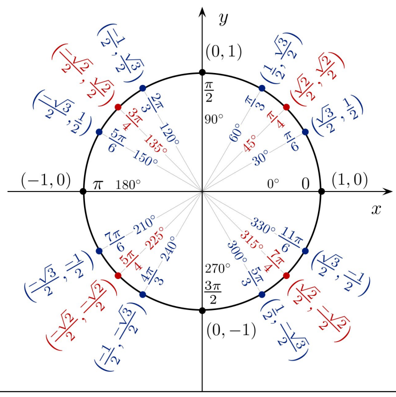
1 Komplexe Zahlen

Darstellungsarten	$z = x + iy = re^{i(\varphi+2\pi k)} = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))$ $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}} \qquad 0 \le k \le n-1 \qquad (\sqrt[n]{r} = r^{\frac{1}{n}})$ $z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} \qquad z^w = e^{log(z)^w} = e^{w(log\lvert z\rvert + i\cdot arg(z))}$ $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \qquad sgn(y) = sgn(\varphi)$ angle rel. to x-axis
Kartesisch $\rightarrow$ Polar	$r = \lvert z\rvert, \varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & \text{für } y \ge 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}) & \text{für } y < 0 \end{cases} = \arctan(\frac{y}{x}) \begin{cases} +\pi & \text{im 2. Quadrant} \\ -\pi & \text{im 3. Quadrant} \end{cases}$
Polar $\rightarrow$ Kartesisch	$x = r\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi)$
Nützliche Gleichungen	$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \qquad \lvert z\rvert^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$ $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \qquad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ $\lvert z+w\rvert^2 + \lvert z-w\rvert^2 = 2(\lvert z\rvert^2 + \lvert w\rvert^2) \qquad x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(z^2 + \overline{z}^2)$ $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ insb. $\overline{z^n} = \overline{z}^n \qquad \overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert\lvert w\rvert \qquad \frac{1}{i} = -i \quad i^k = (-i)^{-k}$ $z^2 - \overline{z}^2 = 4ixy \qquad z^2 + \overline{z}^2 = 2x^2 - 2y^2$ $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ Polynom mit reellen Koeffizienten
Trigonometrische Fkt.	$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$ $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \qquad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ $\sinh(z) = -i\sin(iz) \qquad \cosh(z) = \cos(iz)$ $\sin(z) = i\sinh(-iz) \qquad \cos(z) = \cosh(iz)$
Logarithmus	$\log(z) = \ln(\lvert z\rvert) + i\cdot\arg(z) \Leftrightarrow \arg(z) \in \mathbb{R} = \varphi + 2\pi k$ $\mathrm{Log}(z) = \ln(\lvert z\rvert) + i\cdot\mathrm{Arg}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z) \in [-\pi, \pi[$ $\mathrm{Log}(z_1\cdot z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) \rightarrow \mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \pm 2\pi$ $a^z = \{w = e^{z\cdot u} : u \in log(a)\}$ p.v. $a^z = e^{zLog(a)} \qquad e^{Log(a)} = a$ z.B. $i^i = e^{ilog(i)} = e^{-(\pi/2+2\pi k)}$
Spezielle Zahlenmengen	$\mathbb{C}^{-*} = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > 0, -\pi < Arg(z) < \pi\}$
Mitternachtsformel	$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $z^2 + pz + q = z^2 - (z_1 + z_2) + z_1 * z_2$ $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n(z - z_1)...(z - z_n)$
Dreiecksungleichung	$\lvert x - y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \quad \lvert x - y\rvert \ge \lvert\, \lvert x\rvert - \lvert y\rvert\, \rvert$

Wichtige Winkel

φ		Sinus	Kosinus	Tangens
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$(\rightarrow +\infty)$
180°	π	0	-1	0
270°	$3\pi/2$	-1	0	$(\rightarrow -\infty)$



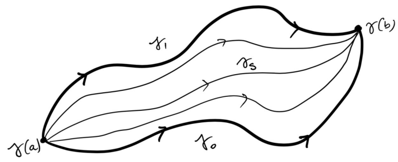
Kreisgleichung	$\frac{\lvert z-z_1\rvert}{\lvert z-z_0\rvert} = r \rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
	$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \qquad (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$ $(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \qquad (x+iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3)$

2 Komplexe Funktionen

Komplexe Funktionen	$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), u = \mathrm{Re}(f(z)), v = \mathrm{Im}(f(z))$	
Analytische Funktionen	$u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$	$f_x(z_0) + if_y(z_0) = 0$
	$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$	$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$
	$r \cdot u_r = v_\phi$ &$u_\phi = -r \cdot v_r$	
Wichtige Ableitungen	$\cosh(x)' = \sinh(x)$	$\sinh(x)' = \cosh(x)$
	$\arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}$	$\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Wichtige Funktions-Darstellungen	$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$	
	$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$	
	$e^z = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$	
	$\sin(\pi z) = -\sin(\pi(2n+1+z))$	
Stetigkeit	$\forall w \in \mathbb{C}$: $\lim\limits_{t\to 0} f(z_0 + tw) = f(z_0)$ und $\lim\limits_{r\to r_0} z = re^{i\phi}$ existiert unabhängig von ϕ	
Holomorphie (ℂ-Differenzierbarkeit)	i) f holomorph in $z_0 \Leftrightarrow \exists u_x, u_y, v_x, v_y$ in $U(z_0)$, stetig und erfüllen CRG in z_0	
	ii) f ist eine ganze Funktion, falls f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph $\Leftrightarrow f \in C^\infty$	
	Sei $f, g : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorph für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.	
	i) Falls $\mathrm{Re}(f) = u$ konstant $\Rightarrow f$ konstant.$(0 = u_x = u_y = -v_x = v_y)$	
	ii) Sei $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$. Dann gilt $f = g + ic$ wobei $c \in \mathbb{R}$.	
	iii) Falls $\overline{f} : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow f$ konstant.$(u_x = \pm v_y, u_y = \mp v_x)$	
	iv) Falls $\lvert f(z)\rvert$ konstant$\Rightarrow f(z)$ konstant.	
Beispiele	nicht-holomorph	
	· $\overline{z}, \lvert z\rvert, e^x + e^{iy}, \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$	
	· $\mathrm{Log}(z)$ auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$	

