PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610-15 - Luis Arias - laarias@uc.cl

Ayudantía 1

Límites

Resumen de límites Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma). Entonces escribimos. $f(x)$ cuando $x \to a$ es L:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Es decir, cuando nos acercamos a $x = a$ por la izquierda o por la derecha, el valor de la función tiende a ser L, pero no necesariamente a $f(x = a) = L$.
Uno de los teoremas más importantes de límites, es:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \textit{ existe si y sólo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Por otro lado, veremos también ejemplos de límites que no existen, o límites que tienden infinito, un ejemplo de lo último es el caso si $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando $x \to 0$. En ese caso, diremos que el límite es ∞.
Otro caso posible dentro de las funciones, es que presenten asíntotas. Por el momento definiremos de dos tipos: verticales y horizontales.

Se llama Asíntota Vertical de una rama de una curva $y = f(x)$, a la recta paralela al eje y que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe alguno de estos dos límites:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

a la recta $x = a$ se la denomina asíntota vertical.

Se llama Asíntota Horizontal de una rama de una curva $y = f(x)$ a la recta paralela al eje x que hace que la rama de dicha función tienda a infinito. Si existe el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a, \textit{ siendo a un valor finito}$$

la recta $y = a$ es una asíntota horizontal.

Para ver las asíntotas oblicuas

Para el cálculo que se hace con límites, es necesario algunas propiedades algebraicas principales (en el caso de que existan dichos límites):

1. El límite de una suma es la suma de los límites.

2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

4. El límite de un producto es el producto de los límites.

5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Las funciones polinómicas son todas funciones continuas, como es fácil deducir de sus gráficas. En cambio, las funciones racionales tienen discontinuidades en aquellos puntos en los que se anula el denominador, por lo tanto, si la función a evaluar es del tipo polinomial o racional, y a está dentro del dominio de f, entonces el límite es evaluarlo directamente.

Finalmente tenemos el Teorema del Sándwich. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando $x \to a$ y:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces:

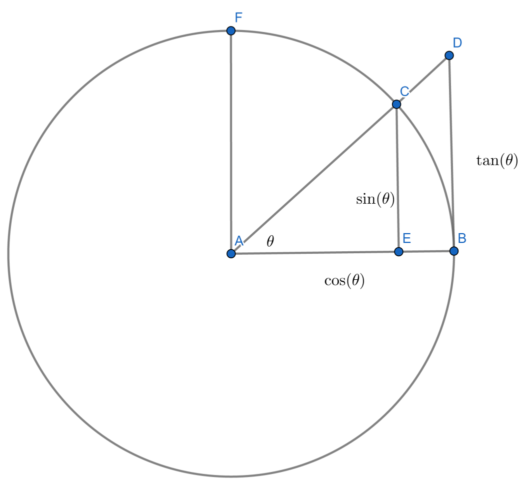
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Problema 1

a) Demuestre que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

Solución: Para demostrar lo pedido necesitamos usar el teorema del sandwich. Usaremos un poco de geometria para encontrar una desigualdad que se parezca a $\frac{\sin(\theta)}{\theta}$



la figura 1 notemos que $AE = \cos(\theta)$, $CE = \sin(\theta)$ y $BD = \tan(\theta)$ y se desprende la siguiente desigualdad

$$\textit{área}(\triangle ACE) < \textit{área}(\textit{sector}\, ACB) < \textit{área}(\triangle ADB)$$

Notemos que $\textit{área}(\triangle ACE) = \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}$ y $\textit{área}(\triangle ADB) = \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}$, para calcular el área del sector circular ACB usaremos la formula

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Entonces $\textit{área}(\textit{sector}\, ACB) = \frac{1}{2}\theta$. Entonces la desigualdad queda de la siguiente forma

$$\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{2} < \frac{1}{2}\theta < \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}$$

