

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
фізичний факультет

О.С. ТАРНАВСЬКИЙ, М.Ф. ЛЕДНЕЙ

**СИСТЕМИ БАГАТЬОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ КЛАСИЧНОЇ
МЕХАНІКИ**

Київ - 2025

Рецензенти:

академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. Б.І. Лев
(Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України,
завідувач відділу синергетики)

член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. В.А. Татаренко
(Інститут металофізики імені Г.В. Курдюмова НАН України,
директор інституту)

член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. Е.В. Горбар
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
фізичний факультет)

*Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № від 2025 року)*

О.С. Тарнавський, М.Ф. Ледней

Системи багатьох диференціальних
рівнянь у задачах класичної механі-
ки: Навчальний посібник.

Навчальний посібник присвячений питанням послідовної побудови та подальшого знаходження фізично достовірного розв'язку систем багатьох лінійних диференціальних рівнянь з тридіагональною матрицею у дискретних та неперервних моделях класичної механіки.

Для студентів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників.

Передмова

Даний навчальний посібник присвячений питанням вирішення систем багатьох лінійних диференціальних рівнянь, які зустрічаються у задачах класичної механіки. Ми детально розглянули задачі про коливання лінійних ланцюжків частинок, з'єднаних пружинками, та споріднені до них задачі. Нами розглянуто практично всі можливі варіанти простих ланцюжків, а саме, із двома та одним закріпленими кінцями, обома вільними кінцями, замкнутий, нескінченний та напівнескінченний ланцюжки. Зокрема, такі ланцюжки використовуються як найпростіші фізичні моделі для опису коливань кристалічної ґратки в теорії твердого тіла. Отримано аналітичний розв'язок для коливань нескінченного ланцюжка з врахуванням тертя, пропорційного швидкості. Показано, як може бути знайдений спектр коливань нескінченного ланцюжка з довільними заданими масами та жорсткостями пружинок. Також розглянуто коливання ланцюжка, що складається з довільного числа математичних маятників. Для деяких варіантів ланцюжків проведено електричну аналогію з LC -фільтрами, що активно використовуються в радіотехніці. Нами розглянуто випадкові одновимірні дискретні блукання частинки з неперервним часом, математичний опис яких може бути здійснений за допомогою того самого підходу, що був використаний для дослідження коливань ланцюжків. Усі такі та подібні задачі зводяться до вирішення системи N лінійних диференціальних рівнянь з тридіагональною матрицею, де N – може бути як завгодно великим або нескінченним у випадку нескінченних ланцюжків. У переважній більшості літератури з курсу “Класичної механіки” вигляд розв'язку системи таких рівнянь постулюється, а його пошук починається зі слів: “Розв'язок будемо шукати у вигляді ...”. Практично усі автори обґрунтуванням самого вигляду розв'язку не переймаються, не надаючи цьому питанню належної уваги. Саме питанням побудови та знаходження розв'язку систем багатьох лінійних диференціальних рівнянь з тридіаго-

нальною матрицею присвячений цей навчальний посібник. Для вирішення такого завдання нами використовувався метод твірної функції. Запропонований нами підхід також може бути застосований і до інших типів систем диференціальних рівнянь. Для розглядуваних систем багатьох диференціальних рівнянь здійснено граничний перехід до рівнянь в частинних похідних математичної фізики, що відповідає переходу від дискретної фізичної системи до неперервної. Так, у рамках зазначеного граничного переходу, в нескінченному ланцюжку ми дослідили поздовжні коливання струни. У випадку ланцюжка, що складається з великого числа математичних маятників, зроблено граничний перехід до рівняння, яке описує коливання неперервного ланцюга. Наведено розв'язок одновимірного рівняння дифузії, отриманого в результаті граничного переходу від дискретних до неперервних блукань частинки. Частина розглянутих нами задач взята з [1]. У посібнику містяться також і авторські задачі.

Ми не ставили за мету викласти з усією повнотою відповідні розділи теорії диференціальних рівнянь, а намагалися зробити прозорим і послідовним застосування цієї теорії до вирішення систем багатьох лінійних диференціальних рівнянь з тридіагональною матрицею, які дуже часто зустрічаються у задачах механіки та інших задачах. На початку ми навели короткі теоретичні відомості щодо лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та важливі для подальшого відомості з теорії циліндричних функцій, а також сформулювали загальну ідею застосування твірної функції.

Посібник орієнтований на читача, який знайомий з основами математичного аналізу, лінійною алгеброю, теорією диференціальних рівнянь, теорією функцій комплексної змінної на рівні передбаченому навчальними програмами фізичних спеціальностей університетів з цих дисциплін.

Сподіваємось, що запропонований посібник буде корисним для студентів, аспірантів та викладачів фізичних та фізико-математичних спеціаль-

ностей університетів.

Посібник створений за допомогою поліграфічної системи LaTeX. Для побудови малюнків використано мову векторної графіки Asymptote.

1 Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівнянням n -ого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння типу

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \quad (1)$$

де $y = y(x)$, $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для знаходження розв'язку такого рівняння в першу чергу важливо побудувати фундаментальну систему розв'язків відповідного йому однорідного рівняння, оскільки аналіз неоднорідного рівняння суттєво її використовує (методи варіації сталих чи Коші).

1.1 Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad (2)$$

де $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Р точністю до коефіцієнта розв'язк такого рівняння можна шукати у вигляді так званої підстановки Ейлера

$$y(x) = e^{\lambda x}. \quad (3)$$

Підстановка розв'язку (3) у рівняння (2) приводить до алгебраїчного рівняння n -ого порядку

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (4)$$

яке називається характеристичним. Коефіцієнти останнього збігаються з коефіцієнтами вихідного однорідного рівняння. Згідно з основною теоремою алгебри алгебраїчне рівняння порядку n з дійсними коефіцієнтами має n дійсних або комплексних коренів. Якщо pojawiaються комплексні розв'язки, то вони існують парами λ та λ^* .

Нехай усі корені λ_i (де $i = 1, 2, \dots, n$) характеристичного рівняння (4) однократні. Тоді кожному кореню λ_i відповідає експоненціальна функція

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad (5)$$

сукупність яких утворює фундаментальну систему розв'язків вихідного однорідного рівняння $\hat{L}y = 0$ (2). Звідки загальний розв'язок рівняння (2) матиме вигляд

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}, \quad (6)$$

де c_i – довільні коефіцієнти.

У випадку, якщо серед коренів λ_i характеристичного рівняння (4) зустрічається пара комплексно-спряжених значень $\lambda_k = \alpha + i\beta$ та $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta = \lambda_k^*$ зручно від пари фундаментальних розв'язків

$$y_k(x) = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad y_{k+1}(x) = e^{(\alpha - i\beta)x} = y_k^*(x) \quad (7)$$

перейти до іншої пари фундаментальних розв'язків, а саме

$$\tilde{y}_k(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x = \operatorname{Re} y_k(x) \quad \tilde{y}_{k+1}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x = \operatorname{Im} y_k(x). \quad (8)$$

Пара функцій $\tilde{y}_k(x)$ та $\tilde{y}_{k+1}(x)$ також утворює фундаментальні розв'язки, які відповідають комплексно-спряженій парі коренів $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння.

Нехай серед коренів характеристичного рівняння (4) є багатократні, а саме, корінь λ є дійсним і зустрічається $r \geq 1$ разів (r – кратність вирождення кореня). Такому кореню відповідає функція

$$y(x) = P_{r-1}(x) e^{\lambda x}, \quad (9)$$

де $P_{r-1}(x)$ – поліном порядку $r - 1$ з довільними коефіцієнтами, або фундаментальна система r функцій

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x}. \quad (10)$$

Наведені функції є розбиттям полінома на одночлени з одиничними коефіцієнтами, їх лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами відновлює сам поліном. Очевидно, перша функція безпосередньо відповідає частинному розв'язку, отриманим одразу підстановкою Ейлера. Таким чином, система функцій (10) утворює сукупність фундаментальних розв'язків рівняння $\hat{L}y = 0$ у випадку r -кратно виродженого кореня λ характеристичного рівняння.

Нехай характеристичне рівняння (4) має пару комплексно-спряжених коренів $\lambda = \alpha \pm i\beta$ з кратністю $r \geq 1$. Таким кореням відповідають дійсні функції

$$y(x) = P_{r-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \tilde{y}(x) = P_{r-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (11)$$

Таким чином, фундаментальну систему розв'язків рівняння $\hat{L}y = 0$ можна вибрати у вигляді $2r$ функцій

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (12)$$

Лінійна комбінація функцій (12) з довільними коефіцієнтами є розв'язком однорідного рівняння, що відповідає комплексно-спряженій парі $\lambda = \alpha \pm i\beta$ коренів характеристичного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $\hat{L}y = 0$ є лінійною комбінацією фундаментальних розв'язків (5), (8), (10), (12) з довільними коефіцієнтами.

2 Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Для неоднорідних рівнянь $\hat{L}y = f(x)$ (2) зі сталими коефіцієнтами можна застосувати загальні методи пошуку розв'язку, зокрема, такі як варіації сталих та функції Коші. Проте, існують випадки, коли виходячи із загальної структури розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна побудувати частинний розв'язок неоднорідного рівняння і потім додати його до загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Таким чином побудувавши загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння. У випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами реалізація цього підходу повністю це залежить від вигляду правої частини, а саме функції $f(x)$. Тобто розв'язок можна конструювати за виглядом правої частини, іншими словами “вгадати” з точністю до коефіцієнтів. Це можливо тоді, коли неоднорідність є функцією того самого класу, що і загальний розв'язок однорідного рівняння. Для пошуку останнього була використана підстановка Ейлера, тому фундаментальні розв'язки однорідного рівняння завжди складатимуться з експонент та можливих степеневих множників, також можуть з'явитись тригонометричні функції у разі появи експонент з комплексними показниками. Загальний розв'язок є лінійною комбінацією фундаментальних розв'язків, а саме добутків функцій таких типів:

$$x^k, \quad e^{\lambda x}, \quad e^{\alpha x} \cos \beta, \quad e^{\alpha x} \sin \beta, \quad (13)$$

де k – ціле, λ – довільне.

У випадку, коли неоднорідність $f(x)$ є комбінацією функцій (13), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння є комбінацією таких самих функцій з певними коефіцієнтами. Останні знаходяться шляхом підстановки очікуваного частинного розв'язку до вихідного рівняння. Метод

пошуку частинного розв'язку для таких рівнянь називається методом невизначених коефіцієнтів. Вийняток вкладає випадок, якщо серед експоненціальних функцій в неоднорідності $f(x)$ є експонента з таким самим показником, що і у фундаментальній системі розв'язків однорідного рівняння.

Нехай права частина $f(x)$ неоднорідного рівняння є поліномом $Q_m(x)$ порядку m . Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\hat{L}y = f(x)$ також є поліномом $\tilde{Q}_m(x)$ порядку m з невизначеними коефіцієнтами, якщо $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння (4). Якщо $\lambda = 0$ є r кратним коренем характеристичного рівняння (4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $x^r \tilde{Q}_m(x)$.

Нехай функція $f(x) = Q_m(x) e^{\gamma x}$. Тоді один із частинних розв'язків неоднорідного рівняння $\hat{L}y = f(x)$ є $\tilde{Q}_m(x) e^{\gamma x}$ (тут $\tilde{Q}_m(x)$ поліном порядку m з невизначеними коефіцієнтами), якщо γ не є коренем характеристичного рівняння (4). Якщо величина γ є r кратним коренем характеристичного рівняння (4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $x^r \tilde{Q}_m(x) e^{\gamma x}$.

Якщо права частина неоднорідного рівняння $\hat{L}y = f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (A_m(x) \cos \beta x + B_k(x) \sin \beta x), \quad (14)$$

де $A_m(x)$, $B_k(x)$ – поліноми порядків m і k відповідно, то частинний розв'язок такого рівняння можна записати у вигляді

$$y(x) = x^r e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x). \quad (15)$$

Тут $R_l(x)$, $S_l(x)$ – поліноми порядку $l = \max\{m, k\}$, r – кратність кореня характеристичного рівняння $\alpha \pm i\beta$ (якщо такого кореня не існує, то $r = 0$).

3 Функції Бесселя

3.1 Означення функцій Бесселя

Звичайне диференціальне рівняння 2-ого порядку

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (16)$$

відносно функції $y = y(x)$ називається рівнянням для циліндричних функцій порядку ν або рівнянням Бесселя порядку ν . Обмежений при $x \rightarrow 0$, розв'язок рівняння (16) має вигляд степеревого ряду

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (17)$$

і називається функцією Бесселя або циліндричною функцією порядку ν першого роду. Зокрема, функції Бесселя найнижчих порядків, а саме, нульового та першого мають вигляд

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Функції Бесселя $J_{n+1/2}(x)$ напівцілого порядку виражаються через елементарні. Так, для $\nu = \pm 1/2$ можна записати:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (19)$$

Ще одним, лінійно незалежним розв'язком рівняння (16) буде необмежена в нулі функція:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \quad (20)$$

У випадку цілого значення $\nu = n$ (тут і далі $n \in \mathbb{Z}$) функції $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ є лінійно залежними, так що виконується $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Тому в якості другого лінійно незалежного розв'язку рівняння (16) вводять функцію Неймана (функція Бесселя другого роду), яка є лінійною комбінацією функцій $J_\nu(x)$ та $J_{-\nu}(x)$:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}. \quad (21)$$

Функції $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$ є лінійно незалежними для довільних значень ν .

Функціями Бесселя третього роду, або функціями Ханкеля, називаються наступні лінійні комбінації функцій $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Так само, як і пара функцій $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$, пара функцій Ханкеля утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння Бесселя (16), повний розв'язок якого можна подати у двох еквівалентних формах:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x),$$

або

$$y(x) = c_1 H_\nu^{(1)}(x) + c_2 H_\nu^{(2)}(x),$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі.

Усі циліндричні функції задовольняють наступним рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \\ Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) &= 2Z'_\nu(x), \end{aligned} \quad (23)$$

де $Z_\nu(x)$ — одна з циліндричних функцій порядку ν , а саме $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1,2)}(x)$. Тут і далі “штрих” у функцій позначає похідну по відповідному аргументу. Зазначимо, що $J'_0(x) = -J_1(x)$.

Асимптотичні розклади функцій Бесселя при малих та великих значеннях аргументу мають вигляд,

якщо $x \ll 1$:

$$J_\nu(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad (24)$$

$$N_\nu(x) \simeq \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + 0.5772 \dots \right), & \text{при } \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \text{при } \nu \neq 0 \end{cases} \quad (25)$$

якщо $x \gg 1$:

$$J_\nu(x) \simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \quad (26)$$

$$N_\nu(x) \simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{2}\right). \quad (27)$$

Зазначимо, що перехід від однієї асимптотичної формули до іншої відбувається для значень $x \simeq \nu$.

Коренем функції Бесселя порядку ν називається розв'язок рівняння $J_\nu(x) = 0$, який позначають $x_i^{(\nu)}$, де індекс $i = 1, 2, \dots$ — номерує корені. Якщо порядок ν — дійсний, то функція Бесселя $J_\nu(x)$ має нескінченне число коренів. Усі корені тільки дійсні і прості за виключенням, можливо, точки 0. Корені функцій Бесселя задовольняють наступній умові:

$$\dots < x_i^{(\nu)} < x_i^{(\nu+1)} < x_{i+1}^{(\nu)} < x_{i+1}^{(\nu+1)} < x_{i+2}^{(\nu)} < x_{i+2}^{(\nu+1)} < \dots$$

3.2 Ортогональність функцій Бесселя

Для функцій Бесселя $J_\nu(\alpha_1 x)$ та $J_\nu(\alpha_2 x)$ справедлива наступна умова

$$\int_0^L x J_\nu(\alpha_1 x) J_\nu(\alpha_2 x) dx = \frac{x}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} [J_\nu(\alpha_1 x) J'_\nu(\alpha_2 x) - J'_\nu(\alpha_1 x) J_\nu(\alpha_2 x)] \Big|_0^L.$$

(28)

Нехай у точках $x = 0, L$ функції $J_\nu(\alpha_1 x)$ та $J_\nu(\alpha_2 x)$, або $J'_\nu(\alpha_1 x)$ та $J'_\nu(\alpha_2 x)$ обертаються в нуль. Тоді інтеграл (28) дорівнює нулю за умови $\alpha_1 \neq \alpha_2$. У граничному випадку $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, розкриваючи невизначеність у правій частині та беручи до уваги рівняння Бесселя, матимемо:

$$\int_0^L x J_\nu^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} J_\nu'(\alpha x)^2 \Big|_0^L + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) J_\nu(\alpha x)^2 \Big|_0^L. \quad (29)$$

Звідси, якщо функція $J_\nu(\alpha x)$ як зазначалося вище обертається в нуль в точках $x = 0, L$, то враховуючи $J'_\nu(kx) = -J_{\nu+1}(kx)$, отримаємо

$$\int_0^L x J_\nu^2(\alpha x) dx = \frac{L^2}{2} [J'_\nu(\alpha L)]^2. \quad (30)$$

Виходячи з наведеного, інтеграл ортогональності для функцій Бесселя на відрізьку $[0, L]$ запишеться так

$$\int_0^L x J_\nu(\alpha_i^{(\nu)} x) J_\nu(\alpha_j^{(\nu)} x) dx = \frac{L^2}{2} [J'_\nu(\alpha_i^{(\nu)} L)]^2 \delta_{ij}, \quad (31)$$

де введено позначено $\alpha_i^{(\nu)} = x_i^{(\nu)} / L$ та $\alpha_j^{(\nu)} = x_j^{(\nu)} / L$. Тут $x_i^{(\nu)}$ позначає i -ий корінь рівняння $J_\nu(x) = 0$.

Завдяки умові ортогональності (31) має місце розклад функцій в ряд по функціях Бесселя $J_\nu(x)$ (ряд Фур'є-Бесселя). Довільна двічі диференційовна функція $f(x)$, обмежена при $x = 0$ і рівна нулеві при $x = L$, може бути розкладена на відрізьку $[0, L]$ у ряд вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(\alpha_i^{(\nu)} x), \quad (32)$$

де коефіцієнти розкладу є

$$a_i = \frac{\int_0^L x f(x) J_\nu(\alpha_i^{(\nu)} x) dx}{\frac{L^2}{2} [J'_\nu(\alpha_i^{(\nu)} L)]^2}. \quad (33)$$

Умова повноти базису $J_\nu(\alpha x)$ на відрізку $[0, L]$ виражається формулою

$$\frac{2}{L^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\alpha_i^{(\nu)} x) J_\nu(\alpha_i^{(\nu)} x')}{[J'_\nu(\alpha_i^{(\nu)} L)]^2} = \frac{1}{x} \delta(x - x'). \quad (34)$$

Якщо $L \rightarrow \infty$, то розклад Фур'є-Бесселя переходить у інтеграл Фур'є-Бесселя (аналогічно звичайному інтегралу Фур'є):

$$f(x) = \int_0^\infty k \hat{f}(k) J_\nu(kx) dk, \quad \hat{f}(k) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(kx) dx. \quad (35)$$

Умова повноти базису $J_\nu(\alpha x)$ на інтервалі $[0, \infty)$:

$$\int_0^\infty x J_\nu(kx) J_\nu(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k - k'). \quad (36)$$

Для розкладу функції $f(x)$ в ряд по функціях Бесселя $J_\nu(x)$ на відрізку $[a, b]$ в якості базису можна використовувати функції вигляду

$$\varphi_\nu(x) = J_\nu(\alpha x) N_\nu(\alpha a) - N_\nu(\alpha x) J_\nu(\alpha a),$$

де параметр α вибирають так, що $\varphi_\nu(b) = 0$.

У загальному випадку функції $R_n(x)$, яка є лінійною комбінацією функцій $J_n(x)$ та $N_n(x)$, інтеграл ортогональності має вигляд:

$$\int_0^l x R_n(\alpha_i x) R_n(\alpha_j x) dx = \frac{\delta_{ij}}{2} [x^2 R_n'^2(\alpha_i x) + (x^2 - n^2) R_n^2(\alpha_i x)] \Big|_0^l. \quad (37)$$

де $R_n(\alpha_{i,j}) = 0$.

3.3 Інтегральне представлення функцій Бесселя

Функцію Бесселя $J_\nu(x)$ у можна подати у вигляді інтегралу:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) \cos^{2\nu} \varphi d\varphi \quad (38)$$

Після заміни $t = \sin \varphi$ в інтегралі (38), матимемо

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} e^{itx} dt. \quad (39)$$

З інтегрального представлення (38) випливає наступна оцінка для функції Бесселя $J_\nu(x)$:

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left|\frac{x}{2}\right|^\nu.$$

3.4 Твірна функції Бесселя

Твірною для функції Бесселя $J_n(x)$ цілого порядку $n \in \mathbb{Z}$ є функція

$$e^{\frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x). \quad (40)$$

Якщо в (40) покласти $t = e^{i\varphi}$ матимемо

$$e^{ix \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} J_n(x). \quad (41)$$

З виразу (41), враховуючи ортогональність базису $e^{in\varphi}$, отримується інтеграл Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi. \quad (42)$$

3.5 Модифіковані функції Бесселя

У ряді фізичних задач виникає звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $y = y(x)$:

$$x^2 y'' + xy - (x^2 + \nu^2)y = 0, \quad (43)$$

яке отримується з рівняння Бесселя заміною x на ix . Розв'язком рівняння (43) будуть модифіковані функції Бесселя. Очевидно, частинним розв'язком (43) буде функція $J_\nu(ix)$. Розв'язок рівняння (43) прийнято позначати:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{i^\nu} J_\nu(ix), \quad (44)$$

де функція $I_\nu(x)$ може бути записана у вигляді ряду:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \quad (45)$$

У випадку, коли індекс ν не є цілим числом, то другим лінійно незалежним розв'язком рівняння (43) буде функція $I_{-\nu}(x)$. Якщо ж ν є ціле число ($\nu = n$), то функції $I_n(x)$ та $I_{-n}(x)$ — лінійно залежні, так що $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

У випадку довільного значення ν другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (43) називається функцією Макдональда і має вигляд:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi \nu}. \quad (46)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (43) можна записати у вигляді лінійної комбінації

$$y(x) = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x),$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Асимптотичні розклади для модифікованих функцій Бесселя $I_\nu(x)$ і $K_\nu(x)$ при малих та великих значеннях аргументу,

якщо $x \ll 1$:

$$I_\nu(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad (47)$$

$$K_\nu(x) \simeq \begin{cases} -\left(\ln \frac{x}{2} + 0.5772 \dots\right), & \text{при } \nu = 0, \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \text{при } \nu \neq 0, \end{cases} \quad (48)$$

якщо $x \gg 1$:

$$I_\nu(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad (49)$$

$$K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \quad (50)$$

3.6 Метод твірної функції

У загальних рисах опишемо зміст методу твірної функції. Нехай необхідно дослідити деяку послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Твірною функцією для цієї послідовності будемо називати вираз виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (51)$$

Твірна функція представляє послідовність чисел у вигляді ряду по степенях формальної змінної z . У цілому точне знаходження коефіцієнтів аналітичної функції є не простою задачею. Складність останньої визначається числом та характером особливих точок функції $f(z)$. Зовсім інакше виглядає ситуація із знаходженням аналітичних асимптотичних формул для коефіцієнтів a_n при $n \rightarrow \infty$. Як виявляється на асимптотичну поведінку коефіцієнтів a_n особливі точки впливають не однаково. Чим далі розташована особлива точка, тим менше вона впливає на коефіцієнти, а при однаковій відстані – тим менше, чим повільніше зростає функція при наближенні до цієї особливої точки. Тому дослідження найближчих особливих точок функції $f(z)$ як правило дозволяє легко встановити асимптотичну поведінку для коефіцієнтів a_n . У самому крайньому випадку ми можемо отримати вираз для a_n у вигляді контурного інтегралу, який практично завжди можна принаймні оцінити.

До твірних функцій застосовні практично всі операції, які виконуються над аналітичними функціями. Зокрема, твірні функції можна додавати, віднімати, диференціювати, інтегрувати тощо.

Задача 1. Ланцюжок частинок з фіксованими кінцями.

Дослідити повздовжні коливання лінійного ланцюжка, що складається з N однакових частинок маси m з'єднаних $N + 1$ однаковими пружинками жорсткості k . Кінці двох крайніх пружин жорстко закріплені. У стані рівноваги пружинки не деформовані.

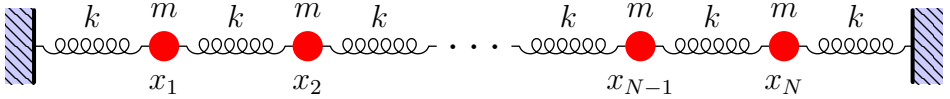


Рис. 1: Ланцюжок частинок з жорстко закріпленими кінцями.

◀ В якості узагальнених координат візьмемо x_1, x_2, \dots, x_N – відхилення частинок від положень рівноваги. Формально позначимо координати закріплених кінців пружин $x_0 \equiv 0$ та $x_{N+1} \equiv 0$. Тоді функція Лагранжа ланцюжка

$$L = T - U = \sum_{l=1}^N \frac{m\dot{x}_l^2}{2} - \sum_{l=0}^N \frac{k}{2}(x_{l+1} - x_l)^2 \quad (52)$$

Система рівнянь Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_l} = 0 \implies m\ddot{x}_l + k(x_l - x_{l-1}) - k(x_{l+1} - x_l) = 0, \quad l = \overline{1, N}. \quad (53)$$

Таким чином маємо систему N рівнянь

$$\ddot{x}_l + \omega_0^2(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (54)$$

де введено позначення $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Для розв'язку цієї системи зі сталими коефіцієнтами застосуємо метод Ейлера. Підставляючи в рівняння

$$x_l = A_l e^{i\omega t} \iff \mathbf{x} = \xi e^{i\omega t}, \quad \xi = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (55)$$

де ξ – один з власних векторів матриці системи, матимемо

$$-\omega^2 A_l + \omega_0^2 (2A_l - A_{l+1} - A_{l-1}) = 0 \implies 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right) A_l - A_{l+1} - A_{l-1} = 0. \quad (56)$$

Позначимо $\mu = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}$. Звідки матимемо різницеве рівняння або, іншими словами, рекурентне співвідношення ¹ для знаходження компонент вектора ξ

$$2\mu A_l - A_{l+1} - A_{l-1} = 0. \quad (57)$$

Причому оскільки $x_0 \equiv 0$, то $A_0 = 0$. Але тоді A_1 не може бути рівним нулю, бо, в такому випадку, в силу рекурентного співвідношення A_2, A_3 , і усі інші компоненти вектора ξ були б рівні 0, що неможливо у випадку власного вектора. Щоб згорнути рекурентне співвідношення, і таким чином знайти явний вираз для A_l , розглянемо функцію

$$G(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^l \equiv \sum_{l=1}^{\infty} A_l z^l, \quad (58)$$

де z – нова, взагалі кажучи, комплексна змінна, $G(z)$ – так звана *твірна функція*^{2,3,4}

¹Записуючи рекурентне співвідношення в матричному вигляді, маємо

$$\begin{pmatrix} -2\mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2\mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що фактично потрібно знайти усі нетривіальні розв'язки цієї системи.

²H.S.Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press, Inc. (1994).

³S.K.Lando, *Lectures on Generating Functions*, American Mathematical Society (2003).