3 Linienintegrale, Satz und Integralformel von Cauchy

Linienintegrale	$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(z))dz + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(z))dz$	
	$\to$ unabhängig von Parametrisierung, falls gleicher Anfangs- und Endpunkt	
Eigenschaften	$\gamma^{-1} = \gamma(1-t)$	
	Verkettung: $\gamma(1) = \delta(0)$. $\gamma * \delta(t) := \begin{cases} y(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$	
	Cauchy Schwarz: $\left\lvert \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt \right\rvert \leq \int\limits_a^b \lvert f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\rvert\, dt$	
	Standardabschätzung: Sei $L(\gamma) := \int\limits_a^b \lvert\dot{\gamma}(t)\rvert dt$ die Länge vom Pfad γ. Wenn $\lvert f(z)\rvert \leq M$	
	für jedes $z \in U$ gilt, dann folgt $\left\lvert \int\limits_\gamma f(z)dz \right\rvert \leq M \cdot L$ wobei $M = \max\limits_{t\in[a,b]} \lvert f(\gamma(t))\rvert < \infty$	
Pfad	Ein Pfad ist *einfach*, falls $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$. (Pfad ohne Selbstschnittpunkte)	
Parametrisierungen	Strecke von z_0 nach z_1:	$\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot t, \quad t \in [0, 1]$
		$= (1-t) \cdot z_0 + t \cdot z_1, \quad t \in [0, 1]$
		$= z_0 + \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} \cdot (t - t_0), \quad t \in [t_0, t_1]$
	Kreis um z_0 mit Radius r:	$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$
	Kreis um z_0 im Uhrzeigersinn:	$\gamma(t) = z_0 + re^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi]$
	Funktion $y = f(x)$:	$\gamma(t) = f(t)$

Homotopie	Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ zwei Pfade mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \alpha \in \mathbb{C}$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \beta \in \mathbb{C}$. Man sagt γ_0 ist *homotop* zu γ_1, falls i) $H : [0,1] \times [a,b] \to U$ stückweise **stetig** ii) $\forall t \in [a,b] : \begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \\ H(1,t) = \gamma_1(t) \end{cases}$  iii) $\forall s \in [a,b] : \begin{cases} H(s,0) = \alpha \\ H(s,1) = \beta \end{cases}$ $H(s,t) = (1-s) \cdot \gamma_0(t) + s \cdot \gamma_1(t)$
Wegzusammenhängend	Für je 2 Punkte in U gibt es einen Verbindungspfad. (Menge nicht disjunkt) Einfach w.z.h, wenn w.z.h und $\forall \alpha, \beta \in U$ alle Pfade von α nach β *homotop* zueinander sind. (U enthält keine Löcher) nicht e.z.h.: $\mathbb{R}^n$ ohne eine Teilmenge in $\mathbb{R}^{n \geq n-2}$ z.B. punktierte Ebenen in $\mathbb{R}^2$, geschlitzte Ebenen in $\mathbb{R}^3$, Kreisringe
Mittelwertseigenschaft: Satz von Liouville: Maximumprinzip:	Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch (holomorph): $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi$ Jeder Punkt von u, v ist ein Mittelwert von der umgebenden Kreisscheibe $B(z_0, r)$. $\lvert f(z) \rvert \leq M \quad \forall z \Rightarrow f(z) = \text{konst.}(=f(z_0) = \text{M})$ Falls f(z) ganz und beschränkt ist, so ist sie konstant. Sei Ω w.z.h., $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. $\Rightarrow \lvert f(z) \rvert$ besitzt keine Extremwerte in einem analytischen Gebiet. Falls Ω kompakt, so werden diese auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen. $\max\limits_{z \in B(0,R)} \lvert f(z) \rvert \Rightarrow \max\limits_{\varphi \in [0,2\pi)} \lvert f(R\, e^{i\varphi}) \rvert \Rightarrow 0 = \frac{d}{dx} \lvert f(R\, e^{i\varphi}) \rvert$
Identitätsprinzip für holomorphe Funktionen:	Sei $f : B(z_0, \epsilon) \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $f(z_0) = 0$. Entweder ist $f(z) \equiv 0$ auf $B(z_0, \epsilon)$ oder z_0 ist eine isolierte Nullstelle von f. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit U wegzusammenhängend. Falls $f(z) \equiv 0$ auf einer offenen Menge oder auf einer Geradenstrecke, ist $f(z) \equiv 0$ auf U.
Integralsatz von Cauchy:	Falls $f(z)$ holomorph und Ω einfach w.z.h. ist $\Rightarrow$ f besitzt Stammfunktion auf γ $\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$ $\oint_\gamma f(z) = 0$ und $\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{\gamma_2} f(z)$, falls γ_1 und γ_2 gleiche Start-/Endpunkte haben bzw. die gleichen Unstetigkeiten enthalten.
Integralformel v. Cauchy ($\exists! z_0 \in \gamma$)	$2\pi i \cdot f(z_0) \cdot n(\gamma, z_0) = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz \qquad 2\pi i \cdot f^{(n)}(z_0) \cdot n(\gamma, z_0) = n! \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ $2\pi i \cdot f(z_0) = \oint_{\lvert z-z_0 \rvert = r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \qquad 2\pi i \cdot f^{(n)}(z_0) = n! \oint_{\lvert z-z_0 \rvert = r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ $n(\gamma, z_0) = $ #Umläufe von γ um z_0, im Gegenuhrzeigersinn positiv! (evtl. auch 0) $\int_\gamma f(z) dz = \sum_k^n W(\gamma, z_k) \cdot \int_{\gamma_k} f(z) dz$
Anwendungen	$\oint e^{\alpha z} z^n = \begin{cases} n < 0 & \frac{2\pi i}{(-n-1)!} f^{(-n-1)}(0) \\ n \geq 0 & 0 \end{cases}$ $\oint cos(\alpha z) z^n = \begin{cases} n < 0 \text{ \& ungerade} & \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (-1)^{\frac{-n-1}{2}} \alpha^{-n-1} \\ n \geq 0, n < 0 \text{ \& gerade} & 0 \end{cases}$ $\oint sin(\alpha z) z^n = \begin{cases} n < 0 \text{ \& gerade} & \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (-1)^{-n-1} \alpha^{-n-1} \\ n \geq 0, n < 0 \text{ \& ungerade} & 0 \end{cases}$

