

移动机器人路径规划中的图方法应用综述

成伟明, 唐振民, 赵春霞, 刘华军

(南京理工大学计算机系, 江苏 南京 210094)

摘 要: 近 40 年中, 涌现出很多移动机器人路径规划算法, 其中大部分算法将环境信息几何化, 转换成图的问题, 利用图的方法解决。这些算法可分成三类: 具有较好完备性适用于低维姿态空间的几何构造的方法、完备性较差或只具有概率完备但适用高维姿态空间的随机规划方法, 以及常用的图搜索算法。对这些算法进行了归纳总结, 评价了各算法的性能差异和优缺点。最后, 探讨了移动机器人路径规划的发展趋势, 给出图方法在路径规划中未来的应用展望。

关 键 词: 计算机应用; 路径规划; 综述; 计算几何; 移动机器人导航
中图分类号: TP 391
文献标识码: A **文 章 编 号:** 1003-0158(2008)04-0006-09

A Survey of Mobile Robots Path Planning Using Geometric Methods

CHENG Wei-ming, TANG Zhen-min, ZHAO Chun-xia, LIU Hua-jun

(Department of Computer Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: In recent forty years, a lot of path planning algorithms for mobile robot have been proposed. Majority of them translates environment geometric information into graph and then solve the problems using graph theory. They are classified into three categories: geometry construction methods in 2D and 3D configuration space with good completeness, randomized planning methods, and graph search algorithms. This survey tries to summarize these planning algorithms and point out the advantages and disadvantages of them. Finally, the future of mobile robot path planning is discussed.

Key words: computer application; path planning; survey; computing geography; mobile robot navigation

自主移动机器人的导航问题, 主要是解决由 Durrant-Whyte H F 提出的下述 3 个问题: ① “我现在何处?”; ② “我要往何处去?”; ③ “要如何到该处去?”。移动机器人路径规划主要解决其中的第 2 个问题。文献[1]指出: 路径规划是自治

式移动机器人的一个重要组成部分, 它的任务就是在具有障碍物的环境内按照一定的评价标准, 寻找一条从起始状态(包括位置和姿态)到达目标状态的无碰路径。

基于自由空间几何构造的规划方法是一类

收稿日期: 2007-01-08

作者简介: 成伟明(1981-), 男, 江苏兴化人, 博士研究生, 主要研究方向为路径规划, 跟踪控制, 智能导航。

重要的移动机器人路径规划方法。目前应用较广的路径规划方法大部分也都属于这一类。这类方法有很多共同之处: 它们的工作原理基本上都是先通过几何方法构造自由空间 (Free Space) 的骨架 (Skeleton) 图的描述, 然后利用图搜索算法搜索一条可行的最短路径。

最早的基于自由空间几何构造的规划方法由 Nilsson 在 1968 年提出, Nilsson 在文献[2]中描述了具有运动规划能力的移动机器人, 并提出用可视图 (Visibility Graph) 的方法为机器人寻找一条无碰的最短路径。经过近 40 年的研究, 很多基于图方法的算法被提出, 这些算法各有优缺点, 文中对这些方法进行总结, 评价各算法的性能差异, 以便于比较研究。

首先对机器人的工作空间做简要介绍, 给出机器人位姿以及姿态空间等概念的定义。在第 2 节介绍常用的适用于低维姿态空间的规划方法: 可视图 (Visibility Graph)^[3]、Voronoi 图^[4-6]、栅格分解 (Cell Decomposition)^[7-8]以及切线图 (Tangent Graph)^[9]等方法。这些算法不适用于较高姿态空间, 但具有较好的完备性。

接下来在第 3 节介绍适用于高维姿态空间的基于随机采样的规划方法。基于随机采样的规划始于 1990 年 Barraquand 和 Latombe 提出的 RPP (Randomized Potential Planner) 规划算法^[10], 用于克服人工势场法存在的局部极小和在高维姿态空间中规划时存在的效率问题。1994 年 PRM (Probabilistic RoadMap)^[11]和 1998 年 RRT (Rapidly-exploring Random Tree)^[12]是目前研究最多应用最广的两种基于随机采样的运动规划方法。