⁴Метод твірної функції можна вважати дискретним аналогом методу інте-

Домножимо рекурентне співвідношення (57) на z^l , і просумуємо по l від 1 до ∞ , матимемо

$$2\mu \sum_{l=1}^{\infty} A_l z^l - \sum_{l=1}^{\infty} A_{l+1} z^l - \sum_{l=1}^{\infty} A_{l-1} z^l = 0. \quad (59)$$

У другому доданку даного співвідношення від суми по l перейдемо до підсумовування по індексу m згідно заміни $m = l+1$. А в третьому доданку в сумі по l також згідно заміни $m = l-1$ перейдемо до підсумовування по індексу m , матимемо

$$2\mu \sum_{l=1}^{\infty} A_l z^l - \sum_{m=2}^{\infty} A_m z^{m-1} - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^{m+1} = 0. \quad (60)$$

Беручи до уваги визначення (58) твірної функції $G(z)$, дане співвідношення перепишеться у вигляді:

$$2\mu G(z) - \frac{1}{z}[G(z) - A_1 z] - zG(z) = 0 \quad \implies \quad \left[z - 2\mu + \frac{1}{z} \right] G(z) = a \quad (61)$$

$$G(z) = \frac{A_1}{z - 2\mu + \frac{1}{z}} = \frac{A_1 z}{z^2 - 2\mu z + 1} = \frac{A_1 z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \quad (62)$$

де λ_1 та λ_2 корені рівняння $z^2 - 2\mu z + 1 = 0$ є $\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$, $\lambda_2 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1} = \lambda_1^*$, так що $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Нехай $\mu \neq \pm 1$, тоді запишемо функцію $G(z)$ у вигляді суми двох простих дробів

$$G(z) = \frac{A_1 z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} = \frac{C}{z - \lambda_1} + \frac{D}{z - \lambda_2}, \quad (63)$$

гральних перетворень. Ідея методу полягає в тому, що дискретному набору чисел або функцій (скінченному або нескінченному) ставиться у відповідність одна аналітична функція деякої нової змінної. Тоді до цієї функції можна застосувати увесь потужний апарат аналізу, при цьому працюючи одночасно з усім вихідним набором.

де сталі C та D знаходимо приводячи дробі до спільного знаменника

$$az \equiv C(z - \lambda_2) + D(z - \lambda_1). \quad (64)$$

Звідки, поклавши $z = \lambda_1$, маємо $C = \frac{A_1 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Аналогічно, поклавши $z = \lambda_2$, маємо $D = \frac{A_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Отже

$$G(z) = \frac{A_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{1 - \frac{z}{\lambda_2}} - \frac{1}{1 - \frac{z}{\lambda_1}} \right] = \frac{A_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda_2} \right)^l - \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda_1} \right)^l \right].$$

Тут ми припускаємо, що $|z| < \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, щоб могли розвинути частки в ряд. Враховуючи, що $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, маємо $\frac{1}{\lambda_2^l} = \lambda_1^l$ і $\frac{1}{\lambda_1^l} = \lambda_2^l$. Тому

$$G(z) = \frac{A_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_2^l} - \frac{1}{\lambda_1^l} \right] z^l = A_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l}{\lambda_1 - \lambda_2} z^l \equiv \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^l. \quad (65)$$

Звідки

$$A_l = A_1 \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (66)$$

Але з того, що $x_{N+1} \equiv 0$, випливає $A_{N+1} = 0$. Звідки $A_1 \frac{\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0$. З цієї рівності випливає, що $\lambda_1^{N+1} = \lambda_2^{N+1}$. Враховуючи, що $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, матимемо

$$\lambda_1^{N+1} = \frac{1}{\lambda_1^{N+1}} \implies \lambda_1^{2N+2} = 1. \quad (67)$$

Знаходячи корені даного рівняння, маємо

$$\lambda_1 = e^{i \frac{2\pi n}{2N+2}}, \quad n = \overline{0, 2N+1}. \quad (68)$$

Випадок $n = 0$ дає $\lambda_1 = 1$, що відповідає $\mu = 1$ та $\omega = 0$. Випадок $n = N+1$ дає $\lambda_1 = -1$, що відповідає $\mu = -1$. Ці випадки були виключені вище при

виведенні формули (66). Справді, чисельник і знаменник формули при $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ обертається в нуль, тому формула безпосередньо не застосовна. Але можна попрямувати $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \pm 1$, і розкрити невизначеність за правилом Лопіталя

$$A_l = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \pm 1} A_1 \frac{l\lambda_1^{l-1}}{1} = \begin{cases} la & \lambda_1 = 1 \\ (-1)^{l-1}la & \lambda_1 = -1. \end{cases} \quad (69)$$

Звідки випливає, що $A_l \neq 0$ при $l > 0$, оскільки $a \neq 0$. Але тоді неможливо задовольнити умову $A_{N+1} = 0$. Тому $n = 0$ та $n = N + 1$ не дають внеску в розв'язок. Решта $2N$ значень λ_1 розбиваються на пари з номерами $n \longleftrightarrow 2N + 2 - n$, яким відповідають комплексно спряжені значення λ_1 . Отже

$$\lambda_1 = e^{\pm i \frac{\pi n}{N+1}} = \lambda_2^*, \text{ де } n = \overline{1, N}. \quad (70)$$

Позначимо $\varphi_n = \frac{\pi n}{N+1}$. Тоді

$$\lambda_1 = e^{\pm i \varphi_n} = \cos \varphi_n \pm i \sin \varphi_n = \lambda_2^*, \quad n = \overline{1, N}. \quad (71)$$

З іншого боку $\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} = \mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$. Звідки

$$\mu = \cos \varphi_n \implies 2\mu = 2 \cos \varphi_n = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \implies \omega^2 = \omega_0^2 \cdot 2(1 - \cos \varphi_n) \quad (72)$$

$$\omega = \pm \omega_0 \sqrt{2(1 - \cos \varphi_n)} = \pm \omega_0 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi_n}{2}} = \pm 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_n}{2} \quad (73)$$

Отже, власні частоти коливань ланцюжка будуть визначатися наступним чином

$$\boxed{\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_n}{2} = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{N+1} \right), \quad n = \overline{1, N}} \quad (74)$$

У фізиці частоти вважають невід'ємними. Проте, формуючи розв'язок за методом Ейлера важливо враховувати $\pm \omega_n$.

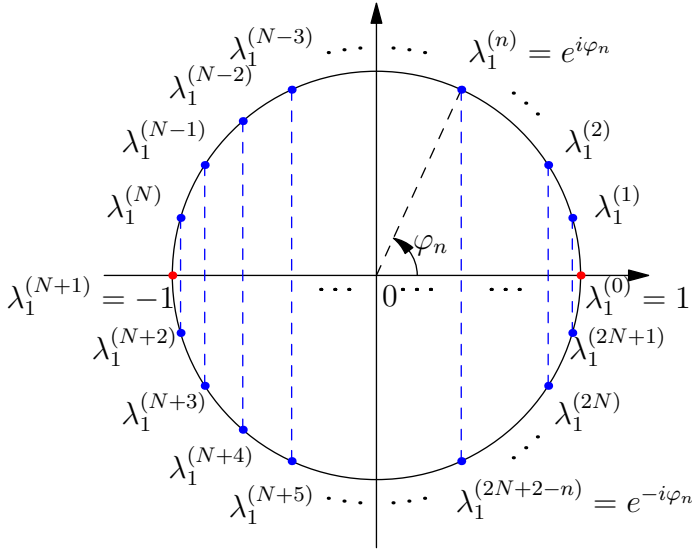


Рис. 2: Значення $\lambda_1 = \pm 1$ не підходять. Решта об'єднується в N пар комплексно спряжених λ_1 .

Компоненти власного вектора $\xi^{(n)}$, що відповідає власним частотам $\pm\omega_n$, рівні

$$A_l^{(n)} = a_n \frac{(\lambda_1^{(n)})^l - (\lambda_2^{(n)})^l}{\lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)}} = a_n \frac{e^{il\varphi_n} - e^{-il\varphi_n}}{e^{i\varphi_n} - e^{-i\varphi_n}} = a_n \frac{\sin(l\varphi_n)}{\sin \varphi_n}, \quad (75)$$

де n -те значення λ_1 позначено $\lambda_1^{(n)} = e^{i\varphi_n}$, відповідно $\lambda_2^{(n)} = e^{-i\varphi_n}$, і враховано, що ненульовий множник a_n буде, взагалі кажучи, різним для різних власних векторів $\xi^{(n)}$.

Нормуємо власні вектори $\xi^{(n)} = \begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ \vdots \\ A_N^{(n)} \end{pmatrix}$, які відповідають частотам

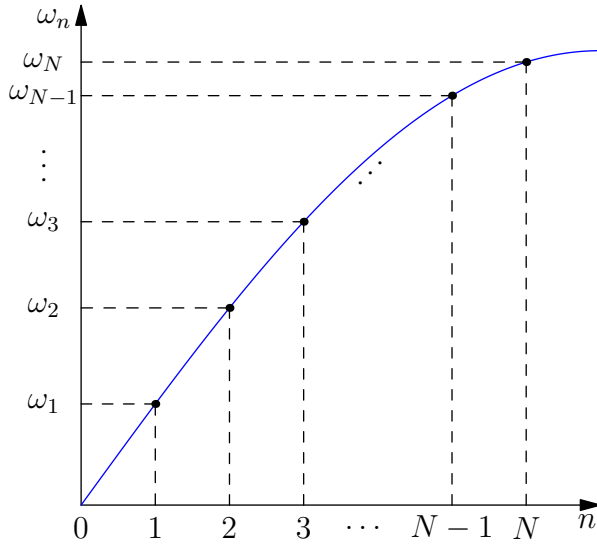


Рис. 3: Спектр власних частот коливань ланцюжка з жорстко закріпленими кінцями $\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{N+1}\right)$, $n = \overline{1, N}$.

$\pm\omega_n$, на одиницю:

$$\begin{aligned} 1 &= |\xi^{(n)}|^2 = \left(A_1^{(n)}\right)^2 + \left(A_2^{(n)}\right)^2 + \dots + \left(A_N^{(n)}\right)^2 = \\ &= \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} [\sin^2 \varphi_n + \sin^2 2\varphi_n + \dots + \sin^2 N\varphi_n] \end{aligned} \quad (76)$$

Якщо в попередньому виразі застосувати формулу пониження степеня, отримаємо

$$1 = \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \cdot \frac{1}{2} [N - \cos(1 \cdot 2\varphi_n) - \cos(2 \cdot 2\varphi_n) - \dots - \cos(N \cdot 2\varphi_n)]. \quad (77)$$

Або

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \cdot \frac{1}{2} \left[N + 1 - \sum_{l=0}^N \operatorname{Re} \left\{ e^{il\varphi_n} \right\} \right] = \\ &= \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \cdot \frac{1}{2} \left[N + 1 - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^N e^{il\varphi_n} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (78)$$

Суму в фігурних дужках можна вирахувати наступним чином

$$\sum_{l=0}^N e^{il\varphi_n} \equiv \sum_{l=0}^N e^{il\frac{2\pi n}{N+1}} = \frac{1 - e^{i(N+1)\frac{2\pi n}{N+1}}}{1 - e^{i\frac{2\pi n}{N+1}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi n}{N+1}}} = 0 \quad (79)$$

Звідки маємо

$$1 = \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \cdot \frac{N+1}{2} \implies \frac{a_n}{\sin \varphi_n} = \sqrt{\frac{2}{N+1}}. \quad (80)$$

Звідки компоненти (75) власного вектора $\xi^{(n)}$ запишуться так

$$A_l^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi n l}{N+1}. \quad (81)$$

Згідно з методом Ейлера, розв'язок системи є лінійною комбінацією доданків, що відповідають усім власним частотам $\pm\omega_n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N \xi^{(n)} \cdot [C_n e^{i\omega_n t} + C_n^* e^{-i\omega_n t}], \quad (82)$$

де коефіцієнти біля експонент у виразі в квадратних дужках мусять бути комплексно спряжені, щоб відхилення від положення рівноваги x_l були дійсними величинами.

Введемо нормальні координати Q_n , що відповідають нормальним модам коливань ланцюжка

$$Q_n = C_n e^{i\omega_n t} + C_n^* e^{-i\omega_n t} \equiv c_n \cos(\omega_n t) + d_n \sin(\omega_n t), \quad (83)$$

де c_n та d_n – дійсні сталі, які можуть бути визначені з початкових умов.

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} &= \sum_{n=1}^N \xi^{(n)} Q_n \implies x_l = \sum_{n=1}^N A_l^{(n)} Q_n = \\ &= \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi n l}{N+1} \cdot Q_n \equiv \sum_{n=1}^N t_{ln} Q_n, \end{aligned} \quad (84)$$

де $t_{nl} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi n l}{N+1}$ компоненти матриці \hat{T} переходу до нормальних координат.

Матриця \hat{T} є симетричною. Крім того за побудовою

$$\hat{T} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N], \quad (85)$$

тобто в n -тому стовпчику матриці стоять компоненти власного вектора ξ_n . Власні вектори ξ_n ортогональні, як власні вектори дійсної симетричної матриці системи ⁵, тому

$$(\hat{T}^2)_{ns} = (\xi_n \cdot \xi_s) = \delta_{ns} \implies \hat{T}^2 = \hat{E} \implies \hat{T} = \hat{T}^{-1}, \quad (86)$$

де \hat{E} – одинична матриця. Тоді, при $t = 0$

$$x_l(0) = \sum_{n=1}^N t_{ln} c_n \implies c_n = \sum_{r=s}^N t_{ns} x_s(0), \quad (87)$$

$$\dot{x}_l(0) = \sum_{n=1}^N t_{ln} \omega_n d_n \implies d_n = \frac{1}{\omega_n} \sum_{s=1}^N t_{ns} \dot{x}_s(0). \quad (88)$$

⁵Справді, для дійсної симетричної матриці \hat{A} і власних векторів ξ_λ , ξ_μ , які відповідають різним власним числам λ і μ , маємо $\hat{A}\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$ та $\hat{A}\xi_\mu = \mu\xi_\mu$. Замножуючи перше рівняння зліва на ξ_μ , а друге на ξ_λ , і віднімаючи одне рівняння від іншого та врахувавши, що в силу симетрії матриці $\xi_\mu \hat{A} \xi_\lambda = \xi_\lambda \hat{A} \xi_\mu$, отримаємо $(\lambda - \mu)(\xi_\lambda \cdot \xi_\mu) = 0 \implies (\xi_\lambda \cdot \xi_\mu) = 0$, якщо $\lambda \neq \mu$.

Звідки

$$Q_n = c_n \cos(\omega_n t) + d_n \sin(\omega_n t) = \sum_{s=1}^N t_{ns} \left[x_s(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right]. \quad (89)$$

Тоді, розв'язок виражений через початкові умови запишеться:

$$x_l(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N t_{ln} t_{ns} \left[x_s(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \quad (90)$$

Або

$$x_l(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N \sin\left(\frac{\pi l n}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n s}{N+1}\right) \times \\ \times \left[x_s(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right], \quad (91)$$

де $\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{N+1}\right)$. ►

Випадок найкоротшого ланцюжка із двох однакових частинок, $N = 2$.

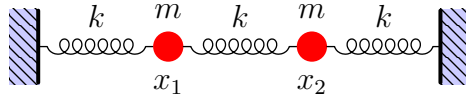


Рис. 4: Ланцюжок з двох частинок.

◄ У випадку $N = 2$ матимемо

$$\omega_1 = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{6} = \omega_0, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\omega_0, \quad \xi^{(2)} &= \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Бачимо, що одна мода коливань відповідає коливанням “в фазі”, коли $x_1(t) = x_2(t)$. Тому пружинка, що з’єднує маси, взагалі не деформується. А інша мода відповідає коливанням “в протифазі”, коли $x_1(t) = -x_2(t)$. Будь-яке коливання ланцюжка з двох мас можна подати як суперпозицію цих двох симетричних коливань. Матриця переходу до нормальних координат

$$\hat{T} = [\xi^{(1)}, \xi^{(2)}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (92)$$

Розв’язок в цьому випадку

$$\begin{aligned}x_1(t) = & t_{11}t_{11} \left[x_1(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_1(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] + \\ & + t_{11}t_{12} \left[x_2(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] + \\ & + t_{12}t_{21} \left[x_1(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] + \\ & + t_{12}t_{22} \left[x_2(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right],\end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned}x_2(t) = & t_{21}t_{11} \left[x_1(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_1(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] + \\ & + t_{21}t_{12} \left[x_2(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] + \\ & + t_{22}t_{21} \left[x_1(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] + \\ & + t_{22}t_{22} \left[x_2(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right].\end{aligned} \quad (94)$$

Підставляючи конкретні значення, матимемо

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ [x_1(0) + x_2(0)] \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ [x_1(0) - x_2(0)] \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\sqrt{3}\omega_0} \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) \right\} \quad (95)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \left\{ [x_1(0) + x_2(0)] \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ [x_1(0) - x_2(0)] \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\sqrt{3}\omega_0} \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) \right\} \quad (96)$$

►

Задача 2. Ланцюжок з одним вільним кінцем.

Дослідити коливання лінійного ланцюжка, що складається з N однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k , якщо один з кінців ланцюжка вільний.

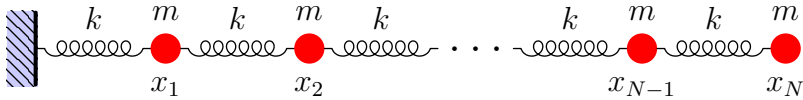


Рис. 5: Ланцюжок з одним вільним кінцем.

◀ Позначимо x_1, x_2, \dots, x_N – відхилення мас від положень рівноваги. Формально позначимо $x_0 \equiv 0$ для закріпленого лівого кінця ланцюжка. Якщо під час руху пружинка не деформується, можна вважати, що її немає. Тому можна додати до вільного кінця ланцюжка іще одну пружинку, і іще одну $(N + 1\text{-шу})$ масу, і вважати, що $x_{N+1}(t) \equiv x_N(t)$.

Рівняння та схема застосування методу Ейлера будуть такі самі, як у попередній задачі. З умови $x_{N+1}(t) \equiv x_N(t) \implies A_{N+1} = A_N$, а рекурентне співвідношення для A_l залишається таким самим (див. (57))⁶.

Функцію $G(z)$ будуємо так, як раніше (див. (66))

$$G(z) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l z^l, \quad A_l = a \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (97)$$

Підставляючи явний вигляд A_{N+1} та A_N в умову $A_{N+1} = A_N$, матимемо

$$\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1} = \lambda_1^N - \lambda_2^N, \quad (98)$$

домножуючи яке на λ_1^{N+1} , і, пам'ятаючи, що $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, отримаємо

$$\lambda_1^{2N+2} - 1 = \lambda_1^{2N+1} - \lambda_1 \implies \lambda_1^{2N+1}(\lambda_1 - 1) = -(\lambda_1 - 1). \quad (99)$$

Випадок $\lambda_1 = 1$, як і в попередній задачі, дає $A_l = la$. Але тоді $A_{N+1} \neq A_N$, тому $\lambda_1 \neq 1$. Отже

$$\lambda_1^{2N+1} = -1 \implies \lambda_1 = e^{i\frac{-\pi+2\pi n}{2N+1}} = e^{i\pi\frac{2n-1}{2N+1}}, \quad n = \overline{1, 2N+1}. \quad (100)$$

Значення $n = N + 1$ дає $\lambda_1 = -1$. Підставляти його безпосередньо в (97), не можна. Натомість, застосовуючи правило Лопітала при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = -1$, отримаємо $A_l = (-1)^{l-1}la$, що не задовольняє умову $A_{N+1} = A_N$. Тому $n = N + 1$ відкидаємо.

⁶Записуючи рекурентне співвідношення в матричному вигляді, маємо

$$\begin{pmatrix} -2\mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2\mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\mu & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2\mu & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \\ A_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти усі нетривіальні розв'язки цієї системи.

Решта n розбиваються на N пар $n \longleftrightarrow 2N + 2 - n$, яким відповідають комплексно-спряжені λ_1 , з однаковими відповідними μ та A_l . Тому достатньо враховувати лише $n = \overline{1, N}$.

Щоб скоротити запис, позначимо $\varphi_n = \pi \frac{2n-1}{2N+1}$. Тоді $\lambda_1 = e^{i\varphi_n}$.

$$\lambda = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \implies \mu = \cos \varphi_n. \quad (101)$$

Звідки, згадуючи, що $2\mu = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, виражаємо частоту

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_n}{2} = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{2n-1}{2N+1} \right), \quad n = \overline{1, N}. \quad (102)$$

Підставляючи явний вигляд λ_1 в вираз для A_l , маємо

$$A_l^{(n)} = a_n \frac{\sin(l\varphi_n)}{\sin \varphi_n}. \quad (103)$$

Нормуємо власні вектори $\xi^{(n)}$ на одиницю

$$\begin{aligned} 1 = |\xi^{(n)}|^2 &= \sum_{l=1}^N A_l^{(n)2} = \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \sum_{l=1}^N \sin^2(l\varphi_n) = \\ &= \frac{a_n^2}{2\sin^2 \varphi_n} \sum_{l=1}^N [1 - \cos(2l\varphi_n)] = \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \left[N + 1 - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^N e^{i2l\varphi_n} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (104)$$

Сума в фігурних дужках рівна

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N e^{i2l\varphi_n} &= \frac{1 - e^{i2(N+1)\varphi_n}}{1 - e^{i2\varphi_n}} = \frac{1 - e^{i2(N+1)\pi \frac{2n-1}{2N+1}}}{1 - e^{i2\varphi_n}} = \frac{1 - e^{i\pi(2n-1) + i\pi \frac{2n-1}{2N+1}}}{1 - e^{i2\varphi_n}} = \\ &= \frac{1 + e^{i\varphi_n}}{(1 - e^{i\varphi_n})(1 + e^{i\varphi_n})} = \frac{1}{1 - e^{i\varphi_n}} = \frac{e^{-i\frac{\varphi_n}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi_n}{2}} - e^{i\frac{\varphi_n}{2}}} = \frac{\cos \frac{\varphi_n}{2} - i \sin \frac{\varphi_n}{2}}{-2i \sin \frac{\varphi_n}{2}}. \end{aligned}$$

Тому

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^N e^{i2l\varphi_n} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos \frac{\varphi_n}{2} - i \sin \frac{\varphi_n}{2}}{-2i \sin \frac{\varphi_n}{2}} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_n}{2} \right\} = \frac{1}{2}. \quad (105)$$

Підставляючи цей вираз в (104), маємо

$$1 = \frac{a_n^2}{\sin^2 \varphi_n} \left[N + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \frac{a_n}{\sin \varphi_n} = \frac{2}{\sqrt{2N+1}}. \quad (106)$$

Звідки з (103), маємо

$$A_l^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \sin \left(\pi l \frac{2n-1}{2N+1} \right) \equiv t_{ln}, \quad (107)$$

де t_{ln} – елемент матриці переходу до нормальних координат \hat{T} . Позначимо \tilde{t}_{ln} – елемент оберненої матриці \hat{T}^{-1} . Тоді, повторюючи міркування попередньої задачі, розв'язок запишеться

$$x_l(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N t_{ln} \tilde{t}_{ns} \left[x_s(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right], \quad (108)$$

де

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{2n-1}{2N+1} \right). \quad (109)$$

►

Випадок $N = 2$.

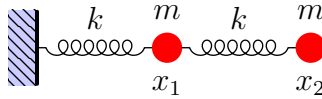


Рис. 6: Ланцюжок з двох мас з одним вільним кінцем.

◀ Зокрема, у випадку найкоротшого ланцюжка $N = 2$, згідно з (109)

$$\omega_1 = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{10} = \omega_0 \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad (110)$$

$$\omega_2 = 2\omega_0 \sin \frac{3\pi}{10} = \omega_0 \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \quad (111)$$

Згідно з (107)

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{5} & \sin \frac{3\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{6\pi}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{5} & \cos \frac{\pi}{10} \\ \cos \frac{\pi}{10} & -\sin \frac{\pi}{5} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{10-2\sqrt{5}} & \sqrt{10+2\sqrt{5}} \\ \sqrt{10+2\sqrt{5}} & -\sqrt{10-2\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (112)$$

Крім того, $\hat{T}^{-1} = \hat{T}$.

Розв'язок отримується підстановкою ω_1 , ω_2 та елементів матриці \hat{T} у вирази (93, 94) з попередньої задачі:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{x_1(0)}{\omega_0} [\omega_1 \cos \omega_1 t + \omega_2 \cos \omega_2 t] + \frac{\dot{x}_1(0)}{\omega_0} [\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t] + \right. \\ &\quad \left. + x_2(0) [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] + \dot{x}_2(0) \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ x_1(0) [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] + \dot{x}_1(0) \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2(0)}{\omega_0} [\omega_2 \cos \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_2 t] + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega_0} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right] \right\} \end{aligned} \quad (114)$$

►

Задача 3. Ланцюжок з вільними кінцями.

Дослідити коливання лінійного ланцюжка, що складається з N однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k , якщо обидва кінці ланцюжка вільні.

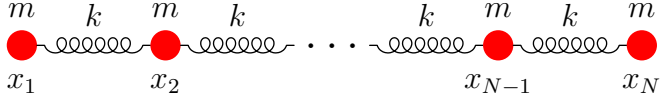


Рис. 7: Ланцюжок з вільними кінцями.

