



凸优化在无人机轨迹规划中的应用

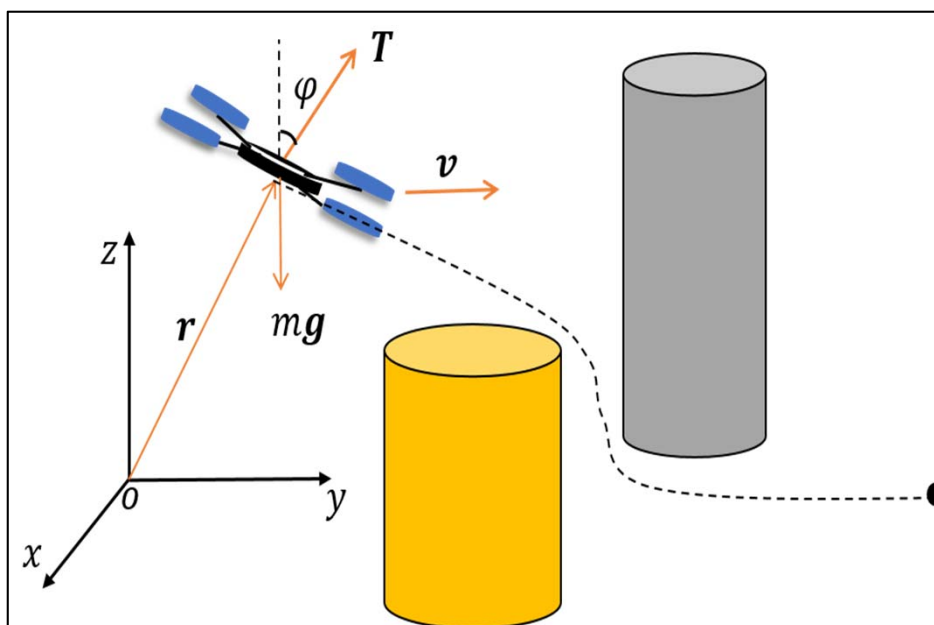
刘新福

- 无人机轨迹规划问题描述
- 凸化处理
- 保证收敛的序列二阶锥优化
- 在线轨迹规划与仿真

- 无人机轨迹规划问题描述
- 凸化处理
- 保证收敛的序列二阶锥优化
- 在线轨迹规划与仿真

1. 无人机轨迹规划问题描述

➤ 无人机动力学模型



无人机避障问题示意图

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g}$$

\mathbf{r} : 无人机的位置向量

\mathbf{v} : 无人机的速度向量

\mathbf{T} : 无人机的推力向量

\mathbf{g} : $[0, 0, -g]$ 重力加速度

m : 无人机的质量

1. 无人机轨迹规划问题描述

➤ 过程约束

速度约束 $\|\mathbf{v}\| \leq v_{\max}$

推力约束 $\|\mathbf{T}\| \leq T_{\max}$

防翻转约束 $\sqrt{T_x^2 + T_y^2} \leq \tan(\varphi_{\max})T_z, \varphi_{\max} \in (0, \frac{\pi}{2})$

避障约束 $1 - \frac{(x - x_{ob,m})^2}{a_{ob,m}^2} - \frac{(y - y_{ob,m})^2}{b_{ob,m}^2} \leq 0, m = 1, 2, \dots, M$

(椭球柱障碍物, M代表障碍物个数)

➤ 边界约束

初始与终端状态约束

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f$$

1. 无人机轨迹规划问题描述

无人机避障轨迹优化问题:

$$P0: J = t_f + k \int_{t_0}^{t_f} \left\| \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g} \right\|^2 dt$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g}$$

$$\|\mathbf{v}\| \leq v_{\max}$$

$$\|\mathbf{T}\| \leq T_{\max}$$

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2} \leq \tan(\varphi_{\max}) T_z$$

$$1 - \frac{(x - x_{ob,m})^2}{a_{ob,m}^2} - \frac{(y - y_{ob,m})^2}{b_{ob,m}^2} \leq 0, m = 1, 2, \dots, M$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f$$

