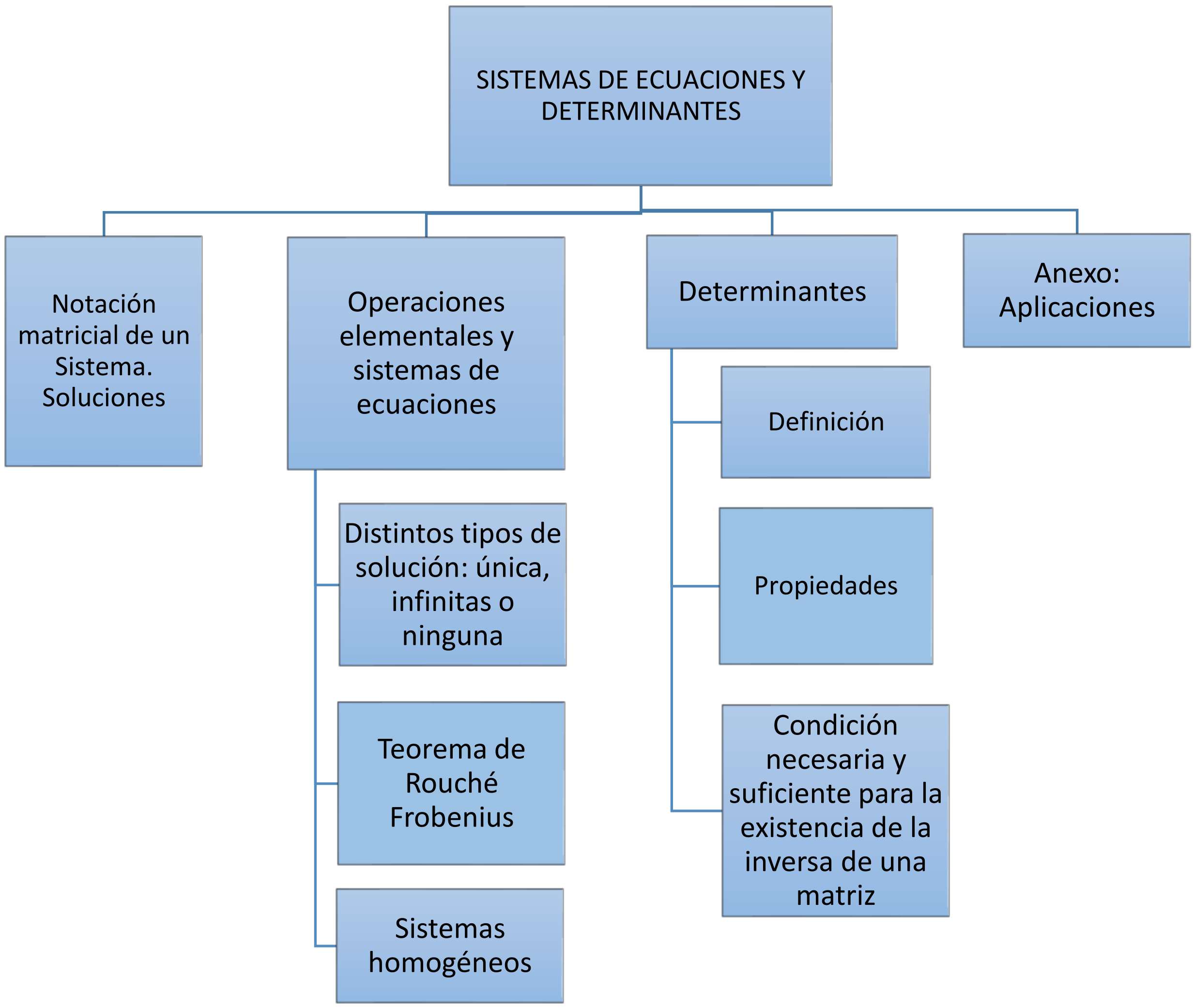
Capítulo 7

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DETERMINANTES

CONTENIDOS:



Matemático invitado: Leonardo Pisano

Los sistemas de ecuaciones lineales modelizan muchos problemas de la realidad y la preocupación por resolverlos y por encontrar métodos para su resolución data de muchos años.

Leonardo Pisano, matemático italiano que vivió aproximadamente entre los años 1175 y 1250 d.c, más conocido como Fibonacci, y que se conoce sobre todo por su famosa sucesión, viajaba habitualmente por cuestiones de comercio. Durante sus viajes aprendió la nueva aritmética árabe, que después presentó al occidente en su conocido libro Liber Abaci. Cuenta la leyenda que el Emperador Federico II de Sicilia invitó a Fibonacci y a otros sabios a participar en una especie de torneo de matemáticas, en el que plantearon varios problemas. Uno de ellos era el siguiente:

"Tres hombres poseen una sola pila de monedas, y sus partes son 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno toma algo de dinero de la pila hasta que no queda nada. El primero regresa 1/2 de lo que tomó, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total reintegrado se divide por igual entre los tres, se descubre que cada uno posee lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había en la pila original, y cuánto tomó cada uno de esa pila? "

Fibonacci llegó a la solución: la cantidad total era 47 y las cantidades que tomaron cada uno, fueron 33, 13 y 1. (Extraído del libro "Algebra Lineal con Aplicaciones",de Nakos y Joyner, 1999)

El desafío será resolver el problema al final del capítulo y analizar si es correcta la solución de Fibonacci.

---

1. Notación matricial de un Sistema. Soluciones.

Aplicaremos los contenidos vistos en el capítulo anterior para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Sistema de 2 ecuaciones con 2

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 5x - y + 3z = 3 \end{cases}$

Sistema de 2 ecuaciones con 3

c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$

Sistema de 3 ecuaciones con 3

Encontrar soluciones a estos sistemas implica hallar valores de las variables que cumplan todas las ecuaciones a la vez.

Podemos representar los sistemas anteriores, como un producto matricial, con una matriz **A** llamada de los coeficientes, una matriz **X**, llamada matriz de las incógnitas y una matriz **b**, llamada matriz del término independiente:

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$ Expresado también como: AX=b

Si hacemos el producto nos queda: $\begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Que por igualdad de matrices resulta: $2x - y = 4$

$3x + 2y = 1$ que es el sistema original.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Si hacemos el producto nos queda: $\begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 5x - y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Que por igualdad de matrices resulta: $x - 2y + z = 4$

$5x - y + 3z = 3$ que es el sistema original.