◀ Додамо до вільних кінців ланцюжка по пружинці і по масі (0-ва та $N+1$ -ша маси) відхилення яких від положення рівноваги задані умовами $x_0(t) \equiv x_1(t)$, $x_{N+1}(t) \equiv x_N(t)$. Тоді пружинки між 0-вою та 1-ою, і між N -тою та $N+1$ -шою масами не деформуватимуться, і це означає, що 1-ша, і N -та маси рухаються так, ніби вони відповідають вільним кінцям ланцюжка. Використаємо метод Ейлера, так як в попередніх задачах, підставляючи

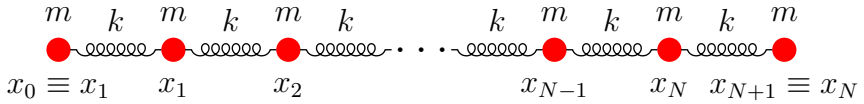


Рис. 8: Ланцюжок еквівалентний ланцюжку з вільними кінцями.

$$x_l(t) = A_l e^{i\omega t} \implies 2\mu A_l - A_{l+1} - A_{l-1} = 0, \quad x_0(t) \equiv x_1(t) \implies A_0 = A_1, \quad (115)$$

де використані позначення з попередніх задач.⁷

Побудуємо твірну функцію $G(z) = \sum_{l=1}^{+\infty} A_l z^l$. Домножуючи рівняння $2\mu A_l - A_{l+1} - A_{l-1} = 0$ на z^l , і підсумовуючи по l від 1 до $+\infty$, отримуємо

$$2\mu \sum_{l=1}^{+\infty} A_l z^l - \sum_{l=1}^{+\infty} A_{l+1} z^l - \sum_{l=1}^{+\infty} A_{l-1} z^l = 0. \quad (116)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{l=1}^{+\infty} A_{l+1} z^l = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{+\infty} A_{l+1} z^{l+1} = \frac{1}{z} \sum_{l=2}^{+\infty} A_l z^l = \frac{1}{z} (G(z) - A_1 z), \quad (117)$$

$$\sum_{l=1}^{+\infty} A_{l-1} z^l = z \sum_{l=1}^{+\infty} A_{l-1} z^{l-1} = z \sum_{l=0}^{+\infty} A_l z^l = z(G(z) + A_0) = z(G(z) + A_1), \quad (118)$$

матимемо

$$2\mu G(z) - \frac{1}{z} [G(z) - A_1 z] - z [G(z) + A_1] = 0 \implies \left[2\mu - \frac{1}{z} - z \right] G(z) = A_1 (z - 1). \quad (119)$$

Використовуючи позначення Задачі 1

$$\left[2\mu - \frac{1}{z} - z \right] = -(z^2 - 2\mu z + 1) \frac{1}{z} = -(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \frac{1}{z}, \quad (120)$$

⁷Потрібно знайти усі нетривіальні розв'язки системи

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2\mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\mu & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2\mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \\ A_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

і формулу (66), та позначаючи $a = A_1$, матимемо

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{az(1-z)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} = \sum_{l=1}^{+\infty} a(1-z) \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l}{\lambda_1 - \lambda_2} z^l = \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} a \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l - (\lambda_1^{l-1} - \lambda_2^{l-1})}{\lambda_1 - \lambda_2} z^l. \end{aligned} \quad (121)$$

Звідки

$$A_l = a \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l - (\lambda_1^{l-1} - \lambda_2^{l-1})}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (122)$$

З умови

$$x_{N+1}(t) \equiv x_N(t) \implies A_{N+1} = A_N. \quad (123)$$

випливає

$$\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1} - (\lambda_1^N - \lambda_2^N) = \lambda_1^N - \lambda_2^N - (\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}). \quad (124)$$

Переносячи усі доданки ліворуч, матимемо

$$\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1} + \lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1} - 2(\lambda_1^N - \lambda_2^N) = 0. \quad (125)$$

Домножуючи на λ_1^{N+1} , і враховуючи, що $\lambda_1 \lambda_2 = 1$,

$$\lambda_1^{2N+2} + \lambda_1^{2N} - \lambda_1^2 - 2(\lambda_1^{2N+1} - \lambda_1) = 0 \implies \lambda_1^{2N}(\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 1) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 1. \quad (126)$$

Звідки

$$\lambda_1^{2N} = 1 \implies \lambda_1 = e^{i\frac{2\pi n'}{2N}}, \quad n' = \overline{0, 2N-1}. \quad (127)$$

Замінюючи $n' = n - 1$, маємо

$$\lambda_1 = e^{i\pi \frac{2(n-1)}{2N}}, \quad n = \overline{1, 2N}. \quad (128)$$

$n = 1$ відповідає кореню $\lambda_1 = 1$, який в свою чергу відповідає $\mu = 0$ та $\omega = 0$ (оскільки $\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$, $2\mu = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$). Безпосередньо підставляти $\lambda_1 = 1$ у формулу (122) не можна. Натомість, здійснюючи граничний перехід $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = 1$ за правилом Лопіталя, маємо

$$A_l = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} a \frac{l\lambda_1^{l-1} - (l-1)\lambda_1^{l-2}}{1} = a(l - (l-1)) = a. \quad (129)$$

Отже усі відхилення від положення рівноваги в кожен момент часу однакові, що, зокрема, задовольняє умову $A_{N+1} = A_N$, і фізично відповідає поступальному руху ланцюжка зі сталою швидкістю, як цілого.

$n = N + 1$ відповідає кореню $\lambda_1 = -1$, безпосередньо підставляти який в (122) також не можна. Правило Лопіталя при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = -1$ дає

$$A_l = a(l(-1)^{l-1} - (l-1)(-1)^{l-2}) = (-1)^l a(-l - (l-1)) = (-1)^{l+1} a(2l-1). \quad (130)$$

При цьому умова $A_{N+1} = A_N$ не може бути задоволена, тому значення $n = N + 1$ відпадає.

Решту значень n можна розбити на N пар $n \longleftrightarrow 2N + 2 - n$, яким відповідають комплексно-спряжені λ_1 , що дають ті самі μ та A_l . Тому достатньо розглянути лише $n = \overline{1, N}$. Отже

$$\lambda_1 = e^{i\pi \frac{(n-1)}{N}} \implies \mu = \cos \left(\pi \frac{n-1}{N} \right). \quad (131)$$

Позначаючи $\varphi_n = \pi \frac{n-1}{N}$, запишемо

$$\lambda_1 = e^{i\varphi_n} \implies \mu = \cos \varphi_n. \quad (132)$$

Звідки, враховуючи $2\mu = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$,

$$\boxed{\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_n}{2} = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{n-1}{N} \right), \quad n = \overline{1, N}} \quad (133)$$

Підставляючи вираз для λ_1 у (122), маємо

$$A_l = a \frac{\sin(l\varphi_n) - \sin([l-1]\varphi_n)}{\sin(\varphi_n)} = \frac{2a}{\sin \varphi_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \cos\left([2l-1]\frac{\varphi_n}{2}\right). \quad (134)$$

Звідки остаточно

$$A_l^{(n)} = a^{(n)} \frac{\cos\left([2l-1]\frac{\varphi_n}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)}. \quad (135)$$

Для визначення сталих $a^{(n)}$ нормуємо вектори $\xi = [A_1^{(n)}, \dots, A_N^{(n)}]$ на одиницю.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{l=1}^N A_l^{(n)2} = \frac{a^{(n)2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi_n}{2}} \sum_{l=1}^N \{1 + \cos[(2l-1)\varphi_n]\} = \\ &= \frac{a^{(n)2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi_n}{2}} \left[N + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N e^{i(2l-1)\varphi_n} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (136)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N e^{i(2l-1)\varphi_n} \right\} = N, \quad \text{якщо } n = 1, \quad \text{бо } \varphi_1 = 0. \quad (137)$$

Якщо $n > 1$

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N e^{i(2l-1)\varphi_n} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\varphi_n} \left[-1 + \sum_{l=0}^N e^{i2l\varphi_n} \right] \right\} = 0, \quad (138)$$

оскільки

$$\sum_{l=0}^N e^{i2l\varphi_n} = \sum_{l=0}^N e^{i2\pi \frac{n-1}{N} l} = \frac{1 - e^{i2\pi \frac{n-1}{N} (N+1)}}{1 - e^{i2\pi \frac{n-1}{N}}} = 1. \quad (139)$$

Звідки

$$a^{(n)} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n1}}{N}} \cos \frac{\varphi_n}{2}. \quad (140)$$

Тому

$$A_l^{(n)} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n1}}{N}} \cos \left(\frac{\pi}{2} (2l-1) \frac{n-1}{N} \right) \equiv t_{ln}, \quad (141)$$

де t_{ln} , як і раніше, компоненти матриці переходу до нормальних координат \hat{T} . Позначаючи компоненти оберненої матриці \hat{T}^{-1} через \tilde{t}_{ln} , матимемо вираз для розв'язку

$$x_l(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N t_{ln} \tilde{t}_{ns} \left(x_s(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right), \quad (142)$$

в якому при $n = 1$ потрібно перейти до границі $\omega_1 \rightarrow 0$. ►

Випадок $N = 2$.

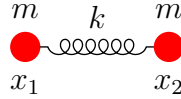


Рис. 9: Ланцюжок з двох мас з вільними кінцями.

◀ Зокрема, у випадку найкоротшого ланцюжка $N = 2$, згідно з (133)

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\omega_0. \quad (143)$$

Матриця \hat{T} має вигляд

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (144)$$

Переходячи до границі $\omega_1 \rightarrow 0$ при $n = 1$ в загальному розв'язку (142) записаному для $N = 2$, матимемо

$$\begin{aligned} x_1(t) = & t_{11}t_{11}[x_1(0) + \dot{x}_1(0)t] + t_{11}t_{12}[x_2(0) + \dot{x}_2(0)t] + \\ & + t_{12}t_{21} \left[x_1(0) \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0)}{\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) \right] + \\ & + t_{12}t_{22} \left[x_2(0) \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) \right] \end{aligned} \quad (145)$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & t_{21}t_{11}[x_1(0) + \dot{x}_1(0)t] + t_{21}t_{12}[x_2(0) + \dot{x}_2(0)t] + \\
& + t_{22}t_{21} \left[x_1(0) \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0)}{\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) \right] + \\
& + t_{22}t_{22} \left[x_2(0) \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) \right]
\end{aligned} \tag{146}$$

Підставляючи компоненти матриці переходу, остаточно матимемо

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & \frac{x_1(0) + x_2(0)}{2} + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{2}t + \\
& + \frac{x_1(0) - x_2(0)}{2} \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{147}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \frac{x_1(0) + x_2(0)}{2} + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{2}t - \\
& - \frac{x_1(0) - x_2(0)}{2} \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) - \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{148}$$

►

Задача 4. Замкнутий ланцюжок.

Дослідити позовжні коливання одновимірного ланцюжка, який складається з однакових мас та однакових пружинок, і кінці якого з'єднані.

◀ З'єднані кінці ланцюжка означають, що можна формально покласти $x_0(t) \equiv x_N(t)$ і $x_{N+1}(t) \equiv x_1(t)$. Використаємо метод Ейлера, і підставимо $x_l = A_l e^{i\omega t}$. З умови $x_0(t) \equiv x_N(t) \implies A_0 = A_N$. Тоді, будуючи твірну функцію так як в попередній задачі⁸, але замість A_0 пишучи A_N в (118),

⁸Потрібно знайти усі нетривіальні розв'язки системи

$$\begin{pmatrix} -2\mu & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2\mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2\mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

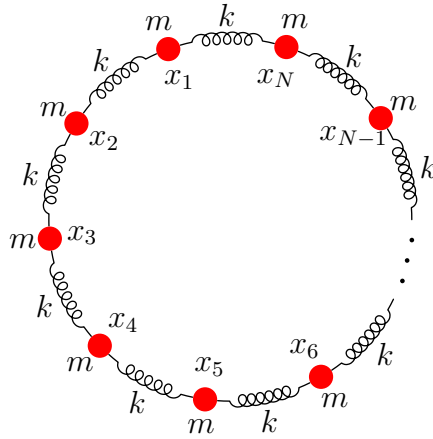


Рис. 10: Замкнутий ланцюжок з N мас з'єднаних пружинками.

матимемо

$$2\mu G(z) - \frac{1}{z}[G(z) - A_1 z] - z[G(z) + A_N] = 0 \implies \left[2\mu - \frac{1}{z} - z\right] G(z) = A_N z - A_1 \quad (149)$$

Звідки (див. попередню задачу)

$$G(z) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{A_1(\lambda_1^l - \lambda_2^l) - A_N(\lambda_1^{l-1} - \lambda_2^{l-1})}{\lambda_1 - \lambda_2} z^l \equiv \sum_{l=1}^{+\infty} A_l z^l. \quad (150)$$

Отже

$$A_l = A_1 \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l}{\lambda_1 - \lambda_2} - A_N \frac{\lambda_1^{l-1} - \lambda_2^{l-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (151)$$

З умови $x_{N+1}(t) \equiv x_1(t) \implies A_{N+1} = A_1$, яка означає, що

$$A_1 = A_{N+1} = A_1 \frac{\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - A_N \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (152)$$

Звідки випливає, що

$$\lambda_1^N - \lambda_2^N = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1. \quad (153)$$

Отже

$$\lambda_1^N = 1 \implies \lambda_1 = e^{i2\pi \frac{n-1}{N}}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (154)$$

Позначаючи $\varphi_n = 2\pi \frac{(n-1)}{N}$, маємо $\lambda_1 = e^{i\varphi_n}$.

$$\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \implies \mu = \cos \varphi_n. \quad (155)$$

Згадуючи, що $2\mu = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, виражаємо частоту

$$\boxed{\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_n}{2} = 2\omega_0 \sin \left(\pi \frac{n-1}{N} \right), \quad n = \overline{1, N}} \quad (156)$$

Завдяки тому, що $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, частоти є двократно виродженими: $\omega_n = \omega_{N+2-n}$, крім частоти $\omega_{\frac{N}{2}+1}$ при парному N . Саме через виродженість частот маємо два параметри A_1 і A_N у виразі для A_l (150). Таким чином, кожній двократно виродженій частоті відповідає два власних вектори, і загальне число власних частот і власних векторів співпадає. Підставляючи в (150) $\lambda_1 = e^{i\varphi_n}$, маємо

$$A_l = A_1 \frac{\sin l\varphi_n}{\sin \varphi_n} - A_N \frac{\sin(l-1)\varphi_n}{\sin \varphi_n} = \frac{A_1 - A_N \cos \varphi_n}{\sin \varphi_n} \sin l\varphi_n + A_N \cos l\varphi_n. \quad (157)$$

Оскільки власні вектори визначені з точністю до ненульового множника, виберемо

$$\xi_1^{(n)} = a^{(n)} \begin{pmatrix} \cos \varphi_n \\ \cos 2\varphi_n \\ \vdots \\ \cos N\varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{які відповідають } \omega_n \text{ при } 1 \leq n \leq \left[\frac{N}{2} \right] + 1 \quad (158)$$

та

$$\xi_2^{(n)} = b^{(n)} \begin{pmatrix} \sin \varphi_n \\ \sin 2\varphi_n \\ \vdots \\ \sin N\varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{які відповідають } \omega_n \text{ при } \left[\frac{N}{2} \right] + 1 < n \leq N. \quad (159)$$

Нормуючи власні вектори на одиницю, аналогічно до попередньої задачі, отримаємо

$$a^{(n)} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n1} - \delta_{n, \frac{N}{2}+1}}{N}}, \quad b^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}}. \quad (160)$$

Оскільки матриця переходу до нормальних координат $\hat{T} = [\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}]$, компоненти матриці переходу рівні

$$t_{ln} = \begin{cases} a^{(n)} \cos l\varphi_n, & \text{якщо } 1 \leq n \leq \left[\frac{N}{2} \right] + 1 \\ b^{(n)} \sin l\varphi_n, & \text{якщо } \left[\frac{N}{2} \right] + 1 < n \leq N. \end{cases} \quad (161)$$

Або

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2 - \delta_{n1} - \delta_{n, \frac{N}{2}+1}}{N}} \cos \frac{\pi l(n-1)}{N}, & \text{якщо } 1 \leq n \leq \left[\frac{N}{2} \right] + 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{\pi l(n-1)}{N}, & \text{якщо } \left[\frac{N}{2} \right] + 1 < n \leq N. \end{cases} \quad (162)$$

Позначаючи через \tilde{t}_{ln} компоненти матриці, оберненої до матриці переходу, отримаємо вигляд розв'язку як у попередніх задачах

$$x_l(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N t_{ln} \tilde{t}_{ns} \left(x_s(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right), \quad (163)$$

в якому при $n = 1$ потрібно брати границю $\omega_1 \rightarrow 0$. ►

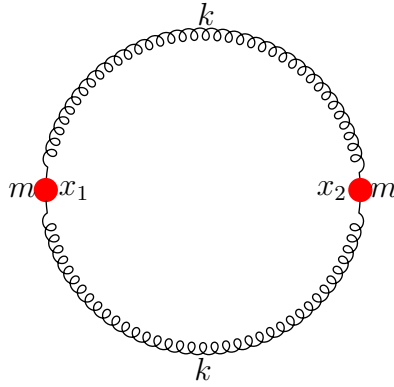


Рис. 11: Замкнутий ланцюжок у випадку двох мас.

◀ У випадку замкнутого ланцюжка з двох мас, тобто при $N = 2$ з (156) маємо

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2\omega_0. \quad (164)$$

Матриця переходу та обернена матриця

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos \pi}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos 2\pi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (165)$$

Згідно з формулою (163) у випадку $N = 2$

$$\begin{aligned} x_1(t) = & t_{11}\tilde{t}_{11}[x_1(0) + \dot{x}_1(0)t] + t_{11}\tilde{t}_{12}[x_2(0) + \dot{x}_2(0)t] + \\ & + t_{12}\tilde{t}_{21} \left[x_1(0) \cos 2\omega_0 t + \frac{\dot{x}_1(0)}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right] + \\ & + t_{12}\tilde{t}_{22} \left[x_2(0) \cos 2\omega_0 t + \frac{\dot{x}_2(0)}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right] \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & t_{21}\tilde{t}_{11}[x_1(0) + \dot{x}_1(0)t] + t_{21}\tilde{t}_{12}[x_2(0) + \dot{x}_2(0)t] + \\
& + t_{22}\tilde{t}_{21} \left[x_1(0) \cos 2\omega_0 t + \frac{\dot{x}_1(0)}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right] + \\
& + t_{22}\tilde{t}_{22} \left[x_2(0) \cos 2\omega_0 t + \frac{\dot{x}_2(0)}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right]
\end{aligned} \tag{167}$$

Підставляючи компоненти матриці переходу, маємо

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & \frac{x_1(0) + x_2(0)}{2} + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{2}t + \\
& + \frac{x_1(0) - x_2(0)}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{4\omega_0} \sin 2\omega_0 t
\end{aligned} \tag{168}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \frac{x_1(0) + x_2(0)}{2} + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{2}t - \\
& - \frac{x_1(0) - x_2(0)}{2} \cos 2\omega_0 t - \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{4\omega_0} \sin 2\omega_0 t
\end{aligned} \tag{169}$$



Задача 5. Ланцюжок в якому чергуються різні маси.

Дослідити коливання одновимірного ланцюжка, в якому чергуються маси M та m з'єднані ідеальними пружинками з жорсткістю k . В ланцюжку N мас M та N мас m . Кінці крайніх пружинок закріплені.

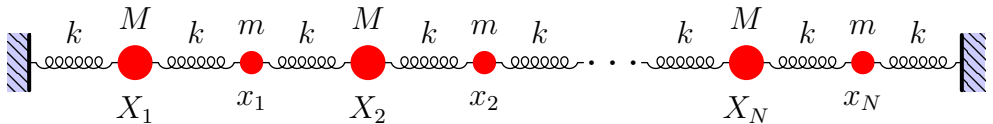


Рис. 12: Ланцюжок в якому чергуються маси M та m .

◄ Пронумеруємо окремо маси M від 1 до N та маси m від 1 до N . Позначимо відхилення l -тої маси M від положення рівноваги X_l , а l -тої маси m

— x_l . Формально позначимо відхилення закріплених кінців крайніх пружинок $x_0 \equiv 0$ та $X_{N+1} \equiv 0$.

Тоді функція Лагранжа системи

$$L = \sum_{l=1}^N \frac{M\dot{X}_l^2}{2} + \sum_{l=1}^N \frac{m\dot{x}_l^2}{2} - \sum_{l=0}^N \frac{k}{2}(X_{l+1} - x_l)^2 - \sum_{l=1}^N \frac{k}{2}(x_l - X_l)^2. \quad (170)$$

Система рівнянь Лагранжа II роду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial X_l} &= 0 \implies M\ddot{X}_l + k(X_l - x_{l-1}) - k(x_l - X_l) = 0, \quad l = \overline{1, N} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_l} &= 0 \implies m\ddot{x}_l - k(X_{l+1} - x_l) + k(x_l - X_l) = 0, \quad l = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (171)$$

Позначимо $\Omega_0^2 = \frac{k}{M}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Тоді

$$\ddot{X}_l + \Omega_0^2[2X_l - x_{l-1} - x_l] = 0, \quad l = \overline{1, N} \quad (172)$$

$$\ddot{x}_l + \omega_0^2[2x_l - X_l - X_{l+1}] = 0, \quad l = \overline{1, N} \quad (173)$$

Для розв'язку системи скористаємося методом Ейлера, підставляючи $X_l = A_l e^{i\omega t}$, $x_l = a_l e^{i\omega t}$, матимемо

$$\left[2 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \right] A_l - a_{l-1} - a_l = 0 \implies P A_l - a_{l-1} - a_l = 0, \quad (174)$$

де введено позначення $P = 2 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}$.

$$\left[2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] a_l - A_l - A_{l+1} = 0 \implies p a_l - A_l - A_{l+1} = 0, \quad (175)$$

де введено позначення $p = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Крім того, з того, що $x_0 \equiv 0 \implies a_0 = 0$, $X_{N+1} \equiv 0 \implies A_{N+1} = 0$.

Домножуючи (175) на P матимемо

$$Ppa_l - PA_l - PA_{l+1} = 0 \xrightarrow{(174)} Ppa_l - (a_{l-1} + a_l) - (a_l + a_{l+1}) = 0. \quad (176)$$

Позначаючи $2\mu = Pp - 2$, отримуємо

$$2\mu a_l - a_{l+1} - a_{l-1} = 0, \quad a_0 = 0 \quad (177)$$

яке співпадає з рекурентним співвідношенням (57) з Задачі 1. Тому

$$a_l = \frac{\lambda_1^l - \lambda_2^l}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \text{де} \quad \lambda_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (178)$$

Оскільки правий кінець ланцюжка закріплений $A_{N+1} = 0$. Крім того $PA_{N+1} - a_N - a_{N+1} = 0$. Звідки

$$a_N + a_{N+1} = 0 \implies \lambda_1^N - \lambda_2^N + \lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1} = 0 \quad (179)$$

за умови, що $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Домножуючи останню рівність на λ_1^{N+1} , матимемо

$$\lambda_1^{2N+1} - \lambda_1 + \lambda_1^{2N+2} - 1 = 0 \implies (\lambda_1^{2N+1} - 1)(\lambda_1 + 1) = 0. \quad (180)$$

Можна показати так, як це робиться в попередніх задачах, що корінь $\lambda_1 = -1$ не підходить, оскільки для нього $\lambda_1 = \lambda_2$, і умова $A_{N+1} = 0$ не може бути задоволена. Отже

$$\lambda_1^{2N+1} = 1 \implies \lambda_1 = e^{i\frac{2\pi n}{2N+1}} \equiv e^{i\varphi_n}, \quad \text{де} \quad \varphi_n = \frac{2\pi n}{2N+1}. \quad (181)$$

Причому n достатньо міняти в межах від 1 до N , оскільки корінь $n = 0$ має бути відкинутий, а корені, які відповідають $n = r$ та $n = 2N + 1 - r$, $r = \overline{1, N}$ утворюють комплексно спряжені пари (див. Задачу 1). Тоді

$$a_l = a_1 \frac{\sin(\varphi_n l)}{\sin \varphi_n}, \quad \mu = \cos \varphi_n. \quad (182)$$

Відповідно

$$Pp - 2 = 2\mu = 2 \cos \varphi_n \implies Pp = 4 \cos^2 \frac{\varphi_n}{2}. \quad (183)$$

Або, вертаючись від перепозначень,

$$\left[2 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right] \left[2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] = 4 \cos^2 \frac{\varphi_n}{2}. \quad (184)$$

Таким чином, маємо N біквadratних рівнянь для знаходження $2N$ власних частот ω_n^\pm

$$\omega^4 - 2(\Omega_0^2 + \omega_0^2)\omega^2 + 4\Omega_0^2\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi_n}{2} = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (185)$$

Тоді

$$\begin{aligned} A_l &= P^{-1}(a_{l-1} + a_l) = P^{-1} \frac{a_1}{\sin \varphi_n} \{\sin(\varphi_n[l-1]) + \sin(\varphi_n l)\} = \\ &= P^{-1} \frac{a_1}{\sin \varphi_n} 2 \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}[2l-1]\right) \cos \frac{\varphi_n}{2}. \end{aligned} \quad (186)$$

Підставляючи P матимемо

$$A_l = \frac{2 \cos \frac{\varphi_n}{2}}{2 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}} \cdot \frac{a_1 \sin\left(\varphi_n \left[l - \frac{1}{2}\right]\right)}{\sin \varphi_n}. \quad (187)$$

Таким чином, згідно з методом Ейлера, розв'язок запишеться

$$\begin{aligned} X_l(t) &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{2 \cos \frac{\varphi_n}{2}}{2 - \frac{(\omega_n^+)^2}{\Omega_0^2}} (C_n^+ e^{i\omega_n^+ t} + C_n^{+*} e^{-i\omega_n^+ t}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cos \frac{\varphi_n}{2}}{2 - \frac{(\omega_n^-)^2}{\Omega_0^2}} (C_n^- e^{i\omega_n^- t} + C_n^{-*} e^{-i\omega_n^- t}) \right] \sin\left(\varphi_n \left[l - \frac{1}{2}\right]\right), \end{aligned} \quad (188)$$

$$x_l(t) = \sum_{n=1}^N \left[C_n^+ e^{i\omega_n^+ t} + C_n^{+*} e^{-i\omega_n^+ t} + C_n^- e^{i\omega_n^- t} + C_n^{-*} e^{-i\omega_n^- t} \right] \sin(\varphi_n l), \quad (189)$$

де

$$(\omega_n^\pm)^2 = \Omega_0^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\Omega_0^2 + \omega_0^2)^2 - 4\Omega_0^2\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi_n}{2}}. \quad (190)$$

Або

$$\begin{aligned} X_l(t) &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{B_n^+ \cos(\omega_n^+ t) + D_n^+ \sin(\omega_n^+ t)}{2 - \frac{(\omega_n^+)^2}{\Omega_0^2}} + \frac{B_n^- \cos(\omega_n^- t) + D_n^- \sin(\omega_n^- t)}{2 - \frac{(\omega_n^-)^2}{\Omega_0^2}} \right] \times \\ &\quad \times 2 \cos \frac{\varphi_n}{2} \sin \left(\varphi_n \left[l - \frac{1}{2} \right] \right). \\ x_l(t) &= \sum_{n=1}^N [B_n^+ \cos(\omega_n^+ t) + D_n^+ \sin(\omega_n^+ t) + B_n^- \cos(\omega_n^- t) + D_n^- \sin(\omega_n^- t)] \times \\ &\quad \times \sin(\varphi_n l). \end{aligned} \quad (191)$$

Сталі B_n^+ , B_n^- та D_n^+ , D_n^- виражаються через початкові умови, і можуть бути знайдені розв'язуючи системи рівнянь:

$$\begin{cases} X_l(0) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{B_n^+}{2 - \frac{(\omega_n^+)^2}{\Omega_0^2}} + \frac{B_n^-}{2 - \frac{(\omega_n^-)^2}{\Omega_0^2}} \right] 2 \cos \frac{\varphi_n}{2} \sin \left(\varphi_n \left[l - \frac{1}{2} \right] \right), \\ x_l(0) = \sum_{n=1}^N [B_n^+ + B_n^-] \sin(\varphi_n l), \end{cases} \quad (192)$$

$$\begin{cases} \dot{X}_l(0) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\omega_n^+ D_n^+}{2 - \frac{(\omega_n^+)^2}{\Omega_0^2}} + \frac{\omega_n^- D_n^-}{2 - \frac{(\omega_n^-)^2}{\Omega_0^2}} \right] 2 \cos \frac{\varphi_n}{2} \sin \left(\varphi_n \left[l - \frac{1}{2} \right] \right), \\ \dot{x}_l(0) = \sum_{n=1}^N [\omega_n^+ D_n^+ + \omega_n^- D_n^-] \sin(\varphi_n l). \end{cases} \quad (193)$$

Бачимо, що одному й тому самому значенню φ_n відповідає два значення частоти, що відповідає наявності в дисперсійного співвідношення двох гілок: $\omega^+(\varphi_n)$ та $\omega^-(\varphi_n)$ — “оптичної” та “акустичної”, відповідно (див. мал. 13). ►

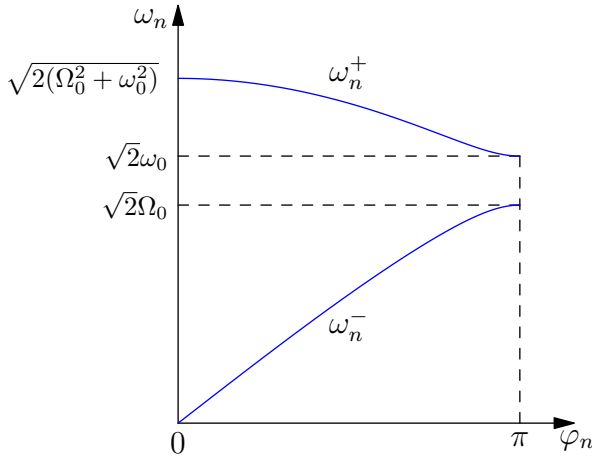


Рис. 13: “Оптична” ω_n^+ та “акустична” ω_n^- гілки дисперсійної залежності $\omega(\varphi_n)$ для ланцюжка, в якому чергуються дві різні маси.

