凸优化在高超声速再入轨迹规划中的应用

刘新福

内容概要

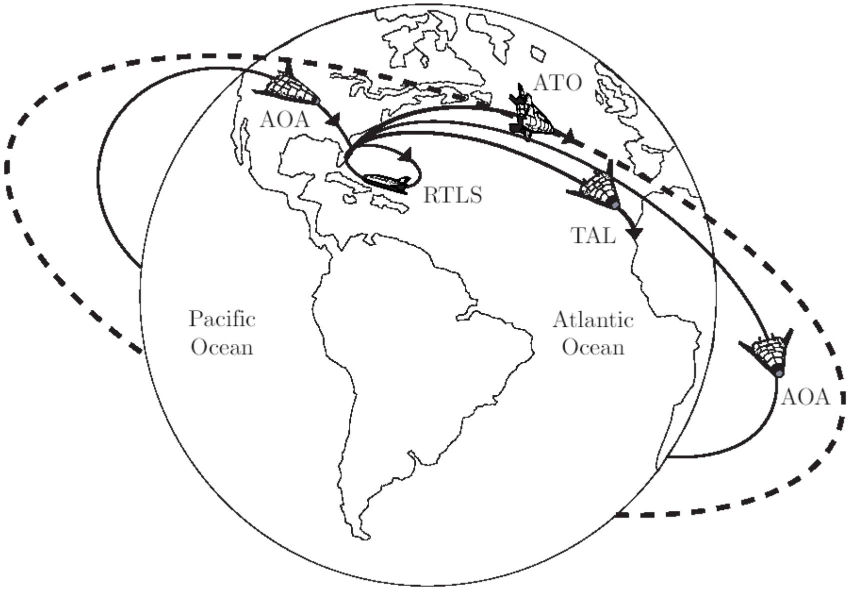
- 高超声速再入问题描述
- 凸化处理与离散化
- 等价性分析
- 数值结果

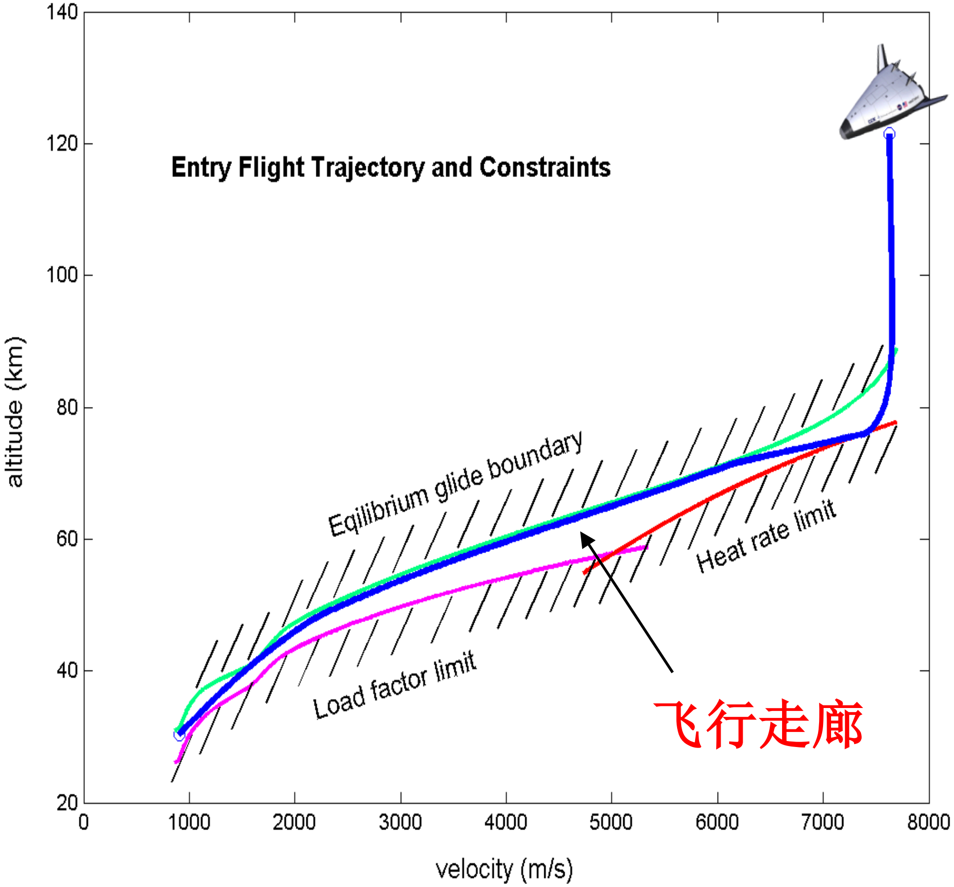
内容概要

- **高超声速再入问题描述**
- 凸化处理与离散化
- 等价性分析
- 数值结果

1. 高超声速再入问题描述

➢ 高超声速再入飞行器轨迹优化





滑翔过程存在热流、动压、过载等约束

动力学方程： $\dot{x} = f(x,u)$ 以负能量 $e = \frac{1}{r} - \frac{V^2}{2}$ 作为自变量

$$\dot{r} = (1/D)\sin\gamma$$
$$\dot{\theta} = \cos\gamma \sin\psi / (rD\cos\phi)$$
$$\dot{\phi} = \cos\gamma\cos\psi / (rD)$$
$$\dot{\gamma} = [L\cos\sigma + (V^2 - 1/r)\cos\gamma / r] / (V^2 D)$$
$$\dot{\psi} = [L\sin\sigma / \cos\gamma + V^2\cos\gamma\sin\psi\tan\phi / r] / (V^2 D)$$