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Si hacemos el producto nos queda: $\begin{pmatrix} x - y + z \\ 4x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Que por igualdad de matrices resulta: $x - y + z = 2$

$4x - 2y + z = 1$

$x + y - 2z = 3$ que es el sistema original.

Esto justifica que podamos tratar los sistemas como matrices, donde es evidente que si cambiamos los nombres de las incógnitas los sistemas son los mismos, es decir que la información de cada sistema está en los números, podemos entonces escribir las matrices que contienen esa información:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Veremos en lo que sigue como resolver los sistemas en forma matricial.

En general un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas puede escribirse como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos expresar las matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mxn} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mx1}$$

A es la matriz de coeficientes, X es la matriz de las incógnitas y b la matriz de términos independientes

El sistema lo escribimos entonces en forma equivalente como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ que indicamos en forma breve como: $AX = b$

Llamamos ***matriz ampliada*** del sistema $(A|b)$, a la matriz A de coeficientes a la que se agrega como última columna la matriz b de los términos independientes.

Una **solución** del sistema es una n-upla $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de números tales que reemplazando respectivamente x_1 por c_1, x_2 por $c_2, \ldots\ldots, x_n$ por c_n en **cada una** de las ecuaciones, se cumple la igualdad en **todas** ellas.

---

2. Operaciones elementales y sistemas de ecuaciones lineales

Si $AX = b$ es un sistema de ecuaciones, aplicando operaciones elementales de fila a la matriz $(A|b)$ ampliada con la columna ***b*** de términos independientes, se obtiene una matriz equivalente por filas, el sistema de ecuaciones correspondiente tiene las mismas soluciones que el de partida.

Ejemplo 2.1:

Supongamos que queremos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo mostrando que las operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada del sistema no son más que las operaciones que hacemos habitualmente en las ecuaciones. Resolveremos en paralelo con las ecuaciones y como matriz:

Ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Multiplicamos la primer ecuación por $\frac{1}{2}$, a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

A la segunda ecuación le restamos la primera, ya que si tenemos H=M y W=P, también es cierto que W-H=P-M:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - x - y - 2y = 3 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3y = 2 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por $-\frac{1}{3}$, a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

A la primera ecuación le restamos la segunda multiplicada por 2:

$$\begin{cases} x + 2y - 2y = 1 - 2(-\frac{2}{3}) \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Forma matricial

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$F_1 \leftarrow F_1 . \frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2(-\frac{1}{3})$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A_R} & \begin{matrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{matrix} \end{array}\right)$$

Hemos encontrado la solución: $x = \frac{7}{3},\ y = -\frac{2}{3}$

Llegamos a la escalonada y reducida por filas equivalente con A, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado la solución: $\boxed{x = \frac{7}{3},\ y = -\frac{2}{3}}$

El ejemplo anterior justifica que podemos resolver un sistema de ecuaciones llevándolo a su forma matricial y realizando operaciones elementales. La siguiente proposición lo enuncia formalmente.

Proposición 2.1: Si $AX = b$ es un sistema de ecuaciones lineales y **e** es una operación elemental de fila, entonces el sistema *e(A). X= e(b)* tiene las mismas soluciones que $AX = b$.

Demostración:

Sea $AX = b$ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Sea **c** = $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ una solución de $AX = b$, esto quiere decir que si reemplazamos las incógnitas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por estos números $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, se cumplen las igualdades*:*

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Caso 1:

Sea **e** la operación que multiplica la fila i de $(A|b)$ por un escalar $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ha_{i1} & ha_{i2} & ha_{i3} & \dots & \dots & hb_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Y recuperando las ecuaciones tenemos: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ ha_{i1}x_1 + ha_{i2}x_2 + \cdots + ha_{in}x_n = hb_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Veamos ahora que $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es solución de este nuevo sistema reemplazando $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por $(c_1, c_2, \dots, c_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ ha_{i1}c_1 + ha_{i2}c_2 + \cdots + ha_{in}c_n = hb_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Sólo hay que mirar la ecuación i, ya que las otras son iguales a las del sistema original y por lo tanto se cumplen las igualdades.

Ecuación i: $ha_{i1}c_1 + ha_{i2}c_2 + \cdots + ha_{in}c_n =$

$$= h\underbrace{(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n)}_{b_i \text{ porque es la ecuación original}} = hb_i$$

Luego $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es solución del sistema e(A).x = e(b), para este caso.

Caso 2:

Sea **e** la operación que reemplaza la fila i (F_i) por $F_i + hF_j$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{i1} + ha_{j1} & a_{i2} + ha_{j2} & a_{i3} + ha_{j3} & \dots & a_{in} + ha_{jn} & & b_i + hb_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & & b_m \end{array}\right)$$

Y recuperando las ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ (a_{i1} + ha_{j1})x_1 + (a_{i2} + ha_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ha_{jn})x_n = b_i + hb_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Veamos ahora que $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es solución:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ (a_{i1} + ha_{j1})c_1 + (a_{i2} + ha_{j2})c_2 + \cdots + (a_{in} + ha_{jn})c_n = b_i + hb_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Sólo hay que mirar la ecuación i, ya que las otras son iguales a las del sistema original y por lo tanto se cumplen las igualdades.

Ecuación i: $(a_{i1} + ha_{j1})c_1 + (a_{i2} + ha_{j2})c_2 + \cdots + (a_{in} + ha_{jn})c_n =$

$$= a_{i1}c_1 + ha_{j1}c_1 + a_{i2}c_2 + ha_{j2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n + ha_{jn}c_n =$$

$$(\underbrace{a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n}_{b_i}) + h\left(\underbrace{a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n}_{b_j}\right) = b_i + hb_j$$

Luego $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ es solución del sistema e(A).x = e(b), para este caso.

Caso3:

Sea **e** la operación de permutar F_i con F_k . Este caso es inmediato ya que es solamente permutar dos ecuaciones de lugar.

El enunciado quedó probado para cuando se aplica **una** operación elemental de cualquiera de los tres tipos que hay. También vale cuando se aplica, a las matrices A y b del sistema, un número finito de operaciones elementales de fila ya que es consecuencia de la aplicación iterada de este resultado.

En consecuencia, el sistema: e_1(**A**).x = e_1(**b**) tiene las mismas soluciones que **A**.x=**b**, es decir, son sistemas equivalentes.