4 Taylor- und Laurentreihen

Potenzreihen allgemein:	$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$	
	$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot a_k(z-z_0)^{k-n}$	
Konvergenzkriterium:	$\lim_{k\to\infty} \lvert a_k\rvert = 0$	
Konvergenzradius:	Potenzreihen konvergieren absolut auf Kreisscheiben mit Konvergenzradius ρ:	
	$0 < \rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\lvert a_k\rvert}{\lvert a_{k+1}\rvert} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lvert a_k\rvert}} \leq +\infty$	
	Am Rand der Konvergenzkreisscheibe verhalten sich die Reihen unterschiedlich.	
	$f(z)$ konvergent für $\lvert z\rvert < \rho \to f(z^{-1})$ konvergent für $\lvert z\rvert > 1/\rho$	
	$f(z)$ konvergent für $\lvert z\rvert < \rho \to f(z^2)$ konvergent für $\lvert z\rvert < \sqrt{\rho}$	
Taylorreihe	$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \qquad \forall z \in B(z_0,\rho)$	
MacLaurin-Reihe ($z_0 = 0$)	$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$	
	$\frac{1}{1-(\frac{z}{c})^d} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{c})^{d\cdot k} \Leftrightarrow \lvert\frac{z}{c}\rvert < 1$	$\frac{1}{c(1-\frac{z}{c})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{c}(\frac{z}{c})^k \Leftrightarrow \lvert\frac{z}{c}\rvert < 1$
	$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $\qquad \lvert z-z_0\rvert < 1 \Leftrightarrow$	$\log(z) = \log(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(z-z_0)^k}{k\cdot z_0^k}$
	$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -i\sinh(iz)$	$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(iz)$
	$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$
	$\tan(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835}$	$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot z^{2k+1}}{(2k+1)}$
	$\tanh(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \cdots$	$\frac{1}{c-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{c^{n+1}}$
	$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad \lvert z\rvert < 1$	$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$
Wichtige Potenzreihen:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
	$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert $\forall s > 1$	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonische Reihe divergiert	$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$	$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$
	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ alternierende harmonische	Reihe konvergiert
	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$ konvergiert	$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$	$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
Umrechnung:	$\frac{1}{z+a} = \begin{cases} \frac{1}{a+z_0}\frac{1}{1-(-(\frac{z-z_0}{a+z_0}))} = \frac{1}{a+z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{z-z_0}{a+z_0})^k \text{ für } \lvert z-z_0\rvert < \lvert a+z_0\rvert \\ \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-(-(\frac{a+z_0}{z-z_0}))} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{a+z_0}{z-z_0})^k \text{ für } \lvert z-z_0\rvert > \lvert a+z_0\rvert \end{cases}$	
	Wenn $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ $\qquad$ für $\lvert z-z_0\rvert < \rho$	
	Dann $f(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k$ $\qquad$ für $\lvert z-z_0\rvert > \rho$ (k→-k-1)	
	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^n$ $\qquad$ $n \to -n!$	
Laurentreihen	$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \Leftrightarrow f(z)$ holomorph auf einem Kreisring $a < \lvert z-z_0\rvert < b$	
	Hauptteil: $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k$ $\qquad$ Koeffizienten: $c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$	
	f(z) gerade $f(z) = f(-z) =$ $\qquad$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k}(z-z_0)^{2k}$	
isolierte Singularität (z_0)	1.) Nullstelle m-ter Ordnung: $c_m \neq 0, c_n = 0 \ \forall n < m$	
	2.) hebbar: $c_n = 0 \ \forall n < 0$	
	$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) \neq \pm\infty, 0$	
	$\Leftrightarrow$ Hauptteil der Laurentreihe *um* z_0 ist null. (f analytisch fortsetzbar)	
	3.) Pol m-ter Ordnung: $c_{-m} \neq 0, c_n = 0 \ \forall n < -m$	
	$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = \phi(z_0) \neq \pm\infty, 0$	
	$\Leftrightarrow f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$, wobei $\phi(z)$ holomorph	
	4.) wesentlich: Hauptteil unendlich lang, Funktion "chaotisch" nahe z_0	
	(Betrachte immer den Hauptteil der *innersten* Laurentreihe *um* z_0!)	