问题P0是一个**时间自由**的最优控制问题。很明显，这个问题是**非凸**的，不存在解析解，需要用**数值算法**进行求解。

- 无人机轨迹规划问题描述
- **凸化处理**
- 保证收敛的序列二阶锥优化
- 在线轨迹规划与仿真

2. 凸化处理

凸化处理的目的是：

通过自变量选择、变量替换、等价转换以及线性化等方法，将原问题P0转化成为一个二阶锥优化（SOCP）问题，然后迭代求解该SOCP问题直至收敛，获得原问题P0的最优解。

➤ 自变量选择：

在问题P0中，飞行时间 t_f 是未知的，无法对P0中的动力学方程进行离散，可以将飞行时域 $[t_0, t_f]$ 映射到给定区间 $[0,1]$ ，如下

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0}, \quad t \in [t_0, t_f]$$

对上式求导可得：

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t_f}, \quad \tau \in [0,1]$$

2. 凸化处理

以 τ 作为新的自变量后, 动力学方程变为:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{v} t_f \\ \mathbf{v}' &= \left(\frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g} \right) t_f \end{aligned}$$

边界条件变为:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}(1) &= \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}_f \end{aligned}$$

目标函数变为:

$$J = t_f + k \int_0^1 \left\| \frac{\mathbf{T}}{m} + \mathbf{g} \right\|^2 t_f d\tau$$

其他约束形式保持不变 (把自变量 t 换成 τ 即可)。

2. 凸化处理

➤ **变量替换** (引入新变量 \bar{v} 、 \bar{a})

新变量 \bar{v} 定义为: $\bar{v} = vt_f$

新变量 \bar{a} 定义为: $\bar{a} = (\frac{T}{m} + g)t_f^2$

$$\begin{aligned} r' &= vt_f \\ v' &= (\frac{T}{m} + g)t_f \end{aligned}$$

运动学方程变为:

$$\begin{aligned} r' &= \bar{v} \\ \bar{v}' &= \bar{a} \end{aligned}$$

线性运动学

速度大小约束变为: $\|\bar{v}\| \leq v_{\max} t_f$

二阶锥约束

边界约束变为:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0, \bar{v}(0) = v_0 t_f \\ r(1) &= r_f, \bar{v}(1) = v_f t_f \end{aligned}$$

线性等式

2. 凸化处理

推力大小约束变为: $\left\| m \left(\frac{\bar{\mathbf{a}}}{t_f^2} - \mathbf{g} \right) \right\| \leq T_{\max}$

$$\bar{\mathbf{a}} = \left(\frac{T}{m} + \mathbf{g} \right) t_f^2$$

$$\Leftrightarrow \left\| \bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2 + (\bar{a}_z + g t_f^2)^2 \right\| \leq T_{\max}^2 t_f^2 / m \quad \text{非凸}$$

防翻转约束变为: $\sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} \leq \tan(\varphi_{\max})(\bar{a}_z + g t_f^2) \quad \text{非凸}$

避障约束保持不变:

$$1 - \frac{(x - x_{ob,m})^2}{a_{ob,m}^2} - \frac{(y - y_{ob,m})^2}{b_{ob,m}^2} \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad \text{非凸}$$

目标函数变为: $J = t_f + k \int_0^1 \|\bar{\mathbf{a}}\|^2 / t_f^3 d\tau \quad \text{非凸}$

2. 凸化处理

➤ 等价变换

此部分的**目的**是通过引入中间变量将非凸约束转换成为**凸约束**以及**一类不等式约束** ($f \leq 0$, f 为凹函数)。

1. 对于非凸的推力大小约束

$$\left\| \bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2 + (\bar{a}_z + gt_f^2)^2 \right\| \leq T_{\max}^2 t_f^2 / m$$

$$\begin{array}{l} \delta_1, \delta_2 \\ \rightleftarrows \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} gt_f^2 + \bar{a}_z \leq \delta_1 & \in \text{旋转二次锥} \\ \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2 + (\delta_1)^2} \leq T_{\max} \delta_2 / m & \text{二阶锥约束} \\ \delta_2 - t_f^2 \leq 0 & \text{凹函数 } f_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

2. 凸化处理

2. 对于防翻转约束

$$\sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} \leq \tan(\varphi_{\max})(\bar{a}_z + gt_f^2)$$

$$\delta_3 \begin{cases} \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} \leq \tan(\varphi_{\max})\delta_3 & \text{二阶锥约束} \\ \delta_3 - (\bar{a}_z + gt_f^2) \leq 0 & \text{凹函数 } f_2 \leq 0 \end{cases}$$

