



Ayudantía 11

Trazo de curvas, Optimización y Regla de l'Hôpital

1. Resumen

- **Teorema del Valor Extremo:** Si f es continua sobre $[a, b]$ entonces existen c y d en el intervalo tales que $f(c)$ es el valor mínimo y $f(d)$ es el valor máximo.
- **Teorema de Fermat:** Si f tiene un mínimo o un máximo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$
- **Teorema de Rolle:** Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable sobre el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:
Existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$
- **Teorema del Valor Medio:** Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **Número/Punto crítico** Diremos que $c \in \text{Dom}(f)$ es un **número crítico**: de f si o bien $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.
- **Encontrar máximos y mínimos**
Procedimiento para encontrar máx/min

- Calculamos $\frac{dy}{dx}$
- Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$
- Evaluamos estos valores en la función $f(x)$
- Evaluamos los extremos de la función
- Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
(No siempre existe el máx o mín)

Regla de l'Hôpital : Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$ y sean $f(c) = g(c) = 0$ (ó ∞) con $c \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq c$. Si f y g son diferenciables en (a, b) y existe el límite $\frac{f'}{g'}$ en c y es L , entonces existe el límite de $\frac{f}{g}$ en c existe y es L . Es decir

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas. A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.

2.2. Problema 2

¿En cuál(es) punto(s) sobre la curva

$$y = 1 + 20x^3 - x^5$$

la recta tangente tiene mayor pendiente?

2.3. Problema 3

Hallar las dimensiones del cilindro rectangular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura h y radio basal r .

2.4. Problema 4

Calcule los siguientes límites usando directamente la Regla de l'Hôpital

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sqrt{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{3x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$

2.5. Problema 5

Calcule (si existe) el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$