nicht isolierte Singularität	HP von Singularitäten Bsp: $z_0 = 0$ bei $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}, \log(z) \forall z \leq 0$
	$\sin(z) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(z+\pi k) \quad \cos(z) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(z+\pi(\frac{1}{2}+k))$ i) Singularität ist **ausserhalb** vom Kreisring: $$\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^k}, \text{konvergent für } \lvert z\rvert < a$$ ii) Singularität ist **umschlossen** vom Kreisring: $$\frac{1}{1-\frac{b}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^n}, \text{ konvergent für } \left\lvert \frac{b}{z} \right\rvert < 1 \Leftrightarrow \lvert z\rvert > \lvert b\rvert$$

5 Der Residuensatz

Residuensatz	$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i\in\Omega} res(f\lvert z_i) \cdot n(\gamma(t), z_i) \qquad (n(\gamma(t), z_i) \text{ normalerweise } = \pm 1)$
Residuenberechnung	1.) hebbar: $res(f\lvert z_0) = 0$ 2.) Pol 1. Ordnung: $res(f\lvert z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ 3.) Pol m-ter Ordnung: $res(f\lvert z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}(\frac{d}{dz})^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]$ 4.) Falls $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, und $q(z)$ hat in z_0 eine einfache NS: $res(f\lvert z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ $\rightarrow p(z)$ und $q(z)$ analytisch (nicht unbedingt Polynome!) 5.) $res(f\lvert z_0) =$ Koeff. von z^{-1} der innersten Laurentreihe um z_0. ($=a_{-1}$) 6.) $res(f\lvert z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(z_0,r)} f(z)dz$ 7.) $res(f\lvert z_0) = 0$, Falls $z_0 = 0$ und $f(z)$ gerade (Laurentreihe hat nur gerade Koeff.) 8.) $res(f^n f'\lvert z_0) = 0$, falls f in einer punktierten Umgebung von z_0 holomorph $res(f\lvert\overline{z_0}) = \overline{res(f\lvert z_0)}$
Integralabschätzungen	$\lim_{R\to\infty}(\lvert \int_{K_R} f(z)dz\rvert) \leq \lim_{R\to\infty} \pi R \max(\lvert f(z)\rvert)$ (K_R = Halbkreis, R $\to \infty$) $\lvert e^{\alpha iz}\rvert = \lvert e^{\alpha i R(z)} e^{-\alpha I(z)}\rvert = \lvert e^{-\alpha I(z)}\rvert \leq 1$ Zähler: $\lvert z-z_0\rvert \leq \lvert\lvert z\rvert + \lvert z_0\rvert\rvert \leq R + \lvert z_0\rvert$ Nenner: $\lvert z-z_0\rvert \geq \lvert\lvert z\rvert - \lvert z_0\rvert\rvert \geq R - \lvert z_0\rvert$ $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\lvert z-z_0\rvert=\epsilon, \mathrm{Im}(z)>0} f(z)dz = \pi i res(f\lvert z_0)$ (Halbkreis um Singularität)

6 Anwendungen des Residuensatzes

1. $\int_0^{2\pi} f(\cos(\phi), \sin(\phi))d\phi = \int_{|z|=1} f(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{z_i\in\partial B(0,1)} res(\frac{1}{z}f(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})|z_i), z := e^{i\phi}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z\in H^+} res(f|z_i) + \pi i \sum_{z\in\mathbb{R}} res(f|z_i) & \text{falls} \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \\ -2\pi i \sum_{z\in H^-} res(f|z_i) - \pi i \sum_{z\in\mathbb{R}} res(f|z_i) & \text{und} \quad \deg(p) \leq \deg(q) - 2 \end{cases}$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z\in H^+} res(f(z)e^{i\alpha z}|z_i) & a \geq 0 & \text{falls} & f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ und } q(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{R} \\ -2\pi i \sum_{z\in H^-} res(f(z)e^{i\alpha z}|z_i) & a \leq 0 & \text{und} & \deg(p) \leq \deg(q) - 2 \end{cases}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx = \begin{cases} -2\pi \cdot \mathrm{Im}(\sum_{z\in H^+} res(f(z)e^{i\alpha z}|z_i)) & a \geq 0 & \text{(gleiche Bedingungen} \\ 2\pi \cdot \mathrm{Im}(\sum_{z\in H^-} res(f(z)e^{i\alpha z}|z_i)) & a \leq 0 & \text{wie bei 3.)} \end{cases}$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx = \begin{cases} 2\pi \cdot \mathrm{Re}(\sum_{z\in H^+} res(f(z)e^{i\alpha z}|z_i)) & a \geq 0 & \text{(gleiche Bedingungen} \\ -2\pi \cdot \mathrm{Re}(\sum_{z\in H^-} res(f(z)e^{i\alpha z}|z_i)) & a \leq 0 & \text{wie bei 3.)} \end{cases}$

