PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 8

Valores extremos y puntos críticos, valores extremos en un cerrado y
Teorema de Rolle y de valor medio.

1. Resumen

- **Teorema del Valor Extremo**: Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.

- **Teorema de Fermat**: Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

- **Teorema de Rolle**: Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
  Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$

- **Teorema del Valor Medio**: Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces exite al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la cuerva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \text{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

- **Encontrar máximos y mínimos**
  Procedimiento para encontrar máx/min
  (I) Calculamos $\frac{dy}{dx}$
  (II) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
  (III) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
  (IV) Evaluamos los extremos de la función
  (V) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
  (No siempre existe el máx o mín)

2. Problemas

2.1. Problema 1

Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-5, 3], \quad (-3, 5)$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

(c) $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

2.2. Problema 2

Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1-x)^b, \quad 0 \leq x \leq 1$

2.3. Problema 3

Sea f una función dos veces derivable, tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$, con $a < c < b$. Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f''(\alpha) < 0$.

2.4. Problema 4

Utilizando TVM para $f(x) = \sqrt{x}$ demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2.5. Problema 5

1. Probar que $\frac{\ln(1+t)}{t} < 1$ para todo $t > 0$
2. Probar que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$