



HTBLuVA St. Pölten

Höhere Abteilung Elektrotechnik

3100 St. Pölten, Waldstrasse 3 Tel: 02742-75051-300
Homepage: <http://et.htlstp.ac.at> E-Mail: et@htlstp.ac.at



Project Title:

DIGITAL FILTER

ANALYSIS OF AN 2ND ORDER BAND-PASS FILTER WITH MULTIPLE FEEDBACK

Author:

LABENBACHER MICHAEL

Project group: 1

Project number: 04

Project site: HTBLuVA in St. Pölten

Project duration: 18. März 2015 - 4. Mai 2015

Subject: CPE

Vintage/Form: 2014/15 4AHET

Teacher: Prof. Dipl.-Ing. Helge Frank

Protokollführer	Unterschriften	Note
Labenbacher		

Inhaltsverzeichnis

1 Verwendete Geräte & Betriebsmittel	4
2 Digitale Filter	5
2.1 Allgemeines	5
2.2 Aktiver Bandpass 2.Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung	10
2.2.1 Aufgabenstellungen	10
2.2.2 Schaltungsentwurf (Analog)	11
2.2.3 Herleitungen & Berechnungen	12
2.2.3.1 Übertragungsfunktionen $G(j\omega)$, $G(s)$ & $H(z)$	12
2.2.3.2 Sprungantworten des Systemes	17
2.2.3.3 Weitere Eigenschaften vom System	27
2.2.4 Berechnungen & Darstellungen (Maxima)	30
2.2.4.1 Allgemeines	30
2.2.4.2 Sprungantworten des Systemes	31
2.2.4.3 Bodediagramme & Frequenzgänge	34
2.2.4.4 Ortskurve	37
2.2.4.5 Analoge Dimensionierungsbeispiele	38
2.2.4.6 Systemfunktionen für Scilab (Xcos)	39
2.2.5 Analoge Filtersimulation (Proteus)	40
2.2.5.1 Schaltungsentwürfe (Analog)	40
2.2.5.2 Bodediagramme & Frequenzgänge	41
2.2.6 Filtersimulation (Scilab)	43
2.2.6.1 Programmentwicklung	43
2.2.6.2 Sprungantworten des Systemes	45
2.2.7 C-Programm (Eclipse Juno)	48
2.2.8 Digitale Filtersimulation (Proteus)	53
2.2.8.1 Schaltungsentwicklung	53
2.2.9 Realisierung (Arduino Uno R3)	55
2.2.9.1 Schaltungsaufbau	55
2.2.9.2 Gegenüberstellung von Euler- & Trapeznäherung	56
2.2.9.3 Untersuchung der drei speziellen Fälle	62
2.2.9.4 Analyse der einzelnen Eigenschaften	68
3 Resümee	74
4 Anhang	75

Tabellenverzeichnis

1	Verwendete Geräte & Betriebsmittel	4
2	Bauteilwerte des RC-Tiefpasses am Portausgang zur Aufnahme von Bodediagrammen	53
3	Bauteilwerte des RC-Tiefpasses am Portausgang zur Aufnahme von Sprungantworten	53
4	Messtabelle zur Bodediagrammerstellung vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez- näherung	58
5	Messtabelle zur Bodediagrammerstellung vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen	64
6	Messtabelle zur Bodediagrammerstellung vom digitalen Filter bei veränderten Eigen- schaften	70

Abbildungsverzeichnis

1	Vergleich von Z- & Laplace-Transformation	6
2	Analoge Schaltung des aktiven Bandpass 2.Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung . . .	11
3	Sprungantworten $G(s)$ des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung) . . .	33
4	Betragsgänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)	35
5	Phasengänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)	36
6	Ortskurve des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)	37
7	Schaltungen des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Proteus-Simulation)	40
8	Betragsgänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Proteus-Simulation)	41
9	Phasengänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Proteus-Simulation)	42
10	Scilab-Programm zur Realisierung des aktiven Bandpasses 2.Ordnung	43
11	Sprungantworten $G(s)$ des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Scilab-Simulation)	45
12	Sprungantworten $G(s)$ & $H(z)$ (Trapez) des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Scilab- Simulation)	46
13	Gegenüberstellung der Sprungantworten von der Trapez- & Euler-Näherung (Scilab- Simulation)	47
14	Schaltung zur Realisierung des digitalen Filters (Proteus)	54
15	Schaltungsaufbau zur Realisierung des digitalen Filters	55
16	Oszilloskopeaufnahme der Sprungantwort mit Trapeznäherung (Messung)	56
17	Oszilloskopeaufnahme der Sprungantwort mit Eulernäherung (Messung)	56
18	Betragsgang vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-Näherung (Messung) . . .	59
19	Phasengang vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-Näherung (Messung) . . .	60
20	Ortskurve vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-Näherung (Messung) . . .	61
21	Oszilloskopeaufnahme mit $D = 0,125$, $k = 3 \text{ dB}$, $f_m = 20 \text{ Hz}$ (Trapez) (Messung) . .	62
22	Oszilloskopeaufnahme mit $D = 1,875$, $k = 3 \text{ dB}$, $f_m = 20 \text{ Hz}$ (Trapez) (Messung) . .	62
23	Betragsgang vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen (Messung) . .	65
24	Phasengang vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen (Messung) . .	66
25	Ortskurve vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen (Messung) . .	67
26	Oszilloskopeaufnahme mit $D = 0,125$, $k = 6 \text{ dB}$, $f_m = 50 \text{ Hz}$ (Trapez) (Messung) . .	68
27	Betragsgang vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften (Messung) . . .	71
28	Phasengang vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften (Messung) . . .	72
29	Ortskurve vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften (Messung) . . .	73
30	Simulationsschaltung des Arduino Uno R3	76

1 Verwendete Geräte & Betriebsmittel

Bezeichnung/Nr.	Gerät/Betriebsmittel	Beschreibung/Typ	Geräte-Nr.
O1	Oszilloskope	Tektronix TDS 2004B	GA - 01/04
FG1	Frequenzgenerator	Waveform Generator WG-B20	—
μC	Mikrokontroller	Arduino Uno R3	—

Tabelle 1: Verwendete Geräte & Betriebsmittel

Des Weiteren werden folgende Komponenten, für die Durchführung des praktischen Teiles, siehe Kapitel 2.2.9, benötigt:

1. BNC-Strippen & -Stecker
2. USB-Kabel für Arduino Uno R3
3. Breadboard / Steckbrett
4. Breadboard-Jumper-Wire / Steckbrett-Kabeln
5. Widerstände (verwendet wurden 2 Widerstände von je $10\ k\Omega \pm 20\%$ [E6])
6. Kondensatoren (verwendet wurden 2 Kondensatoren von je $150\ nF \pm 10\%$ $100\ V$)

2 Digitale Filter

2.1 Allgemeines

Ein digitaler Filter besteht im Wesentlichen nicht wie ein analoger entweder aus passiven Bauelementen, wie Kondensatoren, Spulen, Widerständen, etc. oder aus aktiven, wie Operationsverstärkern, sondern er kann entweder mit Logikbausteinen oder mit Hilfe eines Programmes realisiert werden.

Die Vorteile eines digitalen Filters sind wahrscheinlich deutlich ersichtlich, nämlich können digitale Filter Eigenschaften besitzen, welche analog nur schwer oder gar nicht realisierbar sind und sie zeigen im Allgemeinen Unabhängigkeit gegenüber der Betriebsumgebung (-temperatur). Es gibt auch keine Alterung und Schwankungen durch Toleranzen von Bauelementen, etc.

Natürlich gibt es auch Nachteile wie ein begrenzter Wertebereich welcher durch Quantisierung entsteht und nicht-elektrische Ein-Ausgangsgrößen bedeuten mehr Aufwand (Wandlung).

Die Vorgangsweise eines digitalen Filters lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Ein analoges Eingangssignal wird abgetastet und mit einem Analog-Digital-Konverter (ADC) digitalisiert und steht somit beispielsweise dem Rechner oder Arduino zur Weiterverarbeitung zur Verfügung. Danach wird das bearbeitete Signal rückgewandelt (DAC) in ein analoges Ausgangssignal, welches nun gefiltert ist.

Um ein einzelnes System zu beschreiben gibt es, je nach Aufgabenstellung unterschiedliche Darstellungen, welche für dieses Projekt bekannt sein sollten:

- | | |
|------------------|---|
| Zeitbereich: | Dieser Bereich dient zur Beschreibung von „wirklichen“ Signalen & er wird prinzipiell mit Differentialgleichungen beschrieben. |
| Frequenzbereich: | Dies ist der Bereich der einzelnen Spektren und er wird im Wesentlichen von Polynomen beschreiben und spielt in der Elektrotechnik eine bedeutende Rolle. |
| Laplace-Bereich: | Er hat in der Regelungstechnik eine hohe Bedeutung, nämlich zur Beschreibung von kontinuierlichen Systemen. |
| Z-Bereich: | Zur Beschreibung von abgetasteten, diskreten Systemen dient dieser Bereich, welcher aus Differentialgleichungen gebrochene rationale Funktionen macht. Es wird somit eine Funktion vom <u>diskreten</u> Zeitbereich in den Bild(Z)bereich abgebildet. |

Zeit- & Frequenzbereich:

Im Zeitbereich wird im Wesentlichen unterschieden, ob es sich um ein kontinuierliches oder diskretes Signal handelt. Bei einem kontinuierlichen Signal kann die Laplace-Transformation verwendet werden und hingegen bei einem diskreten (abgetasteten) Signal die Z-Transformation, welche nachfolgend noch kurz beschrieben werden.

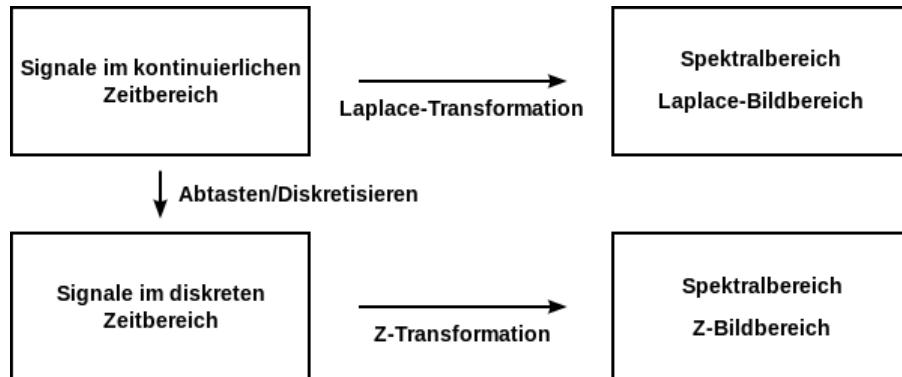


Abbildung 1: Vergleich von Z- & Laplace-Transformation

Wie schon hoffentlich bekannt kann ein periodisches Signal im kontinuierlichen Zeitbereich relativ „einfach“ beschrieben werden. Um nun ein periodisches Signal zu analysieren kann dieses Signal mit Fourier in gewichtete Sinus- und Cosinus Anteile zerlegt werden. Man gelangt vom Zeitbereich in den Frequenzbereich durch Anwenden der Fourier-Transformation (weiteres dazu ist dem Mathematik-/Physikunterricht zu entnehmen). Zurück in den Zeitbereich natürlich mit der inversen Fourier-Transformation.

Im Laufe des Projektes wird oft in diesen Frequenzbereich ausgewichen, da mathematische Zusammenhänge dort wesentlich einfacher zu beschreiben sind („siehe Theorieunterricht“). Allgemein gilt folgender Zusammenhang zwischen der Originalfunktion im Zeitbereich $f(t)$ und der Bildfunktion im Frequenzbereich $F(j\omega)$:

$$f(t) \circ \underline{\quad} F(j\omega)$$

Die Übertragungsfunktion einer Schaltung, welche den Zusammenhang von Ein- & Ausgangssignal beschreibt, kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$G(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} \quad (1)$$

Laplace-Bereich:

Für die Berechnungen wird im Laufe des Projektes die Laplace-Transformation immer mehr an Bedeutung gewinnen, da es dadurch sehr leicht möglich ist lineare zeitinvariante Differentialgleichungen zu lösen. Dabei ergibt die Laplace-Transformierte der Zeitfunktion eine Funktion im Laplace-Bereich, was folgendermaßen geschrieben wird:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (2)$$

$$f(t) \circ\longrightarrow F(s)$$

Anders gesagt korrespondiert die Zeitfunktion mit der Funktion im Laplace-Bereich.
Die Laplace-Transformierte einer Zeitfunktion ist, wie folgt, definiert:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (3)$$

t Zeitvariable [sec]

s Laplacevariable (komplexer Frequenzparameter) [sec⁻¹]

Der Zusammenhang zwischen Laplace-Bereich und Frequenzbereich kann „vereinfacht“ durch Folgendes beschrieben werden:

$$s = j\omega \quad (4)$$

Somit gilt für die Übertragungsfunktion folgendes:

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} \quad (5)$$

Das Pendant dazu, sprich die Rücktransformation in den Zeitbereich wird allgemein mit

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (6)$$

beschrieben.

Eine wichtige Funktion die noch zum Verständnis der Aufgaben beschrieben werden muss, ist die Sprungfunktion $\sigma(t)$, welche durch folgende „Funktion“ beschrieben ist:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Legt man nun am Eingang eine Funktion $f(t) = \sigma(t)$, so wird das System auf diese sprungförmige Änderung des Einganges reagieren. Die Ausgangsgröße die sich daraus dann ergibt nennt man Sprungantwort. Mit diesen und weiteren Grundlagen bezüglich der Laplace-Transformation, welche im Theorieunterricht genau behandelt wurden / werden kann nun mit den weiteren Aufgaben fortgefahren werden.

Z-Bereich:

Hier wird einmal ein abgetastetes System betrachtet, sprich der Eingang wird mit einem Abtast-Halteglied (Sample-Hold), mit der Abtastfrequenz f_A , abgetastet. Allgemein sollte bekannt sein:

$$f = \frac{1}{T} \quad (8)$$

f Frequenz

T Periodendauer

Durch diese Abtastung erhält man für die Ein- & Ausgangsgrößen eine Zahlenfolge für die einzelnen Zeitpunkte. Im Allgemeinen ergibt die Z-Transformierte einer diskreten Zeitfunktion eine Funktion im Z-Bereich, was folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) \quad (9)$$

$$f(k) \circlearrowleft F(z)$$

Anders gesagt korrespondiert die diskrete Zeitfunktion mit der Funktion im Z-Bereich. Dabei ist die Z-Transformierte einer solchen Zeitfunktion allgemein, wie folgt, definiert:

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} \quad (10)$$

k Zeitpunkte in denen abgetastet wird

z Z-Variable

Der Zusammenhang zwischen Laplace-Variable und Z-Variable wird in diesem Projekt einerseits mit der Trapez-Näherung beschrieben

$$s = \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (11)$$

und andererseits zum Vergleich mit der Euler-Näherung:

$$s = \frac{z - 1}{z \cdot T_A} \quad (12)$$

Ein wichtiger Satz der Z-Transformation ist der Verschiebungssatz, welcher in diesem Projekt noch häufig Anwendung finden wird. Allgemein kann dieser folgendermaßen beschrieben werden:

$$f(k - n) \circlearrowleft F(z) \cdot z^{-n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (13)$$

Nun kann die diskrete Systemfunktion eines Filters allgemein, wie folgt, beschrieben werden:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(k)\}}{\mathcal{Z}\{x(k)\}} = \frac{\sum_{n=0}^i A_n \cdot z^{-n}}{\sum_{n=0}^i B_n \cdot z^{-n}} \quad \text{mit } i \in \mathbb{N} \quad (14)$$

$H(z)$	zeitdiskrete Systemfunktion
$Y(z)$	Z-Transformierte des Ausgangssignales
$X(z)$	Z-Transformierte des Eingangssignales
$y(k)$	Ausgang (des digitalen Filters) zum Zeitpunkt k
$x(k)$	Eingang (des digitalen Filters) zum Zeitpunkt k

Mit Hilfe dieses Wissen kann, wie wir später sehen werden, der momentane Ausgangsabtastwert zum Zeitpunkt k , welcher somit eine Linearkombination aus Ein- & Ausgangsabtastwerten plus dem aktuellen Eingangsabtastwert darstellt, ermittelt werden. Dabei sind die einzelnen Abtastwerte mit den Koeffizienten A_n und B_n gewichtet. Richtig ausgedrückt muss man nun die inverse Z-Transformation anwenden, um die gesuchte Differenzengleichung zu erhalten. Mit dem Verschiebungssatz 13 folgt der momentane Ausgangsabtastwert:

$$y(k) = \frac{\sum_{n=0}^i A_n \cdot x(k-n) - \sum_{n=1}^i B_n \cdot y(k-n)}{B_0} \quad (15)$$

Die Zahlenfolge $y(k)$ entspricht im Wesentlichen dem kontinuierlichen Signal $y(t)$, jedoch mit der Abtastfrequenz $f_A = \frac{1}{T_A}$. Es ist nun wichtig, dass das Doppelte der Abtastzeit T_A kleiner als die kleinste Zeitkonstante des jeweiligen Systemes ist, sprich folgendes muss gelten:

$$2 \cdot T_A < T \quad \text{bzw.} \quad f_A > 2 \cdot f \quad (16)$$

Mit diesen Kenntnissen und weiteren aus dem Theorieunterricht kann nun mit der Berechnung der einzelnen Filter begonnen werden.

2.2 Aktiver Bandpass 2.Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung

2.2.1 Aufgabenstellungen

Die Hauptaufgabe besteht darin, einen aktiven Bandpass 2.Ordnung mittels einem Mikrocontroller μC zu realisieren. Dabei ist zuerst die Übertragungsfunktion anhand einer analogen Realisierung eines solchen Filters zu ermitteln. Folgender Zusammenhang zwischen Frequenz und Kreisfrequenz sollte dabei bekannt sein:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (17)$$

Bei der Dimensionierung des Filters 2.Ordnung wurde sich am Beginn einmal folgendes Ziel gesetzt:

- k veränderbare Durchlassverstärkung
- f_m veränderbare Mittenfrequenz vom Filter
- Q veränderbare Güte

Es besteht nun die Aufgabe eine mögliche Dimensionierungsanleitung des analogen Filters aufzuzeigen und im Anschluss darauf ist das Bodediagramm und die Sprungantwort graphisch mit den zur Verfügung gestellten Programmen Maxima (Version 5.36.0.1) & Proteus (Version 8 Professional) darzustellen.

Der nächste Schritt ist die Umwandlung der Übertragungsfunktion vom Laplace-Bereich in den Z-Bereich, um so die Differenzengleichung des abgetasteten Zeitbereiches für das nachfolgende C-Programm aufzustellen.

Das C-Programm wird mit Hilfe des Programmwerkzeuges Eclipse (Juno) entwickelt und das Einlesen des Signales soll mittels einem Analog-Digital-Converters realisiert werden und die Ausgabe des gefilterten Signales soll durch eine Pulsweitenmodulation geschehen. Es versteht sich somit von selbst, dass noch ein RC-Filter am Port-Ausgang (richtig dimensionieren!) benötigt wird.

Mit Hilfe des Scilab-Programmes (Version 5.4.1) und dem Xcos-Package kann die Sprungantwort vom Laplace-Bereich, als auch die des Z-Bereiches zur Anzeige gebracht und gegenübergestellt werden. Nach den Simulationen ist das fertige Programm in den vorhandenen Mikrocontroller Arduino Uno R3 zu laden und den erstellten, digitalen Bandpass 2.Ordnung auf Funktionalität hin zu testen.

Somit kann eine Sprungantwort mit einem Oszilloskope erfasst und analysiert werden. Danach ist das Bodediagramm des aktiven Bandpasses aufzunehmen und mit dem berechneten zu vergleichen. Im Anschluss darauf können nun die drei oben genannten Veränderlichen variiert werden und deren Auswirkung auf das Verhalten des Filters aufgezeigt werden.

2.2.2 Schaltungsentwurf (Analog)

Folgende Schaltung stellt einen möglichen aktiven Bandpass 2.Ordnung dar:

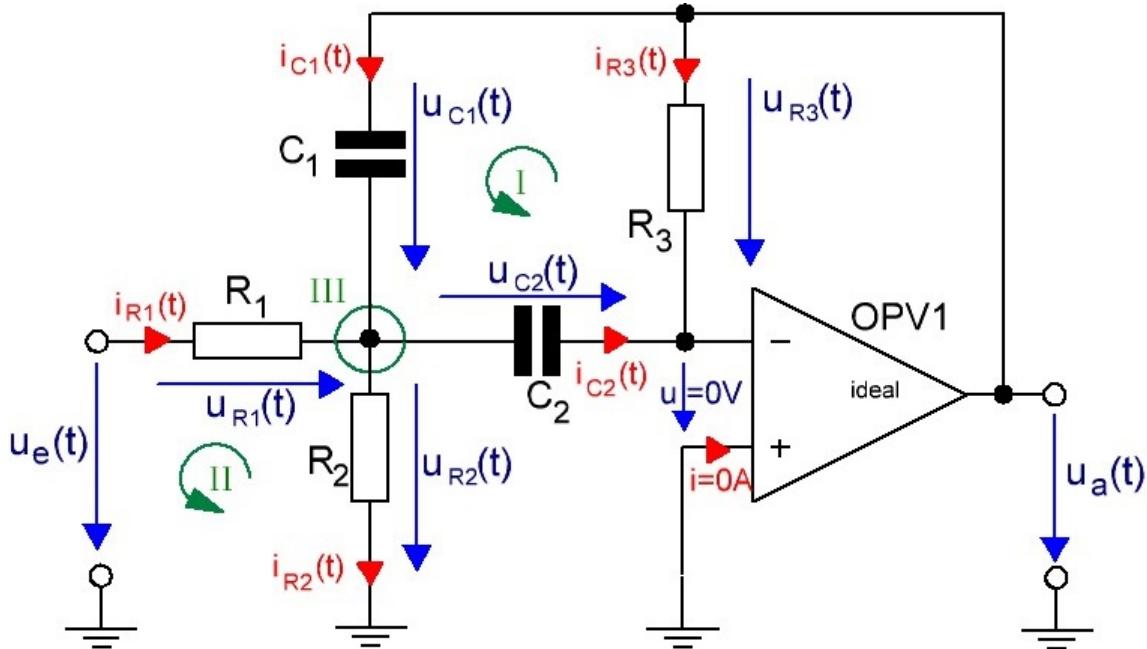


Abbildung 2: Analoge Schaltung des aktiven Bandpass 2.Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung

Für weitere Berechnungen wird der OPV als ideal angenommen und falls eine analoge Realisierung stattfinden sollte darf natürlich nicht auf die Betriebsspannung von diesem OPV1 vergessen werden. In diesem Projekt aber interessieren wir uns aber im Wesentlichen nur über die Übertragungsfunktion dieses Filters 2.Ordnung. Somit werden im nachfolgenden Kapitel Maschen- & Knotengleichungen angewandt, um am Beginn einmal $G(j\omega)$ herzuleiten.

