



Ayudantía 3

Límites al infinito, Asíntotas Horizontales y Asíntotas Verticales

1. Resumen

1.1. Asíntotas

Definición de dos tipos: verticales y horizontales.

- **Asíntota Vertical:** Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina asíntota vertical.

- **Asíntota Horizontal:** Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a, \text{ siendo } a \text{ un valor finito}$$

la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntota Oblicua:** Estas asíntotas son rectas donde $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ si m existe: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$. Por lo tanto la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua.

2. Problemas

2.1. Problemas propuestos

- Suponga que $\lim_{x \rightarrow \frac{f(x)}{x}} =$, ¿qué se puede concluir respecto del

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^3}{x^5}?$$

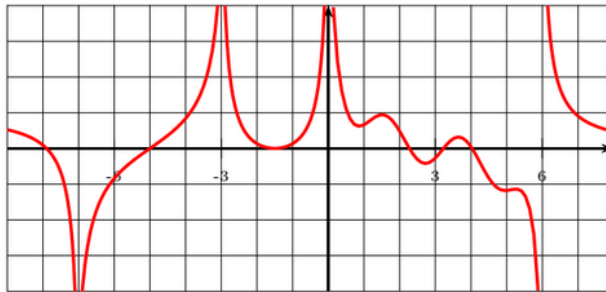
- Determine $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\frac{\pi}{x})}$
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$

2.2. Problema semana pasada

Si $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$, muestre que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$

2.3. Problema 1

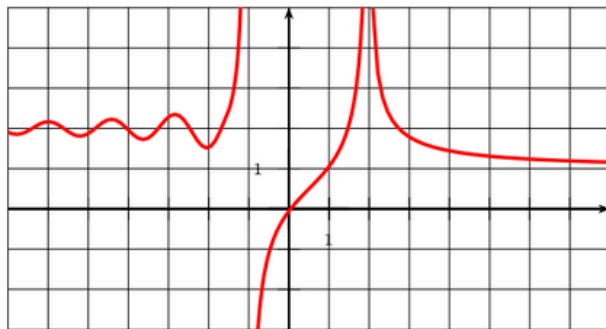
A partir de la gráfica de f , determine el valor de cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales.



- $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

2.4. Problema 2

A partir de la gráfica de f , determine el valor de cada uno de los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.



$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

2.5. Problema 3

Determine el valor de los siguientes límites infinitos.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

2.6. Problema 4

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

calcule:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

2.7. Problema 5

Determine, en caso de existir, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las funciones

$$(a) f(x) = \frac{3x^2 + 7x + 2}{x^2 - x - 6}$$

2.8. Problema 6

Calcule los siguientes límites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{3x^2-x+1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+3e^{-x}}$$

2.9. Problema 7

Determine el valor de a y b de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - ax - b \right) = -\frac{1}{2}$$

2.10. Problema 8

Determine las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:

$$\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

2.11. Problema 9

Determine el valor de $p \in \mathbb{R}$ de manera que la función:

$$f(x) = \frac{x^6 + (1 + x^2)^3}{x^p}$$

tenga una asíntota horizontal