Ayudantía 10

TFC e Integrales indefinidas + I3

Ejercicios ayudantía 9

Problema 3

Considere las funciones h continua, y f y g derivables. Además:

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

Demuestre que $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$. Con lo anterior, para $x > 0$ pruebe que

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

es una función constante

Solución:

Lo primero se cumple por TFC 2, basta notar que si derivo las funciones resultares de ese teorema y por regla de la cadena se obtiene lo pedido, pero se ve mas claro de esta forma,

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

definamos H como la primitiva de h (lo que quiere decir que $H' = h$) por TFC 2 se tiene que el valor de esa integral es

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H(g(x)) - H(f(x))$$

si derivo esto

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H'(g(x))g'(x) - H'(f(x))f'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

Y ahora para probar que $F(x)$ es constante basta demostrar que la derivada es 0, entonces intuitivamente derivemos

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot 1 - 0 - \left(0 - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot - \left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Problema 4

Demostrar si F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(ax)dx = \frac{F(ax)}{a} + C, \text{ tal que } a \neq 0$$

Solución:

Notemos que $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(ax) = f(ax)a \Rightarrow \frac{1}{a}F'(ax) = f(ax)$$

enotonces integremos

$$\int \frac{1}{a}F'(ax) = \int f(ax) \Rightarrow \frac{1}{a}\int F'(ax) = \int f(ax) \Rightarrow \frac{1}{a}F(ax) + C = \int f(ax)$$

Problema 5

a) Calcule

$$\int \sqrt{e^x - 1}$$

b) Encuentre una función f tales que

$$\int_a^{x^2} f(t)ln(t)dt = x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right), \quad a > 1$$

Solución:

a) Tomemos un cambio de varible conveniente (demasiado), sea $u^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2udu}{u^2+1}$ con ello

$$\int \frac{2u^2}{u^2+1}du = 2\frac{u^2+1-1}{u^2+1} = 2\int 1 - \frac{1}{u^2+1}$$

$$\Rightarrow 2(u - \arctan(u)) + C = 2(\sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1})) + C$$

b) Notemos que para encontrar la una función que cumpla lo pedido, puede ser una (muy buena) idea derivar. Entonces derivando tenemos

$$2xf(x^2)\ln(x^2) = 3x^2\ln(x) - 3\frac{x^2}{3} + x^3\cdot\frac{1}{x}$$

$$2xf(x^2)\ln(x^2) = 3x^2\ln(x) - x^2 + x^2 \Rightarrow 4xf(x^2)\ln(x) = 3x^2\ln(x)$$

como $a > 1 \Rightarrow \ln(x) \neq 0$

$$\Rightarrow 4xf(x^2) = 3x^2 \Rightarrow f(x^2) = \frac{3x}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$

Ejercicios ayudantía 10

Problema 1

Evalúe la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta$$

Solución: Separando la integral, llegamos a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(\theta)}d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \end{aligned} \tag{1}$$

Como $\sec^2(\theta)$ es derivada de $\tan(\theta)$, tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta = (\tan(\theta)+\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - \tan(0) - 0 = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Problema 2
Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

Si f y g son continuas en [a,b] entonces

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

Solución: La afirmación es falsa, casi cualquier par de funciones continuas que uno elija permite verificar esto.

Ejemplo: Sean $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$

Entonces, por una parte,

$$\int_a^b (f(x)g(x))dx = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

y por otra

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^1 x^2dx\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Problema 3

Demuestre que para cualquier función $f(x)$ continua en $[-a, a]$ se cumple

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))\, dx$$

Solución: Una primera idea consiste en separar la primera integral en dos, y transformar la parte entre $-a$ y 0 de manera que pueda ser sumada con la parte entre 0 y a:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

Usando la sustitución $u = -x$ (con lo que $x = -u$ y $dx = -du$), la primera integral puede ser escrita como

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-u)du = \int_0^a f(-u)du$$

Así,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-u)du$$

Pero la variable de integración es muda, por lo que

$$\int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(-x)dx$$

o sea,

$$\int_{-a}^a f(x) = \int_0^a f(x) + \int_0^a f(-x)$$

Problema 4

Encuentre una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$$

Solución: Derivando a ambos lados, tenemos

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

de donde $f(x) = x\sqrt{x}$.
Así, la ecuación original se transforma en

$$6 + \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x}$$

para todo $x > 0$

Como la primitiva de $\frac{1}{\sqrt{r}}$ es $2\sqrt{t}$, se tiene que

$$\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_a^x = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a}$$

por lo que

$$6 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} = 2\sqrt{x}$$

o sea, $2\sqrt{a} = 6$, de donde $\sqrt{a} = 3$, o sea, $a = 9$.

Problema 5

(a) Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje X y vértices en la parábola $y = 27 - x^2$

(b) Sea f una función definida por

$$f(x) = (b-a)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2}\right) \text{ con } c > 0, a \neq b$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente sobre los números reales a y b que fuerzen a que la función f tenga un máximo local en $x = 2c$