PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-8 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 4

Teorema del valor intermedio (TVI), definición de derivada y recta tangente.

1. Resumen

1.1. Continuidad

Para ver continuidad es la misma definición de existencia de límite con una condición más

$$f \text{ es continua en } a \textit{ si y sólo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad f(a) = L$$

1.2. TVI

- **Teorema del valor intermedio (TVI)**: Si f es continua en $[a,b]$, sea N un número entre $f(a)$ y $f(b)$
$$\therefore \exists c \in [a,b] \text{ tal que } f(c) = N$$

1.3. Derivadas

- **Definición**:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$
- **Recta tangente en el punto** $(a, f(a))$:
  - Pendiente $\rightarrow m = f'(a)$
  - Punto $\rightarrow (a, f(a))$

$$\Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

Para cada una de las siguientes funciones, determine el conjunto donde es continua.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

Solución: Primero veamos donde está definida la función, notemos que

$$\Rightarrow x \geq 0 \text{ y } x \neq 5$$

Entonces $f(x)$ es continua en $[0, 5) \cup (5, \infty)$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$

Solución: Primero veamos la condición en la que estamos

- Si $x < 0$: La función $f(x)$ está definida para todo valor de $x < 0$, notemos que fallaría si $x = 1$, pero eso no está en este caso.

$$\therefore f(x) \text{ es continua en este caso}$$

- Si $x \geq 0$: Notemos que $f(x)$ está bien definida.

$$\therefore f(x) \text{ tambien es continua en este caso } (x > 0)$$

Veamos si $f(x)$ es continua en 0. Basta con ver los límtes laterales

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 \neq f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ es discontinua en $x = 0$

2.2. Problema 2

Determine si las siguientes funciones son continuas en el punto dado:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} & x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$

Solución: Notemos que basta calcular el $\lim_{x \to 1} f(x)$ ya que si me acerco por la derecha o la izquierda es el mismo resultado del límite.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1)$$

$$\therefore f(x) \text{ es continua en } x = 1$$

2.3. Problema 3

Determine el conjunto de todos los números reales donde $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ es continua.

Solución:

- Si $x \neq 0$: Notemos que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ está bien definida ya que el único caso posible para esté mal definida $x = 0$, pero este no es el caso. Por otro lado el producto de funciones continuas es continua, x^4 es continua porque es un polinomio.

$$\therefore f(x) \text{ es continua } \forall x \neq 0$$

- Si $x = 0$ es la función continua 0.

Para que la función sea continua, tendría que complirse $\lim_{x\to 0} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Veamos si ocurre esto

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^4} \qquad u = \frac{1}{x}, \text{ Si } x \to 0 \Rightarrow u \to \infty \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{\sin(u)}{u^4} \end{aligned}$$

Podriamos pensar en ocupar un límite conocido para este caso, pero nos damos cuenta que no satisface lo necesario para ocuparla. En cambio veamos la definición de $\sin(u)$.

$$\begin{aligned} -1 \leq &\sin(u) \leq 1 \\ -\frac{1}{u^4} \leq &\frac{\sin(u)}{u^4} \leq \frac{1}{u^4} \qquad \text{Aplicando límite} \\ \Rightarrow 0 \leq &\lim_{u\to\infty} \frac{\sin(u)}{u^4} \leq 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\Rightarrow \lim_{u\to\infty} \frac{\sin(u)}{u^4} = \lim_{x\to 0} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \Rightarrow f(x) \text{ es continua } \forall x$$

2.4. Problema 4

Para cada una de las siguientes funciones, determine los números de discontinuidad y clasifique en removible y esencial.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 + x - 2}$

Solución:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(2x+1)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(2x+1)(x+1)}{x+2}$$

Entonces $\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2\}$, notemos que tiene una discontinuidad que es escencial, porque no existe $\lim_{x \to -2} f(x)$.

2.5. Problema 5

Use el Teorema del Valor Intermedio (TVI) para demostrar cada uno de los siguientes ejercicios.

(a) Demuestre que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $[1, 2]$.

Solución: Notemos que basta con ver que el polinomio tiene una raíz positiva y una negativa

- $P(1) = 1 - 3 + 1 = -1$
- $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$

Entonces por TVI existe un $c \in (1, 2)$ tal que $P(c) = 0$

(b) Demuestre que la ecuación $\cos(x) = x^3$ tiene al menos una solución en $[0, 1]$.

Solución: Definamos una función auxiliar $h(x) = \cos(x) - x^3$.

- $h(0) = \cos(0) - 0^3 = 1$
- $h(1) \approx 0{,}54 - 1^3 \approx -0,46 < 0$

Notemos que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $h(c) = 0$

$$h(c) = 0 \Rightarrow \cos(c) - c^3 = 0 \Rightarrow \cos(c) = c^3$$

Entonces tiene una solución en $[0, 1]$

(c) Demuestre que la ecuación $\sin(x) = 16x^4 - \pi^4$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

Solución: Procedemos de manera similar, definimos una función auxiliar

$$f(x) = \sin(x) - 16x^4 + \pi^4$$

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Entonces por TVI, existe un $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$f(c) = 0 \Rightarrow \sin(c) - 16c^4 + \pi^4 \Longrightarrow \sin(c) = 16c^4 - \pi^4$$

2.6. Problema 6

Determine la ecuación de a recta tangente a la curva en el punto dado.

(a) $y = 3x^2 - 5x + 1$ en el punto $(1, -1)$

Solución: Notemos $y' = 6x - 5$

$$\begin{aligned} y - (-1) &= 1(x - 1) \\ y + 1 &= (x - 1) \\ y &= (x - 1) - 1 \end{aligned}$$

(b) $y = x - \dfrac{1}{x}$ en el punto $(1, 0)$

Solución: Notemos $y' = 1 + \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} y - 0 &= 2(x - 1) \\ y &= 2(x - 1) \end{aligned}$$

2.7. Problema 7

Determine la ecuación de la recta, con pendiente negativa, que es tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x + 8$ y pasa por el punto $(0, 0)$

Solución: Notemos $y' = 4x - 3$, tomemos un punto (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= (4x_0 - 3)(x - x_0) \\ y &= 4x_0x - 4x_0^2 - 3x + 3x_0 + f(x_0) \\ &= x(4x_0 - 3) - 4x_0^2 + 3x_0 + f(x_0) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $-4x_0^2 + 3x_0 + f(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} -4x_0^2 + 3x_0 + f(x_0) &= 0 \\ -4x_0^2 + 3x_0 + 2x_0^2 - 3x_0 + 8 &= 0 \\ -2x_0^2 + 8 &= 0 \\ x_0^2 &= 4 \\ x_0 &= \pm 2 \end{aligned}$$

Tomemos el valor $x_0 = -2$

$$\Rightarrow y = x(-8 - 3) \Rightarrow y = -11x$$

2.8. Problema 8

Calcule la derivada de las siguientes funciones, en punto indicado, usando la definición de derivada.

(a) $f(x) = x + \sqrt{x}, \qquad x = 4$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{x + h + \sqrt{x+h} - x - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} + \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= 1 + \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= 1 + \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Entonces $f'(4) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = 1 + \dfrac{1}{4}$