PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-15 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 3

Introducción a las derivadas

Introducción a las derivadas

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista.

A lo anterior lo llamaremos $f'(a)$. Aunque de forma más general, lo definiremos para cualquier x dentro del dominio de la función f. Es decir, $f(x)$

Dicho lo anterior, diremos que la función f es derivable en $x = a$ si y sólo si $f'(a)$ existe

Problema 1

Determine si la función $f(x) = |x|$ es derivable en $x = 0$. Luego, haga lo mismo para $g(x) = \frac{1}{2}x|x|$. De ser derivables, determine $f'(x)$ y $g'(x)$.

Solución: Recordemos la definición de límite

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \end{aligned} \tag{1}$$

ahora veremos que pasa con los límites laterales

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1$$

ahora el otro límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

notamos que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h}$$

por lo tanto $f'(0)$ no existe.

Ahora veamos $g(x)$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(0+h)|0+h| - \frac{1}{2}(0)|0|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(h)|h|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}|h| \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Problema 2

Calcule por definición la derivada de $f(x) = \cos(x)$ y de $g(x) = ax^2 + bx + c$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h)-1)-\sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h)-1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} = -\sin(x) \end{aligned} \tag{3}$$

ahora calculemos la derivada de $g(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 - bx + c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + bh}{h} = 2ax + b \end{aligned} \tag{4}$$

Problema 3

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$ y además

$$f'(x) = g(x) \ \ y \ g'(x) = f(x)$$

Demuestre que $h(x) = (f(x))^2 - \left(g(x)^2\right)$ es constante y calcule su valor.

Solución: Si calculamos la derivada directamente de h, obtenemos lo siguiente

antes notemos esto $\left((f(x))^2\right)' = (f(x) \cdot f(x))' = 2f(x)f'(x)$

por lo tanto

$$\Rightarrow h'(x) = 2(f(x)f'(x) - g(x)g'(x)) = 2(f(x)g(x) - g(x)f(x)) = 2 \cdot 0 = 0$$

como $h'(x) = 0 \Rightarrow h(x)$ constante. Ahora para calcular el valor de $h(x)$ evaluamos en 0, ya que h es constante vale lo mismo para cualquier valor de x.

$$\Rightarrow h(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = ((0)^2 - (1)^2) = -1$$

Problema 4

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-p}{x+1} & si\ x\ ¿0 \\ x^2 + qx & si\ x \leq\ 0 \end{cases}$$

Determine los valores de p y q de manera que la función sea diferecnaible en $x = 0$. Determine $f'(x)$ e indique su dominio

Solución: Primero la función tiene que ser continua

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 + qx = \lim_{x\to 0} \frac{x-p}{x+1}$$

$$0 = \frac{-p}{1} \Rightarrow p = 0$$

Ahora tenemos que ver si existe la derivada

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + qh - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h-p}{h+1} - 0}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h + q = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h+1}}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h + q = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h+1}$$

$$\Rightarrow q = 1$$

Calculemos la derivada de f viendo los casos por separado

si $x > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x-p)'(x+1) - (x+1)'(x-p)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow= \frac{(1)(x+1) - (1)(x-p)}{(x+1)^2} = \frac{p-1}{(x+1)^2}$$

ahora veamos el caso $x \leq 0$

$$f'(x) = 2x + q$$