PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 2

Teorema del Sandwich, Límites trigonométricos y/o notables,
Límites infinitos.

1. Resumen

Uno de los teoremas útiles

- **Teorema del Sandwich**: Si en una vecindad de a se cumple que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

  Entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Otro caso posible dentro de las funciones, es que presenten asíntotas. Por el momento definiremos de dos tipos: verticales y horizontales.

2. Problemas

2.1. Problema 1

Sea f una función tal que

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 6}{x^2 - 4} = 5$$

Calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 6}{x^2 - 4} = 5 &\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 6}{(x-2)(x+2)} = 5 \\ &\Rightarrow f(2) - 6 = 0 \\ &\Rightarrow f(2) = 6 \end{aligned} \tag{1}$$

2.2. Problema 2

Calcule

(a) $\lim_{x \to 0} x \cos(1/x)$

Solución: Notemos que $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$. Lo veremos para el caso cuando $x \to 0^+$ ya que el caso cuando $x \to 0^-$ es análogo. Entonces tenemos lo siguiente:

$$x \cos(1/x) \Rightarrow -x \leq x \cos(1/x) \leq x \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x \cos(1/x) &\Rightarrow \lim_{x \to 0} -x \leq \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) \leq \lim_{x \to 0} x \\ &\Rightarrow \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left(\cos(x) + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}\left(\cos(x)+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{t}\right)^3\sin(t)\right)\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1+t^2}\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^3}\sin(t)\right)\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1+t^2}\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^2}\frac{\sin(t)}{t}\right)\\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{t^2}\frac{\sin(t)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\sin(t)}{t}
\end{aligned} \tag{4}$$

Notemos que $\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\sin(t)}{t}=1$

Basta calcular $\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right) &\Rightarrow -\frac{t^2}{1+t^2}\leq\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2}\leq\frac{t^2}{1+t^2}\\
&\Rightarrow -\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1+t^2}\leq\lim_{t\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2}\leq\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1+t^2}\\
&\Rightarrow 0\leq\lim_{t\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2}\leq 0
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\lim_{t\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2}=0$. Juntando lo anterior tenemos que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}\left(\cos(x)+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0+1=1$

2.3. Problema 3

Sea f una función que satisface la siguiente desiguadad

$$\frac{6}{\sqrt{x}+1}<f(x)<\frac{12x-2}{2x},\ \text{para todo } x>0$$

¿Qué se puede decir respecto a $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Solución: Con esa desigualdad podemos que ocurre con los límites

$$\frac{6}{\sqrt{x}+1} < f(x) < \frac{12x-2}{2x} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{6}{\sqrt{x}+1} < \lim_{x\to 1} f(x) < \lim_{x\to 1} \frac{12x-2}{2x}$$

Entonces tenenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{6}{\sqrt{x}+1} < \lim_{x\to 1} f(x) < \lim_{x\to 1} \frac{12x-2}{2x} &\Rightarrow \frac{6}{\sqrt{1}+1} < \lim_{x\to 1} f(x) < \frac{12(1)-2}{2(1)} \\ &\Rightarrow 3 < \lim_{x\to 1} f(x) < 5 \end{aligned} \tag{5}$$

Al ser los límites distintos no podemos usar el Teorema del Sandwich, por lo tanto no podemos determinar el límite de f cuando $x \to 1$

2.4. Problema 4

Sea f una función que satisface la siguiente desiguadad

$$\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \le f(x) \le \frac{10x-21}{2x}, \text{ para todo } x > 0$$

¿Qué se puede decir respecto a $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)$?

Solución:
Oservación: Para este ejercicio el $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to 0} f(1/x)$ por un tema de simplificar la notación, ya que si nos ponemos en el caso de $\lim_{x\to 0} f(1/x)$ tenemos que ver tanto el $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$, pero este último no cumple la desigualdad que necesitamos.

Para esa desigualdad notemos que se cumple para todo $x \to 0+$ el $x > 0$, en particular para $1/x$. Entonces podemos ocupar la desigualdad

$$\frac{5\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \le f(1/x) \le \frac{\frac{10}{x}-21}{\frac{2}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \le \lim_{x\to 0} f(1/x) \le \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10}{x}-21}{\frac{2}{x}}$$

Tenenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{5\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \le \lim_{x\to 0} f(1/x) \le \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10}{x}-21}{\frac{2}{x}} &\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}} \le \lim_{x\to 0} f(1/x) \le \lim_{x\to 0} \frac{\frac{10-21x}{x}}{\frac{2}{x}} \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5}{\sqrt{1-x}} \le \lim_{x\to 0} f(1/x) \le \lim_{x\to 0} \frac{10-21x}{2} \\ &\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{1}} \le \lim_{x\to 0} f(1/x) \le \frac{10}{2} \\ &\Rightarrow 5 \le \lim_{x\to 0} f(1/x) \le 5 \end{aligned} \tag{6}$$

Por el Teorema del Sandwich tenemos que $\lim_{x\to 0} f(1/x) = 5$

2.5. Problema 5

Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{3x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{3\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos(x)} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{7}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec(x)}{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{\cos(x)}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \frac{1}{\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-(1-\cos(x))}{x^2} \frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))} \frac{1}{\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{-1}{(1+\cos(x))\cos(x)} \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(1+\cos(x))\cos(x)} \\
&= 1^2 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

2.6. Problema 6

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$, calcule

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x-1)}{x^2-1}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{f(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} \\
&= \lim_{x-1\to 0} \frac{f(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{9}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{x} \cdot \frac{2}{2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{2x} \cdot 2 \\
&= \lim_{2x\to 0} \frac{f(2x)}{2x} \cdot 2 \\
&= 3 \cdot 2 = 6
\end{aligned} \tag{10}$$

2.7. Problema 7

Calcule, para $n > 1$ en los naturales, el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$$

Solución: En este ejercicio vamos a tener usar un cambio de variable, ya que a simple vista no se ve.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$$

Notemos que $u = \sqrt[n]{x}$, así

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{u \to 1} \frac{u - 1}{u^n - 1}$$

Ahora calculamos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 1} \frac{u - 1}{u^n - 1} &= \lim_{u \to 1} \frac{u - 1}{(u - 1)(u^{n-1} + u^{n-1} + \ldots + u + 1)} \\ &= \lim_{u \to 1} \frac{1}{(u^{n-1} + u^{n-1} + \ldots + u + 1)} \\ &= \frac{1}{\lim_{u \to 1}(u^{n-1} + u^{n-1} + \ldots + u + 1)} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{11}$$