PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Ayudantía 2 - MAT1610

1. Determine, si existe, la ecuación de la(s) asíntota(s) horizontal(es) de la función dada:

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6}$

   Note que,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6} \\
&= \frac{\sqrt{4x^2\left(1+\frac{2020}{4x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{4x^2}\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \\
&= \frac{2\,|x|\,\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \qquad (\sqrt{x^2}=|x|)
\end{aligned}
$$

   Entonces,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\,|x|\,\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \qquad (|x|=x,\ \text{si } x>0) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{\left(3-\frac{6}{x}\right)}\right) \qquad \text{(Leyes límite)} \\
&= 2\frac{\sqrt{1+0}}{3-0} \qquad \text{(Leyes límite)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

y hacia menos infinito, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\,|x|\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2(-x)\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} \qquad (|x| = -x,\ \text{si } x<0) \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x}\right)\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{505}{x^2}}}{\left(3-\frac{6}{x}\right)}\right) \qquad (\text{Leyes límite}) \\
&= -2\frac{\sqrt{1+0}}{3-0} \qquad (\text{Leyes límite}) \\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene como asíntotas horizontales a las rectas de ecuación: $y=\frac{2}{3}$ e $y=-\frac{2}{3}$

(b) $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x}{x^2-6x+5} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-x}{x^2}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Note que, en el numerador, el $\lim\limits_{x\to\infty} x-\frac{1}{x} = \infty - 0 = \infty$ y, en el denominador, el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = 1-0+0 = 1$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x}{x^2-6x+5} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3-x}{x^2}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}} \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

Esto, ya que, en el numerador, el $\lim\limits_{x\to\infty} x-\frac{1}{x} = -\infty - 0 = -\infty$ y, en el denominador, el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = 1-0+0 = 1$

Por lo tanto, como ambos límites son no finitos, la función dada no tiene asíntota horizontal.

(c) $f(x) = \frac{-2e^x}{e^x - 5}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2e^x}{e^x - 5} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(-2)}{e^x\left(1 - \frac{5}{e^x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{1 - 5e^{-x}} \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1 - 5e^{-x}} \\
&= \frac{-2}{1 - 0} \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^x}{e^x - 5} \\
&= \frac{(-2)\lim\limits_{x\to-\infty} e^x}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - \lim\limits_{x\to-\infty} 5} \\
&= \frac{(-2)\cdot 0}{0 - 5} \\
&= \frac{0}{-5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene como asíntotas horizontales a las rectas de ecuación: $y = -2$ e $y = 0$

2. Estudie si cada uno de los límites indicados existe o no. Si existe, determine su valor, en caso contrario, explique por qué

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + x + 2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}\right)}{x^2 - \left(\sqrt{x^2 + x + 2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(x - (-x)\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{-x - 2} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(-1 - \frac{2}{x}\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{-1 - \frac{2}{x}} \\
&= (-\infty)(-2) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\operatorname{sen}(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi}$

Considerando el cambio de variable $t = x - \frac{\pi}{4}$, entonces se tiene que $x = t + \frac{\pi}{4}$, $t \longrightarrow 0$ conforme $x \longrightarrow \frac{\pi}{4}$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\,\mathrm{sen}(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi} &= \lim_{t\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}}{4\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\pi} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2\left(\mathrm{sen}(t)\cos(\frac{\pi}{4})+\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})\cos(t)\right)-\sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2\left(\mathrm{sen}(t)\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)\right)-\sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{(\mathrm{sen}(t)+\cos(t)-1)}{t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sen}(t)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+0) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Nota: Otro cambio variable que se puede considerar es $t=4x-\pi$ y, por lo tanto, $x=\frac{t+\pi}{4}=\frac{t}{4}+\frac{\pi}{4}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}\left(\cos(x)+x^3\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Considere el cambio de variable $t=\frac{1}{x}$, entonces se tiene que $x=\frac{1}{t}$, $t\longrightarrow 0^+$ conforme $x\longrightarrow\infty$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}\left(\cos(x)+x^3\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{t}\right)^3\mathrm{sen}\,(t)\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^3}\,\mathrm{sen}\,(t)\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{sen}\,(t)}{t}\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{sen}\,(t)}{t}\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{sen}\,(t)}{t}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{L_1}+\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{L_2}\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}\,(t)}{t}}_{L_3}
\end{aligned}$$

Los límites L_2 y L_3 son ambos iguales a 1.

El límite L_1 la función involucra el producto de una función acotada por una función que tiende a cero cuando x tiende a 0^+. Entonces, por el teorema de la compresión (sandwich) el límite existe y vale 0, ya que

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{t^2}{1+t^2} \leq \cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \left(\frac{t^2}{1+t^2} > 0\right) \\
&\Longrightarrow \quad -\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1+t^2} \leq \lim_{t\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2} \leq \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1+t^2} \\
&\Longrightarrow \quad 0 \leq \lim_{t\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2} \leq 0
\end{aligned}$$

entonces, $L_1 = \lim\limits_{t\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^2}{1+t^2} = 0$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}\left[\cos(x) + x^3\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] &= L_1 + L_2\cdot L_3 \\
&= 0 + 1\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Determine si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 1 \\ \cos\left(\pi x + 3 \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & si \quad 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{3 - 3\cos(2-x)}{x^2 - 2x} & si \quad x > 2 \end{cases}$

es continua o discontinua en $x = 1$ y si es continua o discontinua en $x = 2$. En caso de discontinuidad, clasifíquela.

Se tiene que $f(1) = 1^2 = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \cos\left(\pi x + 3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \cos\left(\pi \lim_{x \to 1^+} x + 3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\lim\limits_{x \to 1^+} x}\right)\right) \qquad (\textit{continuidad}) \\ &= \cos\left(\pi + 3 \operatorname{arc\,sen}(1)\right) \\ &= \cos\left(\pi + 3\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ y, por lo tanto, f tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(2) &= \cos\left(2\pi + 3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(3\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \cos\left(\pi x + 3\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \cos\left(\pi \lim_{x\to 2^-} x + 3\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 2^-} x}\right)\right) \qquad (\textit{continuidad})\\
&= \cos\left(2\pi + 3\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \cos\left(3\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \cos\left(3\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{3-3\cos(2-x)}{x^2-2x}\\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{3\,(1-\cos(x-2))}{(x-2)\,x} \qquad (\cos(2-x)=\cos(x-2))\\
&= 3\lim_{x\to 2^+} \frac{(1-\cos(x-2))}{(x-2)\,x}
\end{aligned}
$$

considerando el cambio de variables $t = x-2$, se tiene que $x = t+2$, $t \longrightarrow 0^+$ conforme $x \longrightarrow 2^+$ y

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= 3\lim_{t\to 0^+} \frac{(1-\cos(t))}{t\,(t+2)}\\
&= 3\lim_{t\to 0^+} \frac{(1-\cos(t))}{t}\frac{1}{t+2}\\
&= 3\lim_{t\to 0^+} \frac{(1-\cos(t))}{t}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t+2}\\
&= 3\cdot 0\cdot \frac{1}{2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$. Así,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$$

por lo que la función f es continua en $x=2$.