Hinweis:

Oft wird die Verstärkung, sprich $|G(j\omega)|$ in Dezibel angegeben. Die Umrechnung erfolgt durch:

$$G(j\omega)_{[\text{dB}]} = 20 \cdot \lg(|G(j\omega)|) = 20 \cdot \frac{\ln(|G(j\omega)|)}{\ln(10)} \quad (18)$$

2.2.3 Herleitungen & Berechnungen

2.2.3.1 Übertragungsfunktionen $G(j\omega)$, $G(s)$ & $H(z)$

In diesem Abschnitt wird nun am Beginn eine Möglichkeit zur Herleitung der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich aufgezeigt, indem folgendermaßen vorgegangen wird:

1. $\underline{I_{R3}} = \frac{\underline{U_{R3}}}{R_3} = \frac{\underline{U_a}}{R_3}$ $(\underline{U_a} = \underline{U_{R3}})$
2. $\underline{U_{C2}} = \frac{\underline{I_{C2}}}{j\omega C_2} = -\frac{\underline{I_{R3}}}{j\omega C_2} = -\underline{U_a} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_3}$ $(\underline{I_{C2}} = -\underline{I_{R3}})$
3. $\underline{I_{R2}} = \frac{\underline{U_{R2}}}{R_2} = \frac{\underline{U_{C2}}}{R_2} = -\underline{U_a} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_2 R_3}$ $(\underline{U_{R2}} = \underline{U_{C2}})$
4. $\underline{I_{C1}} = \underline{U_{C1}} \cdot j\omega C_1 = (\underline{U_a} - \underline{U_{C2}}) \cdot j\omega C_1 = \underline{U_a} \cdot \left(j\omega C_1 + \frac{C_1}{C_2 R_3} \right)$ $(\underline{U_{C1}} + \underline{U_{C2}} = \underline{U_a} \dots \text{Maschenregel (I)})$
5. $\underline{I_{R1}} = \frac{\underline{U_{R1}}}{R_1} = \frac{\underline{U_e} - \underline{U_{C2}}}{R_1} = \underline{U_e} \cdot \frac{1}{R_1} + \underline{U_a} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_1 R_3}$ $(\underline{U_{R1}} + \underline{U_{R2}} = \underline{U_e} \dots \text{Maschenregel (II)})$

Nun kann mittels der Knotenregel, welche am Knoten III angewandt wird, die Übertragungsfunktion des Bandpasses ermittelt werden:

$$\underline{I_{R1}} + \underline{I_{C1}} = \underline{I_{R2}} + \underline{I_{C2}}$$

$$\underline{I_{R1}} + \underline{I_{C1}} = \underline{I_{R2}} - \underline{I_{R3}}$$

$$\underline{U_e} \cdot \frac{1}{R_1} + \underline{U_a} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_1 R_3} + \underline{U_a} \cdot \left(j\omega C_1 + \frac{C_1}{C_2 R_3} \right) = -\underline{U_a} \cdot \frac{1}{j\omega C_2 R_2 R_3} - \frac{\underline{U_a}}{R_3} \Rightarrow$$

Nun kann durch einfaches Umformen die Übertragungsfunktion dieser Schaltung allgemein ermittelt werden:

$$\underline{G(j\omega)} = -\frac{a_1 \cdot j\omega}{b_2 \cdot (j\omega)^2 + b_1 \cdot j\omega + b_0} \quad (19)$$

Allgemeine Übertragungsfunktion des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Frequenzbereich)

$$\text{mit } a_1 = C_2 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2}, \quad b_2 = C_1 C_2 \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2}, \quad b_1 = (C_1 + C_2) \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad b_0 = 1$$

Durch einfaches ersetzen von $j\omega$ durch die Laplacevariable kann die Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich gewonnen werden:

$$\underline{G(s) = -\frac{a_1 \cdot s}{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}} \quad (20)$$

Allgemeine Übertragungsfunktion des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Laplace-Bereich)

$$\text{mit } a_1 = C_2 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2}, \ b_2 = C_1 C_2 \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2}, \ b_1 = (C_1 + C_2) \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \ b_0 = 1$$

Nun kann die Systemfunktion mit Hilfe der Trapez-Näherung (Formel 11) in folgender Weise bestimmt werden:

$$H(z) = -\frac{\frac{a_1 \cdot 2}{T_A} \frac{(z-1)}{(z+1)}}{b_2 \cdot \frac{4}{T_A^2} \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + b_1 \cdot \frac{2}{T_A} \frac{(z-1)}{(z+1)} + b_0} \cdot \frac{(z+1)^2}{(z+1)^2} = -\frac{a_1 \cdot \frac{2}{T_A} \cdot z^2 + 0 \cdot z + -a_1 \cdot \frac{2}{T_A}}{b_2 \cdot \frac{4}{T_A^2} (z-1)^2 + b_1 \cdot \frac{2}{T_A} (z^2 - 1) + b_0 \cdot (z+1)^2} =$$

$$= -\underbrace{\left[\frac{4b_2}{T_A^2} + \frac{2b_1}{T_A} + b_0 \right]}_{B_{0T}} \cdot z^2 + \underbrace{\left[2 - \frac{8b_2}{T_A^2} \right]}_{B_{1T}} \cdot z + \underbrace{\left[\frac{4b_2}{T_A^2} - \frac{2b_1}{T_A} + b_0 \right]}_{B_{2T}} \Rightarrow$$

$$\underline{H(z) = -\frac{A_{0T} + A_{1T} \cdot z^{-1} + A_{2T} \cdot z^{-2}}{B_{0T} + B_{1T} \cdot z^{-1} + B_{2T} \cdot z^{-2}}} \quad (21)$$

Allgemeine Systemfunktion des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Z-Bereich, Trapez-Näherung)

$$\text{mit } A_{0T} = \frac{2a_1}{T_A}, \ A_{1T} = 0, \ A_{2T} = -\frac{2a_1}{T_A}, \ B_{0T} = \frac{4b_2}{T_A^2} + \frac{2b_1}{T_A} + b_0, \ B_{1T} = 2 - \frac{8b_2}{T_A^2}, \ B_{2T} = \frac{4b_2}{T_A^2} - \frac{2b_1}{T_A} + b_0$$

Die Systemfunktion lässt sich natürlich auch mit der Formel 12 relativ gut bestimmen:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= -\frac{a_1 \cdot \frac{z-1}{z \cdot T_A}}{b_2 \cdot \frac{(z-1)^2}{z^2 \cdot T_A^2} + b_1 \cdot \frac{z-1}{z \cdot T_A} + b_0} \cdot \frac{z^2}{z^2} = -\frac{\underbrace{\frac{a_1}{T_A} \cdot z^2}_{B_{0E}} + \underbrace{-\frac{a_1}{T_A} \cdot z}_{B_{1E}} + \underbrace{0}_{B_{2E}}}{\underbrace{\left[\frac{b_2}{T_A^2} + \frac{b_1}{T_A} + b_0 \right]}_{B_{0E}} \cdot z^2 + \underbrace{\left[-\frac{2b_2}{T_A^2} - \frac{b_1}{T_A} \right]}_{B_{1E}} \cdot z + \underbrace{\frac{b_2}{T_A^2}}_{B_{2E}}} \Rightarrow \\
 H(z) &= -\frac{A_{0E} + A_{1E} \cdot z^{-1} + A_{2E} \cdot z^{-2}}{B_{0E} + B_{1E} \cdot z^{-1} + B_{2E} \cdot z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Allgemeine Systemfunktion des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Z-Bereich, Euler-Näherung)

$$\text{mit } A_{0E} = \frac{a_1}{T_A}, \quad A_{1E} = -\frac{a_1}{T_A}, \quad A_{2E} = 0, \quad B_{0E} = \frac{b_2}{T_A^2} + \frac{b_1}{T_A} + b_0, \quad B_{1E} = -\frac{2b_2}{T_A^2} - \frac{b_1}{T_A}, \quad B_{2E} = \frac{b_2}{T_A^2}$$

Um nun die Differenzengleichung aufzustellen kann einfach die Formel 15 verwendet werden oder einmal langsam, wie folgt, vorgegangen werden:

$$H(z) = -\frac{A_0 + A_1 \cdot z^{-1} + A_2 \cdot z^{-2}}{B_0 + B_1 \cdot z^{-1} + B_2 \cdot z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad / \cdot \text{Nenner} \rightarrow$$

$$-(A_0 \cdot X(z) + A_1 \cdot z^{-1} \cdot X(z) + A_2 \cdot z^{-2} \cdot X(z)) = B_0 \cdot Y(z) + B_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + B_2 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) \quad \rightarrow$$

Nun wird der Verschiebungssatz 13 angewandt, um die Differenzengleichung zu ermitteln:

$$-(A_0 \cdot x(k) + A_1 \cdot x(k-1) + A_2 \cdot x(k-2)) = B_0 \cdot y(k) + B_1 \cdot y(k-1) + B_2 \cdot y(k-2) \quad \rightarrow$$

$$y(k) = -\frac{A_0 \cdot x(k) + A_1 \cdot x(k-1) + A_2 \cdot x(k-2) + B_1 \cdot y(k-1) + B_2 \cdot y(k-2)}{B_0} \tag{23}$$

Allgemeine Differenzengleichung des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (diskreter Zeitbereich)

$$\text{mit } A_0 = \frac{2a_1}{T_A}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{2a_1}{T_A}, \quad B_0 = \frac{4b_2}{T_A^2} + \frac{2b_1}{T_A} + b_0, \quad B_1 = 2 - \frac{8b_2}{T_A^2}, \quad B_2 = \frac{4b_2}{T_A^2} - \frac{2b_1}{T_A} + b_0$$

Nun besteht die Aufgabe darin, herauszufinden welche Auswirkungen die einzelnen Koeffizienten bei der Übertragungsfunktion $G(j\omega)$ haben. Dabei wird einmal, um für einige ein besseres Verständnis zu schaffen, die Differentialgleichung dieses Bandpasses 2.Ordnung angeschrieben:

$$\underline{b_2 \cdot u_a''(t) + b_1 \cdot u_a'(t) + b_0 \cdot u_a = -a_1 \cdot u_e'(t)} \quad (24)$$

Allgemeine Differentialgleichung des Bandpasses 2.Ordnung

$$\text{mit } a_1 = C_2 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2}, \quad b_2 = C_1 C_2 \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2}, \quad b_1 = (C_1 + C_2) \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad b_0 = 1$$

Nun wird das Wissen aus dem Physik-/Mathematikunterricht angewandt und die Mittenfrequenz des Systemes ermittelt, welche folgende Form hat, wenn $b_0 = 1$ gesetzt wird, was wir schon erledigt haben:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \quad f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \quad (25)$$

Dabei hängt nun die Dämpfung eines Systemes folgendermaßen mit der Mittenfrequenz zusammen:

$$D = \frac{b_1}{2} \cdot \omega_m = \frac{b_1}{2} \cdot 2\pi \cdot f_m \quad (26)$$

Des Weiteren beschreibt die Verstärkung, welche bei der Mittenfrequenz auftritt, den Zusammenhang von folgenden Koeffizienten:

$$k = \frac{a_1}{b_1} \quad (27)$$

- | | |
|------------------|-----------------------------|
| f_m | <i>Mittenfrequenz</i> |
| ω_m | <i>Mittenkreisfrequenz</i> |
| D | <i>Dämpfung</i> |
| k | <i>Durchlassverstärkung</i> |

Mit Hilfe dieser Kenntnisse kann nun die Übertragungsfunktion ein wenig aussagekräftiger gestaltet werden:

$$G(j\omega) = -k \cdot \frac{\frac{2D}{\omega_m} \cdot (j\omega)}{\frac{1}{\omega_m^2} \cdot (j\omega)^2 + \frac{2D}{\omega_m} \cdot (j\omega) + 1} \quad (28)$$

Aussagekräftigere Übertragungsfunktion des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Frequenzbereich)

Nun kann einfach gesagt $j\omega$ durch s wieder ersetzt werden und man erhält die Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich:

$$G(s) = -k \cdot \frac{\frac{2D}{\omega_m} \cdot s}{\frac{1}{\omega_m^2} \cdot s^2 + \frac{2D}{\omega_m} \cdot s + 1} \quad (29)$$

Aussagekräftigere Übertragungsfunktion des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Laplace-Bereich)

$$\text{mit } k = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{R_3}{R_1}, \omega_m = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2 R_3}}, D = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}} \cdot \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

2.2.3.2 Sprungantworten des Systemes

Um die Reaktion des Systemes auf einen Sprung herauszufinden, wird folgendermaßen vorgegangen:

$$\frac{1}{\omega_m^2} \cdot s^2 + \frac{2D}{\omega_m} \cdot s + 1 = 0 \quad / \cdot \omega_m^2 \quad \text{Zähler nicht vergessen!}$$

$$s^2 + 2D\omega_m \cdot s + \omega_m^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -D\omega_m \pm \sqrt{D\omega_m^2 - \omega_m^2} = \omega_m \cdot (-D \pm \underbrace{\sqrt{D^2 - 1}}_{= / > / < 1 \rightarrow})$$

Nun dürfte eigentlich bekannt sein, dass es im Prinzip auf den Ausdruck unter der Wurzel ankommt, ob ein System schwingungsfähig ist oder nicht. Allgemein gilt:

$D > 1 \dots \dots$ reelle Nullstellen \rightarrow starke Dämpfung und nicht schwingungsfähig

$D = 1 \dots \dots$ Doppellösung \rightarrow aperiodischer Grenzfall

$D < 1 \dots \dots$ konjugiert komplexe Nullstellen \rightarrow gedämpfter, abschwingender Schwingfall

Nun betrachten wir die einzelnen Fälle, um herauszufinden, wie wir die Bandbreite bzw. Güte verändern können und auch, um die Mittenfrequenz zu finden.

1. Aperiodischer Grenzfall $D = 1$

Dieser Fall stellt im Prinzip einmal die einfachste Möglichkeit zur Berechnung der Sprungantwort dar. Bei einem Sprung wird $G(s)$ mit $1/s$ multipliziert und einfach die inverse Laplacetransformation darauf angewandt:

$$U_a(s) = \frac{1}{s} \cdot -k \cdot \frac{2\omega_m \cdot s}{(s - s_{1,2})^2}$$

Dabei gilt:

$$s_{1,2} = -\omega$$

Somit gilt für die Ausgangsspannung $U_a(s)$ im Laplace-Bereich folgendes:

$$U_a(s) = -k \left[\frac{2\omega_m}{(s + \omega_m)^2} \right] \quad (30)$$

Sprungantwort bei $D=1$ (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation in den kontinuierlichen, zeitlichen Bereich liefert somit, laut dem Dämpfungssatz der Laplace-Transformation, folgendes Ergebnis:

$$u_a(t) = \left[-k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[\frac{2}{\tau} \cdot t \right] \right] \cdot \sigma(t) \quad (31)$$

Sprungantwort bei D=1 (Zeitbereich)

$$mit \tau = \frac{1}{\omega_m \cdot (D)}$$

τ Abklingzeitkonstante

Nun stellt sich noch die Frage, wo und welches Maximum tritt bei der Sprungantwort des aperiodischen Grenzfalles auf?

Um dies zu finden muss $u_a(t)$ einmal nach t abgeleitet und diese Ableitung gleich 0 gesetzt werden.¹

$$\Rightarrow u'_a(t) = -\frac{2k}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{2k}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot t \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit dem Produktnullssatz folgt:}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \text{v} \quad \frac{2k}{\tau} = \frac{2k}{\tau^2} \cdot t$$

$$(t = \infty) \quad t = \tau$$

Wird nun die Lösung in die Formel für $u_a(t)$ eingesetzt, so erhält man den gesuchten Extremwert:²

$$u_{a, \max} = -k \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau}} \cdot \left[\frac{2}{\tau} \cdot t \right] = -k \cdot e^{-1} \cdot \left[\frac{2}{\tau} \cdot \tau \right] \Rightarrow$$

$$\underline{u_{a, \max} = -2k \cdot e^{-1} \approx -k \cdot 72\%} \quad \text{bei } t = \tau \quad (32)$$

Des Weiteren gilt:

$$\text{Endwert} \dots \dots \dots \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot U_a(s) = 0$$

$$\text{Anfangswert} \dots \dots \lim_{t \rightarrow 0} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U_a(s) = 0$$

$$\text{Anfangssteigung} \dots \lim_{t \rightarrow 0} u'_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \cdot U_a(s) = -2k \cdot (D) \cdot \omega_m$$

¹Anmerkung: Eigentlich suchen wir ein Minimum, da in der Formel $-k$ steht. Es ist also mit Maximum genauer genommen der Betrag von der Ausgangsspannung gemeint und es müsst noch kontrolliert werden, ob die 2.Ableitung bei einem Minimum > 0 ist, was aber nachher das Diagramm bestätigt.

²Bei $u_{a, \max}$ ist im gesamten Projekt der Betrag gemeint!, da das Minus-Zeichen im Prinzip nur von der Invertierung durch den OPV in der Schaltung kommt.

Nicht schwingungsfähiger Fall $D > 1$

Erneut wird die Sprungantwort berechnet, indem $G(s)$ mit einem Sprung multipliziert und die Partialbruchzerlegung durchgeführt wird:

$$U_a(s) = \frac{1}{s} \cdot -k \cdot \frac{2D\omega_m \cdot s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)} = -k \cdot \left[\frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \right] \quad \text{mit } A, B \dots \text{zu bestimmende Konstanten}$$

Dabei gilt:

$$s_1 = \omega \cdot \left(-D + \sqrt{D^2 - 1} \right) \quad , \quad s_2 = \omega \cdot \left(-D - \sqrt{D^2 - 1} \right)$$

$$2D\omega_m = (A + B) \cdot s + (As_2 + Bs_1)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{array}{lcl} s^1 \dots & 0 & = \quad A \quad + \quad B \\ s^0 \dots & 2D\omega_m & = \quad s_2 \quad A \quad + \quad s_1 \quad B \end{array} \left. \right\} \Rightarrow \quad A = -\frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}}, \quad B = \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}}$$

Somit gilt für die Ausgangsspannung $U_a(s)$ im Laplace-Bereich folgendes:

$$U_a(s) = \left[-k \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}} \left[\frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1} \right] \right] \cdot \sigma(t) \quad (33)$$

Sprungantwort bei $D > 1$ (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation in den kontinuierlichen, zeitlichen Bereich liefert, natürlich wie immer nach einigen Umformungen, folgendes Ergebnis:

$$u_a(t) = -k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[\frac{2}{\tau \cdot \omega_d} \cdot \sinh(\omega_d \cdot t) \right] \quad (34)$$

Sprungantwort bei $D > 1$ (Zeitbereich)

$$\text{mit } \omega_d = \omega_m \cdot \sqrt{D^2 - 1}, \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad f_d = \frac{1}{T_d}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_m \cdot D}$$

$\omega_d \dots \dots \dots$ Kreisfrequenz der stark gedämpften Schwingung

$T_d \dots \dots \dots$ Periodendauer der stark gedämpften Schwingung

$f_d \dots \dots \dots$ Frequenz der stark gedämpften Schwingung

$\tau \dots \dots \dots$ Abklingzeitkonstante

Im Anschluss darauf wird wieder der Extremwert gesucht, sprich $u'_a(t)$ wird 0 gesetzt:

$$u'_a(t) = \frac{2k}{\tau^2\omega_d} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sinh(\omega_d \cdot t) - \frac{2k}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cosh(\omega_d \cdot t) \quad \text{mit dem Produktnullsatz folgt:}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \text{v} \quad \frac{1}{\tau\omega_d} \cdot \sinh(\omega_d \cdot t) = \cosh(\omega_d \cdot t)$$

$$(t = \infty) \quad \frac{1}{\tau^2\omega_d^2} \cdot \sinh^2(\omega_d \cdot t) = 1 + \sinh^2(\omega_d \cdot t)$$

$$\sinh^2(\omega_d \cdot t) = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2\omega_d^2} - 1}$$

$$\sinh(\omega_d \cdot t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{D^2}{D^2 - 1} - 1}}$$

$$t = \frac{1}{\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)$$

Diese Lösung wird nun wieder in die ursprüngliche Formel 34 eingesetzt, um das „Maximum“ zu finden:

$$u_{a, \max} = -\frac{2k}{\tau\omega_d} \cdot e^{-\frac{1}{\tau\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)} \cdot \sinh\left(\omega_d \cdot \frac{1}{\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)\right) = \frac{-2k}{\tau\omega_m} \cdot e^{-D \frac{\omega_n}{\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)} \Rightarrow$$

$$\underline{u_{a, \max} = -2k \cdot D \cdot e^{-D \frac{\omega_m}{\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)}} \quad \text{bei } t = \frac{1}{\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right) \quad (35)$$

Es lässt sich auch der maximal, erreichbare Anstiegswert von $u_{a, \max}$ berechnen, indem man $D \rightarrow \infty$ betrachtet:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} u_{a, \max} = -2k \cdot \lim_{D \rightarrow \infty} D \cdot e^{-D \frac{\omega_m}{\omega_d} \cdot \operatorname{asinh}\left(\frac{\omega_d}{\omega_m}\right)} = -2k \cdot \lim_{D \rightarrow \infty} D \cdot e^{-\frac{\overbrace{D}^{\rightarrow 1}}{\sqrt{D^2 - 1}} \cdot \operatorname{asinh}\left(\sqrt{\overbrace{D^2 - 1}^{\rightarrow D}}\right)} \Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{D \rightarrow \infty} u_{a, \max}} = -2k \cdot \lim_{D \rightarrow \infty} D \cdot e^{-\operatorname{asinh}(D)} = \underline{-k} \quad da : \operatorname{asinh}(D) = \ln(D + \sqrt{D^2 + 1})$$

