I 1 2017-2

4. Determine el (o los) punto(s) sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la tangente es horizontal.

Solución:

Sabemos que los puntos de la curva donde la tangente es horizontal, son aquellos en que $y'(x) = 0$.] (2)

Ahora.

$$y'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$$ (1) (1)

luego

$$y'(x) = 0 \iff x = -2 \vee x = 1$$ (1)

Así los puntos de la curva dada donde la tangente es horizontal son:

$$(-2, 21) \quad \text{y} \quad (1, -6)$$ (1)

5. a) Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{2x}{2+\sqrt{x}}$.

Solución: $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$. (1)

$$f'(x) = \frac{(2x)'(2+\sqrt{x}) - 2x(2+\sqrt{x})'}{(2+\sqrt{x})^2} = \frac{2(2+\sqrt{x}) - 2x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2+\sqrt{x})^2} \quad , x \neq 0$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{4+\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})^2}$$ (2)

b) Sea g una función tal que $g(2) = 10$ y $g'(x) = x^2 g(x)$ para todo x, determine $g''(2)$.

Solución:

Se tiene que $g(2) = 10$ (i) y que $g'(x) = x^2 g(x)$, (ii) para todo x.

Derivando con respecto a x en (ii), se tiene:

$$g''(x) = 2x\, g(x) + x^2 g'(x)$$] (1)

de donde:

$$g''(2) = 4\, g(2) + 4\, g'(2) \quad (*)$$] (0,5)

Ahora de (ii), y usando (i), se tiene:

$$g'(2) = 4\, g(2) = 40$$] (1)

Así de $(*)$, se tiene.

$$g''(2) = 4\, g(2) + 4\, g'(2) = 40 + 160 = 200$$] (0,5)

I1 2017-1

1. *a*) Sea $f(x)$ una función derivable en $\mathbb{R}$, con $f(2) = 2$ y $f'(2) = 1$, se define:

$$g(x) = \ln\Big(1 + f(2x)\Big)$$

calcule $g'(1)$.

Solución:

1 0,5 0,5

$$g'(x) = \frac{1}{1+f(2x)} \cdot f'(2x) \cdot 2 \Longrightarrow g'(x) = \frac{2\,f'(2x)}{1+f(2x)}$$

$$\Longrightarrow g'(1) = \frac{2\,f'(2)}{1+f(2)} \Longrightarrow g'(1) = \frac{2}{3}$$ 1

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $(-1, -3)$ cuya ecuación está dada implícitamente por:

$$\mathcal{C} : x^2\,y^2 = 9$$

Solución:

- Derivando implícitamente con respecto a x, en la ecuación de $\mathcal{C}$, se tiene:

$$2x\,y^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = 0$$ 1

$$y'(x,y) = -\frac{y}{x} \Longrightarrow y'(-1,-3) = -3$$ 1 0,5

- Luego la ecuación de la recta tangente T a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $(-1, -3)$ es:

$$T : y + 3 = -3(x+1) \Longrightarrow T : y = -3x - 6$$ 0,5

4. *a*) Calcule $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{\arctan(3x+1)}$

Solución:

1

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(3x+1)}} \cdot (\arctan(3x+1))'$$

1,5

$$= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(3x+1)}} \cdot \frac{1}{1+(3x+1)^2} \cdot (3x+1)'$$

0,5

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2\,(1+(3x+1)^2)\,\sqrt{\arctan(3x+1)}}$$

I2 2017-2

1. *a*) Determine la derivada de la función $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' \quad 1{,}0$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{2}{1+x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{x+1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'$$

Ahora:

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \quad 0{,}7$$

Además:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} \quad 0{,}6$$

Luego:

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\,(1+x)^2}$$

Por lo tanto

$$0{,}7$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2}\cdot\frac{-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\,(1+x)^2} = -\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}\,(1+x)}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Sea f una función tal que $f'(1/2) = 1$ y sea $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, determine $g'(4)$.

Solución:

Usando la regla de la cadena, se tiene:

$$g'(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \quad 1{,}0$$

Como

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\,x^{3/2}}$$

$$0{,}7$$

Entonces.

$$g'(x) = -\frac{1}{2\,x^{3/2}}\,f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad 0{,}5$$

de donde

$$g'(4) = -\frac{1}{2\cdot 4^{3/2}}\,f'\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = -\frac{1}{2\cdot 8}\,f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} \quad 0{,}8$$

3. Demuestre que la ecuación $x^3 + e^x = 0$ tiene una única raíz real.

Solución:

- <u>Método 1.</u>

$$f'(x) = 3x^2 + e^x > 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Además

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Luego f toma todos los valores desde $-\infty$ a $+\infty$, y como es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, tiene un cero y por la monotonía es único.
Así la ecuación dada tiene una única raíz en $\mathbb{R}$.

