Métodos de integración

Esta parte de la materia está dedicada a estudiar distintos métodos que nos resultarán útiles para calcular primitivas. Recordemos que, cuando queremos calcular una primitiva de una función f, lo que buscamos es otra función $\mathbf{F}$ tal que

$$\mathbf{F}'(x) = f(x).$$

Está claro que no hay una única primitiva de una función f ya que, si C es cualquier constante, $\mathbf{F}(x) + C$ es otra primitiva. Por este motivo, si encontramos una primitiva, mientras no tengamos ninguna otra condición fijada, vamos a escribir que

$$\mathbf{F}(x) + C = \int f(x)dx.$$

Entendemos por integrar f, en símbolos $\int f(x)dx$, a encontrar el conjunto de todas las primitivas de f.

Si bien es cierto que toda función continua tiene una primitiva, no siempre es posible encontrar una. Muchas veces una primitiva de una función es una nueva función que solo puede definirse diciendo quién es su derivada.

1. Integrales inmediatas

Empecemos calculando algunas integrales sencillas. Supongamos que queremos integrar la función $f(x) = 5$. Las primitivas de f son todas las funciones de la forma $F(x) = 5x + C$, donde C es una constante cualquiera. En general, si $f(x) = a$ constante, las primitivas de f son $F(x) = ax + C$ ó $\int adx = ax + C$.

También podemos decir que si $f(x) = x$, $\int f(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

Así, basándonos en la tabla de derivadas, podemos armar una tabla con las integrales básicas:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^a con $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\cos(x)$	$\text{sen}(x) + C$
$\text{sen}(x)$	$-\cos(x) + C$

De este modo conseguimos una colección de funciones que sabemos integrar y que nos servirán para calcular integrales mas complejas mediante los métodos de integración que veremos ahora.

Usando las propiedades de la integral y estos primeros cálculos, es posible resolver los ejercicios del 11 al 14 de Práctica.

Es importante tener presente que no hay una forma de predecir qué método de integración es el indicado para encontrar la primitiva de una función determinada. La práctica nos va entrenando el ojo para adivinar qué método es el más conveniente.

2. Método de sustitución

El método de integración por sustitución nos sirve para integrar funciones que se obtuvieron derivando de una composición de funciones, es decir, aplicando de la regla de la cadena. Recordemos cómo se deriva la composición de funciones. Si f y g son dos funciones derivables en el punto a,

$$(f \circ g)'(a) = (f(g(a)))' = (f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Si ahora, lo que queremos es recuperar $f \circ g$ si tenemos la derivada, tenemos que integrar ambos lados de la igualdad

$$\int (f \circ g(x))' dx = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

y obtenemos

$$(f \circ g)(x) + C = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)dx.$$

Simplificando la notación a través de la sustitución de $g(x)$ por una nueva variable u, y $g'(x)dx$ por du obtenemos

$$\int f'(\overbrace{g(x)}^{u}) \cdot \overbrace{g'(x)dx}^{du} = \int f'(u)du.$$

Esto sugiere que supongamos que conocemos g y g' y nos concentremos en hallar f.

Para comprender en qué consiste este método, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x \cdot \cos(x^2+1)\, dx$.

La función $h(x) = 2x \cdot \cos(x^2+1)$ no está en tabla, y no es ni una suma ni una resta de funciones que figuran en la tabla. Podríamos sacar el 2 que está multiplicando, pero esto no nos facilitaría la tarea.
Lo que podemos apreciar es que hay una composición: la función $g(x) = x^2+1$ está adentro de la función coseno. Y, más aun, también vemos que la derivada de g está multiplicando: $g'(x) = 2x$. Si la función que está dentro de la integral viniera de la derivada de una composición, tenemos identificadas muchas partes:

$$(f \circ g(x))' = f'(g(x)).g'(x).$$

Nos faltaría identificar f' y deducir quién es f. Este método nos ayuda a simplificar la notación para poder finalizar el cálculo de la integral.
Vamos a sustituir $g(x)$ por una nueva variable que llamaremos u. Y sustituiremos $g'(x)dx$ por du.

$$\int 2x \cdot \cos(x^2+1)\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ u = x^2+1 \\ du = (x^2+1)'dx \\ = 2xdx}}{=} \int \cos(u)\, du \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral por} \\ \text{tabla}}}{=} \operatorname{sen}(u) + C$$

Observemos que, una vez que hacemos el cambio de variable, en la nueva integral solo aparece la variable nueva, en este caso la u. Esto debe ser así siempre. Después del cambio de variables, no puede sobrevivir ninguna original, solo puede estar la variable nueva.

