PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 13

Integración por partes, Integrales y Sustituciones trigonométricas

1. Resumen

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces se puede
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$
es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), con $F'(x) = f(x)$

- **Corolario** :
$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
siendo F una antiderivada (primitiva) de f, es decir $F'(x) = f(x)$

- **Integrales indefinidas**

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

Calcule

1. $\displaystyle\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4+x^2}{x^3}dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{x+1}dx$

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2x^3+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

5. $\displaystyle\int_1^9 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$, si $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & \text{si } 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$

2.2. Problema 2

Use el teorema de cambio de variable para calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx$

Solución: Usamos el cambio de variable $u=4x+1 \Rightarrow du=4dx$. Entonces $dx=\frac{1}{4}du$

$$\int_{u(0)}^{u(2)} \frac{\sqrt{u}}{4}du=\frac{1}{4}\int_1^9 u^{1/2}du=\frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2}\bigg|_1^9=\frac{u^{3/2}}{6}\bigg|_1^9=\frac{9^{3/2}}{6}-\frac{1^{3/2}}{6}$$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

Solución: Usamos el cambio de variable $u=\frac{1}{x} \Rightarrow du=-\frac{1}{x^2}dx$. Entonces $dx=-x^2du$

$$\int_{u(1)}^{u(2)} \frac{e^u}{x^2}-x^2du=\int_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{2}} -e^u du=-e^u\bigg|_1^{\frac{1}{2}}=-e^{\frac{1}{2}}+e^1$$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(\sin(x))dx$

Solución: Usamos el cambio de variable $u=\sin(x)\Rightarrow du=\cos(x)dx$. Entonces $dx=$

$\frac{1}{cos(x)}du$

$$\int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \sin(u)\cos(x)\frac{1}{\cos(x)}du = \int_0^1 \sin(u)du = -\cos(u)\Big|_0^1 = -\cos(1)+\cos(0)$$

4. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$

Solución: Usamos el cambio de variable $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. Entonces $dx = xdu$

$$\int_{u(e)}^{u(e^4)} \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{x}xdu = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_1^1 = -\cos(\pi/2)+\cos(0)$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$

Solución: Usamos el cambio de variable $u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$. Entonces $dx = (1+x^2)du$

$$\int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

2.3. Problema 3

Resuelva las siguientes integrales trigonométricas

1. $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$

Solución: Hay que recordar que para las integrales de funciones inversas se recomienda usar por partes

Usando por partes escogemos $u = \ln(x)$ y $dv = dx$. Por lo tanto nos queda:

$$\int_1^2 \ln(x)dx = \ln(x)x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = \ln(x)x - x\Big|_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1$$

2. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})dx$

Solución: Por integración por partes

$$u = \ln(\sqrt{x}) \to du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \sqrt{x}dx \to v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Luego

$$\int \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^2}\ln(\sqrt{x}) - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^2}\ln(\sqrt{x}) - \frac{4}{9}\sqrt{x^2} + C$$

3. $\int x^3 \sin(1+x^2)dx$

Solución: Por integración por partes

$$u = x^2 \to du = 2xdx$$

$$dv = x\sin(1+x^2)dx \to v = -\frac{1}{2}\cos(1+x^2)$$

Luego

$$\int x^3\sin(1+x^2)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(1+x^2) + \int x\cos(1+x^2)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(1+x^2) + \frac{1}{2}\sin(1+x^2) + C$$

2.4. Problema 4

Utilice el teorema de cambio de variable e integración por partes para calcular las siguientes integrales

1. $\int \sqrt{e^x - 1}$

Solución: Tomemos un cambio de varible conveniente (demasiado), sea $u^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2udu}{u^2+1}$ con ello

$$\int \frac{2u^2}{u^2+1}du = 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1} = 2\int 1 - \frac{1}{u^2+1}$$

$$\Rightarrow 2(u - \arctan(u)) + C = 2(\sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1})) + C$$

2. $\int e^{-x}\ln(1+e^x)dx$

Solución: Entonces, considerando $u = \ln(1+e^x)$ y $dv = e^{-x}dx$ se tiene que $du = \frac{e^x}{1+e^x}dx$

y $v = \int dv = \int e^{-}xdx = -e^{-x}$. Así, aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\ln(1+e^x)dx &= -\ln(1+e^x)e^{-x} + \int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x} \\
&= -\ln(1+e^x)e^{-x} + \int \frac{1}{1+e^x} \\
&= -\ln(1+e^x)e^{-x} + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} \\
&= -\ln(1+e^x)e^{-x} + \int 1dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} \\
&= -\ln(1+e^x)e^{-x} + x - \ln(|1+e^x|) + C \\
&= -\ln(1+e^x)e^{-x} + x - \ln(1+e^x) + C \\
&= -\ln(1+e^x)(e^{-x}+1) + x + C
\end{aligned}$$

2.5. Problema 5

Resuelva las siguientes integrales trigonométricas

1. $\displaystyle\int \tan^3(x)dx$

Solución: Notemos que $\displaystyle\int \tan^3(x)dx = \int \tan^2(x)\tan(x)dx$
Usamos la identidad $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \Rightarrow = \int (\sec^2(x)-1)\tan(x)dx$

Tomamos el cambio de variable $u = \sec(x) \to dx = \frac{1}{\sec(x)\tan(x)}du$

$$\int \frac{u^2-1}{u} = \int \left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{u^2}{2} - \ln(u) = \frac{\sec^2(x)}{2} - \ln(\sec(x))$$

2. $\displaystyle\int x\cos(x)\sin(x)dx$

Solución: Se sabe que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \Rightarrow \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

$$\int x\cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2}\int x\sin(2x)dx \to \text{ Cambio de variable } u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{u}{2}\sin u\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int u\sin(u)du$$

Integración por partes:

$$w = u \to dw = du$$

$$dp = \sin(u)du \to p = -\cos(u)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int udu = -\frac{1}{8}u\cos(u) + \frac{1}{8}\int \cos(u)du = -\frac{1}{8}u\cos(u) + \frac{1}{8}\sin(u) + C$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x) + C$$

3. $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(2x)dx$

Solución: Integración por partes:

$$u = \sin(3x) \to du = 3\cos(3x)dx$$

$$dv = \cos(2x) \to v = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\int \sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(3x)\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2} 3\cos(3x)dx$$

Ocupamos de nuevo integración por partes:

$$\cos(3x) \to du = -3\sin(3x)dx$$

$$dv = \sin(2x) \to v = -\frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\int \sin(2x)\cos(3x)dx = -\frac{\cos(3x)\cos(2x)}{2} - \int -\frac{\cos(2x)}{2}(-3\sin(3x))dx$$

$$= \frac{\sin(3x)\sin(2x)}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{\cos(3x)\cos(2x)}{2} - \frac{3}{2}\int \cos(2x)\sin(3x)dx\right)$$

$$\int \sin(3x)\cos(2x)dx = \frac{\sin(3x)\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4}\cos(3x)\cos(2x) + \frac{9}{4}\int \cos(2x)\sin(3x)dx$$

$$-\frac{5}{4}\int \sin(3x)\cos(2x)dx = \frac{\sin(3x)\sin(2x)}{2} + \frac{3\cos(3x)\cos(2x)}{4} + C$$

por lo tanto

$$\int \sin(3x)\cos(2x)dx = -\frac{2}{5}\sin(3x)\sin(2x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\cos(2x) + C$$