6. $\int_{mT+C}^{nT+C} f(e^{i\frac{2\pi}{T}t})dt = (n-m)\int_{|z|=1} f(z)\frac{T}{2\pi iz}dz$

   Dabei ist mit H^+ die obere Halbebene, und mit H^- die untere Halbebene gemeint

7 Fourier- und Laplacetransformation

Fourierreihe:	$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t} = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\frac{2\pi}{T}t)+b_k\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$ $\quad c_k\in\mathbb{C} \quad a_k/b_k\in\mathbb{R}$	
	Die Summe und das Produkt periodischer Funktionen ist genau dann periodisch, wenn alle Perioden ein gemeinsames Vielfaches haben.	
	$\sin(t)^a\cos(t)^b \Rightarrow$ in Polarform umwandeln!	
Fourierkoeffizienten:	$a_k=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)dt$	$b_k=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)dt$
	$c_k=\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}dt$	$a_0=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)dt$
f gerade: $f(t)=f(-t)$	$b_k=0$ bzw $c_k=c_{-k}$ $\forall k$	$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\frac{2\pi}{T}t)$
	$a_k=0$ bzw $c_k=-c_{-k}$ $\forall k$	$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\frac{2\pi}{T}t)$
f ungerade: $f(t)=-f(-t)$	$g(t)=\frac{1}{2}(f(t)+f(-t))$	$u(t)=\frac{1}{2}(f(t)-f(-t))$
	$e^{i\pi n}=\cos(n\pi)=\sin((2n+1)\pi)=$	$(-1)^n$
	$\sin(n\pi/2)=\frac{1-(-1)^n}{2(-1)^{(n-1)/2}}$	$e^{i\pi(n+1/2)}=i(-1)^n$
Eigenschaften	$f(t)$	$c_n, \widehat{f}(w)$
	reell ($\overline{f(t)}=f(t)$)	konjugiert symmetrisch ($c_n=\overline{c_{-n})}$
		Kosinus-Reihe mit reellen Koeffizienten
	imaginär ($\overline{f(t)}=-f(t)$)	konjugiert antisymmetrisch ($c_n=-\overline{c_{-n})}$
		Sinus-Reihe mit reellen Koeffizienten
	r/i + gerade	r/i + gerade
	r/i + ungerade	i/r + ungerade
Koeffizientenumrechnung:	$c_k=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}) & k<0 \\ \frac{1}{2}(a_k-ib_k) & k>0 \\ \frac{a_0}{2} & k=0\end{cases}$	$a_k=c_k+c_{-k}=2\mathrm{Re}(c_k)$ $b_k=i(c_k-c_{-k})=-2i\mathrm{Im}(c_k)$
Fundamentalintegrale:	$\int_0^{2\pi}\sin(kt)dt=0$ für $k\in\mathbb{Z}$	$\int_0^{2\pi}\cos(kt)dt=0$ für $k\neq 0, k\in\mathbb{Z}$
	$\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt=0$ für $k\neq 0, k\in\mathbb{Z}$	$\int_{\|z\|=r} z^k dz=0$ für $k\neq -1, k\in\mathbb{Z}$
Satz von Parseval	Die Energie vom Signal ist in Zeit- und Frequenzbereich gleich:	
	$\|\|f\|\|^2=\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}\|f(t)\|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|c_k\|^2=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\|a_k\|^2+\|b_k\|^2$	
Skalarprodukt	$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$	falls f, g 2π-periodisch
	$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$	sonst
Faltung	$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	falls f, g 2π-periodisch
	$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	falls f, $g=0$ auf $(-\infty,0)$
	$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	sonst
	$\chi_{[-1,1]}(t)*f(t)=\int_{t-1}^{t} f(x)dx$	
Faltungssatz	Die Faltung ist ein gewichteter Mittelwert von f mit Gewicht gegeben durch g.	
	$\mathcal{F}\{f*g\}=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$	$\mathcal{F}^{-1}\{f*g\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\{f\}\mathcal{F}^{-1}\{g\}$
	$\mathcal{F}\{f\cdot g\}=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}*\mathcal{F}\{g\}$	$\mathcal{F}^{-1}\{f\cdot g\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\{f\}*\mathcal{F}^{-1}\{g\}$
	$(T_af)*g=T_a(f*g)$	$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}b_k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$
Fouriertransformation:	$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$	falls $\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|dt<\infty \quad\Rightarrow \lim_{t\to\pm\infty} f(t)=0$
Rücktransformation:	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)e^{i\omega t}dw$	falls $\int_{-\infty}^{\infty}\|\widehat{f}(w)\|dw<\infty$
	$f(t)=f(-t)\Rightarrow\widehat{f}(\omega)=\widehat{f}(-\omega)$	$f(t)=-f(-t)\Rightarrow\widehat{f}(\omega)=-\widehat{f}(-\omega)$
	$\overline{f(t)}\Rightarrow\overline{\widehat{f}(-\omega)}$	$\overline{f(-t)}\Rightarrow\overline{\widehat{f}(\omega)}$
Satz von Plancherel	$\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\|\widehat{f}(\omega)\|^2d\omega$ (Energie im Zeitbereich = Frequenzbereich)	
Laplacetransformation:	$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds$
	Mit $s=\sigma+i\omega$, wobei σ so gewählt werden muss, dass die Integrale konvergieren.	
	$\exists\sigma\in\mathbb{R}$, $M>0,\forall t>0: \|f(t)\|\leq Me^{\sigma t}\rightarrow\exists\mathcal{L}[f]$ auf $\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)>\sigma\}$	

