序列二阶锥优化与凸化处理

刘新福

内容概要

- 什么是序列二阶锥优化
- 常见凸化处理技巧
- 序列二阶锥优化的收敛性

内容概要

- 什么是序列二阶锥优化
- 常见凸化处理技巧
- 序列二阶锥优化的收敛性

1. 什么是序列二阶锥优化

➢ 二阶锥优化的标准形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& x \in K
\end{aligned}
$$

约束 $x \in K$ 为锥约束， K 可为线性锥、二次锥、或旋转二次锥的组合

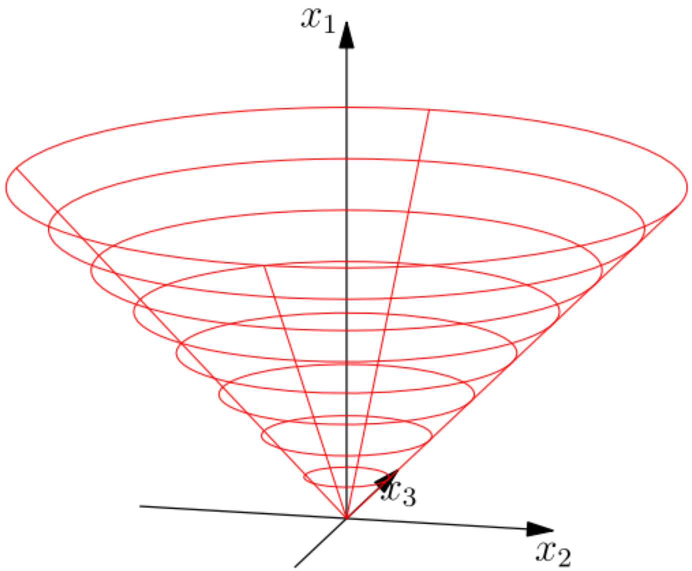
线性锥 $$K_+ = \{x \in R^n \mid x \geq 0\}$$

二次锥 $$K_q = \{x \in R^n \mid x_1^2 \geq x_2^2 + \ldots + x_n^2,\ x_1 \geq 0\}$$

旋转二次锥 $$K_r = \{x \in R^n \mid 2x_1 x_2 \geq x_3^2 + \ldots + x_n^2,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

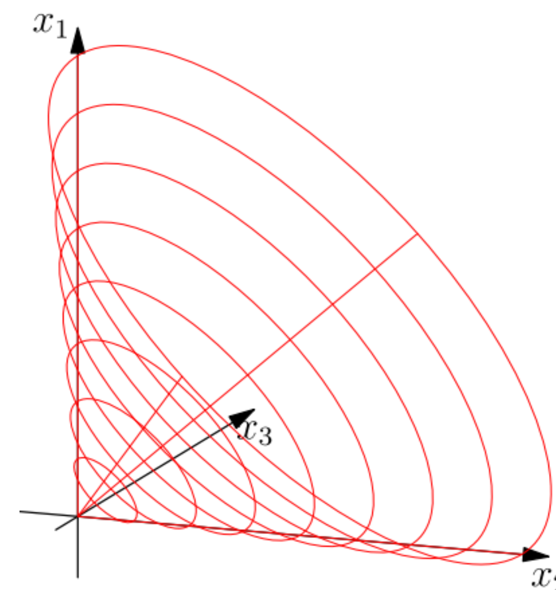
$$\boxed{K = K^{n_1} \times K^{n_2} \times \cdots K^{n_r}}$$

1. 什么是序列二阶锥优化



二次锥 $x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$

$$(x_1, x_2, x_3) \in K_q^{\ 3}$$



旋转二次锥 $2x_1x_2 \geq x_3^2, x_1, x_2 \geq 0$

$$(x_1, x_2, x_3) \in K_r^{\ 3}$$

$$|x| \leq t \quad \Leftrightarrow \quad (t, x) \in K_q^{\ 2}$$

$$\|x\| \leq t \quad \Leftrightarrow \quad (t, x) \in K_q^{\ n+1}$$

$$\|x\| \leq 2st,\ s \geq 0,\ t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (s, t, x) \in K_r^{\ n+2}$$

1. 什么是序列二阶锥优化

➢ 二阶锥优化的一般形式

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Fx = g \\ & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T (x^+ - x^-) \\ \text{s.t.} \quad & F(x^+ - x^-) = g \\ & s = A_i (x^+ - x^-) + b_i \\ & t = c_i^T (x^+ - x^-) + d_i \\ & \|s\|_2 \le t, \ \ x^+, x^-, t \ge 0 \end{aligned}$$

