PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-15 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 2

Continuidad

Problema 1

a) Demuestre que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$

Solución: Sea la función $f(x) = \cos(x) - x$, es fácil ver la la función que acabamos de tomar es continua, ya que es la suma de dos funciones continuas.

Sabemos que el coseno cumple lo siguiente

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 / -x$$

$$-1 - x \leq \cos(x) - x \leq 1 - x$$

Ahora evaluemos la función en 2 y -2

$$f(2) \Rightarrow -3 \leq \cos(2) - 2 \leq -1$$

lo que quiere decir que la función en 2 es negativa

Por otro lado evaluemos la función en -2

$$f(-2) \Rightarrow -1 \leq \cos(x) \leq 1 / -x$$

$$1 \leq \cos(-2) + 2 \leq 3$$

lo que nos dice que la función evaluada en -2 es positiva

Como sabemos que la función original era continua y ahora sabemos que posee un valor positivo y otro negativo, por lo tanto por TVI sabemos que existe un x_0 tal que $f(x_0) = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x_0) = 0 \Rightarrow \cos(x_0) - x_0 = 0 / + x_0 \\ \cos(x_0) = x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

demostrando lo pedido

b) Sea f una función continua en $[0, 2]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 1)$

Solución: Definamos una función g de la siguiente forma $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, por lo tanto la función g es continua en el intervalo $[0, 2]$ ya que es la diferencia entre dos funciones continuas.

Evaluemos la función g en 0 y 1.

$$g(0) = f(1) - f(0)$$

$$g(1) = f(2) - f(1)$$
$$\Rightarrow g(0) = -g(1)$$

Entonces ahora tenemos dos casos si $g(0) = 0$ estamos listos ya que

$$g(0) = 0 \Rightarrow f(0) = f(1)$$

y ocurre lo mismo con $g(1)$.
Veámos el otro caso $g(0) \neq 0$ eso nos dice que $g(0)$ y $g(1)$ tienen signos opuestos. Como dijimos que g era una función continua y tenemos un valor negativo y otro positivo podemos ocupar TVI, lo que implica que $\exists x_o$ tal que

$$g(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0 + 1) - f(x_0) = 0$$
$$\Rightarrow f(x_0 + 1) = f(x_0)$$

demostrando lo pedido

Problema 2

a) Calcular a y b para que la función $f(x)$ sea continua

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x < -2 \\ ax^2 + bx & si \quad -2 \leq x \leq 4 \\ x - 4 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Solución: Para este problema hay que estudiar la continuidad en los puntos -2 y 4

(i) Continuidad en $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} 2x + 1 = -4 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} ax^2 + bx = 4a - 2b$$
$$\Rightarrow 4a - 2b = -3 \quad (i)$$

(ii) Continuidad en $x = 4$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4} ax^2 + bx = 16a + 4b$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4} x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 16a + 4b = 0 \quad (ii)$$

Por (ii) tenemos

$$4a + b = 0 \Rightarrow b = -4a$$

ahora reemplazamos (ii) en (i)

$$\begin{aligned} 4a - 2b = -3 &\Rightarrow 4a - 2(-4a) = -3 \\ &\Rightarrow 4a + 8a = -3 \\ &\Rightarrow 12a = -3 \\ &\Rightarrow a = -\frac{3}{12} \Rightarrow b = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo tanto para que la función sea continua $a = -\frac{3}{12}$ y $b = 1$

Problema 3

Estudie la continuidad de la función f en toda la recta real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x+1} & x \le -1 \\ x^2 - 2 & x > -1 \end{cases}$$

Solución: Son tres casos los que tenemos que ver

Primero veremos el intervalo $(-\infty, -1)$

$f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ Dominio: $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \longrightarrow (-\infty, -1)$ como $f(x)$ está definida en $(-\infty, -1) \Rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$

Por otro lado tenemos el caso cuando $x = -1$ si

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^2}{2(-1)+1} = -1 \\ \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2}{2x+1} = -1 \\ \lim_{x\to(-1)^+} x^2 - 2 = -1 \end{cases}$$

por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = -1$

Por último tenemos el caso de el intervalo $(-1, \infty+)$

$f(x) = x^2 - 2$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, \infty+) \longrightarrow (-1, \infty)$ como $f(x)$ está definida en $(-1, \infty+) \Rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, \infty+)$

Problema 4

Determine el valor de $p \in \mathbb{R}$ de manera que que la función:

$$f(x) = \frac{x^6 + (1 + x^2)^3}{x^p}$$

tenga una asíntota horizontal

Solución: Notemos que para que la función tenga una asíntota horizontal es cuando $x \longrightarrow \pm\infty$ y el límite de la función es una valor fijo, entonces pensemos lo que pasa si $x \to \infty$, notemos que $x \neq 0$ por lo tanto podemos dividir el numerado y denominador por x^6

$$\Rightarrow \frac{\left(x^6 + (1 + x^2)^3\right) \cdot \frac{1}{x^6}}{\frac{x^p}{x^6}}$$

notemos que en el numerado todos los elementos que tengan un grado menor que 6 van a tender a ser 0, por lo tanto sobreviven dos elementos, por lo tanto ya tengo un valor fijo en el numerador, mientras tanto en el denominador tengo que obtener un valor fijo por lo tanto $p = 6$

Nota: Si $p > 6$ también funciona ya que la asintota que se obtiene es 0

Problema 5

Demuestre que:

$$f(x) = 3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

posee al menos una raíz real.

Solución: Para demostrar lo pedido utilizaremos TVI, para ello tomemos $x = 0$

$$\Rightarrow f(0) = 3(0) - 2 - \cos(0) < 0$$

ahora tomemos $x = 1$

$$\Rightarrow f(1) = 3(1) - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

por lo tanto la función f pasa por el eje X, entonces $\exists c \textit{ tal que } f(c) = 0$

Problema 6

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, tal que $f(a) \neq f(b)$. Además $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$. Pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = -g(c)$

Solución: Definimos la función $h := f(x) + g(x)$, como es suma de funciones continuas, h es continua

$$x = a \Rightarrow h(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b)$$

ahora el caso de $x = b$

$$x = b \Rightarrow h(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(b)$$

Sabemos por enunciado que $f(a) \neq f(b) \Rightarrow f(a) - f(b) \neq 0$

Entonces como es un valor fijo, sea p=f(a)-f(b), por lo tanto $h(a) = p$ y $h(b) = -p$, entonces tenemos un valor positivo y otro negativo, por TVI $\exists c \; tal \; que \; h(c) = 0$, en otras palabras

$$\Rightarrow h(c) = 0 \Rightarrow f(c) + g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = -g(c)$$

demostrando lo pedido.

Problema 7

Dadas las funciones f y g definidas por $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x^2 + x$, calcule:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(f \circ g)(x-1)}{(g \circ f)(x)}$$

Solución: Calculemos las funciones compuestas del numerador y denominador

Numerador

$$(f \circ g)(x-1) = f(g(x-1)) = f((x-1)^2 + (x-1)) = (x^2 - 2x + 1 + x - 1) - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

Denominador

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 - 4x + 4 + x - 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x+1)(x-2)$$

por lo tanto tenemos lo siguiente

$$\frac{(f \circ g)(x-1)}{(g \circ f)(x)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Ahora sólo tenemos que calcular

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$