3. 对于避障约束

$$1 - \frac{(x - x_{ob,m})^2}{a_{ob,m}^2} - \frac{(y - y_{ob,m})^2}{b_{ob,m}^2} \leq 0 \quad \text{凹函数 } f_3 \leq 0$$

2. 凸化处理

4. 对于目标函数

$$J = t_f + k \int_0^1 \|\bar{\mathbf{a}}\|^2 / t_f^3 d\tau$$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow{\alpha_1} \left\{ \begin{array}{l} J = t_f + k \int_0^1 \alpha_1 d\tau \\ \|\bar{\mathbf{a}}\|^2 / t_f^3 \leq \alpha_1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow{\alpha_2} \left\{ \begin{array}{l} J = t_f + k \int_0^1 \alpha_1 d\tau \\ \|\bar{\mathbf{a}}\|^2 \leq 2\alpha_1\alpha_2, \alpha_2 \geq 0 \\ 2\alpha_2 - t_f^3 \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

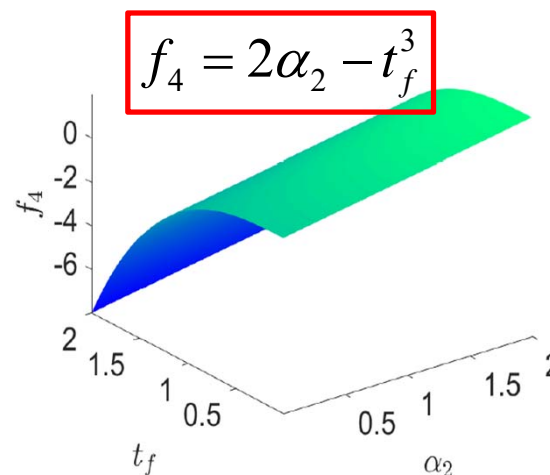
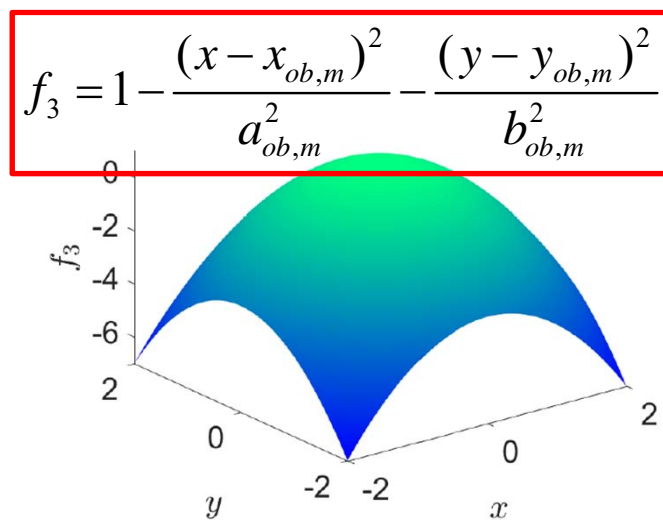
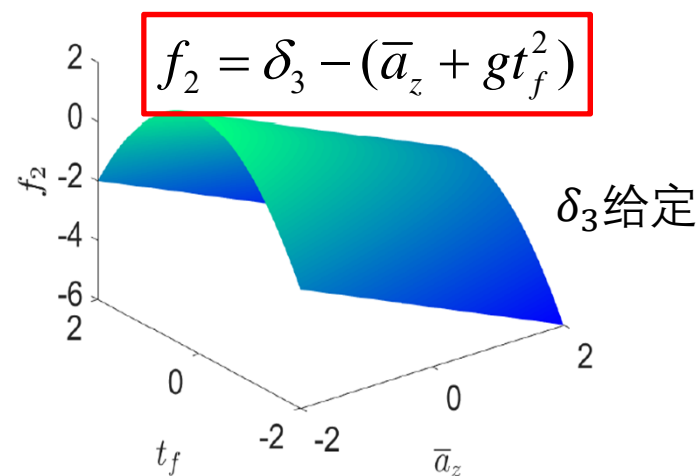
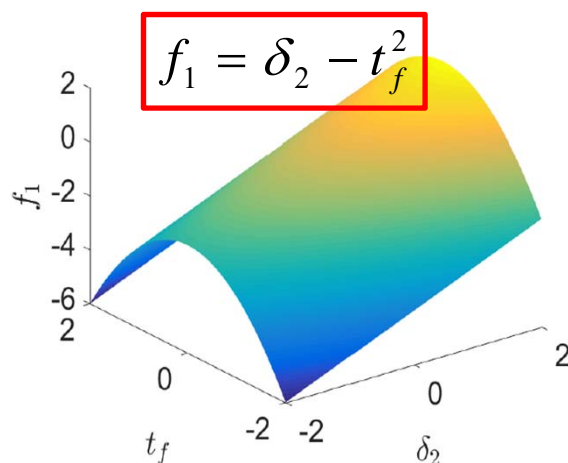
线性目标函数

