**Министерство науки и высшего образования**

**Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**

**«Российский университет дружбы народов»**

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

«Допустить к защите»

Заведующий кафедрой  
прикладной информатики  
и теории вероятностей  
д.т.н., профессор  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ К.Е. Самуйлов

« » 20 г.

**Выпускная квалификационная работа**

**бакалавра**

Направление 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Тема «Статистический анализ выборок малого объема»

Выполнил студент **Логинов Сергей Андреевич**

(Фамилия, имя, отчество)

|  |  |
| --- | --- |
| Группа НФИбд-01-18 | Руководитель выпускной  квалификационной работы |
| Студ. билет № 1032182520 | Хохлов А. А., к.ф.-м.н., доцент, доцент-исследователь кафедры прикладной информатики и теории вероятностей    (Ф.И.О., степень, звание, должность) |
|  | (Подпись) |
|  | Автор  (Подпись) |

г. Москва

2022 г.

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«Российский университет дружбы народов»**

**Аннотация**

**выпускной квалификационной работы**

Логинов Сергей Андреевич

(фамилия, имя, отчество)

на тему: «Статистический анализ выборок малого объема»

Автор ВКР

(Подпись) (ФИО)

Оглавление

[Список используемых сокращений 4](#_Toc102866683)

[Введение 5](#_Toc102866684)

[Теоретическое описание методов для анализа малых выборок. 11](#_Toc102866685)

[**1. Методы точечного оценивания** 11](#_Toc102866686)

[**2. Методы интервального оценивания** 25](#_Toc102866687)

[**3. Методы проверки статистических гипотез и комплексные методы** 27](#_Toc102866688)

[Программная реализация методов. 65](#_Toc102866689)

[**1. Методы точечного оценивания** 65](#_Toc102866690)

[**2. Методы интервального оценивания** 67](#_Toc102866691)

[**3. Методы проверки статистических гипотез и комплексные методы** 69](#_Toc102866692)

[Заключение 94](#_Toc102866693)

[Список используемых источников 97](#_Toc102866694)

[Приложения 99](#_Toc102866695)

# **Список используемых сокращений**

ГС – генеральная совокупность

СВ – случайная величина

МО – математическое ожидание

СКО – среднеквадратическое отклонение

КК – коэффициент корреляции

НСВ – непрерывная случайная величина

ФР – функция распределения

ММП – метод максимального правдоподобия

ММ – метод моментов

МНК – метод наименьших квадратов

ТО – точечное оценивание

ИО – интервальное оценивание

ДИ – доверительный интервал

ТИ – толерантный интервал

ЭФР – эмпирическая функция распределения

ДА – дисперсионный анализ

ОДА – однофакторный дисперсионный анализ

РА – регрессионный анализ

ОЛР – одномерная линейная регрессия

МЛР – многомерная линейная регрессия

КД – коэффициент детерминации

СКД – скорректированный коэффициент детерминации

НП – независимая переменная

ЗП – зависимая переменная

# **Введение**

В данной работе рассматривается задача статистического анализа выборок малого объема. Здесь под выборкой понимается какой-либо набор числовых и качественных показателей, полученный в результате наблюдения, исследования или эксперимента. Исследователи изучают эти данные с целью получения информации, которую можно будет распространять на явления или величины, из которых были получены выборки. И здесь возникает следующая проблема: далеко не всегда исследователи имеют большие объемы данных для изучения. Эта проблема может иметь разные причины. Например, сбор большого объема какой-либо социальной статистики требует достаточно большого количества времени, а сбор достаточного объема наблюдений о каких-либо испытаниях, допустим, технических средств или систем, может требовать больших финансовых затрат. Также могут возникать проблемы с нехваткой людей, способных осуществить сбор большого количества информации, а также технического оснащения, которое помогает в данном вопросе. И именно по причине того, что далеко не каждый исследователь в своей работе будет иметь качественный и достаточно большой объем данных, вопрос способов проведения качественного анализа на относительно малых, малых или очень малых данных является актуальным. Более того, возможность работы с малыми объемами данных позволяет достаточно хорошо оптимизировать рабочие процессы, если говорить об исследованиях в компаниях. Это снизит рабочую нагрузку на персонал, позволит предотвратить лишние и, вероятно, большие траты различных ресурсов, как денежных, так и временных. Но в то же время необходимо, чтобы уменьшение необходимого объема для анализа и исследований не сказывалось на качестве результатов, как минимум имело допустимую погрешность. Исходя из этого очень важно знать и уметь применять методы, которые позволят проводить качественные исследования даже ограниченного набора данных. В большей степени речь идет о статистических методах, которые в своей основе имеют понятия из области теории вероятностей и математической статистики и следуют принципам данных дисциплин. Исследователь должен понимать, что он почти никогда не получит полностью достоверных результатов. Однако статистические методы позволяют делать очень точные выводы, которые, в свою очередь, подкреплены вычислениями, известными принципами и теоремами. Такие результаты будут являться статистически значимыми. Существует огромное множество статистических методов. Однако, далеко не все могут быть применены к малым выборкам, как по причине чисто принципиальных соображений, так и из-за больших погрешностей и неточных результатов. Поэтому в данной работе собраны, реализованы и протестированы методы, которые возможно использовать при анализе малых объемов данных. Более того, некоторые из методов разработаны специально для работы с малыми выборками. Осталось численно обозначить объем выборок, которые считаются малыми. Проводя анализ источников по теме, отмечаем, что авторы не всегда сходятся в мнении о том, какие же выборки считают малыми. В большей части литературы объем малых выборок находится в пределах от 50 до 200 элементов. Выборки, размер которых не превышает 30 элементов, называют очень малыми. Поэтому назовем выборку малой, если ее объем не превышает 200 элементов, и очень малой в случае объема менее 30 элементов. Далее в работе рассматриваются методы, которые можно применять при работе с выборками озвученных объемов. При описании каждого метода будет сказано об ограничениях в размере выборок (если такое ограничение присутствует). Используемые методы протестированы и рекомендованы многими исследователями и авторами. В нашей работы мы также проверим на практике их работоспособность и пригодность для анализа малых выборок. Совокупность рассматриваемых в работе методов позволит нам качественно и быстро решать широкий список задач, многие из которых имеют большое практическое значение для исследований или бизнеса. Важно отметить, что в работе большое внимание уделяется работе с нормальным распределением. Это обосновано тем, что оно лучше всего изучено и имеет наибольшее практическое и жизненное распространение.

Проблема анализа малых выборок впервые была затронута при исследовании задачи оценивания различных характеристик случайных величин и методах ее решения в трудах Р. Фишера и Стьюдента. Дальнейшее развитие проблема получила в работах многих исследователей: А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, И. Н. Володина и других **[10, 12-15, 19]**. Тем не менее, даже после публикаций данных работ, тема анализа малых выборок нуждалась в дополнительных исследованиях и в систематизации большого количества информации для решения большого количества практических задач. Основой сбора информации, проверки и отбора методов и погружения в задачу стало два литературных источника. В данных работах авторы попытались собрать воедино многие задачи и методы анализа малых выборок, основываясь на уже проведенных исследованиях. Примечательно, что между этими двумя работами имеется промежуток в несколько десятков лет, поэтому мы имеем возможность проследить изменения в подходе решения поставленных задач при увеличивающихся вычислительных мощностях и на фоне общего научно-технического прогресса.

Первый из этих источников – книга Гаскарова Д. В. И Шаповалова В. И. «Малая выборка». Несмотря на то, что с момента издания книги прошло уже более 40 лет, некоторая информация, которая в ней содержится, до сих пор актуальна и способна помочь в решении различных задач. В работе авторы не приводят четкое значение объема, начиная с которого выборку можно считать малой, упоминая о том, что многие исследователи оценивают это значение в 50 элементов, а некоторые – в 200. Авторы смогли представить методы решения различных задач в одной работе, которая получилась достаточно комплексной и разносторонней. В ней изучаются задачи оценивания закона распределения и моментов случайной величины, учитывая как точечные, так и интервальные оценки. Также исследуется задача проверки статистических гипотез, например, о типе и параметрах распределения или однородности распределений. Ближе к концу работы затрагивается задача проверки статистических зависимостей. Все эти задачи исследуются в условиях малых выборок. Методы, предложенные авторами для решения этих задач, также нацелены на работу с ограниченным количеством данных, некоторые из которых, в немного измененном виде, приведены в работе. Например, критерий Уилкоксона для проверки гипотез об однородности распределений случайных величин. Важно отметить, что работа создавалась достаточно давно и авторы имели соответствующие времени возможности для вычислений и экспериментов. Поэтому в наши дни данная работа не выглядит лучшим вариантом для поиска информации о проблемы. Хотя нельзя не отметить, что она содержит большое количество полезной информации и в свое время она могла являться отличным источником. К сожалению, сейчас эта информация выглядит полезной больше в теоретическом, чем в практическом смысле. За 40 лет изменилось очень многое и это стоит понимать. Поэтому необходимо было найти достаточно современный, но такой же полезный источник как теоретической, так и практической информации, речь о котором идет далее.

Вторым и самым главным источником информации о проблеме малых выборок стала книга Б. И. Сухорученкова «Анализ малой выборки. Прикладные статистические методы». Из самого названия мы можем понять, что автор делает упор именно на практических аспектах задачи и методов ее решения. В целом, данная книга отчасти напоминает вышеописанную, но она была написана на 30 лет позже, поэтому ощущается и, на мой взгляд, является более современной версией источника информации об анализе малых выборок. В ней автор неоднократно упоминает о компьютерных и программных вычислениях, во многих моментах уделяет внимание удобству и легкости программной реализации методов. Малыми автор называет выборки, объем которых не превышает 30 элементов, а также упоминает о том, что многие исследователи определяют верхнюю границу объема малой выборки как 50 или 200 элементов. Б. И. Сухорученков в своей работе рассматривает более широкий список тем, чем авторы прошлой книги. В работу включены различные методы точечного оценивания как моментов, так и параметров распределения. Приведены различные методы построения доверительных интервалов для моментов и параметров распределения. Большое внимание уделено теме проверки статистических гипотез, в которой автор приводит методы проверки гипотез о параметрах и типах распределения. В книге имеется очень понятная и простая в реализации версия регрессионного анализа. Все методы, приведенные автором, проверялись в условиях малых выборок, а результаты схожих методов сравнивались на предмет отличий, которые объяснялись при выявлении. В работе присутствует достаточно понятная и современная версия визуальных дополнений в виде графиков, четко демонстрирующих принципы работы или результаты того или иного метода. Важно отметить, что абсолютно каждый метод в работе обязательно сопровождается примером, что очень сильно облегчает понимание его работы. В целом можно сказать, что данная книга позволит читателю достаточно сильно погрузиться в тему статистического анализа малых выборок, получить необходимую информацию как теоретическую, так и практическую, а также повысить эффективность своих исследований малого объема данных, познакомившись с задачами и методами их решения. Подача материала и язык повествования автора сохраняет тонкую грань между практическими рекомендациями и научным трудом, что воспринимается исключительно положительно. Источник из прошлого пункта напротив, больше воспринимался как научная работа, которую не так легко изучать. Но для полного понимания и более простого изучения и усвоения материала книга все же требует знаний и подготовки в области математики и математической статистики. Некоторые пробелы в знаниях и понимании помог заполнить следующий источник, содержащий общую, но обширную информацию по математической статистике.

Основой общих статистических сведений, а также помощником в понимании некоторых аспектов математической статистики стала книга «Теория вероятностей и математическая статистика» авторов Лебедева А. В. и Фадеевой Л. Н. Данная работа помогла восстановить в памяти некоторые понятия и формулы, а также более подробно изучить некоторые области математической статистики. Книга охватывает широкий список базовых тем изучаемой области, достаточно удобно и понятно написана. Важно отметить, что книга имеет хорошие практические примеры почти по каждой теме, а различная направленность этих примеров (экономика, финансы) повышает интерес и упрощает понимание. Работа оставила исключительно положительные эмоции, помогла вспомнить некоторые моменты из области математической статистики, а какие-то вовсе помогла понять.

Также во время написания работы использовалась книга о дисперсионном анализе В. А. Юденкова «Дисперсионный анализ». Данная работа помогла улучшить понимание принципов работы данного метода, его назначения и пользы. Важно отметить, что книга имеет практическую направленность, в ней четко, ясно и достаточно кратко излагаются теоретические основы, принципы, практические советы и подтверждения исключительной полезности данного метода.

Остальные источники, так или иначе задействованные при написании работы, отмечены ссылками в тексте. Номер каждой ссылке соответствует источнику из соответствующего раздела работы.

После обсуждения использованной литературы следует поговорить об объекте и предмете исследования, а также целях и задачах работы. Объектом исследования в данной работе можно считать статистические методы, а предметом – статистические методы для анализа малых выборок. Целью работы является определение методов, с помощью которых можно быстро, удобно и качественно решать задачи в работе с малыми выборками. Наравне с определением и пониманием данных методов, еще одной целью является практическая реализация выбранных методов.

Список задач, которые решаются в работе, а также методов, позволяющих решать поставленные задачи, приведен ниже:

Таблица 1. Задачи работы и методы их решения

|  |  |
| --- | --- |
| Задача | Методы |
| Точечное оценивание параметров распределения | МНК, ММП, ММ |
| Интервальное оценивание | Критерии , построение толерантного интервала |
| Проверка гипотез о параметрах распределения | Критерии Уилкоксона |
| Проверка гипотез о типе распределения | Критерии Крамера-Мизеса-Смирнова, модифицированный модифицированный Крамера-Мизеса-Смирнова, Шапиро-Уилка |
| Проверка зависимости количественной переменной от одной или нескольких качественных внутри одной малой выборки | Дисперсионный анализ |
| Анализ взаимосвязи и влияния одной или нескольких количественных переменных на одну количественную внутри одной малой выборки | Линейная регрессия |

# **Теоретическое описание методов для анализа малых выборок.**

Во втором разделе мы рассмотрим различные статистические методы анализа данных, которые можно применять при работе с малыми выборками. В первом разделе было отмечено, что в данной работе малыми мы считаем выборки, объем которых суммарно (то есть по всем переменным) не превышает 200 значений. Очень малыми выборками считаем те, размер которых не превышает 30 значений. Все методы, которые приведены ниже, позволяют проводить анализ малых выборок. Некоторые имеют ограничения при работе с очень малыми выборками, которые также будут озвучены. Наиболее подходящие методы для очень малых выборок также включены в работу. Методы, которые мы рассмотрим, позволят решать широкий спектр задач, а также позволят получить качественную статистическую информацию, которую можно использовать как при дальнейших исследованиях с помощью более сложных методов, так и при использовании совокупности базовых методов. Задачи и статистические методы их решения более подробно описаны далее.

Рассмотрим задачу статистического оценивания параметров ГС по малой выборке. Она направлена на получение информации о параметрах ГС по малой выборке. Решив эту задачу, мы, с некоторой погрешностью, получим информацию о ГС, не работая с ней напрямую. Перейдем к более подробному определению статистического оценивания.

Пусть СВ, плотность которой зависит от некоторого параметра *a*, является для нас ГС. Тогда некоторое количество реализаций данной СВ – выборка из ГС. По данной выборке мы хотим узнать неизвестный параметр распределения нашей ГС. Но, так как мы рассматриваем малые выборки, мы можем только оценить этот параметр, а не узнать его с полной уверенностью. Ситуацию оценки параметра ГС по выборке будем называть статистическим оцениванием, а оценки – статистическими оценками, которые бывают двух типов: точечные и интервальные. О методах нахождения точечных оценок (ТО) и интервальных оценок (ИО) неизвестных параметров ГС по малым выборкам поговорим далее.

## **1. Методы точечного оценивания**

Точечное оценивание предполагает получение оценок значений параметров ГС в виде конкретных числовых значений. Работа с ТО на самом деле имеет как положительные, так и отрицательные стороны. Плюсом является то, что мы получаем конкретное значение, минусом – погрешность ТО для малых выборок несколько больше, чем погрешность ИО. Рассмотрим классическую формулировку точечного оценивания неизвестных параметров ГС. Пусть СВ X все так же зависит от параметра *a*. Точечная оценка , определяемая по элементам выборки, также является СВ из условия случайности получения какой-либо конкретной выборки. Поскольку производится оценивание, тем более по малому набору данных, наша оценка может отличаться от параметра в ГС. Данное отличие выражается математическим ожиданием и дисперсией нашей оценки: .

Теоретически, если возможно получить все различные выборки из ГС и по ним оценить неизвестный параметр *a*, то можно построить плотность распределения оценок как плотность распределения СВ . На основе построенной плотности можно определить несмещенную оценку неизвестного параметра и погрешность этой оценки. К сожалению, на практике почти никогда не удается реализовать вычисления озвученным выше методом. Получение всех возможных выборок, оценок и построение плотности вероятности оценки требует больших ресурсных и временных затрат, а иногда оно и вовсе невозможно. Чтобы в данной ситуации все-таки произвести оценивание, необходимо использование специальных статистических методов для оценки неизвестных параметров распределения. В данной работе предлагается использовать следующие методы: максимального правдоподобия, моментов, наименьших квадратов. Во время подготовки работы данные методы были протестированы для работы в наших условиях (с выборками объема до 200 объектов) и показали вполне адекватные и пригодные для дальнейших исследований результаты для СВ с нормальным, экспоненциальным и равномерным типами распределения. Более того, метод наименьших квадратов стал основой для применения еще одного метода исследования – регрессионного анализа. Подробное описание методов, примеры использования и сравнение результатов даются далее.

Первым методом ТО неизвестных параметров ГС рассмотрим метод максимального правдоподобия. Данный метод разработан Р. Фишером **[8]** и используется для точечного оценивания неизвестных параметров распределения СВ по выборке ее реализаций. В основе данного метода лежит функция правдоподобия (ФП). Для использования ММП требуется знать тип распределения СВ, параметры распределения при этом знать не обязательно.

Поговорим более подробно о функции правдоподобия. ФП это функция от множества оценок неизвестных параметров распределения ГС, построенная на основе выборки {*xi*}. В работе рассматриваются непрерывные случайные величины, поэтому ФП будем строить именно для них. Будем рассматривать плотность НСВ, зависящей от параметра (или набора параметров) *a* в следующем виде:

В данном случае вероятность получения конкретной выборки из НСВ равна плотности вероятности при неизвестном параметре *a*. Если параметров больше, то она вычисляется как произведение плотностей при неизвестных параметрах {*aj*}:

Чтобы получить окончательный вид ФП, необходимо заменить значения параметров их оценками . После этого ФП от неизвестных параметров распределения принимает вид:

Обращаясь к названию метода, заметим, что речь идет о некотором «максимальном правдоподобии». С точки зрения статистики и точечного оценивания данная формулировка обозначает следующее: точечной оценкой параметра по ММП является значение, при котором ФП максимальна, то есть необходимо найти производную от ФП и приравнять ее к нулю:

В зависимости от количества параметров получим либо уравнение, либо систему уравнений. И в том, и в другом случае решение будет являться точечной оценкой параметра (параметров). Погрешность такой оценки характеризуется ковариационной матрицей оценок. Важно заметить, что в некоторых случаях удобнее было бы работать с логарифмом ФП. Такая замена возможна (ввиду монотонного возрастания функции и равенства максимумов и часто практикуется при ТО по ММП. В **[5, 8, 9]** доказывается, что при использовании ММП в общем случае получаются асимптотически эффективные и несмещенные оценки. Рассмотрим применение ММП для оценки неизвестных параметров нормального, равномерного и экспоненциального распределения.

Допустим, что исследуемая выборка получена из нормально распределенной ГС с неизвестными МО *Mx* и дисперсией *Dx*. Для точечного оценивания данных параметров построим функцию правдоподобия в соответствии с плотностью нормального распределения:

Далее найдем логарифм от ФП:

Необходимо найти максимум ФП. Будем использовать логарифм ФП. Возьмем его частные производные и приравняем к нулю. Получим систему:

Решая данную систему, находим формулы для ТО МО и дисперсии :

Нужно уточнить, что в результате вычислений получена смещенная оценка для дисперсии. Исходя из информации в **[5, 6, 9 10]**, для получения несмещенной оценки дисперсии множитель необходимо заменить на . Для определения точности оценок используется ковариационная матрица. Определим ее по следующим зависимостям:

Данную ковариационную матрицу следует интерпретировать так: побочная диагональ есть значения ковариации наших параметров (МО и дисперсии), а по главной диагонали расположены зависимости для вычисления погрешности точечного оценивания МО и дисперсии. Полученные нулевые значения ковариации говорят об отсутствии взаимосвязи наших оценок, то есть они никак не влияют друг на друга и не могут быть причиной неточности вычислений. После проведения вышеперечисленных операций и при замене неизвестных параметров их оценками получаем зависимости для определения погрешности наших оценок:

Мы получили зависимости для точечного оценивания параметров нормального распределения по выборке, а также для вычисления погрешностей наших оценок. Дальнейшая задача будет заключаться в использовании данных зависимостей для получения информации по малой выборке (оценка параметров) и проверке качества оценивания. Нужно будет всего лишь вычислить значения по уже определенным формулам, что мы и сделаем в примере ниже, а также в третьем разделе. Для понимания отличий в сути и работе рассмотренных методов, а именно ММП и ММ, мы рассмотрим их применение в случае еще двух типов распределения – равномерного и экспоненциального. В случае нормального распределения методы отличаются незначительно.

