PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 11

Trazo de curvas, Optimización y Regla de l'Hôpital

1. Resumen

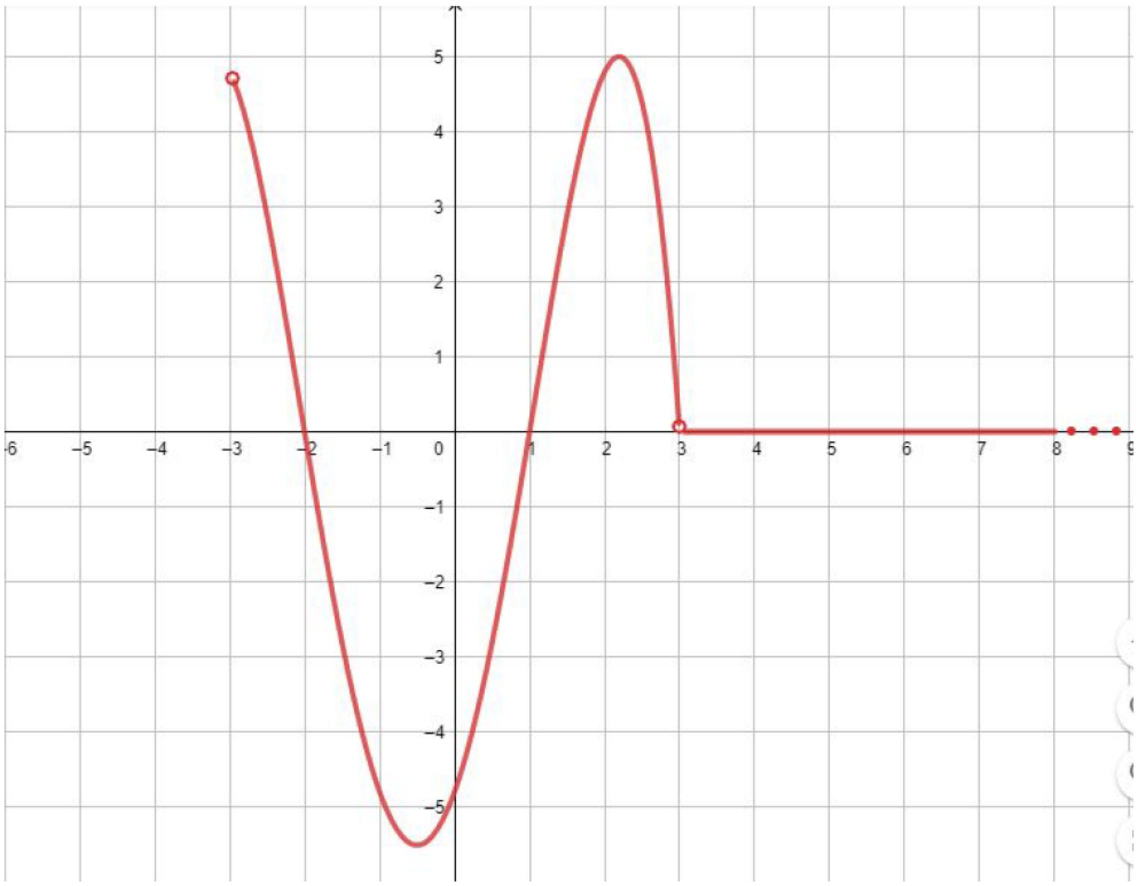
- **Teorema del Valor Extremo**: Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.
- **Teorema de Fermat**: Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$
- **Teorema de Rolle**: Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
  Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$
- **Teorema del Valor Medio**: Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces exite al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la cuerva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \text{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.
- **Encontrar máximos y mínimos**
  Procedimiento para encontrar máx/min
  (i) Calculamos $\frac{dy}{dx}$
  (ii) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
  (iii) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
  (iv) Evaluamos los extremos de la función
  (v) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
  (No siempre existe el máx o mín)

  Regla de l'Hôpital : Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$ y sean $f(c) = g(c) = 0$ (ó ∞) con $c \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq c$. Si f y g son diferenciacibles en (a, b) y existe el límite $\frac{f'}{g'}$ en c y es L, entonces existe el límite de $\frac{f}{g}$ en c existe y es L. Es decir
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

En la figura se muestra la gráfica de la función derivada (g') de una función g:



1. Determine los intervalos donde g es creciente y los intervalos donde g es decreciente
2. Determine los valores críticos donde existe g' y clasifíquelos
3. Determine los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia arriba y los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia abajo
4. Basado en la gráfica, explique por qué en el intervalo $(-2, 0)$ existe un valor dond la segunda derivada de g es igual a $-\frac{5}{2}$

Solución:

(a) $g'(x) > 0$ en $(-3,-2)$ y en $(1,3)$, entonces g es creciente en $(-3,-2)$ y g es creciente en $(1,3)$.
Nota: Resaltar que no se pueden usar unión de los dos intervalos y explicar la razón.
$g'(x) < 0$ en $(-2,1)$ entonces, g es decreciente $(-2,1)$.