Wichtigste Identitäten:

(FT 1)	$\widehat{(\alpha f+\beta g)}(\omega)$	$=\alpha\hat{f}(\omega)+\beta\hat{g}(\omega)$	$(f*g)(t)$	$=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)G(s)$
(FT2)	$\widehat{f(t\pm a)}(\omega)$	$=e^{\pm ia\omega}\hat{f}(\omega)$	$E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}, s>0$
(FT3)	$\widehat{e^{\pm iat}f(t)}(\omega)$	$=\hat{f}(\omega\mp a)$	$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$	$=\sqrt{2\pi}\hat{f}(0)\ \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx=\sqrt{2\pi}(\widehat{xf(x)})(0)$
(FT4)	$\widehat{f(at)}(\omega)$	$=\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$f'(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s)-f(0^+)$
(FT5)	$\hat{\hat{f}}(t)$	$=f(-t)$	$f''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)$
(FT6)	$\widehat{f^{(n)}}(\omega)$	$=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$	$f^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\lim_{t\to 0^+} f^{(k-1)}(t)$
(FT7)	$\widehat{t^nf(t)}(\omega)$	$=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega)$	$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$	$=(-1)^n\mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s)$
$\lim_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}(\omega)$		$=\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty}\lvert L[f](s)\rvert=0$	t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{n!}{s^{n+1}}, s>0$
$\widehat{e^{-t^2}}$		$=\frac{e^{-\omega^2/4}}{\sqrt{2}}$	$\sin(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{a}{s^2+a^2}, s>0$
$\sin(at+\varphi)$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s\sin\varphi+a\cos\varphi}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+a^2}, s>0$
$\cos(at+\varphi)$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s\cos\varphi-a\sin\varphi}{s^2+a^2}$	e^{at}	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-a}, s>a$
$t\sin(at)$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$e^{at}\cdot\sin(bt)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s>a$
$t\cos(at)$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$e^{at}\cdot\cos(bt)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s>a$
$(-t)^nf(t)$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F^{(n)}(s)$	t^ne^{at}	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s>a$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}\underline{F}(s)$	$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}](x+iy)$	$=\int_{x+iy}^{\infty+iy}\mathcal{L}\{f(t)\}(\tau)d\tau \quad x>\sigma_f\ (x\in\mathbb{R})$
$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s\tau+1}$	period. mit T	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
$1-\mathrm{e}^{-t/\tau}$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s(s\tau+1)}$	$\delta(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-as}$
$\frac{1}{\tau^2}t\mathrm{e}^{-t/\tau}$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1}-\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$t-\tau+\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$		$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2(\tau s+1)}$	$\frac{1}{a^2}\left(e^{at}-at-1\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2(s-a)}$
sinc(t)=		$\begin{cases}\frac{sin(t)}{t} & t\neq 0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{\chi_{[-1,1]}}\\ 1 & t=0\end{cases}$	$\frac{d}{dz^m}z^n=$	$\begin{cases}\frac{n!}{(n-m)!}z^{n-m} & n\geq m\\ 0 & n<m\end{cases}$

Satz von Dirichlet	Sei f absolut integrierbar und 2L-periodisch. Sei f stückweise stetig und es existiert eine linke und rechte Ableitung an *jedem Punkt* in $[-L,L]$. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}=\begin{cases}f(t) & f \text{ ist stetig}\\ \frac{1}{2}\left(f(t^-)+f(t^+)\right) & f \text{ ist nicht stetig}\end{cases}$$ $\rightarrow$ punktweise Konvergenz gegen die Ausgangsfunktion an deren Stetigkeitspunkten
Gibbsches Phänomen	In der Nähe einer Sprungstelle treten immer Überschwingungen auf. Die Höhe der Überschwingungen wird *immer* etwa 18% der Sprunghälfte betragen: $$\sup_{t\in[-L,L]}\lvert f(t)-s_N(t)\rvert\approx 0.18\cdot\frac{1}{2}\left(f(t^-)+f(t^+)\right) \qquad s_N(t)>f(t)$$ $$E_N^*(f):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert f(t)\rvert^2\,dt-\frac{1}{2}\left(a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)$$
Dirac-Delta Funktion (Dirac-Impuls)	$\delta_\epsilon(t):=\frac{1}{2\epsilon}\chi_{(-\epsilon,\epsilon)}(t) \qquad \delta(t):=\lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(t)\approx\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$ D1 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1$ D2 Für jede stetige Funktion f gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=\delta*f(t_0)=f(t_0)$ D3 Sei $H(t)$ die Heaviside Funktion, dann gilt $H(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(s)ds$

