PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-20 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 8

Sumas de Riemann e Integrales

Problema 1

¿En cuál(es) punto(s) sobre la curva

$$y = 1 + 20x^3 - x^5$$

la recta tangente tiene mayor pendiente?

Problema 2 Exprese el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{3n}+\ldots+\sqrt{n^2}}{n^2}\right)$$

como una integral definida y luego calcule

Primero recordemos algo que no deberian olvidar.

Sumas de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x_k \text{ donde } x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad \triangle x_k = \frac{b-a}{n} \tag{1}$$

Con eso podemos continuar con la solución, hagamos solo manipulación algebraica para escribirlo de una manera conveniente

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{3n}+\ldots+\sqrt{n^2}}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{3n}+\ldots+\sqrt{n^2}}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{2n}}{n}+\frac{\sqrt{3n}}{n}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{3n}{n^2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \qquad \text{por (1)} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}$$

entonces

$$\int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right) = \frac{2}{3}$$

Problema 3

Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

por (1) de la pregunta anterior tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

Problema 4

Sea f una función cuya derivada es continua en $\mathbb{R}$. Calcule $F'(x)$ si

$$F(x)=\int_0^x(x-t)f'(t)dt$$

Solución:

Notemos que al derivar $F(x)$ tenemos

$$F'(x)=\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)\Rightarrow F'(x)=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$$

Problema 5

Demuestre que

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\le\int_0^2\frac{1}{1+x^3}dx\le 2$$

Solución:

Notemos que la funcion $\frac{1}{1+x^3}$ es decreciente, por lo tanto

$$\Rightarrow\int_0^2\frac{1}{1+x^3}\le 1\cdot(2-0)=2$$

por otro lado tenemos que

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} + \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}$$

si vemos la primera tenemos la cota

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}$$

para la segunda tenemos

$$\frac{1}{9} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}$$

obteniendo lo pedido