Komplexe Leistung Mathematik

Die Eulersche Zahl

Richard Laag

Kurs 2025 / Klasse 11

Fachlehrerin: Ilka Frigge

8. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Leonhard Euler ist wohl einer der wichtigsten Mathematiker der Neuzeit. Zumindest ist er der Einzige mir bekannte, nachdem eine mathematische Konstante benannt wurde. Über die Eulersche Zahl selbst, trotz ihrer Wichtigkeit in der Mathematik, wusste ich allerdings vor dem Schreiben dieser komplexen Leistung relativ wenig. Im Nachhinein ist dies unfassbar schade, denn hinter der Eulerschen Zahl verbirgt sich eine Vielzahl wundervoller mathematischer Fakten, Gleichungen und Kuriositäten. Daher möchte ich meiner Betreuungs-Lehrerin Frau Frigge danken, welche mich auf das Thema aufmerksam gemacht hat und mir insgesamt viel geholfen hat, wenn ich Fragen bezüglich der komplexen Leistung hatte. Außerdem danke ich den Leuten, die die Quellen dieser komplexen Leistung ausmachen.

2 Einleitung

Die Eulersche Zahl e ist eine irrationale Zahl, das heißt, sie lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. Als Dezimalzahl können wir e immer nur annehmen, da es unendlich viele Dezimalstellen benötigen würde, um die Zahl auszuschreiben: 2,71828182845904523536028747 1... und so weiter und so fort - diese endlose Kette von Zahlen führen uns in eine faszinierende Welt der Wissenschaft und Mathematik. Als Erstes jedoch unternehme ich einen Exkurs in die Geschichte und bestimme die Verhältnisse, unter der die Eulersche Zahl entdeckt und angewendet wurde und wie genau Euler selbst damit in Verbindung stand. Danach untersuche ich die Anwendung der Eulerschen Zahl in Gleichungen wie $\frac{de^x}{dx} = e^x$ und $e^{i\theta} = i \sin\theta + \cos\theta$, wobei im Folgendem in reelle Analysis und komplexe Analysis unterteilt wird. Das wichtigste Thema meiner komplexen Leistung behandelt die verschiedenen Darstellungsformen von e. Dabei untersuche ich eine Vielzahl von Darstellungen, zum Beispiel e in unterschiedlichen Basen, e als unendlichen Bruch, e als Limes von Funktionen, e als unendliche Summation und Einiges mehr. Diese Darstellungen untersuche ich dann auf Genauigkeit und Anwendung und werde im praktischen Teil die Zahl mithilfe einer Näherung und einem Computer auf eine Million Nachkommastellen bestimmen.

3 Euler und die Eulersche Zahl

Der Mathematiker, der die größte Ansammlung an mathematischen Werken und Publikationen geschrieben hat, ist Leonard Euler - Ein Schweizer Mathematiker, der einen Großteil seines Lebens in St. Petersburg arbeitete. Zu seinen Errungenschaften zählen unter Anderem:

3.1 Der Beweis, dass e irrational ist

Euler bewies dies, indem er zeigte, dass der einfache Kettenbruch von e nicht periodisch und nicht endlich ist, denn wäre der Kettenbruch endlich, dann könnte man ihn zu einem Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ vereinfachen. Dass e transzendent ist (das heißt, e ist nicht die Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten), konnte Euler jedoch nicht beweisen.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

oder in vereinfachter Schreibweise:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \ldots, \overline{2n, 1, 1}]$$

3.2 Euler's Formel und Identität

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Die Identität besagt in einem visuellen Sinn, dass das Ergebnis von 1 aus π Radianten um den Einheitskreis läuft, der im Feld der komplexen Zahlen liegt, also zu -1, und dann einen Schritt nach vorn nimmt und 0 wird.

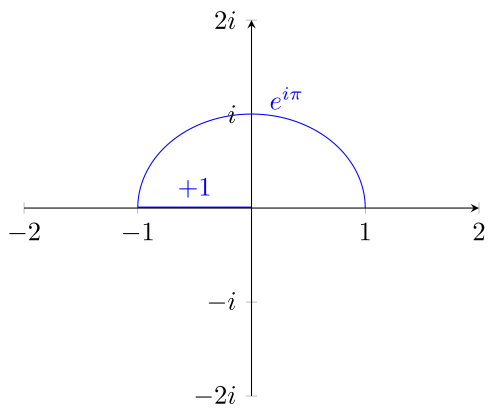

Abbildung 1: Eulers Identität

Die Formel besagt, dass e hoch $i\theta$ als Ergebnis die Zahl Theta Radianten um den Einheitskreis im Feld der komplexen Zahlen wiedergibt (ein Radiant ist die „ Einheit “ des Bogemaßes - 2π Radianten sind also eine Umdrehung oder 360° um den Kreis).

$$e^{i\theta} = i \sin \theta + \cos \theta$$

3.3 Das Lösen des Basler Problems

$$\lim_{x \to \infty} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Das Basler Problem handelt von der Frage, was die Summe aller Natürlichen Zahlen ist, wenn man ihr Reziproke in's Quadrat nimmt. Euler bewies diese Summe sei $\frac{\pi^2}{6}$.

