

Ayudantía 9- MAT1610

1. Suponga que f es una función continua en $[0, 3]$ la cual satisface que:

- $f(0) = -1$
- $f'(x) = 2$ para todo $x \in (0, 1)$
- $f'(x) = 1$ para todo $x \in (1, 2)$
- $f'(x) = -1$ para todo $x \in (2, 3)$

Encuentre una fórmula para la función f .

Solución:

Notemos que

- una antiderivada para la función f sobre el intervalo $(0, 1)$ es de la forma $2x + C_1$
- una antiderivada para la función f sobre el intervalo $(1, 2)$ es de la forma $x + C_2$
- una antiderivada para la función f sobre el intervalo $(2, 3)$ es de la forma $-x + C_3$

como f es continua y $f(0) = -1$ se deduce que $C_1 = -1$, nuevamente por continuidad se tiene que $2 \cdot 1 - 1 = 1 + C_2$ y por tanto $C_2 = 0$ y que $2 = -2 + C_3$ y por tanto $C_3 = 4$, luego tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x & \text{si } x \in (1, 2] \\ -x + 4 & \text{si } x \in (2, 3] \end{cases}$$

2. (a) Determine la antiderivada general de la función

$$g(x) = \frac{2 + x^2 + x\sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}$$

(b) Determine la función f tal.

$$f''(x) = \sin(x) + \cos(x) \text{ y } f(0) = 3 \text{ y } f'(0) = 7$$

(c) Determine la antiderivada de la función $f(x) = 10 * 2^x - 1$ que pasa por el punto $(0, 20)$.

- (d) Determine una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la gráfica de f .

Solución:

- (a) Dado que $f''(x) = \sin(x) + \cos(x)$ su antiderivada general es $G(x) = -\cos(x) + \sin(x) + C$ y $f'(x) = -\cos(x) + \sin(x) + C$ donde la constante C es tal que,

$$f'(0) = -\cos(0) + \sin(0) + C = 7$$

es decir, $C = 8$. Entonces, $f(x) = -\sin(x) - \cos(x) + 8x + K$ y K es el valor que hace que $f(0) = -\sin(0) - \cos(0) + K = 3$, es decir, $K = 4$. Así, la función buscada es:

$$f(x) = -\sin(x) - \cos(x) + 8x + 4$$

- (b) Recordar que $(2^x)' = 2^x \ln(2)$, entonces, $\frac{(2^x)'}{\ln(2)} = \left(\frac{2^x}{\ln(2)}\right)' = 2^x$, es decir, una antiderivada de la función 2^x es $\frac{2^x}{\ln(2)}$. Entonces, la antiderivada general para f es:

$$F(x) = \frac{10}{\ln(2)} 2^x - x + C$$

Para que $F(0) = 20$ debe cumplirse que $C = 20 - \frac{10}{\ln(2)}$, entonces la función buscada es $F(x) = \frac{10}{\ln(2)} 2^x - x + 20 - \frac{10}{\ln(2)}$.

- (c) La antiderivada general para f' es $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, para que la recta $y = -x$ (que tiene pendiente -1) sea tangente a F debe ocurrir que $f'(x_0) = -1$, es decir, $x_0^3 = -1$ para algún x_0 , lo cual ocurre si $x_0 = -1$ e $y_0 = -x_0 = 1$. Por lo tanto la constante C debe ser tal que $F(-1) = 1$, esto es, $\frac{(-1)^4}{4} + C = \frac{1}{4} + C = 1$, es decir, $C = \frac{3}{4}$.

Entonces, $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}$

3. Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas. A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.

Dominio: \mathbb{R}

Solución:

Derivada: (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)

$$f'(x) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Valores críticos:

Valores donde $f'(x) = 0$: $x = 4$

Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: $x = 0$ y $x = 6$.

Estudio signo de la derivada

$(6-x)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{6-x})^2 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.

$x^{\frac{1}{3}}$ tiene el mismo signo de x .

Intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4-x$	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	decreciente
$(0, 4)$	+	+	+	creciente
$(4, 6)$	+	-	-	decreciente
$(6, \infty)$	+	-	-	decreciente

Intervalos donde f es creciente: $(0, 4)$

Intervalos donde f es decreciente: $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$

$f(0) = 0$ es un mínimo local de f .

$f(4) = 2\sqrt[3]{4}$ es un máximo local de f .

Nota: En $x = 6$, no hay cambio de monotonía, no se alcanza valor extremo. (En $(6, 0)$ la recta tangente es vertical)

Estudio signo de la segunda derivada

$f''(x) = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)

$x^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{x})^4 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.

$(6-x)^{\frac{5}{3}}$ tiene el mismo signo de $6-x$.

Intervalo	-8	$(6-x)^{\frac{5}{3}}$	f''	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(0, 4)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(4, 6)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(6, \infty)$	-	-	+	cóncava hacia arriba

Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $(6, \infty)$

Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, 6)$

Punto inflexión: $(6, 0)$

Asíntotas:

Vertical: No tiene

Horizontal: No tiene, ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(6-x)} = -\infty \text{ (no finito)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(6-x)} = \infty \text{ (no finito)}$$

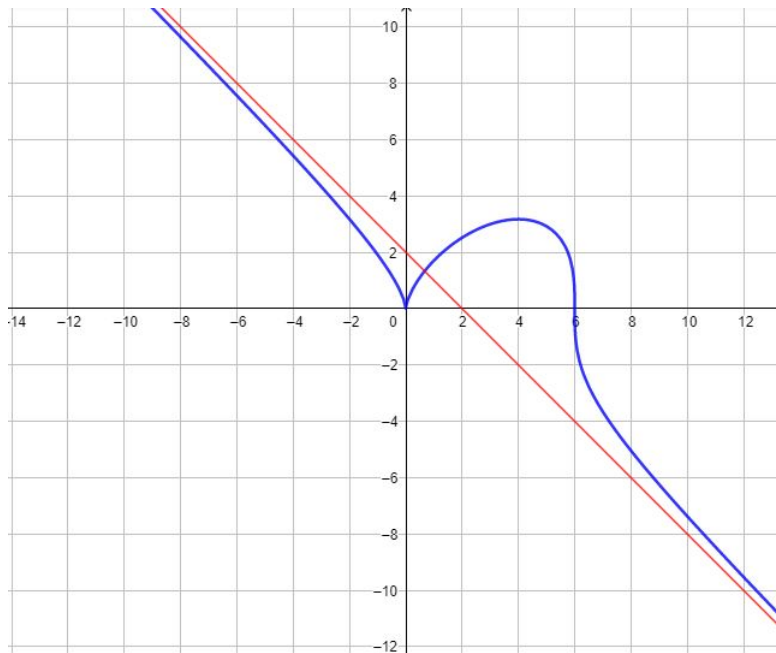
Oblicua: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2(6-x)}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{6x^2-x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} - 1} = -1$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} - (-1)x \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2(6-x) + x^3)}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\frac{\sqrt[3]{36x^4 - 12x^5 + x^6}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{36}{x^2} - \frac{12}{x} + 1} - \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} + 1} \\
&= \frac{6}{1 - (-1) + 1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ecuación: $y = -x + 2$

Nota: La asíntota oblicua hacia $-\infty$ también es la recta $y = -x + 2$ (dejar de ejercicio a los estudiantes)



Cálculo primera derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2(6-x)} \right)' \\
&= \frac{1}{3} (x^2(6-x))^{-\frac{2}{3}} (x^2(6-x))' \\
&= \frac{2x(6-x) - x^2}{3(x^2(6-x))^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{x(4-x)}{(x^2(6-x))^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

Cálculo Segunda derivada:

Sea $w = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$

Entonces,

$$\ln(w) = \ln(4-x) - \frac{1}{3} \ln(x) - \frac{2}{3} \ln(6-x)$$

Así

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(6-x)} = \frac{-3x(6-x) - (4-x)(6-x) + 2x(4-x)}{3x(4-x)(6-x)} = \frac{-3x(6-x) + 3(4-x)(x-2)}{3x(4-x)(6-x)}$$

es decir,

$$\frac{w'}{w} = \frac{-x(6-x) - (4-x)(x-2)}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x(4-x)(6-x)}$$

