PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Ayudantía 5 - MAT1610

1. Derive las siguientes funciones

   a) $f(x) = x^2 e^x \cos(x)$.

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{e^x \text{sen}(x)}$

   c) $f(x) = 7e^{-x}$

   Solución:

   a) $f'(x) = 2xe^c \cos(x) + x^2 e^x \cos(x) - x^2 e^x \text{sen}(x)$

   b) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)e^x \text{sen}(x) - (x^2 + x)(e^x \text{sen}(x) + e^x \cos(x))}{e^{2x} \text{sen}^2(x)}$

   c) $f'(x) = \left(\dfrac{7}{e^x}\right)' = \dfrac{0e^x - 7e^x}{e^{2x}} = -7e^{-x}$

2. Determine $f'(x)$ para $f(x) = \sec(-x) + \text{sen}(x^7 \cos(2x)) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sec(-x) + \text{sen}\left(x^7 \cos(2x)\right)) + \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' \\
&= -\sec(-x)\tan(-x) + \cos\left(x^7 \cos(2x)\right)\left(7x^6 \cos(2x) - 2x^7 \text{sen}(2x)\right) - \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\left(x + \sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

3. Sea f una función continua y derivable en $x = -1$ tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(-1, f(-1))$ es $y = 3x + 1$. Determine:

   (a) El valor de $f(-1)$ y $f'(-1)$

   (b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{xf(x) - 2}{x+1}$

   (c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\frac{f(x)}{x} - 2}{x+1}$

   (d) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(-x^2) + 2}{x+1}$

   (e) El valor de $g'(1)$, con $g(x) = \sqrt{f(-x) + 6}$

Solución:

(a) La función coincide con la recta $y = 3x+1$ en el punto de tangencia $(-1, f(-1))$ entonces, $f(-1) = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2$
$f'(-1)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(-1, f(-1))$, entonces, $f'(-1) = 3$.

(b) Note que si $g(x) = xf(x)$ entonces $g(-1) = (-1)f(-1) = 2$ y

$$\lim_{x\to -1} \frac{xf(x) - 2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = g'(-1)$$

y, como $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, $g'(-1) = f(-1) + (-1)f'(-1) = -2 + (-1)3 = -5$. Así,

$$\lim_{x\to -1} \frac{xf(x) - 2}{x+1} = -5$$

(c) Si $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, entonces $g(-1) = \frac{f(-1)}{-1} = 2$ y

$$\lim_{x\to -1} \frac{\frac{f(x)}{x} - 2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = g'(-1)$$

y $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ y $g'(-1) = \frac{f'(-1)(-1) - f(-1)}{(-1)^2} = \frac{3(-1)-(-2)}{1} = -1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\frac{f(x)}{x} - 2}{x+1} = g'(-1) = -1$$

(d) Si $g(x) = f(-x^2)$, entonces $g(-1) = f(-(-1)^2) = f(-1) = -2$, entonces

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(-x^2) + 2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = g'(-1)$$

Como $g'(x) = f'(-x^2)(-2x)$, entonces $g'(-1) = f'(-1)(-2(-1)) = 3 \cdot 2 = 6$

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(-x^2) + 2}{x+1} = 6$$

(e) $g'(x) = -\frac{f'(-x)}{2\sqrt{f(-x)+6}}$, entonces $g'(1) = -\frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)+6}} = -\frac{3}{2\sqrt{-2+6}} = -\frac{3}{4}$

4. (a) Sea $f(x) = \cos(x)$, determine el valor de $f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

   (b) Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Solución:

(a) Como 7 mod 4 = 3 y 50 mod 4 = 2, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) Note que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x-2)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(x-2)^3} \\ f'''(x) &= -\frac{6}{(x-2)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(x-2)^5} \\ f^{(5)}(x) &= -\frac{120}{(x-2)^6} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}} \end{aligned}$$