Lecture 1　麦克斯韦方程组

积分形式

$\oint \boxed{H}\, dl = I + \int \boxed{\frac{\partial D}{\partial t}} ds$　磁场强度　J_D　电位移矢量　全电流公式 …… 时变的电场可以激发磁场

$\oint E \cdot dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} ds$　法拉第定律 …… 时变的磁场可以激发电场

$\oint B\, ds = 0$　磁场无源.

$\oint D\, ds = q$　高斯定理　电场有源.

定义：

电荷体密度 $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$

自由空间的电流面密度矢量 $\vec{J} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \vec{n}$

旋度算子：$(\oint dl)' \Rightarrow \nabla \times$

散度算子：$(\oint ds)' \Rightarrow \nabla \cdot$

微分形式

$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla \cdot B = 0$

$\nabla \cdot D = \rho$

推论：

① 对电磁场，平面不存留 电流

$I_入 = I_出$

$I_入 = \oint J ds \Rightarrow \oint J ds = -\frac{dq}{dt}$ (1)　电磁场内电荷守恒.　微分形式：$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$I_出 = -\frac{dq}{dt}$

② 由：$\oint H dl = \int \frac{\partial D}{\partial t} ds + I$　位移电流.　实际电流.

定义位移电流的电流密度 $J_D = \frac{\partial D}{\partial t}$

电位移矢量：$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E$

磁场强度 $B = \mu_0 \mu_r H = \mu H$

导电率：$J = \gamma E$

代入

$$\begin{cases} \nabla \times H = \boxed{J + J_D} \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \cdot D = \rho \end{cases}$$

→ 与D有关.　→ 与H有关.

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \times H = \gamma E + \frac{\partial D}{\partial t} = \gamma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\ \nabla \times E = -\frac{\mu \partial H}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mu H = 0 \Rightarrow \nabla \cdot H = 0 \\ \nabla \cdot \varepsilon E = \rho \Rightarrow \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

因此只要确定介质的 ε. μ. γ. 就能知道电磁场在某一介质中的转输.

介质的分类.

$\gamma = 0$　$\mu = 1$　理想介质

$\gamma = \infty$　$\mu = 0$.　理想导体(电)

边界条件：指电磁场在介质间的传播.

t：介面相接处的平面.

n：介面相接处 $S \cdot \Delta h$ 的柱体.

有：

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} - H_{2t} = J_S \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$

J_S 指介面的电流面密度.

ρ_S 指介面在 $S \cdot \Delta h$ 圆柱内的体密度.

对于 理想介质 — 理想介质.

介面上没有电荷. 也没有电流：$\rho_S = 0$　$J_S = 0$

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} = H_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \\ B_{1n} = B_{2n}. \end{cases}$$

对于 理想介质 — 理想导体.

导体表面既无磁场. 也无电场：B_2. H_2. E_2. $D_2 = 0$.

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} = 0 \\ H_{1t} = J_S \\ D_{1n} = \rho_S \\ B_{1n} = 0. \end{cases}$$

平面波理论：

在理想介质间无电荷/电流存在：($\rho_s = 0$. $J_s = 0$)　　此时麦克斯韦方程组：
$$\begin{cases} \nabla \times H = \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} \\ \nabla \times E = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla H = 0 \\ \nabla E = 0 \end{cases}$$

对 E 求二阶导：有（时谐电磁场）
$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu \varepsilon E^2 = 0$$

记 K（波数）为：$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，有
$$\nabla^2 E + k^2 E^2 = 0$$

规定 E 只在 z 轴上传播．因此 E 的方程与 x. y 轴坐标无关．与 z 轴坐标有关：$\dfrac{\partial E}{\partial x} = 0$　$\dfrac{\partial E}{\partial y} = 0$.

展开 ∇^2：
$$\frac{d^2 E}{dz} + k^2 E^2 = 0$$

通解．E_0 与 E_0' 可能不同
（两波的相干）

解微分方程．得．$E = E_0 e^{-jkz} + \boxed{E_0'} e^{jkz}$．$E_0$ 为初始值（它可以在 x. y 轴上有初始分量）

记 $E_0 e^{-jkz}$ 为 E 传播的正方向．e^{jkz} 为 E 传播的负方向

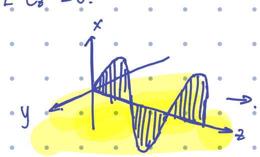
e^{jkz}　　　E_0　　　e^{-jkz}

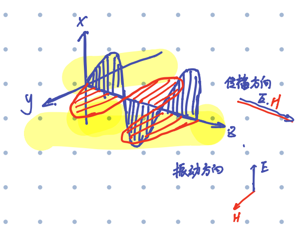
在自由空间内．不会有反射波．因此 E 只会向 e^{-jkz} 传播．
$$E = E_0 e^{-jkz} \longrightarrow \text{代入}\ \nabla E = 0.$$

$$\nabla \cdot (E_0 e^{-jkz}) = 0 \Rightarrow -jk\vec{E}\,\vec{e_z} = 0.$$

由 $E_0 = (E_x.\ E_y.\ E_z)$ ⇒ $E_z \cdot \vec{e_z} = 0$.

因此 E 与 $\vec{e_z}$ 垂直．沿 $\vec{e_z}$ 传播





由 $\nabla \times E = -j\omega\mu H$.

$H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{e_z} \times E$　　令 $\dfrac{1}{\eta} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$．称 η 为波阻抗．

$= \dfrac{1}{\eta} \vec{e_z} \times (E_x e_x - E_y e_x)$

∴ E 与 H 是垂直的．且沿 $\vec{e_z}$ 传播

结论：① E. H 同方向传播．相互垂直．同相．

② $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

③ $E_x(z.t) = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)$

平面波参数：

波速

已知：$\omega t - kz + \varphi_x = C$

两边求导：$\omega dt - k dz = 0$　　由 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

波速 V_p 可表示：
$$V_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\mu\varepsilon}$$

在 Free Space 中：$\mu = \mu_0$　$\varepsilon = \varepsilon_0$

因此：$V_p = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = C$　大学物理．

介质中的 k. λ. V_p. η.

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_0\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

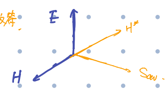
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$V_p = \frac{C}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$　　$\eta_0 \approx 377\Omega = 120\pi\Omega$.

能量： 定义坡印亭矢量 S_{av} 的微观复数形式：

$$S_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E \times H^*)$$ 方向取反符.



由 $\frac{E}{H} = \eta \cdot e_z$：

$$S_{av} = \frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}(E \times (\vec{e_z} \times \vec{E^*}))$$

$$= \frac{1}{2\eta}|E|^2 e_z$$

$$= \frac{1}{2\eta}(|E_x|^2 + |E_y|^2)\vec{e_z}$$ 表示能量移动的方向

表示平均能量流密度. V/m^2. （大学物理（下））

瞬时能量密度.：$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)$ 易证.

$$W_E(z,t) = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon(E_x^2(z,t) + E_y^2(z,t))$$

$$W_H(z,t) = \frac{1}{2}\eta H^2 = \frac{1}{2}\eta(H_x^2(z,t) + H_y^2(z,t))$$

由 $\eta = \frac{E}{H}$. 可证 $W_H = W_E$.

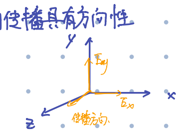
平均能量密度：

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T (W_E(z,t) + W_M(z,t))dt$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon(E_x^2 + E_y^2) = \frac{1}{2}\mu(H_x^2 + H_y^2)$$

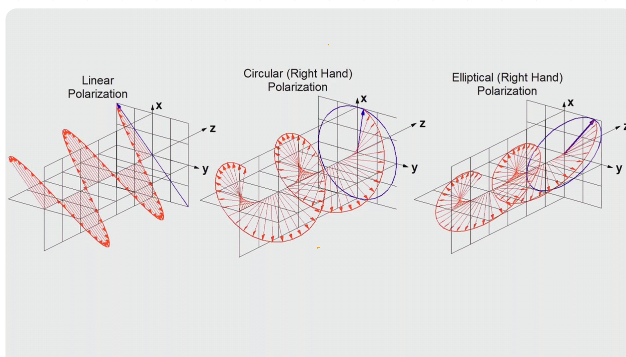
极化：使波的传播具有方向性

标准平面波



波在传波方向上没有分量.
可以在 x. y 方向上有分量.

线极化. 设 $\Delta = \varphi_x - \varphi_y$ $\Delta = 0$ 或 $\Delta = \pi$ 时
E 始终在同一直线上振动.（振动矢量恒定）

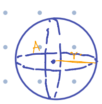


圆极化：
① 电场振幅不变.
② 每一点的角频率相同.

椭圆极化：
① 振动方向改变
② 振动幅度改变.

天线的能量接收：

设一球面波源 A 发出的功率 P_r：则 A 在单位面积上的功率密度：$\frac{P_r}{4\pi r^2}$.



在面积为 S 的曲面上可接收的功率：$\frac{P_r}{4\pi r^2}S$

"各向同性"

如果 A 发射的功率不再均匀. 而是有一定方向性
则在 S 处要加上一个方向系数 D：$P_L = \frac{P_r}{4\pi r^2}SD$

对各向同性 (D=1) 的理想接收天线, 其有效面积 $A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi}$：

$$P_L = \frac{P_r}{4\pi r^2} \cdot A_e = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 P_r$$

能量损失：

$$Loss = 10\lg\frac{P_r}{P_L} = 10\lg\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 = 20\lg\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)$$

由 $\lambda = \frac{c}{f}$.

$$Loss = 32.45 + 20\lg f(MHz) + 20\lg r(km)$$

在不理想的条件下，应当增加系数对发射和接收进行修正：

$$P_L = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 P_r G_t G_r.$$