Пример

$y' = x^2 + y$, $y(0) = 2.$, $h = 0.5$

Метод Эйлера.

$x_{i+1} = x_i + h$; $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i)$

Определим начальные условия:

$x_0 = 0$; $y_0 = 2$, $f(x;y) = x^2 + y$, тогда

$x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0) = 2 + 0.5(0^2 + 2) = 2 + 0.5 \cdot 2 = 3$

$x_2 = 0.5 + 0.5 = 1$

$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1) = 3 + 0.5(0.5^2 + 3) = 3 + 0.5(0.25 + 3) = 4.625$

$x_3 = 1 + 0.5 = 1.5$

$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2; y_2) = 4.625 + 0.5(1^2 + 4.625) = 7.438$

$x_4 = 1.5 + 0.5 = 2$

$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3; y_3) = 7.438 + 0.5(1.5^2 + 7.438) = 7.438 +$

$+ 0.5(2.25 + 7.438) = 7.438 + 0.5 \cdot 9.688 = 12.282$

Метод трапеций

$x_{i+1} = x_i + h$; $y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left(f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h \cdot f(x_i; y_i))\right)$

Определённые начальные условия в методе Эйлера

Такие же, что и в методе трапеций, тогда:

$x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$

$y_1 = y_0 + \dfrac{h}{2}\left(f(x_0; y_0) + f(x_1; y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)) \right) = 2 + \dfrac{0.5}{2}\left(0^2 + 2 + \right.$

$\left. + 0.5^2 + \left(2 + 0.5 \cdot (0^2 + 2) \right) \right) = 2 + 0.25 \left(2.25 + (2 + 0.5 \cdot 2) \right) =$

$= 2 + 0.25 \left(2.25 + 3 \right) \approx 3.313$

$x_2 = 0.5 + 0.5 = 1$

$y_2 = y_1 + \dfrac{h}{2}\left(f(x_1; y_1) + f(x_2; y_1 + h \cdot f(x_1; y_1)) \right) = 3.313 + 0.25$

$\left(0.5^2 + 3.313 + 1^2 + \left(3.313 + 0.5(0.5^2 + 3.313) \right) \right) = 3.313 + 0.25$

$\left(0.25 + 3.313 + 1 + (3.313 + 0.5(0.25 + 3.313)) \right) \approx 5.727$

$x_3 = 1 + 0.5 = 1.5$

$y_3 = y_2 + \dfrac{h}{2}\left(f(x_2; y_2) + f(x_3; y_2 + h \cdot f(x_2; y_2)) \right) = 5.727 +$

$+ 0.25 \left(1^2 + 5.727 + 1.5^2 + \left(5.727 + 0.5(1^2 + 5.727) \right) \right) = 5.727 +$

$+ 0.25 \left(1 + 5.727 + 2.25 + \left(5.727 + 0.5 \cdot 6.727 \right) \right) \approx 10.243$

$x_4 = 1.5 + 0.5 = 2$

$y_4 = y_3 + \dfrac{h}{2}\left(f(x_3; y_3) + f(x_4; y_3 + h f(x_3; y_3)) \right) = 10.243$

$+ 0.25 \left(1.5^2 + 10.243 + 2^2 + \left(10.243 + 0.5(1.5^2 + 10.243) \right) \right) =$

$= 10.243 + 0.25 \left(2.25 + 10.243 + 4 + \left(10.243 + 0.5(2.25 + 10.243) \right) \right)$

≈ 18.489

Метод Рунге - Кутты.

$x_{i+1} = x_i + h \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i\right)$

$k1_i = f(x_i; y_i); \quad k2_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h \cdot k1_i}{2}\right)$

$k3_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h \cdot k2_i}{2}\right); \quad k4_i = f\left(x_i + h; y_i + h \cdot k3_i\right)$

Начальные условия - те же.

$x_1 = 0 + 0.5 = 0.5$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(k1_0 + 2k2_0 + 2k3_0 + k4_0\right) \ominus$

$k1_0 = f(x_0; y_0) = 0^2 + 2 = 2$

$k2_0 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h \cdot k1_0}{2}\right) \approx 2.563$

$k3_0 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h \cdot k2_0}{2}\right) \approx 2.703$

$k4_0 = f\left(x_0 + h; y_0 + h \cdot k3_0\right) \approx 3.602$

$\ominus 2 + \frac{0.5}{6}\left(2 + 2 \cdot 2.563 + 2 \cdot 2.703 + 3.602\right) \approx 3.344$

$x_2 = 0.5 + 0.5 = 1$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\left(k1_1 + 2k2_1 + 2k3_1 + k4_1\right) \ominus$

$k1_1 = f(x_1; y_1) \approx 3.563$

$k2_1 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{h \cdot k1_1}{2}\right) \approx 4.766$

$k3_1 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{h \cdot k2_1}{2}\right) \approx 5.066$

$k4_1 = f\left(x_1 + h; y_1 + h \cdot k3_1\right) \approx 6.846$

$\ominus 3.344 + \frac{0.5}{6}\left(3.563 + 2 \cdot 4.766 + 2 \cdot 5.066 + 6.846\right) \approx$

≈ 5.85

$$x_3 = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}\left(K1_2 + 2K2_2 + 2 \cdot K3_2 + K4_2\right) \ominus$$

$$K1_2 = f(x_2, y_2) \approx 6.727$$

$$K2_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}; \; y_2 + \frac{h \cdot K1_2}{2}\right) \approx 8.971$$

$$K3_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}; \; y_2 + \frac{h \cdot K2_2}{2}\right) \approx 9.532$$

$$K4_2 = f\left(x_2 + h; \; y_2 + h \cdot K3_2\right) \approx 12.742$$

$$\ominus \; 5.85 + \frac{0.5}{6}\left(6.727 + 2 \cdot 8.971 + 2 \cdot 9.532 + 12.742\right) \approx$$

$$\approx 10.557$$

$$x_4 = 1.5 + 0.5 = 2$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}\left(K1_3 + 2 \cdot K2_3 + 2K3_3 + K4_3\right) \ominus$$

$$K1_3 = f(x_3; y_3) \approx 12.493$$

$$K2_3 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}\right) y_3 + \frac{h \cdot K1_3}{2}\right) \approx 16.429$$

$$K3_3 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}; \; y_3 + \frac{h \cdot K2_3}{2}\right) \approx 17.413$$

$$K4_3 = f\left(x_3 + h; \; y_3 + h \cdot K3\right) \approx 22.95$$

$$\ominus \; 10.557 + \frac{0.5}{6}\left(12.493 + 2 \cdot 16.429 + 2 \cdot 17.413 + 22.95\right) \approx$$

$$\approx 19.15$$

Ответ: значения x_i и y_i в виде таблице + графии
+ сравнение точности.