PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

# Ayudantía 3

Límites al infinito, Asíntotas Horizontales, Continuidad y Discontinuidad.

## 1. Resumen

### 1.1. Asíntotas

Definición de dos tipos: verticales y horizontales.

- **Asíntota Vertical**: Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje $y$ que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

  a la recta $x = a$ se la denomina asíntota vertical.

- **Asíntota Horizontal**: Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje $x$ que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a, \ \textit{siendo a un valor finito}$$

  la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

- **Asintota Oblicua**: Estás asíntotas son rectas donde $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ si $m$ existe: $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = n$. Por lo tanto la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua.

### 1.2. Continuidad

Para ver continuidad es la misma definición de existencia de límite con una condición más

$$f \text{ es continua en } a \ \textit{si y sólo si} \ \lim_{x\to a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad f(a) = L$$

## 2. Problemas

### 2.1. Problema semana pasada

Si $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$, muestre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$

**Solución**: Motemos que la función $f$ es de la forma

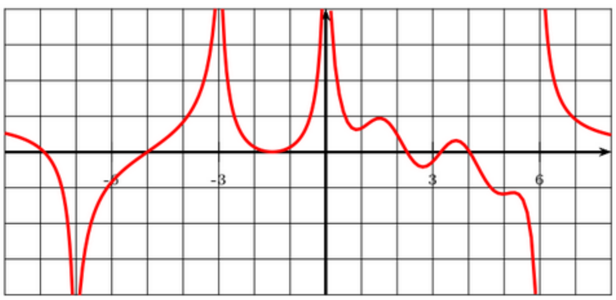
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Entonces notemos que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, por lo tanto $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe. Por otro lado notemos que $2 \in \mathbb{Z}$, entonces $f(2) = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$$

### 2.2. Problema 1

A partir de la gráfica de $f$, determine el valor de cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales.

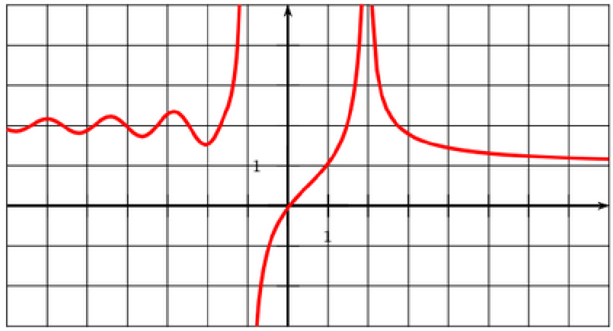



- $\lim_{x\to -7} f(x)$
- $\lim_{x\to 0} f(x)$
- $\lim_{x\to 6^-} f(x)$
- $\lim_{x\to -3} f(x)$
- $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

**Solución**: Hay que ver el gráfico

### 2.3. Problema 2

A partir de la gráfica de $f$, determine el valor de cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horinzontales.




- $\lim_{x \to 2} f(x)$
- $\lim_{x \to -1^-} f(x)$
- $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
- $\lim_{x \to \infty} f(x)$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

**Solución**: Hay que ver el gráfico

### 2.4. Problema 3

Determine el valor de los siguientes límites infinitos.

(a) $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x+2}{x+3}$

**Solución**: Notemos que este límite diverge, el númerador cuando $x \to -3^+$ es negativo y denominador es positivo. Entonces

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x+2}{x+3} = -\infty$$

(b) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

**Solución**:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{(x-2)} = \frac{+}{-} \Rightarrow = -\infty$$

(c) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$

**Solución**:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(-)(+)}{(+)(-)} \Rightarrow = \infty$$

## 2.5. Problema 4

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

calcule:

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

**Solución**: Primero la fracción que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)}$$

Notemos que si $x \to 0^+$

- $x \to +$
- $x + 2 \to +$
- $x - 1 \to -$

Entonces $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

**Solución**: Primero la fracción que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)}$$

Notemos que si $x \to 0^-$

- $x \to -$
- $x + 2 \to +$
- $x - 1 \to -$

Entonces $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$

(c) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

**Solución**: Primero la fracción que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

Entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

**Solución**: Primero la fracción que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

Entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

## 2.6. Problema 5

Determine, en caso de existir, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las funciones

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7x + 2}{x^2 - x - 6}$

**Solución**:

- *Asíntotas Horizontales*:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 + \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

  Entonces $y = 3$

- *Asíntotas Verticales*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to a} \frac{(x+2)(3x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to a} \frac{3x+1}{x-3}$$

  Entonces si $x \to 3^- \Rightarrow \lim f(x) = \infty$. Notemos que si $x \to 3^+ \Rightarrow \lim f(x) = -\infty$
  Entonces $x = 3$

## 2.7. Problema 6

Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{3x^2 - x + 1}$

**Solución**:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{3x^2-x+1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{3} = 0$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

**Solución**:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9-\frac{1}{x^5}}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$

**Solución**:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+3e^{-x}}$

**Solución**:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+3e^{-x}}\frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+3} = -\frac{1}{3}$$

## 2.8. Problema 7

Determine el valor de $a$ y $b$ de modo que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x+1} - ax - b\right) = -\frac{1}{2}$$

**Solución**: Primero trabajemos lo que está dentro del límite

$$\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-(ax+b)\right) = \left(\sqrt{4x^2+2x+1}-ax-b\right)\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+(ax+b)\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+(ax+b)\right)}$$

$$= \frac{(4x^2+2x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+(ax+b)}$$

$$= \frac{4x^2+2x+1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+ax+b}$$

Notemos que necesitamos que

$$4x^2-a^2x^2=0 \Rightarrow 4x^2=a^2x^2 \Rightarrow 4=a^2 \Rightarrow a=2$$

Reemplazamos $a$ en la fracción y nos queda calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1-4bx-b^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+b}\,\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-4b-\frac{b^2}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}++\frac{1}{x^2}}+2+\frac{b}{x}} = \frac{2-4b}{4}$$

De eso último tenemos la siguiente igualdad para determinar $b$

$$\frac{2-4b}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b=-1$$