Matemática 3

Prof. Kudraszow Nadia

Facultad de Informática – UNLP

2025

Probabilidad - Conceptos fundamentales

Introducción

- La Teoría de Probabilidades es una rama de la Matemática, que en sus orígenes se relacionó con la resolución de problemas vinculados con los juegos de azar.
- Hoy en día, tiene aplicaciones en situaciones muy diversas, ya que se utiliza para estudiar cualquier fenómeno donde no se puede tener certeza del resultado. Este tipo de fenómeno se llama **experimento aleatorio**.
- La teoría de probabilidades brinda herramientas útiles para manejar este tipo de datos.

Agenda

Experimento aleatorio y espacio muestral

Definiciones:

- Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no puede predecirse con certeza.
- El **espacio muestral** Ω o S es el conjunto de todos los resultados posibles.

Experimento aleatorio y espacio muestral

Ejemplos

- El lanzamiento de un dado equilibrado puede dar lugar a 6 resultados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, y el espacio muestral en este caso es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Arrojar una Moneda: $S = \{C, X\}$ (cara/ceca).
- Arrojar una moneda hasta que sale cara: $S = \{C, XC, XXC, XXXC, \dots\}$.
- Elegir un punto al azar en un disco de radio r: $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

Un espacio muestral puede ser finito si tiene un número finito de elementos, puede ser infinito numerable (sus elementos se pueden enumerar), o infinito no numerable.

Eventos

Definiciones:

- Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral, es decir A es un evento si $A \subseteq S$.

- Los eventos pueden ser:
  - **Elementales o simples:** un solo resultado.
  - **Compuestos:** unión de resultados (ej.: obtener un número par).

Al realizar un experimento aleatorio se dice que ha ocurrido el evento A, si el resultado obtenido pertenece a A.

Eventos: implicación y contrario

Implicación: A implica B si al ocurrir A ocurre B.

Ejemplo

Al lanzar un dado: $A = \{4\}$, $B = \{$ el resultado es múltiplo de $2\} \Rightarrow A \subseteq B$.

Complemento: Dado A, se define A^c , como aquel que se ocurre si y sólo si no ocurre A.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ al lanzar un dado, entonces $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$.

Eventos: unión e intersección

Unión de eventos Se dice que el evento $C = A \cup B$ ocurre, si y sólo si ocurre A , B o ambos (o simplemente ocurre A o B).

Intersección de eventos. Se dice que el evento $C = A \cap B$ ocurre, si y sólo si ocurren A y B.

Ejemplo

Al lanzar un dado: Si
$A = \{$el resultado es menor o igual que tres $\}$,
$B = \{$el resultado es par$\}$.
Entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ y $A \cap B = \{2\}$.

Eventos incompatibles y seguro

evento imposible. *evento imposible* es aquel que no ocurre nunca, se denota $\emptyset$ (es el conjunto vacío).

eventos incompatibles. Dos *eventos* son *incompatibles o mutuamente excluyentes* cuando al ocurrir uno de ellos no ocurre el otro, o equivalentemente, cuando su intersección es el evento imposible.

Ejemplo

Al lanzar un dado: Si
$A = \{$el resultado es menor o igual que tres $\}$,
$B = \{$el resultado es mayor a 5$\}$.
Entonces $A \cap B = \emptyset$.

Frecuencias y probabilidad

Ejemplo

Si obtengo m veces *cara* en n tiradas de una moneda, la frecuencia relativa del evento $\{cara\}$ es $\frac{m}{n}$.

- Al aumentar n, ¿qué pasa? Ver simulación en moneda.gif.
- La probabilidad de $\{cara\}$ se interpreta como el límite *ideal* de estas frecuencias.

Frecuencia relativa

Sea un evento A asociado a un experimento aleatorio ε. Si repetimos n veces el experimento y denotamos n_A al número de veces que ocurre A, definimos la **frecuencia relativa** de A como:

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

Interpretación

f_A es la proporción de veces que ocurre A en n repeticiones de ε.

Propiedades de la frecuencia relativa

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. $f_A = 1$ si y sólo si A ocurre siempre
3. $f_A = 0$ si y sólo si A nunca ocurre
4. Si A y B son mutuamente excluyentes:

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B$$

De la frecuencia a la probabilidad

Queremos asignar un número a cada evento A que exprese qué tan *probable* es que ocurra. Una opción natural es tomar f_A, pero surge el problema:

Pregunta

¿Cuántas repeticiones n necesitamos para que f_A sea un valor estable?

Ejemplo: lanzamiento de un dado

Sea A: "sale cara".

- En 100 lanzamientos: $n_A = 57 \implies f_A = 0.57$
- En otros 100 lanzamientos: $n_A = 103 \implies f_A = 0.515$

Conclusión

El valor de f_A depende de n y de la muestra, pero a medida que n aumenta, f_A tiende a estabilizarse.

Motivación

- En la práctica no podemos repetir infinitamente un experimento.
- Buscamos asignar a cada evento A un número que no dependa directamente de la experimentación finita.
- Este número será lo que llamaremos **probabilidad de** A.