Des Weiteren gilt:

$$Endwert \dots \dots \dots \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot U_a(s) = 0$$

$$Anfangswert \dots \dots \dots \quad \lim_{t \rightarrow 0} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U_a(s) = 0$$

$$Anfangssteigung \dots \quad \lim_{t \rightarrow 0} u'_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \cdot U_a(s) = -2k \cdot D\omega_m$$

Schwingungsfähiger Fall $D < 1$

Nun sind die Nullstellen des Nennerpolynoms konjugiert komplexe:

$$s_1 = \omega \cdot \left(-D + j\sqrt{1 - D^2} \right) \quad , \quad s_2 = \omega \cdot \left(-D - j\sqrt{1 - D^2} \right)$$

Es empfiehlt sich zB. den Nenner von der Übertragungsfunktion auf folgende Form zu bringen:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{1}{\tau}}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_0^2} \right\} = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (36)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_0^2} \right\} = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (37)$$

$$U_a(s) = \frac{1}{s} \cdot -k \cdot \frac{2D\omega_m \cdot s}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)} = -k \cdot \left[\underbrace{\frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}}_{Nenner: s^2 + 2D\omega_m \cdot s + \omega_m^2} \right]$$

Nun soll: $s^2 + 2D\omega_m \cdot s + \omega_m^2 \stackrel{!}{=} \left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_0^2$ \Rightarrow wenn: $\frac{1}{\tau} = D\omega_m$, $\omega_0 = \omega_m \cdot \sqrt{1 - D^2}$ \Rightarrow

$$U_a(s) = -k \cdot \frac{2D\omega_m}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)} = -k \cdot \left[\frac{A \cdot (s + D\omega_m)}{s^2 + 2D\omega_m \cdot s + \omega_m^2} + \frac{B \cdot \omega_m \sqrt{1 - D^2}}{s^2 + 2D\omega_m \cdot s + \omega_m^2} \right] \quad / \cdot Nenner$$

$$2D\omega_m = (A) \cdot s + (AD\omega_m + B\omega_m \sqrt{1 - D^2})$$

der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left. \begin{array}{lcl} s^1 \dots & 0 & = & A \\ s^0 \dots & 2D\omega_m & = & D\omega_m \quad A \quad + \quad \omega_m \sqrt{1 - D^2} \quad B \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{2D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

Somit gilt für die Ausgangsspannung $U_a(s)$ im Laplace-Bereich folgendes:

$$U_a(s) = -k \cdot \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \left[2 \cdot \frac{\omega_0}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_0^2} \right] \quad (38)$$

Sprungantwort bei $D < 1$ (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation in den kontinuierlichen, zeitlichen Bereich liefert dadurch folgendes Ergebnis:

$$u_a(t) = \left[-k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[\frac{2}{\tau \cdot \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \right] \right] \cdot \sigma(t) \quad (39)$$

Sprungantwort bei $D < 1$ (Zeitbereich)

$$\text{mit } \omega_0 = \omega_m \cdot \sqrt{1-D^2}, \ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \ f_0 = \frac{1}{T_0}, \ \tau = \frac{1}{\omega_m \cdot D}$$

ω_0 Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

T_0 Periodendauer der gedämpften Schwingung

f_0 Frequenz der gedämpften Schwingung

τ Abklingzeitkonstante

Man kann in der Formel im Prinzip schon erkennen, dass es sich um ein schwingungsfähiges System handelt, dessen Verlauf bei sinkender Dämpfung immer mehr einem Sinus, da gleichzeitig die Zeitkonstante τ steigt, ähnelt, jedoch gleichzeitig die Amplitude abnimmt.

Der Maximalwert tritt in diesem Fall bei folgender vergangener Zeit auf:

$$u'_a(t) = \frac{2k}{\tau^2\omega_0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) - \frac{2k}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad \text{mit dem Produktnullsatz folgt:}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \text{v} \quad \frac{1}{\tau\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) = \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$(t = \infty) \quad \frac{1}{\tau^2\omega_0^2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) = 1 - \sin^2(\omega_0 \cdot t)$$

$$\sin^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2\omega_0^2} + 1}$$

$$\sin(\omega_0 \cdot t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{D^2}{1-D^2} - 1}}$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)$$

Nach dieser Zeit ist folgender Maximalwert (des Betrages) der Ausgangsspannung erreicht:

$$u_{a, \max} = -\frac{2k}{\tau\omega_0} \cdot e^{-\frac{1}{\tau\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)\right) = \frac{-2k}{\tau\omega_m} \cdot e^{-D \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)} \Rightarrow$$

$$\underline{u_{a, \max} = -2k \cdot D \cdot e^{-D \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)}} \quad \text{bei } t = \frac{1}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right) \quad (40)$$

Es lässt sich auch der minimalste, erreichbare Anstiegswert von $u_{a, \max}$ in diesem Falle berechnen, indem man $D \rightarrow 0$ betrachtet:

$$\underline{\lim_{D \rightarrow 0} u_{a, \max}} = -2k \cdot \lim_{D \rightarrow 0} D \cdot e^{-D \frac{\omega_m}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{\omega_0}{\omega_m}\right)} = 0$$

⇒ bei $D \rightarrow 0$ wird das System auf einen Sprung am Eingang immer weniger reagieren.

Des Weiteren gilt:

$$\text{Endwert} \dots \dots \dots \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot U_a(s) = 0$$

$$\text{Anfangswert} \dots \dots \dots \quad \lim_{t \rightarrow 0} u_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot U_a(s) = 0$$

$$\text{Anfangssteigung} \dots \quad \lim_{t \rightarrow 0} u'_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \cdot U_a(s) = -2k \cdot D\omega_m$$

2.2.3.3 Weitere Eigenschaften vom System

Wie sieht es nun mit der Grenzfrequenz eines solchen Bandpasses aus? Die Grenzfrequenz tritt auf, wenn Betrag von $G(j\omega)$ ein Maximum erreicht:

$$|G(j\omega)| = k \cdot \frac{\frac{2D\omega}{\omega_m}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(\frac{2D\omega}{\omega_m}\right)^2}} \quad (41)$$

Um Schreibarbeit zu sparen kann einfach $G(j\omega)$ nach ω mit Hilfe von Maxima abgeleitet und die Ableitung gleich 0 gesetzt werden. Es ist jedoch sehr empfehlenswert das ganze einmal händisch nachzurechnen. Die einzige reelle, positive Lösung die sich ergibt ist:

$$\omega_G = \omega_m \quad \text{mit } f_G = \frac{2\pi}{\omega_G} \quad (42)$$

ω_G Grenzkreisfrequenz = Mittenkreisfrequenz

f_G Grenzfrequenz

Anders gesagt wäre die Mittenfrequenz bei passiver Realisierung mit R, L & C, die ungedämpfte Eigenfrequenz des Systems, hier gleich der Grenzfrequenz, wo das Maximum von $|G(j\omega)|$ auftritt.

Bei dieser Mitten(kreis)frequenz³ ω_m tritt nun eine Verstärkung von exakt k auf.

Der nächste Schritt besteht nun darin, herauszufinden wie groß die Güte Q , bzw. die Bandbreite B ist.

³Es wird oft, im sprachlichen Gebrauch, nur Frequenz gesagt und gemeint ist aber die Kreisfrequenz

Bei der Ermittlung der oberen und unteren Grenzfrequenzen kann auf folgender Weise vorgegangen werden:

Die Grenzen treten auf, wenn der Imaginärteil gleich dem Realteil von $G(j\omega)$ ist, sprich:

$$G(j\omega) = -k \cdot \frac{\frac{2D}{\omega_m} \cdot (j\omega)}{\frac{1}{\omega_m^2} \cdot (j\omega)^2 + \frac{2D}{\omega_m} \cdot j\omega + 1} = -k \cdot \frac{j \cdot \frac{2D\omega}{\omega_m}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) + j \cdot \frac{2D\omega}{\omega_m}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) - j \cdot \frac{2D\omega}{\omega_m}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) - j \cdot \frac{2D\omega}{\omega_m}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = -k \cdot \frac{\left(\frac{2D\omega}{\omega_m}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(\frac{2D\omega}{\omega_m}\right)^2} \quad \& \quad \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = -k \cdot \frac{\frac{2D\omega}{\omega_m} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(\frac{2D\omega}{\omega_m}\right)^2}$$

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

$$\frac{2D\omega}{\omega_m} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}$$

Somit können die einzelnen Grenzfrequenzen auf folgender Art berechnet werden:

$$\omega_{G_H, G_L} = \omega_m \cdot \left(\sqrt{D^2 + 1} \pm D \right) \quad f_{G_H, G_L} = \frac{\omega_{G_H, G_L}}{2\pi} \quad (43)$$

Die Grenzfrequenz ergibt sich aus dem geometrischen Mittel von der oberen & unteren Knickfrequenzen/Grenzfrequenzen:

$$\omega_G = \sqrt{\omega_{G_H} \cdot \omega_{G_L}} = \omega_m \quad f_G = \frac{\omega_G}{2\pi} = f_m \quad (44)$$

ω_{G_H}	obere Grenzkreisfrequenz	f_{G_H}	obere Grenzfrequenz
ω_{G_L}	untere Grenzkreisfrequenz	f_{G_L}	untere Grenzfrequenz
ω_G	Grenzkreisfrequenz	f_G	Grenzfrequenz

Die Bandbreite ist durch eine obere und untere Grenzfrequenz charakterisiert und wird üblicherweise für einen Frequenzbereich angegeben und der Gütefaktor (Güte) ist ein Maß für die Dämpfung eines Systems. Allgemein gilt also:

$$B = f_{G_H} - f_{G_L} = 2 D \cdot f_G = 2 D \cdot f_m \quad (45)$$

$$Q = \frac{f_G}{B} = \frac{f_m}{B} = \frac{1}{2D} \quad (46)$$

B Bandbreite

Q Güte

Für den Phasenwinkel φ gilt nun folgender Zusammenhang:

$$\varphi = \arg(G(j\omega)) = -90^\circ - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_m \cdot (D + \sqrt{D^2 - 1})} \right) - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_m \cdot (D - \sqrt{D^2 - 1})} \right) \quad (47)$$

Somit ergibt sich:

$$\omega = 0 \dots \quad \varphi = -90^\circ$$

$$\omega = \omega_{G_L} \dots \quad \varphi = -135^\circ$$

$$\omega = \omega_m \dots \quad \varphi = -180^\circ$$

$$\omega = \omega_{G_H} \dots \quad \varphi = -225^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \dots \quad \varphi \rightarrow -270^\circ$$

2.2.4 Berechnungen & Darstellungen (Maxima)

Nun können die einzelnen hergeleiteten Formel mit Hilfe von Maxima überprüft und zusätzlich ein Bodediagramm angefertigt werden.

Dabei wurde bei der Erstellung des Programmes so vorgegangen, dass man eine beliebige Durchlassüberhöhung k , eine Mittenfrequenz f_m / Grenzfrequenz f_G und die Dämpfung D (bzw. könnte man auch die Güte oder die Bandbreite wählen und die Formeln 45 & 46 verwenden) wählen kann. Danach wird davon die Sprungantwort mit Hilfe der Formeln 31, 34 & 39 berechnet und im Anschluss darauf das Bodediagramm erstellt.

Natürlich ginge das Berechnen selbst mit Maxima wesentlich kürzer (einfach „step- response“ von $G(s)$, was natürlich als Kontrolle gemacht wurde), aber es sollen ja die hergeleiteten Formeln überprüft werden.

2.2.4.1 Allgemeines

Allgemeines

```
kill(all)... Alles zuvor löschen bei einem neuen Durchlauf
load(draw)... Draw_ Packet laden
load(coma)... Coma-Packet laden
j... Imaginäre Einheit
PI... Kreiszahl PI
```

```
(%i1) kill(all)$
(%i1) load(draw)$
      load(coma)$
```

comav.1.70, (Wilhelm Haager, 2014 – 09 – 07)

```
(%i3) fpprec:10$ 
      fpprintprec:4$ 
      ratprint:false$ 
      j:%i$ 
      PI:%pi$
```

WAHL: zB.:

Durchlassverstärkung k = 3dB

Mittenfrequenz fm= 20Hz

Dämpfungen D= variabel (mehrere)

```
(%i18) k:sqrt(2)$
      f_m:20$
      f_G:f_m$
      omega_n:float(2*PI*f_m)$
```

EINGABE:

gewünschte Bandbreite (es kann auch die Dämpfung oder Güte gewählt werden) eingeben.

BERECHNUNGEN:

Güten und Dämpfung werden berechnet bzw. umgekehrt möglich.

D=1 noch nicht eingeben.

```
(%i12) B:[5,75]$
```

```
(%i13) D:float(B/(2*f_m))$
      D:sort(D);
      Q:1/(2*D)$
```

(%o14) [0.125, 1.875]

BERECHNUNGEN:

Oberer und Untere Grenzfrequenzen:

```
(%i16) f_G_H:float(abs(omega_m*(D+sqrt(D^2+1)))/(2*PI))$
      f_G_L:float(abs(omega_m*(D-sqrt(D^2+1)))/(2*PI))$
      omega_G_H:f_G_H*2*PI$
      omega_G_L:f_G_L*2*PI$
      omega_G:sqrt(omega_G_H*omega_G_L)$
      f_G:omega_R/(2*PI)$
```

2.2.4.2 Sprungantworten des Systems

Aperiodischer Grenzfall:

```
(%i22) AS:0$
      ANS:0$
      for i:1 while i<=(length(D)) do( if D[i]>1 then ANS:ANS+1 else AS:AS+1)$
```

```
(%i25) tau_aperiodisch:1/(omega_m)$
```

```
(%i26) Ua_t_aperiodischer_Grenzfall(t):=-2*k*%e^(-t/tau_aperiodisch)*t/tau_aperiodisch$
```

```
(%i27) Aperiodischer_Grenzfall:
      points([1/omega_m],[float(Ua_t_aperiodischer_Grenzfall(1/omega_m))]);
```

(%o27) points ([0.007958], [-1.041])

Schwingfähiges System:

Erweiterbar für mehrere Fälle:

```
(%i28) omega_0:create_list(0,n,1,AS)$
      for i:1 while i<=AS do omega_0[i]:=omega_m*sqrt(1-(D[i])^2)$ omega_0$

(%i31) tau_schwingfaehig:create_list(0,m,1,AS)$
      for i:1 while i<=AS do tau_schwingfaehig[i]:=1/(D[i]*omega_m)$
      tau_schwingfaehig;

(%o33) [0.06366]

(%i34) Ua_t_Schwingfaehig:create_list(0,n,1,AS)$
      for i:1 while i<=AS do
      Ua_t_Schwingfaehig[i]:=-k*e^(-t/tau_schwingfaehig[i])*$2/(tau_schwingfaehig[i]*omega_0[i])*sin(omega_0[i]*t)$
      Ua_t_Schwingfaehig$
```

Maximalwerte Berechnen

```
(%i37) Schwingungsfaehig:[0]$%
      for i:1 while i<=1 do (Schwingungsfaehig[i]:=points(
      [t_max_schwing_1:1/omega_0[i]*asin(sqrt(1-(D[i])^2))],[realpart(float(
      -2*k*D[i]*e^(-omega_m/omega_0[i]*D[i]*asin(omega_0[i]/omega_m))))]))$%
      Schwingungsfaehig;
```

(%o39) [points ([0.0116], [-0.2947])]

Nicht Schwingfähiges System:

```
(%i40) omega_d:create_list(0,n,1,ANS)$
      for i:(1+AS) while i<=length(D) do omega_d[i-AS]:=omega_m*sqrt(D[i]^2-1)$
      omega_d$

(%i43) tau_nicht_schwingfaehig:create_list(0,n,1,ANS)$
      for i:(1+AS) while i<=length(D) do tau_nicht_schwingfaehig[i-AS]:=1/(D[i]*omega_m)$
      tau_nicht_schwingfaehig$

(%i46) Ua_t_Nicht_Schwingfaehig:create_list(0,n,1,ANS)$
      for i:1 while i<=ANS do
      Ua_t_Nicht_Schwingfaehig[i]:=-k*e^(-t/tau_nicht_schwingfaehig[i])*$2/(tau_nicht_schwingfaehig[i]*omega_d[i])*sinh(omega_d[i]*t)$
      Ua_t_Nicht_Schwingfaehig$
```

Maximalwerte Berechnen

```
(%i49) Nicht_Schwingungsfaehig:[0,0,0]$%
      for i:1 while i<=3 do (Nicht_Schwingungsfaehig[i]:=points(
      [t_max_schwing_1:realpart(1/omega_d[i]*asinh(sqrt((D[i+AS])^2-1)))],[realpart(float(
      -2*k*D[i+AS]*e^(-omega_m/omega_d[i]*D[i+AS]*asinh(omega_d[i]/omega_m))))]))$%
      Nicht_Schwingungsfaehig;
```

(%o51) [points ([0.006229], [-1.222])]

Graphische Darstellung der Sprungantworten⁴

```
(%i55) Zeit:0.1$  
step_response(  
[Ua_t_aperiodischer_Grenzfall(t),Ua_t_Nicht_Schwingfaehig,Ua_t_Schwingfaehig,  
Aperiodischer_Grenzfall,Nicht_Schwingungsfaehig,Schwingungsfaehig,  
grenze_unten,grenze_oben],point_size=1.2,point_type=2,  
yrange=[-sqrt(2),Max],xrange=[0,Zeit],  
xlabel="Zeit t [s]",ylabel="Ausgangsspannung Ua(t) [V] (Sprungantwort)",  
color=[black, red, royalblue,black,red, royalblue,royalblue,royalblue],  
line_type=[solid, solid,solid, solid,solid,solid, dots, dots],  
dimensions=[1200,800],xaxis=true,yaxis=true,ytics=0.1,xtics=0.025,nticks=1000)$  
  
(\%t56)
```

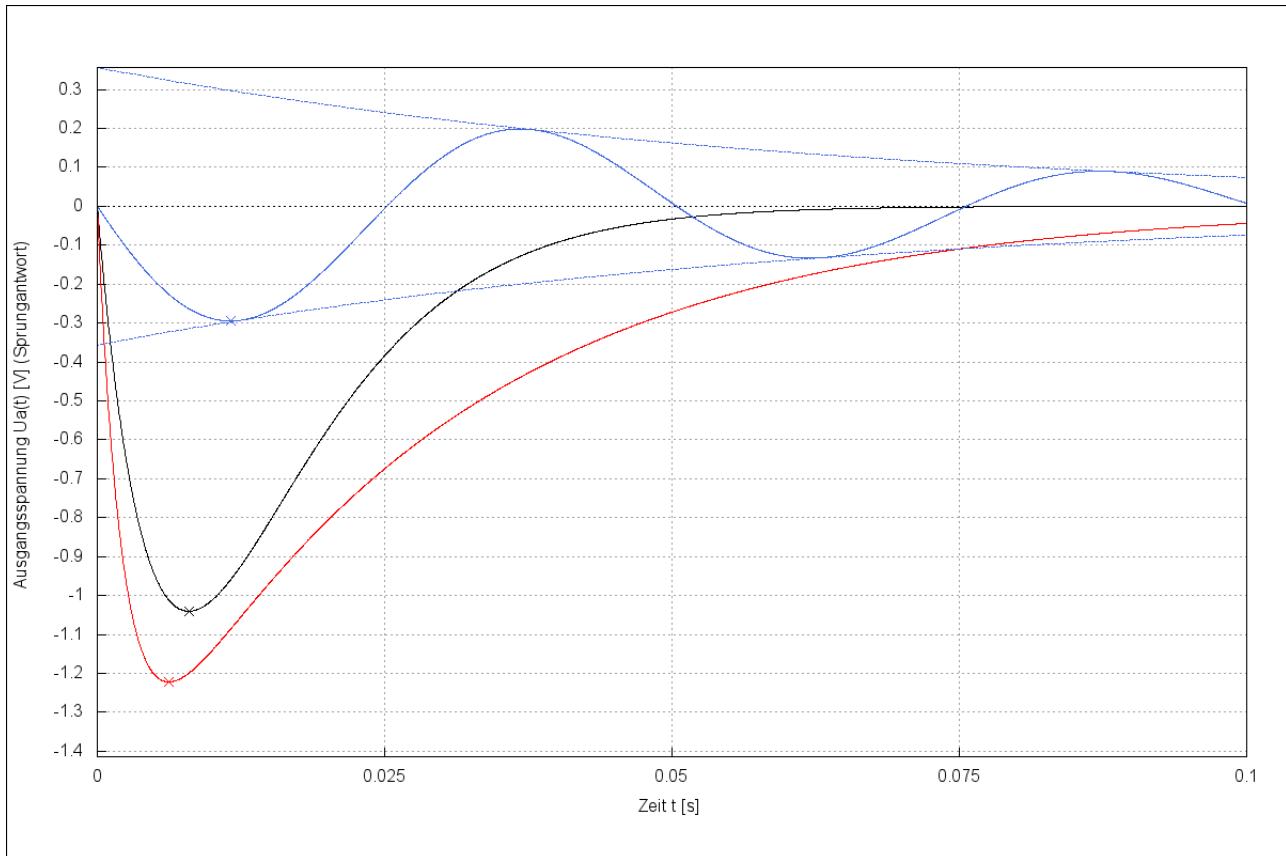


Abbildung 3: Sprungantworten G(s) des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)

In dieser Abb. 3 ist deutlich erkennbar, dass mit sinkender Dämpfung (Q steigt) die Sprungantwort des Systems immer mehr einem Sinus ähnelt, jedoch auch gleichzeitig die Amplitude sinkt.

⁴Weiteres zur Beschriftung, Einstellungen & Hilfslinien zu den Diagrammen ist dem Maxima-Programm zu entnehmen, denn es wurde im Protokoll nur das Wichtigste vermerkt.

