PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-15 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 6

Teorema del valor medio, efecto de la derivada y Regla de l'Hôpital

Problema 1

Sea f una función dos veces derivable, tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$, con $a < c < b$. Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f''(\alpha) < 0$.

Solución: ya que $f(c) > 0$ existen puntos en el intervalo $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ con $f'(c_1) > 0$, $f'(c_2) < 0$ por TVM y existe un punto de inflexión tal que $f'(c_3) = 0$

tomemos $\alpha \in (c_3, c_2)$ por TVM tenemos que

$$f''(\alpha) = \frac{f'(c_3) - f'(c_2)}{c_3 - c_2} = \frac{-f'(c_2)}{c_3 - c_2} < 0$$

Problema 2 Utilizando TVM para $f(x) = \sqrt{x}$ demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Solución: Por TVM tenemos

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

para algín $\xi \in (n, n+1)$

como $f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ es decreciente

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

por lo primero se concluye que

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Problema 3

Calcule los siguientes límites usando directamente la Regla de l'Hôpital

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ *c)* $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x}$

d) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x)-\ln(1+x)}{3x^2}$ *e)* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

c)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{x}} = 0$$

d)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{3x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(x)-\frac{1}{1+x}}{6x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\sin(x)+\frac{1}{(1+x)^2}}{6} = \frac{1}{6}$$

e)

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{\ln(x)+x\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \longrightarrow 1^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Problema 4

Haga un estudio completo de la función $f(x) = \frac{2(x-2)}{x^2}$. Indique intervalos de crecimiento y decrecimiento asíntotas, extremos locales, concavidad y convexidad, puntos de inflexión.

Solución: notemos que la función f es continua si $x \neq 0$. Por lo tanto calculemos la derivada de f.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x-2)}{x^4} = 2 \cdot \frac{4x - x^2}{x^4} = \frac{2(4-x)}{x^3}$$

$$f' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ decreciente en } (-\infty, 0)$$

$$f' > 0 \text{ en } (0, 4) \Rightarrow f \text{ creciente en } (0, 4)$$

$$f' < 0 \text{ en } (4, \infty+) \Rightarrow f \text{ decreciente en } (4, \infty+)$$

veamos con la segunda derivada para ver la concavidad

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{-1 \cdot x^3 - 3x^2(4-x)}{x^6} = 2 \cdot \frac{2x^3 - 12x^2}{x^6} = \frac{4(x-6)}{x^4}$$

$f''(x) = 0$ si $x = 6$

$$f'' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ concavo en } (-\infty, 0)$$

$$f'' < 0 \text{ en } (0, 6) \Rightarrow f \text{ concavo en } (0, 6)$$

$$f'' > 0 \text{ en } (6, \infty+) \Rightarrow f \text{ convexo en } (6, \infty+)$$

ahora para ver las asíntotas Notemos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2(x-2)}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2(x-2)}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow x = 0$$

asíntota vertical en 0

$$\lim_{x \to \infty+} \frac{2(x-2)}{x^2} = \lim_{x \to \infty-} \frac{2(x-2)}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

asíntota horizontal en 0

Problema 5

a) Probar que $\frac{\ln(1+t)}{t} < 1$ para todo $t > 0$

b) Probar que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Solución:

a) Dado $t > 0$ $f : [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$, tomemos la función $f(x) = \ln(1 + x)$

por TVM

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \\ &= \frac{\ln(1+t) - \ln(1)}{t} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t} \end{aligned} \tag{1}$$

como $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, para $c \in (0,t)$

$$f'(c) = \frac{1}{1+c} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+t)}{t} = f'(c) < 1$$

b) Sea $f(x) = \sin^2(x)$ y $g(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

notemos

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}(-\sin(2x))2 = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + k$$

Si

$$f(0) = g(0) + k \Rightarrow \sin^2(0) = \frac{1-\cos(2\cdot 0)}{2}$$

$$0 = \frac{1-1}{2} + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$$