旋转二次锥

凹函数 $f_4 \leq 0$

2. 凸化处理

凹函数 $f_1 \sim f_4$ 的图像如下 (均为**凹函数**) :



2. 凸化处理

➤ 线性化

对于上述非凸约束（**凹函数** ≤ 0 ），使用**线性化**技术进行凸化。

对于非凸约束 $f(x) \leq 0$ ，在给定点 x^* 进行线性化，可得：

$$f(x^*) + \nabla f^T(x^*)(x - x^*) \leq 0$$
$$|x - x^*| \leq \rho$$

其中， $\nabla f^T(x^*)$ 是函数 f 在点 x^* 处的梯度， ρ 是可信半径(其维数等于 x 的维数)。上述约束均是凸约束。

2. 凸化处理



在经过上述变换后，一个新的问题P1如下：

$$\text{P1: } \min J = t_f + k \int_0^1 \alpha_1 d\tau$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f$$

$$f(\boldsymbol{\lambda}^*) + \nabla f^T(\boldsymbol{\lambda}^*)(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) \leq 0$$

$$|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*| \leq \rho$$

$$\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x} - \mathbf{b} \succeq_K \mathbf{0} \quad \longleftarrow \text{二阶锥约束}$$

其中， \mathbf{x} 是状态变量， \mathbf{u} 是控制变量， $\boldsymbol{\lambda}$ 为中间变量。上述最优控制问题P1的动力学是线性的，不等式约束是线性约束或二阶锥约束的形式，目标函数是线性的。

2. 凸化处理

➤ 离散化

采用欧拉法或梯形法等对上述问题进行离散化，可以得到SOCP问题P2：

$$\begin{aligned} \text{P2: } \min_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t. } \quad & H\mathbf{y} = P \\ & f(\mathbf{y}^{[k]}) + \nabla f^T(\mathbf{y}^{[k]})(\mathbf{y} - \mathbf{y}^{[k]}) \leq 0 \\ & \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{[k]}\| \leq \rho \\ & \Lambda\mathbf{y} - \mathbf{b} \succeq_K 0 \end{aligned}$$

其中， \mathbf{y} 包含了所有离散点上的状态量、控制量以及中间变量。所有的等式约束都包含在 $H\mathbf{y} = P$ 中。上述问题是一个SOCP子问题，需要迭代求解至收敛才能够获取原问题P0的最优解。

- 无人机轨迹规划问题描述
- 凸化处理
- **保证收敛的序列二阶锥优化**
- 在线轨迹规划与仿真

3. 保证收敛的序列二阶锥优化

➤ 迭代求解算法

1. 设置 $k = 0$ 。选择一个初始剖面 $\{x^{[0]}, y^{[0]}, t_f^{[0]}\}$;
2. 在第 $(k + 1)$ 次迭代, 求解SOCP问题P2获得解 $y^{[k+1]}$;
3. 检查下列收敛条件是否满足:

$$\max |x^{[k+1]} - x^{[k]}| \leq \varepsilon_x$$

$$\max |y^{[k+1]} - y^{[k]}| \leq \varepsilon_y$$

$$\max |t_f^{[k+1]} - t_f^{[k]}| \leq \varepsilon_{t_f}$$

其中, ε_x 、 ε_y 和 ε_{t_f} 是用户定义收敛阈值; 当满足上式时, 跳转到第4步; 否则, 用 $\{x^{[k+1]}, y^{[k+1]}, t_f^{[k+1]}\}$ 替换剖面 $\{x^{[k]}, y^{[k]}, t_f^{[k]}\}$, 令 $k = k + 1$, 跳转回第2步。

