PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-20 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 9

Sumas de Riemann e Integrales + TFC e Integrales indefinidas

Ejercicios ayudantía 8

Problema 3

Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$$

por (1) de la pregunta anterior tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

El último cálculo se obtiene de ocupar el TFC 2, visto en clases

Problema 4

Sea f una función cuya derivada es continua en $\mathbb{R}$. Calcule $F'(x)$ si

$$F(x) = \int_0^x (x - t) f'(t) dt$$

Solución:

Notemos que al derivar $F(x)$ tenemos (acá se tiene que separamos la integral y derivamos la suma de integrales).

$$F'(x) = \int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) \Rightarrow F'(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

Problema 5

Demuestre que

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \le \int_0^2 \frac{1}{1+x^3}dx \le 2$$

Solución:

Notemos que la funcion $\frac{1}{1+x^3}$ es decreciente, por lo tanto

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{1+x^3} \le 1 \cdot (2-0) = 2$$

por otro lado tenemos que

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} + \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}$$

si vemos la primera tenemos la cota

$$\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}$$

para la segunda tenemos

$$\frac{1}{9} \le \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}$$

obteniendo lo pedido

Ejercicios ayudantía 9

Problema 1

Sean

$$F(x) = \int_0^{2x-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{dt}{1+t^2}$$

para $0 < x < 1$.Demuestre $F'(x) + 2G'(x) = 0$

Solución: Primero calculemos las derivadas de la funciones

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 \qquad , \qquad G'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)} \cdot \left(- \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot x^2} \right)$$

podemos notar que ambas se puede escribir de mejor manera todavía, por lo tanto tenemos

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{2}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

para G tenemos

$$G'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot x^2}\right) = -x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2\frac{(1-x)}{x}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

por lo tanto $F'(x) + 2G'(x) = 0$

Problema 2

Calcule

$a) \int \frac{1+x}{1+x^2}$ $\qquad$ $b) \frac{d}{dx}\int_{1-2x}^{1+2x} t\sin(t)dt$

Solución:

(a) Si separamos la función que está dentro de la integral tenemos que

$$\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2} + \int \frac{x}{1+x^2}$$

Notemos que la parte izquierda tenemos una integral conocida por lo que calcularemos la segunda, para ello:

Tomemos $u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$, entonces

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Entonces sumando los dos reasultados de ambas integrales, tenemos que es

$$\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

(b) Por TFC

$$\frac{d}{dx}\int_{1-2x}^{1+2x} t\sin(t)dt = 2(1-2x)\sin(1+2x) - (-2)(1-2x)\sin(1-2x)$$

Problema 3

Considere las funciones h continua, y f y g derivables. Además:

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

Demuestre que $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$. Con lo anterior, para $x > 0$ pruebe que

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

es una función constante

Solución:

Lo primero se cumple por TFC 2, basta notar que si derivo las funciones resultares de ese teorema y por regla de la cadena se obtiene lo pedido, pero se ve mas claro de esta forma,

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

definamos H como la primitiva de h (lo que quiere decir que $H' = h$) por TFC 2 se tiene que el valor de esa integral es

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H(g(x)) - H(f(x))$$

si derivo esto

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H'(g(x))g'(x) - H'(f(x))f'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

Y ahora para probar que $F(x)$ es constante basta demostrar que la derivada es 0, entonces intuitivamente derivemos

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot 1 - 0 - \left(0 - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot -\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Problema 4

Demostrar si F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(ax)dx = \frac{F(ax)}{a} + C,\ \text{tal que } a \neq 0$$

Solución:

Notemos que $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(ax) = f(ax)a \Rightarrow \frac{1}{a}F'(ax) = f(ax)$$

enotonces integremos

$$\int \frac{1}{a}F'(ax) = \int f(ax) \Rightarrow \frac{1}{a}\int F'(ax) = \int f(ax) \Rightarrow \frac{1}{a}F(ax) + C = \int f(ax)$$

Problema 5

a) Calcule

$$\int \sqrt{e^x - 1}$$

b) Encuentre una función f tales que

$$\int_a^{x^2} f(t)ln(t)dt = x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right), \quad a > 1$$

Solución:

a) Tomemos un cambio de varible conveniente (demasiado), sea $u^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2udu}{u^2+1}$ con ello

$$\int \frac{2u^2}{u^2+1}du = 2\frac{u^2+1-1}{u^2+1} = 2\int 1 - \frac{1}{u^2+1}$$
$$\Rightarrow 2(u - \arctan(u)) + C = 2(\sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1})) + C$$

b) Notemos que para encontrar la una función que cumpla lo pedido, puede ser una (muy buena) idea derivar. Entonces derivando tenemos

$$2xf(x^2)\ln(x^2) = 3x^2\ln(x) - 3\frac{x^2}{3} + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$2xf(x^2)\ln(x^2) = 3x^2\ln(x) - x^2 + x^2 \Rightarrow 4xf(x^2)\ln(x) = 3x^2\ln(x)$$

como $a > 1 \Rightarrow \ln(x) \neq 0$

$$\Rightarrow 4xf(x^2) = 3x^2 \Rightarrow f(x^2) = \frac{3x}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$