Si se aplica una segunda operación elemental, resulta:

$e_2 \circ e_1(A)X = e_2 \circ e_1(b)$ equivalente a $e_1(A)X = e_1(b)$, y también equivalente a $AX = b$

Así, si se aplican k operaciones elementales hasta llegar a la escalonada y reducida por filas equivalente con A: $\underbrace{e_k \circ e_{k-1} \circ \ldots e_2 \circ e_1(A)}_{A_R} X = \underbrace{e_k \circ e_{k-1} \circ \ldots e_2 \circ e_1(b)}_{b^*}$,

el sistema $\boldsymbol{A_R X = b^*}$, tiene las mismas soluciones que $\boldsymbol{AX = b}$**.**

Aplicación a los distintos tipos de Sistemas lineales

El objetivo es encontrar las soluciones (o bien decidir que no hay) del sistema dado $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$. El método de aplicar operaciones elementales a la matriz ampliada $(A|b)$, hasta llegar a $(A_R|b^*)$ se conoce con el nombre de Método de Gauss – Jordan:

1) Llevamos el sistema $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ a su forma matricial, escribiendo la matriz ampliada $(A|b)$
2) Hacemos operaciones elementales por filas en la matriz hasta llegar a $(A_R|b^*)$.
3) A partir de la última matriz recuperamos las ecuaciones haciendo el producto : $A_R.X = b^*$
4) A partir de las nuevas ecuaciones tenemos un sistema equivalente con el original y encontramos la o las soluciones o concluimos que no las tiene.

Observación: un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede pensarse geométricamente como el problema de hallar la intersección entre dos rectas. Recordemos que dos rectas pueden cortarse en un punto, pueden ser coincidentes y en consecuencia tener infinitos puntos en común o pueden ser paralelas y no tener ningún punto en común. Un sistema cualquiera con más ecuaciones y más incógnitas, también presentará sólo estas 3 situaciones.

Mostraremos a continuación 3 sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas en los que veremos los 3 casos posibles: que tenga solución única, que tenga infinitas soluciones o que no tenga solución.

Ejemplo 2.2: Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

Escribimos la matriz:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$F_1 \leftarrow F_1 - F_2$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right) \quad \text{con } A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

Escribimos la matriz:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{con } A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

Escribimos la matriz:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0}_{A_R} & & \underbrace{-1}_{b^*} \end{array}\right)$$

Entonces:

Entonces:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hay solución única: $x = 3, \quad y = -1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$x + y = 2$

$0 = 0$

Por lo tanto, hay infinitas soluciones: $S\{(x, y): x = 2 - y, y \in \mathbb{R}\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$x + y = 2$

$0 = -1$ ABSURDO

Por lo tanto, no hay solución.

El siguiente teorema permite establecer comparando el rango de la matriz de coeficientes con el de la matriz ampliada si el sistema es compatible o incompatible.

Teorema (Rouché, Frobenius):

Sea $AX = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots.. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots.. + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots.. + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots.. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1) $AX = b$ es compatible si y sólo si $R(A) = R(A|b)$

($R(A)$indica el rango de A y $R(A|b)$ indica el rango de la matriz ampliada del sistema)

2) Además, si $R(A) = R(A|b) = n$ (n = número de incógnitas), entonces la solución es única, (sistema compatible determinado), si $R(A) = R(A|b) < n$, entonces tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).

Observación: Notemos que este teorema permite clasificar el sistema, no obtener las soluciones en caso que existan.

Si miramos los ejemplos anteriores tenemos:

a) $R(A) = R(A|b) = 2$, los rangos coinciden y además coinciden con el número de incógnitas, por lo tanto hay solución única.

b) $R(A) = R(A|b) = 1$, los rangos coinciden pero el número de incógnitas es mayor, por lo tanto hay infinitas soluciones.}

c) $R(A) \neq R(A|b)$, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen distinto rango, por lo tanto no hay solución.

Ejemplo 2.3:

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+2y+2z=4 \\ 2x\ -y\ -z=\ 1 \\ x\ +\ 2y\ -z=-3 \end{cases}$

Se forma la matriz ampliada $(A\ \ b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$ y se le aplica una sucesión de operaciones elementales (no necesariamente única) para llevarla a $(A_R|b^*)$, donde A_R es la reducida equivalente con *A* y b^*, la columna resultante de esa misma sucesión de operaciones elementales.

$(A_R|b^*)$ es **única** cualesquiera sean las operaciones elementales elegidas para reducir ***A.***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right),$$

$$\frac{-1}{3}F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right), \quad \begin{array}{c} F_1-F_2 \\ F_3-F_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right), \quad \frac{-1}{3}F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$F_2-F_3 \rightarrow \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A_R}\ \middle|\ \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array}}_{b^*}\right)$$

La matriz A_R reducida equivalente a ***A*** en este caso es la identidad.

El sistema así obtenido da las soluciones del sistema dado.

El sistema equivalente al de partida con notación usual y con la matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + z = 2 \end{cases}$$

Observemos que $R(A) = R(A|b) = 3$, por lo tanto por el Teorema de Rouché Frobenius hay **solución única.** Esa solución es : $x = 1, \quad y = \text{-}1, \quad z = 2$.

Ejemplo 2.4:

Este es un ejemplo de un sistema con infinitas soluciones (compatible indeterminado), se encontrará el conjunto de sus infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{cases}$$

Se construye la correspondiente matriz ampliada $(A|b)$ y se le aplican operaciones elementales hasta obtener $(A_R|b^*)$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 \leftarrow (F_2 - 2F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 - 3F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right) F_1 \leftarrow (F_1 + 2F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 - 2F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A_R|b^*)$$

En este, como en todos los casos, la sucesión de operaciones elementales aplicada **no** es única, no debe necesariamente ser la que se muestra ahí arriba, pero cualesquiera sean las operaciones elementales y el orden en que se apliquen, **la matriz final obtenida** $(\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{b}^*)$ **es siempre la misma, ésa es única.**

Observemos que $R(A) = R(A|b) = 2 < 3$, los rangos coinciden pero es menor al número de incógnitas, por lo tanto ya sabemos que tiene infinitas soluciones, debemos encontrar la expresión de ellas.

La matriz $(A_R|b^*)$ es la matriz ampliada correspondiente a un sistema equivalente (es decir: con las mismas soluciones) que el enunciado. Expresado como producto matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces: $\begin{cases} x + y - 10t = -9 \\ z - 7t = -7 \\ 0 = 0 \end{cases}$ del que se obtiene $\begin{cases} x = -9 - y + 10t \\ z = -7 + 7t \end{cases}$

Las letras y, t son variables libres, pueden adoptar cualquier número real, esto se indica con: $y, t \in \mathbb{R}$. En cambio, x, z son dependientes (dependen de los valores elegidos para y y para t).

