Zadanie domowe – model Drapieżnik-Ofiara

Aleksander Łysoń, 46587

Wprowadzenie

Model Drapieżnik-Ofiara, znany równiez jako model Lotki-Volterry, jest nieliniowym układem równań różniczkowych opisującym zależności między występującymi w przyrodzie populacjami ofiar i polujących na nie drapieżników.

Układ równań ma postać:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x \\ \dfrac{dy}{dt} = (\delta x - \gamma)y \end{cases}$$

gdzie:

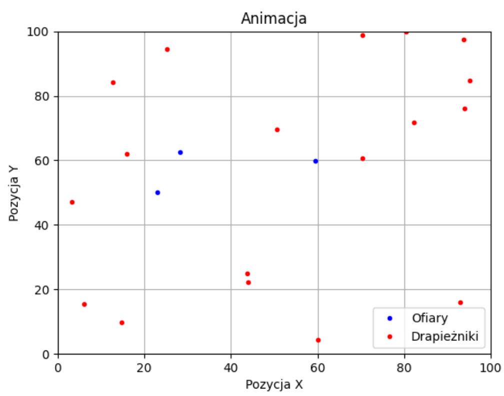
x – populacja ofiar
y – populacja drapieżników
α – współczynnik przyrostu ofiar
β – częstość umierania ofiar (na skutek zjedzenia przez drapieżników)
γ – współczynnik przyrostu drapieżników
δ – częstość umierania drapieżników

Implementacja

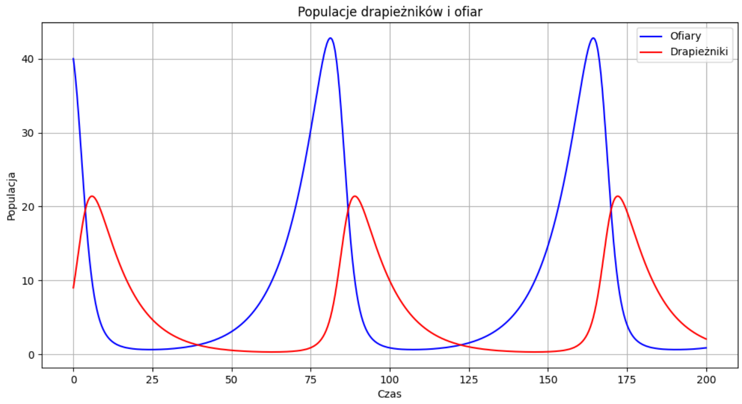
Implementację modelu wykonano w języku Python. Do rozwiązania układu równań różniczkowych wykorzystano metodę czwartego rzędu Rungego-Kutty (RK4). Sporządzono wykresy populacji od czasu, portret fazowy oraz animację pokazującą osobniki z obydwu grup.

Obserwacje

Symulacja wykazała, że populacje ofiar i drapieżników oscylują w czasie. Gdy populacja ofiar rośnie, populacja drapieżników również rośnie, ponieważ mają wtedy więcej pokarmu. Jednak gdy populacja drapieżców jest zbyt wysoka, liczba ofiar spada, co następnie prowadzi do spadku populacji drapieżników z powodu braku dostatecznej ilości pożywienia. Cykl ten się powtarza.

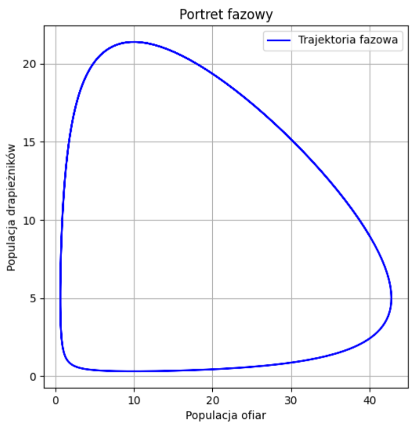


Mapa osobników w końcowej fazie cyklu



Oscylujące populacje drapieżników i ofiar

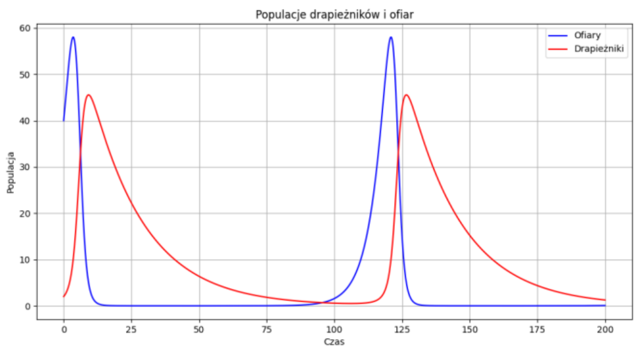
Obserwując wykresy populacji, można zauważyć, że maksima populacji obydwu grup są przesunięte w czasie. Moment, w którym drapieżniki osiągają swoją największą populację następuje po tym, gdy swoją największą populację odnotowują ofiary.



Portret fazowy populacji

Wykres fazowy jest „zamknięty", co jednoznacznie wskazuje na cykliczność symulacji, a system po określonym czasie wraca do punktu wyjścia.

Zmiana parametrów modelu ma istotny wpływ na dynamikę całego systemu. Może prowadzić do większych oscylacji i wydłużenia lub skrócenia czasu cyklu, jednak schemat pozostaje ten sam.



Populacje ze zmienionymi parametrami y, α i γ

Wnioski

Model Lotki-Volterry przewiduje, że interakcje między obiema populacjami prowadzą do stabilnych i okresowych zmian w liczebności obydwu grup zakładając, że parametry systemu pozostają stałe. Dzięki temu może być on wykorzystywany w zarządzaniu zasobami naturalnymi i ochronie środowiska. W praktyce jednak tak stabilne oscylacje nie są obserwowane przez zbyt długi czas ze względu na inne czynniki środowiskowe, takie jak zmiany klimatu, migracje i interakcje z innymi gatunkami.