

Ayudantía 12 - MAT1610

1. Use la regla de sustitución para determinar las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

(b) $\int \frac{\sin(4x)}{1+\cos^2(2x)} dx$

(c) $\int \ln(\cos(x)) \tan(x) dx$

(d) $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}}$

Solución:

(a) Haciendo la sustitución $u = \arctan(\sqrt{x})$ se tiene que:

$$du = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 2du = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \text{ y}$$

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int 2u du = u^2 + C = (\arctan(\sqrt{x}))^2 + C$$

Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:

Primero $u = \sqrt{x}$ y luego $t = \arctan(u)$

(b) Haciendo la sustitución $u = 1 + \cos^2(2x)$ se tiene que:

$$du = -4 \cos(2x) \sin(2x) dx = -2 \sin(4x) dx, \text{ es decir, } -\frac{du}{2} = \sin(4x) dx \text{ y}$$

$$\int \frac{\sin(4x)}{1+\cos^2(2x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = -\frac{\ln(|1+\cos^2(2x)|)}{2} + C = -\frac{\ln(1+\cos^2(2x))}{2} + C$$

Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:

Primero $u = \cos(2x)$ y luego $t = 1 + u^2$

(c) Haciendo la sustitución $u = \ln(\cos(x))$ se tiene que

$$du = -\frac{1}{\cos(x)} \sin(x) dx = -\tan(x) dx \text{ y}$$

$$\int \ln(\cos(x)) \tan(x) dx = -\int u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{(\ln(\cos(x)))^2}{2} + C$$

Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:

Primero escribir $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, hacer $u = \cos(x)$ y luego $t = \ln(u)$

(d) Note que $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}}$, entonces, haciendo la sustitución $u = e^{-x}$, se tiene que $du = -e^{-x} dx$ o $-du = e^{-x} dx$ y

$$\int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arccos(u) + C = \arccos(e^{-x}) + C$$

2. (a) Si f es continua tal que $\int_0^9 f(x)dx = 4$, determine $\int_0^3 xf(x^2)dx$
- (b) Sea $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2(x+1)}$, demuestre que

$$\int_0^1 \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{\pi}{6}$$

Solución:

- (a) Haciendo la sustitución $u = x^2$ se tiene que $du = 2xdx$, $\frac{1}{2}du = xdx$ y si $x = 0$ entonces $u = u(0) = 0$ y si $x = 3$ entonces $u = u(3) = 9$, por lo que

$$\int_0^3 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^9 f(u)du = \frac{1}{2}4 = 2$$

- (b) Haciendo la sustitución $u = g(x)$ se tiene que $du = g'(x)dx$ y si $x = 0$ entonces $u = g(0) = -\frac{1}{2}$ y si $x = 1$ entonces $u = g(1) = 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsen(0) - \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

3. Suponga que $f : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\int_3^x f(t)dt = (x^2 - 4^2)\arccos(4 - x)$$

Calcule:

- (a) $\int_2^{5/2} 3f(2x)dx$
- (b) $f(4)$.

Solución:

- a) Considere la sustitución $u = 2x$, con eso $du = 2dx$, obteniendo que

$$\int_2^{5/2} 3f(2x)dx = \int_4^5 \frac{3}{2}f(u)du = \int_4^3 \frac{3}{2}f(u)du + \int_3^5 \frac{3}{2}f(u)du$$

del enunciado tenemos que

$$\int_4^3 \frac{3}{2}f(u)du = 0 \text{ y que } \int_3^5 \frac{3}{2}f(u)du = \frac{27}{2}\pi$$

obteniendo que

$$\int_2^{5/2} 3f(2x)dx = \frac{27}{2}\pi$$

b) Observe que derivando ambos lados de la igualdad dada tenemos que:

$$f(x) = 2x \arccos(4-x) - (x^2 - 4^2) \frac{1}{1 + (4-x)^2}$$

evaluando en $x = 4$ obtenemos que

$$f(4) = 8 \arccos(0) = 4\pi.$$

4. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

Solución:

Si realizamos la sustitución $u = (1-x)$, tenemos que $du = -dx$ obteniendo que

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = - \int_1^0 (1-u)^a u^b du = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 (1-u)^a u^b du = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$