El hecho de que haya al menos una variable libre, que recorre todos los números reales, hace que el conjunto de soluciones del sistema sea infinito.

En este ejemplo el **conjunto de infinitas soluciones** del sistema se expresa como:

$$\boxed{S = \{(x, y, z, t):\ x = -9 - y + 10t\ , \quad z = -7 + 7t,\ \ y, t \in \mathbb{R}\}}$$

O bien $\qquad S = \{(-9 - y + 10t, y, -7 + 7t, t):,\ \ y, t \in \mathbb{R}\}$

Si se quiere obtener una solución particular, se asignan números determinados a las variables libres (en este ejemplo *y, t)* y con esos valores se obtienen los de *x* y *z.*

Si elegimos $y = 0, t = 1$ obtenemos la solución: $x = 1, y = 0, z = 0, t = 1$.

Si elegimos $y = 2, t = -1$ obtenemos la solución: $x = -21, y = 2, z = -14, t = -1$.

Observación: La palabra "indeterminado" sugiere que las soluciones no pueden conocerse, esto no es así: las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado siguen todas una misma "ley" (que suele llamarse solución general), a partir de la cual se puede obtener cualquier solución particular, como las que se muestran en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.5:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad F_2 \leftarrow (F_2 - 3F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 - 2F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) F_2 \leftarrow (F_2 . (-1)) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftarrow (F_1 - F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) F_3 \leftarrow (F_3 + F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = (A_R|b^*)$$

En el sistema equivalente que se obtiene, queda la última ecuación $0x+0y+0z=-1$, imposible de resolver, equivale (cualesquiera sean x, y , z) a la igualdad falsa 0 = -1.

Por lo tanto, **el sistema no tiene solución, también decimos que es un sistema incompatible.**

Observemos que $R(A) \neq R(A|b)$, por lo tanto también podemos usar el Teorema de Rouché Frobenius para justificar que el sistema no tiene solución.

Los sistemas de ecuaciones son útiles para representan una gran cantidad de problemas. Veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6:

Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?

Para resolverlo llamamos A a la edad de Ana y J a la edad de Jaime y planteamos las ecuaciones:

Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime

Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo

$$\begin{cases} A = 3J \\ A + 15 = 2(J + 15) \end{cases}$$

Reacomodamos las ecuaciones, dejando las incógnitas de un lado de la igualdad y los números del otro:

$$\begin{cases} A - 3J = 0 \\ A - 2J = 15 \end{cases}$$

Ya estamos en condiciones de escribir la matriz ampliada y resolver:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 15 \end{array}\right) \quad F_2 \leftarrow (F_2 - F_1) \ \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \ F_1 \leftarrow (F_1 + 3F_2) \ \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Hemos llegado a la escalonada y reducida por filas, esto nos dice que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \end{pmatrix}$

Entonces $\begin{pmatrix} A \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \end{pmatrix}$ y por lo tanto el sistema tiene solución única $A = 45, \ J = 15$

Esas son las edades actuales de Ana y de su hijo Jaime, por lo tanto Ana tiene 30 años más que su hijo.

Ejemplo 2.7:

Una empresa de transportes gestiona una flota de 60 camiones, entre grandes, medianos y pequeños. Los grandes transportan una media diaria de 15000kg y recorren 400km. Los medianos transportan 10000kg y recorren 300km y los pequeños transportan 5000kg y recorren 100km. Diariamente los camiones transportan 475000kg y recorren 12500km entre todos. ¿Cuántos camiones de cada tipo gestiona la empresa?

Para resolverlo llamamos G a la cantidad de camiones grandes, M a la cantidad de camiones medianos y P a la cantidad de camiones pequeños y planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} G + M + P = 60 \\ 15000G + 10000M + 5000P = 475000 \\ 400G + 300M + 100P = 12500 \end{cases}$$

Tenemos entonces un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 15000 & 10000 & 5000 & 475000 \\ 400 & 300 & 100 & 12500 \end{array}\right)$$

$$F_2 \leftarrow (F_2 - 15000F_1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -5000 & -10000 & -425000 \\ 400 & 300 & 100 & 12500 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 - 400F_1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -5000 & -10000 & -425000 \\ 0 & -100 & -300 & -11500 \end{array}\right)$$

$$F_2 \leftarrow \left(F_2.(-\frac{1}{5000})\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & -100 & -300 & -11500 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftarrow (F_1 - F_2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & -100 & -300 & -11500 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 + 100F_2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & 0 & -100 & -3000 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow \left(F_3.(-\frac{1}{100}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftarrow (F_1 + F_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \qquad F_2 \leftarrow (F_2 - 2F_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Hemos llegado a la escalonada y reducida por filas, esto nos dice que:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} G \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$, el sistema tiene solución única:

La empresa tiene 5 camiones grandes, 25 medianos y 30 pequeños.

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son ceros.

Su notación matricial es $AX = O$ donde O indica una matriz columna nula.

Observación:

La importancia de los sistemas homogéneos reside en que son sistemas siempre compatibles.

Por ejemplo, en el sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 6z = 0 \\ 2x + y + 10z = 0 \\ 70x - \sqrt{2}y + 4z = 0 \end{cases}$, si reemplazamos las incógnitas por 0, seguro satisfacen las ecuaciones, por lo tanto, en cualquier sistema homogéneo, esa es una solución.

Todo sistema homogéneo es compatible: la solución **trivial** es aquella en la que se reemplazan todas las incógnitas por ceros, esta solución nula la tienen todos los sistemas homogéneos, por esa razón se llama trivial.

Si el sistema homogéneo tiene una única solución debe necesariamente ser la trivial. Si tiene infinitas soluciones, una de ellas debe ser la trivial.

Aplicando el teorema de Rouché Frobenius a un sistema homogéneo los rangos de ambas matrices siempre coinciden debido a que la columna que se agrega para construir la matriz ampliada es nula. Este número puede coincidir con el número n de incógnitas (compatible determinado) o ser menor que n (compatible indeterminado).

Los sistemas homogéneos se resuelven mediante operaciones elementales como los anteriores.

