



Ayudantía 1

Límites

Resumen de límites Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a . (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a , excepto posiblemente en a misma). Entonces escribimos. $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$ es L :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Es decir, cuando nos acercamos a $x = a$ por la izquierda o por la derecha, el valor de la función tiende a ser L , pero no necesariamente a $f(x = a) = L$.

Uno de los teoremas más importantes de límites, es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ existe si y sólo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Por otro lado, veremos también ejemplos de límites que no existen, o límites que tienden infinito, un ejemplo de lo último es el caso si $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0$. En ese caso, diremos que el límite es ∞ .

Otro caso posible dentro de las funciones, es que presenten asíntotas. Por el momento definiremos de dos tipos: verticales y horizontales.

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina asíntota vertical.

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a, \text{ siendo } a \text{ un valor finito}$$

la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

Para ver las asíntotas oblicuas

Para el cálculo que se hace con límites, es necesario algunas propiedades algebraicas principales (en el caso de que existan dichos límites):

1. El límite de una suma es la suma de los límites.
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.
4. El límite de un producto es el producto de los límites.
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Las funciones polinómicas son todas funciones continuas, como es fácil deducir de sus gráficas. En cambio, las funciones racionales tienen discontinuidades en aquellos puntos en los que se anula el denominador, por lo tanto, si la función a evaluar es del tipo polinomial o racional, y a está dentro del dominio de f , entonces el límite es evaluarlo directamente.

Finalmente tenemos el Teorema del Sándwich. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando $x \rightarrow a$ y:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Problema 1

a) Demuestre que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sin \frac{1}{x}}$$

Problema 2

a) Demuestre por definición

$$\lim_{x \rightarrow a} cx + b = ac + b$$

b) Demuestre por definición

$$\lim_{x \rightarrow -2} 3x + 5 = -1$$

c) Demuestre por definición:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \cos(x) = 1$$

Problema 3

Determine el valor de a para que exista $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, donde $f(x)$ es

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2, & x < -3 \\ \frac{x^3 + 3x^2}{x+3}, & x \geq -3 \end{cases}$$

Problema 4

Calcular los siguientes límites (en el caso de no existir justifique)

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{1 - x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos^2(x))}{1 - \sin(x)}$$

Problema 5

Determine las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:

$$\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$