(b) Valores críticos donde existe g': $x=-2$ y $x=1$, para clasificarlos se puede usar la primera o la segunda derivada:
Usando g'
g' cambia de positiva(g creciente) a negativa (g decreciente) en $x=-2$, entonces en $x=-2$ se alcanza un máximo local.
g' cambia de negativa(g decreciente) a positiva (g creciente) en $x=1$, entonces en $x=1$ se alcanza un mínimo local.

Usando g''
La recta tangente a g' en $(-2, g'(-2))$ tiene pendiente negativa, es decir, $g''(-2) < 0$ por lo que, en $x=-2$, g alcanza un máximo local.
La recta tangente a g' en $(1, g'(1))$ tiene pendiente positiva, es decir, $g''(1) > 0$ por lo que, en $x=1$, g alcanza un mínimo local.

(c) $g''(x) < 0$ en $(-3,m)$, $-1 < m < 0$ y en $(2,3)$ entonces, g es cóncava hacia abajo en $(-3,m)$ y en $(2,3)$
$g''(x) > 0$ en $(m,2)$, $-1 < m < 0$ entonces, g es cóncava hacia arriba en $(m,2)$, $-1 < m < 0$.

(d) Notar que g' en continua en $[-2,0]$ y derivable en $(-2,0)$ (es continua y no hay puntas), entonces por el TVM, existe un valor c, en $(-2,0)$ tal que

$$g''(c) = \frac{g'(0)-g'(-2)}{0-(-2)} = \frac{-5-0}{2} = -\frac{5}{2}$$

Resaltar que el TVM se está aplicando al la función g'.

2.2. Problema 2

Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, as+intotas. A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.

Solución:

Derivada: (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)

$$f'(x) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}\,(6-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Valores críticos:
Valores donde $f'(x) = 0$: $x = 4$
Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: $x = 0$ y $x = 6$.

Estudio signo de la derivada
$(6-x)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{6-x}\right)^2 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.
$x^{\frac{1}{3}}$ tiene el mismo signo de x.

Intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4-x$	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	decreciente
$(0, 4)$	+	+	+	creciente
$(4, 6)$	+	-	-	decreciente
$(6, \infty)$	+	-	-	decreciente

Intervalos donde f es creciente: $(0, 4)$
Intervalos donde f es decreciente: $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$
$f(0) = 0$ es un mínimo local de f.
$f(4) = 2\sqrt[3]{4}$ es un máximo local de f.
Nota: En $x = 6$, no hay cambio de monotonía, no se alcanza valor extremo. (En $(6, 0)$ la recta tangente es vertical)

Estudio signo de la segunda derivada
$f''(x) = \dfrac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)
$x^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{x})^4 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.

$(6-x)^{\frac{5}{3}}$ tiene el mismo signo de $6-x$.

Intervalo	-8	$(6-x)^{\frac{5}{3}}$	f''	f
$(-\infty,0)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo
$(0,4)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo
$(4,6)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo
$(6,\infty)$	-	-	$+$	cóncava hacia arriba

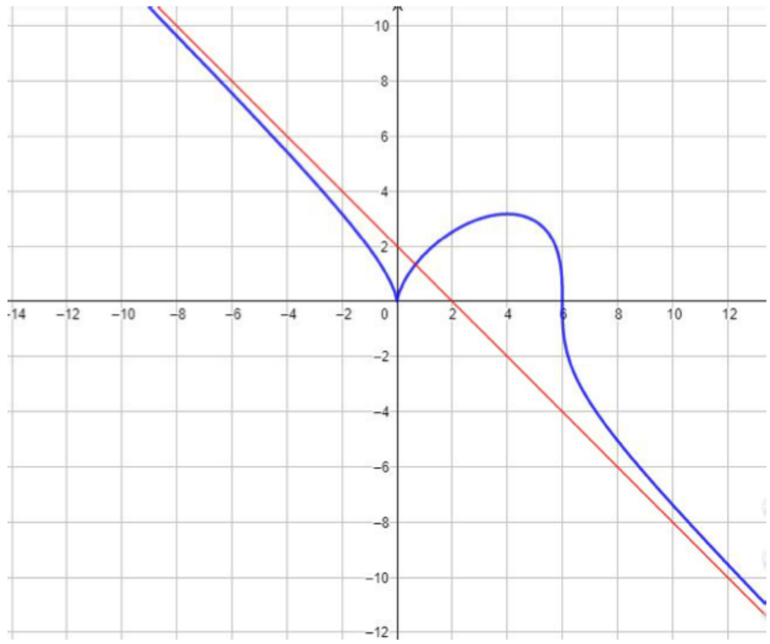
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $(6,\infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $(-\infty,0)$, $(0,4)$ y $(4,6)$
Punto inflexión: $(6,0)$

