c}^{-1}\right]$$

Дана формула дозволяє виявити новий фізичний зміст числа Рейнольдса (відношення турбулентного і молекулярного коефіцієнтів в'язкості)

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{L\Delta u}{\nu} \sim \frac{K}{\nu}$$

Комбінуючи дані формули виразимо дисипацію турбулентної енергії через турбулентну в'язкість і масштаб

$$\varepsilon \sim \frac{\Delta \mathrm{u}^3}{\mathrm{L}} = \frac{(\Delta \mathrm{uL})^3}{\mathrm{L}^4} \sim \frac{\mathrm{K}^3}{\mathrm{L}^4}.$$

6.4 Теорія Колмогорова-Обухова

Значний внесок в розвиток уявлень про турбулентність внесли Андрій Миколайович Колмогоров і Олександр Михайлович Обухів [Колмогоров, 1941а, 1941б; Обухов, 1941].

При аналізі було використано поняття про однорідну і ізотропну турбулентність (всі розподіли ймовірностей гідродинамічних полів в скінченній кількості точок простору-часу інваріантні щодо будь-яких ортогональних перетворень (паралельних переносів, обертань і відображень) системи просторових координат. Це той окремий випадок течій, для яких структура статистичних моментів гідродинамічних полів і вид відповідних рівнянь Фрідмана-Келлера виявляються найбільш простими. Але, звичайно, проблема замикання рівнянь залишається в силі.

Колмогоров доповнив існуючі до нього уявлення про каскадному процесі передачі енергії від великомасштабних вихорів до дрібномасштабним наступними міркуваннями. Внаслідок хаотичності передачі енергії, вплив середньої течії при кожному переході до більш дрібних збурень повинно слабшати. Тобто, цей вплив ніяк не позначається на рухах малого масштабу. І як наслідок навіть незважаючи на те, що середня течія неоднорідна і анізотропна, дрібномасштабна турбулентність має бути однорідною і ізотропною.

Виходячи з цих уявлень, Колмогоров сформулював наступні дві гіпотези.

1-ша гіпотеза Колмогорова: статистичні характеристики дрібномасштабних компонентів розвиненої турбулентності повністю визначаються двома розмірними параметрами: питомою дисипацією турбулентної енергії [м^2/с^3] та кінематичною в'язкістю ν [м^2/с]. Відповідно до теорії розмірності, можна ввести типовий просторовий масштаб, час життя і швидкість внутрішнього руху для дрібних вихорів:

$$\lambda_0 = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}; \quad \tau_0 = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}; \quad v_{\lambda_0} = (\nu\varepsilon)^{1/4} \tag{6.11}$$

Величина λ_0 - «внутрішній масштаб турбулентності». Фізичний зміст цієї величини - характерний розмір найменших вихорів або масштаб довжини, на якому в'язкість стає істотною.

2-а гіпотеза Колмогорова: статистичні характеристики компонентів розвиненої турбулентності з масштабом довжини $\lambda_0 << \lambda << $ L і часу $\tau_0 << \tau << T$, де L і T - зовнішні масштаби, визначаються єдиним розмірним параметром ε. Відповідний діапазон масштабів називається інерційним інтервалом, він має значну протяжність тільки при великих числах Рейнольдса. З боку малих масштабів до інерційного інтервалу "приєднується"так звана область дисипації, а з боку великих масштабів – «область енергії». В «області енергії» відбувається генерація турбулентної енергії. В інерційному інтервалі енергія передається практично без втрат «вниз по масштабам». А в області дисипації енергія переходить в тепло.

Визначимо порядок величини зміни швидкості турбулентного руху на відстані λ. Відповідно до другої гіпотези Колмогорова, властивості турбулентного руху повинні визначатися швидкістю дисипації турбулентної енергії ε. З наявних величин можна скласти тільки одну комбінацію з розмірністю швидкості

$$\mathrm{v}_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3} \tag{6.12}$$

Формула (6.12) являє собою один з варіантів математичного виразу закону Колмогорова-Обухова.

Найчастіше використовують закон Колмогорова-Обухова в спектральній формі. Нехай k - «хвильове число», яке визначається як $\mathrm{k} = \lambda^{-1}$. Тоді кінетична енергія пульсацій в інтервалі від k до k+dk задається наступною простою формулою: E(k)dk. Розмірність енергії - [м^{2}с$^{-2}$], розмірність інтервалу хвильових чисел dk - [м$^{-1}$]. Отже, розмірність спектральної енергії E(k) - [м^{3}с$^{-2}$]. Складаючи комбінацію розмірності [м^{3}с$^{-2}$] з величин ε і k, отримуємо

$$\mathrm{E(k)} \sim \varepsilon^{2/3}\mathrm{k}^{-5/3} \tag{6.13}$$

Інтегрування даної формули по всіх можливих значеннях k, очевидно, дає повну енергію турбулентного руху E_0. Нижня межа інтегрування відповідає турбулентним вихорам максимальних розмірів λ, верхня межа - внутрішньому масштабу турбулентності.

$$\mathrm{E}_0 = \int_{\mathrm{k}}^{1/\lambda_0} \mathrm{E(k)dk} \sim -\left.\frac{\varepsilon^{2/3}}{\mathrm{k}^{2/3}}\right|_{\mathrm{k}}^{1/\lambda_0} = \varepsilon^{2/3}\left(\lambda^{2/3} - \lambda_0^{2/3}\right) \approx (\varepsilon\lambda)^{2/3} \tag{6.14}$$

Де враховано що $\lambda_0 << \lambda$.

Основний внесок в енергію турбулентного руху забезпечують великомасштабні пульсації, отже, справедливою буде наступна оцінка:

$$E_0 \sim v_\lambda^2 \tag{6.15}$$

З (6.14) і (6.15) отримуємо формулу, що відповідає закону Колмогорова-Обухова (і першому експериментальному закону)

$$v_\lambda^2 \sim (\varepsilon\lambda)^{2/3}$$

Поряд з просторовими масштабами турбулентних пульсацій, можна розглядати також і їх часові характеристики - частоти. Інерційний інтервал в частотному діапазоні визначається наступним чином: $\mathrm{u/L} << \omega << \mathrm{u}/\lambda_0$. Нижня межа частотного спектра турбулентного руху пов'язана зі швидкістю середнього потоку і зовнішнім масштабом, а верхня - зі швидкістю середнього потоку і внутрішнім масштабом турбулентності. Умова $\omega >> \mathrm{u/L}$ означає, що по відношенню до локальних властивостей турбулентності основний рух можна вважати стаціонарним.

Розподіл енергії по частотному спектру в інерційній області отримуємо із розподілу по хвильовим числам за допомогою простої заміни змінних. Важливо підкреслити, що мова йде про частоту для спостерігача, що знаходиться в нерухомій системі відліку. Якщо середній потік швидкості u проносить повз спостерігача вихор з масштабом λ, то період відповідного збурення, буде визначатися співвідношенням T= $\lambda//$u. Для хвильового числа можна записати співвідношення: k= $\omega/$u. Тоді розподіл по енергії по частотному діапазоні можна переписати у вигляді:

$$\mathrm{E(k)dk} \sim \varepsilon^{2/3}\mathrm{k}^{-5/3}\mathrm{dk} = \varepsilon^{2/3}\omega^{-5/3}\mathrm{u}^{5/3}\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{\mathrm{u}}\right) = (\mathrm{u}\varepsilon)^{2/3}\omega^{-5/3}\mathrm{d}\omega$$

$$E(\omega) \sim (u\varepsilon)^{2/3}\omega^{-5/3} \tag{6.16}$$

Величина E(ω)dω - це енергія турбулентного руху в межах інтервалу частот.

В якості ще одного прикладу використання теорії Колмогорова розглянемо задачу про турбулентну дифузію. Турбулентна дифузія за своєю природою, призводить до поступової розбіжності частинок, що знаходяться спочатку поблизу одна відносно іншої. Розглянемо дві частинки, розташовані на деякій відстані λ. Будемо вважати, що величина λ належить інерційному інтервалу, - в цьому випадку єдиним визначальним параметром є дисипація турбулентної енергії ε. Із міркувань розмірності можна записати залежність швидкості зміни відстані між частинками з часом: $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{dt}} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$

Інтегруючи даний вираз, знайдемо, що час, протягом якого дві частинки, що знаходилися спочатку на відстані λ_1 одна від іншої, розійдуться на відстань λ_2: $\tau \sim \lambda_2^{2/3}\varepsilon^{-1/3}$. Слід відмітити, що швидкість розбіжності із відстанню зростає. Це пов'язано з тим, що до розбіжності частинок, що знаходяться на відстані λ, призводять тільки пульсації на менших масштабах; пульсації великих масштабів переносять частинки разом і не призводять до їх розбіжності. Цю умову широко використовують при вивченні перенесення пасивної домішки турбулентним потоком.

6.5 Універсальний закон турбулентності поблизу стінки/границі

Розглядаючи властивості розвиненої турбулентності далеко від твердих стінок, ми виходили з того, що при Re>>1 рідина поводить себе як нев'язке середовище. В цьому пункті ми розглянемо чи можна знехтувати в'язкістю при описі руху рідини поблизу твердих границь? Нагадаємо, що граничні умови для ідеальної рідини вимагають зникнення тільки нормальної компоненти швидкості, а на дотичну компоненту ніяких обмежень не накладається. При цьому у випадку в'язкої рідини повинні занулятися як нормальна, так і тангенціальна компоненти швидкості. Нескладно здогадатися, що у випадку реального (в'язкого) середовища при Re>>1 падіння швидкості до нуля буде відбуватися майже повністю в тонкому приграничному шарі в якому спостерігаються значні градієнти швидкості. Падіння швидкості в приграничному шарі обумовлюється в'язкістю рідини, якою тут не можна нехтувати, незважаючи на великі числа Рейнольдса. При аналізі властивостей турбулентного руху поблизу твердих границь для початку розглянемо стаціонарний потік між двома паралельними пластинами при відсутності градієнта тиску (потік Куетта – класична задача гідродинаміки). Залишаючись на фіксованій відстані H одна відносно іншої, пластини рухаються кожна у своїй площині з постійними швидкостями. Для визначеності зв'яжемо початок прямокутної системи координат з нижньою пластиною, а вісь 0z направимо перпендикулярно до її площини. В нашому випадку нижня пластина нерухома, а верхня переміщується з постійною швидкістю U_0 в деякому напрямку. Направляючи вісь 0x в напрямку швидкості верхньої пластини, переходимо до двовимірної задачі в площині 0xz. Шуканий потік має єдину відмінну від нуля компоненту, яка залежить тільки від однієї координати $\vec{v} = (u(z), 0)$. Вважаючи, що $\partial p/\partial x = 0$, перетворимо x-компоненту рівняння Нав'є-Стокса. У підсумку приходимо до простого диференціальнихого рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Інтегрування якого з врахуванням граничних умов $u\,(0) = 0$ та

$u(H) = U_0$ дозволить знайти лінійний профіль швидкості $u(z) = U_0 z/H$.

Нехай замість верхньої пластини є напівпростір, який заповнений рухомим середовищем. Незалежно від складності структури течії далеко від твердих границь, при наближенні до них потік неминуче буде орієнтуватися уздовж поверхні границі.

Розглядаючи один з шарів рідини, що ковзають уздовж границі в якості «верхньої пластини» і нехтуючи градієнтом тиску, ми приходимо до аналогії з потоком Куетта. Звідси випливає, що в безпосередній близькості до твердої поверхні, де дія сил в'язкості є визначальною, завжди повинен існувати саме лінійний профіль швидкості.

Перейдемо до розгляду турбулентного потоку, вздовж твердої плоскої поверхні. Для простоти обмежимося двовимірним випадком. Математична постановка аналогічна до розглянутої в попередньому абзаці. Будемо вважати, що середня течія стаціонарна і має тільки горизонтальну компоненту, що залежить від вертикальної координати $\overline{\vec{v}} = (\bar{u}(z), 0)$, а поздовжнім градієнтом середнього тиску можна знехтувати ($\partial \overline{p}/\partial x = 0$). Що стосується пульсацій швидкості, то вони вже можуть мати не одну, а дві компонентами, причому кожна з них може залежати від обох просторових координат і від часу $\vec{v}' = (u'(x,z,t), w'(x,z,t))$.

З урахуванням зазначених припущень, з рівняння Рейнольдса отримуємо співвідношення:

$$\frac{d}{dz}\left(\nu\frac{d\overline{u}}{dz} - \overline{u'w'}\right) = 0$$

Після інтегрування по z отримаємо:

$$\nu\frac{d\overline{u}}{dz} - \overline{u'w'} = \mathrm{const} \equiv \frac{\tau_0}{\rho} \tag{6.17}$$

Таким чином, потік x-ої компоненти імпульсу, спрямований від рідини до поверхні, залишається незмінним на будь-якій відстані від поверхні. Фізичний сенс величини τ_0 [Н/м^2] - сила, що діє з боку турбулентного потоку на одиницю площі поверхні, уздовж якої цей потік тече. Величина $u^* \equiv \sqrt{\tau_0/\rho}$ має розмірність швидкості і називається динамічною швидкістю або швидкістю тертя.

У формулі (6.17) є невідома величина $\overline{u'w'}$, тому, ми не можемо розрахувати профіль середньої швидкості. Але, користуючись теорією розмірності, можна зробити висновки про можливий вигляд функції $\overline{u}(z)$.

Поблизу границі ε є функцією координат, тому використання її в даному випадку для оцінок через розмірність є недоцільним. Для цих цілей вибирають наступні параметри: динамічна швидкість u *; відстань до поверхні z; кінематична в'язкість ν. Загальний вигляд профілю швидкості дається наступною формулою:

$$\overline{u}(z) = u^* f(\xi)$$

де $f(\xi)$ деяка універсальна функція, а $\xi = zu^*/\nu$ єдина можлива безрозмірна комбінація із наших параметрів. Дана формула - універсальний закон турбулентності поблизу стінки/границі. Викладені вище міркування справедливі, якщо границя є ідеально гладенькою.

При наближенні до твердої поверхні, турбулентні пульсації швидкості, а, отже, і величина $\overline{u'w'}$ повинні прямувати до нуля. Шар середовища, в якому $\nu|d\overline{u}/dz| >> |\overline{u'w'}|$, називається в'язким або ламінарним. Нехтуючи у формулі (6.17) доданком $\overline{u'w'}$ приходимо до простого рівняння

$$\frac{\tau_0}{\rho} \equiv u^{*2} = \nu\frac{d\overline{u}}{dz}$$

Інтегрування даного рівняння з урахуванням граничної умови $\overline{u}(0) = 0$ дає лінійний профіль середньої швидкості в в'язкому шарі

$$\overline{u}(z) = \frac{u^{*2}}{\nu}z$$

Для області, що лежить вище в'язкого шару, турбулентні напруги перевершують в'язкі $\nu|d\overline{u}/dz| << |\overline{u'w'}|$, отже, на цей раз в рівнянні (6.17) слід знехтувати іншим доданком. У цьому випадку від в'язкості вже нічого не залежить, і усереднені характеристики турбулентного потоку на відстані z від поверхні визначаються тільки двома величинами: динамічною швидкістю u * та відстанню до поверхні z.

Тут ми вже не зможемо визначити абсолютні величини швидкості, але можемо отримати закон її зміни, тобто похідну. Із теорії розмірності отримаємо: $d\overline{u}/dz = (A_1 u^*)/z$, де A_1 - універсальна безрозмірна стала. В результаті інтегрування рівняння отримаємо логарифмічний вигляд профілю швидкості:

$$\overline{u}(z) = u^* A_1 \ln(z) + A_2,$$

де A_2 - нова константа, яка, взагалі кажучи, може залежати від в'язкості. Шар рідини, де виконується дане співвідношення, називається логарифмічним прикордонним шаром. Дана формула була вперше отримана Карманом в 1930 р і потім Прандтлем в 1932 р Величина $1/A_1 = \kappa$ називається сталою Кармана.

Константи можна отримати тільки аналізуючи експериментальні залежності. За даними експериментів різних дослідників константа κ варіюються в межах: $\kappa = 0.38 \div 0.44$. константою A_2 в більшості випадків можна знехтувати за рахунок її малості.

6.6 Дисипація енергії в прикордонному шарі

При вирішенні завдань про турбулентних потоках, обмежених стінками, часто буває необхідно ставити граничні умови на дисипації енергії ε. Але поблизу стінок ця величина вже не є тією постійною, і такою що контролює турбулентність, як це було далеко від границі.

Для аналізу поведінки ε в даному випадку, розглянемо рівняння що представляє собою баланс густини кінетичної енергії $E = \rho u_\beta u_\beta / 2$ в потоці нестисливої рідини:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E u_\alpha + p u_\alpha - u_\beta \sigma_{\beta\alpha}\right] = -\rho\varepsilon \tag{6.18}$$

Нехтуючи тензором в'язких напруг $\sigma_{\beta\alpha}$, вплив якого в логарифмічному прикордонному шарі незначний, і використовуючи умову стаціонарності отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E u_\alpha + p u_\alpha\right] = -\rho\varepsilon \tag{6.19}$$

З рівняння (6.19) видно, що густина потоку енергії в напрямку осі 0z визначається наступним виразом:

$$\mathrm{Q_E} = \left(\rho\frac{\mathrm{u}^2 + \mathrm{w}^2}{2} + \mathrm{p}\right)\mathrm{w} \tag{6.20}$$

Запишемо вираз (6.20) з урахуванням середніх значень і пульсацій і усереднимо його відповідно до правил Рейнольдса

$$\mathrm{Q_E} = \overline{\left(\rho\frac{(\overline{\mathrm{u}} + \mathrm{u}')^2 + (\overline{\mathrm{w}} + \mathrm{w}')^2}{2} + \overline{\mathrm{p}} + \mathrm{p}'\right)(\overline{\mathrm{w}} + \mathrm{w}')}$$

У подальших перетвореннях будемо враховувати, що $\overline{\mathrm{w}} = 0$ і $\mathrm{p}' \sim \rho \mathrm{u}_\mathrm{i}'^2$. Крім того, беручи до уваги співвідношення $|\mathrm{u}_i'| << |\overline{\mathrm{u}_i}|$, будемо нехтувати членами третього порядку малості.

$$\mathrm{Q_E} = \overline{\frac{\rho\left(\overline{\mathrm{u}}^2\mathrm{w}' + 2\overline{\mathrm{u}}\mathrm{u}'\mathrm{w}' + \mathrm{u}'^2\mathrm{w}' + \mathrm{w}'^3\right)}{2}} + \overline{\mathrm{p}}\mathrm{w}' + \mathrm{p}'\mathrm{w}' =$$

$$= \rho\overline{\mathrm{u}}\overline{\mathrm{u}'\mathrm{w}'} + \frac{\rho}{2}(\overline{\mathrm{u}'^2\mathrm{w}'} + \overline{\mathrm{w}'^3}) + \underbrace{\overline{\mathrm{p}'\mathrm{w}'}}_{\sim\rho\overline{\mathrm{u}'^2\mathrm{w}'}} \approx \rho\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{u}'\mathrm{w}'} \tag{6.21}$$

У міру наближення до границі потік енергії $\mathrm{Q_E}$ зменшується, що, очевидно, пов'язано з дисипацією енергії. З рівняння (6.19) випливає, що дисипація в одиниці маси визначається формулою

$$\varepsilon = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{dQ_E}}{\mathrm{dz}}$$

З урахуванням виразу (6.21) отримуємо

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{u}'\mathrm{w}'})$$

В логарифмічному прикордонному шарі величина $-\overline{\mathrm{u}'\mathrm{W}'} = \tau_0/\rho = \mathrm{u}^{*2}$ не залежить від координати z, тому цю величину можна винести з під знаку похідної

$$\varepsilon = -\overline{\mathrm{u}'\mathrm{w}'}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{dz}} = \frac{\tau_0}{\rho}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}z}$$

Далі, враховуючи, що похідна $\mathrm{d}\overline{\mathrm{u}}/\mathrm{dz}$ визначається через τ_0 приходимо до наступного набору співвідношень для диссипації:

$$\varepsilon = \mathrm{A}_1\frac{\tau_0}{\rho}\frac{\mathrm{u}^*}{\mathrm{z}}, \varepsilon = \mathrm{A}_1\frac{\mathrm{u}^{*3}}{\mathrm{Z}}, \varepsilon = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{z}}\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{3/2}.$$

Нагадаємо, що константа $A_1 = 1/\kappa$ - пов'язана зі сталою Кармана ($\kappa = 0.38 \div 0.44$).

Отримані співвідношення показують, що в прикордонному шарі, у міру наближення до твердої поверхні, питома дисипація турбулентної енергії зростає за законом z^{-1}, де z - відстань до поверхні.

6.7 Труднощі прямого чисельного моделювання

З другої половини 20-го століття певні надії на вирішення проблеми турбулентності були пов'язані з прямим чисельним моделюванням (DNS - direct numerical simulation). Але слід відмітити, що для розрахунку турбулентних потоків необхідно вирішувати нестаціонарне рівняння Нав'є-Стокса, доповнене рівняннями стану, нерозривності і перенесення тепла (енергії). На шляху чисельних розв'язків рівнянь неодмінно виникають дві фундаментальні проблеми.

Перша проблема полягає в наступному. При розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса чисельними методами поля швидкостей потоку і тиску розраховуються в кінцевому числі вузлових точок для дискретних моментів часу. Якщо ми хочемо описати всі можливі, навіть найдрібніші, деталі турбулентного потоку, то відстань між вузловими точками (крок за простором) не повинна перевищувати внутрішній масштаб турбулентності ($\lambda_0 = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}$). Крім того, крок за часом не повинен перевищувати величину $\tau_0 = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ або величину $\tau_1 = \lambda_0/\mathrm{u}$ (проміжок часу, протягом якого вихор розміру λ_0, що переноситься потоком зі швидкістю u, пройде повз нерухомого спостерігача).

При чисельному моделюванні динаміки турбулентного потоку розрахунок слід вести досить тривалий час $\mathrm{T} \sim \mathrm{L}/\mathrm{u}$. В іншому випадку за результатами розрахунку буде неможливо визначити середні величини. Число кроків за часом оцінюється наступним чином: $\mathrm{N_T} \sim \mathrm{T}/\tau_1 \sim \mathrm{Re}^{3/4}$

Загальна кількість кроків по простору-часу оцінюється величиною $\mathrm{N_{4D}} = \mathrm{N_{3D}}\mathrm{N_T} \sim \mathrm{Re}^3$. Видно, що зі збільшенням числа Рейнольдса величина $\mathrm{N_{4D}}$ стрімко зростає. При типовому для розвиненої турбулентності значенні числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$, отримуємо досить солідну величину $\mathrm{N_{4D}} \sim 10^{12}$.

Друга проблема яка виникає при чисельному аналізі полягає в наступному. Через випадковість флуктуацій поля швидкості в турбулентних потоках важливими з практичної точки зору характеристиками течії є середні за часом або по ансамблю значення пульсаційних змінних. Щоб розрахувати ці середні величини, необхідно багаторазово провести однотипні розрахунки, кожен зі злегка відмінними початковими і граничними умовами (оскільки мова йде про математику, а не про фізичний експеримент, то ми можемо забезпечити будь-яку задану точність цих умов), а потім обчислити середнє по ансамблю.