Cuando terminamos de integrar, volvemos a la variable original (que en este caso es x) reemplazando u por x^2+1 y obtenemos

$$\boxed{\int 2x\cdot\cos(x^2+1)dx = \operatorname{sen}(x^2+1)+C}$$

Verifiquemos que realmente llegamos a la solución buscada. Para esto, tenemos que derivar y ver si nos da la función de adentro de la integral:

$$\left[\operatorname{sen}(x^2+1)+C\right]' = \left[\operatorname{sen}(x^2+1)\right]' + [C]' =$$

$$= \left[\operatorname{sen}'(x^2+1)\cdot(x^2+1)'\right] + 0 = \cos(x^2+1)\cdot 2x = 2x\cdot\cos(x^2+1).$$

como queríamos.

Ejemplo 2. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx$.

La función a integrar no está en tabla, no hay sumas ni restas, ni constantes que podamos ”sacar afuera”. A diferencia del ejemplo anterior, la composición aquí no es tan evidente.
El hecho de que haya una función polinómica de grado 3 y otra de grado 2 podría hacernos sospechar que la segunda puede estar relacionada con la derivada de la primera.
Propongamos

$$u = x^3-3x^2+7.$$

Entonces

$$du = (x^3-3x^2+7)'dx = (3x^2-6x)dx = 3(x^2-2x)dx.$$

Y esta última expresión es el numerador, salvo por un 3 que está multiplicando.
Para poder utilizar el método de sustitución, vamos multiplicar y dividir por 3 para hacerlo aparecer de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int 1\cdot\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{3}{3}\cdot\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{1}{3}.\frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx.$$

Ahora sacamos afuera de la integral el $\frac{1}{3}$ y aplicamos sustitución como antes:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ u=x^3-3x^2+7 \\ du=(x^3-3x^2+7)'dx \\ =3(x^2-2x)dx}}{=} \frac{1}{3}\int\frac{1}{u}\,du \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral} \\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{3}\ln(u)+C =$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}\ln(|x^3 - 3x^2 + 7|) + C}$$

Ejemplo 3. Calcular $\int (2x-3)e^{-x^2+3x}\,dx$.

En esta integral, que tampoco está en tabla, vemos que la función exponencial está compuesta con $-x^2+3x$. La derivada de esta última, que es $(-x^2+3x)' = -2x+3$, aparece salvo un signo. Visto de otra forma, aparece $2x-3 = -(-2x+3)$, sacando -1 de factor común. Luego, tenemos

$$\begin{array}{cccc} \displaystyle\int (2x-3)e^{-x^2+3x}\,dx & = & \displaystyle\int -(-2x+3)e^{-x^2+3x}\,dx & = \\ \displaystyle = -\int (-2x+3)e^{-x^2+3x}\,dx & = & \displaystyle -\int e^u\,du & = \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & \begin{array}{c} u = -x^2+3x \\ du = (-x^2+3x)'dx \\ = (-2x+3)dx \end{array} & & \begin{array}{c} \text{integral} \\ \text{por tabla} \end{array} \end{array}$$

$$= -e^u + C = \boxed{-e^{-x^2+3x} + C}$$

Con este material pueden hacer hasta el ejercicio 16 de la práctica 9.

3. Método de integración por partes

Recordemos cómo se calcula la derivada del producto de dos funciones:
Si f y g son funciones derivables,

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Integremos ambos miembros:

$$\int (f(x)\cdot g(x))'dx = \int [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]dx.$$

El miembro izquierdo nos da (por definición de integral indefinida), $f(x) \cdot g(x) + C$; y en el miembro derecho podemos escribir la integral de la suma como la suma de las integrales:

$$f(x) \cdot g(x) + C = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Pasamos restando uno de los términos, y como la integral que pasamos ya involucra una constante, nos olvidamos de C y obtenemos la siguiente expresión:

$$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

De estas cuentas que acabamos de hacer surge el método de integración por partes que nos indica que

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Veamos en algunos ejemplos cómo podemos utilizar este método para calcular primitivas.

Ejemplo 1. Calcular $\int xe^x dx$.

