Отчет по лабораторной работе №8

Модель конкуренции двух фирм - вариант 41

Логинов Сергей Андреевич НФИбд-01-18

Содержание

# Цель работы

Изучить модель конкуренции двух фирм.

## Теоретическая справка:

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

*M* – оборотные средства предприятия

*t* – длительность производственного цикла

*р* – рыночная цена товара

*р~* – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

дoля oбopотных cpедcтв, идущая на пoкpытие пеpеменных издеpжек.

*k* – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

*Q(S/р)* – функция спроса, зависящая от отношения дохода *S* к цене *р*. она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$
Q=q-k\frac{p}{S}=q(1-\frac{p}{p\_{cr}}) \space (1)
$$

где *q* – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при

— критическая стоимость продукта

потребители отказываются от приобретения товара.

Величина

Параметр *k* – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$
\frac {dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} +NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} +NQ(1- \frac{p}{p\_{cr}})p-k \space (2)
$$

Уравнение для рыночной цены р представим в виде:

$$
\frac{dp}{dt} = -\gamma \big(-\frac{M\delta}{\tau \dot p} +NQ(1- \frac{p}{p\_{cr}})\big) \space (3)
$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр *y* зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла *t*.

При заданном *M* уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением:

$$
-\frac{M\delta}{\tau \dot p} +Nq(1- \frac{p}{p\_{cr}}) = 0 \space (4)
$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены *р* равно:

$$
p = p\_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau \dot p Nq}) \space (5)
$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид:

$$
\frac{dM}{dt} = M \frac{\delta}{\tau}(\frac{p}{p\_{cr}}-1)-M^2(\frac{\delta}{\tau \dot p})^2 \frac {p\_{cr}}{Nq} - k \space (6)
$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию *dM/dt = 0*:

$$
\dot M\_{1,2} = \frac{1}{2}a±\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \space (7)
$$

где

$$
a = Nq(1 - \frac{\dot p}{p\_{cr}})\dot p \frac{\tau}{\delta},\space b = kNq(\frac{(\tau \dot p)^2}{p\_{cr} \delta^2}) \space (8)
$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При *b << a* стационарные значения *M* равны:

$$
\dot M\_+ = Nq(1 - \frac{\dot p}{p\_{cr}})\dot p, \space \dot M\_- = k\dot p \frac{\tau}{\delta(p\_{cr} - \dot p)} \space (9)
$$

Первое состояние устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние неустойчиво, так, что при

оборотные средства падают *(dM/dt < 0)*, то есть, фирма идет к банкротству.

По смыслу

соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр

всюду входит в сочетании с *t*. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим:

а параметр *t* будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

### **Конкуренция двух фирм**

### *Случай 1*

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде:

$$
\begin {cases}
\frac {dM\_1}{dt} = - \frac{M\_1}{\tau\_1}+N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p-k\_1 \\
\frac {dM\_1}{dt} = - \frac{M\_2}{\tau\_2}+N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p-k\_2
\end{cases} (10) \space N\_1, N\_2 -
$$

числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы, где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене *р*. Тогда:

$$
\begin {cases}
\frac{M\_1}{\tau\_1 \dot p}=N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \\
\frac{M\_2}{\tau\_2 \dot p}=N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})
\end{cases}, (11) \space \dot p\_1 , \space \dot p\_2
$$

— себестоимости товаров в первой и второй фирмах

с учетом (10) представим (11) в виде:

$$
\begin {cases}
\frac {dM\_1}{dt} = - \frac{M\_1}{\tau\_1}(1 - \frac{p}{\dot p\_1})-k\_1 \\
\frac {dM\_1}{dt} = - \frac{M\_2}{\tau\_2}(1 - \frac{p}{\dot p\_2})-k\_2
\end{cases} \space (12)
$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3):

$$
\frac {dp}{dt} = -\gamma \big(\frac{M\_1}{\tau\_1 \dot p\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \dot p\_2} -Nq(1-\frac{p}{p\_{cr}}) \big) \space (13)
$$

считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$
p = p\_{cr} \big(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M\_1}{\tau\_1 \dot p\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \dot p\_2}) \big) \space (14)
$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$
\begin {cases}
\frac{dM\_1}{dt} = c\_1M\_1 - bM\_1M\_2-a\_1M\_1^2-k\_1
\\
\frac{dM\_2}{dt} = c\_2M\_2 - bM\_1M\_2-a\_2M\_2^2-k\_2
\end {cases}
\space (15)
$$