Ahora un poco de manipulación algebraica

$$\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{2} < \frac{1}{2}\theta < \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)} / \cdot 2$$

$$\Rightarrow \sin(\theta)\cos(\theta) < \theta < \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Como $\theta \neq 0 \Rightarrow \sin(\theta) \neq 0$ por lo tanto podemos dividir por $\sin(\theta)$

$$\Rightarrow cos(\theta) < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Ahora separemos la desiagualdad de dos formas

$$\underbrace{cos(\theta) < \frac{\theta}{\sin(\theta)}}_{(1)} < \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad y \qquad \cos(\theta) < \overbrace{\frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}}^{(2)}$$

en (1) tenemos al multiplicar cruzado queda de la siguiente forma

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

ahora el razonamiento es análogo para (2) y se obtiene

$$\cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

Si juntamos ambas desigualdades queda de la siguiente forma

$$\cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Nota: Se puede multiplicar cruzado ya que si estamos en el primer cuadrante (o sea aproximando por la derecha a 0) todo es positivo y la desigualdad no cambia, en cambio si nos acercamos al cero por la izquierda estamos en el cuarto cuadrante por lo tanto el $\sin(\theta)$ y θ son negativos por lo tanto en la división queda positivo y no cambia la desigualdad.

Para concluir

$$\cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

es fácil notar que

$$\cos(\theta) \xrightarrow{\theta\to 0} 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta)} \longrightarrow 1$$

por teorema del sándwich

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

b) Calcule

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin\frac{1}{x}}$$

Solución: Recordemos que la función seno está acotada por -1 y 1, por lo tanto en este caso tenemos que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin\frac{1}{x}} \leq e^{1}$$

como x^2 siempre es un número positivo, podemos multiplicar por el, entonces

$$\Rightarrow x^2e^{-1} \leq x^2e^{\sin\frac{1}{x}} \leq x^2e^{1}$$

Notemos que e^{-1} y e^{1} son valores fijos por lo tanto $e^{-1}x^2 \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ y $e^{1}x^2 \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ por teorema del sándwich se obtiene

$$\lim_{x\to 0} x^2e^{\sin\frac{1}{x}} = 0$$

Problema 2

a) Demuestre por definición

$$\lim_{x\to a} cx + b = ac + b$$

Solución: Primero recordemos la definición de límite

Límite: $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad$ *tal que* : $|x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$

Por lo tanto en este ejercicio tenemos que por definición $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in$ $Dom(f)$ *tal que* : $|x-a| < \delta \to |(cx+b)-(ac+b)| < \epsilon$, entonces queremos encontrar un δ sufuciente para que la función este ϵ cerca de L. Entonces la pregunta es : ¿Cómo encontramos δ?
Analicemos lo que está dentro del valor absoluto

$$|(cx+b)-(ac+b)| = |cx+b-ac-b| = |cx+ac| = |c(x-a)|$$

con esto notamos que se parece mucho a $|x-a|$ solo que el de arriba está multiplicado por $|c|$ entonces si

$$|x-a| < \delta / \cdot |c| \Rightarrow |cx-ca| < \delta\cdot|c|$$

Si en el valor valor absoluto sumanos y restamos b (sumar 0) queda los siguiente

$$|cx+b-ca-b| < \delta\cdot|c| \Rightarrow |(cx+b)-(ca+b)| < \delta\cdot|c|$$

Entonces tenemos lo que queremos pero acotado con valores independientes de x, si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{|c|}$ ocurre lo siguiente

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \frac{\epsilon}{|c|} / \cdot |c| \Rightarrow |c(x-a)| < \epsilon$$

y hacemos lo mismo de sumar b dentro del valor absoluto

$$\Rightarrow |(cx+b)-(ac+b)| < \epsilon$$

demostrando lo pedido.

