PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 11

Trazo de curvas, Optimización y Regla de l'Hôpital

1. Resumen

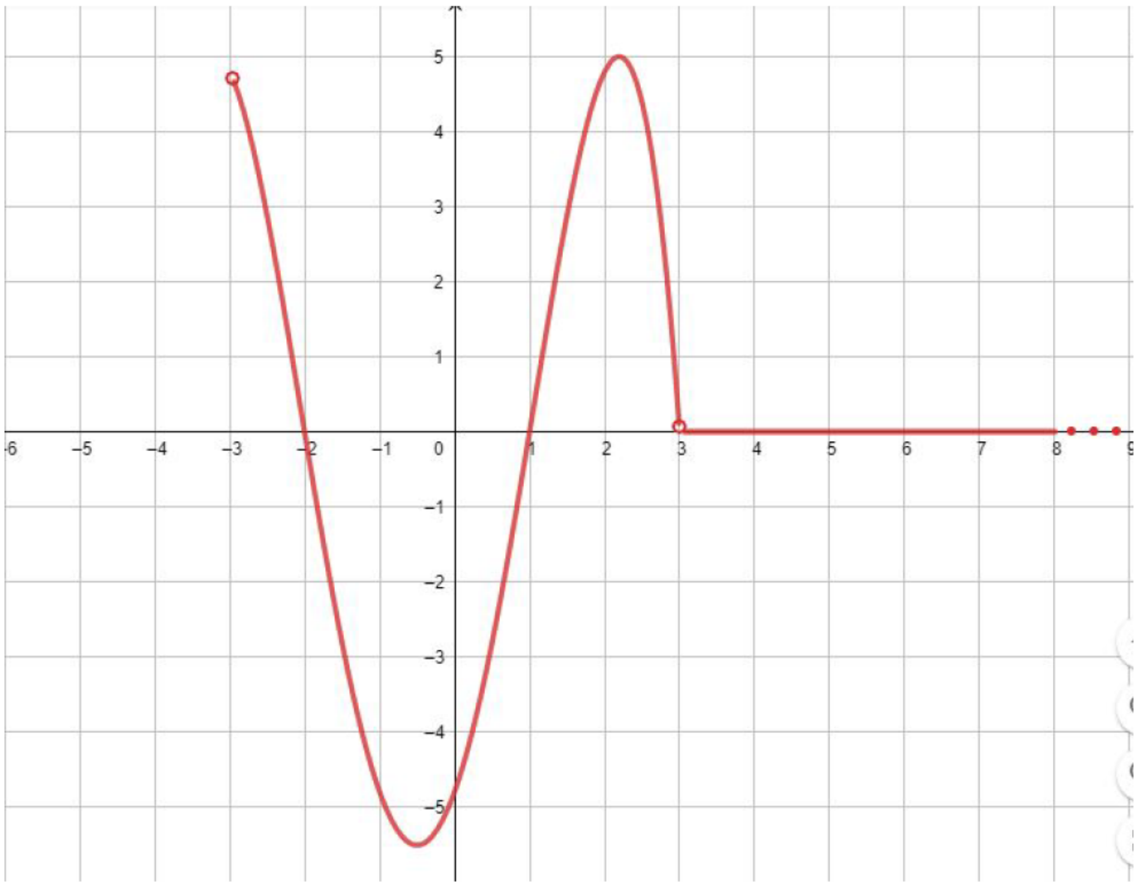
- **Teorema del Valor Extremo**: Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.
- **Teorema de Fermat**: Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$
- **Teorema de Rolle**: Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
  Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$
- **Teorema del Valor Medio**: Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces exite al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la cuerva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:
  $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \text{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.
- **Encontrar máximos y mínimos**
  Procedimiento para encontrar máx/min
  (I) Calculamos $\frac{dy}{dx}$
  (II) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
  (III) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
  (IV) Evaluamos los extremos de la función
  (V) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2 **(No siempre existe el máx o mín)**

  Regla de l'Hôpital : Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$ y sean $f(c) = g(c) = 0$ (ó ∞) con $c \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq c$. Si f y g son diferenciacibles en (a, b) y existe el límite $\frac{f'}{g'}$ en c y es L, entonces existe el límite de $\frac{f}{g}$ en c existe y es L. Es decir
  $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

En la figura se muestra la gráfica de la función derivada (g') de una función g:



1. Determine los intervalos donde g es creciente y los intervalos donde g es decreciente
2. Determine los valores críticos donde existe g' y clasifíquelos
3. Determine los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia arriba y los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia abajo
4. Basado en la gráfica, explique por qué en el intervalo $(-2, 0)$ existe un valor dond la segunda derivada de g es igual a $-\frac{5}{2}$

2.2. Problema 2

Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, as+intotas. A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.

2.3. Problema 3

¿En cuál(es) punto(s) sobre la curva

$$y = 1 + 20x^3 - x^5$$

la recta tangente tiene mayor pendiente?

2.4. Problema 4

1. Hallar las dimensiones del cilindro rectangular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura h y radio basal r.

2. Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje X y vértices en la parábola $y = 27 - x^2$

3. Sea f una función definida por

$$f(x) = (b-a)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2}\right) \text{ con } c > 0, a \neq b$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente sobre los números reales a y b que fuercen a que la función f tenga un máximo local en $x = 2c$

2.5. Problema 5

Calcule los siguientes límites usando directamente la Regla de l'Hôpital

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x}$

4. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{3x^2}$

5. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

2.6. Problema 6

Calcule (si existe) el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$