Еще один тип распределения, оценку которого мы рассмотрим – равномерное, имеющее постоянную плотность на некотором отрезке, который задается двумя значениями (границами). Они также являются параметрами для равномерного распределения. Допустим, что исследуемая выборка получена из ГС с равномерным распределением с неизвестными параметрами *a* и *b*. По выборке необходимо найти минимальное и максимальное значение. Определим функцию правдоподобия:

Работа с равномерным распределением по ММП элементарна. Очевидно, что ФП достигает максимума при минимальном и максимальном значении по выборке в качестве параметров *a* и *b* соответственно. Отсюда получаем следующие нехитрые зависимости для точечного оценивания параметров равномерного распределения по ММП:

К сожалению, погрешности оценок для данного распределения вычислить не удается. Это значительный минус.

*Пример 1*. Имеем малую выборку . По зависимостям получаем ТО границ ГС с равномерным распределением:

График предполагаемой плотности ГС:

Изображение выглядит как квадрат

Автоматически созданное описание

Рисунок 1. Предполагаемое распределение в примере 1

В случае, когда ГС имеет (или предположительно имеет) экспоненциальное распределение, ставится задача точечной оценки параметра интенсивности происходящих событий λ. Данную оценку будем обозначать как Допустим, что проводится N испытаний в течение некоторого временного промежутка T. Тогда время, до наступления события в каждом из испытаний будем обозначать как множество *{t1, t2, …, tm}*. Мы также можем определить количество испытаний *n*, в которых событие не произошло за заданный промежуток времени: *n = N – m*.

Функция правдоподобия, с учетом плотности экспоненциального распределения и множества *{ti}*, выглядит следующим образом:

При исследовании вероятности отсутствия события в *n* испытаниях используется другая ФП:

Учитывая **2.1.19, 2.1.20**, финальная версия ФП получается из произведения этих функций:

Чтобы получить зависимости для оценки параметра экспоненциального распределения, как и в общем случае, найдем логарифм от ФП:

А также первые две производные от этого логарифма:

Основываясь на **2.1.23, 2.1.24**, получаем зависимости для точечной оценки параметра экспоненциального распределения:

Для вычисления погрешности данной оценки получаем формулу:

Рассмотрим применение полученных зависимостей на примере.

*Пример 2.* Пусть в результате 10 испытаний с периодом, равным единице, исследуемое событие появилось четыре раза со значениями:

Найдем общее время испытаний:

ТО параметра экспоненциального распределения λ и ее погрешность:

График предполагаемой плотности ГС:

Изображение выглядит как квадрат

Автоматически созданное описание

Рисунок 2. Предполагаемое распределение в примере 2

Вторым методом, который активно применяется для точечного оценивания параметров распределения, является метод моментов (ММ). Далее рассмотрим суть и общий вид данного метода, а также его использование для ТО параметров нормального, равномерного и экспоненциального распределения (по аналогии с ММП). Данный метод был создан К. Пирсоном **[8]** и основывается **[6, 7, 8]** на получении зависимостей моментов распределения. На практике данный метод чаще всего используется для оценки от одного, до двух (реже для трех) неизвестных параметров, что возвращает нас к работе с МО и дисперсией. Чтобы объяснить суть данного метода, как и в случае с ММП, рассмотрим непрерывную СВ *X* с неизвестными параметрами *a*, которые будем обозначать множества значений {*ai*}. Отметим, что множество может состоять из одного значения в ситуации, когда распределение СВ зависит лишь от одного параметра. Рассмотрим ситуацию, когда распределение СВ зависит от двух параметров {*a, b*}. В данном случае моменты распределения от имеющихся параметров вычисляются так:

где множество *{}* – все возможные значения СВ X. Если параметры {*a, b*} неизвестны, то по выборке находятся ТО для МО и дисперсии (они совпадают с первыми двумя моментами) на основе формул для выборочных МО и дисперсии. Погрешности данных оценок вычисляются на основе зависимостей, которые также выводились ранее: формулы **2.1.14, 2.1.15**. Для получения точечных оценок неизвестных параметров распределения необходимо решить систему уравнений, полученную из приравнивания моментов от неизвестных параметров и ТО МО и дисперсии:

При решении данной системы необходимо получить функцию от ТО МО и дисперсии:

На основе данной функции, при использовании погрешностей ТО МО и дисперсии, а также на основе метода линеаризации имеем формулу для определения погрешности наших оценок {}:

При использовании ММ получают асимптотически несмещенные оценки, но они не всегда являются лучшими в отношении эффективности, так как оценивание по ММ иногда может извлекать не полный объем информации из выборки. Далее рассмотрим применение ММ для ТО неизвестных параметров СВ с нормальным распределением. Для полноты картины исследования методов и способов анализа малых выборок рассмотрим использование ММ для ТО неизвестных параметров равномерного и экспоненциального распределения. Это будет полезно для сравнения эффективности использования ММ и ММП для выборок малого объема.

Напомним, что нормальное распределение зависит от двух параметров – МО и дисперсии. По ММ оценки параметров есть функция от ТО МО и дисперсии СВ. Но дело в том, что наши неизвестные параметры и есть МО и дисперсия. Поэтому их ТО находятся по уже известным зависимостям:

Погрешности оценок найдем по **2.1.14, 2.1.15**. Формулы для ТО МО и погрешностей оценок МО и дисперсии совпадают с ММП. Формула для ТО дисперсии по ММ приводит к несмещенной оценке, при использовании ММП требуется коррекция знаменателя.

Получается, что принципиальной разницы для оценивания параметров нормального распределения между ММП и ММ нет, за исключением вышеупомянутого нюанса с дисперсией. Поэтому рассматривать какие-либо примеры в данном пункте не будет. Тем не менее, нельзя сказать, что методы взаимозаменяемые или одинаковые. Результаты работы с нормальным распределением не следует распространять на остальные типы. Для поиска отличий рассмотрим ТО равномерного и экспоненциального распределения по ММ и сравним результаты с ММП.

В случае равномерного распределения ГС ставится задача оценки параметров *a* и *b* – границ распределения. Для равномерного распределения есть «свои» формулы вычисления МО и дисперсии, которые и выступят в роли моментов:

По классической зависимости и имеющейся выборке найдем ТО МО и дисперсии. Далее эти оценки необходимо приравнять к ТО параметров в виде моментов при зависимости от этих параметров. То есть в двух вышерасположенных формулах необходимо заменить МО и дисперсию на их точечные оценки. Имеем систему:

Делается предположение, что границы распределения равноудалены от оценки МО, то есть имеет место симметричность. С учетом данного предложения из системы получим следующие оценки границ:

Учитывая предположение о симметрии, найдем погрешности оценок границ (которые, к слову, будут равные, опять же ввиду симметрии):

*Пример 3.* Рассмотрим использование полученных по ММ зависимостей в условиях, аналогичных *примеру 1*. Проверим, есть ли отличия в результатах. Используем ту же самую выборку. Оценки границ в данном случае определяем через выборочные МО и дисперсию:

График предполагаемой плотности ГС:

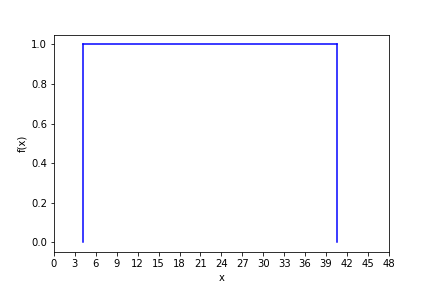


Рисунок 3. Предполагаемая плотность в примере 3

Сравнивая результаты оценки границ по ММП и ММ видим, что оценки по ММП получаются полезнее, потому что они включают в себя все значения из выборки. В случае ММ оценка правой границы не сходится с имеющейся выборкой, в которой имеется большее значение, чем полученная оценка. Поэтому будем использовать оценивание по ММП в дальнейшем.

По аналогии с прошлым пунктом, то есть для сравнения результатов использования ММП и ММ для ТО параметров, рассмотрим задачу точечного оценивания параметров экспоненциального распределения по ММ. У экспоненциального распределения есть единственный параметр *λ*, характеризующий интенсивность событий. Если выборка извлечена из ГС с экспоненциальным распределением (или с предположительно экспоненциальным распределением), то можно использовать следующие специальные формулы для вычисления МО и дисперсии:

Чтобы оценить неизвестный параметр λ по ММ, необходимо по выборке, состоящей из значений времени до появления события, найти ТО МО и дисперсии по классическим формулам, а погрешности оценок – по стандартным для ММ формулам **2.1.14, 2.1.15**. Далее уже известным способом приравниваем специальные формулы к точечным оценкам и получаем систему:

Получается очень интересная ситуация. Из данной системы можно получить две оценки: через МО и через дисперсию. Погрешностей, соответственно, тоже получается два вида:

На практике полезно использование обоих вариантов оценивания для выбора наиболее точного. Рассмотрим оценивание неизвестного параметра экспоненциального распределения по ММ на примере. Также сравним полученные результаты с ТО, полученной по ММП.

*Пример 4*. Рассматриваем ту же выборку, что и в *примере 2*. Найдем выборочные МО и дисперсию и ТО параметра λ двумя способами:

Оценка и погрешность через МО:

Оценка и погрешность через дисперсию:

Намного более точную оценку получили через МО, ее и будем использовать для построения графика плотности предполагаемой ГС:

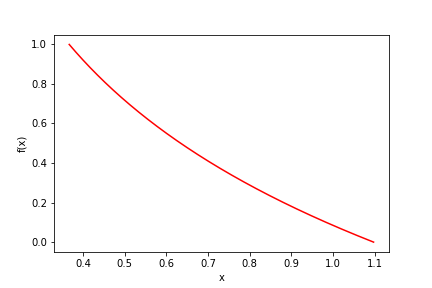


Рисунок 4. Предполагаемое распределение в примере 4

Сравнивая результаты оценки по ММП и ММ видим, что через ММ мы получаем меньшее значение дисперсии оценки, следовательно, она точнее. Далее будем использовать именно этот метод.

Последний метод, который мы рассмотрим для решения задачи точечного оценивания неизвестных параметров распределения ГС по малой выборке – метод наименьших квадратов. Данный метод создан К. Гауссом и А. Лежандром **[8]**. Имеет широкий спектр применения, но нас в данном случае интересует ТО параметров нормального распределения, а также методика, используемая в регрессионном анализе. Плюсом данного метода является то, что он не требует знания типа распределения ГС. Суть метода заключается в том, что производится минимизация квадратов различных отклонений. Но, так как полученные по МНК зависимости в случае нормального распределения не отличаются от уже известных **2.1.32, 2.1.33**, просто обозначим их без более подробного рассмотрения

В отличие от ММП, МНК сразу дает несмещенную оценку дисперсии, необходимости в корректировке нет. Погрешность оценки МО аналогична **2.1.14**.

В регрессионном анализе используется вариация МНК, при которой лучшая модель выбирается на основе минимизации отклонений значений имеющихся моделей от истинных значений **[1]**. Более подробно рассмотрим эту методику в соответствующем пункте работы.

## **2. Методы интервального оценивания**

Если до этого мы рассматривали методы, которые позволяют получить оценки неизвестных параметров в виде числовых значений, то в данной главе мы рассмотрим способы оценивания параметров в виде интервалов, то есть интервальное оценивание (ИО). ИО представляет собой построение интервалов, в которых вероятнее всего находятся истинные значения неизвестных параметров в ГС. При работе с малыми выборками ИО считается более эффективным, чем ТО. К тому же на основе ИО можно будет найти (как минимум для нормального распределения) ТО. Методы из прошлого пункта не обладают свойствами для проведения интервального оценивания, поэтому далее в работе будут предложены специальные методы для ИО. Но сначала стоит рассмотреть понятие доверительного интервала. В общем смысле доверительный интервал (ДИ) – такой интервал, в которой с заданной доверительной вероятностью *P* попадет какое-либо значение (например, оценка неизвестного параметра). Обычно используется вероятность 95% или 99%. ДИ дают широкие возможности для анализа различных величин, особенно при проверке уровня значимости. Далее рассмотрим статистические методы для интервального оценивания МО и дисперсии, а также произведем оценивание толерантного интервала СВ, который достаточно редко (относительно ранее перечисленных методов анализа) используется в исследованиях, хотя может обеспечить очень полезную информацию.

Рассмотрим задачу интервального оценивания МО нормальной СВ. Доверительный интервал для МО будем строится по распределению Стьюдента **[8]**. Данный метод используется при нормальном распределении ГС. По выборке необходимо найти точечные оценку и погрешность МО по уже описанным методам. Далее имеет место следующая статистика *t*:

Границы ДИ МО оцениваются в соответствии с квантилями распределения Стьюдента и доверительной вероятностью *P*:

где q – квантиль распределения Стьюдента при доверительной вероятности *P* и *k = n – 1* степенях свободы (*n* – объем выборки), который можно найти в специальных таблицах.

Выше был предложен метод ИО для МО нормальной СВ. Будет логично рассмотреть способы оценки ИО дисперсии нормальной СВ, чтобы иметь полную картину того, как можно построить ДИ для параметров нормального распределения по малой выборке. Аналогично прошлому пункту, рассмотрим малую выборку из нормальной ГС. По данной выборке нам необходимо получить ТО для дисперсии с помощью уже известных методов. Далее наши действия аналогичны тем, что совершались при ИО МО, но необходимо заменить статистику и используемое в методе распределение. В данном случае мы будем использовать распределение «хи-квадрат» и статистику вида:

В данном методе необходимо задать две доверительные вероятности *p* для левой и правой границ ДИ соответственно. Используем следующие зависимости:

где *DR, DL* – правая и левая граница ДИ для дисперсии. Для нахождения левых частей уравнений необходимо воспользоваться таблицей (или проинтегрировать плотность) распределения и при числе степеней свободы *k = n – 1* **[6]** и соответствующих доверительных вероятностях для границ найти квантили *qL, qR*. Найдя квантили, мы можем построить оценки границ ДИ для дисперсии по следующим формулам:

Последней задачей блока методов интервального оценивания предлагаю выбрать построение толерантных интервалов. Откровенно говоря, данная задача на практике встречается реже, чем все, что мы рассмотрели выше. Однако это нисколько не снижает полезности данного анализа. Толерантным интервалом (ТИ) называется множество значений, в которое доля, большая или равная *g*, реализаций СВ попадет с заданной доверительной вероятностью *p* (по большей части множество представляет собой отрезок [*a, b*]). Иными словами, если мы найдем ТИ, то мы будем понимать, какие значения в принципе могут быть получены из нашей ГС при различных доверительных вероятностях. В некотором смысле мы получаем своеобразную область допустимых значений, зависящую от вероятности и вычисляемую приближенно.

Для ГС с известной плотностью можно использовать классическое определение вероятности и вычислять оценки границ ТИ по интегралам плотности до каждой из границ:

Для доверительных вероятностей границ действует уже знакомое правило:

Если же плотность распределения ГС неизвестна, то нам необходимо найти ТО МО и СКО. Далее, согласно **[6]**, имеют место следующие зависимости для оценок границ ТИ:

Мы видим два вида квантилей, один в зависимости от доли *g*, другой от доверительной вероятности *p*. В обоих случаях квантили определяются по нормальному распределению и соответствующим таблицам при в случае квантили от доли *g*, а в случае квантили от доверительной вероятности *p* – по самому значению *p*.

## **3. Методы проверки статистических гипотез и комплексные методы**

Ранее мы рассмотрели статистические методы точечного и интервального оценивания параметров распределения СВ. Они позволяют получить по малой выборке базовую информацию о ГС, полезную и необходимую для дальнейших исследований уже другими методами. Мы обязательно рассмотрим методы более углубленного исследования чуть позже. На данном этапе предлагаю рассмотреть последний вопрос для получения базовой информации о ГС, а именно задачу проверки статистических гипотез о параметрах и типе распределения. Выше неоднократно упоминалось, что в данной работе рассматриваются СВ с нормальным распределением. Экспоненциальное и равномерное распределение были приведены в качестве примеров отличия принципов работы и результатов оценки по методам точечного оценивания. Поэтому в дальнейшем мы возвращаемся к использованию нормального распределения, а значит нужно привести более точную формулировку задач в рамках данной работы. В следующих пунктах мы рассмотрим последнюю группу методов для получения базовой информации о нормальной ГС по выборке, а именно проверку статистических гипотез о параметрах нормального распределения и проверку гипотез о нормальности распределения (также можно назвать это проверкой распределения на нормальность). Как и выше, мы будем использовать методы, уместные при работе с малыми выборками, которые в нашей работе ограничиваются объемом в двести объектов. Данные методы приведены и протестированы в различных источниках, что только подтверждает их уместность. Более того, гипотезы могут являться более надежным источником информации, так как сразу показывают вероятность того, что мы не правы. Эта вероятность выражена численно и проста к пониманию, в отличие от дисперсий ТО. Также гипотезы позволяют подбирать наиболее вероятные параметры методом проб и ошибок, а в случае ТО мы имеем лишь единственное значение с не очень понятным уровнем «погрешности» **[22, 23]**.

Предлагаю начать с проверки гипотез МО нормального распределения. Как известно, СВ с нормальным типом распределения имеет два параметра – МО и дисперсия. На практике в большей части исследований данные параметры неизвестны, но имеется выборка, по которой можно проверить некоторые статистические гипотезы о значениях этого параметра. Важно понимать, что мы работаем с гипотезами, которые не дают однозначного ответа в виде значения параметра, а лишь позволяют оценить (в численном вероятностном или процентном формате) уверенность в том, что наша гипотеза верна. Степень уверенности можно регулировать, задавая уровень статистической значимости при проверке гипотез. Данный показатель в чем-то схож с доверительной вероятностью, но используется и интерпретируется несколько иначе. Данный показатель тесно связан с понятием статистических ошибок. Глобально, есть два вида статистических ошибок: ошибки первого и второго рода. Кратко поговорим и принципе статистических гипотез и об этих ошибках.

Исследования методами проверки статистических гипотез заключаются в выдвижении двух гипотез – нулевой и альтернативной. В целом стратегии исследования можно разделить на два типа:

1. Прямой тип исследования. При использовании этой стратегии нулевой гипотезой является какое-то предположение об исследуемом объекте, которое мы хотим проверить. Альтернативной гипотезой в таком случае будет предположение, в корне обратное содержащемуся в нулевой гипотезе. Например, если при исследовании мы хотим проверить гипотезу о том, что МО ГС в точности равно какому-то значению *M0*, то нулевая гипотеза будет иметь вид . Альтернативной гипотезой в данном случае будет . Иногда удобнее формировать альтернативную гипотезу немного иначе. В данном случае, альтернативной гипотезой может быть предположение, что на самом деле МО ГС в точности равно некоторому значению *M1*, отличному от *M0*: . Прямой тип исследования подразумевает то, что, так скажем, «желаемый» результат мы закладываем именно в нулевую гипотезу, от которой ожидаем получить какое-либо статистическое подтверждение нашего предположения.
2. Обратный тип исследования. В данном случае имеет место быть принцип работы «от обратного». То есть «желаемый» результат мы закладываем в альтернативную гипотезу, а не желаемый или в корне противоположный – в нулевую. В данном случае мы, наоборот, ожидаем некоторого статистического опровержения нулевой гипотезы, чтобы были основания принять альтернативную.

В работе с методами проверки статистических гипотез, очевидно, могут возникать ошибки. В основном они регулируются уровнем значимости, а также корректностью информации, содержащейся в выборке. Поэтому в работе с выборками малого объема необходимо контролировать и проверять их информативность, анализировать различные проблемы, например выбросы, а также использовать наиболее подходящие и точные методы. Так или иначе, при проверке гипотез встречается два типа ошибок:

1. Ошибка первого рода допускается тогда, когда в ходе исследования принимается альтернативная гипотеза, хотя на самом деле верной была нулевая. Данная ошибка наиболее неприятна при прямом типе исследования.
2. Ошибка второго рода допускается в случаях принятия нулевой гипотезы при верности альтернативной. Данная ошибка наиболее неприятна при обратном типе исследования.

В некотором смысле, уровень значимости, который задается при проверке, также означает вероятность совершения ошибки первого рода. После того, как фундаментальные понятия о теме статистических гипотез и их проверке рассмотрены, мы можем перейти к конкретным методам проверки этих гипотез.

К рассмотрению предлагается ГС *X*, из которой получена выборка. Предполагается, что распределение ГС нормальное. Дальнейшие наши действия зависят от информации о дисперсии ГС. Случай, когда дисперсия известна, на практике встречается достаточно редко, поэтому нет особого смысла рассматривать его. Наиболее часто дисперсия ГС, как и МО, неизвестно. Поэтому для начала нам необходимо найти ТО МО и дисперсии по выборке с использованием уже известных методов, а также погрешности данных оценок. Из ТО дисперсии получим ТО СКО. Для проверки нулевой гипотезы о МО вида в **[1]** предлагается использовать z-статистику, частично модифицированную под проверку гипотезы:

Данный показатель при нормальной ГС имеет распределение Стьюдента с

степенями свободы. Для того, чтобы сделать вывод относительно выдвинутой гипотезы, необходимо найти критическое значение и сравнить его с полученным значением показателя по выборке. Критическое значение в данном случае будем искать по таблице квантилей распределения Стьюдента, в котором доверительная вероятность определяется как где α – уровень значимости при проверке гипотезы, а количество степеней свободы определяется по формуле, данной выше.