Asíntotas:
Vertical: No tiene
Horizontal: No tiene, ya que
$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2(6-x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty}x^2(6-x)}=-\infty$ (no finito)
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2(6-x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty}x^2(6-x)}=\infty$ (no finito)
Oblicua: $y=mx+b$
$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2(6-x)}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{6x^2-x^3}{x^3}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}-1}=-1$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} f(x)-mx \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)}-(-1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2(6-x)+x^3)}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2-x\sqrt[3]{x^2(6-x)}+x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2-x\sqrt[3]{x^2(6-x)}+x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{\sqrt[3]{36x^4-12x^5+x^6}}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x}+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{36}{x^2}-\frac{12}{x}+1}-\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}+1} \\
&= \frac{6}{1-(-1)+1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Ecuación: $y=-x+2$
Nota: La asíntota oblicua hacia $-\infty$ tambi[en es la recta $y=-x+2$ (dejar de ejercicio a los estudiantes)

Cálculo primera derivada



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(x^2(6-x)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2(6-x)\right)' \\
&= \frac{2x(6-x)-x^2}{3\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{x(4-x)}{\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}\left(6-x\right)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

Cálculo Segunda derivada:
Sea $w = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$
Entonces,
$\ln(w) = \ln(4-x) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{2}{3}\ln(6-x)$
Así
$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(6-x)} = \frac{-3x(6-x)-(4-x)(6-x)+2x(4-x)}{3x(4-x)(6-x)} = \frac{-3x(6-x)+3(4-x)(x-2)}{3x(4-x)(6-x)}$
es decir,
$\frac{w'}{w} = \frac{-x(6-x)-(4-x)(x-2)}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x(4-x)(6-x)}$
o
$w' = w\left(\frac{-8}{x(4-x)(6-x)}\right) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}\frac{-8}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$

2.3. Problema 3

¿En cuál(es) punto(s) sobre la curva

$$y = 1 + 20x^3 - x^5$$

la recta tangente tiene mayor pendiente?

Solución: Notemos que y' nos modela la recta tangente a la curva, por lo tanto

$$y'(x) = 5x^2(12 - x^2)$$

nosotros queremos encontrar en punto la recta tangente tiene la mayor pendiente por lo tanto, para encontrar ese punto máximo tenemos que derivar y' e igualar a 0, con ello encontraremos los candidatos a ser los puntos máximos, para después evaluar en y', por lo tanto y''

$$y''(x) = 20x(6 - x^2) = 0$$

como la función está factorizada podemos ver de inmediato las soluciones

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{6} \qquad x_3 = -\sqrt{6}$$

notemos que la función y'' es decreciente en lo intervalos $(-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$, y creciente en $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$

Entonces los máximos son $x_2 = \sqrt{6}, x_3 = -\sqrt{6}$

$$\Rightarrow (-\sqrt{6}, 1 - 84\sqrt{6}) \text{ y } (\sqrt{6}, 1 + 84\sqrt{6})$$

2.4. Problema 4

1. Hallar las dimensiones del cilindro rectangular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura h y radio basal r.