Перехід до випадку однакових мас.

◀ Розглянемо перехід $M \rightarrow m$ до ланцюжка з однакових мас. Після цього, як видно з розв’язку Задачі 1, залишається лише акустична гілка. Куди, в такому випадку, дівається оптична гілка? Оскільки $\Omega_0 \rightarrow \omega_0$, рівняння

$$\left[2 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right] \left[2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] = 4 \cos^2 \frac{\varphi_n}{2} \quad (194)$$

переходить в

$$2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \pm 2 \cos \frac{\varphi_n}{2} \implies \omega_n^+ = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi_n}{4}, \quad \omega_n^- = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_n}{4}. \quad (195)$$

Або

$$\omega_n^+ = 2\omega_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{2N+1} \right), \quad (196)$$

$$\omega_n^- = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{2N+1}\right). \quad (197)$$

Загальне число мас в ланцюжку дорівнює $2N$. Тому порівнюючи формулу для ω_n^- з формулою для власних частот коливань (74) з Задачі 1, в якій N замінено на $2N$:

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{2N+1}\right), \quad n = \overline{1, 2N}, \quad (198)$$

бачимо, що гілка ω_n^- при $n = \overline{1, N}$ дає половину власних частот. Інша половина отримується з ω_n^+ , враховуючи, що частоти ω_n^+ при $n = \overline{1, N}$ рівні частотам, які дає формула (198) при $n = \overline{N+1, 2N}$ (див. мал. 14, 15 та 16). Бачимо, що оптична гілка стає відбитою відносно вертикальної прямої $\varphi_n = \pi$ частиною акустичної гілки. Набір власних частот при цьому стає ідентичним наборові власних частот з Задачі 1. ►

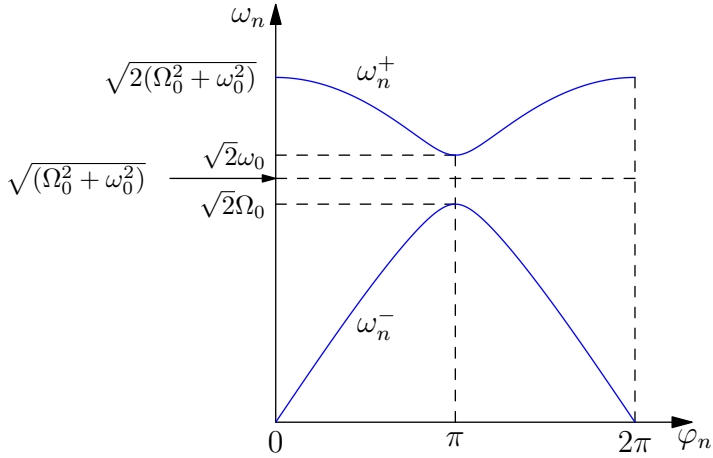


Рис. 14: Випадок $M \neq m$, і, відповідно, $\Omega_0 \neq \omega_0$.

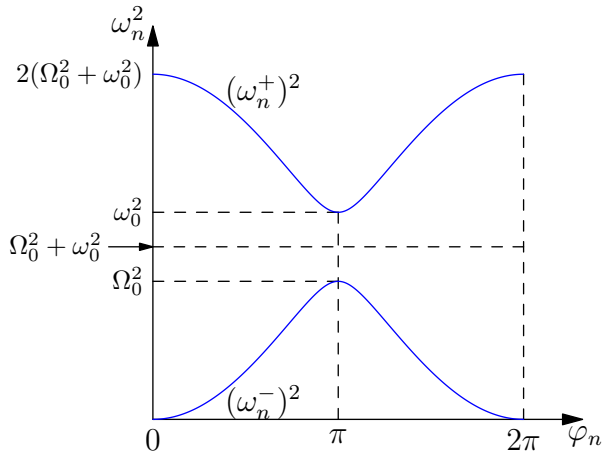


Рис. 15: Випадок $M \neq m$, і, відповідно, $\Omega_0 \neq \omega_0$.

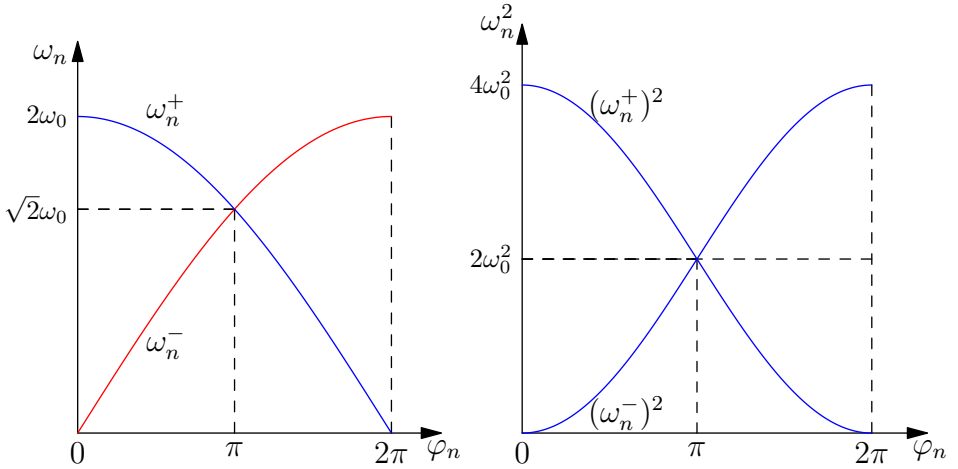


Рис. 16: Випадок $M = m$, і, відповідно, $\Omega_0 = \omega_0$. Червоним позначено дисперсійну криву, яка співпадає з дисперсійною кривою ланцюжка з однаковими масами.

Задача 6. Нескінченний ланцюжок.

Дослідити коливання нескінченного ланцюжка, що складається з однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k .

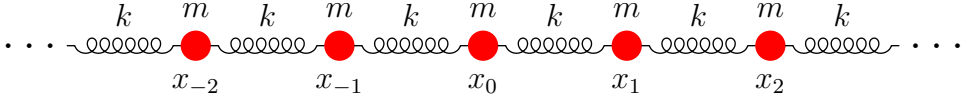


Рис. 17: Нескінченний ланцюжок.

◀ Виберемо довільну масу, і вважатимемо її такою, що має індекс 0. Пронумеруємо інші маси відповідно індексами від $-\infty$ до $+\infty$. Відхилення від положення рівноваги l -тої маси позначимо x_l . Запишемо функцію Лагранжа системи

$$\begin{aligned} L &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{m\dot{x}_l^2}{2} - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{2}(x_{l+1} - x_l)^2 = \\ &= \dots + \frac{m\dot{x}_l^2}{2} + \dots - \frac{k}{2}(x_{l+1} - x_l)^2 - \frac{k}{2}(x_l - x_{l-1})^2 + \dots \end{aligned} \quad (199)$$

Тоді система рівнянь Лагранжа II роду $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_l} = 0$ запишеться як нескінченна система рівнянь

$$m\ddot{x}_l + k(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (200)$$

Вводячи позначення $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, маємо

$$\ddot{x}_l + \omega_0^2(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0. \quad (201)$$

Розглянемо твірну функцію

$$G(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) z^l \quad (202)$$

Домножимо кожне рівняння системи (201) на z^l , і просумуємо по l від $-\infty$ до $+\infty$. Будемо мати

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \ddot{x}_l z^l + \omega_0^2 \left(2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l z^l - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l+1} z^l - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l-1} z^l \right) = 0. \quad (203)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \ddot{x}_l z^l = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l z^l = \ddot{G} \quad (204)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l+1} z^l = \frac{1}{z} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l+1} z^{l+1} = \frac{1}{z} G \quad (205)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l-1} z^l = z \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l-1} z^{l-1} = z G, \quad (206)$$

замість нескінченної системи диференціальних рівнянь отримуємо одне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно твірної функції

$$\ddot{G} + \omega_0^2 \left(2 - z - \frac{1}{z} \right) G = 0. \quad (207)$$

Враховуючи, що $\left(2 - z - \frac{1}{z} \right) = - \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2$, запишемо рівняння у вигляді

$$\ddot{G} - \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 G = 0. \quad (208)$$

Розв'язок цього рівняння запишеться

$$G(t, z) = C_1 e^{\omega_0 t \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} + C_2 e^{-\omega_0 t \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)}, \quad (209)$$

де C_1 та C_2 визначаються з початкових умов.

1. Розглянемо частинний випадок початкових умов: коли відхилення від положення рівноваги лише маса з індексом 0, і початкові швидкості усіх мас рівні нулю. Отже, при $t = 0$

$$x_0(0) \neq 0, \quad x_l(0) = 0, \quad l \neq 0, \quad \dot{x}_l(0) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (210)$$

Тоді

$$G(0, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(0) z^l = x_0(0), \quad (211)$$

$$\dot{G}(0, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_l(0) z^l \equiv 0. \quad (212)$$

Підставляючи в ці початкові умови явний вигляд $G(t, z)$ (209), отримаємо

$$\begin{cases} G(0, z) = C_1 + C_2 = x_0(0) \\ \dot{G}(0, z) = \omega_0 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) [C_1 - C_2] = 0 \end{cases} \implies C_1 = C_2 = \frac{x_0(0)}{2}. \quad (213)$$

Отже

$$G(t, z) = \frac{x_0(0)}{2} \left[e^{\omega_0 t \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} + e^{-\omega_0 t \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} \right]. \quad (214)$$

Щоб знайти $x_l(t)$ потрібно розкласти $G(t, z)$ по степенях z .

Розглянемо функцію $e^{\frac{\tau}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}$, і розкладемо її по степенях z

$$e^{\frac{\tau}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} = e^{\frac{\tau}{2} z} \cdot e^{-\frac{\tau}{2z}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{2} \right)^p z^p}{p!} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2} \right)^l \frac{1}{z^l}}{l!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2} \right)^{p+l}}{p!l!} z^{p-l}. \quad (215)$$

Вводячи новий індекс підсумовування $s = p - l \iff p = l + s$, і переходячи від підсумовування по p до підсумовування по s (див. мал. 18)

$$e^{\frac{\tau}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} = \sum_{s=-\infty}^{-1} \sum_{l=-s}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2} \right)^{2l+s}}{\Gamma(s+l+1)\Gamma(l+1)} z^s + \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2} \right)^{2l+s}}{\Gamma(s+l+1)\Gamma(l+1)} z^s.$$

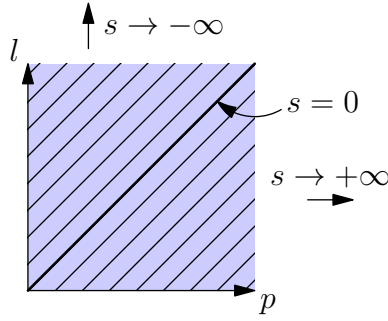


Рис. 18: Новий індекс підсумовування $s = p - l$, який вводимо замість p , буде змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$.

Тут замінено $(s + l)! = \Gamma(s + l + 1)$, $l! = \Gamma(l + 1)$, де $\Gamma(z)$ – Гамма функція. Оскільки у від’ємних цілих точках Гамма функція має прості полюси, обертається в нескінченність, то $\frac{1}{\Gamma(z)}$ має в цілих від’ємних точках нулі. Тому ми можемо додати до внутрішньої суми першого доданку нульові доданки, які відповідають $l = 0, 1, \dots, -s - 1$. Знаменник в цих доданках містить множник $\Gamma(s + l + 1)$, який обертається в нескінченність. Тому

$$e^{\frac{\tau}{2}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{s=-\infty}^{-1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+s}}{\Gamma(s + l + 1)\Gamma(l + 1)} z^s + \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+s}}{\Gamma(s + l + 1)\Gamma(l + 1)} z^s. \quad (216)$$

Об’єднуючи обидва доданки в одну суму, маємо

$$e^{\frac{\tau}{2}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+s}}{\Gamma(s + l + 1)\Gamma(l + 1)} z^s = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(\tau) z^s, \quad (217)$$

оскільки $J_s(\tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+s}}{l!(l + s)!}$ – розклад в ряд для функцій Бесселя. Функції Бесселя $J_\nu(x)$ – спеціальні функції, які задовольняють рівняння⁹

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (218)$$

⁹Щодо функцій Бесселя цілого порядку, див., наприклад, розділ 9 книж-

Отже

$$\begin{aligned}
 G(t, z) &= \frac{x_0(0)}{2} \left[e^{2\omega_0 t \frac{1}{2} \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} + e^{2\omega_0 t \frac{1}{2} \left((-\sqrt{z}) - \frac{1}{(-\sqrt{z})} \right)} \right] = \\
 &= \frac{x_0(0)}{2} \left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(2\omega_0 t) z^{\frac{s}{2}} + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(2\omega_0 t) (-1)^s z^{\frac{s}{2}} \right] = \\
 &= \frac{x_0(0)}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} [1 + (-1)^s] J_s(2\omega_0 t) z^{\frac{s}{2}}.
 \end{aligned} \tag{219}$$

Оскільки

$$[1 + (-1)^s] = \begin{cases} 0, & \text{при } s = 2l + 1, \\ 2, & \text{при } s = 2l, \end{cases} \tag{220}$$

маємо

$$G(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_0(0) J_{2l}(2\omega_0 t) z^l \equiv \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) z^l. \tag{221}$$

Таким чином

$$x_l(t) = x_0(0) J_{2l}(2\omega_0 t). \tag{222}$$

Цей самий результат можна отримати іншим способом. В означення твірної функції $G(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) z^l$ підставимо $z = e^{i\varphi}$

$$G(t, e^{i\varphi}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) e^{il\varphi}. \tag{223}$$

Тоді домножуючи ліву та праву частину цієї рівності на $e^{-in\varphi}$, і інтегруючи по φ в межах від $-\pi$ до π , отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(t, e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-n)\varphi} d\varphi = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) \delta_{ln} = 2\pi x_n(t),$$

ки *M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Tenth Printing (1972).*

оскільки $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-n)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{ln}$, де δ_{ln} – символ Кронекера, рівний 1, коли $l = n$, і 0 коли $l \neq n$. Звідки

$$x_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t, e^{i\varphi}) e^{-il\varphi} d\varphi. \quad (224)$$

Підставляючи сюди явний вигляд $G(t, z)$ (214), отримаємо

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_0(0)}{2} \left[e^{2i\omega_0 t \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{2i}} + e^{-2i\omega_0 t \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{2i}} \right] e^{-il\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{e^{2i\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2}} + e^{-2i\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2}}}{2} \right] e^{-il\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right) e^{-il\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (225)$$

Враховуючи, що $e^{-il\varphi} = \cos(l\varphi) - i \sin(l\varphi)$, і інтеграл від непарної функції в симетричних межах рівний нулю, матимемо

$$x_l(t) = \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos(l\varphi) d\varphi. \quad (226)$$

Зробимо в цьому інтегралі заміну $\psi = \frac{\varphi}{2}$.

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \frac{x_0(0)}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\omega_0 t \sin \psi) \cos(2l\psi) d\psi = \\ &= 2 \frac{x_0(0)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\omega_0 t \sin \psi) \cos(2l\psi) d\psi, \end{aligned} \quad (227)$$

де в останній рівності використана парність підінтегральної функції. Розпишемо цей подвоєний інтеграл, як суму двох однакових інтегралів, і в

останньому з них зробимо заміну $\xi = \pi - \psi$

$$\begin{aligned}
 x_l(t) &= \frac{x_0(0)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\omega_0 t \sin \psi) \cos(2l\psi) d\psi + \\
 &+ \frac{x_0(0)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \xi) \cos(2l\xi) d\xi = \\
 &= \frac{x_0(0)}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \psi) \cos(2l\psi) d\psi.
 \end{aligned} \tag{228}$$

Добуток косинусів під інтегралом розпишемо за формулою $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

$$x_l(t) = \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \psi - 2l\psi) d\psi + \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \psi + 2l\psi) d\psi. \tag{229}$$

Роблячи в другому інтегралі заміну $\zeta = \pi - \psi$, бачимо, що він стає рівний першому інтегралу. Тому

$$\begin{aligned}
 x_l(t) &= 2 \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \psi - 2l\psi) d\psi = \\
 &= \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \psi - 2l\psi) d\psi = \\
 &= \frac{x_0(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\omega_0 t \sin \psi - i2l\psi} d\psi = x_0(0) J_{2l}(2\omega_0 t).
 \end{aligned} \tag{230}$$

Тут знову використана парність підінтегральної функції, той факт, що інтеграл від непарної функції в симетричних межах рівний нулю та інтегральне представлення функцій Бесселя $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \psi - in\psi} d\psi$. Таким чином ми знову отримали (222).

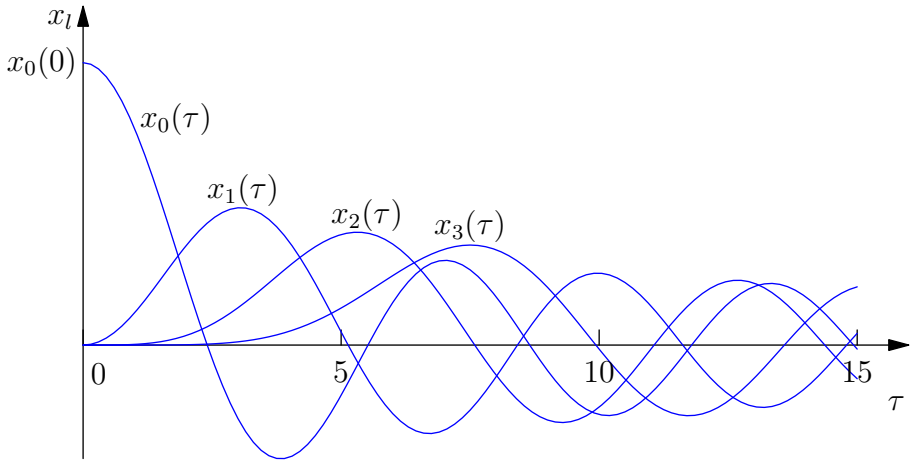


Рис. 19: Відхилення мас нескінченного ланцюжка від положення рівноваги як функції $\tau = 2\omega_0 t$.

Бачимо, що, хоча дисипація енергії в системі відсутня: ми не враховуємо тертя і будь-які інші втрати, амплітуда коливань мас в ланцюжку з часом зменшується, оскільки в процесі розповсюдження коливань хвиля розходиться праворуч та ліворуч вздовж нескінченного ланцюжка, забираючи з собою енергію. Також легко бачити, що чим далі знаходиться маса від маси з індексом 0, тим пізніше збуджуються її коливання.

2. Розглянемо тепер інший набір початкових умов: коли усі маси в початковий момент не були відхилені від положення рівноваги, і усі, крім однієї, мають нульову початкову швидкість. Тобто, при $t = 0$

$$x_0(0) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \dot{x}_0(0) \neq 0, \quad \dot{x}_l(0) = 0, \quad l \neq 0. \quad (231)$$

Тоді

$$G(0, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l(0) z^l = 0, \quad (232)$$

$$\dot{G}(0, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \dot{x}_l(0) z^l = \dot{x}_0(0). \quad (233)$$

Рівняння для $G(t, z)$, звичайно, залишається тим самим

$$\ddot{G} - \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 G = 0 \xrightarrow{(232)} \ddot{G}(0, z) = 0. \quad (234)$$

Продиференціюємо рівняння відносно G по t

$$\ddot{\dot{G}} - \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \dot{G} = 0. \quad (235)$$

Позначимо $F \equiv \dot{G}$, тоді з (233), (234), (235), маємо

$$F(0, z) = \dot{x}_0(0) \quad (236)$$

$$\dot{F}(0, z) = 0 \quad (237)$$

$$\ddot{F} - \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 F = 0 \quad (238)$$

Таким чином, відносно $\dot{G}(t, z)$ маємо ту саму задачу, яка було в пункті 1, з точністю до заміни константи $x_0(0)$ на константу $\dot{x}_0(0)$. Отже

$$\dot{G}(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_0(0) J_{2l}(2\omega_0 t) z^l. \quad (239)$$

Інтегруючи цю рівність по t , маємо

$$G(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_0(0) \int_0^t J_{2l}(2\omega_0 \tau) d\tau \cdot z^l. \quad (240)$$

Отже, остаточно,

$$x_l(t) = \dot{x}_0(0) \int_0^t J_{2l}(2\omega_0 \tau) d\tau. \quad (241)$$

3. У випадку заданих початкових зміщень і швидкостей усіх мас, враховуючи лінійність задачі, розв'язок запишеться як лінійна комбінація

розв'язків з пунктів 1 і 2

$$x_l(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[x_s(0) J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) + \dot{x}_s(0) \int_0^t J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) d\tau \right]. \quad (242)$$

►

Задача 7. Стоячі хвилі в нескінченному ланцюжку.

Показати, що у випадку періодичних початкових умов, розв'язок задачі про коливання нескінченного ланцюжка є періодичною функцією часу.

◀ Хоча розв'язок Задачі 6 про коливання нескінченного ланцюжка є рядом по затухаючих функціях Бесселя (242), у випадку періодичних початкових умов, цей розв'язок є стоячою хвилею, і, таким чином, періодичною функцією часу. Покажемо це на прикладі просторово-періодичних початкових умов

$$x_l(0) = A \cos l\varphi, \quad \dot{x}_l(0) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (243)$$

Тут φ – “хвильовий вектор” – параметер обернено пропорційний просторовому періоду. Тоді, підставляючи початкові умови в розв'язок (242), маємо

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A \cos(n\varphi) J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A e^{-is\varphi} J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) \right\} = \\ &= A \operatorname{Re} \left\{ e^{-il\varphi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{i(l-s)\varphi} J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) \right\} = |n = l - s| = \\ &= A \operatorname{Re} \left\{ e^{-il\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{2n}(2\omega_0 t) e^{in\varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (244)$$

З формул (219),(220) випливає тотожність

$$\frac{1}{2} \left[e^{2\omega_0 t \frac{1}{2} \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} + e^{-2\omega_0 t \frac{1}{2} \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{2n}(2\omega_0 t) z^n. \quad (245)$$

Підставляючи сюди $z = e^{i\varphi}$ матимемо

$$\frac{1}{2} \left[e^{i2\omega_0 t \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2i}} + e^{-i2\omega_0 t \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2i}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{2n}(2\omega_0 t) e^{in\varphi}. \quad (246)$$

Або

$$\cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{2n}(2\omega_0 t) e^{in\varphi}. \quad (247)$$

Тому, підставляючи цей вираз в (244), отримаємо

$$x_l(t) = A \operatorname{Re} \left\{ e^{-il\varphi} \cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\} = A \cos l\varphi \cdot \cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (248)$$

Таким чином, маємо періодичний по часу розв'язок, який відповідає стоячій хвилі. Позначимо вираз, який задає дисперсійне співвідношення,

$$\omega(\varphi) = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (249)$$

Тоді

$$x_l(t) = A \cos l\varphi \cdot \cos[\omega(\varphi)t] = \frac{A}{2} \{ \cos[l\varphi - \omega(\varphi)t] + \cos[l\varphi + \omega(\varphi)t] \}. \quad (250)$$

Тобто, $x_l(t)$ можна записати як суперпозицію двох хвиль, що розповсюджуються в протилежних напрямках

$$x_l(t) = \frac{A}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i[l\varphi - \omega(\varphi)t]} + e^{i[l\varphi + \omega(\varphi)t]} \right\}. \quad (251)$$

В силу лінійності задачі, кожна з цих хвиль $x_l(t) \sim e^{i[l\varphi \pm \omega(\varphi)t]}$ буде розв'язком. Дисперсійне співвідношення можна отримати, підставляючи $x_l(t) \sim e^{i[l\varphi \pm \omega t]}$ безпосередньо в рівняння

$$\ddot{x}_l + \omega_0^2(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0. \quad (252)$$

Матимемо

$$-\omega^2 x_l + \omega_0^2 (2x_l - e^{i\varphi} x_l - e^{-i\varphi} x_l) = 0 \implies -\omega^2 + \omega_0^2 (2 - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = 0. \quad (253)$$

Звідки

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2 \cos \varphi) = 2\omega_0^2 (1 - \cos \varphi) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (254)$$

Або, остаточно,

$$\omega(\varphi) = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (255)$$



Задача 8. Нескінченний ланцюжок з затуханням.

Дослідити коливання нескінченного ланцюжка, що складається з однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k , якщо на кожну масу діє сила тертя пропорційна швидкості $F_d = -2\beta m\dot{x}$, вважаючи, що в початковий момент відхиленою від положення рівноваги була лише одна маса, а усі початкові швидкості були рівні нулю.

◄ Відхилену від положення рівноваги в початковий момент $t = 0$ масу позначимо індексом 0. Пронумеруємо інші маси відповідно індексами від $-\infty$ до $+\infty$. Відхилення від положення рівноваги l -тої маси позначимо x_l . Тоді $x_0(0)$ є заданою константою. Згідно з умовою, $x_l(0) = 0$, $l \neq 0$, і $\dot{x}_l(0) = 0$, $l \in \mathbb{Z}$. Рух ланцюжка буде описуватись нескінченною системою рівнянь

$$m\ddot{x}_l + 2m\beta\dot{x}_l + k(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (256)$$

Вводячи позначення $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, маємо

$$\ddot{x}_l + 2\beta\dot{x}_l + \omega_0^2(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0. \quad (257)$$

Розглянемо твірну функцію

$$G(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) z^l \quad (258)$$

Домножимо кожне рівняння системи (257) на z^l , і просумуємо по l від $-\infty$ до $+\infty$. Будемо мати

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \ddot{x}_l z^l + 2\beta \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_l z^l \omega_0^2 \left(2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l z^l - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l+1} z^l - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l-1} z^l \right) = 0. \quad (259)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \ddot{x}_l z^l = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l z^l = \ddot{G}, \quad (260)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_l z^l = \frac{d}{dt} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l z^l = \dot{G}, \quad (261)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l+1} z^l = \frac{1}{z} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l+1} z^{l+1} = \frac{1}{z} G \quad (262)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l-1} z^l = z \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_{l-1} z^{l-1} = zG, \quad (263)$$

замість нескінченної системи диференціальних рівнянь отримуємо одне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно твірної функції

$$\ddot{G} + 2\beta \dot{G} + \omega_0^2 \left(2 - z - \frac{1}{z} \right) G = 0. \quad (264)$$

Враховуючи, що $\left(2 - z - \frac{1}{z} \right) = - \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2$, запишемо рівняння у вигляді

$$\ddot{G} + 2\beta \dot{G} - \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 G = 0. \quad (265)$$

Позначимо $\delta = \omega_0 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)$. Тоді

$$\ddot{G} + 2\beta\dot{G} - \delta^2 G = 0. \quad (266)$$

Згідно з методом Ейлера підставимо в це рівняння анзац $G = e^{\lambda t}$. Матимемо

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda - \delta^2 = 0 \implies \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \delta^2}. \quad (267)$$

Звідки

$$G(t, z) = e^{-\beta t} \left[C_1 e^{\sqrt{\beta^2 + \delta^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 + \delta^2} t} \right], \quad (268)$$

де C_1 та C_2 мають бути визначені з початкових умов.

$$G(0, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(0) z^l = x_0(0), \quad (269)$$

$$\dot{G}(0, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_l(0) z^l \equiv 0. \quad (270)$$

Підставляючи в ці початкові умови явний вигляд $G(t, z)$ (268), отримаємо

$$\begin{cases} G(0, z) = C_1 + C_2 = x_0(0) \\ \dot{G}(0, z) = C_1(-\beta + \sqrt{\beta^2 + \delta^2}) - C_2(-\beta - \sqrt{\beta^2 + \delta^2}) = 0. \end{cases} \quad (271)$$

Звідки

$$C_1 = \frac{x_0(0)}{2} \left[1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}} \right], \quad (272)$$

$$C_2 = \frac{x_0(0)}{2} \left[1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}} \right]. \quad (273)$$

Підставляючи ці вирази в (268), матимемо

$$G(t, z) = x_0(0) e^{-\beta t} \left[\text{ch}(\sqrt{\beta^2 + \delta^2} t) + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}} \text{sh}(\sqrt{\beta^2 + \delta^2} t) \right]. \quad (274)$$

Або

$$G(t, z) = x_0(0)e^{-\beta t} \left[\text{ch}(\sqrt{\beta^2 + \delta^2}t) + \beta \int_0^t \text{ch}(\sqrt{\beta^2 + \delta^2}\tau) d\tau \right]. \quad (275)$$

Щоб знайти $x_l(t)$ залишилось розвинути $G(t, z)$ по степенях z . Для цього розвинемо по степенях z вираз $\text{ch}(\sqrt{\beta^2 + \delta^2}t)$

$$\text{ch}(\sqrt{\beta^2 + \delta^2}t) = \text{ch} \left[\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2} t \right] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l(t) z^l. \quad (276)$$

Тоді $x_l(t)$ можна виразити через $a_l(t)$

$$x_l(t) = x_0(0)e^{-\beta t} \left[a_l(t) + \beta \int_0^t a_l(\tau) d\tau \right]. \quad (277)$$

Підставляючи $z = e^{i\varphi}$ в (276), матимемо в правій частині розвинення в ряд Фур'є

$$\text{ch} \left[\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \right] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{il\varphi}. \quad (278)$$

Для коефіцієнтів цього ряду формально маємо

$$a_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ch} \left[\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \right] e^{-il\varphi} d\varphi. \quad (279)$$

Якщо використати формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, і врахувати, що інтеграл від непарної функції в симетричних межах рівний нулю, матимемо

$$a_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ch} \left[\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \right] \cos(l\varphi) d\varphi. \quad (280)$$

Враховуючи парність підінтегральної функції можемо написати

$$a_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} \left[\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \right] \cos(l\varphi) d\varphi. \quad (281)$$

Треба врахувати, що вираз під коренем стає від'ємним, у випадку $\beta < 2\omega_0$, і $\varphi > 2\arcsin \frac{\beta}{2\omega_0}$. Тоді косинус гіперболічний від чисто уявного аргументу можна записати, як тригонометричний косинус від дійсного аргументу. При цьому інтеграл для $a_l(t)$ необхідно розбити на суму двох інтегралів. Остаточно для розв'язку матимемо

$$\boxed{\begin{aligned} x_l(t) &= x_0(0) e^{-\beta t} \left[a_l(t) + \beta \int_0^t a_l(\tau) d\tau \right], \\ a_l(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi^*} \operatorname{ch} \left[\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \right] \cos(l\varphi) d\varphi + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_{\varphi^*}^{\pi} \cos \left[\sqrt{4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \beta^2} t \right] \cos(l\varphi) d\varphi, \\ \varphi^* &= \begin{cases} 2\arcsin \frac{\beta}{2\omega_0}, & \beta \leq 2\omega_0, \\ \pi, & \beta > 2\omega_0. \end{cases} \end{aligned}} \quad (282)$$

Якщо покласти $\beta = 0$, матимемо

$$\begin{aligned} x_l(t) &= x_0(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos(l\varphi) d\varphi = \\ &= x_0(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(2\omega_0 t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos(l\varphi) d\varphi = \\ &= x_0(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\omega_0 t \sin \varphi) \cos(2l\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (283)$$

Останній інтеграл може бути переписаний у вигляді

$$x_l(t) = x_0(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\omega_0 t \sin \varphi) \cos(2l\varphi) d\varphi = x_0(0) J_{2l}(2\omega_0 t). \quad (284)$$

Тут використано, що інтеграл є одним з інтегральних представлень функції Бесселя. Цей результат співпадає з формулою (222) з Задачі 6.

Перший і другий доданки в виразі для $a_l(t)$, які ми позначимо $a_l^{(1)}(t)$ та $a_l^{(2)}(t)$, відповідають монотонній та осцилюючій частині розв'язку $x_l(t)$, відповідно. Цікаво, що монотонна частина розв'язку з часом спадає не експоненційно, а за степеневим законом. Покажемо це. Оцінимо асимптотику монотонної частини розв'язку при великих t . Найбільший внесок в інтеграл

$$a_l^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi^*} \operatorname{ch} \left[\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \right] \cos(l\varphi) d\varphi \quad (285)$$

в цьому випадку дає окіл нуля. Тоді розкладаючи аргумент косинуса гіперболічного по степенях φ , і утримуючи лише головний член розкладу, матимемо

$$\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} t \approx \beta t \left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\beta^2} \varphi^2 \right) = \beta t - \frac{\omega_0^2 t}{2\beta} \varphi^2. \quad (286)$$

Крім того, при великих значеннях аргумента $\operatorname{ch} x \approx \frac{1}{2} e^x$. Тоді

$$a_l^{(1)}(t) \approx \frac{1}{2\pi} e^{\beta t} \int_0^{\varphi^*} e^{-\frac{\omega_0^2 t}{2\beta} \varphi^2} \cos(l\varphi) d\varphi \approx \frac{1}{2\pi} e^{\beta t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega_0^2 t}{2\beta} \varphi^2} \cos(l\varphi) d\varphi \equiv \frac{1}{2\pi} e^{\beta t} I \quad (287)$$

Позначимо $\alpha = \frac{\omega_0^2 t}{2\beta}$. Тоді інтеграл

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\varphi^2} \cos(l\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\varphi^2} \cos(l\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\varphi^2} e^{il\varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(\varphi^2 - 2\frac{il}{2\alpha}\varphi - \frac{l^2}{4\alpha^2} + \frac{l^2}{4\alpha^2})} d\varphi = \frac{e^{-\frac{l^2}{4\alpha}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(\varphi - \frac{il}{2\alpha})^2} d\varphi.
 \end{aligned} \tag{288}$$

Інтеграл в останньому виразі рівний

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(\varphi - \frac{il}{2\alpha})^2} d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\varphi^2} d\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{289}$$

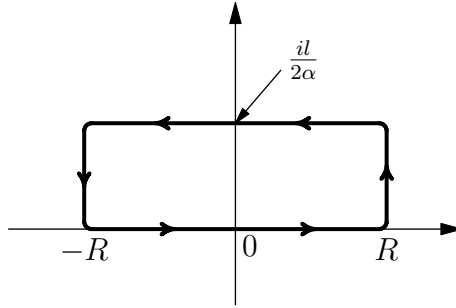


Рис. 20: Контур інтегрування C для інтегралу $\int_C e^{-\alpha z^2} dz$.

Тут друга рівність є відомою формулою з математичного аналізу, а першу рівність можна довести розглянувши функцію комплексної змінної

$$f(z) = e^{-\alpha z^2} \tag{290}$$

проінтегровану вздовж замкнутого контура зображеного на малюнку 20. Функція $f(z)$ всередині контура не має жодних особливостей. Тому, згідно

основної теореми теорії лишків, інтеграл по контуру з одного боку рівний нулю, а з іншого боку він рівний сумі інтегралів вздовж сторін прямокутника, які утворюють контур. Причому внески від бічних сторін контура, при $R \rightarrow +\infty$, прямують до нуля як e^{-R^2} , а отже, переходячи до границі $R \rightarrow +\infty$, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\varphi^2} d\varphi + \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\alpha(\varphi - \frac{il}{2\alpha})^2} d\varphi = 0 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(\varphi - \frac{il}{2\alpha})^2} d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\varphi^2} d\varphi. \quad (291)$$

Таким чином, для інтеграла маємо

$$I = \frac{e^{-\frac{l^2}{4\alpha}}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{e^{-\frac{\beta l^2}{2\omega_0^2 t}}}{2\omega_0} \sqrt{\frac{2\pi\beta}{t}} \implies a_l^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\beta t} I \approx \frac{e^{\beta t} e^{-\frac{\beta l^2}{2\omega_0^2 t}}}{2\omega_0} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi t}}. \quad (292)$$

Тоді монотонна частина розв'язку при великих t має асимптотику

$$\begin{aligned} x_l^{(1)}(t) &= x_0(0) e^{-\beta t} \left[a_l^{(1)}(t) + \beta \int_0^t a_l^{(1)}(\tau) d\tau \right] \approx \\ &\approx x_0(0) e^{-\beta t} 2a_l^{(1)}(t) = \frac{x_0(0) e^{-\frac{\beta l^2}{2\omega_0^2 t}}}{\omega_0} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi t}}. \end{aligned} \quad (293)$$

Тут враховано, що два доданки в квадратних дужках мають однакову асимптотику при великих t , оскільки

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta \int_0^t a_l^{(1)}(\tau) d\tau}{a_l^{(1)}(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta \int_0^t \frac{e^{\beta\tau} e^{-\frac{\gamma}{\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau}{\frac{e^{\beta t} e^{-\frac{\gamma}{t}}}{\sqrt{t}}} = 1, \quad (294)$$

в чому легко переконатися застосовуючи правило Лопіталя. Отже, оста-

ТОЧНО

$$x_l^{(1)}(t) = \frac{x_0(0)e^{-\frac{\beta l^2}{2\omega_0^2 t}}}{\omega_0} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi t}} + O\left(e^{-\beta t}\right), \quad t \rightarrow +\infty \quad (295)$$

де останній доданок відповідає експоненційно затухаючим осциляціям. ►

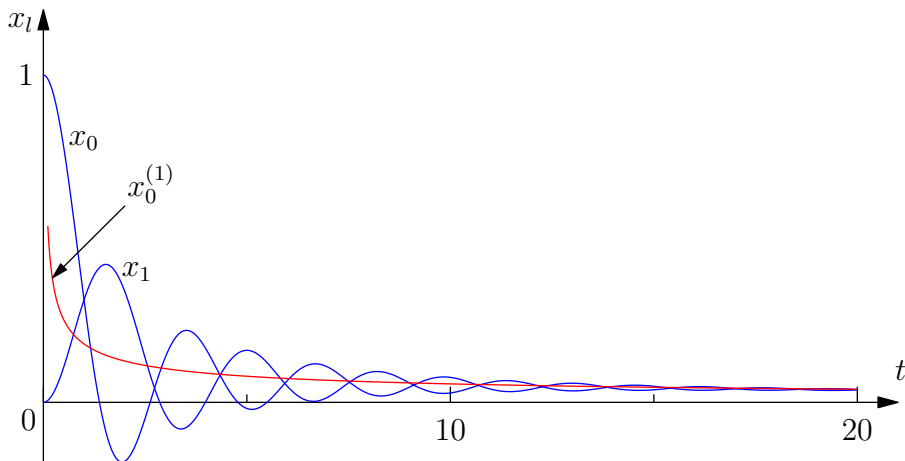


Рис. 21: Затухаючі коливання мас з індексами 0 і 1 нескінченного ланцюжка для параметрів: $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.2$. $x_0^{(1)}$ – асимптота $x_0(t)$ при великих t .

Задача 9. Нескінченний ланцюжок. Чисельний розв’язок.

Чисельно дослідити коливання нескінченного ланцюжка з затуханням, що складається з однакових мас m з’єднаних однаковими пружинками жорсткості k .

◄ Коливання ланцюжків можуть бути легко змодельовані чисельно. Відповідна програма на мові Python наведена нижче. Для інтегрування системи диференціальних рівнянь використана вбудована процедура `solve_ivp` з

бібліотеки SciPy. Для візуалізації результатів використовується бібліотека Matplotlib.

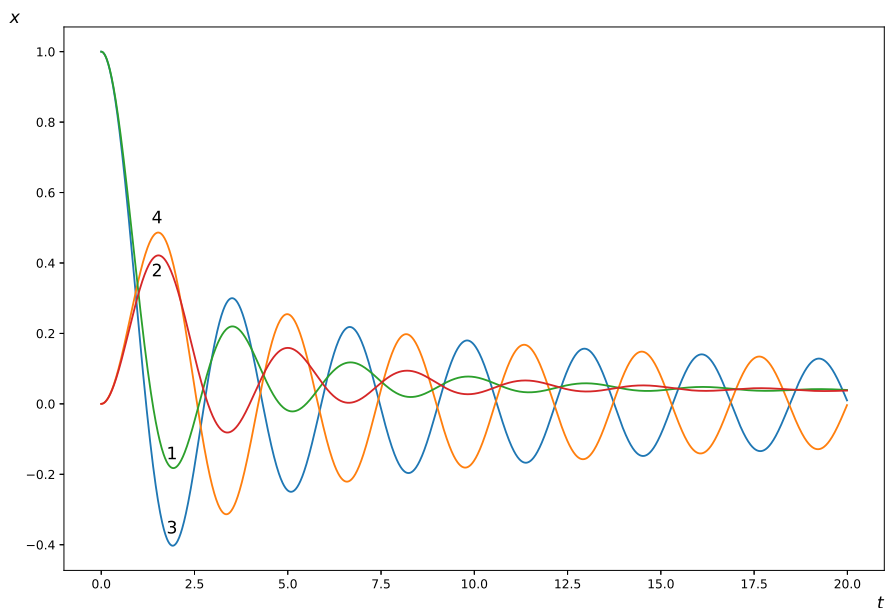


Рис. 22: Результати чисельного розрахунку часових залежностей відхилень від положення рівноваги мас з індексами 0 та 1 для затухаючих коливань “нескінченного” ланцюжка (200 мас) при $\omega_0 = 1$, $\beta = 0.2$ (криві 1, 2). Для порівняння також наведені коливання цих мас за відсутності затухання (криві 3, 4). Початкові швидкості для усіх мас ланцюжка вважалися рівними нулю. Початкове відхилення від положення рівноваги рівне нулю, для усіх мас, крім маси з індексом 0, для якої воно взяте рівним одиниці.

Нескінченний ланцюжок можна змоделювати беручи достатньо велике число мас. Тоді коливання мас посередині ланцюжка для невеликих часів будуть мало відрізнятися від коливань цих мас в нескінченному ланцюж-

ку. Щоб переконатися, що число мас є достатнім, можна подвоїти число мас. Якщо розв'язок при цьому практично не змінився, то це можна вважати грубим практичним критерієм достатності числа мас для чисельного рахунку.

```
"""
```

```
Розрахунок коливань ланцюжка з фіксованими кінцями  
з врахуванням тертя пропорційного швидкості маси.
```

```
"""
```

```
import matplotlib.pyplot as plt  
import numpy as np  
from scipy.integrate import solve_ivp  
from scipy.special import jv
```

```
N = 200      # Число мас в ланцюжку  
omega = 1    # Циклічна частота коливань  
beta = 0.2   # Обезрозмірений коефіцієнт тертя
```

```
def x_val(i, s):  
    """ Задає фіксовані кінці ланцюжка """  
    if i < 0 or i > 2*N-2:  
        return 0  
    return s[i]
```

```
def f(_, s):  
    """ Задає праві частини системи диференціальних рівнянь  
    першого порядку, яка описує коливання """  
    return np.array([  
        g(i) for i in range(N) for g in (  
            lambda i: x_val(2*i+1, s),
```

```

        lambda i: omega*(-2*x_val(2*i, s)+x_val(2*i-2, s)+
            x_val(2*i+2, s))-2*beta*x_val(2*i+1, s)
    )
])

y0 = [0]*2*N # Нульові початкові умови для відхилень мас
            # та їх швидкостей
y0[N] = 1     # Крім маси з індексом 0, для якої x(0)=1
t_eval = np.arange(0, 20, 0.01) # Задаємо розбиття інтервалу часу
                                # з кроком 0.01

# Розв'язуємо систему рівнянь руху
sol = solve_ivp(f, [0, 20], y0, t_eval=t_eval, rtol=1e-9)
plt.figure(figsize=(12, 8)) # Задаємо розмір малюнка
# Будуємо графік розв'язків для мас з індексами 0 та 1
# Спочатку для порівняння виводимо теоретичні криві
# за відсутності тертя
plt.plot(sol.t, jv(0, 2*sol.t), sol.t, jv(2, 2*sol.t),
        # Потім результат чисельного рахунку з врахуванням тертя
        sol.t, sol.y.T[:, N], sol.t, sol.y.T[:, N+2])
plt.show() # Показуємо результат

```

Задача 10. Напівнескінченний ланцюжок з вільним кінцем.

Дослідити коливання напівнескінченного ланцюжка, що складається з однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k , кінець якого вільний.

◀ Нехай задані початкові умови $x_l|_{t=0} = x_l(0)$, $\dot{x}_l|_{t=0} = \dot{x}_l(0)$, $l = \overline{1, \infty}$.

Розглянемо нескінченний ланцюжок з початковими умовами

$$x_l|_{t=0} = x_{-l+1}|_{t=0} = x_l(0), \quad \dot{x}_l|_{t=0} = \dot{x}_{-l+1}|_{t=0} = \dot{x}_l(0). \quad (296)$$

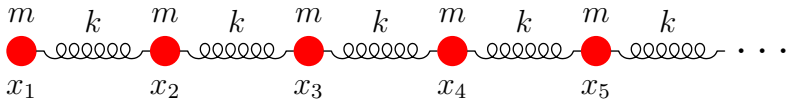


Рис. 23: Напівнескінченний ланцюжок з вільним кінцем.

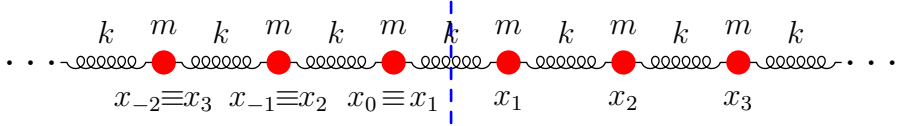


Рис. 24: Коливання напівнескінченного ланцюжка з вільним кінцем еквівалентні коливанням нескінченного ланцюжка з площиною симетрії зображеною на малюнку вертикальною пунктирною лінією.

В силу симетрії системи та початкових умов відносно лінії, яка проходить через середину пружинки, що з'єднує маси з індексами 0 та 1 (див. рис.24 вище), в будь-який момент часу $x_0(t) \equiv x_1(t)$, і пружинка між масами з індексами 0 та 1 не деформуватиметься. Тому права частина нескінченного ланцюжка коливатиметься так як вихідний напівнескінченний ланцюжок з вільним кінцем. Розв'язок Задачі 6 про коливання нескінченного ланцюжка розпишемо як

$$\begin{aligned}
 x_l(t) = & \sum_{s=0}^{-\infty} \left[x_s(0) J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) + \dot{x}_s(0) \int_0^t J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) d\tau \right] + \\
 & + \sum_{s=1}^{+\infty} \left[x_s(0) J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) + \dot{x}_s(0) \int_0^t J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) d\tau \right].
 \end{aligned} \tag{297}$$

В першій сумі робимо заміну змінної підсумовування $s = -n + 1$. Тоді

$$x_l(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[x_{-n+1}(0) J_{2(l+n-1)}(2\omega_0 t) + \dot{x}_{-n+1}(0) \int_0^t J_{2(l+n-1)}(2\omega_0 \tau) d\tau \right] + \\ + \sum_{s=1}^{+\infty} \left[x_s(0) J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) + \dot{x}_s(0) \int_0^t J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) d\tau \right]. \quad (298)$$

Підставляючи початкові умови (296), остаточно матимемо

$$x_l(t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left\{ x_s(0) [J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) + J_{2(l+s-1)}(2\omega_0 t)] + \right. \\ \left. + \dot{x}_s(0) \int_0^t [J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) + J_{2(l+s-1)}(2\omega_0 \tau)] d\tau \right\}. \quad (299)$$

►

Задача 11. Напівнескінченний ланцюжок до кінця якого прикладена вимушуюча сила.

Дослідити коливання напівнескінченного ланцюжка, що складається з однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k , до кінця якого прикладена вимушуюча сила $F(t)$. В початковий момент усі маси перебували в стані спокою в рівноважному положенні.

◄ Позначимо відхилення мас від положення рівноваги x_1, x_2, x_3, \dots , де x_1 – відхилення маси на кінці ланцюжка, до якої прикладена сила $F(t)$. Розглянемо нескінченний ланцюжок, на маси з індексами 0 та 1 якого діють однакові сили $F(t)$.

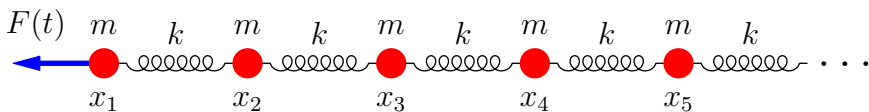


Рис. 25: Напівнескінченний ланцюжок до кінця якого прикладена вимушуюча сила.

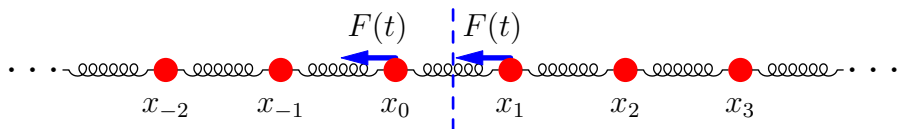


Рис. 26: Коливання напівнескінченного ланцюжка, до якого прикладена вимушуюча сила еквівалентні коливанням нескінченного ланцюжка, з площиною симетрії, зображеною на малюнку вертикальною пунктирною лінією.

Оскільки в початковий момент $x_l(0) = 0$, $\dot{x}_l(0) = 0$, $l = \overline{-\infty, +\infty}$, в силу симетрії маси з індексами 0 та 1 будуть відхилятися однаково: $x_0(t) \equiv x_1(t)$, а, отже, пружинка між цими двома масами не буде деформуватися. Тому можна вважати, що її немає, тобто маємо випадок ланцюжка з вільним кінцем, як вимагає умова задачі. Рівняння руху запишуться

$$\begin{cases} \ddot{x}_l + \omega_0^2(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = 0, & l \neq 0, 1 \\ \ddot{x}_l + \omega_0^2(2x_l - x_{l+1} - x_{l-1}) = f(t), & l = 0, 1, \text{ де } f(t) = \frac{F(t)}{m}. \end{cases} \quad (300)$$

Вводячи функцію

$$G(t, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) z^l \quad (301)$$

та домножуючи l -те рівняння системи на z^l , і підсумовуючи по l від $-\infty$ до $+\infty$, матимемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння відносно

G

$$\ddot{G} - \omega_0^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 G = (1+z)f(t). \quad (302)$$

Щоб спростити запис, позначимо

$$\alpha \equiv \omega_0 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right), \quad \varphi(t) \equiv (1+z)f(t). \quad (303)$$

Тоді розв'язок однорідного рівняння $\ddot{G} - \alpha^2 G = 0$

$$G = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}. \quad (304)$$

Система методу варіації сталих

$$\begin{cases} \dot{C}_1 e^{\alpha t} + \dot{C}_2 e^{-\alpha t} = 0 \\ \alpha \dot{C}_1 e^{\alpha t} - \alpha \dot{C}_2 e^{-\alpha t} = \varphi(t) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{\varphi(t) e^{-\alpha t}}{2\alpha} \\ \dot{C}_2 = -\frac{\varphi(t) e^{\alpha t}}{2\alpha}. \end{cases} \quad (305)$$

Звідки інтегруючи по t , і підставляючи вирази для C_1 і C_2 в (304), отримаємо

$$G = e^{\alpha t} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2\alpha} e^{-\alpha \tau} d\tau - e^{-\alpha t} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2\alpha} e^{\alpha \tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^{\alpha(t-\tau)} - e^{-\alpha(t-\tau)}}{\alpha} \varphi(\tau) d\tau. \quad (306)$$

Роблячи заміну $\xi = t - \tau \implies \tau = t - \xi \implies d\tau = -d\xi$, матимемо

$$G = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^{\alpha \xi} - e^{-\alpha \xi}}{\alpha} \varphi(t - \xi) d\xi. \quad (307)$$

Скористаємось тотожністю $\frac{e^{\alpha \xi} - e^{-\alpha \xi}}{\alpha} = \int_0^\xi d\eta (e^{\alpha \eta} + e^{-\alpha \eta})$.

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \int_0^t d\xi \varphi(t - \xi) \int_0^\xi d\eta (e^{\alpha \eta} + e^{-\alpha \eta}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\xi f(t - \xi) \int_0^\xi d\eta \left(e^{\omega_0 \eta \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} + e^{-\omega_0 \eta \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)} \right) (1+z). \end{aligned} \quad (308)$$

Підставимо $z = e^{i\varphi}$ таким чином перетворюючи розвинення в ряд для G в ряд Фур'є. Тоді

$$G(t, e^{i\varphi}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l(t) e^{il\varphi} \implies x_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(t, e^{i\varphi}) e^{-il\varphi} d\varphi. \quad (309)$$

Підставляючи явний вигляд $G(t, e^{i\varphi})$, маємо

$$\begin{aligned} x_l(t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\xi f(t - \xi) \int_0^\xi d\eta \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} e^{2i\omega_0\eta \sin \frac{\varphi}{2}} (e^{-il\varphi} + e^{-i(l-1)\varphi}) d\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} e^{-2i\omega_0\eta \sin \frac{\varphi}{2}} (e^{-il\varphi} + e^{-i(l-1)\varphi}) d\varphi \right] \end{aligned} \quad (310)$$

В першому інтегралі в квадратних дужках робимо заміну $\psi = \frac{\varphi}{2}$, а в другому заміну $\psi = \frac{\varphi}{2} - \pi$. Тоді

$$\begin{aligned} x_l(t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\xi f(t - \xi) \int_0^\xi d\eta \frac{1}{2\pi} \left[2 \int_0^\pi e^{2i\omega_0\eta \sin \psi} (e^{-i2l\psi} + e^{-i2(l-1)\psi}) d\psi + \right. \\ \left. + 2 \int_{-\pi}^0 e^{-2i\omega_0\eta \sin \psi} (e^{-i2l\psi} + e^{-i2(l-1)\psi}) d\psi \right]. \end{aligned} \quad (311)$$

Об'єднуючи два інтеграли в квадратних дужках в один, маємо

$$x_l(t) = \int_0^t d\xi f(t - \xi) \int_0^\xi d\eta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{2i\omega_0\eta \sin \psi} (e^{-i2l\psi} + e^{-i2(l-1)\psi}) d\psi. \quad (312)$$

Або

$$x_l(t) = \int_0^t d\xi f(t - \xi) \int_0^\xi d\eta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} 2 \cos \psi d\psi. \quad (313)$$

Позначимо

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} 2 \cos \psi d\psi. \quad (314)$$

Тоді, з одного боку,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\psi} e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} d\psi = \frac{1}{2\pi} \left[e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} \right]_{\psi=-\pi}^{\psi=\pi} = 0. \quad (315)$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\psi} e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} d\psi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} [2i\omega_0\eta \cos \psi - i(2l-1)] d\psi. \end{aligned} \quad (316)$$

Звідки

$$I = \frac{2l-1}{\omega_0\eta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\omega_0\eta \sin \psi - i(2l-1)\psi} d\psi = \frac{2l-1}{\omega_0\eta} J_{2l-1}(2\omega_0\eta). \quad (317)$$

Підставляючи вираз для I в (313), маємо

$$x_l(t) = (2l-1) \int_0^t d\xi f(t-\xi) \int_0^\xi d\eta \frac{J_{2l-1}(2\omega_0\eta)}{\omega_0\eta} \quad (318)$$

де $f(t) = \frac{F(t)}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Проаналізуємо випадок $k \rightarrow 0$, коли пружинки ефективно зникають.

