PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-15 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 5

Derivadas de logaritmos, funciones de cambio y aprox. lineales y diferenciales

Problema 1

Encuentre las derivada de la siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{\ln(x)}$ *b)* $y = x^{\sin(x)}$ *c)* $y = \tan(x)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

a)

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{\ln(x)}] = \frac{1}{2}\ln^{\frac{1}{2}-1}(x) \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln(x)}}$$

b)

$$x^{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)\sin(x)]$$

$$x^{\sin(x)}\left(\frac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln \cdot \cos(x)\right)$$

c)

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)^{\frac{1}{x}}] = \tan^{\frac{1}{x}}(x) \cdot \frac{d}{dx}[\ln(\tan(x)) \cdot \frac{1}{x}]$$

$$= \left(\frac{d}{dx}[\ln(\tan(x))] \cdot - \ln(\tan(x)) \cdot \frac{d}{dx}[x]\right) \cdot \tan^{\frac{1}{x}}(x)$$

$$= \frac{\tan^{\frac{1}{x}}(x)}{x^2}\left(\frac{1}{\tan(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\tan(x)] \cdot x - 1 \cdot \ln(\tan(x))\right)$$

$$= \frac{\tan^{\frac{1}{x}}(x)}{x^2}\left(\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} \cdot x - \ln(\tan(x))\right)$$

Problema 2

a) Suponga que necesita realizar buenas aproximaciones para $\sqrt{4{,}6}$ y $\sqrt{8{,}2}$ pero no puede usar su calculadora. ¿Como lo haría?

b) La arista de un cubo se midió como 11.4 centímetros con un posible error de $\pm 0{,}05$ centímetros. Evalue el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error de este valor.

c) Encuentre y dibuje la aproximación lineal de $f(x) = 1 + \sin(2x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Los dos problemas son similares por lo que basta hacer sólo 1

la función que ocuparemos es $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x + \triangle x) \approx f(x) + f'(x)\triangle x$

por lo tanto si tenemos $\sqrt{4{,}6} \Rightarrow x = 4$ y $\triangle x = 0{,}6$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x+\triangle x) &\approx f(4) + f'(4)\triangle 0{,}6 \\ &\approx 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}6 \\ &\approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}6 \\ &\approx 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{10} \\ &\approx 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \\ &\approx 2 + \frac{3}{20} \\ &\approx 2 + 0{,}15 \approx 2{,}15 \end{aligned} \tag{1}$$

b) El volumen del cubo es $x^3 = V \Rightarrow dV = 3x^2 dx$

Entonces $x = 11{,}4$ y $dx = 0{,}05 \Rightarrow V = (11{,}4)^3 \approx 1482$

$$\Rightarrow \triangle V \approx dV = 3(11{,}4)^2 \cdot 0{,}05 \approx 19 \to error$$

luego el volumen del cubo es $1482 \pm 19cm^3$

c) Aproximación lineal $\to f(x) = 1\sin(2x)$ en $x = \pi/2 \Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x)$

entonces:

$$\begin{aligned} L(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) \\ &= (1 + \sin(\pi)) + (2\cos(\pi))(x - \pi/2) \\ &= 1 - 2(x - \pi/2) = (1 + \pi) - 2x \end{aligned} \tag{2}$$

Problema 3

Calcule la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \sinh(\cosh(x))$

b) $y = x \cdot \sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

c) $y = e^{\cosh(x)}$

d) $y = \frac{1-\cosh(x)}{1+\cosh(x)}$

1.

$$y' = \cosh\left(\cosh(x)\right) \cdot \sinh(x)$$

2.

$$\begin{aligned} y' &= \sinh^{-1}(x/3) + \frac{x}{\sqrt{(x/3)^2+1}}\frac{d}{dx}(x/3) \\ &= \sinh^{-1}(x/3) + \frac{x}{3\sqrt{(x/3)^2+1}} \end{aligned} \tag{3}$$

3.