O

$$w' = w \left(\frac{-8}{x(4-x)(6-x)} \right) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}} \frac{-8}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$$

4. Con una lámina cuadrada de 10 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado en cada vértice. Determine la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

Solución

Sea x la longitud del lado del cuadrado a recortar en cada vértice. Note que $0 < x < 5$ (dominio) Entonces, la base(cuadrada) de la caja tiene lado de longitud $10 - 2x$ y como área $(10 - 2x)^2$ y la altura es x y, por lo tanto, el volumen de la caja es

$$v(x) = (10 - 2x)^2 x = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

y

$$v'(x) = 100 - 80x + 12x^2 = 4(25 - 20x + 3x^2)$$

Entonces, $v'(x) = 0$ si $25 - 20x + 3x^2 = 0$, es decir, $x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \frac{10 \pm 5}{3}$, y $x = 5$ o $x = \frac{5}{3}$. pero, $x = 5$ no está en el dominio, por lo que el valor crítico es $x = \frac{5}{3}$.

Por otro lado, $v''(x) = (4(25 - 20x + 3x^2))' = -80 + 24x$ y $v''(\frac{5}{3}) = -80 + 40 = -40 < 0$, lo cual indica que $v(\frac{5}{3}) = \frac{2000}{27} \text{ cm}^3$ es un valor máximo del volumen. Así, la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo es $\frac{5}{3}$ cm.

5. Hallar el punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determine, en el primer cuadrante, con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

Solución:

La recta que forma el triángulo con los ejes coordenados es tangente a la función dada en algún punto, denotado por (x_0, y_0) , por ahora desconocido. Dicho punto debe ser tal que el área del triángulo sea mínima entre las áreas de todos los posibles triángulos que pueden formarse en el primer cuadrante con las diferentes rectas tangentes.

Note que si la recta es $y = mx + b$, entonces la base del triángulo (rectángulo) es $B = -\frac{b}{m}$ y la altura es $H = b$. Es de resaltar que la base y la altura del triángulo cambian con el punto de tangencia.

Se tiene que: $m = f'(x_0) = -2x_0$ e $y_0 = 4 - x_0$ y, por lo tanto,

$$b = y_0 - mx_0 = 4 - x_0^2 - (-2x_0)x_0 = 4 + x_0^2$$

Entonces, el área del triángulo está dada, en términos de x_0 , como:

$$A(x_0) = \frac{BH}{2} = \frac{-\frac{b}{m}b}{2} = -\frac{b^2}{2m} = \frac{(4 + x_0^2)^2}{4x_0}$$

Así,

$$A'(x_0) = \frac{2(4 + x_0^2)4x_0 - (4 + x_0^2)^2}{(4x_0)^2} = \frac{(4 + x_0^2)(4x_0^2 - 4 - x_0^2)}{4x_0^2} = \frac{(4 + x_0^2)(3x_0^2 - 4)}{4x_0^2}$$

$A'(x_0) = 0$ si $(4 + x_0^2)(3x_0^2 - 4) = 0$ y como $4 + x_0^2 \neq 0$, debe ocurrir que $3x_0^2 - 4 = 0$, es decir, $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (x_0 debe ser positivo para que el triángulo se forme en el primer cuadrante), entonces, $y_0 = 4 - x_0^2 = \frac{8}{3}$.

$$\text{Además, } A'(x_0) = \frac{(4+x_0^2)(3x_0^2-4)}{4x_0^2} = \frac{8x_0^2-16+3x_0^4}{4x_0^2} = 2 - \frac{4}{x_0^2} + \frac{3}{4}x_0^2$$

Entonces,

$A''(x_0) = \frac{8}{x_0^3} + \frac{3}{2}x_0$ que es positivo para cualquier valor x_0 positivo, en particular, $A''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) > 0$, es decir, $A(\frac{2\sqrt{3}}{3})$ es un valor mínimo. Por lo tanto, el punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima es el punto $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3})$.