Тоді $\omega_0 \rightarrow 0$. Оскільки

$$J_{2l-1}(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2n+2l-1}}{n!(n+2l-1)!} = O\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l-1}, \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, \quad (319)$$

то

$$\frac{J_{2l-1}(2\omega_0\eta)}{\omega_0\eta} \xrightarrow{\omega_0 \rightarrow 0} \begin{cases} 1, & l = 1, \\ 0, & l > 1. \end{cases} \quad (320)$$

Тому при $\omega_0 = 0$, маємо

$$x_l(t) \equiv 0, \quad l > 1 \quad (321)$$

$$x_1(t) = \int_0^t d\xi f(t-\xi) \int_0^\xi d\eta = \int_0^t d\xi f(t-\xi) \xi = |\zeta = t-\xi| = \int_0^t d\zeta f(\zeta)(t-\zeta). \quad (322)$$

Тоді

$$\dot{x}_1(t) = \int_0^t d\zeta f(\zeta) \implies \ddot{x}_1(t) = f(t) \equiv \frac{F(t)}{m}, \quad (323)$$

що відповідає руху маси з індексом 1 під дією прикладеної сили $F(t)$. ►

Задача 12. Напівнескінченний ланцюжок з закріпленим кінцем.

Дослідити коливання напівнескінченного ланцюжка, що складається з однакових мас m з'єднаних однаковими пружинками жорсткості k , кінець якого закріплений.

◄ Нехай задані початкові умови $x_l|_{t=0} = x_l(0)$, $\dot{x}_l|_{t=0} = \dot{x}_l(0)$, $l = \overline{1, \infty}$.

Розглянемо нескінченний ланцюжок з початковими умовами

$$\begin{aligned} x_0|_{t=0} &= 0, & x_l|_{t=0} &= -x_{-l}|_{t=0} = x_l(0), \\ \dot{x}_0|_{t=0} &= 0, & \dot{x}_l|_{t=0} &= -\dot{x}_{-l}|_{t=0} = \dot{x}_l(0). \end{aligned} \quad (324)$$

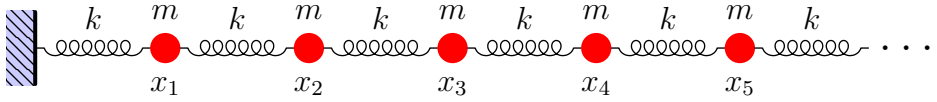


Рис. 27: Напівнескінченний ланцюжок з закріпленим кінцем.

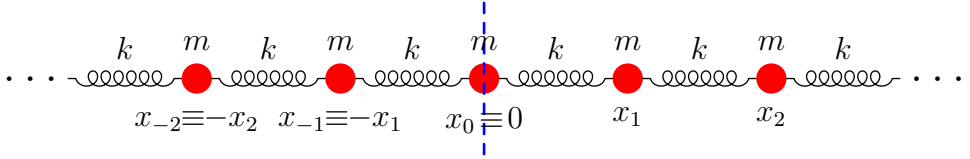


Рис. 28: Коливання напівнескінченного ланцюжка з закріпленим кінцем еквівалентні коливанням нескінченного ланцюжка, антисиметричним відносно площини позначеної на малюнку пунктирною лінією.

В силу симетрії системи та початкових умов відносно лінії, що проходить через масу з індексом нуль (див. рис.28 вище), $x_0(t) \equiv 0$ і $\dot{x}_0(t) \equiv 0$. Тому права частина нескінченного ланцюжка буде коливатися як вихідний напівнескінченний ланцюжок. Підставляючи початкові умови (324) в розв'язок Задачі 6 про нескінченний ланцюжок, матимемо

$$x_l(t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left\{ x_s(0) [J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) - J_{2(l+s)}(2\omega_0 t)] + \right. \\ \left. + \dot{x}_s(0) \int_0^t [J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) - J_{2(l+s)}(2\omega_0 \tau)] d\tau \right\}. \quad (325)$$



Задача 13. Напівнескінченний ланцюжок як граничний випадок скінченного ланцюжка.

Отримати розв'язок задачі про коливання напівнескінченного ланцюжка з закріпленим кінцем шляхом граничного переходу $N \rightarrow \infty$ в розв'язку задачі про коливання ланцюжка з N мас з закріпленими кінцями.

◀ Розв'язок Задачі 1 про скінченний ланцюжок з фіксованими кінцями

$$x_l(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N \sin\left(\frac{\pi l n}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n s}{N+1}\right) \times \\ \times \left[x_s(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_s(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right], \quad (326)$$

де $\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{N+1}\right)$, перепишемо у вигляді

$$x_l(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^N \sin\left(\frac{\pi l n}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n s}{N+1}\right) \times \\ \times \left[x_s(0) \cos(\omega_n t) + \dot{x}_s(0) \int_0^t \cos(\omega_n \tau) d\tau \right]. \quad (327)$$

Розглянемо суму

$$K_{ls}(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi l n}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n s}{N+1}\right) x_s(0) \cos(\omega_n t) \quad (328)$$

через яку можна виразити $x_l(t)$:

$$x_l(t) = \sum_{s=1}^N \left[x_s(0) K_{ls}(t) + \dot{x}_s(0) \int_0^t K_{ls}(\tau) d\tau \right]. \quad (329)$$

У виразі для $K_{ls}(t)$ розпишемо

$$\sin\left(\frac{\pi l n}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n s}{N+1}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{N+1}(l-s)\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{N+1}(l+s)\right) \right].$$

Знайдемо $\tilde{K}_{ls}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} K_{ls}(t)$, розглядаючи її як границю інтегральних сум рівну відповідному інтегралу. Справді, введемо замість n неперервну змінну φ

$$\varphi \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} \frac{n}{N+1} \implies d\varphi \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} \frac{1}{N+1} \quad (330)$$

Звідки маємо

$$\frac{1}{N+1} \longleftrightarrow \frac{2}{\pi} d\varphi, \quad \omega_n \longleftrightarrow 2\omega_0 \sin \varphi. \quad (331)$$

Тоді, при $N \rightarrow \infty$

$$n = \overline{1, N} \longleftrightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N \longleftrightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi. \quad (332)$$

Тоді

$$\tilde{K}_{ls}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} K_{ls}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2(l-s)\varphi) - \cos(2(l+s)\varphi)] \cos(2\omega_0 \sin \varphi \cdot t) d\varphi. \quad (333)$$

Зробимо в інтегралі заміну $\varphi = \pi - \psi$, тоді

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ls}(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos(2(l-s)\psi) - \cos(2(l+s)\psi)] \cos(-2\omega_0 \sin \psi \cdot t) d\psi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos(2(l-s)\psi) - \cos(2(l+s)\psi)] \cos(2\omega_0 \sin \psi \cdot t) d\psi. \end{aligned} \quad (334)$$

Тому, враховуючи (333), (334)

$$\tilde{K}_{ls}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(2(l-s)\varphi) - \cos(2(l+s)\varphi)] \cos(2\omega_0 \sin \varphi \cdot t) d\varphi. \quad (335)$$

Оскільки підінтегральна функція парна, то

$$\tilde{K}_{ls}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(2(l-s)\varphi) - \cos(2(l+s)\varphi)] \cos(2\omega_0 \sin \varphi \cdot t) d\varphi. \quad (336)$$

Або

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ls}(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l-s)\varphi) \cos(2\omega_0 \sin \varphi \cdot t) d\varphi - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l+s)\varphi) \cos(2\omega_0 \sin \varphi \cdot t) d\varphi. \end{aligned} \quad (337)$$

Враховуючи, що $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ls}(t) = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l-s)\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi + \right. \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l-s)\varphi + 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l+s)\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi - \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l+s)\varphi + 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (338)$$

Оскільки в інтегралі $I = \int_0^{\pi} \cos(2\nu\varphi + 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi$, де ν – ціле, заміна $\varphi = \pi - \psi$ дає $I = \int_0^{\pi} \cos(2\nu\psi - 2\omega_0 t \sin \psi) d\psi$. Тому перший і другий інтеграли в квадратних дужках рівні. Третій і четвертий інтеграли теж рівні між собою. Тому

$$\tilde{K}_{ls}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l-s)\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2(l+s)\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) d\varphi.$$

Зауважимо, що якщо під інтегралами замінити косинуси на синуси, матимемо нуль, бо непарні функції будуть інтегруватися в симетричних межах. Тому

$$\tilde{K}_{ls}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\omega_0 t \sin \varphi - i2(l-s)\varphi} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\omega_0 t \sin \varphi - i2(l+s)\varphi} d\varphi. \quad (339)$$

Згадуючи інтегральне представлення функцій Бесселя

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \varphi - i\nu\varphi} d\varphi, \text{ матимемо}$$

$$\tilde{K}_{ls}(t) = J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) - J_{2(l+s)}(2\omega_0 t). \quad (340)$$

Підставляючи отриманий вираз для K_{ls} в (329), остаточно матимемо

$$x_l(t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left\{ x_s(0) [J_{2(l-s)}(2\omega_0 t) - J_{2(l+s)}(2\omega_0 t)] + \right. \\ \left. + \dot{x}_s(0) \int_0^t [J_{2(l-s)}(2\omega_0 \tau) - J_{2(l+s)}(2\omega_0 \tau)] d\tau \right\}, \quad (341)$$

що співпадає з результатом Задачі 12. ►

Задача 14. Поздовжні коливання струни.

Здійснити граничний перехід від коливань нескінченного ланцюжка, який складається з однакових мас і пружинок, до поздовжніх коливань струни.

◄ Попрямуємо рівноважну відстань h між масами і самі маси m до нуля так, щоб лінійна густина $\lambda = \frac{m}{h}$ залишалася сталою. Тоді жорсткість пружинок буде рівна $k = \frac{\varkappa}{h}$, де $\varkappa = \text{const}$. Замість індекса маси l матимемо неперервну координату x , яка відповідає значенню границі добутку

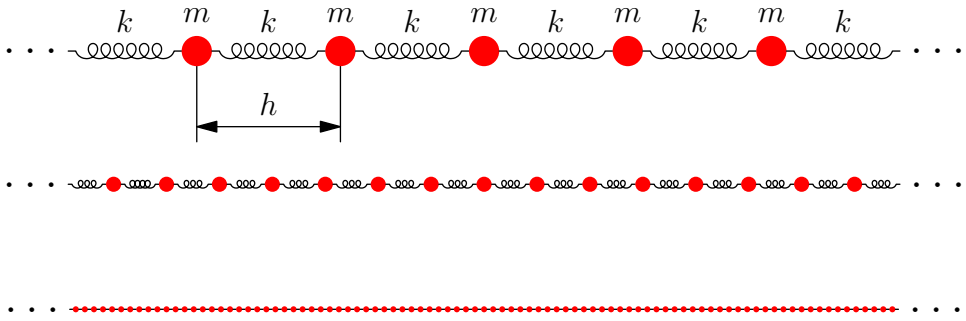


Рис. 29: Граничний перехід $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$, $\frac{m}{h} = \text{const}$ від дискретного ланцюжка до струни з неперервним розподілом маси.

$lh \rightarrow x$, коли $l \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$. Тоді зміщення від положення рівноваги буде описуватись функцією $u(x, t)$, яка відповідає $x_l(t)$, коли $lh \rightarrow x$.

Тоді для рівняння руху граничний перехід дає

$$\begin{aligned} \ddot{x}_l &= \frac{k}{m}(x_{l+1} - 2x_l + x_{l-1}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow u''_{tt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varkappa}{h} \cdot \frac{1}{h\lambda} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] \end{aligned} \quad (342)$$

$\frac{\varkappa}{\lambda}$ має розмірність квадрата швидкості. Позначимо $v^2 = \frac{\varkappa}{\lambda}$.

Розвинемо $u(x+h, t)$ та $u(x-h, t)$ за формулою Тейлора по степенях h до квадратичних доданків включно

$$\begin{aligned} u''_{tt} &= v^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left[u(x, t) + u'_x(x, t)h + \frac{1}{2}u''_{xx}h^2 - 2u(x, t) + \right. \\ &\quad \left. + u(x, t) - u'_x(x, t)h + \frac{1}{2}u''_{xx}h^2 + o(h^2) \right]. \end{aligned} \quad (343)$$

Звідки після спрощень отримуємо

$$u''_{tt} = v^2 u''_{xx} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} \implies \boxed{u''_{tt} = v^2 u''_{xx}} \quad (344)$$

оскільки $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$.

Розв'яжемо його роблячи заміну

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases} \implies u(x, t) \equiv u(\xi(x, t), \eta(x, t)) \quad (345)$$

Диференціюючи тотожність по x та t , матимемо

$$\begin{aligned} u'_x &\equiv u'_\xi + u'_\eta \\ u'_t &\equiv u'_\xi \cdot (-v) + u'_\eta v \end{aligned} \quad (346)$$

Диференціюючи іще раз, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} u''_{xx} &\equiv u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} \\ u''_{tt} &\equiv u'_{\xi\xi}v^2 - 2u''_{\xi\eta}v^2 + u''_{\eta\eta}v^2 \end{aligned} \right\} \implies u''_{tt} - v^2u''_{xx} = -4v^2u''_{\xi\eta} = 0. \quad (347)$$

Звідки $u''_{\xi\eta} = 0$.

Інтегруючи $u''_{\xi\eta} = 0$ по η , матимемо

$$u'_\xi = f'(\xi), \quad (348)$$

де f – довільна двічі диференційовна функція однієї змінної. Інтегруючи по ξ отримаємо

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \implies \boxed{u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)}, \quad (349)$$

де g – також довільна двічі диференційовна функція однієї змінної.

Якщо задані початкові умови $u(x, 0)$, $u'_t(x, 0)$, то

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) \quad (350)$$

$$u'_t(x, 0) = vf'(x) - vg'(x) \implies \frac{1}{v} \int_{x_0}^x u'_t(\tau, 0) d\tau + C = f(x) - g(x), \quad (351)$$

де $C = f(x_0) - g(x_0)$. Звідки

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[u(x, 0) + \frac{1}{v} \int_{x_0}^x u'_t(\tau, 0) d\tau + C \right] \quad (352)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[u(x, 0) - \frac{1}{v} \int_{x_0}^x u'_t(\tau, 0) d\tau - C \right] \quad (353)$$

Підставляючи знайдені функції в вираз для $u(x, t)$, маємо

$$u(x, t) = \frac{u(x + vt, 0) + u(x - vt, 0)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} u'_t(\tau, 0) d\tau \quad (354)$$



Задача 15. Малі коливання ланцюжка з N маятників.

Дослідити малі коливання навколо положення рівноваги ланцюжка з N однакових маятників з довжиною l та масою m , якщо кожен наступний маятник ланцюжка підвішений до кінця попереднього. Поле сили тяжіння вважати однорідним. Коливання усіх маятників відбуваються в одній площині.

◀ Початок координат візьмемо в точці підвісу першого маятника. Вісь y спрямуємо вертикально вниз. Декартові координати мас позначимо (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , \dots , (x_{N-1}, y_{N-1}) , починаючи нумерацію від останнього маятника, і закінчуючи координатами першого маятника. В якості узагальнених координат виберемо іксові координати мас маятників. Функція Лагранжа системи запишеться

$$L = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) + mgy_n \right], \quad (355)$$

де y_n треба виразити через x_n . Оскільки розглядаються малі коливання, усі x_n будемо вважати малими. Тоді

$$y_{N-1} = \sqrt{l^2 - x_{N-1}^2} = l \left(1 - \frac{x_{N-1}^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx l - \frac{x_{N-1}^2}{2l}$$

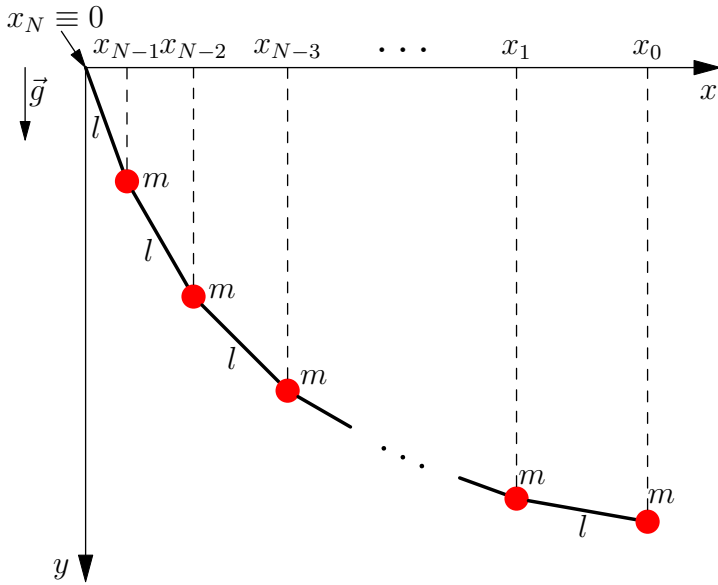


Рис. 30: Ланцюжок з N однакових маятників, кожний наступний маятник якого підвішений до попереднього.

$$\begin{aligned}
 y_{N-2} &= y_{N-1} + \sqrt{l^2 - (x_{N-1} - x_{N-2})^2} \approx 2l - \frac{x_{N-1}^2}{2l} - \frac{(x_{N-1} - x_{N-2})^2}{2l} \\
 &\dots \\
 y_0 &\approx Nl - \frac{x_{N-1}^2}{2l} - \frac{(x_{N-1} - x_{N-2})^2}{2l} - \dots - \frac{(x_1 - x_0)^2}{2l}.
 \end{aligned}$$

Враховуючи малість x_n знехтуємо у виразі для функції Лагранжа усіма доданками, порядок яких по x_n більше 2. Зокрема, \dot{y}_n має порядок 2, тоді як доданки \dot{y}_n^2 мають порядок 4, тому ці доданки відкидаємо. Також відкидаємо сталі доданки, типу $mgnl$, які випадають з рівнянь Лагранжа

при диференціюванні. Тоді

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_{N-1}^2) + \\
 & + mg \left[-\frac{x_{N-1}^2}{2l} - \left(\frac{x_{N-1}^2}{2l} + \frac{(x_{N-1} - x_{N-2})^2}{2l} \right) - \right. \\
 & \left. - \dots - \left(\frac{x_{N-1}^2}{2l} + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2l} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{356}$$

Формально вводячи $x_N \equiv 0$ (див.мал.), запишемо попередній вираз в більш симетричній формі

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_n^2 - \frac{mg}{2l} \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)(x_{n+1} - x_n)^2 = \\
 = & \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [\dot{x}_n^2 - \omega_0^2(n+1)(x_{n+1} - x_n)^2],
 \end{aligned} \tag{357}$$

де введено позначення $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Звідки рівняння Лагранжа II роду

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 - \omega_0^2(x_1 - x_0) = 0, & \text{при } n = 0, \\ \ddot{x}_n - \omega_0^2[(n+1)(x_{n+1} - x_n) - n(x_n - x_{n-1})] = 0, \end{cases} \tag{358}$$

де $n = \overline{1, N-1}$. Або

$$\frac{\ddot{x}_n}{\omega_0^2} + (2n+1)x_n - (n+1)x_{n+1} - nx_{n-1} = 0, \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{359}$$

Це система рівнянь зі сталими коефіцієнтами, яку будемо розв'язувати методом Ейлера, підставляючи

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{N-1} \end{pmatrix} e^{i\omega t}, \tag{360}$$

причому, оскільки власний вектор визначений з точністю до ненульового множника, покладемо $L_0 = 1$. Матимемо

$$(s - 2n - 1)L_n + (n + 1)L_{n+1} + nL_{n-1} = 0, \text{ де } s = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (361)$$

Розглянемо твірну функцію

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(s) z^n \quad (362)$$

Розпишемо рекурентне співвідношення для $L_n(s)$ (361)

$$(s - 1)L_n - 2nL_n + (n + 1)L_{n+1} + (n - 1)L_{n-1} + L_{n-1} = 0. \quad (363)$$

Домножимо його на z^n , і просумуємо по n від 1 до $+\infty$

$$\begin{aligned} (s - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} L_n z^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n L_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n + 1) L_{n+1} z^n + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} (n - 1) L_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1} z^n = 0. \end{aligned} \quad (364)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty} L_n z^n = G(z) - L_0, \quad (365)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n L_n z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} n L_n z^{n-1} = z G'(z), \quad (366)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n + 1) L_{n+1} z^n = G'(z) - L_1, \quad (367)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n - 1) L_{n-1} z^n = z^2 G'(z), \quad (368)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1} z^n = z G(z), \quad (369)$$

маємо

$$-[(s-1)L_0 + L_1] + (z^2 - 2z + 1)G'(z) + (s-1+z)G(z) = 0. \quad (370)$$

Враховуючи, що в силу (361) взятому при $n = 0$ $[(s-1)L_0 + L_1] = 0$, а також, що $(z^2 - 2z + 1) = (z-1)^2$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними для знаходження $G(z)$

$$(z-1)^2 G'(z) + [s + (z-1)]G(z) = 0. \quad (371)$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{dG(z)}{G(z)} = -s \frac{dz}{(z-1)^2} - \frac{dz}{z-1} \quad (372)$$

та інтегруємо

$$\ln|G(z)| = \frac{s}{z-1} - \ln|z-1| + \ln|C|. \quad (373)$$

Експоненціюючи отримаємо

$$G(z) = \frac{C}{z-1} e^{\frac{s}{z-1}}. \quad (374)$$

Стала C визначається з умови

$$G(0) = L_0 = 1 \implies C = -e^s. \quad (375)$$

Остаточно

$$G(z) = \frac{e^s}{1-z} e^{\frac{s}{z-1}}. \quad (376)$$

$L_n(s)$ є n -тим коефіцієнтом розкладу $G(z)$ по степенях z . Використовуючи формулу для коефіцієнтів розкладу в ряд Лорана $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, в якій інтеграл береться по контуру, який охоплює z_0 , при $z_0 = 0$, маємо

$$L_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^s}{1-z} e^{\frac{s}{z-1}} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (377)$$

Роблячи в інтегралі заміну

$$\xi = \frac{s}{1-z} \implies 1-z = \frac{s}{\xi} \implies z = 1 - \frac{s}{\xi} \implies dz = s \frac{d\xi}{\xi^2}, \quad (378)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} L_n(s) &= \frac{e^s}{2\pi i} \oint \frac{\xi}{s} e^{-\xi} \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{\xi}\right)^{n+1}} s \frac{d\xi}{\xi^2} = \\ &= e^s \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-s|=\rho} \frac{e^{-\xi} \xi^n d\xi}{(\xi-s)^{n+1}} = \frac{e^s}{n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\xi} \xi^n \right) \Big|_{\xi=s}, \end{aligned} \quad (379)$$

де ρ – довільне додатнє дійсне число, і використано формулу для n -тої похідної аналітичної функції $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint f(z) \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, де контур охоплює точку z_0 . Звідки остаточно

$$L_n(s) = \frac{e^s}{n!} \frac{d^n}{ds^n} (e^{-s} s^n). \quad (380)$$

$L_n(s)$ є поліномом (оскільки кожен доданок після диференціювання пропорційний e^{-s} , домножування на e^s знищує експоненти) n -того степеня (найбільший степінь s отримується коли ми n разів беремо похідну від експоненти). $L_n(s)$ називаються поліномами Лагерра, і є одними з класичних ортогональних поліномів поряд з поліномами Лежандра, Ерміта, Чебишова та іншими.¹⁰ Перші поліноми Лагерра

$$L_0(s) \equiv 1, \quad L_1(s) = 1 - s, \quad L_2(s) = \frac{1}{2}(s^2 - 4s + 2), \dots \quad (381)$$

Користуючись теоремою Ролля можна показати, що усі корені полінома Лагерра $L_n(s)$ додатні і різні.

З умови $x_N \equiv 0$ випливає, що $L_N(s) = 0$ при усіх t . Тобто

$$L_N \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = 0 \quad (382)$$

¹⁰Щодо класичних ортогональних поліномів, див., наприклад, розділ 22 книжки *M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Tenth Printing (1972)*.

є рівнянням для знаходження власних частот коливань системи. Це рівняння має $2N$ дійсних коренів $\omega = \pm\omega_p$, $p = \overline{1, N}$. Таким чином, згідно з методом Ейлера, розв'язок запишеться

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{p=1}^N [C_p e^{i\omega_p t} + \overline{C}_p e^{-i\omega_p t}] L_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) = \\ &= \sum_{p=1}^N [a_p \cos \omega_p t + b_p \sin \omega_p t] L_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right), \quad n = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (383)$$

де сталі a_p та b_p визначаються з початкових умов. ►

Випадок $N = 2$.

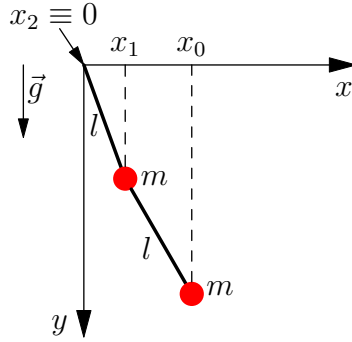


Рис. 31: Подвійний маятник.

◀ Зокрема, у випадку найкоротшого ланцюжка $N = 2$, маємо подвійний маятник. Власні частоти малих коливань знаходяться з рівняння (382)

$$L_2(s) = 0, \quad (384)$$

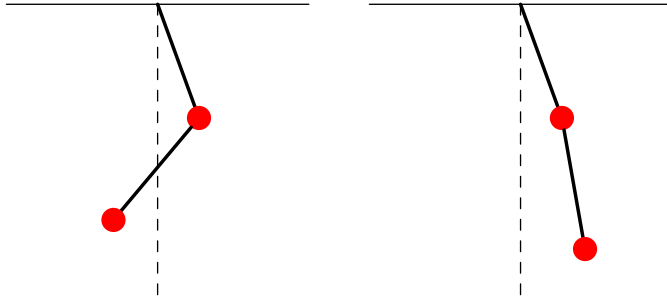


Рис. 32: Схематичне зображення відхилення маятників, які відповідають двом нормальним модам коливань системи.

