



Ayudantía 3

Límites al infinito, Asíntotas Horizontales, Continuidad y Discontinuidad.

1. Resumen

1.1. Asíntotas

Definición de dos tipos: verticales y horizontales.

- **Asíntota Vertical:** Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina asíntota vertical.

- **Asíntota Horizontal:** Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a, \text{ siendo } a \text{ un valor finito}$$

la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntota Oblicua:** Estas asíntotas son rectas donde $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ si m existe: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$. Por lo tanto la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua.

1.2. Continuidad

Para ver continuidad es la misma definición de existencia de límite con una condición más

$$f \text{ es continua en } a \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad f(a) = L$$

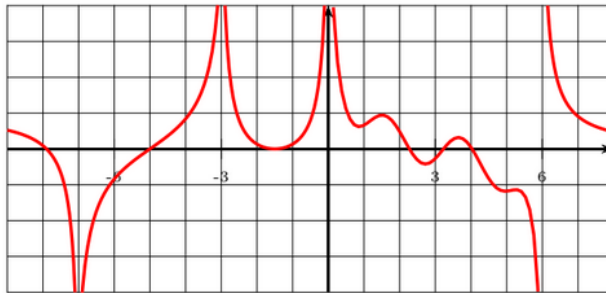
2. Problemas

2.1. Problema semana pasada

Si $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$, muestre que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$

2.2. Problema 1

A partir de la gráfica de f , determine el valor de cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales.



■ $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

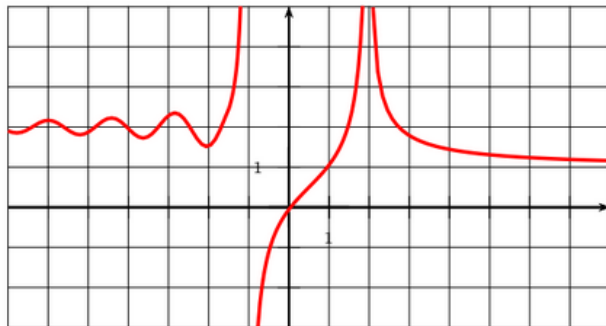
■ $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

2.3. Problema 2

A partir de la gráfica de f , determine el valor de cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.



■ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

2.4. Problema 3

Determine el valor de los siguientes límites infinitos.

(a) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

2.5. Problema 4

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

calcule:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

2.6. Problema 5

Determine, en caso de existir, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las funciones

$$(a) f(x) = \frac{3x^2 + 7x + 2}{x^2 - x - 6}$$

2.7. Problema 6

Calcule los siguientes límites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{3x^2 - x + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}$$

2.8. Problema 7

Determine el valor de a y b de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - ax - b \right) = -\frac{1}{2}$$