PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Ayudantía 10 - MAT1610

1. (a) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2}$

   (b) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$

   (c) Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}+\cdots+\frac{1}{e}\right)$

Solución:

(a)

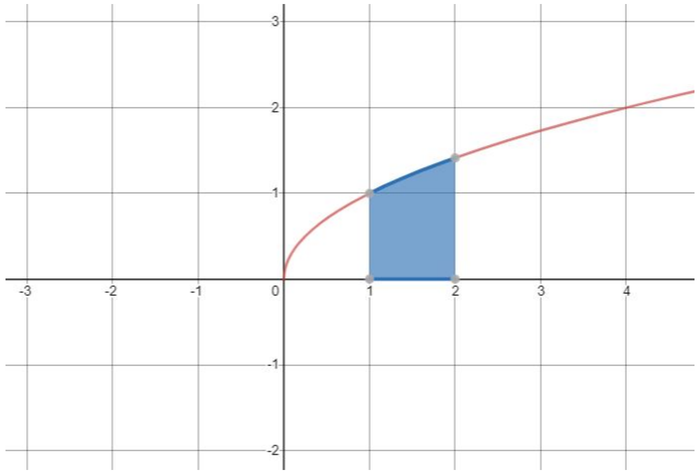
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n}\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+k\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sqrt{1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\end{aligned}$$

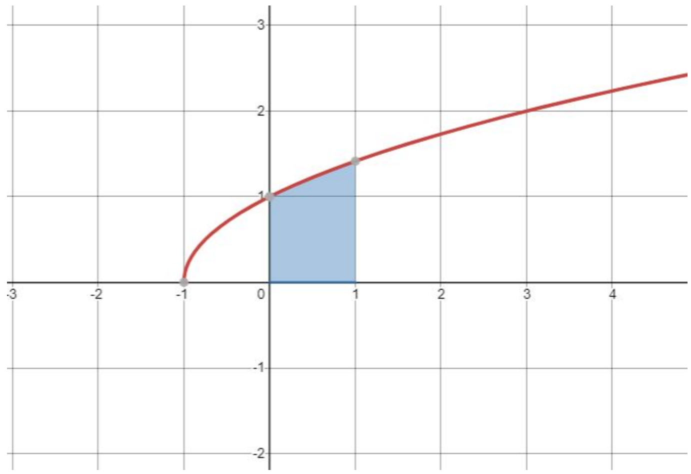
Así, considerando $\Delta x=\frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, $(x_n^*=2)$

Otra opción, $f(x)=\sqrt{1+x}$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, $(x_n^*=1)$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2}=\int_1^2\sqrt{x}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$



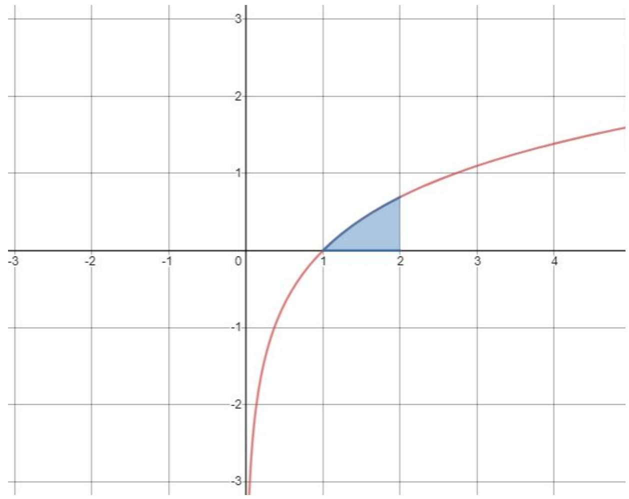


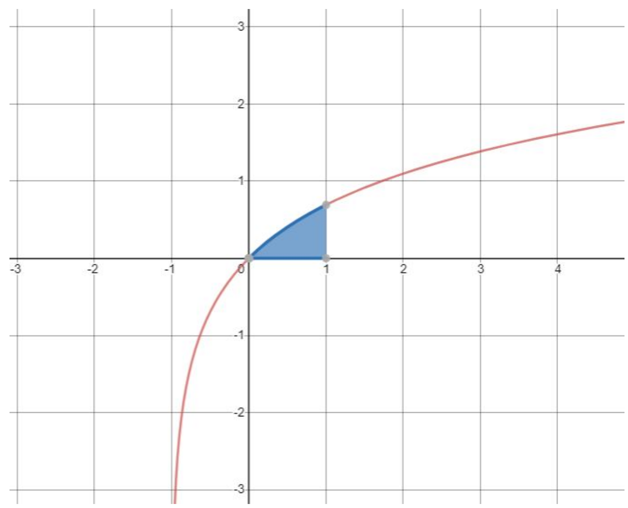
(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\frac{1}{n} \text{ propiedad} \ln \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\ln\left(1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\right)}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}
\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y
Una opción, tomar $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\ln(x)$, , $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=2)$
Otra opción, tomar $f(x)=\ln(1+x)$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=1)$

Por lo tanto,



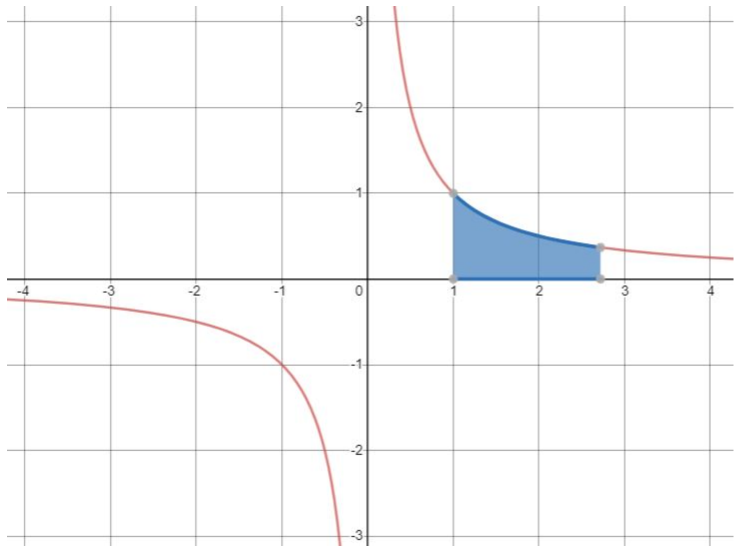


$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}=\int_1^2\ln(x)dx=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

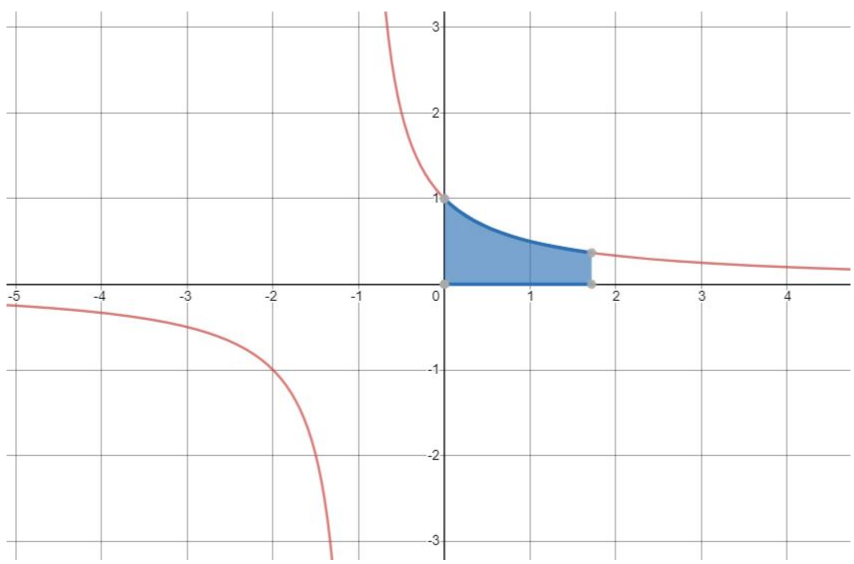
(c) Notar que $\frac{1}{e}=\frac{1}{1+\frac{n(e-1)}{n}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}\cdots+\frac{1}{e}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k\frac{(e-1)}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{1+k\underbrace{\frac{(e-1)}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{e-1}{n}}_{\Delta x}\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{e-1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud $e-1$) y
Una opción, $[a,b] = [1,e]$ y $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0^* = 1$, $x_k^* = 1 + k\Delta x = 1 + k\frac{e-1}{n}$, $1 \leq k \leq n$, $(x_n^* = e)$



Otra opción, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $[a,b] = [0, e-1]$, $x_0^* = 0$, $x_k^* = 0 + k\Delta x = k\frac{e-1}{n}$, $1 \leq k \leq n$, $(x_n^* = e-1)$
Entonces,



$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}} \cdots + \frac{1}{e}\right) = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}} \cdots + \frac{1}{e}\right) = \int_0^{e-1} \frac{1}{1+x}dx = 1$$

2. Calcule las siguientes integrales:

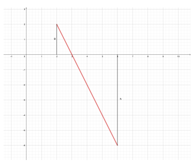
   a) $\displaystyle\int_2^6 (6-2x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-5}^4 |2x-2|dx$

   c) $\displaystyle\int_{-3}^5 [x]dx$

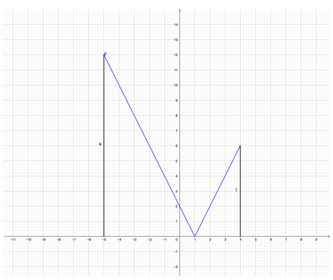
   Solución:

   a) Usando la interpretación de área tenemos que



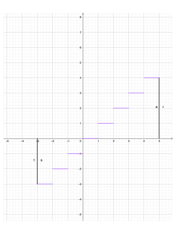
$$\int_2^6 (6-2x)\,dx = 1-9 = -8$$

   b) Usando la interpretación de área tenemos que



$$\int_{-5}^4 |2x-2|dx = 36+9 = 45$$

   c) Usando la interpretación de área tenemos que



$$\int_{-3}^5 [x]dx = 10-6 = 4$$

3. Use la definición de integral de Riemann para encontrar una expresión para el área bajo la gráfica de $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ para $-1 \leq x \leq 3$

Solución:

El área bajo la curva indicada se puede determinar usando sumas de Riemann como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k} \left(\frac{2(-3+4/k)}{(-3+4/k)^2+1} \right)$$