PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 9

Ayudantia 8 + Maneras en que la primera derivada afecta el gráfico de una función, la segunda derivada y resumen trazo de curvas.

1. Resumen

- **Teorema del Valor Extremo**: Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.
- **Teorema de Fermat**: Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$
- **Teorema de Rolle**: Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
  Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$
- **Teorema del Valor Medio**: Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces exite al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la cuerva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \mathrm{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.
- **Encontrar máximos y mínimos**
  Procedimiento para encontrar máx/min
  (I) Calculamos $\frac{dy}{dx}$
  (II) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
  (III) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
  (IV) Evaluamos los extremos de la función
  (V) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
  (No siempre existe el máx o mín)

2. Problemas

2.1. Problema 1

Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-5, 3], \quad (-3, 5)$

Solución:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 12x = 0 \\ &= x^2 - 4x = 0 \\ &= x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $[-5, 3]$

$$\begin{aligned} &f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5 \\ &f(5) = (5)^3 - 6 \cdot 5^2 + 5 = -20 \\ &f(-5) = (-5)^3 - 6 \cdot (-5)^2 + 5 = -270 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \text{el máximo se produce en } x = 0$$

$$\Rightarrow \text{el mínimo se produce en } x = -5$$

Entonces $(-3, 5)$

$$\begin{aligned} &f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5 \\ &f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 = -43 \\ &f(5) = (5)^3 - 6 \cdot 5^2 + 5 = -20 \\ &f(-3) = (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 5 = -76 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \text{el máximo se produce en } x = 0$$

$$\Rightarrow \text{no tiene mínimo}$$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1) - x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow (x^2 - x + 1) - x(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - 2x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{1^2 - 1 + 1} = 1 \\
f(0) &= 0 \\
f(3) &= \frac{3}{3^2 - 3 + 1} = \frac{3}{9 - 3 + 1} = \frac{3}{7} \\
f(-1) &= \frac{-1}{(-1) + 1 + 1} = -1
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \text{ máximo}$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \text{ mínimo}$$

(c) $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

Solución:

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= xe^{-x^2/8} / \ln \\
\ln y &= \ln(xe^{-x^2/8}) \\
\ln y &= \ln(x) - \frac{x^2}{8} /' \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{8} \\
y' &= y\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) \\
&= xe^{-x^2/8}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pm 2
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&f(0) = 0 \\
&f(2) = 2e^{-4/8} = 2e^{-1/2} \\
&f(4) = 1 \cdot e^{-1/8} = e^{-1/8} \\
&f(-1) = -1 \cdot e^{-1/8} = -e^{-1/8} \\
&f(-2) = -2e^{-4/8} = -2e^{1/2} \\
&\Rightarrow \text{el máximo se produce en } x = 4 \\
&\Rightarrow \text{el mínimo se produce en } x = -1
\end{aligned} \tag{6}$$

2.2. Problema 2

Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1-x)^b, \quad 0 \leq x \leq 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= x^a(1-x)^b, 0 \leq x \leq 1 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b + x^a b(1-x)^{b-1}(-1) = 0 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b - x^a b(1-x)^{b-1} = 0 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b - \frac{x^a b(1-x)^b}{(1-x)} = 0 \\
f'(x) &= \frac{ax^a(1-x)^b}{x} - \frac{x^a b(1-x)^b}{(1-x)} = 0 \\
f'(x) &= x^a(1-x)^b\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{(1-x)}\right) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \frac{a}{a+b}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f(1) &= 0 \\
f\left(\frac{a}{a+b}\right) &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(1-\frac{a}{a+b}\right)^b \\
&\Rightarrow \frac{a}{a+b} \text{ máximo} \\
&\Rightarrow 0 \text{ y } 1 \text{ mínimo}
\end{aligned} \tag{8}
$$

2.3. Problema 3

Sea f una función dos veces derivable, tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$, con $a < c < b$. Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f''(\alpha) < 0$.

Solución: ya que $f(c) > 0$ existen puntos en el intervalo $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ con $f'(c_1) > 0$, $f'(c_2) < 0$ por TVM y existe un punto de inflexión tal que $f'(c_3) = 0$

tomemos $\alpha \in (c_3, c_2)$ por TVM tenemos que

$$f''(\alpha) = \frac{f'(c_3) - f'(c_2)}{c_3 - c_2} = \frac{-f'(c_2)}{c_3 - c_2} < 0$$

2.4. Problema 4

Utilizando TVM para $f(x) = \sqrt{x}$ demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Solución: Por TVM tenemos

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

para algín $\xi \in (n, n+1)$

como $f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ es decreciente

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

por lo primero se concluye que

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2.5. Problema 5

1. Probar que $\frac{\ln(1+t)}{t} < 1$ para todo $t > 0$

   Solución: Dado $t > 0$ $f : [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$, tomemos la función $f(x) = \ln(1 + x)$

   por TVM

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \\ &= \frac{\ln(1+t) - \ln(1)}{t} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t} \end{aligned} \tag{9}$$

   Por otro lado, tenemos que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, para $c \in (0, t)$

$$f'(c) = \frac{1}{1+c} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+t)}{t} = f'(c) < 1$$

2. Probar que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Solución:Sea $f(x) = \sin^2(x)$ y $g(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Notemos

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$
$$g'(x) = -\frac{1}{2}(-\sin(2x))2 = \sin(2x)$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x) + k$$

Si

$$f(0) = g(0) + k \Rightarrow \sin^2(0) = \frac{1-\cos(2\cdot 0)}{2}$$
$$0 = \frac{1-1}{2} + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

3. Ayudantía 9

3.1. Problema 1

Haga un estudio completo de la función $f(x) = \frac{2(x-2)}{x^2}$. Indique intervalos de crecimiento y decrecimiento asíntotas, extremos locales, concavidad y convexidad, puntos de inflexión.

Solución: notemos que la función f es continua si $x \neq 0$. Por lo tanto calculemos la derivada de f.

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1\cdot x^2 - 2x(x-2)}{x^4} = 2\cdot\frac{4x - x^2}{x^4} = \frac{2(4-x)}{x^3}$$
$$f' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ decreciente en } (-\infty, 0)$$
$$f' > 0 \text{ en } (0, 4) \Rightarrow f \text{ creciente en } (0, 4)$$
$$f' < 0 \text{ en } (4, \infty+) \Rightarrow f \text{ decreciente en } (4, \infty+)$$

veamos con la segunda derivada para ver la concavidad

$$f''(x) = 2\cdot\frac{-1\cdot x^3 - 3x^2(4-x)}{x^6} = 2\cdot\frac{2x^3 - 12x^2}{x^6} = \frac{4(x-6)}{x^4}$$

$f''(x) = 0$ si $x = 6$

$$f'' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ concavo en } (-\infty, 0)$$
$$f'' < 0 \text{ en } (0, 6) \Rightarrow f \text{ concavo en } (0, 6)$$
$$f'' > 0 \text{ en } (6, \infty+) \Rightarrow f \text{ convexo en } (6, \infty+)$$

ahora para ver las asíntotas Notemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2(x-2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2(x-2)}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow x = 0$$

asíntota vertical en 0

$$\lim_{x\to\infty+}\frac{2(x-2)}{x^2}=\lim_{x\to\infty-}\frac{2(x-2)}{x^2}=0\Rightarrow y=0$$

asíntota horizontal en 0

3.2. Problema 2

Estudie la función

$$f(x)=x-3x^{1/3}$$

determinando sus raíces, simetrías, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales, el sentido de la concavidad de f y si el gráfico posee asíntotas (¿cuáles?)

Solución: **Raíces**: Resolviendo la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 27x$, o sea $x(x^2-27)=0\Rightarrow x_1=0$ o $x_2=\pm\sqrt{27}$

Simetrías: La función es impar, por lo que de ahora en adelante estudiaremos su comportamiento para $x>0$ y para $x<0$ se obtiene aplicando imparidad.

Intervalos de crecimiento: Para estudiar el comportamiento de f en términos de donde dónde crece (y, por complemento, donde decrece), necesitamos analizar $f'(x)=1-x^{-2/3}$. La derivada $f'(x)$ es positiva donde $x^{-2/3}<1$, hacemos la tabla con los puntos críticos

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)\cup(0,1)$	$(1,\infty+)$
$f'(x)=1-x^{-2/3}$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-1]$ y $[1,\infty+)$ y decreciente en el intervalo $[-1,1]$

Máximos y mínimos locales:

Como vimos la ayudantía anterior, tenemos que ver los extremos y los puntos críticos, notemos que la función no tiene extremos, ya que está definida para para todo $\mathbb{R}$.

Con lo anterior los puntos criticos son $-1,0,1$, veamos que ocurre con el 0, notemos que en ese caso la como la función es decreciente en el intervalo $[-1,1]$, se concluye que 0 no es máx ni min local, ahora evaluemos la función el los puntos criticos restantes

$$f(1)=1-3\cdot 1^{1/3}=-2 \quad \text{y} \quad f(-1)=(-1)-3\cdot(-1)^{1/3}=2$$

ya analizamos como se comportaba la función en $(-\infty,-1]$ y $(1,\infty+)$ por lo tanto 1 es mínimo local y -1 es máximo local.

Concavidad y convexidad:

Calculemos la segunda derivada de f, $f''(x) = \frac{2}{3}x^{-5/3}$ por lo tanto si $x > 0$ la $f''(x)$ es positiva, en cambio si $x < 0$ tenemos que $f''(x)$ es negativa.

Asíntotas:

Notemos que no existe $x \longrightarrow a$ tal que $f(x) \longrightarrow \pm\infty$

por otro lado si x diverge la función no se estabiliza en un punto, por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

Ahora veamos las asíntotas oblicuas

$$m_\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1$$

$$m_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1$$

Así de haber asíntotas oblicuas ellas deben tener pendiente 1

Para que haya asíntotas oblivuas debe tenerse que los límites

$$n_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_\infty \cdot x \quad \text{y} \quad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty} \cdot x$$

$$n_\infty = \lim_{x\to\infty} -x^{1/3} = -\infty \quad \text{y} \quad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} -3x^{1/3} = \infty$$

como ambos límites no son finitos tenemos que f no tiene asíntotas oblicuas.