Komplexe Leistung Mathematik

Die Eulersche Zahl

Richard Laag

Kurs 2025 / Klasse 11

Fachlehrerin: Ilka Frigge

6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Leonhard Euler ist wohl einer der wichtigsten Mathematiker der Neuzeit. Zumindest ist er der Einzige mir bekannte, nachdem eine mathematische Konstante benannt wurde. Über die Eulersche Zahl selbst, trotz ihrer Wichtigkeit in der Mathematik, wusste ich allerdings vor dem Schreiben dieser komplexen Leistung relativ wenig. Im Nachhinein ist dies unfassbar schade, denn hinter der Eulerschen Zahl verbirgt sich eine Vielzahl wundervoller mathematischer Fakten, Gleichungen und Kuriositäten. Daher möchte ich meiner Betreuungs-Lehrerin Frau Frigge danken, welche mich auf das Thema aufmerksam gemacht hat und mir insgesamt viel geholfen hat, wenn ich Fragen bezüglich der komplexen Leistung hatte. Außerdem danke ich den Leuten, die die Quellen dieser komplexen Leistung ausmachen.

2 Einleitung

Die Eulersche Zahl e ist eine irrationale Zahl, das heist, sie lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. Als Dezimalzahl können wir e immer nur annehmen, da es unendlich viele Dezimalstellen benötigen würde, um die Zahl auszuschreiben: 2,718281828459045235360287471... und so weiter und so fort - diese endlose Kette von Zahlen, die sich aus der Konstante e ergeben, führen uns in eine faszinierende Welt der Wissenschaft und Mathematik. Als Erstes jedoch unternehme ich einen Exkurs in die Geschichte und bestimme die Verhältnisse, unter der die Eulersche Zahl entdeckt und angewendet wurde und wie genau Euler selbst damit in Verbindung stand. Danach untersuche ich die Anwendung der Eulerschen Zahl in Gleichungen wie $\frac{de^x}{dx} = e^x$ und $e^{i\theta} = i\sin\theta + \cos\theta$, wobei im Folgendem in reelle Analysis und komplexe Analysis unterteilt wird. Das wichtigste Thema meiner komplexen Leistung behandelt die verschiedenen Darstellungsformen von e. Dabei untersuche ich eine Vielzahl von Darstellungen, zum Beispiel e in unterschiedlichen Basen, e als unendlichen Bruch, e als Limes von Funktionen, e als unendliche Summation und Einiges mehr. Diese Darstellungen untersuche ich dann auf Genauigkeit und Anwendung und werde im praktischen Teil die Zahl mithilfe einer Näherung und einem Computer auf Einhunderttausend Nachkommastellen bestimmen.

3 Euler und die Eulersche Zahl

Der Mathematiker, der die größte Ansammlung an Mathematischen Werken und Publikationen geschrieben hat, ist Leonard Euler - eine Person, die seit 240 Jahren tot ist. Zu seinen Errungenschaften zählen unter Anderem:

- der Beweis, dass e irrational ist:

Euler bewies dies, indem er zeigte, dass der einfache Kettenbruch von e nicht periodisch und nicht endlich ist, denn wäre der Kettenbruch endlich, dann könnte man ihn zu einem Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ vereinfachen. Dass e transzendent ist, konnte Euler jedoch nicht beweisen.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

oder in vereinfachter Schreibweise:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \ldots, \overline{2n, 1, 1}]$$

- das Aufstellen von Euler's Formel und Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Die Identität besagt in einem visuellen Sinn, dass das Ergebnis von 1 aus π Radianten um den Einheitskreis läuft der im Feld der komplexen Zahlen liegt, also zu -1, und dann einen Schritt nach vorne nimmt und 0 wird.

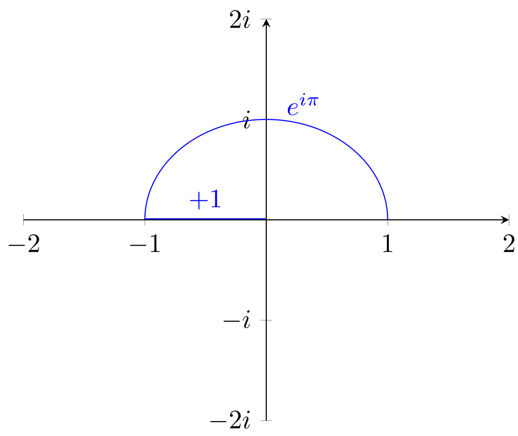

Abbildung 1: Eulers Identität

Die Formel besagt, dass e hoch $i\theta$ als Ergebnis die Zahl Theta Radianten um den Einheitskreis im Feld der komplexen Zahlen wiedergibt.

$$e^{i\theta} = i \sin\theta + \cos\theta$$

- das Lösen des Basler Problems:

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Das Basler Problem handelt mit die Frage, was die Summe aller Natürlichen Zahlen ist, wenn man ihr Reziproge in's Quadrat nimmt. Euler bewies diese Summe sei $\frac{\pi^2}{6}$.

