



## Ayudantía 4

Continuidad, Teorema del valor intermedio (TVI), Definición de derivada y Recta tangente.

### 1. Resumen

#### 1.1. Continuidad

Para ver continuidad es la misma definición de existencia de límite con una condición más

$$f \text{ es continua en } a \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad f(a) = L$$

#### 1.2. TVI

- **Teorema del valor intermedio (TVI):** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , sea  $N$  un número entre  $f(a)$  y  $f(b)$

$$\therefore \exists c \in [a, b] \text{ tal que } f(c) = N$$

#### 1.3. Derivadas

- **Definición:**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

- **Recta tangente en el punto  $(a, f(a))$  :**

- Pendiente  $\rightarrow m = f'(a)$
- Punto  $\rightarrow (a, f(a))$

$$\Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

## 2. Problemas

### 2.1. Problema 1

Para cada una de las siguientes funciones, determine el conjunto donde es continua.

(a)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$

(b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$

### 2.2. Problema 2

Determine si las siguientes funciones son continuas en el punto dado:

(a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} & x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

### 2.3. Problema 3

Determine el conjunto de todos los números reales donde  $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  es continua.

### 2.4. Problema 4

Para cada una de las siguientes funciones, determine los números de discontinuidad y clasifique en removible y esencial.

(a)  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 + x - 2}$

### 2.5. Problema 5

Use el Teorema del Valor Intermedio (TVI) para demostrar cada uno de los siguientes ejercicios.

- (a) Demuestre que el polinomio  $P(x) = x^3 - 3x + 1$  tiene al menos una raíz real en el intervalo  $[1, 2]$ .
- (b) Demuestre que la ecuación  $\cos(x) = x^3$  tiene al menos una solución en  $[0, 1]$ .
- (c) Demuestre que la ecuación  $\sin(x) = 16x^4 - \pi^4$  tiene al menos una solución en  $\mathbb{R}$ .

### 2.6. Problema 6

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

(a)  $y = 3x^2 - 5x + 1$  en el punto  $(-1, 1)$

(b)  $y = x - \frac{1}{x}$  en el punto  $(1, 0)$

### 2.7. Problema 7

Determine la ecuación de la recta, con pendiente negativa, que es tangente a la curva  $y = 2x^2 - 3x + 8$  y pasa por el punto  $(0, 0)$

### 2.8. Problema 8

Calcule la derivada de las siguientes funciones, en punto indicado, usando la definición de derivada.

(a)  $f(x) = x + \sqrt{x}, \quad x = 4$