PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primee semestre 2022

Ayudantía 11 - MAT1610

1. Calcule el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)dx$ si se sabe que

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 3, \int_{2}^{5} 2f(x)dx = 6 \text{ y que } \int_{-1}^{-2} f(x)dx = 5$$

Solución

Observe que por propiedades de la integral del enunciado tenemos que $\displaystyle\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$, por lo tanto

$$\int_{-2}^{5} f(x)dx = 6$$

además $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)dx = -5$ por lo tanto $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)dx = 11$

2. Demuestre que $\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}$.

Solución

Notar que en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ el valor mínimo absoluto de la función $x \mapsto \cos(x)$ es $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx$$

Por otro lado, para $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, como $x < 1$ entonces $1 < \frac{1}{x}$ y como $\cos(x) < 1$, por transitividad se tiene que, para $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) < \frac{1}{x}$ y en consecuencia,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx$$

Por último, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ el valor máximo absoluto de la función $x \mapsto \frac{1}{x}$ es $\frac{6}{\pi}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{12}$ entonces,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \leq \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

3. Determine la constante a y la función $f(x)$ tales que

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-a) + \arctan(x-a) + a - 2$$

Solución:
Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^{2x-a} f(t)dt$ entonces, $G(a) = \displaystyle\int_a^{a} f(t)dt = 0$, es decir,
$\operatorname{sen}(0) + \arctan(0) + a - 2 = 0$ y en consecuencia $a = 2$ y

$$G(x) = \int_a^{2x-a} f(t)dt = \int_2^{2x-2} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

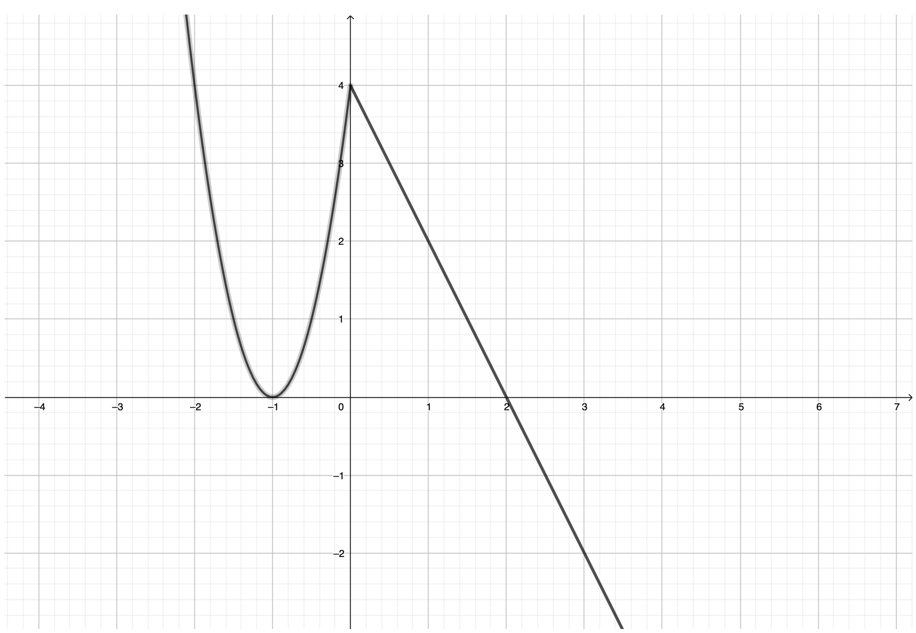
es decir,

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

Entonces, derivando en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_2^{2x-2} f(t)dt = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \quad &\Rightarrow \quad f(2x-2)\frac{d}{dx}(2x-2) = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f(2x-2)\cdot 2 = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f\,(2x-2) = \frac{\cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2}}{2} \\
&\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\cos(\frac{x+2}{2} - 2) + \frac{1}{1+(\frac{x+2}{2}-2)^2}}{2}
\end{aligned}$$

4. Sea f la función cuyo gráfico se muestra a continuación



y G la función definida por

$$G(x) = \int_1^{x^2+1} f(t)dt$$

a) Calcule $G(1)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de G.

Solución:

Del gráfico se puede ver que $G(1) = \displaystyle\int_1^2 f(t)dt = 1$.

Del TFC tenemos que $G'(x) = 2xf(x^2+1)$, por lo tanto, para determinar los intervalos de monotonía de G debemos estudiar los signos de $2xf(x^2+1)$.

Observe que $G'(x) = 2xf(x^2+1) = 0$ si y solo si $x = 0$, $x = 1$, o $x = -1$. Al realizar una tabla de signos obtenemos por lo tanto la función G es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$, es

$G'(x)$	$+$	-	$+$	-
$f(x^2+1)$	-	$+$	$+$	-
$2x$	-	-	$+$	$+$
intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$

decreciente en el intervalo $(-1, 0)$ y en el intervalo $(1, \infty)$.