Este es uno de los ejemplos más sencillos pero que nos sirve para ilustrar este método. La primitiva de la función xe^x no figura en tabla. Como e^x sí figura, podemos pensar que obtuvimos esta función como resultado de derivar un producto. Propongamos entonces $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$. Tenemos entonces que

$$\int x \cdot e^x dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x) = x \to f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \to g(x) = e^x}}{=} x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx =$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por tabla}}}{=} \boxed{x \cdot e^x - e^x + C}$$

Algunas observaciones:

- Este método nos reduce el cálculo de una integral al de otra más sencilla. En este ejemplo, pasamos de integrar $x \cdot e^x$ a integrar e^x que está en tabla.
- La constante de integración C la sumamos una vez que no tenemos que calcular más integrales. Hay otras formas correctas de tratar la suma de estas constantes, pero sumarla en esta instancia es una de las formas más convenientes.
- La función g puede ser cualquier primitiva de la función que llamamos g'. En general, conviene elegir la más sencilla.
- No hay una forma clásica de elegir qué función jugará el papel de f y cuál el de g'. A pesar de que existen algunas reglas que indican qué elección conviene hacer, la mejor manera de aprender a elegir es a través de la práctica, calculando muchas integrales.

  En este ejemplo, si hubiéramos elegido $f(x) = e^x$ y $g'(x) = x$ habríamos llegado a una integral que tampoco sabemos resolver con los métodos anteriores:

$$\int x \cdot e^x dx \quad \underset{\substack{\downarrow \\ f(x) = e^x \to f'(x) = e^x \\ g'(x) = x \to g(x) = \frac{x^2}{2}}}{=} \quad \left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot e^x - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) e^x dx$$

Sigamos calculando otras primitivas por este método.

Ejemplo 2. Calcular $\int (x^2 + x) \cdot \ln(x) dx$.

En este caso, es claro que nos conviene elegir $f(x) = \ln(x)$ ya que su primitiva no es sencilla. Con esta elección, resulta $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = x^2 + x$ y $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$.
Tenemos entonces

$$\int (x^2+x)\cdot \ln(x)dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=\ln(x)\to f'(x)=\frac{1}{x} \\ g'(x)=x^2+x\to g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}}}{=} \ln(x)\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)-\int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\ln(x)-\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\ln(x)-\left(\int\frac{x^2}{3}dx+\int\frac{x}{2}dx\right)=$$

$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2dx-\frac{1}{2}\int xdx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\ln(x)-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=$$

$$\boxed{=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\ln(x)-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+C}$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \ln(x)dx$.

En este caso, vamos a pensar que $\ln(x)=1\cdot\ln(x)$

$$\int \ln(x)dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=\ln(x)\to f'(x)=\frac{1}{x} \\ g'(x)=1\to g(x)=x}}{=} x\cdot\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$= x\cdot\ln(x)-\int 1dx \;=\; \boxed{x\cdot\ln(x)-x+C}$$

Veamos otro ejemplo en el que vamos a tener que usar el método de integración por partes dos veces.

Ejercicio 4. Calcular $\int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx$.

En este caso, podemos elegir cualquiera de las dos funciones como f o g'.
Elijamos entonces $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g'(x)=e^x$. Con esta elección nos queda

$$\int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=\operatorname{sen}(x)\to f'(x)=\cos(x) \\ g'(x)=e^x \to g(x)=e^x}}{=} \cos(x)\cdot e^x - \int \cos(x)\cdot e^x dx =$$

$$= \cos(x)\cdot e^x - \int \cos(x)\cdot e^x dx$$

Nos quedó por resolver una integral del mismo estilo que la original, es decir

$$\int \cos(x)\cdot e^x dx.$$

Intentemos aplicar nuevamente este método de integración teniendo cuidado de elegir las funciones f y g' de modo de no deshacer el cálculo que acabamos de hacer. Tenemos entonces que $f(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = e^x$.

$$\int \cos(x)\cdot e^x dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=\cos(x)\to f'(x)=-\operatorname{sen}(x) \\ g'(x)=e^x \to g(x)=e^x}}{=} (-\operatorname{sen}(x))\cdot e^x - \int (-\operatorname{sen}(x))\cdot e^x dx =$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\cdot e^x + \int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx$$

Veamos qué tenemos hasta el momento con las dos integraciones por partes que hicimos:

$$\int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx =$$

$$\cos(x)\cdot e^x - \int \cos(x)\cdot e^x dx =$$

$$\cos(x)\cdot e^x + \operatorname{sen}(x)\cdot e^x - \int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx$$

Así, pasando de miembro la integral que queremos calcular,

$$2\int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx = \cos(x)\cdot e^x + \operatorname{sen}(x)\cdot e^x$$

y, finalmente,

$$\boxed{\int \operatorname{sen}(x)\cdot e^x dx = \frac{\cos(x)\cdot e^x + \operatorname{sen}(x)\cdot e^x}{2} + C.}$$

Con este material pueden hacer hasta el ejercicio 21 de la práctica 9.

Continuemos ahora con otro método de integración.

4. Método de integración por fracciones simples

El método de integración por fracciones simples se utiliza para calcular primitivas de algunas funciones racionales, es decir, funciones del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{Q}(\mathbf{x})}$ donde P y Q son polinomios.
Veremos cómo funciona este método para algunas funciones particulares. Recordemos que

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$$

y, más generalmente, para todo $a \in \mathbb{R}$, haciendo una sustitución sencilla, $u = x + a$, resulta que

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln(|x+a|) + C.$$

Usaremos estas integrales para calcular primitivas de funciones racionales más complicadas. Vamos a empezar mostrando cómo funciona el método de fracciones simples en algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+4)}\,dx$.

Para calcular la integral pedida, comenzamos escribiendo la función $\dfrac{1}{x(x+4)}$ como suma de funciones más simples. Como el denominador es el producto de x y $x+4$, podemos pensar que es el denominador común de dos fracciones, una con denominador x y otra con denominador $x+4$. Buscamos entonces valores a y b en $\mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+4}.$$

Sumando las fracciones de la derecha, resulta que debe ser

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{a(x+4)+bx}{x(x+4)}$$

y esto vale si y sólo si los numeradores coinciden, o sea,

$$a(x+4)+bx=1$$

Como esta igualdad debe valer para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos despejar a y b evaluando x en distintos valores.
Para simplificar las cuentas, elegimos los valores de x que hacen que se anulen los factores $x+4$ y x que multiplican a a y a b respectivamente, es decir, $x=-4$ y $x=0$.
Evaluando $x=-4$, nos queda

$$a \cdot (-4+4)+b \cdot (-4)=1 \iff 0 \cdot a - 4 \cdot b = 1 \iff -4 \cdot b = 1 \iff b = -\frac{1}{4}$$

y para $x=0$ resulta que

$$a \cdot (0+4)+b \cdot 0 = 1 \iff 4 \cdot a = 1 \iff a = \frac{1}{4}.$$

(Observar que los valores hallados, $a=\frac{1}{4}$ y $b=-\frac{1}{4}$, verifican que $\frac{1}{4}(x+4)-\frac{1}{4}x=1$.)
Concluimos entonces que

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+4}.$$

Ya podemos calcular la integral pedida:

$$\int \frac{1}{x(x+4)}\,dx = \int \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+4}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(|x|) - \frac{1}{4}\ln(|x+4|)+C.$$

Por lo tanto, resulta

$$\boxed{\int \frac{1}{x(x+4)}\,dx = \frac{1}{4}\ln(|x|) - \frac{1}{4}\ln(|x+4|)+C.}$$

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx.$

De manera similar a lo hecho en el ejemplo anterior, intentaremos escribir la función racional a integrar como suma de fracciones simples. Para esto, comenzamos buscando los ceros del denominador, para escribirlo como producto de dos factores:

$$x^2+x-6=0 \iff x=2 \text{ o } x=-3.$$

Así, el denominador de la función a integrar se factoriza como

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Buscamos entonces escribir la función

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$$

como una suma de dos fracciones, una con denominador $x-2$ y otra con denominador $x+3$, es decir, buscamos a y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

o, equivalentemente, que los numeradores de las fracciones de la izquierda y la derecha de esta igualdad sean iguales, es decir,

$$a(x+3) + b(x-2) = x+8.$$

Hallamos los valores de a y b evaluando esta igualdad en $x = 2$ y $x = -3$ y despejando:
Para $x = 2$, queda $5a = 10$, es decir, $a = 2$.
Para $x = -3$, se obtiene $-5b = 5$, es decir, $b = -1$.
Y los valores hallados cumplen la igualdad: $2(x+3) + (-1)(x-2) = x+8$. Tenemos entonces que

