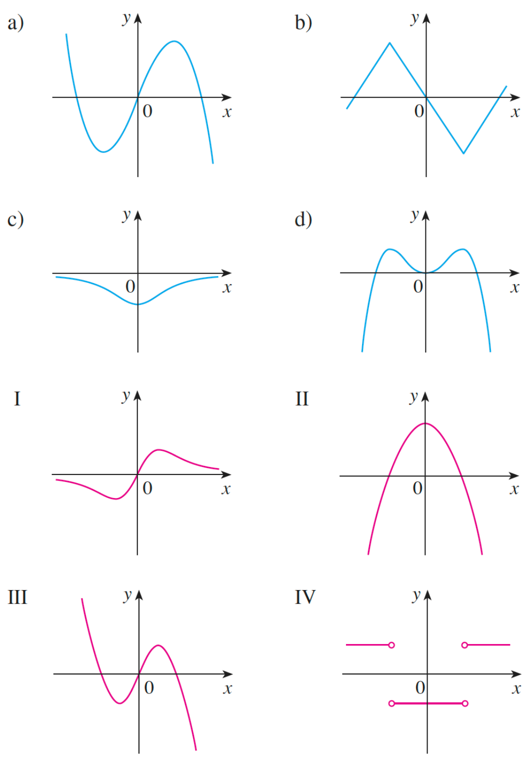
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Ayudantía 4 - MAT1610

1. Relacione la gráfica de cada función dada en la figura a), b), c) y d) con las gráficas de sus derivadas I), II, III) y IV). Justifique su elección.



Solución:

Observe que al ver los gráficos podemos concluir que:: a) se relaciona con II) ya que el gráfico de a) tiene dos puntos donde la derivada ex cero.
b) se relaciona con IV) ya que en el gráfico de b) se observan dos puntos donde la derivada no existe.
c) se relaciona con I) ya que esxiste solo un punto con derivada cero
d) se relaciona con III) ya que se observan tres puntos con derivadas nulas.

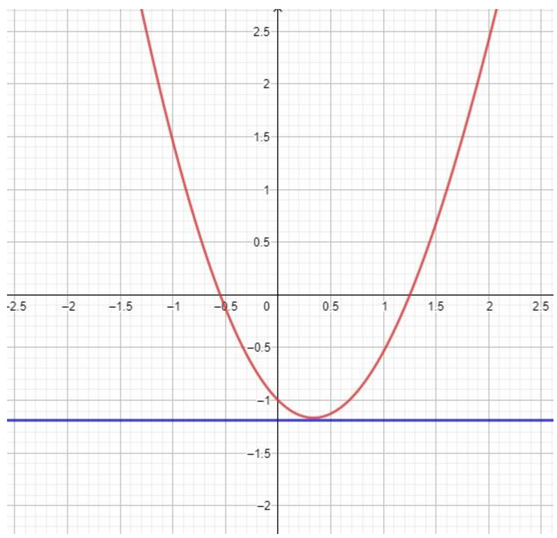
Comentar también sobre la inclinación de las rectas tangentes.

2. Demuestre que existe un valor c tal que la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - x - \cos(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela al eje x.

Solución:

Se tiene que $f'(x) = 2x - 1 + \text{sen}(x)$, entonces, se define $h(x) = 2x - 1 + \text{sen}(x)$, la cual es una función continua todo $\mathbb{R}$ (por ser combinación lineal de funciones continuas en $\mathbb{R}$). En particular, h es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $h(0) = -1 < 0$ y $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 0$. Por lo que, por el teorema del valor intermedio, como $0 \in [-1, \pi]$, existe un valor c, $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, donde $f'(c) = 0$, lo cual implica que la recta tangente a f en el punto $(c, f(c))$, tiene pendiente cero, es decir, es horizontal y, por ello, paralela al eje x.

Dar idea grafica



3. Demuestre que la función $f(x) = (x+1)\,|x+1|$ es derivable en $x = -1$.

Solución:

Note que $f(x)$ es continua en $x = -1$, por ser producto de dos funciones continuas en $x = -1$. En detalles, ya que $f(-1) = (-1+1)\,|-1+1| = 0$ y como

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & si \quad x < -1 \\ \\ x+1 & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Se tiene que:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1)\,|x+1| = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1)\,(-x-1) = 0$

y

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)\,|x+1| = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)\,(x+1) = 0$

Por otro lado,

$f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)|x+1|-0}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x+1} \lim\limits_{x\to -1} |x+1| = 1 \cdot 0 = 0$

Es decir, $f'(-1)$ existe (vale 0), f es derivable en $x = -1$.

Nota:
• Resaltar que también se puede usar la definición de $f'(-1)$ en términos de h
• Resaltar que $|x+1|$ es no derivable en $x = -1$, sin embargo, al multiplicar por $(x-1)$ se obtiene una función derivable en dicho valor.

4. Sea f una función definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$. Determine si las siguientes afirmaciones es(son) siempre verdadera(s. Justifique.

   (a) f es derivable en 0

   (b) $L = 0$.

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

   Solución:

   (a) Es siempre verdadera, ya que

   $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$$

   Por lo que, si $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$ entonces f es derivable en $x = 0$.

   (b) No es siempre es verdadera. Contraejemplo: Si $f(x) = x\cos(x)$, se tiene que $f(0) = 0$, sin embargo,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$$

   Se pueden mostrar otros contraejemplos: $f(x) = x(x+2)$, $f(x) = x(x^2+2)$, etc.

   (c) Siempre verdadera ya que la función f es derivable en $x = 0$ y en consecuencia, continua en $x = 0$, por lo que

   $$0 = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

5. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \cos(bx) + a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es continua en $x = 0$?

b) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es derivable en $x = 0$?

Solución

a) Para que la función f sea continua en 0, los límites laterales tiene que ser iguales a $f(0) = b$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 + a$ entonces $1 + a = b$. Así, la función f es continua en $x = 0$ para $a \in \mathbb{R}$ y para $b = a + 1$.

b) Para que f sea una función derivable en 0 el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ tiene que existir.

Calculamos los límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{ah + (a+1)\sqrt{h+1} - (a+1)}{h} \\ &= a + (a+1) \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \\ &= a + (a+1)\frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\, a + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de la misma manera

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\left((a+1)h\right) + a - (a+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\left((a+1)h\right) - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\left((a+1)h\right) - 1}{h(a+1)}\,(a+1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces la función f es derivable en $x = 0$ si tenemos $\frac{3}{2}\, a + \frac{1}{2} = 0$ o sea $a = -\frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$.