3.4 Die Zeta Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

Die Zeta-Funktion ist weitaus komplexer, als diese einfache Beschreibung vermuten lässt. Sie hat interessante Eigenschaften. Es wird z.B vermutet, dass die Nullstellen der Zeta Funktion unter der Eingabe von Komplexen Zahlen alle den reellen Part $\frac{1}{2}$ besitzen. Sie ist in der Zahlentheorie, der Analysis und der theoretischen Physik von großer Bedeutung. Sie ist eng mit der Verteilung der Primzahlen, der Riemannschen Vermutung und der Theorie der harmonischen Reihe verknüpft.

3.5 Die Gamma Funktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Die Gamma-Funktion findet Anwendung in vielen Bereichen der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften. Sie ist eine Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion ($n!$), doch während die Fakultätsfunktion nur für positive ganze Zahlen definiert ist, kann die Gamma-Funktion für eine breitere Klasse von reellen und komplexen Zahlen verwendet werden.

3.6 Weitere Erkenntisse von Euler

Darüber hinaus leistete Euler auch bedeutende Beiträge zur Physik und Astronomie. Nennenswert sind zum Beispiel seine Arbeiten über Fluiddynamik, Optik und das Dreikörperproblem. Die Eulersche Zahl selbst dagegen wurde zum ersten Mal in einer logarithmischen Tabelle von John Napier im Jahr 1618 erwähnt. Die Konstante selbst wurde aber von Jakob Bernoulli mit der folgenden Formel eingeführt.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

4 Die Eulersche Zahl in der Analysis

Die Exponentialfunktion von e ist möglicherweise die wichtigste Funktion der Mathematik - aus dem einfachen Grund, dass sie ihre eigene Ableitung ist. Manche sagen sogar, die Eulersche Zahl wird mit dieser Eigenschaft definiert, ähnlich wie π durch den Vergleich von Umfang und Radius in einem Kreis definiert wird.

4.1 Die Funktion e^x

Wie bereits erwähnt, ist die Funtion e^x ihre eigene Ableitung. Aus dieser Eigenschaft lassen sich gleich 2 bekannte Formeln für das Berechnen von e herleiten:

4.1.1 Die Funktion als undendliche Summe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Um dies zu beweisen, kann die Ableitungseigenschaft genutzt werden. Da die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist, müsste dies daher auch für die Summation gelten.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!}$$

Dank der Summationsregel von Ableitungen kann man die Ableitung auf jeden Summanten einzeln anwenden. Schreibt man diese Summe dann aus, dann wird es schnell eindeutig, dass die Funktion sich nicht verändert hat.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = 0 + 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Weil die Gleichheit der 2 Terme dadurch veranschaulicht ist, kann man nun durch das Einsetzen von x durch 1 die Eulerische Zahl mithilfe der Summation berechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} &= 2,\underline{0} \\
\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{10!} &= 2,718281\underline{8}0\dots \\
\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{100!} &= 2,718281828459\dots
\end{aligned}$$

Wenn bis n = 1 gerechnet wird, stimmt keine Kommastelle überein. Rechnet man bis 10, dann stimmen die ersten 7 Kommastellen mit der tatsächlichen Zahl überein. Beim Ausrechnen bis n = 100 sind bereits die ersten 159 Stellen richtig. Insgesamt scheint mir diese Näherung daher als mögliche Option für das Berechnen von e auf 1.000.000 Nachkommastellen.

4.1.2 Die Näherung der Summe

Die x-Achse repräsentiert die Anzahl an richtigen Nachkommastellen und die y-Achse zeigt die Anzahl an Summationen. Der Graph deutet dabei auf lineares Wachstum hin, welches besser ist als beispielsweise logarithmisches Wachstum. Möglicherweise gibt es aber bessere Näherungen mit quadratischem, exponentiellen, … Wachstum.