对几何构造方法介绍完后将对常用的图搜索算法进行总结。图搜索算法是指在已构成的骨架 (Skeleton) 图中, 从起始点出发向目标点搜索出一条满足最优准则的路径, 常用的包括深度优先与广度优先、Dijkstra 算法^[13]、A* 算法^[13]、D*^[14]算法等。

最后探讨了移动机器人运动规划的发展趋势, 给出图方法在路径规划中未来的应用展望。

1 机器人的工作空间描述

地面移动机器人的工作环境是一个二维或三维的空间, 其中包含有若干障碍物, 该空间定义为机器人的工作空间, 记为 W 。机器人的工作空间有两种可能, 二维空间: $W=R^2$, 三维空间: $W=R^3$ 。机器人和障碍物都具有一定的尺寸, 在简单的环境中, 机器人可以看作工作空间中的一个点, 障碍物可以根据机器人的尺寸做简单的扩展。而在复杂的环境中, 解决路径规划问题就必须明确的描述和定义工作空间中物体 (包括机器人和障碍物) 的几何模型。

(1) 位姿 (configuration) 机器人的一个位姿指能完全确定机器人上的所有点在工作空间中的位置的一个相互独立的参数集, 用这些参数可以完整的描述机器人在工作空间中的状态。一个位姿通常表示为带有位置和方向参数的一个向量 (vector)。

(2) 自由度 (degrees of freedom) 机器人的自由度定义为机器人运动过程中决定其运动状态的所有独立参数的数目。亦指机器人本身具有的改变其位姿的能力。

(3) 姿态空间 (configuration space) 姿态空间就是机器人所有可能位姿组成的集合, 代表了机器人所有可能的运动结果。但是姿态空间的拓扑结构通常不是笛卡尔空间。

对于二维工作空间中自由移动的刚体机器人, 通过 X, Y 方向上的平移产生一个拓扑空间 R^2 , 通过旋转产生一个拓扑空间 S^1 。这样对于机器人所有可能的运动结果, 构建出其 C -空间, 记为: $C=R^2 \times S^1$ 。用三维坐标系来描述该姿态空间: 在 X 和 Y 方向上是有边界的, 其大小就是工作空间的大小; 在角度方向上, 把 $-\pi$ 和 π 进行同一化处理, 形成一个环绕。如果做简化处理将机器人看作二维平面上的一个点, 则机器人航向可以忽略, 姿态空间为二维。路径规划最初研究的只是二维姿态空间的路径规划问题, 文中第 2 节介绍的方法示例也是针对这一情况。随着移动机器人路径规划发展, 越来越多的工作开始考虑三

维工作环境下的路径规划。三维工作环境下的机器人姿态空间实际为六维, 即 $q = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ 。除了平面坐标 x, y 外还有高程 z , 航向角 α , 俯仰角 β 以及侧倾角 γ 。此时低维姿态空间方法已无法满足要求, 第 3 节介绍的基于随机采样的规划方法即是针对这种情况的。

2 低维姿态空间的规划方法

2.1 可视图

可视图法由 Nilsson 于 1968 年在文献[2]中提出。它以多边形障碍物模型为基础, 任意形状障碍物用近似多边形代替, 用直线将机器人运动的起始点 q_{init} 和所有 C 空间障碍物的顶点以及目标点 q_{goal} 连接, 并保证这些直线段不与 C -空间障碍物相交, 就形成了一张图, 称之为可视图 (Visibility Graph) (如图 1 所示)。

可视图构造的时间复杂度是 $O(n^2 \log n)$ 或者 $O(n^2)$, n 代表障碍物的顶点总数。

对于可视图有以下性质^[15]: 如果可视图中存在一条折线, 折线的起点和终点分别是 q_{goal} 和 q_{init} , 且折线的中间点为障碍多边形的顶点, 则一定存在一条从起点到达终点的无碰路径。

简化可视图 (reduced visibility graph):

由于在图 1 中, 并不是所有的边对于最终路径的生成都有帮助, 简化可视图被提出。如图 2 所示, 简化可视图只保存有可能成为最终路径的那些边, 以减少路径的搜索时间, 提高算法效率。