- <u>Método 2.</u>

Como $f(1) = 1 + e > 0$ y $f(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \dfrac{1}{e} < 0$, entonces por T.V.I. f tiene un cero en $\mathbb{R}$.

Además como

$$f'(x) = 3x^2 + e^x > 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces f es estrictamente creciente, luego tiene un único cero.
Así la ecuación dada tiene una única raíz en $\mathbb{R}$.

Son 3 puntos por probar que tiene un cero.
Son 3 puntos por probar que es único.

I2 2022-1

1. (a) Si $f(x) = xe^x$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
Solución: Calculemos $f'(x)$. Por la regla del producto se tiene que

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(x)e^x$$

———————- 0,5 puntos.

$$= xe^x + 1e^x$$

———————- 0,5 puntos.

$$= xe^x + e^x.$$

———————- 0,5 puntos.

Calculemos $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(xe^x + e^x)$$

———————- 0,5 puntos.

$$= xe^x + e^x + e^x$$

———————- 0,5 puntos.

$$= xe^x + 2e^x.$$

———————- 0,5 puntos.

(b) Si $f(x) = \frac{x+2}{3x+2022}$, halle $f'(x)$.
Solución: Por la regla del cociente se tiene que

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x+2)(3x+2022) - (x+2)\frac{d}{dx}(3x+2022)}{(3x+2022)^2}$$

———————- 1 punto.

$$= \frac{1(3x+2022) - (x+2)3}{(3x+2022)^2}$$

———————- 0,5 puntos.

$$= \frac{3x+2022-3x-6}{(3x+2022)^2}$$

———————- 0,5 puntos.

$$= \frac{2016}{(3x+2022)^2}$$

———————- 1 punto.

2. Considere las funciones trigonométricas tangente y secante que son definidas respectivamente por

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{y} \quad \sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}.$$

(a) (i) Use la regla del cociente para calcular las derivadas de las funciones $\tan(x)$ y $\sec(x)$.
Solución: Derivemos la función $\tan(x)$. Por la regla del cociente se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{\frac{d}{dx}(\sin(x))(\cos(x)) - \sin(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{\cos^2(x)} \\ =& \frac{(\cos(x))(\cos(x)) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

——————- 0,5 puntos.

$$\begin{aligned} =& \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ =& \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

——————- 0,5 puntos.

$$= \sec^2(x)$$

Derivemos la función $\sec(x)$. Por la regla del cociente se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{-\frac{d}{dx}(\cos(x))}{\cos^2(x)} \\ =& \frac{-(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

——————- 0,5 puntos.

$$= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

——————- 0,5 puntos.

$$\begin{aligned} =& \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \\ =& \tan(x)\sec(x) \end{aligned}$$

(ii) Encuentre la derivada de

$$f(x) = \ln(\sec(x) + \tan(x)), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Solución: Notemos que podemos expresar f como la composición de las funciones $\ln(x)$ con $\sec(x) + \tan(x)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{\frac{d}{dx}(\sec(x) + \tan(x))}{\sec(x) + \tan(x)} \\ =& \frac{\frac{d}{dx}(\sec(x)) + \frac{d}{dx}(\tan(x))}{\sec(x) + \tan(x)} \end{aligned}$$

————- 0,5 puntos.

$$= \frac{\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)}{\sec(x) + \tan(x)}$$

————- 0,5 puntos.

$$= \frac{\sec(x)(\tan(x) + \sec(x))}{\sec(x) + \tan(x)}$$

————- 0,5 puntos.

$$= \sec(x).$$

————- 0,5 puntos.

(b) Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable sobre $\mathbb{R}$ que satisface $f'(0) = 1$, $f'(1) = 2$ y $f''(0) = -\frac{1}{2}$. Considere la función

$$F(x) = f(x + f'(x)).$$

Encuentre una expresión para $F'(x)$ y calcule el valor $F'(0)$

Solución: Notemos que podemos expresar F como la composición $F(x) = f(g(x))$, donde $g(x) = x + f'(x)$ y $g'(x) = 1 + f''(x)$.

Por la regla de la cadena tenemos que

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

————————- 0,5 puntos.

$$= f'(x + f'(x)) \cdot (1 + f''(x)).$$

————————- 0,5 puntos.

Luego usando los valores dados

$$\begin{aligned} F'(0) &= f'(0 + f'(0)) \cdot (1 + f''(0)) \\ &= f'(f'(0)) \cdot (1 + f''(0)) \\ &= f'(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

————————- 0,5 puntos.

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

————————- 0,5 puntos.

4. La curva con ecuación

$$x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2$$

se llama cardioide.

(i) Utilizando la derivación implicita calcule $y'(0)$.

Solución: Derivando la ecuación de manera implicita respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}((2x^2 + 2y^2 - x)^2)$$

————- 0,5 puntos.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2(2x^2 + 2y^2 - x)\frac{d}{dx}(2x^2 + 2y^2 - x)$$

————- 0,5 puntos.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2(2x^2 + 2y^2 - x)\left(2\frac{d}{dx}(x^2) + 2\frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(x)\right)$$

————- 1 punto.

Recuerde que y es una función de x, así que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener que

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'.$$

————- 0,5 puntos.

Por tanto,

$$2x + 2yy' = 2(2x^2 + 2y^2 - x)(4x + 4yy' - 1).$$

————- 1 punto.

Cuando $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} y'(0) &= 2y'(0) - 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

————- 1 punto.

(ii) Utilizando la parte (i), halle la recta tangente al cardioide en el punto $(0, \frac{1}{2})$.

Solución: La ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{1}{2} = x,$$

————- 1 punto.

es decir

$$y = x + \frac{1}{2}.$$

————- 0,5 puntos.

Observación: Para el puntaje en el item(ii), considerar el valor de $y'(0)$ obtenido por el alumno en el item(i). En este caso la recta tangente tiene ecuación

$$y = y'(0)x + \frac{1}{2}.$$

I2 2022-1

1. Calcule la derivada de las funciones:

   a) $f(x) = \arctan(x^2)$.

   Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}$$

   Puntaje:

   - 1 punto por derivar correctamente arctan.
   - 1 puntos por derivar x^2.
   - 1 punto por expresar correctamente f'.

   b) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) + 2^x$.

   Solución:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' + 2^x \ln(2)$$

   Como:

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x\,(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

   entonces

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\cos\left(\frac{x^2}{x+1}\right) + 2^x \ln(2)$$

   Puntaje:

   - 0,5 puntos por derivar correctamente sen.
   - 1 punto por derivar correctamente 2^x.
   - 1 punto por derivar correctamente $\dfrac{x^2}{x+1}$.
   - 0,5 puntos por aplicar la regla de la cadena.

2. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva: $\operatorname{sen}(x+y) = 2x - 2y$, en el punto $(\pi\,,\,\pi)$, si ésta define a y como función implícita de x.

Solución:

Derivando implícitamente en la ecuación, se tiene:

$$\cos(x+y)\,(1+y') = 2 - 2\,y' \Longrightarrow \cos(x+y) + y'\,\cos(x+y) = 2 - 2\,y'$$

$$y'\,\Big(\cos(x+y)+2\Big) = 2 - \cos(x+y) \Longrightarrow y' = \frac{2-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+2}$$

De donde: $y'(\pi\,,\,\pi) = \dfrac{2-\cos(2\,\pi)}{\cos(2\,\pi)+2} = \dfrac{1}{3}$.

Luego la recta tangente a la curva en $(\pi\,,\,\pi)$ está dada por:

$$y - \pi = \frac{1}{3}\,(x-\pi) \Longrightarrow 3y - x = 2\,\pi$$

Puntaje:

- 2 puntos por derivar implícitamente.
- 2 puntos por reemplazar en el punto o despejar y'.
- 2 puntos por determinar la recta tangente.

3. *a*) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$, si $f(x) = \ln|x|$.

Solución:

- Para $x > 0$. $f(x) = \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- Para $x < 0$. $f(x) = \ln(-x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{-x}\,(-1) = \dfrac{1}{x}$
- Por lo tanto $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Puntaje:

- 1,5 puntos por cada caso $x > 0$ y $x < 0$. Si no separan por casos y derivan directamente $|x|$ son cero puntos.

b) Si $h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donde $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, calcule $h'(4)$.

Solución:

$$h'(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\,x^{3/2}}\,f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Longrightarrow h'(4) = -\frac{1}{2\,\sqrt{4^3}}\,f'\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = -\frac{1}{16}\,f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Puntaje:

- 1 punto por derivar correctamente usando la regla de la cadena.
- 1 punto por derivar correctamente $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
- 1 punto por reemplazar.