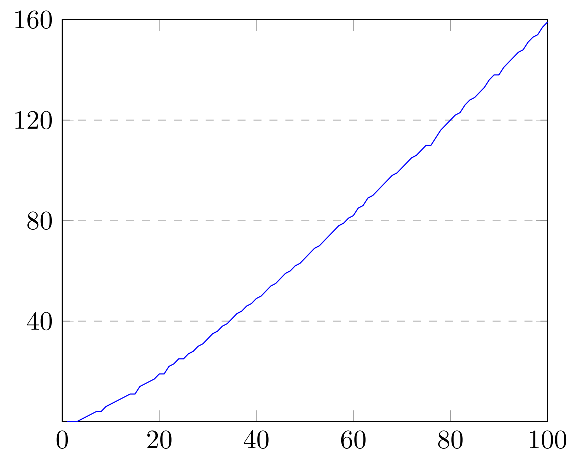

Abbildung 2: Genauigkeit von e, wenn sie mit der Summenformel berechnet wird

4.1.3 Die Funktion als Grenzwert

Die zweite Formel für e, die sich aus ihrer Ableitung herleiten lässt, kommt dann zustande, wenn man die Ableitung nach ihrer Definition betrachtet.(Siehe 3.6)

$$e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Diese Formel kann man wie folgt nach e umstellen:

$$e = \lim_{h \to 0} (h+1)^{\frac{1}{h}}$$

und h wird meistens mit $\frac{1}{n}$ substituiert, um die Formel zu vereinfachen.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Berechnet man e mit dieser Formel, dann erhält man die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} (1+\frac{1}{1})^1 &= 2,\underline{0} \\ (1+\frac{1}{10})^{10} &= 2,\underline{5}\ldots \\ (1+\frac{1}{100})^{100} &= 2,7\underline{0}\ldots \end{aligned}$$

Die Konvergenz zum tatsächlichen Wert ist hierbei unglaublich langsam im Vergleich zu der voherigen Summation, was mich sehr überrascht hat, denn beide Formeln wurden ja aus der gleichen Eigenschaft gewonnen.

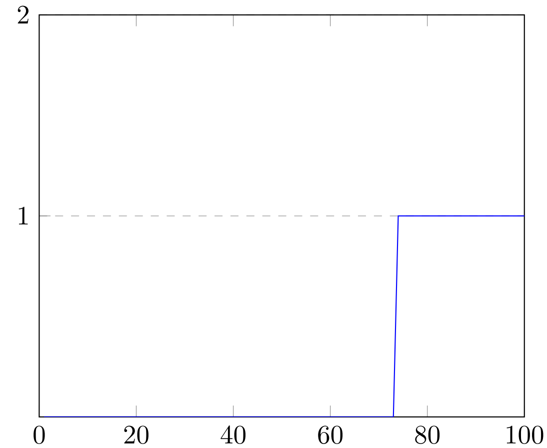

Abbildung 3: Genauigkeit von e, wenn sie mit einem Limes berechnet wird

5 Komplexe Zahlen und e^{ix}

Eulers Formel ist ein grundlegendes Konzept in der komplexen Analyse. Es verknüpft die trigonometrischen Funktionen von Sinus und Cosinus mit der komplexen Exponentialfunktion. Es gilt, dass $e^{i\theta} = i\sin\theta + \cos\theta$ ist. Diese Formel wird zum Beispiel verwendet, um die Nullstellen von Polynomgleichungen mit Sinus- und Cosinusfunktionen zu berechnen. Sie kann auch verwendet werden, um die Fourier-Transformation einer periodischen Funktion zu erschließen, welches wichtig für das Arbeiten mit Schallwellen und elektromagnetischen Wellen ist. Darüber hinaus bietet die Formel von Euler eine bequeme Möglichkeit, komplexe exponentielle Ausdrücke in einfachere Ausdrücke zu verwandeln.

5.1 Die Funktion e^{ix}

Was sind eigentlich komplexe Exponenten? Sicherlich multipliziert man e nicht $\sqrt{-1}\pi$ mal mit sich selbst? Hierfür wird die Summation aus dem voherigen Abschnitt genommen, um die Funktion in den komplexen Raum zu erweitern.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

Wer mit den Summationen vertraut ist, die $\cos$ und $\sin$ definieren, der kann sich die Gleichheit von e^{ix} und $i\sin x + \cos x$ mit dieser Formel herleiten.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = (\frac{ix}{1!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots) + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots) = i\sin x + \cos x$$

Eine intuitivere Erklärung erhält man durch das Ableiten von e^{ix}. Da $\frac{d}{dx}e^{ix} = ie^{ix}$ ist und das Multiplizieren mit i im komplexen Raum die Rotation von 90° symbolisiert, besitzt diese Funktion die Eigenschaft, dass Tangenten an der Funktion stets 90° oder senkrecht zu einer gegebenen Position anliegen. Zusammen mit dem Startpunkt (0, 1) ergibt das nur eine Möglichkeit: den Einheitskreis im komplexen Raum.