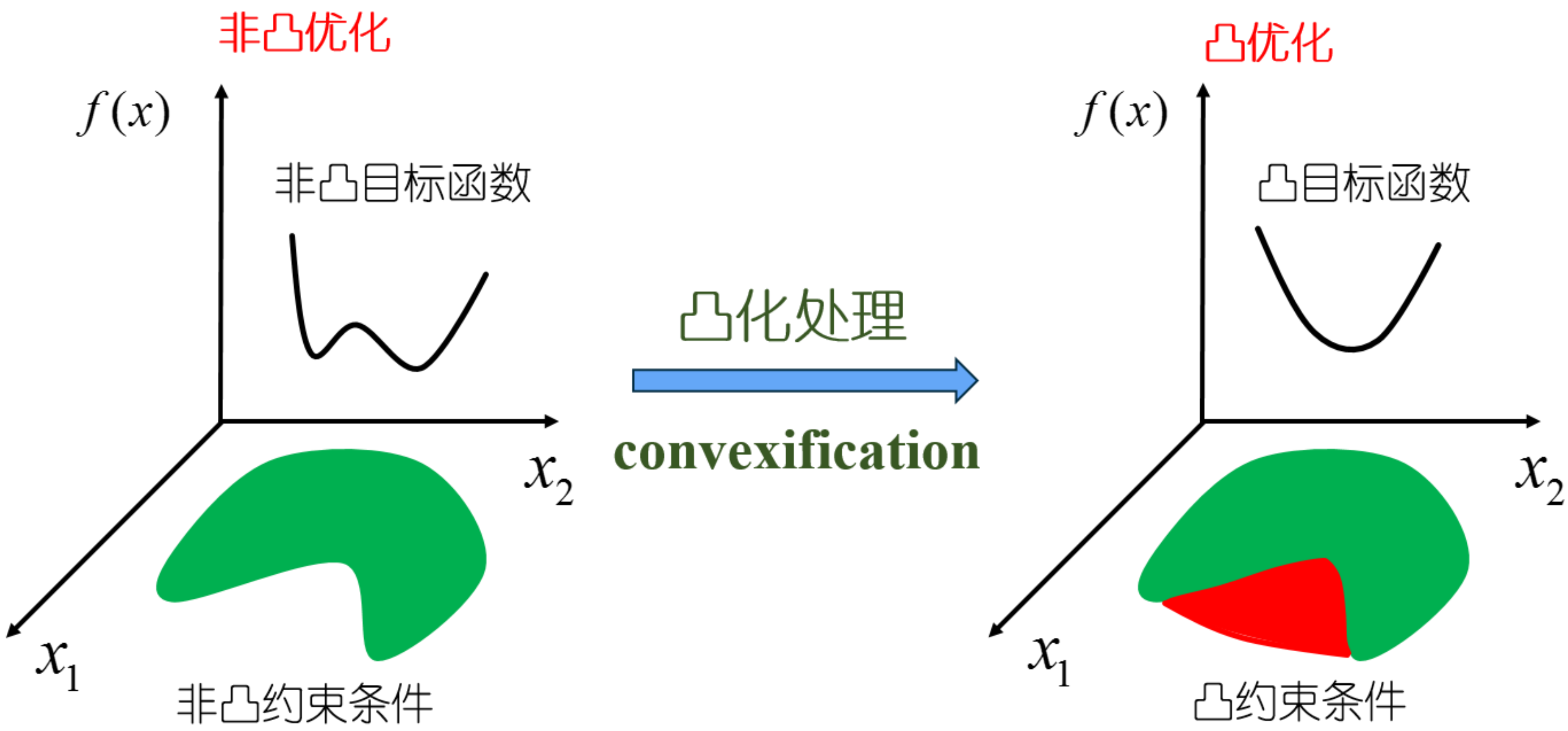
$$\|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i \iff (c_i^T x + d_i,\ A_i x + b_i) \in K_q^{m+1}$$