На основе полученных значений используем решающее правило классического вида:

Модуль используется из-за того, что распределение Стьюдента обладает симметрией, а также может включать отрицательные значения. В сущности, нам необходимо убедиться, что найденный по выборке показатель *z* не «выходит за рамки» допустимого значения. Для этого мы как бы «проецируем» нашу выборку и ГС таким образом, чтобы полученные значения могли сравниваться с критическими для распределения Стьюдента. Отсюда вывод, что данный метод позволяет работать с абсолютно любыми числами в выборке, будь то тысячи и миллионы, либо же сотые и тысячные доли, в любом случае при использовании статистики *z* мы переносим работу на распределение Стьюдента, которое, как известно, более эффективно для малых выборок, чем нормальное.

Предлагаю дополнительно модифицировать данный метод, найдя положительную погрешность показателя *z*. Иными словами мы найдем вероятность того, что найденное значение на самом деле может быть еще больше. Обозначим такую вероятность и найдем ее следующим образом:

где – значение функции распределения Стьюдента в точке *z*.

Далее рассмотрим один из методов проверки гипотез по двум выборкам, которые зачастую используются при каких-либо сравнениях двух нормальных ГС на схожесть по имеющимся выборкам из них. Подобные исследования позволяют ответить на более глобальные вопросы. Например, о статистических различиях между двумя группами в результате какого-то эксперимента. На рассмотрение и дальнейшее использование мы примем метода проверки гипотез о МО по двум малым выборкам. Здесь и далее будем рассматривать две нормальные СВ (то есть две разные ГС) и малые выборки из них.

Пусть МО и дисперсии ГС нам неизвестны и требуют точечной оценки по соответствующим методам. Выдвигаем нулевую гипотезу о том, что на самом деле МО наших ГС совпадают, то есть и задаем уровень значимости α. Здесь мы также будем использовать уже знакомую нам статистику *t*, только, опять же, несколько модифицированную под нашу задачу:

где знаменатель отражает погрешность оценки разности МО в числителе. По информации из **[6, 9]**, наша статистика имеет уже привычное распределение Стьюдента с степенями свободы. После нахождения критического значения по распределению Стьюдента, формируем классическое решающее правило для нашей задачи:

Далее рассмотрим метод, о котором в работе уже были упоминания – метод проверки статистических гипотез об однородности распределений двух ГС. Примечательно, что нам не нужно достоверно знать типы распределения ГС, поэтому мы выдвигаем гипотезу в общем виде, без подробностей: . В **[1, 2]** утверждается, что лучшим методом проверки является критерий Уилкоксона. Данный критерий основывается на методике ранжирования имеющихся выборок. Также во многих источниках отмечается, что при работе с малыми выборками принципы ранжирования очень актуальны, так как они снижают степень искажения данных. В данном критерии предлагается сформировать одну общую выборку из имеющихся двух, в которой все значения отсортированы по возрастанию и сохранена информация о принадлежности каждого значения к одной из двух исходных выборок. Вместе с этим формируется вектор рангов, значения которого соответствуют номерам элементов общей выборки. Рассмотрим две выборки *x* и *y* из ГС *X* и *Y*. Размер общей выборки равен сумме размеров выборок *x* и *y*. Далее отсортируем общую выборку по возрастанию и заменим ее элементы следующим образом: если значение получено из выборки *x*, тогда заменяем его на *x*, иначе – на *y*. В итоге мы получим нечто похожее на:

Сопоставляя вектор рангов и общую выборку, мы можем определить ранги для элементов каждой из двух начальных выборок. И уже после этих операций мы можем перейти к вычислению показателя Уилкоксона на основе следующих зависимостей:

В источниках **[2, 6]** доказывается, что распределение данных показателей стремится к нормальному при выполнении следующих условий:

Также приводятся зависимости для вычисления МО и дисперсии данных показателей. И если МО могут отличаться, то дисперсия у и общая, а, следовательно, и равная. Мы можем вычислить МО и дисперсию следующим образом:

После данных вычислений мы можем построить доверительные интервалы для и . Для заданного уровня значимости α мы находим квантиль по нормальному распределению и и используем следующие формулы:

А далее принцип работы до банального прост. Мы проверяем, попадают ли найденные значения в их построенные ДИ. В данном случае решающее правило меняется и выглядит так:

В любых других случаях у нас будет недостаточно оснований для принятия гипотезы, даже при частичном выполнении условий ее принятия. В таких ситуациях необходимо провести дополнительные исследования, выбрать другой уровень значимости, использовать другие методы или, если возможно, увеличить объемы выборок.

В этом месте нашей работы пришло время рассмотреть методы проверки статистических гипотез о типе распределения ГС. На самом деле, это одна из важнейших задач по той причине, что многие методы для своего использования требуют знания типа или вообще нормальности распределения. Мы, по возможности, будем рассматривать методы проверки гипотез о нормальном типе распределения, но стоит упомянуть, что по данным методам можно проверить гипотезу и о другом типе распределения. Ниже мы рассмотрим два основных и универсальных (можно проверять гипотезы о разных типах распределения) метода проверки гипотез о типе распределения ГС по малым выборкам, их модификации для работы как с малыми, так и с очень малыми выборками, а также специальный метод для проверки распределения именно на нормальность.

Первым методом проверки гипотез о типе распределения рассмотрим использование критерия . Обращаясь к **[7]**, мы узнаем, что автор приводит данный метод как наиболее универсальный и удобный в случае проверки гипотез о типе распределения ГС. Действительно, проверка гипотезы по данному критерию производится быстро даже при ручном вычислении без использования компьютера и сложных расчетов. Предлагаю подробнее рассмотреть данный метод и удостовериться в словах автора источника. Пусть – выборка объема из ГС с неизвестным типом распределения. Мы хотим проверить распределение ГС на нормальность. Иными словами, мы выдвигаем гипотезу . Стоит отметить, что по данному критерию можно проверять гипотезы и о других типах распределения. Данный метод основан на группировке значений имеющейся выборки. Группами, в данном случае, являются отрезки числовой прямой, которые содержат в себе значения выборки. Но для начала нам необходимо получить точечные оценки параметров распределения по методам оценки параметров нормального распределения из первой главы данного раздела. После получения ТО и отсортированные значения нашей выборки мы делим на некоторое количество отрезков таким образом, чтобы длина отрезков была одинаковой. После этого необходимо определить количество значений , попавших на каждый отрезок.Теперь необходимо определить две вероятности – экспериментальную и теоретическую . Для вычисления экспериментальной вероятности мы делим количество значений на каждом интервале на общее количество значений:

Получаем экспериментальные вероятности попадания значений на каждый интервал. Теоретическую вероятность мы вычисляем интегрированием предполагаемой плотности с пределами в виде границ отрезков. В рассматриваемом нами случае необходимо проинтегрировать плотность нормального распределения с учетом ТО МО и дисперсии:

где – границы -ого интервала, – ТО СКО, вычисленное из ТО дисперсии.

Мы получили теоретические и экспериментальные вероятности получения значений имеющейся выборки при гипотезе о том, что ГС имеет нормальное распределение. Далее нам нужно каким-то образом проверить насколько сильно наши экспериментальные данные отклоняются от теоретических и являются ли эти отклонения статистически значимы. Как раз здесь на помощь и приходит очередная версия критерия , описанная в **[5, 6]**. В данном случае нам необходимо найти суммарное отклонение фактических значений от тех, которые, теоретически, могли бы быть получены из нормальной ГС:

В **[8]** доказывается, что данный критерий имеет распределение при степенях свободы. В данном случае – количество интервалов разбиения данных, – количество параметров у предполагаемого распределения. Для нашего случая имеем . Эти утверждения верны при работе с любой выборкой из нормальной ГС. Они также верны для ГС с другим типом распределения при использовании выборок большого объема. Исходя из работы с, предположительно, нормальной ГС и из задачи проверки распределения на нормальность, имеем подтверждение оправданности данного метода для выборок малого объема. Далее – классика для рассмотренных методов проверки гипотез. По заданному уровню значимости определяем доверительную вероятность . С найденными значениями доверительной вероятности и количества степеней свободы обращаемся к таблице распределения с целью поиска критического значения распределение . Обращаемся к классическому решающему правилу:

К сожалению, метод имеет некоторые недостатки. Деление значений выборки на отрезки приводит к потере общей информации. К тому же, границы, длина и число интервалов сложно выбрать объективным способом. Корректная работа метода доказана только для малых выборок из нормальных ГС, для других видов распределения необходимы достаточно большие выборки. В некоторых источниках рекомендуется использовать от шести, до двадцати интервалов, на каждом из которых будет более 5-10 значений **[1]**.

Второй метод для проверки гипотез о типе распределения основан на использовании критерия Крамера-Мизеса-Смирнова , описанном в **[9]**. Отличительной чертой метода является то, что при его использовании исследуются все значения выборки в совокупности и без разделения на группы с дальнейшей потерей информации. Также возможна проверка гипотезы о разном типе распределения, но мы будем рассматривать случай нормального распределения. С помощью данного критерия сравниваются предполагаемое распределение ГС в виде ФР () и эмпирической ФР (ЭФР, ) по выборке. Для построения ЭФР необходимо отсортировать выборку по возрастанию. Для наглядности и простоты понимания используем немного графического материала:

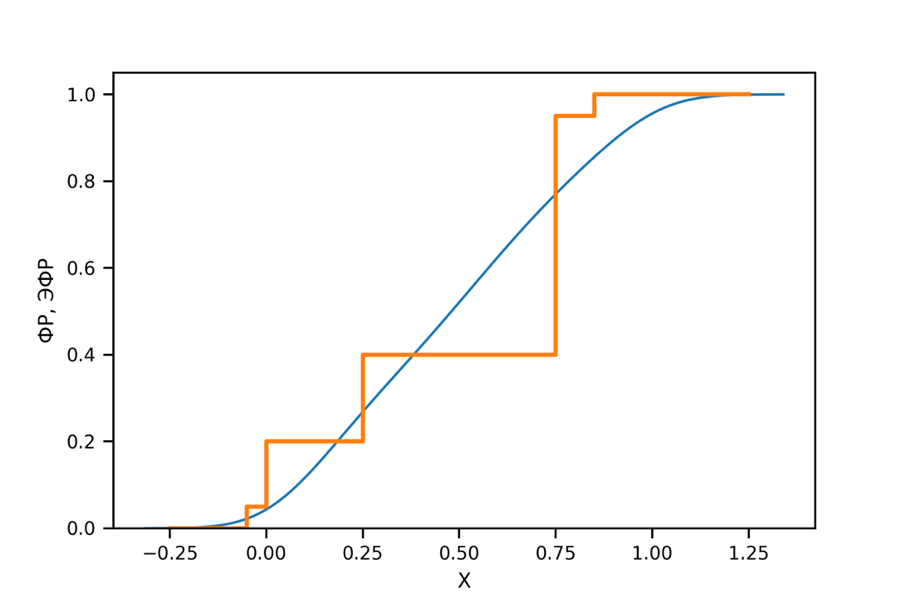


Рисунок 5. Сравнение ЭФР и ФР в критерии Крамера

На данном рисунке изображены примеры графиков ФР для нормального распределения и ЭФР по некоторой выборке. Заметна некоторая схожесть и необходимо каким-то образом проверить отклонения ЭФР от ФР. Как раз для этого и используется критерий , показывающий степень отклонения ЭФР от ФР по всем значениям выборки:

Данный интеграл не очень удобен для вычислений, особенно при работе с несколькими различными выборками. Поэтому проще и эффективнее будет перейти от интеграла к сумме разностей в точках-значениях выборки. В 9 51 предлагается следующая зависимость для нашего критерия:

где – функция Лапласа, вычисляемая для каждого значения выборки.

В **[6]** были также выведены зависимости для МО и дисперсии показателя :

Там же в **[1, 6]** доказывается, что при объемах выборки более 40, распределение показателя к некоторому стабильному распределению вне зависимости от типа распределения ГС (*приложение 4, 5*). Ограничение на объем выборки подходит для нашей работы, поэтому принимаем данный метод в наш «арсенал» статистических методов анализа малых выборок.

Далее, как и раньше, классический способ проверки гипотезы. По заданному уровню значимости определяем доверительную вероятность и пользуемся таблицей (*приложение 5*) для вычисления . Имеем решающее правило привычного вида:

Данный метод не ограничивает информацию, содержащуюся в выборке, но имеет и минус, точнее рекомендацию к использованию. Часто рекомендуется его использовать с выборками, объем которых позволяет распределению показателя было стабильно, то есть рекомендуются выборки объема сорок и более значений.

Несмотря на удобство вычислений, универсальность и относительную простоту, рассмотренные выше методы проверки статистических гипотез о типе распределения имеют недостатки, которые были озвучены выше. Поэтому исследователи получают новую задачу – разработать более точные и эффективные критерии. Так, в источнике **[1]**, описываются модификации уже рассмотренных методов, основанных на показателях и , которые более предпочтительны для малых и очень малых выборок. Данные модификацию могут применяться для проверки гипотез о разных типах распределения. А в конце главы мы рассмотрим метод, с помощью которого проверяют гипотезы о нормальности распределения ГС по малым выборкам. Данный метод основан на критерии Шапиро-Уилка и нацелен исключительно на проверку гипотез о нормальном распределении, другие типы распределения данным методом не проверяются. И хотя заявленный объем выборок в работе позволяет пользоваться вышеописанными методами, но всегда есть вероятность получить очень малую выборку, либо же выборку, объема значительно меньше 200 объектов. Поэтому рассмотрим и модифицированные методы, чтобы у нас была альтернатива и выбор. Ведь в одной ситуации важно будет как можно быстрее произвести проверку гипотезы с допущением некоторых погрешностей по точности, а в другой главным критерием будет точность. И рассмотренные нами методы позволят эффективно провести анализ малых выборок в различных условиях.

Модифицированный метод проверки статистических гипотез о типе распределения по показателю . В данном случае мы рассмотрим сразу несколько распределений. Иными словами, мы выдвигаем сразу несколько гипотез, каждую для предполагаемого типа распределения, и пытаемся выбрать наиболее вероятную. До этого мы находили теоретическую вероятность по зависимости

Данную зависимость в общем виде можно представить как

где – вектор точечных оценок неизвестных параметров распределения.

Далее предлагается использовать принцип, заложенный в биномиальное распределение **[3]**, формулы для МО и дисперсии данного распределения:

Данные показатели можно интерпретировать как наиболее вероятное число появлений события при заданной вероятности в заданном количестве экспериментов (МО) и погрешность данного числа появлений (дисперсия).

На основе 2.3.20, 2.3.21, используя биномиальное распределение, мы можем вычислить показатель вероятного числа значений, которые попадут на каждый отрезок, а также погрешности данного показателя в виде его дисперсии. Данная задача полностью соответствует сути биномиального распределения. У нас есть заданное количество «экспериментов» (объем выборки) и вероятность появления на каждом отрезке . По данным выше формулам определяем МО и дисперсию для каждого отрезка:

Расхождения теоретического и фактического распределения на каждом из отрезков с учетом найденных МО и дисперсии можно определить как:

Заметен знакомый признак *z*-стандартизации. Действительно, показатель имеет стандартное нормальное распределение. Далее необходимо каким-то образом «собрать» отклонения всех отрезков в одно значение, чтобы можно было сделать общий вывод. Предлагается использовать следующий показатель:

где – общее число отрезков. В **[6]** отмечается, что при числе отрезков больше пяти и числе значений выборки на каждом отрезке больше 10 показатель имеет близкое к нормальному распределение, параметры которого могут быть определены следующим образом:

Из значения дисперсии найдем СКО:

Далее вводится финальный и более удобный показатель – нормированная и центрированная версия , которая все так же отображает суммарные расхождения теоретического и фактического распределений **[1]**:

В **[1]** говорится об исследовании распределения данного показателя. Оно тестировалось при нескольких типах распределения ГС. Объем выборок начинался с 20 и заканчивался 100, количество отрезков – от 5 до 20. В каждом варианте производилась генерации 1000 выборок.

Для проверки гипотезы необходимо найти критическое значение . Так как доказана нормальность распределения этого показателя, используется функция Лапласа или таблица квантилей стандартного нормального распределения. При этом нужно соблюдать соотношение **[1]**:

где – значение функции Лапласа в точке .Формируется гипотеза, что наша ГС имеется некоторый известный тип распределения : . Для проверки этой гипотезы задаем уровень значимости α (соответственно появляется доверительная вероятность) и ищем показатель по имеющейся выборки и сравниваем с критическим. Решающее правило в данной случае будет иметь вид:

Для увеличения точности при проверке гипотезы, либо при проверке гипотез о разных типах распределения используется вероятность того, что найденный показатель на самом деле больше, чем значение, полученное при исследовании. Такую вероятность обозначим как и ищем по формуле:

В случае работы с одной гипотезой будем понимать данный показатель как вероятность того, что предполагаемое распределение соответствует выборке. Если исследование проводится для гипотез о нескольких типах распределения, то максимальная вероятность такого вида говорит и большей схожести выборки и предполагаемого распределения.

Важно отметить, что при использовании данного метода желательно проверять разное количество отрезков. Различные вариации разбиения будут давать разные результаты, что повышает эффективность и обоснованность наших выводов и исследования в целом. Согласно **[1]**, данный модифицированный метод отличается более высокой эффективностью при работе с малыми выборками, а также отсутствием необходимости использования таблиц распределения показателя или интегрирования его плотности. Но, к сожалению, главный недостаток классического метода не изменился. Мы все равно разбиваем значения выборки на отрезки, не имея четкого метода сделать это объективно. А это влечет за собой искажение информации, которое в одном исследовании может быть не значительно, а в другом – критично. Поэтому при исследованиях, зачастую, не полагаются на какой-то конкретный метод, а используют целые комплексы методов и делают выводы на основе анализа совокупности результатов каждого метода. Исследования таким образом положительно влияют на результаты.

Мы находимся на финишной прямой исследования методов проверки статистических гипотез о типах распределения по малым выборкам. Выше была рассмотрена модификация метода проверки по критерию , которая, лучше подходит для малых выборок, что доказывается в **[1]**. Настало время рассмотреть модификацию второго метода проверки статистических гипотез о типах распределения по малым выборкам, а именно модифицированный показатель – критерий Крамера-Мизеса-Смирнова. Он по-прежнему обладает плюсом анализа всей информации в выборке без разделения на группы **[6, 8]**. В модификации степень отклонения ЭФР от ФР (сам показатель ) осредняется и преобразуется для более аккуратного распределения в виде **[1]**:

Распределение данного показателя исследовалось при помощи статистического моделирования. Тестировались известные типы распределения с известными параметрами, количество выборок при тестировании было равно 10000, а их размер – от 10 до 100 **[1]**. В этом же источнике автор говорит, что по результатам тестирования были сделаны следующие выводы:

1. Показатель имеет устойчивое распределение
2. Распределение очень слабо зависит от объема выборки

При тестировании известных распределений с неизвестными параметрами, замененными на ТО, были выявлены некоторые нюансы. При работе с выборками, объем которых попадает в тестовый отрезок, распределение показателя не изменилось для распределения Релея, нормального и Максвелла. Небольшие изменения были замечены для равномерного, экспоненциального, Вейбулла и гамма.

Перейдем к способу проверки гипотезы о типе распределения. Важно отметить, что данный метод, как и модифицированный , позволяет достаточно легко, наглядно, быстро и, главное, точно проверять сразу несколько гипотез о разных типах распределения и выбирать из них наиболее статистически достоверную. Выдвигаем все ту же гипотезу , задаем уровень значимости α и вычисляем доверительную вероятность . По данной вероятности определяем критическое значение для предполагаемого распределения по специальной таблице (*приложение 6*). Производим ТО параметров распределения, после этого находим показатель . Решение о принятии гипотезы производится по следующему правилу:

Данный метод по-прежнему учитывают всю информацию в выборке и не требует субъективных действий (например, разбиения на интервалы), поэтому должен давать более точную информацию.

И последним рассмотрим специальный метод проверки гипотез. Специальные методы предназначены для проверки гипотез о каком-либо одном известном типе распределения. Для проверки гипотез о нормальном распределении ГС наиболее эффективным **[22-24]** по совокупности тестирований является метод (критерий) Шапиро-Уилка **[16, 17, 22-24]**. Критерий Шапиро-Уилка позволяет проверять только один тип гипотез – о нормальном распределении ГС по полученной выборке. Данный критерий наиболее эффективен при объемах выборки **[16, 17, 22-24]**. В нашей работе мы рады данному ограничению, так как выборки подходящего критерию объема являются объектом наших исследований. Поэтому и критерий можно считать обоснованным и применимым. Для выборок большего объема существует модификация данного метода, которая увеличивает максимальный порог количества значений в выборке до 2000. Данную модификацию рассматривать не будем и сконцентрируемся на версии для малых выборок. Выдвигаем гипотезу . Для использования данного критерия необходимо получить ТО МО и дисперсии и упорядочить значения в выборке (по возрастанию). Далее предлагается использование статистики следующего вида:

где – вспомогательный коэффициент, который определяется по специальной таблице (*приложение 2*). К сожалению, уже при 21 значении в выборке, таблица имеет неприятно большие размеры. Поэтому решалась задача аппроксимации и получения формул для приблизительного расчета удовлетворяющей точности. Полученные формулы для нахождения коэффициентов согласно **[16]** выглядят так:

Проверка гипотезы, по классике, производится сравнением полученного показателя и критического значения . Предельное значение также можно определить двумя способами, но перед этим необходимо задать уровень значимости учитывая деталь, которая будет описана далее. Первый способ – табличный (*приложение 3*) – поиск значения по объему выборки и доверительной вероятности. Второй – приближенные формулы.