Колосальний обсяг обчислень, необхідний при прямих розрахунках турбулентних течій, у багатьох випадках є суттєвою перешкодою. Крім того, прямі розрахунки далеко не завжди можуть бути використані для практичних застосувань.

6.7.1 Ієрархічний базис для турбулентних полів

Для чисельних методів розв'язання рівнянь руху рідини найчастіше використовуються або сіточні, або спектральні методи, або їх комбінація. І ті, й інші можна віднести до проекційних методів вирішення рівнянь в часткових похідних, коли для розв'язку використовують проекції всіх полів на функціональні базиси. У сіткових методах функції представлені значеннями в точках, густина яких пов'язана із спектральними властивостями розглянутих полів (дрібномасштабні вихори не повинні проваллюватися між точками сітки). Більш строго цей зв'язок виражається теоремою Котельникова, згідно з якою функція $f(x)$, спектр якої обмежений просторовою частотою $2\pi/h$, може бути представлена сумою функцій відліків, центри яких розміщені на сітці з кроком h. Очевидно, що сіткове уявлення ефективно при описі локальних структур – дрібномасштабний вихор описується невеликим числом точок, що знаходяться у відповідній області простору. Водночас, для опису навіть дуже простого за структурою великомасштабного вихору потрібне використання всіх базисних функцій. Спектральні методи використовують розкладання по Фур'є – гармонікам. У цьому випадку кожна базисна функція описує, по суті, систему когерентних вихорів, що займає весь простір. У такому представленні дуже просто описати вихор, що займає всю область, або періодичну систему вихорів – і в тому, і в іншому випадку достатньо однієї базисної функції. Однак, якщо потрібно описати окремий вихор, що займає малу частину розглянутої області, то буде потрібен весь гармонійний ряд.

При цьому сіточні методи ефективні при обчисленні нелінійних членів, так як дозволяють виразити значення в точці через невелике число сусідніх точок, але призводять до великих витрат машинного часу при вирішенні рівняння Пуассона, що вимагає побудови ітераційного процесу, в який залучені всі точки області. Спектральні методи, навпаки, роблять розв'язки рівняння Пуассона тривіальним, але призводять до дуже складної структури нелінійних членів.

Проблеми двох функціональних базисів пов'язані з їх локалізованістю в фізичному і в Фур'є – просторах. Сітки строго локалізовані у фізичному просторі, але спектр точки (дельта-функції) є білий шум. Це означає, що функції делокалізовані в просторі Фур'є. Зворотна ситуація виникає при розкладанні Фур'є. Кожна гармоніка представляє строго одну частоту, але відповідна їй функція займає весь фізичний простір.

У турбулентному потоці співіснують вихори самого різного масштабу, але найбільш ефективні взаємодії відбуваються між вихорами (структурами), близькими і в фізичному, і в Фур'є -просторі.

Перше очевидно – щоб вихори взаємодіяли, вони повинні перекриватися в просторі. Друге твердження становить основу концепції каскадних процесів – взаємодіють вихори порівнянних розмірів (якщо розміри не порівняні, то маленькі вихори просто переносяться великими без обміну енергією). Це змушує звернутися до пошуку спеціальних функцій, що більш точно відповідають структурі турбулентного потоку.

У теорії турбулентності важливу роль відіграє ідея масштабної подібності. Це означає, що шуканий базис повинен бути складений з подібних функцій.

Ще один недолік використання рядів Фур'є полягає в низькій інформативності високих частот. Добре зрозумілий сенс розгляду вихорів з характерним розміром L, $L/2$, $L/3$, ... , але окремий опис масштабів $L/957$, $L/958$, $L/959$, ... і т.д. мало виправданий. Це міркування наводить на думку про необхідність використання функцій, масштаб яких змінюється прогресивно – таке співвідношення виходить при рівномірному розбитті простору масштабів в логарифмічному представленні.

Підсумовуючи сказане, можна сформулювати вимоги, яким повинен задовольняти функціональний базис, призначений для опису турбулентних потоків:

1) функції базису повинні бути локалізовані і в фізичному, і в Фур'є - просторах;

2) функції повинні бути подібні і описувати ієрархію вихорів прогресивно убуваючих масштабів;

3) дрібномасштабні вихори повинні переноситися в поле вихорів більшого масштабу;

4) при підстановці в рівняння Нав'є - Стокса функціональний базис повинен призводити до слабозв'язаної динамічної системи.

Трудноші прямих чисельних моделювань призвели до розвитку альтернативних підходів. Найбільш природне вирішення проблем полягає у відмові від відтворення дрібномасштабних компонент турбулентності. Такий підхід реалізується в методі LES (Large Eddy Simulation - моделювання великих вихорів). Ідея методу полягає в формальному поділі вихорів на великі і дрібні, наприклад, за допомогою усереднення по простору. Висновок рівнянь формально еквівалентний процедурі отримання рівнянь Рейнольдса. Вплив дрібних вихорів на великомасштабний рух враховується шляхом введення турбулентної в'язкості. Причому в багатьох випадках передбачається, що турбулентна в'язкість не залежить від просторових координат і часу. Але основні підходи до опису турбулентних течій базуються на рівняннях Рейнольдса. Їх безперечна перевага - математично строгий висновок рівнянь, а головний недолік, як ми вже неодноразово зазначали, - незамкнутість системи рівнянь. Пошук можливостей замкнути систему рівнянь Рейнольдса привів до появи емпіричних моделей та підходів.

6.8 Модель переносу турбулентної в'язкості

Нехай потік переносить деяку скалярну величину F. Тоді, за умови виконання законів збереження, можна формально записати рівняння зміни для величини F

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u_j}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x_i}} = \frac{\partial \Phi_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{x_i}} + \mathrm{G} - \mathrm{D}$$

де Φ_j потік величини F внаслідок дифузії, G – генерація/джерела величини F, D - дисипація величини F. Слід відмітити, що рівняння Нав'є-Стокса, Рейнольдса, дифузії та теплопровідності мають якраз саме такий вигляд. В роботі [Nee, Kovasznay, 1969] було запропоновано в якості величини F розглядати сумарний коефіцієнт дифузії $\mathrm{K} = \nu + \mathrm{K_T}$, де ν - молекулярна в'язкість, а $\mathrm{K_T}$ коефіцієнт турбулентної в'язкості. В результаті отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u_j}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{x_j}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{x_j}}\right) + \mathrm{G} - \mathrm{D}$$

$$\mathrm{G} = 0.133(\mathrm{K} - \nu)\left|\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{z}}\right|$$

$$\mathrm{D} = \frac{0.8}{\mathrm{L}^2}\mathrm{K}(\mathrm{K} - \nu)$$

де L - масштаб турбулентності, а числові коефіцієнти у виразах отримані експериментально шляхом.

Моделі переносу турбулентної в'язкості не знайшли широкого застосування в розрахунках турбулентних течій, тому що в подальшому було показано, що гіпотеза перенесення турбулентної в'язкості поступається в точності уявлень моделям перенесення турбулентної кінетичної енергії. Перевага моделей переносу кінетичної енергії багато в чому забезпечується тим, що основне рівняння (балансу турбулентної енергії) строго виводиться з рівняння Нав'є-Стокса при усередненні відповідно до правил Рейнольдса.

6.9 k-ε моделі турбулентності

У цьому параграфі розглянемо одного їх представників сімейства так званих двопараметричних моделей - k-ε модель турбулентності.

Свою назву модель отримала в зв'язку з використанням рівняння балансу турбулентної енергії, традиційно позначається $\mathrm{k} \equiv \mathrm{E_t}/\rho = \overline{\mathrm{u}'_\beta \mathrm{u}'_\beta}/2$, і рівняння для дисипації турбулентної енергії ε. Перепишемо рівняння балансу турбулентної енергії з використанням нового позначення для енергії

$$\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\mathrm{k}\overline{\mathrm{u}_\alpha} + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{u}'_\beta \mathrm{u}'_\beta \mathrm{u}'_\alpha} + \frac{\overline{\mathrm{p}'\mathrm{u}'_\alpha}}{\rho} - \frac{\overline{\mathrm{u}'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}}{\rho}\right] = -\varepsilon - \overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta}\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}$$

Нагадаємо, що це рівняння було строго отримано з рівнянь гідродинаміки. Вважаючи турбулентність розвиненою, знехтуємо в даному рівнянні тензором в'язких напруг. Крім того, ми знехтуємо доданком $\overline{\mathrm{p}'\mathrm{u}'_\alpha}$, який, як показують виміри, відносно малий. Але в будь-якому випадку невеликий внесок цього доданку в дифузію турбулентної енергії буде враховуватися в коефіцієнті турбулентного обміну. Отже, будемо вважати, що

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\frac{1}{2}\overline{\mathrm{u}'_\beta \mathrm{u}'_\beta \mathrm{u}'_\alpha} + \frac{\overline{\mathrm{p}'\mathrm{u}'_\alpha}}{\rho}\right] \approx \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}[\overline{\mathrm{k}\mathrm{u}'_\alpha}]$$

Вводячи турбулентний коефіцієнт дифузії енергії турбулентності $\mathrm{K_E}$ можемо записати

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}[\overline{\mathrm{k}\mathrm{u}'_\alpha}] = -\operatorname{div}(\mathrm{K_E}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{k})$$

Доданок, що описує генерацію турбулентної енергії $-\rho\overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta}\partial\overline{\mathrm{u}_\beta}/\partial \mathrm{x}_\alpha$ зв'яжемо з коефіцієнтом турбулентної в'язкості K_T і полем середньої течії (гіпотеза Буссінеска). Користуючись аналогією з тензором в'язких напруг, який визначається як

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho} = \nu\left(\frac{\partial \mathrm{u}_\alpha}{\partial \mathrm{x}_\beta} + \frac{\partial \mathrm{u}_\beta}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\right)$$

Запишемо

$$-\overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta} = \mathrm{K_T}\left(\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\alpha}}{\partial \mathrm{x}_\beta} + \frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\right)$$

Дане співвідношення дозволяє представити доданок, що описує генерацію турбулентної енергії в наступному вигляді:

$$-\overline{\mathrm{u}'_\alpha \mathrm{u}'_\beta}\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} = \mathrm{K_T G}$$

Де

$$\mathrm{G} = \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\alpha}}{\partial \mathrm{x}_\beta} + \frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\right)\frac{\partial \overline{\mathrm{u}_\beta}}{\partial \mathrm{x}_\alpha} =$$

$$= 2\left[\left(\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{y}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{w}}}{\partial \mathrm{z}}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{w}}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{w}}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{z}}\right)^2$$

Враховуючи дані співвідношення рівняння для балансу турбулентної енергії набуде вигляду:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\vec{v}}k) = \mathrm{div}\,(K_E\,\mathrm{grad}\,k) + K_T G - \varepsilon$$

Наступним кроком є використання співвідношень, що випливають з теорії розмірностей $K_E \sim K_T \sim k^2/\varepsilon$, $\varepsilon \sim k^{3/2}/L$, де L - масштаб турбулентності.

Проаналізуємо чи вдасться замкнути нашу систем. Простий підрахунок показує, що ми оперуємо трьома компонентами середньої швидкості, середнім тиском, енергією, дисипацією енергії, коефіцієнтами турбулентного обміну K_E і K_T і масштабом турбулентності L. Всього налічується дев'ять невідомих функцій. Рівняння Рейнольдса (три компоненти) і нерозривності разом з рівнянням балансу турбулентної енергії і співвідношеннями розмірності дають тільки вісім зв'язків (рівнянь) з необхідних дев'яти. Одного рівняння не вистачає. Шукане дев'яте рівняння вводиться штучним способом. Передбачається, що для дисипації турбулентної енергії існує рівняння, форма якого аналогічна рівнянню для турбулентної енергії. Доданки, що описують «генерацію дисипації» і «дисипацію дисипації», знову виражаються по теорії розмірностей через уже відомі величини. Схоже рівняння можна скласти і для масштабу турбулентності. Тоді нам довелося б користуватися такими оригінальними термінами як «генерація масштабу турбулентності» і «дисипація масштабу турбулентності». Величини $k, \varepsilon, K_T\,(K_E)$ і L пов'язані між собою співвідношеннями розмірності, що дозволяє виключити з розгляду масштаб турбулентності L (при введенні рівняння для перенесення масштабу турбулентності, слід було б враховувати при розгляді величину ε). У підсумку приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\vec{v}}k) = \mathrm{div}\left(\left[\nu + \frac{K_T}{\sigma_x}\right]\mathrm{grad}\,k\right) + K_T G - \varepsilon \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\vec{v}}\varepsilon) = \mathrm{div}\left(\left[\nu + \frac{K_T}{\sigma_\varepsilon}\right]\mathrm{grad}\,\varepsilon\right) + C_{\varepsilon 1} K_T G \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{6.23}$$

$$K_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{6.24}$$

Де $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$ - емпіричні коефіцієнти, що забезпечують задовільні результати розрахунків різних турбулентних течій.

Дана система рівнянь разом з рівняннями Рейнольдса і рівнянням неперервності складають замкнуту систему, яка називається k-ε моделлю. Дійсно, отримана система має сім невідомих ($\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{p}, k, \varepsilon$ і K_T) і сім рівнянь. Цікавою особливістю, що при відсутності поля середнього потоку дані рівняння вже самі по собі представляють замкнуту систему. В цьому випадку, зрозуміло, повинні робитися якісь додаткові припущення щодо функції G, яка описує генерацію турбулентності.

Аналогічно до моделі k-ε є моделі що пов'язують між собою інші параметри (k-ω та k-L).

6.10 Турбулентність в стратифікованих середовищах

У більшості випадків реальні геофізичні середовища є стратифікованим. В гідросфері зазвичай має місце стійка стратифікація, а в атмосфері - нестійка. Якщо стратифікація стійка, то вона може існувати тривалий час, перешкоджаючи розвитку турбулентності. Нестійка стратифікація ж, навпаки, провокує розвиток турбулентності.

У цьому пункті буде оцінено максимально можливий розмір вихорів в випадку стратифікованого середовища (масштаб Озмідова), описано основні підходи до опису турбулентності в стратифікованому середовищі в рамках підходу Рейнольдса.

6.10.1 Вплив стратифікації по густині на турбулентність. Масштаб Озмідова

Будемо розглядати однорідну по горизонталі і стратифіковану по вертикалі рідину (газ), що знаходиться в полі сили тяжіння g. Направимо вісь 0z вертикально верх, а осі 0x і 0y - горизонтально. Нехай вертикальний розподіл густини рідини визначається деякою функцією $\rho(z)$. У загальному випадку стисливої рідини стійкість стратифікації по відношенню до нескінченно малим вертикальним зміщенням частинок визначається тим, як співвідносяться фактичний градієнт густини $d\rho/dz$ і адіабатичний градієнт густини

$$\left(\frac{d\rho(p(z))}{dz}\right)_s = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s \frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{c^2} \tag{6.25}$$

де $c = \sqrt{(dp/d\rho)_s}$ - швидкість звуку. А $dp/dz = -\rho g$ взято із рівняння гідростатики.

Отже, якщо елемент об'єму рідини/газу перемістити по вертикалі на невелику відстань dz, то вона потрапить в шари з іншим тиском, і її густина зміниться. Переміщення на малу відстань dz відбувається досить швидко, тому елемент/частка не встигає обмінятися теплом з навколишнім середовищем. Отже, зміна густини частки при зміні тиску повинно відповідати адіабатичному закону (6.25). Сила плавучості, що діє на зміщену частку, пропорційна прискоренню сили тяжіння $\vec{g}$, об'єму частки V і різниці густини навколишнього середовища і частки $\Delta\rho$:

$$\mathrm{F_b} = \mathrm{gV}\Delta\rho = \mathrm{gV}\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}} - \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}}\right)_\mathrm{s}\right]\mathrm{dz} = \mathrm{gV}\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}} + \frac{\rho\mathrm{g}}{\mathrm{c}^2}\right]\mathrm{dz}$$

З формули видно, що за умови $\mathrm{d}\rho/\mathrm{dz}+\rho\mathrm{g}/\mathrm{c}^2 < 0$ знак сили плавучості протилежний знаку зсуву, отже, сила плавучості буде прагнути повернути частку в початкове положення (стійка стратифікація). За умови $\mathrm{d}\rho/\mathrm{dz} + \rho\mathrm{g}/\mathrm{c}^2 > 0$ знаки сили плавучості і зміщення збігаються. В цьому випадку сила плавучості сприятиме подальшому зростанню зсуву частки (нестійка стратифікація).

У розглянутому нами наближенні нестисливої рідини швидкість звуку прямує до нескінченності, отже, відповідно до формули (6.25), адіабатичний градієнт прагне до нуля. Критерій стійкості спрощується: при $\mathrm{d}\rho/\mathrm{dz} < 0$ (легкі шари лежать вище важких шарів) стратифікація є стійкою, а при $\mathrm{d}\rho/\mathrm{dz} > 0$ - нестійкою.

Для стійкої стратифікації середовища з простих енергетичних міркувань можна визначити масштаб турбулентності. Для визначеності будемо говорити про вихорах з горизонтальними осями, так як саме вони здатні трансформувати стратифікаційну структуру. Вихори з вертикальними осями не приймають безпосередньої участі в вертикальному обміні.

В випадку нестисливої рідини при наявності стійкої стратифікації на частинку об'ємом V, що зміщується у вертикальному напрямі на відстань ζ починає діяти сила плавучості

$$\mathrm{F}(\zeta) = \mathrm{gV}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}}\zeta$$

У випадку стійкої стратифікації $\mathrm{d}\rho/\mathrm{dz} < 0$, тому зміщення і сила F завжди мають різні знаки, тобто сила плавучості є повертаючою силою.

Оцінимо роботу, яку здійснює сила плавучості при переміщенні частинки у вертикальному напрямку на відстань z

$$\mathrm{A(z)} = \int_0^z \mathrm{F}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \mathrm{gV}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{z}^2}{2} \sim \mathrm{gV}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}}\mathrm{z}^2$$

Отримана величина A має від'ємний знак. Це говорить про те, що для переміщення частинки по вертикалі потрібно виконати роботу проти сил плавучості. Необхідна для цього енергія буде надходити з кінетичної енергії турбулентності. Іншими словами, при стійкій стратифікації рідини турбулентність втрачає свою енергію на роботу проти сил плавучості. Причому, в силу того, що кожен вихор переміщує частки рідини на відстань, рівну своїм розміром, енергетичні втрати зростають зі збільшенням масштабу турбулентності.

Для оцінки максимально можливого розміру вихору прирівняємо питому кінетичну енергію турбулентності k і роботу проти сил плавучості (- A), віднесену до одиниці маси

$$\mathrm{k} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}\rho},$$

$$\mathrm{k} = -\frac{\mathrm{g}}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}}\mathrm{z}^2 \equiv \mathrm{N}^2\mathrm{z}^2$$

Де $\mathrm{N} = \sqrt{-(\mathrm{gd}\rho)/\rho\mathrm{dz}}$ - частота Брента-Вяйсяля (частота плавучості). Виразивши величину z, одержуємо

$$\mathrm{z} \equiv \mathrm{L_o} = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{N}^2}}$$

Величина $\mathrm{L_o}$ - називається масштабом Озмідова. Фізичний сенс цієї величини – максимально можливий розмір вихорів в стійкій стратифікованій рідини. Іноді для масштабу Озмідова використовують формулу, в яку входить не енергія турбулентності, а диссипация турбулентної енергії $\mathrm{L_o} = \sqrt{\varepsilon/\mathrm{N}^3}$ Де використано зв'язок, що випливає з теорії розмірності $\varepsilon \sim \mathrm{kN}$

Стійка стратифікація завжди сприяє швидшій дисипації кінетичної енергії турбулентності. Але в залежності від масштабу турбулентного руху цей вплив може бути різним. На турбулентність з масштабами $\mathrm{L} << \mathrm{L_o}$, стратифікація впливає дуже слабо. На турбулентність з масштабами $\mathrm{L} <\sim \mathrm{L_o}$ стратифікація робить сильний стабілізуючий вплив. І, нарешті, турбулентність з масштабами $\mathrm{L} > \mathrm{L_o}$ не розвивається зовсім.

6.10.2 Рівняння балансу турбулентної енергії з урахуванням сил плавучості

У цьому параграфі ми узагальнимо висновок рівняння балансу кінетичної енергії турбулентності на випадок, коли на частинки рідини діє деяка масова/об'ємна сила F. Для оцінки внеску сили плавучості в зміну енергії турбулентності використовують узагальнене рівняння балансу. Нехай на частинки рідини діє сила яку можна подати у вигляді суми середньої величини і пульсації $\mathrm{F_i} = \overline{\mathrm{F_i}} + \mathrm{F'_i}$. Перепишемо рівняння Нав'є-Стокса і Рейнольдса з урахуванням дії цієї сили:

$$\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\mathrm{u_i u}_\alpha + \frac{\mathrm{p}}{\rho}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - \frac{\sigma_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho}\right] = \mathrm{F_i}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{u_i}}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\alpha}\left[\overline{\mathrm{u_i}}\,\overline{\mathrm{u}_\alpha} + \overline{\mathrm{u'_i u'_\alpha}} + \frac{\overline{\mathrm{p}}}{\rho}\delta_{\mathrm{i}\alpha} - \frac{\bar{\sigma}_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho}\right] = \overline{\mathrm{F}}_\mathrm{i}$$

Для компонент тензора Рейнольдса будемо використовувати наступне співвідношення

$$\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial t} - \frac{\partial\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial t} = \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - \frac{\partial\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial t}} \tag{6.26}$$

метод Фрідмана-Келлера

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} = u_j\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\overline{u_i}\overline{u_j}}{\partial t} = \overline{u_j}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_i}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial t}$$

і на правилах усереднення Рейнольдса.