Ejercicios:

1) Representar en el plano los siguientes sistemas, indicar qué tipo de solución hay en cada caso: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases}$

2) Verificar que los valores dados son *soluciones* de los sistemas planteados:

a) x=1, y =2 para $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $\qquad$ b) x=1, y=1 para $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

c) {(x,y) ; x = -3y} para $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ d) x=15/9, y=8/9, z= -11/9 para $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y + 4z = -4 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

e) {(x, y, z) ; x =1+y, z=3y} para $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y=1 \end{cases}$

3) Resolver los siguientes sistemas por operaciones elementales y expresar la o las soluciones en caso de que existan. Clasificarlos por el teorema de Rouché-Frobenius. En los casos que haya infinitas soluciones dar dos soluciones particulares:

a) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1 \quad -x_3=6 \\ \quad x_2+x_3=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=1 \\ \quad u_2-u_3=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=3 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 3x \quad +5z=4 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+5x_2-x_3+2x_4=2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x-2y+3z-2w=0 \\ 3x-7y-2z+4w=0 \\ 4x+3y+5z+2w=0 \end{cases}$

4) Analizar la ***verdad*** o ***falsedad*** de las siguientes afirmaciones. Fundamentar la respuesta

a) Todo sistema homogéneo tiene al menos una solución.

b) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.

c) Un sistema homogéneo que no tiene una única solución, tiene infinitas soluciones.

d) Si un sistema no homogéneo no tiene solución única, debe tener infinitas soluciones.

e) Si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

f) La ecuación   x + y = 0 no tiene solución.

g) Si para cada ecuación del sistema hay alguna solución, entonces el sistema tiene solución.

h) Si un sistema es incompatible, entonces cada ecuación del mismo tampoco tiene solución.

5) Determinar (si existen) los valores de ***b*** para que los siguientes sistemas sean

i) compatible (en tal caso resolverlo, expresar la solución en la forma adecuada)

ii) incompatible

a) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+3x_4=1 \\ 3x_1 \quad +2x_3+7x_4=5 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 4y+3z=b \\ -x+3y+7z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+\frac{1}{2}z-3w=8 \\ -2x+2y-z+6w=b \end{cases}$

6) Determinar qué relación debe haber entre *a, b* y *c* para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$$

7) Si la terna $(2,1,-1)$ es **una *solución*** de $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=a \\ 2x_1 \quad +x_3=b \\ x_1+x_2 \quad =c \end{cases}$ hallar todas las soluciones del sistema. (piense dónde debe reemplazar 2, 1 y -1)

8) En cada caso determinar, si existen, los valores de ***k*** tales que el sistema resulte, respectivamente:

i) compatible determinado

ii) compatible indeterminado

iii) incompatible

(a) $\begin{cases} x_1+3x_2=4 \\ 2x_1+k.x_2=k+2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1+2x_2=4 \\ 3x_1+(k-1).x_2=k \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=k \\ x_1+k.x_2+x_3=1 \end{cases}$

9) Resuelve el problema de la Pila de monedas de Fibonacci planteado al principio del capítulo y analiza si la solución hallada por Fibonacci es correcta.

---

3. Determinante de una matriz.

El determinante de una matriz es un número real que se asigna SOLO A MATRICES CUADRADAS. Este número fue primeramente calculado para encontrar condiciones para que un sistema de ecuaciones de 2x2 tuviera solución única, esto motiva el estudio de los determinantes y nos dará una poderosa herramienta para analizar los sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea cuadrada.

Si A está en $\mathbb{R}^{nxn}$ el determinante de A, que se nota **det(A)** o $|A|$, es un número real que se puede pensar como una función, con dominio en $\mathbb{R}^{nxn}$ y codominio en $\mathbb{R}$:

det**:** $\mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}$ que a toda matriz A en $\mathbb{R}^{nxn}$ le asigna el único número **det(A)** $\in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1:

Sea $A = (3)$ una matriz de 1x1, el determinante de A, que se escribe det(A) o $|\boldsymbol{A}|$ es 3.
Es decir es el único número que tiene la matriz.

Ejemplo 3.2:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ una matriz de 2x2.

Para calcular el determinante, elegimos cualquier fila o cualquier columna de la matriz, elijamos la fila 1, tenemos entonces:

det(A)= $2.\ (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{1+1}}\ .\boldsymbol{det}(\boldsymbol{4}) \quad + \quad \boldsymbol{3.}\ (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{1+2}}\ .\boldsymbol{det}(\boldsymbol{5})$=

a_{11}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1,

a_{12}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1,

det(A)= 2.4 – 3.5 = 8-15= - 7

Es decir que de manera práctica podemos calcularlo como el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo 3.3:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$una matriz de 3x3.

Para calcular el determinante, elegimos cualquier fila o cualquier columna de la matriz, elijamos la fila 1, tenemos entonces:

det(A)= $1.\ (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{1+1}}\ .\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{3}.\ (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{1+2}}\ .\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} + (\boldsymbol{-1}).\ (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{1+3}}.\ \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix}$=

a_{11}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1,

a_{12}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1,

a_{13}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1,

=1.1 . $(\mathbf{0.1-4.2}) + \mathbf{3.(-1).(2.1-1.2)+(-1).1.(2.4-1.0) = -8+0-8=-16}$

Si eligiéramos otra fila o cualquier columna el resultado sería el mismo. Desarrollemos el determinante por la columna 2:

det(A)= 3. $(\mathbf{-1})^{\mathbf{1+2}}$. $\boldsymbol{det}\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix} + \mathbf{0}.\ (\mathbf{-1})^{\mathbf{2+2}}.\boldsymbol{det}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix} + \mathbf{4}.\ (\mathbf{-1})^{\mathbf{3+2}}.\ \boldsymbol{det}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$**=**

a_{12}

(-1) elevado al número de fila más

Determinante de la matriz que queda sacando fila1,

a_{22}

(-1) elevado al número de fila más

Determinante de la matriz que queda sacando fila2,

a_{32}

(-1) elevado al número de fila más

Determinante de la matriz que queda sacando fila3,

=3. $(-1).(\mathbf{2.1-1.2})+\mathbf{0.1.}\big(\mathbf{1.1-1.(-1)}\big)+\mathbf{4.(-1).(1.2-2.(-1)) = 0+0-16=-16}$

Se define a continuación, por recurrencia, el determinante de cualquier matriz **cuadrada**:

Definición: Sea A matriz de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}}$,