Проверка гипотезы о нормальности распределения, на этот раз, проводится не так, как в прошлых методах. Во-первых, уровень значимости, который мы задаем, также представляет собой и доверительную вероятность в данном методе. Во-вторых, в отличие от всех прошлых методах, в данном гипотеза принимается, если полученное значение больше критического, а не меньше. То есть имеем решающее правило:

В финальной части второго раздела данной работы предлагается рассмотреть еще два статистических метода – дисперсионный и регрессионный анализ. Если ранее мы рассматривали методы, позволяющие, на самом деле, получить относительно небольшой объем информации, например – оценка параметра, проверка гипотезы о нормальном распределении и так далее. Все эти методы так или иначе являются основой для более комплексных, сложных и информативных методов. Отличие данных методов в том, что с помощью них исследуются более сложные вопросы, например, о наличии зависимости внутри выборки или о различии исследуемых групп. Выше мы несколько раз сталкивались с данными задачами, ведь зависимость, в некотором роде, мы могли определить и по коэффициенту корреляции, а сравнение групп – провести по t-критерию. К сожалению, это самые примитивные способы решения задачи исследования зависимости или различия, они имеют ограничения (например, по t-критерию можно сравнить только две группы) и проблемы интерпретации (например, коэффициент корреляции, на самом деле, не говорит именно о зависимости, он лишь определяет меру взаимосвязи между двумя количественными переменными). Отсюда возникает вопрос, что делать, если исследуется три и более групп на различие или определяется зависимость количественной переменной от качественной. На данный момент методы, которые разбирались в работе, ничем не могут помочь при решении подобных вопросов. И именно для расширения возможностей и списка проблем, которые можно с помощью них решать, используются более продвинутые и сложные методы. В данную работу включены два метода – дисперсионный и регрессионный анализ. Они, в свою очередь, являются комплексами многих статистических методов, часть из которых мы рассмотрели выше. Используя данные методы, мы будем решать более сложные задачи, а именно проверка гипотез о зависимости внутри выборки, как между количественными переменными, так и между количественными и качественными. Дисперсионный и регрессионный анализ применим и к малым выборкам, что означает для нас возможность их использования при анализе выборок установленного в работе объема (до 200 объектов). Конечно, имеются некоторые ограничения для применения каждого метода, но установленный в работе объем выборок в это ограничение почти всегда попадает. Более подробно об ограничениях и использовании методов с малыми выборками будет сказано при описании дисперсионного и регрессионного анализа, к чему мы и перейдем.

Первым мы рассмотрим статистических метод, который называется дисперсионный анализ (ДИ), разработанный в 1918 году Р. Фишером **[3, 4, 11]**. Во многих англоязычных источниках данный метод носит название ANOVA – Analysis of variance. Это очень эффективный и универсальный статистических метод, который найдет свое применение практически в любом исследовании. Его суть заключается в проверке влияния какого-либо фактора (независимой переменной) на зависимую (признак). Если влияние подтверждается, то можно разработать способы управления данными факторами для получения желаемых значений зависимой переменной. Главной особенностью данного метода является то, что при его использовании можно исследовать как количественные, так и качественные факторы и признаки. Множество других статистических методов возможно использовать с числами, при этом качественные переменные создают проблемы для исследователей. Основным недостатком данного метода являются сложности в автоматизации вычислений, особенно при исследовании влияния более 2 факторов. Это обусловлено тем, что отсутствует четкая структура входных данных, от которых зависят последующие вычисления. Например, фактор может иметь 3 градации, а может 2, 4, 5 и так далее. А когда факторов становится больше, построение универсального алгоритма приводит к большим сложностям. Поэтому во многих исследованиях исследователи не могут полностью отдать основную часть работу программным решениям, логику метода необходимо формировать под конкретную задачу. Мы, в дальнейшем, также будем придерживаться данного способа организации исследований. Стоит отметить, что в любом случае мы не сможем достоверно сказать обо всех факторах, влияющих на изменчивость признака. Но, на самом деле, мы и не ставим себе такой цели. Нашей целью будет проверка некоторой гипотезе о том, что изменчивость вызвана фактором. Определить, какой именно фактор влияет на изменчивость можно на основе статистических методов и сложных вычислений, но для дисперсионного анализа, зачастую, изменчивость предполагают на основе хороших знаний области исследования, прошлых экспериментов, и, что вполне допустимо, здравого смысла и логики. В работе будет использоваться две версии дисперсионного анализа – однофакторная и многофакторная. С помощью дисперсионного анализа мы будем проверять значимость влияния различных факторов на зависимые признаки. Как по-отдельности (в случае однофакторного ДИ), так и в совокупности (в случае многофакторного). Возникает вопрос, почему анализ именно дисперсионный. Ответ достаточно прост – дисперсия зависимого признака формируется из дисперсий влияющих на нее факторов, дисперсии их взаимодействия и некоторой случайной и не учтенной дисперсии. То есть, мы можем объяснить изменчивость (дисперсию) зависимого признака изменчивостью (дисперсиями) факторов, влияющих на него. Поэтому мы будем работать с оценками изменчивости данных, в том числе и с дисперсией.

Поговорим о применимости дисперсионного анализа к малым выборкам. Были проанализированы многие источники информации о дисперсионном анализе, например **[4, 11]**. Зачастую, примеры использования ДА или исследований с его помощью приводят на относительно небольших выборках объема от 20 до 500 в зависимости от количества факторов и их уровней. Очевидно, что выборка объема, допустим, 20 объектов, лучше подойдет в случае однофакторного анализа. И дело тут в некоторых базовых ограничениях (и рекомендациях) размера. Каждый фактор вариацией своих значений образует группы значений признака. Почти во всех источниках отмечается, что размер этих групп ограничен снизу – минимум 2 значения в каждой группе. Некоторые авторы дают дополнительные рекомендации по минимальному размеру групп – минимум 10 значений в каждой группе. Именно поэтому однофакторный ДА будет более эффективным для очень малой выборки. Просто по причине того, что размер групп после разбиения будет больше, ведь при использовании многофакторного ДА групп становится больше, а объем выборки не увеличивается. Также при использовании однофакторного ДА существует требование по количеству вариаций фактора, которых должно быть не менее трех. Но, как оказалось на практике, ДА очень часто применяется при работе с выборками объема от 100 до 200 объектов. Как минимум потому, что во многих испытаниях, по тем или иным причинам, сбор большого объема наблюдений сложен или невозможен. И в это же время, ДА позволяет оперативно проверить предположение о зависимости внутри наших данных. Если есть основания предполагать, что объем нашей выборки слишком мал, то есть в каждой исследуемой группе менее 10 значений, и возможности увеличить объем выборки нет, можно регулировать точность наших результатов уровнем значимости, естественно, в разумных пределах. Не имеет смысла назначать α=0,001, почти всегда мы получим отрицательные результаты. А вот поменять α=0,05 на α=0,01 или наоборот вполне разумно. Главное правильно интерпретировать полученные результаты. Исходя из этого, мы не можем найти причины не использовать данный метод в работе с нашими выборками объема до 200 объектов. Более того, в условиях наших ограниченных размеров, метод показывает достойные и адекватные результаты. Главное – помнить о базовых ограничениях, не ошибаться при выборе уровня значимости и правильно интерпретировать результаты.

Нулевая гипотеза в дисперсионном анализе выдвигается на основе предположения, что влияние фактора или факторов отсутствует. Поэтому для нас, как для исследователей, появляется задача статистически опровергнуть эту гипотезу. Рассмотрим два вида дисперсионного анализа более подробно.

Однофакторный дисперсионный анализ (one-way ANOVA). Данный статистических метод применяется при проверке гипотезы о влиянии только одного фактора, который может иметь различное число градаций. Для удобства можно формировать «группы» из значений признака, у которых совпадает значение критерия. В результате можно будет говорить о межгрупповых сравнениях, что, на мой взгляд, легче воспринимается и усваивается. Далее будем говорить об исследованиях градаций (уровней) фактора в виде групп. Рассмотрим выборку размера , которая имеет качественную переменную с значениями и количественную. По значениям количественной переменной мы формируем три группы. Предполагаем, что существует зависимость и выдвигаем заведомо нежелательную гипотезу . Данную гипотезу нужно интерпретировать как равенство средних в каждой группе – иными словами, значения фактора не влияют на признак. Далее нам необходимо найти ТО математических ожиданий – общего и групповых:

ТО групповых МО находятся по рассмотренным выше методам. После этого можем перейти к одному из основных понятий – общей сумме квадратов (sum squares total). Это, своего рода, мера изменчивости данных без учета фактора, что чем-то похоже на дисперсию. Формула для следующая:

Действительно, внешность зависимости очень напоминает дисперсию. Далее необходимо вычислить количество степеней свободы . К слову, если мы поделим на , то получим ТО дисперсии. В свою очередь, общая сумма квадратов состоит из двух других показателей – межгрупповой и внутригрупповой суммы квадратов.

Рассмотрим . Данный показатель характеризует различия или изменчивость в значениях между группами. Для его вычисления понадобится использовать ТО групповых МО. А также определить – количество элементов в каждой группе. Далее используем общее МО и находим :

Количество степеней свободы вычисляется как .

Далее рассмотрим . Данное значение характеризует общую изменчивость значений внутри каждой группы, в нее также входят случайные и не учтенные расхождения. То есть сравнение будет вестись с групповыми МО. Для условий нашей задачи формулу запишем в следующем виде:

где – -ый элемент первой группы, со второй и третьей группой аналогично.

Данную формулу можно представить в другом виде, если все группы одинакового размера . Поделим обе части на и получим:

В правой части уравнения в явном виде представлены формулы для вычисления групповых дисперсий, преобразуем зависимость итоговому виду:

Число степеней свободы для данного показателя вычисляем как .

В итоге, в общем случае, должно выполняться равенство . Если , то возможны статистические различия между группами, которые нужно подтвердить какой-либо статистикой. Предлагаю использовать F-критерий по нескольким причинам:

1. Успешно работает с исследованием дисперсий, а найденные величины очень на них похожи.
2. Из найденного можем составить осмысленную статистику, которая сильно схожа с F-критерием:

Важно отметить, что в числителе всегда должно быть большее значение.

1. Данный критерий уместен при малых выборках.

Далее задаем уровень значимости, находим доверительную вероятность и проверяем гипотезу по F-распределению, сравнивая найденное значение с критическим. Решающее правило имеет вид:

Если гипотезу отклонить не удалось, но имеются веские причины предполагать ее истинность, необходимо провести дополнительные исследования другими методами или увеличить объем выборки. Если мы смогли отклонить гипотезу, то это означает, что были получены статистически значимые различия между группами. Однако, если количество исследуемых групп , то мы не можем сказать, какие именно группы имеют значимые отличия. Статистически подтвержденные отличия говорят лишь о том, что как минимум две группы отличаются друг от друга. В исследованиях с помощью дисперсионного анализа часто визуализируют результаты. По графику можно предположить направление зависимости признака от фактора. Например, в однофакторном ДА мы могли получить подобные результаты (если фактор имеет два уровня):

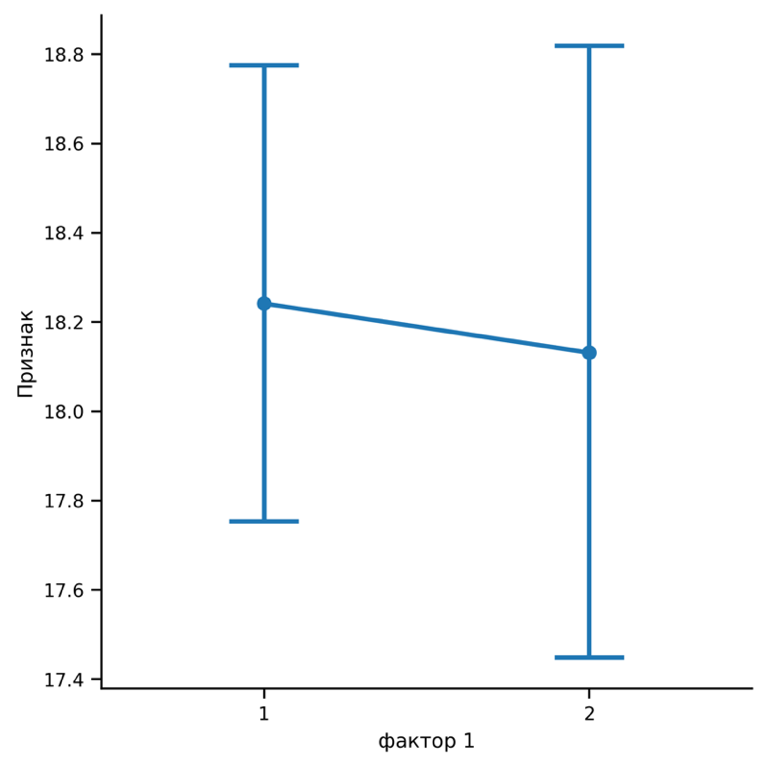


Рисунок 6. Графический пример возможных результатов ОДА

По графику можно заметить, что увеличение (хотя, в случае качественных переменных правильнее будет говорить просто об изменении) значения фактора приводит к снижению значения признака, пусть и не совсем значительному.

Пример использования ОДА для малой выборки приведен в третьем разделе и реализован программным способом.

В итоге можно сказать, что данным методом мы частично подтвердили то, что исследуемый фактор своими вариациями может влиять на признак и, на основе анализа графика результатов, установили направление предполагаемого влияния. Почему подтвердили только частично? Затронем данный вопрос при подведении итогов и после того, как рассмотрим следующий вид дисперсионного анализа – многофакторный, к которому сейчас и перейдем.

Многофакторный дисперсионный анализ позволяет проверять предположения о том, что на зависимый признак имеют влияние сразу несколько факторов. Более того, многофакторный ДА также позволяет проверить гипотезу о том, что один фактор может оказывать влияние на признак в зависимости от значений другого фактора (других факторов). Данную ситуацию будем называть взаимодействием факторов. Так как принцип работы и формулы для вычислений, в сравнении с однофакторным случаем, глобально не меняются, то рассмотрим ситуацию, когда есть основания предполагать, что исследуемый признак зависит от двух факторов, каждый из которых имеет два уровня (значения). Обозначим их цифрами 1 и 2. Также поделим значения признака на 4 группы в зависимости от значений факторов. Удобнее представить данные в виде таблицы:

Таблица 2. Обобщенный пример данных для МДА

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Фактор 1 | Фактор 2 | Группы значений | Средние | Размер групп |
| 1 | 1 |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |
| 2 | 1 |  |  |  |
| 2 | 2 |  |  |  |

Начнем работу с фактора 1. Необходимо будет вычислить 3 МО:

Мы нашли МО для значений, имеющих различные уровни фактора 1, а также общее МО для данного фактора. То есть работали с группировкой по разным значениям фактора 1. На основе этих данных найдем межгрупповую сумму квадратов по фактору 1:

В принципе, наши действия в точности повторяют принцип однофакторного анализа с учетом того, что второй фактор мы «опускаем» и представляем, что у нас всего группы для сравнения. Число степеней свободы в данном случае равно . Аналогичные действия проводятся и со вторым фактором. В этом случае находим МО:

Далее находим межгрупповую сумму квадратов по фактору 2:

Так как фактор 2 тоже имеет только два различных значения, число степеней свободы остается таким же: .

Последней суммой квадратов, которую мы рассмотрим, будет межгрупповая, которая отвечает за взаимодействие факторов. Если ранее мы рассматривали группы, которые по очереди формируются значениями только одного фактора, то теперь рассмотрим четыре группы, которые формируются набором уникальных значений первого и второго фактора. Найдем глобальное МО :

После этого возможно найти сумму квадратов для взаимодействия факторов:

Так как для каждого фактора мы имели по две группы значений, то можно сказать, что было группы для каждого фактора. Исходя из этого, количество степеней свободы для суммы квадратов при взаимодействии найдем как . После этого мы находим внутригрупповую сумму квадратов, которая будет единой для обоих факторов. То есть суммируем квадраты разностей значений и МО для каждой из начальных групп:

Для данного показателя число степеней свободны равно .Чтобы проверить набор гипотез о влиянии факторов, найдем значения F-критериев для каждой суммы. Набор гипотез следующий:

1. Значимое влияние первого фактора
2. Значимое влияние второго фактора
3. Значимое влияние при взаимодействии двух факторов

Пользуемся зависимостью для F-критерия, которая уже встречалась в однофакторном ДА, но в данном случае для проверки каждой гипотезы мы меняем значения межгрупповых сумм квадратов:

Для проверки задаем уровень значимости α, находим доверительную вероятность и критическое значение для каждой гипотезы с учетом степеней свободы. Находим либо по таблицам, либо по плотности распределения Фишера.

Для проверки гипотезы имеем решающее правило общего вида:

После статистического подтверждения гипотез, очень часто результаты визуализируются в виде облегченной версии графика box-plot. Например, в нашем случае мы могли бы получить такой график:

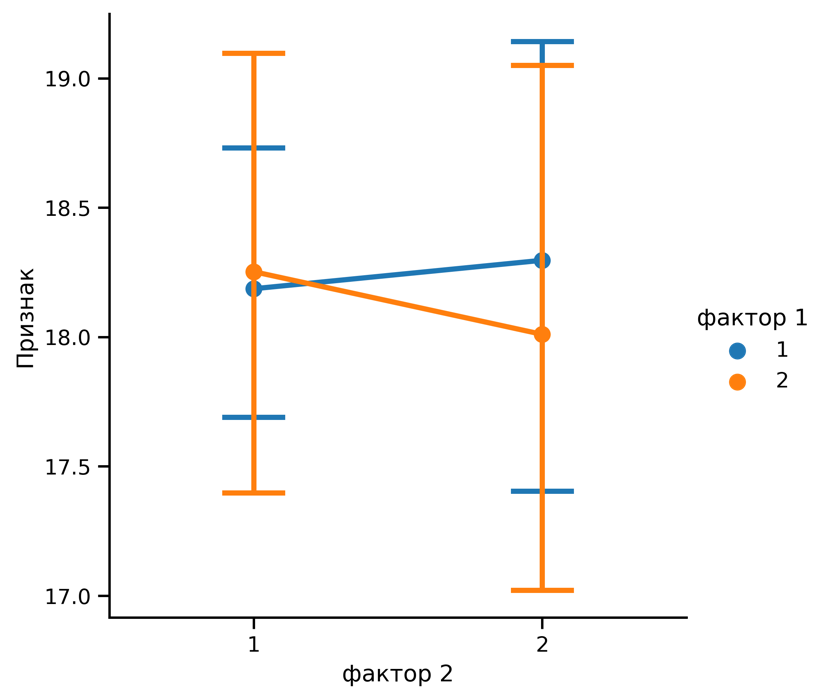


Рисунок 7. Графический пример возможных результатов МДА

В данной ситуации сразу видно как взаимодействие факторов, так и влияние каждого фактора на признак. По графику видно, что при значении 2 фактора 1 изменение значения фактора 2 приводят к понижению значения признака. Для значения 1 фактора 1 ситуация обратная. Как видим, визуальный анализ не стоит списывать со счетов, ведь он может стать хорошим дополнением к уже полученным статистическим выводам.

Подводя итог, дисперсионный анализ является хорошим методом в исследованиях степени зависимости количественной переменной от качественной в малых выборках. Также можно сказать, что данный метод может быть использован для сравнения нескольких групп между собой. Данные группы формируются на основе различных уровней (значений) какого-то фактора (качественной переменной). ДА позволяет предполагать зависимость как от одного фактора, так и от нескольких сразу. Более того, с помощью этого метода можно проверить более комплексные предположения, например, что значения зависимой переменной изменяются под влиянием нескольких взаимодействующих факторов, а не из-за влияния каждого отдельного фактора. Для использования метода необходимо иметь наблюдений в каждой группе. Иными словами, данный метод можно применять в исследованиях малых выборок, размер выборки не оказывает колоссального влияния, хотя некоторые источники дают дополнительную рекомендацию для размера для каждой группы. Еще одной положительной характеристикой является то, что вычисления в методе относительно простые и могут быть произведены даже без применения специальных вычислительных средств. К сожалению, из-за того, что заранее неизвестно ни количество факторов, ни количество уровней в факторах, вычисления легче проводить по зависимостям, которые формируются уже после получения данных, а не до этого момента. Выше мы отметили положительные стороны метода, теперь необходимо поговорить и об отрицательных. В работе уже отмечалось, что положительный результат дисперсионного анализа позволяет подтвердить зависимость лишь частично. Это обусловлено тем, что на самом деле положительные результаты дисперсионного анализа, то есть отклонение не желаемой гипотезы и принятие альтернативной или, наоборот, принятие желаемой гипотезы, к большому сожалению, не позволяют уверенно говорить о причинно-следственной связи между исследуемыми объектами. Такой вывод куда более комплексный, сложный, и прийти к нему можно при исследовании выборки совокупностью различных методов, которые дадут статистически значимые различия. Также не нужно забывать о логике, которой можно объяснить или опровергнуть результаты исследования. Ведь может случиться такое, что зависимость будет совсем нелогична или, более того, невозможна, но рассчитанные показатели скажут об обратном. Поэтому при использовании ДА всегда стоит задаваться вопросом о возможности объяснения результатов исследования с обратной стороны. То есть возможна ли такая ситуация, когда различные значения зависимого признака будут влиять на изменение значений фактора, а не наоборот. Но, все-таки, дисперсионный анализ может дать начало дополнительным исследованиям, так как позволяет оперативно и обоснованно предположить реальное наличие зависимости. Еще одним, скорее отрицательным, нюансом является то, что однофакторный дисперсионный анализ требует, как минимум, трех градаций фактора. При двух уровнях результаты будут такие же, как при сравнении средних по t-критерию, вычисления в котором займут меньше времени при одинаковом результате. Вообще, требования для использования дисперсионного анализа лучше представить в виде списка:

1. Объем каждой группы , желательно .
2. Не менее трех различных значений фактора при однофакторном ДА
3. Получение данных из ГС с непрерывным распределением, дискретное распределение ГС менее предпочтительно, но возможно.
4. Примерное равенство групповых дисперсий без сильных отклонений. Данное требование хоть и существует, но на практике в исследованиях зачастую опускается **[20, 21, 22]**.
5. Независимость наблюдений в группах и групп между собой. То есть градация признака не должна влиять сама на себя.
6. Близкое к нормальному распределение признака. Но, например в **[23]** отмечается, что это требование весьма условно.

