第五章 例题

例 5－1 一非线性器件的伏安特性为

$i= 1+2u+ 2u^2$

式中，$u=u_1 + u_2 + u_3= U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t + U_3\cos\omega_3 t$，$\omega_1$、$\omega_2$、$\omega_3$分别为 $2\pi\times10^3$rad/s、$3\pi\times10^3$rad/s、$4\pi\times10^3$rad/s。试求出电流 i 中的频率分量。

题意分析：题中给出了一个电流与电压的非线性函数，为一个二阶的多项式，输入信号为三个频率的信号之和。由于伏安特性为非线性特性，因此输入信号的三个分量将在非线性特性的作用下产生组合分量。将输入信号 u 代入非线性特性中，展开成单一频率分量之和，就可以求出电流 i 中的频率分量及其振幅。可以预见，由于是一个二阶的非线性特性，i 中的频率分量应包括 ω_1、ω_2、ω_3的不超过二阶的组合。

解：将 u 代入非线性特性中，把平方项展开，有

$$\begin{aligned}
i &= 1+2u+2u^2 \\
&= 1+2(u_1+u_2+u_3)+2(u_1+u_2+u_3)^2 \\
&= 1+2u_1+2u_2+2u_3+2u_1{}^2+2u_2^2+2u_3^2+4u_1u_2+4u_1u_3+4u_2u_3
\end{aligned}$$

将 $u=u_1 + u_2 + u_3= U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t + U_3\cos\omega_3 t$ 代入上式，有

$$\begin{aligned}
i = {} & 1+2U_1\cos\omega_1 t+2U_2\cos\omega_2 t+2U_3\cos\omega_3 t+2(U_1\cos\omega_1 t)^2 \\
& +2(U_2\cos\omega_2 t)^2+2(U_3\cos\omega_3 t)^2+4U_1\cos\omega_1 tU_2\cos\omega_2 t \\
& +4U_1\cos\omega_1 tU_3\cos\omega_3 t+4U_2\cos\omega_2 tU_3\cos\omega_3 t \\
= {} & 1+2U_1\cos\omega_1 t+2U_2\cos\omega_2 t+2U_3\cos\omega_3 t+U_1^2+U_1^2\cos 2\omega_1 t \\
& +U_2^2+U_2^2\cos 2\omega_2 t+U_3^2+U_3^2\cos 2\omega_3 t+2U_1U_2\cos(\omega_1-\omega_2)t \\
& +2U_1U_2\cos(\omega_1+\omega_2)t+2U_1U_3\cos(\omega_1-\omega_3)t+2U_1U_3\cos(\omega_1+\omega_3)t \\
& +2U_2U_3\cos(\omega_2-\omega_3)t+2U_2U_3\cos(\omega_2+\omega_3)t
\end{aligned}$$

由此可见，电流 i 中的频率分量有：直流分量（振幅为 $1 + U_1^2+ U_2^2+ U_3^2$）；输入信号三个分量 ω_1、ω_2、ω_3（振幅为 $2U_1$、$2U_2$、$2U_3$）；输入信号三个分量 ω_1、ω_2、ω_3的六个二阶组合分量 ω_1

$+\omega_2$、$\omega_1-\omega_2$、$\omega_1+\omega_3$、$\omega_1-\omega_3$、$\omega_2+\omega_3$ 和 $\omega_2-\omega_3$（振幅分别为 $2U_1U_2$、$2U_1U_2$、$2U_1U_3$、$2U_1U_3$、$2U_2U_3$、$2U_2U_3$）。因此，将输入信号的频率值代入，电流 i 中的频率分量包括：由非线性特性直流项产生的直流分量；由非线性一次项产生的分量 1KHz、1.5KHz、2KHz；由非线性特性平方项产生的直流、0.5KHz、1KHz、1.5KHz、2KHz、2.5KHz、3KHz、3.5KHz、4KHz。

讨论：分析非线性系统时，一般采用级数展开的方法进行分析，也可在此基础上将其转换成线性时变特性进行分析。本题中给出了非线性特性，输入信号为三个频率的信号，因此必然会产生出输入信号以外的其他组合分量。由于特性为二阶的，因此产生的组合分量最高为二阶的。从产生的组合分量来看，由平方项产生的组合分量组合出了输入信号的频率分量，由后面的内容可知，这些频率分量若反作用于非线性器件，对频谱的线性搬移的性能是会有影响的。

例 5－2 二极管平衡电路如图 P5-1，u_1 及 u_2 的注入位置如图所示，图中，$u_1=U_1\cos\omega_1 t$，$u_2=U_2\cos\omega_2 t$，且 U_2》U_1。求输出电流 i 的表示式。