Величини $\partial u_i/\partial t$ виражаємо з рівняння Нав'є-Стокса, а величини $\partial\overline{u_i}/\partial t$ - з рівняння Рейнольдса. Ми тут, покажемо тільки ті елементи перетворень, які безпосередньо пов'язані з силою F_i, оскільки інші доданки було розглянуто в попередньому розділі. Всі інші члени рівнянь будемо позначати символом «...». Використовуючи метод Фрідмана-Келлера рівняння Нав'є Стокса можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} = u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) + u_i\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) = u_j F_i + u_i F_j + \ldots$$

А рівняння Рейнольдса:

$$\frac{\partial\overline{u_i}\overline{u_j}}{\partial t} = \overline{u_j}\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t}\right) + \overline{u_i}\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial t}\right) = \overline{u_j}\,\overline{F_i} + \overline{u_i\overline{F_j}} + \ldots$$

Використовуючи дані рівняння та перетворення (6.26) отримуємо

$$\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - \frac{\partial\overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t}} = \overline{u_j F_i + u_i F_j - \overline{u_j\overline{F_i}} - \overline{u_i}\,\overline{F_j}} + \ldots \tag{6.27}$$

Перетворимо праву частину формули (6.27) відповідно до правил усереднення Рейнольдса.

$$\overline{u_j F_i + u_i F_j - \overline{u_j}\overline{F_i} + \overline{u_i}\overline{F_j}} = \overline{\left(\overline{u_j} + u_j'\right)\left(\overline{F_i} + F_i'\right) + \left(\overline{u_i} + u_i'\right)\left(\overline{F_j} + F_j'\right) - \overline{u_j}\overline{F_i} - \overline{u_i}\overline{F_j}} =$$

$$= \overline{\overline{u_j}\overline{F_i} + \overline{u_j}F_i' + u_j'\overline{F_i} + u_j'F_i' + \overline{u_i}\,\overline{F_j} + \overline{u_i}F_j' + u_i'\overline{F_j} + u_i'F_j' - \overline{u_j}\overline{F_i} - \overline{u_i}\overline{F_j}} =$$

$$= \underbrace{\overline{\overline{u}_j F_i'}}_{=0} + \underbrace{\overline{u_j'\overline{F_i}}}_{=0} + \overline{u_j'F_i'} + \underbrace{\overline{\overline{u_i}F_j'}}_{=0} + \underbrace{\overline{u_i'\overline{F_j}}}_{=0} + \overline{u_i'F_j'} = \overline{u_j'F_i'} + \overline{u_i'F_j'}$$

Видно, що врахування дії сили призводить до появи в правій частині рівняння для компонент тензора Рейнольдса двох додаткових членів $\rho\overline{u_j'F_i'}$ та $\rho\overline{u_i'F_j'}$

$$\frac{\partial\rho\overline{u_i'u_j'}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho\overline{u_i'u_j'}\overline{u_\alpha}+\rho\overline{u_i'u_j'u_\alpha'}+\left(\overline{p'u_i'}\delta_{j\alpha}+\overline{p'u_j'}\delta_{i\alpha}\right)-(\overline{u_i'\sigma_{j\alpha}'}+\overline{u_j'\sigma_{i\alpha}'})\right]=$$

$$=\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}-(\overline{\sigma_{ia}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}+\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}})-\left(\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_\alpha}+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right)+$$

$$+\rho\overline{u_j'F_i'}+\rho\overline{u_i'F_j'}$$

Далі, аналгічно до попередніх розглядів, покладемо в рівнянні $i=j\equiv\beta$. У результаті отримаємо рівняння для середньої густини кінетичної енергії пульсаційного руху $E_t=\rho\overline{u_\beta'u_\beta'}/2$ з урахуванням дії зовнішніх сил.

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_t\overline{u_\alpha}+\frac{1}{2}\rho\overline{u_\beta'u_\beta'u_\alpha'}+\overline{p'u_\alpha'}-\overline{u_\beta'\sigma_{\alpha\beta}'}\right]=$$

$$=-\rho\overline{\varepsilon_t}-\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}+\rho\overline{u_\beta'F_\beta'}$$

Останній доданок в правій частині рівняння описує роботу сили по зміні кінетичної турбулентності. Нехай в якості зовнішньої сили виступає сила плавучості (нагадаємо, що вісь 0z спрямована вертикально верх, а осі 0x і 0y лежать в горизонтальній площині). Тоді вектор сили має тільки одну відмінну від нуля компоненту $\vec{F}\equiv(F_1,F_2,F_3)=\left(0,0,-\frac{\rho'}{\rho}g\right)$

Робота сили плавучості на одиницю маси в одиницю часу визначається наступним чином:

$$W_\rho\equiv\overline{u_\beta'F_\beta'}=-\frac{g}{\rho}\overline{w'\rho'}$$

У випадку стійкої стратифікації позитивні пульсації вертикальної швидкості відповідають позитивним пульсаціям густини, тому робота буде від'ємною (дія сили плавучості в стійкій стратифікованій рідині призводить до зменшення кінетичної енергії турбулентності). У разі нестійкої стратифікації ситуація зворотня ($\overline{w'\rho'}<0$ а робота дадатня): енергії турбулентності збільшується за рахунок зменшення потенціальної енергії стратифікованої рідини. Використовуючи гіпотезу Буссінеска, введемо турбулентний коефіцієнт обміну масою

$$K_\rho=-\frac{\overline{w'\rho'}}{\frac{d\rho}{dz}}$$

З урахуванням цієї залежності формулу для роботи можемо переписати наступним чином:

$$W_\rho=\frac{g}{\rho}K_\rho\frac{d\rho}{dz}=\frac{g}{\rho}\frac{K_T}{\sigma_\rho}\frac{d\rho}{dz}$$

де K_T - коефіцієнт турбулентної в'язкості, σ_ρ - новий емпіричний коефіцієнт.

Формулу можна застосовувати в k-ε моделі, додавши в праву частину рівняння доданок, що описує витрати енергії на роботу проти сил плавучості.

7

Напівемпіричні теорії турбулентності

До напівемпіричних теорій відносять ті в яких поряд зі строгими рівняннями гідродинаміки використовують деякі додаткові зв'язки/умови, знайдені чисто емпірично (з експериментів) або ж виведені за допомогою якісних міркувань наочно-фізичного характеру і потім перевірені на дослідах [Монін, Яглом, 1965; Фрік, 1998 ч1,ч2; Frisch,1995].

7.1 Логнормальна модель (K62)

Згідно класичної теорії Колмогорова (1941) статистичні властивості турбулентності в інерційному інтервалі універсальні і залежать тільки від швидкості дисипації енергії ε і масштабу l. В рамках цього визачається, які величини можуть впливати на динаміку інерційного інтервалу. Говорячи про статистичні властивості, в першу чергу мають на увазі розподіл енергії між рухами різного масштабу, хоча, звичайно ж поле швидкості – це поле випадкової величини і щоб описати його, потрібно знати функцію розподілу ймовірності, або, що те ж саме, сукупність всіх статистичних моментів цієї величини.

В якості характеристики пульсацій швидкості на масштабі l різниця проекцій швидкості в цих точках задається співвідношенням

$$\delta v_l = v_l(\vec{r} + \vec{l}) - v_l(\vec{r})$$

Статистичні моменти цієї величини (структурні функції)

$$S_q(l) = \left\langle \delta v_l^q \right\rangle \tag{7.1}$$

в силу ізотропії течії не повинні залежати від напрямку відрізка l.

Експериментальні дослідження статистичних властивостей дрібномасштабної турбулентності ведуться, починаючи з п'ятдесятих років.

На перших порах основний інтерес представляло експериментальне підтвердження закону «п'яти третіх» і визначення константи. У численних експериментах було підтверджено існування інерційного інтервалу з розподілом енергії пульсацій швидкості, близьким до закону «5/3». Вимірювання константи дали її значення, але інтерес до точного виміру цієї величини впав після того, як стало зрозуміло, що закон Колмогорова описує реальну ситуацію тільки приблизно. Найбільш точні вимірювання енергетичного спектру однорідної турбулентності показують, що він підпорядковується степеневому закону у вигляді

$$E(k) \sim k^{-a}$$

з показником ступеня $a = 1,71 \pm 0,02$. Відмінність від п'яти третіх, на перший погляд, не велика, але вона принципова. Більш повну картину можна отримати, досліджуючи поведінку структурних функцій високих порядків. На практиці вимірюють значення швидкості в двох точках, обчислюють структурні функції (7.1) і, очікуючи існування степеневих законів виду $S_q(l) \sim l^{\zeta_q}$, будують структурні функції в подвійному логарифмічному масштабі. При цьому в інерційному інтервалі виникають лінійні ділянки, нахил яких дає величину степеневих показників ζ_q. Вже перші виміри структурних функцій відносно невисоких порядків підтвердили справедливість зауваження Ландау – локальні варіації швидкості дисипації енергії порушують колмогорівський сценарій однорідної турбулентності. Порушення локальної однорідності турбулентності отримало назву «переміжності». Суть цього явища полягає в тому, що в турбулентності навіть при як завгодно великих числах Рейнольдса активні області співіснують з пасивними, в яких потік квазіламінарний [Новіков, Стьюарт, 1964]. Першу спробу скорегувати закон К41 шляхом врахування статистичних властивостей поля дисипації енергії зробив сам Колмогоров в 1962 році (К62). Для врхування структури поля дисипації енергії Колмогоров ввів в розгляд величину ε_l, яка являє собою середню швидкість дисипації, виміряну всередині об'єму з характерним розміром l (наприклад, сфери або куба). Модель тримається на двох додаткових гіпотезах. Перша гіпотеза – це гіпотеза подібності

$$S_q(l) = \left\langle \delta v_l^q \right\rangle \sim \left\langle \varepsilon_l^{q/3} \right\rangle l^{q/3},$$

При цьому ми маємо статистичний момент порядку $q/3$.

$$\left\langle \varepsilon_l^q \right\rangle \sim l^{\tau_q}, \Rightarrow \zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}.$$

Друга гіпотеза К62 стосується виду функції розподілу ймовірності для величини ε_l. Звичайно як найпростіша ймовірнісна модель розглядається нормальний розподіл, проте, в нашому випадку так не годиться, оскільки дисипація – величина суто позитивна, а хвіст нормального розподілу може йти в область негативних значень. Колмогоров запропонував уникнути цих труднощі шляхом розгляду логнормального розподілу (за нормальним законом розподілений логарифм дисипації енергії)

$$P\left(\varepsilon_l\right) = ce^{-\frac{(\ln\varepsilon - a)^2}{2\sigma_l^2}}.$$

Де P – функція розподілу ймовірності, $a = \ln\bar{\varepsilon}, \sigma_l^2$ – дисперсія, рівна на масштабі l величині

$$\sigma_l^2 = A + \mu\ln(L/l).$$

Логнормальна модель призводить до наступних виразів для показників степені:

$$\tau_q = \frac{\mu}{2}q(1-q), \zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{\mu}{18}q(3-q)$$

Величина μ, називається коефіцієнтом переміжності, має простий фізичний зміст – з точністю до знака це показник степеня для моменту другого порядку поля дисипації енергії ($\tau_2 = -\mu$)тобто

$$\left\langle\varepsilon_l^2\right\rangle \sim l^{-\mu}.$$

Зв'язаний з другим моментом поля дисипації шостий момент поля швидкості також дозволяє просто визначити коефіцієнт переміжності –

$$\zeta_6 = 2 - \mu,$$

тобто коефіцієнт переміжності дорівнює відхиленню показника степені ζ_6 від значення, яке слідує із моделі однорідної турбулентності К41. Гіпотеза про логнормальний розподіл була спростована й експериментально, і теоретично. Експериментальні вимірювання функції розподілу ймовірності показують, що в координатах $(\ln\varepsilon, \ln P)$ функція розподілу має несиметричний вигляд, в той час як логнормальний розподіл в таких координатах повинен призводити до параболи. Щодо властивостей функції $\zeta(q)$ було доведено два твердження. По–перше, $\zeta(q)$– функція опукла і $\zeta_{q+1} \geq \zeta_q$ для будь-яких q. На відміну від другої гіпотези, гіпотеза подібності використовується до теперішнього часу, хоча її інтерпретація зазнала суттєвих змін. Справа в тому, що ця гіпотеза несе в собі два протиріччя. По-перше, ліва частина виразу містить величину, що відноситься до інерційного інтервалу, а права – величину, ефективну тільки в дисипативній області. По-друге, дисипація енергії є величина суто позитивна, а пульсації швидкості – ні. У такому випадку важко розраховувати, що статистичні властивості цих величин однакові, а саме в цьому і полягає суть гіпотези подібності.

7.2 Фрактальний розгляд

В колмогорівській моделі однорідної турбулентності (К41) спостерігається рівномірне заповнення простору вихорами кожного масштабу. Таку структуру турбулентності ілюструє рис. 7.1а, на якому схематично зображено каскад енергії від вихорів більшого масштабу до вихрів меншого масштабу і для простоти представлена ситуація, коли кожен вихор даного масштабу має під собою два вихору меншого. При цьому вихори кожного масштабу займають весь простір (на малюнку воно одновимірне). Інша картина відповідає турбулентності з переміжністю (рис.7.1б).

У рамках аналогічної схеми в цьому випадку частина вихорів не отримує енергію від вихорів верхнього рівня. На наступному рівні енергія вихорів, що залишилися (активних) вихорів знову передається тільки частині вихорів і так далі. У результаті в просторі утворюється багатомасштабна система активних і пасивних областей, яка з побудови являє собою фрактальну множину. Ідея використання фракталів для опису структури поля дисипації енергії вперше була висловлена в роботі Новікова та Стьюарта в 1964р. Найпростіша динамічна модель інерційного інтервалу, що призводить до фракталів, запропонована в роботі [Фриш,1998].

Фрактали принесли в теорію турбулентності ще одну важливу ідею – ідею про неоднозначність масштабних показників, інакше кажучи, ідею про співіснування в розвинених турбулентних полях підмножин з різними законами масштабного подібності (скейлінга). Важливо, що рівняння Нав'є - Стокса підкоряються шести принципам інваріантності, тобто, допускають шість видів перетворень, при яких будь-який розв'язок рівнянь $\vec{v}(\vec{r},t)$ залишається розв'язком цих рівнянь:

1) просторовий зсув,

2) зсув у часі,

3) перетворення Галілея,

4) парність,

5) обертання,

6) масштабна інваріантність (скейлинг).

Остання властивість означає, що рівняння Нав'є - Стокса інваріантні до перетворення

$$t, \vec{r}, \vec{v} \to \lambda^{1+a} t, \lambda \vec{r}, \lambda^{-a} \vec{v}$$

Дійсно, таке перетворення призводить до появи в рівнянні руху наступних множників

$$\lambda^{-2a-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \lambda^{-2a-1} \left[(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \rho^{-1} \nabla P \right] = \nu \lambda^{-a-2} \Delta \vec{v}$$

При кінцевій в'язкості інваріантність (подібність) забезпечується єдино можливим розв'язком $a = 1$, еквівалентним необхідності стійкості числа Рейнольдса (у скільки разів збільшується масштаб, в стільки ж разів повинна бути зменшена швидкість). Однак, при $v \to 0$ масштабна подібність забезпечується будь-яким значенням a. K41 дає розв'язок $a = 1/3$, монофрактальная модель типу β – моделі призводить до іншого, але також єдиного, розв'язку. Біфрактальная модель (див. п.7.4) передбачає співіснування в потоці двох підмножин з різними законами подібності (різними a), а мультифрактальна модель (див п. 7.5) розглядає безперервну послідовність таких підмножин, приводячи до поняття мультифрактального спектру.

7.3 β – модель

В β – моделі в кубічній області послідовність масштабів задається співвідношенням

$$l_n = l_0 2^{-n}.$$

На кожному масштабі n вихідна область розбивається на кубики з ребром l_n, загальна кількість яких є $N = (l_0/l_n)^3 = 2^{3n}$. При переході до кожного наступного масштабу активною залишається тільки задана частина кубиків b, причому ця частина є величина постійна, що є параметром моделі. На масштабі n число активних вихорів є $M = N\beta_n$, де

$$\beta_n = \beta^n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-3} = 2^{n(D-3)}$$

а D є фрактальна розмірність активної області. Величина $d = 3 - D$, рівна різниці розмірності простору і розмірності фрактальної множини, називається корозмірністю і пов'язана з параметром β :

$$d = \frac{\ln 2}{\ln \beta}.$$

Важливим є визначення каскаду енергії в такій моделі. Характерне значення пульсацій швидкості на масштабі l_n позначимо як δv_n. Тоді характерний час (час обороту вихору відповідного масштабу) є $t_n \sim l_n/\delta v_n$. При суцільному заповненні простору (випадок однорідної турбулентності) густина енергії пульсацій масштабу n

$$E_n \sim \delta v_n^2,$$

а швидкість перенесення енергії через даний масштаб є

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{\delta v_n^3}{l_n}$$

Тоді з гіпотези сталості потоку енергії в будь-якому масштабі, що відноситься до інерційного інтервалу, $\varepsilon_n = \bar{\varepsilon} = \mathrm{const}$ отримуємо колмогорівську залежність

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3}. \tag{7.2}$$

У β – моделі енергія даного масштабу зосереджена тільки в активній частині потоку і середня щільність енергії на цьому масштабі дорівнює

$$E_n \sim \delta v_n^2 \beta_n$$

Гіпотеза про те, що потік енергії як і раніше постійний, але, по мірі руху до малих масштабів, він зосереджується все в меншій частині простору. Отже,

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{\beta^n \delta v_n^3}{l_n} = \bar{\varepsilon},$$

а замість (7.2) виходить наступна оцінка для пульсацій швидкості:

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3} \beta^{-n/3} \sim \varepsilon^{-1/3} l_n^{(D-2)/3} \tag{7.3}$$

Очевидно, що фрактальна розмірність D не може бути менше двох, так як в цьому випадку інтенсивність пульсацій швидкості наростатиме із зменшенням масштабів. Отримаємо тепер оцінку для структурних функцій довільного порядку. Маємо

$$S_q(l_n) = \left\langle \delta v_l^q \right\rangle \sim \beta_n \delta v_n^q \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3} \beta^{n(1-q/3)} \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3+(3-D)(3-q)/3}$$

або

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{(3-D)(3-q)}{3}.$$

На відміну від логнормальної моделі, яка дає квадратичну поправку до колмогоровського закону $q/3$ для масштабних показників, β – модель дала лінійну поправку, яка задовольняє умові $\zeta_3 = 1$, але порушує вимогу $\zeta_0 = 0$.

7.4 Біфрактальна модель

В основі β – моделі лежить уявлення про турбулентне поле скоростей, як про однорідний фрактал, який характеризується єдиним параметром. Серед спроб удосконалення β – моделі можна виділити дві. Перша – це так звана випадкова β – модель. Якщо в стандартній β – моделі області поділяються на активні і пасивні, то є ймовірність того, що турбулентність в даній точці існує, дорівнює або нулю, або одиниці, то в випадкову β – модель вводяться два додаткові параметри p_1 і p_2, що визначають вірогідність існування турбулентності при черговому дробленні на більш активну і менш активну частини. Зупинимося детальніше на другій модифікації β – моделі, що отримала назву біфрактальної моделі. Ідея цієї моделі полягає в тому, що передбачається співіснування двох фрактальних підмножин з різними законами скейлінга виду (7.3) і відповідними розмірностями D_1 і D_2. Для пульсацій швидкості на масштабі n отримуємо оцінку

$$\delta v_n \sim \mu_1 l_n^{a_1} P_1 + \mu_2 l_n^{a_2} P_2,$$

де μ_i – деякі числові множники, а ймовірності появи елементів підмножин визначаються точно так само як і для β – моделі. В результаті, для пульсацій швидкості отримаємо

$$\delta v_n \sim \mu_1 \left(l_n/l_0\right)^{a_1+3-D_1} + \mu_2 \left(l_n/l_0\right)^{a_2+3-D_2},$$

а для структурних функцій довільного порядку

$$Sq\left(l_n\right) = \langle \delta v_n^q \rangle \sim \mu_1 l_n^{qa_1} P_1 + \mu_2 l_n^{qa_2} P_2 \sim \mu_1 \left(l_n/l_0\right)^{qa_1+3-D_1} + \mu_2 \left(l_n/l_0\right)^{qa_2+3-D_2}.$$

Нас цікавить вид масштабних множників в степеневих законах $S_q(l) \sim l^{\zeta_q}$. Оскільки (l_n/l_0) є величина мала, то визначальний внесок дає доданок з найменшим показником ступеня. З цього випливає, що

$$\zeta_q = \min\left(qa_1 + 3 - D_1, qa_2 + 3 - D_2\right).$$

7.5 Мультифрактальна модель

Природним узагальненням описаної вище біфрактальної моделі є мультифрактальна модель, яка заснована на припущенні, що в турбулентності існує безперервна послідовність підмножин, кожна з яких характеризується своїм показником a. Значення a лежать в інтервалі $a_{\min} < a < a_{\max}$. Структурні функції отримують внесок від всіх підмножин і визначаються інтегралами

$Sq = \langle \delta v_n^q \rangle \sim \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{qa} P(\alpha) d\alpha$ в яких розподіл ймовірності записується у вигляді $P(\alpha) \sim \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-f(\alpha)}$. Тоді $S_q \sim \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{qa-f(\alpha)} d\alpha$

Оскільки $l/l_0 \ll 1$ то найбільший внесок в інтеграл дає складова з мінімальним показником степеня. Отже,

$$\zeta_q = \min(q\alpha - f(\alpha)) \tag{7.4}$$

Умова мінімуму дає

$$q = f'(\alpha) \tag{7.5}$$

У такій моделі α є локальна характеристика скейлінгових властивостей, а функція $f(\alpha)$, називається мультифрактальним спектром, описує глобальну природу розподілу областей з різним скейлінгом. Очевидно, що мультифрактальна модель має по суті нескінченне число параметрів і може описати будь-яку експериментально виявлену залежність ζ_q. Розглянемо алгоритм обчислення мультифрактального спектру. Нехай є позитивно визначена величина х (це може бути густина енергії, завихреність, швидкості дисипації і т.д.). Досліджувану область розіб'ємо на кубики з ребром l (всього N кубиків) і введемо величини

$$\rho_i = \frac{\xi_i}{\sum_{i=1}^N \xi_i}$$

де ξ_i є середнє по кубику i значення розглянутої величини. Визначимо структурні функції

$$S_q = \sum_i \rho_i^q.$$

Узагальнена розмірність задається співвідношенням

$$D_q = \lim_{l\to 0} \frac{\ln \sum_i \rho_i^q}{(q-1)\ln l}.$$

Виходячи з мультифрактальної структури розглянутого поля, і вважаючи, що в різних точках простору досліджувана величина підпорядковується масштабному закону типу $\rho(l) \sim l^a$ з різними значеннями показника a, структурні функції можна записати у вигляді

$$S_q \sim \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} l^{qa-f(a)} da$$

При $l \to 0$ в інтегралі домінуючу роль відіграють області, що забезпечують мінімальне значення показника степені. Отже, значення величини ζ_q визначається умовами (7.4) – (7.5). Нехай $\alpha(q)$ є значення a, що забезпечує умову мінімуму (7.5) для заданого значення q тоді

$$S_q \sim l^{qa-f(a)}.$$

Згідно з визначенням (7.2)

$$D_q = \lim_{l\to 0} \frac{\ln S_q}{(q-1)\ln l} \cong \frac{qa - f(a)}{(q-1)}$$

або

$$f(a) = qa(q) - D_q(q-1) \tag{7.6}$$

Вираз (7.6) диференціюємо по q. Враховуючи, що $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial q}$ і умову (7.4), отримуємо

$$a(q) = \frac{d}{dq}\left[(q-1)D_q\right] \tag{7.7}$$

Таким чином, алгоритм обчислення мультифрактального спектру полягає в наступному. Маючи вимірювання ξ_i, за формулою (7.4) обчислюють розмірність $D(q)$ для різних значень q (як позитивних, так і негативних). Потім за формулою (7.7) визначають значення $a(q)$, що забезпечують мінімум для даного q. Після цього за формулою (7.6) обчислюють спектр $f(a)$.