—— 称为二阶锥约束

判断$(||z||_2)^2 \le t^2, t \ge 0$ 是否为二阶锥约束？

判断 $(||z||_2)^2 \le t$是否为二阶锥约束？

➢ 如何快速可靠求解非凸优化问题？



➢ 序列二阶锥优化

原优化问题
（非凸）

迭代求解

二阶锥优化子问题

二阶锥优化子问题

⋮

二阶锥优化子问题

1. 什么是序列二阶锥优化

➢ 序列二阶锥优化

$$
\begin{aligned}
P^{(k)}:\quad & \min \quad c^T x \\
& \text{s.t.} \quad A(x^{(k)})x = b(x^{(k)}) \\
& \qquad\quad x \in K
\end{aligned}
$$

迭代求解二阶锥优化问题的**算法**：

- 设定 $k=0$，选择合适的 $x^{(0)}$。
- 在第 $(k+1)$ 次迭代中，利用 $x^{(k)}$ 计算 $P^{(k)}$ 中的参数，然后利用原始对偶内点法求解 $P^{(k)}$，得到解 $x^{(k+1)}$。
- 判断收敛条件是否满足： $\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \epsilon$

  若满足，转到下一步；否则，$x^{(k)} \leftarrow x^{(k+1)}$ 且 $k \leftarrow k+1$，返回上一步。
- $x^{(k+1)}$ 为收敛解，终止。

内容概要

- 什么是序列二阶锥优化
- **常见凸化处理技巧**
- 序列二阶锥优化的收敛性

➢ 线性化

$$\underbrace{f(x,u)}_{\text{非线性}} \approx \underbrace{f(x^k,u^k)+\frac{\partial f(x^k,u^k)}{\partial x}(x-x^k)+\frac{\partial f(x^k,u^k)}{\partial u}(u-u^k)}_{\text{线性}}$$

非线性 ⇨ 线性

➢ 连续近似

$$\dot{x}=A(x)x+B(x)u$$

非线性动力学方程

⇩

$$\dot{x}=A(x^k)x+B(x^k)u$$

线性动力学方程

2. 常见凸化处理技巧

➢ 线性化与连续近似的结合

$$x' = f(x,u)$$

$$\downarrow$$

$$x' = f(x) + B(x)u$$

$$\downarrow$$

$$x' = \underbrace{f(x^k) + \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}(x - x^k)}_{\text{对}f(x)\text{进行线性化}} + \underbrace{B(x^k)u}_{\text{用}B(x^k)\text{近似}B(x)}$$

为什么不对 $B(x)u$ 进行线性化？

目的是使得线性动力学方程不为 u^k 的函数，以便于迭代求解过程的收敛性

2. 常见凸化处理技巧

➢ 变量重定义及转化

T 为推力矢量，m为质量，重新定义控制量 $\tau := \dfrac{T}{m}$

σ 为飞行器滚转角大小，重新定义控制量 $\begin{cases} u_1 := \cos\sigma \\ u_2 := \sin\sigma \end{cases}$

➢ 目标函数或约束条件等价转化

$$\min \ |x - x^*| \longrightarrow \begin{cases} \min \ \ \eta \\ \text{s.t.} \ \ -\eta \le x - x^* \le \eta \end{cases}$$

$$g(r, V) \le 0 \longrightarrow r \ge f(V^k)$$

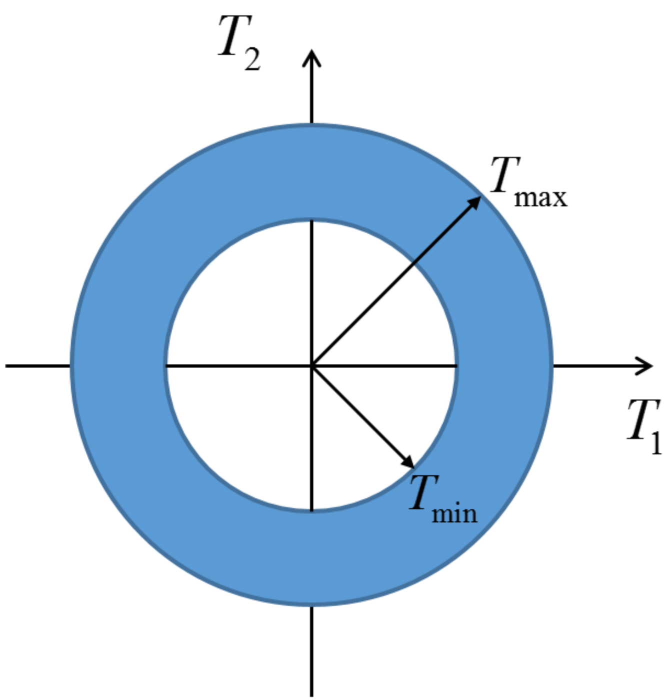
➤ 松弛（Relaxation）

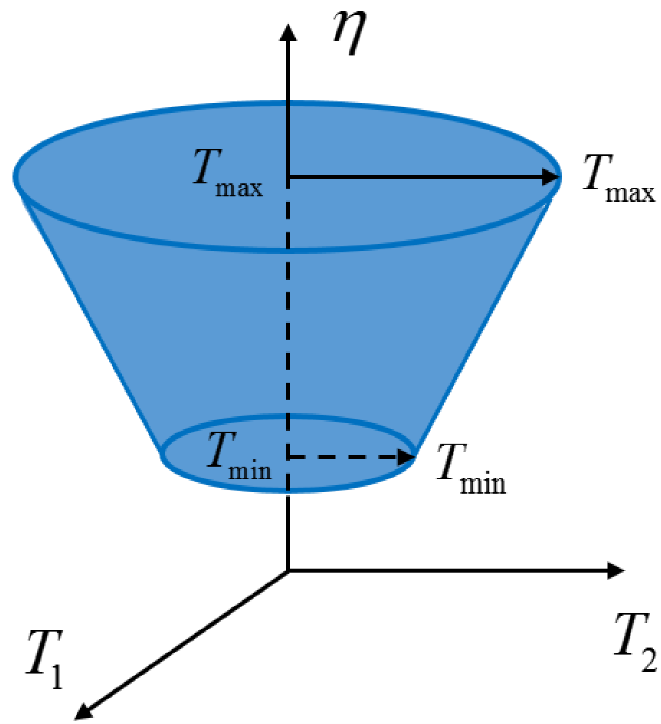
$$T_{\min} \le \| T \| \le T_{\max}$$

非凸约束

$$\begin{cases} \| T \| \le \eta \\ T_{\min} \le \eta \le T_{\max} \end{cases}$$

凸约束

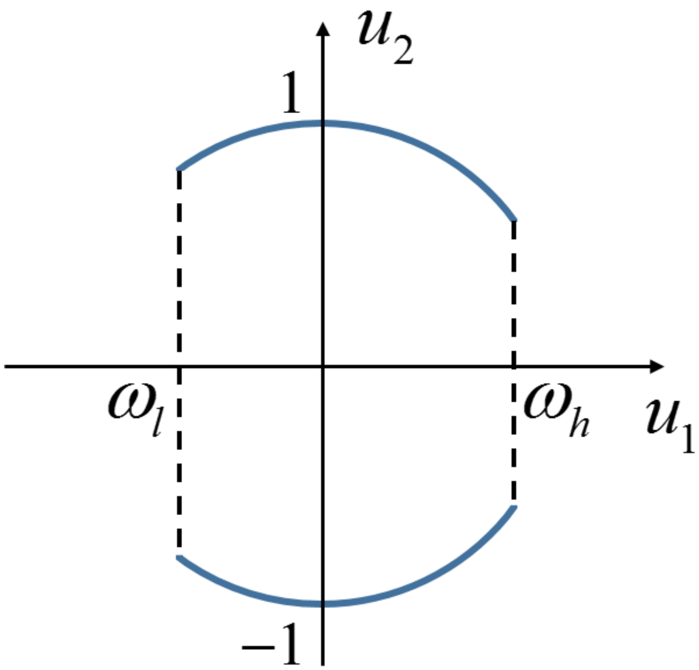


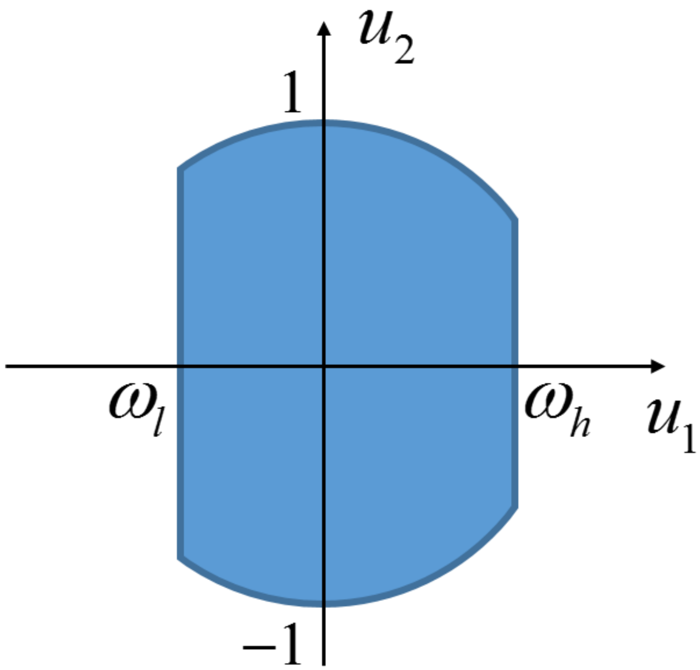


2. 常见凸化处理技巧

➢ 松弛（Relaxation）

非凸约束
$$\begin{cases} u_1^2+u_2^2=1 \\ \omega_l \le u_1 \le \omega_h \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1^2+u_2^2 \le 1 \\ \omega_l \le u_1 \le \omega_h \end{cases}$$
凸约束





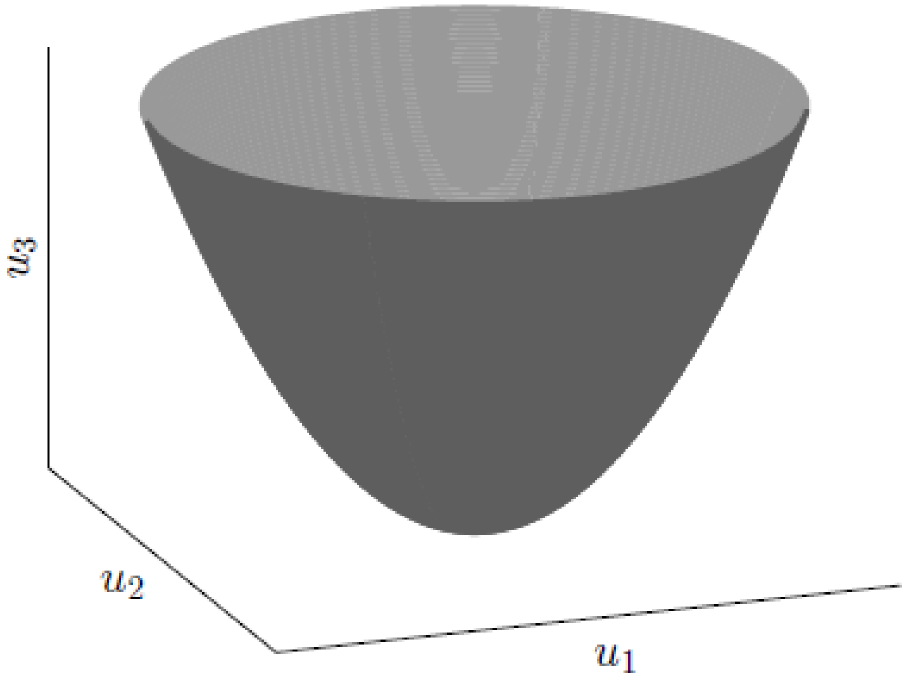
新建文本文

➢ 松弛（Relaxation）

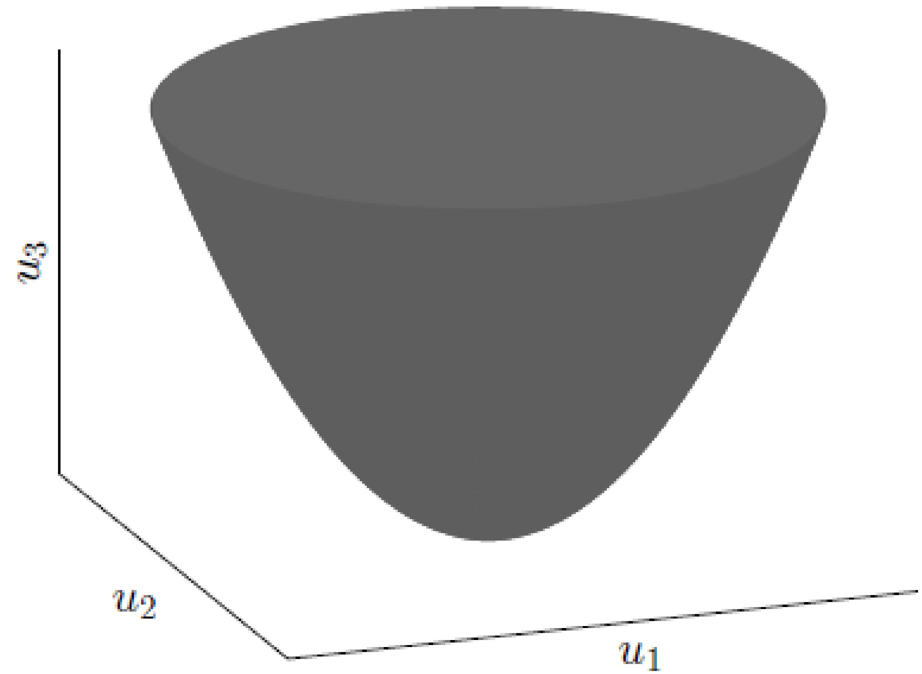
非凸约束

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = u_3 \\ 0 \le u_3 \le \bar{\eta}^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 \le u_3 \\ 0 \le u_3 \le \bar{\eta}^2 \end{cases}$$

凸约束



(a)



(b)

➢ 松弛（Relaxation）

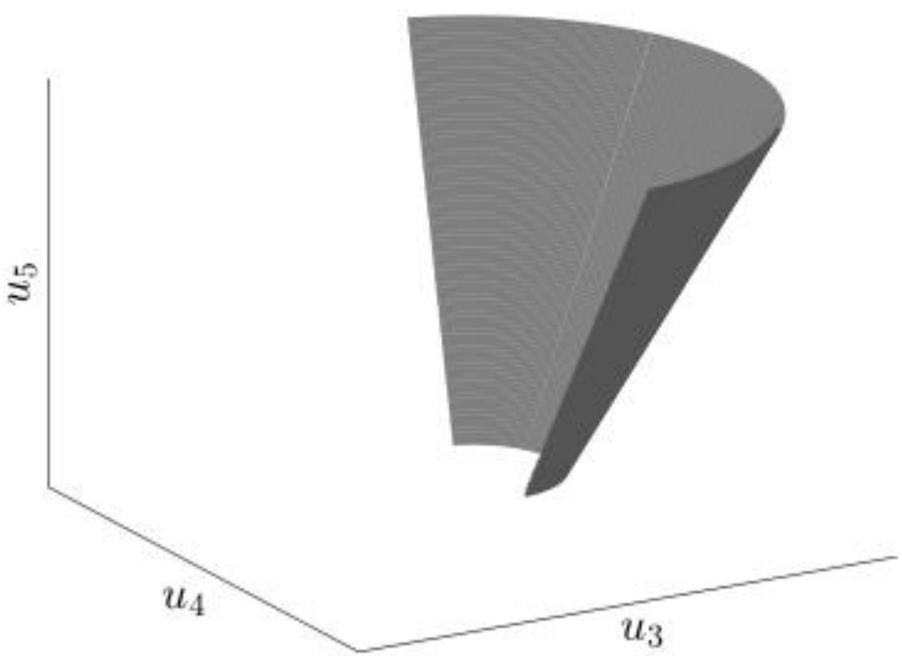
非凸约束

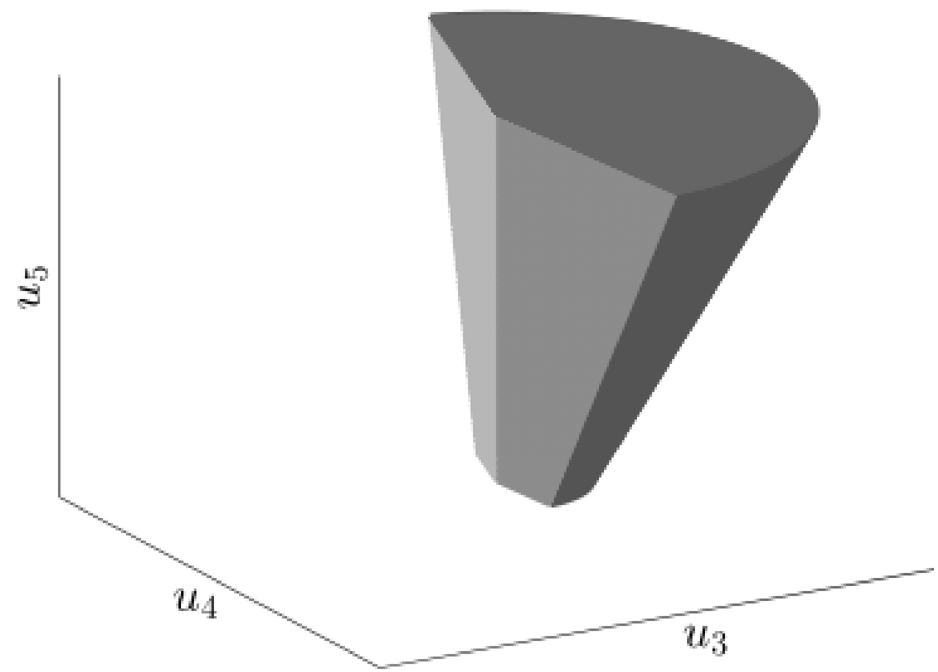
$$u_3^2 + u_4^2 = u_5^2$$
$$a \le u_5 \le b$$
$$c \le u_4 / u_3 \le d$$

$$\longrightarrow$$

$$u_3^2 + u_4^2 \le u_5^2$$
$$a \le u_5 \le b$$
$$c \le u_4 / u_3 \le d$$

凸约束





➢ 识别凸约束--等价变换

$$|t| \le \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad (1/2, x, t) \in K_r^3$$ 旋转二次锥，凸

$$t \ge \frac{1}{x}, x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2xt \ge \sqrt{2}^2, x > 0 \Leftrightarrow \left(x, t, \sqrt{2}\right) \in K_r^3$$

$$t \ge x^{3/2}, x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}t \ge x^2, x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2st \ge x^2 \text{ and } \sqrt{x} \ge 2s, x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2st \ge x^2 \text{ and } 2 * 1/8 * x \ge s^2, x > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(s, t, x) \in K_r^3 \text{ and } (1/8, x, s) \in K_r^3$$

2. 常见凸化处理技巧

$$\sqrt{x_1 x_2} \geq t, x_1, x_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x_1, x_2, \sqrt{2}t\right) \in K_r^3$$

$$\frac{1}{x^2} \leq t, x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq tx^2, x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2ts, x > 0$$

$$2s \leq x^2$$

$$\Updownarrow$$

$(t, s, 1) \in K_r^3$ 旋转二次锥

$2s - x^2 \leq 0$ 凹函数≤ 0?

$$\frac{1}{x^2} \leq t, x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq tx^2, x > 0 \Leftrightarrow 1 \leq 4s^2x^2, x > 0$$

$$4s^2 \leq t$$

$$\Updownarrow$$

$(s, x, 1) \in K_r^3$ 旋转二次锥

$(1/8, t, s) \in K_r^3$ 旋转二次锥

内容概要

- 什么是序列二阶锥优化
- 常见凸化处理技巧
- **序列二阶锥优化的收敛性**

4. 序列二阶锥优化的收敛性

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A(x^{(k)})x = b(x^{(k)}) \\ & x \in K \end{aligned}$$

$x^{(k)}$ 为上一次迭代中得到的解

$x^{(k+1)}$ 为本次迭代中得到的解

迭代求解以上二阶锥优化问题得到的解的序列

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$$

可能不收敛

即，以下收敛判据无法满足

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \epsilon$$

4. 序列二阶锥优化的收敛性

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A(x^{(k)})x = b(x^{(k)}) \\ & x \in K \end{aligned}$$

本次迭代中得到的解$x^{(k+1)}$与上次迭代中得到解 $x^{(k)}$ 的差可定义为搜索方向

$$p := x^{(k+1)} - x^{(k)}$$

若序列二阶锥优化无法收敛，可能有两方面的原因：

凸化处理过程欠妥

迭代过程步长选择不合理

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + 1 \cdot p$$

单位步长

如何提高序列二阶锥优化的收敛性？

如何合理选择步长？

定义搜索方向： $p := x^{(k+1)} - x^{(k)}$

确定合适步长： $\hat{x}^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha p$

步长

当且仅当 $\alpha = 1$ 时， $\hat{x}^{(k+1)} = x^{(k+1)}$.

利用 $\hat{x}^{(k+1)}$ （而非 $x^{(k+1)}$ ）更新下一次迭代过程中参数 A 与 b.

选择合适的Merit函数 $f(x)$，步长的选择应使该函数值在每次迭代中减小足够的值，如

$$f(x^{(k)} + \alpha p) \le f(x^{(k)}) + c\alpha[\nabla f(x^{(k)})]^T p$$

如何更好的凸化？

仁者见仁、智者见智

仍是研究热点与难点