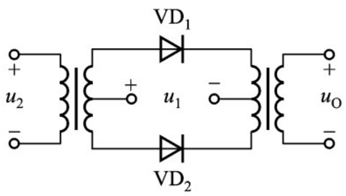

图 P5－1 二极管平衡电路

题意分析：这是一个二极管平衡电路,由于控制电压 u_2 的位置变化，两个二极管的通断控制就可能发生变化。此时，加到两个二极管的电压分别为 $u_{D1}=u_1+u_2$ 和 $u_{D2}=u_1-u_2$，控制电压 u_2 正向地加到上边支路的二极管上，反向地加到下边支路的二极管上，因此，两个二极管的通断在控制电压 u_2 的作用下交替进行，即 $u_2>0$ 时，上边支路的二极管导通，下边支路的二极管截止；当 $u_2<0$ 时，上边支路的二极管截止，下边支路的二极管导通。这样，上边支路二极管的时变电导为 $g_D K(\omega_2 t)$，下边支路二极管的时变电导为 $g_D K(\omega_2 t-\pi)$。由于流过两个二极管的电流方向相反的，输出电流 $i=i_1-i_2$。

将 i_1 和 i_2 代入 i 中，就可求出输出电路 i 的的表达式及其中的频率分量。

解：首先表明加到两个二极管上的电压和流过二极管的电流的正方向，一般按实际方向标正方向。因此加到两个二极管的电压分别为

$u_{D1}=u_1+u_2$

和　$u_{D2}=u_1-u_2$

则流过两个二极管的电流为

$i_1=g_DK(\omega_2t)\,u_{D1}$

和　$i_2=g_DK(\omega_2t-\pi)\,u_{D2}$

由于两个二极管的电流在输出变压器中的流动方向是一致的，在输出变压器中产生的磁通是相助的，因而反应在输出电流中，两个电流是相加的，即

$$
\begin{aligned}
i=i_1-i_2&=g_DK(\omega_2t)u_{D1}-g_DK(\omega_2t-\pi)u_{D2}\\
&=g_DK(\omega_2t)(u_1+u_2)-g_DK(\omega_2t-\pi)(u_1-u_2)\\
&=g_D[K(\omega_2t)+K(\omega_2t-\pi)]u_2+g_D[K(\omega_2t)-K(\omega_2t-\pi)]u_1\\
&=g_Du_2+g_DK'(\omega_2t)u_1\\
&=g_DU_2\cos\omega_2t+g_D(\frac{4}{\pi}\cos\omega_2t-\frac{4}{3\pi}\cos3\omega_2t+\frac{4}{5\pi}\cos5\omega_2t\ldots\ldots)U_1\cos\omega_1t
\end{aligned}
$$

由此可见，输出电流 i 中的频率分量有：直流、ω_2、$2n\omega_2\pm\omega_1$（$n=1，2，3，\cdots$）。与图 5－6 所示的二极管平衡电路相比较，图 5－6 所示的二极管平衡电路输出电流中的频率分量为 ω_1、（$2n-1$）$\omega_2\pm\omega_1$（$n=1，2，3，\cdots$），因此本题中的电路的输出电流中增加了 ω_2 分量，没有 ω_1 分量，可以完成频谱的线性搬移功能。

例 5－3 试推导出图 P5－2 所示双差分电路单端输出时的输出电压表示式。

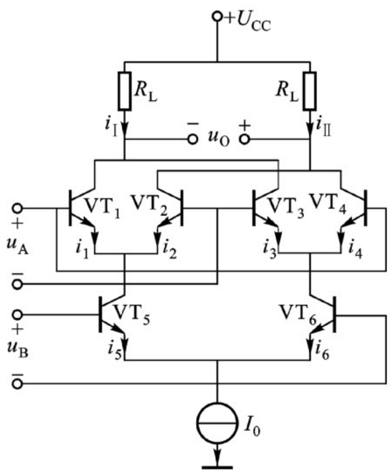

图 P5-2

题意分析：差分对输出有两种形式：双端输出与单端输出。教材中分析的是双端输出的情况，单端输出与双端输出的结果是否相同，本题就是分析这个问题。分析的方法与教材中的

分析方法相同，但要注意的是单端输出时，输出电压是相对于地的电压。如从右边的电阻 R_L 的下端输出，其输出电压 $u_0 = E_c - i_{II} R_L$，只要求出 i_{II}，代入式中，就可得出结论。