定义 1 设 $e(x, y)$ 是可视图中的一条边, $x \in obs(A), y \in obs(B)$, 如果 $e(x, y)$ 所在的直线在 x 点和 y 点分别与 $obs(A)$ 和 $obs(B)$ 相切 (即与 $obs(A)$ 和 $obs(B)$ 不相交), 则 $e(x, y)$ 称为可视图中的一条切线段 (tangent segment)。

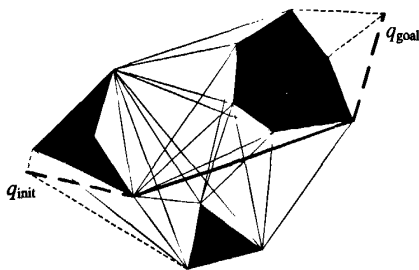


图 1 可视图

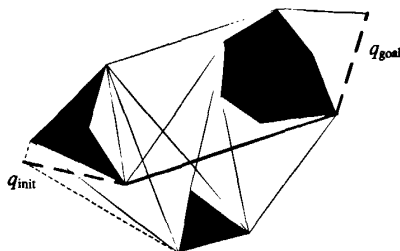


图 2 简化后的可视图

其中 $obs(A)$ 与 $obs(B)$ 分别是用多边形表示的环境障碍。

简化可视图只保存可视图中的以下部分:

- (1) 障碍物多边形的边;
- (2) 障碍物边中的可视图切线段。

2.2 Voronoi 图

Voronoi 图是计算几何领域的经典研究问题, 近百年来广泛应用于各个领域, 基于 Voronoi 图的路径规划就是一个典型的例子^[6]。如图 3 所示, Voronoi 图中的一系列直线段 (straight arcs) 和抛物线段 (parabolic arcs) 构成。直线段 (straight arcs) 由两个障碍物的顶点或两个障碍物的边定义生成, 直线段 (straight arcs) 上的所有点必须距离障碍物的顶点或障碍物的边相等。抛物线段 (straight arcs) 由一个障碍物的顶点和一个障碍物的边定义生成, 抛物线段 (straight arcs) 同样要求与障碍物顶点和障碍物的边有相同距离。构造算法如下:

(1) 对于所有障碍物间的 (顶点一边), (顶点-顶点), (边-边) 对, 生成其相应地 Voronoi 图边;

(2) Voronoi 图边相交的点即为 Voronoi 图的顶点, 这些顶点将 (1) 中生成的边分割成线段;

(3) 只保留 (2) 中离各个离障碍物顶点和边最近的线段。如图 3 所示。

基于 Voronoi 图的路径规划, 实时性较好, 生成的路径相对比较安全, 远离障碍, 并且路径比较平滑, 合理性也较好, 但是不能保证路径最优。Voronoi 图构造的时间复杂度是 $O(n \log n)$ 。

Choset, H 等对广义 Voronoi 图 (Generalized Voronoi Graph, 简称 GVG) 在基于传感器的路径规划方面进行了深入研究^[4-5]。

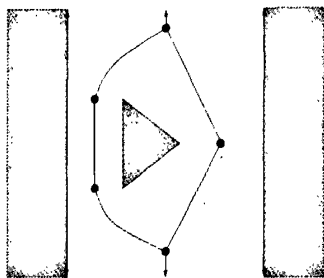


图3 障碍物环境中的 Voronoi 图

2.3 切线图法

切线图法以多边形障碍物模型为基础, 任意形状障碍物用近似多边形替代, 在自由空间中构造切线图, 如图4所示。文献[9]中, 作者采用移动线和扫描线相结合的方法构造切线图。首先, 采用“移动线算法”检测障碍物顶点之间的所有公切线, 然后利用一种“扫描线算法”测试已知公切线与障碍物之间是否存在交叉点, 如存在, 滤除这些公切线, 剩下的公切线构成的图被称为切线图 (Tangent Graph)。构造切线图在最坏情况下的时间复杂度为 $O((M+R)N+M^2\log M)$, 其中 N 表示障碍物顶点数, M 表示 N 个点构成的凸曲线的条数, R 表示开凸曲线的滚动数 (Rolling Number)。文献[9]认为, 构造环境的切线图进行机器人运动规划比构造可视图效率更高。



