PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 1

Límites

1. Resumen de límites

Para tener una noción de límites, supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma). Entonces escribimos. $f(x)$ cuando $x \to a$ es L:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Es decir, cuando nos acercamos a $x = a$ por la izquierda o por la derecha, el valor de la función tiende a ser L, pero no necesariamente a $f(x = a) = L$.

Entonces con eso podemos preguntarnos ¿Cuándo un límite existe?

- **Existencia**
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
- **Definción**
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

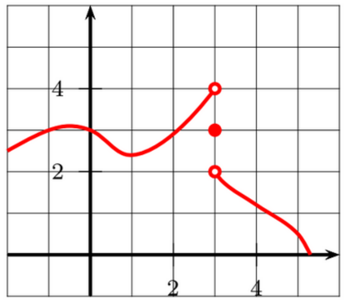
Algunas propiedades de los límites: Si se cumple que $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen.

- $\lim_{x \to a} f \pm g = \lim_{x \to a} f \pm \lim_{x \to a} g$
- $\lim_{x \to a} cf = c \lim_{x \to a} f$
- $\lim_{x \to a} f \cdot g = \lim_{x \to a} f \cdot \lim_{x \to a} g$
- $\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \to a} f}{\lim_{x \to a} g}$

2. Ejercicios

2.1. Problema 1

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f



(I) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$

(II) $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

a) Sólo I

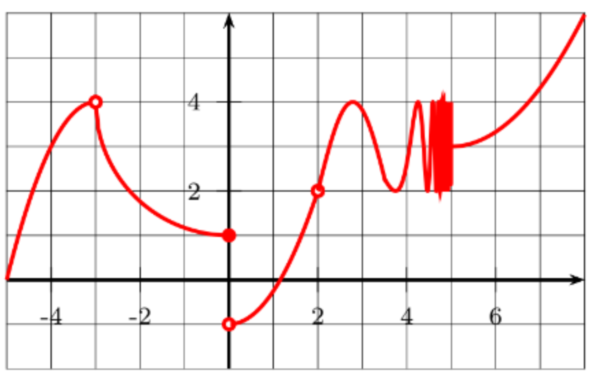
b) Sólo II

c) Ambas

d) N.A

2.2. Problema 2

Para la función h, cuya gráfica se da, determine el valor de cada cantidad, si existe. En caso que no exista explique por qué.



- $\lim_{x \to -3^-} h(x)$
- $\lim_{x \to -3^+} h(x)$
- $\lim_{x \to -3} h(x)$
- $h(-3)$
- $\lim_{x \to 0^-} h(x)$
- $\lim_{x \to 0^+} h(x)$
- $\lim_{x \to 0} h(x)$
- $h(0)$
- $\lim_{x \to 2} h(x)$
- $\lim_{x \to 5^+} h(x)$
- $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

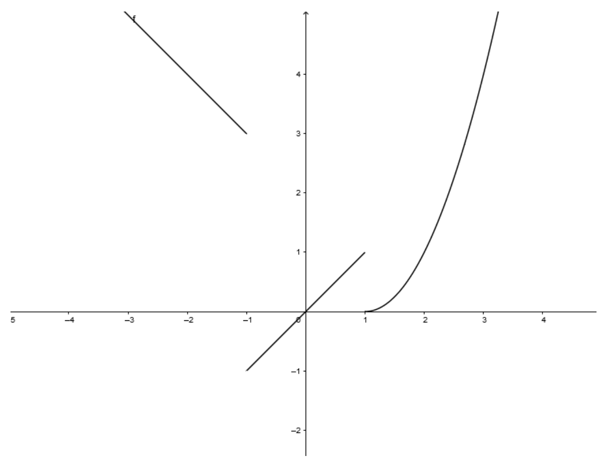
2.3. Problema 3

Trace la gráfica de la siguiente función donde $f(x)$ es

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

y úsela para determinar todos los valores a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

Solución:



Notemos que por el gráfico se observa que existe el límite para el intervalo $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

2.4. Problema 4

Suponga que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -1$, aplicando las propiedades de los límites, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to 1} (2f(x) + 3g(x))$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} (2f(x) + 3g(x)) &= \lim_{x\to 1} 2f(x) + \lim_{x\to 1} 3g(x) \\ &= 2\lim_{x\to 1} f(x) + 3\lim_{x\to 1} g(x) \\ &= 2\cdot 4 + 3\cdot(-1) = 8 - 3 = 5 \end{aligned} \tag{1}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} (2f(x))^2(3g(x))^2$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(2f(x))^2(3g(x))^2 &= \lim_{x\to 1}(2f(x))^2\cdot\lim_{x\to 1}(3g(x))^2\\
&= \lim_{x\to 1}4f(x)^2\cdot\lim_{x\to 1}9g(x)^2\\
&= 4\lim_{x\to 1}f(x)^2\cdot 9\lim_{x\to 1}g(x)^2\\
&= 4\cdot(4)^2\cdot 9\cdot(-1)^2 = 576
\end{aligned} \tag{2}$$

2.5. Problema 5

Aplicando las propiedades de los límites, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-2)}\\
&= \frac{-1+2}{-1-2} = -\frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{3}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{t+1-1}{t^2+t}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{t}{t(t+1)}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{t+1}\right)\\
&= \frac{1}{0+1} = 1
\end{aligned} \tag{4}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\right)\frac{(\sqrt{x^2+p^2}+p)}{(\sqrt{x^2+p^2}+p)}\frac{(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{(\sqrt{x^2+q^2}+q)} \\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+p^2-p^2}{x^2+q^2-q^2}\right)\frac{(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{(\sqrt{x^2+p^2}+p)} \\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}\right) \\
&= \frac{\sqrt{q^2}+q}{\sqrt{p^2}+p} = \frac{2q}{2p} = \frac{q}{p}
\end{aligned} \tag{5}$$

2.6. Problema 6

Determine todos los números reales a de modo que el siguiente límite exista.

$$L = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-a^2x-6a}$$

Calcule el valor de dicho límite.

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{2x^2-a^2x-6a}$$

Entonces para que exista el límite se tiene que cumplir

$$\begin{aligned}
0 &= 2(2)^2 - a^2(2) - 6a \\
&= -2a^2 - 6a + 8 \\
&- a^2 - 3a + 4 \\
&= a^2 + 3a - 4 = (a+4)(a-1)
\end{aligned} \tag{6}$$

Por lo tanto los valores de a para que el límite exista son $a = -4, 1$

2.7. Problema 7

Dada la función

$$f(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$$

Calcule, en caso de existir $\lim_{x\to -2} f(x)$

Solución: Recordemos las propiedades del valor absoluto

- Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$
- Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Con ello podemos ver los limites laterales para comprobar que existe si coinciden.

- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2-(-x)}{2+x} = \dfrac{2+x}{2+x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2-(-x)}{2+x} = \dfrac{2+x}{2+x} = 1$

Por lo tanto el límite existe.

2.8. Problema 8

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$$

Calcule, en caso de existir $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Solución: Recordemos las propiedades del valor absoluto

- Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$
- Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Con ello podemos ver los limites laterales para comprobar que existe si coinciden.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{-(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} -(x+3) = -5$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} (x+3) = 5$

Por lo tanto el límite no existe.