Definición axiomática (Kolmogórov)

Idea central

La probabilidad se define como una función P que asigna a cada evento A un número real $P(A)$ cumpliendo los axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. $$\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Unión de más de dos conjuntos

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección de conjuntos:

Unión

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \; = \; \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : \exists i \text{ tal que } x \in A_i\}$$

Es decir, x pertenece a la unión si pertenece **a alguno** de los conjuntos A_i. Para una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ se generaliza a

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

La definición axiomática no nos provee una formula para calcular probabilidades pero si nos da herramientas para hallarlas a partir de cierta información básica.

Ejemplo

Calcular la probabilidad de sacar cara (y cruz) al tirar una moneda equilibrada.

Recordemos: el espacio muestral es $S = \{C, X\}$.
Podemos escribir $S = \{C\} \cup \{X\}$.
Por los axiomas 2 y 3:

$$1 = P(S) = P(\{C\}) + P(\{X\}). \tag{1}$$

Como la moneda es equilibrada $P(\{C\}) = P(\{X\})$.
Reemplazando en (1) tenemos que $P(\{C\}) = 0.5$ y por lo tanto $P(\{X\}) = 0.5$

Ejemplo

Ahora tenemos otra moneda pero trucada y la probabilidad de sacar cara en ella es el triple que la probabilidad de sacar ceca. Calcular la probabilidad de sacar cara al tirar la moneda trucada.

Al igual que antes podemos escribir $S = \{C\} \cup \{X\}$.
Por los axiomas 2 y 3:

$$1 = P(S) = P(\{C\}) + P(\{X\}). \tag{2}$$

Ahora la moneda no es equilibrada: $P(\{C\}) = 3P(\{X\})$.
Reemplazando en (2) tenemos que $4P(\{X\}) = 1$.
Luego, $P(\{X\}) = 1/4$ y $P(\{C\}) = 3/4$.

Probabilidad del evento Imposible

$$P(\emptyset) = 0$$

Demostración:

Siendo A un evento cualquiera podemos escribir $A \cup \emptyset = A$
Además $A \cap \emptyset = \emptyset$, entonces por axioma 3

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

O sea que

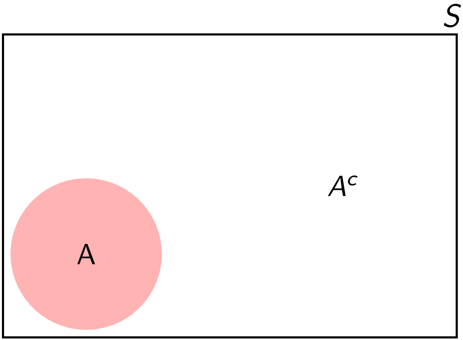
$$P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$

despejando

$$P(\emptyset) = 0$$

Probabilidad del Complemento

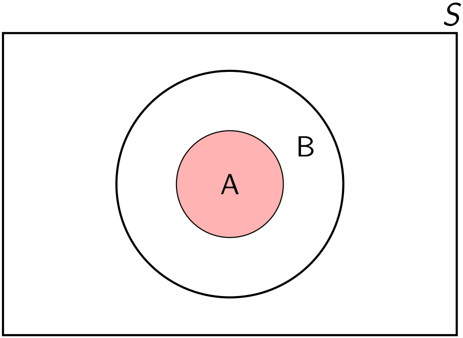
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



Observar: $A \cup A^c = S$

Eventos Anidados

Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$



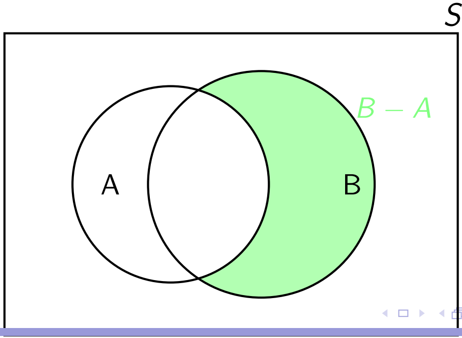
Observar: $B = A \cup (B \cap A^c) = A \cup (B - A)$

Diferencia de sucesos

Si $A \subseteq B$, entonces

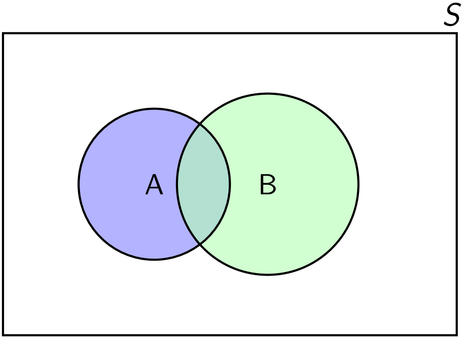
$$P(B - A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A).$$

En general, $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.



Unión de Dos eventos

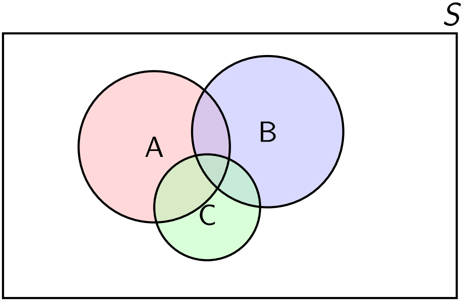
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Observar: $A \cup B = (B - A) \cup A$

Unión de Tres eventos

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\
& - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
& + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$



Ejercicio

En cierto grupo de interés de usuarios de Instagram, 60 % de los usuarios siguen a cierto influencer local, 80 % a cierto influencer internacional y 50 % de todos los usuarios siguen a ambos influencers. Si se elige un usuario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga a

1. por lo menos a uno de los dos influencers?
2. exactamente a uno de los dos influencers?

Probabilidad en un espacio muestral finito

Sea $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. $\#S =$número de elementos de S$=n$

Si $A_i = \{a_i\}$ son los eventos elementales, entonces:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

y se cumple que

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Es decir: la suma de las probabilidades de todos los eventos elementales es igual a 1.

Espacios muestrales equiprobables

Si todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad:

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = p,$$

entonces,

$$np = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{n}.$$

Definición: Un espacio muestral S se llama **equiprobable** si todos los eventos elementales tienen probabilidad $\frac{1}{n}$.

Probabilidad de un evento en un espacio equiprobable

Sea $B \subseteq S$ tal que $\#B = k$, es decir, B contiene k elementos.

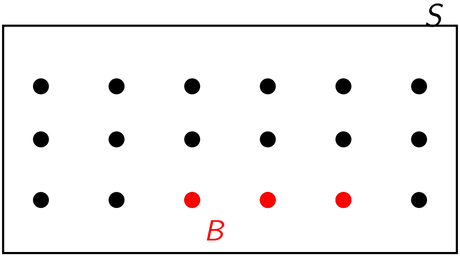
La probabilidad de B se obtiene como:

$$P(B) = \sum_{a_i \in B} P(a_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{k \text{ veces}} = \frac{k}{n}.$$

$$\boxed{P(B) = \frac{\#B}{\#S}}$$

Ejercicio

En una caja hay 18 pelotitas iguales en tamaño, 3 son rojas y 15 negras. Si una persona saca al azar una pelotita sin mirar ¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelotita roja?



Herramientas para calcular número de elementos de un evento finito

Principio multiplicativo (Regla del producto):

Si un experimento consta de k etapas, donde la primera puede realizarse de n_1 formas, la segunda de n_2 formas, ..., y la k-ésima de n_k formas, entonces el número total de formas de realizar el experimento es:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

Ejemplo

Un experimento incluye lanzar un par de dados, uno azul y otro rojo y observar los números obtenidos. Encontrar la cantidad de elementos en S y representarlo.

Resolución.

- Dado rojo: 6 posibles resultados.
- Dado azul: 6 posibles resultados.

$$\#S = 6 \cdot 6 = 36.$$

dado rojo \ dado azul	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Permutaciones

Número de formas de ordenar n objetos distintos:

$$P(n) = n!$$

Más generalmente, el número de formas de ordenar r objetos de un total de n es:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejemplo

Ordenar las letras A, B, C: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
P(3)=3!=6

Permutaciones

Ejemplo

En la fiesta de fin de año de una pequeña compañía los nombres de 3 empleados se han de sacar al azar, **sin reposición**, de un tazón que contiene los nombres de 30 empleados de la compañía. La persona cuyo nombre sea sacado primero ganará un vino espumante y aquellos cuyos nombres se saquen en segundo y tercero una taza y una lapicera, respectivamente. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral asociado a este experimento?

Debido a que los premios otorgados son diferentes tengo que ver todas las formas distintas de ordenar 3 empleados de un total de 30. Luego

$$\#S = P(30, 3) = \frac{30!}{27!} = (30)(29)(28) = 24360$$

Combinaciones

Número de formas de elegir r objetos de n, sin importar el orden:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Ejemplo

Si en el sorteo del ejemplo anterior los 3 premios fueran iguales. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral asociado a ese experimento?

Como los premios otorgados son iguales ya no es necesario contar los casos ordenados. Luego

$$\#S = C(30,3) = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3!(27)!} = \frac{(30)(29)(28)}{6} = 4060$$

Extraciones con reposición

Ejemplo

Volvemos a la situación original del sorteo del ejemplo anterior con 3 premios distintos. Si luego de sacar un nombre se vuelve a colocar en el tazón. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral asociado a ese experimento?

Como los premios otorgados son distintos hay que contar los casos ordenados, pero las opciones para cada caso no se reducen porque siempre elijo entre 30.
Así que, estoy en el caso del principio multiplicativo con 3 etapas y cada etapa puede realizarse de 30 formas distintas.
Luego

$$\#S = (30)(30)(30) = 27000$$

Ejercicio

En el experimento donde se arrojan un dado azul y otro rojo que vimos antes calcular

- la probabilidad de que en el dado rojo salga un número par
- la probabilidad de que salgan números iguales en ambos dados
- la probabilidad de que salgan números distintos en ambos dados
- la probabilidad de que en el dado rojo salga un número par o salgan números iguales en ambos dados