



Ayudantía 13

La integral definida, TFC I y TFC II

1. Resumen

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces se puede

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b) , con $F'(x) = f(x)$

- **Corolario** :

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

siendo F una antiderivada (primitiva) de f , es decir $F'(x) = f(x)$

■ Integrales indefinidas

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

Calcule

1. $\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx$

2. $\int_1^2 \frac{4+x^2}{x^3}dx$

3. $\int_{-1}^1 e^{x+1}dx$

4. $\int_{-1}^1 \left(2x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

5. $\int_1^9 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx$

6. $\int_0^\pi f(x)dx$, si $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

2.2. Problema 2

Use el teorema de cambio de variable para calcular las siguientes integrales

1. $\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx$

2. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

3. $\int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin(\sin(x))dx$

4. $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$

5. $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$

2.3. Problema 3

Resuelva las siguientes integrales trigonométricas

1. $\int_1^2 \ln(x)dx$

2. $\int \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})dx$

3. $\int x^3 \sin(1+x^2)dx$

2.4. Problema 4

Integración por partes, Integrales y Sustituciones trigonométricas y Fracciones parciales.

1. $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

2. $\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x - 1)} dx$