- die mit dem Basler Problem in Verbindung stehende Zeta Funktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

Die Zeta-Funktion ist weitaus komplexer, als diese einfache Beschreibung vermuten lässt. Sie hat interessante Eigenschaften und ist in der Zahlentheorie, der Analysis und der theoretischen Physik von großer Bedeutung. Sie ist eng mit der Verteilung der Primzahlen, der Riemannschen Vermutung und der Theorie der harmonischen Reihe verknüpft.

- und die Gamma Funktion:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Die Gamma-Funktion findet Anwendung in vielen Bereichen der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften. Sie ist eine Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion ($n!$), doch während die Fakultätsfunktion nur für positive ganze Zahlen definiert ist, kann die Gamma-Funktion für eine breitere Klasse von reellen und komplexen Zahlen verwendet werden.
Darüber hinaus leistete Euler auch bedeutende Beiträge zur Physik und Astronomie. Nennenswert sind zum Beispiel seine Arbeiten über Fluiddynamik, Optik und das Dreikörperproblem. Die Eulersche Zahl selbst dagegen wurde zum ersten Mal in einer logarithmischen Tabelle von John Napier im Jahr 1618 erwähnt. Die Konstante selbst wurde aber von Jakob Bernoulli mit der folgenden Formel eingeführt.

$$e = \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

4 Die Eulersche Zahl in der Analysis

Die Exponentialfunktion von e ist möglicherweise die wichtigste Funktion der Mathematik - aus dem einfachen Grund, dass sie ihre eigene Ableitung ist. Manche sagen sogar, die Eulersche Zahl wird mit dieser Eigenschaft definiert, ähnlich wie π durch den Vergleich von Umfang und Radius in einem Kreis definiert wird.

4.1 Die Eigenschaften von e^x

Wie bereits erwähnt, ist die Funtion e^x ihre eigene Ableitung. Aus dieser Eigenschaft lassen sich gleich 2 bekannte Formeln für das Berechnen von e herleiten:

4.1.1 Die Eulersche Zahl als undendliche Summe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Um dies zu beweisen, kann die Ableitungseigenschaft genutzt werden. Da die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist, müsste dies daher auch für die Summation gelten.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!}$$

Dank der Summationsregel von Ableitungen kann man die Ableitung auf jeden Summanten einzeln anwenden. Schreibt man diese Summe dann aus, dann wird es schnell eindeutig, dass die Funktion sich nicht verändert hat.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = 0 + 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Weil die Gleichheit der 2 Terme dadurch veranschaulicht ist, kann man nun durch das Einsetzen von x durch 1 die Eulerische Zahl mithilfe der Summation berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} &= 2,\underline{0} \\ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{10!} &= 2,7182818\underline{0}\dots \\ \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{100!} &= 2,718281828459\dots \end{aligned}$$

Wenn bis n = 1 gerechnet wird, stimmt keine Kommastelle überein. Rechnet man bis 10, dann stimmen die ersten 7 Kommastellen mit der tatsächlichen Zahl überein. Beim Ausrechnen bis n = 100 sind bereits die ersten 159 Stellen richtig. Insgessamt scheint mir diese Näherung daher als mögliche Option für das Berechnen von e auf 100.000 Nachkommastellen.

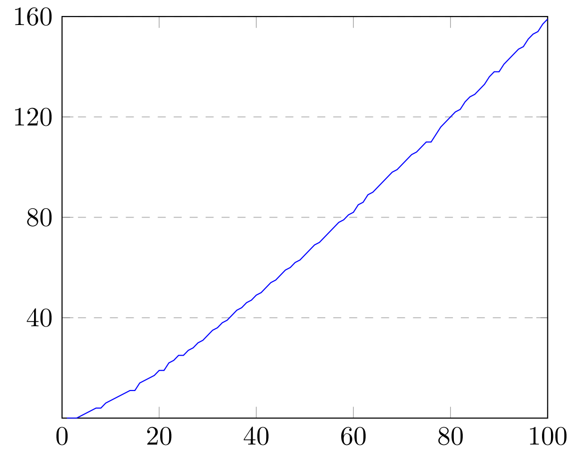

Abbildung 2: Genauigkeit von e, wenn sie mit der Summenformel berechnet wird

Die X-Achse repräsentiert die Anzahl an richtigen Nachkommastellen und die Y-Achse zeigt die Anzahl an Summationen. Der Graph deutet dabei auf lineares Wachstum hin, welches besser ist als beispielsweise logarithmisches Wachstum. Möglicherweise gibt es aber bessere Näherungen mit quadratischem, exponentiellen, ... Wachstum.