2.2.4.3 Bodediagramme & Frequenzgänge

```
(%i57) D:sort	append(D,[1));
Q:1/(2*D);
B:f_m/Q;
f_G_H:float(omega_m*(sqrt(D^2+1)+D)/(2*PI));
f_G_L:float(omega_m*(sqrt(D^2+1)-D)/(2*PI));
omega_G_H:float(f_G_H*2*PI)$
omega_G_L:float(f_G_L*2*PI)$
omega_G:sqrt(omega_G_H*omega_G_L)$
f_G:float(omega_G/(2*PI));

(%o57) [0.125, 1, 1.875]
(%o58) [4.0,  $\frac{1}{2}$ , 0.2667]
(%o59) [5.0, 40, 75.0]
(%o60) [22.66, 48.28, 80.0]
(%o61) [17.66, 8.284, 5.0]
(%o65) [20.0, 20.0, 20.0]

(%i66) omega_0:omega_m*sqrt(1-D^2);
omega_d:omega_m*sqrt(D^2-1);

(%o66) [124.7, 0, 199.3 i]
(%o67) [124.7 i, 0, 199.3]

(%i68) tau:float(1/(omega_m*D));
(%o68) [0.06366, 0.007958, 0.004244]      > 2 · T_A √
```

Koeffizienten ermitteln:

```
(%i69) b2:float(1/omega_m^2)$
b1:float(2*D/omega_m)$
b0:1$ 
a1:float(k*b1)$

(%i73) TA:float(2*10^(-3))$
A0:float(a1*2/TA)$
A1:0$
A2:float(-a1*2/TA)$
B0:4*b2/TA^2+2*b1/TA+b0$ 
B1:2-8*b2/TA^2$ 
B2:4*b2/TA^2-2*b1/TA+b0$
```

```
(%i80) G_s(s):=float(-a1*s/(b2*s^2+b1*s+b0))$  

G_jw(omega):=subst(j*omega,s,G_s(s))$  

(%i97) magnitude_plot( [G_s(s)],  

xrange=[1,10000],yrange=[0.01,2],  

xlabel="Kreisfrequenz w [1/s]",ylabel="Betrag von G(jw));  

(\%t97)
```

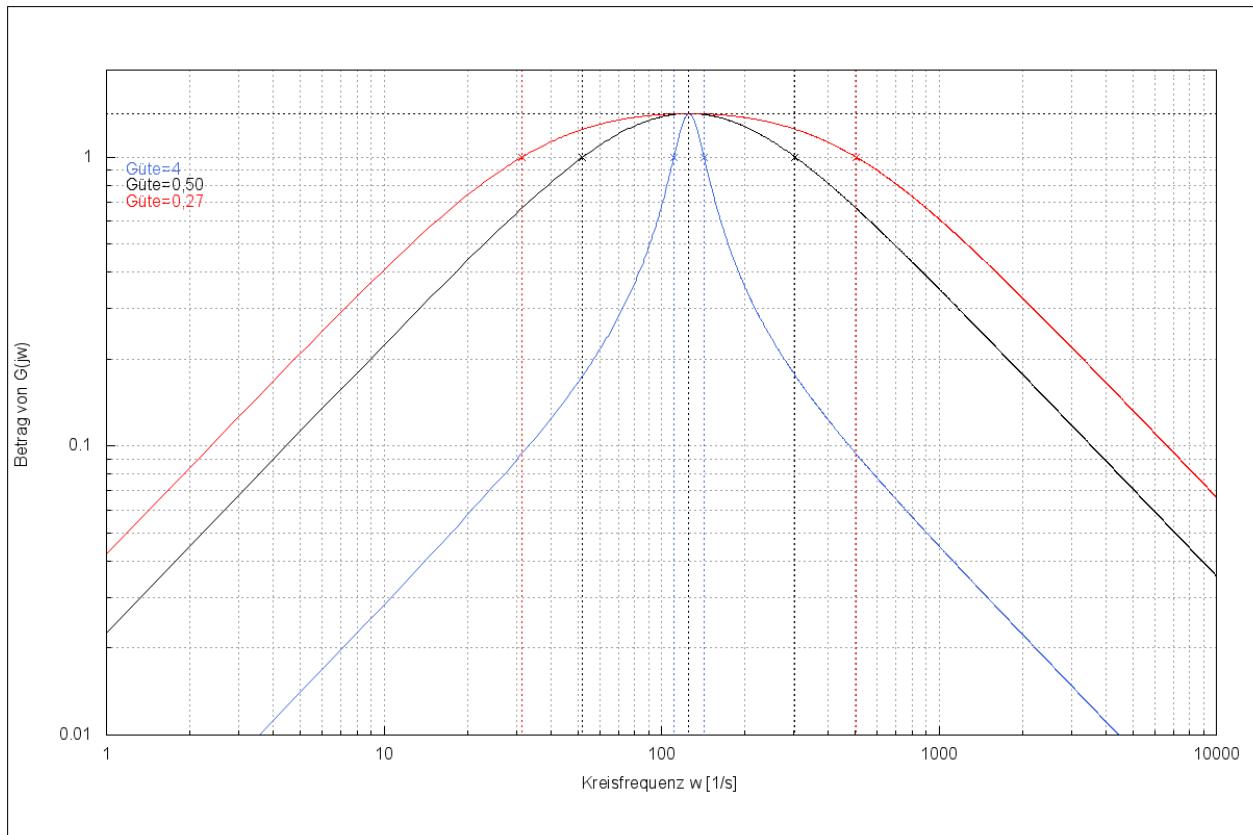


Abbildung 4: Betragsgänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)

In diesem Betragsgang ist deutlich ersichtlich, dass bei einer hohen Güte ein schmalbänderiger Bandpass ergibt, hingegen bei einer niedrigen ein breitbänderiger. Anders formuliert: „Ist das System nur schwach gedämpft, so ist dieses System von hoher Güte.“

Des Weiteren ist in der Abb.4 eine Flankensteilheit (außerhalb des Durchlassbereiches) von 20 dB/Dekade erkennbar, was somit einen Bandpass 2.Ordnung kennzeichnet.

Wie gewünscht tritt eine Durchlassüberhöhung von 3 dB im Durchlassbereich bei Grenzfrequenz auf, was somit bedeutet, dass ein Eingangssignal mit dieser Frequenz um den Faktor $\sqrt{2}$ verstärkt wird. Im Allgemeinen tritt hier eine Verstärkung des Signales auf, wenn das Signal innerhalb folgendem Frequenzband ist:

$$f_G \pm \frac{B}{2}$$

```
(%i113)phase_plot([G_s(s)],
    xrange=[1,10000],yrange=[-270,-90],
    xlabel="Phasenwinkel [Grad]",ylabel="Betrag von G(jw)");

(\%t113)
```

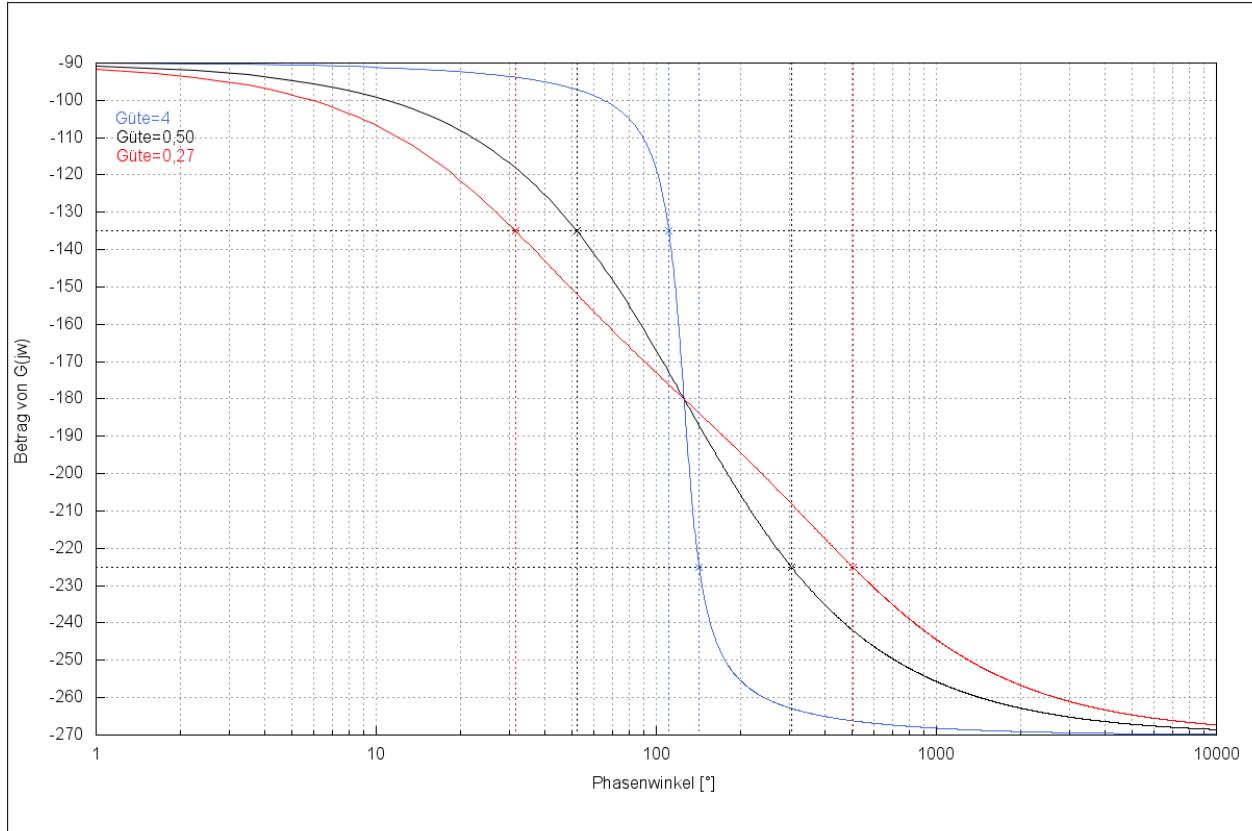


Abbildung 5: Phasengänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)

Es ist im Phasengang ersichtlich, dass das Signal mit Grenzfrequenz um 180° phasenverschoben wird. Bei der unteren bzw. oberen Grenzfrequenz findet eine Phasendrehung von exakt -135° bzw. -225° in diesen Fällen statt. ($\hat{=} -180^\circ \pm 45^\circ$)

Bei niedrigeren Güten wird der Phasenverlauf immer mehr ein linearer Übergang von -90° bis -270° , hingegen bei hohen Güten nähert es sich einem sprungförmigeren Übergang.

2.2.4.4 Ortskurve

Eine Ortskurve ist die Darstellung des Frequenzganges $G(j\omega)$ in der komplexen Zahlenebene in Abhängigkeit des Parameters ω (f). Die „Kurve“ beginnt bei $\omega = 0$ und endet bei $\omega \rightarrow \infty$.

```
(%i121)nyquist_plot( [G_s(s)],  
xrange=[-sqrt(2),sqrt(2)],yrange=[-1,1],  
xlabel="Re(G(jw))",ylabel="Im(G(jw))");
```

(\%t121)

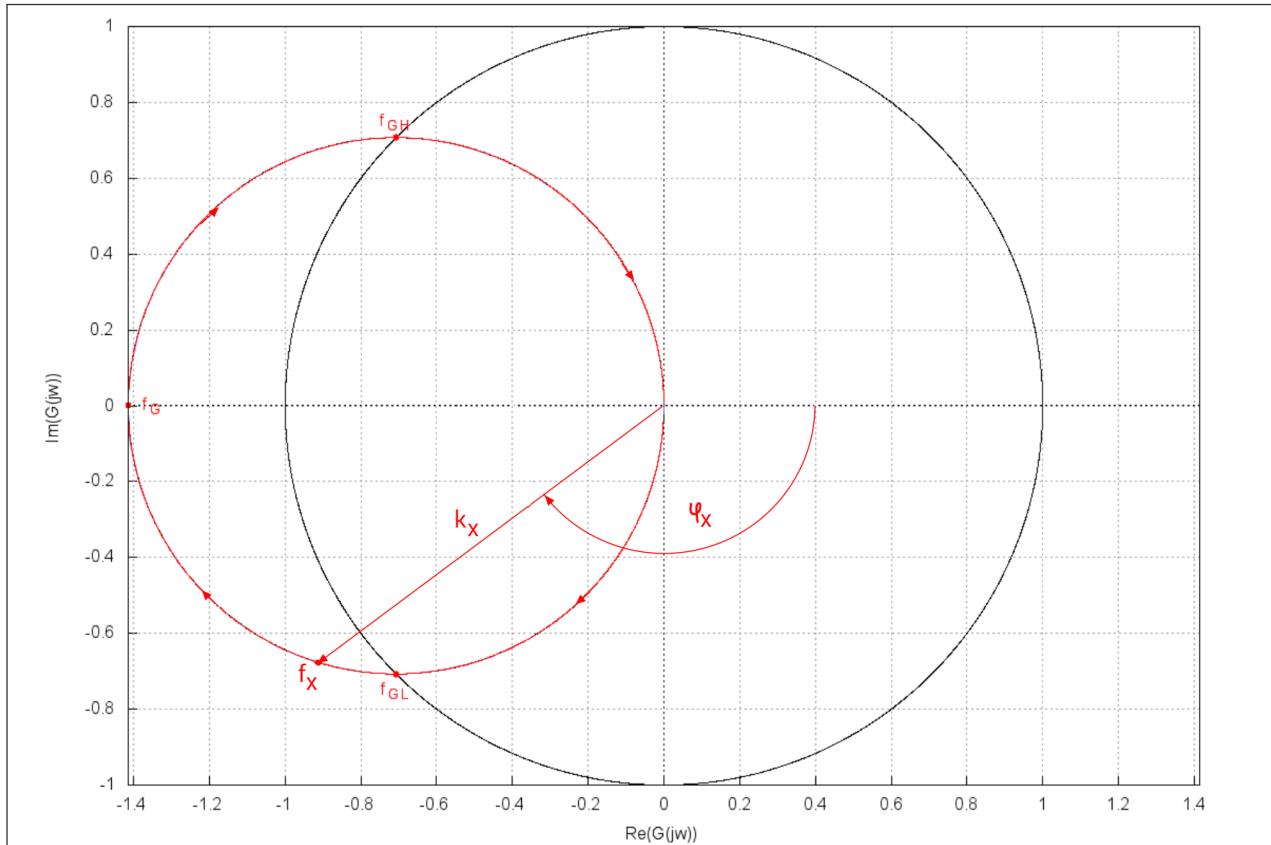


Abbildung 6: Ortskurve des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Maxima-Berechnung)

Dabei stellt die schwarze Kurve den Einheitskreis und die rote die Ortskurve des Systems dar. Die Form der Ortskurve ist unabhängig von den einzelnen Parametern, wie Dämpfung, Durchlassverstärkung und Grenzfrequenz und deshalb lässt sich hier eindeutig erkennen, dass die maximal auftretende Verstärkung im Durchlassbereich 3 dB , bzw. $\sqrt{2}$ beträgt.

Des Weiteren kann man, wenn man einzelnen Punkte zu bestimmten Frequenzen (bzw. Kreisfrequenzen) einzeichnet, die Phasenverschiebung ablesen, was somit den Phasengang von -90° – -270° begründet.

2.2.4.5 Analoge Dimensionierungsbeispiele

Die Eigenschaften wurden schon vorher festgelegt.

Hier müssen nun zwei Bauelemente gewählt werden und die Widerstände/Kondensatoren werden nach den hergeleiteten Gleichungen berechnet.

Falls negative Widerstände rauskommen kann man die Dimensionierung dementsprechend zuschneiden. (Wenn möglich C wählen)

Bsp. Nicht Schwingfähiges System:

```
(%i122)kill(R1,R2,R3,C1,C2)$
(%i123)R1:10000$  
R2:10000$
(%i125)Gleichungen:[a1[8]=C2*R2*R3/(R1+R2),  
b0=1,  
b1[8]=(C1+C2)*R1*R2/(R1+R2),  
b2=C1*C2*R1*R2*R3/(R1+R2)]$

(%i126)float(solve(Gleichungen,[C1,C2,R3]));
(%o153)[[C1 = 1.501 10-7, C2 = 5.818 10-6, R3 = 1.451 104]]
```

Bsp. Schwingfähiges System:

```
(%i127)kill(R1,R2,R3,C1,C2)$
(%i128)C1:float(10*10(-6))$  
C2:float(1*10(-6))$

(%i130)Gleichungen:[a1[1]=C2*R2*R3/(R1+R2),  
b0=1,  
b1[1]=(C1+C2)*R1*R2/(R1+R2),  
b2=C1*C2*R1*R2*R3/(R1+R2)]$
```

```
(%i131)float(solve(Gleichungen,[R1,R2,R3]));
```

```
(%o158)[[R1 = 0.0, R2 = 0.0, R3 = %r1], [R1 = 2.251 103, R2 = 196.7, R3 = 3.501 104]]
```

Bsp. Aperiodischer Grenzfall:

```
(%i132)kill(R1,R2,R3,C1,C2)$
(%i133)R1:10000$  
R2:10000$
(%i135)Gleichungen:[a1[5]=C2*R2*R3/(R1+R2),  
b0=1,  
b1[5]=(C1+C2)*R1*R2/(R1+R2),  
b2=C1*C2*R1*R2*R3/(R1+R2)]$

(%i136)float(solve(Gleichungen,[C1,C2,R3]));
(%o163)[[C1 = 2.813 10-7, C2 = 2.902 10-6, R3 = 1.551 104]]
```

2.2.4.6 Systemfunktionen für Scilab (Xcos)

Trapez-Näherung:

```
(%i137)H_z_trapez(z):=subst(2/TA*(z-1)/(z+1),s,G_s(s))$  
float(fullratsimp(H_z_trapez(z)))$
```

Euler-Näherung:

```
(%i139)H_z_euler(z):=subst((z-1)/(z*TA),s,G_s(s))$  
float(fullratsimp(H_z_euler(z)))$
```

Die einfachste Lösung, die Systemfunktion in Scilab einzugeben ist das Kopieren des Maxima-Ausdruckes beim Ersetzen von \$ zu ;.

2.2.5 Analoge Filtersimulation (Proteus)

2.2.5.1 Schaltungsentwürfe (Analog)

Nun kann im Prinzip die Schaltung des aktiven Bandpasses 2.Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung auch mit Hilfe eines Programmes simuliert werden. Dabei wurde die Dimensionierung der Bauelemente schon (näherungsweise) mit dem Programm Maxima in jedem der 3 Fälle (aperiodischer Grenzfall, schwingungsfähiger und nicht schwingungsfähiger Fall) durchgeführt.

Die Schaltung in Proteus nimmt somit folgende Form an:

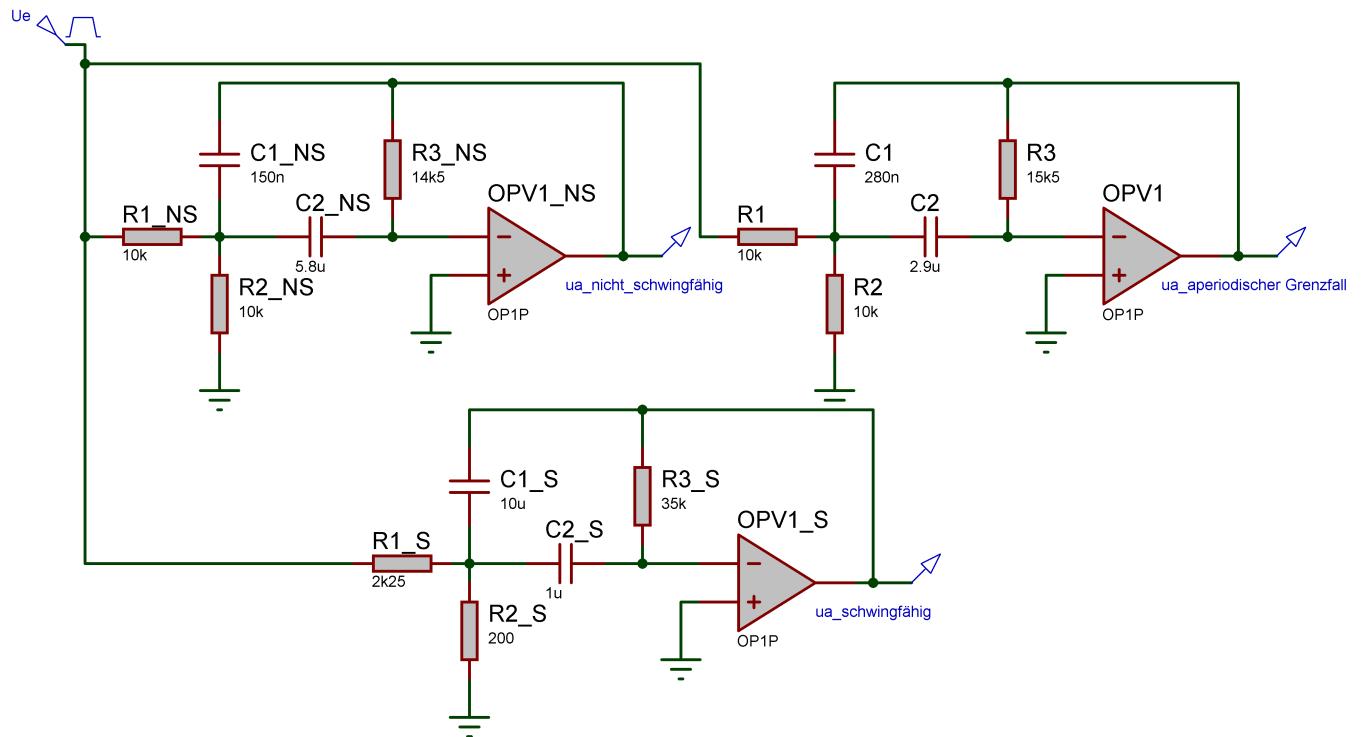


Abbildung 7: Schaltungen des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Proteus-Simulation)

Es wurde versucht, die Bauteile so zu wählen, dass diese auch einigermaßen realisierbar sind. Im Anschluss darauf kann die Sprungantwort und das Bodediagramm des Bandpasses 2.Ordnung graphisch zur Anzeige gebracht werden.

