Ayudantía 11

Área entre curvas y Vólumen

Área entre curvas: Sea f y g funciones integrables tal que $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a,b)$. Entonces el área entre curvas entre (a,b) es $\int_a^b g(x) - f(x)dx$

Volumenes en rotación:

a) Sección transversal $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$

b) Cascarones cilíndricos $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$

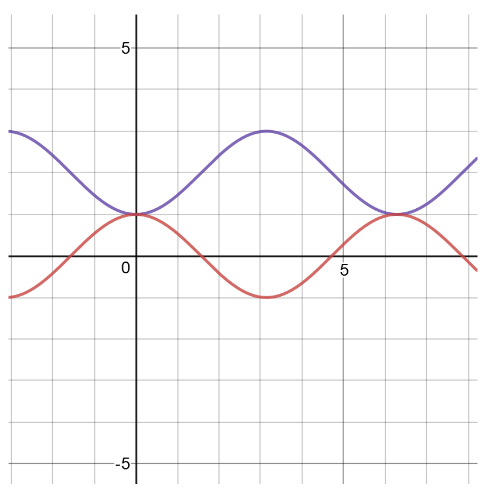
Problema 1

Calcule las siguientes área encerradas por la curvas dadas:

a)

$$y = \cos(x), y = 2 - \cos(x), 0 \leq x \leq 2\pi$$

Solución:



Notemos que $y = 2 - \cos(x)$, $y = \cos(x)$

Los límites de integración (buscamos las intersecciones)

$$2\cos(x) = 2$$

$$\cos(x) = 1$$

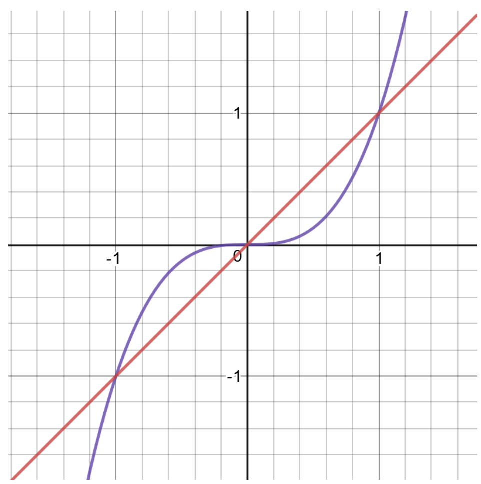
$$x = 0, 2\pi$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos(x) - \cos(x))\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(x))\, dx \\ &= 2\int_0^{2\pi} (1 - \cos(x))\, dx \\ &= (x - \sin(x))\Big|_0^{2\pi} = 2(2\pi - 0) = 4\pi \end{aligned} \tag{1}$$

b)

$$y = x^3, y = x$$

Solución:



Notemos que $y = x^3$, $y = x$

Límites de integración

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

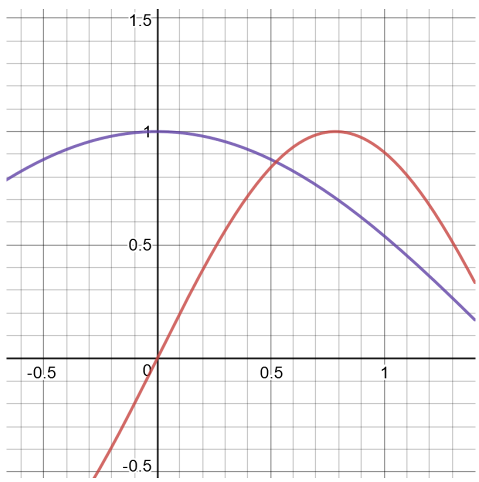
Notemos que el área de arriba es simetrica a la de abajo, por lo tanto cálculo una y la múltiplico por 2

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\int_0^1 \left(x - x^3\right) dx \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

c)

$$y = \cos(x), y = \sin(2x), x = 0, x = \frac{\pi}{2}$$

Solución:



Notemos que $y = \cos(x)$, $y = \sin(2x)$

Los límites de integración (buscamos las intersecciones)

$$2\cos(x) = \sin(2x)$$

$$\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$0 = \cos(x)(2\sin(x) - 1)$$

$$\cos(x) = 0$$

$$2\sin(x) - 1 =$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

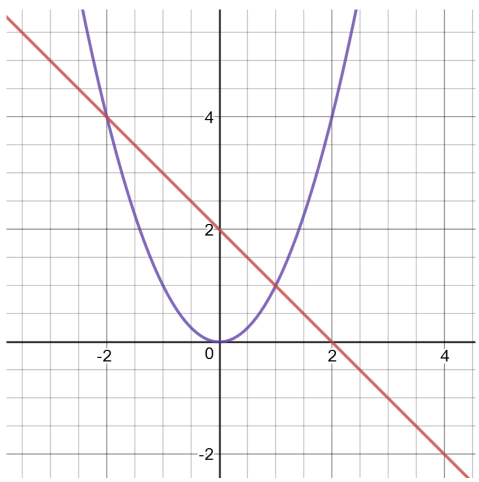
$$x = 0, 2\pi$$

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos(x) - \sin(2x))\, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2x) - \cos(x))\, dx \\
&= \left(\sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\frac{\cos(2x)}{2} - \sin(x)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \sin(0) + \frac{\cos(0)}{2} + \left(-\frac{\cos(\pi)}{2} - \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \sin(\frac{\pi}{6})\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

d)

$$y = x^2, y = 2 - x, 0 \le x \le 2$$

Solución:



Notemos que $y = x^2$, $y = 2 - x$

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

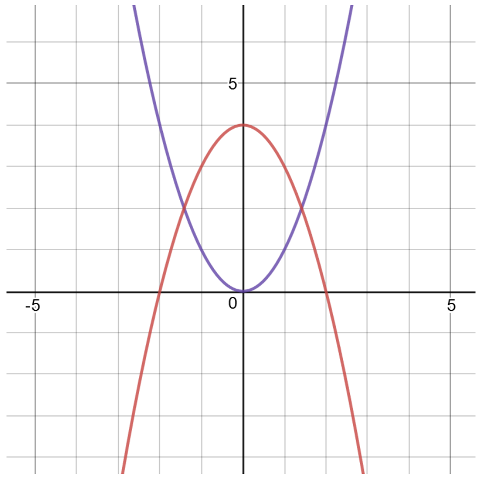
$$x = -2, 1$$

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^1 \left(2 - x - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 + x - 2\right) dx \\
&= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 3
\end{aligned}
\tag{4}
$$

e)

$$y = x^2, y = 4 - x^2, x = 0, x = 2$$

Solución:



Notemos que $y = x^2$, $y = 4 - x^2$

$$x^2 = 4 - x^2$$

$$x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(4 - x^2 - x^2\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(x^2 - 4 + x^2\right) dx \\ &= \left(4x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} + \left(\frac{2}{3}x^3 - 4x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{8}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Problema 2

Cálcule los siguientes volúmenes de revolución

a)

$$y = \frac{1}{4}x^2, x = 2, y = 0$$

alrededor del eje y

Solución:
Ocupemos la variable y para calcular el vólumen

$$V = \int_0^1 \pi \left(2^2 - (2\sqrt{y})^2\right) dy$$

Por lo tanto el vólumen

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\left(2^2-(2\sqrt{y})^2\right)dy \\
&= \int_0^1 \pi\,(4-4y)\,dy \\
&= \int_0^1 \pi 4\,(1-y)\,dy = 4\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 4\pi\left(1-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

b)

$$y=\sqrt{x-1},y=0,x=5$$

alrededor del eje x

Solución:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^5 \pi\left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx \\
&= \int_1^5 \pi\,(x-1)\,dx \\
&= \pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^5 = \pi\left(\frac{25}{2}-5-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right) = 8\pi
\end{aligned} \tag{7}
$$

c) Calcule el volumen de un casquete de una esfera de radio r y altura h

Solución:
una circuferencia se modela con la ecuación

$$x^2+y^2=r^2 \to x^2=r^2-y^2 \to x=\sqrt{r^2-y^2}$$

Notemos que lo anterior es una función que modela la circunferencia en función de y. Entonces trabajaremos respecto a y

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{r-h}^{h} \pi\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^{287} dy \\
&= \pi\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{r-h}^{h} \\
&= \pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)
\end{aligned} \tag{8}
$$

d) Calcule el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h

Solución:
primero calculemos la ecuación de la recta que modela una recta que al rotar sobre el eje Y forma un cono circular

$$\frac{y-0}{x-r} = \frac{h-0}{0-r}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{r(y-h)}{h}$$

Entonces el volumen es

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^h \pi\left(R(y)\right)^2 dy = \int_0^h \pi\left(-\frac{r(y-h)}{h}\right)^2 dy \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h (y-h)^2\, dy \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h \left(y^2 - 2hy + h^2\right) dy \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{2y^2h}{2} + h^2y\right)\Bigg|_0^h \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - h^3 + h^3\right) \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2 \cdot \frac{h^3}{3}} = \frac{\pi r^2 h}{3}
\end{aligned} \tag{9}$$

Problema 3

Sea c una constante real positiva, calcular el área de la región del plano XY delimitada por abajo por la curva $y = x^3$ y por arriba por la recta $y = cx$

Solución:
Notemos las intersecciones entre ambas curvas $x^3 = cx \Leftrightarrow x = 0$ o $x = \pm\sqrt{c}$ sin embargo $x = -\sqrt{c}$ no es lo que buscamos porque no cumple con la hpótesis de que $y = x^3$ esté por debajo de $y = cx$

⇒ El área buscada, la demostraremos por A y resulta ser

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\sqrt{c}} \left(cx - x^3\right) dx \\
&= \left(\frac{cx^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{c}} \\
&= \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{2y^2 h}{2} + h^2 y\right)\Bigg|_0^{h} \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - h^3 + h^3\right) \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2 \cdot \frac{h^3}{3}} = \frac{\pi r^2 h}{3}
\end{aligned} \tag{10}$$