$b)$ Desmuestre por definición

$$\lim_{x\to -2} 3x+5=-1$$

Solución: Recordemos la definición de límite

Límite: $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \textit{tal que}: |x-a|<\delta \to |f(x)-L|<\epsilon$

Como la función $(3x+5)$ está definida para todos los reales, cualquien intervalo que contenga al -2 cumple la definición $epsilon-delta$ por lo que nos queda de la siguiente manera

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \textit{tal que}: |x-(-2)|<\delta \to |(3x+5)-(-1)|<\epsilon$$

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \textit{tal que}: |x+2|<\delta \to |3x+5+1|<\epsilon$$

entonces trabajemos similar al ejericio anterior, partamos por el valor absoluto de la derecha, con ello manipularemos algebraicamente lo que está dentro del valor absoluto y así intentamos llegar a algo similar al valor absoluto de la izquierda, en otras palabras intentamos encontrar el valor de δ para que la función esté ϵ cerca de L. Desarrollando el interior del valor absoluto de la izquierda tennemos

$$|3x+5+1|=|3x+6|=3|x+2|$$

nos damos cuenta que ya tenemos lo que queríamos, que es $|x+2|$, sólo que va acompañado por un coeficiente 3, lo que nos da la idea de

$$3|x+2|<\epsilon \Rightarrow |x+2|<\frac{\epsilon}{3}$$

por lo tanto si vemos el valor absoluto de la izquierda vemos que tenemos $|x+2|<\delta$ si escogemos $\delta=\frac{\epsilon}{3}$ se cumple lo pedido, ya que

$$\Rightarrow |x+2|<\delta=|x+2|<\frac{\epsilon}{3}/\cdot 3$$

$$\Rightarrow 3|x+2|<\epsilon=|3x+6|<\epsilon=|3x+5+1|<\epsilon$$

$$\Rightarrow |(3x+5)-(-1)|<\epsilon$$

demostrando lo pedido.

$c)$ Desmuestre por definición:

$$\lim_{x\to 0} 2-\cos(x)=1$$

Solución: Debemos demostrar que existe $\delta(\epsilon,x_0)>0$ para todo $\epsilon>0$, con $x_0=0$ dado $|x-x_0|=|x|<\delta$ entonces $|2-\cos(x)-1|<\epsilon$
Notamos que

$$\begin{aligned}|2-\cos(x)-1| &= |1-\cos(x)| \\ &= 2\left|\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| \\ &\le 2\left|\frac{x}{2}\right|^2<\frac{\delta^2}{2}\end{aligned} \tag{1}$$

Por lo que quisieramos que $\delta \leq \sqrt{2\epsilon}$, pero como no podemos reemplazar por raices ya que se debe ser estrictamente positivo y la raíz da positivo y negativo, debe ser un δ en lo posible lineal. Notamos que estamos apunto de acordarlo, y bastaría con restringir de esta forma $\delta < 1$ para que así:

$$|2 - \cos(x) - 1| < \frac{\delta\delta}{2} < \frac{\delta}{2}$$

para hacer $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ (o incluso $\delta \leq \epsilon$ ya que así $|2 - \cos(x) - 1| < \dfrac{\delta}{2} < \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$ la última parte es porque 1 es mayor que un medio)

Pero, no hay que olvidar la restricción, ¿cuál δ elegir entonces?, bueno lo más pequeño entre $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $\delta < 1$, es decir:

$$\delta \leq min\left\{1, \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

Problema 3

Determine el valor de a para que exista $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, donde $f(x)$ es

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2, & x < -3 \\ \frac{x^3+3x^2}{x+3}, & x \geq -3 \end{cases}$$

Solución: Recordemos que para que el límite exista se tiene que cumplir lo siguiente

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x)$$

Por lo tanto tenemos $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -3a - 2$, por lo tanto $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ tiene que ser igual a $-3a-2$, si calculamos $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ no puede evaluar directamente en -3 ya que el denominador nos da problemas , por lo tanto notemos que el numerador lo podemos factorizar por x^2, entonces nos queda $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{x+3} = x^2 \longrightarrow 9$. Entonces tenemos

$$-3a - 2 = 9 \Rightarrow -3a = 11 \Rightarrow a = -\frac{11}{3}$$

Problema 4

Calcular los siguientes límites (en el caso de no existir justifique)

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

$b)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{1-x}$

$c)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan(x)$

$e)\ \lim_{x\to \infty} \dfrac{3x-2}{2x+1}$

$f)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\cos^2(x))}{1-\sin(x)}$

Solución:
a) Basta con simplificar el polinomio del numerador, tendriamos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

simplificamos y se obtiene

$$\lim_{x\to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

b) Veamos los límites por ambos lados.

