

Trabajo Practico Grupal "A"

Parte Practica

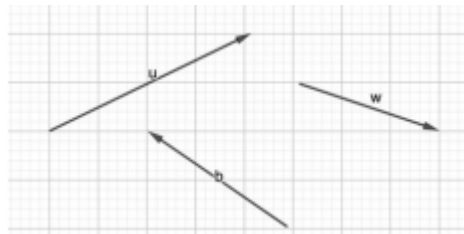
UTN-FRLP

Algebra y Geometría Analítica

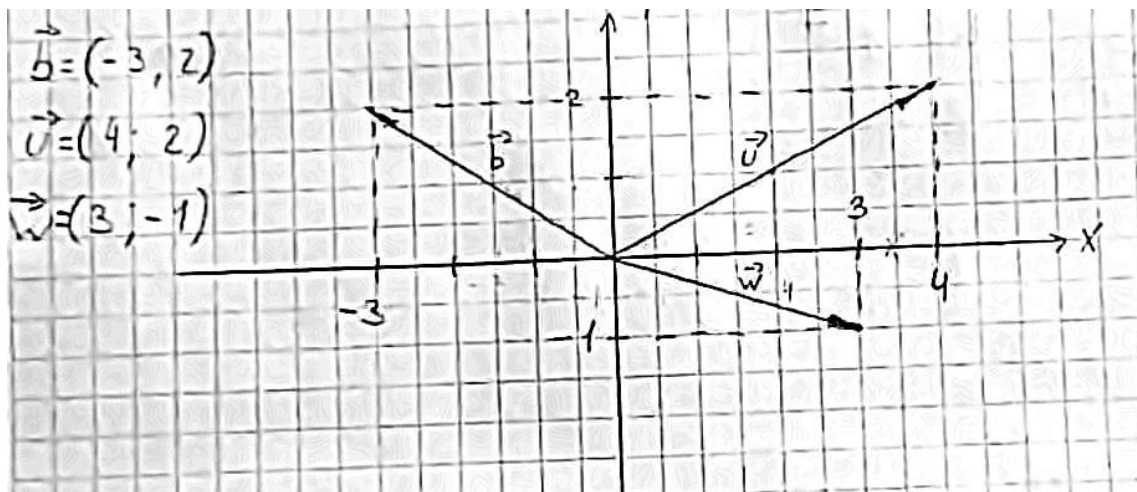
- Docente: Viviana Capello
- Integrantes:
 - Cayo Ariel – Legajo (931.750)
 - Martínez Mariano - legajo (931.208)
 - Orellana Maximiliano – legajo (931.702)
 - Randazzo Giuseppe– legajo (31866)

Consignas y resolución

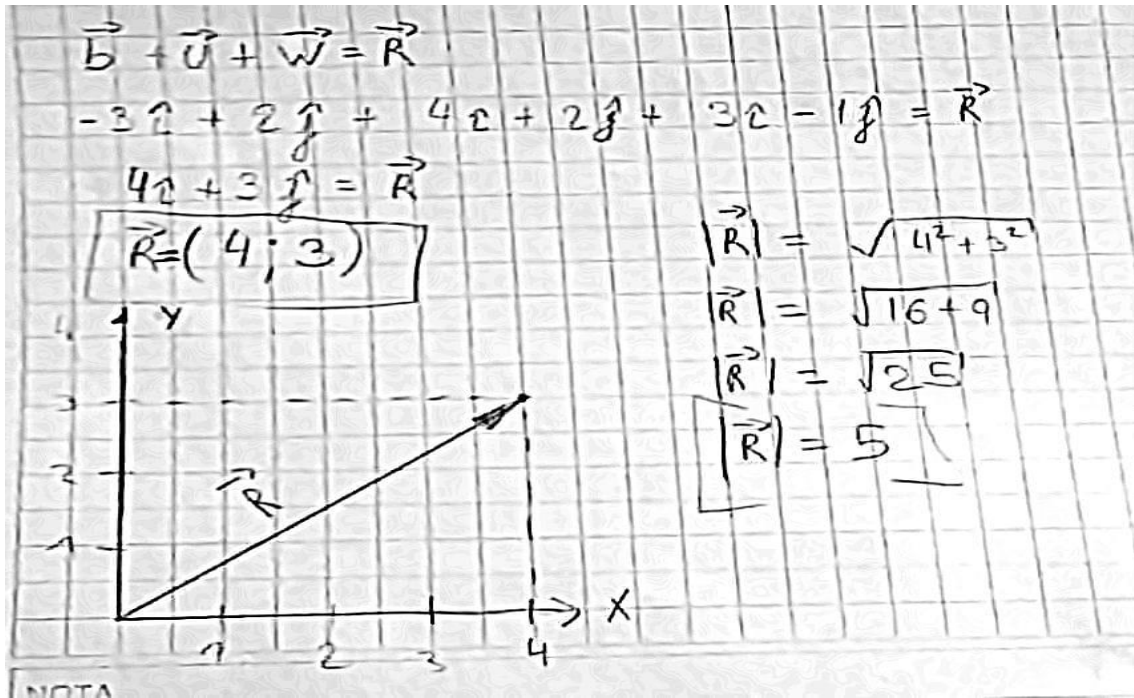
- 1) Para el sistema vectorial mostrado determinar el módulo del vector resultante



-Referenciamos todos los vectores al punto (0;0) de un eje cartesiano



- Luego resolvemos por método analítico



- 2- Dados los vectores $\vec{u} = (2;3)$ y $\vec{v} = (-3;1)$, calcular
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$2-2- (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}$$

$$\left((2\hat{i} + 3\hat{j}) + (-3\hat{i} + \hat{j}) \right) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j})$$

$$(-\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j})$$

$$-\hat{i} \cdot 2\hat{i} + 4\hat{j} \cdot 3\hat{j}$$

$$-2 + 12$$

$$10$$

$$2-b- \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(2\hat{i} + 3\hat{j}) \cdot (-3\hat{i} + \hat{j})$$

$$2\hat{i} \cdot (-3\hat{i}) + 3\hat{j} \cdot \hat{j}$$

$$-6 + 3$$

$$-3$$

3-Hallar las coordenadas de un vector \vec{x} sabiendo que forma un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ con \vec{a}

$(-2;4)$ y que los módulos de ambos son iguales.

3.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{20}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{x}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = (|\vec{a}|)^2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 20 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = -10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$$

$$-10 = -2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$$

$$-10 = -2(x_1 - 2x_2)$$

$$5 = x_1 - 2x_2$$

$$x_1 = 2x_2 + 5$$

$$x_2 = \frac{5 - x_1}{-2}$$

$$-10 = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 \cdot \cos(120)$$

$$-10 = \left((2x_2 + 5)^2 + x_2^2\right) \cdot (-0,5)$$

$$20 = 4x_2^2 + 20x_2 + 25 + x_2^2$$

$$0 = 5(x_2^2 + 4x_2 + 1)$$

$$0 = x_2^2 + 4x_2 + 1$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

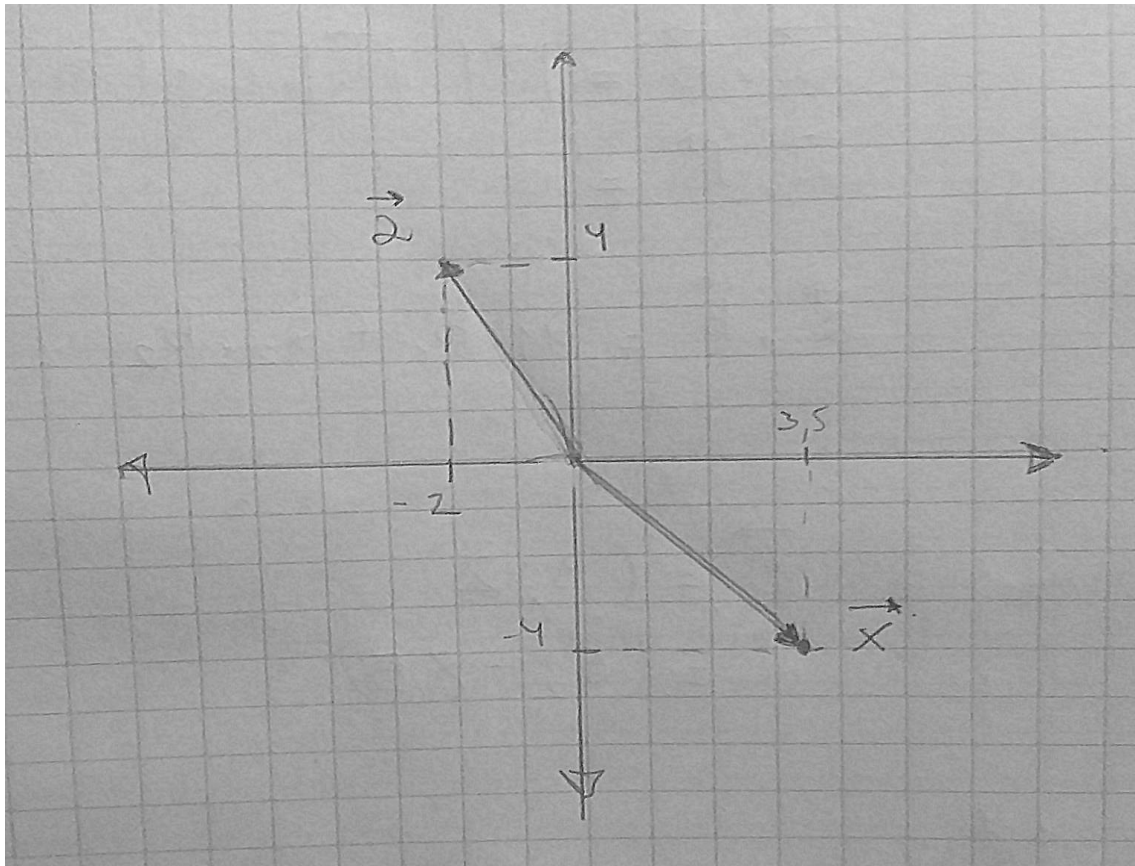
$$\frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} \\ \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} \end{cases}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\left(1 - \sqrt{12}\right)^2 + \left(\frac{-4 - \sqrt{12}}{2}\right)^2}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{1 - 2\sqrt{12} + 12 + 4 + 2\sqrt{12} + 3}$$

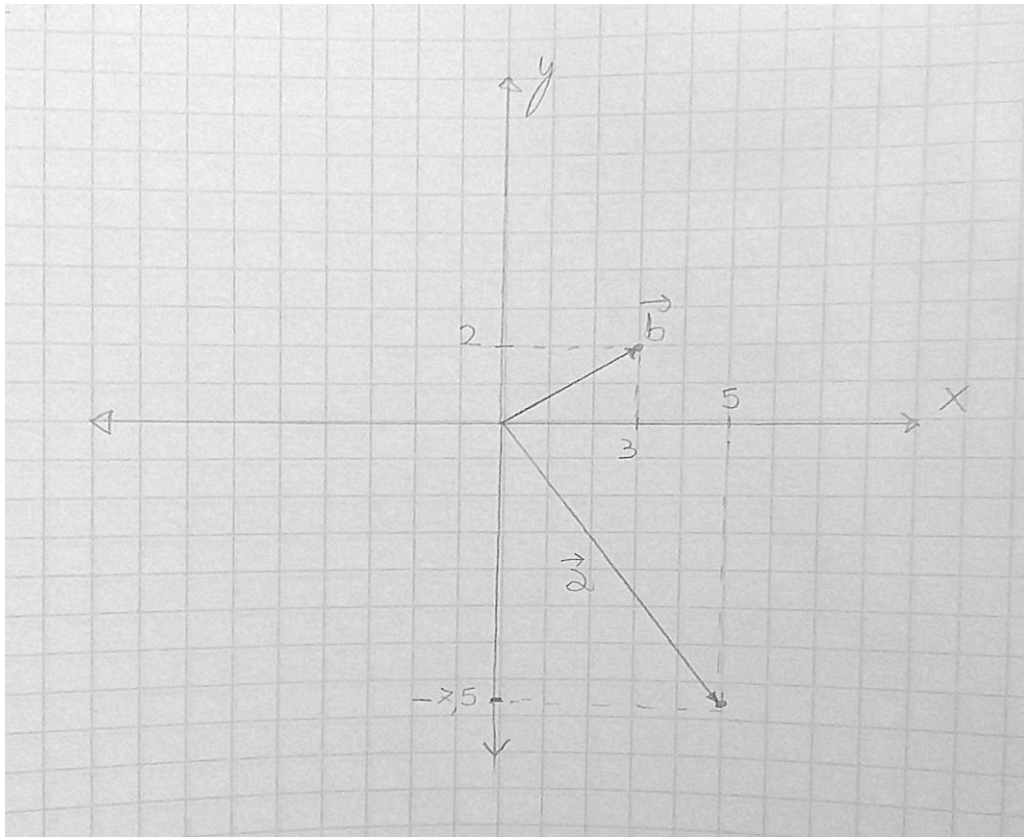
$$|\vec{x}| = \sqrt{20}$$

$$|\vec{x}| = |\vec{a}|$$



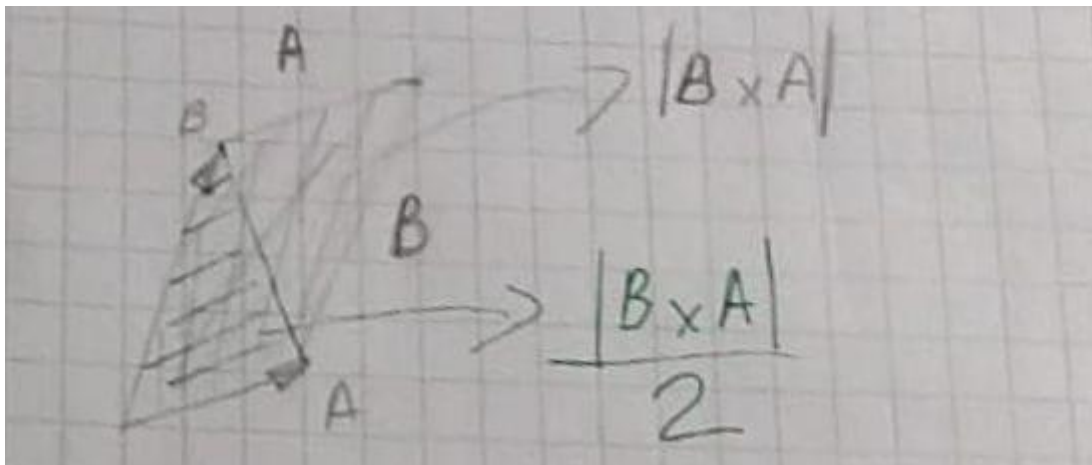
4- Siendo $\vec{a} = (5; -Y)$ y $\vec{b} = (X; 2)$ Hallar x e y, sabiendo que son ortogonales y que $|\vec{b}| = \sqrt{13}$.

$$\begin{aligned}
 4- \quad |\vec{b}| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} & \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90^\circ) \\
 \sqrt{13} &= \sqrt{x^2 + 2^2} & \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\
 \pm \sqrt{13 - 4} &= x & \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \\
 \pm 3 &= x & & \\
 0 &= 5 \cdot 3 + (-y) \cdot 2 & \vec{b} &= (3; 2) \\
 \frac{-15}{-2} &= y & \vec{a} &= (5; -7,5)
 \end{aligned}$$



5- Dados los puntos A (1,1,1) ; B (4,3,6) ; C (5,2,7), hallar el área del triángulo que determinan.

Sabemos $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ es el equivalente al área del paralelogramo formado entre \vec{AB} y \vec{AC}



Por el grafico se puede concluir que $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$ es el área de un triángulo formado entre los vectores dados

$$\begin{array}{l|l}
 \overline{AB} = B - A & \overline{AB} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} - (1\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}) \\
 \overline{AC} = C - A & \boxed{\overline{AB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}} \\
 \overline{AB} = (3; 2; 5) & \overline{AC} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k} - (1\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}) \\
 \overline{AC} = (5; 2; 7) & \boxed{\overline{AC} = 4\hat{i} + 1\hat{j} + 6\hat{k}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} \times \overline{AC} &= \Delta AB \\
 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \\
 \overline{AB} \times \overline{AC} &= \hat{i}(2 \cdot 7) + \hat{j}(3 \cdot 5) + \hat{k}(3 \cdot 2) - (\hat{k}(2 \cdot 5) + \hat{i}(5 \cdot 2) + \hat{j}(7 \cdot 3)) \\
 \overline{AB} \times \overline{AC} &= 14\hat{i} - 10\hat{j} + 25\hat{k} - 21\hat{k} - 10\hat{i} - 21\hat{j} \\
 \overline{AB} \times \overline{AC} &= 4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k} \\
 |\overline{AB} \times \overline{AC}| &= \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4)^2} \\
 |\overline{AB} \times \overline{AC}| &= \sqrt{16 + 16 + 16} \\
 |\overline{AB} \times \overline{AC}| &= \sqrt{48} \\
 \text{Area del triángulo} &= \frac{\sqrt{48}}{2}
 \end{aligned}$$

6- Hallar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{a} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$

$\vec{b} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ y $\vec{c} = (4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

6

Partimos de la fórmula del paralelepípedo

$$V = \text{Área} \cdot h$$

Sabemos que el área de la base es el producto vectorial de 2 vectores entonces.

$$V = |A \times B| \cdot h$$

Y también sabemos que la altura es perpendicular al plano de la base y también sabemos que el producto vectorial da como resultado un vector paralelo al plano de los vectores.

Entonces solo quedaría saber cuánto del vector "C" se proyecta en el $A \times B$ para saber la altura.

$$h = \frac{A \times B \cdot C}{|A \times B|^2}$$

6- $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3$$

$$c_1 (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \cdot c_2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot c_3$$

$$4\hat{i}(-2\hat{j} \cdot (-\hat{k}) - 5\hat{k} \cdot 2\hat{j}) - 3\hat{j}(3\hat{i} \cdot (-\hat{k}) - 5\hat{k} \cdot 2\hat{i}) + 2\hat{k}(3\hat{i} \cdot 2\hat{j} - (-2\hat{j}) \cdot 2\hat{i})$$

$$4\hat{i}(2\hat{i} + 10\hat{i}) - 3\hat{j}(-3\hat{j} - 10\hat{j}) + 2\hat{k}(6\hat{k} - 4\hat{k})$$

$$48 + 39 + 4 = 91$$

7- Dados los puntos $O = (0,0)$, $P = (-1,1)$, $A = (3,3)$ y $B = (2,4)$ calcule el vector \vec{a} que va de O a P y el vector \vec{b} que va de A a B. Explique la relación entre ambos vectores.

$$7. \quad \overrightarrow{OP} = \vec{a}$$

$$(0\hat{i} + 0\hat{j}) - (-\hat{i} + \hat{j}) = \vec{a}$$

$$[\hat{i} - \hat{j} = \vec{a}]$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$(3\hat{i} + 3\hat{j}) - (2\hat{i} + 4\hat{j}) = \vec{b}$$

$$[\hat{i} - \hat{j} = \vec{b}]$$

$$\vec{a} = (\hat{i}; -\hat{j})$$

$$\vec{b} = (\hat{i}; -\hat{j})$$

$$[\vec{a} = \vec{b}]$$