基于凸优化的星球着陆自主轨迹规划

刘新福

内容概要

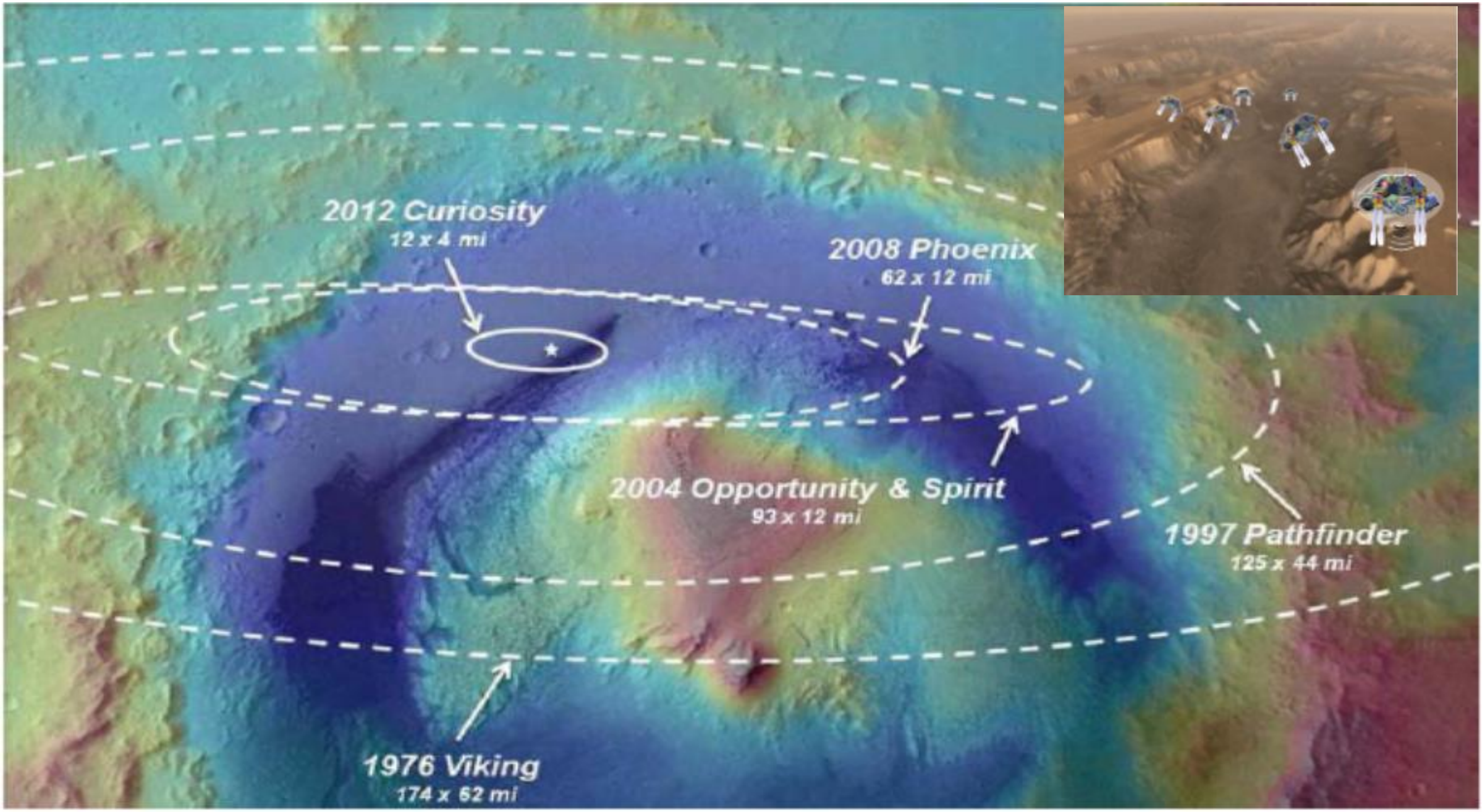
- 星球着陆问题的描述
- 凸化处理过程
- 等价性分析
- 数值结果

内容概要

- 星球着陆问题的描述
- 凸化处理过程
- 等价性分析
- 数值结果

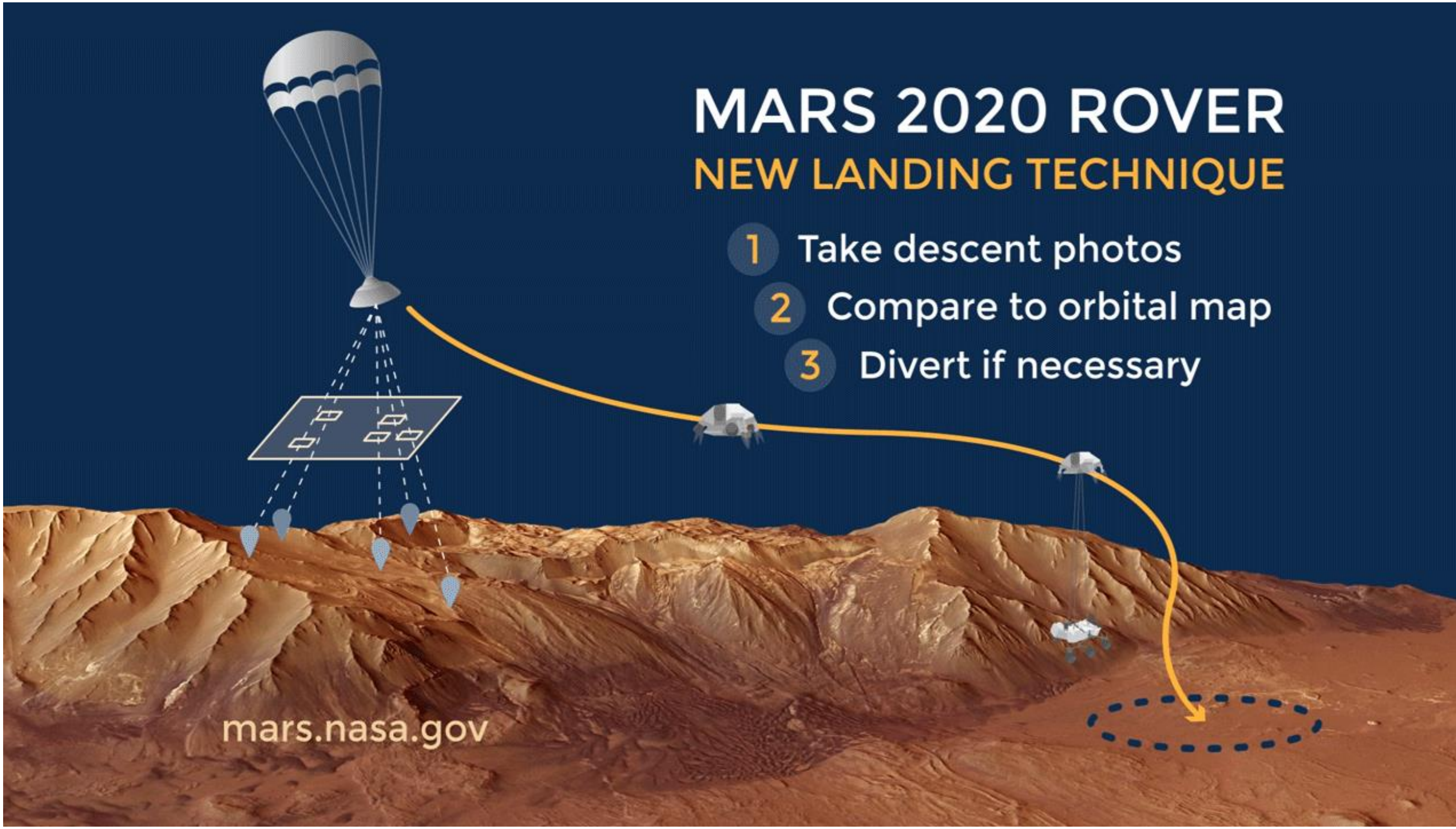
1.星球着陆问题的描述

➢ 火星动力下降着陆轨迹优化



1.星球着陆问题的描述

➢ 火星动力下降着陆轨迹优化

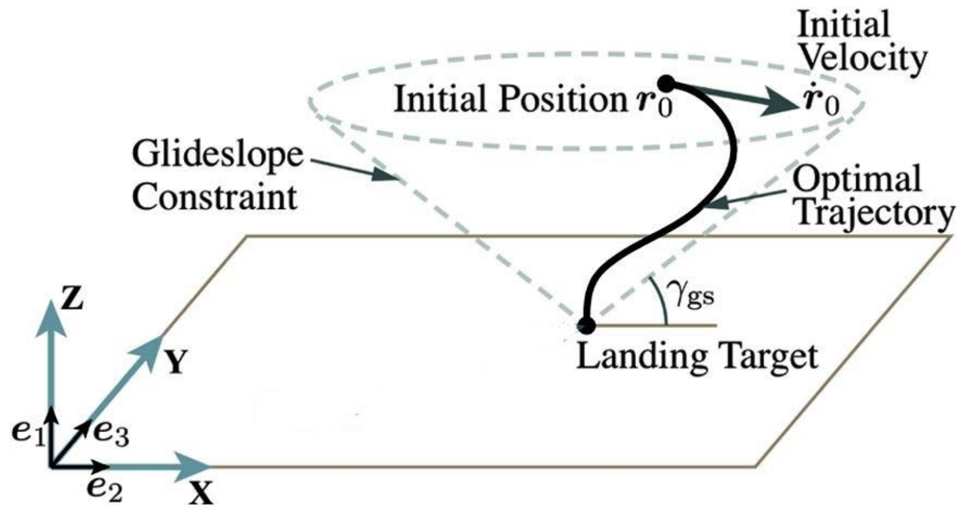


1.星球着陆问题的描述

动力学方程：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{g} + \boxed{\frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)}}$$

$$\dot{m}(t) = -\alpha \| \boldsymbol{T}(t) \|$$



动力学方程是**非线性的**

$\boldsymbol{r} = [r_1, r_2, r_3]^T$ —— 位置矢量

$\boldsymbol{T} = [T_1, T_2, T_3]^T$ —— 推力矢量

$\boldsymbol{g} = [-g, 0, 0]^T$ —— 火星重力加速度

$\alpha = 1/(I_{sp} g_0)$ —— 关于燃料消耗速率的常数

m —— 质量

I_{sp} —— 发动机比冲

g_0 —— 地球表面重力加速度

1.星球着陆问题的描述

过程约束： $0 < T_{\min} \le \|\boldsymbol{T}(t)\| \le T_{\max}$ 推力大小约束（**非凸**）

$\sqrt{r_2(t)^2 + r_3(t)^2} \le r_1(t)\cot\gamma_{gs}$ Glideslope 约束（**凸**）

where $0 < \gamma_{gs} \le 90^{\circ}$

终端约束： $\boldsymbol{r}(t_f) = \dot{\boldsymbol{r}}(t_f) = 0$

优化目标： $J = \int_0^{t_f} \|\boldsymbol{T}(t)\| \, \mathrm{d}t$ 燃料消耗最小

1.星球着陆问题的描述

优化问题：

$$
\begin{aligned}
\text{P0: } \min \quad & J = \int_0^{t_f} \| \boldsymbol{T}(t) \| \, \mathrm{d}t \\
\text{s.t.} \quad & \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)} \\
& \dot{m}(t) = -\alpha \| \boldsymbol{T}(t) \| \\
& 0 < T_{\min} \le \| \boldsymbol{T}(t) \| \le T_{\max} \\
& \sqrt{r_2(t)^2 + r_3(t)^2} \le r_1(t) \cot \gamma_{gs} \\
& \boldsymbol{r}(t_f) = \dot{\boldsymbol{r}}(t_f) = 0
\end{aligned}
$$

$\xrightarrow{\ ?\ }$

二阶锥优化

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& G\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} \succeq_K 0
\end{aligned}
$$

如何利用二阶锥优化进行求解？

内容概要

- 星球着陆问题的描述
- **凸化处理过程**
- 等价性分析
- 数值结果

2. 凸化处理过程

凸化处理

非凸不等式约束 ⟶ 二阶锥约束或者线性不等式约束

主要方法：
- 无损凸化（凸松弛）
- 二阶锥近似
- 线性近似

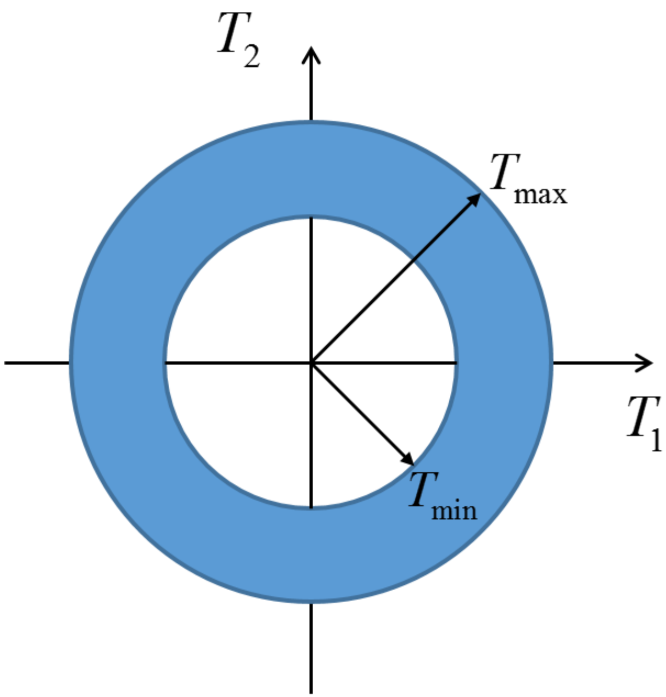
非线性动力学方程 ⟶ 线性动力学方程

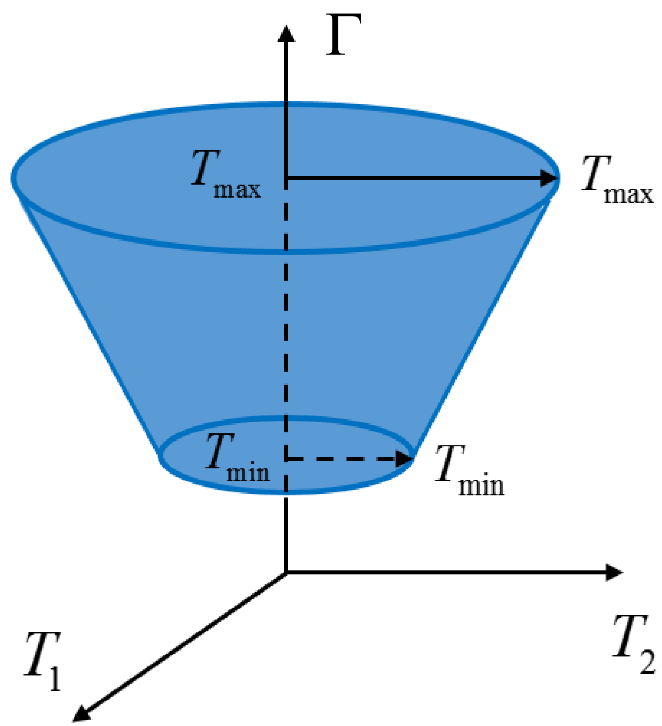
主要方法：
- 变量替换
- 直接线性化（需要迭代）
- 部分非线性保留—线性化（需要迭代）

2. 凸化处理过程

- 凸化非凸约束 $T_{\min} \le \|\boldsymbol{T}\| \le T_{\max}$ 方法：无损凸化（凸松弛）

$$T_{\min} \le \|\boldsymbol{T}\| \le T_{\max} \xrightarrow{\text{松弛}} \begin{cases} \|\boldsymbol{T}\| \le \Gamma \\ T_{\min} \le \Gamma \le T_{\max} \end{cases}$$





2. 凸化处理过程

$$
\begin{aligned}
\text{P0: } \min\quad & J=\int_0^{t_f}\|\boldsymbol{T}(t)\|\,\mathrm{d}t\\
\text{s.t.}\quad & \ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{g}+\frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)}\\
& \dot{m}(t)=-\alpha\|\boldsymbol{T}(t)\|\\
& 0<T_{\min}\le\|\boldsymbol{T}(t)\|\le T_{\max}\\
& \sqrt{r_2(t)^2+r_3(t)^2}\le r_1(t)\cot\gamma_{gs}\\
& \boldsymbol{r}(t_f)=\dot{\boldsymbol{r}}(t_f)=0
\end{aligned}
$$

等价？

$$
\begin{aligned}
\text{P1: } \min\quad & J=\int_0^{t_f}\Gamma(t)\mathrm{d}t\\
\text{s.t.}\quad & \ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{g}+\frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)}\\
& \dot{m}(t)=-\alpha\Gamma(t)\\
& \|\boldsymbol{T}(t)\|\le\Gamma(t)\\
& 0<T_{\min}\le\Gamma(t)\le T_{\max}\\
& \sqrt{r_2(t)^2+r_3(t)^2}\le r_1(t)\cot\gamma_{gs}\\
& \boldsymbol{r}(t_f)=\dot{\boldsymbol{r}}(t_f)=0
\end{aligned}
$$

Theorem：若 $\{t_f^*,\mathbf{T}^*,\Gamma^*\}$ 是问题P1的最优解，那么 $\{t_f^*,\mathbf{T}^*\}$ 是问题P0的最优解，即 $\|\mathbf{T}^*\|=\Gamma^*$。

证明在下一节给出

- 凸化动力学方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{g}+\frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)}$$

$$\dot{m}(t)=-\alpha\Gamma(t)$$

方法：变量替换

控制变量替换： $\boldsymbol{u}:=\frac{\boldsymbol{T}}{m},\ \sigma:=\frac{\Gamma}{m}$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{g}+\frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{u}(t)$$

$$\dot{m}(t)=-\alpha\Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{m}(t)=-\alpha\boxed{\sigma(t)m(t)}$$

状态变量替换： $z:=\ln m$

$$\dot{m}(t)=-\alpha\sigma(t)m(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t)=-\alpha\sigma(t)$$

2. 凸化处理过程

相应地

目标函数：

$$J=\int_0^{t_f}\Gamma(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad J=\int_0^{t_f}\sigma(t)\mathrm{d}t$$

松弛约束：

$$\|\boldsymbol{T}(t)\|\le\Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{u}(t)\|\le\sigma(t)$$

推力大小约束：

$$T_{\min}\le\Gamma(t)\le T_{\max} \quad \Rightarrow \quad T_{\min}\boxed{e^{-z(t)}}\le\sigma(t)\le T_{\max}\boxed{e^{-z(t)}}$$

2. 凸化处理过程

➢ 凸化约束 $T_{\min} e^{-z} \le \sigma(t) \le T_{\max} e^{-z}$

方法：二阶锥近似和线性近似

用 e^{-z} 的Taylor级数展开进行近似

$$z_0(t) = \ln(\underline{m_{wet} - \alpha T_{\max} t})$$

最大推力飞行的质量变化

- $T_{\min} e^{-z} \le \sigma(t)$ **凸**约束，用**二阶锥近似**

$$T_{\min} e^{-z_0}\left[1-(z-z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2}\right] \le \sigma$$

- $\sigma(t) \le T_{\max} e^{-z}$ **非凸**约束，用**线性近似**

$$\sigma \le T_{\max} e^{-z_0}[1-(z-z_0)]$$

二阶锥近似和线性近似后需迭代求解吗？这里不需要迭代，原因在于该近似的误差很小（在下一节将展示该误差的大小）

2. 凸化处理过程

$$
\begin{aligned}
\text{P2: min}\quad & J=\int_0^{t_f}\sigma(t)\mathrm{d}t\\
\text{s.t.}\quad & \ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{u}(t)\\
& \dot{z}(t)=-\alpha\sigma(t)\\
& \|\boldsymbol{u}(t)\|\le\sigma(t)\\
& T_{\min}e^{-z_0(t)}\left[1-(z(t)-z_0(t))+\frac{(z(t)-z_0(t))^2}{2}\right]\le\sigma(t)\\
& \qquad\le T_{\max}e^{-z_0(t)}[1-(z(t)-z_0(t))]\\
& \sqrt{r_2(t)^2+r_3(t)^2}\le r_1(t)\cot\gamma_{gs}\\
& \boldsymbol{r}(t_f)=\dot{\boldsymbol{r}}(t_f)=0
\end{aligned}
$$

最优控制问题P2的动力学是线性的，不等式约束是线性或者二阶锥的形式，目标函数是线性的。该问题在经过离散化之后将会变成一个二阶锥优化（SOCP）问题。

离散化后的优化问题

二阶锥优化问题

$$\boxed{\begin{aligned} \text{P3: min}\quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ & G\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} \succeq_K 0 \end{aligned}}$$

若该问题**有解**，原始对偶内点**保证**在多项式时间内找到**全局最优解**

- $\boldsymbol{y}$ 包含了所有离散点上的状态和控制变量
- $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ 包含所有的线性等式约束

  动力学方程

  初始和终端约束
- $G\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} \succeq_K 0$ 包含所有的锥约束

  线性锥约束（线性不等式约束）

  二阶锥约束

内容概要

- 星球着陆问题的描述
- 凸化处理过程
- **等价性分析**
- 数值结果

3. 等价性分析

➢ Theorem的证明

Theorem：若$\{t_f^*, \mathbf{T}^*, \Gamma^*\}$是问题P1的最优解，那么$\{t_f^*, \mathbf{T}^*\}$是问题P0的最优解，即$\|\mathbf{T}^*\| = \Gamma^*$。

$$\begin{aligned}
\text{P1: min}\quad & J = \int_0^{t_f} \Gamma(t)\mathrm{d}t \\
\text{s.t.}\quad & \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{T}(t)}{m(t)} \\
& \dot{m}(t) = -\alpha\Gamma(t) \\
& \|\boldsymbol{T}(t)\| \le \Gamma(t) \\
& 0 < T_{\min} \le \Gamma(t) \le T_{\max} \\
& \sqrt{r_2(t)^2 + r_3(t)^2} \le r_1(t)\cot\gamma_{gs} \\
& \boldsymbol{r}(t_f) = \dot{\boldsymbol{r}}(t_f) = 0
\end{aligned}$$

定义：

状态变量：$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{x}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}$

$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T]^T$

$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}^T, m]^T$

控制变量：$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{T}^T, \Gamma]^T$

控制集：$\Omega = \{\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{T}^T, \Gamma]^T \mid 0 < T_{\min} \le \Gamma \le T,\ \|\boldsymbol{T}\| \le \Gamma\}$

注：本节仅给出当glideslope约束不活跃情况的证明。该约束活跃清况的证明参考文献

Blackmore, L., Acikmese, B., and Scharf, D. P., “Minimum-Landing-Error Powered-Descent Guidance for Mars Landing Using Convex Optimization,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 33, No. 4, 2010, pp. 1161–1171.

3. 等价性分析

对问题P1使用极大值原理（Maximum Principle）

协态变量

$\lambda_1, \lambda_2 \in \Re^3$

$\lambda = [\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3]^T \in \Re^7$

$\lambda_0 = \text{const} \le 0$

哈密顿函数

$$H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 \Gamma + \boldsymbol{\lambda}_1^T \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \boldsymbol{T} / m + \boldsymbol{\lambda}_2^T \boldsymbol{g} - \alpha \lambda_3 \Gamma$$

1. 非平凡条件

$$[\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t)^T]^T \ne 0, \forall t \in [0, t_f^*]$$

2. 协态变量 λ 动力学方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_1} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_2} = -\boldsymbol{\lambda}_1$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_2^T \boldsymbol{T}}{m^2}$$

3. 极大值条件

$$\boldsymbol{v}^*(t) = \arg\max_{\boldsymbol{v} \in \Omega} H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$$

4. 横截条件

$$\lambda_3(t_f^*) = 0$$

$$H(\boldsymbol{y}^*(t_f^*), \boldsymbol{v}^*(t_f^*), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t_f^*)) = 0$$

第一步， 证明 $\lambda_2(t) \neq 0, \text{ a.e. on } [0, t_f^*]$

运用反证法，假设 $\exists [t_1, t_2] \subset [0, t_f^*], \text{ s.t. } \forall t \in [t_1, t_2], \lambda_2(t) = 0$

由协态变量动力学 $\dot{\lambda}_1 = 0, \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$ 可以推出 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = at + b, \forall t \in [0, t_f^*]$

根据 $\forall t \in [t_1, t_2], \lambda_2(t) = 0$ 可以推出 $a = b = 0$

所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \forall t \in [0, t_f^*]$

再根据 $\dot{\lambda}_3 = \lambda_2^T \boldsymbol{T} / m^2$ 和横截条件 $\lambda_3(t_f^*) = 0$ 可以推出 $\forall t \in [0, t_f^*], \lambda_3(t) = 0$

最后根据横截条件 $H(\boldsymbol{y}^*(t_f^*), \boldsymbol{v}^*(t_f^*), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t_f^*)) = 0$ 推出 $[\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}(t)^T]^T = 0$

与非平凡条件矛盾!

故 $\lambda_2(t) \neq 0, \text{ a.e. on } [0, t_f^*]$

3. 等价性分析

第二步， 证明 $\|\boldsymbol{T}^*(t)\| = \Gamma^*(t),\ \text{a.e. on } [0, t_f^*]$

$$H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = R_1(t)\Gamma + \boldsymbol{R}_2(t)^T \boldsymbol{T} + R_0(t)$$

$$R_0(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t)^T \boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{\lambda}_2^T \boldsymbol{g}$$
$$R_1(t) = \lambda_0 - \alpha \lambda_3(t)$$
$$\boldsymbol{R}_2(t) = \boldsymbol{\lambda}_2(t) / m(t)$$

因为 $\boldsymbol{\lambda}_2(t) \neq 0,\ \text{a.e. on } [0, t_f^*]$ 且 $m^*(t) > 0$

所以 $\boldsymbol{R}_2(t) \neq 0,\ \text{a.e. on } [0, t_f^*]$

因此哈密顿函数线性地依赖于$\boldsymbol{T}$，由极大值条件

$$\boldsymbol{v}^*(t) = \arg\max_{\boldsymbol{v} \in \Omega} H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$$

可得

$\|\boldsymbol{T}^*(t)\| = \Gamma^*(t),\ \text{a.e. on } [0, t_f^*]$ $\qquad T_{\min} \le \|\boldsymbol{T}^*(t)\| \le T_{\max}$

- 线性近似和二阶锥近似的误差分析

$$T_{\min} e^{-z} \le \sigma(t) \le T_{\max} e^{-z} \quad \Rightarrow \quad T_{\min} e^{-z_0(t)} \left[1 - (z(t) - z_0(t)) + \frac{(z(t)-z_0(t))^2}{2} \right] \le \sigma(t) \le T_{\max} e^{-z_0(t)} [1 - (z(t) - z_0(t))]$$

1. 左边不等式

$$\exists \bar{z} \in [z_0, z_u],\ \text{s.t.}\ e^{-z} = e^{-z_0} \left[1 - (z - z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2} \right] - e^{-\bar{z}} \frac{(z-z_0)^3}{6}$$

定义余项 $a(z) := e^{-\bar{z}} \dfrac{(z-z_0)^3}{6}$, $p_{e1} := 100 a(z) / e^{-z} = \dfrac{50m}{3\bar{m}} \ln \left(\dfrac{m}{m_0} \right)^3$

$$m_0(t) = m_{\text{wet}} - \alpha T_{\max} t$$
$$m_u(t) = m_{\text{wet}} - \alpha T_{\min} t$$
$$z_0(t) = \ln m_0(t)$$
$$z_u(t) = \ln m_u(t)$$

由于 $m, \bar{m} \in [m_0, m_u]$

$$\boxed{0 \le p_{e1}(t) \le \frac{50 m_u(t)}{3 m_0(t)} \ln \left(\frac{m_u(t)}{m_0(t)} \right)^3}$$

2. 右边不等式

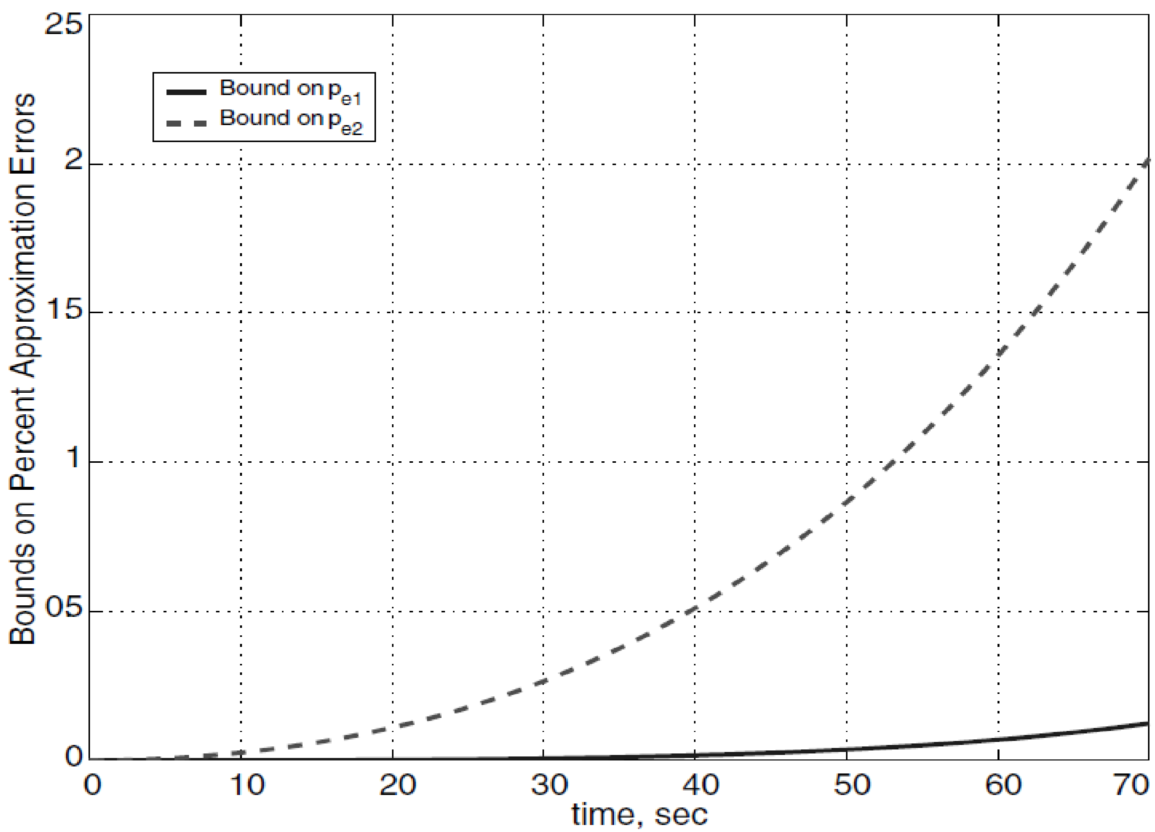
同理可得

$$\boxed{0 \le p_{e2}(t) \le \frac{50 m_u(t)}{m_0(t)} \ln \left(\frac{m_u(t)}{m_0(t)} \right)^2}$$

3. 等价性分析

$$0 \le p_{e1}(t) \le \frac{50 m_u(t)}{3 m_0(t)} \ln\left(\frac{m_u(t)}{m_0(t)}\right)^3$$

$$0 \le p_{e2}(t) \le \frac{50 m_u(t)}{m_0(t)} \ln\left(\frac{m_u(t)}{m_0(t)}\right)^2$$



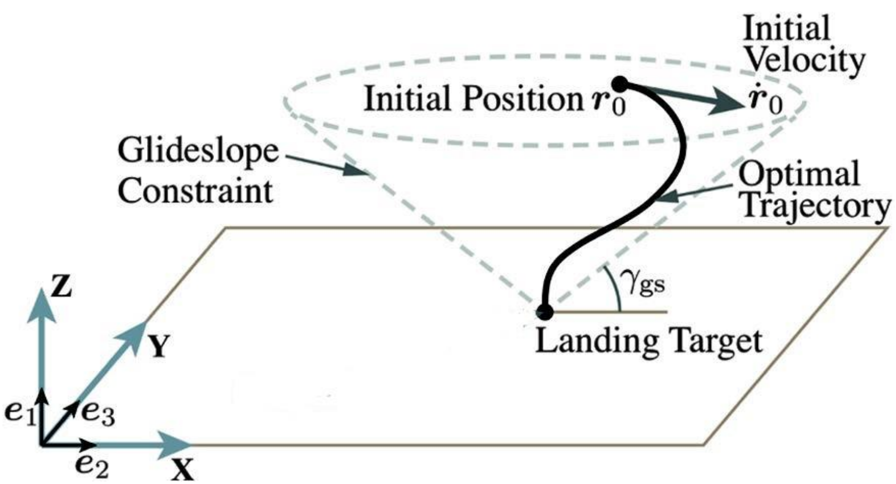
内容概要

- 星球着陆问题的描述
- 凸化处理过程
- 等价性分析
- **数值结果**

4. 数值结果

- 计算软件：ECOS
- 计算机CPU：Intel® Core™ i7-7500U CPU @ 2.70GHz
- 离散点个数：31，51，101，151
- 离散方法：欧拉法
- 初始条件：$\boldsymbol{r} = [1500, 0, 2000]^T$ m, $\dot{\boldsymbol{r}} = [75, 0, 100]^T$ m/s
- 飞行时间（给定）：75 s

Glideslope 约束： $\gamma_{gs} = 4°$



着陆器参数参考：

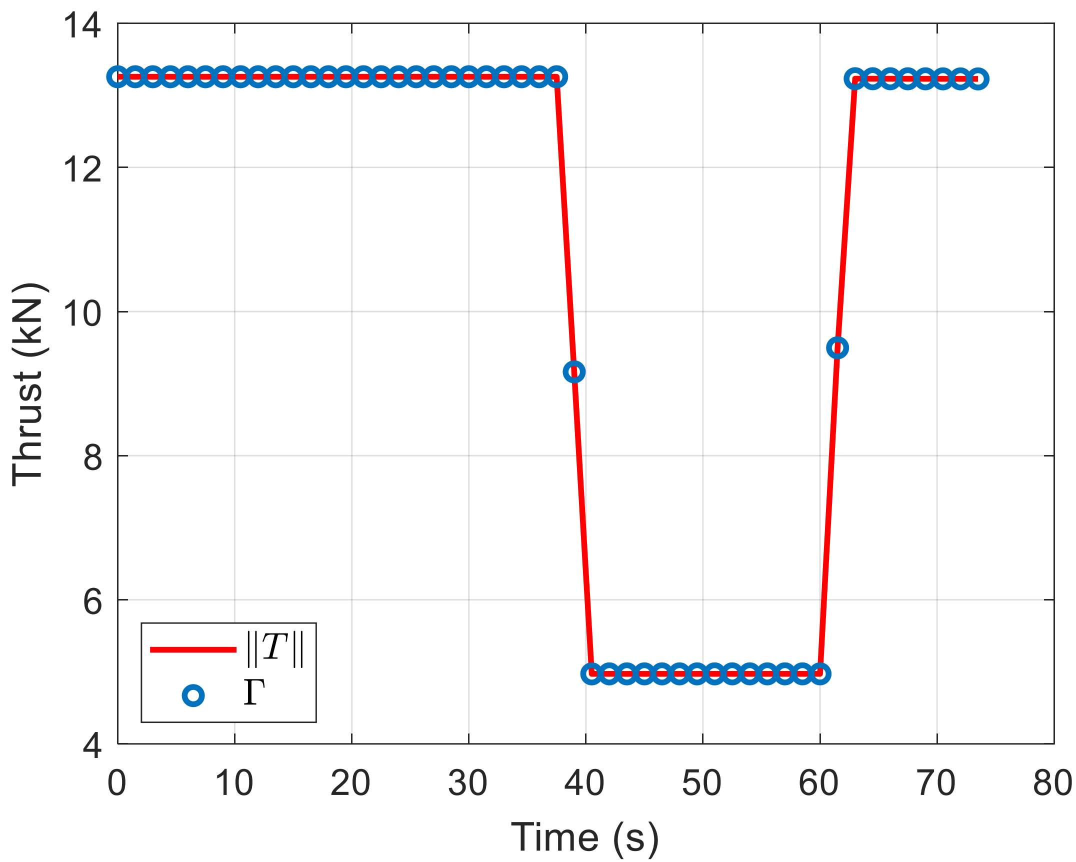
Acikmese, B. and Ploen, S. R., "Convex Programming Approach to Powered Descent Guidance for Mars Landing," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 5, 2007, pp. 1353–1366.

不同离散点计算时间比较

离散点个数	ECOS求解时间（ms）
31	28.4
51	49.1
101	98.3
151	176.7

4. 数值结果

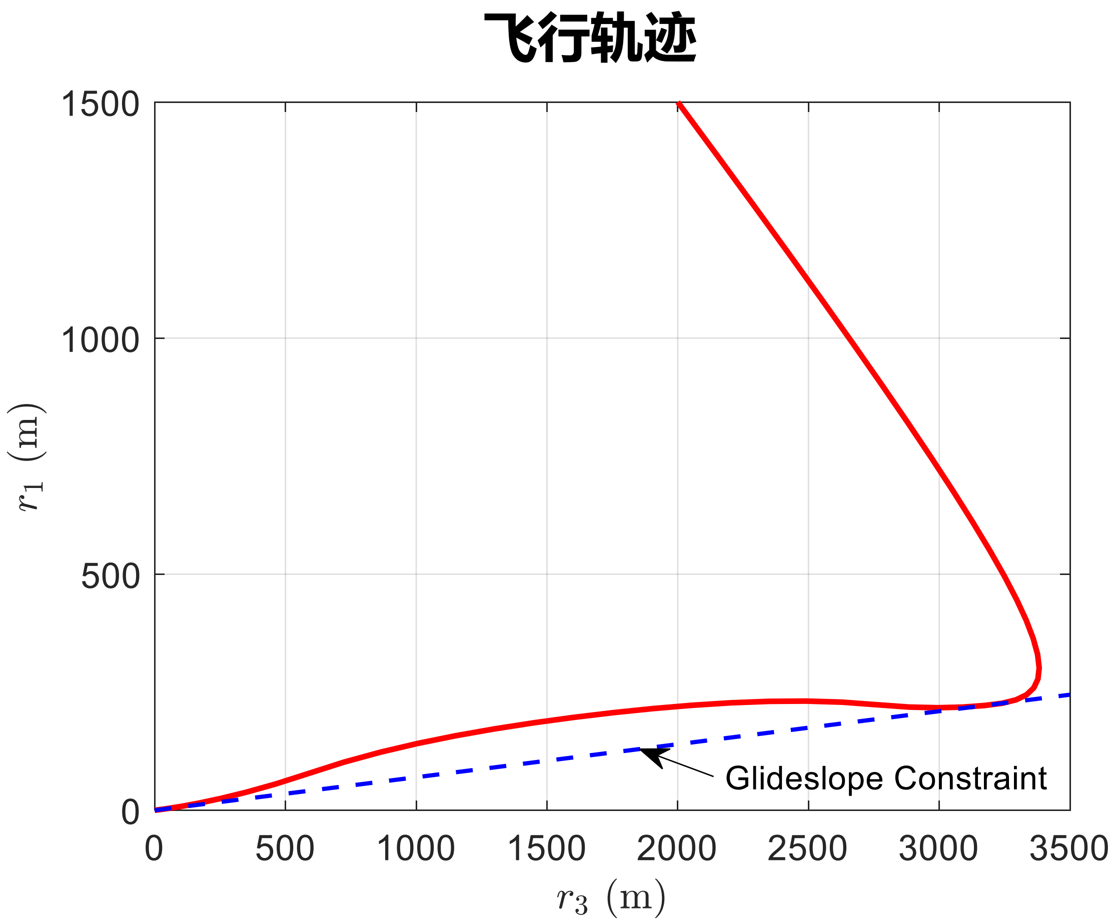
以51个离散点为例，计算结果展示



$$\| \boldsymbol{T}^* \| = \Gamma^*$$

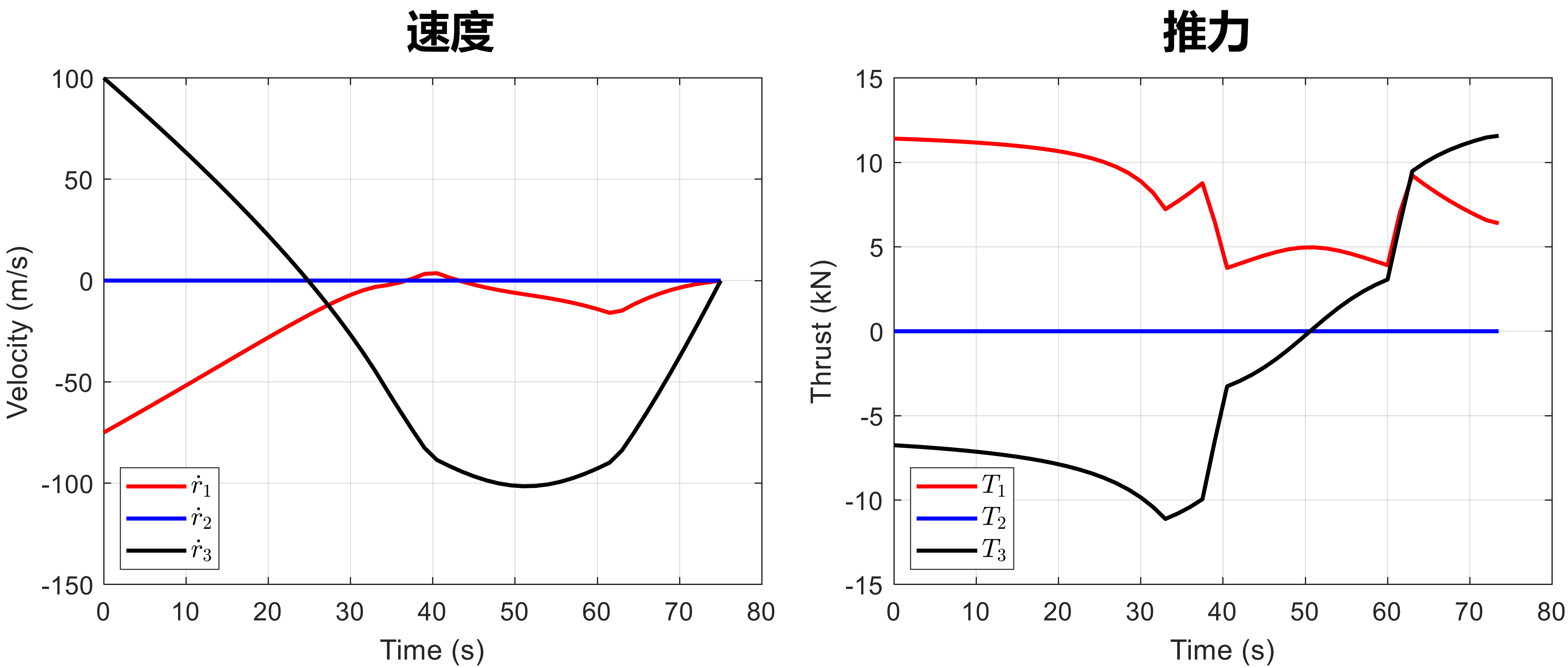
始终满足

4. 数值结果

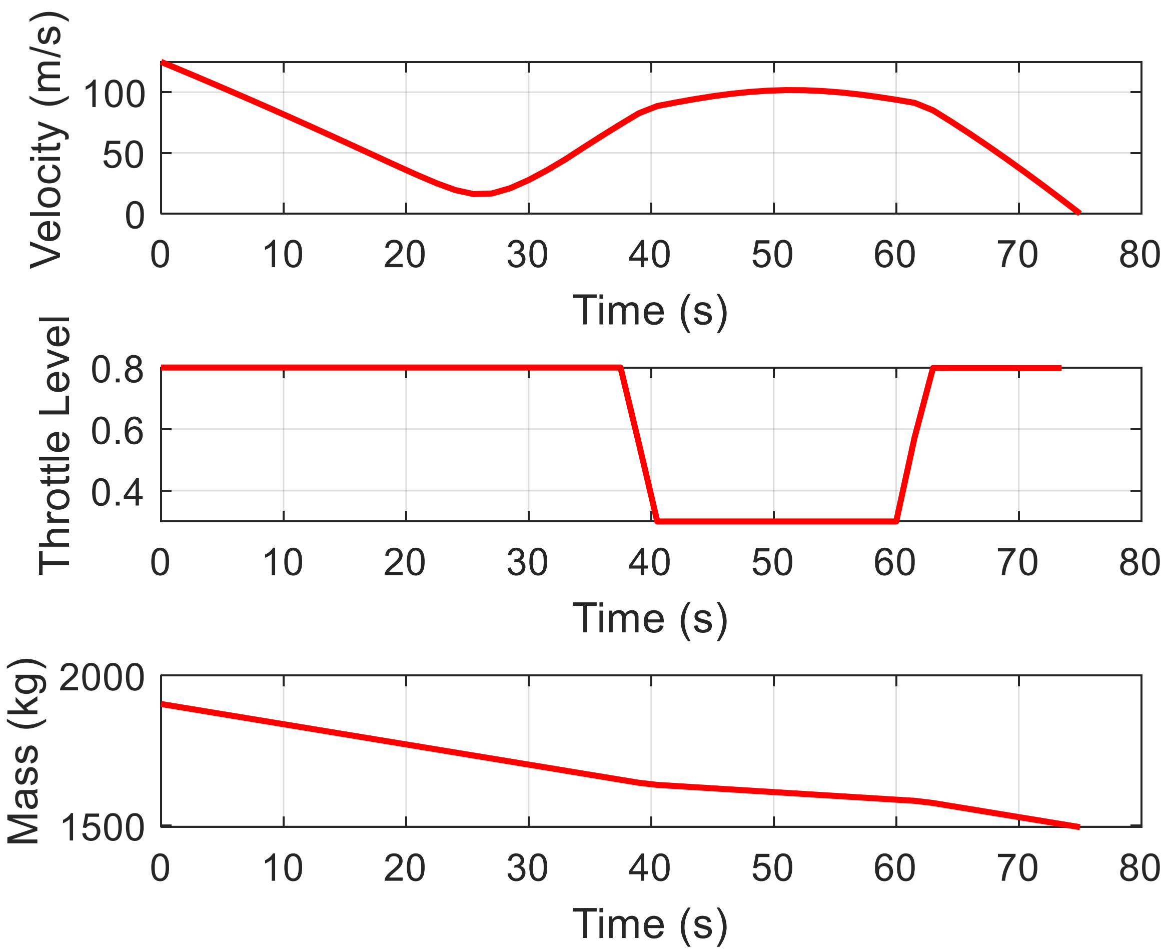


飞行轨迹
1500
1000
500
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
r_1 (m)
r_3 (m)
Glideslope Constraint

4. 数值结果


速度
推力
Velocity (m/s)
Time (s)
Thrust (kN)
Time (s)
$\dot{r}_1$
$\dot{r}_2$
$\dot{r}_3$
T_1
T_2
T_3

4. 数值结果



速度大小

比推力

质量