图4 切线图实例

2.4 栅格分解法

栅格分解法是目前研究最广泛的路径规划方法之一^[8]。该方法将机器人的工作空间分解为多个简单的区域, 一般称为栅格 (cell)。由这些栅格构成一个连通图, 在此图上搜索一条从起始栅格到目标栅格的路径。一般, 路径只需用栅格的

序号表示。栅格分解法又分为确切的和不确切的两种。

确切的栅格法 (Exact Cell Decomposition)^[7, 15]的思想是: 将自由空间 C_{free} 分解成 n 个不重叠的单元 K_n , 这些单元的组合与原自由空间精确相等 $C_{\text{free}} = \bigcup_{0 \leq i \leq n} K_n$ 。如图5是最常用的一种确切栅格分解法——梯形栅格分解 (Trapezoidal Decomposition)。从每个障碍物顶点做一系列平行线, 遇到自由空间边缘或障碍边缘相交即停止, 将空间分解成一系列的梯形区域, 给这些区域编号, 便形成了图6所示的连通图。算法复杂度 $O(n \log n)$, 其中 n 是环境中的障碍物 u 顶点数。

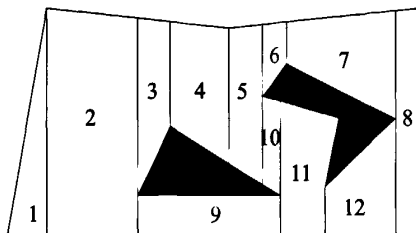


图5 确切的栅格法示例

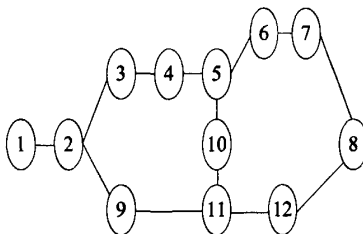


图6 由图5简化成的连通图

在不确切的栅格分解法 (Approximate Cell Decomposition)^[15-16]中, 所有的栅格都是预定的形状, 通常为矩形。整个环境被分割成多个较大的矩形, 每个矩形之间都是连续的。如果大矩形内部包含障碍物或者边界, 则又被分割成4个小矩形, 对所有稍大的栅格都进行这种划分, 然后在划分的最后界限内形成的小栅格间重复执行程序, 直到达到解的界限为止。这种分解的结构称为“四叉树”, 如图7所示。四叉树在计算机图形学和机器人视觉中已得到了广泛的应用, 并且在此基础上又发展了许多的操作算法。在进行下一层更细的划分之前, 应在每一层上的起点和目标点间找到一条路径, 如果该路径满足起点到目标点间无障碍物的要求, 则停止搜索。

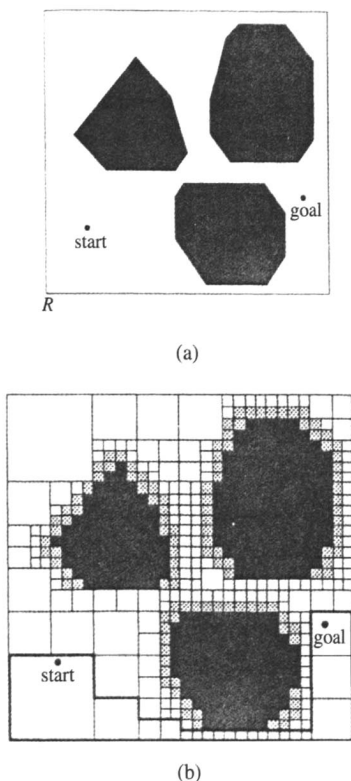


图7 不确切的栅格分解法

3 高维姿态空间基于随机采样的规划方法

前一节介绍的路径规划算法都具有较好的完备性,但对于高维姿态空间的路径规划问题,这些算法往往出现维数灾难(Dimension Curse)。该节介绍的随机采样的规划方法适用于高维姿态空间,但是它们是以损失完备性为代价提高算法的执行效率。

3.1 概率路标算法(PRM)

