Rapport Traitement du Signal
TD9-10

François Louis Legland, Antoine Lesort

Mai 2025

1 Filtre RIF

1.1 Équation aux différences

Conditions initiales :

$$y[1] = x[1]$$
$$y[2] = \frac{x[2] + x[1]}{2}$$
$$y[3] = \frac{x[3] + x[2] + x[1]}{3}$$
$$y[4] = \frac{x[4] + x[3] + x[2] + x[1]}{4}$$
$$y[5] = \frac{x[5] + x[4] + x[3] + x[2] + x[1]}{5}$$

Boucle principale (à partir du 5ème échantillon) :

$$y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4])\,\frac{1}{5}, \quad pour n \geq 5$$

1.2 Fonction de transfert en z

$$H(z) = \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\right)\frac{1}{5}$$

1.3 Ordre du filtre

L'ordre d'un filtre RIF est égal au nombre de coefficients non nuls moins 1. L'ordre est donc de $5 - 1 = 4$.

1.4 Signal bruité et filtré

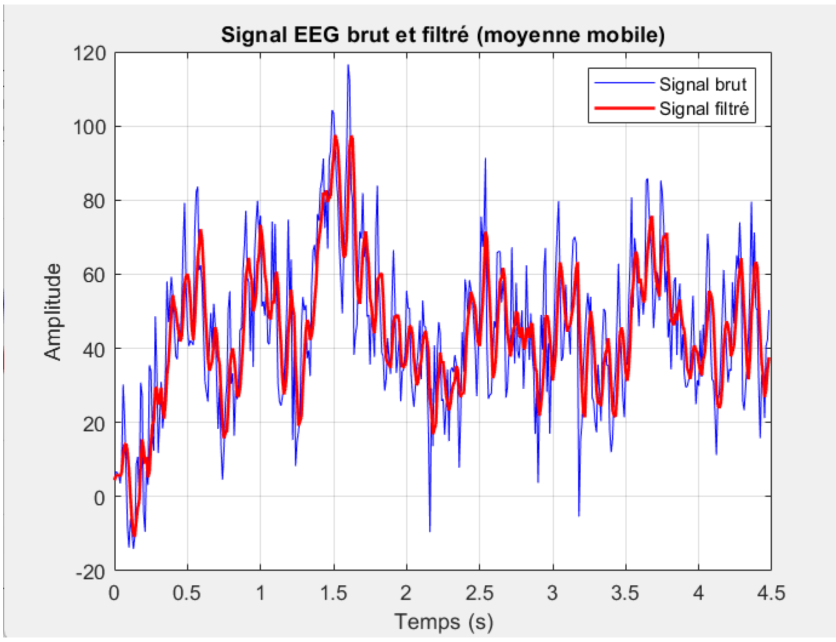

Figure 1: Signal bruité et signal filtré

1.5 Analyse du sommeil

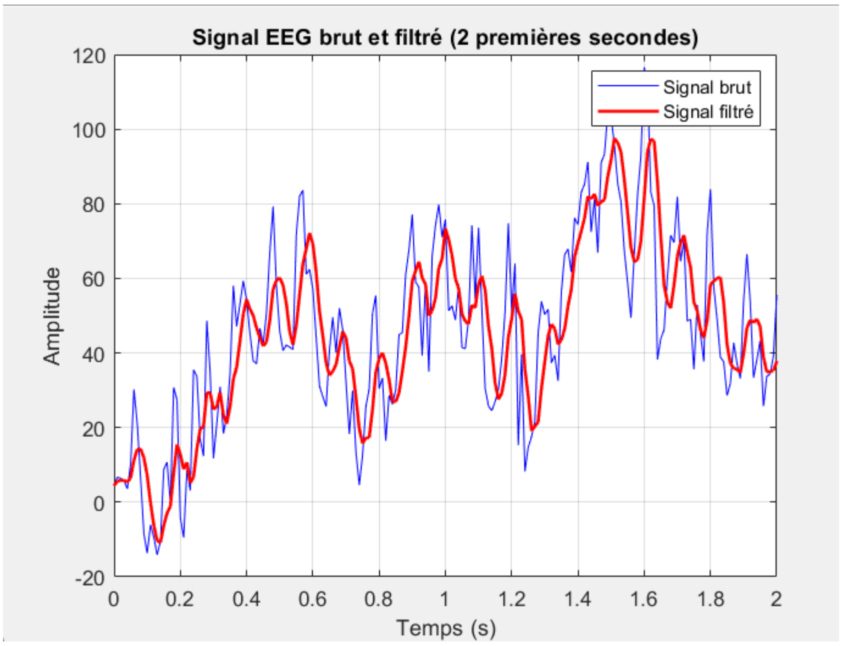

Figure 2: Analyse du sommeil

On voit qu'il y a 19 pics en 2 secondes, on en déduit une fréquence très proche de 10 Hz, le patient est donc dans un état relaxé.

1.6 Spectre du signal brut

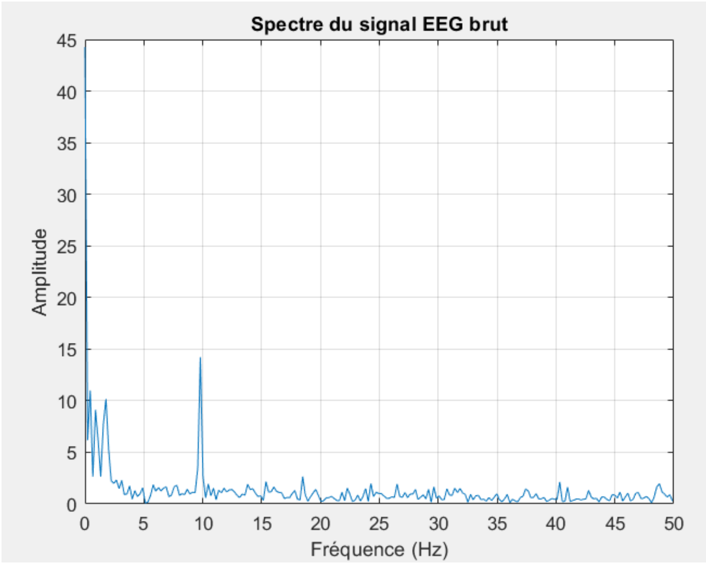

Figure 3: Spectre fréquentiel du signal brut

Ce graphique confirme bien le résultat trouvé précedement.

2 Filtrage d'un bruit aigu dans un signal

2.1 Etude du signal "Mozart Bruit.wav"

2.1.1 Question 1

Période du signal : 0.000045 sec
Fréquence d'échantillonage du signal :22050 Hz
Nombre de bits utilisé : 16 bits