4.1.2 Die Eulersche Zahl als Grenzwert

Die zweite Formel für e, die sich aus ihrer Ableitung herleiten lässt, kommt dann zustande, wenn man die Ableitung nach ihrer Definition betrachtet.

$$e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Diese Formel kann man wie folgt nach e umstellen:

$$e = \lim_{h \to 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

und h wird meistens mit $\frac{1}{n}$ substituiert, um die Formel zu vereinfachen.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Berechnet man e mit dieser Formel, dann erhält man die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{1})^{1} &= 2,\underline{0} \\ (1+\frac{1}{10})^{10} &= 2,\underline{5}\ldots \\ (1+\frac{1}{100})^{100} &= 2,7\underline{0}\ldots\end{aligned}$$

Die Konvergenz zum tatsächlichen Wert ist hierbei unglaublich langsam im Vergleich zu der voherigen Summation, was mich sehr überrascht hat, denn beide Formeln wurden ja aus der gleichen Eigenschaft gewonnen.

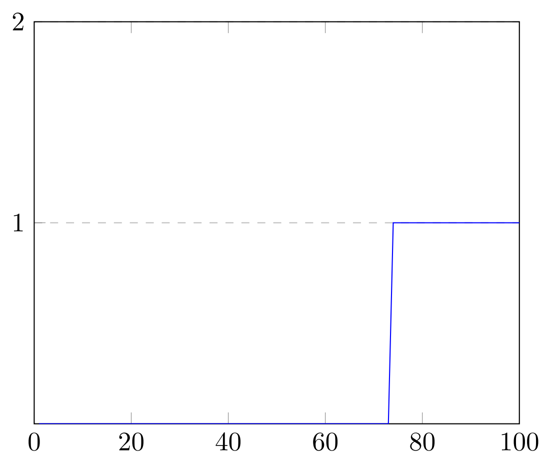

Abbildung 3: Genauigkeit von e, wenn sie mit einem Limes berechnet wird

5 Komplexe Zahlen und e^{ix}

Eulers Formel ist ein grundlegendes Konzept in der komplexen Analyse. Es verknüpft die trigonometrischen Funktionen von Sinus und Cosinus mit der komplexen Exponentialfunktion. Es gilt, dass $e^{i\theta} = i\sin\theta + \cos\theta$ ist. Diese Formel wird zum Beispiel verwendet, um die Nullstellen von Polynomgleichungen mit Sinus- und Cosinusfunktionen zu berechnen. Sie kann auch verwendet werden, um die Fourier-Transformation einer periodischen Funktion zu erschließen, welches wichtig für das Arbeiten mit Schallwellen und Elektromagnetischen Wellen ist. Darüber hinaus bietet die Formel von Euler eine bequeme Möglichkeit, komplexe exponentielle Ausdrücke in einfachere Ausdrücke zu verwandeln.

5.1 Die Eigenschaften von e^z im komplexen Raum

Was sind eigentlich komplexe Exponenten? Sicherlich multipliziert man e nicht $\sqrt{-1}\pi$ mal mit sich selbst? Hierfür wird die Summation aus dem voherigen Abschnitt genommen, um die Funktion in den komplexen Raum zu erweitern.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

Wer mit den Summationen vertraut ist, die $\cos$ und $\sin$ definieren, der kann sich die Gleichheit von e^{ix} und $i \sin x + \cos x$ mit dieser Formel herleiten.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = (\frac{ix}{1!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots) + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots) = i \sin x + \cos x$$

Eine intuitivere Erklärung erhält man durch das Ableiten von e^{ix}. Da $\frac{d}{dx}e^{ix} = ie^{ix}$ ist und das Multiplizieren mit i im komplexen Raum die Rotation von 90° symbolisiert, besitzt diese Funktion die Eigenschaft, dass Tangenten an der Funktion stets 90° oder senkrecht zu einer gegebenen Position anliegen. Zusammen mit dem Startpunkt (0,1) ergibt das nur eine Möglichkeit: der Einheitskreis im komplexen Raum.

6 Andere Darstellungsformen der Eulerschen Zahl

Eine Sache, die mich an fundamentalen Konstanten wie e interessiert, sind ihre zahlreichen Schreibweisen und wie diese sich verhalten. Zum Einen gibt es das Umschreiben in andere Basen / numerische Systeme, welche ich auf Muster und Struktur untersuchen werde. Zum Anderen existiert die Eulersche Zahl als unendlicher Kettenbruch, welcher abschließend von mir auf seine Näherungsfähigkeit untersucht wird.

6.1 Die Eulersche Zahl in verschiedenen Basen

Die Eulersche Zahl ist irrational. Für rationale Basen bedeutet dies, dass die Zahl unendlich viele nicht-wiederholende Nachkommastellen aufweist. Diese untersuche ich im folgenden Abschnitt auf Verteilung und Muster und was das für die Zahl bedeutet.

6.1.1 Basis 10

In der Basis 10 (in welcher man sich auch normalerweise befindet,) gibt es 10 Ziffern von 0 bis 9. Untersucht man diese auf Verteilung/Häufigkeit, dann stellt man schnell fest, dass die Eulersche Zahl keine Ziffer bevorzugt und auch keine Muster in der Form von Zifferfolgen aufweist. Dies ist ein erwartetes Verhalten, denn e ist ja irrational.

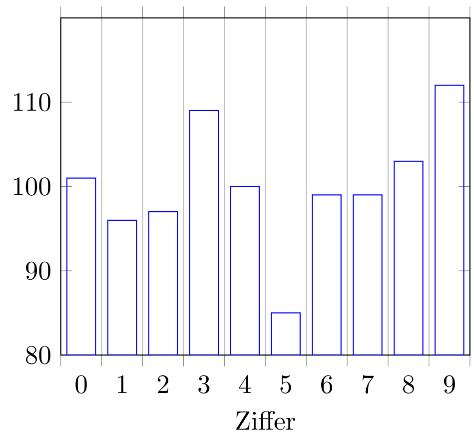

Abbildung 4: Ziffernverteilung von e in der basis 10

In dem Graphen ist die Verteilung von Ziffern der ersten 1000 Stellen von e zu sehen. Zu beachten ist, dass die Y-Achse bei 80 startet (für bessere Erkennbarkeit) und das zum Beispiel die Ziffer 5 mit 85 mal in dem Abschnitt am Wenigsten vorkommt und die Ziffer 9 mit 112 Mal am Meisten.

6.1.2 Basis 2

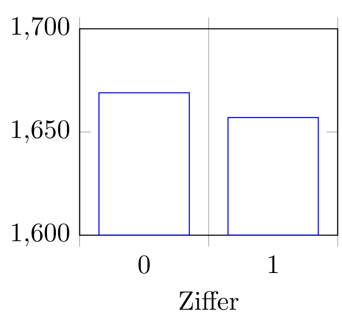

Abbildung 5: Ziffernverteilung von e in der basis 2

In der Basis 2 ist das gleiche erkennbar. Ziffer 1 und 0 kommen ungefähr gleich oft vor. Zahlen, dessen Ziffern in einer basis die Gleich oft verteilt sind nennt man normal. e ist absolut normal, da sie eine normale Zahl in jeder natürlichen Base $>= 2$ ist. die Zahl $0.\overline{1234567890}$ z.B ist nur normal in Basis 10. Interessant ist, dass es zwar unendlich viele normale Zahlen wie e gibt, aber diese 0% der Reellen Zahlen ausmachen - genau so wie die rationalen Zahlen.

6.2 Die Eulersche Zahl als unendlicher Kettenbruch

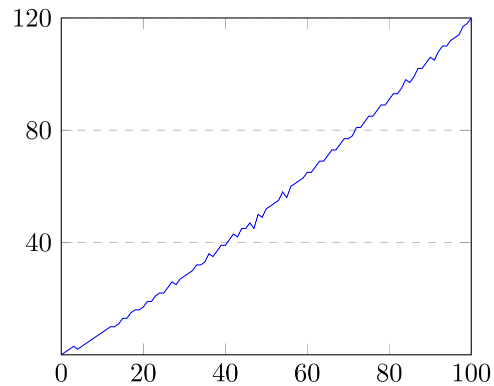

Abbildung 6: Ziffernverteilung von e als einfacher Kettenbruch

7 Die Eulersche Zahl auf Einhunderttausend Stellen

8 Quellenverzeichnis

- Maor, Eli: e The Story of a Number. Princeton University Press. Princeton, New Jersey 1994
- Rudin, Walter: Reelle und Komplexe Analysis, Oldenbourg Verlag München Wien, 3. Ed.
- Robert Nemiroff und Jerry Bonnell: e auf 2 Millionen Ziffern: https://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.2mil
- Generelle Informationen: https://en.wikipedia.org/wiki/eulers_number
- Tröpfelalgorithmus: https://de.wikipedia.org/wiki/Tröpfelalgorithmus
- Normale Zahlen: https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_number