Отчет по лабораторной работе №8

Модель конкуренции двух фирм - вариант 41

Логинов Сергей Андреевич НФИбд-01-18

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Изучить модель конкуренции двух фирм.

Теоретическая справка:

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

t – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

p~ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

$$\delta-$$

доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

k – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

Q(S/p) – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})(1)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при

$$p = p_{cr}$$

— критическая стоимость продукта
потребители отказываются от приобретения товара.

Величина

$$p_{cr} = \frac{Sq}{k}$$

Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k(2)$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma\Big(- \frac{M\delta}{\tau\dot{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})\Big)(3)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр y зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла t.

При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением:

$$-\frac{M\delta}{\tau\dot{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0(4)$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно:

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\dot{p}Nq})(5)$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид:

$$\frac{dM}{dt} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p}{p_{cr}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\dot{p}})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - k(6)$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию dM/dt = 0:

$$\dot{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a\acute{s}\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}(7)$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\dot{p}}{p_{cr}})\dot{p}\frac{\tau}{\delta}, b = kNq(\frac{(\tau\dot{p})^2}{p_{cr}\delta^2})(8)$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При b « a стационарные значения M равны:

$$\dot{M}_{+} = Nq(1 - \frac{\dot{p}}{p_{cr}})\dot{p}, \dot{M}_{-} = k\dot{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \dot{p})}(9)$$

Первое состояние устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние неустойчиво, так, что при

$$M < \dot{M}_{-}$$

оборотные средства падают (dM/dt < 0), то есть, фирма идет к банкротству.

По смыслу

$$\dot{M}_{-}$$

соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр

$$\delta$$

всюду входит в сочетании с t. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим:

$$\delta = 1,$$

а параметр t будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

Конкуренция двух фирм

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q(1-\frac{p}{p_{cr}})p - k_1 \\ \frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q(1-\frac{p}{p_{cr}})p - k_2 \end{cases} \quad (10) N_1, N_2 -$$

числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы, где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \dot{p}} = N_1 q(1-\frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \dot{p}} = N_2 q(1-\frac{p}{p_{cr}}) \end{cases} \quad , (11) \dot{p}_1, \dot{p}_2$$

— себестоимости товаров в первой и второй фирмах

с учетом (10) представим (11) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_1}{\tau_1}(1-\frac{p}{\dot{p}_1}) - k_1 \\ \frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_2}{\tau_2}(1-\frac{p}{\dot{p}_2}) - k_2 \end{cases} \quad (12)$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3):

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma\Big(\frac{M_1}{\tau_1 \dot{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \dot{p}_2} - Nq(1-\frac{p}{p_{cr}})\Big)(13)$$

считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr}\Big(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M_1}{\tau_1 \dot{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \dot{p}_2})\Big)(14)$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = c_1 M_1 - bM_1M_2 - a_1 M_1^2 - k_1 \\ \frac{dM_2}{dt} = c_2 M_2 - bM_1M_2 - a_2 M_2^2 - k_2 \end{cases} \quad (15)$$

где:

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \dot{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \dot{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tau_2^2 \dot{p}_1^2 \dot{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \dot{p}_1}{\tau_1 \dot{p}_1}, c_2 = \frac{p_{cr} - \dot{p}_2}{\tau_2 \dot{p}_2}(16)$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (k1, k2) пренебрежимо малы. И введем нормировку

$$t = c_1 O$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dO} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{dO} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a2}{c_1} M_2^2 \end{cases} \quad (17)$$

Чтобы решить систему (17) необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения:

$$M_1 = 2, M_2 = 1, p_{cr} = 20, \tau_1 = 10, \tau_2 = 16, \dot{p}_1 = 9, \dot{p}_2 = 7, N = 10, q = 1$$

При таких условиях получаем следующие динамики изменения объемов продаж:

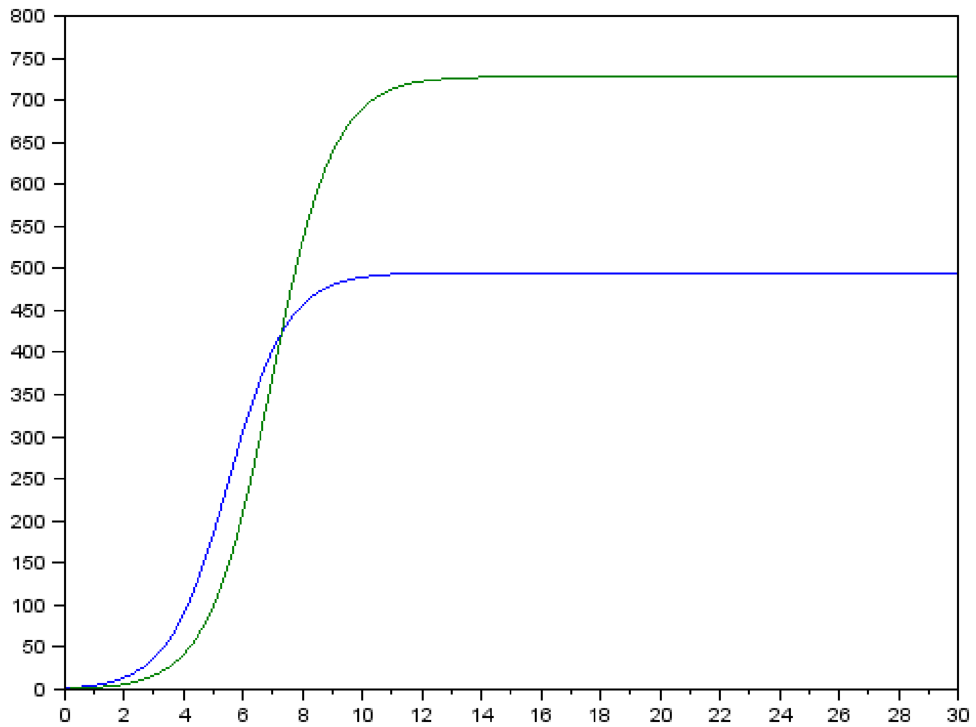

Рис. 0.1: График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый).

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели (17) этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом

$$M_1 M_2$$

в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях

$$\frac{b}{c_1}$$

Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

Случай 2

рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

$$M_1M_2$$

будет отличаться.

рассмотрим следующую модель:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dO} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0,002)M_1M_2) - \frac{a1}{c_1}M_1^2 \\ \frac{dM_2}{dO} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a2}{c_1}M_2^2 \end{cases} \qquad (18)$$

Начальные условия и известные параметры остаются прежними. В этом случаем получим следующее решение:

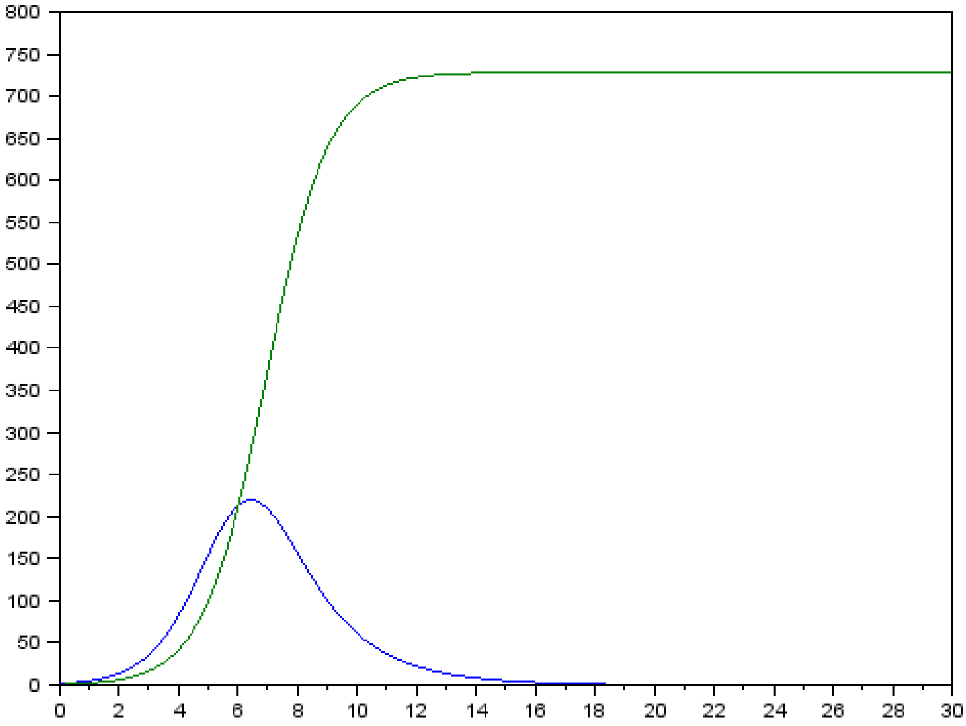

Рис. 0.2: График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый).

По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

Выполнение работы:

Вариант 41

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dO} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{dO} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a2}{c_1} M_2^2 \end{cases} ,$$

$$\text{ãäå} a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \dot{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \dot{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tau_2^2 \dot{p}_1^2 \dot{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \dot{p}_1}{\tau_1 \dot{p}_1}, c_2 = \frac{p_{cr} - \dot{p}_2}{\tau_2 \dot{p}_2}$$

Также введена нормировка:

$$t = c_1 O$$

Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

$$M_1 M_2$$

будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dO} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{dO} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - (\frac{b}{c_1} + 0,00021) M_1 M_2 - \frac{a2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_1 = 5,5, M_2 = 5, p_{cr} = 35, N = 41, q = 1, \tau_1 = 14, \tau_2 = 7, \dot{p}_1 = 6,5, \dot{p}_2 = 15,$$

Задача:

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

Выполнение:

Напишем программный код для нашей задачи:

```
import numpy
from scipy. integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as pl


p_cr = 35
tau1 = 14
p1 = 6.5
tau2 = 7
p2 = 15
V = 41
q = 1

x0 = [5.5, 5]
a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*V*q)
a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*V*q)

b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*V*q)

c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)

t = numpy.arange(0, 30, 0.01)

def syst(dx, t):
    dx1, dx2 = dx
    return[dx1 - (a1/c1)*dx1*dx1 - (b/c1)*dx1*dx2,
           (c2/c1)*dx2 - (a2/c1)*dx2*dx2 - (b/c1)*dx1*dx2]

y = odeint(syst, x0, t)

y_1 = y[:, 0]
y_2 = y[:, 1]

fig1 = pl.figure(facecolor='white')
pl.plot(t, y_1, label='Фирма 1')
pl.plot(t, y_2, label='Фирма 2')
pl.legend()
pl.show()

def syst(dx, t):
    dx1, dx2 = dx
    return[dx1 - (a1/c1)*dx1*dx1 - (b/c1)*dx1*dx2,
           (c2/c1)*dx2 - (a2/c1)*dx2*dx2 - (b/c1+0.00021)*dx1*dx2]
```

```
y1 = odeint(syst, x0, t)

y1_1 = y1[:, 0]
y1_2 = y1[:, 1]

fig2 = pl.figure(facecolor='white')
pl.plot(t, y1)
pl.plot(t, y1_1, label='Фирма 1')
pl.plot(t, y1_2, label='Фирма 2')
pl.legend()
pl.show()
```

Результат выполнения:

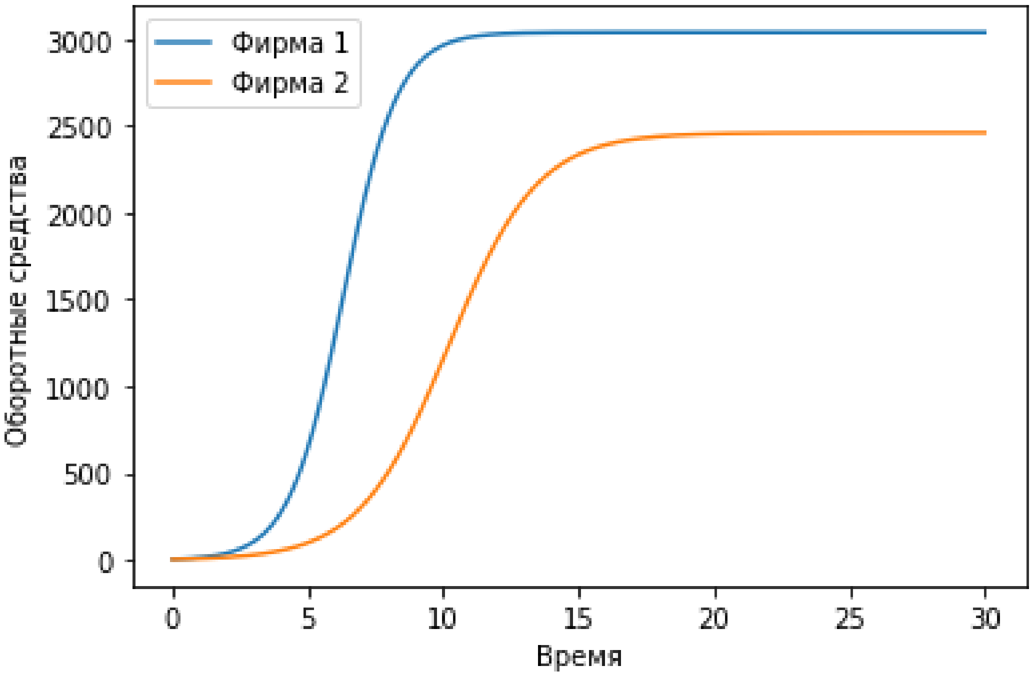

Рис. 0.3: Случай 1

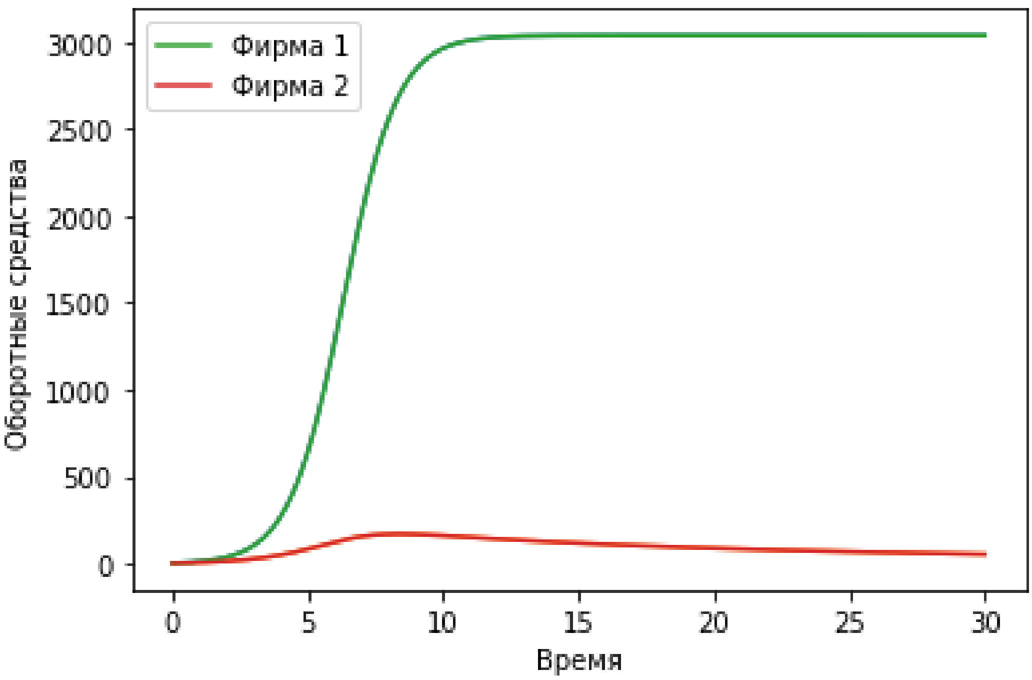

Рис. 0.4: Случай 2

Вывод:

Изучили модель конкуренции двух фирм.