PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 12

La integral definida, TFC I y TFC II

1. Resumen

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces se puede

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), con $F'(x) = f(x)$

- **Corolario** :

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

siendo F una antiderivada (primitiva) de f, es decir $F'(x) = f(x)$

2. Problemas

2.1. Problema 1 extra

Nota: Este ejercicio se realizpo con la interpretación de área de la integral, ya que estas funciones que estamos integrando son 'lineales'
Calcule las siguientes integrales:

- $\int_2^6 (6-2x)dx$

Solución: Si usamos la gráfica de la función se tiene que $\int_2^6 (6-2x)dx = 1-9 = -8$

- $\int_{-5}^4 |2x-2|dx$

Solución: Si usamos la gráfica de la función se tiene que $\int_{-5}^4 |2x-2|dx = 36+9 = 45$

- $\int_{-3}^5 [x]dx$

Solución: Si usamos la gráfica de la función se tiene que $\int_{-3}^5 [x]dx = 10-6 = 4$

- $\int_{-3}^3 |x^2+2x-3|dx$

Solución: Observemos que $x^2+2x-3<0$ si $-3<x<1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 |x^2+2x-3|dx &= \int_{-3}^1 -x^2-2x+3|dx + \int_1^3 x^2+2x-3dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_{-3}^1 + \left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{64}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

2.2. Problema 1

1. Si $\int_1^5 f(x)dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)dx = 7$. Determine $\int_1^4 f(x)dx$.

Solución: Notemos lo siguiente

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$
$$\Rightarrow \int_1^4 f(x)dx = 12 - 7 = 5$$

2. Calcule el valor de $\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)dx$ si se sabe que

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = 3, \int_2^5 2f(x)dx = 6 \text{ y que } \int_{-1}^{-2} f(x)dx = 5$$

Solución: Observemos que por propiedades de la integral del enunciado tenemos que $\displaystyle\int_2^5 f(x)dx = 3$, por lo tanto

$$\int_{-2}^5 f(x)dx = 6$$

Además $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)dx = -5$ por lo tanto $\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)dx = 11$

2.3. Problema 2

Considere las funciones h continua, y f y g derivables. Además:

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

Demuestre que $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$. Con lo anterior, para $x > 0$ pruebe que

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

es una función constante

Solución:

Lo primero se cumple por TFC 2, basta notar que si derivo las funciones resultares de ese teorema y por regla de la cadena se obtiene lo pedido, pero se ve mas claro de esta forma,

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

definamos H como la primitiva de h (lo que quiere decir que $H' = h$) por TFC 2 se tiene que el valor de esa integral es

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H(g(x)) - H(f(x))$$

si derivo esto

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H'(g(x))g'(x) - H'(f(x))f'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

Y ahora para probar que $F(x)$ es constante basta demostrar que la derivada es 0, entonces intuitivamente derivemos

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot 1 - 0 - \left(0 - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot -\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

2.4. Problema 3

Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

Si f y g son continuas en [a,b] entonces

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

Solución: La afirmación es falsa, casi cualquier par de funciones continuas que uno elija permite verificar esto.

Ejemplo: Sean $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$

Entonces, por una parte,

$$\int_a^b (f(x)g(x))dx = \int_0^1 x\cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

y por otra

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^1 x^2dx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2.5. Problema 4

Demuestre que

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^3}dx \leq 2$$

Solución: Notemos que la función $\frac{1}{1+x^3}$ es decreciente, por lo tanto

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{1+x^3} \leq 1 \cdot (2-0) = 2$$

por otro lado tenemos que

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} + \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}$$

si vemos la primera tenemos la cota

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}$$

para la segunda tenemos

$$\frac{1}{9} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}$$

obteniendo lo pedido

2.6. Problema 5

Sean

$$F(x) = \int_0^{2x-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{dt}{1+t^2}$$

para $0 < x < 1$.Demuestre $F'(x) + 2G'(x) = 0$

Solución: Primero calculemos las derivadas de la funciones

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 \qquad , \qquad G'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot x^2}\right)$$

podemos notar que ambas se puede escribir de mejor manera todavía, por lo tanto tenemos

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{2}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

para G tenemos

$$G'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot x^2}\right) = -x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2\frac{(1-x)}{x}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

por lo tanto $F'(x) + 2G'(x) = 0$

2.7. Problema 6

Calcule

1. $\displaystyle\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx$

Solución:

$$\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx = \int_0^4 (4\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}})dx = \int_0^4 (4x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})dx = \left(4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4$$
$$= \frac{8}{2}(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) - \frac{2}{5}(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}) = \frac{8}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}$$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4+x^2}{x^3}dx$

Solución:

$$\int_1^2 \frac{4+x^2}{x^3}dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x}\right)dx = \left(-\frac{2}{x^2} + \ln|x|\right)\Big|_1^2 = -2\left(\frac{1}{4} - 1\right) + \ln(2)$$
$$= -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \ln(2) = \ln(2) + \frac{3}{2}$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{x+1}dx$

Solución:

$$\int_{-1}^1 e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_{-1}^1 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

Solución:

$$\int_{-1}^1 \left(2x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = 2\int_{-1}^1 x^3dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 2\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 + \arctan(x)\Big|_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{2}(1-1) + (\arctan(1) - \arctan(-1)) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

5. $\displaystyle\int_1^9 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx$

Solución:

$$\int_1^9 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)dx = \int_1^9 \left(2x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^9$$
$$= (12-18) - \left(4 - \frac{2}{3}\right) = -6 - \frac{10}{3} = -\frac{28}{3}$$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$, si $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

Solución:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)dx$$

$$= -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(0-1) + (0-1) = 0$$