概率路标算法(Probabilistic RoadMap, 简称PRM)由 Lydia Kavraki 和 Jean-Claude Latombe 于 1994 年开始提出^[11],随后一系列关于概率路标算法研究与应用的文被发表^[11,17-20]。概率路标算法的主要思想是:在机器人位姿空间中通过随机采样建立一个无向路标图 $R=(N, E)$,其中 N 为随机采样获得的路标(milestones)节点, E 为连接这些节点的边。对于给定的起点 q_{init} 和终点 q_{goal} ,规划算法试图在图中寻找节点 q_{init}' 和 q_{goal}' 能够分别与 q_{init} , q_{goal} 直接连接,并在图中 $R=(N,$

$E)$ 搜索连接 q_{init}' , q_{goal}' 的边序列,以得到一条规划路径。如图 8 所示为均匀采样获得的路标图,但均匀采样受采样距离限制,很难保证较好的路径搜索性能的同时又具有较好的速度。图 9 为随机采样获得的路标图,图 10 为在随机路标图上获得的连接起始点到终点的路径。

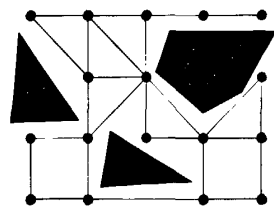


图8 均匀采样

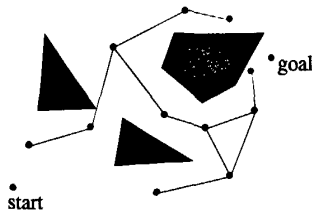


图9 随机采样

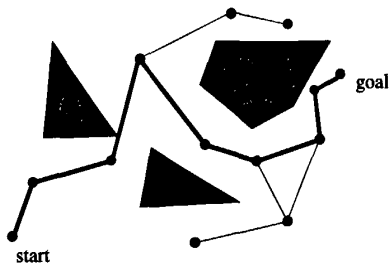


图10 概率路标算法获得的路径

PRM 算法的主要问题是在处理狭窄通道时存在的缺陷, Latombe 在^[21-22]提出了相应改进。很多学者给出了自己的想法,产生很多变种。如 S Wilmarth 等提出 MAPRM^[23-24], N Amato 等提出 OBPRM^[25]等。国内学者阙嘉岚等提出了一种基于启发式节点狭窄通道增强策略^[26]。目前 PRM 算法在动态障碍物、高维状态空间的环境中的运动规划已经得到广泛的应用^[27],但算法在解决移动机器人存在微分约束时的路径规划时存在局限性。

3.2 快速随机搜索树算法

快速扩展随机树 (Rapidly-exploring Random Tree, 简称 RRT) 由美国伊利诺大学 (UIUC) 学者 S M LaValle 于 1998 年提出^[12]。其设计用途是用来有效搜索高维非凸空间。快速扩展随机树采用一种特殊的增量方式进行构造, 这种方式能迅速缩短一个随机状态点与树的期望距离。快速搜索随机树特别适合包括障碍物和微分约束的路径规划问题。一颗快速扩展随机树可被视为一个倾向于搜索最大 Voronoi 区域的 Monte-Carlo 方法。因此, 快速搜索随机树在应用于路径规划方面前景广阔。如图 11 所示 RRT 算法考虑了微分约束, 因此规划的路径更具合理性。

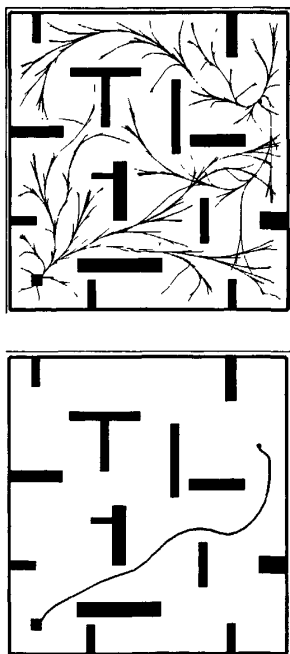


图 11 快速随机搜索树算法示例

搜索树构造阶段, 从初始位姿 (状态) 点 X_{init} 出发构造搜索树 T , 在位姿空间中随机选择一个位姿 (状态) 点 X_{rand} , 遍历 T , 依据距离 ρ , 找到 T 上离 X_{rand} 最近距离的节点 X_{near} , 然后在控制输入集 U 里选择一个控制输入 (如转向角、速度等) 作用在 X_{near} 上, 机器人沿着 X_{near} 到 X_{rand} 依照状态转换方程产生满足全局约束的候选路径集合, 经历时间, 到达一个新状态构成 X_{new} 集合, 依据距离 $i\Delta\rho$, 选择使得 X_{new} 到达 X_{rand} 距离最近的控制输入 u 作为最佳控制输入。依次产生