Пример использования МДА для малой выборки приведен в третьем разделе и реализован программным способом.

Последним в списке более комплексных методов и, вместе с этим, последним в работе будет регрессионный анализ (РА) **[1, 11, 18]**. Этот метод позволяет исследовать зависимость между переменными, выявлять переменную, влияющую на зависимую, если «несколько», а также предсказывать и контролировать значения зависимой переменной **[1, 11]**. Главной идеей является построение регрессионной модели. Она имеет вид функции зависимой переменной от независимой и может быть линейной и нелинейной. В данной работе мы рассмотрим линейный регрессионный анализ. Это также очень мощный и полезный метод, который позволяет решать большое количество задач и основывается на построении регрессионной модели в линейном виде. Например, с помощью него мы можем проверить зависимость между количественными переменными, что, к слову, невозможно сделать с использованием дисперсионного анализа. Также мы можем проверять не только зависимость, но и определять ее силу. На основе полученных результатов о предполагаемой зависимости мы можем построить модель данной зависимости. А построение модели, в свою очередь, поможет решить еще две важные задачи – предсказание значений и получение путей контроля исследуемого явления с помощью других явлений, от которых оно зависит. Существует несколько разновидностей регрессионного анализа, но в данной работе мы остановимся на двух – одномерной и многомерной линейной регрессии. Это позволит нам работать как с простыми случаями влияния на зависимую переменную одной независимой, так и с более сложными – когда независимую переменную влияют сразу нескольких независимых. Мы также рассмотрим способы выбора наилучшей регрессионной модели с целью получения более точных результатов предсказания или проверки значений. Как и в случае с дисперсионным анализом, регрессионный анализ также имеет свои требования к данным, о которых будет сказано при описании каждого подвида линейного регрессионного анализа. На данном этапе стоит затронуть тему применимости данного метода к выборкам, объем которых соответствует установленному в работе (до 200 объектов), то есть необходимо проанализировать применение регрессионного анализа к малым выборкам.

Во многих источниках информации о РА вопроса размера исследуемых выборок не касаются. В основных требованиях, которые будут приведены ниже, требования по размеру также отсутствуют. В некоторых источниках даются рекомендации работать с переменными, которые имеют от 20-25 значений. Также присутствуют рекомендации, что количество наблюдений должно в 5-6 раз превышать количество исследуемых переменных. Было принято решение проверить работу с малыми выборками на практике. И здесь подтвердилась основная идея регрессионного анализа – важным обстоятельством является наличие зависимости между переменными в том или ином виде. Проверить это можно, например, по коэффициенту корреляции. Поэтому размер выборки ограничивается тем, что он должен позволять достаточно точно определить наличие связи между переменными. Понятно, что для очень малых выборок, которые суммарно имеют до 30 значений, корректное определение связи будет достаточно сложным и не всегда предсказуемым занятием. Но, когда размер каждой из исследуемых переменных превышал 20-30 значений, результаты были вполне адекватными, как при исследовании связи, так и при использовании линейного регрессионного анализа в целом. Данное обстоятельство подтверждает озвученные выше рекомендации к размеру выборки. Поэтому будем им следовать и применять данный метод к выборкам, в которых исследуемые переменные состоят минимум из 25-30 значений. Не лишним будет отметить, что РА часто применяется на хорошо подготовленных данных. Например, при анализе каких-то показателей по регионам или прочим территориям, когда используется среднее значение для каждого объекта. В таком случае наличие выборки большого размера почти никак не скажется на результатах при условии, что используемые средние значения были качественно вычислены или оценены. При этом в работе с качественными данными стоит все-таки соблюдать вышеупомянутую рекомендацию к минимальному размеру хотя бы из предположения о том, что меньший объем может не дать адекватно установить связь между переменными.

После озвучивания вопросов размера выборок можно переходить к разбору первой разновидности линейной регрессии – одномерной линейной регрессии (ОЛР). Одномерная линейная регрессия предполагает, что одна независимая переменная влияет на зависимую переменную линейно. Модель регрессии в данном случае выглядит так:

В данном случае это уравнение прямой, которая описывает зависимость между нашими переменными и направление этой зависимости. Основной задачей является определение такой прямой, которая максимально отображает зависимость и ее направление, а также хорошо описывает распределение данных, то есть каждое наше значение по возможности должно быть максимально близко к регрессионной прямой. Основным способом получения таких результатов является использование метода наименьших квадратов для подбора максимально верных коэффициентов регрессионной прямой. Проще всего данную идею будет рассмотреть с помощью графика:

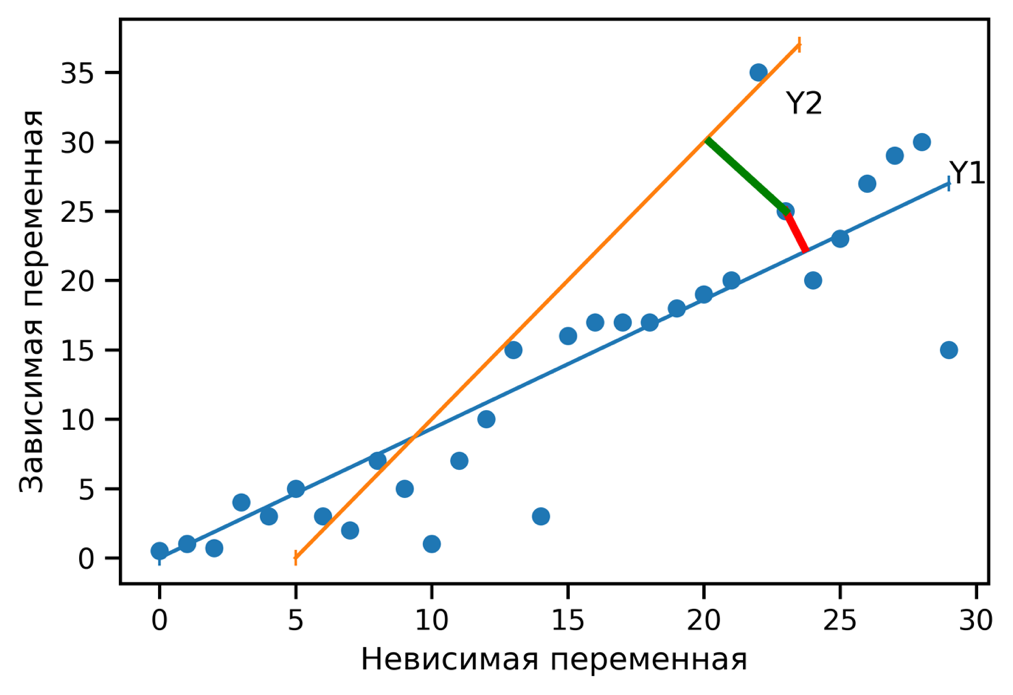


Рисунок 8. Общий принцип линейной регрессии

На данном графике изображены значения зависимой и независимой переменных. Даже по графику мы можем увидеть положительную взаимосвязь. Более того, вид взаимосвязи приблизительно линейный. В таком случае мы можем построить прямую, которая будет описывать имеющуюся зависимость. И МНК позволяет построить наилучшую подобную прямую. На графике изображены две прямые и . Также из графика очевидно, что прямая описывает наши данные лучше. Но как подтвердить это вычислениями? Необходимо найти остатки от разности фактических значений и значений, которые соответствуют фактическим на прямой. Та прямая, у которой сумма квадратов таких остатков будет минимальной, и является наилучшей прямой нашей регрессионной модели. На графике данные остатки изображены красным и зеленым цветом. Объясним использование именно квадрата расстояния. Обозначим остатки как и , а соответствующие точки на прямых как . Выбранную точку обозначим как . Тогда имеем:

В данном случае . Для того, чтобы убрать отрицательные значения, которые будут искажать сумму остатков, и используется квадрат подобных разностей. В общем виде правило поиска по МНК можно записать так:

где – значение предполагаемой прямой в точке *i*. В случае линейной зависимости уместна система для поиска коэффициентов:

Из этой системы выводятся стандартные зависимости для коэффициентов линейной регрессии:

Значения МО, СКО и КК можно заменить точечными оценками по методам, ранее описанным в работе.

Рассмотрим более подробно коэффициент нашей модели. Данный коэффициент отражает наличие взаимодействия исследуемых переменных. В случае отсутствия корреляции, будет нулевым, а линия регрессии – параллельна оси Х. На основе этого можно сформировать гипотезы. Нулевой будет гипотеза о том, что переменные на самом деле никак не действуют друг на друга. Альтернативной гипотезой будет наличие взаимодействия:

Предположим, что нулевая гипотеза верна. Тогда при многократном получении выборок и повторении вычислений, вычисленные значения распределятся примерно нормальным образом вокруг значения 0.

Важным показателем качества модели ОЛР является коэффициент детерминации (КД) . Он характеризует долю дисперсии зависимой переменной, которую объясняет наша регрессионная модель. Так как мы работаем с одной независимой переменной, то в данном случае можно сказать, что коэффициент детерминации показывает, насколько уверенно изменения зависимой переменной можно объяснить влиянием независимой. Чем больше значение данного коэффициента, тем лучше наша модель описывает и объясняет зависимость между переменными. Также с увеличением значения коэффициента детерминации растет и эффективность предсказания значений по нашей модели. Для вычисления используется зависимость вида:

где – сумма квадратов остатков, а – общее значение изменчивости или общая сумма квадратов.

Для возможности использования полученной регрессионной модели значение КД должно быть не менее 0,5. При значениях КД выше 0,8 модель считается хорошей.

И еще одним глобальным показателем качества модели является F-значение, которое в данном случае вычисляется как:

где – количество независимых переменных. У нас такая только одна. А . А далее классический способ проверки. При заданном уровне значимости и найденных значениях числа степеней свободы находим . Если найденное значение критерия > , то наша модель имеет статистическое подтверждение качества и значимости своей работы.

Если была получена статистически значимая модель, можно решать задачу предсказания или регулирования значений ЗП. Для этого просто необходимо подставить нужные значение независимой переменной в модель.

Поговорим о требованиях к данным, которые необходимо соблюдать для качественного использования ОЛР. Список требований ниже:

1. Линейный или почти линейный характер взаимосвязи и .
2. Нормальное или близкое к нормальному распределение остатков.
3. Гомоскедастичность – постоянная изменчивость остатков на всех уровнях независимой переменной. Иными словами, при визуальном анализе графика должны наблюдаться случайные значения остатков/погрешностей, без их увеличения или уменьшения при увеличении значений независимой переменной.
4. Количественный тип исследуемых переменных.

В конце озвучим два замечания, которые важно осознавать при использовании ОЛР:

1. Установленная и исследуемая зависимость не подтверждает причинно-следственную связь между переменными. То есть даже при получении высокого КК и КД, при построении хорошей модели, мы не можем с полной уверенностью утверждать о неопровержимой зависимости между переменными. Данное утверждение возможно только после исследования сразу несколькими разными методами с получением положительных результатов, а также графического и логического анализа результатов.
2. Результаты нужно осторожно переносить на ГС, желательно с проверкой и другими методами.

Пример использования ОЛР для малой выборки приведен в третьем разделе и реализован программным способом.

И последней мы рассмотрим множественную линейную регрессию (МЛР). Она позволит нам исследовать влияние сразу нескольких независимых переменных на одну зависимую. С помощью нее мы сможем узнать, какие переменные имеют наибольшее влияние, а также получим возможность построить модель с оптимальным количеством переменных, дающую наилучший результат исследования. В основе МЛР лежит предположение о том, что зависимость между зависимой и независимыми переменными можно выразить линейно в виде следующей регрессионной модели:

В данном случае каждой независимой переменной соответствует свой коэффициент. Определять эти коэффициенты, называемые регрессионными, все так же будем по МНК. Но, из-за большего количества переменных, процедура нахождения коэффициентов усложняется. Будем работать с данными в матричном виде. Для этого определим вектор , который состоит из значений зависимой переменной. Определим матрицу значений , состоящую из векторов-столбцов независимых переменных. Так как при нет никакой переменной, ее значение примем равным 1. Общий вид данной матрицы:

Вектор неизвестных коэффициентов обозначим как :

Используем классическую версию МНК:

В векторно-матричной форме оценку вектора параметров находим по зависимости:

Можно также найти ковариационную матрицу, для понимания связи между независимыми переменными. Поиск производится через дисперсию вектора параметров:

Для проверки качества модели находим КД по **2.3.68**. После этого мы можем найти скорректированный КД (СКД), который используется при анализе нескольких переменных. Зависимость для него:

Его использование обосновано тем, что стандартный КД будет постоянно расти при добавлении новых независимых переменных в модель. Это имеет негативные последствия, потому что в модели могут присутствовать переменные, «оказывающие» ложное влияние. Поэтому скорректированный КД вводит некий штраф, который увеличивается с каждой новой добавленной переменной. В итоге, на некотором этапе мы столкнемся с тем, что данный штраф будет больше значимости влияния переменной и СКД начнет уменьшаться. Поэтому появляется задача найти максимальное значение СКД, модель, которая его обеспечит, и будет лучшей для нас. В данном методе мы сначала строим модель, включая все переменные, и рассчитываем СКД. Далее поочередно удаляем по одной переменной и рассчитываем коэффициенты и СКД для моделей, состоящих из оставшихся переменных. Повторяем операцию до того момента, когда получим максимально возможное значение СКД. При удалении переменных также может проявиться значимость каких-либо оставшихся, которые ранее, на основе статистических вычислений, мы считали незначимыми.

Еще одним глобальным определением качества модели, как и в случае с ОЛР, является -критерий. Но для модели множественной ЛР он рассчитывается несколько иначе. А именно, уместна зависимость:

где – факторная сумма квадратов, показывающая отличия значений нашей модели от среднего значения зависимой переменной:

В данном случае число степеней свободы находятся так:

Далее задаем уровень значимости, по таблице F-распределения находим критическое значение . Если найденное значение критерия , то получено статистическое подтверждение адекватности и значимости построенной регрессионной модели.

Если была получена статистически значимая модель, можно решать задачу предсказания или регулирования значений ЗП. Для этого просто необходимо подставить нужные значения независимых переменных в модель.

Множественная линейная регрессия имеет более обширные требования к данным:

1. Линейная зависимость переменных
2. Нормальное распределение остатков
3. Гомоскедастичность.
4. Отсутствие мультиколлинеарности – то есть наши независимые переменные должны быть незначительно связаны между собой. Проверяется по КК.
5. Желательно нормально распределение переменных

Подводя итог, озвучим несколько замечаний:

1. Количество переменных в модели не всегда означает ее качество.
2. Коэффициенты регрессионной модели МЛР показывают то, насколько каждая независимая переменная влияет на зависимую, при учете оставшихся НП.
3. Коэффициенты вычисляются не так, как в одномерном случае. В данном случае вычисления происходят с учетом того, что в модели несколько переменных, каждая из которых может иметь какое-то влияние.
4. Размер выборки не так важен, но строгое правило, что объем каждой выборки должен быть больше числа независимых переменных. Рекомендация – 20-25 значений в каждой, либо в 5-6 раз больше, чем количество НП.

Пример использования МЛР для малой выборки приведен в третьем разделе и реализован программным способом.

# **Программная реализация методов.**

В третьем разделе данной работы мы перейдем к реализации рассмотренных выше методов на языке Python в среде разработки Jupyter Notebook. При необходимости будут загружаться файлы с данными, которые будем исследовать нашими методами. Во время выполнения программной реализации активно использовалась документация **[27-32]** по модулям языка.

## **1. Методы точечного оценивания**

Начнем с реализации методов точечного оценивания – ММП и ММ. Начнем с ММП. Так как во втором разделе были выведены зависимости для нормального распределения, получившиеся одинаковыми (с учетом коррекции ТО дисперсии по ММП), функция для оценки параметров нормального распределения будет единой. Также эту функцию можно использовать для вычисления выборочного МО и дисперсии у других распределений. Код функции:

**def** pe\_norm(x, version):

"""

    Функция использует входящую выборку в виде списка или массива numpy

    Выбор версии определяет возвращаемые функцией значения

    Т.к. в работе были получены одни и те же зависимости для ТО МО норм

    распределения по ММП, ММ, МНК, то используем одну функцию

    """

m = (1/**len**(x)) \* **sum**(x)

sum\_sq = 0

**for** i **in** x:

sum\_sq += (i - m) \*\* 2

d\_adj = sum\_sq / (**len**(x) - 1)

sigma\_m = d\_adj / **len**(x)

sigma\_d = 2 \* ((d\_adj) \*\* 2) / **len**(x)

**if** version == 'both':

**return** m, d\_adj, sigma\_m, sigma\_d

**elif** version == 'm\_full':

**return** m, sigma\_m

**elif** version == 'd\_full':

**return** d\_adj, sigma\_d

**elif** version == 'm':

**return** m

**elif** version == 'd':

**return** d\_adj

**elif** version == 'm\_d':

**return** m, d\_adj

Функция возвращает значения в зависимости от переданного параметра версии. Версия определяется на основе целей использования функции. Проверим результат работы, сгенерировав выборку из нормальной ГС с характеристиками :

x = stats.norm.rvs(loc=2, scale=1.44, size=100)

pe\_norm(x, 'both')

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 9. Результаты точечного оценивания параметров нормальной малой выборки и погрешности этих оценок

Получена достаточно точная оценка для данной малой выборки.

Рассмотрим выборку из равномерной ГС с границами 1, 7 и размера 50, которую сгенерируем:

**def** pe\_r\_mmp(x):

"""

    Оцениваем границы, на вход выборка в виде массива numpy или списка

    Возвращаем оценки границ распределения

    """

a = x.**min**()

b = x.**max**()

**return** a, b

x = stats.uniform.rvs(1, 7, 50)

pe\_r\_mmp(x)

Вывод:



Рисунок 10. Результаты ТО параметров равномерной малой выборки

С небольшой погрешностью получили реальные границы ГС по малой выборке.

Далее рассмотрим оценку параметра экспоненциального распределения по ММ:

**def** pe\_exp\_mm(x, method='m'):

"""

    Оцениваем параметр лямбда, на вход выборка в виде массива numpy

    и метод поиска

    Возвращаем оценки границ распределения

    """

**if** method == 'd':

pe\_lambda = 1 / (x.var()) \*\* (1 / 2)

sigma\_l = (x.var() \*\* 2) / (n \* 4 \* x.var() \*\* 3)

pe\_lambda = 1 / x.mean()

sigma\_l = (x.var() / **len**(x)) / (x.mean() \*\* 4)

**return** pe\_lambda, sigma\_l

Проверим ту же самую выборку:

pe\_exp\_mm(np.array([0.96, 0.8, 0.65, 0.7, 1, 1, 1, 1, 1, 1]), 'm')

Вывод:



Рисунок 11. Результаты ТО экспоненциальной малой выборки и погрешность оценки

Результаты те же, метод точнее, в дальнейшем используем его.

## **2. Методы интервального оценивания**

Следующий пункт – реализация методов интервального оценивания. Первый метод – построение доверительного интервала для МО. Функция и оценка выборки из ГС с параметрами :

**def** ie\_m\_norm(x, p):

"""

    На вход выборка и доверительная вероятность

    Возвращает левую и правую границу ДИ

    """

m, sigma = pe\_norm(x, 'm\_full')

q = stats.t.ppf((1 + p)/2, **len**(x) - 1)

m\_l = m - q \* sigma

m\_r = m + q \* sigma

**print**(' Доверительный интервал с вероятностью ', p, ' для МО: [',

**round**(m\_l, 4), ';', **round**(m\_r, 4), ']')

**return** m\_l, m\_r

ie\_m\_norm(stats.norm.rvs(loc = 5, scale = 1.44, size = 50), 0.95)

Вывод:



Рисунок 12. ДИ для МО нормальной малой выборки

Получен достаточно точный ДИ.