解：图 P5－3 为双差分对电路，从右边的电阻 R_L 的下端输出，则输出电压 $u_0 = E_c - i_{II} R_L$。求出 i_{II} 后，就可得到输出电压。由图中可以看出，$i_{II} = i_2 + i_4$，i_2 是由 V_1、V_2 组成的单差分对的单端输出电流，i_4 是由 V_3、V_4 组成的单差分对的单端输出电流，输入电压 u_A 正向加到 V_4，反向加到 V_2，由单差分对电路的分析可知

$$i_2 = \frac{i_5}{2} - \frac{i_5}{2}\tanh(\frac{u_A}{2V_T})$$

$$i_4 = \frac{i_6}{2} + \frac{i_6}{2}\tanh(\frac{u_A}{2V_T})$$

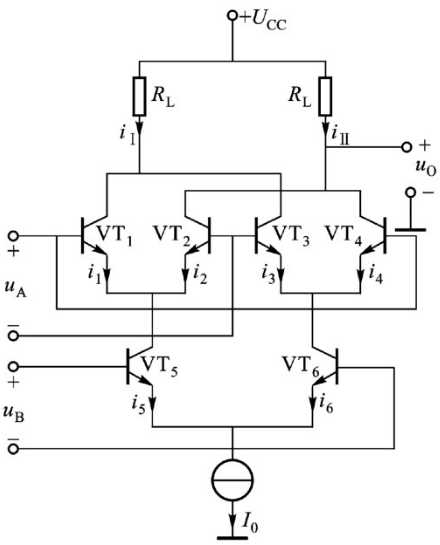

图 P5－3 双差分对电路（单端输出）

这里，i_5 和 i_6 分别是两个差分对的恒流源。由此可得

$$i_{\Pi} = i_2 + i_4 = \frac{1}{2}(i_5 + i_6) - \frac{1}{2}(i_5 - i_6)\tanh(\frac{u_A}{2V_T})$$

$$= \frac{I_0}{2} - \frac{I_0}{2}\tanh(\frac{u_A}{2V_T})\tanh(\frac{u_B}{2V_T})$$

由此可见，双差分对在单端输出时，可以得出与单差分对（式（5－22））类似的结果。将 i_{II} 代入 $u_0 = E_c - i_{II} R_L$ 中，可得

$$
\begin{aligned}
u_0 &= E_c - i_{\Pi} R_L \\
&= E_c - \frac{I_0}{2} R_L + \frac{I_0}{2} R_L \tanh(\frac{u_A}{2V_T}) \tanh(\frac{u_B}{2V_T})
\end{aligned}
$$

当 u_A 和 u_B 的幅度均小于 26mV 时，有

$$
u_0 = E_c - \frac{I_0}{2} R_L + \frac{I_0}{2} \frac{1}{4V_T^2} u_A u_B
$$

由于 u_0 中有直流分量，还不是一个理想乘法器（隔直后为一理想乘法器），它可以完成频谱的线性搬移功能。

讨论：差分对电路有两种形式，单差分对电路和双差分对电路，这两种电路均可用于频谱的线性搬移，其输出方式可以双端输出，也可单端输出，但两种输出的结果是不相同的。两种输出均有其各自的优缺点：单差分对电路双端输出可以抑制共模干扰，但输出不是对地，还需进行双——单变换；单端输出直接对地，但不能有效抑制共模干扰。双差分对双端输出时，可等效一理想乘法器，但要进行双——单变换；而单端输出直接对地，但不能等效为理想乘法器，且输出幅度是双端输出的一半。由第六章的分析可知，单差分对完成频谱的线性搬移与两个输入信号的位置有关，而双差分对与两个输入信号的位置无关。

这里分析的是双差分对的单端输出时的输出表达式，读者也可按此思路分析单差分对电路单端输出的结果。

例 5－4 图 P5-4 所示二极管平衡电路，输入信号 $u_1=U_1\cos\omega_1 t$，$u_2=U_2\cos\omega_2 t$，且 $\omega_2 \gg \omega_1$，$U_2 \gg U_1$。输出回路对 ω_2 谐振，谐振阻抗为 R_0，带宽 $B=2f_1$（$f_1=\omega_1/2\pi$）。（1）不考虑输出电压的反作用，求输出电压 u_o 的表示式；（2）考虑输出电压的反作用，求输出电压的表示式，并与（1）的结果相比较。

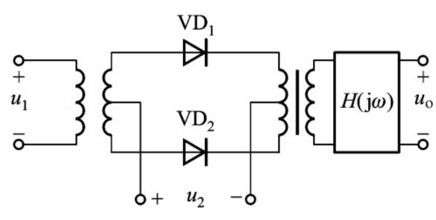

图 P5－4 二极管平衡电路

题意分析：（1）本题中的二极管平衡电路与教材中的二极管平衡电路是一致的，不同点在于输出端加了一滤波器，并给出了滤波器的特性。分析时，只要求出输出电流，分析输出电流哪些分量能通过输出滤波器，能通过滤波器的分量就可在输出端输出。（2）在二极

管平衡电路的分析中，我们忽略了输出电压 u_0 对二极管平衡电路的反作用，其条件是控制信号 u_2 的振幅远远大于输入信号 u_1 的振幅，即 $U_2 \gg U_1$，此条件保证了输出电压远小于控制信号，故可以忽略输出电压对电路的反作用。当考虑输出电压对电路的反作用时，加到二极管两端的电压应为控制电压 u_2、输入电压 u_1 和输出电压 u_0。此时的输出电压 u_0 应是能通过输出滤波器的那些频率分量，可以直接用（1）的结果，不同的是其振幅可能有一些变化。从第六章可知，由于这种频谱的线性搬移是低电平的，因此对其振幅的绝对值不太关心，而关心的是其输出的频率分量，即是否能完成频谱的线性搬移。其分析方法与（1）类似。

解：（1）加到二极管两端的电压为

$u_{D1} = u_1 + u_2$

$u_{D2} = -u_1 + u_2$ 与教材中的输入方式是完全相同的，因此在输出变压器的次级的电流（不考虑滤波器）为

$$
\begin{aligned}
i &= 2g_D K(\omega_2 t)u_1 \\
&= 2g_D\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\omega_2 t-\frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_2 t+\frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_2 t-\ldots\right)U_1\cos\omega_1 t \\
&= g_D U_1\cos\omega_1 t+\frac{4}{\pi}g_D U_1\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t-\frac{4}{3\pi}g_D U_1\cos\omega_1 t\cos 3\omega_2 t \\
&\quad +\frac{4}{5\pi}g_D U_1\cos\omega_1 t\cos 5\omega_2 t-\ldots
\end{aligned}
$$

由于输出滤波器的中心频率为 $f_2(=\omega_2/2\pi)$，带宽 $B=2f_1$（$f_1=\omega_1/2\pi$），在输出 i 电流中只有第二项可以输出，其他分量被滤除，因此输出电压为

$$u_0 = \frac{4}{\pi}R_L g_D U_1\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = U_0\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$$

式中 R_L 为输出滤波器的等效阻抗。

（2）当考虑输出电压的反作用时，加到两个二极管上的电压为

$$
\begin{aligned}
u_{D1} &= u_1 + u_2 - u_0' \\
u_{D2} &= -u_1 + u_2 + u_0'
\end{aligned}
$$

u_0' 是输出变压器次级两端的电压，与 u_0 不同的是其振幅。由于控制电压 u_2 的振幅远大于输入电压 u_1 和输出电压 u_0'，因此控制电压 u_2 决定了二极管的通断，开关函数与（1）相同，则流过两个二极管的电流为

$$i_1 = g_D k(\omega_2 t) u_{D1} = g_D K(\omega_2 t)(u_1 + u_2 - u_0^{'})$$
$$i_2 = g_D k(\omega_2 t) u_{D2} = g_D K(\omega_2 t)(-u_1 + u_2 + u_0^{'})$$

输出变压器次级电流（滤波前）为

$$\begin{aligned}
i &= i_1 - i_2 = 2g_D K(\omega_2 t)(u_1 - u_0') \\
&= 2g_D(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_2 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_2 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_2 t - \ldots) \bullet \\
&\quad (U_1 \cos\omega_1 t - U_0' \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t) \\
&= g_D(U_1 \cos\omega_1 t - U_0' \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t) + \frac{4}{\pi} g_D U_1 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \\
&\quad - \frac{4}{3\pi} g_D U_1 \cos\omega_1 t \cos 3\omega_2 t + \frac{4}{5\pi} g_D U_1 \cos\omega_1 t \cos 5\omega_2 t - \ldots \\
&\quad - \frac{4}{\pi} g_D U_0' \cos\omega_1 t \cos^2 \omega_2 t + \frac{4}{3\pi} g_D U_0' \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \cos 3\omega_2 t \\
&\quad - \frac{4}{5\pi} g_D U_0' \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \cos 5\omega_2 t + \ldots \\
&= g_D(U_1 \cos\omega_1 t - U_0' \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t) + \frac{4}{\pi} g_D U_1 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \\
&\quad - \frac{4}{3\pi} g_D U_1 \cos\omega_1 t \cos 3\omega_2 t + \frac{4}{5\pi} g_D U_1 \cos\omega_1 t \cos 5\omega_2 t - \ldots \\
&\quad - \frac{2}{\pi} g_D U_0' \cos\omega_1 t \left(1 + \cos 2\omega_2 t\right) + \frac{2}{3\pi} g_D U_0' \cos\omega_1 t (\cos 2\omega_2 t + \cos 4\omega_2 t) + \ldots
\end{aligned}$$

由上式可以看出，输出变压器次级电流中（滤波前）的频率分量为：f_1、$f_2 \pm f_1$、（2n-1）$f_2 \pm f_1$、$2nf_2 \pm f_1$(n=1，2，3，⋯)。在输出变压器次级电流 i 中，只有 $f_2 \pm f_1$ 能通过滤波器在输出端输出，因此输出电压为

$$u_0 = (\frac{4}{\pi} U_1 - U_0') g_D R_L \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t$$

与（1）的结果比较，输出电压的频率分量不变，为 $f_2 \pm f_1$，变化的只是其振幅，相对（1）的结果，振幅减少。由此可见在分析二极管平衡电路时，忽略输出电压的反作用是合理的，前提是控制电压远远大于输入信号。

讨论：高频电路中，合理的近似是非常重要的，因为精确的分析是不可能的，也是不必要的。在分析频谱线性搬移电路时，我们注重的是输出端信号中包含哪些频率分量，这些频率分量中是否包含完成频谱线性搬移所需的频率分量，若包含有所需分量，就可用滤波器将其选出，并抑制掉不需要的其他分量。此时我们还关心能否用滤波器将其他不必要的分量滤除，若除了有用频率分量在滤波器的通带内以外，还有其他的分量在滤波器的通带内，

这些不需要的频率分量就会对有用信号形成干扰，这在第六章中有分析。

例 5-5 场效应管的静态转移特性如图 P5-5 所示，表达式为：

$$i_D = I_{DSS}(1-\frac{u_{GS}}{U_p})^2$$

式中，$u_{GS}=U_{GS}+U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t$；若 U_1 很小，满足线性时变条件。

（l）当 $U_2\le|U_P-U_{GS}|$，$U_{GS}=U_P/2$ 时，求时变跨导 g_m（t）；

（2）当 $U_2\le|U_P|$，$U_{GS}=U_P$ 时，求时变跨导 g_m（t）。

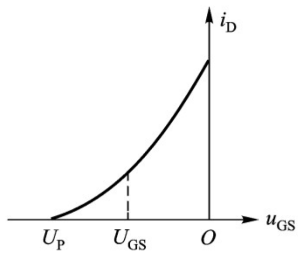

图 P5-5

题意分析：该题为场效应管频谱线性搬移电路的分析，由于场效应管大家接触较小，普遍感到比较陌生，实际上它的分析比三极管电路来得简单，这是因为场效应管输出电流与输入电压之间呈现平方关系，而三极管呈现的是指数规律。在第一问中，输入信号在场效应管平方律范围内，可以直接将输入信号代入到转移特性函数中展开，由于题目中告诉了一个信号很小，此时最好的方法是采用线性时变的分析方法。第二问，输入信号的范围超出了平方律范围，不能用转移特性函数展开进行分析了。

解：（1）

$$g_m(t)=g_{m0}(1-\frac{U_{GS}}{U_p})-g_{m0}\frac{U_2}{U_p}\cos\omega_2 t$$
$$=\frac{1}{2}g_{m0}-g_{m0}\frac{U_2}{U_p}\cos\omega_2 t$$

其中 $g_{m0}=2\frac{I_{DSS}}{|U_p|}$

（2）
$$g_m(t)=\begin{cases}-g_{m0}\dfrac{U_2}{U_p}\cos\omega_2 t & 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\omega_2 t<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\le\omega_2 t\le 2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$
$$=-g_{m0}\frac{U_2}{U_p}\cos\omega_2 t K(\omega_2 t)$$

其中 $g_{m0} = 2\frac{I_{DSS}}{|U_p|}$

讨论：电路形式虽然相同，但由于条件不相同，分析得到的结果不同，但时变跨导中均包含 ω_2 的成分，均可以实现频谱的线性搬移，只是幅度大小不同。另外，由于第二问中输入信号的范围超出了平方律范围，此时实际上将转移特性进行了分段表示，即超出平方律范围的用零表示，清楚了这一点，本题就容易理解了。此题可以更好的帮助大家线性时变电路的分析方法。