$$\begin{gathered} y = e^{\cosh(x)} / \ln \\ \Rightarrow \ln y = \cosh(x)\ln(e) /' \\ \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \sinh(x) \\ \Rightarrow y' = y\sinh(x) \\ \Rightarrow y' = e^{\cosh(x)} \cdot \sinh(x) \end{gathered}$$

4.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-\sinh(x)) \cdot (1+\cosh(x)) - (1-\cosh(x)) \cdot \sinh(x)}{(1+\cosh(x))^2} \\ &= \frac{-\sinh(x) - \sinh(x)\cosh(x) - \sinh(x) + \cosh(x)\sinh(x)}{(1+\cosh(x))^2} \\ &= \frac{-2\sinh(x)}{1+2\cosh(x)+\cosh^2(x)} \\ &= \frac{-2\sinh(x)}{1+2\cosh(x)+1+\sinh^2(x)} \\ &= \frac{-2\sinh(x)}{2+2\cosh(x)+\sinh^2(x)} \end{aligned} \tag{4}$$

Problema 4

***

Procedimiento para encontrar máx/min

1) Calculamos $\frac{dy}{dx}$

2) Calculamos los valores $\frac{dy}{dx} = 0$

3)Evaluamos estos valores en la función $f(x)$

4)Evaluamos los extremos de la función

5)Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2
(No siempre existen)
***

Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-5, 3], \quad (-3, 5)$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

c) $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

Solución

a)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 12x = 0 \\ &= x^2 - 4x = 0 \\ &= x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5 \\ f(4) &= 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 = -43 \\ f(5) &= (5)^3 - 6 \cdot 5^2 + 5 = -20 \\ f(-3) &= (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 5 = -76 \\ &\Rightarrow 0 \text{ máximo} \end{aligned} \tag{6}$$

b)

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1) - x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow (x^2 - x + 1) - x(2x - 1) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow x^2 - x + 1 - 2x^2 + x = 0 \\
&\Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \\
&\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \\
&\Rightarrow x = \pm 1 \\
&f(1) = \frac{1}{1^2 - 1 + 1} = 1 \\
&f(0) = 0 \\
&f(3) = \frac{3}{3^2 - 3 + 1} = \frac{3}{9 - 3 + 1} = \frac{3}{7} \\
&f(-1) = \frac{-1}{(-1) + 1 + 1} = -1 \\
&\Rightarrow 1 \text{ máximo} \\
&\Rightarrow -1 \text{ mínimo}
\end{aligned} \tag{7}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) = xe^{-x^2/8} / \ln \\
y &= \ln(xe^{-x^2/8}) \\
\ln y &= \ln(x) - \frac{x^2}{8} /' \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{8} \\
y' &= y \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4} \right) \\
&= xe^{-x^2/8} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4} \right) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pm 2
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 0 \\
&f(2) = 2e^{-4/8} = 2e^{-1/2} \\
&f(4) = 1 \cdot e^{-1/8} = e^{-1/8} \\
&f(-1) = -1 \cdot e^{-1/8} = -e^{-1/8} \\
&f(-2) = -2e^{-4/8} = -2e^{1/2} \\
&\Rightarrow 4 \text{ máximo} \\
&\Rightarrow -1 \text{ mínimo}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Problema 5

Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1-x)^b, \quad 0 \leq x \leq 1$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= x^a(1-x)^b, 0 \leq x \leq 1 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b + x^a b(1-x)^{b-1}(-1) = 0 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b - x^a b(1-x)^{b-1} = 0 \\
f'(x) &= ax^{a-1}(1-x)^b - \frac{x^a b(1-x)^b}{(1-x)} = 0 \\
f'(x) &= \frac{ax^a(1-x)^b}{x} - \frac{x^a b(1-x)^b}{(1-x)} = 0 \\
f'(x) &= x^a(1-x)^b\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{(1-x)}\right) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \frac{a}{a+b}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 0 \\
&f(1) = 0 \\
&f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b \\
&\Rightarrow \frac{a}{a+b} \text{ máximo} \\
&\Rightarrow 0 \text{ y } 1 \text{ mínimo}
\end{aligned} \tag{11}
$$