2.1.2 Question 2 : Représentations temporelles et fréquentielles

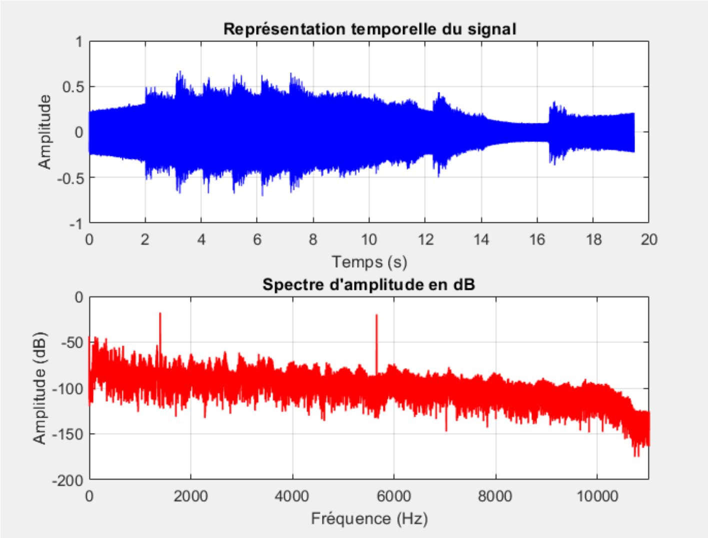

Figure 4: Spectre Temporel

2.1.3 Question 3 : Caractéristiques d'un signal échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage fe

1. **Temps discret** On ne conserve que les valeurs du signal continu $s(t)$ aux instants

$$t_n = n\,T_e, \quad n \in Z,$$

   où

$$T_e = \frac{1}{f_e}$$

   est la période d'échantillonnage. D'où plus f_e est élevé, plus T_e est petit et meilleure est la résolution temporelle du signal échantillonné.

2. **Théorème de Shannon** Pour pouvoir reconstruire sans perte un signal continu de bande passante maximale $f_{\max}$, la fréquence d'échantillonnage doit satisfaire

$$f_e > 2\,f_{\max}.$$

   Si cette condition n'est pas respectée, on observe un repliement de spectre (aliasing).

2.1.4 Question 4 : Determiner la valeur des fréquences indésirables entre 0 et fe qui génèrent le bruit

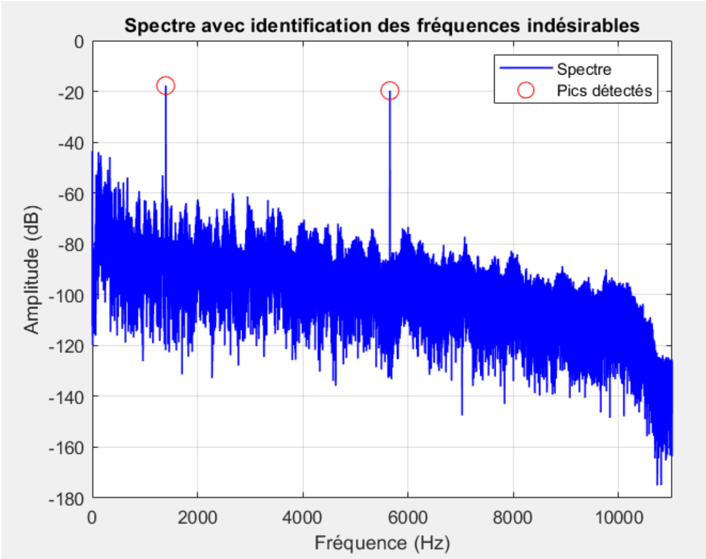

Figure 5: Spectre Fréquenciel pour determiner les fréquences qui génère du bruit

On voit bien les fréquences indésirables autour de $fi_1 \approx 1\,400\,\mathrm{Hz}$ et l'autre autour de $fi_2 \approx 5\,700\,\mathrm{Hz}$.