新状态, 直至到达目标状态, 搜索树构造结束。

搜索树构造结束, 从目标状态点出发, 找到父亲节点, 依此直至到达起始状态点, 即树根, 就规划出从起始状态点到达目标状态点满足全局和微分约束的路径以及在每一时刻的控制输入参数。

随着研究的深入, 为了提高算法的效率和性能, 不断有学者对该算法提出改进。如为了提高搜索效率采用双向搜索树 (Bi-RRT)^[28], 从起始点和目标点并行生成两棵 RRT, 直至两棵树相遇算法收敛; Kuffner 和 LaValle 提出 RRT-connect^[29], 使得节点的扩展效率大大提高; 运动规划中, 距离的定义非常复杂, Peng Cheng 研究了在 RRT 生长过程中距离函数不断学习的算法以降低距离函数对环境的敏感性^[30]; 考虑到基本 RRT 规划器得到的路径长度一般是最优路径的 1.3~1.5 倍, 英国的 J de Smith 研究了变分法技术使其达到最优^[31]。该算法在动态障碍物、高维状态空间和存在运动学、动力学等微分约束的环境中的运动规划已经得到广泛的应用^[32-37]。

4 图搜索算法

4.1 深度优先算法与广度优先算法

深度优先算法和广度优先算法是应用最广的图搜索算法。在深度优先搜索中, 深度越大的结点越先得到扩展。如果把它改为深度越小的结点越先得到扩展, 就是广度优先搜索法。深度优先算法能够很快找到一条路径, 但深度优先算法搜索的第 1 条路径往往是较长的路径。广度搜索呈波状推进方式, 因此广度优先能够保证搜索到的第 1 条路径是一条最短路径。二者的时间复杂度都是 $O(|V|+|E|)$ 。

4.2 Dijkstra 算法

最短路径搜索的经典算法是 Dijkstra 算法, 它首次出现在 1959 年, 之后广泛应用在最短路径搜索问题之中。为了和方便与下面要介绍的 A^* 比较, 这里采用 OPEN, CLOSE 表的方式。

OPEN 表保存所有已生成而未考察的节点, CLOSED 表中记录已访问过的节点。

(1) 把起始点放入 OPEN 组中等待检查。

(2) 从 OPEN 表中找出距起始点最近的点, 遍历考察这个点的子节点。求出这些子节点距起

始点的距离值,把这些子节点放到OPEN表中。

(3) 把这个点放到CLOSE表中。

(4) 重复(2), (3)步。直到OPEN表为空,或找到目标点。

该算法可以找到图G中从源节点到图中任意节点的最短路径,或者从目标节点到图中任意节点的最短路径。如果该算法在到达目标节点时结束,那么一定可以找一条从源节点到目标节点的最短路径。算法复杂度是 $O(n^2)$ 。

4.3 A*算法

A*算法是应用极广的启发式搜索算法,其距离函数的定义具有启发性。算法步骤与上一小节相似,区别在于其距离函数的定义增加了启发项,一般为

$$f(c)=g(c)+h(c)$$

其中 $g(c)$ 为节点 c 到起始节点距离, $h(c)$ 为启发项,是节点 c 到目标节点的估计值,如果定义 $h(c)=0$,则退化为Dijkstra算法。A*算法运用了路径上每一个节点的启发式估计,试图消除在图上的无用搜索。如果启发式估计是真实路径费用的下界,只要该路径存在,A*算法的可接纳性保证它可以得到一条最优路径。

Pearl, J 等^[38]全面研究了A*算法的平均计算量和距离函数的估计精度之间的关系,得出A*的计算量为多项式的充要条件是:距离函数必须具有“对数”阶精度。但在实际应用中这个要求很难达到,因而A*算法基本上未能克服计算量的指数爆炸困难。虽然已证明对于平面避障问题A*是多项式时间算法,但当环境复杂、规模较大时,它也是低效率的,经常几乎要扩展整个规划空间才能找到目标。针对A*的这一缺陷,人们提出了许多改进措施,如采用并行机制、分层规划机制等。

4.4 D*算法

A*算法主要用于静态环境的全局搜索,但实际应用中移动机器人路径规划是随着机器人移动过程逐渐感知环境信息的,因而是动态的。Anthony Stentz 提出的动态A*算法或者叫D*算法^[15,39](以下都称为D*算法)正是针对动态环境的路径规划问题提出的。

D*初始步骤与A*相似,最初的时候,目标状态G的 $h(G)$ 值设为0,并且将状态G放入OPEN表

当中。初始化之后,不断扩展节点,直到机器人所在的位置状态X从OPEN表中移出(即使得X放入close表中),这时从X到G的路径已经搜索得到。然后机器人顺着路径序列行进,直到到达目标状态或者传感器发现了任意两个路径节点之间突然出现一个障碍物。受障碍影响的节点被重新放入OPEN表进行扩展,扩展结束后继续沿着新的路径前进。

从上可以看到,D*针对的是部分环境信息已知的情况,主要特点是在路径的搜索是随着环境信息的感知而动态进行。该算法在CMU的越野环境导航实验中取得了很多成果。

5 总结与展望

基于几何构造方法的路径规划方法无论在实际应用和研究领域均占据主要地位。至今,对于低维姿态空间的移动机器人路径规划取得了较好的结果。基于随机采样的规划方法具有较好的潜力也在多自由度机器人路径规划方面取得较好进展。

综合文中的对基于图方法的路径规划算法的研究,认为以下研究方面值得注意:

(1) 对于低维姿态空间的移动机器人路径规划,当环境信息非常复杂(如崎岖的越野地形、复杂的水域环境),信息不确定,如何有效地实现环境信息的几何表示,实现有效的动态重规划,提高规划算法实时性,对于实际应用具有重要意义。

(2) 在高维多自由度机器人路径规划方面,基于随机采样的规划方法具有较好的潜力。然而如何提高算法完备性,以实现更加可靠的规划依然是一个重要课题。

(3) 如何在路径规划时考虑机器人自身存在的各种约束问题,提高规划算法的合理性,以及对于具有弹性形变能力的机器人和障碍物环境的路径规划都是值得注意的方向。

参考文献

- [1] 蒋新松, 机器人学导论[M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1994. 1-50.
- [2] Nilsson N J. A mobile automaton: an application of

- artificial intelligence techniques [C]/Proc. 1st Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence, Washington D.C., 1969: 509-520.
- [3] Oommen B, Iyengar S, Rao N, et al. Robot navigation in unknown terrains using learned visibility graphs, part I: the disjoint convex obstacle case [J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1987, 3(6): 672-681.
- [4] Choset H, Burdick J. Sensor based planning. I. The generalized Voronoi graph [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation, Volume: 2, 1995: 1643-1648.
- [5] Choset H, Burdick J. Sensor based planning. II. incremental construction of the generalized Voronoi graph [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation, Volume: 2, 1995: 1649-1655.
- [6] Canny J F. A Voronoi method for the piano movers problem [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1985: 530-535.
- [7] Parsons D, Canny J F. A motion planner for multiple mobile robots [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990: 8-13.
- [8] Kambhampati S K, Davis L S. Multi-resolution path planning for mobile robots [J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1986, (RA-2, 3): 135-145.
- [9] Liu Y H, Arimoto S. Computation of the tangent graph of polygonal obstacles by moving-line processing[J]. IEEE Transaction on Robotics and Automation, 1994, 10(6): 823-830.
- [10] Barraquand J, Latombe J. A monte-carlo algorithm for path planning with many degrees of freedom [C] // IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990: 1712-1717.
- [11] Kavraki L, Latombe J. Randomized preprocessing of configuration space for fast path planning [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994: 2138-2139.
- [12] LaValle S M. Rapidly-exploring random trees: a new tool for path planning [R]. Technical Report TR98-11, Computer Science Dept, Iowa State University, 1998.
- [13] Papadatos A. Research on motion planning of autonomous mobile robot [D]. Master Thesis, Naval Postgraduate School, 1996.
- [14] Anthony Stentz. The focussed D* algorithm for real-time replanning [C]/Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1995: 1652-1659.
- [15] Latombe J C. Robot motion planning [M]. 1991. 1-200.
- [16] Chen D Z, Szczerba R J, Uhran J J. A framed-quadtree approach for determining euclidean shortest paths in a 2-D environment [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1997, 13(5): 668-681.
- [17] Hsu D, Latombe J, Kurniawati H. On the probabilistic foundations of probabilistic roadmap planning [C] // 12th Int. Symp. on Robotics Research, 2005: 627-643.
- [18] Svestka P. Robot motion planning using probabilistic road maps [D]. Utrecht University, 1997.
- [19] Kavraki L, Svestka P, Latombe J, et al. Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces [J]. IEEE Transaction on Robotics and Automation, 1996, 12(4): 566-580.
- [20] Hsu D, Latombe J, Motwani R. Path planning in expansive configuration spaces [J]. International Journal of Computational Geometry and Applications, 1999, 9(4): 495-512.
- [21] Chen H L, Hsu D, Latombe J C, et al. Multi-level free-space dilation for sampling narrow passages in PRM planning [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation(ICRA), 2006: 1255-1260.
- [22] Saha M, Latombe J. Finding narrow passages with probabilistic roadmaps: the small step retraction method [C]/IEEE/RSJ Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2005: 301-319.
- [23] Wilmarth S, Amato N, Stiller P. MAPRM: A probabilistic roadmap planner with sampling on the medial axis of the free space [C]/IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1999: 1024-1031.
- [24] Wilmarth S, Amato N, Stiller P. MAPRM: A