以能量作为自变量

r	——	高度
θ	——	经度
ϕ	——	纬度
γ	——	航迹角
ψ	——	航向角

控制输入：攻角 α （升力 L）与倾侧角 σ

考虑攻角 α 为给定剖面，倾侧角 σ 满足 $\sigma \in [\sigma_{\min}，\sigma_{\max}]$

动力学方程为状态变量 $x = [r\ \theta\ \phi\ \gamma\ \psi]^T$ 与控制输入 σ 的**高度非线性函数**

1. 高超声速再入问题描述

过程约束：

$$k_Q\sqrt{\rho}V^{3.15} \le \dot{Q}_{max}$$ 热流约束

$$\frac{g_0 R_0}{2}\rho V^2 \le q_{max}$$ 动压约束

$$\sqrt{L^2 + D^2} \le n_{max}$$ 过载约束

终端约束：

$$r(e_f) = r_f^*, V(e_f) = V_f^*, \gamma(e_f) = \gamma_f^*,$$

$$\theta(t_f) = \theta_f^*, \phi(e_f) = \phi_f^*, \psi(e_f) = \psi_f^*$$

优化目标：

$$J = t_f = \int_{t_0}^{t_f} 1dt = \int_{e_0}^{e_f} \frac{1}{DV} de$$

$$\boxed{\frac{de}{dt} = DV}$$

优化问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ J &= \int_{e_0}^{e_f} \frac{1}{DV}\, de \\
\text{s.t.}\quad & \dot{x} = f(x,u) \\
& u = \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}] \\
& k_Q \sqrt{\rho} V^{3.15} \le \dot{Q}_{max} \\
& \frac{g_0 R_0}{2} \rho V^2 \le q_{max} \\
& \sqrt{L^2 + D^2} \le n_{max} \\
& x(e_f) = x_f^*
\end{aligned}
$$

$\xRightarrow{?}$

二阶锥优化

$$
\begin{aligned}
\min\quad & c^T x \\
\text{s.t.}\quad & Ax = b \\
& x \in K
\end{aligned}
$$

如何利用序列二阶锥优化进行求解？

内容概要

- 高超声速再入问题描述
- **凸化处理与离散化**
- 等价性分析
- 数值结果

2. 凸化处理与离散化

如何利用序列二阶锥优化进行求解？

主要步骤：

原最优控制问题 $\xRightarrow{\text{凸化处理}}$ 凸最优控制问题 $\xRightarrow{\text{离散化}}$ 二阶锥优化问题

步骤一：凸化处理

非线性目标函数 $f(x)$ $\longrightarrow$ 线性目标函数 $c^T x$

非线性等式约束 $h(x) = 0$ $\longrightarrow$ 线性等式约束 $a^T x + b = 0$

非线性不等式约束 $g(x) \leq 0$ $\longrightarrow$ 二阶锥约束 $||A_i x + b_i|| \leq c_i^T x + d_i$

2. 凸化处理与离散化

步骤一：凸化处理（目标函数）

$$J=\int_{e_0}^{e_f}\frac{1}{DV}de,\ \text{where } D=0.5R_0\rho V^2 S_{\text{ref}}C_D/m$$

非线性被积函数

线性化 $$1/(DV)\approx -a_0\frac{\rho_r^{(k)}}{(\rho^{(k)})^2}r+a_0\left(\frac{1}{\rho^{(k)}}+\frac{\rho_r^{(k)}}{(\rho^{(k)})^2}r^{(k)}\right)$$

$$:=c_1(V)r+c_0(V)$$

式中 $a_0=2m/(R_0S_{\text{ref}}C_DV^3)$

线性被积函数

近似目标函数 $$\boxed{J=\int_{e_0}^{e_f}[c_1(V)r+c_0(V)]de}$$

2. 凸化处理与离散化

步骤一：凸化处理（动力学方程）

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= (1/\mathrm{D})\sin\gamma \\
\dot{\theta} &= \cos\gamma\sin\psi/(rD\cos\phi) \\
\dot{\phi} &= \cos\gamma\cos\psi/(rD) \\
\dot{\gamma} &= [L\cos\sigma + (V^2 - 1/r)\cos\gamma/r]/(V^2 D) \\
\dot{\psi} &= [L\sin\sigma/\cos\gamma + V^2\cos\gamma\sin\psi\tan\phi/r]/(V^2 D)
\end{aligned}
$$

非线性动力学方程

新的控制变量：

$$
u_1 := \cos\sigma \qquad u_2 := \sin\sigma \qquad u_1^2 + u_2^2 = 1
$$

$$
\longrightarrow \quad L\cos\sigma = L\,u_1 \qquad L\sin\sigma = L\,u_2
$$

2. 凸化处理与离散化

步骤一：凸化处理（动力学方程）

$$\dot{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}(1/D)\sin\gamma \\ \cos\gamma\sin\psi/(rD\cos\phi) \\ \cos\gamma\cos\psi/(rD) \\ (1/D-1/rV^2D)(\cos\gamma/r) \\ \cos\gamma\sin\psi\tan\phi/(rD)\end{bmatrix}}_{f(x)}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (L/D)/V^2 & 0 \\ 0 & (L/D)/(V^2\cos\gamma)\end{bmatrix}}_{B(x)}u$$

$$x=[r\ \ \theta\ \ \phi\ \ \gamma\ \ \psi]^T,\ u=[u_1\ \ u_2]^T$$

$$\boxed{\dot{x}=f(x)+B(x)u}$$

2. 凸化处理与离散化

步骤一：凸化处理（动力学方程）

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x} = \underbrace{f(x^{(k)}) + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x}(x - x^{(k)})}_{\text{对}f(x)\text{进行线性化}} + \underbrace{B(x^{(k)})u}_{\text{用}B(x^{k})\text{近似}B(x)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\dot{x} = A(x^{(k)})x + B(x^{(k)})u + w(x^{(k)})}$$