Solución: El volumen de un cilindro es una función de dos variables: el radio y la altura, y se relaciona por la expresión:

$$V(a, b) = \pi a^2 b$$

donde a es el radio y b es la altura. Ahora bien, está inscrito en un cono de radio basal r y altura h, por lo cual al inscribirlo en este las varibles se relacionan por proporcionalidad. En particular, si tomamos un radio a fijo para el cilindro, entonces se cumple por Teorema de Thales que

$$\frac{h}{r} = \frac{b}{r - a}$$

Es decir, el problema que debemos resolver es

$$\text{máx } \pi a^2 b$$

tal que

$$\frac{h}{r} = \frac{b}{r - a} \quad \text{y} \quad a, b \geq 0.$$

si despejamos la restricción

$$b = \frac{h}{r}(r-a)$$

y por lo tanto tenemos que maximizar una función de una variable:

$$V(a) = \pi a^2 \frac{h}{r}(r-a) \qquad\qquad \frac{\pi h}{r}(2ar - 3a^2)$$

Buscamos los candidatos a puntos críticos derivando:

$$V'(a) = \frac{\pi h}{r}(2ar - 3a^2)$$

Como es una fracción polinomial, la derivada existe en todos los puntos y basta solo igualar a cero para encontrar los candidatos:

$$2ar - 3a^2 = a(2r - 3a) = 0$$

por lo que los candidatos son $a = 0$ y $a = \frac{2r}{3}$. Que un cilindro tenfa radio nulo nos sugiere que no tiene espesor, y por lo tanto este no es un candidato válido. Consideremos entonces que el volumen máximo viene dado por la dimensiones:

$$a = \frac{2r}{3} \to b = \frac{h}{r}$$

2. Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje X y vértices en la parábola $y = 27 - x^2$

Solución: Denotamos por $P(x, y)$ el punto de la parábola que es el vértice de rectángulo en el primer cuadrante. Entonces el área a maximizar será:

$$A(x) = 2xy$$

Pero $P(x, y)$ es un punto de la parábola, por lo tanto, $y = 27 - x^2$. Luego la u función área queda como sigue:

$$A(x) = 54x - 2x^3$$

donde $0 \leq x \leq 3\sqrt{3}$.

La derivada es

$$A'(x) = 54 - 6x^2$$

Esta derivada existe siempre, por lo tanto los puntos críticos son

$$\{0, 3\sqrt{3}, 3\}$$

Dado que $A''(x) = -12x$ y para $x > 0$, $A''(x) < 0$ en $x = 3$, tenemos un máximo y como en los otros dos puntos críticos el área es cero, e área máxima será cuando $x = 3$ y vale: 108

3. Sea f una función definida por

$$f(x) = (b-a)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2}\right) \text{ con } c > 0, a \neq b$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente sobre los números reales a y b que fuercen a que la función f tenga un máximo local en $x = 2c$

Solución: Dado que $f(x) = (b-a)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2}\right)$ entonces $f'(x) = (b-a)x\left(\frac{x}{2} - c\right)$
Cómo requerimos que $f'(2c) = 0$ lo que significa que en $x = 2c$ hay un punto crítico.
Para que además se produzca un valor máximo, requerimos que $f''(2c) < 0$.
Pero $f''(x) = (b-a)(x-c)$ y $f''(2c) = (b-a)c$
Luego para que $(b-a)c < 0$ como $c > 0$ por hipótesis, se debe cumplir que

$$b < a$$

2.5. Problema 5

Calcule los siguientes límites usando directamente la Regla de l'Hôpital

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = 0$$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x) - \ln(1+x)}{3x^2}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{3x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+x}}{6x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\sin(x) + \frac{1}{(1+x)^2}}{6} = \frac{1}{6}$$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\frac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\frac{\ln(x)+x\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

2.6. Problema 6

Calcule (si existe) el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Solución: Este límite en $x=0$ es de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)^{\infty}$. Esto no nos quiere decir que podemos ocupar l'Hôpital, entonces es necesario escribirlo de una mejor manera

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
\Rightarrow \ln L &= \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\ln\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(x))-\ln(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Ahora se ve de la forma $\frac{0}{0}$ ya que $\ln(\sin(x))-\ln(x)\to 0$. Entonces podemos ocupar l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)-\ln(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{2x^2\sin(x)}$$

Pero esta función es de la forma $\frac{0}{0}$ y también es diferenciable. Aplicamos l'Hôpital otra vez

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{2x^2\sin(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-x\sin(x)-\cos(x)}{4\sin(x)+2x^2\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{4\sin(x)+2x\cos(x)}
\end{aligned}$$

Notemos que podemos manipular el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{4\sin(x)+2x\cos(x)} &= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{4\sin(x)+2x\cos(x)} \cdot \frac{x}{x} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{4\sin(x)+2x\cos(x)} \\
&= -\lim_{x} \frac{1}{4\frac{\sin(x)}{x}+2x\cos(x)} \\
&= -\frac{1}{4+2} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\ln(L) = -\frac{1}{6} \Rightarrow L = e^{-\frac{1}{6}}$$