PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-8 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 6

Regla de la cadena y derivadas implícitas.

1. Resumen

Derivadas

- **Definición**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

- **Reglas/leyes de derivación**

  a) $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$

  b) $((c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)'$

  c) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

  d) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

  e) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

  f) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- **Derivadas clásicas**

$$\frac{d}{dx} c = 0 \qquad \frac{d}{dx} x = 1 \qquad \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx} u(x)^{v(x)} = u(x)^{v(x)} \cdot \frac{d}{dx} [\ln(u(x)) \cdot v(x)] \qquad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln(a)}$$

- **Derivadas trigonométricas**

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\operatorname{cosec}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x) \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}(x)) = -\operatorname{cosec}(x)\cot(x)$$

- **Derivadas trigonométricas inversas**

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc}\cos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccosec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

2. Problemas

2.1. Problemas 1

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$ y además

$$f'(x) = g(x) \ y \ g'(x) = f(x)$$

Demuestre que $h(x) = (f(x))^2 - \left(g(x)^2\right)$ es constante y calcule su valor.

Solución: Si calculamos la derivada directamente de h, obtenemos lo siguiente

antes notemos esto $\left((f(x))^2\right)' = (f(x) \cdot f(x))' = 2f(x)f'(x)$

por lo tanto

$$\Rightarrow h'(x) = 2(f(x)f'(x) - g(x)g'(x)) = 2(f(x)g(x) - g(x)f(x)) = 2 \cdot 0 = 0$$

como $h'(x) = 0 \Rightarrow h(x)$ constante. Ahora para calcular el valor de $h(x)$ evaluamos en 0, ya que h es constante vale lo mismo para cualquier valor de x.

$$\Rightarrow h(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = ((0)^2 - (1)^2) = -1$$

2.2. Problema 2

Calcule las derivadas imlícitas de las siguientes funciones.

$a) f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$ $\qquad$ $b) f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $\qquad$ $c) f(x) = \dfrac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}$

Solución:

$a)$ Para $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$, tendremos que ver como se comportan la derivada de ua función con una constante, si vemos la propiedad b de **Reglas de derivación** las constantes 'salen' al derivar una función, por lo tanto tenemos

$$(3\sin(x))' = 3\cos(x) \quad y \quad (3\cos(x))' = -3\sin(x) \Rightarrow f'(x) = (3\cos(x)) - (-3\sin(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3\cos(x)) - (-3\sin(x)) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(x) + 3\sin(x)$$

$b)$ Para este caso la función f esta definida por dos funciones, por la función $x^2 \sin(x)$, por lo tanto tendremos que usar la propiedad d de **Relglas de derivación**, por lo tanto

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2)' \cdot \sin(x) + x^2 \cdot (\sin(x))' \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

$c)$ En este caso la función f estpa compuesta de dos funciones, en el numerador la función $1 + \sin(x)$ y en el denominador $\cos(x)$, entonces ocuparemos la propiedad e de **Reglas de**

derivación, por lo tanto

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(1+\sin(x))' \cdot \cos(x) - (1+\sin(x)) \cdot (\cos(x))')}{(\cos(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (1+\sin(x)) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

se podría simplificar más, pero el cambio no es tan importante como para hacerlo.