PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1100-3 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 5

Cálculo de función derivada por definición y determinar su dominio,
Derivabilidad de una función en algún valor

1. Resumen

1.1. Derivadas

- **Definición**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

  También esta es una definición equivalente:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- **Recta tangente en el punto** $(a, f(a))$:
  - Pendiente $\rightarrow m = f'(a)$
  - Punto $\rightarrow (a, f(a))$

$$\Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

2. Problemas

2.1. Problema 1

Determine la ecuación de a recta tangente a la curva en el punto dado.

(a) $y = 3x^2 - 5x + 1$ en el punto $(1, -1)$

Solución: Notemos $y' = 6x - 5$

$$\begin{aligned} y - (-1) &= 1(x - 1) \\ y + 1 &= (x - 1) \\ y &= (x - 1) - 1 \end{aligned}$$

(b) $y = x - \dfrac{1}{x}$ en el punto $(1, 0)$

Solución: Notemos $y' = 1 + \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} y - 0 &= 2(x - 1) \\ y &= 2(x - 1) \end{aligned}$$

2.2. Problema 2

Determine la ecuación de la recta, con pendiente negativa, que es tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x + 8$ y pasa por el punto $(0, 0)$

Solución: Notemos $y' = 4x - 3$, tomemos un punto (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= (4x_0 - 3)(x - x_0) \\ y &= 4x_0 x - 4x_0^2 - 3x + 3x_0 + f(x_0) \\ &= x(4x_0 - 3) - 4x_0^2 + 3x_0 + f(x_0) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $-4x_0^2 + 3x_0 + f(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} -4x_0^2 + 3x_0 + f(x_0) &= 0 \\ -4x_0^2 + 3x_0 + 2x_0^2 - 3x_0 + 8 &= 0 \\ -2x_0^2 + 8 &= 0 \\ x_0^2 &= 4 \\ x_0 &= \pm 2 \end{aligned}$$

Tomemos el valor $x_0 = -2$

$$\Rightarrow y = x(-8 - 3) \Rightarrow y = -11x$$

2.3. Problema 3

Calcule la derivada de las siguientes funciones, en punto indicado, usando la definición de derivada.

(a) $f(x) = x + \sqrt{x}, \qquad x = 4$

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x + h + \sqrt{x+h} - x - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} + \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= 1 + \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= 1 + \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Entonces $f'(4) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = 1 + \dfrac{1}{4}$

(b) $f(x) = \cos(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} = -\sin(x)
\end{aligned} \tag{1}$$

(c) $g(x) = ax^2 + bx + c$

Solución:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 - bx + c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2axh + h^2 + bh}{h} = 2ax + b
\end{aligned} \tag{2}$$

2.4. Problema 4

Determine si la función $f(x) = |x|$ es derivable en $x = 0$. Luego, haga lo mismo para $g(x) = \frac{1}{2}x|x|$. De ser derivables, determine $f'(x)$ y $g'(x)$.

Solución: Recordemos la definición de límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \end{aligned} \tag{3}$$

ahora veremos que pasa con los límites laterales

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1$$

ahora el otro límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

notamos que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h}$$

por lo tanto $f'(0)$ no existe.

Ahora veamos $g(x)$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(0+h)|0+h| - \frac{1}{2}(0)|0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(h)|h|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}|h| \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

2.5. Problema 5

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-p}{x+1} & si\ x > 0 \\ x^2 + qx & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de p y q de manera que la función sea diferenciable en $x = 0$. Determine $f'(x)$ e indique su dominio

Solución: Primero la función tiene que ser continua

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 + qx = \lim_{x\to 0} \frac{x-p}{x+1}$$

$$0 = \frac{-p}{1} \Rightarrow p = 0$$

Ahora tenemos que ver si existe la derivada

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+qh-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h-p}{h+1}-0}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h+q = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h+1}}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h+q = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h+1}$$

$$\Rightarrow q = 1$$

Calculemos la derivada de f viendo los casos por separado

si $x > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x-p)'(x+1)-(x+1)'(x-p)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow= \frac{(1)(x+1)-(1)(x-p)}{(x+1)^2} = \frac{p-1}{(x+1)^2}$$

ahora veamos el caso $x \leq 0$

$$f'(x) = 2x + q$$

2.6. Problema 6

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$ y además

$$f'(x) = g(x) \text{ y } g'(x) = f(x)$$

Demuestre que $h(x) = (f(x))^2 - \left(g(x)^2\right)$ es constante y calcule su valor.

Solución: Si calculamos la derivada directamente de h, obtenemos lo siguiente

antes notemos esto $\left((f(x))^2\right)' = (f(x) \cdot f(x))' = 2f(x)f'(x)$

por lo tanto

$$\Rightarrow h'(x) = 2(f(x)f'(x) - g(x)g'(x)) = 2(f(x)g(x) - g(x)f(x)) = 2 \cdot 0 = 0$$

como $h'(x) = 0 \Rightarrow h(x)$ constante. Ahora para calcular el valor de $h(x)$ evaluamos en 0, ya que h es constante vale lo mismo para cualquier valor de x.

$$\Rightarrow h(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = ((0)^2 - (1)^2) = -1$$

2.7. Problema 7

Calcule las derivadas imlícitas de las siguientes funciones.

$a) f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$ $\quad$ $b) f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $\quad$ $c) f(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

Solución:

a) Para $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$, tendremos que ver como se comportan la derivada de ua función con una constante, si vemos la propiedad b de **Reglas de derivación** las constantes 'salen' al derivar una función, por lo tanto tenemos

$$(3\sin(x))' = 3\cos(x) \quad y \quad (3\cos(x))' = -3\sin(x) \Rightarrow f'(x) = (3\cos(x)) - (-3\sin(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3\cos(x)) - (-3\sin(x)) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(x) + 3\sin(x)$$

b) Para este caso la función f esta definida por dos funciones, por la función x^2 $\sin(x)$, por lo tanto tendremos que usar la propiedad d de **Relglas de derivación**, por lo tanto

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2)' \cdot \sin(x) + x^2 \cdot (\sin(x))' \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

c) En este caso la función f estpa compuesta de dos funciones, en el numerador la función $1 + \sin(x)$ y en el denominador $\cos(x)$, entonces ocuparemos la propiedad e de **Reglas de derivación**, por lo tanto

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(1+\sin(x))' \cdot \cos(x) - (1+\sin(x)) \cdot (\cos(x))')}{(\cos(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (1+\sin(x)) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

se podría simplificar más, pero el cambio no es tan importante como para hacerlo.