1) Si *n= 1*, A = (a_{11}), se define **det(A) =** a_{11} **o** $|A|$**=** a_{11}

2) Si *n es cualquier número natural mayor o igual que 2*, se define, dada cualquier fila ***i*:**

det(A)= $\boldsymbol{a_{i1}}.(-1)^{\boldsymbol{i+1}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|1)\big)+\boldsymbol{a_{i2}}.(-1)^{\boldsymbol{i+2}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|2)\big)+\cdots+\boldsymbol{a_{in}}.(-1)^{\boldsymbol{i+n}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|\boldsymbol{n})\big)$

o también, dada cualquier columna ***j*:**

det(A)= $\boldsymbol{a_{1j}}.(-1)^{1+\boldsymbol{j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(1|\boldsymbol{j})\big)+\boldsymbol{a_{2j}}.(-1)^{2+\boldsymbol{j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(2|\boldsymbol{j})\big)+\cdots+\boldsymbol{a_{nj}}.(-1)^{\boldsymbol{n+j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{j})\big)$

Por comodidad escribimos ambas expresiones con la notación sigma:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \underbrace{\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ik}}.\overbrace{(-1)^{\boldsymbol{i+k}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|\boldsymbol{k})\big)}^{\alpha_{\boldsymbol{ik}}}} = \underbrace{\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{kj}}.\overbrace{(-1)^{\boldsymbol{k+j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\big)}^{\alpha_{\boldsymbol{kj}}}}$$

Está fija la fila i, va variando la columna

Está fija la columna j, va variando la fila

Se llama ***adjunto*** (o ***cofactor***) del coeficiente a_{ij} al valor **α$_{\mathbf{i\,j}}$** = $(-1)^{i+j}$. **det** $A(i\,/\,j)$ **.**

El ***determinante*** de A es la suma de los productos de los coeficientes de una fila (o una columna) cualquiera de A por sus respectivos cofactores, es decir, desarrollado por la fila *i* :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\alpha_{ij} = a_{i1}.\alpha_{i\,1} + a_{i2}.\alpha_{i\,2} + \ldots + a_{in}.\alpha_{i\,n}$$

Observación: El determinante está bien definido: el valor det(A) es único cualquiera sea la fila o la columna de A que se elija para calcularlo.

Ejemplo 3.4:

Calcular det(A) siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Calcularemos por la fila 2: det(A) = $a_{21}.\ \alpha_{21} + a_{22}.\alpha_{2\,2} + a_{23}.\alpha_{23}$,

calculando primero los cofactores $\boldsymbol{\alpha_{2\,j}}$:

$\alpha_{2\,1} = (-1)^{2+1}$. det A(2/1) = (- 1) . $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **= -1**

$\alpha_{2\,2} = (-1)^{2+2}$ .det A(2/2) = $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ = **- 9**

$\alpha_{2\,3} = (-1)^{2+3}$. det A(2/3) = $(-1).\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = **- 3**

Entonces:

det(A) = 2 . (- 1) + (- 1). (- 9) + (- 2) . (- 3) = 13

El mismo valor 13 se obtiene calculando det(A) por cualquier otra fila o por cualquier columna. Tomando por ejemplo la primera columna:

det (A) = $3.(-1)^{1+1}.\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ + $2.(-1)^{2+1}.\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **+** 0 = 13

Ejemplo 3.5:

Calcular det (A) siendo A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcularemos por la fila 1:

det (A) = $\underbrace{2.(-1)^{1+1}}_{2}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A(1/1)} + \underbrace{3.(-1)^{1+2}}_{-3}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A(1/2)} + 0 + 0 =$

$$= 2.\left[\overbrace{\underbrace{2.(-1)^{1+1}}_{2}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2} + 0 + 0}^{\text{det } (A(1/1)) \text{ por fila 1}}\right] - 3\left[\overbrace{\underbrace{1.(-1)^{1+1}}_{1}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2} + 0 + 0}^{\text{det } (A(1/2)) \text{ por fila 1}}\right] =$$

$$2.2.2 - 3.1.2 = 8 - 6 = 2$$

Entonces: **det(A) = 2**

Observemos que siempre nos conviene elegir la fila o la columna que tenga más ceros para hacer menos cuentas. En este ejemplo podríamos haber elegido la columna 4:

A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcularemos por la columna 4:

det (A) = $0 + 0 + 0 + \underbrace{2.(-1)^{4+4}}_{2}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A(4/4)} =$

$$= 2.\left[\overbrace{0 + 0 + \underbrace{1.(-1)^{3+3}}_{1}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{1}}^{\text{det } (A(4/4)) \text{ por columna 3}}\right] = 2.1 = 2$$

Entonces: **det(A) = 2**

Algunas propiedades del determinante

A continuación se enuncian algunas propiedades de los determinantes. Existen además otras propiedades no incluidas en los contenidos de esta asignatura. Demostraremos sólo algunas. Por la definición del determinante, en la que hemos mencionado que puede calcularse por fila o por columna, todas las propiedades enunciadas a continuación para las filas vale también para las columnas de la matriz.

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$:

Propiedad 1) $\mathbf{det}\left(\boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{A})\right) = \boldsymbol{c}.\mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})$

Si B es la matriz que se obtiene de A luego de aplicar la operación elemental de multiplicar todos los coeficientes de **una** fila (respectivamente una columna) por un escalar *c* entonces el $\det(B) = c.\det\,(A)$

Demostración:

Llamemos *B* a la matriz que se obtiene multiplicando la fila k de *A* por c, los elementos de *B*, son iguales a los de *A*, salvo los de la fila k, que son los de *A* multiplicados por el número c, entonces : $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Calculamos el det(*B)* por la fila k,

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b_{kj}}.(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k+j}}\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\right)$$

Por la definición de $B,\ det\left(B(k|j)\right) = det\left(A(k|j)\right)$, porque en ambas se suprime la fila *k* que es la única en la que difieren, y $\boldsymbol{b_{kj}} = \boldsymbol{c}.\boldsymbol{a_{kj}}$**,** entonces se tiene:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}.\boldsymbol{a_{kj}}.(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k+j}}\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\right) = \boldsymbol{c}.\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{kj}}.(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k+j}}\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\right)\right) = \boldsymbol{c}.\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$$

Corolario de la Propiedad 1 Si consideramos la matriz $c.A$ (producto del escalar *c* por la matriz *A*), entonces: $\det(c.A) = c^n.\det(A)$

Propiedad 2) Si una fila (respectivamente una columna) de *A* tiene todos sus coeficientes iguales a 0 entonces det(*A)* = 0.

