PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-15 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 7

I2

Cosas útiles:

1. **Recta tangente**: Sea f la función diferenciable, la recta tangente a la curva de la función en el punto $(a, f(a))$ está dada por:

$$(y - f(a)) = f'(a)(x - a)$$

2. **Reglas de derivación**:

$a)\ \dfrac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$

$b)\ ((c \cdot f(x))' = c \cdot f(x)'$

$c)\ (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$d)\ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$e)\ \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$f)\ (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3. **Linealización**:

Para calcular más sencilla una función podemos linealizarla de la siguiente forma

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x + \triangle x) \approx f(x) + f'(x) \triangle x$$

4. **Encontrar máximos y mínimos**
Procedimiento para encontrar máx/min

(I) Calculamos $\dfrac{dy}{dx}$

(II) Calculamos los valores $\dfrac{dy}{dx} = 0$

(III) Evaluamos estos valores en la función $f(x)$

(IV) Evaluamos los extremos de la función

(V) Vemos cual es mayor y menor, entonces tenemos el máximo en x_1 y el mínimo en x_2 **(No siempre existe el máx o mín)**

5. **TVI y TVM** : Hay que acordarse la definición de ambas (me da lata anotarla ☹), pero se vio harto las definiciones.

6. **Regla de l'Hôpital** : Cuando los límites dan 0 o $\pm\infty$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

La verdad es hasta que salga algo bonito en el límite.

Problema 1

El conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ es una curva en el plano.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1,2)$

Solución:

La ecuación de la recta tangente está dada por:

$$y - 2 = y'(1,2)(x-1)$$

Derivando implícitamente con respecto a x la ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se tiene:

$$2yy' = 20x^3 - 2xy' \Rightarrow y' = \frac{10x^3 - x}{y} \Rightarrow y'(1,2) = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto la ecuación tangente es

$$y - 2 = \frac{9}{2}(x-1)$$

Problema 2

a) Sea $p \in \mathbb{R}$. Pruebe que la ecuación $x^3 - 3x + p = 0$ no posee dos raices distintas en el intervalo $(0,1)$

b) Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$,$f(1) = f'(1) = 2$, determine $g'(0)$, para la función g definida por $g(x) = f(e^x)e^{f(x)}$

.

Solución:

a) *__Primera solución__:

$$f(x) = x^3 - 3x + p \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$$

está última es negativa en el intervalo $(0,1)$ por lo tanto la función f es decreciente en dicho intervalo.

se concluye que en el caso de tener raíces no pueden ser dos, ya que en este caso la derivada tendría al menos un cambio de signo.

*__Segunda solución__:

Si $f(x) = x^3 - 3x + b$ tuviera dos raices en $(0,1)$, entonces existiría $c \in (0,1)$, tal que $f'(c) = 0$ por TVM.

Pero $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, y en $(0,1)$ la función derivada es negativa, es decir

$$\forall x \in (0,1) \qquad f'(x) < 0$$

por lo tanto no existe tal c para todo b real.

b) Usando regla de la cadena, se tiene:

$$g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x e^{f(x)} + f(e^x) e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(0) = f'(e^0) \cdot e^0 e^{f(0)} + f(e^0) e^{f(0)} \cdot f'(0)$$

$$\Rightarrow g'(0) = f'(1) \cdot e^2 + f(1) e^2 \cdot f'(0)$$

$$\Rightarrow g'(0) = 2e^2 + 2e^2 \cdot (-1) = 0$$

Problema 3

Dada $y = f(x) = e^{3x} \cos(2x)$, determine $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x)$.

Solución:

Se tiene:

$$y(x) = e^{3x} \cos(2x) \Rightarrow y'(x) = 3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x)$$

$$\Rightarrow y''(x) = 3\left(3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x)\right) - 2\left(3e^{3x} \sin(2x) + 2e^{3x} \cos(2x)\right)$$

$$\Rightarrow y''(x) = 5e^{3x} \cos(2x) - 12e^{3x} \sin(2x)$$

De donde

$$\Rightarrow y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 5e^{3x} \cos(2x) - 12e^{3x} \sin(2x) - 18e^{3x} \cos(2x)$$

$$+12e^{3x} \sin(2x) + 13e^{3x} \cos(2x) = 0$$

Así: $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0$

Problema 4

Demuestre que, si $x > 0$, entonces $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$

Solución:

Sea $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$. Así, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$, por lo que:

$$\text{Si } x > 0, \text{ entonces } f'(x) > 0$$

Probaremos que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. En efecto, si existiera $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$, entonces por TVM, existiría un $c \in (0, x_0)$ tal que $f'(c) = 0$, que contradice que $f'(x) > 0$, ahora tendremos que ver con el caso si $f(x_1) < 0$ para algún x_1, notemos que $f(1) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0,08 > 0$, por lo que por TVI, f es continua, entonces existe x_0 entre 1 y x_1 tal que $f(x_0) = 0$, pero como vimos el caso anterior, si ocurre ese caso es imposible.

Así, si $x_1 > 0$, no puede darse que $f(x_1) = 0$ ni que $f(x_1) < 0$, por lo que necesariamente $f(x_1) > 0$, o sea $\sqrt{1+x_1} < 1 + \frac{1}{2}x_1$

Problema 5

Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{1+x^3}$. Cuando llega al punto $(2,3)$, su ordenada (coordenada y) va aumentando a razón de $4cm/s$.

¿Con qué rapidez está cambiando su abcisa (coordenada x) en ese instante?

Solución:

De la definición de y, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

Si le llamamos t_0 al momento en que la curva llega al punto $(2,3)$, entonces $\frac{dy}{dt}(t_0) = 4cm/s$

Además, en dicho punto se cumple que $\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = \frac{12}{2\sqrt{9}} = \frac{12}{2 \cdot 3} = 2$

Se nos pide calcular $\frac{dx}{dt}(t_0)$.

Por regla de la cadena,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dx}}$$

Así,

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dy}{dx}(t_0)} = \frac{4cm/s}{2} = 2cm/s$$

Problema 6

Estudie la función

$$f(x) = x - 3x^{1/3}$$

determinando sus raíces, simetrías, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales, el sentido de la concavidad de f y si el gráfico posee asíntotas (¿cuáles?).

Solución:

Raíces: Resolviendo la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 27x$, o sea $x(x^2 - 27) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ o $x_2 = \pm\sqrt{27}$

Simetrías: La función es impar, por lo que de ahora en adelante estudiaremos su comportamiento para $x > 0$ y para $x < 0$ se obtiene aplicando imparidad.

Intervalos de crecimiento: Para estudiar el comportamiento de f en términos de donde dónde crece (y, por complemento, donde decrece), necesitamos analizar $f'(x) = 1 - x^{-2/3}$. La derivada $f'(x)$ es positiva donde $x^{-2/3} < 1$, hacemos la tabla con los puntos críticos

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty+)$
$f'(x) = 1 - x^{-2/3}$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-1]$ y $[1,\infty+)$ y decreciente en el intervalo $[-1,1]$

Máximos y mínimos locales:

Como vimos la ayudantía anterior, tenemos que ver los extremos y los puntos críticos, notemos que la función no tiene extremos, ya que está definida para para todo $\mathbb{R}$.

Con lo anterior los puntos criticos son $-1, 0, 1$, veamos que ocurre con el 0, notemos que en ese caso la como la función es decreciente en el intervalo $[-1,1]$, se concluye que 0 no es máx ni min local, ahora evaluemos la función el los puntos criticos restantes

$$f(1) = 1 - 3\cdot 1^{1/3} = -2 \quad \text{y} \quad f(-1) = (-1) - 3\cdot(-1)^{1/3} = 2$$

ya analizamos como se comportaba la función en $(-\infty,-1]$ y $(1,\infty+)$ por lo tanto 1 es mínimo local y -1 es máximo local.

Concavidad y convexidad:

Calculemos la segunda derivada de f, $f''(x) = \frac{2}{3}x^{-5/3}$ por lo tanto si $x > 0$ la $f''(x)$ es positiva, en cambio si $x < 0$ tenemos que $f''(x)$ es negativa.

Asíntotas:

Notemos que no existe $x \longrightarrow a$ tal que $f(x) \longrightarrow \pm\infty$

por otro lado si x diverge la función no se estabiliza en un punto, por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

Ahora veamos las asíntotas oblicuas

$$m_\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1$$

$$m_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1$$

Así de haber asíntotas oblicuas ellas deben tener pendiente 1

Para que haya asíntotas oblivuas debe tenerse que los límites

$$n_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_\infty \cdot x \quad \text{y} \quad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty} \cdot x$$

$$n_\infty = \lim_{x\to\infty} -x^{1/3} = -\infty \quad \text{y} \quad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} -3x^{1/3} = \infty$$

como ambos límites no son finitos tenemos que f no tiene asíntotas oblicuas.