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} + \frac{(-1)}{x+3}.$$

y podemos calcular la integral buscada:

$$\int \frac{x+8}{(x-2)(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{(-1)}{x+3}\right) dx =$$
$$= 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx = 2\ln(|x-2|) - \ln(|x+3|) + C$$

$$\boxed{\int \frac{x+8}{(x-2)(x+3)}\,dx = 2\ln(|x-2|) - \ln(|x+3|) + C.}$$

Lo que hicimos en los ejemplos anteriores es la base del método de integración por fracciones simples.
Si bien en este curso no vamos a ver todos los casos en los que puede usarse este método, trataremos de describir los pasos que debemos seguir si queremos calcular una primitiva de la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

- Si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$, podemos dividir P por Q y obtener dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tal que el grado de $R(x)$ es estrictamente menor que el grado de $Q(x)$ y tal que $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Así, tenemos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{C(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$

  Con esto nos restringimos al caso en que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador y de ahora en mas vamos a suponer que P tiene grado menor que Q.

- Supongamos que $Q(x)$ tiene todas sus raíces reales y simples, es decir, que

$$Q(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

  donde n es el grado de Q y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son números reales todos distintos. En este caso, buscamos constantes $a_1, \dots, a_n$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\left(\frac{a_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{a_n}{x - \alpha_n}\right).$$

  Sacando comun denominador en la suma de la derecha, igualando los numeradores de ambos lados y evaluando convenientemente, se obtienen los (únicos) valores de $a_1, \dots a_n$. Luego es fácil integrar cada sumando para obtener una primitiva de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

- En el caso en que $Q(x)$ tiene una raíz múltiple, por ejemplo, si $Q(x) = c(x - \alpha)^k$, buscamos k constantes $b_1, \dots, b_k$ tal que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\left(\frac{b_1}{x - \alpha} + \frac{b_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{b_k}{(x - \alpha)^k}\right)$$

  y, nuevamente, igualando los denominadores después de desarrollar el lado izquierdo de la igualdad y evaluando convenientemente, se obtienen los valores de $b_1, \dots, b_k$.

- En este curso no vamos a estudiar el caso en que $Q(x)$ tenga raíces complejas, salvo en casos simples y directos que se encuentran en tabla como, por ejemplo,

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$$

Observación: En ciertos casos, para calcular una primitiva de una función racional, no es necesario aplicar el método de fracciones simples.

Por ejemplo, para calcular
$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx,$$
como $(x^2+3x+2)' = 2x+3$, podemos hacer la sustitución
$$\begin{aligned} u &= x^2+3x+2 \\ du &= (2x+3)dx \end{aligned}$$
y nos queda
$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du = \\ = \ln(|u|)+C &= \boxed{\ln(|x^2+3x+2|)+C.} \end{aligned}$$

Calculemos esta misma integral por el método de fracciones simples.

Resolviendo la ecuación
$$x^2+3x+2=0,$$
obtenemos que los ceros del denominador de la función a integrar son $x=-1$ y $x=-2$, con lo cual
$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$
Ahora buscamos a y b en $\mathbb{R}$ tales que
$$\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a\cdot(x+2)+b\cdot(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
o sea, tales que
$$2x+3 = a\cdot(x+2)+b\cdot(x+1).$$
Evaluando esta última igualdad en $x=-1$ y $x=-2$, deducimos que $a=1$ y $b=1$, es decir, que
$$\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}.$$
Entonces:
$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx = \\ = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx &= \boxed{\ln(|x+1|)+\ln(|x+2|)+C.} \end{aligned}$$

Observamos que las primitivas obtenidas por ambos métodos, si bien en apariencia son distintas, en realidad son la misma función: aplicando propiedades de las funciones logaritmo y módulo y operando, resulta que

$$\boxed{\ln(|x+1|) + \ln(|x+2|) = \ln(|(x+1)\cdot(x+2)|) = \ln(|x^2+3x+2|).}$$

Con este material pueden hacer hasta el ejercicio 22 de la Práctica 9.

5. Ejercicios surtidos

Finalizamos esta sección con algunos ejemplos de cálculo de primitivas en las que no se nos indica qué metodo usar y en los que pueden necesitarse combinar más un método.

Ejercicio 1. Calcular $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})dx$.

Solución
Lo que se observa claramente es que esta función es la composición de dos funciones, empecemos entonces, aplicando el método de sustitución.
Propongamos entonces

$$u = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$
$$\downarrow$$
$$2udu = dx$$

Así,

$$\int \cos(\sqrt{x})dx \underset{\substack{u=\sqrt{x}\\ 2udu=dx}}{=} \int 2u\cdot\cos(u)du$$

En este punto, vemos que la integral que obtuvimos se resuelve por el método de integración por partes, tomando, por ejemplo, $f(u) = 2u$ y $g'(u) = \cos(u)$:

$$\int 2u \cdot \cos(u)du \underset{\substack{\downarrow \\ f(u)=2u \to f'(u)=2 \\ g'(u)=\cos(u) \to g(u)=\operatorname{sen}(u)}}{=} 2u \cdot \operatorname{sen}(u) - \int 2 \cdot \operatorname{sen}(u)du =$$

$$= 2u\operatorname{sen}(u) - 2\int \operatorname{sen}(u)du = 2u\operatorname{sen}(u) + 2\cos(u) + C =$$

$$\boxed{= 2\sqrt{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C.}$$

□

Ejercicio 2. Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)(\operatorname{sen}(x)+3)}dx$.

Solución

El $\cos(x)$ que aparece en el numerador nos da la pauta de que podemos intentar empezar con una sustitución $u = \operatorname{sen}(x)$. De esta forma

$$\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)(\operatorname{sen}(x)+3)}dx \underset{\substack{\downarrow \\ u=\operatorname{sen}(x) \\ du=\cos(x)dx}}{=} \int \frac{du}{u^2(u+3)}$$

La integral que nos queda la vamos a calcular por el método de fracciones simples ya que tenemos el denominador ya factorizado. En este caso, el denominador tiene una raíz doble y una simple y, por lo tanto, tenemos que buscar constantes a, b_1 y b_2 que satisfagan:

$$\frac{1}{u^2(u+3)} = \frac{b_1}{u} + \frac{b_2}{u^2} + \frac{a}{u+3}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, obtenemos

$$\frac{1}{u^2(u+3)} = \frac{b_1u(u+3) + b_2(u+3) + au^2}{u^2(u+3)}$$

de lo que resulta

$$1 = b_1u(u+3) + b_2(u+3) + au^2.$$

Evaluando en $u = 0$, en $u = -3$ y en algún otro valor, por ejemplo, $u = 1$, tenemos que $3b_2 = 1$, $9a = 1$ y $4b_1 + 4b_2 + a = 1$ y, por lo tanto $a = \frac{1}{9}$, $b_2 = \frac{1}{3}$ y $b_1 = -\frac{1}{9}$. Tenemos entonces

$$\int \frac{1}{u^2(u+3)}du = \int \left(\frac{1}{9u} + \frac{1}{3u^2} + \frac{1}{9(u+3)}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{9}\ln(|x|) - \frac{1}{3u} - \frac{1}{9}\ln(|u+3|) + C$$

Recuperando la sustitución original, tenemos

$$\boxed{\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)(\operatorname{sen}(x)+3)}dx = -\frac{1}{9}\ln(|\operatorname{sen}(x)|) - \frac{1}{3\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{3}\ln(|\operatorname{sen}(x)+3|) + C}$$

□

Terminemos esta parte de la materia con el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3. Calcular $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$.

Solución

Primero notemos que si intentamos aplicar el método de sustitución directamente, llamando $u = x^2 + 2x + 3$ no encontramos la derivada de u en el numerador para poder reemplazar por du.

Intentemos entonces usar el método de fracciones simples ya que es un cociente de polinomios con el grado del numerador menor que el del denominador. Para esto, deberíamos calcular las raíces de $x^2 + 2x + 3$. Sin embargo, al intentar calcular estas raíces, nos encontramos con que el discriminante es negativo y, por lo tanto, el polinomio no tiene raíces reales.

En este caso, lo que podemos hacer es llevar la función que queremos integrar a una forma parecida a $\frac{1}{x^2+1}$ ya que sabemos que una primitiva de esta función es $\operatorname{arc\,tg}(x)$.

Para esto

$$x^2+2x+3 = (x^2+2x+1)+2 = (x+1)^2+2 = 2\left[\frac{(x+1)^2}{2}+1\right] = 2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]$$

Entonces

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{dx}{2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}$$

En este punto, podemos hacer la sustitución

$$u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{2}}$$

y nos queda

$$\int \frac{dx}{2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(u) + C$$

y podemos concluir

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

$\square$

Con todo el material visto hasta aquí pueden hacer toda la práctica 9 incluyendo los Problema Varios.

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Métodos de integración, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.