PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-8 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 7

Regla de la cadena, derivada de funciones inversas y derivada logarítmica.

1. Resumen

Derivadas

- **Definición**:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

- **Reglas/leyes de derivación**

  a) $\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$

  b) $((c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)'$

  c) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

  d) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

  e) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

  f) $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

- **Derivadas clásicas**

  $\frac{d}{dx}c = 0$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}x = 1$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

  $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}u(x)^{v(x)} = u(x)^{v(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln(u(x))\cdot v(x)\right]$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln(a)}$

  $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\cosh(x)$

- **Derivadas trigonométricas**

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\operatorname{cosec}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x) \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}(x)) = -\operatorname{cosec}(x)\cot(x)$$

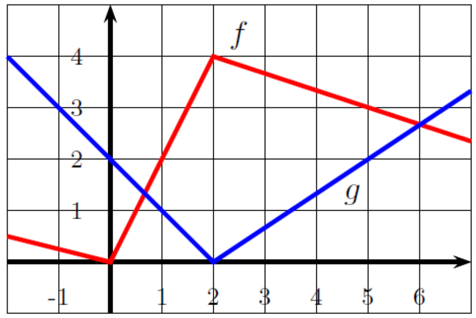
- **Derivadas trigonométricas inversas**

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc}\cos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

1. Sean f y g cuyas gráficas se muestran en la siguiente figura,



Solución:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Tenemos que ver que ocurre en 1, notemos que

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 2, \quad g(1) = 1, \quad g'(1) = -1$$

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(1)g(1) + f(1)g'(1) \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

Ahora ver la otra tenemos

$$G'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Tenemos que ver que ocurre en 5, notemos que

$$f(5) = 3, \quad f'(5) = \frac{1}{3}, \quad g(5) = 2, \quad g'(5) = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} G'(5) &= \frac{f'(5)g(5) - f(5)g'(5)}{(g(5))^2} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 2 - 3 \cdot \frac{2}{3}}{(2)^2} = -\frac{1}{3d} \end{aligned}$$

2. Calcule las derivadas utilizando Regla de la Cadena

   (a) $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$

Solución: Siempre es bueno definir funciones auxiliares para que sea más fácil ver lo que está pasando

Sea $g_1(x) = x^{60}$ y $g_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Entonces $f(x) = g_1(g_2(x))$ entonces si derivamos

$$\Rightarrow f'(x) = g_1(g_2(x))' = g_1'(g_2) \cdot g_2'(x)$$

notemos que

$g_1'(x) = 60x^{59}$ y $g_2'(x) = 4x - 4$ ahora como sabemos eso reemplacemos

$$60(2x^2 - 4x + 1)^{59} \cdot (4x - 4)$$

(b) $f(x) = \frac{1}{(2x^2-7)^3}$

Solución: Definamos funciones auxiliares $g_1(x) = \frac{1}{x^3}$ y $g_2(x) = 2x^2 - 7$

entonces $f(x) = g_1(g_2(x)) \Rightarrow f'(x) = g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x)$

vemos las derivadas de las funciones que definimos $g_1'(x) = -3\frac{1}{x^4}$ y $g_2'(x) = 4x$ reemplazamos

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(2x^2 - 7)^4} \cdot 4x$$

(c) $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$

Solución: Sea $g(x) = \sin(x)$

Entonces $f(x) = g(g(g(x))) \Rightarrow g'(g(g(x))) \cdot g'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\sin(\sin(x))) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

3. *a)* $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encontrar $F'(1)$.

Solución: Tendremos que ocupar regla de la cadena

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(xf(xf(x))) \cdot (xf(xf(x)))' \\ &= f'(xf(xf(x))) \cdot (f(xf(x)) + xf'(xf(x)) \cdot (xf(x))') \\ &= f'(xf(xf(x))) \cdot (f(xf(x)) + xf'(xf(x)) \cdot (f(x) + xf'(x))) \end{aligned} \tag{1}$$

si evaluo en $x = 1$

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(1f(1f(1))) \cdot (f(1f(1)) + 1f'(1f(1)) \cdot (f(1) + 1f'(1))) \\ &= f'(1f(2)) \cdot (f(2) + 1f'(2) \cdot (2 + 1f'(1))) \\ &= f'(3) \cdot (3 + 5 \cdot (2 + 4)) \\ &= 6 \cdot (3 + 30) \\ &= 198 \end{aligned} \tag{2}$$

b) Si $h(x) = f(g(x))(f(x) + g(x))$ donde $f(1) = 3$, $g(1) = 2$, $g'(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f'(1) = 2$ y $f'(2) = 3$, calcular $h'(1)$

Solución:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f(g(x))'(f(x) + g(x)) + f(g(x))(f(x) + g(x))' \\ &= (f'(g(x))g'(x))(f(x) + g(x)) + f(g(x))(f'(x) + g'(x)) \end{aligned} \tag{3}$$

si evaluo en $x = 1$

$$\begin{aligned} h'(1) &= (f'(g(1))g'(1))(f(1) + g(1)) + f(g(1))(f'(1) + g'(1)) \\ &= (f'(2)g'(1))(3 + 2 + f(2)(2 + 2)) \\ &= (3 \cdot 2)(3 + 2 + 4 \cdot 4) \\ &= (6)(5 + 16) \\ &= (6)(21) \\ &= 126 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Encuentre la derivada de las siguientes funciones inversas.

(a) $y = x \cdot \arctan \sqrt{x^3}$

Solución:

$$\frac{d}{dx}[x] \cdot \arctan\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + x \cdot \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

recordemos lo siguiente

$$[\arctan(u(x))]' = \frac{1}{u(x)^2 + 1} \cdot u'(x)$$

retomando lo primero

$$\Rightarrow 1 \cdot \arctan\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + x \cdot \frac{1}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \arctan\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{x^3 + 1} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \arctan\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{x^3 + 1} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

(b) $y = \cos^{-1}(\sin^{-1}(x))$

Solución:

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2(x)}}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right]$$

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\arcsin^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-\arcsin^2(x)}}$$

5. Encuentre las derivada de la siguientes funciones.

(a) $y = \sqrt{\ln(x)}$

Solución:

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{\ln(x)}] = \frac{1}{2}\ln^{\frac{1}{2}-1}(x) \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}}$$

(b) $y = x^{\sin(x)}$

Solución:

$$x^{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)\sin(x)]$$

$$x^{\sin(x)}\left(\frac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln \cdot \cos(x)\right)$$

(c) $y = \tan(x)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)^{\frac{1}{x}}] = \tan^{\frac{1}{x}}(x) \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\tan(x)\right) \cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dx}[\ln(\tan(x))] \cdot \frac{1}{x} - \ln(\tan(x)) \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]\right) \cdot \tan^{\frac{1}{x}}(x)$$

$$= \frac{\tan^{\frac{1}{x}}(x)}{x^2}\left(\frac{1}{\tan(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\tan(x)] \cdot x - 1 \cdot \ln(\tan(x))\right)$$

$$= \frac{\tan^{\frac{1}{x}}(x)}{x^2}\left(\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} \cdot x - \ln(\tan(x))\right)$$

6. Dada $y = f(x) = e^{3x}\cos(2x)$, determine $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x)$.

Solución:

Se tiene:

$$y(x) = e^{3x}\cos(2x) \Rightarrow y'(x) = 3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\sin(2x)$$

$$\Rightarrow y''(x) = 3\left(3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\sin(2x)\right) - 2\left(3e^{3x}\sin(2x) + 2e^{3x}\cos(2x)\right)$$

$$\Rightarrow y''(x) = 5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x)$$

De donde

$$\Rightarrow y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x) - 18e^{3x}\cos(2x)$$
$$+12e^{3x}\sin(2x) + 13e^{3x}\cos(2x) = 0$$

Así: $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0$