8 Addendum

1	$\frac{1}{a-b}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)}$
2	$\frac{1}{2a^3}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(as+1)^3}$
3	$1-\left(1+\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(as+1)^2}$
4	$t-a+a\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(as+1)}$
5	$1+\frac{1}{b-a}\left(a\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-b\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(as+1)(bs+1)}$
6	$\frac{a(c-b)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+b(a-c)\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}+c(b-a)\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$
7	$\frac{a}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\frac{ab+(a-b)t}{(a-b)^2b}\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(as+1)(bs+1)^2}$
8	$\frac{1}{b-a}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{(a-b)^2}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)+\frac{t}{a-b}\mathrm{e}^{-bt}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
10	$\frac{(c-b)\mathrm{e}^{-at}+(a-c)\mathrm{e}^{-bt}+(b-a)\mathrm{e}^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
11	$(1-at)\mathrm{e}^{-at}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
12	$\frac{1}{a^3}(a-t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(as+1)^2}$
13	$\frac{1}{ab(a-b)}\left(a\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}-b\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(as+1)(bs+1)}$
14	$\frac{-1}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+\frac{b^2+(a-b)t}{(a-b)^2b^2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(as+1)(bs+1)^2}$
15	$\frac{(b-c)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+(c-a)\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}+(a-b)\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$
16	$\frac{1}{a-b}\left(a\mathrm{e}^{-at}-b\mathrm{e}^{-bt}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{-a}{(a-b)^2}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)-\frac{bt}{a-b}\mathrm{e}^{-bt}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
18	$\frac{a(b-c)\mathrm{e}^{-at}+b(c-a)\mathrm{e}^{-bt}+c(a-b)\mathrm{e}^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
19	$\left(\frac{1}{a^3}-\frac{2t}{a^4}+\frac{t^2}{2a^5}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(as+1)^3}$
20	$\frac{1}{(a-b)^2a}e^{-\frac{t}{a}}+\frac{b(a-2b)-(a-b)t}{(a-b)^2b^3}e^{-\frac{t}{b}}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(as+1)(bs+1)^2}$
21	$\frac{bc(c-b)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}+ca(a-c)\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}+ab(b-a)\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}}}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(as+1)(bs+1)(cs+1)}$
22	$\left(1-2at+\frac{1}{2}a^2t^2\right)\mathrm{e}^{-at}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(s+a)^3}$
24	$\frac{a^2}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-at}-\frac{2ab-b^2-b^2(a-b)t}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-bt}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)^2}$
25	$\frac{a^2(c-b)\mathrm{e}^{-at}+b^2(a-c)\mathrm{e}^{-bt}+c^2(b-a)\mathrm{e}^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
26	$\sin^2(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
27	$\cos^2(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
28	$\mathrm{e}^{-bt}\sin(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
29	$\mathrm{e}^{-bt}\cos(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
30	$\mathrm{e}^{-bt}\sin(at+\varphi)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{(s+b)\sin\varphi+a\cos\varphi}{(s+b)^2+a^2}$
31	$\mathrm{e}^{-bt}\cos(at+\varphi)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{(s+b)\cos\varphi-a\sin\varphi}{(s+b)^2+a^2}$
32	$\frac{1}{\omega_1}\mathrm{e}^{-bt}\sin(\omega_1 t)\,,a^2>b^2$ $\frac{1}{\omega_2}\mathrm{e}^{-bt}\sinh(\omega_2 t)\,,a^2<b^2$ mit $\omega_1=\sqrt{a^2-b^2},\omega_2=\sqrt{b^2-a^2}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2+2bs+a^2}$
33	$\mathrm{e}^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right),a^2>b^2$ $\mathrm{e}^{-bt}\cosh\left(\sqrt{b^2-a^2}t\right),a^2<b^2$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s+b}{s^2+2bs+a^2}$
34	$1-\mathrm{e}^{-bt}\left[\cos(\omega_1 t)+\frac{b}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right]$ $a^2>b^2$ $1-\mathrm{e}^{-bt}\left[\cosh(\omega_2 t)+\frac{b}{\omega_2}\sinh(\omega_2 t)\right]$ $a^2<b^2$ mit $\omega_1=\sqrt{a^2-b^2},\omega_2=\sqrt{b^2-a^2}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{a^2}{s(s^2+2bs+a^2)}$
35	$t^2\sin(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$2a\frac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$
36	$t^2\cos(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$2\frac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$
37	$\sinh(at)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{-at}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
38	$\cosh(at)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
39	$\frac{1}{2a^3}[at\cosh(at)-\sinh(at)]$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s^2-a^2)^2}$
40	$\frac{t}{2a}\sinh(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$
41	$\frac{1}{2a}[at\cosh(at)+\sinh(at)]$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$

8.1 Integrale

8.1.1 Substitutionen

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x \qquad u(x) = g(x) \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)} \tag{1}$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x \qquad u(x) = g(x) \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)} \tag{2}$$

$$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x))\mathrm{d}x \qquad u(x) = e^x \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{e^x} \tag{3}$$

$$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x \qquad x = \sin(u) \qquad \mathrm{d}x = \cos(u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

$$\int f(x, \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x \qquad x = \sinh(u) \qquad \mathrm{d}x = \cosh(u)\mathrm{d}u \tag{5}$$

$$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x \qquad x = \cosh(u) \qquad \mathrm{d}x = \sinh(u)\mathrm{d}u \tag{6}$$

$$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x \qquad u(x) = \frac{x}{a} \qquad \mathrm{d}x = a\mathrm{d}u \tag{7}$$

$$\int f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\mathrm{d}x \qquad u(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}u \tag{8}$$

