UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
Centro Regional Universitario Bariloche

TEORICO Nº 6: INTEGRALES

Hemos trabajado hasta ahora con el concepto de derivada. Es decir, dada una función F(x) se trataba de encontrar otra función f(x) tal que F'(x) = f(x). Nos ocuparemos ahora del problema inverso. Dada una función f(x) trataremos de encontrar una función F(x) cuya derivada sea f(x). Tal función F(x) se llama **función primitiva** de f(x) y verifica que:

$$F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, para f(x) = 2x, se puede ver fácilmente que $F(x) = x^2$ es primitiva de f(x) pues:

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

Pero también es primitiva de f(x) la función $F(x) = x^2 + 3$, dado que:

$$F'(x) = (x^2 + 3)' = 2x = f(x)$$

En general serán primitivas de f(x) todas las funciones de la forma

$$F(x) = x^2 + C,$$

donde C es una constante cualquiera.

Si f(x) es una función continua, podemos generalizar esta idea en el siguiente:

<u>Teorema 1:</u> Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos primitivas de f(x), difieren en una constante.

<u>Demostración:</u> Supongamos que la diferencia entre $F_1(x)$ y $F_2(x)$ es una función G(x). Es decir,

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

Entonces, $$G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))',$$

Pero, por propiedad de las derivadas,

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x)$$

y como tanto $F_1(x)$ como $F_2(x)$ son primitivas de f(x), tenemos que

$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, con lo que se tiene G'(x) = 0, pero sabemos que, si G'(x) = 0 que G(x) es constante, con lo cual queda demostrado el teorema. ♣

Por este teorema podemos decir que toda primitiva de una función f(x) tiene la forma F(x) + C.

A la expresión F(x) + C se la denomina **Integral Indefinida** de f(x) y se escribe así:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{si } F'(x) = f(x)}$$

En realidad, la integral indefinida de una función f(x) representa una familia de funciones. El significado geométrico de la integral indefinida es un conjunto de curvas (una familia) cada una de las cuales se obtiene a partir de un desplazamiento vertical de una curva (a lo largo del eje y).

Cuando trabajamos con derivadas, vimos que no toda función tiene derivada, sino que es necesario establecer condiciones para la derivabilidad. Surge entonces la pregunta siguiente: ¿Toda función tiene una primitiva (y por lo tanto una integral indefinida)? La respuesta es no. Se puede demostrar que:

Teorema 2: Toda función continua en un intervalo tiene una función primitiva (y por lo tanto una integral indefinida) en ese intervalo.

Admitiremos este teorema sin demostración.

El proceso que permite hallar la función primitiva de una función f(x) se llama **integración de la función f(x).**

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA:

Propiedad 1: $(\int f(x)dx)' = f(x)$

Propiedad 2: $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Propiedad 3: $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)\, dx$

Propiedad 4: $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$, donde $k \in R$.

Demostraciones:

1. Por definición es $\int f(x)dx = F(x) + C$, con $F'(x) = f(x)$

por lo que $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x), \quad \text{con } F'(x) = f(x)$ ♣

2. Por definición es $\int f'(x)dx = F(x) + C, \quad \text{con } F'(x) = f'(x)$ pero por lo visto en el teorema 1 F(x) y f(x) difieren en una constante. Entonces F(x) – f(x) = C, por lo tanto F(x) = f(x) + C. ♣

3. Derivemos en ambos miembros de la igualdad:

(a) $\left(\int f(x)+g(x)\,dx\right)' = f(x)+g(x)$ por la propiedad 1.

(b) $\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x)$ por propiedades de la derivada.

Por consiguiente la derivada del primer miembro de la igualdad es igual a la derivada del segundo miembro. Esto significa que toda función del primer miembro de la igualdad se diferencia de toda función del segundo miembro de esa igualdad en una constante. Ese es precisamente el significado de esta propiedad. ♣

4. Se deja como ejercicio.

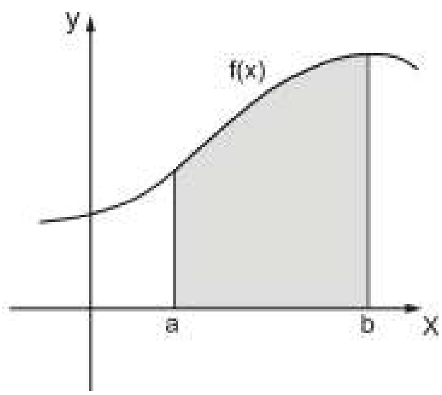
Para el cálculo de primitivas es necesario conocer ciertos métodos de integración, dado que no resulta tan inmediato como el cálculo de derivadas. Estas técnicas las dejaremos para más adelante. Por lo pronto daremos una breve **Tabla de Integrales**, que resultan inmediatas: (Aquí C representa una constante arbitraria)

1. $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{con } n \neq -1$	2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3. $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C$	4. $\int \cos x\, dx = -\text{sen } x + C$
5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$	6. $\int \dfrac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\text{ctg } x + C$
7. $\int \text{tg } x\, dx = \ln\lvert \cos x \rvert + C$	8. $\int \text{ctg } x\, dx = \ln\lvert \text{sen } x \rvert + C$
9. $\int e^x\, dx = e^x + C$	10. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

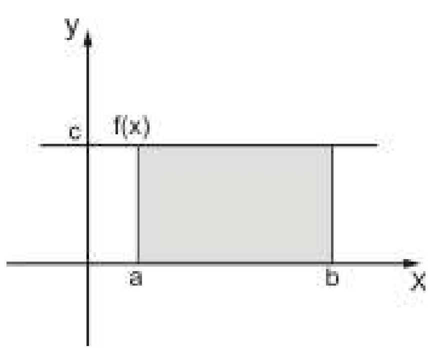
Estos resultados pueden comprobarse fácilmente derivando el miembro de la derecha para verificar que su derivada coincide con la función bajo el signo de integral a la izquierda.

CALCULO DE AREAS MEDIANTE INTEGRALES:

Una de las aplicaciones más importantes del cálculo integral es el cálculo de áreas. Supongamos que queremos calcular el área de bajo de una curva f(x)(continua), el eje x y las rectas x = a y x = b



Si f(x) fuera la función constante entonces el área sería directamente el producto de la base por la altura del rectángulo de la figura $A = (b - a).c$



Para una función cualquiera, podríamos por ejemplo, estimar el valor del área de la figura aproximándolo por rectángulos.

En primer lugar daremos una definición necesaria para lo que veremos a continuación:

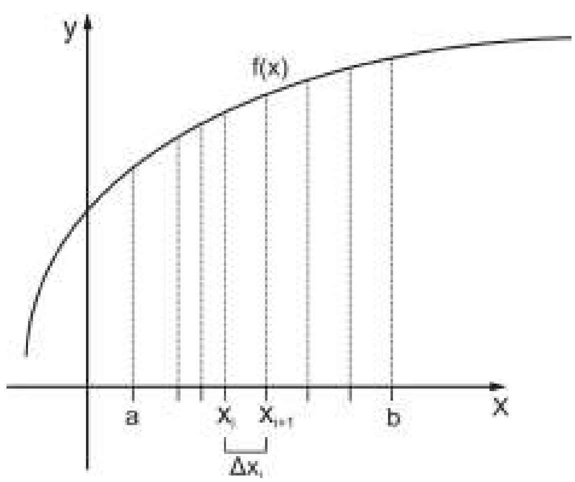
<u>Definición:</u> Por una partición de un intervalo cerrado [a,b], entendemos un subconjunto finito de elementos de [a,b] que contiene a "a" y a "b".

En símbolos, el conjunto P = { x_1 , x_2 , ... x_n } es una partición de [a,b], si

$$\forall\, x_i \in P,\quad x_i \in [a,b],\quad y\quad \exists\ i,j\quad 1 \le i,j \le n\quad /\quad a = x_i\quad y\quad b = x_j$$

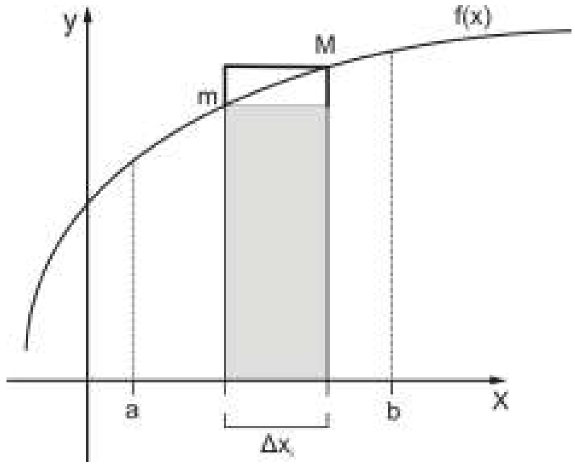
Puede verse que una partición P divide al intervalo [a,b] en subintervalos de la forma [x_i, x_{i+1}] cuyos extremos son los elementos de P, tales que su unión es exactamente [a,b] y su intersección es a lo sumo un elemento de P. Es importante recalcar que las particiones no necesariamente inducen a divisiones del intervalo en subintervalos de igual amplitud.

Tomemos ahora una función f(x) continua en un intervalo [a,b] tal que f(x) > 0 en ese intervalo y una partición P de dicho intervalo que lo divida en *n* subintervalos mediante los puntos a = x_0, x_1, x_2 ,...x_i , ... ,x_n = b, tales que $x_0 < x_1 < x_2 <... < x_i < ... < x_n$. Denominaremos Δx_i a la distancia entre x_i y x_j.



Para cada subintervalo [x_i ,x_{i+1}], con i = 0, ... , *n*, podemos hallar el valor mínimo m_i y el valor máximo M_i de la función dentro del mismo. Es posible formar así dos rectángulos en cada subintervalo cuyas áreas son:

$r_i = m_i . \Delta x_i$ y $R_i = M_i . \Delta x_i$



Podemos afirmar que en [a,b]:

La suma de las áreas de los rectángulos inferiores a la curva	≤	El área bajo la curva	≤	La suma de las áreas de los rectángulos superiores a la curva

Tomemos ahora para cada subintervalo un punto p_i y su imagen por f, $f(p_i)$ (que seguramente existe pues f(x) es continua.

Tendremos entonces que:

$$m_1\Delta x_1 \leq f(p_1).\,\Delta x_1 \leq M_1\Delta x_1$$

$$m_2\Delta x_2 \leq f(p_2).\,\Delta x_2 \leq M_2\Delta x_2$$

....

$$m_n\Delta x_n \leq f(p_n).\,\Delta x_n \leq M_n\Delta x_n$$

puesto que $m_i \leq p_i \leq M_i$ para todo i = 1,...,n

Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \qquad (*)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar Δx como amplitud de todos los subintervalos y podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x \qquad (*)$$

Gráficamente, significa que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores a la curva es menor o igual que la suma de las áreas de los rectángulos de altura $f(p_i)$ y a su vez ésta es menor o igual que la suma de las áreas de los rectángulos superiores a la curva.

Cuanto más pequeña se tome la longitud de cada subintervalo (es decir que [a,b] se lo parta en más subintervalos), la aproximación de las áreas inferiores y superiores a la curva con el área real, será mejor.

Si hacemos tender Δx a cero, el número de subintervalos tenderá a infinito. Cuando Δx tiende a 0, las tres sumas en (*) tienden al mismo límite, que es el valor del área bajo la curva f(x) en [a,b].

Tal límite se designa por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x}$$

donde a y b (extremos del intervalo cerrado [a,b]), se denominan **límites de integración**, siendo a el límite inferior y b el límite superior.

La integral $\int_a^b f(x)dx$ se denomina **integral definida** de f(x) y tiene por resultado el área del trapecio curvilíneo formado por la curva f(x), el eje x y las rectas x = a y x = b. (Recordemos que tomamos como condición que f(x) > 0 en [a,b]. Más adelante analizaremos las otras posibilidades.)

La notación que utilizamos para la integral se debe a Leibnitz, matemático y filósofo alemán (1646-1716). Aparentemente, el signo de integral resulta de una "deformación" de la S de suma. La notación "dx" se utiliza para denotar una variación infinitamente pequeña de la variable de la función que se integra.

A las sumas

$$\underline{s_P}(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x \qquad y \qquad \overline{S_P}(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x$$

se las denomina **suma inferior y superior** para f(x), respectivamente , donde Δx es la amplitud de cada subintervalo que define la partición P.(Esta denominación es la misma aún cuando no se considere Δx constante)

Notemos que las sumas superiores aproximan por exceso al área buscada y las inferiores por defecto.

Propiedades de las sumas superiores e inferiores:

1) Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\underline{s_P}(f)\le\overline{S_P}(f)$

Demostración: Para cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se cumple que $m_i \le M_i$

entonces $\sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x \quad \Rightarrow \quad \underline{s_P}(f)\le\overline{S_P}(f)$ ♣

2) Si f es continua en $[a,b]$. Si Q es una partición más fina que P (es decir si todos los puntos de P pertenecen a Q; P $\subseteq$ Q) entonces: a) $\underline{s}_P(f)\le\underline{s}_Q(f)$ y b) $\overline{S}_P(f)\ge\overline{S_Q}(f)$

Demostración: demostremos la primera de las desigualdades:

Q es más fina que P, es decir que Q tiene más puntos que P. Supongamos que Q tiene un punto más que P.

Es decir, P = {$a = x_1$, x_2 , ..., $x_n = b$} y Q = {$a = x_1$, x_2 , …, c, ... ,$x_n = b$}.

P induce en [a,b] una subdivisión en n–1 subintervalos: [a, x_2], [x_2, x_3], …, [x_h, x_{h+1}], … [x_{n-1}, b]

Supongamos que c $\in$ [x_h, x_{h+1}]. Q induce una subdivisión de [a,b] en n subintervalos partiendo el h-ésimo intervalo (que incluye a c) en dos subintervalos: [x_h, c] y [c, x_{h+1}]

Bajo la partición P,

$\underline{s}_P(f) = m_1(x_2 - x_1) + m_2(x_3 - x_2) + \ldots + m_h(x_{h+1} - x_h) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$

El h-ésimo término en $\underline{s}_P(f)$ es igual a $m_h(x_{h+1} - x_h)$, donde m_h es el valor mínimo que toma la función en el intervalo $[x_h, x_{h+1}]$.

Bajo la partición Q, el h-ésimo término en esa suma se reemplaza por otros dos: $\alpha_1(c - x_h) + \alpha_2(x_{h+1} - c)$ donde α_1 es el valor mínimo de f en el intervalo $[x_h, c]$ y α_2 es el valor mínimo de f en el intervalo $[c, x_{h+1}]$.

Pero como m_h es el mínimo valor de f en todo el intervalo $[x_h, x_{h+1}]$ tenemos que $m_h \le \alpha_1$ y $m_h \le \alpha_2$, por lo que

$m_h(x_{h+1} - x_h) = m_h(c - x_h) + m_h(x_{h+1} - c) \le \alpha_1(c - x_h) + \alpha_2(x_{h+1} - c)$

Entonces $\underline{s}_P(f) \le \underline{s}_Q(f)$ ♣

Observación sobre esta propiedad: A medida que la partición se hace más fina las sumas inferiores van creciendo y las sumas superiores van disminuyendo. Esto refuerza el concepto de que en el límite el error cometido tanto por defecto o por exceso va haciéndose cada vez más chico y esas sumas dan como resultado el valor de la integral buscada.