Demostración:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \text{fila k} \\ \\ \\ \end{array}$

Desarrollamos el determinante por la fila k de A:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.(-1)^{k+j} det\big(A(k|j)\big) = \sum_{j=1}^{n} 0.(-1)^{k+j} det\big(A(k|j)\big) = 0$$

Propiedad 3) Sean A y B matrices de $\mathbb{R}^{nxn}$ entonces $\det(A.B) = \det A.\det B$

Observaciones

1) Dado un n fijo, la propiedad 4 se generaliza a cualquier número finito de matrices $n \times n$

Si M_1, M_2,..., M_k son matrices $n \times n$, entonces
$\det(M_1.M_2.....M_k) = \det M_1.\det M_2.....\det M_k$.

2) Esta propiedad del determinante es, tal como se indica, para el **producto** de matrices, **no** existe ninguna con relación a la suma de matrices

Propiedad 4) Para la matriz identidad I_n , $\det(I_n) = 1$, cualquiera sea *n*.

Demostración:

Lo demostraremos por inducción sobre el número de filas de la matriz, el enunciado entonces es: P(n): "$\det(I_n) = 1$ " para todo n, natural mayor o igual a 1.

1) Para n=1 es trivial por la definición. Por lo tanto vale P(1).

2) Si $\underbrace{\mathrm{P(k)}: \det(I_k) = 1}_{Hipótesis\ inductiva}$ **entonces** $\underbrace{\mathrm{P(k+1)}: \ \det(I_{k+1}) = 1}_{Tesis\ inductiva}$

Para calcular $\det(I_{k+1})$ lo desarrollamos por la columna 1, entonces:

$$\det(I_{k+1}) = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k) + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k)$$

Columna con un solo elemento no nulo $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_k) = 1$ por hipótesis

Por lo tanto $\det(I_{k+1}) = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k) = 1.1.1. = 1$

Hemos probado los dos pasos de la inducción, por lo tanto $\det(I_n) = 1$ para todo natural.

Propiedad 5) $\mathbf{det}\big((\boldsymbol{F_i} \leftarrow \boldsymbol{F_i} + \boldsymbol{cF_k})(\boldsymbol{A})\big) = \mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})$

Si B es la matriz que se obtiene de A luego de aplicar la operación elemental de sumarle a la fila i la fila k multiplicada por un escalar *c* , distinto de 0, entonces el $\det(B) = \det\,(A)$

Propiedad 6) $\mathbf{det}\big((\boldsymbol{F_i} \leftrightarrow \boldsymbol{F_k})(\boldsymbol{A})\big) = -\mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})$

Si B es la matriz que se obtiene de A luego de aplicar la operación elemental de permutar la fila i con la fila k, entonces $\det(B) = -\det\,(A)$

Propiedad 7) Condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa:

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$,

A tiene inversa **si y sólo si** $\det\,(A) \neq 0$.

El enunciado afirma dos cosas:

1) Si A tiene inversa **entonces** su determinante es distinto de 0.

2) Si el determinante de A es distinto de 0 **entonces** A tiene inversa.

Demostración de 1):

Sabemos que A tiene inversa, entonces existe A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$

Cuando dos matrices son iguales su determinante también lo es, (notar que no es cierto la recíproca, es decir si dos matrices tienen el mismo determinante no tienen por qué ser iguales), por lo tanto:

$\det(A.A^{-1}) = \det(I)$ y por las propiedades 4 y 5 se tiene que $\det(A).\det(A^{-1}) = 1$

Tenemos entonces un producto de números reales igual a 1, por lo tanto ninguno de los dos factores puede ser 0, en particular **determinante de A es distinto de 0**.

Demostración de 2):

Sabemos que el determinante de A es distinto de 0, queremos ver que A es invertible.

Para eso alcanza con probar que A es equivalente por filas con la identidad.

Si le aplicamos un número finito de operaciones elementales a A para llegar a la escalonada y reducida por filas equivalente con A, el $\det(A_R)$ será:

* igual al de A, o
* cambiará de signo con el de A o
* será un número, no nulo, multiplicado por el determinante de A, por las propiedades 1, 5 y 6.

Es decir que si $\det(A) \neq 0$ entonces $\det(A_R) \neq 0$, entonces A_R no puede tener una fila de 0, porque si así fuera su determinante valdría 0, esto quiere decir que $A_R = I$, por lo tanto **A tiene inversa**.

Esta importante propiedad nos garantiza una condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa.

Propiedad 8) Si la matriz A tiene inversa entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Demostración:

Sabemos que A tiene inversa , entonces : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Tomemos una igualdad: $A^{-1}.A = I_n$

Aplicamos determinante a ambos lados, ya que si las matrices son iguales sus determinantes también:

$$\underbrace{\det(A^{-1}.A)}_{\boxed{\det(A^{-1}).\det(A) \text{ por propiedad 3}}} = \underbrace{\det(I_n)}_{\boxed{\det(I_n) = 1 \text{ por propiedad}}}$$

Entonces: $\det(A^{-1}).\det(A) = 1$

Es un número real distinto de 0, por

Entonces: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Propiedad 9) Dado un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas $AX = b,$ tiene solución única **si y sólo si** A tiene inversa.

Demostración: 1) $\underbrace{AX = b \text{ tiene solución única}}_{hipótesis}$ entonces $\underbrace{A \text{ tiene inversa}}_{tesis}$

Como $AX = b$ tiene solución única, sabemos por el Teorema de Rouché Frobenius que $R(A) = R(A|b) = n$, es decir que el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Como el sistema tiene la misma cantidad de incógnitas que de ecuaciones, si $R(A) = n$ la matriz A_R no tiene filas de ceros, por lo tanto $A_R = I_n$, y por lo tanto $\boldsymbol{A}$ **tiene inversa**.

2) $\underbrace{A\ tiene\ inversa}_{hipótesis}$ entonces $\underbrace{AX = b \text{ tiene solución única}}_{tesis}$

Como A tiene inversa entonces A es equivalente por filas con la identidad.

Entonces $R(A) = n$ y como $(A|b)$ tiene n filas, si A_R no tiene filas nulas $(A_R|b^*)$ tampoco tiene filas nulas y por lo tanto $R(A|b) = n$.