7.6 Логпуассоновські моделі

У цьому пункті ми розглянемо моделі останнього покоління, що виникли в середині 90-х років. Першою описана модель, запропонована Ше і Левеком в 1994 році. Заснована на трьох гіпотезах, з яких дві здавалися не дуже переконливими, модель дала просту формулу для залежності ζ_q. За щасливим збігом обставин, в цей же час групою італійських і французьких дослідників експериментально був виявлений цікавий факт, що отримав назву розширеної автомодельності, який дозволив істотно підвищити точність експериментального визначення показників ζ_q для структурних функцій високих порядків. Нові експериментальні результати на диво добре збіглися з формулою Ше - Левека. Істотне узагальнення цієї моделі було зроблено Б. Дюбрюль [Dubrulle, 1994], яка включила в модель і ідею розширеної автомодельности.

7.6.1 Модель Ше - Левека

Модель Ше - Левека тримається на трьох гіпотезах. Перша – це гіпотеза подібності, введена Колмогоровим в моделі К62

$$S_q(l) = \langle \delta v_n^q \rangle \sim \left\langle \varepsilon_l^{q/3} \right\rangle l^{q/3},$$

яка записувалася вище і у вигляді

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}$$

в якому передбачається існування степеневого закону $\left\langle \varepsilon_l^q \right\rangle \sim l^{\tau_q}$ для статистичних моментів поля дисипації енергії. Модель містить у собі і ідею мультифрактальності розвиненої турбулентності, суть якої полягає в тому, що в потоці співіснують області з різними законами скейлінга і що для моментів (структурних функцій) різного порядку визначальну роль відіграють області з різним скейлінгом. У моделі вважається, що дисипація енергії ε_l характеризується «ієрархією флуктуючих структур» $\varepsilon_l^{(q)}$, які визначаються як відношення наступних моментів поля дисипації

$$\varepsilon_l^{(q)} = \lim_{q\to\infty} \frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle} \tag{7.8}$$

Послідовність відносних моментів $\varepsilon_l^{(q)}$ обмежена, з одного боку, членом $\varepsilon_l^{(0)}$, який відповідає середньому значенню швидкості дисипації $(\varepsilon_l^{(0)})$, і доданком

$$\varepsilon_l^{(\infty)} = \lim_{q\to\infty} \frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle} \tag{7.9}$$

з іншого боку. Відносні моменти (7.8) зручні тим, що всі вони мають розмірність швидкості дисипації. Поле дисипації вкрай неоднорідне і формується структурами з різними скейлінговими властивостями. Чим більше номер відносного моменту q, тим більш неоднорідні структури він описує. Вважається, що межа послідовності (7.9) існує і визначається видом граничних дисипативних структур, в яких швидкість дисипації досягає екстремально великих значень. Виходячи з експериментальних спостережень останніх років, автори моделі припустили, що ці граничні структури мають вигляд вихрових ниток з розмірністю $D = 1$. Дві гіпотези, що залишилися стосуються властивостей відносних моментів $\varepsilon_l^{(q)}$. Гіпотеза 2 вводить універсальний зв'язок, що пов'язує старший момент з молодшим,

$$\varepsilon_l^{(q+1)} = A_q \varepsilon_l^{(q)^\beta} \varepsilon_l^{(\infty)^{(1-\beta)}}. \tag{7.10}$$

Співвідношення включає невідомий поки параметр β і є, напевно, найсильнішим припущенням, зробленим при побудові моделі. Зрозуміло, що будь-яка гіпотеза щодо зв'язку статистичних моментів різних порядків є, по суті, гіпотеза щодо функції розподілу випадкової величини, моменти якої розглядаються. Третя гіпотеза стосується величини $\varepsilon_l^{(\infty)}$. Передбачається, що вона задовольняє степеневому закону

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim l^{-2/3}.$$

Фізичним мотивуванням є те що величина $\varepsilon_l^{(\infty)}$ залежить від граничних дисипативних структур і має розмірність швидкості дисипації енергії. Отже, із міркувань розмірності

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \frac{\delta E^\infty}{t_l},$$

де δE^{∞} – густина енергії, що доступна для дисипації в ниткоподібних структурах. Вважається, що в цих дисипативних структурах має місце квазірозрив, тобто незалежно від масштабу $\delta v_l \approx \delta v_0$ і енергія не залежить від масштабу l. Масштаб часу приймається колмогорівським ($t_l \sim \bar{\varepsilon}^{-1/3} l^{2/3}$), що призводить до оцінки

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \frac{1}{t_l} \sim l^{-2/3}.$$

На основі введених гіпотез можна отримати вираз для структурних функцій поля дисипації, а потім і поля швидкості. З третьої гіпотези випливає, що при $q \to \infty$

$$\varepsilon_l^{(q)} = \frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle} \sim \frac{l^{\tau_{q+1}}}{l^{\tau_q}} \sim l^{-2/3}$$

і, отже, при великих q

$$\tau_q = -\frac{2}{3} q + C. \tag{7.11}$$

Користуючись уявленнями про фрактальну структуру з розмірністю D можна записати

$$\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle \sim l^{-2q/3} l^{3-D},$$

звідки випливає, що константа C має сенс корозмірності, а оскільки зроблено припущення про те, що структури є нитки, то їх корозмірність дорівнює двом. Таким чином, $C = 2$. Для довільних значень q до виразу (7.11) слід додати функцію, вид якої визначається за допомогою другої гіпотези. Отже,

$$\tau_q = f(q) - \frac{2}{3} q + C,$$

причому $f(q) \to 0$ при $q \to \infty$. Вираз (7.10) перепишемо у вигляді

$$\frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+2} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle} = A_q \left(\frac{\left\langle \varepsilon_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_l^{q} \right\rangle} \right)^{\beta} \varepsilon_l^{(\infty)^{(1-\beta)}},$$

еквівалентному рівнянню

$$\tau_{q+2} = (1+\beta)\tau_{q+1} - \beta\tau_q - \frac{2}{3}(1-\beta).$$

Рівняння для функції $f(q)$ має вигляд

$$f(q+2) - (1+\beta) f(q+1) + \beta f(q) = 0,$$

рішення якого є $f(q) = a\beta^q$ і, отже,

$$\tau_q = a\beta^q - \frac{2}{3}q + C$$

Константи, що входять в рівняння визначаються із умов $\tau_0 = \tau_1 = 0\left(\left\langle\varepsilon_l^0\right\rangle = 1, \left\langle\varepsilon_l^1\right\rangle = \bar{\varepsilon} \sim l^0\right)$. З першої умови $a = -C = -2$, з другої –

$$\beta = \frac{C - 2/3}{C} = \frac{2}{3}.$$

Остаточно маємо

$$\tau_q = -\frac{2q}{3} + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^q\right),$$

а користуючись першою гіпотезою – гіпотезою подібності К62, отримуємо шукану формулу для показників ступеня структурних функцій поля швидкості

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{q/3}\right).$$

На рис.7.2 приведено експериментальні дані, взяті з різних робіт, наведені разом з кривими, що відповідають різним моделям.

7.6.2 Розширена автомодельність

Розширена автомодельність (Extended Self Similarity (ESS)) – це експериментально встановлений факт, що не знайшов ще достатнього теоретичного осмислення. Перші результати були отримані при вимірах властивостей дрібномасштабної турбулентності в аеродинамічній трубі і опубліковані в роботі [Benzi et al, 1993]. Мета роботи полягала у вивченні властивостей структурних функцій $S_q(l)$ і $T_q(l) = \langle|\delta v_l|^q\rangle$. По-перше, в роботі Бензі було показано, що функції T_q статистично більш стійкі (для їх визначення потрібна менша кількість реалізацій) і підкоряються тим же степеневим законам, що й функції S_q (йдеться про функції непарних порядків, оскільки для парних функції просто збігаються). По-друге, було виявлено цікавий зв'язок між структурними функціями різних порядків. На рис.7.3 показані результати вимірювання структурної функції другого порядку, отримані для течії в аеродинамічній трубі при трьох значеннях числа Рейнольдса (квадрати – $\mathrm{Re} = 6000$, кружки – $\mathrm{Re} = 22500$ та хрести – $\mathrm{Re} = 47000$). Вивчаючи ці дані, можна бачити, що питання про ідентифікацію інерційного інтервалу далеко не просте навіть для досить високих значень числа Рейнольдса.

Опрацьовуючи результати вимірювань структурних функцій пульсацій швидкості, автори запропонували незвичайне представлення даних. По осі абсцис замість масштабу l була відкладена структурна функція третього порядку S_3. Несподіваний результат полягав у тому, що при представленні результатів в координатах $(\ln S_q, \ln S_3)$ інерційний інтервал стає більш вираженим – прямолінійна ділянка графіку продовжується до масштабів, які лише в кілька разів перевищують дисипативний масштаб λ. Важливо, що нахил кривої залишається при цьому незмінним. Таким чином, виявлений ефект дозволяє значно збільшити точність визначення показників ζ_q. Цікаво, що ESS- аналіз призводить до появи «інерційного інтервалу» і при відносно низьких значеннях числа Рейнольдса, коли в звичайному представленні інерційний інтервал не виявляється зовсім. У більш загальному вигляді розширена автомодельність (ESS-аналіз) проявляється при будь-якому представленні виду

$$S_q(l) = S_p^{\zeta_q/\zeta_p} \tag{7.12}$$

тобто розширення інерційного інтервалу відбувається при використанні осей координат будь-якої пари структурних функцій.

7.7 Модель Ше - Левека – Дюбрюль

На закінчення розглянемо узагальнення моделі Ше-Левека, запропоноване Б. Дюбрюль [Dubrulle, 1994]. В основі узагальнення лежать наступні ідеї. По-перше, використовуючи розширену автомодельність, позбутися від абсолютного масштабу l. По-друге, відмовитися від спроби отримати без параметричну модель. Останнє означає, що зменшується число гіпотез, апріорно закладених в модель, але ускладненням за це є додаткові параметри, що вимагають експериментального визначення. По-третє, замість величини ε_l розглядається безрозмірна величина

$$\pi_l = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_l^{(\infty)}}$$

що є безрозмірною характеристикою поля дисипації енергії (або потоку енергії) на масштабі l. У формулюванні Дюбрюль три гіпотези Ше - Левека набувають наступний вигляд:

I) модифікована гіпотеза подібності

$$\frac{\delta v_l^3}{\left\langle \delta v_l^3 \right\rangle} = \frac{\varepsilon_l}{\langle \varepsilon_l \rangle} = \frac{\pi_l}{\langle \pi_l \rangle} \tag{7.13}$$

за рахунок наявності однакових статистичних властивостей;

II) ієрархія моментів

$$\frac{\left\langle \pi_l^{q+1} \right\rangle}{\left\langle \pi_l^q \right\rangle} = A_p \left(\frac{\left\langle \pi_l^q \right\rangle}{\left\langle \pi_l^{q-1} \right\rangle} \right)^\beta \tag{7.14}$$

III) гіпотеза про переміжність (про наявність степеневого закону для величини $\langle \pi_l \rangle$)

$$\langle \pi_l \rangle \sim \left(\frac{\langle \delta v_l^3 \rangle}{\bar{\varepsilon} \lambda} \right)^{\Delta} . \tag{7.15}$$

Зв'язок модифікованої гіпотези подібності з гіпотезою подібності К62 буде обговорена нижче. Друга гіпотеза являє собою точну копію відповідної гіпотези Ше-Левека, переписаною в термінах величини π_l. У третій гіпотезі з'явився незалежний параметр Δ, що характеризує скейлінгові властивості екстремальних структур. Гіпотези (7.13) – (7.15) дозволяють отримати після нескладних обчислень формулу для показників ζ_q. Для цього, користуючись другою гіпотезою, отримуємо зв'язок вищих моментів величини π_l з першим. Дійсно

$$\left\langle \pi_l^{q+1} \right\rangle = \left\langle \pi_l^q \right\rangle^{\beta+1} \left\langle \pi_l^{q-1} \right\rangle^{-\beta}$$

і можна побудувати ланцюжок виразів

$$\left\langle \pi_l^2 \right\rangle = \langle \pi_l \rangle^{\beta+1} ,$$
$$\left\langle \pi_l^3 \right\rangle = \left\langle \pi_l^2 \right\rangle^{\beta+1} \langle \pi_l \rangle^{-\beta} = \langle \pi_l \rangle^{1+\beta+\beta^2} ,$$
$$\dots\dots\dots\dots ,$$
$$\left\langle \pi_l^q \right\rangle = \langle \pi_l \rangle^{\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k}$$

Обчисливши суму ряду

$$\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k - \sum_{k=q}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta^q}{1-\beta} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta}$$

отримуємо

$$\left\langle \pi_l^q \right\rangle = \langle \pi_l \rangle^{\frac{1-\beta^q}{1-\beta}}$$

Використовуючи третю гіпотезу (7.15), отримуємо співвідношення

$$\left\langle \pi_l^q \right\rangle \sim \langle \delta v_l \rangle^{\Delta \frac{1-\beta^q}{1-\beta}}$$

Вираз для структурних функцій пульсацій поля швидкості при цьому буде

$$\left\langle \delta v_l^q \right\rangle \sim \left\langle \delta v_l^3 \right\rangle^{q/3} \frac{\left\langle \pi_l^{q/3} \right\rangle}{\langle \pi_l \rangle^{q/3}} = \left\langle \delta v_l^3 \right\rangle^{\frac{q}{3}(1-\Delta)+\Delta \frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}} .$$

Тоді формула для показників ступеня є

$$\zeta_q = \frac{q}{3}(1-\Delta) + \Delta \frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}.$$

У результуючу формулу входять два параметри, які можуть бути визначені дослідним шляхом: β і Δ. При $\beta = \Delta = 2/3$ ми маємо формулу Ше - Левека.

Слід зазначити, що в останні роки були зроблені спроби описати випадкові турбулентні поля і за допомогою інших функцій розподілу (наприклад, лог-Леви) але остаточну відповідь на питання про закони розподілу ймовірності в турбулентних потоках ще не дано.

8

Аспекти турбулентності в астрофізичній плазмі

Магнітні поля пронизують Всесвіт. Вони існують в планетах, зірках, акреційних дисках, галактиках, скупченнях галактик і в міжгалактичному середовищі. При цьому дуже часто має місце ситуація що компоненти поля, є просторово когерентні на масштабах астрофізичного об'єкта, а силові лінії магнітного поля заплутуються хаотично викликаючи магнітні коливання на різних масштабах. Причина такої розбіжності в турбулентному стані плазми в цих системах. В астрофізичній плазмі ми зазвичай стикаємося із високопровідною плазмою в якій виконується умова вмороженості. По мірі того як поля розтягуються і вигинаються турбулентністю, вони можуть чинити опір деформації шляхом дії сили Лоренца на плазму. Турбулентна адвекція магнітного поля і зворотна реакція поля разом призводять до статистично рівномірного стану - розвиненої МГД турбулентності. Незважаючи на більш ніж п'ятдесят років досліджень і безліч значимих результатів, задовільна теорія МГД турбулентності залишається важкодоступною. Справді, навіть найпростіші (найбільш ідеалізовані) випадки досі не до кінця зрозумілі. Сподіваємося, що існують універсальні властивості МГД турбулентності, які проявляються у всіх випадках - або, принаймні, в частині їх. Серед найбільш важливих питань для астрофізики, на які повинна дати відповідь успішна теорія турбулентності, такі:

• Яким чином турбулентність посилюється, підтримується і визначає форму магнітних полів? Яка структура і спектр цих полів на великих і малих масштабах? Тому проблема турбулентності в астрофізиці безпосередньо пов'язана з фундаментальною проблемою генерації магнітного поля.

• Як енергія передається між каскадами і дисипує в плазмовій турбулентності? Яка роль нагрівання іонів або електронів за рахунок турбулентних процесів у акреційних дисках і сонячній короні.

• Яким чином турбулентний потік і магнітне поле підсилюють або стримують перенесення тепла і впливають на кутовий момент і космічні промені.

В цьому розділі, ми коротко обговоримо сучасні уявлення про найбільш базові властивості астрофізичної МГД турбулентності. Розглянемо коротко базові аспекти та приділимо увагу застосуванню в двох рознесених точках простору - турбулентності в сонячному вітрі і в скупченнях галактик. Це, в певному (дуже наближеному) сенсі, два «чистих» випадки маломасштабної турбулентності, де теоретичні моделі двох основних режимів МГД турбулентності можуть бути перевірені експериментально. Вони також є хорошими прикладами труднощів, які в тій чи іншій мірі властиві астрофізичній плазмі. Астрофізична плазмова турбулентність ще більш невідомий напрямок досліджень ніж МГД турбулентність, тому ми як і в попередніх розділах старуємо з рівнянь нестискуваної МГД – найпростіша система рівнянь яка описує (дозвукову) турбулентну динаміку в провідному середовищі:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \nu\Delta\vec{u} + \vec{B}\cdot\nabla\vec{B} + \vec{f}, \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{8.1}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{B}\cdot\nabla\vec{u} + \eta\Delta\vec{B} \tag{8.2}$$

де $\vec{u}$ - поле швидкостей, $d/dt = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ -конвективная похідна, p тиск (пропорційний постійній густині і визначається напругою нестискуваності), ν - кінематична в'язкість, η - коефіцієнт магнітної дифузії і $\vec{f}$ - об'ємна сила, що відповідає за великомасштабне надходження енергії. Конкретні механізми надходження енергії різняться: зазвичай, в астрофізиці, це або фонові градієнти (наприклад, температурний градієнт в зоряних конвективних зонах, кеплерівська швидкість в акреційних дисках), які служать посередником між перетворенням гравітаційної енергії в кінетичну енергію руху потоку, або прямі джерела енергії, такі як наднові в міжзоряному середовищі або активні ядра галактик в скупченнях галактик. Що спільного між цими механізмами, так це те, що масштаб L, на якому вони відбуваються порівняний з розмірами системи. У той час як великомасштабна динаміка залежить від конкретної астрофізичної ситуації, загальноприйнято вважати, що, як тільки енергія перейшла на масштаби значно менші L, нелінійна динаміка є універсальною.

Універсальність на малих масштабах - наріжний камінь всіх теорій турбулентності. Вона бере початок із колмогоровской теорії 1941 (дуже часто використовують позначення K41).

Історія теорії МГД турбулентності протягом останнього півстоліття показує спроби адаптувати міркування теорії K41 до середовищ/рідин що мають магнітні поля. В рамках наступних двох параграфів буде розглянуто, по суті, відхилення МГД турбулентності від гідродинамічної.

8.1 Альфвенівська турбулентність

Розглянемо випадок плазми, витягнутої прямим однорідним магнітним полем деякого зовнішнього (наприклад, великомасштабного) походження. Розглянемо також слабкі зміни, під час яких турбулентні збудження є малими за амплітудою і схожі на хвилі збурення, що поширюються уздовж середнього поля. Турбулентність з такими параметрами називають альфвенівською і вона апріорі є анізотропною.

8.1.1 Турбулентність Ірошнікова-Крейчнана

Якщо ми розділимо магнітне поле на середню і флуктуюючу частину $\vec{B} = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}$, і перейдемо до змінних Ельзассера $\vec{z}^{\pm} = \vec{u} \pm \delta\vec{B}$, рівняння (8.1) і (8.2) будуть мати симетричний вигляд:

$$\partial \mathrm{z}^{\pm}/\partial t \mp v_{\mathrm{A}} \nabla_{\|} \mathrm{z}^{\pm} + \mathrm{z}^{\mp} \cdot \nabla \mathrm{z}^{\pm} = -\nabla p + \frac{\nu + \eta}{2} \Delta \mathrm{z}^{\pm} + \frac{\nu - \eta}{2} \Delta \mathrm{z}^{\mp} + \mathrm{f}, \quad (8.3)$$

де v_{A} - альвенівська швидкість і $\nabla_{\|}$ градієнт в напрямку середнього поля $\vec{B}_0$. Рівняння Ельзассера мають простий точний розв'язок: якщо $\vec{z}^{+} = 0$ або $\mathrm{z}^{-} = 0$, нелінійний доданок зникає і поле Ельзассера є просто флуктуацією довільної форми і величини, що розповсюджується вздовж середнього поля з альфвенівською швидкістю.В 1965 році Крейчнан зрозумів, що представлення МГД рівнянь через поля Ельзассера дозволяє враховувати лише нелінійні взаємодії між зустрічними такими флуктуаціями. Феноменологічна теорія, яку він і, незалежно від нього, Ірошніков, розвинули на основі цієї ідеї (теорія ІК) має наступний вигляд/вкладається в наступну схему.

Використовуючи підхід теорії К41, припустимо, що тільки флуктуації порівнянних масштабів взаємодіють (локальність взаємодій) і розглянемо ці взаємодії в інерційному інтервалі, що включає в себе масштаби l, менші, ніж масштаб L, і більші, ніж масштаб диссипации (який ще необхідно визначити). Будемо вважати, що флуктуації, що поширюються в будь-якому напрямку, утворюють послідовність просторово-локалізованих альвенівських-хвильових пакетів в паралельному (до середнього поля) напрямку $l_{\|}$ і в перпендикулярному напрямку l (не будемо поки уточнювати, як відносяться $l_{\|}$ до l). Припустимо, що $\delta z_l^{+} \sim \delta z_l^{-} \sim \delta u_l \sim \delta B_l$. Ми можемо знову використовувати рівняння Колмогорова для потоку енергії, але, на відміну від випадку чисто гідродинамічної турбулентності, не існує із умови розмірності однозначності у визначенні часу каскаду, тому що два фізичних часових масштаби співвіднесені з кожним хвильовим пакетом: альвеновський час $\tau_{\mathrm{A}}(l) \sim l_{\|}/v_{\mathrm{A}}$

і час напруги (або «вихровий час») $\tau_{\rm s}(l) \sim l/\delta u_l$. Тобто в МГД турбулентності є три безрозмірні комбінації $\varepsilon l/\delta u_l^3, \delta u_l/v_{\rm A}$ і $l_\parallel/l$, тому аналіз розмірностей неоднозначно визначає скейлінг і потрібен більш глибокий «фізичний» розгляд. Два зустрічних хвильових пакета проходять одинвідносно іншого за час Альвена. Протягом цього часу, амплітуда кожного пакета змінюється на величину

$$\Delta\delta u_l \sim \frac{\delta u_l^2}{l}\tau_{\rm A} \sim \delta u_l \frac{\tau_{\rm A}}{\tau_{\rm s}}.$$

Теорія ІК тепер передбачає можливість слабких взаємодій $\Delta\delta u_l \ll \delta u_l \Leftrightarrow \tau_{\rm A} \ll \tau_{\rm s}$. Час каскаду τ_l оцінюється, як час, необхідний (після багатьох взаємодій), щоб змінити δu_l на величину, порівнянну з ним. Якщо зміни в амплітуді складаються, як вільний пробіг, ми маємо

$$\sum^t \Delta\delta u_l \sim \delta u_l \frac{\tau_{\rm A}}{\tau_{\rm s}}\sqrt{\frac{t}{\tau_{\rm A}}} \sim \delta u_l$$

для

$$t \sim \tau_l \Rightarrow \tau_l \sim \frac{\tau_{\rm s}^2}{\tau_{\rm A}} \sim \frac{l^2 v_{\rm A}}{l_\parallel \delta u_l^2} \tag{8.4}$$

Підставляючи останню формулу в рівняння ($\varepsilon \sim \delta u_l^2/\tau_l$), ми отримаємо

$$\delta u_l \sim (\varepsilon v_{\rm A})^{1/4}\, l_\parallel^{-1/4} l^{1/2} \tag{8.5}$$

Останнім припущенням моделі ІК, було наявність ізотропії ($l_\parallel/l \sim 1$) що призвело до співвідношення

$$\delta u_l \sim (\varepsilon v_{\rm A})^{1/4}\, l^{1/4} \Rightarrow E(k) \sim (\varepsilon v_{\rm A})^{1/2}\, k^{-3/2}. \tag{8.6}$$

8.1.2 Турбулентність в сонячному вітрі

Сонячний вітер став першим видом астрофізичної плазми, в якому стали можливі прямі вимірювання турбулентності. Цілий ряд наступних спостережень [Molokov et al, 2007; Schekochihin et al,2007] показали степеневі спектри швидкостей і магнітних флуктуацій в інерційному інтервалі масштаби якого охоплювали від 10^3 до 10^6 км. Середнє магнітне поле є порядку $B_0 \sim 10\ldots10^2$ нТл , а значення флуктуючої частини в кілька разів менше. Дисперсія швидкостей $\delta u \sim 10^2$ км/с. Флуктуації u і B добре корелюють на всіх масштабах. Тому плазму сонячного вітру природньо використовують для перевірки теорії альфвенівської турбулентності в астрофізичних умовах («космічній лабораторії»)

Протягом приблизно 30 років, теорія ІК приймалася як коректне розширення К41 в МГД турбулентність яка із незначними модифікаціями пояснювала що спостерігається дисбаланс між енергіями z^+ і z^- флуктуацій. Однак, вимірювання турбулентності в сонячному вітрі показали, що вона була сильно анізотропна з $l_\parallel > l_\perp$ і що її спектральний індекс був ближче до $-5/3$, ніж до $-3/2$. Чисельне моделювання підтвердило анізотропію МГД турбулентності при наявнсті сильного середнього поля.