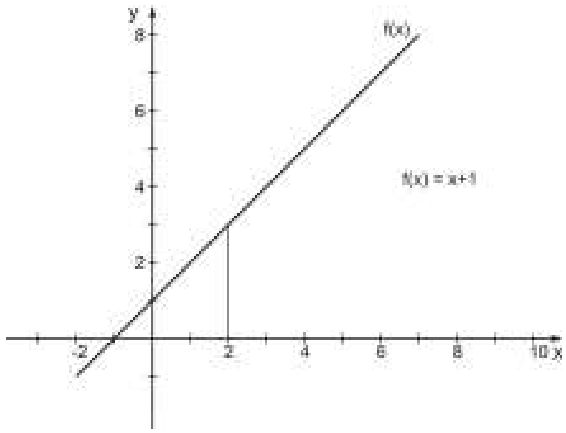
3) Si f es continua en $[a, b]$ y Q y P son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces $\underline{s}_P(f) \le \overline{S}_Q(f)$

Demostración: Sea H una partición más fina que P y Q. Por la propiedad anterior $\underline{s}_P(f) \le \underline{s}_H(f) \le \overline{S}_H(f) \le \overline{S}_Q(f)$ Por transitividad $\underline{s}_P(f) \le \overline{S}_Q(f)$ ♣

Observación sobre esta propiedad: Cualquiera sea la partición que se tome, las sumas inferiores siempre van a ser menores o a lo sumo iguales que las sumas superiores.

Veamos un ejemplo de una función sencilla, y estimemos el área calculando sumas inferiores y superiores para distintas particiones y además calculemos el área real con un razonamiento geométrico para comparar.

Consideremos $f(x) = x + 1$ en el intervalo $[-1,2]$. La función es continua en ese intervalo



El área de la figura delimitada por la función y el eje x en el intervalo $[-1,2]$, puede ser calculada directamente como el área del triángulo $A = \frac{bxh}{2} = \frac{3x3}{2} = 4.5$

Consideremos la partición P = {–1, 0, 1, 2}, que induce una división del intervalo $[-1,2]$ en tres subintervalos: $[-1,0]$ $[0,1]$ y $[1,2]$.

La suma inferior y superior serán, respectivamente:

$$\underline{s}_P(f) = 0.1 + 1.1 + 2.1 = 3\text{, y} \qquad \overline{S}_P(f) = 1.1 + 2.1 + 3.1 = 6$$

Para esta partición, se verifica que el área bajo la función es mayor que la suma inferior y menor que la suma superior. Ahora tomemos una partición más fina, es decir con más puntos, Q ={–1, –0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2}, que induce sobre $[-1,2]$ una división en subintervalos de amplitud 0.5 unidades: $[-1,-0.5]$ $[-0.5,0]$ $[0,0.5]$ $[0.5,1]$ $[1,1.5]$ $[1.5,2]$

La suma inferior quedará ahora

$$s_Q(f) = 0.0.5 + 0.5.0.5 + 1.0.5 + 1.5.0.5 + 2.0.5 + 2.5.0.5 = 3.75$$

y la suma superior $\overline{S}_Q(f) = 0.5.0.5 + 1.0.5 + 1.5.0.5 + 2.0.5 + 2.5.0.5 + 3.0.5 = 5.25$

Observamos acá también que el área de la figura delimitada por la función y el eje x en el intervalo $[-1,2]$ está acotada superiormente e inferiormente por los valores hallados y además que, al tomar una partición más fina la suma inferior es más grande y la superior menor.

En el límite de este proceso (es decir, tomando particiones con más puntos) estos tres números coinciden y representan la integral definida de la función entre los extremos del intervalo.

ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LA INTEGRAL DEFINIDA:

(1) La variable de integración x que aparece en la expresión $\int_a^b f(x)dx$, se llama **variable ficticia** ya que sólo sirve para identificar la forma de la función que se desea integrar, y bien podría ser reemplazada por cualquier otro símbolo. Por ejemplo:

$$\int_a^b f(u)du \quad , \quad \int_a^b f(t)dt \quad , \quad \int_a^b f(\xi)d\xi$$

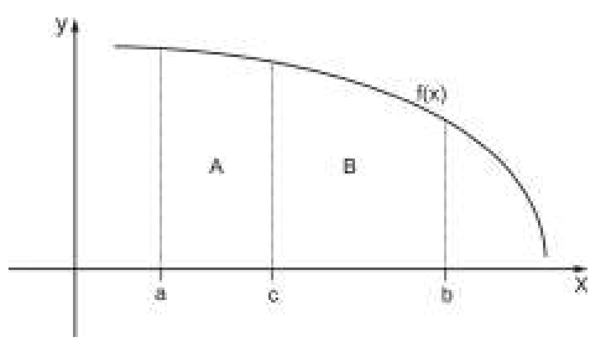
(2) La expresión dx, señala la variable sobre la que se está integrando, así, f(u)dx indica la integración de una constante pues la función se evalúa en u y es independiente de la variación de x.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA:

<u>Propiedad 1</u>: Dado $c \in R$ tal que $a < c < b$, se cumple que, si f(x) es continua en [a,b] ,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Interpretemos su significado en términos de área. Supongamos para ello que $f(x) > 0$ en [a,b] y que $c \in (a,b)$ como se ve en el gráfico:



La integral $\int_a^c f(x)dx$ representa según hemos visto, el área de la región A, y la integral $\int_c^b f(x)dx$ el área de la región B. Resulta natural entonces afirmar que el área bajo la curva f(x) en [a,b] puede escribirse como la suma del área bajo f(x) en [a,c] más el área bajo f(x) en [c,b].

<u>Definición:</u> $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

<u>Definición:</u> $\int_a^a f(x)dx = 0$

<u>Propiedad 2:</u> $\int_c^b k.dx = k.(b - a)$ <u>Demostración</u>: se sugiere como ejercicio.

<u>Propiedad 3:</u> $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

<u>Demostración:</u> Tomemos una partición $P = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ que induzca una división del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos $[x_1,x_2] = [a,x_2]$, $[x_2,x_3]$, … , $[x_i,x_{i+1}]$, …, $[x_{n-1},x_n] = [x_{n-1}, b]$.

Para todo i = 1, …, n consideremos un punto $p_i \in [x_i,x_{i+1}]$.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(p_i) \pm g(p_i))\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

<u>Propiedad 4:</u> $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ donde k es cualquier número real.

Admitiremos esta propiedad sin demostración.

<u>Propiedad 5:</u> Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en [a,b] tales que para todo x $\in$ [a,b] f(x) < g(x). Entonces: $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

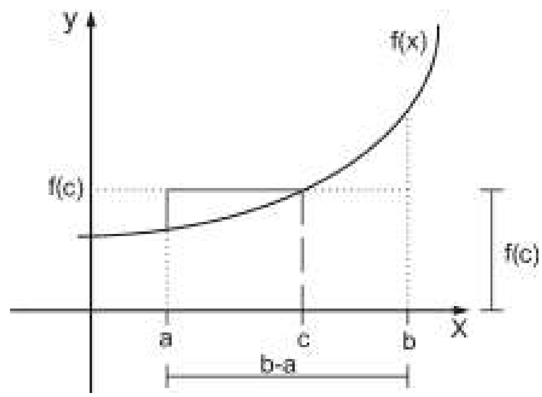
<u>Demostración</u>: se sugiere como ejercicio.

Propiedad 6: ***Teorema del valor medio para el cálculo integral***

Sea f(x) una función continua en [a,b]. Entonces existe c $\in$ [a,b] tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Geométricamente esta propiedad significa que para cualquier función continua en un cerrado [a,b], es posible determinar un punto c dentro del mismo, de modo que el área que la región delimitada por f(x), el eje x y las rectas x = a y x = b , es igual al área del rectángulo de base (b - a) y altura f(c). Gráficamente:



Demostración: Si a = b, $\int_a^b f(x)dx = c.(b-a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ por definición.

Sea a $\neq$ b. Por continuidad de f en el intervalo cerrado [a,b], sabemos que f alcanza en ese intervalo un valor máximo y un mínimo. Es decir siendo (m,f(m)) y (M,f(M)) los valores mínimo y máximo de la función en el intervalo considerado, tenemos que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$, para todo x $\in$ [a,b].

Integrando los tres miembros de la desigualdad entre a y b tenemos, por la propiedad 5 que:

$$\int_a^b f(m)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(M)dx$$

Pero, tanto f(m) como f(M) son constantes respecto de x, entonces por propiedad 2:

$$\int_a^b f(m)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(M)dx \Rightarrow f(m)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(M)(b-a)$$

Dividiendo miembro a miembro en esta desigualdad por (b − a) tenemos que

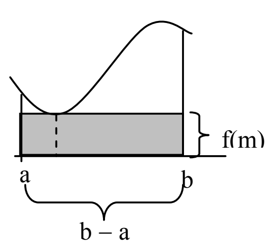
$$f(m) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(M),$$

Por el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas en un intervalo cerrado sabemos que para cualquier C tal que f(a) ≤ C ≤ f(b), existe $c \in (a, b)$ tal que f(c) = C, En este caso el término $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ es un número real, que no depende de x; por lo que podemos considerarlo como una función constante en [a,b]. Aplicando este teorema para C = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, existe c ∈ [a,b] tal que

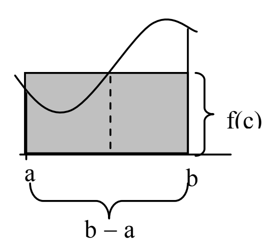
$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Despejando, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ ♣

Gráficamente, se puede ver que:

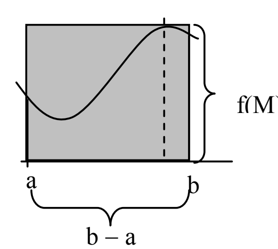
1) el área bajo f(x) y sobre el eje x entre x = a y x = b, toma un valor intermedio entre el área del rectángulo inscripto en la curva (de altura igual al mínimo que adopta f en el intervalo) y el rectángulo que circunscribe a la curva, (de altura igual al máximo que adopta f en el intervalo)
2) (como asegura el teorema) hay un rectángulo de altura intermedia entre el mínimo y el máximo de f en el intervalo, tal que su área es igual al área bajo la curva y sobre el eje entre x = a y x = b.



Rectángulo inscripto bajo la curva



rectángulo “intermedio” de igual área que la encerrada bajo la curva



rectángulo que inscribe a la curva

Comentario del teorema del valor medio para integrales.

¿Por qué este teorema se llama de ese modo?

Consideremos un intervalo [a,b] y una partición $P = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ donde

$a = x_0 < x_1 < \ldots. < x_n = b$.

El promedio de los valores que toma f(x) en cada punto de P es

$$\frac{f(x_0) + \ldots.. + f(x_n)}{n} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).\frac{1}{n} \,.$$

Multiplicando y dividiendo por (b-a) en esta expresión, tenemos

$$\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n} f(x_i).\frac{b-a}{n}$$

Llamemos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

Tomando el límite cuando n tiende a infinito tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$.

Es por eso que se llama valor promedio de un función en un intervalo [a,b] a la expresión $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

CALCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Supongamos que f(x) una función positiva y continua en [a,b]. Vimos que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa en este caso, el área de la figura delimitada por f(x), el eje x, y las rectas verticales x = a y x = b. El valor del área dependerá de la función f(x) y de los extremos de integración.

Como vimos, la variable de integración en una integral definida es una variable ficticia, de modo que podemos escribir $\int_a^b f(t)dt$ para representar la misma integrar. Considerando ahora esta integral, fijemos el extremo inferior de integración x = a y hagamos variar el extremo superior, llamándolo x.

Tendremos así que la integral definida de f en el intervalo [a,x] es una función de x, llamémosla G(x), que representará para cada x el área bajo f entre a y x.

En símbolos:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Demostraremos a continuación un teorema que vincula el cálculo de la integral definida de una función con las primitivas de la misma.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Si f(x) es continua en [a,b] y F es una primitiva de f (es decir, F' = f). Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración: Tomemos una partición de [a,b] P ={a = x_1, x_2,…, x_n = b} donde $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$. Escribamos la diferencia F(b) – F(a) utilizando los puntos de esta partición.

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - .... - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$$

Por el teorema del valor medio para derivadas, para cada subintervalo [x_{i-1}, x_i] existe un valor $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que:

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}$$

donde Δx_i es la amplitud del subintervalo

Despejando, tenemos $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i).\Delta x_i$

Pero por ser F una primitiva de f: $F'(c_i).\Delta x_i = f(c_i).\Delta x_i$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$, tenemos que

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \; ♣$$

Observación: Este teorema es fundamental para el cálculo de integrales definidas, ya que nos permite relacionar el concepto de primitiva con el cálculo requerido.

Antes de enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, para calcular una integral definida sólo disponíamos de una definición que nos llevaba a la necesidad de considerar una partición del intervalo de integración y luego tomar el límite para el número de puntos de la partición tendiendo a infinito. Este Teorema nos permite ahora calcular la integral definida de una función continua, con sólo conocer una primitiva y evaluarla en los extremos de integración.

<u>Notación</u>: En la práctica escribiremos $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Esto es: la integral definida de la función f(x) entre "a" y "b", es igual a una primitiva de f(x) evaluada entre "a" y "b", es decir, la primitiva evaluada en "b" menos la primitiva evaluada en "a".

<u>Ejemplos:</u>

1) Deseamos calcular la integral $\int_0^1 (2x - 6x^4 + 5)dx$. Por propiedades de integrales, sabemos que $\int_0^1 (2x - 6x^4 + 5)dx = \int_0^1 2xdx - \int_0^1 6x^4dx + \int_0^1 5dx$

Como sabemos que una primitiva de 2x es x^2, una primitiva de $6x^4$ es $\frac{6}{5}x^5$ y que una primitiva de 5 es 5x, podemos escribir:

$$\int_0^1 2xdx - \int_0^1 6x^4dx + \int_0^1 5dx = x^2\Big|_0^1 - \frac{6}{5}x^5\Big|_0^1 + 5x\Big|_0^1 = 1 - \frac{6}{5} + 5 = \frac{24}{5}.$$

2) Con un razonamiento análogo, tenemos que:

$$\int_1^2 -\frac{dt}{(t+2)^2} = \int_1^2 -(t+2)^{-2}dt = (t+2)^{-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Como vimos, de acuerdo al teorema fundamental del cálculo integral, la obtención de una primitiva es lo que permite calcular la integral definida de una función continua. Ahora vamos a desarrollar algunos métodos de integración que nos van a permitir calcular las primitivas de ciertas funciones. Hay que tener en claro que no todas las funciones tienen una primitiva que pueda ser calculada por métodos analíticos. Cuando ese es el caso, las integrales definidas se calculan mediante métodos numéricos o computacionales.

<u>Método de sustitución:</u>

Este método utiliza la regla de la cadena usada para derivar funciones compuestas.

La regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas dice que:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$$

La integral $\int f(g(x)).g'(x)dx$ puede ser escrita como

$$\int f(u).du \text{ donde } u = g(x) \quad du = g'(x)dx.$$

Si F es una primitiva de f, entonces podemos escribir

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int F'(g(x)).g'(x)dx$$

Por la regla de la cadena y la propiedad 2 de las integrales indefinidas, tenemos que

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = \int [F(g(x))]' dx = F(g(x)) + C$$

Es decir:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u).du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

<u>Regla práctica</u>:

Si se tiene $\int f(g(x)).g'(x)dx$, llamando $u = g(x)$, tenemos $du = g'(x)dx.$, y sustituyendo, $\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u).du$. Integrando esta última integral tenemos: $\int f(u).du = F(u) + C$

Volviendo a sustituir u por g(x), obtenemos $F(u) + C = F(g(x)) + C$.

<u>Ejemplo 1</u>: Se desea calcular $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx$ .Llamemos $u = x^2$. Entonces $du = 2x.dx$

Entonces: $\int \frac{1}{2} \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2} \text{tg } u + C$. Sustituyendo nuevamente u por x^2

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = \frac{1}{2} \text{tg}(x^2) + C \ \clubsuit$$

Analizando lo que hicimos

2) Elegimos como sustitución $u = x^2$ ¿Por qué? Observando el integrando vemos que en él está también parte de la derivada de esta función (los factores numéricos constantes pueden acomodarse) y la base de este método es tener una función compuesta, es decir una función evaluada sobre otra, tal que la derivada (salvo quizás factores numéricos) también esté presente en el integrando.

3) Derivamos la función que elegimos para la sustitución $du = 2xdx$ Para esta derivación hay que utilizar la regla de la cadena. Recordar que $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x).dx$

4) Sustituimos en la función x^2 por u, reescribiendo ahora f en función de u:
$\int \frac{1}{2} \frac{du}{\cos^2 u}$

5) Resolvemos la integral indefinida respecto de la variableu, que nos queda como una integral inmediata
$\int \frac{1}{2} \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2} \text{tgu} + C$

5) Sustituimos nuevamente u por x^2 reescribiendo nuevamente a f en función de la variable x. Tenemos así $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx \ = \frac{1}{2} \text{tg}(x^2) + C$

Ejemplo 2: Se desea calcular $\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}dx$

1) Buscamos una función que esté evaluada en otra cuya derivada esté también en el integrando. $u = \frac{1}{x}$ y $du = \frac{-1}{x^2}dx$
2) Sustituimos: $\int -6e^u du$
3) Resolvemos la integral $-6e^u + C$
4) Volvemos a sustituir en la primitiva hallada: $-6e^{1/x} + C$

Método de integración por partes:

Este método se basa en la regla de derivación del producto de funciones.

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Integrando miembro a miembro: $\int (f.g)' = \int (f'.g + f.g') = \int f'.g + \int f.g'$

El primer miembro de la igualdad es, por la propiedad 2, f.g. Entonces tenemos:

$f.g = \int f'.g + \int f.g' \quad \Rightarrow \int f'.g = f.g - \int f.g' \quad (1)$

Ejemplo 1: Se desea calcular $\int x \cos x dx$

Consideremos en el producto x.cosx g(x) = x y f'(x)=cos x. Entonces: g'(x)=1 y f(x)=senx. Por lo tanto:

$\int x \cos x dx = \int x.(\operatorname{sen}x)' dx = x.\operatorname{sen}x - \int x' \operatorname{sen}x dx = x\operatorname{sen}x - \int 1.\operatorname{sen}x dx = x\operatorname{sen}x + \cos x + C$

Analizando lo que hicimos:

Tenemos en el integrando un producto de funciones. Para aplicar la regla de integración por partes, una de las funciones del producto debe ser considerada una función sin derivar (g(x)) y la otra, como la derivada de una función (f '(x)). Luego deberemos considerar la derivada de la primera (g'(x)) y una primitiva de la segunda (f(x)). Luego, escribimos la integral buscada como la diferencia entre f.g y una nueva integral. Dos criterios acompañan la elección de cuál de las funciones del producto se elige como g(x) y cuál como f '(x). En primer lugar, deberíamos ver que la función que consideremos como f '(x) tenga una primitiva, si no inmediata, fácil de obtener. Y en segundo lugar, que sea posible resolver la nueva integral que queda planteada en el miembro de la derecha.

En este caso las dos funciones tienen primitivas inmediatas: $x = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'$ y $\cos x = (\operatorname{sen} x)'$. ¿Cuál elegimos entonces? Si elegimos escribir a x como la derivada de $\frac{1}{2}x^2$ la función que tenemos que derivar para obtener el integrando del segundo miembro de la ecuación (1) va a ser cosx y ese integrando va a quedar como $\int \left(\frac{1}{2}x^2\right).(-\operatorname{sen} x)dx$ que es una función más complicada para integrar que la original. Es por eso que la elección más directa es la realizada. La ejercitación da el manejo necesario para agilizar este proceso.

En resumen elegimos $f = \operatorname{sen} x \quad g = x \;\Rightarrow\; f' = \cos x \quad g' = 1$

Ejemplo 2: Se desea calcular $\int \ln x dx$

Parecería que este ejemplo no está en condiciones para poder aplicar este método ya que no hay producto de funciones. Pero siempre podemos pensar que esa función es el producto de 1.lnx. ¿Para qué nos sirve esto?

$$\int 1.\ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x.\ln x - \int x(\ln x)' dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx = x \ln x - \int 1dx =$$
$$x \ln x - x + C$$

Es decir hemos elegido $f = x \quad g = \ln x \;\Rightarrow\; f' = 1 \quad g' = \frac{1}{x}$

Ejemplo 3: Se desea calcular $\int e^x \operatorname{sen} x dx$

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \int e^x (-\cos x)' dx = -e^x \cos x - \int e^x (-\cos x) dx = -e^x \cos x + \int e^x (\operatorname{sen} x)' dx =$$
$$-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

En la expresión anterior aplicamos dos veces el método de integración por partes y volvimos a obtener la integral indefinida que queríamos calcular inicialmente.

Escribamos la primera y la última igualdad para verlo más claramente:

$\int e^x \operatorname{sen}x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \operatorname{sen}x dx$

Pasando al miembro de la izquierda la integral $\int e^x \operatorname{sen}x dx$ tenemos:

$2\int e^x \operatorname{sen}x dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}x$, por lo tanto:

$\int e^x \operatorname{sen}x dx = \dfrac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}x}{2} + C$

En este ejemplo se ve la utilidad de aplicar el método de integración por partes más de una vez.

Integración de funciones racionales:

Una función racional es un cociente de funciones polinómicas $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. El método que desarrollaremos a continuación se puede dividir en dos casos:

1) $gr(P(x)) \geq gr(Q(x))$
2) $gr(P(x)) < gr(Q(x))$

Caso 1: Si $gr(P(x)) \geq gr(Q(x))$, posible realizar la división de P(x) por Q(x):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde C(x) es una función polinómica y en el cociente $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ el grado de R(x) es estrictamente menor que el grado de Q(x).

Integrando miembro a miembro, y utilizando las propiedades de la integral indefinida, tenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx .$$

Esto es, la integral de una función polinómica más la integral de un cociente de funciones polinómicas que se encuentra dentro del segundo de los grupos de acabamos de diferenciar. Es decir, la función racional que nos queda para integrar cumple la condición que $gr(R(x)) < gr(Q(x))$ para la cual veremos a continuación el método de integración denominado "Método de Integración por reducción a fracciones simples", para cocientes de funciones polinómicas en el Caso 2.

Caso 2: Método de integración por reducción a fracciones simples.

Para aplicar este método debemos tener una función racional en la que el grado del numerador sea estrictamente menor que el del denominador El método se basa en la factorización del denominador lo que hace que este método se divida en distintos casos según el tipo de raíces que encontremos al realizar la factorización. La generalización de este método es engorrosa, por lo que lo desarrollaremos a través del uso de ejemplos.

Primer caso: factores lineales simples: todas las raíces reales y distintas

Se desea calcular $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx$

El denominador tiene dos raíces reales y distintas, x = –2 y x =3. Es decir, $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ La idea general del método es escribir el cociente como la suma de tantas funciones racionales como factores tenga el polinomio del denominador (en este caso dos), donde los denominadores sean los factores que hemos encontrado (este proceso algebraico se denomina descomposición en fracciones simples)

En nuestro ejemplo, se desea descomponer el cociente $\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}$ como suma de dos fracciones de numeradores desconocidos, por lo que escribiremos: $\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$. A y B deberán ser encontrados de modo que la igualdad anterior sea una identidad para todo valor de x.

Tomando común denominador en el segundo miembro de la igualdad, tenemos:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}$$

Esta igualdad es cierta para todo valor de x, por lo que, al mismo denominador, los numeradores también deben ser iguales. Por lo tanto, igualando los numeradores:

$$A(x-3)+B(x+2)=3x-1.$$

Dado que esta igualdad debe ser cierta para todo x, podemos evaluar esta expresión para valores "cómodos" de la variable x:

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow B5 = 8 \Rightarrow B = \frac{8}{5}$$

$$\text{Si } x = -2 \Rightarrow -5A = -7 \Rightarrow A = \frac{7}{5}$$

Una vez hallados A y B podemos reescribir:

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{7}{5}}{x+2} + \frac{\frac{8}{5}}{x-3}\ .$$

Integrando en ambos miembros y aplicando las propiedades correspondientes tenemos que:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx = \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}dx = \frac{7}{5}\ln|x+2| + \frac{8}{5}\ln|x-3| + C$$

<u>Segundo caso</u>: Factores lineales con raíces múltiples: todas las raíces reales, algunas de ellas, múltiples.

Se desea calcular $\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx$

En este caso x = –3 es raíz simple y x = 1 es raíz doble del denominador.

La descomposición se hace de manera análoga al caso anterior:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow 8 = 4C \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Si } x = -3 \Rightarrow 64 = 16A \Rightarrow A = 4$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow 13 = 4 - 3B + 6 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx = 4\int \frac{1}{x+3}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

Tercer caso: Factores irreducibles de grado mayor que 1: raíces reales y complejas

Se desea calcular $\int \frac{x^2-1}{x^3+x}dx$

Factorizando el denominador resulta $x^3 + x = x(x^2+1)$. En este caso no todas las raíces son reales.

La diferencia en la descomposición en fracciones simples se ve en el desarrollo:

$$\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$$

$$x^2-1 = A(x^2+1)+x(Bx+C)$$

Si $x = 0 \Rightarrow A = -1$

Si $x = 1 \Rightarrow -2 + B + C = 0$

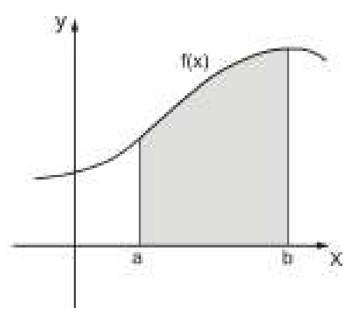
Si $x = -1 \Rightarrow -2 + B - C = 0 \quad \Rightarrow B = 2 \quad C = 0$

$$\int \frac{x^2-1}{x^3+x}dx = -1\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx = -\ln|x| + \ln(x^2+1) + C$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

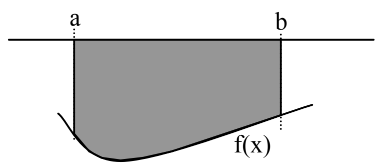
- ***Cálculo de áreas encerradas entre curvas y el eje x.***

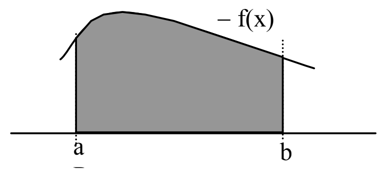
Hemos visto que si $f(x) \geq 0$ y es continua en el cerrado [a,b], podemos interpretar la integral definida de f(x) en ese intervalo como el área debajo de la curva, es decir el área del polígono curvilíneo que tiene por lados el eje x, las rectas x = a y x = b y la curva que representa a f(x) (ver figura). Es decir A = $\int_a^b f(x)dx$



¿Qué pasa si la función es negativa o tiene tramos negativos en el intervalo de integración como en la figura siguiente?

En primer lugar consideremos una función continua en [a,b] tal que $f(x) \leq 0$ para todo x del intervalo. El área de la figura encerrada por f(x), el eje x y las rectas verticales x = a y x = b es idéntica al área de la figura obtenida por simetría respecto del eje x. Esta segunda figura, referida a un sistema cartesiano, está delimitada por el eje x, las rectas verticales x = a y x = b y la recta simétrica a f(x), es decir la curva $-f(x)$:

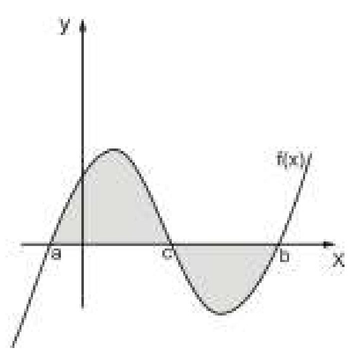




Pero usando una integral definida podemos decir que el área de la figura de la derecha es: $\int_a^b -f(x)dx$. Pero por propiedades $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = A$, por lo que la integral definida de la función f(x) entre x = a y x = b es igual al valor opuesto del área de la figura encerrada por $-f(x)$ en el mismo intervalo. Dicho de otro modo, f(x) y su función opuesta $-f(x)$ encierran entre x = a y x = b la misma área. Sus integrales son de signos opuestos. Si deseamos calcular el área encerrada entre x = a y x = b por una función continua $f(x) \leq 0$ en todo el intervalo podemos calcular:

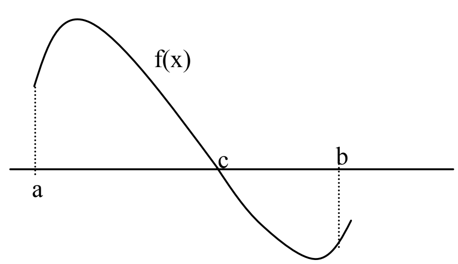
$$A = \left| \int_a^b -f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx$$

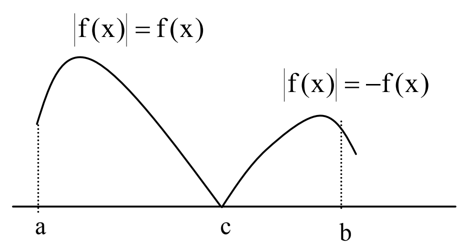
Consideremos ahora el caso de una función continua en [a,b] que tome en dicho intervalo valores positivos y negativos, como por ejemplo en la siguiente figura:



Como la función es continua, sabemos que al menos en un punto en el interior del intervalo, digamos x = c, tendremos f(c) = 0. Esta propiedad de las funciones continuas nos permite subdividir el intervalo [a,b] en subintervalos de modo que en cada uno de ellos la función posea el mismo signo. También sabemos que si una función es continua en un intervalo lo será en cualquier intervalo incluido en él. En el ejemplo de la figura, $f(x) \geq 0$ en [a,c], donde es continua, y $f(x) \leq 0$ en [c,b], donde es continua. Para calcular el área encerrada por f(x) entre x = a y x = b podremos entonces (por propiedad de las integrales definidas) dividir el intervalo de integración en subintervalos donde f(x) tenga el mismo signo; usando la integral definida, calcular directamente el área de encerrada por f(x) y el eje x en los subintervalos donde f es positiva, e indirectamente, tomando el valor absoluto de la integral definida de f(x) en los intervalos donde f es negativa.

Pero veamos lo siguiente. Consideremos una función continua f(x) que toma valores positivos y negativos en un intervalo [a,b] como se ve en la figura. Si tomamos su módulo, tendremos que, en el (o los) subintervalo donde $f(x) \geq 0$, $|f(x)| = f(x)$, y en el (o los) subintervalo donde $f(x) \leq 0$, $|f(x)| = -f(x)$





Sin duda el área encerrada entre las curvas y el eje x entre x = a y x = b es la misma, por simple simetría.

Si utilizamos la integral definida para el cálculo del área en la figura de la derecha, veremos que:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\substack{\text{por ser } f \geq 0 \text{ en} \\ \text{este intervalo}}} + \underbrace{\int_c^b -f(x)dx}_{\substack{\text{por ser } f \leq\ 0 \text{ en} \\ \text{este intervalo}}} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Es decir, si f(x) es una función continua en el cerrado [a,b] que toma valores positivos y negativos en ese intervalo, y se desea calcular el área de la figura encerrada por la curva, el eje x y las rectas verticales x = a y x = b, puede hacerse tomando la intergral del módulo de f(x), que es equivalente a tomar la integral de f(x) en los subintervalos donde es positiva y a eso sumarle la integral de – f(x) en los subintervalos donde es negativa, es decir:

Si $f \geq 0$ en [a,c] y $f(x) \leq 0$ en [c,b], para el cálculo del área es equivalente hacer:

1) $A = \int_a^b |f(x)| dx$

2) $A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$

3) $A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

Analizando lo que estamos haciendo:

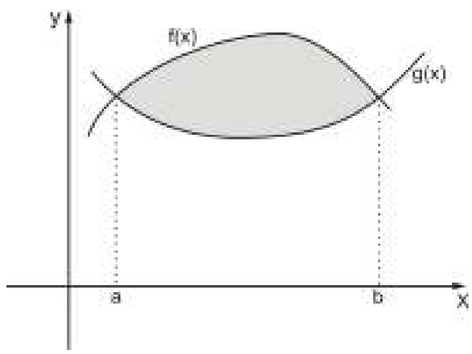
Si por analogía calculáramos al área de la misma manera, recordando la definición de integral como el límite de una suma en donde intervienen el área de rectángulos cuya altura es la imagen de la función, vemos que estaríamos "restando" valores en los subintervalos donde $f(x) \leq 0$, ya que el máximo y el mínimo de f(x) en dichos subintervalos serían también negativos (o eventualmente cero).

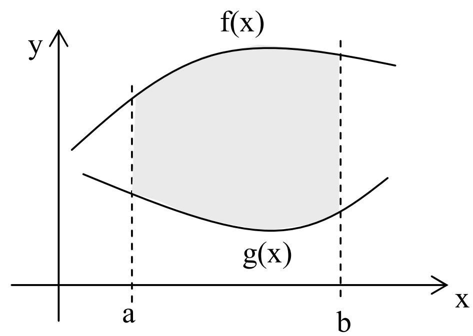
Así el cálculo de la integral definida este cálculo podría ser eventualmente cero o negativo, lo que contradice el concepto natural de área. Para el cálculo del área de la figura, la idea es sumar las áreas parciales que se forman entre f(x) y el eje x, y para hacer eso bastará con integrar el módulo de la función, $|f(x)|$.

Observación: Se ve claramente que el cálculo del área debajo de una curva no tiene por qué coincidir con el cálculo de una integral definida. Particularmente sólo será igual cuando la función a integrar sea positiva en todo el intervalo de integración.

- ***Cálculo del área de una región encerrada entre dos curvas***

Los gráficos a continuación muestran dos ejemplos de figuras delimitadas por dos curvas que representan las funciones f(x) y g(x), continuas en [a,b] tales que $f(x) \geq g(x)$ en ese intervalo.



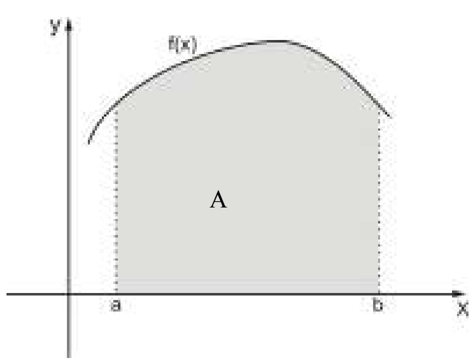


En el gráfico de la izquierda, la figura está delimitada sólo por las gráficas de f y g. Mientras que, en el de la derecha las rectas verticales x = a y x = b delimitan a la figura, además de los gráficos de f y g.

Consideremos el ejemplo de la izquierda

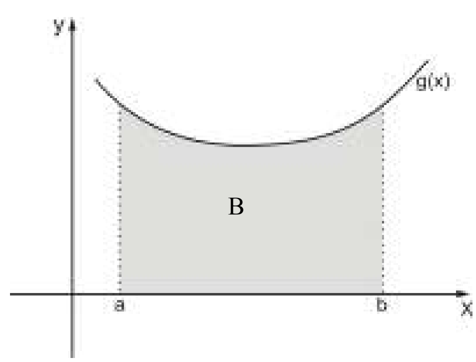
La integral definida de f(x) entre x = a y x = b, da como resultado el área de de la figura en el gráfico siguiente:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



La integral definida de f(x) entre x = a y x = b, da como resultado el área de de la figura en el gráfico siguiente

$$B = \int_a^b g(x)dx$$



El área que deseamos calcular puede obtenerse restando el área A menos el área B:

En símbolos: el área de la figura buscada es

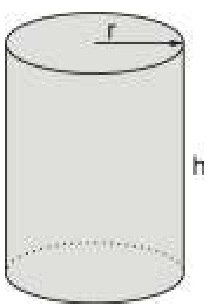
$$A - B = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

<u>Observación</u>: Siempre que f(x) sea mayor que g(x) podemos estar seguros que lo estamos calculando es un área, ya que vamos a integrar una función que es positiva siempre, por más que f(x) o g(x) (o eventualmente ambas) tengan imágenes negativas en el intervalo considerado.

<u>Ejercicio</u>: Analizar el caso en que las funciones f(x) y g(x) se crucen en [a,b].

- Cálculo de volúmenes de sólidos.

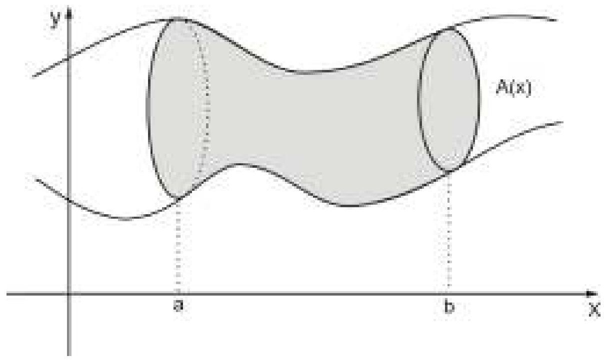
Recordemos qué es lo que hacemos cuando calculamos el volumen de un cilindro, multiplicamos el área de la base por la altura del cilindro.



Vol: $\pi.r^2.h$

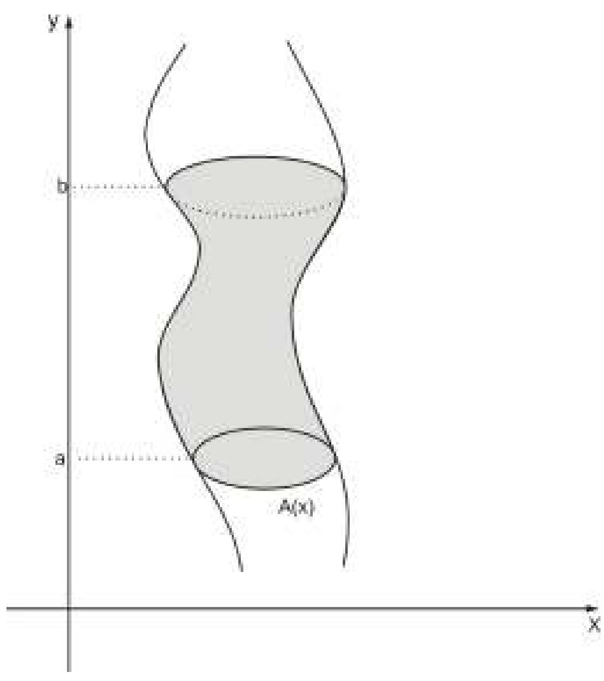
Esta fórmula podemos generalizarla siempre y cuando la superficie de la base "se mantenga constante" a medida que aumentamos la altura. En otras palabras si nos paramos a cualquier altura, y hacemos un corte horizontal seguimos encontrando la misma superficie.

Consideremos la siguiente figura.



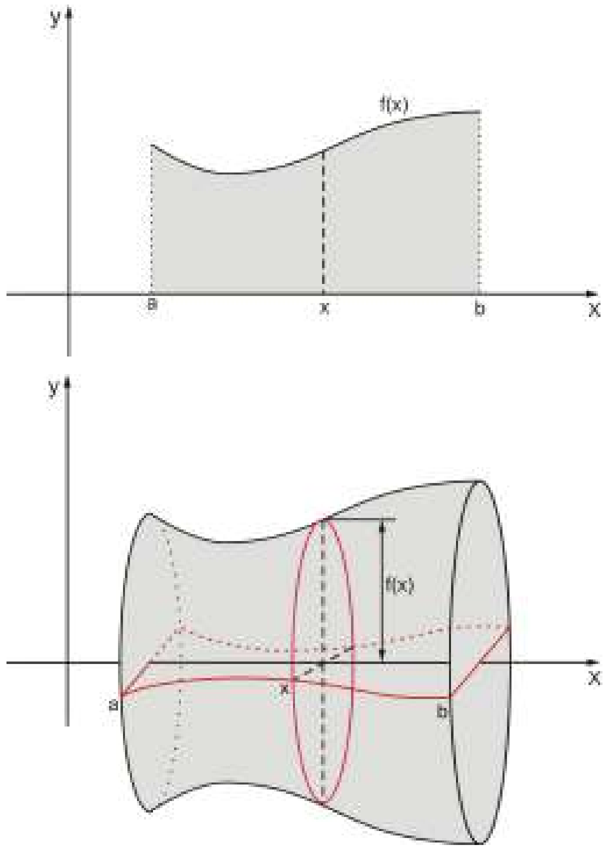
Se ha generado un volumen entre las dos funciones con un área variable en la dirección del eje x. Por analogía con lo que hicimos al calcular el volumen del cilindro, podemos calcular el volumen de esta figura como el límite de una suma de pequeños volúmenes sumados en la dirección del eje x.