Los rangos coinciden y coinciden con el número de incógnitas por lo tanto, por el Teorema de Rouche Frobenius, **el sistema** $\boldsymbol{AX = b}$ **tiene solución única.**

Ejercicios:

10) Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

11) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que det(A)= 5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices, indicando las propiedades usadas:

a) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2.d & 2.e & 2.f \\ 3.g & 3.h & 3.i \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

d) $3A$ ***e)*** A^2 ***f)*** $\frac{1}{2}(A^{-1})$

12) Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$ una matriz triangular inferior. Demostrar que $\det(A) = a.c.f.j$

13) Sean A, B, C matrices *nxn*, tales que C tiene inversa y **A = C.B.C** $^{-1}$**.**

Probar que det(A) = det(B). Fundamentar cada paso de la prueba.

14) Aplicación importante de la propiedad 5):

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Si queremos calcular su determinante tendremos que calcular 4 determinantes de 3x3. Podemos reducir el problema aplicando la única operación elemental que no cambia el valor del determinante. **La matriz obtenida será distinta, será equivalente por filas con la original, pero su determinante es el mismo.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \leftarrow (F_1 - 3F_3) \\ F_4 \leftarrow (F_4 + F_3) \end{matrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por las operaciones que hemos aplicado, sabemos que $\det(A) = \det(B)$, calculamos entonces $\det(B)$ por columna 1:

$$\det(B) = 0 + 0 + \underbrace{1.(-1)^{1+3}}_{1}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det(A(1/3))} + 0 =$$

$\det(A(1/3))$ por fila 3

$$= 1.\left[1.(-1)^{3+1}.det\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 0 + 0\right] = 1.1.1(0+5) = 5$$

Hemos reducido el cálculo del determinante de una matriz de 4x4 al cálculo de un determinante de una matriz de 3x3.

a) Utilice las propiedades para calcular los siguientes determinantes:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}-2 & 8 & 5\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}6 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & -7\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

b) Utilice las propiedades para llevar la siguiente matriz a una triangular superior y calcule su determinante: $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$

En el ejercicio 3 probó que si una matriz es triangular inferior su determinante es el producto de los elementos de la diagonal. ¿Si la matriz es triangular superior vale lo mismo? Justifique.

15) Si A es una matriz 5x5 y el det (A) **= k**, hallar y justificar:

i) det (8.A) ii) $(6.A)^9$

16) Si B es una matriz *nxn* y el det B **= 10**, hallar det ($\frac{3}{4}$.B). Justificar.

17) Si *A*, *B*, C son matrices 5x5, det(A)=3, det(*B)*=2 y det(*C)*=6, indicar cuánto valen:

a) $det\left(A.\left(\frac{1}{3}B\right).A^3(5B^{-1})\right)$

b) $det\left(\left(\frac{1}{2}B\right).A^4(B.A)^{-1}\right)$

c) $det\left(\left(\frac{5}{3}(B.C)\right)^3.\left((2.B)A^{-1}\right)^4(C.B.A)^{-1}\right)$

<u>Mencionar todas las propiedades usadas en cada paso. Justificar todas las respuestas.</u>

18) Decidir si las siguientes matrices tienen o no inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19) Hallar los valores de *k* para que las siguientes matrices tengan inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ -(k-2) & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & k+5 \end{pmatrix}$$

20) Sean A, B matrices *nxn*. Decidir por propiedades del determinante si las siguientes afirmaciones son V o F. Justificar.

a) Si A no tiene inversa, entonces A.B no tiene inversa

b) Si A tiene inversa y B no, entonces A.B no tiene inversa.

c) Si A.B no tiene inversa, entonces ni A ni B tienen inversa.

d) Si A.B no tiene inversa, entonces al menos una de las dos, A o B, no tiene inversa.

e) Si det(A)=det(B) entonces A=B

21) Decidir si hay valores de *k* (y encontrarlos) para los que el siguiente sistema sea compatible determinado, justificar la respuesta.

$$\begin{cases} 3(k+5).x_1 + 9.x_2 - x_3 = b_1 \\ \qquad 6.x_2 + 12.x_3 = b_2 \\ 5.x_1 \quad + (1-k).x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

22) Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{pmatrix}$

---

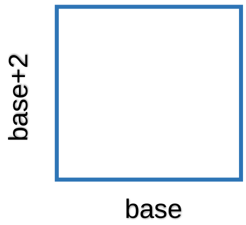
4. ANEXO: APLICACIONES

Un gran número de problemas se representan mediante sistemas de ecuaciones lineales como hemos visto en los ejemplos 2.6 y 2.7.

En los siguientes problemas sólo nos ocuparemos de hallar las ecuaciones que modelizan el problema, su resolución la dejamos como ejercicio:

1) Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2cm más que su base y cuyo perímetro es igual a 24cm. Calcular las dimensiones del rectángulo.

Podemos representar gráficamente la situación:



Perímetro=2.altura+2.base

Llamando a a la altura y b a la base del rectángulo, tenemos que:

$\begin{cases} a = 2 + b \\ 2a + 2b = 24 \end{cases}$ o equivalentemente $\begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + 2b = 24 \end{cases}$

Por lo que queda por resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

2) Una editorial edita 3 calidades de libros: encuadernación rústica, con pasta dura y de lujo. Para los rústicos, la empresa gasta en promedio \$50 en papel, \$20 en ilustraciones y \$30 en las pastas, para los de pasta dura gasta \$100 en papel, \$40 en ilustraciones y \$80 en pastas y para los de lujo, \$200 en papel, \$120 en ilustraciones y \$240 en pastas. Si el presupuesto permite \$2 350 000 en papel, \$1 100 000 en ilustraciones y \$2 050 000 es pastas. ¿Cuántos libros de cada categoría pueden producirse?

Si llamamos R a la cantidad de libros de encuadernación rústica, P a los de pasta dura y L a los de lujo, tenemos que:

$$\begin{cases} 50R + 100P + 200L = 2\,350\,000 \\ 20R + 40P + 120L = 1\,100\,000 \\ 30R + 80P + 240L = 2\,050\,000 \end{cases}$$

Luego, la respuesta se obtiene resolviendo este sistema de ecuaciones.

Este problema fue extraído del libro “Algebra lineal con aplicaciones” de George Nakos y David Joyner.

<u>Bibliografía</u>

- R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010

- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998

- Swokoski, Earl W. y Cole, Jeffery A., **Algebra y trigonometría con geometría analítica,** 11ma ed., Editorial Thomson, 2006