де $s = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. $L_0 \equiv 1$, тоді з рекурентного співвідношення (361) при $n = 0$ маємо $(s - 1)L_0 + L_1 = 0 \implies L_1 = 1 - s$. При $n = 1$

$$(s - 3)L_1 + 2L_2 + L_0 = 0 \implies (s - 3)(1 - s) + 2L_2 + 1 = 0. \quad (385)$$

Звідки

$$L_2(s) = \frac{1}{2}[(s - 3)(s - 1) - 1] = \frac{1}{2}(s^2 - 4s + 2) \quad (386)$$

Тому

$$s^2 - 4s + 2 = 0 \implies s_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2} \implies \omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}. \quad (387)$$

Власні вектори, що відповідають двом нормальним модам

$$\begin{pmatrix} L_0(s_1) \\ L_1(s_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_0(s_2) \\ L_1(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (388)$$

Відповідні зміщення маятників схематично зображені на мал. 32. ►

Задача 16. Малі коливання важкого ланцюга.

Отримати рівняння малих коливань неперервного важкого ланцюга здійснивши відповідний граничний перехід в задачі про коливання ланцюжка з підвішених один до одного маятників.

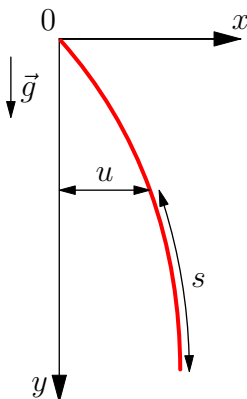


Рис. 33: Важкий неперервний ланцюг, який здійснює плоскі коливання в полі сили тяжіння.

◀ Попрямуємо число маятників в ланцюжку до нескінченності $N \rightarrow \infty$, одночасно прямуючи довжину та масу маятників до нуля $l \rightarrow 0, m \rightarrow 0$ так, що довжина та маса цілого ланцюжка залишаються незмінними $L = Nl = \text{const}$, $M = Nm = \text{const}$. Тоді система маятників перейде в неперервний ланцюг підвішений за один кінець в полі сили тяжіння.

Знайдемо рівняння, яким описуються плоскі малі коливання такого ланцюга навколо положення рівноваги. Введемо неперервну координату s – довжину частини ланцюга від нижнього кінця до заданої точки ланцюга. Позначимо $u(s, t)$ – відхилення по горизонталі точки ланцюга якій відповідає координата s (див. мал 33). За таких позначень, при $N \rightarrow \infty$,

$$nl \longleftrightarrow s, \quad x_n(t) \longleftrightarrow u(s, t). \quad (389)$$

Тоді при $n > 1$ рівняння (358) для коливань ланцюжка можуть бути записані

$$\ddot{x}_n - \frac{g}{l} [n(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) + x_{n+1} - x_n] = 0. \quad (390)$$

Або

$$\ddot{x}_n - g \left[nl \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{l^2} + \frac{x_{n+1} - x_n}{l} \right] = 0. \quad (391)$$

Тоді, при прямуванні $l \rightarrow 0$

$$\ddot{x}_n \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad nl \rightarrow s, \quad \frac{x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n}{l^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{l} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (392)$$

Підставляючи ці вирази в (391), отримаємо рівняння, яке описує плоскі коливання ланцюга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \left[s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial u}{\partial s} \right]. \quad (393)$$

Це рівняння можна розв'язати користуючись стандартним методом розділення змінних.¹¹ ►

¹¹Зокрема, це рівняння розв'язане в *М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. "Наука". (1973).*

Задача 17. Випадкові блукання з неперервним часом.

Вздовж прямої розміщені рівновіддалені вузли. Частинка, яка перебуває в деякому вузлі за одиницю часу може з ймовірністю γ переміститися в один з двох сусідніх вузлів. Знайти ймовірність знаходження частинки в момент часу t в n -тому вузлі, якщо при $t = 0$ вона знаходилась у вузлі з індексом 0.

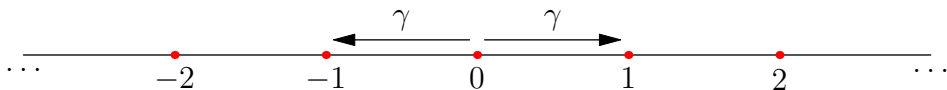


Рис. 34: Одновимірні випадкові блукання з неперервним часом. Ймовірність переходу в один з сусідніх вузлів за одиницю часу рівна γ .

◀ Позначимо $p_n(t)$ ймовірність перебування частинки у вузлі n в момент часу t . Рівняння, яке описує динаміку зміни $p_n(t)$, запишеться

$$\dot{p}_n = \gamma[p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n]. \quad (394)$$

Оскільки зміна ймовірності перебування частинки у вузлі n за одиницю часу (\dot{p}_n) рівна сумі ймовірностей переходів з сусідніх вузлів в n -тий вузол (γp_{n+1} та γp_{n-1}) мінус сума ймовірностей переходу з n -того вузла в сусідні вузли ($2\gamma p_n$). В початковий момент часу частинка перебувала у вузлі з індексом 0, тому

$$p_n(0) = \delta_{n0}. \quad (395)$$

Розглянемо твірну функцію

$$G(t, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) z^n. \quad (396)$$

Домножуючи рівняння (394) на z^n і підсумовуючи по n від $-\infty$ до $+\infty$, матимемо

$$\dot{G} = \gamma \left(z + \frac{1}{z} - 2 \right) G. \quad (397)$$

Звідки, відокремлюючи змінні, і інтегруючи, маємо

$$G(t, z) = C(z) e^{\gamma t (z + \frac{1}{z} - 2)}. \quad (398)$$

Враховуючи, що $C(z) = G(0, z) = 1$, отримаємо

$$G(t, z) = e^{\gamma t (z + \frac{1}{z} - 2)}. \quad (399)$$

Введемо позначення $\tau = 2\gamma t$, тоді

$$\begin{aligned} G(t, z) &= e^{-2\gamma t} e^{2\gamma t \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})} = e^{-\tau} e^{\frac{\tau}{2} (z + \frac{1}{z})} = e^{-\tau} e^{\frac{\tau z}{2}} e^{\frac{\tau}{2z}} = \\ &= e^{-\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\tau z}{2} \right)^k \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{\tau}{2z} \right)^l. \end{aligned} \quad (400)$$

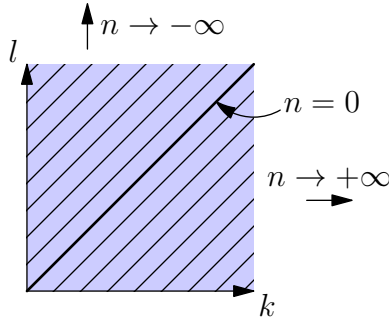


Рис. 35: Новий індекс підсумовування $n = k - l$, який вводимо замість k , буде змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$.

Записуючи цей вираз через подвійну суму, і вводячи замість k нову

змінну $n = k - l$ (див. мал.35), матимемо

$$\begin{aligned}
 G(t, z) &= e^{-\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{k+l} \frac{z^{k-l}}{k!l!} = \\
 &= e^{-\tau} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{l=-n}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+n}}{\Gamma(l+n+1)\Gamma(l+1)} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+n}}{\Gamma(l+n+1)\Gamma(l+1)} z^n \right].
 \end{aligned} \tag{401}$$

Враховуючи, що в цілих від'ємних точках Гамма функція має прості полюси, а отже, в цих точках обертається в нескінченність, в першому доданку в квадратних дужках завдяки $\Gamma(l+1)$ в знаменнику, доданки у внутрішній сумі, що відповідають $l = -n, -n+1, \dots, -1$ рівні нулю. Тому

$$\begin{aligned}
 G(t, z) &= e^{-\tau} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+n}}{\Gamma(l+n+1)\Gamma(l+1)} z^n + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+n}}{\Gamma(l+n+1)\Gamma(l+1)} z^n \right] = \\
 &= e^{-\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2l+n}}{\Gamma(l+n+1)\Gamma(l+1)} z^n = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} I_n(\tau) z^n \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(\tau) z^n,
 \end{aligned} \tag{402}$$

де $I_n(x)$ – модифікована функція Бесселя

$$I_n(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}}{(l+n)!l!} \equiv i^{-n} J_n(ix), \tag{403}$$

яка є розв'язком рівняння¹²

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0. \tag{404}$$

¹²Щодо модифікованих функцій Бесселя, див., наприклад, пункт 9.6 розділу 9 книжки *M.Abramowitz, I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Tenth Printing, (1972)*.

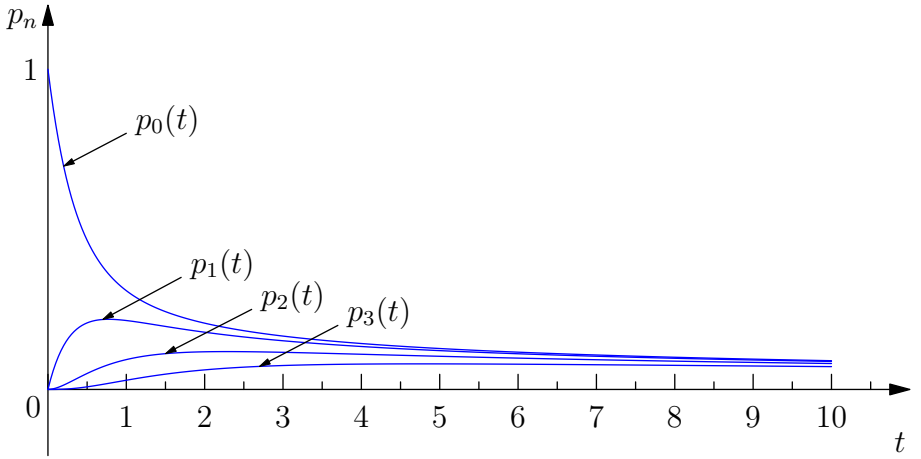


Рис. 36: Ймовірності знаходження частинки в 0, 1, 2, 3 вузлах в залежності від часу. $\gamma = 1$.

Отже, остаточно, для шуканих ймовірностей маємо

$$\boxed{p_n(t) = e^{-2\gamma t} I_n(2\gamma t)} \quad (405)$$

Зауважимо, що

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) = 1, \quad (406)$$

оскільки частинка мусить перебувати в якомусь з вузлів. Справді

$$G(t, 1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) = e^{\gamma t(1+1-2)} \equiv 1. \quad (407)$$

Математичне сподівання положення частинки

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n p_n(t) = G'_z(t, 1) = \gamma t \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \Big|_{z=1} \equiv 0. \quad (408)$$

Дисперсія може бути знайдена зі співвідношення

$$\langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n-1) p_n(t) = G''_{zz}(t, 1). \quad (409)$$

$$(\ln G)''_{zz}|_{z=1} = \left(\frac{G'_z}{G} \right)'_z \Big|_{z=1} = \frac{GG''_{zz} - G'^2_z}{G^2} \Big|_{z=1} = \langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2. \quad (410)$$

Звідки

$$\langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2 = (\ln G)''_{zz}|_{z=1} = 2\gamma t \frac{1}{z^3} \Big|_{z=1} = 2\gamma t. \quad (411)$$

Отже, дисперсія рівна

$$\sigma = \sqrt{\langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2} = \sqrt{2\gamma t}. \quad (412)$$



Задача 18. Асимптотика для випадкових блукань з неперервним часом.

Знайти асимптотику при великих t для розв'язку $p_n(t)$ попередньої задачі.

◄ З попередньої задачі, враховуючи позначення $\tau = 2\gamma t$, маємо

$$G(t, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) z^n = e^{\gamma t(z + \frac{1}{z} - 2)} \equiv e^{-\tau} e^{\frac{\tau}{2}(z + \frac{1}{z})}. \quad (413)$$

Для n -того коефіцієнта ряду Лорана маємо

$$p_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{-\tau} e^{\frac{\tau}{2}(z + \frac{1}{z})}}{z^{n+1}} dz. \quad (414)$$

В інтегралі робимо заміну $z = e^{i\varphi}$.

$$p_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\cos \varphi - 1)} e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\cos \varphi - 1)} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) d\varphi.$$

Але

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\cos \varphi - 1)} \sin n\varphi d\varphi = 0 \quad (415)$$

як інтеграл в симетричних межах від непарної функції. Тому

$$p_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\tau(\cos \varphi - 1)} \cos n\varphi d\varphi. \quad (416)$$

При великих τ максимальний внесок у значення інтеграла дає окіл нуля. Для знаходження головного члена можемо замінити $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Тоді

$$p_n(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{\tau\varphi^2}{2}} e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (417)$$

Розширимо межі інтегрування до повної дійсної осі. Це мало змінює значення інтеграла, враховуючи поведінку підінтегральної функції

$$p_n(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau\varphi^2}{2}} e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (418)$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2}\varphi^2 + in\varphi &= \frac{\tau}{2} \left(\varphi^2 + 2\frac{in}{\tau}\varphi \right) = \frac{\tau}{2} \left(\varphi^2 + 2\frac{in}{\tau}\varphi - \frac{n^2}{\tau^2} + \frac{n^2}{\tau^2} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2} \left(\varphi + \frac{in}{\tau} \right)^2 + \frac{n^2}{2\tau}, \end{aligned} \quad (419)$$

маємо

$$p_n(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{n^2}{2\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{2}(\varphi + \frac{in}{\tau})^2} d\varphi. \quad (420)$$

Інтеграл такого типу вже обчислювався в Задачі 8 (див. (289)). Звідки

$$p_n(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{n^2}{2\tau}} \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}. \quad (421)$$

Остаточно при великих τ

$$p_n(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{n^2}{2\tau}}, \text{ де } \tau = 2\gamma t \quad (422)$$

що відповідає розподілу Гаусса по n з $\langle n \rangle = 0$ і $\sigma = \sqrt{\tau}$. ►

Задача 19. Рівняння дифузії.

Здійснити граничний перехід від дискретних до неперервних одновимірних випадкових блукань з неперервним часом, вважаючи, що ймовірність переходу в сусідній вузол за одиницю часу $\gamma = \frac{\varkappa^2}{h^2}$, де h – відстань між вузлами, а \varkappa є константою. Розв'язати отримане рівняння дифузії.

◀ Перейдемо від дискретного набору вузлів до неперервного випадку. Для цього введемо координату $x \longleftrightarrow nh$, де h – відстань між вузлами, яку попрямуємо до нуля. Тоді замість ймовірності знаходження частинки у вузлі n в момент часу t $p_n(t)$ розподіл ймовірності буде описувати функція $p(x, t)$. Припущення $\gamma = \frac{\varkappa^2}{h^2}$ означає, що зменшення відстані між вузлами приводить до більшої ймовірності переходу між ними. З системи рівнянь (394)

$$\dot{p}_n = \gamma[p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (423)$$

отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \varkappa^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h, t) + p(x-h, t) - 2p(x, t)}{h^2}. \quad (424)$$

Розкладаючи за формулою Тейлора в правій частині рівняння $p(x+h, t)$ та $p(x-h, t)$ по степенях h до квадратичних доданків включно, матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} & \left[p(x, t) + p'_x(x, t)h + \frac{p''_{xx}(x, t)}{2}h^2 + o(h^2) + \right. \\ & \left. + p(x, t) - p'_x(x, t)h + \frac{p''_{xx}(x, t)}{2}h^2 + o(h^2) - 2p(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (425)$$

Після скорочень, і переходу до границі $h \rightarrow 0$, маємо

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (426)$$

Отримане рівняння є рівнянням дифузії, яке будемо розв'язувати при $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$, задаючи початкову умову при $t = 0$, $p(x, 0) = p_0(x)$, де $p_0(x)$ – задана невід'ємна функція, нормована умовою $\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(x) dx = 1$.

Ця задача може бути розв'язана застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є. Позначимо

$$P(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) e^{-i\lambda x} dx. \quad (427)$$

Ця функція нової змінної λ називається зображенням функції $p(x, t)$. Функція $p(x, t)$ називається оригіналом зображення. Зображення існує, оскільки завдяки ймовірнісній інтерпретації $p(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x, t)| dx = 1 < +\infty$, а цього достатньо для існування зображення. Відповідність оригінал-зображення виявляється взаємно-однозначною. Формула оберненого перетворення Фур'є записується

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (428)$$

Домножимо рівняння (426) на $e^{-i\lambda x}$, і проінтегруємо по x від $-\infty$ до $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial p}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx = \varkappa^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx. \quad (429)$$

В лівій частині рівняння можна винести похідну по часу з-під інтегралу, а в правій частині можна двічі проінтегрувати частинами, врахувавши при цьому, що $p \rightarrow 0$, $p'_x \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \pm\infty$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) e^{-i\lambda x} dx = \varkappa^2 (-\lambda^2) \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) e^{-i\lambda x} dx. \quad (430)$$

Або

$$P'_t(\lambda, t) = -\lambda^2 \varkappa^2 P(\lambda, t) \implies P(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t}. \quad (431)$$

$C(\lambda)$ знаходимо з умови при $t = 0$

$$C(\lambda) = P(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, 0) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (432)$$

Таким чином

$$P(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, 0) e^{-i\lambda\xi} d\xi \equiv e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (433)$$

Щоб знайти розв'язок, потрібно повернутись від зображення до оригіналу згідно (428)

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x} e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (434)$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі заміну $\eta = x - \xi \implies \xi = x - \eta$, і змінімо порядок інтегрування

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta p_0(x - \eta) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} e^{i\lambda\eta} d\lambda. \quad (435)$$

Внутрішній інтеграл обчислювався в попередній задачі (див. (418) з точністю до заміни $\varkappa^2 t \longleftrightarrow \frac{\tau}{2}$, $\eta \longleftrightarrow -n$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} e^{i\lambda\eta} d\lambda = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\eta^2}{4\varkappa^2 t}}. \quad (436)$$

Тоді остаточно маємо

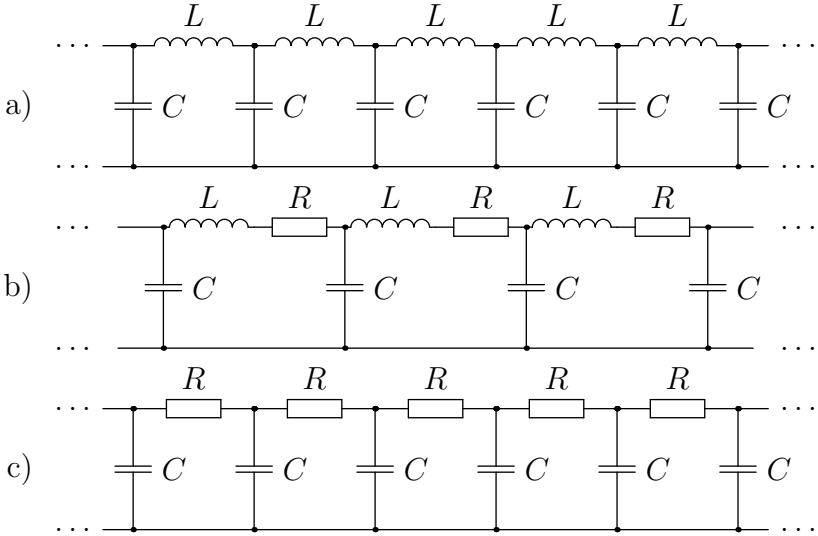
$$p(x, t) = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{4\varkappa^2 t}} p_0(x - \eta) d\eta$$

(437)

►

Задача 20. Електромеханічна аналогія.

Побудувати системи диференціальних рівнянь, що описують коливання струмів в нескінченних електричних колах зображених на малюнку:



a) ◀ Позначимо струм, який тече через n -ту індуктивність I_n . Заряд конденсатора, що знаходиться між $n - 1$ -шою та n -тою індуктивністю позначимо q_n , а струм, який тече через конденсатор позначимо i_n (див. мал.37). Відповідно $i_n = \frac{dq_n}{dt}$.

Тоді, записуючи закони Кірхгофа для частини кола, зображеної на малюнку, матимемо

$$-L \frac{dI_n}{dt} = \frac{1}{C} (q_{n+1} - q_n). \quad (438)$$

Тобто, падіння напруги на n -тій індуктивності рівне різниці напруг на сусідніх конденсаторах. Диференціюючи цю рівність по часу, отримаємо

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} \left(\frac{dq_n}{dt} - \frac{dq_{n+1}}{dt} \right). \quad (439)$$

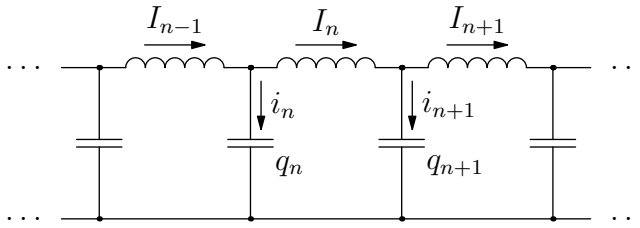


Рис. 37: Позначення для зарядів і струмів в електричному колі

З іншого боку

$$I_{n-1} = I_n + \frac{dq_n}{dt}, \quad (440)$$

$$I_n = I_{n+1} + \frac{dq_{n+1}}{dt}. \quad (441)$$

Віднімаючи одне рівняння від іншого, маємо

$$\frac{dq_n}{dt} - \frac{dq_{n+1}}{dt} = I_{n-1} + I_{n+1} - 2I_n. \quad (442)$$

Підставляючи цей вираз в (439), отримаємо

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (I_{n-1} + I_{n+1} - 2I_n). \quad (443)$$

Або

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + \omega_0^2 (2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) = 0, \quad (444)$$

де введено позначення $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ця система співпадає з системою рівнянь (201), що описує коливання нескінченного ланцюжка в Задачі 6. Тому розв'язок дається формулою (242), в якій треба замінити $x_s(0)$ на $I_s(0)$, а $\dot{x}_s(0)$ на $\dot{I}_s(0)$. Якщо початкові умови задані як $q_n(0)$, $\dot{q}_n(0)$, тоді $I_n(0)$ та $\dot{I}_n(0)$ треба виразити через них

$$I_n(0) = I_{-\infty}(0) - \sum_{s=-\infty}^n \dot{q}_n(0), \quad (445)$$

$$\dot{I}_n(0) = \frac{1}{LC}[q_n(0) - q_{n+1}(0)]. \quad (446)$$

►
b) ◀ Використовуючи позначення і повторюючи міркування попереднього пункту, запишемо згідно з законом Кірхгофа

$$-L \frac{dI_n}{dt} - RI_n = \frac{1}{C}(q_{n+1} - q_n). \quad (447)$$

Беручи похідну по часу, і використовуючи (442), матимемо

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI_n}{dt} + \omega_0^2(2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) = 0. \quad (448)$$

Замінюючи $\frac{R}{L}$ на 2β , отримаємо систему рівнянь, яка співпадає з системою (257) з Задачі 8. Розв'язок, відповідно, буде даватись виразами (282). ►

с) ◀ Використовуючи старі позначення, і поклавши в (447) $L = 0$, матимемо

$$\frac{dI_n}{dt} + \frac{1}{RC}(2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) = 0. \quad (449)$$

Це рівняння з точністю до перепозначень $\gamma = \frac{1}{RC}$, $p_n \rightarrow I_n$ співпадає з рівнянням (394) з Задачі 17. Отже, розв'язок дається формулою (405). ►

Задача 21. Спектр коливань довільного нескінченного ланцюжка.

Знайти аналітичний вираз для спектру коливань нескінченного ланцюжка з довільними заданими масами та жорсткостями пружинок.

◀ Розглянемо спочатку скінченний ланцюжок з вільними кінцями, що складається з N мас та $N - 1$ пружинки. Маси m_j де $j = \overline{1, N}$ та жорсткості пружинок k_j де $j = \overline{1, N - 1}$ вважаємо заданими. Відхилення j -тої маси від положення рівноваги позначатимемо x_j .

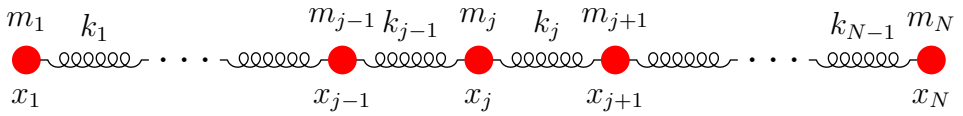


Рис. 38: Ланцюжок з вільними кінцями, що складається з N довільних мас з'єднаних пружинками з довільними жорсткостями.

Система диференціальних рівнянь, яка описує коливання ланцюжка, запишеться

$$m_j \ddot{x}_j = k_j(x_{j+1} - x_j) + k_{j-1}(x_{j-1} - x_j), \quad j = \overline{1, N}. \quad (450)$$

При цьому формально вводимо змінні x_0 та x_{N+1} , і, щоб врахувати, що кінці ланцюжка вільні, вважаємо, що $x_0 \equiv x_1$, $x_{N+1} \equiv x_N$.

Перейдемо до нових змінних $y_j = m_j^{\frac{1}{2}} x_j$ та введемо нові константи λ_1 , $\lambda_2, \dots, \lambda_{2N-2}$, позначаючи

$$\lambda_{2j-1} = \frac{k_j}{m_j}, \quad \lambda_{2j} = \frac{k_j}{m_{j+1}}. \quad (451)$$

Тоді для рівнянь системи маємо

$$m_j^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dt^2} \left(m_j^{\frac{1}{2}} x_j \right) = \frac{k_j}{m_{j+1}^{\frac{1}{2}}} m_{j+1}^{\frac{1}{2}} x_{j+1} + \frac{k_{j-1}}{m_{j-1}^{\frac{1}{2}}} m_{j-1}^{\frac{1}{2}} x_{j-1} - \frac{k_j}{m_j^{\frac{1}{2}}} m_j^{\frac{1}{2}} x_j - \frac{k_{j-1}}{m_j^{\frac{1}{2}}} m_j^{\frac{1}{2}} x_j. \quad (452)$$

$$\ddot{y}_j = \frac{k_j^{\frac{1}{2}}}{m_j^{\frac{1}{2}}} \frac{k_j^{\frac{1}{2}}}{m_{j+1}^{\frac{1}{2}}} y_{j+1} + \frac{k_{j-1}^{\frac{1}{2}}}{m_{j-1}^{\frac{1}{2}}} \frac{k_{j-1}^{\frac{1}{2}}}{m_j^{\frac{1}{2}}} y_{j-1} - \left(\frac{k_j}{m_j} + \frac{k_{j-1}}{m_j} \right) y_j. \quad (453)$$

Або

$$\ddot{y}_j = (\lambda_{2j-1} \lambda_{2j})^{\frac{1}{2}} y_{j+1} + (\lambda_{2j-3} \lambda_{2j-2})^{\frac{1}{2}} y_{j-1} - (\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j-2}) y_j. \quad (454)$$

Можна перевірити, що після такої заміни, матриця системи $\ddot{y}_j = a_{jl} y_l$ є симетричною: $a_{jl} = a_{lj}$.