8.1.3 Слабка турбулентність

Розуміння того, що припущення про ізотропію має бути відхилено, призвело до повторного розгляду взаємодій альвенівських хвиль в МГД турбулентності. Якщо прийняти припущення про слабкі взаємодії, то МГД турбулентність може розглядатися як ансамбль хвиль, хвильові вектори і частоти яких $\omega^\pm(\vec{k}) = \pm k_\parallel v_\mathrm{A}$ мають задовольняти умовам резонансу, для того щоб взаємодія мала місце. Для трьоххвильових взаємодій (хвилі 1 і 2 які рухаються назустріч, призведуть до виникнення хвилі 3),

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 \quad \Rightarrow \quad k_{\parallel 1} + k_{\parallel 2} = k_{\parallel 3},$$

$$\omega^\pm\left(\vec{k}_1\right) + \omega^\mp\left(\vec{k}_2\right) = \omega^\pm\left(\vec{k}_3\right) \quad \Rightarrow \quad k_{\parallel 1} - k_{\parallel 2} = k_{\parallel 3},$$

Звідки $k_{\parallel 2} = 0$ і $k_{\parallel 3} = k_{\parallel 1}$. Таким чином,

(I) взаємодії не змінюють $k_\parallel$;

(II) взаємодії визначаються модами $k_\parallel = 0$.

Перший з цих висновків передбачає швидку поправку до теорії ІК: приймають $l_\parallel \sim k_{\parallel 0}^{-1} = \mathrm{const}$ (хвильове число, на якому генеруються хвилі) і $l \sim l_\perp$ в рівнянні (8.5) (паралельні каскади відсутні). Тоді спектр буде

$$E\left(k_\perp\right) \sim \left(\varepsilon k_{\parallel 0} v_\mathrm{A}\right)^{1/2} k_\perp^{-2} \tag{8.7}$$

Такий же результат може бути отриманий, використовуючи формальний підхід, заснований на стандартній теорії слабкої турбулентності. Однак, ця умова виконується не для всіх $k_\perp$. Справді, перевіримо, чи дійсно задовольняється припущення про слабкі взаємодії $\tau_\mathrm{A} \ll \tau_\mathrm{s}$ співвідношенням (8.5) з $l_\parallel \sim k_{\parallel 0}^{-1}$:

$$\frac{\tau_\mathrm{A}}{\tau_\mathrm{s}} \sim \frac{\varepsilon^{1/4}}{\left(k_{\parallel 0} v_\mathrm{A}\right)^{3/4} l_\perp^{1/2}} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad l_\perp \gg l_* = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\left(k_{\parallel 0} v_\mathrm{A}\right)^{3/2}} \sim \frac{\delta u_L^2}{v_\mathrm{A}^2} \frac{1}{k_{\parallel 0}^2 L}, \tag{8.8}$$

(13) де δu_L швидкість на зовнішньому масштабі (середньоквадратична швидкість). Таким чином, якщо $Re = \delta u_L L/\nu$ і $R_m = \delta u_L L/\eta$ досить великі, то інерційний інтервал завжди буде містити масштаб l_*, менше якого взаємодії не будуть слабкими.

8.1.4 Турбулентність Голдрича-Шридхара

У 1995, Голдрич і Шридхард [Goldreich and Shridhar,1995] припустили, що сильна турбулентність нижче масштабу l_* повинна задовольняти

$$\tau_{\mathrm{A}} \sim \tau_{\mathrm{s}} \Leftrightarrow l_{\|}/l_{\perp} \sim v_{\mathrm{A}}/\delta u_l \tag{8.9}$$

- умова критичної рівноваги. Голдрич та Шридхар стверджували, що коли $\tau_{\mathrm{A}} \ll \tau_{\mathrm{s}}$, теорія слабкої турбулентності «штовхає» спектр у напрямку до рівності (8.9). При цьому також вважалося, що коли $\tau_{\mathrm{A}} \gg \tau_{\mathrm{s}}$, рухи уздовж силових ліній декоррельовані. При цьому критична рівновага фіксує відношення між двома з трьох безрозмірних комбінацій в МГД турбулентності. Оскільки тепер є тільки один природний часової масштаб, асоційований з флуктуаціями на масштабі l, цей часовий масштаб тепер є характерним часом каскаду («вихровий час») $\tau_l \sim \tau_{\mathrm{s}}$. В результаті для перпендикулярного каскаду будемо мати співвідношення аналогічне до спектру Колмогорова ($E(k) \sim \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$):

$$\delta u_l \sim (\varepsilon l_{\perp})^{1/3}$$

$$E(k_{\perp}) \sim \varepsilon^{2/3}k_{\perp}^{-5/3}$$

Каскад в паралельному напрямку також присутній, але він слабший. Із рівняння (8.9),

$$l_{\|} \sim v_{\mathrm{A}}\varepsilon^{-1/3}l_{\perp}^{2/3} \sim k_{\|0}^{-1}\,(l_{\perp}/l_*)^{2/3} \tag{8.10}$$

Степеневі залежності Колмогорова і рівняння (8.10) повинні виконуватися на всіх масштабах $l_{\perp} \ll l_*$ і вище масштабу дисипації: або в'язкого $l_{\nu} \sim \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}$, або резистивного $l_{\eta} \sim \left(\eta^3/\varepsilon\right)^{1/4}$, залежить від того, який більший. Порівнюючи ці масштаби із l_* (рівняння (8.8)), можна відмітити наявність сильної турбулентності якщо Re, $R_m \gg \left(k_{\|0}L\right)^3 (v_{\mathrm{A}}/\delta u_L)^3$. Дана ситуація має місце для більшості астрофізичних об'єктів. Теорію Голдрича-Шрідхара (ГШ) на сьогоднішній момент частіше використовують для опису МГД турбулентності ніж теорію ІК. Хоча є велика кількість експериментальних даних які вказують на те що спектральний індекс дуже сильно залежить від значення середнього поля в плазмі. Тому ми ще далеко від фізичного розуміння того, що насправді відбувається в турбулентному магнітному потоці на динамічному рівні. Одна концептуальна різниця між МГД і гідродинамічною турбулентністю полягає в можливості довготривалих кореляцій. В області великих чисел Рейнольдса, магнітне поле визначається переміщенням плазми. У «стабільній» плазмі, напруга силових ліній намагається повернути лінії поля до незбуреного положення рівноваги. Тільки «обмінні» $\left(k_{\|} = 0\right)$ рухи цілих силових ліній не є предметом цього ефекту «віддачі». Такі рухи часто визначаються геометрією або граничними умовами. Таким чином, елементи потоку в МГД не можуть просто випадково блукати, так як це призведе до збільшення (необмеженого) напруги силових ліній. Однак, вони можуть випадково блукати значний час, перш ніж напруга поверне їх назад в стан рівноваги. Роль таких довготривалих кореляцій в МГД турбулентності невідома.

Турбулентність в міжзоряному середовищі. Розпад Альфвенівських хвильових каскадів Розглянемо демонстрацію того, як турбулентний каскад, асоційований з хвилями Альвена (або, точніше, з флуктуаціями альфвенівських хвиль), розпадається на каскади повільних хвиль і флуктуації ентропії. Вихідними будуть рівняння МГД:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{u}, \tag{8.11}$$

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{\vec{B}\cdot\nabla\vec{B}}{\mu_0}, \tag{8.12}$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad s = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad \gamma = \frac{5}{3}, \tag{8.13}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{B}\cdot\nabla\vec{u} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{u}. \tag{8.14}$$

Розглянемо однорідне стаціонарне і прямолінійне магнітне поле, в якому $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $p = p_0 + \delta p, \vec{B} = \vec{B}_0 + \delta\vec{B}$. Грунтуючись на спостережних і чисельних результатах, розумно припустити, що турбулентність в таких системах буде анізотропною з $k_\parallel \ll k_\perp$.. Введемо малий параметр $\epsilon \sim k_\parallel/k_\perp$ і виконаємо розклад рівнянь (8.11) - (8.14) по цьому малому параметрі. У цьому розкладі, флуктуації є малими, але не довільно малими: щоб оцінити їх розмір, ми приймемо припущення про критичну рівновагу (8.9), яке тепер трактується як умова впорядкування. Це дозволяє нам записати:

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} \sim \frac{u_\perp}{v_A} \sim \frac{u_\parallel}{v_A} \sim \frac{\delta p}{p_0} \sim \frac{\delta B_\perp}{B_0} \sim \frac{\delta B_\parallel}{B_0} \sim \frac{k_\parallel}{k_\perp} \sim \epsilon \tag{8.15}$$

де ми також вважаємо, що швидкість і флуктуації магнітного поля мають характер альвенівських і повільних хвиль ($\delta\vec{B} \sim \vec{u}$) і що відносні амплітуди флуктуацій Альфвенівських хвиль ($u_\perp/v_A, \delta B_\perp/B_0$), флуктуації повільних хвиль ($u_\parallel/v_A, \delta B_\parallel/B_0$) і флуктуації густини ($\delta\rho/\rho_0$) всі одного порядку. Припустимо далі, що характеристична частота флуктуацій $\omega \sim k_\parallel v_A$, що означає, що швидкі хвилі, для яких $\omega \simeq k_\perp\sqrt{v_A^2 + c_s^2}$, де $c_s = \gamma p_0/\rho_0$ швидкість звуку, впорядковані. Флуктуації альвенівських хвиль є двухмірно соленоїдальні: так як $\nabla\cdot\vec{u} = O\left(\epsilon^2\right)$ (з рівняння (8.11)) і $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, виокремлення частини цих дивергенції дає

$\nabla_\perp \cdot \vec{u}_\perp = \nabla_\perp \cdot \delta\vec{B}_\perp = 0$. Ми можемо, таким чином, виразити $\vec{u}_\perp$ і $\delta\vec{B}_\perp$ в термінах функцій скалярного потоку:

$$\vec{u}_\perp = \hat{b}_0 \times \nabla_\perp \phi, \quad \frac{\delta\vec{B}_\perp}{\sqrt{\mu_0\rho_0}} = \hat{b}_0 \times \nabla_\perp \psi \tag{8.16}$$

Де $\hat{b}_0 = \vec{B}_0/B_0$. Рівняння для зміни скалярних функції ϕ і ψ отримують підстановкою виразів (8.16) в перпендикулярні частини рівняння індукції (8.14) і рівняння імпульсу (8.12) - у останньому взято ротор, щоб знищити доданок з тиском. Залишаючи тільки члени найнижчого порядку, $O\left(\epsilon^2\right)$, ми отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + \{\phi, \psi\} = v_A \nabla_\parallel \phi \tag{8.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2 \phi + \left\{\phi, \nabla_\perp^2 \phi\right\} = v_A \nabla_\parallel \nabla_\perp^2 \psi + \left\{\psi, \nabla_\perp^2 \psi\right\} \tag{8.18}$$

де $\{\phi, \psi\} = \hat{b}_0 \cdot (\nabla_\perp \phi \times \nabla_\perp \psi)$, і для найнижчого порядку,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\perp \cdot \nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial t} + \{\phi, \cdots\} \tag{8.19}$$

$$\frac{\vec{B}}{B_0} \cdot \nabla = \nabla_\parallel + \frac{\delta\vec{B}_\perp}{B_0} \cdot \nabla_\perp = \nabla_\parallel + \frac{1}{v_A}\{\psi, \cdots\} \tag{8.20}$$

Рівняння (8.17) і (8.18) відомі, як редуковані рівняння магнітогідродинаміки (РМГД). Вони були вперше отримані Штраусом [Strauss,1989] в контексті до термоядерної плазми. Вони формують замкнуту систему, означаючи, що каскадні розпади хвиль Альвена формують повільні хвилі і флуктуації густини. Щоб отримати рівняння еволюції, повернемося до перпендикулярної частини рівняння імпульсу і використовуємо рівняння (8.15), щоб оцінити порядок членів в ньому. Для найменшого порядку, $O(\epsilon)$, ми отримуємо рівновагу тисків

$$\nabla_\perp \left(\delta p + \frac{B_0 \delta B_\parallel}{4\pi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta p}{p_0} = -\gamma \frac{v_A^2}{c_s^2} \frac{\delta B_\parallel}{B_0} \tag{8.21}$$

Використовуючи рівняння (8.21) і рівняння для ентропії (8.13), ми маємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta s}{s_0} = 0, \quad \frac{\delta s}{s_0} = \frac{\delta p}{p_0} - \gamma \frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\gamma \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{v_A^2}{c_s^2}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right), \tag{8.22}$$

де $s_0 = p_0/\rho_0^\gamma$. З іншого боку, з рівняння неперервності (8.11) і паралельної компоненти рівняння індукції (8.14),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right) + \frac{\vec{B}}{B_0} \cdot \nabla u_\parallel = 0 \tag{8.23}$$

Об'єднуючи рівняння (8.22) і (8.23), ми отримуємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{1}{1+c_s^2/v_A^2}\frac{\vec{B}}{B_0}\cdot\nabla u_{\|} \tag{8.24}$$

$$\frac{d\delta B_{\|}}{dt} = \frac{1}{1+v_A^2/c_s^2}\frac{\vec{B}}{B_0}\cdot\nabla u_{\|}. \tag{8.25}$$

Далі, ми беремо паралельну компоненту рівняння імпульсу (8.12). Із рівняння (8.21) і внаслідок малості паралельних градієнтів, доданок з тиском є порядку $O\left(\epsilon^3\right)$, в той час як складові інерції і напруги є порядку $O\left(\epsilon^2\right)$. Таким чином,

$$\frac{du_{\|}}{dt} = v_A^2\frac{\vec{B}}{B_0}\cdot\nabla\frac{\delta B_{\|}}{B_0}. \tag{8.26}$$

Рівняння (8.25) і (8.26) описують флуктуації повільних хвиль, в той час як рівняння (8.22) описує режим ентропії з нульовою частотою. Нелінійність в цих рівняннях входить через похідні, які визначаються рівняннями (8.19) - (8.20), і обумовлена тільки взаємодіями з хвилями Альвена. Наведені вище рівняння, можуть бути представлені у формі Ельзассера. Якщо ми введемо потенціали Ельзассера як $\zeta^{\pm} = \phi \pm \psi$, рівняння (8.17) і (8.18) набудуть вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\zeta^{\pm} \mp v_A\nabla_{\|}\nabla_{\perp}^2\zeta^{\pm} = -\frac{1}{2}\left[\left\{\zeta^+,\nabla_{\perp}^2\zeta^-\right\} + \left\{\zeta^-,\nabla_{\perp}^2\zeta^+\right\} \mp \nabla_{\perp}^2\left\{\zeta^+,\zeta^-\right\}\right]. \tag{8.27}$$

Це те ж саме, що і перпендикулярна частина рівняння (8.3) з $\vec{z}_{\perp}^{\pm} = \hat{\vec{b}}_0 \times \nabla_{\perp}\zeta^{\pm}$. Ключовою особливістю є те, що тільки зустрічні хвилі Альвена взаємодіють. Для повільних хвильових змінних, ми можемо ввести узагальнені поля Ельзассера:

$$z_{\|}^{\pm} = u_{\|} \pm \frac{\delta B_{\|}}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}\left(1+\frac{v_A^2}{c_s^2}\right)^{1/2}$$

. Звідси прямо випливає рівняння еволюції цих полів

$$\frac{\partial z_{\|}^{\pm}}{\partial t} \mp \frac{v_A}{\sqrt{1+v_A^2/c_s^2}}\nabla_{\|}z_{\|}^{\pm} = -\frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{1+v_A^2/c_s^2}}\right)\left\{\zeta^+, z_{\|}^{\pm}\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+v_A^2/c_s^2}}\right)\left\{\zeta^-, z_{\|}^{\pm}\right\}. \tag{8.28}$$

Це рівняння переходить до паралельної частини рівняння (8.3) при границі $v_A \ll c_s$. Це відомо, як верхня β межа, де плазмовий параметр через швидкості визначається як $\beta = (2/\gamma)c_s^2/v_A^2$. Ми бачимо, що тільки в цій границі повільні хвилі взаємодіють виключно із зустрічними хвилями Альвена. Для довільного β, фазова швидкість повільних хвиль менше, ніж хвиль Альвена, і, таким чином, хвилі Альвена можуть «зловити» і провзаємодіяти з повільними хвилями, які рухаються в тому ж напрямку. У астрофізичній плазмі параметр β варіюється в широких межах, так для міжзоряного середовища $\beta \sim 10$, а для сонячної корони $\beta \sim 10^{-6}$. В області високого плазмового параметру, що еквівалентно наближенню нестискуваності для повільних хвиль, флуктуації густини відбуваються «спільно» внаслідок ентропії. Спектр турбулентних рухів при цьому задовільняє теорії ГШ, $k_\perp^{-5/3}$. При аналізі спектра густини електронів в міжзоряному середовищі (отриманий зі спостережень мерехтіння радіоджерел, що виникає через розсіювання радіохвиль міжзоряним середовищем) отримано саме дану залежність. Таким чином, анізотропія і критична рівновага, взяті для упорядкування припущень, призводять до розкладання турбулентного МГД каскаду на розщеплений каскад хвиль Альвена і каскади повільних хвиль, при цьому флуктуації ентропії, пасивно розсіюється/змішуються хвилями Альвена. Справедливість цього розкладу і є особливістю РМГД рівнянь (8.17) і (8.18), які мають місце в тих областях де МГД рівняння (8.11) - (8.14) не можуть бути використані.

8.2 Ізотропна МГД турбулентність

Розглянемо тепер випадок ізотропної МГД турбулентності, тобто турбулентну плазму, в якій середнє поле не накладається ззовні. Чи можуть теорії масштабності, розглянуті вище, бути застосовані в даному випадку? Популярна точка зору, якій завдячують Крейчнану, полягає в тому, що все залишається однаково за умови, що роль середнього поля тепер відіграють магнітні флуктуації на зовнішньому масштабі δB_L, в той час як на малих масштабах, турбулентність знову представлена в локальному (по масштабу) каскаді альвенівських ($\delta u_l \sim \delta B_l$) флуктуацій. Ця картина має місце, тільки якщо флуктуації на зовнішніх масштабах домінують над магнітною енергією. Замість цього, магнітна енергія концентрується на малих масштабах, де магнітні флуктуації значно перевищують флуктуації швидкості, без єдиної ознаки рівномірного розподілення між масштабами для альвенівського каскаду. Ці особливості особливо виділяються, коли магнітне число Прандтля $\mathrm{Pr}_m = \nu/\eta = R_m/\mathrm{Re} \gg 1$, тобто коли масштаб магнітної відсічки лежить нижче в'язкого відсічення флуктуацій швидкості Результати чисельного моделювання що показують відмінності режиму турбулентності для швидкості і магнітного поля подано на рис.8.1.

Для повністю іонізованої плазми для оцінки значення числа Прандтля зазвичай використовують формулу [Спітцер,1968]

$$\mathrm{Pr}_m \sim 10^{-5} T^4 / n,$$

Де T - температура в Кельвінах, а концентрація частинок в см$^{-3}$. Тоді для міжзоряного середовища ми будемо мати значення – 10^{11}, а для скупчень галактик 10^{29}. Розглянемо ситуацію більш детально. За відсутності середнього поля, всі магнітні поля генеруються і підтримуються власне турбулентністю, тобто ізотропна МГД турбулентність є насиченим станом турбулентного (маломасштабного) динамо. Таким чином, ми почнемо з розгляду того, як слабке («динамічно неважливе») магнітне поле посилюється турбулентністю в МГД потоці при великих числах Прандтля і якого виду поле може бути створене/згенероване при цьому.

8.2.1 Маломасштабне динамо

Комбінування чисельних та аналітичних досліджень останніх п'ятдесяти років показують, що тривимірні потоки з хаотичними траєкторіями, як правило, мають властивості динамо, призводять до перевищення магнітним числом Рейнольдса певного порогу, $R_m > R_{m,c} \sim 10^1 \ldots 10^2$. Зокрема, здатність турбулентності Колмогорова посилювати магнітні поля - чисельний факт, вперше встановлений Meneguzzi et al. в 1981 і з тих пір підтверджений у багатьох чисельних дослідженнях уже ні в кого не викликає сумнівів. При цьому вважається, що зростання магнітних флуктуацій у випадковому потоці повинно відбуватися просто як послідовність випадкових розтягувань силових ліній і що це має виражатися в рівні напруженостей магнітного поля, що асоційовані з потоком. У турбулентності Колмогорова, найбільший рівень напруженості $\sim \delta u_l / l$, асоційований з найменшим масштабом $l \sim l_\nu$ - масштабом в'язкості, так що ці рухи на масштабах в'язкості переважно підсилюють поле (при великих Pr_m). Відзначимо, що поле швидкостей на вузьких масштабах є випадковим, але згладженим, тому маломасштабне динамо в турбулентності Колмогорова належить до того самого класу, що й швидкі динамо процеси в згладжених одномасштабних потоках. Періодичне застосування випадкових розтягувань/зрушень до закручених силових ліній магнітного поля призводить до зміни напрямків в довільно малих масштабах, і як наслідок до зростання складчастої структури поля (рис. 8.2). Характерною особливістю є те, що поле і кривизна силових ліній протилежно корелюють: тобто там, де поле росте, воно викривлене тільки на масштабі потоку, в той час як в областях згину, де кривизна велика, поле слабке. Кількісна теорія складчастої структури може бути побудована, грунтуючись на спільному розгляді $B = |\vec{B}|$ та кривизни $\mathrm{K} = \hat{\mathrm{b}} \cdot \nabla \hat{\mathrm{b}}$, де $\hat{b} = \vec{B}/B$. Кривизна є величиною, що досить легко вимірюється під час чисельного моделювання. Масштаб зміни напрямків обмежений знизу тільки дифузією Ома: для турбулентності Колмогорова вона визначається балансом рівня напруг на масштабах в'язкості з дифузією, а при умові $\mathrm{Pr}_m \gg 1$ задає резистивну відсічку l_η :

$$\delta u_{l_\nu}/l_\nu \sim \eta/l_\eta^2 \Rightarrow l_\eta \sim \mathrm{Pr}_m^{-1/2}\, l_\nu$$

Якщо випадкове розтягнення породжує магнітні поля з скрученнями на резистивних шкалах, чому ці поля не усуваються дифузією? Іншими словами, яким чином можливе виникнення маломасштабного динамо? Виявляється, що в 3D є конфігурації магнітного поля, які можна розтягнути, не зруйнувавши їх і при складанні яких відбувається експоненціальне зростання магнітної енергії.

В примітці буде приведено аналітичну демонстрація цього. Це (дещо модифікована) версія запропонована Зельдовичем та ін. у 1984 р.[1]

---

[1]**Перевага дифузії.** Вивчимо магнітні поля з розворотами на масштабах, близьких до масштабів в'язкості: на цих масштабах, поле швидкостей згладжене і, таким чином, може бути представлено у вигляді

$$u^i(t,\vec{x}) = u^i(t,0) + \sigma^i_m(t)x^m + \ldots, \tag{8.29}$$

Де $\sigma^i_m(t)$ - тензор напруг. Розклад відбувається в околі деякої початкової точки. Ми завжди можемо перейти до системи відліку, яка рухається в цій точці зі швидкістю $u^i(t,0) = 0$. Знайдемо розв'язок рівняння (8.2) зі швидкістю (8.29) як суму випадкових плоских хвиль з залежними від часу хвильовими векторами:

$$B^i(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k_0}{(2\pi)^3}\check{B}^i\left(t,\vec{k}_0\right)e^{i\check{\vec{k}}(t,\vec{k}_0)\cdot\vec{x}}, \tag{8.30}$$

де $\check{\vec{k}}\left(0,\vec{k}_0\right) = \vec{k}_0$ і $\check{B}^i\left(0,\mathrm{k}_0\right) = B^i_0\left(\mathrm{k}_0\right)$ - Фур'є-перетворення початкового поля. Так як рівняння (8.2) лінійні, то це дозволяє гарантувати, що кожна з плоских хвиль є окремим розв'язком. Це призводить до двох звичайних диференціальних рівняннь для кожного k_0:

$$\frac{\partial}{\partial t}\check{B}^i = \sigma^i_m\check{B}^m - \eta\check{k}^2\check{B}^i, \quad \frac{\partial}{\partial t}\check{k}_l = -\sigma^i_l\check{k}_i$$

в залежності від початкових умов $\check{B}^i\left(0,\vec{k}_0\right) = B^i_0\left(\vec{k}_0\right)$ і $\check{k}_l\left(0,\mathrm{k}_0\right) = k_{0l}$. Розв'язок цих рівнянь може бути записано явно через перетворення

$$\vec{x}_0 \to \vec{x}\left(t,\vec{x}_0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}x^2\left(t,\mathrm{x}_0\right) = u^2\left(t,\mathrm{x}\left(t,\mathrm{x}_0\right)\right) = \sigma^2_m(t)x^m\left(t,\mathrm{x}_0\right), \quad x^2\left(0,\mathrm{x}_0\right) = x^2_0$$

Внаслідок лінійності поля швидкостей, тензор напруг $\partial x^i/\partial x^m_0$ і зворотний до нього $\partial x^r_0/\partial x^l$ є лише функціями часу. При $t=0$, вони є одиничними матрицями. При $t>0$, вони задовольняють умовам

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial x^m_0} = \sigma^i_l\frac{\partial x^l}{\partial x^m_0}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^r_0}{\partial x^l} = -\sigma^i_l\frac{\partial x^r}{\partial x^i_0}.$$

Ми можемо перевірити прямою підстановкою, що

$$\check{B}^i\left(t,\vec{k}_0\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^m_0}B^m_0\left(\vec{k}_0\right)\exp\left[-\eta\int_0^t dt'\check{k}^2\left(t'\right)\right], \quad \check{k}_l\left(t,\vec{k}_0\right) = \frac{\partial x^r_0}{\partial x^l}k_{0r}. \tag{8.31}$$

Ці формули виражають еволюцію однієї моди в інтегралі (8.30). Використовуючи той факт, що $\det\left(\partial x_0^r/\partial x^l\right) = 1$ в нестисливому потоці і що рівняння (8.31), встановлює взаємно-однозначну відповідність, легко довести, що магнітна енергія, при інтегруванні по об'єму, є сумою енергій індивідуальних мод:

$$\left\langle B^2\right\rangle(t) \equiv \int d^3x|\vec{B}(t,\vec{x})|^2 = \int \frac{d^3k_0}{(2\pi)^3}\left|\breve{\vec{B}}\left(t,\vec{k}_0\right)\right|^2. \tag{8.32}$$

З рівняння (8.31),

$$\left|\breve{\vec{B}}\left(t,\vec{k}_0\right)\right|^2 = \vec{B}_0\left(\vec{k}_0\right)\cdot\hat{M}(t)\cdot\vec{B}_0^*\left(\vec{k}_0\right)\exp\left[-2\eta\int_0^t dt'\vec{k}_0\cdot\hat{M}^{-1}\left(t'\right)\cdot\vec{k}_0\right], \tag{8.33}$$

де матриці $\hat{\mathrm{M}}$ і $\hat{\mathrm{M}}^{-1}$ мають елементи, які визначаються формулами

$$M_{mn}(t) = \frac{\partial x^2}{\partial x_0^m}\frac{\partial x^2}{\partial x_0^n},$$

і

$$M^{rs}(t) = \frac{\partial x_0^r}{\partial x^l}\frac{\partial x_0^s}{\partial x^l}$$

відповідно. Це суть ко і контраваріантних метричних тензорів зворотнього перетворення Лагранжа $\vec{x}\to\vec{x}_0$. Розглянемо найпростіший можливий випадок потоку (8.29) з постійною $\hat{\sigma} = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right\}$, де $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0 > \lambda_3$ і $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$ із-за умови нестискуваності. Далі $\hat{M} = \mathrm{diag}\left\{e^{2\lambda_1 t}, e^{2\lambda_2 t}, e^{2\lambda_3 t}\right\}$, і рівняння (8.33) приймає вигляд, в границі $t\to\infty$,

$$\left|\breve{\vec{B}}\left(t,\vec{k}_0\right)\right|^2 \sim \left|B_0^1\left(\vec{k}_0\right)\right|^2\exp\left[2\lambda_1 t - \eta\left(\frac{k_{01}^2}{\lambda_1}+\frac{k_{02}^2}{\lambda_2}+\frac{k_{03}^2}{|\lambda_3|}e^{2|\lambda_3|t}\right)\right],$$

де ми опустили члени, які затухають експоненціально з часом в порівнянні з іншими доданками. Ми бачимо, що для більшості $\vec{k}_0$, відповідні моди зменшуються швидше експоненти з часом. Область в $\vec{k}_0$ просторі, що містить моди, які не є експоненціально малими при будь якому заданому часі t, визначається формулою

$$\frac{k_{01}^2}{\lambda_1^2 t/\eta}+\frac{k_{02}^2}{\lambda_1\lambda_2 t/\eta}+\frac{k_{03}^2}{\lambda_1\left|\lambda_3\right| te^{2\lambda_3 t}/\eta} < \text{ const.}$$

Об'єм цієї області в момент t буде $\sim\ \lambda_1^2\left(\lambda_2\left|\lambda_3\right|\right)^{1/2}(t/\eta)^{3/2}e^{\lambda_3 t}$. Усередині цього об'єму,

$$\left|\breve{\vec{B}}\left(t,\vec{k}_0\right)\right|^2 \sim \left|B_0^1\left(\vec{k}_0\right)\right|^2 e^{2\lambda_1 t},$$

Використовуючи $\lambda_3 = -\lambda_1-\lambda_2$ і рівняння (8.32), отримуємо

$$\left\langle B^2\right\rangle(t) \propto \exp\left[\left(\lambda_1-\lambda_2\right)t\right] \tag{8.34}$$

Обговоримо фізику, що стоїть за обчисленнями наведеними вище. Коли магнітне поле розтягнуто потоком, воно природно вирівнюється ($\vec{B}\sim\hat{e}_1 B_0^1 e^{\lambda_1 t}$). Хвильовий вектор має тенденцію до вирівнювання по напрямку стиснення: $\vec{k}\sim\hat{e}_3 k_{03}e^{|\lambda_3|t}$ що призводить до затухання мод швидше за експоненту. Залишаються лише ті складові, чиї хвильові вектори, були майже перпендикулярні до $\hat{e}_3$, з дозволеним кутовим відхиленням від 90°, що спадає експоненціально з часом $\sim e^{-|\lambda_3|t}$. Так як магнітне поле соленоїдальне ($\vec{B}_0\perp\vec{k}_0$) моди, які піддаються розтягуванню, в більшості своїй мають $\vec{B}_0\|\hat{e}_1$ і $\mathrm{k}_0\|\hat{\mathrm{e}}_2$ (рис. 8.3). Для порівняння, в 2D, поле вирівнюється по $\hat{e}_1$ і змінює напрямок уздовж $\hat{e}_2$ що завжди є напрямком стиснення (рис. 8.3), так що дифузія завжди перевищує розтягнення і динамо є неможливим. Викладене вище тлумачення може бути узагальнене на випадки залежних від часу і випадкових полів швидкості. Матриця $\hat{\mathrm{M}}$ симетрична і, тому, може бути приведена до діагонального вигляду відповідним поворотом $\hat{\mathrm{R}}$ координатної системи:

$$\hat{\mathrm{M}} = \hat{\mathrm{R}}^T\cdot\hat{\mathrm{L}}\cdot\hat{\mathrm{R}}$$

8.2.2 Насичення динамо

Маломасштабне динамо дало нам експоненціально зростаючі магнітні поля з енергією, сконцентрованою на малих (резистивних) масштабах. Як приріст магнітної енергії насичується і яким є кінцевий стан? Чи буде магнітна енергія залишатися на малих масштабах або вона буде перерозподілятися за масштабами через деяку форму зворотного каскаду? Ця основна дихотомія яка бере початок із 1950-х робіт з робіт Батчелора [Batchelor,1950]. Батчелор вважав, що магнітне поле по суті аналогічне вихровому полю $\omega = \nabla \times \vec{u}$ (яке задовольняє також рівняння (8.2), за винятком різниці між η і ν) і, тому, буде насичуватися на низьких енергіях $\left\langle B^2 \right\rangle \sim Re^{-1/2} \left\langle u^2 \right\rangle$ зі спектром, який має пік на масштабі в'язкості. Шльютер і Бірман [Schluter and Biermann, 1950] не погоджувалися і стверджували, що насичений стан буде за умови рівноваги між силами Лоренца і інерційними силами, при цьому турбулентні рухи, призводять до зростання магнітних флуктуацій відповідної енергії на тому ж масштабі. Аргументація Шльютера і Бірмана, як і Батчелора грунтувалася на припущенні локальності взаємодії (в просторі масштабів) між магнітним полем і полем швидкостей: локальність як динамо-дії, так і зворотної реакції. Як ми бачили в попередньому розділі, це припущення є не зовсм корректним для динамо: лінійне поле швидкостей, тобто поле швидкостей формально нескінченно великого (на практиці, в'язкого) масштабу може призводити до появи магнітних полів з розворотами на найменших масштабах завдяки дифузії. Ключовий сенс складчастої структури цих полів стосується сили Лоренца, ключова роль якої, в разі нестисливого потоку, є сила кривизни. Так як ця величина залежить тільки від паралельного градієнта магнітного поля і не «знає» про обертання/зміну напрямків, вона буде мати достатню ступінь просторової когерентності, щоб протидіяти розтягуванню. Та-

---

де, за визначенням,

$$\hat{\mathrm{L}} = \mathrm{diag}\left\{e^{\zeta_1(t)}, e^{\zeta_2(t)}, e^{\zeta_3(t)}\right\}.$$

Можна показати, що при $t \to \infty$, $\hat{\mathrm{R}}(t) \to \{\hat{\mathrm{e}}_1, \hat{\mathrm{e}}_2, \hat{\mathrm{e}}_3\}$ і $\zeta_i(t)/2t \to \lambda_i$. Миттєві значення $\zeta_i(t)/2t$ називаються скінченними показниками Ляпунова. Для довільного потоку, $\zeta_i(t)$ - довільні функції. Рівняння (8.34) узагальнюється і набуває вигляду

$$\langle \overline{B^2} \rangle(t) \propto \overline{\exp\left[\left(\zeta_1 - \zeta_2\right)/2\right]}, \tag{8.35}$$

де лінія вгорі означає усереднення по розподілу ζ_i. Єдиний випадковий потік, для якого цей розподіл відомий, це гауссовий розподіл за швидкостями. Для Гаусового розподілу рівняння (8.35) набуває вигляду

$$\left\langle B^2 \right\rangle \propto e^{(5/4)\lambda_1 t}$$

де $\lambda_1 = \langle \zeta_1 \rangle / 2t$. При цьому можна розрахувати спектр магнітної енергії, який є спектром напрямків розворотів. Він має пік на резистивному масштабі і степеневий закон, що тягнеться уздовж інтервалу масштабів, близьких до масштабу в'язкості $l_\nu^{-1} \ll k \ll l_\eta^{-1}$. Цей закон підтверджується роботами по чисельному моделюванню.

ким чином, поле, яке формально знаходиться за резистивною шкалою, буде здійснювати зворотну реакцію в масштабі поля швидкості. Іншими словами, взаємодії є нелокальними: випадковий потік у заданій шкалі l, посиливши магнітні поля на резистивних масштабах $l_\eta \ll l$, відчує зворотню реакцію з боку магнітних полів на масштабі l. Враховуючи нелокальність зворотньої реакції, ми можемо узагальнити сценарії Батчелора, Шльютера і Бірмана. Магнітна енергія посилюється рухами на масштабах в'язкості до тих пір, поки поле не стане достатньо сильним, щоб протистояти розтягуванню, тобто поки $\vec{B}\cdot\nabla\vec{B} \sim \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} \sim \delta u_{l_\nu}^2/l_\nu$. Так як $\vec{B}\cdot\nabla\vec{B} \sim B^2K \sim B^2/l_\nu$ (складчате поле), це відбувається, коли

$$\left\langle B^2\right\rangle \sim \delta u_{l_\nu}^2 \sim Re^{-1/2}\left\langle u^2\right\rangle \tag{8.36}$$

Будемо вважати, що в'язкі рухи пригнічені зворотною реакцією, по крайній мірі, в їх здатності підсилювати поле. Тоді рухи на більших масштабах в інерційному інтервалі починають відігравати суттєву роль: хоча швидкість їх деформації і, відповідно, швидкості розтягування менші, ніж поблизу масштабів в'язкості (вони є більш енергійними); тому магнітне поле занадто слабке, щоб протистояти їх розтягуванню. Поле, продовжуючи рости, буде придушувати рухи на все більших масштабах. Якщо ми визначимо масштаб розтягування $l_\mathrm{s}(t)$ як масштаб рухів, чия енергія задається $\delta u_{l_s} \sim \left\langle B^2\right\rangle(t)$, ми можемо оцінити

$$\frac{d}{dt}\left\langle B^2\right\rangle \sim \frac{\delta u_{l_\mathrm{s}}}{l_\mathrm{s}}\left\langle B^2\right\rangle \sim \frac{\delta u_{l_\mathrm{s}}^3}{l_\mathrm{s}} \sim \epsilon = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \left\langle B^2\right\rangle(t) \sim \epsilon t \tag{8.37}$$

Таким чином, експоненціальне зростання призводить до вікового/секулярного зростання магнітної енергії. Це супроводжується подовженням складок (їх довжина завжди порядку масштабу розтягування $l_\parallel \sim l_\mathrm{s}$), тоді як резистивний масштаб (масштаб змін) збільшується, оскільки швидкість розтягування знижується:

$$l_\parallel(t) \sim l_\mathrm{s}(t) \sim \delta u_{l_\mathrm{s}}^3/\epsilon \sim \sqrt{\epsilon}t^{3/2}, \quad l_\eta(t) \sim \left[\eta/\left(\delta u_{l_\mathrm{s}}/l_\mathrm{s}\right)\right]^{1/2} \sim \sqrt{\eta t} \tag{8.38}$$

Ця вікова стадія може тривати до тих пір, поки весь інерційний масштаб не буде пригнічений $l_\mathrm{s} \sim L$, після чого настає насичення. Це відбувається якщо $t \sim \epsilon^{-1/3}L^{2/3} \sim L/\delta u_L$. Використовуючи рівняння (8.37) - (8.38), ми маємо, при насиченні,

$$\left\langle B^2\right\rangle \sim \left\langle u^2\right\rangle, \quad l_\parallel \sim L, \quad l_\eta \sim \left[\eta/\left(\delta u_L/L\right)\right]^{1/2} \sim R_m^{-1/2}L \tag{8.39}$$

Порівнюючи рівняння (8.39) із значенням для резистивного масштабу, ми бачимо, що резистивний масштаб збільшився тільки в $Re^{1/4}$ раз в стадії росту слабкого поля. Зауважте, що це накладає дуже сувору вимогу на будь-який чисельний експеримент в якому потрібно розрізнити в'язкий і резистивний масштаби: $Pr_m \gg Re^{1/2} \gg 1$. Якщо магнітне поле зберігає свою складчасту структуру під час насичення, з розворотами напрямків на резистивном масштабі, це пояснює якісно, чому чисельні моделювання розвиненої ізотропної МГД турбулентності з $\mathrm{Pr}_m \geq 1$ показують накопичення магнітної енергії на малих масштабах. Що ж тоді є насичений стан турбулентного поля швидкостей? Ми припускали вище, що рухи в інерційному інтервалі були «пригнічені» - це відносилося до їх здатності підсилювати магнітне поле, але не вимагало повного «очищення» інерційного інтервалу. Справді, моделювання при помірних Pr_m показують степеневий спектр швидкості. Найбільш очевидним класом рухів, які можуть заселяти інерційний діапазон, не впливаючи на напруженість магнітного поля, є тип хвиль Альфвена, які поширюються не вздовж середнього (або великомасштабного) магнітного поля, а вздовж складеної/складчатої структури (рис.8.4).

Математично, дисперсійне співвідношення для таких хвиль виводиться з лінійної теорії, проведеної для збурень в інерційному діапазоні $\left(L^{-1} \ll k \ll l_\nu^{-1}\right)$ тензора B_iB_j. Незбурений стан відповідає $\langle B_iB_j\rangle = \hat{b}_i\hat{b}_j\left\langle B^2\right\rangle$, поблизу масштабів в'язкості, де $\left\langle B^2\right\rangle$ повна магнітна енергія і тензор $\hat{b}_i\hat{b}_j$ змінюється тільки на зовнішньому масштабі L (8.39). Результуюче дисперсійне відношення в цьому випадку буде:

$$\omega = \pm|\vec{k}\cdot\hat{b}|\left\langle B^2\right\rangle^{1/2}$$

Наявність цих хвиль не змінить природу магнітно-енергетичного спектру, де домінуючу роль відіграє резистивний масштаб, але має проявлятися в кінетично-енергетичному спектрі. В даний час немає теорії, що описувала б каскадні процеси даних хвиль.

8.2.3 Турбулентність і магнітні поля в скупченнях галактик

Міжгалактична середовище (МГС) - це гаряча ($T \sim 10^8$K) дифузна ($n \sim 10^{-2}\ldots10^{-3}\mathrm{cm}^{-3}$) повністю іонізована плазма, на яку припадає суттєва частина світної речовини у Всесвіті Це природне астрофізичне середовище, для якого можна використати ізотропний режим МГД турбулентності при великих числах Прандтля: $Pr_m \sim 10^{29}$. Вважається, що МГС перебуває у стані турбулентності, зумовленої різноманітними механізмами: події злиття, активні ядра галактик та ін. Очікується, що зовнішня шкала $L \sim 10^2\ldots10^3$ кпк і дисперсія швидкостей $\delta u_L \sim 10^2\ldots10^3$ км/с. Непрямі спостережні докази того, що підтверджують можливість виникнення турбулентності в МГС приблизно з цими параметрами, вже існують (потужний спектр коливань тиску, виявлений у скупченні Волосся Вероніки [Schuecker et al,2004], розширені профілі в сузірі Персея, як вважають, є наслідком турбулентної дифузії [Rebusco et al,2005]. Однак, поки немає консенсусу про те, чи є турбулентність, по крайній мірі в звичайному гідродинамічному представлені, загальною особливістю скупчень [Fabian et al,2003]. Головна складність полягає в дуже великих значеннях в'язкості МГС, одержуваної з стандартної оцінки, $\nu \sim v_{\mathrm{th},i}\lambda_{\mathrm{mfp}}$ де $v_{\mathrm{th},i} \sim 10^3$ км / с - іонна теплова швидкість і $\lambda_{\mathrm{mfp}} \sim 1 \ldots 10$ кпк – середня довжина вільного пробігу іона. Це дає значення для числа Рейнольдса $Re \sim 10^2$, якщо не менше, що робить існування добре розвиненого інерційного інтервалу проблематичним. Слід відмітити, що маломасштабне динамо, насправді, не вимагає турбулентного поля швидкостей в сенсі широкого інерційного інтервалу: в режимі слабкого поля динамо контролювалося плавним одномасштабним випадковим потоком, пов'язаним з рухами на масштабі в'язкості; в насиченні - головним ефектом ефектом була пряма нелокальна взаємодія між зовнішніми (випадковими) рухами та магнітним полем.

Питання турбулентних потоків у космічний плазмі залишається відкритим!!!

[34] [28] [35] [3] [36] [37] [21] [27] [38] [39] [19] [24] [40] [25] [41] [26] [42] [30] [32] [6] [15] [2] [13] [14] [22] [33] [12] [43] [44] [45] [7] [8] [9] [46] [4] [5] [47] [1] [17] [48] [20] [11] [31] [16] [23] [29] [18] [10]

Література

[1] Новиков Е.А. Перемежаемость турбулентности и спектр флуктуаций диссипации энергии. *Изв. АН СССР, сер. Геофиз*, (3).

[2] Гледзер Е.Б., Должанский Ф., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение.* М.: Наука, 1981.

[3] Берже П., Помо И., Видаль Л.,. *Физика плазмы для физиков.* М.: Мир, 1991.

[4] Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Ч.1.* М.: Наука, 1965.

[5] Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Ч.2.* М.: Наука, 1967.

[6] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1972.

[7] Кролл Н., Трайвелпис А. *Основы физики плазмы.* М.: Мир, 1975.

[8] Лифшиц Е.М. Ландау Л.Д. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982.

[9] Лифшиц Е.М. Ландау Л.Д. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1988.

[10] Зимин В.Д., Фрик П.Г. *Турбулентная конвекция.* М.: Наука, 1988.

[11] Ситенко О.Г., Мальнєв В.М. *Основи теорії плазми.* К.: Наукова думка, 1994.

[12] Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *Доклады АН СССР*, 30(4):299–303, 1941.

[13] Ирошников П.С. Турбулентность проводящей жидкости в сильном магнитном поле. *Астрономический журнал*, 40:742–745, 1963.

[14] Кадомцев Б.Б. *Турбулентность плазмы. – Вопросы теории плазмы /(ред.) Леонтович М.А.* М.: Атомиздат, 1964.

[15] Гинзбург В.Л. *Теоретическая физика и астрофизика.* М.: Наука, 1975.

[16] Валандер С.В. *Лекции по гидроаэромеханике.* Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.

[17] Рейнольдс А.Дж. *Турбулентные течения в инженерных приложениях.* М.: Энергия, 1979.

[18] Зимин В.Д. Иерархическая модель турбулентности. *Известия АН СССР: Физика атмосферы и океана*, 17(12):1265–1273, 1981.

[19] Фрик П.Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности. *Магнитная гидродинамика*, (1):60–66, 1983.

[20] Шустер Г. *Детерминированный хаос.* М.: Мир, 1988.

[21] Чен Ф. *Введение в физику плазмы.* М.: Мир, 1988.

[22] Кадомцев Б.Б. *Коллективные явления в плазме.* М.: Наука, 1988.

[23] Заславский Г.М. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса./(ред.) Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* М.: Наука, 1988.

[24] Фрик П.Г. Вейвлет-анализ и иерархические модели турбулентности. *ИМСС УрО РАН. Пермь*, 1992.

[25] Фрик П.Г. *Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть I.* Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1998.

[26] Фрик П.Г. *Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть II.* Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1999.

[27] Черемных О.К. *Физика плазмы, ч.1. Учебное пособие.* К.: Спеціалізована друкарня наукових журналів НАНУ, 2000.

[28] Баренблатт Г.И. Турбулентные пограничные слои при очень больших числах Рейнольдса. *Успехи математических наук*, 59:1(355):45–62, 2004.

[29] Зеленый Л.М. *Плазменная гелиогеофизика. Том 1./(ред.) Веселовский И.С.* М.: Физматлит, 2008.

[30] *Турбулентность. Принципы и применения. Под. ред. У.Фроста, Т.Моулдена.* М.: Мир, 1980.

[31] *Странные аттракторы. Сборник статей. Серия «Математика. Новое в зарубежной науке», выпуск 22.* М.: Мир, 1981.

[32] *Основы физики плазмы. Под. ред. А.А. Галеева, М.Розенблюта. Том 1, 2.* М.: Энергоатомиздат, 1983.

[33] *Методы расчета турбулентных течений. Под. ред. В.Кольмана.* М.: Мир, 1984.

[34] Арцимович Л.А. *Физика плазмы для физиков.* М.: Атомиздат, 1979.

[35] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccione, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E.*, 48(1):R29–R32, 1993.

[36] Dieter Biskamp. *Magnetohydrodynamic Turbulence.* Cambridge University Press, 2003.

[37] Jose Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics.* Springer, 2004.

[38] Bérengère Dubrulle. Intermittency in fully developed turbulence: Log-poisson statistics and generalized scale covariance. *Phys. Rev. E.*, 73(7):959–962, 1994.

[39] Edith Falgarone and Thierry Passot. *Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[40] P. Frick, B. Dubrulle, and A. Babiano. Scaling properties of a class of shell models. *Phys. Rev. E.*, 51(6):5582–5593, 1995.

[41] Peter Frick and Dmitriy Sokoloff. Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rev. E.*, 57(4):4155–4164, 1998.

[42] Uriel Frisch. *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.

[43] Robert H. Kraichnan. The structure of isotropic turbulence at very high reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 5:497–543, 1959.

[44] Robert H. Kraichnan. Lagrangian-history closure approximation for turbulence. *Phys. Fluids*, 8(4):575–598, 1965.

[45] Robert H. Kraichnan. Convergents to turbulence functions. *J. Fluid Mech.*, 41:189–217, 1970.

[46] David McComb. *The physics of fluid turbulence*. Oxford University Press, 1990.

[47] Yasuhito Narita. *Plasma Turbulence in the Solar System*. Springer, 2012.

[48] Zhen-Su She and Emmanuel Leveque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72(3):336–339, 1994.

ДОДАТОК

ДЕЯКІ ЧИСЛОВІ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

В межах двох відсотків

$$(2\pi)^{1/2} \approx 2.5;\ \ \pi^2 \approx 10;\ \ e^3 \approx 20;\ \ 2^{10} \approx 10^3;$$

Гама функція $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(1/6) = 5.5663$	$\Gamma(3/5) = 1.4892$
$\Gamma(1/5) = 4.5908$	$\Gamma(2/3) = 1.3541$
$\Gamma(1/4) = 3.6256$	$\Gamma(3/4) = 1.2254$
$\Gamma(1/3) = 2.6789$	$\Gamma(4/5) = 1.1642$
$\Gamma(2/5) = 2.2182$	$\Gamma(5/6) = 1.1288$
$\Gamma(1/2) = 1.7725 = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1$

Біноміальна теорема (справджується для $|\ x\ | < 1$ або коли α – додатне число):

$$\left(1+x\right)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \equiv 1+\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^2+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)}{3!}x^3+\ldots$$

ВЕКТОРНІ ТОТОЖНОСТІ

Позначення: f, g – скаляри; $\vec{A}$, $\vec{B}$ – вектори; T – тензор, знак вектора над оператором набла опущено.

1) $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B}$

2) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{C}\times\vec{B})\times\vec{A} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

3) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

4) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

5) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$

6) $\nabla(fg) = \nabla(gf) = f\nabla g + g\nabla f$

7) $\nabla\cdot(f\vec{A}) = f\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla f$

8) $\nabla\times(f\vec{A}) = f\nabla\times\vec{A} + \nabla f\times\vec{A}$

9) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$

10) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

11) $\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})=(\nabla\vec{B})\cdot\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

12) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

13) $\nabla^2 f=\nabla\cdot\nabla f$

14) $\nabla^2\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\times\nabla\times\vec{A}$

15) $\nabla\times\nabla f=0$

16) $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$

Якщо e_1, e_2, e_3 – ортонормовані одиничні вектори, тензор другого порядку T може бути записаний у формі

17) $T=\sum_{i,j}T_{ij}e_ie_j$

У декартових координатах дивергенція тензора – вектор з компонентами

18) $(\nabla\cdot T)_i=\sum_j\left(\partial T_{ji}/\partial x_j\right)$

19) $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

20) $\nabla\cdot(fT)=\nabla f\cdot T+f\nabla\cdot T$

Нехай $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – радіус-вектор величини r, від початку координат до точки x, y, z. Тоді

21) $\nabla\cdot\vec{r}=3$

22) $\nabla\times\vec{r}=0$

23) $\nabla r=\vec{r}/r$

24) $\nabla(1/r)=-\vec{r}/r^3$

25) $\nabla\cdot(\vec{r}/r^3)=4\pi\delta(\vec{r})$

26) $\nabla\vec{r}=I$

Якщо V – об'єм, обмежений поверхнею S та $d\vec{S}=\vec{n}dS$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований назовні від V,

27) $\int_V dV\nabla f=\int_S d\vec{S}\,f$

28) $\int_V dV\nabla\cdot\vec{A}=\int_S d\vec{S}\cdot\vec{A}$

29) $\int_V dV\nabla\cdot T=\int_S d\vec{S}\cdot T$

30) $\int_V dV\nabla\times\vec{A}=\int_S d\vec{S}\times\vec{A}$

31) $\int_V dV(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) = \int_S d\vec{S}\cdot(f\nabla g - g\nabla f)$

32) $\int_V dV(\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{A}) = \int_S d\vec{S}\cdot(\vec{B}\times\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\times\vec{B})$

Якщо S – відкрита поверхня, обмежена контуром C, елемент довжини якої $d\vec{l}$

33) $\int_S d\vec{S}\times\nabla f = \oint_C d\vec{l}\; f$

34) $\int_S d\vec{S}\cdot\nabla\times\vec{A} = \oint_C d\vec{l}\cdot\vec{A}$

35) $\int_S (d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{A} = \oint_C d\vec{l}\times\vec{A}$

36) $\int_S d\vec{S}\cdot(\nabla f\times\nabla g) = \oint_C f\; dg = -\oint_C g\; df$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ В КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ

Циліндричні координати

Дивергенція $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Градієнт $(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}$; $(\nabla f)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}$; $(\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

Ротор $(\nabla\times\vec{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}$; $(\nabla\times\vec{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$;

$$(\nabla\times\vec{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}$$

Лапласіан $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Лапласіан вектора $(\nabla^2\vec{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{A_r}{r^2}$;

$$(\nabla^2\vec{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{r^2};\; (\nabla^2\vec{A})_z = \nabla^2 A_z$$

Компоненти $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_r = A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\phi} + A_z\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_\phi = A_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} + A_z\frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{A_\phi B_r}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_z = A_r\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\phi} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Дивергенція тензора

$$(\nabla\cdot T)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial\phi} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial z} + \frac{T_{\phi r}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\phi z}}{\partial\phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$$

Сферичні координати

Дивергенція

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

Градієнт

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r};\quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta};\quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

Ротор

$$(\nabla\times\vec{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}$$

$$(\nabla\times\vec{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)$$

$$(\nabla\times\vec{A})_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}$$

Лапласіан

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Лапласіан вектора

$$(\nabla^2\vec{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\mathrm{ctg}\theta A_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$(\nabla^2\vec{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$(\nabla^2\vec{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}$$

Компоненти $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_r = A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial B_r}{\partial\phi} - \frac{A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_\theta = A_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\theta}{\partial\phi} + \frac{A_\theta B_r}{r} - \frac{\mathrm{ctg}\theta A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\vec{A}\cdot\nabla\vec{B})_\phi = A_r\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} + \frac{A_\phi B_r}{r} + \frac{\mathrm{ctg}\theta A_\phi B_\theta}{r}$$

Дивергенція тензора

$$(\nabla\cdot T)_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta r}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi r}}{\partial\phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial\phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{\mathrm{ctg}\theta T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla\cdot T)_\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta T_{\theta\phi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{\mathrm{ctg}\theta T_{\phi\theta}}{r}$$

РОЗМІРНОСТІ Й ОДИНИЦІ

Щоб одержати значення величини в гаусових одиницях, необхідно помножити значення, виражене в одиницях СІ, на перевідний множник.

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Перевідний множник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
Ємність	$\frac{t^2q^2}{ml^2}$	l	Фарад	9×10^{11}	см
Заряд	q	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}$	Кулон	3×10^{9}	статкулон
Густина заряду	$\frac{q}{l^3}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{3/2}t}$	Кулон/м^3	3×10^{3}	статкулон/см^3
Провідність	$\frac{tq^2}{ml^2}$	$\frac{l}{t}$	Сіменс	9×10^{11}	см/сек
Питома провідність	$\frac{tq^2}{ml^3}$	$\frac{1}{t}$	Сіменс/м	9×10^{9}	сек$^{-1}$
Струм	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t^2}$	Ампер	3×10^{9}	статампер
Густина струму	$\frac{q}{l^2t}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t^2}$	Ампер/м^2	3×10^{5}	статампер/см^2
Густина	$\frac{m}{l^3}$	$\frac{m}{l^3}$	кг/м^3	10^{-3}	г/см^3
Зміщення електричного поля	$\frac{q}{l^2}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Кулон/м^2	$12\pi\times10^{5}$	статкулон/см^2
Напруженість електричного поля	$\frac{ml}{t^2q}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Вольт/м	$\frac{1}{3}\times10^{-4}$	статвольт/см

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Пере-відний множ-ник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
ЕРС	$\frac{ml^2}{t^2q}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t}$	Вольт	$\frac{1}{3}\times 10^{-2}$	статвольт
Енергія	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	Джоуль	10^7	ерг
Густина енергії	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	Джоуль/м^3	10	ерг/см^3
Сила	$\frac{ml}{t^2}$	$\frac{ml}{t^2}$	Ньютон	10^5	дин
Частота	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	Герц	1	Герц
Імпеданс, опір	$\frac{ml^2}{tq^2}$	$\frac{t}{l}$	Ом	$\frac{1}{9}\times 10^{-11}$	сек/см
Індукція	$\frac{ml^2}{q^2}$	$\frac{t^2}{l}$	Генрі	$\frac{1}{9}\times 10^{-11}$	сек^2/см
Довжина	l	l	метр (м)	10^2	см
Напруженість магнітного поля	$\frac{q}{lt}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Ампер/м	$4\pi\times 10^{-3}$	Ерстед
Магнітний потік	$\frac{ml^2}{tq}$	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}$	Вебер	10^8	Максвел
Магнітна індукція	$\frac{m}{tq}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Тесла	10^4	Гаус

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Пере-відний множ-ник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
Магнітний момент	$\frac{l^2q}{t}$	$\frac{m^{1/2}l^{5/2}}{t}$	Ампер · м^2	10^3	Ерстед · см^3
Намагніченість	$\frac{q}{lt}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Ампер/м	10^{-3}	Ерстед
Магніторушійна сила	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t^2}$	Ампер	$\frac{4\pi}{10}$	Гільберт
Маса	m	m	кілограм (кг)	10^3	грам (г)
Імпульс	$\frac{ml}{t}$	$\frac{ml}{t}$	кг · м/с	10^5	г · см/сек
Густина імпульсу	$\frac{m}{l^2t}$	$\frac{m}{l^2t}$	кг/(м^2 · с)	10^{-1}	г/(см^2 · сек)
Магнітна проникність	$\frac{ml}{q^2}$	1	Генрі/м	$\frac{1}{4\pi}\times 10^7$	—
Діелектрична проникність	$\frac{t^2q^2}{ml^3}$	1	Фарад/м	$36\pi\times 10^9$	—
Поляризація	$\frac{q}{l^2}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	Кулон/м^2	3×10^5	статкулон/см^2
Потенціал	$\frac{ml^2}{t^2q}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t}$	Вольт	$\frac{1}{3}\times 10^{-2}$	статвольт
Потужність	$\frac{ml^2}{t^3}$	$\frac{ml^2}{t^3}$	Ват	10^7	ерг/сек

Фізична величина	***Розмірність***		***Одиниці СІ***	***Пере-відний множ-ник***	***Гаусові одиниці***
	СІ	*Гаусова*			
Густина енергії	$\frac{m}{lt^3}$	$\frac{m}{lt^3}$	Ват/м^3	10	ерг/(см^3·сек)
Тиск	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	Паскаль	10	дин/см^2
Магнітний опір	$\frac{q^2}{ml^2}$	$\frac{1}{l}$	Ампер/ Вебер	$4\pi \times 10^{-9}$	см$^{-1}$
Питомий опір	$\frac{ml^3}{tq^2}$	t	Ом·м	$\frac{1}{9} \times 10^{-9}$	сек
Питома теплопровідність	$\frac{ml}{t^3}$	$\frac{ml}{t^3}$	Ват/(м· град(К))	10^5	ерг/(см·сек· град(К))
Час	t	t	секунда (с)	1	секунда (сек)
Векторний потенціал	$\frac{ml}{tq}$	$\frac{m^{1/2} l^{1/2}}{t}$	Вебер/м	10^6	Гаус·см
Швидкість	$\frac{l}{t}$	$\frac{l}{t}$	м/с	10^2	см/сек
В'язкість	$\frac{m}{lt}$	$\frac{m}{lt}$	кг/(м·с)	10	пуаз
Завихреність (ротор)	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	с$^{-1}$	1	сек$^{-1}$
Робота	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	Джоуль	10^7	ерг

МІЖНАРОДНА СИСТЕМА (СІ) ПОЗНАЧЕНЬ

Фізична величина	***Назва одиниці***	***Позна-чення оди-ниці***	***Фізична величина***	***Назва одиниці***	***Поз-наче ння оди-ниці***
* довжина	метр	м	Електричний потенціал	вольт	В
* маса	кілограм	кг	Електричний опір	ом	Ом
* час	секунда	с	Електрична провідність	сіменс	См
* струм	ампер	А	Електрична ємність	фарад	Ф
* темпера-тура	кельвін	К	Магнітний потік	вебер	Вб
* кількість речовини	моль	моль	Магнітна індукція	генрі	Гн
* сила світла	кандела	кд			
† плоский кут	радіан	рад	напруженість магнітного поля	тесла	Т
† тілесний кут	стерадіан	ср			
частота	герц	Гц	Світловий потік	люмен	лм
енергія	джоуль	Дж	освітленість	люкс	лк
сила	ньютон	Н	Активність (радіоактивно го джерела.)	бекерель	Бк
тиск	паскаль	Па			
потужність	ват	Вт	Поглинена доза (іонізуюча радіація)	грей	Гр
ел. заряд	кулон	Кл			

* основні одиниці СІ, † допоміжні одиниці

МЕТРИЧНІ ПРЕФІКСИ

Множник	*Префікс*	*Символ*	*Множник*	*Префікс*	*Символ*
10^{-1}	деци	д	10	дека	да
10^{-2}	санти	с	10^{2}	гекто	г
10^{-3}	мілі	м	10^{3}	кіло	к
10^{-6}	мікро	мк	10^{6}	мега	М
10^{-9}	нано	н	10^{9}	гіга	Г
10^{-12}	піко	п	10^{12}	тера	Т
10^{-15}	фемто	ф	10^{15}	пета	П
10^{-18}	атто	а	10^{18}	екса	Е

ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ (СІ)

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стала Больцмана	k	1.3807×10^{-23}	$Дж\cdot К^{-1}$
Елементарний заряд	e	1.6022×10^{-19}	Кл
Маса електрона	m_e	9.1094×10^{-31}	кг
Маса протона	m_p	1.6726×10^{-27}	кг
Гравітаційна стала	G	6.6726×10^{-11}	$м^3\cdot с^{-2}\cdot кг^{-1}$
Стала Планка	h $\hbar = h/2\pi$	6.6261×10^{-34} $1.0546 \text{ x } 10^{-34}$	$Дж\cdot с$ $Дж\cdot с$
Швидкість світла у вакуумі	c	2.9979×10^{8}	$м\cdot с^{-1}$
Діелектрична проникність вакууму	ε_0	8.8542×10^{-12}	$Ф\cdot м^{-1}$
Магнітна проникність вакууму	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$	$Гн\cdot м^{-1}$
Відношення мас протона/електрона	m_p / m_e	1.8362×10^{3}	
Відношення заряд/маса електрона	e / m_e	1.7588×10^{11}	$Кл\cdot кг^{-1}$
Стала Рідберга	$R_\infty = me^4 / 8\varepsilon_0^2 ch^3$	1.0974×10^{7}	$м^{-1}$
Радіус Бора	$a_0 = \varepsilon_0 h^2 / \pi me^2$	5.2918×10^{-11}	м

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Атомний переріз взаємодії	πa_0^2	8.7974×10^{-21}	м^2
Класичний радіус електрона	$r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m c^2$	2.8179×10^{-15}	м
Томпсонівський переріз взаємодії	$(8\pi/3) r_e^2$	6.6525×10^{-29}	м^2
Комптонівська довжина хвилі електрона	$h/m_e c$ $\hbar/m_e c$	2.4263×10^{-12} 3.8616×10^{-13}	м м
Стала тонкої структури	$\alpha = e^2/2\varepsilon_0 h c$ α^{-1}	7.2974×10^{-3} 137.04	
1-а радіаційна стала	$c_1 = 2\pi hc^2$	3.7418×10^{-16}	Вт·м^2
2-а радіаційна стала	$c_2 = hc/k$	1.4388×10^{-2}	м·К
Стала Стефана-Больцмана	σ	5.6705×10^{-8}	Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$
Довжина хвилі, пов'язана з 1 еВ	$\lambda_0 = hc/e$	1.2398×10^{-6}	м
Частота, пов'язана з 1 еВ	$\nu_0 = e/h$	2.4180×10^{14}	Гц
Хвильове число, пов'язане з 1 еВ	$k_0 = e/hc$	8.0655×10^{5}	м$^{-1}$
Енергія, пов'язана з 1 еВ	$h\nu_0$	1.6022×10^{-19}	Дж
Енергія, пов'язана з 1 Рідбергом	$me^3/8\varepsilon_0^2 h^2$	13.606	еВ
Енергія пов'язана з 1 Кельвіном	k/e	8.6174×10^{-5}	еВ
Температура пов'язана з 1 еВ	e/k	1.1604×10^{4}	К
Число Авогадро	N_A	6.0221×10^{23}	моль$^{-1}$
Стала Фарадея	$F = N_A e$	9.6485×10^{4}	Кл·моль$^{-1}$
Газова стала	$R = N_A k$	8.3145	Дж·К$^{-1}$·моль$^{-1}$
Число Лошмідта	n_0	2.6868×10^{25}	м$^{-3}$
Атомна одиниця маси	m_u	1.6605×10^{-27}	кг

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стандартна температура	T_o	273.15	K
Атмосферний тиск	$p_0 = n_0 k T_0$	1.0133×10^{5}	Па
Тиск 1мм Hg (1 torr)		1.3332×10^{2}	Па
Молярний об'єм при н.у.	$V_0 = RT_0 / p_0$	2.2414×10^{-2}	$м^3$
Молярна маса повітря	M_{air}	2.8971×10^{-2}	кг
Калорія (cal)		4.1868	Дж
Прискорення вільного падіння	g	9.8067	$м\cdot с^{-2}$

ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ (СГС)

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стала Больцмана	k	1.3807×10^{-16}	ерг/град (K)
Елементарний заряд	e	4.8032×10^{-10}	статкулон
Маса електрона	m_e	9.1094×10^{-28}	г
Маса протона	m_p	1.6726×10^{-24}	г
Гравітаційна стала	G	6.6726×10^{-8}	$дин\cdot см^2/г^2$
Стала Планка	h $\hbar = h/2\pi$	6.6261×10^{-27} 1.0546×10^{-27}	ерг·сек ерг·сек
Швидкість світла у вакуумі	c	2.9979×10^{10}	см/сек
Відношення мас протона/електрона	m_p / m_e	1.8362×10^{3}	
Відношення заряд/маса електрона	e / m_e	5.2728×10^{17}	статкулон/г
Стала Рідберга	$R_\infty = \dfrac{2\pi^2 m e^4}{ch^3}$	1.0974×10^{5}	$см^{-1}$
Радіус Бора	$a_0 = \hbar^2 / me^2$	5.2918×10^{-9}	см
Атомний переріз	πa_0^2	8.7974×10^{-17}	$см^2$

