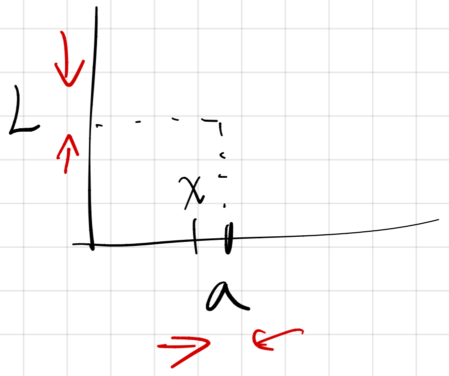
Ayudantía 1

Resumen límites

, $f(x)$ que está cerca de a

$f(x)$ cuando $x \to a$ es L

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



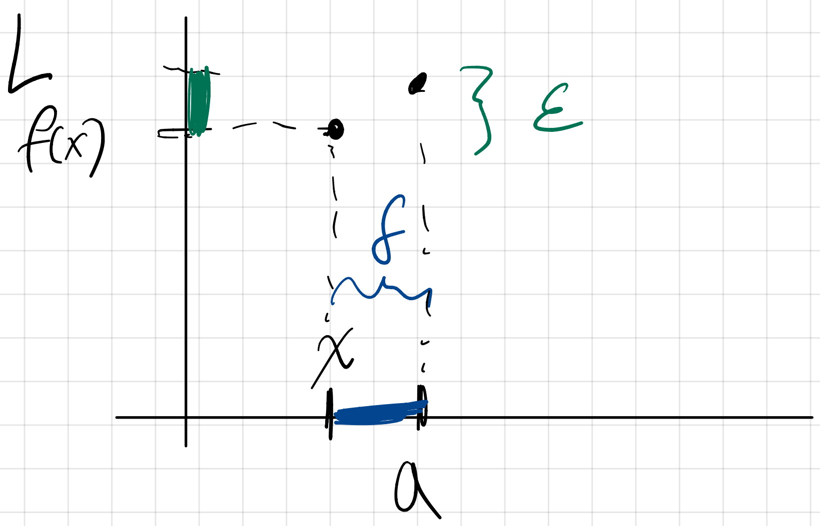
Existencia

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Def de límite

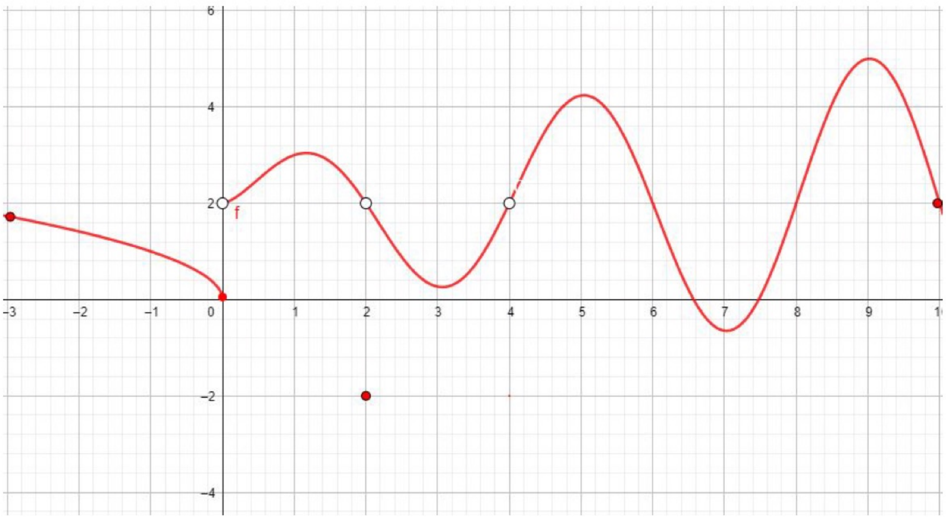
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq}$$

$$\text{si } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Ayudantía 1 - MAT1610

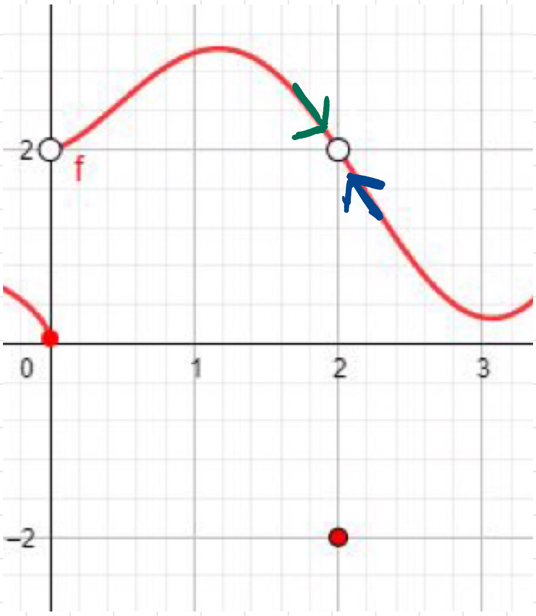
1. Para la función, $f(x)$, cuya gráfica está dada, determine, si existe, cada límite indicado. En caso que no exista, justifique su respuesta.



a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim_{x\to 4} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

a) Primero para $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde notamos que la función f evaluada en 2 tenemos que $f(2) = -2$.

Pero para ver si el límite existe tenemos que ver los límites laterales



Podemos ver que si me acerco por la izquierda (→) el límite es 2 y por la derecha (←) también el límite es 2

* ojo: esto se obtiene de manera gráfica

$$\lim_{x\to 2} f(x) = L \iff \lim_{x\to 2^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to 2^+} f(x) = L$$

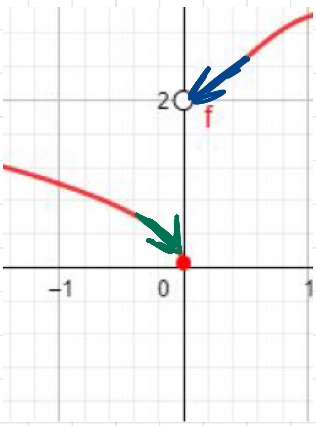
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 \wedge \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

Como los límites laterales son iguales

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

b) Este ejercicio es similar al a)

c)



Notemos que si vemos los límites laterales tenemos que si me acerco a 0 por la izquierda $(\rightarrow)$ el límite es 0. Ahora si me acerco por la izquierda $(\leftarrow)$ el límite es 2

$$\lim_{x\to 0} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ no existe}$$

2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

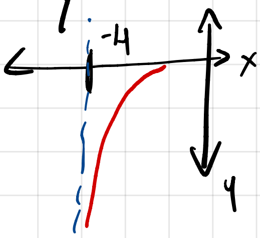
a) $\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$ ✓

b) $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 0$ ✓

c) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ existe y $-2 \notin Dom(f)$ $\Rightarrow$ $f(-2)$ no existe ✓

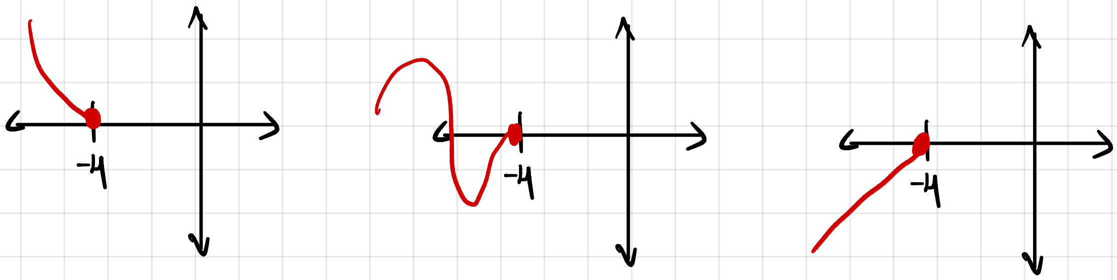
d) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ no existe ✓

a) $\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$ acá tenemos que la función se tiene que cumplir si me acerco a -4 por la derecha tiene que tender a $-\infty$. Se ve algo así



b) $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 0$ Ahora notemos que acá puede ser una curva de cualquier forma tal que su límite en -4 si me acerco por la izquierda tiene que tiene que intersectar el eje X en 0

puede ser de las siguientes formas



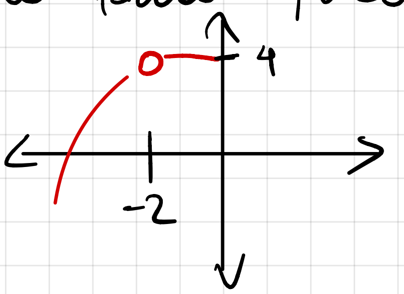
c) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ existe y $-2 \in \text{Dom } f$

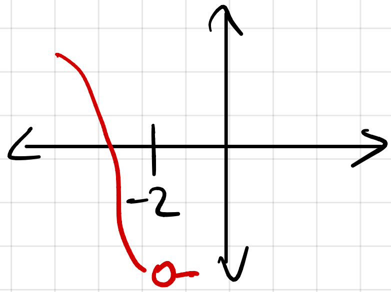
para que exista tenemos que los límites laterales tienen que ser iguales

Como también se tiene que $-2 \notin \text{Dom } f$ entonces $x = -2$ f no tiene imagen por lo tanto se grafica con un o

Por lo tanto pueden ser así.

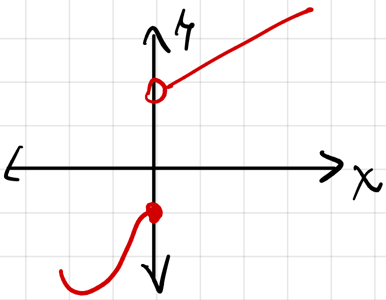
$\Rightarrow$

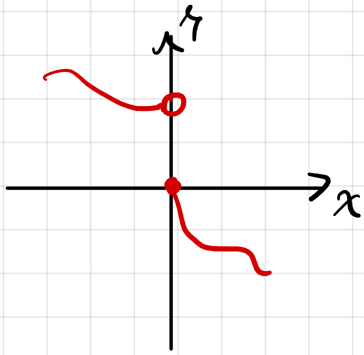




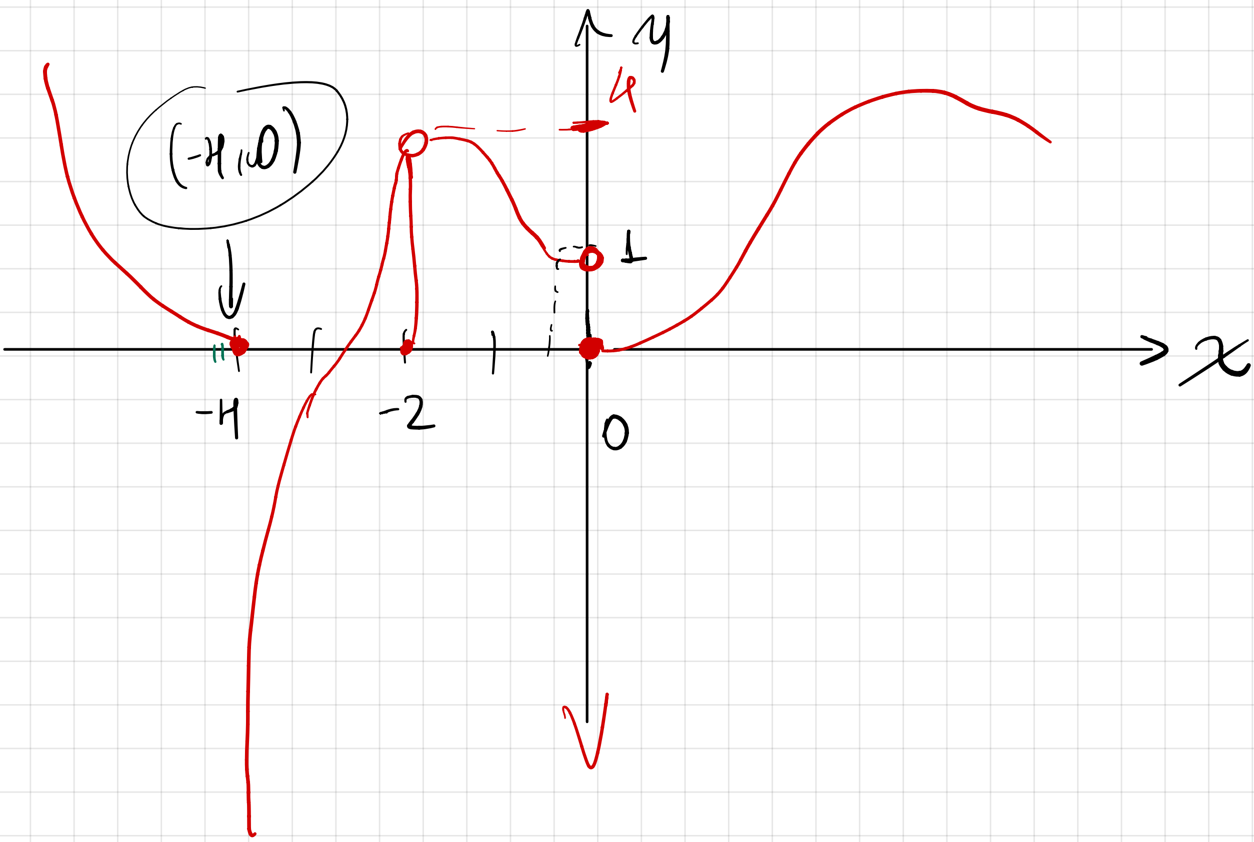
c) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ no existe

Acá podemos usar una idea similar al ejercicio 1. Donde para que no exista se necesita que los límites laterales sean distintos.





Por lo tanto todo junto se puede ver así



3. Para la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{|x-2|}$

(a) Determine el valor de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

a) Como no tenemos problema para evaluar en 0 podemos calcular el límite por sustitución

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{0}-\sqrt{2}}{2-0} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(a) Determine el valor de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(b) ¿Existe el $\lim_{x\to 2} f(x)$? Justfique su respuesta. En caso afirmativo, cuál es su valor?

b) primero para la existencia los límites laterales tienen que ser iguales, pero antes veamos como se comporta la función cerca del 2.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{|x-2|}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x} & \text{si } 0 \leq x < 2 \;\; * \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

ojo: $2 \notin \text{Dom} f$

Primero veamos el limite por la izquierda

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x} & \text{si } 0 \leq x < 2 \quad * \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(2-x)} \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(2-x)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{-\cancel{(x-2)}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$(2-x) = -1 \cdot (x-2)$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{-(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \boxed{\frac{1}{-2\sqrt{2}}} \checkmark$$

Ahora vemos el límite por la derecha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Como son distintos

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ No existe

4. Demuestre, usando la definición, que $\lim_{x\to -1} \frac{-5+3x}{2} = -4$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-5+3x}{2} = -4$$

$$|x-(-1)| < \delta \Rightarrow \left| \frac{-5+3x}{2} - (-4) \right| < \varepsilon$$

$$|x+1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| = \left| \frac{-5+3x+8}{2} \right| = \left| \frac{3x+3}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{3(x+1)}{2} \right|$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}|x+1|} < \varepsilon$$

lo que está en verde no se anota pero nos sirve como guía de que delta tomar

Entonces por lo anterior tomemos $\delta = \frac{2\varepsilon}{3}$

Entonces si $|x-(-1)| < \delta$ $\quad \delta = \frac{2}{3}\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-(-1)| = |x+1| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}|x+1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3x+3}{2} \right| < \varepsilon$$

$\longrightarrow$ Continua en la otra pág

$$\Rightarrow \left|\frac{3x+3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x+(8-5)}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-5+3x+8}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-5+3x}{2}+4\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{\frac{-5+3x}{2}}_{\text{donde esto es la función}} - \underbrace{(-4)}_{\text{esto es el límite}}\right| < \varepsilon$$

Por lo tanto si

$$|x-(-1)| < \delta \Rightarrow \left|\frac{-5+3x}{2} - (-4)\right| < \varepsilon$$

Entonce $\lim_{x \to -1} \frac{-5+3x}{2} = -4$ //