2.1.5 Question 5 : Determiner la valeur des fréquences indésirables entre 0 et fe qui génèrent le bruit

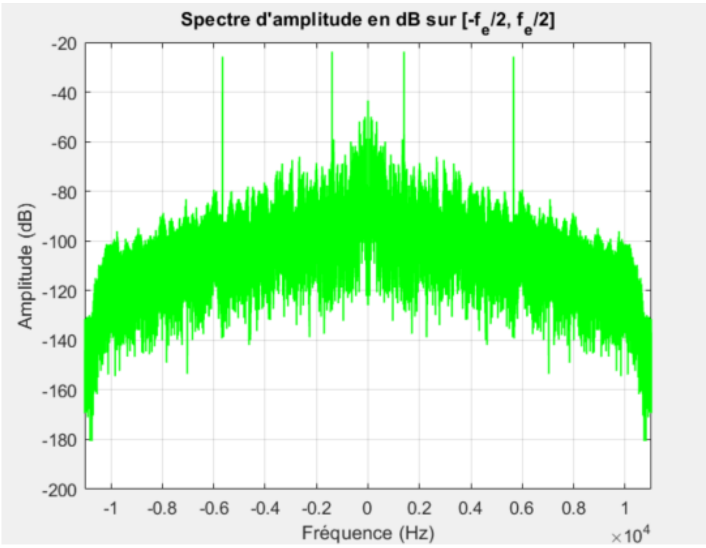

Figure 6: Spectre d'Amplitude

On voit bien les 4 fréquences indésirables autour de $fi_1 \approx 1\,400\,\mathrm{Hz}$ et l'autre autour de $fi_2 \approx 5\,700\,\mathrm{Hz}$ et leur opposés.

2.2 Filtrage numérique en temps réel (IIR casual)

2.2.1 Question 1 : Le Filtre

Pour supprimer les pics parasites observés, nous mettons en cascade un filtre Butterworth coupe-bande (band-stop) de 2 ordre.

Le filtre devra couper les bandes suivantes :

- **117,01 Hz** : bande rejet

$$[\,117,01 - 25,\ 117,01 + 25\,] \approx [\,92,01;\ 142,01\,]\ Hz$$

- **160,93 Hz** : bande rejet

$$[\,160,93 - 25,\ 160,93 + 25\,] \approx [\,135,93;\ 185,93\,]\ Hz$$

- **333,19 Hz** : bande rejet

$$[\,333,19 - 25,\ 333,19 + 25\,] \approx [\,308,19;\ 358,19\,]\ Hz$$

- **1397,01 Hz** : bande rejet

$$[\,1397,01 - 25,\ 1397,01 + 25\,] \approx [\,1372,01;\ 1422,01\,]\ Hz$$

- **5658,01 Hz** : bande rejet

$$[\,5658,01 - 25,\ 5658,01 + 25\,] \approx [\,5633,01;\ 5683,01\,]\ Hz$$

Nous allons devoir utiliser des filtres coupe-bande.

2.2.2 Question 2,3,4,5 : Représentations temporelle et fréquentielle

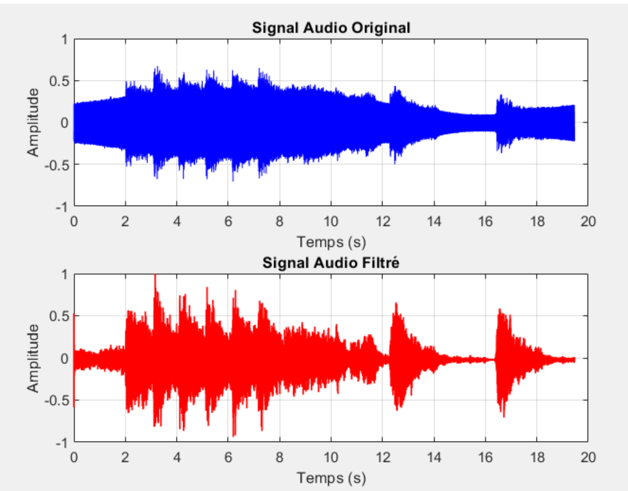

Figure 7: Spectre d'Amplitude

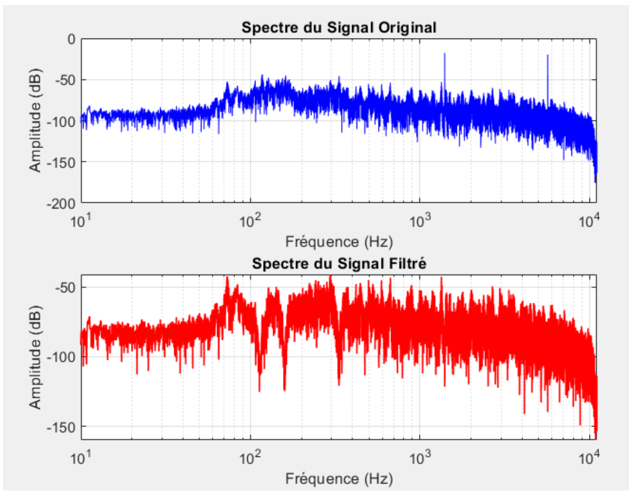

Figure 8: Spectre Fréquentiel

2.2.3 Question 6 : Fonction de transfert

Pour chaque fréquence indésirable f_i (avec $i = 1 \ldots 5$), on a conçu un filtre Butterworth coupe-bande d'ordre 2 dont les coefficients numériques sont

$$[b_i,\ a_i] \ = \ \texttt{butter}\big(2,\ [\,f_i - 25,\ f_i + 25\,]/f_{\text{Nyq}},\ 'stop'\big),$$

où $f_{\text{Nyq}} = f_e/2$

La fonction de transfert du i–ème filtre s'écrit alors

$$H_i(z) \;=\; \frac{b_{i,0} \;+\; b_{i,1}\,z^{-1} \;+\; b_{i,2}\,z^{-2}}{a_{i,0} \;+\; a_{i,1}\,z^{-1} \;+\; a_{i,2}\,z^{-2}}.$$

Le filtre équivalent en cascade est simplement le produit de ces cinq filtres :

$$H_{\mathrm{eq}}(z) = \prod_{i=1}^{5} H_i(z) = \frac{\big(b_1 * b_2 * \cdots * b_5\big)(z^{-1})}{\big(a_1 * a_2 * \cdots * a_5\big)(z^{-1})},$$

c'est-à-dire, si l'on pose

$$B(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{10} B_k\,z^{-k} \quad et \quad A(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{10} A_k\,z^{-k},$$

alors

$$H_{\mathrm{eq}}(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{B_0 + B_1\,z^{-1} + \cdots + B_{10}\,z^{-10}}{A_0 + A_1\,z^{-1} + \cdots + A_{10}\,z^{-10}}.$$

2.2.4 Question 7 : Réponse en fréquence

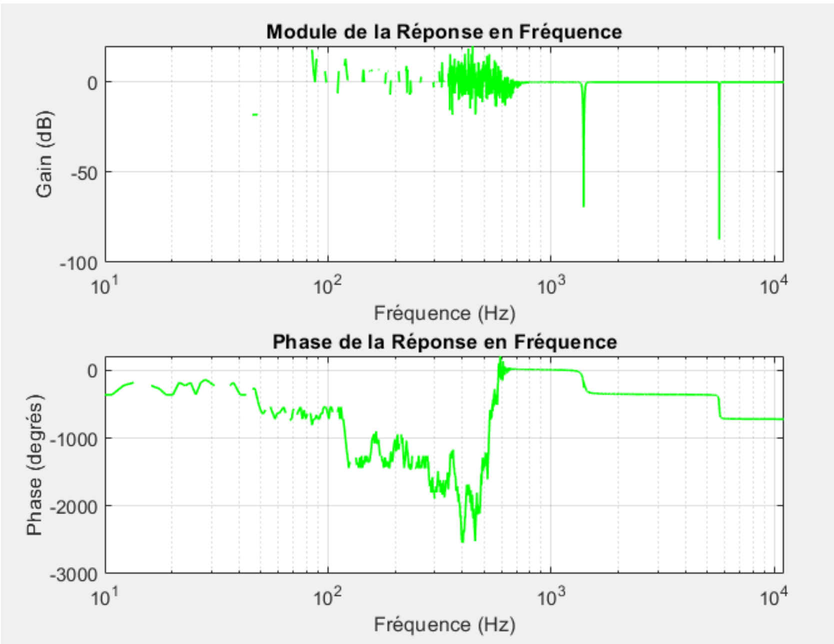

Figure 9: Réponse en fréquence(module et phase