- probabilistic roadmap planner with sampling on the medial axis of the free space [R]. Technical Report 98-0022, Department of Computer Science, Texas A&M University, 1998.
- [25] Amato N, Bayazit O, Dale L, et al. OBPRM: An obstacle-based PRM for 3D workspaces [C]//Robotics: The Algorithmic Perspective, 1998: 155-168.
- [26] 阙嘉岚, 丁贵涛, 黄亚楼. 基于启发式节点增强策略的PRM路径规划方法[J]. 机器人, 2003, 25(6): 544-547.
- [27] Geraerts R, Overmars M. A comparative study of probabilistic roadmap planners [C]//Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics, 2002: 43-57.
- [28] LaValle S M, Kuffner J. Rapidly-exploring random trees: progress and prospects [C]//Proc. Int. Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR), 2000: 293-308.
- [29] Kuffner J J, LaValle S M. RRT-connect: An efficient approach to single-query path planning [C]//Proc. IEEE Int'l Conf. on Robotics and Automation, 2000: 995-100.
- [30] Peng Cheng. Reducing RRT metric sensitivity for motion planning with differential constraints [D]. Master Thesis, Iowa State University, 2001.
- [31] J. de Smith. Distance and path: the development, interpretation and application of distance measurement in mapping and modeling [D]. University of London, 2003.
- [32] Urmson C. Locally randomized kinodynamic motion planning for robots in extreme terrain [D]. CMU, 2002.
- [33] Jaillet L, Yershova A, LaValle S M, et al. Adaptive tuning of the sampling domain for dynamic-domain RRTs [C]//Proceedings IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005: 2851-2856.
- [34] Yershova A, Jaillet L, Simeon T, et al. Dynamic-domain RRTs: efficient exploration by controlling the sampling domain [C]//Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2005: 3856-3861.
- [35] Lindemann S R, LaValle S M. Steps toward de-randomizing RRTs [C]//IEEE Fourth International Workshop on Robot Motion and Control, 2004: 271-277.
- [36] Cheng P, Frazzoli E, LaValle S M. Improving the performance of sampling-based planners by using a symmetry-exploiting gap reduction algorithm [C]//Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004: 4362-4368.
- [37] 王 华, 赵 臣, 王红宝, 等. 基于快速扫描随机树方法的路径规划器[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 37(7): 963-965.
- [38] Huyn N, Dechter R, Pearl J. Probabilistic analysis of the complexity of A*[J]. Artificial Intelligence, 1980. 15(3): 241-254.
- [39] Stentz A. The D* algorithm for real-time planning of optimal traverses [R]. CMU-RI-TR-94-37, CMU. 1994.