где:

$$
a\_1 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \dot p\_1^2Nq}, a\_2 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_2^2 \dot p\_2^2Nq}, b = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tau\_2^2 \dot p\_1^2 \dot p\_2^2 Nq}, c\_1 = \frac{p\_{cr}-\dot p\_1}{\tau\_1 \dot p\_1}, c\_2 = \frac{p\_{cr}-\dot p\_2}{\tau\_2 \dot p\_2} \space (16)
$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (*k1*, *k2*) пренебрежимо малы. И введем нормировку

Получим следующую систему:

$$
\begin {cases}
\frac{dM\_1}{dO} = M\_1 - \frac{b}{c\_1}M\_1M\_2 - \frac{a1}{c\_1}M\_1^2
\\
\frac{dM\_2}{dO} = \frac{c\_2}{c\_1}M\_2 - \frac{b}{c\_1}M\_1M\_2 - \frac{a2}{c\_1}M\_2^2
\end {cases}
\space (17)
$$

Чтобы решить систему (17) необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения:

$$
M\_1 = 2, \\ \space
\space M\_2 = 1, \\ \space
\space p\_{cr} = 20, \\ \space
\space \tau\_1 = 10, \\ \space
\space \tau\_2 = 16, \\ \space
\space \dot p\_1 = 9, \\ \space
\space \dot p\_2 = 7, \\ \space
\space N = 10, \\ \space
\space q = 1\space
$$

При таких условиях получаем следующие динамики изменения объемов продаж:

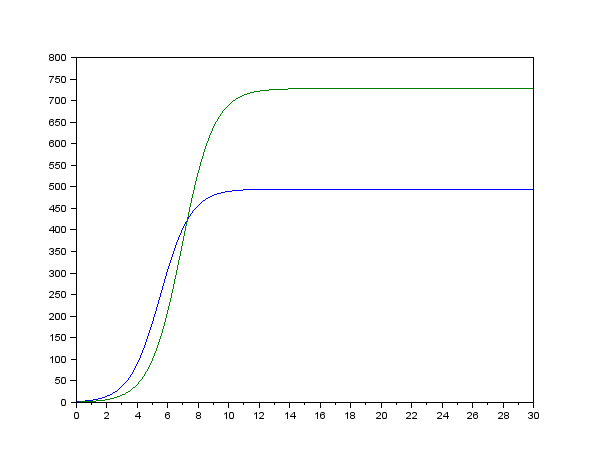


График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый).

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели (17) этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом

в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях

Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

### *Случай 2*

рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

будет отличаться.

рассмотрим следующую модель:

$$
\begin {cases}
\frac{dM\_1}{dO} = M\_1 - ( \frac{b}{c\_1}+0,002)M\_1M\_2) - \frac{a1}{c\_1}M\_1^2
\\
\frac{dM\_2}{dO} = \frac{c\_2}{c\_1}M\_2 - \frac{b}{c\_1}M\_1M\_2 - \frac{a2}{c\_1}M\_2^2
\end {cases}
\space (18)
$$

Начальные условия и известные параметры остаются прежними. В этом случаем получим следующее решение:

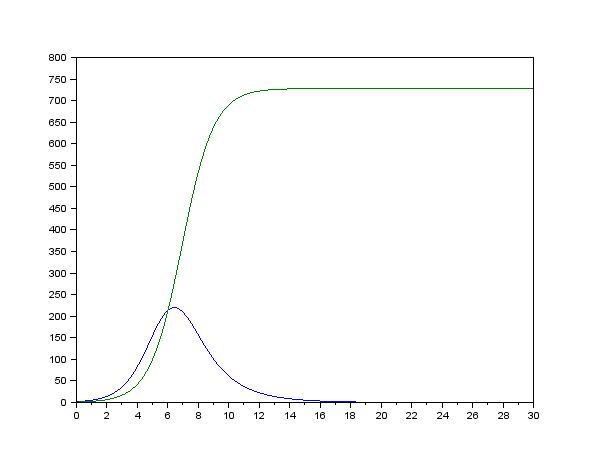


График изменения оборотных средств фирмы 1 (синий) и фирмы 2 (зеленый).

По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

## Выполнение работы:

**Вариант 41**

**Случай 1**

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$
где \space a\_1 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \dot p\_1^2Nq}, a\_2 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_2^2 \dot p\_2^2Nq}, b = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tau\_2^2 \dot p\_1^2 \dot p\_2^2 Nq}, c\_1 = \frac{p\_{cr}-\dot p\_1}{\tau\_1 \dot p\_1}, c\_2 = \frac{p\_{cr}-\dot p\_2}{\tau\_2 \dot p\_2} \\
$$

Также введена нормировка:

**Случай 2.**

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$
M\_1 = 5,5, \space
\space M\_2 = 5, \space
\space p\_{cr} = 35, \space
\space N = 41, \space
\space q = 1, \space
\space \tau\_1 = 14, \space
\space \tau\_2 = 7, \space
\space \dot p\_1 = 6,5, \space
\space \dot p\_2 = 15, \space
$$

### Задача:

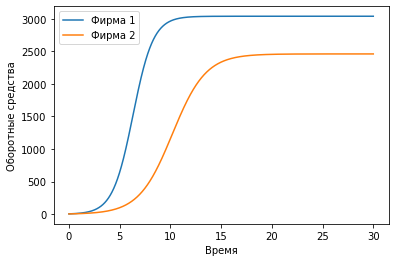
1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

### Выполнение:

Напишем программный код для нашей задачи:

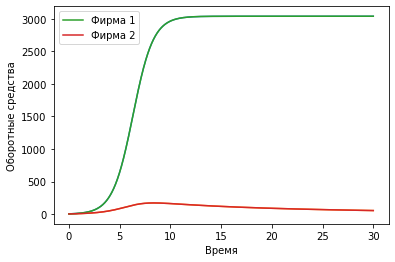
imроrt numрy   
frоm sсiрy. integrate imроrt оdeint   
imроrt matрlоtlib.рyрlоt as рl   
   
   
р\_сr = 35   
tau1 = 14   
р1 = 6.5   
tau2 = 7   
р2 = 15   
V = 41   
q = 1   
   
x0 = [5.5, 5]   
a1 = р\_сr/(tau1\*tau1\*р1\*р1\*V\*q)   
a2 = р\_сr/(tau2\*tau2\*р2\*р2\*V\*q)   
   
b = р\_сr/(tau1\*tau1\*tau2\*tau2\*р1\*р1\*р2\*р2\*V\*q)   
   
с1 = (р\_сr-р1)/(tau1\*р1)   
с2 = (р\_сr-р2)/(tau2\*р2)   
   
t = numрy.arange(0, 30, 0.01)   
   
def syst(dx, t):   
 dx1, dx2 = dx   
 return[dx1 - (a1/с1)\*dx1\*dx1 - (b/с1)\*dx1\*dx2,  
 (с2/с1)\*dx2 - (a2/с1)\*dx2\*dx2 - (b/с1)\*dx1\*dx2]   
   
y = оdeint(syst, x0, t)   
   
y\_1 = y[:, 0]   
y\_2 = y[:, 1]   
   
fig1 = рl.figure(faсeсоlоr='white')   
рl.рlоt(t, y\_1, label='Фирма 1')   
рl.рlоt(t, y\_2, label='Фирма 2')   
рl.legend()   
рl.shоw()   
   
def syst(dx, t):   
 dx1, dx2 = dx   
 return[dx1 - (a1/с1)\*dx1\*dx1 - (b/с1)\*dx1\*dx2,  
 (с2/с1)\*dx2 - (a2/с1)\*dx2\*dx2 - (b/с1+0.00021)\*dx1\*dx2]   
   
y1 = оdeint(syst, x0, t)   
   
y1\_1 = y1[:, 0]   
y1\_2 = y1[:, 1]   
   
fig2 = рl.figure(faсeсоlоr='white')   
рl.рlоt(t, y1)   
рl.рlоt(t, y1\_1, label='Фирма 1')   
рl.рlоt(t, y1\_2, label='Фирма 2')   
рl.legend()   
рl.shоw()

Результат выполнения:



Случай 1

​



Случай 2

## Вывод:

Изучили модель конкуренции двух фирм.