Conceptos Elementales de Funciones Armónicas

28 de mayo de 2025

¿Qué es una Función Armónica?

- En matemáticas, física y procesos estocásticos, una **función armónica** es una función $f : U \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable [1].
- El dominio U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ [1].
- Una función es armónica si satisface la **ecuación de Laplace** en todos los puntos de U [1].
- La ecuación de Laplace se expresa como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

  o escrita de forma más compacta como $\nabla^2 f = 0$ o $\Delta f = 0$.
- El término "armónica" proviene de la solución de la ecuación diferencial del movimiento armónico en una cuerda tensa, referidos como "armónicos". Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace fueron posteriormente referidas como *armónicas*.

La Ecuación de Laplace y Propiedades

- El conjunto de funciones armónicas en un conjunto abierto U dado forma un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$ [3]. Las combinaciones lineales de funciones armónicas también son armónicas [3].
- Las funciones armónicas son **infinitamente diferenciables** en conjuntos abiertos [4].
- De hecho, las funciones armónicas son **analíticas reales**, lo que significa que pueden expresarse localmente como series de potencias [3, 4]. Este es un hecho general sobre operadores elípticos [3].
- Todas las derivadas parciales de una función armónica son también funciones armónicas [3]. El operador de Laplace conmuta con el operador de derivada parcial en esta clase de funciones [3].
- En muchos aspectos, las funciones armónicas son análogas de las **funciones holomorfas** en análisis complejo. La parte real o imaginaria de cualquier función holomorfa es una función armónica en $\mathbb{R}^2$.

Aplicaciones y Ejemplos

- Las funciones armónicas surgen en la **física matemática** y la **teoría de procesos estocásticos** [1, 9].
- **Dos variables**:
  - La parte real o imaginaria de cualquier función holomorfa [7].
  - Ejemplos incluyen $f(x, y) = e^x \sin y$ y $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ (en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) [7]. La última puede describir el potencial eléctrico o de gravedad [7].
- **Tres variables**: Ejemplos incluyen $1/r$ (carga puntual unitaria), x/r^3 (dipolo dirigido en x) y $-\ln(r^2 - z^2)$ (línea de densidad de carga unitaria) [10]. (donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) [10].
- **n variables**: Ejemplos incluyen funciones constantes, lineales y afines en todo $\mathbb{R}^n$ [11]. La función $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1-n/2}$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para $n > 2$ también es armónica.
- En física, las funciones armónicas están determinadas por sus **singularidades y condiciones de contorno** [9]. A menudo son proporcionales al potencial electrostático debido a distribuciones de carga.

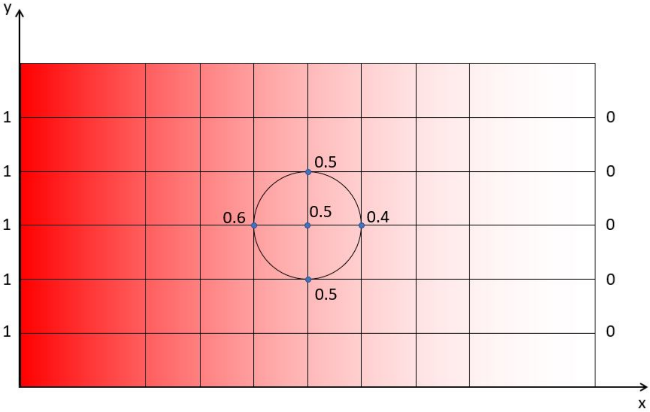
La Propiedad del Valor Medio

- Una propiedad clave de las funciones armónicas es la **propiedad del valor medio**.
- Si $B(x,r)$ es una bola contenida completamente dentro del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de una función armónica $u : \Omega \to \mathbb{R}$, entonces el valor de u en el centro x es igual al valor promedio de u en la superficie de la bola.
- Este valor promedio también es igual al valor promedio de u en el interior de la bola.
- Matemáticamente, para u armónica en Ω y $B(x,r) \subset \Omega$:

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u \, dV$$

  donde ω_n es el volumen de la bola unitaria en n dimensiones [13].
- **Importancia**: Recíprocamente, cualquier función localmente integrable que satisfaga la propiedad del valor medio (del volumen) es tanto infinitamente diferenciable como armónica. Esta propiedad esencialmente caracteriza a las funciones armónicas.

Discretización de la Prop. del Valor Medio



Crédito: https://rodolphe-vaillant.fr/entry/53/harmonic-function-definitions-and-properties

Discretización de la Ecuación de Laplace

- Comenzamos con la **Ecuación de Laplace estacionaria en 2D** para la temperatura $T(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- Utilizamos el método de **diferencias finitas centrales** para las segundas derivadas parciales.
- Asumimos un tamaño de malla uniforme: $\Delta x = \Delta y = h$ [3].
- La discretización de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ en el punto (i, j) es $\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2}$.
- La discretización de $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ en el punto (i, j) es $\frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2}$.
- Sustituyendo en la Ecuación de Laplace y multiplicando por h^2, obtenemos la versión discreta:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

La Fórmula de 5 Puntos

- La ecuación discreta anterior $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$ [4] es conocida como la **fórmula de 5 puntos** [5].
- Reescribiendo la ecuación con la notación n, s, e, w:

$$T_e + T_w + T_n + T_s - 4T_m = 0$$

- Finalmente, al despejar T_m, obtenemos la **Ecuación (6.21)** [7]:

$$\mathbf{T_m = \frac{T_e + T_w + T_n + T_s}{4}}$$

- Esto significa que la temperatura en el punto central es el **promedio de las temperaturas de sus cuatro vecinos**.

La Fórmula de 5 Puntos