2. 凸化处理与离散化

步骤一：凸化处理（动力学方程）

$$\dot{x} = A(x^{(k)})x + B(x^{(k)})u + w(x^{(k)})$$

$$A(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{D_r^{(k)}\sin\gamma^{(k)}}{(D^{(k)})^2} & 0 & 0 & \dfrac{\cos\gamma^{(k)}}{D^{(k)}} & 0 \\ a_{21} & 0 & \dfrac{\cos\gamma^{(k)}\sin\psi^{(k)}\sin\phi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}\cos^2\phi^{(k)}} & -\dfrac{\sin\gamma^{(k)}\sin\psi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}\cos\phi^{(k)}} & \dfrac{\cos\gamma^{(k)}\cos\psi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}\cos\phi^{(k)}} \\ a_{31} & 0 & 0 & -\dfrac{\sin\gamma^{(k)}\cos\psi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}} & -\dfrac{\cos\gamma^{(k)}\sin\psi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}} \\ a_{41} & 0 & 0 & \dfrac{\sin\gamma^{(k)}}{D^{(k)}r^{(k)}}\left(\dfrac{1}{r^{(k)}(V^{(k)})^2}-1\right) & 0 \\ a_{51} & 0 & \dfrac{\cos\gamma^{(k)}\sin\psi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}\cos^2\phi^{(k)}} & -\dfrac{\sin\gamma^{(k)}\sin\psi^{(k)}\tan\phi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}} & \dfrac{\cos\gamma^{(k)}\cos\psi^{(k)}\tan\phi^{(k)}}{r^{(k)}D^{(k)}} \end{bmatrix}$$

可参考文献：Xinfu Liu et. al. “Entry Trajectory Optimization by Second-Order Cone Programming,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016.

2. 凸化处理与离散化

步骤一：凸化处理（状态过程约束）

$$k_Q\sqrt{\rho}V^{3.15}\le \dot{Q}_{max} \rightarrow r\ge l_Q(V)$$

$$\frac{g_0R_0}{2}\rho V^2\le q_{max} \rightarrow r\ge l_q(V)$$

$$\sqrt{L^2+D^2}\le n_{max} \rightarrow r\ge l_n(V)$$

每个过程约束实为对高度与速度关系的约束

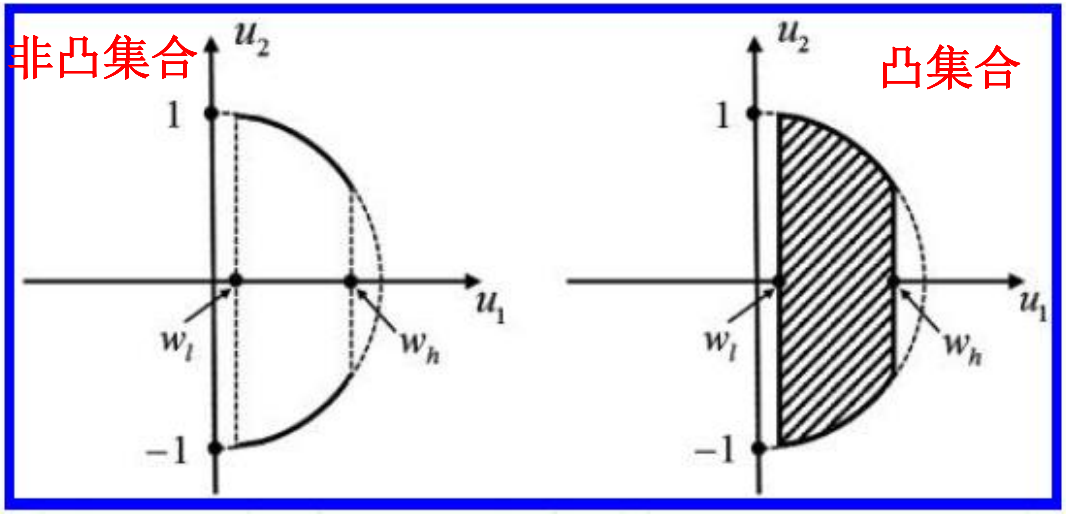
$$\bar{l}(V):=\max\{l_Q(V),l_q(V),l_n(V)\}$$

$\boxed{r\ge \bar{l}(V)}$ 速度V在每个能量离散点上可通过 $e=\frac{1}{r^{(k)}}-\frac{V^2}{2}$ 得到

步骤一：凸化处理（控制过程约束）

$$\sigma_{\min} \le \sigma \le \sigma_{\max} \xrightarrow{u_1 := \cos\sigma} u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & u_1^2 + u_2^2 = 1 \\ & u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max} \end{aligned}} \xrightarrow{\text{松弛}} \boxed{\begin{aligned} & u_1^2 + u_2^2 \le 1 \\ & u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max} \end{aligned}}$$ 二阶锥约束



步骤二：离散化

对以下凸最优控制问题进行离散化：

$$
\begin{aligned}
\min\ J &= \int_{e_0}^{e_f} [c_1(V)r + c_0(V)]de \\
\text{s.t.}\quad & \dot{x} = A(x^{(k)})x + B(x^{(k)})u + w(x^{(k)}) \\
& |x - x^{(k)}| \le \delta \\
& r \ge \bar{l}(V) \\
& u_1^2 + u_2^2 \le 1 \\
& u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max} \\
& x(e_f) = x_f^*
\end{aligned}
$$

将自变量 e 离散化为 N 等份，各离散点可记为 $e_0, e_1, \dots, e_N$

状态变量：$\{x_i\}_{i=0:N}$

控制变量：$\{u_i\}_{i=0:N}$

$x_i = [r_i\ \theta_i\ \phi_i\ \gamma_i\ \psi_i]^T$

$u_i = [u_{1i}\ \ u_{2i}]^T$

优化变量：$z = \{x_0, u_0, \dots, x_N, u_N\}$

2. 凸化处理与离散化

步骤二：离散化（目标函数）

$$J=\int_{e_0}^{e_f}[c_1(V)r+c_0(V)]de$$

$$\downarrow$$

$$J=\sum_{i=0}^{i=N}\Delta e[c_1(V_i)r_i+c_0(V_i)]$$

$$=\Delta e[c_1(V_0)\quad\ldots\quad c_1(V_N)][r_0\quad\ldots\quad r_N]^T+\sum_{i=0}^{i=N}c_0(V_i)\Delta e$$

$$=c^T z+d$$

注意： $z=[r_0\ \theta_0\ \phi_0\ \gamma_0\ \psi_0\ u_{10}\ u_{20}\ \ldots\ r_N\ \theta_N\ \phi_N\ \gamma_N\ \psi_N\ u_{1N}\ u_{2N}]$

2. 凸化处理与离散化

步骤二：离散化（线性动力学方程）

$$\dot{x} = A(x^{(k)})x + B(x^{(k)})u + w(x^{(k)})$$

梯形法：
$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta e} = \frac{1}{2}[A(x_i^{(k)})x_i + B(x_i^{(k)})u_i + w(x_i^{(k)}) + A(x_{i-1}^{(k)})x_{i-1} + B(x_{i-1}^{(k)})u_{i-1} + w(x_{i-1}^{(k)})]$$

$$\downarrow$$

$$H_{i-1}x_{i-1} + H_i x_i + G_{i-1}u_{i-1} + G_i u_i = F_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

$$H_{i-1} = I + (\Delta e / 2)A(x_{i-1}^{(k)}),\ H_i = -I + (\Delta e / 2)A(x_i^{(k)}),\ G_{i-1} = (\Delta e / 2)B(x_{i-1}^{(k)}),$$

$$G_i = (\Delta e / 2)B(x_i^{(k)}),\ F_i = -(\Delta e / 2)[w(x_{i-1}^{(k)}) + w(x_i^{(k)})]$$

2. 凸化处理与离散化

步骤二：离散化（状态过程约束）

$$H_{i-1}x_{i-1}+H_i x_i+G_{i-1}u_{i-1}+G_iu_i=F_i,\ \ i=1,\dots,N$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} i=1 & H_0x_0+H_1x_1+G_0u_0+G_1u_1=F_1 \\ i=2 & H_1x_1+H_2x_2+G_1u_1+G_1u_2=F_2 \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad\vdots \\ i=N & H_{N-1}x_{N-1}+H_N x_N+G_{N-1}u_{N-1}+G_Nu_N=F_N \end{array}}$$

$$\boxed{Mz=b}$$

步骤二：离散化（状态过程约束）

$$|x-x^{(k)}|\le\delta \longrightarrow |x_i-x_i^{(k)}|\le\delta,\ \ i=0,1,\ldots,N$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &x_i-x_i^{(k)}\le\delta, &i=0,1,\ldots,N\\ &x_i-x_i^{(k)}\ge-\delta, &i=0,1,\ldots,N\end{aligned}}$$

$$r\ge\bar{l}(V) \longrightarrow \boxed{r_i\ge\bar{l}(V_i),\ \ i=0,1,\ldots,N}$$

2. 凸化处理与离散化

步骤二：离散化（控制过程约束与终端约束）

$$u_1^2 + u_2^2 \le 1 \longrightarrow \boxed{u_{1i}^2 + u_{2i}^2 \le 1,\ \ i = 0,1,\ldots,N}$$

$$u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_{1i} \le u_{1\max},\ \ i = 0,1,\ldots,N \\ u_{1i} \ge u_{1\min},\ \ i = 0,1,\ldots,N \end{array}}$$

$$x(e_f) = x_f^* \longrightarrow \boxed{x_N = x_f^*}$$

离散化后的优化问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & J = c^T z + d \\
\text{s.t.}\ & M z = b \\
& x_i - x_i^{(k)} \le \delta,\ x_i - x_i^{(k)} \ge -\delta,\ \ i = 0,1,\ldots,N \\
& r_i \ge \bar{l}\,(V_i),\ \ i = 0,1,\ldots,N \\
& u_{1i}^2 + u_{2i}^2 \le 1,\ \ i = 0,1,\ldots,N \\
& u_{1i} \le u_{1\max},\ u_{1i} \ge u_{1\min},\ \ i = 0,1,\ldots,N \\
& x_N = x_f^*
\end{aligned}
$$

二阶锥优化问题

若该问题**有解**，原始对偶内点**保证**在多项式时间内找到**全局最优解**

$$z = [r_0\ \theta_0\ \phi_0\ \gamma_0\ \psi_0\ u_{10}\ u_{20}\ \ \ldots\ \ r_N\ \theta_N\ \phi_N\ \gamma_N\ \psi_N\ u_{1N}\ u_{2N}]$$

2. 凸化处理与离散化

原优化问题
（非凸）

⟹

二阶锥优化子问题
二阶锥优化子问题
⋮
二阶锥优化子问题

最优控制理论

用于分析迭代求解二阶锥优化子问题的收敛解是否为原问题的解

数值优化

用于设计数值算法高效求解每一个二阶锥优化子问题

内容概要

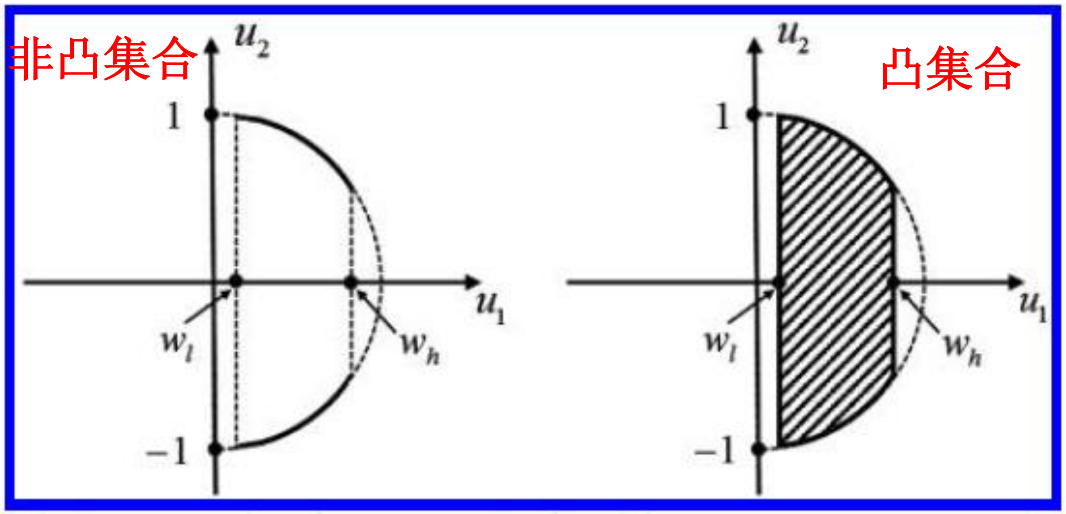
- 高超声速再入问题描述
- 凸化处理与离散化
- **等价性分析**
- 数值结果

3. 等价性分析

以下转换过程是否有效?

$$\begin{array}{l} u_1^2 + u_2^2 = 1 \\ u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max} \end{array} \xrightarrow{\text{松弛}} \begin{array}{l} u_1^2 + u_2^2 \le 1 \\ u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max} \end{array}$$

二阶锥约束

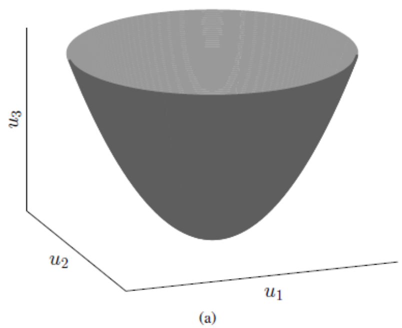


若使用**以下目标函数**，则能证明$(u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 = 1$，即**转换等价**

$$J = \int_{e_0}^{e_f} \frac{1}{DV} de + \int_{e_0}^{e_f} \psi de$$

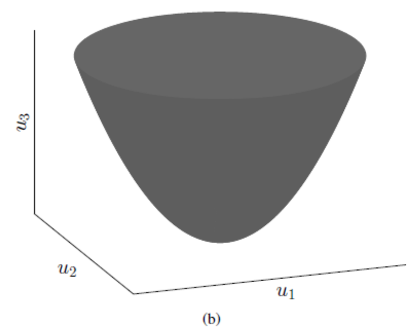
调节项

调节项的作用举例：

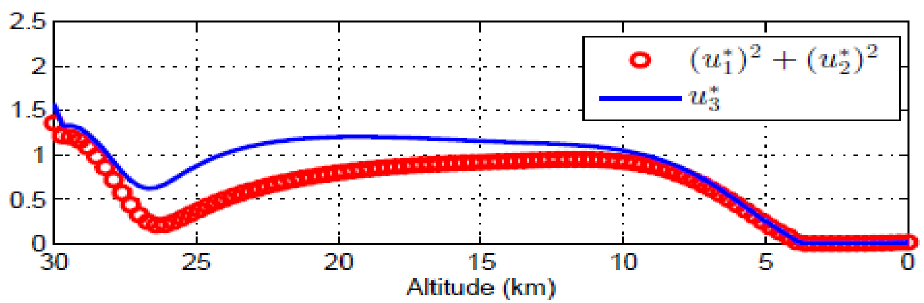


$$u_1^2+u_2^2=u_3$$
$$0\le u_3\le a$$

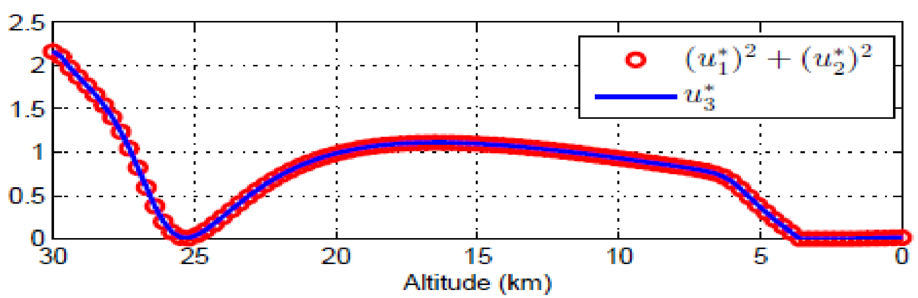
$$\xrightarrow{\text{松弛}}$$



$$u_1^2+u_2^2\le u_3$$
$$0\le u_3\le a$$



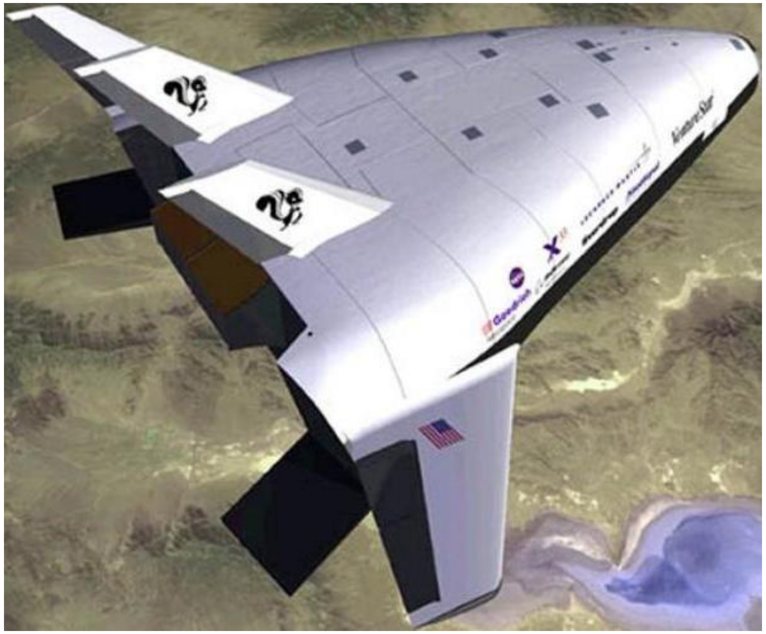
$$J=-V(t_f)$$



$$J=-V(t_f)+\underbrace{c_\psi\int_{\tau_0}^{\tau_f}\psi\,\mathrm{d}\tau}_{\text{调节项}}$$

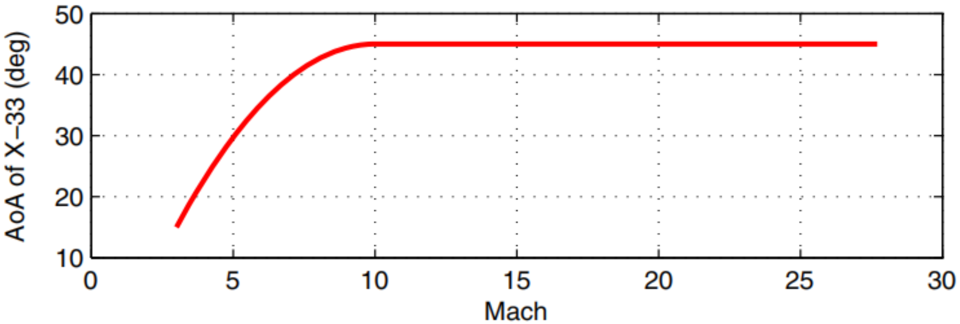
内容概要

- 高超声速再入问题描述
- 凸化处理与离散化
- 等价性分析
- **数值结果**



X-33飞行器参数：

- 重量：37362.9 kg
- 参考面积：149.388 m^2
- 升阻比：≈ 0.8



约束：

1. 热流≤800 kW/m^2
2. 动压≤14,364 N/m^2
3. 过载≤2.5g_0
4. 滚转角∈[15, 165] deg

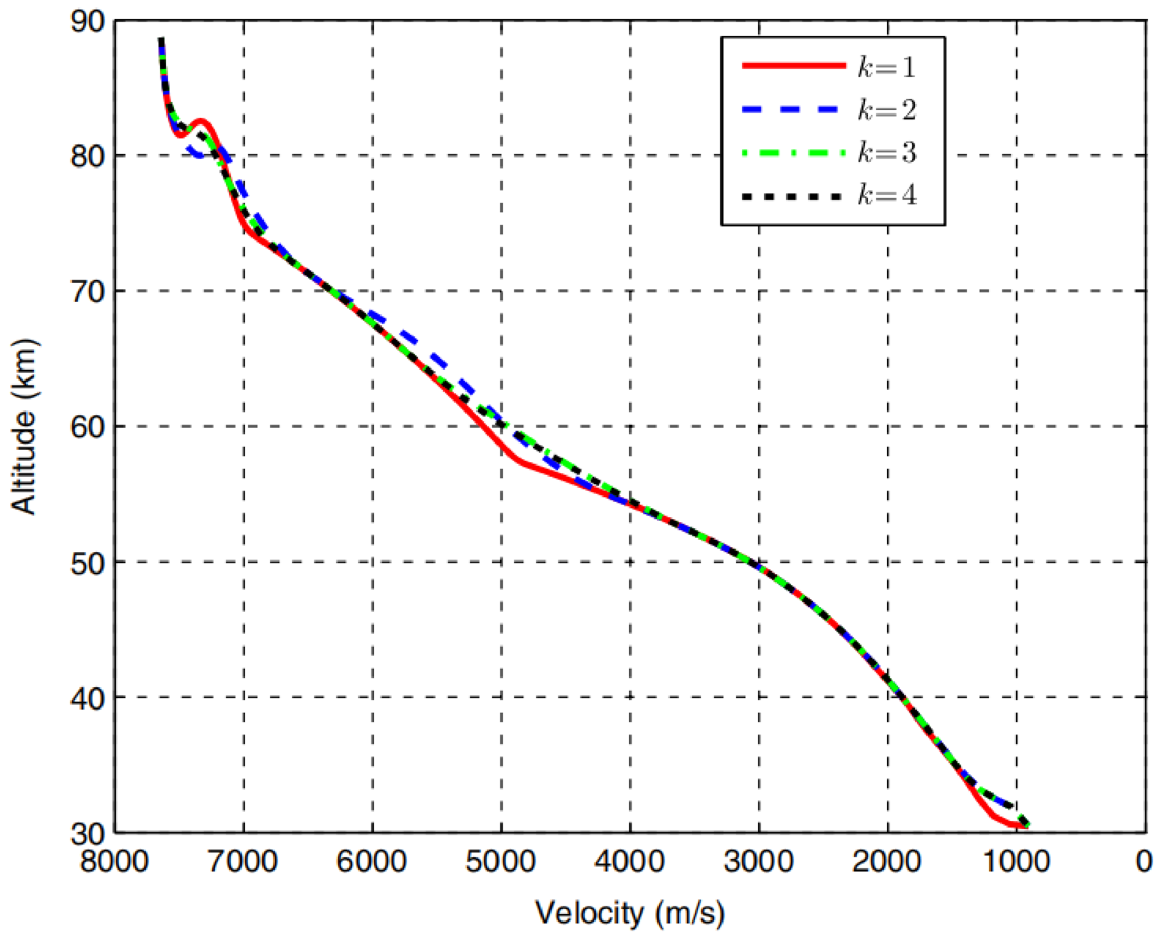
优化目标：最小化飞行时间

Table 1 Initial and terminal conditions for X-33

States	r, km	V, m/s	γ, deg	θ, °	ϕ, °	ψ, deg
$\boldsymbol{x}_0$	121.9	7626	−1.2493	237	−25	45
$\boldsymbol{x}_f$	30.48	908.15	[−6, 0]	279	28.61	90

4. 数值结果

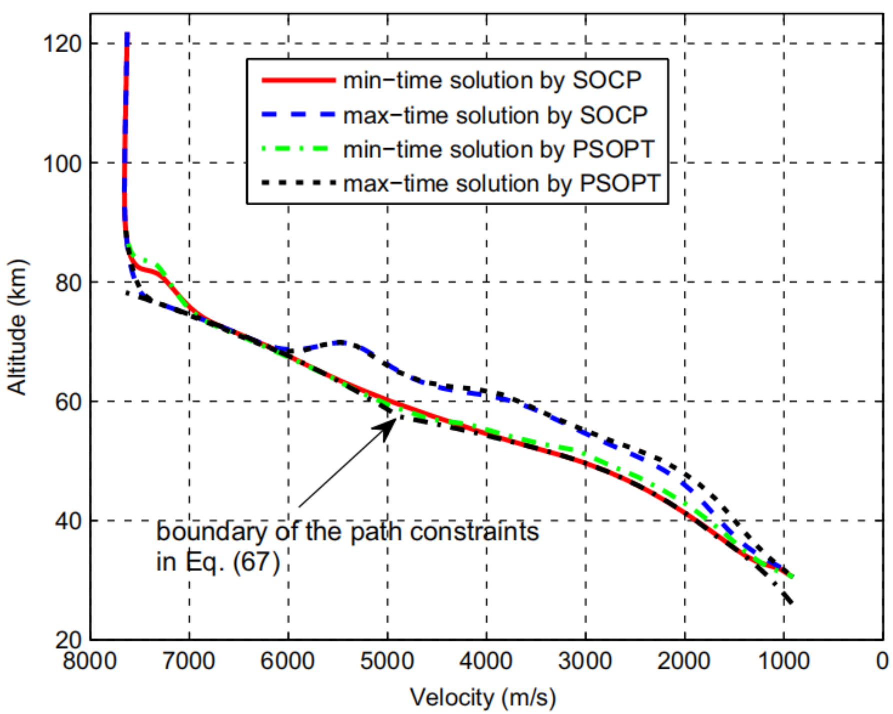
迭代收敛过程：求解4个二阶锥优化子问题后收敛



注意：在该再入轨迹优化问题中，无法理论证明序列凸优化的收敛性

4. 数值结果

序列二阶锥优化得到的解 VS 基于伪普法的PSOPT软件得到的解



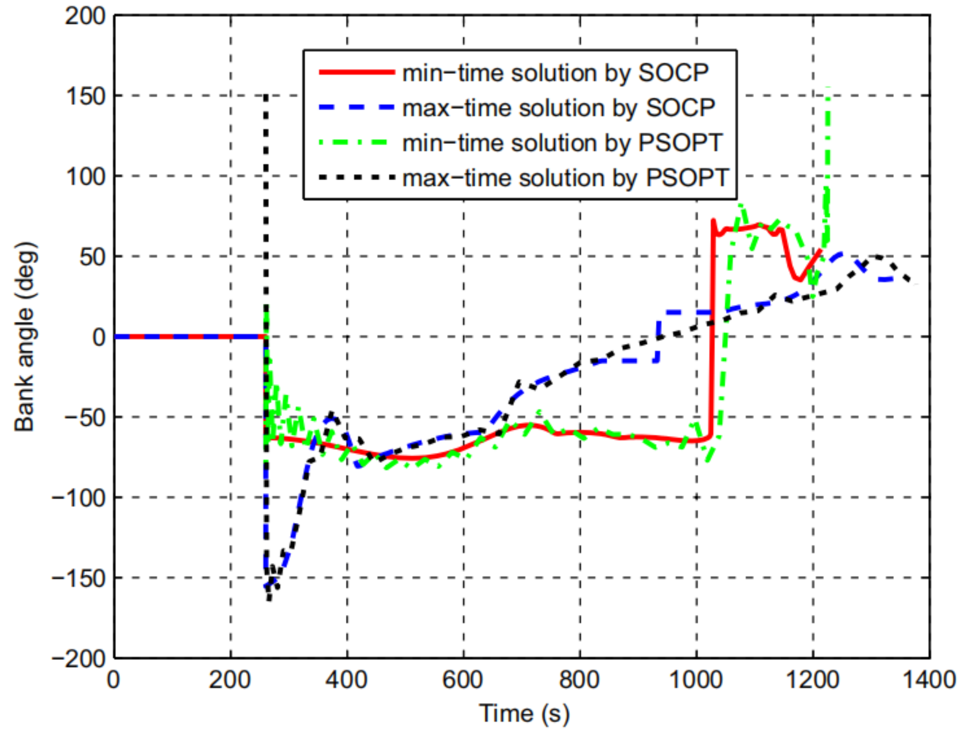
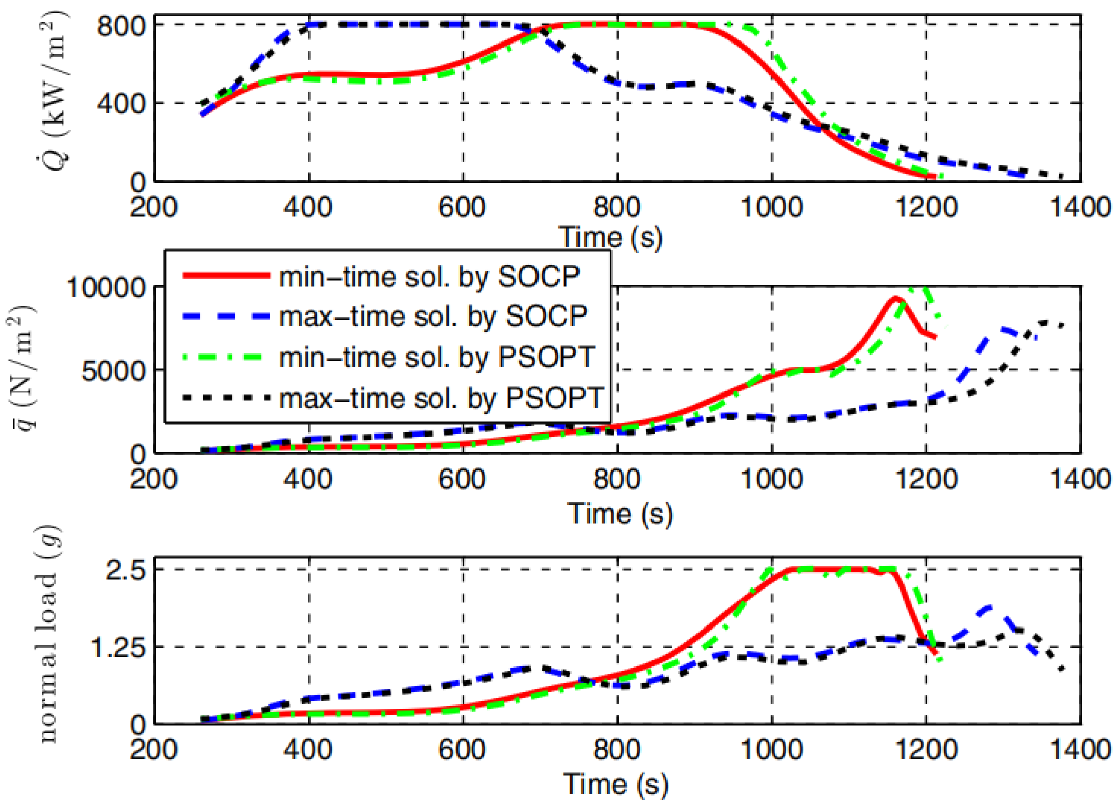


Table 2 Comparison of the minimum- and maximum-time solutions for X33

Solution	Time of flight, s	CPU time, s
Minimum-time solution by SOCP	1214	0.84
Minimum-time solution by PSOPT	1225	46.26
Maximum-time solution by SOCP	1344	1.54
Maximum-time solution by PSOPT	1377	13.87

优化结果一致，但计算效率差别大



优化结果显示，所有过程约束均满足

更多结果可参考以下文献：

Xinfu Liu, Zuojun Shen, and Ping Lu, "Entry Trajectory Optimization by Second-Order Cone Programming," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 2, pp. 227-241, 2016.