2.2.5.2 Bodediagramme & Frequenzgänge

Die Betragsgänge der analogen Realisierungen weißen laut der Software Proteus folgenden Verlauf auf:

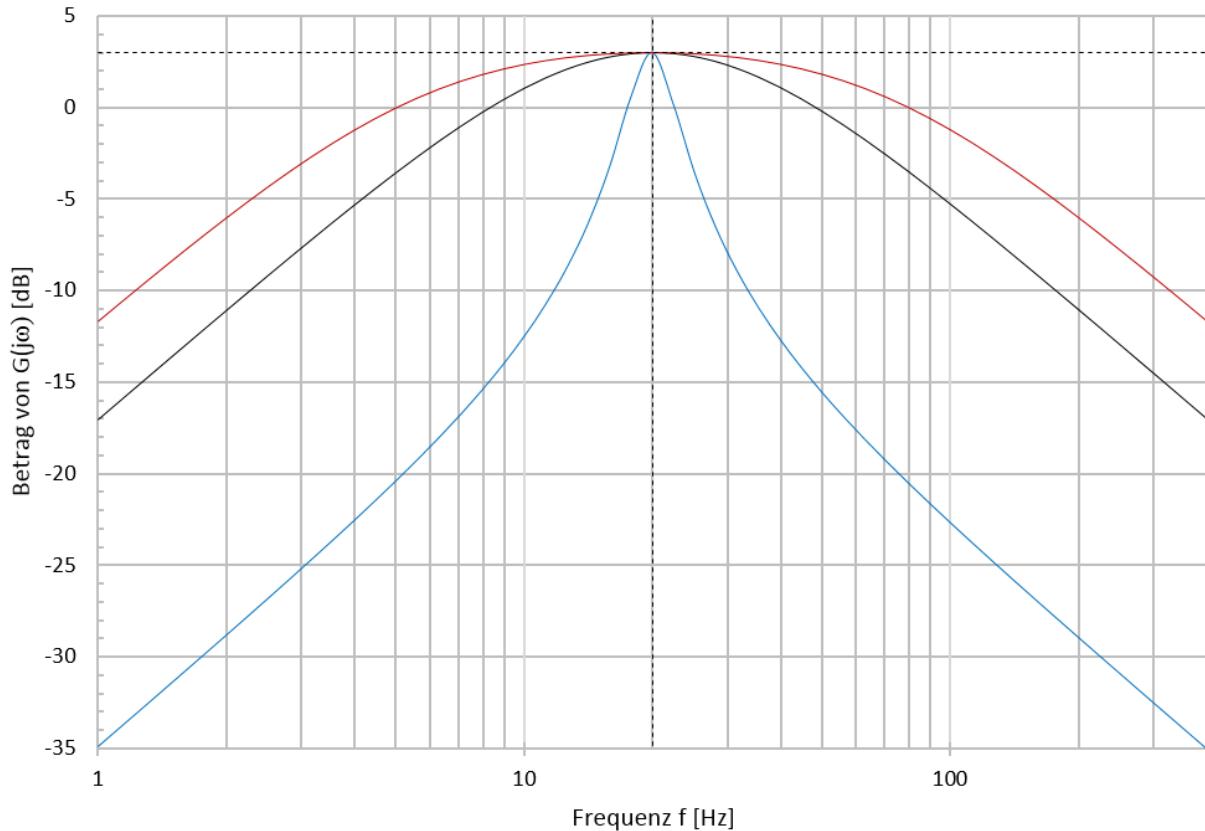


Abbildung 8: Betragsgänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Proteus-Simulation)

Diese Abbildung „bestätigt“ im Prinzip die berechneten Verläufe mit Hilfe von Maxima und zeigt gleichzeitig eine mögliche analoge Realisierung des Bandpasses 2.Ordnung mit Mehrfachgegenkopplung auf, ohne zu große Abweichungen von den Rechenwerten, wie Grenzfrequenz $f_G = 20 \text{ Hz}$ und Durchlassverstärkung $k = 3 \text{ dB}$.

Ein Bodediagramm besteht auch aus einem Phasenverlauf, welcher bei dieser Analogrealisierung der einzelnen Fälle folgendermaßen aussieht:

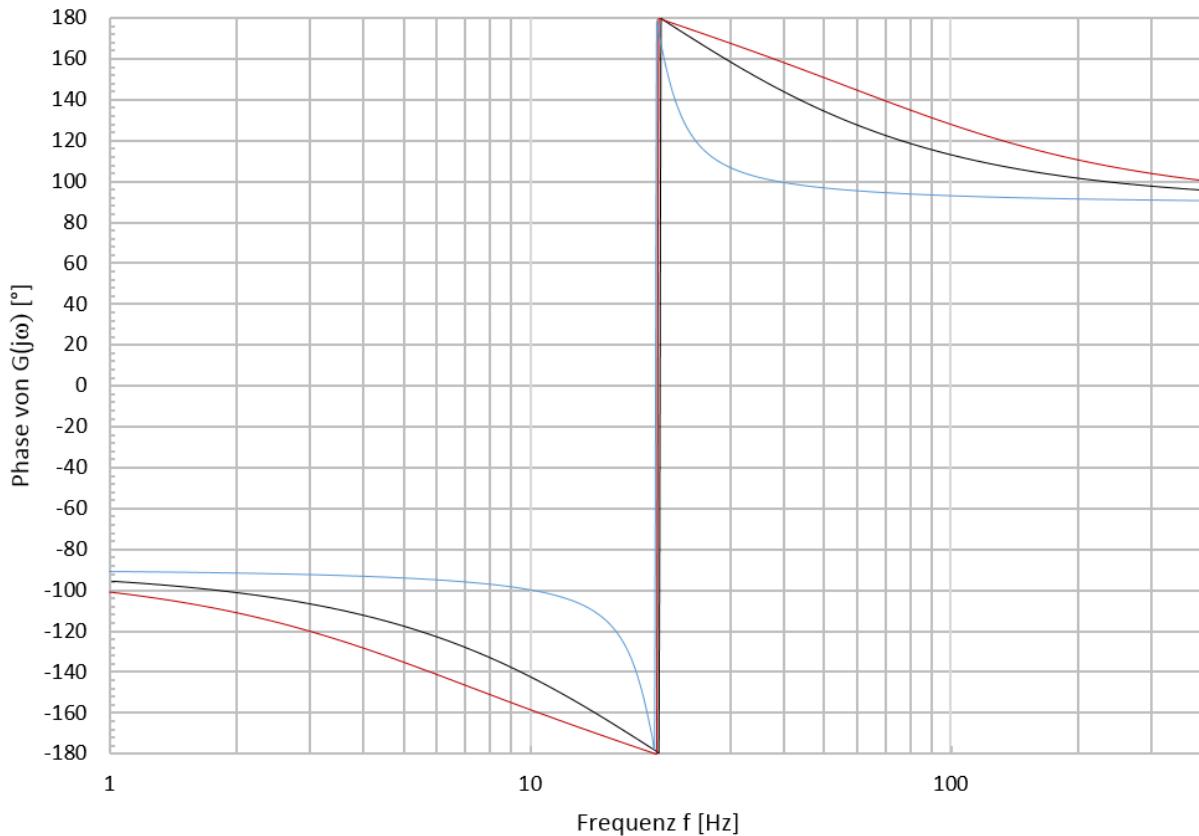


Abbildung 9: Phasengänge des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Proteus-Simulation)

Die Abbildung 9 weißt im 1.Blick nicht den gleichen Verlauf auf, wie die Berechnung mit Hilfe von Maxima.

Doch es zeigt sich, dass die Phasendrehung im Prinzip gleich ist, nämlich von -90° bis 180° bis zur Grenzfrequenz und weiter von 180° bis 90° ($\hat{=} -180^\circ$ bis -270°), da das Programm Proteus nicht mit der exakten Phasendrehung arbeitet, sondern mit dem bekannten Befehl arctan 2 welcher nur Phasenwinkel zwischen $\pm 180^\circ$ liefert.

Auf die Sprungantworten wurde hier verzichtet, da diese sowieso noch bei der Filtersimulation mit dem Programm Scilab im nachfolgenden Kapitel 2.2.6 zu sehen ist.

2.2.6 Filtersimulation (Scilab)

2.2.6.1 Programmentwicklung

Diese Simulation der Sprungantwort mit Hilfe des Programmes Scilab dient auch dazu, um den Unterschied zwischen kontinuierlichen und diskreten Zeitbereich zu veranschaulichen.

Am Beginn gleich einmal das erstellte Programm mit dem Xcos-Package von Scilab, welches im Prinzip für jede Filterart gilt:

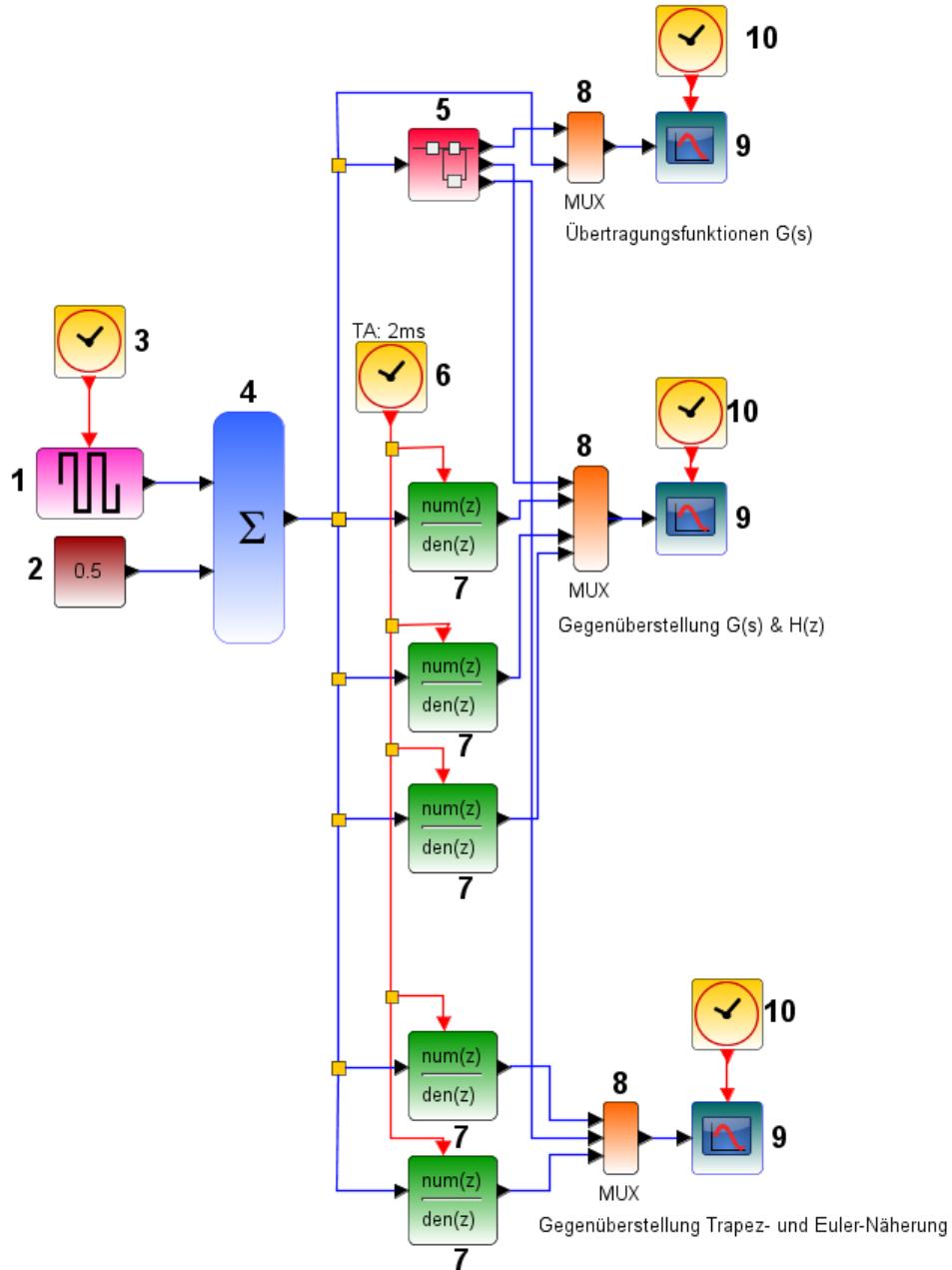


Abbildung 10: Scilab-Programm zur Realisierung des aktiven Bandpasses 2.Ordnung

Nun folgt eine kurze Erklärung der einzelnen Bausteine:

- 1 Square Generator Block: Dieser Baustein dient zur Erzeugung eines symmetrischen Rechtecksignals, bei dem die Amplitude einstellbar ist (Doppelklick) und die Impulsbreite dessen kann durch den Baustein 3 verändert werden.
- 2 CONST_ m Block: Dieser schickt sozusagen eine Gleichspannung aus, um das Rechtecksignal von $\pm 0,5 V$ auf $0 - 1 V$ (Sprung) zu bringen.
- 3 CLOCK_ c Block: Dies ist sozusagen ein Clock-Generator mit dem die Impulsbreite des Rechtecksignals eingestellt werden kann. (Des Weiteren wäre noch eine Initialisierungszeit möglich)
- 4 Set sum Block: Dieser Block summiert die einzelnen Signale, in diesem Fall das Rechtecksignal und die Gleichspannung, auf und leitet die Summe weiter → Realisierung eines Sprunges.
- 5 SUPER_ f: Er beinhaltet einen CLR Block in dem die Übertragungsfunktionen $G(s)$ eingegeben werden können und stellt somit die analoge Filterschaltung nach. Allgemein modelliert es das Verhalten eines kontinuierlichen linearen Systems.
- 6 CLOCK_ c Block: (=3) Dieser dient zum Einstellen der Abtastfrequenz.
- 7 DLR Block: In diesen Blöcken wird die jeweilige Systemfunktion $H(z)$ hineingeschrieben und sie dienen somit zur Simulation des digitalen Filters.
- 8 MUX Block: Dieser Block bündelt die einzelnen Signale zusammen (summiert diese aber nicht auf!).
- 9 SCOPE Block: Der Block stellt ein Oszilloskope dar und dient somit zur graphischen Anzeige der einzelnen Signale.
- 10 ... CLOCK_ c Block: (=3) Gibt dem Block 9 (Oszilloskope) die Schritte vor.(sollte kl. als T_A sein)

In den Baustein 5 wurden die einzelnen Übertragungsfunktionen $G(s)$ hineingeschrieben, wobei alle zum obrigen MUX laufen und drei Sonderfälle (aperiodischer Grenzfall, schwingungsfähiges System (mit max. Güte), nicht schwingungsfähiges System (mit min. Güte)) werden zum unteren MUX weitergeleitet.

Die Systemfunktionen $H(z)$ der drei Sonderfälle werden, was ja mit Scilab im Prinzip simuliert werden soll, in den Blöcken 7 hineingeschrieben.

2.2.6.2 Sprungantworten des Systems

Nachdem $G(s)$ & $H(z)$ in die jeweiligen Bausteine hinengeschrieben und einige Einstellungen vorgenommen wurden, konnten folgende Sprungantworten oszillographiert werden:

Oberes Oszilloskope:

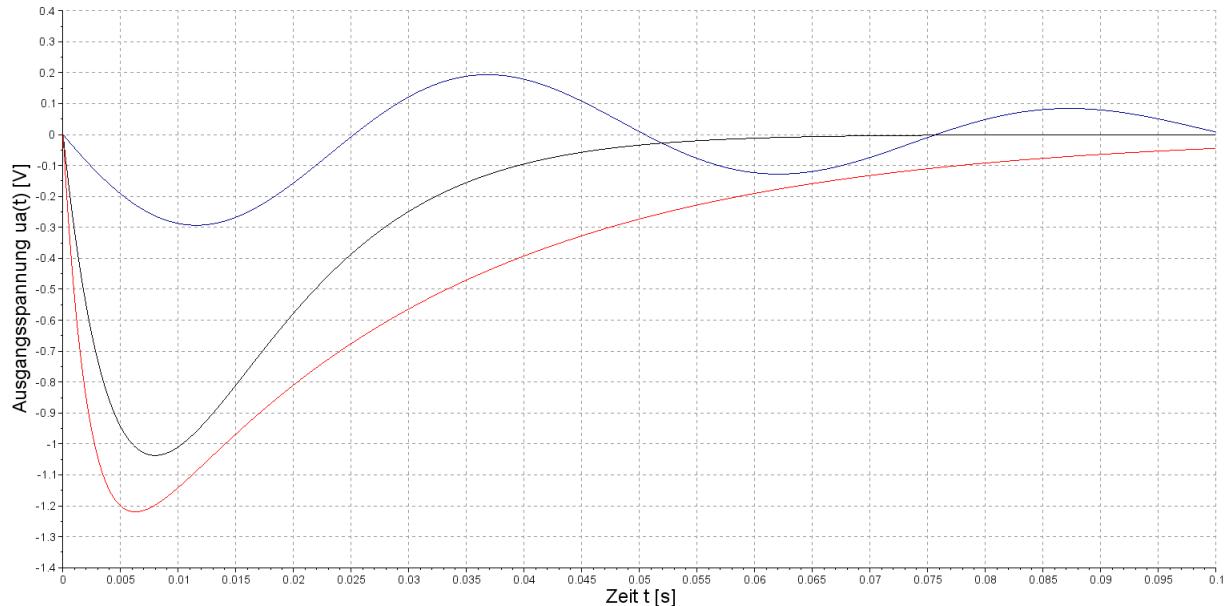


Abbildung 11: Sprungantworten $G(s)$ des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Scilab-Simulation)

Es ist erneut ersichtlich, dass die Anfangssteigung mit steigender Dämpfung immer größer wird und umgekehrt, was auch die Formel bestätigt.

Des Weiteren beträgt der Anfangs- & Endwert (AWT & EWT) den Wert 0.

Mittleres Oszilloskope:

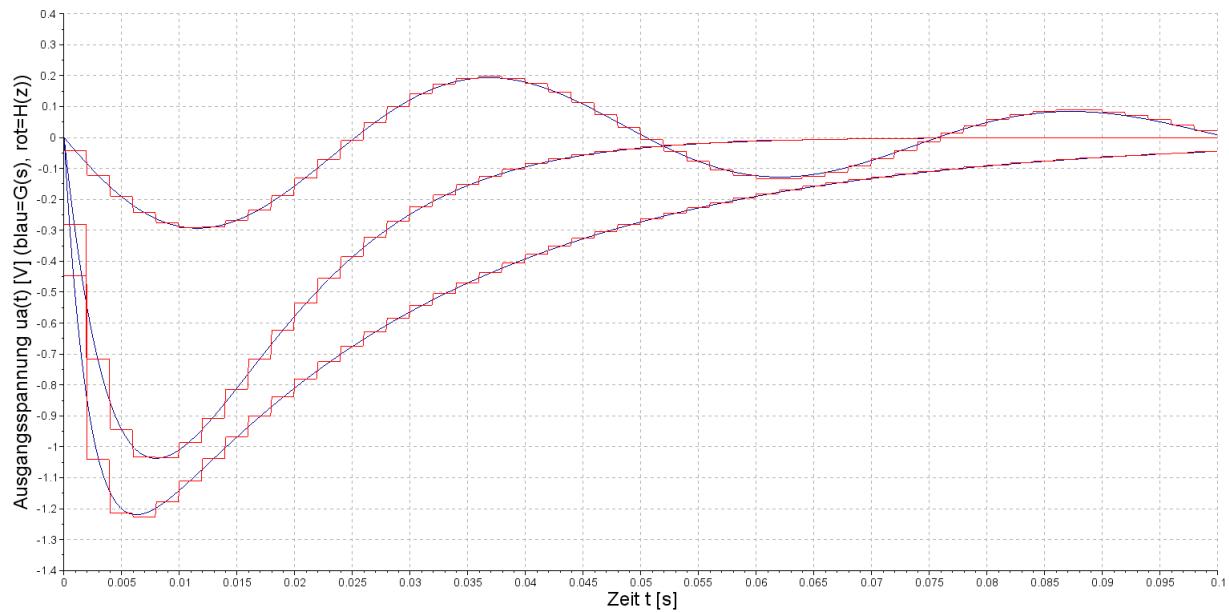


Abbildung 12: Sprungantworten $G(s)$ & $H(z)$ (Trapez) des aktiven Bandpasses 2.Ordnung (Scilab-Simulation)

Es lässt sich nun das erste Mal erkennen, dass die gewählte Abtastfrequenz im Prinzip ausreichend ist. Die Abbildung zeigt aber auch, dass der Anstieg am Beginn relativ steil ist und dies auch ein Grund dafür war, warum die Güte nicht noch weiter verringert wurde, da der starke Anstieg sonst durch den nachgeschalteten RC-Tiefpass beim PWM-Signal irgendwann nicht mehr so gut realisierbar werden würde.

Unteres Oszilloskope:

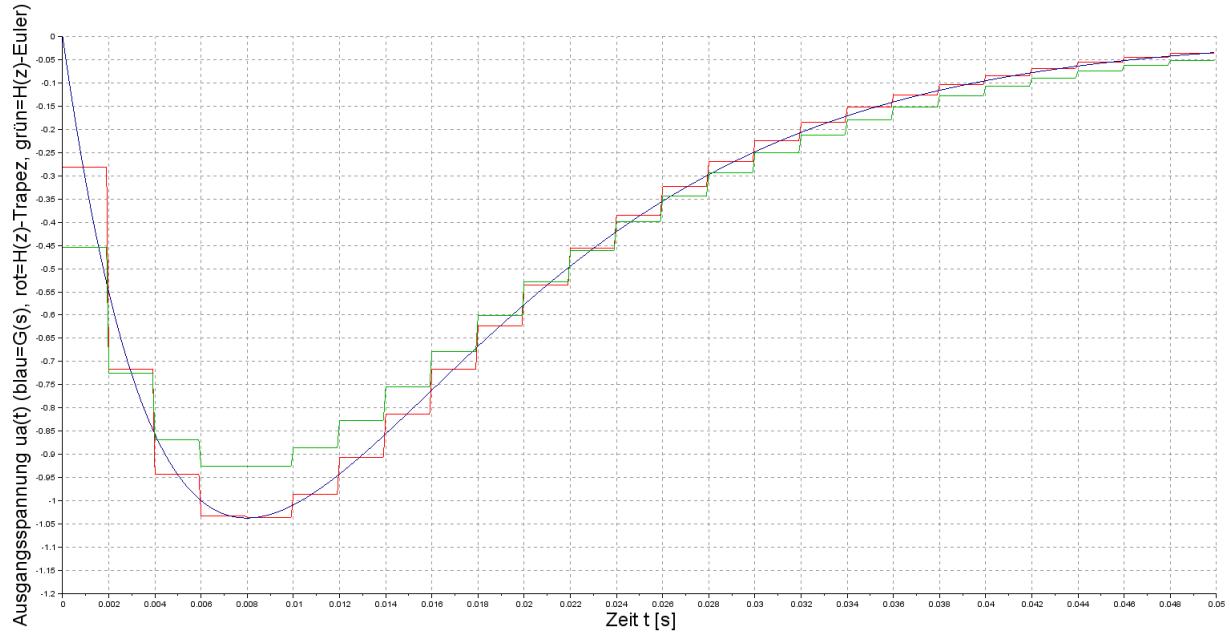


Abbildung 13: Gegenüberstellung der Sprungantworten von der Trapez- & Euler-Näherung (Scilab-Simulation)

Diese Gegenüberstellung der beiden Näherungsverfahren zeigt sehr deutlich, dass das implizite Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler-Verfahren) mit geringer Ordnung hingegen zum Trapez-Verfahren eine größer Abweichung zeigt.

Dies stellt hier zwar einen Nachteil dar, jedoch wird somit durch das Rückwärts-Euler-Verfahren ein zu hohes Überschwingen vermieden.

Nun kann im Prinzip mit dem Schreiben des C-Programmes für den μ C begonnen werden.

2.2.7 C-Programm (Eclipse Juno)

Das erstellte C-Programm dient zur Realisierung des digitalen Filters. Das Programm wurde dabei so entworfen, dass eine beliebige Dämpfung (bzw. auch möglich Güte oder Bandbreite) gewählt werden kann, wobei das folgende Bsp. den aperiodischen Grenzfall und die Trapez-Näherung darstellt. Für Messungen und Aufnahmen wurden dann später dementsprechend die einzelnen Parameter verändert, bzw. die Koeffizienten für die Euler-Näherung statt die der Trapez-Näherung eingegeben.

Allgemeines:

```

1  /* Aktiver_Bandpass_2_Ordnung_mit_Mehrfachgegekopplung_Trapez .c
2   * Erstellungsdatum: 08.04.2015
3   *      Autor: Michael Labenbacher
4   *      Schüler , HTL-BuVA in St.Pölten */
5 //1. "Packages" laden
6 //Bibliothek für den Prozessor laden
7 #include<avr/io.h>
8 //Includedatein für die Funktionen zur Interrupt–Verarbeitung einbinden
9 #include<avr/interrupt.h>
10 //Mathebibliothek laden
11 #include<math.h>
12 #define quadrat(x) ((x)*(x))// Quadrat–Implementierung
13 //2. Interruptroutinen&(Unterprogramme)&(Höherwertige Variablen definieren )
14 #define TA 0.002 // Abtastzeit
15 //Veränderliche definieren:
16 #define k (sqrt(2))
17 #define f_m (20)
18 #define D (1)
19 #define w_m (f_m*2*M_PI)
20 //ADC–Variablen festlegen:
21 uint8_t ADC_result;
22 uint8_t dummy_result;
23 //Ein– und Ausgangswerte von den einzelnen Zyklen festlegen:
24 long double x=0,x_1=0,x_2=0,y=0,y_1=0,y_2=0;
25 //Hilfsvariablen:
26 long double input ,output ;
27 uint8_t out;
28 // Koeffizienten der Differenzengleichung (höherwertig machen!!!)
29 volatile long double A_2,A_1,A_0,B_2,B_1,B_0;
```

Interrupt Service-Routine:

Bei Filtern höherer Ordnung würde es sich empfehlen für die Vorzustände von x & y Arrays (Felder) zu verwenden, jedoch bei 2.Ordnung ist dies nur mehr aufwand umsonst:

```

30 /* Interrupt Service-Routine */
31 ISR(TIMER0_COMPA_vect) {
32
33     PORTB ^= (1<<PB0); // digital output to check interrupt cycle
34
35     ADCSRA |= (1<<ADSC); // ADC-Wandlung starten
36     while (ADCSRA & (1<<ADSC)) {} // Auf Abschluss der Konvertierung warten
37     ADC_result = ADCH; // ADC-Wert einlesen
38
39     input = 2.0*((long double)ADC_result/255 - 0.5);
40     // --> Skalierung auf -1...1
41
42     /* Berechnen von den Vorzuständen von x(k-n) */
43     x_2 = x_1; // Eingangswert vom vorvorigem Zyklus
44     x_1 = x; // Eingangswert vom vorigem Zyklus
45
46     /* Berechnen von den Vorzuständen von y(k-n) */
47     y_2 = y_1; // Ausgangswert vom vorvorigem Zyklus
48     y_1 = y; // Ausgangswert vom vorigem Zyklus
49
50     /* Nun wird der aktuelle Eingangswert in x abgespeichert*/
51     x = input; // Eingangswert vom aktuellen Zyklus
52
53     /* Differentialgleichung vom aktiver Bandpass 2.Ordnung: */
54     y = -(A_0*x + A_1*x_1 + A_2*x_2 + B_1*y_1 + B_2*y_2)/B_0;
55
56     /* Ausgabe des PWM-Signales */
57     output = 0.5*(y+1)*255; // --> Skalierung auf 0...255
58     out = output;
59     OCR1A = out; // Berechneter Wert auf PWM-Signal schreiben
60 }
```

Hauptprogramm:

```

61 int main( void )
62 {
63     // ===== Variablen für G(s) =====
64     static long double a_1 , b_2 , b_1 , b_0 ;
65
66     // ===== Digital IO-Initialisierung: =====
67     DDRB |= (1<<PB0) | (1<<PB1); // PB0 und PB1 als Ausgang fürs PWM-Signal
68
69     // ===== ADC-Initialisierung: =====
70     // ADCSRA-Register (AD Control and Status Register A):
71     // In diesem Register stellt man die Verwendung des ADC ein
72     /* 1. ADEN = ADC Enable bit setzen, zum aktivieren des ADC
73      * 2. ADSPx = Hier wird der resultierende Takt eingestellt (Teilungsfaktor)
74      *       --> bei 16MHz sollte der Teilungsfaktor zwischen 80 und 320
75      *       liegen --> 128 wird eingestellt */
76
77     ADCSRA = (1<<ADEN) | (1<<ADPS2) | (1<<ADPS1) | (1<<ADPS0);
78
79     // ADMUX-Register:
80     // In diesem Register wird der zu messende Kanal
81     // und die Referenzspannung ausgewählt.
82     /* 1.REFSx = Referenzspannung einstellen (auf AVCC)
83      * 2.ADLAR = ADC Left Adjust Result */
84
85     ADMUX = (0<<REFS1) | (1<<REFS0) | (1<<ADLAR);
86
87     /* Nun wird ein Wert eingelesen und wieder verworfen, um so den ADC
88      * "warmlaufen zu lassen", auch "Dummy-Readout" genannt. */
89
90     ADCSRA |= (1<<ADSC);           // ADC-Wandlung
91     while (ADCSRA & (1<<ADSC) ) {} // Auf Abschluss der Konvertierung warten
92     dummy_result = ADCH;          // ADCW lesen, sonst wird das Ergebnis der
93                                // nächsten Wandlung nicht übernommen!

```

```

94
95 // ===== Timer0-Initialisierung : =====
96 // !!!!!!! Dieser Timer dient zur Realisierung der Abtastung !!!!!!!
97 // TCCR0A-Register (Timer/Counter Control Register A):
98 // In diesem Register stellt man unter Anderem die Art des Timer0 ein
99 /* 1. WGM01 = (Waveform Generation Mode) —> CTC-Mode
100 *      Clear Timer on Compare Match
101 *      (Rücksetzen des Timers beim Erreichen des Vergleichwertes) */

102 TCCR0A = (1<<WGM01);

103
104
105 // TCCR0B-Register (Timer/Counter Control Register B):
106 // In diesem Register stellt man unter Anderem den Prescaler ein
107 /* 1. CS0x = (Clock Select)-->Wahl: 256, da: T=(f/256)^-1-->T=16us sind */
108
109 TCCR0B = (1<<CS02);

110
111 // TIMSK0-Register (Timer/Counter Interrupt Mask Register):
112 // In diesem Register stellen wir den Interrupt für A ein
113 /* 1. OCIE0A = (Timer/Counter0 Output Compare Match A Interrupt Enable)
114 * Vergleichswert erreicht ==> Interrupt */

115
116 TIMSK0 = (1<<OCIE0A);

117
118 // OCR0A-Register (Output Compare Register A):
119 // Nun wird der Vergleichswert eingestellt
120 /* 1. OCR0A = 125 heißt t: 125*16us ==> pro 2ms wird ein Interrupt ausgelöst
121 *      = ABTASTZEIT !!! */

122
123 OCR0A = 125;

124
125 // ===== Timer1 Initialisierung : =====
126 // !!!!!!! Dieser Timer dient für die Ausgabe des PWM-Signales !!!!!!!
127 /* TCCR1B-Register (Timer/Counter Control Register B): —> CS10
128 *      (=max. Geschwindigkeit = kein Prescaler)
129 * WGNM: Mode 1 : PWM, Phase Correct, 8-bit WGM10
130 * In der ISR wird der Wert fuer das OCR1A-Register veraendert
131 * (= Vergleichswert zum Umschalten für PWM).
132 * Die Konfiguration (mit _BV(COM1A1)) gibt an, dass der Generator den
133 * Pin OC1A setzt, wenn der Timer auf null ist (BOTTOM) und
134 * den Pin zurücksetzt, sobald er den Wert im OCR1A Register erreicht.
135 * (Der Wert im OCR1A ist der Wert, bei dem der timer null gesetzt wird.)
136 * Das Verhältnis von OCR1B/OCR1A ist der Prozentwert der Zeit,
137 * für die der Pin gesetzt ist. */

138
139 TCCR1A |= _BV(COM1A1) | _BV(WGM10);
140 TCCR1B |= _BV(CS10);

```

```

141
142 // ===== Koeffizienten berechnen: =====
143 // 1. Koeffizienten von G(s) (nur zur Übersichtlichkeit) ermitteln:
144 b_2 = 1/quadrat(w_m);
145 b_1 = 2*D/w_m;
146 b_0 = 1;
147 a_1 = k*b_1;
148
149 // 2. Koeffizienten von G(z) bzw. y(k) ermitteln:
150 A_0 = a_1*2/TA;
151 A_1 = 0;
152 A_2 = -a_1*2/TA;
153 B_0 = 4*b_2/(quadrat(TA))+2*b_1/TA+b_0;
154 B_1 = 2-8*b_2/(quadrat(TA));
155 B_2 = 4*b_2/(quadrat(TA))-2*b_1/TA+b_0;
156
157 sei(); // interrupt enable
158 /* Endlosschleife */
159 while (1){ }
160 }
```

2.2.8 Digitale Filtersimulation (Proteus)

2.2.8.1 Schaltungsentwicklung

Nun kann dieses C-Programm auch mit Hilfe von der Software Proteus auf dessen Funktionalität hin überprüft werden. Die Schaltung Abb. 30 in Proteus für den Arduino selbst befindet sich im Anhang, da diese im Wesentlichen bei allen Projekten gleich bleibt.

Für die Dimensionierung des Tiefpasses, welcher am Ausgang des Portes vom PWM-Signal benötigt wird, kann, einmal aufgezeigt, folgendermaßen vorgegangen werden:

Wir wollen im Prinzip bis zu einer Frequenz von 400 Hz den Filter untersuchen. Somit sollte die gewählte Resonanzfrequenz des RC-Tiefpasses mindestens diese Frequenz betragen. Mit der nachfolgenden Formel und der Wahl des Kondensators C von 68 nF kann der dazugehörige Widerstand berechnet werden.

$$\omega_{R_{TP}} = \frac{1}{RC} \quad \text{mit} \quad f_{R_{TP}} = \frac{1}{2\pi\omega_{R_{TP}}} \quad (48)$$

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot f_{R_{TP}} \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 400\text{ Hz} \cdot 68 \cdot 10^{-9}\text{ F}} = 5\,851\Omega$$

Es wurden nun für die Aufnahmen von Bodediagrammen folgende Werte für die Bauelemente gewählt:

R	C	\Rightarrow
[Ω]	[nF]	[Hz]
4 947	70,35	457 31

Tabelle 2: Bauteilwerte des RC-Tiefpasses am Portausgang zur Aufnahme von Bodediagrammen

, da somit wenig Einfluss des RC-Tiefpasses auf das Verhalten des Bandpasses bei Frequenzen im Bereich von $0 - 400\text{ Hz}$ (Bereich der hier untersucht wird) auftreten.

Für die Aufnahme von den einzelnen Sprungantworten wurde ein größerer Widerstand verwendet, um eine bessere Glättung zu erhalten:

R	C
[Ω]	[nF]
19 100	70,35

Tabelle 3: Bauteilwerte des RC-Tiefpasses am Portausgang zur Aufnahme von Sprungantworten

Die Schaltung zur Simulation in Proteus kann nun z.B. folgendes, wirklich einfaches Bild aufweisen (zusätzlich zum Arduino Abb. 30):

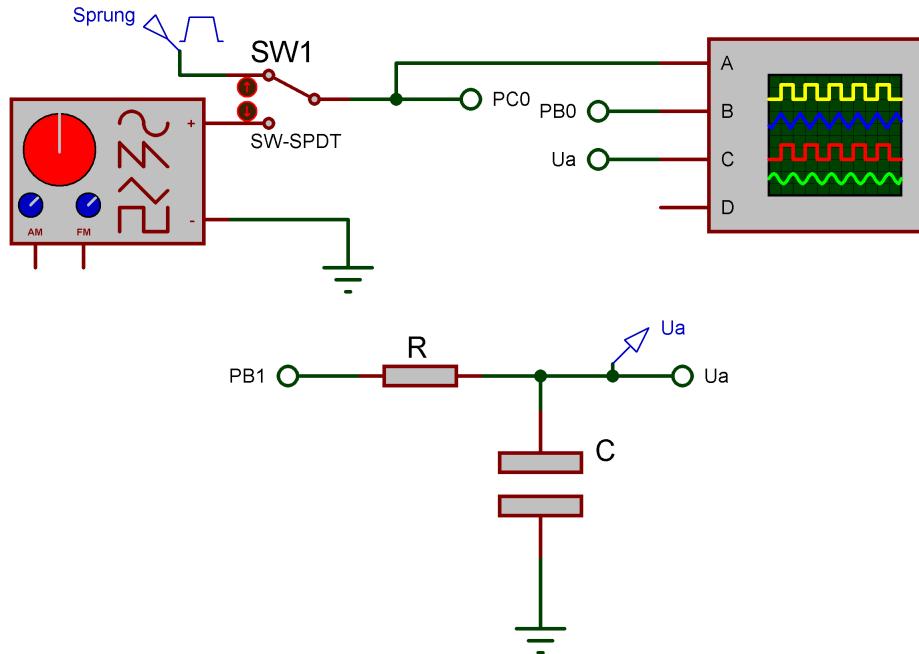


Abbildung 14: Schaltung zur Realisierung des digitalen Filters (Proteus)

Nun können verschiedene Fälle untersucht werden, indem das jeweilige Programm in den μ C geladen wird. Es werden hier nicht wieder alle Aufnahmen mit Proteus simuliert, sondern es wird gleich das Programm in den Mikrokontroller geladen und mit der Realisierung des Digitalen Filters begonnen.

2.2.9 Realisierung (Arduino Uno R3)

2.2.9.1 Schaltungsaufbau

Nun folgt ein Bild, als Anschauungsmaterial, der fertig aufgebauten Schaltung:

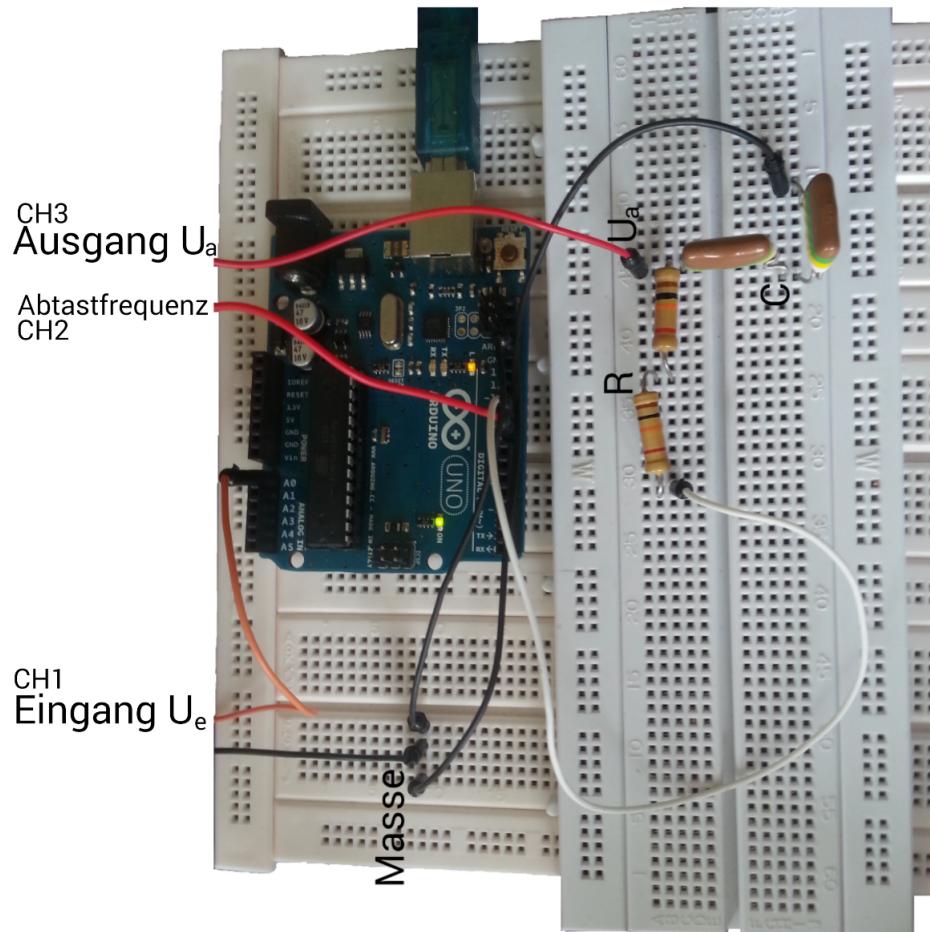


Abbildung 15: Schaltungsaufbau zur Realisierung des digitalen Filters

Nach dem erfolgreichen Aufbau der Schaltung wurde für die Aufnahme von Sprungantworten eine rechteckförmige Eingangsspannung u_e von 0-1 V am Frequenzgenerator mit einer niedrigen Frequenz von $f \approx 10 \text{ Hz}$ eingestellt, so dass alle Ausgleichsvorgänge, bevor der nächste „Sprung“ am Eingang kommt, abgeklungen sind.

2.2.9.2 Gegenüberstellung von Euler-& Trapeznäherung

In diesem Abschnitt wurde in den μC jeweils ein Programm mit folgenden Einstellungen des digitalen Filters hineingeladen und folgende Aufnahme mit dem Oszilloskope O1 konnten gemacht werden:
Trapeznäherung:

$D = 1 \dots \dots \dots$ Dämpfung
 $k = 3 \text{ dB} \dots \dots \dots$ Durchlassverstärkung
 $f_m = 20 \text{ Hz} \dots \dots \dots$ Mittenfrequenz
 $B = 40 \dots \dots \dots$ Bandbreite
 $Q = 0,5 \dots \dots \dots$ Güte

$D = 1 \dots \dots \dots$ Dämpfung
 $k = 3 \text{ dB} \dots \dots \dots$ Durchlassverstärkung
 $f_m = 20 \text{ Hz} \dots \dots \dots$ Mittenfrequenz
 $B = 40 \dots \dots \dots$ Bandbreite
 $Q = 0,5 \dots \dots \dots$ Güte

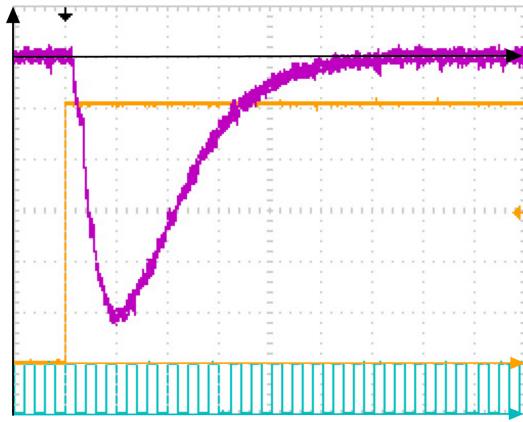


Abbildung 16: Oszilloskopeaufnahme der Sprungantwort mit Trapeznäherung (Messung)

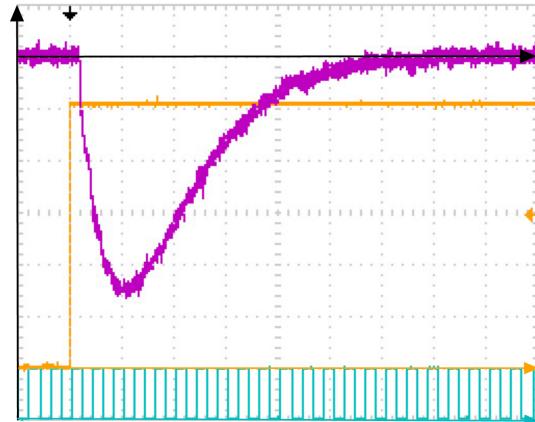


Abbildung 17: Oszilloskopeaufnahme der Sprungantwort mit Euler Näherung (Messung)

$y - \text{Achse} \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - \text{Achse}(n) \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(gelb) CH1
$u_{\text{PWM}}(t) \dots \dots [5 \text{ V}/\text{Div.}]$	(blau) CH2
$u_a(t) \dots \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(lila) CH3
$M \dots \dots [10 \text{ ms}/\text{Div.}]$	horiz. Skalenteilung

$y - \text{Achse} \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - \text{Achse}(n) \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(gelb) CH1
$u_{\text{PWM}}(t) \dots \dots [5 \text{ V}/\text{Div.}]$	(blau) CH2
$u_a(t) \dots \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(lila) CH3
$M \dots \dots [10 \text{ ms}/\text{Div.}]$	horiz. Skalenteilung

Als RC-Tiefpass am Ausgangs-Port wurde ein Kondensator $C = 70,35 \text{ nF}$ und ein Widerstand $R = 19\,100 \Omega$ verwendet. Der Vergleich der beiden Oszilloskopeaufnahmen⁵ zeigt, wie auch im Prinzip schon in der Scilab-Simulation Abb. 13 ersichtlich war, dass die Trapez- im Vergleich zur Euler-Näherung im Wesentlichen ein exakteres Ergebnis liefert.

Es wurde auf die positive Flanke am Eingang getriggert und die Abtastfrequenz (blau) von 500 Hz ($T = 2 \text{ ms}$) ist in den Abbildungen deutlich erkennbar. Mit Hilfe des Oszilloskopes konnte jeweils folgende minimale Ausgangsspannung abgelesen werden: (Berechnung: $u_{a, \text{max}} = -1,04 \text{ V}$)

$$u_{a, \text{max}} = -1,02 \text{ V}$$

$$u_{a, \text{max}} = -0,954 \text{ V}$$

⁵Die x-Achse des Ausgangssignales (schwarz) bezieht sich auf den Wechselanteil, sprich der Gleichanteil von $2,5 \text{ V}$, welcher sich durch das erstellte C-Programm ergibt, wurde in allen Oszilloskopeaufnahme weggelassen, um aussagekräftigere Bilder zu erzielen.

Des Weiteren wurde am Frequenzgenerator FG1 eine sinusförmige Spannung von $0 - 1 \text{ V}$ (bei kleinen & großen Frequenzen wurde diese bei Bedarf auf $4 - 5 \text{ V}$ erhöht, um besser Ergebnisse, auf Grund der Dämpfung, zu erzielen) eingestellt und durch das Verstellen der Frequenz im Bereich von $0 - 200 \text{ Hz}$ und den Formeln 49 & 18 konnten folgende Bodediagramme mit Hilfe der nachfolgenden Messtabelle erstellt werden:

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ, \quad \text{mit } T = \frac{1}{f} \quad (49)$$

f [Hz]	$D = 1$ (Trapez)				$D = 1$ (Euler)			
	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]
1	0,15	-16,48	-270,00	-97,20	0,15	-16,48	-270,00	-97,20
2	0,30	-10,46	-140,00	-100,80	0,30	-10,46	-142,00	-102,24
3	0,42	-7,62	-100,00	-108,00	0,40	-7,96	-100,00	-108,00
4	0,55	-5,16	-78,00	-112,32	0,57	-4,88	-80,00	-115,20
5	0,67	-3,45	-66,00	-118,80	0,65	-3,74	-67,00	-120,60
6	0,78	-2,16	-57,00	-123,12	0,80	-1,94	-58,00	-125,28
7	0,88	-1,11	-51,00	-128,52	0,88	-1,11	-52,00	-131,04
8	0,98	-0,18	-47,00	-135,36	0,96	-0,35	-48,00	-138,24
9	1,06	0,51	-44,00	-142,56	1,04	0,34	-44,50	-144,18
10	1,12	0,98	-41,00	-147,60	1,10	0,83	-42,00	-151,20
12	1,24	1,87	-36,00	-155,52	1,22	1,73	-37,00	-159,84
14	1,34	2,54	-33,00	-166,32	1,32	2,41	-33,00	-166,32
16	1,36	2,67	-30,00	-172,80	1,34	2,54	-30,00	-172,80
18	1,40	2,92	-28,50	-184,68	1,36	2,67	-28,00	-181,44
20	1,40	2,92	-26,00	-187,20	1,36	2,67	-26,00	-187,20
22	1,40	2,92	-24,00	-190,08	1,36	2,67	-24,00	-190,08
24	1,38	2,80	-22,50	-194,40	1,34	2,54	-23,00	-198,72
26	1,36	2,67	-21,50	-201,24	1,34	2,54	-21,50	-201,24
28	1,34	2,54	-20,50	-206,64	1,32	2,41	-20,50	-206,64
30	1,30	2,28	-19,50	-210,60	1,30	2,28	-19,50	-210,60
33	1,24	1,87	-18,20	-216,22	1,22	1,73	-18,00	-213,84
36	1,20	1,58	-17,00	-220,32	1,18	1,44	-17,00	-220,32
40	1,14	1,14	-15,70	-226,08	1,14	1,14	-15,50	-223,20
45	1,02	0,17	-14,20	-230,04	1,02	0,17	-14,20	-230,04
50	0,94	-0,54	-13,00	-234,00	0,94	-0,54	-13,20	-237,60

Weitere Messungen fürs Bodediagramm:

f [Hz]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]
55	0,86	-1,31	-12,20	-241,56	0,85	-1,41	-12,40	-245,52
60	0,78	-2,16	-11,30	-244,08	0,78	-2,16	-11,50	-248,40
65	0,74	-2,62	-10,60	-248,04	0,72	-2,85	-10,80	-252,72
70	0,68	-3,35	-10,00	-252,00	0,66	-3,61	-10,20	-257,04
75	0,64	-3,88	-9,50	-256,50	0,64	-3,88	-9,60	-259,20
80	0,60	-4,44	-9,00	-259,20	0,59	-4,58	-9,20	-264,96
90	0,55	-5,19	-8,10	-262,44	0,54	-5,35	-8,30	-268,92
100	0,52	-5,68	-7,40	-266,40	0,50	-6,02	-7,50	-270,00
110	0,48	-6,38	-6,80	-269,28	0,48	-6,38	-6,90	-273,24
120	0,44	-7,13	-6,30	-272,16	0,42	-7,54	-6,40	-276,48
130	0,42	-7,54	-5,80	-271,44	0,40	-7,96	-5,90	-276,12
140	0,38	-8,40	-5,45	-274,68	0,36	-8,87	-5,50	-277,20
150	0,36	-8,87	-5,10	-275,40	0,32	-9,90	-5,20	-280,80
160	0,34	-9,37	-4,80	-276,48	0,30	-10,46	-4,90	-282,24
170	0,32	-9,90	-4,55	-278,46	0,28	-11,06	-4,60	-281,52
180	0,30	-10,46	-4,30	-278,64	0,26	-11,70	-4,40	-285,12
190	0,27	-11,37	-4,10	-280,44	0,24	-12,40	-4,20	-287,28
200	0,25	-12,04	-3,90	-280,80	0,22	-13,15	-4,00	-288,00

Tabelle 4: Messtabelle zur Bodediagrammerstellung vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-näherung

Nun lässt sich mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogrammes Excel aus dieser Liste von Messungen rasch ein Bodediagramm anfertigen, was schließlich folgende Kurven ergibt.

Bodediagramm:

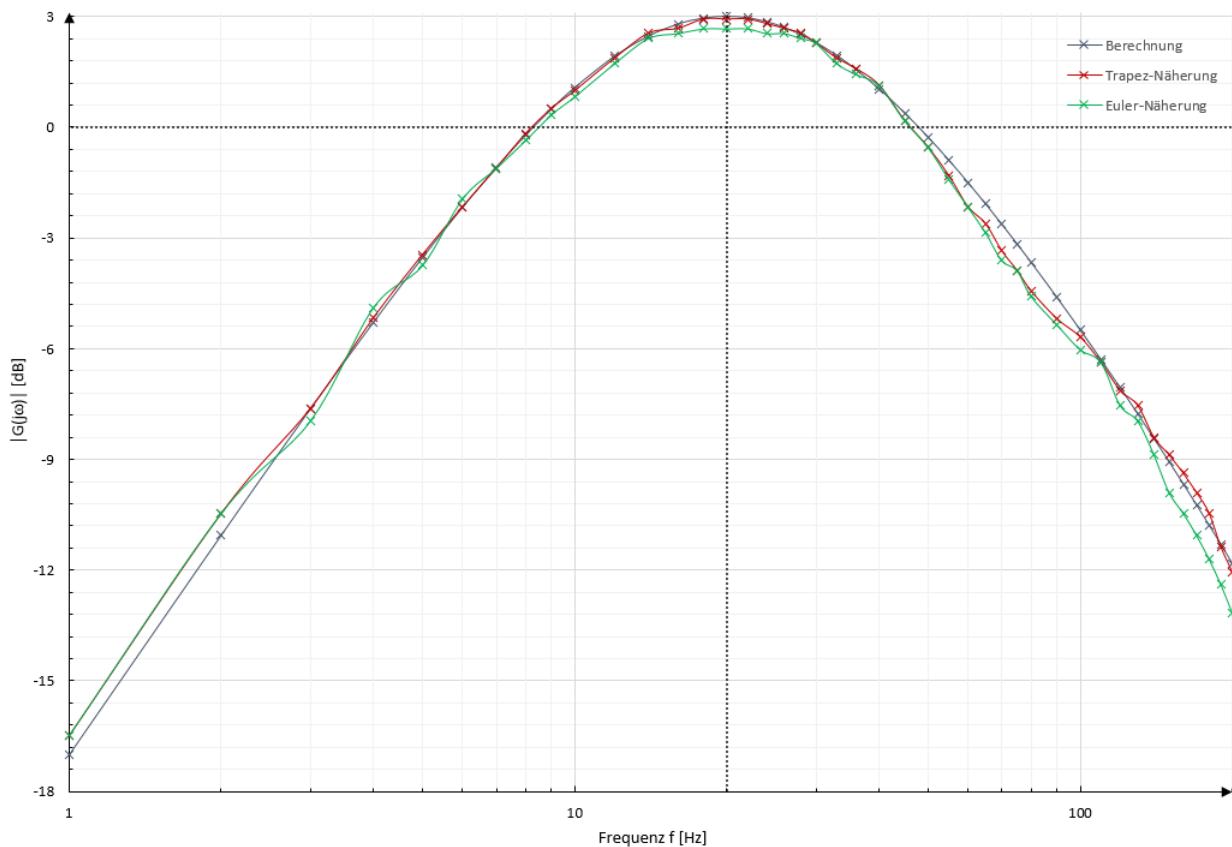


Abbildung 18: Betragsgang vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-Näherung (Messung)

Es wurde bei der Berechnung mittels Excel auch der Tiefpass am Portausgang mit folgenden Formeln beim Betrags- & Phasengang berücksichtigt:

$$\varphi_{TP} = -\arctan(\omega RC) \quad (50)$$

$$|G(j\omega)_{TP}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (51)$$

Es lässt sich lt. der Abb. 18 sagen, dass der digitale Filtertyp Bandpass 2.Ordnung bei beiden Varianten deutlich erkennbar ist und die Durchlassverstärkung bei der Mittenfrequenz von $f_m = 20 \text{ Hz}$ von $k = 3 \text{ dB}$ relativ gut erreicht wird.

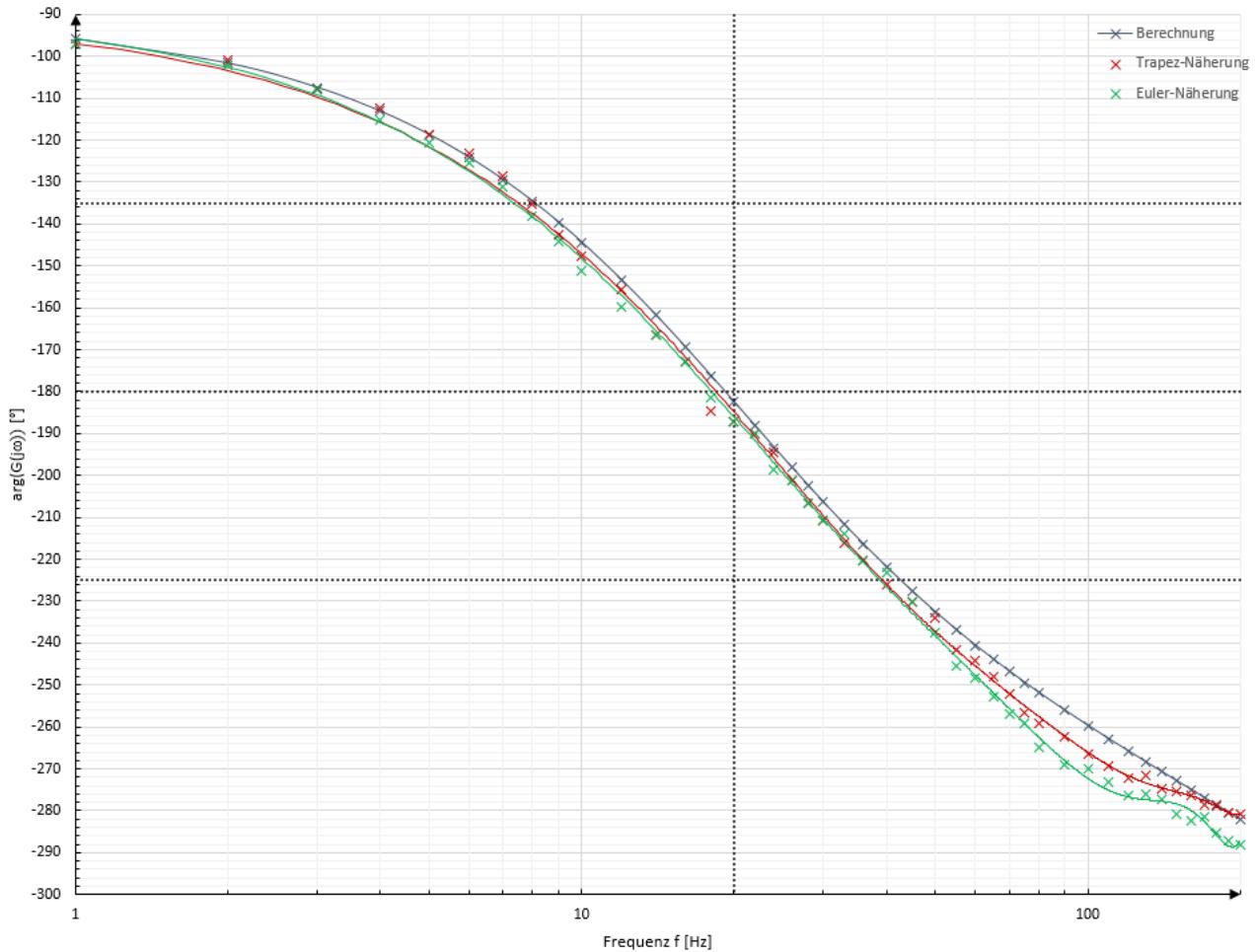


Abbildung 19: Phasengang vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-Näherung (Messung)

Im Phasengang lassen sich bei größeren Frequenzen schon einige Abweichungen erkennen, was einerseits auf die Toleranzen der Bauteilwerte sowie andererseits auf die Genauigkeit des Ablesens vom Oszilloskope rückzuführen ist.

Für die Darstellung der Ortskurve kann nun einfach $G(j\omega)$, von den einzelnen Messwerten, in Real- & Imaginärteil aufgespalten werden:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = G(j\omega) \cdot \cos(\varphi) \quad (52)$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = G(j\omega) \cdot \sin(\varphi) \quad (53)$$

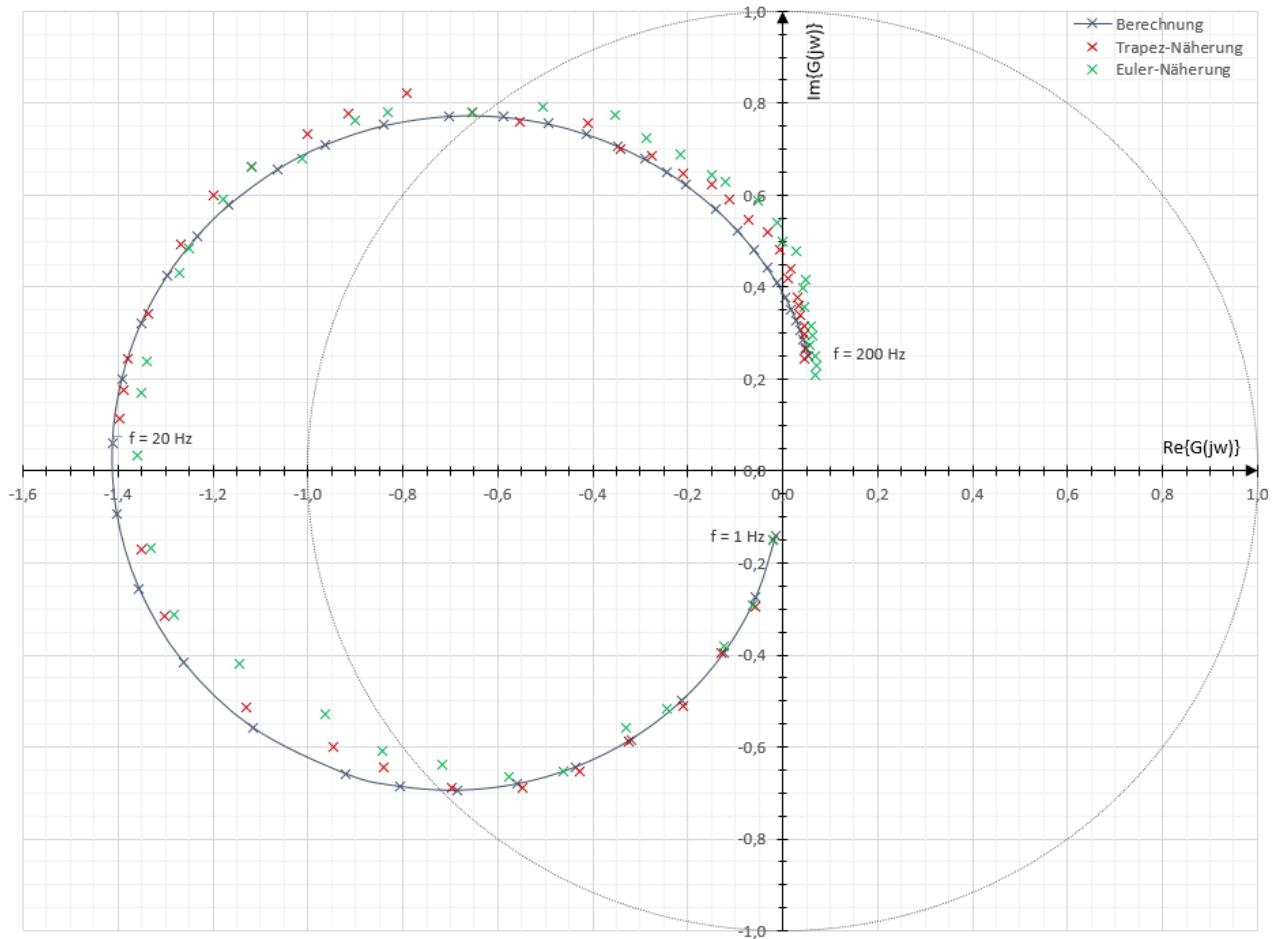


Abbildung 20: Ortskurve vom digitalen Filter nach Euler- & Trapez-Näherung (Messung)

Die entstandenen Abweichungen, welche sich aus Ablesefehlern, Toleranzen, etc. zusammensetzen sind hier am besten erkennbar.

Die Auswirkung des RC-Tiefpasses ist dadurch ersichtlich, dass die Ortskurve kein „sauberer“ Kreis mehr ist.

