Численные методы решения ОДУ

Предмет: Вычислительная математика
Преподаватель: Староверов И.Н.

Содержание

- Общие сведения
- Метод Эйлера
- Метод трапеций
- Метод Рунге-Кутты

Общие сведения

Рассматриваются уравнения первого порядка, разрешимые относительно первой производной с начальными условиями (x_0, y_0):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Геометрически f(x,y) определяет поле направлений на плоскости (x,y), а решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) - интегральные кривые.

Метод Эйлера

Интегральная кривая заменяется ломаной линией, состоящей из прямолинейных отрезков. Выбирается шаг h и значение функции в точке $x_{i+1} = x_i + h$ ищется по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h*f(x_i, y_i)$$

т.е. в интегральном уравнении f(x,y) заменяется на константу.

Метод трапеций

Это один из популярных методов, иначе его называют метод Коши-Эйлера или модифицированный метод Эйлера. Значения вычисляются по следующей формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}*(\mathrm{f}(x_i, y_i) + \mathrm{f}(x_{i+1}, y_i + \mathrm{h}*\mathrm{f}(x_i, y_i)))$$

Метод Рунге-Кутты

Вычисления значений в узлах по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}*(K1_i + 2K2_i + 2K3_i + K4_i)$$

$$K1_i = \mathrm{f}(x_i, y_i)$$

$$K2_i = \mathrm{f}(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h * K1_i}{2})$$

$$K3_i = \mathrm{f}(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h * K2_i}{2})$$

$$K4_i = \mathrm{f}(x_i + h, y_i + \mathrm{h} * K3_i)$$