4. 算法退出, 获得原问题P0的最优解。

3. 保证收敛的序列二阶锥优化

➤ 初始剖面的选取

首先连接无人机的起始与终端位置，并且等距分为 N 个点。利用这 N 个点的横纵坐标作为 $\{x^{[0]}, y^{[0]}\}$ ，再利用下述公式确定 $t_f^{[0]}$

$$t_f^{[0]} = \frac{\sqrt{(x_0 - x_f)^2 + (y_0 - y_f)^2}}{v_{\max}}$$

得到初始剖面 $\{x^{[0]}, y^{[0]}, t_f^{[0]}\}$ 。

➤ 迭代算法的收敛性

在上述特殊变换下，**能够证明**该算法**一定收敛**，证明过程参考以下文献：

Xinfu Liu and Ping Lu “Solving Nonconvex Optimal Control Problems by Convex Optimization,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 3, pp. 750-765, 2014.

- 无人机轨迹规划问题描述
- 凸化处理
- 保证收敛的序列二阶锥优化
- **在线轨迹规划与仿真**

4. 在线轨迹规划与仿真

➤ 无人机参数设置

$$m = 1 \text{ kg}, T_{\max} = 15 \text{ N}, v_{\max} = 10 \text{ m/s}, \varphi_{\max} = 45 \text{ deg}$$

➤ 初始条件

初始位置	初始速度	终端位置	终端速度
(0,0,10) m	(0,0,0) m/s	(50,50,50) m	(0,0,0) m/s

➤ 障碍物设置

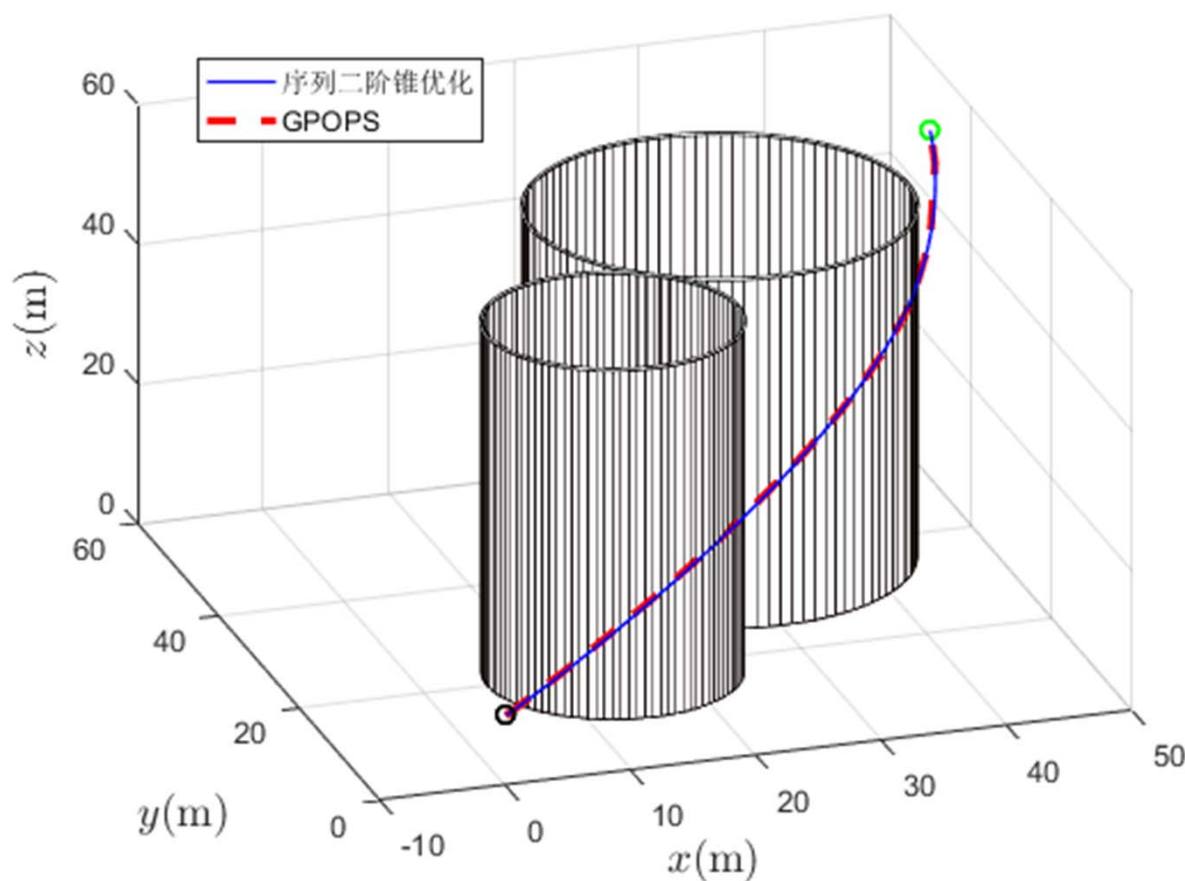
	圆柱中心	半径	高度
障碍物1	(15, 20) m	10 m	50 m
障碍物2	(30, 40) m	15 m	50 m

