PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 12

La integral definida, TFC I y TFC II

1. Resumen

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces se puede

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), con $F'(x) = f(x)$

- **Corolario** :

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

- **Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II)** : Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

siendo F una antiderivada (primitiva) de f, es decir $F'(x) = f(x)$

2. Problemas

2.1. Problema 1

1. Si $\int_1^5 f(x)dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)dx = 7$. Determine $\int_1^4 f(x)dx$.
2. Calcule el valor de $\int_0^\pi f(x)dx$, si $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

2.2. Problema 2

Considere las funciones h continua, y f y g derivables. Además:

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

Demuestre que $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$. Con lo anterior, para $x > 0$ pruebe que

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

es una función constante

2.3. Problema 3

Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

Si f y g son continuas en [a,b] entonces

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

2.4. Problema 4

Demuestre que

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^3}dx \leq 2$$

2.5. Problema 5

Sean

$$F(x) = \int_0^{2x-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{dt}{1+t^2}$$

para $0 < x < 1$.Demuestre $F'(x) + 2G'(x) = 0$

2.6. Problema 6

Calcule

1. $\int_0^4 (4-x)\sqrt{x}dx$
2. $\int_1^2 \frac{4+x^2}{x^3}dx$
3. $\int_{-1}^1 e^{x+1}dx$
4. $\int_{-1}^1 \left(2x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$
5. $\int_1^9 \frac{2-x}{\sqrt{x}}dx$