Функция для ИО дисперсии по той же выборке с общей вероятностью 0.9:

**def** ie\_d\_norm(x, p\_l, p\_r):

"""

    На вход выборка и вероятности для левой и правой границы

    Возвращает левую и правую границу ДИ

    """

d = pe\_norm(x, 'd')

q\_l = stats.chi2.ppf(p\_l, **len**(x) - 1)

q\_r = stats.chi2.ppf(p\_r, **len**(x) - 1)

d\_l = (**len**(x) \* d) / q\_r

d\_r = (**len**(x) \* d) / q\_l

**print**('Доверительный интервал при общей вероятности ', **round**(p\_r - p\_l, 2), ' для дисперсии : [', **round**(d\_l, 4), ';', **round**(d\_r, 4), ']')

**return** d\_l, d\_r

ie\_d\_norm(stats.norm.rvs(loc = 5, scale = 1.44, size = 50), 0.05, 0.95)

Вывод:



Рисунок 13. ДИ для дисперсии нормальной малой выборки

Получены более заметные расхождения, в сравнении с ДИ для МО.

Последний пункт интервального анализа – построение толерантного интервала. Построим толерантный интервал для выборки из ГС с распределением , для доли 0.9 с вероятностью 0.98:

**def** tolerant(x, p, g):

"""

    Вход - выборка, доверительная вероятность и доля совокупности ГС

    Возвращает границы интервала

    """

m, std = pe\_norm(x, 'm\_d')

std \*\*= 1 / 2

q = stats.norm.ppf(p)

k = stats.norm.ppf(0.5 \* (1 + g)) \* (1 + q / ((2 \* **len**(x)) \*\* (1 / 2)) + (5 \* (q \*\* 2) + 10) / (12 \* **len**(x)))

a = m - k \* std

b = m + k \* std

**print**('Толерантный интервал доли ', g, ' при доверительной вероятности ',

p, ' : [', **round**(a, 4), ';', **round**(b, 4), ']')

tolerant(stats.norm.rvs(loc=5, scale=1.44, size=50), 0.98, 0.9)

Вывод:



Рисунок 14. Толерантный интервал для нормальной малой выборки

С вероятностью 0.98 мы можем утверждать, что 90% значений в ГС попадают в полученный интервал.

## **3. Методы проверки статистических гипотез и комплексные методы**

Переходим к самому обширному пункту – проверке различных гипотез. Первая – гипотеза о МО. Проверим гипотезу по все той же нормальной выборке, которую использовали выше. Уровень значимости зададим равным 0.05. Проверим три гипотезы:

Предполагаем, что первая и последняя будут опровергнуты, а вторая принята.

Функция для проверки гипотезы и ее вызовы:

**def** hypothesis\_mo(x, alpha, m0):

"""

    Вход - выборка, уровень значимости и предполагаемое значение МО

    Возвращает логический результат проверки M(x) = m0

    """

m, sigma = pe\_norm(x, 'm\_full')

z = (m - m0) / sigma \*\* (1 / 2)

z\_cr = stats.t.ppf(1 - alpha, **len**(x) - 1)

**if** **abs**(z) <= z\_cr:

**print**('z =', **round**(z, 4), '≤ z\_cr =', **round**(z\_cr, 4) ,'\nПринимаем гипотезу МО =',

m0, 'с доверительной вероятностью ', 1 - alpha)

**print**('Значение z, при принятой гипотезе, на самом деле может быть ',

'\nеще больше с вероятностью', **round**((1 - stats.t.cdf(**abs**(z), **len**(x))), 4))

**return** True

**else**:

**print**('Отклоняем гипотезу МО = ', m0)

**return** False

x = stats.norm.rvs(loc=5, scale=1.44, size=50)

hypothesis\_mo(x, 0.05, 5.5)

hypothesis\_mo(x, 0.05, 5)

hypothesis\_mo(x, 0.05, 4.9)

Результаты проверки:



Рисунок 15. Проверка первой гипотезы о МО малой выборки

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 16. Проверка второй гипотезы о МО малой выборки



Рисунок 17. Проверка третьей гипотезы о МО малой выборки

Предположения оказались верны, проверка гипотез работает достаточно точно.

Следующая функция – сравнение МО в двух выборках при помощи гипотез об их равенстве. Сгенерируем две выборки из разных ГС: . Проверим гипотезу о равенстве МО. Функция:

**def** hypothesis\_double\_mo(x, y, alpha):

"""

    Вход - две выборки, уровень значимости

    Возвращает логический результат проверки M(x) = M(y)

    """

m\_x, d\_x = pe\_norm(x, 'm\_d')

m\_y, d\_y = pe\_norm(y, 'm\_d')

t = (**abs**(m\_x - m\_y)) / (d\_x / **len**(x) + d\_y / **len**(y)) \*\* (1 / 2)

t\_cr = stats.t.ppf(1 - alpha, **len**(x) + **len**(y) - 2)

**if** **abs**(t) <= t\_cr:

**print**('t =', **round**(t, 4), '≤ t\_cr =', **round**(t\_cr, 4) ,'\nПринимаем гипотезу M(X) = M(Y) с доверительной вероятностью ',

1 - alpha)

**return** True

**else**:

**print**('t =', **round**(t, 4), '> t\_cr =', **round**(t\_cr, 4) ,'\nОтклоняем гипотезу M(X) = M(Y)')

**return** False

x = stats.norm.rvs(loc=5, scale=2, size=50)

y = stats.norm.rvs(loc=5, scale=3, size=50)

hypothesis\_double\_mo(x, y, 0.05)

Вывод функции:

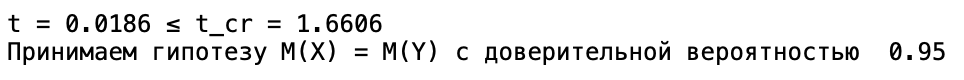


Рисунок 18. Проверка гипотезы о равенстве МО по двум малым выборкам (заведомо верная)

Изменим значение МО второй выборки на 4.9 и выполним еще один тест:

y = stats.norm.rvs(loc=4.9, scale=3, size=50)

hypothesis\_double\_mo(x, y, 0.05)

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 19. Проверка гипотезы о равенстве МО по двум малым выборкам (заведомо ложная)

Гипотеза отклонена, что соответствует действительности.

Далее займемся проверкой двух распределений на однородность. Проверим работу на трех малых выборках: двух из одинаковых нормальных ГС и одной из равномерной. Сначала сравним нормальные между собой, далее одну из них с равномерной. Уровень значимости установим 0.05. Код функции:

**def** hypothesis\_same\_distr(x, y, value\_name, alpha):

"""

    Вход - две выборки, имя переменной (должно быть одинаковым в обеих выборках), уровень значимости

    Возвращает логический результат проверки f(x) = f(y)

    """

x['own'] = 'x'

y['own'] = 'y'

df = pd.concat([x, y], ignore\_index=True)

df = df.sort\_values(value\_name)

df['rank'] = [i **for** i **in** **range**(1, **len**(df.value) + 1)]

u\_x = df[df.own == 'x']['rank'].**sum**()

u\_y = df[df.own == 'y']['rank'].**sum**()

n\_x = **len**(df[df.own == 'x'])

n\_y = **len**(df[df.own == 'y'])

m\_u\_x = 0.5 \* n\_x \* (n\_x + n\_y + 1)

m\_u\_y = 0.5 \* n\_y \* (n\_x + n\_y + 1)

sigma\_u = (1 / 12) \* n\_x \* n\_y \* (n\_x + n\_y + 1)

q = stats.norm.ppf(1 - alpha / 2)

u\_x\_l = m\_u\_x - q \* sigma\_u \*\* (1 / 2)

u\_x\_r = m\_u\_x + q \* sigma\_u \*\* (1 / 2)

u\_y\_l = m\_u\_y - q \* sigma\_u \*\* (1 / 2)

u\_y\_r = m\_u\_y + q \* sigma\_u \*\* (1 / 2)

**if** (u\_x > u\_x\_l **and** u\_x < u\_x\_r **and** u\_y > u\_y\_l **and** u\_y < u\_y\_r):

**print**('U\_x =', u\_x, ', Доверительный интервал [', **round**(u\_x\_l, 4), ';', **round**(u\_x\_r, 4), ']')

**print**('U\_y =', u\_y, ', Доверительный интервал [', **round**(u\_y\_l, 4), ';', **round**(u\_y\_r, 4), ']')

**print**('Принимаем гипотезу f(x) = f(y) с доверительной вероятностью', 1 - alpha)

**return** True

**else**:

**print**('U\_x =', u\_x, ', Доверительный интервал [', **round**(u\_x\_l, 4), ';', **round**(u\_x\_r, 4), ']')

**print**('U\_y =', u\_y, ', Доверительный интервал [', **round**(u\_y\_l, 4), ';', **round**(u\_y\_r, 4), ']')

**print**('Отклоняем гипотезу f(x) = f(y) с доверительной вероятностью', )

**return** False

x = pd.DataFrame(stats.norm.rvs(loc=5, scale=3, size=50), columns=['value'])

y = pd.DataFrame(stats.norm.rvs(loc=5, scale=3, size=50), columns=['value'])

hypothesis\_same\_distr(x, y, 'value', 0.1)

y = pd.DataFrame(stats.uniform.rvs(1, 10, size=50), columns=['value'])

hypothesis\_same\_distr(x, y, 'value', 0.05)

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 20. Проверка гипотезы об однородности распределений по двум малым выборкам

Видим, что метод позволил нам отклонить гипотезу при действительно разных распределениях. При одинаковых распределениях проверка проходит успешно, значения попадают в доверительные интервалы. Результаты получены при достаточно хорошем уровне значимости, α = 0.05 стандарт для многих методов и исследований, не требующих «хирургической» точности.

Многие из прошлых методов требовали знания типа распределения ГС. Далее будут приведены реализации методов проверки гипотез о типе распределения. Использовать будем три – нормальное, экспоненциальное и равномерное. Для начала рассмотрим стандартные методы проверки по критериям . Для проверки по критерию понадобится две функции. Первая будет определять оптимальную длину отрезка при разбиении, вторая – реализовывать проверку. Первая функция:

**def** get\_length(x, k):

"""

    Вход - выборка, количество интервалов

    Возвращает оптимальную длину интервала

    """

**return** math.ceil((x.**max**() - x.**min**()) / k)

С помощью нее мы, при выбранном количестве интервалов (выбор, конечно, субъективный), мы получим оптимальное целое число, которое будет длиной наших интервалов. Данную функцию мы будем вызывать из основной. Основная функция требует проверки выборки для определения начальной точки разбиения. Это тоже субъективно и делается визуально. Также опишем функцию проверки максимального значения в выборке, которое также должно попадать в интервал. Код тестовой и основой функции:

**def** interval\_test(x, k, start):

n = get\_length(x, k)

**if** start + n \* k > x.**max**():

**print**('Passed')

**return** True

**def** chi\_test(x, k, alpha, start, version='def'):

"""

    Вход - выборка, количество интервалов, уровень значимости, стартовая позиция разбиения на интервалы и версия

    Функция выполняет проверку по критерию хи квадрат о соответствии выборки нормальному, экспоненциальному и равномерному

    распределению

    """

types = ['Norm', 'Exp', 'R']

mean, d = pe\_norm(x, 'm\_d')

std = d \*\* (1 / 2)

l, err = pe\_exp\_mm(x, 'm')

a, b = pe\_r\_mm(x, 'for\_adj')

n = get\_length(x, k)

**if** interval\_test(x, k, start):

table = []

**for** i **in** **range**(k):

table.append(x[np.where((x > i \* n) & (x < (i + 1) \* n))])

p\_e = [**len**(i) / **len**(x) **for** i **in** table]

p\_t\_n = [stats.norm(loc=mean, scale=std).cdf(start + n)]

p\_t\_e = [1 - math.exp(-l \* (start + n))]

p\_t\_r = [(start + n - a) / (b - a)]

**for** i **in** **range**(1, k):

p\_t\_n.append(stats.norm(loc=mean, scale=std).cdf((i + 1) \* n) - stats.norm(loc=mean, scale=std).cdf((i \* n)))

p\_t\_e.append(1 - math.exp(-l \* ((i + 1) \* n)) - 1 + math.exp(-l \* (i \* n)))

p\_t\_r.append(((i + 1) \* n - a) / (b - a) - ((i \* n - a) / (b - a)))

value\_n, value\_e, value\_r = [], [], []

**for** i **in** **range**(k):

value\_n.append((p\_t\_n[i] - p\_e[i]) \*\* 2 / p\_t\_n[i])

value\_e.append((p\_t\_e[i] - p\_e[i]) \*\* 2 / p\_t\_e[i])

value\_r.append((p\_t\_r[i] - p\_e[i]) \*\* 2 / p\_t\_r[i])

chi\_sq = [**len**(x) \* **sum**(i) **for** i **in** [value\_n, value\_e, value\_r]]

chi\_sq\_cr = [stats.chi2.ppf(1 - alpha, k - 3), stats.chi2.ppf(1 - alpha, k - 2), stats.chi2.ppf(1 - alpha, k - 3)]

**if** version == 'for\_adj':

**return** table, p\_t\_n, p\_t\_e, p\_t\_r, k, alpha

**for** i **in** **range**(3):

**if** chi\_sq[i] < chi\_sq\_cr[i]:

**print**('χ^2 =', **round**(chi\_sq[i], 4), '< χ^2\_cr =', **round**(chi\_sq\_cr[i], 4) ,'\nПринимаем гипотезу f(x) ~ ', types[i], ' с доверительной вероятностью ', 1 - alpha)

**else**:

**print**('χ^2 =', **round**(chi\_sq[i], 4), '≥ χ^2\_cr =', **round**(chi\_sq\_cr[i], 4) ,'\nОтклоняем гипотезу f(x) ~ ', types[i])

Для проверки первой сгенерируем выборку из нормальной ГС и проверим минимальное значение для назначения стартовой точки:

x = stats.norm.rvs(5, 2, 50)

x.**min**()

Вывод:



Рисунок 21. Минимальное значение в сгенерированной нормальной малой выборке

Далее необходимо выбрать начальную точку. Нужно, чтобы минимальное значение находилось примерно в середине первого интервала. Для этого проверим длину, которую получим при делении на отрезки. Если взять 5 отрезков, то получим следующее значение длины, равное 2. Возьмем начальную точку 0.5. Далее необходимо убедиться, что максимальное значение выборки также попадает в интервал. Это сделает соответствующая функция при вызове основной. Вызов и результат работы основной функции:

chi\_test(x, 5, 0.1, 0.5)

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 22. Результаты теста нормальной малой выборки

Результаты показывают корректную работу метода для нормальной ГС. Далее проверим метод на экспоненциальной и равномерной ГС. Так как в экспоненциальной ГС имеются только положительные значения, начальная точка равна 0. Используемая для генерации выборки функция принимает обратное значение параметра распределения, поэтому проводим соответствующие манипуляции. Генерируем выборку и вызываем функцию:

target = 0.09

beta = 1 / target

x = np.random.exponential(beta, 20)

chi\_test(x, 5, 0.1, 0)

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 23. Результаты теста экспоненциальной малой выборки

Видим корректную работу и с экспоненциальным распределением. Перейдем к равномерному. Сгенерируем выборку и проверим минимальное значение:

x = stats.uniform.rvs(1, 10, 50)

**print**(x.**min**(), get\_length(x, 5))

Вывод:



Рисунок 24. Минимальное значение и рекомендуемая длина отрезка для равномерной малой выборки

Назначим нулевое начальное значение и вызовем основную функцию. С данным стартовым значением выборка не прошла проверку максимального значения. Зададим начало интервалов с 1:

chi\_test(x, 5, 0.1, 1)

Функция работает, ее вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 25. Результаты теста равномерной малой выборки

Получены верные результаты, хоть и с большими корректировками, если сравнивать с предыдущими типами распределения. Также видно, что почти прошла проверку гипотеза о нормальности данного распределения.

Далее рассмотрим проверку гипотез по критерию . Для вычислений нам понадобится таблица критических значений показателя (*приложение 4*). Загрузим ее:

w\_square\_table = pd.read\_csv('w\_square.csv')

Далее значения, соответствующие используемой доверительной вероятности, будем использовать в функции, код которой ниже:

**def** kramer\_test(x, alpha, version='default'):

'''

    На вход выборка, уровень значимости параметр версии

    В случае использования метода как первого шага модификации возвращаются результаты проверки на нормальное,

    экспоненциальное и равномерное распределение

    В стандартном случае функция печатает результаты проверки

    '''

x = np.sort(x)

n = **len**(x)

mean, std = pe\_norm(x, 'm\_d')

std \*\*= (1 / 2)

types = ['Norm', 'Exp', 'R']

l, err = pe\_exp\_mm(x, 'm')

a, b = pe\_r\_mm(x, 'for\_adj')

wn, we, wr = 1 / (12 \* n), 1 / (12 \* n), 1 / (12 \* n)

**for** i **in** **range**(n):

wn += ((stats.norm.cdf((x[i] - mean) / std) - (2 \* (i + 1) - 1) / (2 \* n)) \*\* 2)

we += (1 - math.exp(-l \* x[i]) - (2 \* (i + 1) - 1) / (2 \* n)) \*\* 2

wr += ((x[i] - a) / (b - a) - (2 \* (i + 1) - 1) / (2 \* n)) \*\* 2

p = 1 - alpha

w\_cr = w\_square\_table[w\_square\_table.p == 1 - alpha].values[0][1]

**if** version == 'for\_adj':

**return** wn, we, wr

w = [wn, we, wr]

**for** i **in** **range**(3):

**if** w[i] <= w\_cr:

**print**('ω^2 =', **round**(w[i], 4), '≤ ω^2\_cr =', **round**(w\_cr, 4) ,'\nПринимаем гипотезу f(x) ~ ', types[i], 'с доверительной вероятностью ', 1 - alpha)

**else**:

**print**('ω^2 =', **round**(w[i], 4), '> ω^2\_cr =', **round**(w\_cr, 4) ,'\nОтклоняем гипотезу f(x) ~ ', types[i])

Проверяем выборки из тех же ГС, что и в прошлом пункте. Случай нормального распределения с уровнем значимости 0.1:

x = stats.norm.rvs(5, 2, 50)

kramer\_test(x, 0.1)

Получены следующие результаты:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 26. Тест критерия по нормальной малой выборке

Метод достаточно хорошо отработал в случае проверки на экспоненциальное распределение, полученное экспериментальное значение критерия значительно превышает критическое. С равномерным распределением ситуация хуже, в некоторых тестовых вызовах гипотеза на равномерное распределение проходила проверку. В данном случае экспериментальное значение уже не так велико, как в случае экспоненциального распределения. В любом случае, полученное значение при проверке на нормальное распределение минимальное, поэтому делаем вывод, что метод справляется с задачей.

Далее проверим экспоненциальное распределение:

target = 0.09

beta = 1 / target

x = np.random.exponential(beta, 20)

kramer\_test(x, 0.1)

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 27. Тест критерия по экспоненциальной малой выборке

Метод точно сработал в случае гипотезы о равномерном распределении. В случае проверки на нормальность экспериментальное значение достаточно близко к критическому. Но минимальное значение критерия все же у гипотезы о экспоненциальном распределении, поэтому метод также справился с задачей.

Далее генерируем и проверяем выборку из равномерной ГС:

x = stats.uniform.rvs(1, 5, 50)

kramer\_test(x, 0.1)

Имеем вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 28. Тест критерия по равномерной малой выборке

В данной ситуации метод не смог отклонить одну неверную гипотезу. Определить наиболее верную можно экспериментальному значению, которое меньше в случае гипотезы о равномерной ГС. С учетом данного нюанса считаем метод по крайней мере применимым в случае равномерного распределения.