En símbolos: $V = \int_a^b A(x)dx$. Por supuesto que este cálculo es análogo si el área varía en dirección del eje y, es decir si rotamos la figura anterior, $V = \int_a^b A(y)dy$



Sólidos de revolución

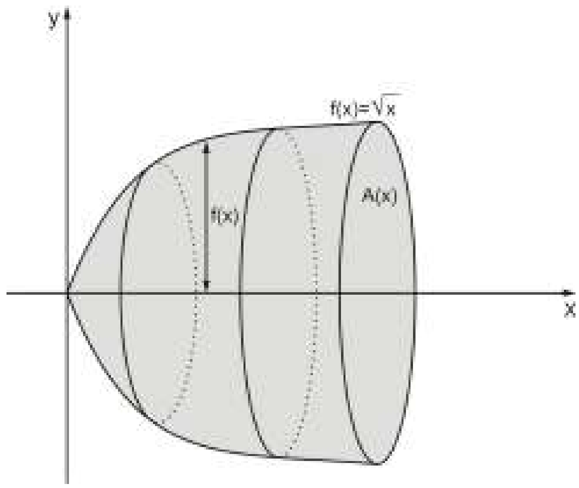
Cuando una región plana se encuentra por completo en un lado de una recta fija, y hacemos girar esa región alrededor de esa recta (eje del sólido) generamos un sólido de revolución.



Con lo visto anteriormente el volumen es igual a $V = \int_a^b A(x)dx$. Para cada valor de x el área coincide con el área de un círculo cuyo radio es la imagen de la función en ese punto, es decir f(x). Entonces $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$

Ejemplos: Encontrar el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región plana acotada por $f(x) = \sqrt{x}$, el eje x y la recta x = 4 alrededor del eje x.

La figura que se genera es la siguiente.

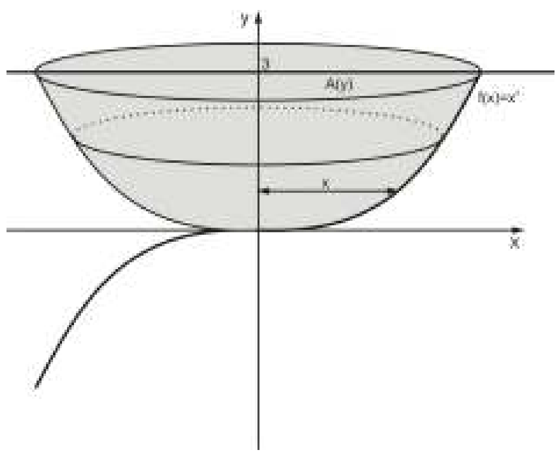


Para cada x el área es

$$A(x) = \pi . y^2 = \pi . \left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi . x$$

$$\int_0^4 A(x)dx = \int_0^4 \pi . x dx = \pi \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 = 8.\pi$$

Otro ejemplo: Encontrar el volumen de la región generada al rotar la curva $y = x^3$ en torno al eje y. La región está acotada por la curva, el eje y y la recta y = 3.



En este caso la variación del área se da según el eje y

$$A(y) = \pi . x^2 = \pi . y^{2/3}$$

$$\mathrm{Vol} = \int_0^3 A(y)dy = \int_0^3 \pi . y^{2/3} dy = \pi . \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^3 = \pi . \frac{3}{5} 3^{5/3} = \pi . \frac{9}{5} \sqrt[3]{9}$$

- Trabajo de una fuerza variable.

Recordemos la definición de trabajo de una fuerza en el caso de que se aplique una fuerza constante $W = \vec{F}.\vec{d}$ donde F es la fuerza aplicada en una distancia d.
En el caso de que la fuerza no sea constante el concepto de integral permite hacer extensiva la definición de la siguiente manera: $W = \int_a^b F(x)dx$

Ejemplo. La fuerza ejercida por un resorte bajo el modelo de la ley de Hooke establece que dicha fuerza es proporcional al desplazamiento, dependiendo la constante de proporcionalidad del material con que esté hecho el resorte.

En símbolos $F = kx \Rightarrow W = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = k\frac{1}{2}x^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{k}{2}\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)$

Integrales impropias

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral y todas las propiedades de las integrales definidas que hemos considerado hasta este punto, requieren de la continuidad del la función f a integrar en un intervalo de integración acotado y cerrado [a,b]
Esta hipótesis podría violarse por dos razones:

1) aún siendo f continua, el intervalo de integración no es acotado, es decir, f es continua pero el intervalo de integración es $[a,+\infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, +\infty)$, o
2) el intervalo es acotado pero f no es continua en él. Una

En cualquiera de estos dos casos no son aplicables las propiedades de la integral definida ni lo es el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Consideremos en primer lugar el caso de la integral de una función continua dentro del intervalo de integración $[a,+\infty)$. Es decir, deseamos calcular

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ , siendo f continua en } [a,+\infty)$$

Si f(x) es continua en el intervalo $[a,+\infty)$, lo serpara cualquier b $\in$ $[a,+\infty)$ f es continua. Por lo tanto para cada número b > a podemos calcular $\int_a^b f(x)dx$ usando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Cuando b tiende a infinito definimos la integral impropia

$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, que converge a L si ese límite existe. En caso contrario decimos que la integral diverge.

De manera análoga se define $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ par una función continua en $(-\infty, b]$

Ejemplos:

1) $\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^b}\right) = \frac{1}{e}$

2) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$

Si la función es continua para todos los reales,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx = M + L$ donde $M = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ y $L = \int_0^{\infty} f(x)dx$

si ambos límites existen. Si no la integral impropia diverge.

Las integrales impropias se definen también para funciones que no son continuas en un intervalo cerrado. Una función puede no ser continua en [a,b] porque

- no es continua en uno (o ambos) extremos del intervalo pero sí en su interior
- no es continua en el interior

Por ejemplo, consideremos una función f(x) continua en $[a,b)$. Para cualquier c $\in$ $[a,b)$ tendremos que f(x) es continua en [a,c], con lo cual podemos aplicar en este nuevo intervalo el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, y como hicimos para el caso anterior, calcular la integral haciendo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

Decimos que la integral converge si ese límite existe y es finito y en caso contrario decimos que diverge.

De manera análoga para una función continua en $(a,b]$, calculamos la integral haciendo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

Por último, si la función es discontinua en un punto interior del intervalo por ejemplo el punto m $\in$ (a,b), es decir f es continua en $[a,m) \cup (m,b]$, podemos partir el problema en dos problemas como los anteriores, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx = \lim_{c \to m^-} \int_a^m f(x)dx + \lim_{c \to m^+} \int_m^b f(x)dx$$

y diremos que la integral converge si y solo si los dos límites existen.

<u>Ejemplo</u>:

Se desea calcular $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}dx$, pero la función es discontinua en x = 0, por lo que:

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c \to 0^-} \int_{-2}^{c} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c \to 0^-} \left.\frac{-1}{x}\right|_{-2}^{c} + \lim_{c \to 0^+} \left.\frac{-1}{x}\right|_{c}^{1c} = \infty$$