Зведемо отриману систему диференціальних рівнянь другого порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього спершу введемо змінні z_1, z_2, \dots, z_{N-1} , позначаючи

$$\dot{z}_j = \lambda_{2j}^{\frac{1}{2}} y_{j+1} - \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} y_j. \quad (455)$$

Тоді для рівнянь системи маємо

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j &= \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{2j}^{\frac{1}{2}} y_{j+1} - \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} y_j) - \lambda_{2j-2}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{2j-2}^{\frac{1}{2}} y_j - \lambda_{2j-3}^{\frac{1}{2}} y_{j-1}) = \\ &= \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} \dot{z}_j - \lambda_{2j-2}^{\frac{1}{2}} \dot{z}_{j-1}. \end{aligned} \quad (456)$$

Інтегруючи по t , отримуємо

$$\dot{y}_j = \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} z_j - \lambda_{2j-2}^{\frac{1}{2}} z_{j-1}. \quad (457)$$

Тепер введемо змінні $u_1, u_2, \dots, u_{2N-1}$ наступним чином

$$u_{2j} = z_j, \quad u_{2j-1} = y_j. \quad (458)$$

Тоді з (455) та (457) відповідно, матимемо

$$\dot{u}_{2j} = \lambda_{2j}^{\frac{1}{2}} u_{2j+1} - \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} u_{2j-1}, \quad \dot{u}_{2j-1} = \lambda_{2j-1}^{\frac{1}{2}} u_{2j} - \lambda_{2j-2}^{\frac{1}{2}} u_{2j-2}. \quad (459)$$

Ці рівняння є парними та непарними рівняннями однієї і тієї ж системи

$$\dot{u}_j = \lambda_j^{\frac{1}{2}} u_{j+1} - \lambda_{j-1}^{\frac{1}{2}} u_{j-1} \equiv \sum_{l=1}^{2N-1} i \Lambda_{jl} u_l, \quad (460)$$

де введено матрицю Λ , яка є тридіагональною антисиметричною ермітовою матрицею розмірності $(2N-1) \times (2N-1)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda_1^{\frac{1}{2}} & & & \\ i\lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 & -i\lambda_2^{\frac{1}{2}} & & \\ & i\lambda_2^{\frac{1}{2}} & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & 0 & -i\lambda_{2N-2}^{\frac{1}{2}} \\ & & & & & i\lambda_{2N-2}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (461)$$

Оскільки $\dot{u}_j = i\omega u_j$, то власними числами матриці Λ будуть власні частоти коливань ланцюжка $\omega = \omega_j$, $j = \overline{1, 2N-1}$. Серед цих власних частот є нуль, оскільки визначник антисиметричної матриці непарного порядку рівний нулю. Справді, якщо A – антисиметрична матриця, то $A^T = -A$, де індекс T позначає транспонування. Нехай n – розмірність матриці A , тоді

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A. \quad (462)$$

Звідки у випадку непарного n маємо $\det A = -\det A$, а це означає, що $\det A = 0$. Отже матриця A має нульове власне число, яке відповідає нульовій частоті. Ця нульова частота відповідає рівномірному руху ланцюжка як цілого, коли усі зміщення з положень рівноваги рівні між собою. Такий рух можливий, оскільки кінці ланцюжка вільні.

Решта $2N-2$ відмінних від нуля власних частот розбиваються на $N-1$ пар ω , $-\omega$, оскільки, якщо ω є власним числом антисиметричної матриці A , то $-\omega$ також є власним числом цієї матриці. Справді

$$\begin{aligned} \det(A - \omega E) = 0 &\implies \det(-A + \omega E) = 0 \implies \det(A^T - (-\omega)E) = 0 \implies \\ &\implies \det([A - (-\omega)E]^T) = 0 \implies \det(A - (-\omega)E) = 0, \end{aligned}$$

а отже $-\omega$ також власне число матриці A .

Спектр власних частот може бути описаний функцією $M(\mu)$, яка для заданого μ рівна частині власних частот, для яких $\omega_j^2 \leq \mu$.

Припускаємо, що при $N \rightarrow \infty$ $M(\mu)$ стає гладенькою диференційовною функцією. Тоді густина власних частот може бути записана як

$$D(\mu) = \frac{dM}{d\mu}. \quad (463)$$

Для заданого набору коефіцієнтів λ_j знайдемо функції $M(\mu)$ та $D(\mu)$. Для цього вводимо “характеристичну функцію” ланцюжка

$$\Omega(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \ln(1 + x\omega_j^2) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + x\mu) D(\mu) d\mu. \quad (464)$$

Останній вираз з інтегралом отримується, якщо подивитись на границю як на границю інтегральних сум. Беремо ту гілку логарифма, яка має дійсне значення для дійсних додатних x . В комплексній площині з розрізом вздовж променя $(-\infty, 0)$ функція $\Omega(z)$ є аналітичною. Уявна частина $\ln(1+z\mu)$ на верхньому березі розрізу в точці $z = -x + i0$ рівна нулю, якщо $x\mu < 1$, і рівна $i\pi$, якщо $x\mu > 1$. Тому

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Omega(-x + i\varepsilon) \right\} = \\
& = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_0^{\frac{1}{x}} \ln(1 + (-x + i\varepsilon)\mu) D(\mu) d\mu + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \ln(1 + (-x + i\varepsilon)\mu) D(\mu) d\mu \right] \right\} = \\
& = \int_0^{\frac{1}{x}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\pi} \ln(1 + (-x + i0)\mu) \right\} D(\mu) d\mu + \\
& \quad + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\pi} \ln(1 + (-x + i0)\mu) \right\} D(\mu) d\mu = \\
& = \int_0^{\frac{1}{x}} 0 \cdot D(\mu) d\mu + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} 1 \cdot D(\mu) d\mu = \\
& = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dM(\mu)}{d\mu} d\mu = M(+\infty) - M\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - M\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned} \tag{465}$$

Беручи похідну по x , отримаємо

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Omega'(-x + i\varepsilon)(-1) \right\} = -M' \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right). \tag{466}$$

Враховуючи, що $M' \left(\frac{1}{x} \right) = D \left(\frac{1}{x} \right)$, будемо мати

$$D \left(\frac{1}{x} \right) = -x^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Omega'(-x + i\varepsilon) \right\}. \quad (467)$$

При цьому

$$\Omega'(x) = \frac{d\Omega}{dx} = \int_0^{+\infty} \frac{\mu}{1+x\mu} D(\mu) d\mu. \quad (468)$$

Отже спектр власних частот коливань ланцюжка визначаються значеннями $\Omega(x)$ на верхньому березі розрізу вздовж променя $(-\infty, 0)$. Знайдемо характеристичну функцію $\Omega(x)$, виразивши її через коефіцієнти матриці Λ . Тоді з формули (467) може бути знайдена густина власних частот.

Позначимо $-\frac{1}{\lambda^2} = x$. Тоді

$$\begin{aligned} \det(\Lambda - \lambda E) &= -\lambda(\omega_1 - \lambda)(-\omega_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\omega_{N-1} - \lambda)(-\omega_{N-1} - \lambda) = \\ &= -\lambda(\lambda^2 - \omega_1^2) \cdot \dots \cdot (\lambda^2 - \omega_{N-1}^2) = \\ &= -\lambda^{2N-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \omega_1^2 \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \omega_{N-1}^2 \right) = \\ &= -\lambda^{2N-1} (1 + x\omega_1^2) \cdot \dots \cdot (1 + x\omega_{N-1}^2) \end{aligned} \quad (469)$$

Міняючи знак λ , отримаємо

$$\det(\Lambda + \lambda E) = \lambda^{2N-1} (1 + x\omega_1^2) \cdot \dots \cdot (1 + x\omega_{N-1}^2). \quad (470)$$

Беручи логарифм від обох частин рівності, матимемо

$$\ln \det(\Lambda + \lambda E) = (2N-1) \ln \lambda + \sum_{j=1}^{N-1} \ln(1 + x\omega_j^2). \quad (471)$$

Звідки

$$\Omega(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N-1} \ln \det(\Lambda + \lambda E) - \frac{2N-1}{N-1} \ln \lambda \right]. \quad (472)$$

Доведемо формулу¹³

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \ln \det(\Lambda + \lambda E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln z_l(\lambda), \quad (473)$$

де

$$z_l(\lambda) = \lambda - \frac{\lambda_l}{\lambda - \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda - \frac{\lambda_{l+2}}{\dots}}}, \quad \text{а } \lambda_{2N-1} = 0, \text{ згідно з означенням } \lambda_j. \quad (474)$$

Позначимо

$$H_{2N-l} = \begin{vmatrix} \lambda & -i\lambda_l^{\frac{1}{2}} & & & & \\ i\lambda_l^{\frac{1}{2}} & \lambda & -i\lambda_{l+1}^{\frac{1}{2}} & & & \\ & i\lambda_{l+1}^{\frac{1}{2}} & \lambda & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & O & \ddots & \lambda & -i\lambda_{2N-2}^{\frac{1}{2}} \\ & & & & i\lambda_{2N-2}^{\frac{1}{2}} & \lambda \end{vmatrix}. \quad (475)$$

Тоді

$$H_1 = \lambda, \quad H_2 = \lambda^2 - \lambda_{2N-2}, \quad \det(\Lambda + \lambda E) = H_{2N-1}. \quad (476)$$

Розкладаючи H_{2N-l} по першому рядку, бачимо, що виконується рекурентне співвідношення

$$H_{2N-l} = \lambda H_{2N-l-1} - \lambda_l H_{2N-l-2}. \quad (477)$$

¹³Доведення цієї формули в дещо інших позначеннях сформульовано як вправа 13 до розділу 11 книжки *Richard Bellman, Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill book company (1960)*.

З рекурентного співвідношення видно, що можна формально покласти $H_0 \equiv 1$, бо тоді $H_2 = \lambda H_1 - \lambda_{2N-2} H_0$ дає правильне значення для H_2 . З рекурентного співвідношення маємо

$$\frac{H_{2N-l}}{H_{2N-l-1}} = \lambda - \frac{\lambda_l}{\frac{H_{2N-l-1}}{H_{2N-l-2}}} = \lambda - \frac{\lambda_l}{\lambda - \frac{\lambda_{l+1}}{\frac{\dots}{\lambda - \frac{\lambda_{2N-3}}{\lambda - \frac{\lambda_{2N-2}}{\lambda}}}}}, \quad l = \overline{1, 2N-1}, \quad (478)$$

де при $l = 2N-1$ треба брати $\lambda_{2N-1} = 0$, оскільки $\lambda_{2N-1} \equiv \frac{k_N}{m_N}$, а $k_N = 0$, бо за останньою масою пружинки немає. Звідки

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H_{2N-l}}{H_{2N-l-1}} = \lambda - \frac{\lambda_l}{\lambda - \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda - \frac{\lambda_{l+2}}{\dots}}} \equiv z_l(\lambda). \quad (479)$$

Тоді

$$\det(\Lambda + \lambda E) = H_{2N-1} = \frac{H_{2N-1}}{H_{2N-2}} \frac{H_{2N-2}}{H_{2N-3}} \frac{H_{2N-3}}{H_{2N-4}} \cdot \dots \cdot \frac{H_2}{H_1} \frac{H_1}{H_0} H_0. \quad (480)$$

Беручи логарифм від обох частин цієї рівності, ділячи на $N-1$, та переходячи до границі $N \rightarrow \infty$, отримаємо шукану рівність

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \ln \det(\Lambda + \lambda E) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln \frac{H_{2N-l}}{H_{2N-l-1}} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln z_l(\lambda). \end{aligned} \quad (481)$$

Тоді з (472) маємо

$$\Omega(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln z_l(\lambda) - \frac{2N-1}{N-1} \ln \lambda \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln \frac{z_l(\lambda)}{\lambda}.$$

Але

$$\frac{z_l(\lambda)}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda_l \frac{1}{\lambda^2}}{1 - \frac{\lambda_{l+1} \frac{1}{\lambda^2}}{1 - \dots}} = 1 + \frac{\lambda_l x}{1 + \frac{\lambda_{l+1} x}{1 + \dots}}. \quad (482)$$

Остаточню

$$\Omega(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln \xi_n(x), \quad \text{де} \quad \xi_n(x) = 1 + \frac{\lambda_l x}{1 + \frac{\lambda_{l+1} x}{1 + \dots}}. \quad (483)$$

Формули (467) та (483) в принципі дозволяють знайти спектр власних частот коливань нескінченного ланцюжка з заданими значеннями мас та жорсткостей пружинок.

Проілюструємо використання цих формул, розглянувши випадок ланцюжка з однаковими масами m та жорсткостями пружинок k . В цьому випадку усі λ_l будуть однакові: $\lambda_l = \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2$. Тоді

$$\Omega(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{2N-1} \ln \xi(x) = 2 \ln \xi(x), \quad \text{де} \quad \xi(x) = 1 + \frac{\omega_0^2 x}{1 + \frac{\omega_0^2 x}{1 + \dots}}.$$

$\xi(x)$ легко може бути знайдене зі співвідношення $\xi(x) = 1 + \frac{\omega_0^2 x}{\xi(x)}$. Звідки

$$\xi^2(x) - \xi(x) - \omega_0^2 x = 0 \implies \xi(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \omega_0^2 x}, \quad (484)$$

де перед коренем взятий знак “+”, оскільки при $x \rightarrow 0$ ξ має прямувати до 1.

Отже

$$\Omega(x) = 2 \ln \xi(x) = 2 \ln \left(\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4\omega_0^2 x} \right] \right). \quad (485)$$

Відповідно

$$\Omega(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4\omega_0^2 x}} \frac{4\omega_0^2}{\sqrt{1 + 4\omega_0^2 x}} = \frac{4\omega_0^2 x}{x(1 + \sqrt{1 + 4\omega_0^2 x})\sqrt{1 + 4\omega_0^2 x}}. \quad (486)$$

Підставляючи в чисельнику $4\omega_0^2 x = -(1 + \sqrt{1 + 4\omega_0^2 x})(1 - \sqrt{1 + 4\omega_0^2 x})$, отримаємо

$$\Omega'(x) = \frac{1}{x} \left[1 - (1 + 4\omega_0^2 x)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (487)$$

Для $x > -\frac{1}{4\omega_0^2}$ функція $\Omega'(x)$ є дійсною. Її можна аналітично продовжити через верхню півплощину, щоб отримати значення на верхньому березі розрізу $(-\infty, -\frac{1}{4\omega_0^2})$. Можна стартуючи з точки $x > 0$ обійти по півколу, і потрапити в точку $-x + i0$. Під час цього обходу аргумент підкореневого виразу $1 + 4\omega_0^2 x$ збільшиться на π . Тому

$$\Omega'(-x + i0) = \frac{1}{-x} \left(1 - (-i)[-1 + 4\omega_0^2 x]^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{-x} \left(1 + i[4\omega_0^2 x - 1]^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (488)$$

Тоді

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{-1}{i\pi x} \left(1 + i[4\omega_0^2 x - 1]^{-\frac{1}{2}} \right) \right\}. \quad (489)$$

Якщо $x < \frac{1}{4\omega_0^2}$, круглі дужки в попередньому виразі дійсні. Тому

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Якщо ж $x > \frac{1}{4\omega_0^2}$, то $D\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\pi} [4\omega_0^2 x - 1]^{-\frac{1}{2}}$.

Позначаючи $\mu = \frac{1}{x}$, маємо

$$D(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu > 4\omega_0^2, \\ \frac{1}{\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega_0^2}{\mu} - 1}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4\omega_0^2 \mu - \mu^2}}, & \mu < 4\omega_0^2. \end{cases} \quad (490)$$

Отже, згідно з означенням функцій M та D , маємо

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} \rightarrow M(\omega^2) &= 1 - \int_{\omega^2}^{+\infty} D(\mu) d\mu = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{\omega^2}^{4\omega_0^2} \frac{d\mu}{\sqrt{4\omega_0^4 - (\mu - 2\omega_0^2)^2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\mu - 2\omega_0^2}{2\omega_0^2} \Big|_{\omega^2}^{4\omega_0^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right). \end{aligned} \quad (491)$$

Щоб знайти закон дисперсії виразимо частоту ω

$$\arcsin \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \pi \frac{n}{N}. \quad (492)$$

Отже

$$1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} = \cos \frac{\pi n}{N} \implies \omega^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos \frac{\pi n}{N} \right] = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\pi n}{2N}. \quad (493)$$

Звідки остаточно

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \implies \omega = 2\omega_0 \sin \frac{\pi n}{2N} \equiv 2\omega_0 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \text{де } \varphi = \frac{\pi n}{N}. \quad (494)$$

Тобто отримуємо правильний закон дисперсії для ланцюжка з однаковими масами та однаковими пружинками.

Не завжди можна отримати $\Omega'(x)$ в замкнутому вигляді, щоб аналітично продовжити його на піввісь $(-\infty, 0)$, як це зроблено в щойно розглянутому простому випадку. Тому виведемо формулу, яка виражає $D(\mu)$ через значення $\Omega'(x)$, при $x > 0$, унікаючи, таким чином, необхідності аналітичного продовження.

Спершу зробимо перетворення Фур'є функції $x^{\frac{1}{2}}\Omega'(x)$ по змінній $\ln x$

$$r(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} \Omega'(x) e^{-i\alpha \ln x} d(\ln x). \quad (495)$$

Підставимо сюди (468) $\Omega'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mu D(\mu) d\mu}{1 + x\mu}$.

$$r(\alpha) = \int_0^{+\infty} d(\ln x) x^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha \ln x} \int_0^{+\infty} \frac{\mu D(\mu) d\mu}{1 + x\mu}. \quad (496)$$

Змінімо порядок інтегрування та зробимо заміну $x = e^{2y}$. Матимемо

$$r(\alpha) = \int_0^{+\infty} d\mu D(\mu) \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dy e^y e^{-2i\alpha y}}{1 + \mu e^{2y}} = \int_0^{+\infty} d\mu D(\mu) \mu^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{-2i\alpha y} dy}{\mu^{-\frac{1}{2}} e^{-y} + \mu^{\frac{1}{2}} e^y}. \quad (497)$$

Або

$$r(\alpha) = \int_0^{+\infty} d\mu D(\mu) \mu^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\alpha y} dy}{\text{ch}(y + \frac{1}{2} \ln \mu)}. \quad (498)$$

Робимо заміну $y' = y + \frac{1}{2} \ln \mu$

$$r(\alpha) = \int_0^{+\infty} d\mu D(\mu) \mu^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\alpha(y' - \frac{1}{2} \ln \mu)} dy'}{\text{ch} y'} = \int_0^{+\infty} d\mu D(\mu) \mu^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha \ln \mu} I(\alpha), \quad (499)$$

$$\text{де } I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\alpha y'} dy'}{\text{ch} y'}.$$

Щоб обчислити цей інтеграл, розглянемо функцію комплексної змінної $f(z) = \frac{e^{-2i\alpha z}}{\text{ch} z}$, і інтеграл від цієї функції $\int_C f(z) dz$ вздовж замкнутого контура, зображеного на малюнку 39. Функція $f(z)$ має прості полюси в точках $z = \frac{i\pi}{2} + i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, в яких косинус гіперболічний у знаменнику обертається в нуль. Для будь-яких значень параметра R всередину контура C потрапляє лише один такий полюс $z = \frac{i\pi}{2}$, лишок в якому рівний

$$\text{Res} \left\{ f(z), z = \frac{i\pi}{2} \right\} = \frac{\cos \left(2\alpha \frac{i\pi}{2} \right)}{\text{sh} \frac{i\pi}{2}} = \frac{\frac{e^{-\pi\alpha} + e^{\pi\alpha}}{2}}{\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}} = \frac{\text{ch}(\pi\alpha)}{i}. \quad (500)$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C \frac{e^{-2i\alpha z}}{\text{ch} z} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \\ &= 2\pi i \text{Res} \left\{ f(z), z = \frac{i\pi}{2} \right\} = 2\pi i \frac{\text{ch}(\pi\alpha)}{i} = 2\pi \text{ch}(\pi\alpha), \end{aligned} \quad (501)$$

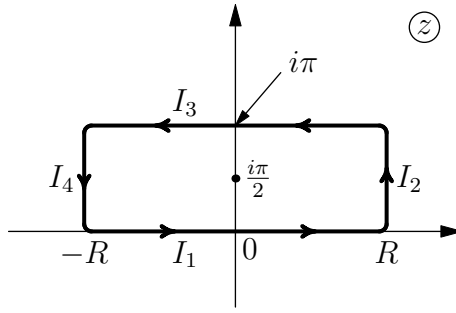


Рис. 39: Контур інтегрування C для інтегралу $\int_C \frac{e^{-2i\alpha z}}{\operatorname{ch} z} dz$.

де I_1, I_2, I_3, I_4 – інтеграли вздовж чотирьох відрізків, з яких складається контур. А саме I_1 відповідає інтегралу вздовж відрізка $[-R, R]$ дійсної осі, I_2 та I_4 відповідають інтегралам вздовж бічних сторін контура, I_3 відповідає інтегралу вздовж відрізка $[R + i\pi, -R + i\pi]$. При $R \rightarrow \infty$ інтеграли I_2 та $I_4 \in O(e^{-R})$, і швидко прямують до нуля з ростом R , а інтеграл I_1 прямує до I . При цьому, враховуючи, що

$$\operatorname{ch}(i\pi + y') = \frac{e^{i\pi + y'} + e^{-i\pi - y'}}{2} = -\operatorname{ch} y', \quad (502)$$

$$\cos(2\alpha[i\pi + y']) = \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \cos(2\alpha y') - i \operatorname{sh}(2\pi\alpha) \sin(2\alpha y'), \quad (503)$$

маємо

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-R}^{-R} \frac{\cos(2\alpha[i\pi + y'])}{\operatorname{ch}(i\pi + y')} dy' = \\ &= \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \int_{-R}^{-R} \frac{\cos(2\alpha y')}{-\operatorname{ch} y'} dy' - i \operatorname{sh}(2\pi\alpha) \int_{-R}^{-R} \frac{\sin(2\alpha y')}{-\operatorname{ch} y'} dy' = \\ &= \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \int_{-R}^{-R} \frac{\cos(2\alpha y')}{\operatorname{ch} y'} dy' + i \operatorname{sh}(2\pi\alpha) \cdot 0 = \operatorname{ch}(2\pi\alpha) I_1. \end{aligned} \quad (504)$$

Тут враховано, що інтеграл від непарної функції в симетричних межах рівний нулю. Отже

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \rightarrow I(1 + \operatorname{ch}(2\pi\alpha)), \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (505)$$

Звідки, враховуючи (501), маємо

$$I(1 + \operatorname{ch}(2\pi\alpha)) = 2\pi \operatorname{ch}(\pi\alpha) \implies I = \frac{2\pi \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{1 + \operatorname{ch}(2\pi\alpha)} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\alpha)}, \quad (506)$$

де використано тотожність $2\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{ch}(2x)$.

Підставляючи отримане значення $I(\alpha)$ в вираз (499) для $r(\alpha)$, будемо мати

$$r(\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\alpha)} \int_0^{+\infty} \mu^{\frac{3}{2}} D(\mu) e^{i\alpha \ln \mu} d(\ln \mu). \quad (507)$$

Або

$$\frac{r(\alpha) \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{\pi} = \int_0^{+\infty} \mu^{\frac{3}{2}} D(\mu) e^{i\alpha \ln \mu} d(\ln \mu). \quad (508)$$

Звідки бачимо, що $\frac{r(\alpha) \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{\pi}$ є Фур'є образом $\mu^{\frac{3}{2}} D(\mu)$ відносно змінної $\ln \mu$. Роблячи зворотнє перетворення Фур'є, матимемо

$$\mu^{\frac{3}{2}} D(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(\alpha) \operatorname{ch}(\pi\alpha)}{\pi} e^{-i\alpha \ln \mu} d\alpha. \quad (509)$$

Підставляючи сюди $r(\alpha)$, отримаємо

$$D(\mu) = \frac{1}{2\pi^2 \mu^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \operatorname{ch}(\pi\alpha) e^{-i\alpha \ln \mu} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} \Omega'(x) e^{-i\alpha \ln x} d(\ln x). \quad (510)$$

Або

$$D(\mu) = \frac{1}{2\pi^2 \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \operatorname{ch}(\pi\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\mu}} e^{-i\alpha \ln(x\mu)} \Omega'(x) dx. \quad (511)$$

Розписуючи експоненту під інтегралом через формулу Ейлера $e^{\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, і враховуючи, що інтеграл від непарної функції в симетричних межах рівний нулю, а інтеграл від парної функції в межах від $-\infty$ до $+\infty$ можна записати як подвоєний інтеграл від 0 до $+\infty$, остаточно матимемо

$$D(\mu) = \frac{1}{\pi^2 \mu} \int_0^{+\infty} d\alpha \operatorname{ch}(\pi \alpha) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x\mu}} \cos(\alpha \ln(x\mu)) \Omega'(x) dx. \quad (512)$$

Ця формула разом з (483) дає аналітичний розв'язок задачі зі знаходження спектру коливань ланцюжка з довільними масами і жорсткостями пружин.

Можна показати, що при розумних значеннях $\Omega(x)$ інтеграли в (512) є збіжними, але через сингулярності підінтегральної функції ця формула загалом є незручною для чисельного рахунку. ►

Література

- [1] Г.Л.Коткин, В.Г.Сербо, Сборник задач по классической механике, “Наука” (1977).
- [2] Nick Kwidzinski, Ralf Bulla, The classical harmonic chain: solution via Laplace transforms and continued fractions (2016).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1608.00616>
- [3] Frank O. Goodman, Propagation of a Disturbance on a One-Dimensional Lattice Solved by Response Functions, American Journal of Physics 40, 92 (1972); doi: 10.1119/1.1986453
- [4] Е.С.Пятницкий, Н.М.Трухан, Ю.И.Ханукаев, Г.Н.Яковенко, Сборник задач по аналитической механике, ФИЗМАТЛИТ (1980).
- [5] N.G. Van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, Elsevier (2007).
- [6] F.J.Dyson, The Dynamics of a Disordered Linear Chain, Phys.Rev. 92, 6 (1953).
- [7] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. “Наука” (1973).

Зміст

1	Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	6
1.1	Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	6
2	Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	9
3	Функції Бесселя	11
3.1	Означення функцій Бесселя	11
3.2	Ортогональність функцій Бесселя	13
3.3	Інтегральне представлення функцій Бесселя	16
3.4	Твірна функції Бесселя	16
3.5	Модифіковані функції Бесселя	17
3.6	Метод твірної функції	19
1.	Ланцюжок частинок з фіксованими кінцями.	20
	Випадок найкоротшого ланцюжка із двох однакових частинок, $N = 2$	29
2.	Ланцюжок з одним вільним кінцем.	31
	Випадок $N = 2$	34
3.	Ланцюжок з вільними кінцями.	36
	Випадок $N = 2$	41
4.	Замкнутий ланцюжок.	42
	Випадок $N = 2$	46
5.	Ланцюжок в якому чергуються різні маси.	47
	Перехід до випадку однакових мас.	52
6.	Нескінченний ланцюжок.	55
7.	Стоячі хвилі в нескінченному ланцюжку.	64
8.	Нескінченний ланцюжок з затуханням.	66
9.	Нескінченний ланцюжок. Чисельний розв'язок.	74
10.	Напівнескінченний ланцюжок з вільним кінцем.	77

11. Напівнескінченний ланцюжок до кінця якого прикладена ви- мушуюча сила.	79
12. Напівнескінченний ланцюжок з закріпленим кінцем.	84
13. Напівнескінченний ланцюжок як граничний випадок скінчен- ного ланцюжка.	86
14. Поздовжні коливання струни.	89
15. Малі коливання ланцюжка з N маятників.	92
Випадок $N = 2$	98
16. Малі коливання важкого ланцюга.	100
17. Випадкові блукання з неперервним часом.	102
18. Асимптотика для випадкових блукань з неперервним часом. .	106
19. Рівняння дифузії.	108
20. Електромеханічна аналогія.	111
21. Спектр коливань довільного нескінченного ланцюжка. . . .	113