Por la izquierda tenemos que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{1-x} = \frac{-(x-1)}{1-x} = 1$$

si analizamos por la derecha tenemos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{1-x} = \frac{(x-1)}{1-x} = -1$$

Como tienen valores opuestos, el límite no existe.

c) Necesitamos recodar en el curso de precálculo vieron (o debieron haberlo visto) que

$$\cos(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

Ahora recodemos el límite visto en el ejercicio 1, usaremos que $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1$, con $\theta = x - \frac{\pi}{2}$, lo que rescataremos de lo anterior es

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1 \tag{3}$$

Entonces tenemos lo siguiente

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

reemplacemos el $\cos(x)$ visto en (1)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(x)}{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

si nos damos cuenta, tenemos lo mismo que en (2), para que se vea un poco más claro

$$\lim_{x-\frac{\pi}{2}\to 0} -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\sin(x)$$

ahora si hacemos tender x a $\frac{\pi}{2}$ en las expresiones que tenemos es

$$(1)(1)=1$$

d) La expresión que está dentro del límite la podemos dividir por $e^x \neq 0$, lo que nos produce que quede de la siguiete manera

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{e^x}}$$

como $e^x \longrightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{e^x} \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{2}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

e) Hacemos el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior, ya que como $x \longrightarrow \infty$ está lejos del cero, por lo tanto la expresión que está dentro del límite puede ser dividida por x, lo que queda de la siguiente manera

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}$$

evaluamos el límite

$$\Rightarrow \frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}$$

f) La idea de este ejercicio es usar el límite del problema 1, por lo tanto analicemos la fracción que está dentro del límite y haremos un poco de manipulación algebraica.

$$\frac{\sin(\cos^2(x))}{1-\sin(x)}=\frac{(\sin(\cos^2(x)))(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}=\frac{(\sin(\cos^2(x)))(1+\sin(x))}{(1-\sin^2(x))}$$

$$\frac{(\sin(\cos^2(x)))(1+\sin(x))}{(1-\sin^2(x))}=\frac{(\sin(\cos^2(x)))(1+\sin(x))}{(\cos^2(x))}$$

entonces ahora el límite que teníamos, lo podemos ver de esta manera

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(\cos^2(x)))}{(\cos^2(x))}(1+\sin(x))=\lim_{x-\frac{\pi}{2}\to 0} \frac{(\sin(\cos^2(x)))}{(\cos^2(x))}(1+\sin(x))$$

por el problema 1 la parte izquierda tiende a 1 la parte derecha nos da un valor fijo

$$\Rightarrow (1)(1+1)=(1)(2)=2$$

Problema 5

Determine las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función:

$$\frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$$

Solución: Para determinar las asíntotas horizontales tenemos que ver el límite cuando la variable tiende a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

ahora tenemos que ver $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

por lo tanto $y=\frac{1}{2}$ es la única asíntota horizontal.

Para determinar las asíntotas verticales, debemos ver para que valor a tal que si $x\longrightarrow a \Rightarrow \lim f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to a}\frac{69+x^2+1-69}{2x^2-3x-2}=\pm\infty$$

para que ello ocurra el numerador tiene que ser distinto de 0 y el denominador su límite tiene que ser 0, en otras palabras

$$\lim_{x\to a}x^2+1\neq 0 \ y \ \lim_{x\to a}2x^2-3x-2=0$$

entonces por lo primero si las asíntotas no son -1 o 1 estamos bien, ahora veamos la otra condición

$$\lim_{x\to a}2x^2-3x-2=0\iff 2a^2-3a-2=(2a+1)(a-2)\iff a=-\frac{1}{2} \text{ ó } a=2$$

Por lo tanto

$$x=-\frac{1}{2} \ y \ x=2$$

son las asíntotas verticales.