6 Andere Darstellungsformen der Eulerschen Zahl

Eine Sache, die mich an fundamentalen Konstanten wie e interessiert, sind ihre zahlreichen Schreibweisen und deren Eigenschaften. Zum Einen gibt es das Umschreiben in andere Basen / numerische Systeme, welche ich auf Muster und Struktur untersuchen werde. Zum Anderen existiert die Eulersche Zahl als unendlicher Kettenbruch, welcher abschließend von mir auf seine Näherungsfähigkeit untersucht wird.

6.1 Die Eulersche Zahl in verschiedenen Basen

Die Eulersche Zahl ist irrational. Für rationale Basen bedeutet dies, dass die Zahl unendlich viele nicht-wiederholende Nachkommastellen aufweist. Diese untersuche ich im folgenden Abschnitt auf Verteilung und Muster und was das für die Zahl bedeutet.

6.1.1 Basis 10

In der Basis 10 (in welcher man sich auch normalerweise befindet,) gibt es 10 Ziffern von 0 bis 9. Untersucht man diese auf Verteilung/Häufigkeit, dann stellt man schnell fest, dass die Eulersche Zahl keine Ziffer bevorzugt und auch keine Muster in der Form von Zifferfolgen aufweist. Dies ist ein erwartetes Verhalten, denn die Ziffern von e sind zufällig.

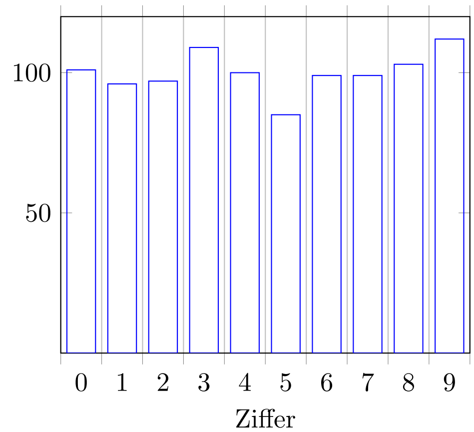

Abbildung 4: Ziffernverteilung von e in der basis 10

In dem Graphen ist die Verteilung von Ziffern der ersten 1.000 Stellen von e zu sehen. Zu beachten ist, dass die Ziffer 5 mit 85 mal in dem Abschnitt am Wenigsten vorkommt und die Ziffer 9 mit 112 Mal am Meisten, aber insgesammt erkennt man, dass alle Ziffern relativ gleich Verteilt sind.

6.1.2 Basis 2

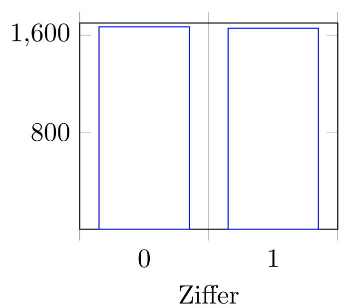

Abbildung 5: Ziffernverteilung von e in der basis 2

In der Basis 2 ist das gleiche erkennbar. Ziffer 1 und 0 kommen ungefähr gleich oft vor. Zahlen, deren Ziffern in einer Basis gleich verteilt sind, nennt man normal. e ist absolut normal, da sie eine normale Zahl in jeder natürlichen Base $>= 2$ ist. Die Zahl $0.\overline{1234567890}$ z.B ist nur normal in Basis 10. Interessant ist, dass es zwar unendlich viele normale Zahlen wie e gibt, aber diese 0% der Reellen Zahlen ausmachen - genau so wie die rationalen Zahlen.

6.2 Die Eulersche Zahl als unendlicher Kettenbruch

Ganz am Anfang wurde der einfache Kettenbruch von e bereits angesprochen (siehe 3.1). Kettenbrüche sind mit dem Euklidischen Algorithmus (ein Algorithmus zum Berechnen des größten gemeinsamen Teilers von 2 Zahlen) eng verbunden. Der Zusammenhang besteht darin, dass der euklidische Algorithmus und Kettenbrüche auf dem Prinzip der fortgeschrittenen Division basieren. Bei Kettenbrüchen kann man die Division als eine Art euklidischen Algorithmus betrachten. Tatsächlich wird der Euklidische Algorithmus dazu verwendet, die Koeffizienten in der Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl zu finden. Andere interessante Kettenbrüche gehören zu dem Goldenen Schnitt und π:

6.2.1 Andere Kettenbrüche

$$\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

Wenn man die ersten 4 Terme des Kettenbruchs von π zu einem Bruch vereinfacht, dann erhält man $\frac{355}{113}$ - die beste Fraktionale Näherung von π, die noch einen relativ kleinen Nenner und Divisor besitzt. Das liegt daran, dass der nächste Term eine große Zahl ist und den Bruch damit komplizierter macht - in anderen Worten: Große Zahl im Kettenbruch bedeutet die Vorherigen Elemente ergeben eine Gute Näherung für eine irrationale Zahl. Deswegen sind die Näherungen aus wenigen Elementen von ϕ (welche übringens aus Fibonacci-Zahlen bestehen) auch eher ungenau.

6.2.2 Auswertung als Näherung von e

Der Graph zur Genauigkeit dieser Näherungsmethode sieht ähnlich aus wie der Graph zur Genauigkeit der Summe (siehe 4.1.1 / Abbildung 2): in beiden scheint der Graph linear zu wachsen, aber der Graph in Abbildung 6 wächst rund 25% langsamer, aber die x-Achse in Abbildung 2 zeigt die Anzahl an Summanden, während die x-Achse in Abbildung 6 die Anzahl an Elementen des einfachen Kettenbruchs wiedergibt - also ist der Vergleich nicht ganz eindeutig, da aber beide Berechnungen eine Division pro x benötigen, müssten sie in Effizienz vergleichbar sein.

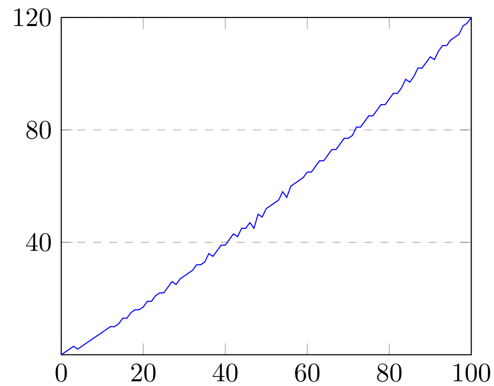

Abbildung 6: Genauigkeit von e als einfacher Kettenbruch

7 Die Eulersche Zahl auf 1.000.000 Stellen

Bevor ich die Eulersche Zahl auf eine Million stellen berechnen wollte, hatte ich sie mithilfe eines Python-moduls für arbiträre Präzision bereits auf einhunderttausend Stellen berechnet. Durch einen Verwandten dann über den sog. Tröpfelalgorithmus hingewiesen, mit dem man die Eulersche Zahl von allein in arbiträrer Präzision berechnen kann.

7.1 Der Tröpfelalgorithmus

Der Tröpfelalgorithmus funktioniert folgendermaßen:

	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	1	1	1
7	0	1	0	1	5	3
1	1	1	3	4	0	1
8	0	1	2	0	2	6

Tabelle 1: Kleine Tabelle zur Veranschaulichung / als Beispiel

Erstelle eine Tabelle. Reihe 0 besteht aus einer leeren Stelle am Anfang und danach 2,3,4,... bis zu einer Zahl n, sodass n! die so viele Stellen hat wie man Nachkommastellen berechnen möchte. Reihe 1 beginnt mit einer 2 (welches bereits die Vorkommastelle von e darstellt) und ist von nur 1 gefolgt. Um die Nächste reihe Zu berechnen beginne ganz Rechts in der jetzigen Spalte und multipliziere das Feld mit 10. Teile das durch das Feld darüber in Zeile 0, schreibe den Rest in das Untere Feld und addiere den Übertrag zum Feld rechts, Nachdem du den wert dort ebenfalls mal 10 multipliziert hat (im falle man ist ganz Rechts angekommen, dann schreibt man den übertrag unten rechts in die Reihe der Nachkommastellen). wenn man Diesen Vorgang wiederholt, dann erscheinen die Ziffern von e in basis 10 als die Erste Reihe der Tabelle.

Quellenverzeichnis

- Maor, Eli: e The Story of a Number. Princeton University Press. Princeton, New Jersey 1994
- Rudin, Walter: Reelle und Komplexe Analysis, Oldenbourg Verlag München Wien, 3. Ed.
- Robert Nemiroff und Jerry Bonnell: e auf 2 Millionen Ziffern: https://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.2mil
- Generelle Informationen: https://en.wikipedia.org/wiki/eulers_number
- Tröpfelalgorithmus: https://de.wikipedia.org/wiki/Tröpfelalgorithmus
- Normale Zahlen: https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_number
- Kettenbruch: https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch