PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Ayudantía 6 - MAT1610

1. Considere la función $f(x) = x + e^x$, la cual es uno a uno (o inyectiva) en $\mathbb{R}$. Determine el valor $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

   Solución
   Una forma:
   Se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ y $f'(x) = 1 + e^x$, entonces

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} \\ &= \frac{1}{1+e^{f^{-1}(1)}}\end{aligned}$$

   Por definición $f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow f(a) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned}f^{-1}(1) = a \quad &\Leftrightarrow \quad f(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a + e^a = 1\end{aligned}$$

   Como $f(0) = 1$ y f es inyectiva, solo para $a = 0$ se cumple que $f(a) = 1$. Por lo tanto, $f^{-1}(1) = 0$. Así,

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{1+e^0} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Otra forma:
   Considerar $y = x + e^x$, y calcular implícitamente $\frac{dx}{dy}$, que es $\left(f^{-1}\right)'(x, y)$. Se tiene que:

$$1 = \frac{dx}{dy} + e^x \frac{dx}{dy}$$

   Entonces,

$$1 = \frac{dx}{dy}\left(1 + e^x\right)$$

   y, por lo tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+e^x}$$

y

$$\frac{dx}{dy}(0,1) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

2. Para cada una de las siguientes funciones, determine y', usando la derivación logarítmica.

   (a) $y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}$

   (b) $y = \dfrac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

   Solución:

   (a)

$$\begin{aligned} y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}} &\Rightarrow \ln(y) = \ln\left((\tan(x))^{\frac{1}{x}}\right) \\ &\Rightarrow \ln(y) = \frac{1}{x}\ln(\tan(x)) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\ln(\tan(x))\right) \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{1}{x}\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} \\ &\Rightarrow y' = y\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right) \\ &\Rightarrow y' = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} y = \frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} &\Rightarrow \ln(y) = \ln\left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) \\ &\Rightarrow \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\cos^2(x)\right) - \ln\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right) \\ &\Rightarrow \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + \ln\left(\cos^2(x)\right) - \frac{2}{3}\ln((x+1)) \\ &\Rightarrow \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln((x+1)) \\ &\Rightarrow \ln(y) = x^2 - x + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln(x+1) \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x - 1 - 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{2}{3(x+1)} \\ &\Rightarrow y' = y\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right) \\ &\Rightarrow y' = \left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right) \end{aligned}$$

3. Utilice la derivación implícita para calcular la derivada indicada.

   (a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $\arctan\left(x^2 y\right) = x + xy^2$

   (b) $\dfrac{dx}{dy}$ si $y\sec(x) = x\tan(y)$

   Solución:

   (a)

$$\begin{aligned}
\arctan\left(x^2 y\right) = x + xy^2 \quad & \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\arctan\left(x^2 y\right) = \frac{d}{dx}\left(x + xy^2\right) \\
& \Rightarrow \quad \frac{2xy + x^2\frac{dy}{dx}}{1 + x^4y^2} = 1 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} \\
& \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2}{1 + x^4y^2} - 2xy\right) = 1 + y^2 - \frac{2xy}{1 + x^4y^2} \\
& \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 + y^2\right)\left(1 + x^4y^2\right) - 2xy}{x^2 - 2xy\left(1 + x^4y^2\right)}
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
y\sec(x) = x\tan(y) \quad & \Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(y\sec(x)\right) = \frac{d}{dy}\left(x\tan(y)\right) \\
& \Rightarrow \quad \sec(x) + y\sec(x)\tan(x)\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}\tan(y) + x\sec^2(y) \\
& \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}\left(y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)\right) = x\sec^2(y) - \sec(x) \\
& \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x\sec^2(y) - \sec(x)}{y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)}
\end{aligned}$$

4. Utilice derivación implícita para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2$$

   en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2=\left(2x^2+2y^2-x\right)^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(\left(2x^2+2y^2-x\right)^2\right)\\
&\Rightarrow \quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=2\left(2x^2+2y^2-x\right)\left(4x+4y\frac{dy}{dx}-1\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(2y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)\right)=2\left((4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2\left((4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x\right)}{2y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{(4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x}{y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)}
\end{aligned}$$

Así,

$$y'(x,y)=\frac{dy}{dx}(x,y)=\frac{(4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x}{y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)}$$

$$y'\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ es:

$$y=1(x-0)+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$$

5. La cantidad de carga, Q, en coulombs (c) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t)=t^3-2t^2+6t+2$. Encuentre la corriente cuando $t=0{,}5s$ y cuando $t=1s$. La unidad de corriente es el ampere ($1A=1\frac{c}{s}$). ¿En qué momento la corriente es la más baja?

   Solución

   Se tiene que la corriente en el tiempo t es $I(t)=\frac{dQ}{dt}=3t^2-4t+6$. Entonces,

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\frac{1}{2}+6=\frac{19}{4}A$$

$$I(1)=3-4+6=5A$$

   Mínimo de la corriente: $I(t)$ es una función cuadrática, es decir, alcanza su mínimo valor en

$$t=-\frac{-4}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}s$$

   Así, la corriente es más baja para $\frac{2}{3}s$

6. En un depósito en forma de cono invertido el agua sale de a razón de $10000\frac{cm^3}{min}$ al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide $6m$ de altura, y el diámetro en la parte superior es de $4m$. Si el nivel del agua se eleva a razón de $20\frac{cm}{min}$ cuando la altura del agua es de $2m$, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.
Solución: Considere
$E(t)$: Cantidad de agua que ha **Entrado** al tanque hasta el instante t.
$S(t)$: Cantidad de agua que ha **Salido** del tanque hasta el instante t.
$V(t)$: Cantidad o volumen de agua que hay en el tanque en el instante t.
$h(t)$: Altura del nivel de agua que está en el tanque en el instante t.
$r(t)$: radio correspondiente del nivel de agua en el tanque en el instante t.

Note que
$V(t) = E(t) - S(t)$ o $E(t) = V(t) + S(t)$
$V(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$
$\frac{dh}{dt} = 20\frac{cm}{min}$
$\frac{dS}{dt} = 10000\frac{cm^3}{min}$
Así,

$$E(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t) + S(t)$$

Para calcular, $\frac{dE}{dt}$ se deriva la igualdad anterior pero, como no se conoce $\frac{dr}{dt}$ en el instante de interés y, como $r(t)$ y $h(t)$ está relacionados, se puedes escribir a $r(t)$ en término de $h(t)$ ya que

$$\frac{r(t)}{2} = \frac{h(t)}{6}$$

lo cual indica que

$$r(t) = \frac{2}{6}h(t) = \frac{1}{3}h(t)$$

Por lo tanto,

$$E(t) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h(t)}{3}\right)^2 h(t) + S(t) = \frac{\pi}{27}(h(t))^3 + S(t)$$

derivando respecto de t,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{27}3(h(t))^2\frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{9}(h(t))^2\frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

Todos los valores involucrados en el lado derecho están dados para el instante de tiempo de interés, entonces,

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\pi}{9}(200)^2 20 + 10000\right)\frac{cm^3}{min} = \left(\frac{800000\pi}{9} + 10000\right)\frac{cm^3}{min}$$

Note que se utilizó que $h(t) = 2m = 200cm$