Фізична величина	***Позначення***	***Значення***	***Одиниця***
Класичний радіус електрона	$r_e = e^2/mc^2$	2.8179×10^{-13}	см
Томпсонівський переріз	$(8\pi/3)r_e^2$	6.6525×10^{-25}	см^2
Комптонівська довжина хвилі електрона	$h/m_e c$ $\hbar/m_e c$	2.4263×10^{-10} 3.8616×10^{-11}	см см
Стала тонкої структури	$\alpha = e^2/\hbar c$ α^{-1}	7.2974×10^{-3} 137.04	
1-а радіаційна стала	$c_1 = 2\pi hc^2$	3.7418×10^{-5}	ерг·см^2/сек
2-а радіаційна стала	$c_2 = hc/k$	1.4388	см·град(K)
Стала Стефана-Больцмана	σ	5.6705×10^{-5}	ерг/(см^2·сек·град^4)
Довжина хвилі, пов'язана з 1 еВ	λ_0	1.2398×10^{-4}	см
Частота, пов'язана з 1 еВ	ν_0	2.4180×10^{14}	Гц
Хвильове число, пов'язане з 1 еВ	k_0	8.0655×10^{3}	см$^{-1}$
Енергія, пов'язана з 1 еВ		1.6022×10^{-12}	ерг
Енергія, пов'язана з 1 Рідбергом		13.606	еВ
Енергія пов'язана з 1 Кельвіном		8.6174×10^{-5}	еВ
Температура пов'язана з 1 еВ		1.1604×10^{4}	град(K)
Число Авогадро	N_A	6.0221×10^{23}	моль$^{-1}$
Стала Фарадея	$F = N_A e$	2.8925×10^{14}	статкулон/моль
Газова стала	$R = N_A k$	8.3145×10^{7}	ерг/(град·моль)
Число Лошмідта	n_0	2.6868×10^{19}	см$^{-3}$
Атомна одиниця маси	m_u	1.6605×10^{-24}	г

Фізична величина	*Позначення*	*Значення*	*Одиниця*
Стандартна температура	T_o	273.15	град(K)
Атмосферний тиск	$p_0 = n_0 k T_0$	1.0133×10^6	дин/см^2
Тиск 1мм Hg (1 torr)		1.3332×10^3	дин/см^2
Молярний об'єм при н.у.	$V_0 = RT_0 / p_0$	2.2414×10^4	см^3
Молярна маса повітря	M_{air}	28.971	г
Калорія (cal)		4.1868×10^7	ерг
Прискорення вільного падіння	g	980.67	см/сек^2

ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ

В даному пункті використано позначення $\alpha = 10^2$ см/м, $\beta = 10^7$ ерг/Дж, $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-12}$ Гн/м, $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2.9979 \times 10^8$ м/с і $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}$ Дж/сек. Щоб одержати коректну по розмірності формулу в системі одиниць СІ з виразу, записаного в гаусових одиницях, потрібно замінити кожну величину згідно з $\overline{Q} = \overline{k} Q$, де $\overline{k}$ – коефіцієнт у другому стовпчику таблиці, що відповідає *Q*. Так, для прикладу, формула $\overline{a}_0 = \overline{\hbar}^2 / \overline{m}\overline{e}^2$ для борівського радіуса стає $\alpha a_0 = (\hbar\beta)^2 / \left[\left(m\beta / \alpha^2 \right) \left(e^2 \alpha\beta / 4\pi\varepsilon_0 \right) \right]$ або $a_0 = \varepsilon_0 h^2 / \pi m e^2$. Щоб перейти від СІ до природних величин, у яких $\hbar = c = 1$, потрібно використати формулу $Q = \hat{k}^{-1} \hat{Q}$, де $\hat{k}$ – коефіцієнт, що відповідає *Q* у третьому стовпчику. Таким чином, $\hat{a}_0 = 4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 / \left[\left(\hat{m}\hbar / c \right) \left(\hat{e}^2 \varepsilon_0 \hbar c \right) \right] = 4\pi / \hat{m}\hat{e}^2$. (У перетворенні від одиниць СІ не замінюйте ε_0, μ_0 або *c*).

Фізична величина	***Гаусові одиниці до СІ***	***Природні одиниці до СІ***
Ємність	$\alpha/4\pi\varepsilon_0$	ε_0^{-1}
Заряд	$(\alpha\beta/4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\varepsilon_0\hbar c)^{-1/2}$
Густина заряду	$(\beta/4\pi\alpha^5\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\varepsilon_0\hbar c)^{-1/2}$
Струм	$(\alpha\beta/4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Густина струму	$(\beta/4\pi\alpha^3\varepsilon_0)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Електричне поле	$(4\pi\beta\varepsilon_0/\alpha^3)^{1/2}$	$(\varepsilon_0/\hbar c)^{1/2}$
Електричний потенціал	$(4\pi\beta\varepsilon_0/\alpha)^{1/2}$	$(\varepsilon_0/\hbar c)^{1/2}$
Електропровідність	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$	ε_0^{-1}
Енергія	β	$(\hbar c)^{-1}$
Густина енергії	β/α^3	$(\hbar c)^{-1}$
Сила	β/α	$(\hbar c)^{-1}$
Частота	1	c^{-1}
Індуктивність	$4\pi\varepsilon_0/\alpha$	μ_0^{-1}
Довжина	α	1
Магнітна індукція	$(4\pi\beta/\alpha^3\mu_0)^{1/2}$	$(\mu_0\hbar c)^{-1/2}$
Напруженість магн. поля	$(4\pi\mu_0\beta/\alpha^3)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Маса	β/α^2	$c/\hbar$
Імпульс	β/α	$\hbar^{-1}$
Потужність	β	$(\hbar c^2)^{-1}$
Тиск	β/α^3	$(\hbar c)^{-1}$
Опір	$4\pi\varepsilon_0/\alpha$	$(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}$
Час	1	c
Швидкість	α	c^{-1}

РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА

Назва або опис	***CI***	***Гаусові***
Закон Фарадея	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Закон Ампера	$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$	$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}$
Рівняння Пуассона	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$
Відсутність магнітних монополів	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Сила Лоренца на заряд q	$q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$	$q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$
Матеріальні (невід'ємні) співвідношення	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$

У плазмі $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн×м$^{-1}$ (Гаусові одиниці: $\mu \approx 1$). Діелектрична стала задовольняє співвідношенню $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м (в Гаусових одиницях: $\varepsilon \approx 1$) за умови, що весь заряд розглядається як вільний. Використовуючи дрейфову апроксимацію $\vec{\upsilon}_\perp = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$, можна розрахувати густину поляризаційного заряду і знайти діелектричну сталу $K \equiv \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + 36\pi \times 10^9 \rho / B^2$ (CI), $K \equiv \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + 4\pi\rho c^2 / B^2$ (СГС), де ρ – масова густина.

Електромагнітна енергія в об'ємі V задається співвідношенням:

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\int_V dV\left(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right) \text{ (CI)}, \quad \hat{W} = \frac{1}{8\pi}\int_V dV\left(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right) \text{(СГС)}.$$

Теорема Пойнтінга:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \int_S \vec{N} \cdot d\vec{S} = -\int_V dV \vec{J} \cdot \vec{E},$$

де S – замкнута поверхня, що обмежує об'єм V, та вектор Пойнтінга (енергетичний потік через S) задається формулою $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ (CI) або $\vec{N} = c\vec{E} \times \vec{H} / 4\pi$ (Гаусова).

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

В даному підпункті, ε – діелектрична проникність, μ – проникність провідника, μ' – проникність навколишнього середовища, σ – питома провідність, $f = \omega/2\pi$ – частота випромінювання. Всі одиниці подано в СІ, якщо інше не зазначено.

Діелектрична постійна вакууму	$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна проникність вакууму	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м = $= 1.2566 \times 10^{-6}$ Гн/м
Опір вакууму	$R_0 = \left(\mu_0/\varepsilon_0\right)^{1/2} = 376.73$ Ом
Ємність паралельних пластин площею A, розташованих на відстані d	$C = \varepsilon A/d$
Ємність концентричного циліндра довжиною l, радіусом a, b	$C = 2\pi\varepsilon l/\ln\left(b/a\right)$
Ємність концентричної сфери радіусом a, b	$C = 4\pi\varepsilon ab/(b-a)$
Коефіцієнт самоіндукції провідника довжиною l, по якому тече однорідний струм	$L = \mu l$
Взаємоіндуктивність паралельних провідників довжиною l, радіуса a, розташованих на відстані d	$L = \left(\mu' l/4\pi\right)\left[1 + 4\ln\left(d/a\right)\right]$
Індуктивність круглого витка радіусом b, зробленого із провідника радіуса a, по якому тече однорідний струм	$L = b\left\{\mu'\left[\ln\left(8b/a\right) - 2\right] + \mu/4\right\}$
Час релаксації в середовищі із втратами	$\tau = \varepsilon/\sigma$
Глибина поверхневого шару в середовищі із втратами	$\delta = \left(2/\omega\mu\sigma\right)^{1/2} = \left(\pi f \mu\sigma\right)^{-1/2}$
Хвильовий опір у середовищі із втратами	$Z = \left[\mu/\left(\varepsilon + i\sigma/\omega\right)\right]^{1/2}$
Поле на відстані r від прямого провідника, по якому тече струм I (амперів)	$B_\theta = \mu I/2\pi r$ Т, $B_\theta = 0.2I/r$ Гс
Поле на відстані z уздовж осі від круглого витка радіуса a, по якому тече струм I	$B_z = \mu a^2 I\Big/\left[2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}\right]$

ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ЧАСТОТА / ДІАПАЗОН ДОВЖИН ХВИЛЬ

Позначення*	Частотний діапазон		Діапазон довжин хвиль	
	Нижній	Верхній	Нижній	Верхній
ULF**		30 Гц	10 Мм	
VF**	30 Гц	300 Гц	1 Мм	10 Мм
ELF	300 Гц	3 кГц	100 км	1 Мм
VLF	3 кГц	30 кГц	10 км	100 км
LF	30 кГц	300 кГц	1 км	10 км
MF	300 кГц	3 МГц	100 м	1 км
HF	3 МГц	30 МГц	10 м	100 м
VHF	30 МГц	300 МГц	1 м	10 м
UHF	300 МГц	3 ГГц	10 см	1 м
SHF	3 ГГц	30 ГГц	1 см	10 см
S	2.6	3.95	7.6	11.5
G	3.95	5.85	5.1	7.6
J	5.3	8.2	3.7	5.7
H	7.05	10.0	3.0	4.25
X	8.2	12.4	2.4	3.7
M	10.0	15.0	2.0	3.0
P	12.4	18.0	1.67	2.4
K	18.0	26.5	1.1	1.67
R	26.5	40.0	0.75	1.1
EHF	30 ГГц	300 ГГц	1 мм	1 см
Субміліметровий діапазон	300 ГГц	3 ТГц	100 мкм	1 мм
Інфрачервоний діапазон	3 ТГц	430 ТГц	700 нм	100 мкм

Позначення	Частотний діапазон		Діапазон довжин хвиль	
	Нижній	Верхній	Нижній	Верхній
Видимий діапазон	430 ТГц	750 ТГц	400 нм	700 нм
Ультрафіолетовий діапазон	750 ТГц	30 ПГц	10 нм	400 нм
Рентген	30 ПГц	3 ЕГц	100 пм	10 нм
Гамма-випромінювання	3 ЕГц			100 пм

*ULF – ультранизькі частоти (УНЧ), VF – голосові частоти (ГЧ), ELF – крайні низькі частоти (КНЧ), VLF – дуже низькі частоти (ДНЧ), LF – низькі частоти (НЧ), MF – середні частоти (СЧ), HF – високі частоти (ВЧ), VHF – дуже високі частоти (ДВЧ), UHF – ультрависокі частоти (УВЧ), SHF – надвисокі частоти (НВЧ), EHF – крайні високі частоти (КВЧ).
**Границя між УНЧ і ГЧ задається по-різному.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПЛАЗМОВІ ПАРАМЕТРИ

Всі величини подано в гаусових (СГС) одиницях, крім температури (T, T_e, T_i), вираженої в еВ, маси іона (m_i), вираженої в одиницях маси протона, $\mu = m_i / m_p$; Z – значення заряду; k – стала Больцмана; K – хвильове число: γ – адіабатичний показник; lnΛ – Кулонівський логарифм.

Частоти

Електронна гірочастота	$f_{ce} = \omega_{ce} / 2\pi = 2.80 \times 10^6 B$, Гц $\omega_{ce} = eB / m_e c = 1.76 \times 10^7 \cdot B$, рад/сек
Іонна гірочастота	$f_{ci} = \omega_{ci} / 2\pi = 1.52 \times 10^3 Z \mu^{-1} \cdot B$, Гц $\omega_{ci} = ZeB / m_i c = 9.58 \times 10^3 Z \mu^{-1} \times B$, рад/сек
Електронна плазмова частота	$f_{pe} = \omega_{pe} / 2\pi = 8.98 \times 10^3 n_e^{1/2}$, Гц $\omega_{pe} = \left(4\pi n_e e^2 / m_e\right)^{1/2} = 5.64 \times 10^4 n_e^{1/2}$, рад/сек

Іонна плазмова частота	$f_{pi} = \omega_{pi} \big/ 2\pi = 2.10 \times 10^2 Z \mu^{-1/2} n_i^{1/2}$, Гц $\omega_{pi} = \left(4\pi n_i Z^2 e^2 \big/ m_i \right)^{1/2} = 1.32 \times 10^3 Z \mu^{-1/2} n_i^{1/2}$, рад/сек
Частота захоплених електронів	$\nu_{Te} = \left(eKE/m_e \right)^{1/2} = 7.26 \times 10^8 K^{1/2} E^{1/2}$, сек$^{-1}$
Частота захоплених іонів	$\nu_{Ti} = \left(ZeKE/m_i \right)^{1/2} = 1.69 \times 10^7 Z^{1/2} K^{1/2} E^{1/2} \mu^{-1/2}$, сек$^{-1}$
Частота зіткнень електронів	$\nu_e = 2.91 \times 10^{-6} n_e \ln \Lambda T_e^{-3/2}$, сек$^{-1}$
Частота зіткнень іонів	$\nu_i = 4.80 \times 10^{-8} Z^4 \mu^{-1/2} n_i \ln \Lambda T_i^{-3/2}$, сек$^{-1}$

Довжини

Електронна довжина де Бройля	$\lambda\!\!\!^{-} = \hbar \big/ \left(m_e k T_e \right)^{1/2} = 2.76 \times 10^{-8} T_e^{-1/2}$, см
Класична відстань мінімального зближення	$e^2 \big/ kT = 1.44 \times 10^{-7} T^{-1}$, см
Гірорадіус електрона	$r_e = \upsilon_{Te} \big/ \omega_{ce} = 2.38 T_e^{1/2} B^{-1}$, см
Гірорадіус іона	$r_i = \upsilon_{Ti} \big/ \omega_{ci} = 1.02 \mu^{1/2} Z^{-1} T_i^{1/2} B^{-1}$, см
Плазмова глибина поверхневого шару	$c \big/ \omega_{pe} = 5.31 \times 10^5 n_e^{-1/2}$, см
Дебаївська довжина	$\lambda_D = \left(kT \big/ 4\pi n e^2 \right)^{1/2} = 7.43 \times 10^2 T^{1/2} n^{-1/2}$, см

Швидкості

Електронна теплова швидкість	$\upsilon_{Te} = \left(kT_e/m_e\right)^{1/2} = 4.19\times10^7\,T_e^{1/2}$, см/сек
Іонна теплова швидкість	$\upsilon_{Ti} = \left(kT_i/m_i\right)^{1/2} = 9.79\times10^5\,\mu^{-1/2}T_i^{1/2}$, см/сек
Іонна швидкість звуку	$C_s = \left(\gamma ZkT_e/m_i\right)^{1/2} = 9.79\times10^5\left(\gamma ZT_e/\mu\right)^{1/2}$, см/сек
Альфвенівська швидкість	$\upsilon_A = B\big/\left(4\pi n_i m_i\right)^{1/2} = 2.18\times10^{11}\,\mu^{-1/2}n_i^{-1/2}B$, см/сек

Безрозмірні

(Відношення мас електрона/протона)$^{1/2}$	$\left(m_e/m_p\right)^{1/2} = 2.33\times10^{-2} = 1/42.9$
Число частинок у сфері Дебая	$\left(4\pi/3\right)n\lambda_D^3 = 1.72\times10^9\,T^{3/2}n^{-1/2}$
Альфвенівська швидкість/ швидкість світла	$\upsilon_A/c = 7.28\mu^{-1/2}n_i^{-1/2}B$
Відношення електронної плазмової частоти/гірочастоти	$\omega_{pe}/\omega_{ce} = 3.21\times10^{-3}n_e^{1/2}B^{-1}$
Відношення іонної плазмової частоти/гірочастоти	$\omega_{pi}/\omega_{ci} = 0.137\mu^{1/2}n_i^{1/2}B^{-1}$
Теплове/магнітне енергетичне відношення	$\beta = 8\pi nkT/B^2 = 4.03\times10^{-11}nTB^{-2}$
Магнітне/іонне відношення енергії спокою	$B^2/8\pi n_i m_i c^2 = 26.5\mu^{-1}n_i^{-1}B^2$

ІОНОСФЕРНІ ПАРАМЕТРИ

Наступна таблиця дає середні нічні значення. Де приведено два значення, перше стосується нижньої області шару, а друге – верхньої границі.

Величина	E область	F область
Висота (км)	$90-160$	$160-500$
Густина (м$^{-3}$)	$1.5\times10^{10}-5\times10^{10}$	$5\times10^{10}-2\times10^{11}$
Проінтегрована по висоті густина (м$^{-2}$)	9×10^{14}	4.5×10^{15}
Частота зіткнень іонів з нейтральними частинками (с $^{-1}$)	$2\times10^{3}-10^{2}$	$0.5-0.05$
Відношення гірочастоти іонів до частоти зіткнень	$0.09-2.0$	$4.6\times10^{2}-5.0\times10^{3}$
Частота зіткнень електронів з нейтральними частинками	$1.5\times10^{4}-9.0\times10^{2}$	$80-10$
Відношення гірочастоти електронів до частоти зіткнень	$4.1\times10^{2}-6.9\times10^{3}$	$7.8\times10^{4}-6.2\times10^{5}$
Середня молекулярна маса	$28-26$	$22-16$
Іонна гірочастота (с $^{-1}$)	$180-190$	$230-300$
Нейтральний дифузійний коефіцієнт (м^2/с)	$30-5\times10^{3}$	10^{5}

Магнітне поле Землі в нижніх шарах іоносфери в екваторіальних широтах – приблизно $B_0=0.35\times10^{-4}$ Тл. Радіус Землі – $R_E=6371$ км.

ПРИБЛИЗНІ ВЕЛИЧИНИ В ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ПЛАЗМАХ

Тип плазми	n, см$^{-3}$	T, еВ	ω_{pe}, с$^{-1}$	λ_D, см	$n\lambda_D{}^3$	ν_{ei}, с$^{-1}$
Міжзоряний газ	1	1	6×10^4	7×10^2	4×10^8	7×10^{-5}
Газоподібна туманність	10^3	1	2×10^6	20	8×10^6	6×10^{-2}
Сонячна корона	10^9	10^2	2×10^9	2×10^{-1}	8×10^6	60
Дифузійна гаряча плазма	10^{12}	10^2	6×10^{10}	7×10^{-3}	4×10^5	40
Сонячна атмосфера, газовий розряд	10^{14}	1	6×10^{11}	7×10^{-5}	40	2×10^9
Тепла плазма	10^{14}	10	6×10^{11}	2×10^{-4}	8×10^2	10^7
Гаряча плазма	10^{14}	10^2	6×10^{11}	7×10^{-4}	4×10^4	4×10^6
Термоядерна плазма	10^{15}	10^4	2×10^{12}	2×10^{-3}	8×10^6	5×10^4
Тета-пінч	10^{16}	10^2	6×10^{12}	7×10^{-5}	4×10^3	3×10^8
Щільна гаряча плазма	10^{18}	10^2	6×10^{13}	7×10^{-6}	4×10^2	2×10^{10}
Лазерна плазма	10^{20}	10^2	6×10^{14}	7×10^{-7}	40	2×10^{12}

ПАРАМЕТРИ СОНЯЧНОЇ ФІЗИКИ

Параметр	Символ	Значення	Одиниця
Повна маса	$M_{\odot}$	1.99×10^{33}	г
Радіус	$R_{\odot}$	6.96×10^{10}	см
Прискорення сили тяжіння на поверхні	$g_{\odot}$	2.74×10^{4}	$см\cdot с^{-2}$
Швидкість витоку	υ_{∞}	6.18×10^{7}	$см\cdot с^{-1}$
Спрямований вгору потік маси в спікулах	–	1.6×10^{-9}	$г\cdot см^{2}\cdot с^{-1}$
Вертикально проінтегрована атмосферна густина	–	4.28	$г\cdot см^{-2}$
Напруженість магнітного поля сонячної плями	$B_{\max}$	$2500-3500$	Гс
Ефективна температура поверхні	T_0	5770	К
Потужність випромінювання	$L_{\odot}$	3.83×10^{33}	$ерг\cdot с^{-1}$
Густина променевого потоку	F	6.28×10^{10}	$ерг\cdot см^{-2}\cdot с^{-1}$
Оптична глибина на довжині хвилі 500 нм, що виміряна від фотосфери	τ_5	0.99	–
Астрономічна одиниця (радіус земної орбіти)	AU	1.50×10^{13}	см
Сонячна стала на орбіті Землі	f	1.36×10^{6}	$ерг\cdot см^{-2}\cdot с^{-1}$

ХРОМОСФЕРА ТА КОРОНА

Параметр (одиниці)	Спокійне Сонце	Корональні діри	Активна область
Хромосферні променеві втрати (ерг·см$^{-2}$·с$^{-1}$)			
Низька хромосфера	2×10^{6}	2×10^{6}	$\geq 10^{7}$
Середня хромосфера	2×10^{6}	2×10^{6}	10^{7}
Верхня хромосфера	3×10^{5}	3×10^{5}	2×10^{6}
Всього	4×10^{6}	4×10^{6}	$\geq 2\times10^{7}$
Тиск перехідного шару (дин·см$^{-2}$)	0.2	0.07	2
Температура корони (K) на відстані 1.1 $R_{\odot}$	$1.1-1.6\times10^{6}$	10^{6}	$2{,}5\times10^{6}$
Втрати енергії корони (ерг·см$^{-2}$·с$^{-1}$)			
Провідність	2×10^{5}	6×10^{4}	$10^{5}-10^{7}$
Випромінювання	10^{5}	10^{4}	5×10^{6}
Сонячний вітер	$\leq 5\times10^{4}$	7×10^{5}	$< 10^{5}$
Всього	3×10^{5}	8×10^{5}	10^{7}
Втрата маси за рахунок сонячного вітру (г·см$^{-2}$·с$^{-1}$)	$\leq 2\times10^{-11}$	2×10^{-10}	$< 4\times10^{-11}$