PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 10

Trazo de curvas.

1. Resumen

- **Teorema del Valor Extremo**: Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.

- **Teorema de Fermat**: Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

- **Teorema de Rolle**: Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$

- **Teorema del Valor Medio**: Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces exite al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la cuerva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \mathrm{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

- **Encontrar máximos y mínimos**
Procedimiento para encontrar máx/min
  (I) Calculamos $\frac{dy}{dx}$
  (II) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
  (III) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
  (IV) Evaluamos los extremos de la función
  (V) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
  (No siempre existe el máx o mín)

2. Problemas

2.1. Problema 1

Estudie la función

$$f(x) = x - 3x^{1/3}$$

determinando sus raíces, simetrías, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales, el sentido de la concavidad de f y si el gráfico posee asíntotas (¿cuáles?)

Solución: **Raíces**: Resolviendo la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 27x$, o sea $x(x^2 - 27) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ o $x_2 = \pm\sqrt{27}$

Simetrías: La función es impar, por lo que de ahora en adelante estudiaremos su comportamiento para $x > 0$ y para $x < 0$ se obtiene aplicando imparidad.

Intervalos de crecimiento: Para estudiar el comportamiento de f en términos de donde dónde crece (y, por complemento, donde decrece), necesitamos analizar $f'(x) = 1 - x^{-2/3}$. La derivada $f'(x)$ es positiva donde $x^{-2/3} < 1$, hacemos la tabla con los puntos críticos

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0) \cup (0, 1)$	$(1, \infty+)$
$f'(x) = 1 - x^{-2/3}$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty+)$ y decreciente en el intervalo $[-1, 1]$

Máximos y mínimos locales:

Como vimos la ayudantía anterior, tenemos que ver los extremos y los puntos críticos, notemos que la función no tiene extremos, ya que está definida para para todo $\mathbb{R}$.

Con lo anterior los puntos criticos son $-1, 0, 1$, veamos que ocurre con el 0, notemos que en ese caso la como la función es decreciente en el intervalo $[-1, 1]$, se concluye que 0 no es máx ni min local, ahora evaluemos la función el los puntos criticos restantes

$$f(1) = 1 - 3 \cdot 1^{1/3} = -2 \quad \text{y} \quad f(-1) = (-1) - 3 \cdot (-1)^{1/3} = 2$$

ya analizamos como se comportaba la función en $(-\infty, -1]$ y $(1, \infty+)$ por lo tanto 1 es mínimo local y -1 es máximo local.

Concavidad y convexidad:

Calculemos la segunda derivada de f, $f''(x) = \frac{2}{3}x^{-5/3}$ por lo tanto si $x > 0$ la $f''(x)$ es positiva, en cambio si $x < 0$ tenemos que $f''(x)$ es negativa.

Asíntotas:

Notemos que no existe $x \longrightarrow a$ tal que $f(x) \longrightarrow \pm\infty$

por otro lado si x diverge la función no se estabiliza en un punto, por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

Ahora veamos las asíntotas oblicuas

$$m_{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1$$

$$m_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1$$

Así de haber asíntotas oblicuas ellas deben tener pendiente 1

Para que haya asíntotas oblivuas debe tenerse que los límites

$$n_{\infty} = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_{\infty}\cdot x \quad \text{y} \quad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty}\cdot x$$

$$n_{\infty} = \lim_{x\to\infty} -x^{1/3} = -\infty \quad \text{y} \quad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} -3x^{1/3} = \infty$$

como ambos límites no son finitos tenemos que f no tiene asíntotas oblicuas.