PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 8

Valores extremos y puntos críticos, valores extremos en un cerrado y Teorema de Rolle y de valor medio.

1. Resumen

- **Teorema del Valor Extremo**: Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.
- **Teorema de Fermat**: Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$
- **Teorema de Rolle**: Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
  Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$
- **Teorema del Valor Medio**: Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces exite al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la cuerva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \text{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.
- **Encontrar máximos y mínimos**
  Procedimiento para encontrar máx/min
  (i) Calculamos $\frac{dy}{dx}$
  (ii) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
  (iii) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
  (iv) Evaluamos los extremos de la función
  (v) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
  (No siempre existe el máx o mín)

2. Problemas

2.1. Problema 1

Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-5, 3], \quad (-3, 5)$

Solución:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 12x = 0 \\ &= x^2 - 4x = 0 \\ &= x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $[-5, 3]$

$$\begin{aligned} &f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5 \\ &f(5) = (5)^3 - 6 \cdot 5^2 + 5 = -20 \\ &f(-5) = (-5)^3 - 6 \cdot (-5)^2 + 5 = -270 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \text{el máximo se produce en } x = 0$$

$$\Rightarrow \text{el mínimo se produce en } x = -5$$

Entonces $(-3, 5)$

$$\begin{aligned} &f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5 \\ &f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 = -43 \\ &f(5) = (5)^3 - 6 \cdot 5^2 + 5 = -20 \\ &f(-3) = (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 5 = -76 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \text{el máximo se produce en } x = 0$$

$$\Rightarrow \text{no tiene mínimo}$$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\
&\Rightarrow (x^2-x+1)-x(2x-1)=0 \\
&\Rightarrow x^2-x+1-2x^2+x=0 \\
&\Rightarrow -x^2+1=0 \\
&\Rightarrow x^2-1=0 \\
&\Rightarrow x=\pm 1 \\
f(1) &= \frac{1}{1^2-1+1}=1 \\
f(0) &= 0 \\
f(3) &= \frac{3}{3^2-3+1}=\frac{3}{9-3+1}=\frac{3}{7} \\
f(-1) &= \frac{-1}{(-1)+1+1}=-1 \\
&\Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=1 \text{ máximo} \\
&\Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=-1 \text{ mínimo}
\end{aligned} \tag{4}
$$

(c) $f(x)=xe^{-x^2/8}, \quad [-1,4]$

Solución:

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= xe^{-x^2/8} / \ln \\
\ln y &= \ln(xe^{-x^2/8}) \\
\ln y &= \ln(x) - \frac{x^2}{8} /' \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{8} \\
y' &= y\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) \\
&= xe^{-x^2/8}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pm 2
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&f(0) = 0 \\
&f(2) = 2e^{-4/8} = 2e^{-1/2} \\
&f(4) = 1 \cdot e^{-1/8} = e^{-1/8} \\
&f(-1) = -1 \cdot e^{-1/8} = -e^{-1/8} \\
&f(-2) = -2e^{-4/8} = -2e^{1/2} \\
&\Rightarrow \text{el máximo se produce en } x = 4 \\
&\Rightarrow \text{el mínimo se produce en } x = -1
\end{aligned} \tag{6}$$

2.2. Problema 2

Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1-x)^b, \quad 0 \leq x \leq 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= x^a(1-x)^b, 0 \leq x \leq 1 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b + x^a b(1-x)^{b-1}(-1) = 0 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b - x^a b(1-x)^{b-1} = 0 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b - \frac{x^a b(1-x)^b}{(1-x)} = 0 \\
f'(x) &= \frac{ax^a(1-x)^b}{x} - \frac{x^a b(1-x)^b}{(1-x)} = 0 \\
f'(x) &= x^a(1-x)^b\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{(1-x)}\right) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \frac{a}{a+b}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 0 \\
&f(1) = 0 \\
&f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b \\
&\qquad \Rightarrow \frac{a}{a+b} \text{ máximo} \\
&\qquad \Rightarrow 0 \text{ y } 1 \text{ mínimo}
\end{aligned} \tag{8}
$$

2.3. Problema 3

Sea f una función dos veces derivable, tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$, con $a < c < b$. Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f''(\alpha) < 0$.

Solución: ya que $f(c) > 0$ existen puntos en el intervalo $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ con $f'(c_1) > 0$, $f'(c_2) < 0$ por TVM y existe un punto de inflexión tal que $f'(c_3) = 0$

tomemos $\alpha \in (c_3, c_2)$ por TVM tenemos que

$$f''(\alpha) = \frac{f'(c_3) - f'(c_2)}{c_3 - c_2} = \frac{-f'(c_2)}{c_3 - c_2} < 0$$

2.4. Problema 4

Utilizando TVM para $f(x) = \sqrt{x}$ demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Solución: Por TVM tenemos

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

para algín $\xi \in (n, n+1)$

como $f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ es decreciente

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

por lo primero se concluye que

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2.5. Problema 5

1. Probar que $\frac{\ln(1+t)}{t} < 1$ para todo $t > 0$

   Solución: Dado $t > 0$ $f : [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$, tomemos la función $f(x) = \ln(1 + x)$

   por TVM

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \\ &= \frac{\ln(1+t) - \ln(1)}{t} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t} \end{aligned} \tag{9}$$

   Por otro lado, tenemos que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, para $c \in (0, t)$

$$f'(c) = \frac{1}{1+c} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+t)}{t} = f'(c) < 1$$

2. Probar que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Solución:Sea $f(x) = \sin^2(x)$ y $g(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Notemos

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}(-\sin(2x))2 = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + k$$

Si

$$f(0) = g(0) + k \Rightarrow \sin^2(0) = \frac{1-\cos(2\cdot 0)}{2}$$

$$0 = \frac{1-1}{2} + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$$