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\mathrm{d}x \qquad u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u \tag{9}$$

$$\to \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \to \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \tag{10}$$

8.1.2 Potenzen und Wurzeln

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\mathrm{d}x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(\sqrt{a^2+x^2}+x)\right)$$

8.1.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\left(\ln|x| - 1\right) + C \qquad x$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C$$

$$\int x^s \ln(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x \pm a}\mathrm{d}x = \ln|x \pm a| + C$$

$$\int \frac{1}{e^x+a}\mathrm{d}x = \frac{x - \ln|a+e^x|}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{e^x-a}\mathrm{d}x = \frac{\ln|e^x-a| - x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x = \ln(x) - \ln(x+1) + C$$

$$\int a^{kx}\mathrm{d}x = \frac{a^{kx}}{k\ln|a|} + C \qquad \frac{d}{dx}a^{kx} = ka^{kx}ln(a) \qquad a > 1$$

$$\int x^n e^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C$$

8.1.4 Hyperbolische Funktionen

$$\int \cosh(x)\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\int \sinh(x)\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

$$\int \tanh(x)\mathrm{d}x = \ln|e^{2x}+1| - x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x) + C \qquad x > 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\mathrm{d}x = \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1) + C$$

$$\int \sinh^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\int \cosh^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \tanh^{-1}(x)\mathrm{d}x = x\tanh^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$

$$\int \tanh^2(x)\mathrm{d}x = x - \tanh(x) + C$$
$$\int \sinh^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x) + C$$

8.1.5 Trigonometrische Funktionen

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$
$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$
$$\int \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \ln|\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}| + C$$
$$\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \ln|\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}| + C$$
$$\int \frac{1}{\tan(x)}\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\tan(x)} + C$$
$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$
$$\int \cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$
$$\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$
$$\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$
$$\int \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$
$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{32}(4x - \sin(4x)) + C$$
$$\int \sin^n(ax)\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$
$$\int \sin(ax)\cos^n(ax)\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$
$$\int \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$$
$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$
$$\int \cot(x)\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + C$$
$$\int \csc(x)\mathrm{d}x = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C$$
$$\int \sec(x)\mathrm{d}x = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$
$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arccos(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x) + C$$
$$\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x = 2x\sin(x) - (x^2-2)\cos(x) + C$$
$$\int x^3\sin(x)\mathrm{d}x = 3(x^2-2)\sin(x) - x(x^2-6)\cos(x) + C$$
$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C$$
$$\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x = (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C$$
$$\int x^3\cos(x)\mathrm{d}x = x(x^2-6)\sin(x) + 3(x^2-2)\cos(x) + C$$
$$\int \sin(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C$$
$$\int \sin(ax)\cos(bx)\mathrm{d}x = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C$$
$$\int x\sin(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(\alpha x) - \alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$
$$\int x^2\sin(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{(2-\alpha^2x^2)\cos(\alpha x) + 2\alpha x\sin(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$
$$\int x\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha x\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$
$$\int x^2\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x) + 2\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^3} + C$$
$$\int xe^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{\alpha^2} + C$$
$$\int x^2e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}(\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 2)}{\alpha^3} + C$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \quad \mathrm{Re}(()\alpha) > 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)dt = \frac{3\pi}{4}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^3(t)dt = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \pi$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$
$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}t = \frac{1}{1+(\frac{\beta}{\alpha})^2}(\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\cos\beta x)$$
$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}t = \frac{1}{1+(\frac{\beta}{\alpha})^2}(\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin\beta x)$$

8.1.6 Bestimmte trigonometrische Integrale

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\sin\cdot\cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2\cdot\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin\cdot\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

8.1.7 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$
$$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$
$$|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2 + \sinh(y)^2$$

8.2 Partialbruchzerlegung

$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$
Falls $deg(P(s)) < (Q(s))$:

1. Pole 1.Ordnung:
   $F(s) = \frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(s-s_i)}$
   $\rightarrow K_i = [F(s)(s-s_i)]_{s=s_i} = \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)}$
2. Komplex konjugierte Pole:
   $F(s) = \frac{P(s)}{(s-\alpha\mp i\omega)} = \frac{|K|e^{i\theta}}{(s-\alpha-i\omega)} + \frac{|K|e^{-i\theta}}{(s-\alpha+i\omega)}$
   $\rightarrow f(t) = 2|K|e^{\alpha t}cos(\omega t + \theta)$
3. Mehrfache Pole:
   $F(s) = \frac{P(s)}{(s-s_1)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_{1i}}{(s-s_1)^i}$

   $K_{1n} = [F(s)(s-s_1)^n]_{s=s_1}$
   $K_{1n-1} = [\frac{d}{ds}F(s)(s-s_1)^n]_{s=s_1}$
   $K_{11} = [\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}F(s)(s-s_1)^n]_{s=s_1}$

   $\rightarrow f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_{1i}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_1 t}$

Falls $deg(P(s)) = deg(Q(s))$:
$F(s) = \frac{Q(s)+P'(s)}{Q(s)} = 1 + \frac{P'(s)}{Q(s)}$