Теперь рассмотрим модификации двух вышеописанных методов. Сначала модификация критерия . Для его реализации была использована таблица значений интегральной функции Лапласа. Дело в том, что критическое значение определяется как аргумент от этой функции, а не как результат. Модули Python не позволяют выполнить такие вычисления. Поэтому было принято решение использовать таблицу. Код функции:

table\_laplace = pd.read\_csv('laplace.csv')

**def** chi\_sq\_adj(x, alpha, n, p\_n, p\_e, p\_r, k):

types = ['Norm', 'Exp', 'R']

n\_len = [**len**(i) **for** i **in** n]

m\_n, m\_e, m\_r = [], [], []

**for** i **in** **range**(k):

m\_n.append(**sum**(n\_len) \* p\_n[i])

m\_e.append(**sum**(n\_len) \* p\_e[i])

m\_r.append(**sum**(n\_len) \* p\_r[i])

sigma\_n, sigma\_e, sigma\_r = [], [], []

**for** i **in** **range**(k):

sigma\_n.append((**sum**(n\_len) \* p\_n[i] \* (1 - p\_n[i])) \*\* (1 / 2))

sigma\_e.append((**sum**(n\_len) \* p\_e[i] \* (1 - p\_e[i])) \*\* (1 / 2))

sigma\_r.append((**sum**(n\_len) \* p\_r[i] \* (1 - p\_r[i])) \*\* (1 / 2))

v\_n, v\_e, v\_r = [], [], []

**for** i **in** **range**(k):

v\_n.append(((n\_len[i] - m\_n[i]) / sigma\_n[i]) \*\* 2)

v\_e.append(((n\_len[i] - m\_e[i]) / sigma\_e[i]) \*\* 2)

v\_r.append(((n\_len[i] - m\_r[i]) / sigma\_r[i]) \*\* 2)

v\_n, v\_e, v\_r = (**sum**(v\_n) / k) \*\* (1 / 2), (**sum**(v\_e) / k) \*\* (1 / 2), (**sum**(v\_r) / k) \*\* (1 / 2)

s = [((2 \* k) \*\* (1 / 2)) \* (v\_n - 1), ((2 \* k) \*\* (1 / 2)) \* (v\_e - 1), ((2 \* k) \*\* (1 / 2)) \* (v\_r - 1)]

f = 0.5 - alpha

s\_cr = table\_laplace[table\_laplace.F < f].**max**()['x']

s\_plus = 0

**for** i **in** **range**(3):

**if** s[i] <= s\_cr:

**print**(types[i], ': S =', **round**(s[i], 4), '≤ S\_cr =', **round**(s\_cr, 4) ,'\nПринимаем гипотезу f(x) ~', types[i], 'с доверительной вероятностью ', 1 - alpha)

**else**:

**print**('S =', **round**(s[i], 4), '> S\_cr =', **round**(s\_cr, 4) ,'\nОтклоняем гипотезу f(x) ~ ', types[i])

Перед вызовом функции необходимо вызвать классическую версию критерия с параметром 'for\_adj'. Результаты уже передаем в рассматриваемую функцию. Начнем проверку с того же нормального распределения:

x = stats.norm.rvs(5, 2, 50)

n, pn, pe, pr, k, alpha = chi\_test(x, 5, 0.1, 0.5, 'for\_adj')

chi\_sq\_adj(x, alpha, n, pn, pe, pr, k)

Вывод функции:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 29. Тест нормальной малой выборки

Классическая версия хорошо справлялась с проверкой на нормальность. Модификация также справилась хорошо. Проверим экспоненциальное распределение:

target = 0.09

beta = 1 / target

x = np.random.exponential(beta, 50)

n, pn, pe, pr, k, alpha = chi\_test(x, 5, 0.1, 0, 'for\_adj')

chi\_sq\_adj(x, alpha, n, pn, pe, pr, k)

Результаты:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 30. Тест экспоненциальной малой выборки

Критерий также однозначно определил верную гипотезу, работоспособность проверена. Последний проверяемый тип распределения – равномерный:

x = stats.uniform.rvs(1, 5, 50)

n, pn, pe, pr, k, alpha = chi\_test(x, 5, 0.1, 1, 'for\_adj')

chi\_sq\_adj(x, alpha, n, pn, pe, pr, k)

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 31. Тест равномерной малой выборки

В данном случае равномерного распределения появились еще большие проблемы. Все три гипотезы были отклонены, поэтому в данной ситуации применять метод нельзя.

Перейдем к методу модифицированного критерия . Для вычислений нам понадобится еще одна таблица критических значений (*приложение 6*). Внутри основной функции вызываем базовую для данного метода. Код функции для модификации:

w\_adj\_table = pd.read\_csv('w\_adj.csv')

**def** kramer\_test\_adj(x, alpha):

types = ['Norm', 'Exp', 'R']

n = **len**(x)

w\_n, w\_e, w\_p = kramer\_test(x, alpha, 'for\_adj')

w = [(1 / (12 \* n) + w\_n) \*\* (1 / 2), (1 / (12 \* n) + w\_e) \*\* (1 / 2), (1 / (12 \* n) + w\_p) \*\* (1 / 2)]

w\_cr = w\_adj\_table[w\_adj\_table.p == 1 - alpha].values[0, 1]

**for** i **in** **range**(3):

**if** w[i] <= w\_cr:

**print**('G =', **round**(w[i], 4), '≤ G\_cr =', **round**(w\_cr, 4) ,'\nПринимаем гипотезу f(x) ~', types[i], 'с доверительной вероятностью ', 1 - alpha)

**else**:

**print**('G =', **round**(w[i], 4), '> G\_cr =', **round**(w\_cr, 4) ,'\nОтклоняем гипотезу f(x) ~', types[i])

Проверяем нормальное распределение:

x = stats.norm.rvs(5, 2, 50)

kramer\_test\_adj(x, 0.1)

Результат:

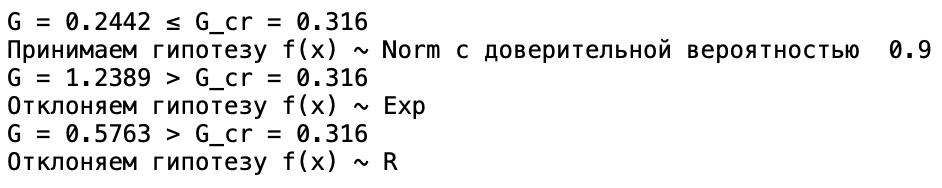


Рисунок 32. Результаты теста нормальной малой выборки

Проверка пройдена, верная гипотеза принята. Экспоненциальный случай:

target = 0.09

beta = 1 / target

x = np.random.exponential(beta, 50)

kramer\_test\_adj(x, 0.1)

Вывод:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 33. Тест критерия по экспоненциальной малой выборке

Получаем подтверждение корректной работы и в данном случае. Равномерное распределение:

x = stats.uniform.rvs(1, 5, 50)

kramer\_test\_adj(x, 0.1)

Результат выполнения:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 34. Тест критерия по равномерной малой выборке

В отличие от прошлого метода, данный метод позволяет корректно проверить гипотезу о равномерном распределении. Будем считать его наилучшим в данном случае.

Последний метод проверки гипотез – критерий Шапиро-Уилка, с помощью которого проверяют распределение на нормальность. Код функции, определяющей критическое значение:

**def** find\_critical(x, alpha):

n = **len**(x)

**if** alpha == 0.1:

**return** (-0.0084 \* n \*\* 4 + 1.2513 \* n \*\* 3 - 70.724 \* n \*\* 2 + 1890 \* n + 73840) / 100000

**elif** alpha == 0.05:

**return** (-0.0113 \* n \*\* 4 + 1.656 \* n \*\* 3 - 91.88 \* n \*\* 2 + 2408.6 \* n + 67608) / 100000

**elif** alpha == 0.01:

**return** (-0.0148 \* n \*\* 4 + 2.1875 \* n \*\* 3 - 122.61 \* n \*\* 2 + 3257.3 \* n + 55585) / 100000

И код основной функции:

**def** shapiro\_test(x, alpha):

x = np.sort(x)

n = **len**(x)

z = []

a0 = 0.899 / ((n - 2.4) \*\* 0.4162) - 0.02

a = []

**for** i **in** **range**(n):

z.append((n - 2 \* (i + 1) + 1) / (n - 0.5))

a.append(a0 \* (z[i] + 1483 / ((3 - z[i]) \*\* 10.845) + (71.6 \* 10 \*\* (-10)) / ((1.1 - z[i]) \*\* 8.26)))

mean, sigma = pe\_norm(x, 'm\_d')

w = []

**for** i **in** **range**(n):

w.append(a[n - i - 1]\*(x[n-i - 1] - x[i]))

w = **sum**(w)

sigma = [(i - mean) \*\* 2 **for** i **in** x]

sigma = **sum**(sigma)

w \*\*= 2

w /= sigma

w\_cr = find\_critical(x, alpha)

**if** w > w\_cr:

**print**('W =', **round**(w, 4), '> W\_cr =', **round**(w\_cr, 4) ,'\nПринимаем гипотезу f(x) ~ Norm с доверительной вероятностью ', 1 - alpha)

**return** True

**else**:

**print**('W =', **round**(w, 4), '≤ W\_cr =', **round**(w\_cr, 4) ,'\nОтклоняем гипотезу f(x) ~ Norm')

Сначала проверим его работу на малой нормальной выборке, размер которой меньше, чем в прошлых методах, это вызвано ограничениями по максимальному размеру выборки для данного метода:

x = stats.norm.rvs(loc=5, scale=2, size=30)

shapiro\_test(x, 0.1)

Результат:

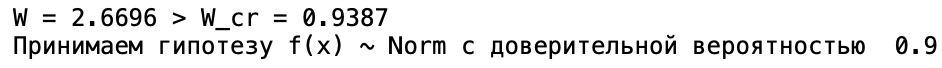


Рисунок 35. Тест критерия нормальности по малой выборке

Имеется достаточно большое различие экспериментального и критического значения, что для нас является положительным моментом.

В конце раздела рассмотрим реализацию более комплексных методов, которые будем рассматривать на реальных примерах. Полученные результаты дадут основания делать уже более осмысленные и сложные выводы, чем методы из прошлых пунктов. Первый метод – регрессионный анализ. Рассмотрим однофакторный случай, далее перейдем к многофакторному. Рассмотрим пример клинических испытаний с использованием четырех разных видов терапии. Каждый вид образует группу из 15 пациентов и обозначается как *a, b, c, d* соответственно. Для каждого пациента имеется значение исследуемого показателя. Считаем данный набор данных из файла:

df = pd.read\_csv('1way\_clinic.csv')

Наша задача – проверить гипотезу о том, что результаты терапии имеют статистически значимые различия, для этого должны статистически значимо отличаться МО ГС, из которых получены выборки для каждой терапии:

Хотим получить графики попарного сравнения групп, F и p значения. Код функции:

**def** one\_way\_anova(df, group, value):

"""

    Аргументы: df - выборка, имеющая разделение на группы,

    group - столбец, определяющий группу

    value - столбец зависимых значений

    Производится сравнение нескольких групп между собой.

    H0 - средние в группах не отличаются

    H1 - хотя бы одно среднее значительно отличается

    Вывод: графики, f-value, p-value(т.е. P(>f))

    """

df\_bg = **len**(df[group].unique()) - 1

df\_wg = **len**(df[group]) - df\_bg - 1

group\_sizes = []

groups = df[group].unique()

**for** gr **in** groups:

group\_sizes.append(df[df[group] == gr])

**for** gr **in** group\_sizes:

gr.index = **range**(0, **len**(gr))

means = []

**for** gr **in** group\_sizes:

means.append(gr.mean())

average = **sum**(means) / **len**(means)

ssb = 0

**for** i **in** **range**(**len**(means)):

ssb += (means[i].value - average) \*\* 2 \* **len**(group\_sizes[i])

ms\_bg = ssb / df\_bg

ssw = 0

**for** i **in** **range**(**len**(group\_sizes)):

**for** j **in** **range**(**len**(group\_sizes[i])):

ssw += (group\_sizes[i].value[j] - means[i]) \*\* 2

ms\_wg = ssw / df\_wg

f\_value = ms\_bg / ms\_wg

p\_value = 1 - stats.f.cdf(f\_value, df\_bg, df\_wg)[0]

fig, ax = plt.subplots(**len**(groups) - 1, **len**(groups) - 1)

list\_df = groups

**print**('F =', f\_value[0], ', p-value =', p\_value)

**for** i **in** **range**(**len**(list\_df) - 1):

**for** j **in** **range**(i + 1, **len**(list\_df)):

df\_test1 = df[df.group == list\_df[i]]

df\_test2 = df[df.group == list\_df[j]]

ax[i][j - 1].boxplot([df\_test1.value, df\_test2.value])

ax[i][j - 1].set\_xticklabels([list\_df[i],list\_df[j]])

fig.set\_size\_inches([11, 11])

fig.savefig('one-way.png')

**return** f\_value[0], p\_value

Используем ее для анализа нашего набора данных:

f, p = one\_way\_anova(df, 'group', 'value')

Получаем следующие результаты:



Рисунок 36. Полученные f-value и p-value

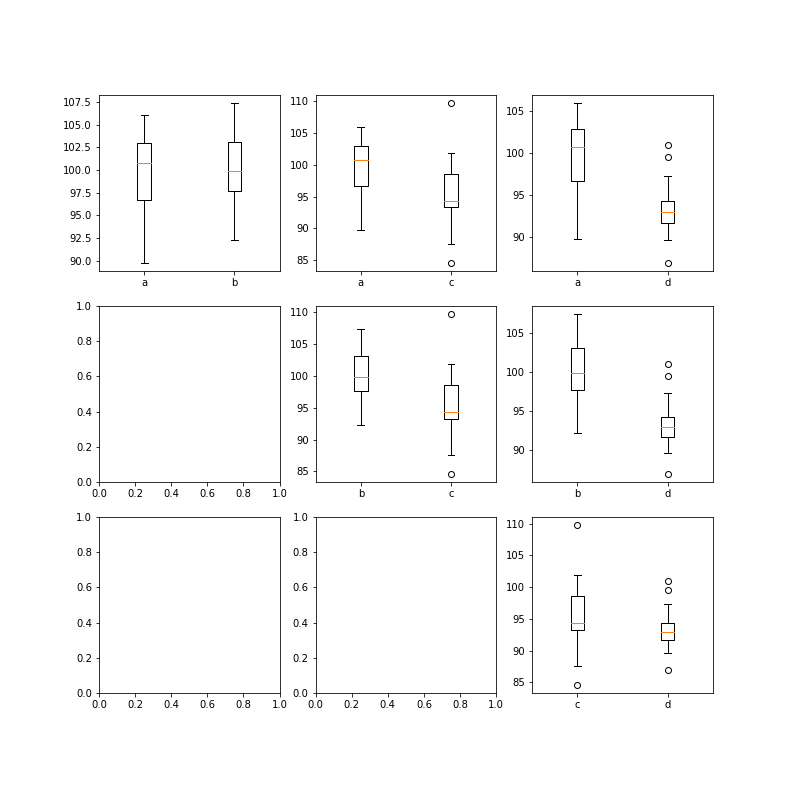


Рисунок 37. Графическое сравнение различных уровней фактора

Однофакторный дисперсионный анализ, в случае работы с тремя и более уровнями фактора, не дает точного ответа на вопрос о том, какие именно уровни (группы) отличаются. Он позволяет только установить наличие статистического отличия. Рассуждать о конкретных отличиях можно, например, по графикам. В нашем случае видим достаточно сильные отличия группы *a* от *d* и *b* от *d*. Дальнейшую проверку предположений можно произвести по t-критерию или другим методам парного сравнения.

Случай многофактороного ДА рассмотрим на примере реализации конкретной задачи, а не функции, как было до этого. В этот раз будем использовать другой набор данных, а именно результаты других клинических испытаний, где молодые и взрослые люди тестировали препарат с различной дозировкой действующего вещества – высокой и низкой. Таким образом, имеется два фактора – возраст и дозировка, и предполагаемое зависимое значение исследуемого показателя. В каждой группе 15 человек. Условия применения соблюдены. Проверяем как воздействие факторов по-отдельности, так и в совокупности. Загрузим данные:

df\_test = pd.read\_csv('2way\_clinic.csv')

Код, реализующий данный метод на нашем наборе данных:

groups = ['group1', 'group2']

df\_first = **len**(df\_test[groups[0]].unique()) - 1

df\_second = **len**(df\_test[groups[1]].unique()) - 1

df\_third = 1

first\_group = df\_test['group1'].unique()

second\_group = df\_test['group2'].unique()

average1 = []

average2 = []

average3 = []

group\_sizes1 = []

group\_sizes2 = []

group\_sizes3 = []

**for** val **in** first\_group:

average1.append(df\_test[df\_test['group1'] == val].mean())

group\_sizes1.append(**len**(df\_test[df\_test['group1'] == val]))

average\_global1 = **sum**(average1) / **len**(average1)

**for** val **in** second\_group:

average2.append(df\_test[df\_test['group2'] == val].mean())

group\_sizes2.append(**len**(df\_test[df\_test['group2'] == val]))

average\_global2 = **sum**(average2) / **len**(average2)

average3 = []

**for** gr **in** first\_group:

**for** val **in** second\_group:

average3.append(df\_test[(df\_test['group1'] == gr) & (df\_test['group2'] == val)].mean())

group\_sizes3.append(**len**(df\_test[(df\_test['group1'] == gr) & (df\_test['group2'] == val)]))

average\_global3 = **sum**(average3) / **len**(average3)

ssb1 = 0

ssb1 = group\_sizes1[0] \* (average1[0][0] - average\_global1[0]) \*\* 2

ssb1 += group\_sizes1[1] \* (average1[1][0] - average\_global1[0]) \*\* 2

ms\_bg1 = ssb1 / df\_first

ssb2 = 0

ssb2 = group\_sizes2[0] \* (average2[0][0] - average\_global2[0]) \*\* 2

ssb2 += group\_sizes2[1] \* (average2[1][0] - average\_global2[0]) \*\* 2

ms\_bg2 = ssb2 / df\_second

ssb3 = 0

**for** i **in** **range**(4):

ssb3 += group\_sizes3[i] \* (average3[i] - average\_global3) \*\* 2

ssb3 = ssb3[0]

ms\_bg3 = ssb3 / df\_third

def\_global = **len**(df\_test) - **len**(group\_sizes1) - **len**(group\_sizes2)

variances = []

group\_sizes\_global = []

**for** val **in** first\_group:

**for** gr **in** second\_group:

variances.append(df\_test[(df\_test['group1'] == val) & (df\_test['group2'] == gr)].var())

group\_sizes\_global.append(**len**(df\_test[(df\_test['group1'] == val) & (df\_test['group2'] == gr)]))

variances = np.array(variances)

ssw = 0

**for** i **in** **range**(**len**(group\_sizes\_global)):

ssw += (group\_sizes\_global[i] - 1) \* variances[i]

ssw = ssw[0]

ms\_wg = ssw / def\_global

f\_first = ms\_bg1 / ms\_wg

f\_second = ms\_bg2 / ms\_wg

f\_third = ms\_bg3 / ms\_wg

p\_value1 = **round**(1 - stats.f.cdf(f\_first, df\_first, def\_global), 5)

p\_value2 = **round**(1 - stats.f.cdf(f\_second, df\_second, def\_global), 5)

p\_value3 = **round**(1 - stats.f.cdf(f\_third, df\_third, def\_global), 5)

sns.catplot(x='group1', y='0', data=df\_test, kind='point', hue='group2', capsize=0.2)

plt.savefig('anova.png', dpi=400, bbox\_inches='tight')

plt.show()

Получаем следующие F и p значения:

**print**('F\_age =', f\_first, 'p\_age =', p\_value1, '\nF\_dose =', f\_second, 'p\_dose =', p\_value2, '\nF\_agg =', f\_third, 'p\_agg', p\_value3)

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 38. f-value и p-value для каждого фактора и межфакторного взаимодействия

И график:

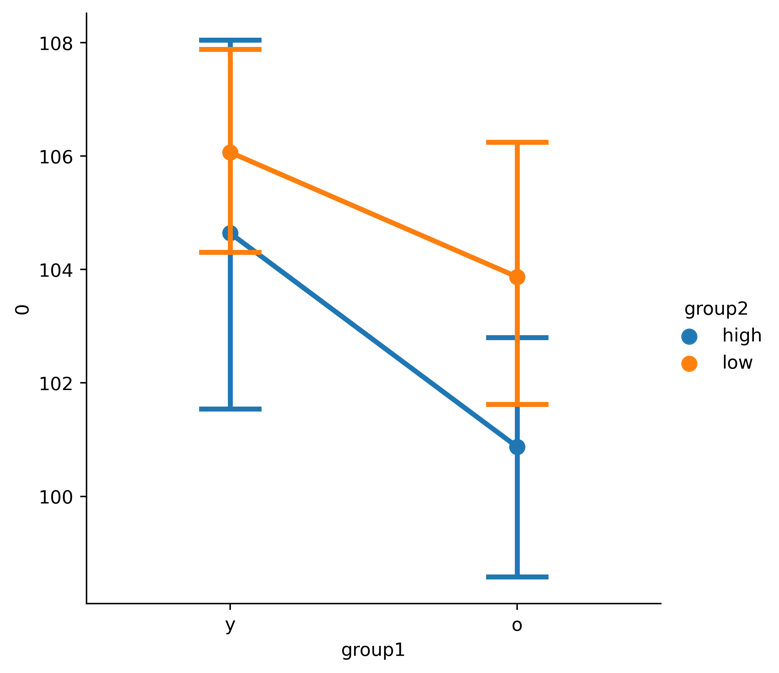


Рисунок 39. Графическое представление результатов работы метода

В данном исследовании мы принимаем различия статистически значимыми, если p-значение не превышает 0.05. Поэтому делаем вывод, что на результаты исследований влияет возраст и взаимодействия фактора возраста и дозировки, причем, согласно полученным значениям, взаимодействие факторов оказывает значительно большее влияние, чем фактор возраста в отдельности. Полученные результаты можно интерпретировать так: исследуемый показатель зависит от возраста, у молодых людей его значение выше. Но более сильная зависимость от совместного влияния возраста и дозировки – у молодых людей с высокой дозировкой показатель почти равен показателю у взрослых с высокой дозировкой.

Последний оставшийся метод – регрессионный анализ, если точнее, то одномерная и многомерная линейная регрессия. Наша функция будет работать в обоих случаях. Данные, с которыми мы будем работать, представляют собой социальную статистику в США. А именно средние значения бедности (как зависимой переменной) и процента городского населения, процент белокожего населения, процент людей с высшим образованием и процент семей, управляемых женщинами (независимые переменные). В одномерном случае рассмотрим зависимость только от процента людей с высшим образованием. В наборе данных 51 штат, включая Вашингтон (округ Колумбия) как отдельный штат. Загрузим набор данных:

df = pd.read\_csv('states.csv')

Перейдем к функции. Если быть точнее, их будет две. Одна будет строить модель, а вторая ее проверять по критериям качества, озвученным во втором разделе работы. Используем матричные операции и строим модель с помощью функции:

**def** mult\_linregr(df, groups, x):

x = np.array(df[x])

intercept = np.array([1 **for** i **in** **range**(**len**(df))])

coeff = []

**for** i **in** groups:

coeff.append(df[i])

g\_t = [intercept]

**for** gr **in** coeff:

g\_t.append(gr)

g\_t = np.array(g\_t)

g = g\_t.transpose()

a = **list**(**map**(**lambda** x: **round**(x, 3),

(np.linalg.matrix\_power(g\_t.dot(g), -1).dot(g\_t)).dot(x)))

**return** a, groups

На выходе получаем вектор коэффициентов, который используем в тестах. Будем проверять качество модели по F-значению и коэффициенту детерминации. Функция тестирования:

**def** test\_model(df, x, model, group, alpha):

x = np.array(df[x])

model\_values = []

**for** i **in** **range**(**len**(df)):

summ = model[0]

**for** j **in** **range**(1, **len**(model)):

summ += model[j] \* df[group[j - 1]][i]

model\_values.append(summ)

ssres = []

**for** i **in** **range**(**len**(df)):

ssres.append((model\_values[i]-x[i])\*\*2)

ssres = **sum**(ssres)

sstotal = []

**for** i **in** **range**(**len**(df)):

sstotal.append((x[i] - x.mean())\*\*2)

sstotal = **sum**(sstotal)

r2 = 1 - ssres/sstotal

r2\_adj = 1 - (1 - r2) \* (**len**(df) - 1) / (**len**(df) - **len**(group))

ssfac = []

**for** i **in** **range**(**len**(df)):

ssfac.append((model\_values[i] - x.mean())\*\*2)

ssfac = **sum**(ssfac)

f\_value = ssfac \* (**len**(df) - **len**(group) - 1) / (ssres \* **len**(group))

f\_cr = stats.f.ppf(1 - alpha, **len**(group), **len**(df) - **len**(group) - 1)

final\_model = 'y\_model = ' + **str**(model[0]) + ' +'

**for** i **in** **range**(1, **len**(model)):

final\_model += ' (' + **str**(model[i]) + group[i-1] + ') +'

final\_model = final\_model[:**len**(final\_model) - 2]

**if** (f\_value > f\_cr) **and** (r2\_adj > 0.5):

**print**(final\_model)

**print**('F =', **round**(f\_value, 4), '> F\_cr =', **round**(f\_cr, 4),

': passed')

**print**('R\_2adj =', **round**(r2\_adj, 4), ': passed')

**else**:

**print**('Not passed')

**print**('F =', **round**(f\_value, 4), ', F\_cr =', **round**(f\_cr, 4))

**print**('R\_2adj =', **round**(r2\_adj, 4))

Рассмотрим одномерный случай. Проверим зависимость уровня бедности от процента людей с высшим образованием при уровне значимости 0.1. Вызов функций:

model, group = mult\_linregr(df, ['hs\_grad'], 'poverty')

test\_model(df, 'poverty', model, group, 0.1)

Получаем следующие результаты:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 40. Оптимальная модель зависимости ЗП и одной НП

Так как модель прошла проверку на качество, мы можем построить график:

x = np.array(df['hs\_grad'])

y = np.array(df['poverty'])

y\_test = np.array(64.781 - 0.621 \* x)

plt.scatter(x, y)

plt.plot(x, y\_test, c='r')

plt.xlabel('% людей с высшим образованием')

plt.ylabel('Уровень бедности, значения модели')

plt.savefig('lin\_r.png', dpi=400, bbox\_inches='tight')

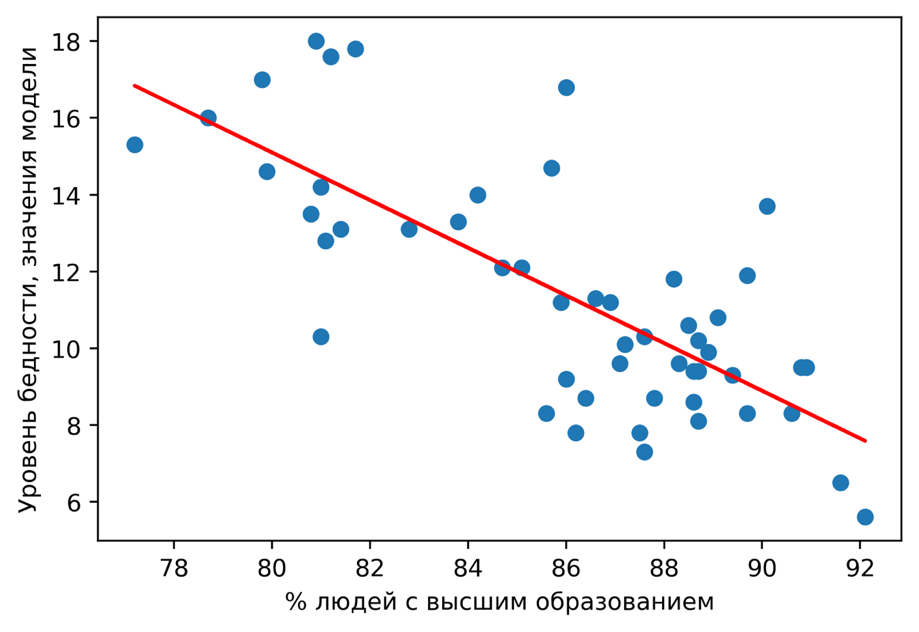


Рисунок 41. Фактические данные и аппроксимирующая модельная прямая

Но более правильным будет рассмотреть регрессионный анализ, включающий все имеющиеся предикторы. Это задача множественной линейной регрессии. В данном случае значения аппроксимируются плоскостью, поэтому график построить не удастся. Но зато мы сможем определить наиболее качественную модель из всех возможных. Но для начала проведем проверку на мультиколлинеарность, то есть сравним значения КК между нашими предикторами:

sns.heatmap(df.corr(), annot=True)

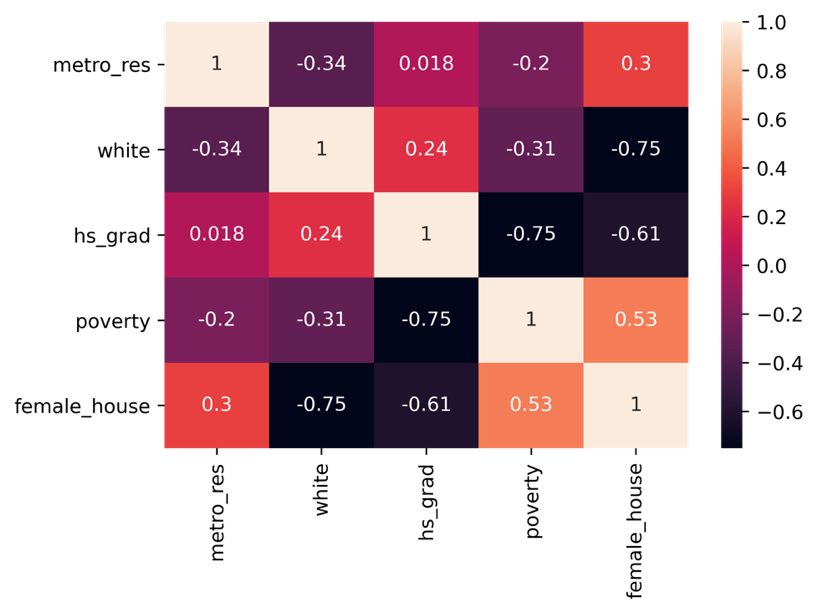


Рисунок 42. Проверка данных на мультиколлинеарность

Наблюдаем достаточно сильную корреляцию между переменной female\_house и переменными white и hs\_grad. Поэтому female\_house – первая переменная-кандидат на проверку. Остальные значения в допустимых пределах.

Функцию используем ту же, в качестве аргумента-списка предикторов передаем все, что у нас есть:

model, group = mult\_linregr(df, ['metro\_res', 'white', 'hs\_grad',

'female\_house'], 'poverty')

test\_model(df, 'poverty', model, group, 0.1)

Результат:

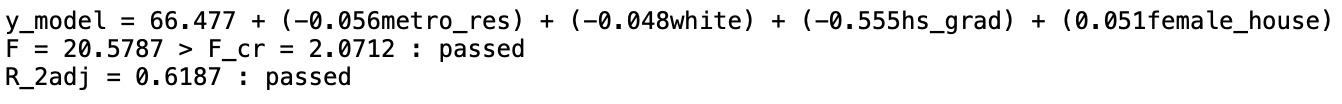


Рисунок 43. Первичная модель множественной линейной регрессии

Видим, что дополнительные переменные улучшили качество модели. Теперь будем исключать переменные и проверять, увеличится ли значения коэффициента детерминации. Первой исключим из модели переменную female\_house:

model, group = mult\_linregr(df, ['metro\_res', 'white', 'hs\_grad'], 'poverty')

test\_model(df, 'poverty', model, group, 0.1)

Получаем положительные результаты:

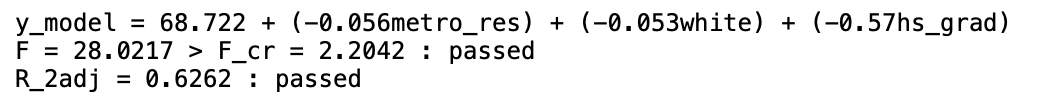


Рисунок 44. Повторный тест первичной модели с удалением переменной female\_house

Коэффициент детерминации увеличился. Проведем еще несколько проверок, передавая функции различные списки проверяемых предикторов:

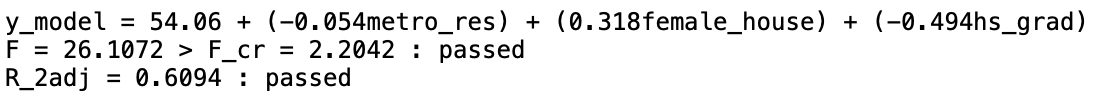


Рисунок 45. Повторный тест первичной модели с удалением переменной white

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 46. Повторный тест первичной модели с удалением переменной hs\_grad

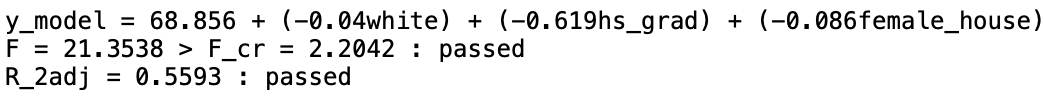


Рисунок 47. Повторный тест с удалением переменной metro\_res

Видим, что значение КД не увеличилось. Теперь проводим исключение уже из самой точной модели:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 48. Повторный тест оптимальной модели с удалением переменной hs\_grad

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 49. Повторный тест оптимальной модели с удалением переменной white

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 50. Повторный тест оптимальной модели с удалением переменной metro\_res

Увеличения значения КД не получили. Вывод – лучшая модель была получена после удаления переменной female\_house. Ее можно использовать для дальнейших исследований и предсказаний.

# **Заключение**

В данной работе рассматривался статистический анализ выборок малого объема. Изучались и сравнивались статистические методы, которые помогают в решении задач в условиях ограниченного количества экспериментальных или исследовательских данных. Вопрос малых выборок затрагивается в достаточно небольшом количестве публикаций и научных трудов, которые содержат достаточно обширную статистическую теорию, но не всегда полноценно охватывают вопросы прикладного характера. В это же время проблема малых выборок часто встречается именно на практике. Также часто невозможно или не целесообразно проводить дополнительные исследования для увеличения объема получаемой информации. Поэтому в таких ситуациях необходимо использовать специальные методы, которые даже по ограниченной выборке дают адекватные и близкие к истине результаты. В данной работе исследуются малые выборки, объем которых не превышает 200 элементов. Из многочисленных статистических методов и критериев были выбраны самые основные и важные, которые позволяют решать обширный список задач. Была произведена попытка сохранения баланса между теоретическим обоснованием и практическими аспектами. Каждый выбранный метод был реализован программным образом и протестирован на различных входных данных. Полученные результаты позволили включить их в работу.

Главной задачей работы был поиск и выбор оптимальных методов для работы с малыми выборками установленного объема. Изучая различные источники, задачу удалось разделить на три подзадачи.

Первым пунктом исследования стали методы, позволяющие проводить точечное оценивание, то есть по малой выборке получать возможные значения какого-либо параметра или какой-либо характеристики ГС, из которой выборка была извлечена. Были рассмотрены три метода точечного оценивания: максимального правдоподобия, моментов и наименьших квадратов. В результате исследования теории мы выяснили, что для нормального распределения все методы дают одинаковые оценки параметров (с учетом коррекции в ММП), в случае экспоненциального распределения теоретически и на практике лучшие результаты показал метод моментов, однако в случае равномерного – метод максимального правдоподобия.

Вторая подзадача заключалась в интервальном оценивании. Она описана кратко на примере построения доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии. Главное здесь было отразить принцип построения ДИ, который повторяется из метода в метод, сменяя только критерии работы и используемые статистики. Стоит еще раз упомянуть, что для малых выборок интервальное оценивание более предпочтительное, чем точечное. Поэтому желательно использовать оба типа оценивания в исследованиях, чтобы была возможность сравнить результаты и сделать какие-либо полезные выводы.

Третья, самая обширная и главная подзадача – проверка гипотез и взаимосвязей в данных. Этой теме посвящена почти половина теоретического материала, а обосновано это исключительной полезностью, гибкостью и универсальностью, которую обеспечивают рассматриваемые методы. Наиболее подробно были рассмотрены методы проверки гипотез о типах распределения и, так называемые, комплексные методы или методы определения взаимосвязей. Случай проверки гипотез о типе распределения объясняется тем, что многие статистические методы требуют знания типа распределения. В то же время, зная тип распределения, можно избежать использования некоторых методов, ограничившись базовыми зависимостями для этого типа и его свойствами. Поэтому в работе присутствует целых пять методов проверки подобных гипотез. Два из них хорошо работают с выборками, объем которых не менее 50 элементов, а их модификации можно успешно применять и с более малыми выборками, также приведен один из мощнейших критериев проверки нормальности распределения по малой выборке. Совместное использование нескольких методов может дать достаточно точный ответ о типе распределения по имеющейся малой выборке. Огромным плюсом данных методов является то, что в каждом из них мы имеем численное выражение вероятности того, что наши предположения верны.

Для исследования зависимостей в данных было предложено два мощных и полезных метода – дисперсионный анализ и линейная регрессия. ДА позволил нам проверять влияние различных градаций качественной и независимой переменной на предполагаемую зависимую количественную. Мы рассмотрели случай изучения влияния как одного, так и совокупности факторов. ЛР позволила определить тип и характер зависимости между количественными переменными. Был приведен как одномерный, так и множественный случай. Также данный метод позволяет выполнять задачи построения оптимальной модели зависимости и прогнозирования значений. Каждый из этих методов по-своему полезен и может быть качественно применен к выборкам установленного в работе объема.

Заключительная часть работы посвящена реализации выбранных методов на языке Python. В работе использование готовых статистических функций или моделей намеренно сведено к минимуму, оставляя лишь функции и методы для создания визуализаций и генерации выборок, что к нашим задачам имеет лишь косвенное отношение. Был продемонстрирован оригинальный код каждого рассматриваемого метода и результат его выполнения. В целом почти все методы показали достойные результаты в случае работы с нормальным, экспоненциальным и равномерным распределением.

Подводя итог хочется еще раз подчеркнуть, что в работе собрана лишь часть методов, применяемых в работе с малыми выборками. Методы, попавшие в работу, показались автору наиболее полезными, а моментами интересными и необычными. Тем не менее, получилось рассмотреть достаточно обширный список тем, предложить несколько решений в некоторых задачах, реализовать, протестировать и проверить правильность включения методов в работу. Хочется верить, что данная работа, как и множество других, послужит хорошим примером взгляда отдельного человека на проблему статистического анализа малых выборок и, вероятно, внесет какие-либо улучшения в практический аспект данного вопроса.

# **Список используемых источников**

1. Сухорученков Б. И. Анализ малой выборки. Прикладные статистические методы. – М.: Вузовская книга, 2010.
2. Гаскаров Д. В, Шаповалов В. И. Малая выборка. – М.: Статистика, 1978.
3. Лебедев А. В., Фадеева Л. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М., 2018
4. Юденков В. А. Дисперсионный анализ. – Минск: Бизнесофсет, 2013
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968
6. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технически приложений. – М.: Наука, 1965
7. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Физика, 2002
8. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003
9. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968
10. Уилкс С. Математическая статистика. – М: Наука, 1967
11. Ковалев Е. А., Медведев Г. А. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов. – М.: Юрайт, 2016
12. Володин Н. И. Теория вероятностей и ее применения, – Казань, 1967
13. Петров А. А. Проверка гипотезы о нормальности распределений по малым выборкам. ДАН, 1951, т. 76, № 3, с. 355-358
14. Петров А. А. Проверка гипотезы о типе распределения по данным малых выборок. – В кн.: Сборник научных работ кафедры математики МИФИ, вып. 1. М., Атомиздат, 1958, с. 121-136
15. Петров А. А. Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам. – Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, № 2, с. 248-270
16. Казакявичюс К.А. Приближённые формулы для статистической обработки результатов механических испытаний. – Заводская лаборатория, 1988, т. 5, № 12, с. 82-85
17. ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения.
18. Домбровский В. В. Эконометрика. – Томск, НФПК, 2016
19. Kolmogorov A. N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. – Giornale dell’ Istituto Italiano degli Attuari, 1933, N 4
20. J. J. McCall. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 84, No. 1 (Feb., 1970), pp. 113-126
21. Welkowitz J. Introductory Statistics for the Behavioral Sciences, 2006
22. Greene, J. and D’Oliveira, M. (2005) Learning to Use Statistical Tests in Psychology. McGraw-Hill International, Berkshire.
23. А.К. Kurtz, S.T. Мауо (1979, р.417)
24. <https://ru.wikipedia.org>
25. <https://en.wikipedia.org>
26. <http://www.machinelearning.ru>
27. <https://pandas.pydata.org>
28. <https://www.python.org/doc>
29. <https://seaborn.pydata.org>
30. <https://numpy.org>
31. <https://matplotlib.org/3.5.0/api/_as_gen/matplotlib.pyplot>
32. <https://scipy.org>

# **Приложения**

1. Таблица для квантилей

|  |  |
| --- | --- |
| Доверительная вероятность P | Квантиль |
| 50,00 | 0 |
| 84,13 | 1 |
| 90,00 | 1,282 |
| 95,00 | 1,645 |
| 99,00 | 2,326 |

1. Таблица коэффициентов для критерия Шапиро-Уилка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***n*** | ***i*** | | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **3** | 7071 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **4** | 6872 | 1677 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **5** | 6646 | 2413 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **6** | 6431 | 2806 | 0875 |  |  |  |  |  |  |  |
| **7** | 6233 | 3031 | 1401 |  |  |  |  |  |  |  |
| **8** | 6052 | 3164 | 1743 | 0561 |  |  |  |  |  |  |
| **9** | 5888 | 3244 | 1976 | 0947 |  |  |  |  |  |  |
| **10** | 5739 | 3291 | 2141 | 1224 | 0399 |  |  |  |  |  |
| **11** | 5601 | 3315 | 2260 | 1429 | 0695 |  |  |  |  |  |
| **12** | 5475 | 3325 | 2347 | 1586 | 0922 | 0303 |  |  |  |  |
| **13** | 5359 | 3325 | 2412 | 1707 | 1099 | 0539 |  |  |  |  |
| **14** | 5251 | 3318 | 2460 | 1802 | 1240 | 0727 | 0240 |  |  |  |
| **15** | 5150 | 3306 | 2495 | 1878 | 1353 | 0880 | 0433 |  |  |  |
| **16** | 5056 | 3290 | 2521 | 1939 | 1447 | 1005 | 0593 | 0196 |  |  |
| **17** | 4968 | 3237 | 2540 | 1988 | 1524 | 1109 | 0725 | 0359 |  |  |
| **18** | 4886 | 3253 | 2553 | 2027 | 1587 | 1197 | 0837 | 0496 | 0173 |  |
| **19** | 4808 | 3232 | 2561 | 2059 | 1641 | 1271 | 0932 | 0612 | 0303 |  |
| **20** | 4734 | 3211 | 2565 | 2085 | 1686 | 1334 | 1013 | 0711 | 0422 | 0140 |
| **21** | 4634 | 3185 | 2578 | 2119 | 1736 | 1399 | 1092 | 0804 | 0530 | 0263 |

1. Таблица зависимостей для поиска критического значения в критерии Шапиро-Уилка

|  |  |
| --- | --- |
| Уровень значимости α | Критическое значение |
| 0,01 |  |
| 0,05 |  |
| 0,1 |  |

1. Таблица критических значений показателя

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

1. Таблица квантилей для показателя

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|  | 0,118 | 0,147 | 0,184 | 0,241 | 0,347 | 0,461 | 0,744 | 1,168 |

1. Таблица критических значений модифицированного показателя

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание