Université Hassan II-Casablanca
Faculté des Sciences Ben M'Sik
Département de Mathématiques et Informatique

Année Universitaire : 2021 − 2022
Filière : SMPC
Semestre : 1

Analyse I

Série 2

Exercice 1 Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos(x)}$.

3. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{2x^2}{1-\cos(x)}\right)$.

4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2+\cos(x)}{x-\sin(2x)}$.

Exercice 2 Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaine de définition:

1. $f(x) = (x-1)\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2-1}\right)$.

2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$.

3. $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice 3 Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité au point x_0 :

1. $f(x) = (x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right), \quad x_0 = 1$
2. $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{\cos(x)-1}, \quad x_0 = 0$
3. $f(x) = \dfrac{|x^2+4x|-3}{x+3}, \quad x_0 = -3$

Exercice 4

1. Soit la fonction f définie pour tout $x > 0$ par
$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}.$$
Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (x+1)e^x.$$
Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 2$ sur $[0, 1]$.

Exercice 5 Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que
$$g(a) \neq g(b)$$
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 6 A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes:

1. $\forall x > 0, \qquad \dfrac{1}{x+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}$
2. $\forall x > 0, \qquad \dfrac{x}{x^2+1} < \arctan(x) < x$
3. $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$