➤ 计算平台与软件

CPU 1.7Ghz 的笔记本电脑, ECOS

4. 在线轨迹规划与仿真

与GPOPS的结果进行对比（目标函数中加权系数 k 设为1/2）：



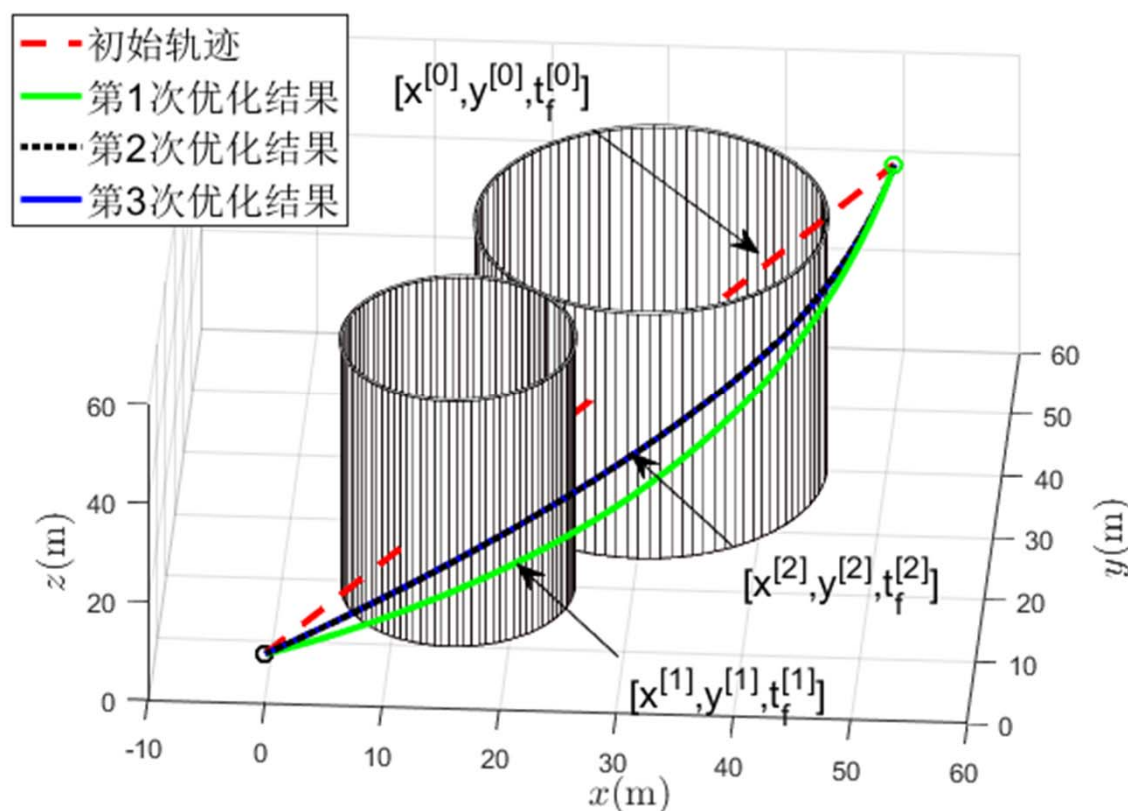
序列SOCP求解时间：0.20 s

GPOPS求解时间：5.24 s

无人机飞行轨迹

4. 在线轨迹规划与仿真

序列SOCP每次迭代得到的解：

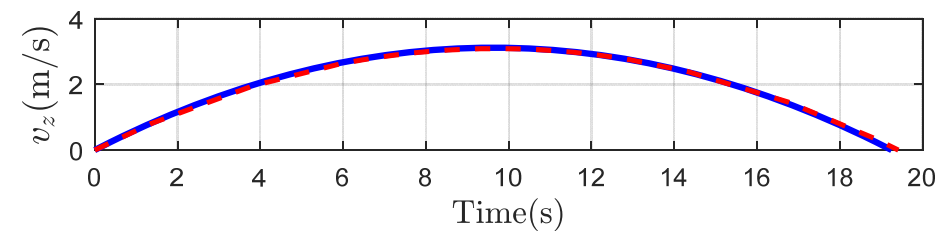
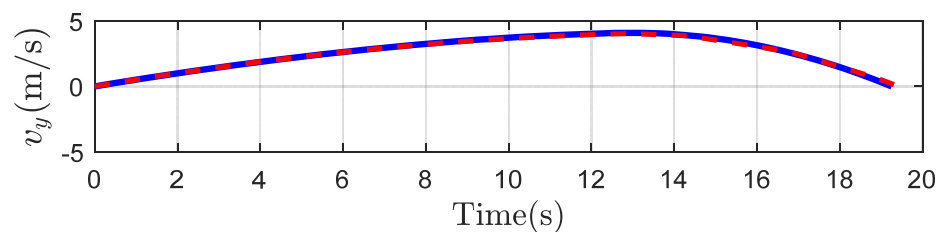
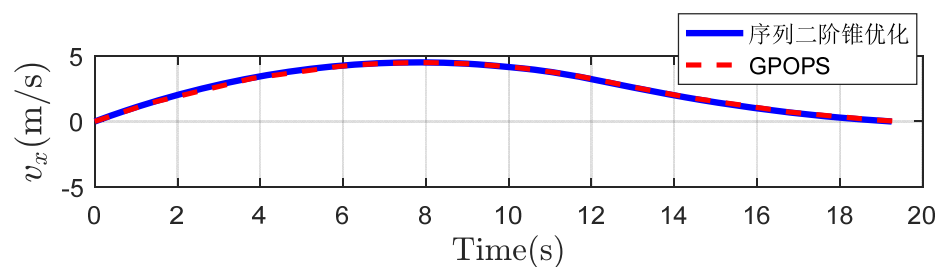


收敛阈值: $\{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{t_f}\} = \{1, 1, 1\}$

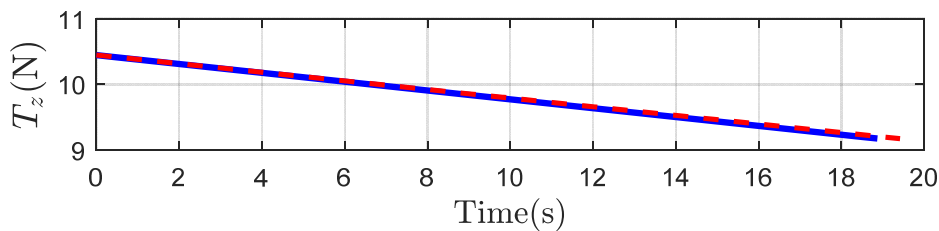
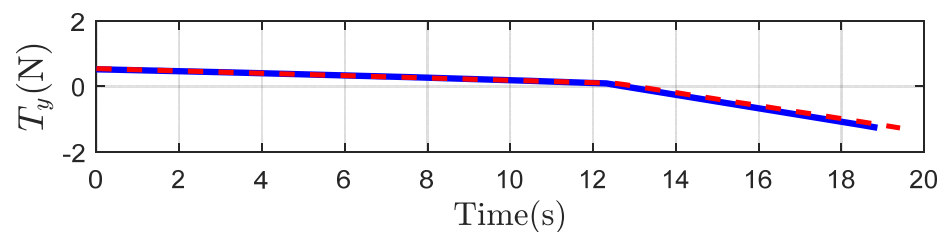
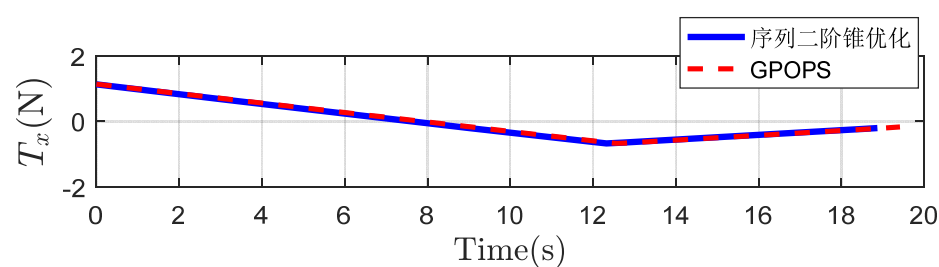
迭代	$\{\Delta x, \Delta y, \Delta t_f\}$	求解时间
1	$\{9.6, 9.0, 9.6\}$	66 ms
2	$\{3.0, 1.9, 1.1\}$	60 ms
3	$\{0.1, 0.2, 0.3\}$	67 ms

序列SOCP迭代过程

4. 在线轨迹规划与仿真

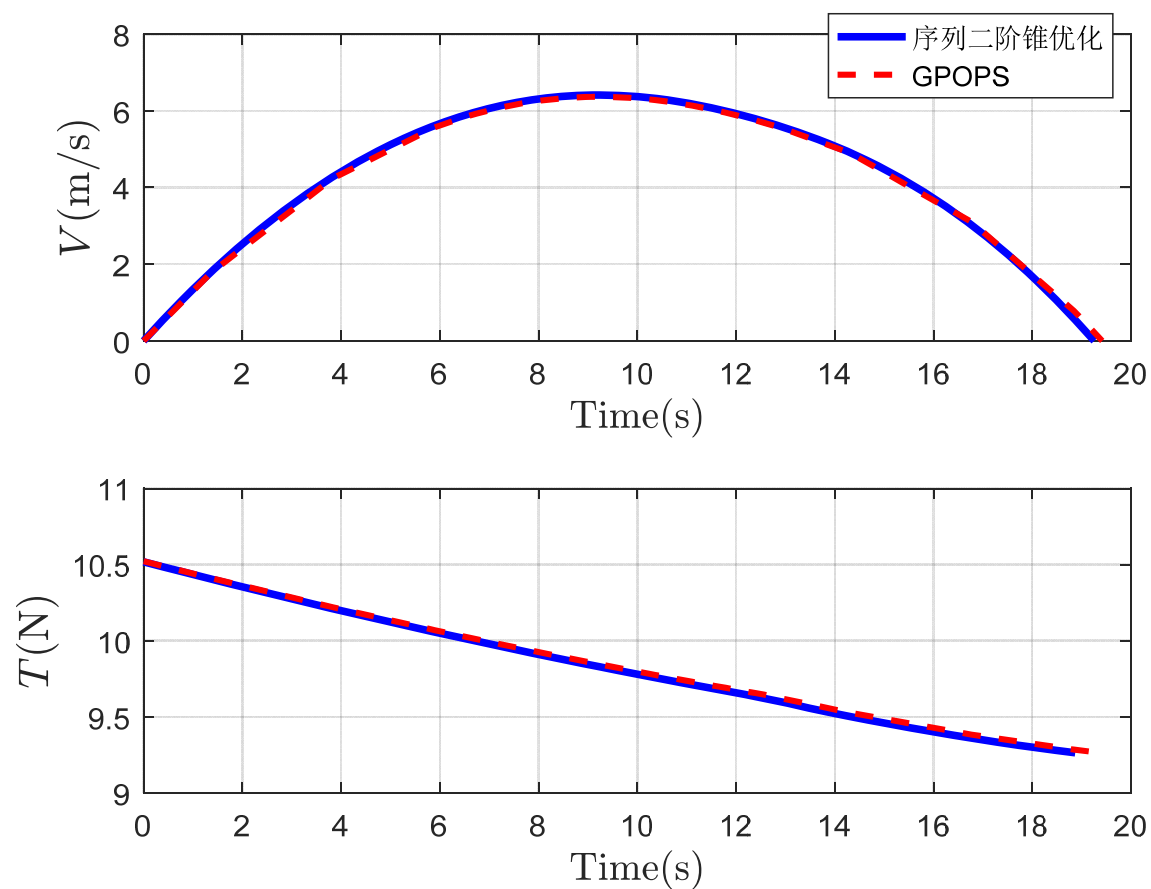


无人机各轴速度



无人机各轴推力

4. 在线轨迹规划与仿真



无人机速度大小与推力大小

4. 在线轨迹规划与仿真



Gazebo
仿真