2.2.9.3 Untersuchung der drei speziellen Fälle

In diesem Abschnitt des Gesamtprojektes wurde der Einfluss der Dämpfung auf das Verhalten des digitalen Bandpasses 2.Ordnung (Trapez) untersucht, indem bei den drei Fällen ($D = 0.125$, $D = 1$, $D = 1.875$) jeweils die Sprungantwort (Einheitssprung) oszillographiert wurde (Fall $D=1$ ist dem Abschnitt 2.2.9.2 zu entnehmen). Der Vorgang ist dem Abschnitt 2.2.9.2 zu entnehmen und es konnten folgende Aufnahmen mit dem Oszilloskope O1 gemacht werden:

Trapeznäherung:

$$\begin{aligned} D &= 0,125 \dots && \text{Dämpfung} \\ k &= 3 \text{ dB} \dots && \text{Durchlassverstärkung} \\ f_m &= 20 \text{ Hz} \dots && \text{Mittenfrequenz} \\ B &= 5 \dots \dots \dots && \text{Bandbreite} \\ Q &= 4 \dots \dots \dots && \text{Güte} \end{aligned}$$

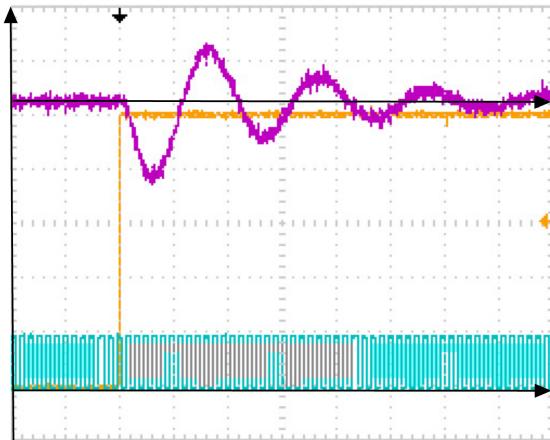


Abbildung 21: Oszilloskopeaufnahme mit
 $D = 0,125$, $k = 3 \text{ dB}$,
 $f_m = 20 \text{ Hz}$ (Trapez)
(Messung)

Trapeznäherung:

$$\begin{aligned} D &= 1,875 \dots && \text{Dämpfung} \\ k &= 3 \text{ dB} \dots && \text{Durchlassverstärkung} \\ f_m &= 20 \text{ Hz} \dots && \text{Mittenfrequenz} \\ B &= 75 \dots \dots \dots && \text{Bandbreite} \\ Q &= 0,26 \dots \dots \dots && \text{Güte} \end{aligned}$$

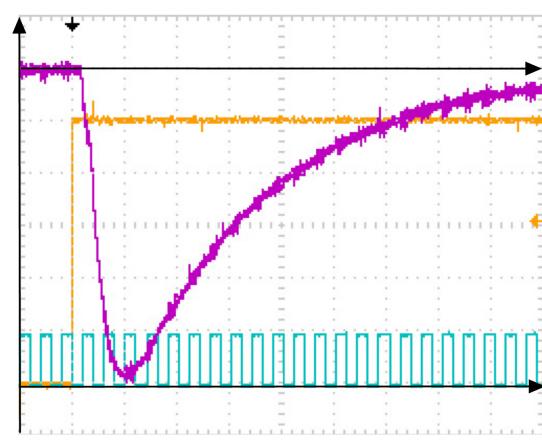


Abbildung 22: Oszilloskopeaufnahme mit
 $D = 1,875$, $k = 3 \text{ dB}$,
 $f_m = 20 \text{ Hz}$ (Trapez)
(Messung)

$y - \text{Achse} \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - \text{Achse}(n) \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(gelb) CH1
$u_{\text{PWM}}(t) \dots [5 \text{ V}/\text{Div.}]$	(blau) CH2
$u_a(t) \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(lila) CH3
$M \dots \dots \dots [25 \text{ ms}/\text{Div.}]$	horiz. Skalenteilung

$y - \text{Achse} \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - \text{Achse}(n) \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(gelb) CH1
$u_{\text{PWM}}(t) \dots [5 \text{ V}/\text{Div.}]$	(blau) CH2
$u_a(t) \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(lila) CH3
$M \dots \dots \dots [10 \text{ ms}/\text{Div.}]$	horiz. Skalenteilung

Folgende Extremwerte konnten aus den beiden Abbildungen abgelesen werden:

$$u_{a, \max} = -0,300 \text{ V} \dots \text{Messung}$$

$$u_{a, \max} = -1,200 \text{ V} \dots \text{Messung}$$

$$u_{a, \max} = -0,295 \text{ V} \dots \text{Berechnung}$$

$$u_{a, \max} = -1,222 \text{ V} \dots \text{Berechnung}$$

Des Weiteren konnte im Schwingfall die Periodendauer der ersten Schwingung gemessen werden, was folgenden Wert lieferte: $T_e = 53 \text{ ms}$, ($f_e = 18,9 \text{ Hz}$)

Nun wurden erneut einzelne Messpunkte zur Aufnahme des Bodediagrammes gemacht, indem am Eingang eine sinusförmige Spannung mit $u_e = 0 - 1 V$ (bei großen und kleinen Frequenzen (also außerhalb des Durchlassbereiches) wurde $u_e = 0 - 5 V$ gewählt) angelegt wurde. Folgende Messungen und die daraus resultierenden Berechnungen zur Darstellung des Betrags- & Phasenganges konnten bei den verschiedenen Frequenzen von $f \approx 0 - 200 Hz$ gemacht werden ($D = 1$ ist dem Abschnitt 2.2.9.2 zu entnehmen):

	$D = 0,125$ (Trapez)				$D = 1,875$ (Trapez)			
f [Hz]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]
1	* ⁶⁾				0,25	-12,04	-280,00	-100,80
2					0,50	-6,02	-150,00	-108,00
3					0,70	-3,10	-110,00	-118,80
4					0,88	-1,11	-90,00	-129,60
5					1,00	0,00	-75,00	-135,00
6					1,10	0,83	-65,00	-140,40
7	0,15	-16,48	-38,00	-95,76	1,16	1,29	-58,00	-146,16
8	0,18	-14,89	-34,00	-97,92	1,22	1,73	-52,00	-149,76
9	0,20	-13,98	-32,00	-103,68	1,28	2,14	-48,00	-155,52
10	0,22	-13,15	-28,00	-100,80	1,30	2,28	-45,00	-162,00
12	0,32	-9,90	-24,00	-103,68	1,35	2,61	-38,00	-164,16
14	0,45	-6,94	-22,00	-110,88	1,38	2,80	-34,00	-171,36
16	0,70	-3,10	-21,00	-120,96	1,40	2,92	-31,00	-178,56
18	1,10	0,83	-21,00	-136,08	1,40	2,92	-28,00	-181,44
20	1,40	2,92	-27,50	-180,00	1,40	2,92	-25,50	-183,60
22	1,10	0,83	-29,00	-229,68	1,40	2,92	-23,50	-186,12
24	0,80	-1,94	-28,00	-241,92	1,40	2,92	-22,00	-190,08
26	0,60	-4,44	-26,50	-248,04	1,40	2,92	-20,50	-191,88
28	0,50	-6,02	-25,00	-252,00	1,40	2,92	-19,60	-197,57
30	0,40	-7,96	-24,00	-259,20	1,38	2,80	-18,40	-198,72
33	0,32	-9,90	-22,00	-261,36	1,36	2,67	-17,20	-204,34

⁶Messungen in diesem Bereich waren durch die starke Dämpfung nicht möglich, da die Eingangsspannung nicht größer als 5 V sein darf.

Weitere Messungen:

f [Hz]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]
36	0,28	-11,06	-20,50	-265,68	1,35	2,61	-16,00	-207,36
40	0,22	-13,15	-18,50	-266,40	1,30	2,28	-14,50	-208,80
45	0,18	-14,89	-16,80	-272,16	1,28	2,14	-13,00	-210,60
50	0,16	-15,92	-15,20	-273,60	1,22	1,73	-12,00	-216,00
55	0,15	-16,48	-14,00	-277,20	1,18	1,44	-11,20	-221,76
60					1,14	1,14	-10,50	-226,80
65					1,08	0,67	-10,00	-234,00
70					1,05	0,42	-9,20	-231,84
75					1,00	0,00	-8,80	-237,60
80					0,96	-0,35	-8,30	-239,04
90					0,90	-0,92	-7,50	-243,00
100					0,84	-1,51	-7,00	-252,00
110					0,75	-2,50	-6,50	-257,40
120					0,70	-3,10	-6,00	-259,20
130					0,67	-3,48	-5,60	-262,08
140					0,65	-3,74	-5,20	-262,08
150					0,60	-4,44	-5,00	-270,00
160					0,58	-4,73	-4,70	-270,72
170					0,55	-5,19	-4,50	-275,40
180					0,51	-5,85	-4,30	-278,64
190					0,48	-6,38	-4,05	-277,02
200					0,46	-6,74	-3,85	-277,20

Tabelle 5: Messtabelle zur Bodediagrammerstellung vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen

Die nachfolgende graphische Darstellung des Bodediagrammes gibt nun wesentlich mehr Übersicht über die Messwerte.

Bodediagramm:

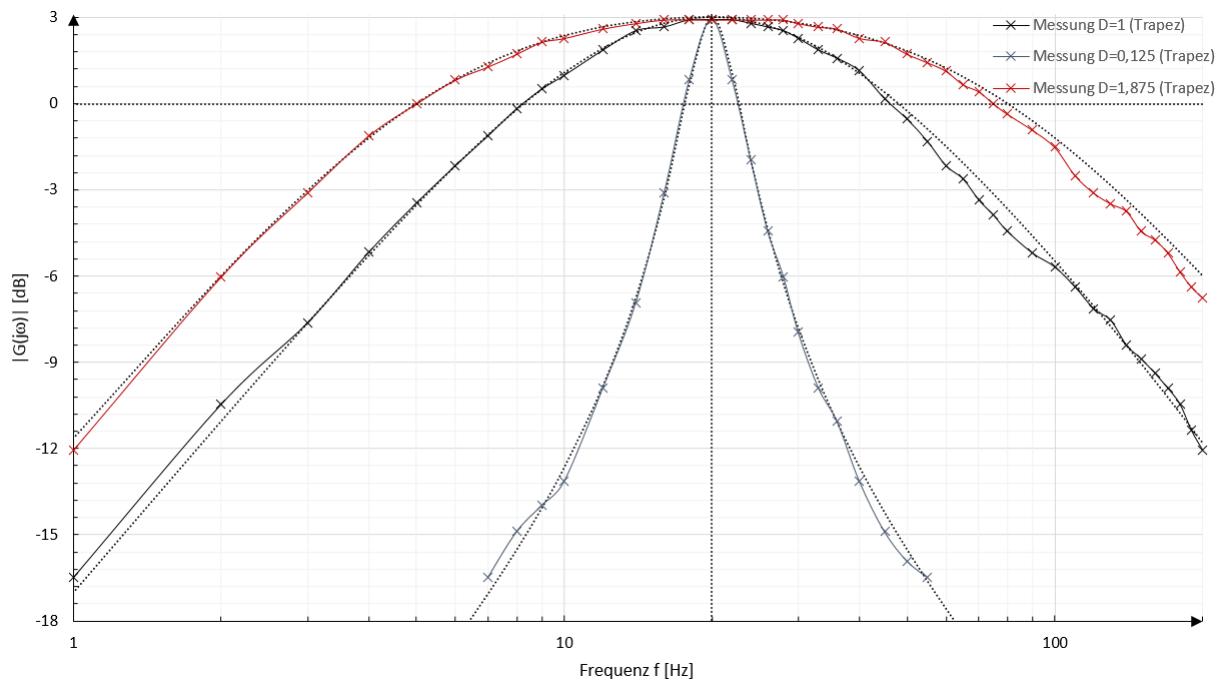


Abbildung 23: Betragsgang vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen (Messung)

Diese Abbildung bestätigt im Wesentlichen, dass die Güte eines digitalen Filters im Prinzip keinen Einfluss auf die Genauigkeit des Betragsverlaufes nimmt und bei den berechneten (strichliert) Verläufen wurde wieder der Tiefpass am Portausgang dementsprechend berücksichtigt, was aber im Prinzip nur beim Phasenverlauf wichtig ist.

Im Durchlassbereich sind die Abweichungen zu den Rechenwerten vernachlässigbar klein und ergeben sich hauptsächlich durch diverse Toleranzen. Nennenswerte Abweichungen von max. $\approx 5\%$ sind außerhalb des Durchlassbereiches durch Ablesegenauigkeiten vorhanden.

Bei allen Verläufen wurde eine Durchlassverstärkung $k = 3 \text{ dB} \pm 1\%$ erreicht sowie auch eine Mittelfrequenz von $f_m = 20 \text{ Hz}$.

Phasengänge:

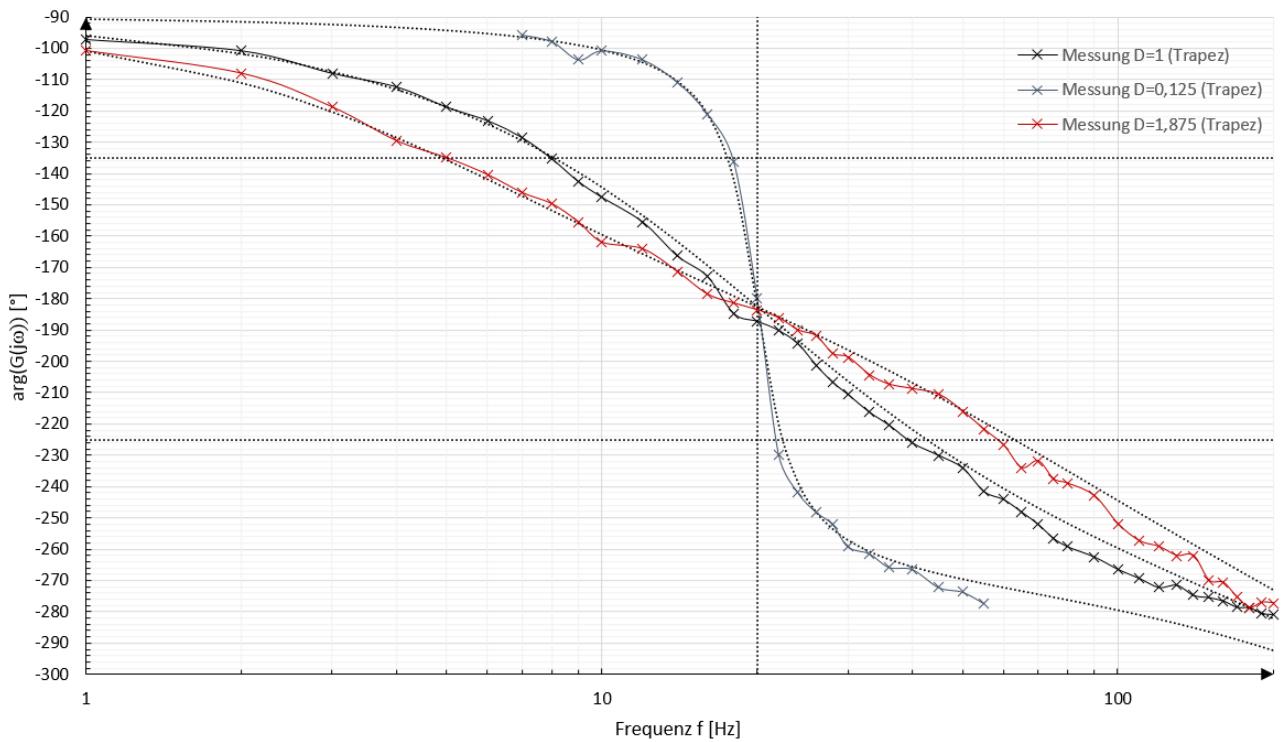


Abbildung 24: Phasengang vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen (Messung)

Durch die steigende Dämpfung lässt sich deutlich der immer linearer werdende Übergang der Phasedrehung erkennen. Die Abbildung 24 bestätigt wieder einmal, dass ein solcher digitaler Filter relativ genau arbeitet und im Prinzip nur sehr wenige Abweichungen von (max.) $\approx 5\%$ vorliegen. (im gesuchten Frequenzbereich)

Bei allen Varianten zeigte sich, dass die Phasendrehung bei der Mittenfrequenz $f_m = 20 \text{ Hz}$ ca. 180° beträgt und zwischen der unteren und oberen Grenzfrequenz $f_{G_L} \& f_{H_L}$ ist jeweils die stärkste Phasendrehung zu sehen.

Die Ortskurven der einzelnen Messungen lassen sich mit Hilfe der Formeln 53 & 52 ermitteln und liefert folgendes Ergebnis:

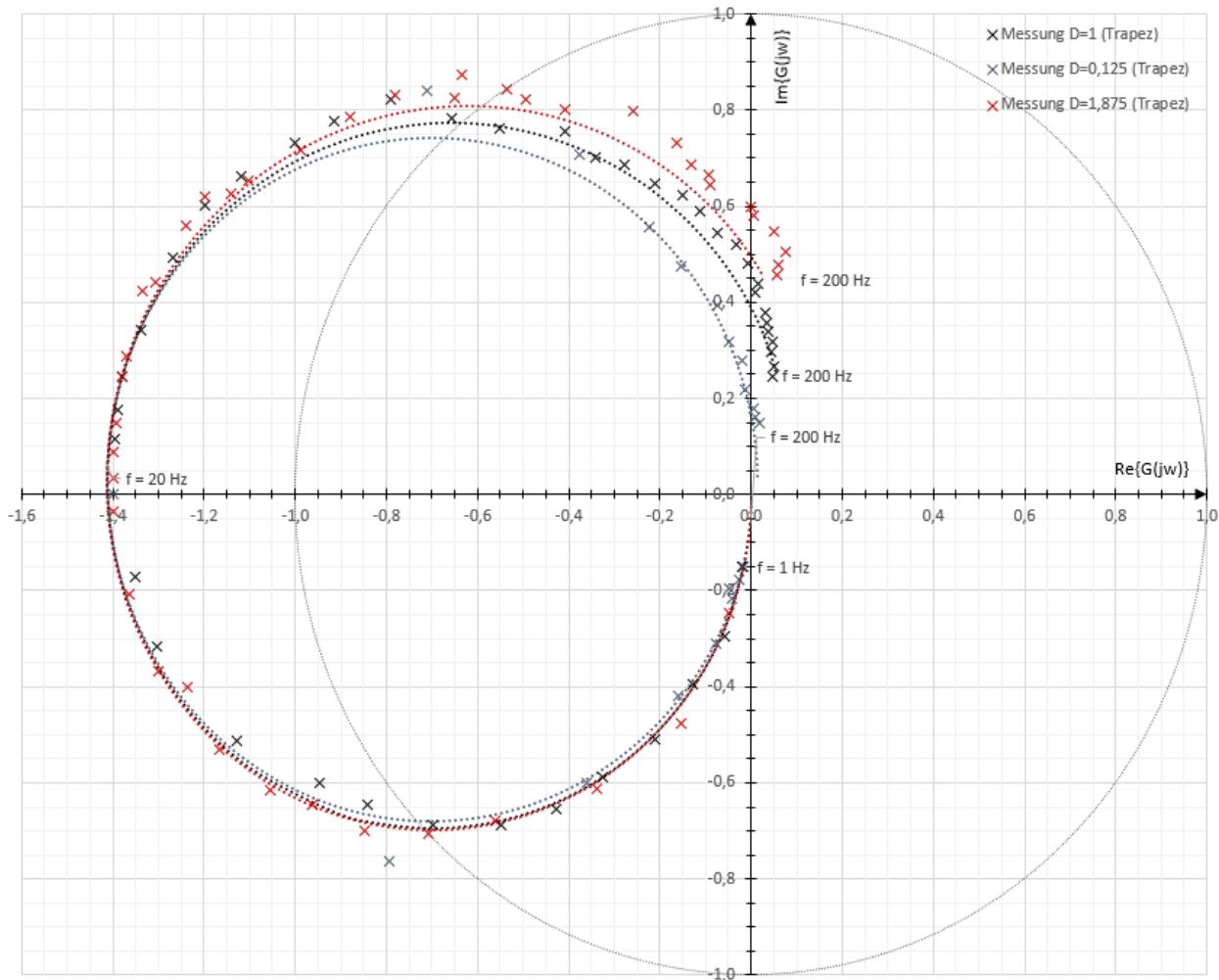


Abbildung 25: Ortskurve vom digitalen Filter bei unterschiedlichen Dämpfungen (Messung)

In dieser Darstellung von $G(j\omega)$ sind die Abweichungen zu den Rechenwerten wieder am besten erkennbar und es lässt sich feststellen, dass bei hoher Güte des Bandpasses der nachgeschaltete Tiefpass am Port-Ausgang weniger Einfluss hat als bei hoher Dämpfung, da die Phasendrehung viel steiler erfolgt und der Betragsgang flacher.

2.2.9.4 Analyse der einzelnen Eigenschaften

Die letzte Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen, ob das Verändern der Durchlassverstärkung k , sowie der Mittenfrequenz f_m auch tatsächlich so funktioniert wie erwartet.

Es konnte folgende Sprungantwort nach dem Verändern der Parameter aufgenommen werden:

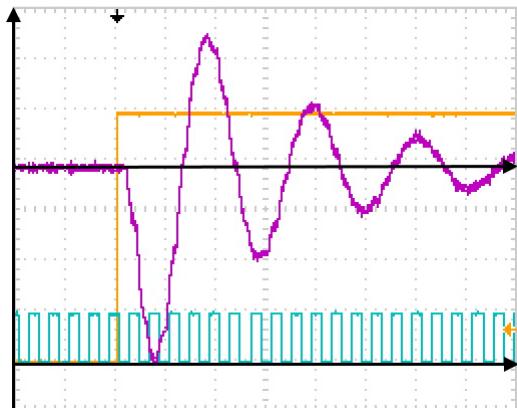


Abbildung 26: Oszilloskopeaufnahme
 mit $D = 0,125$,
 $k = 6 \text{ dB}$, $f_m = 50 \text{ Hz}$
 (Trapez) (Messung)

Trapeznäherung:

$D = 0, 125 \dots$ Dämpfung

$k = 6 \text{ dB} \dots$ Durchlassverstärkung

$f_m = 50 \text{ Hz}$. . Mittenfrequenz

$B = 12.5 \dots$ Bandbreite

$Q = 4 \dots$ Güte

$y - Achse$	$u(t)$
$x - Achse(n)$	t
$u_e(t) \dots$	[200 mV/Div.]
$u_{\text{PWM}}(t)$	[5 V/Div.]
$u_a(t) \dots$	[100 mV/Div.]
M	[10 ms/Div.]
	horiz. Skalenteilung

Es wurde bei dieser Aufnahme der Kondensatorwert von $70,35\text{ nF}$ auf $135,74\text{ nF}$ (ca. doppelt so groß) erhöht, um eine bessere Glättung des Signals auf Kosten der Dämpfung zu erzielen.

Die Änderung der Mittenfrequenz f_m von 20 Hz auf 50 Hz lässt sich in der Abb. 26 dadurch erkennen, dass das System „schneller“ schwingt, sprich die Eigenperiodendauer kleiner ist.

Die Periodendauer der ersten Schwingung betrug laut Messung mit dem Oszilloskope:

$$T_e = 23\,ms \quad \Rightarrow f_e = 43,5\,Hz$$

Das Verändern der Durchlassverstärkung auf $k = 6 \text{ dB}$ ist durch den erreichten Maximalwert der Ausgangsspannung ersichtlich, welcher im Gegensatz zu $k = 3 \text{ dB}$ nun um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist:

$u_{\text{a, max}} \equiv -0,394 \text{ V}$... Messung

$u_{a,\max} = -0,412\text{ V}$... Berechnung

Die Abweichung lässt sich durch den größeren Kondensator am Portausgang, welcher für Dämpfung sorgt, erklären.

Schließlich noch die Messwerte für das Bodediagramm welche durch Anlegen von sinusförmigen Spannungen am Eingang mit unterschiedlicher Frequenzen von $16 - 200 \text{ Hz}$ erfasst werden konnten:

f [Hz]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]
16	0,18	-14,89	-16,50	-95,04
18	0,22	-13,15	-15,00	-97,20
20	0,25	-12,04	-13,50	-97,20
22	0,28	-11,06	-12,50	-99,00
24	0,30	-10,46	-11,50	-99,36
26	0,35	-9,12	-11,00	-102,96
28	0,40	-7,96	-10,00	-100,80
30	0,45	-6,94	-9,50	-102,60
33	0,55	-5,19	-9,00	-106,92
36	0,70	-3,10	-8,50	-110,16
40	0,98	-0,18	-8,50	-122,40
45	1,52	3,64	-9,00	-145,80
50	2,00	6,02	-10,00	-180,00
55	1,60	4,08	-11,20	-221,76
60	1,12	0,98	-11,30	-244,08
65	0,86	-1,31	-10,80	-252,72
70	0,68	-3,35	-10,20	-257,04
75	0,55	-5,19	-9,70	-261,90
80	0,48	-6,38	-9,20	-264,96
90	0,38	-8,40	-8,30	-268,92
100	0,31	-10,17	-7,60	-273,60

Schon in der Tabelle kann man wieder ablesen, dass bei steigender Frequenz die Phasenverschiebung zwischen dem Eingangs- & Ausgangssignal „zunimmt“.

Weitere Messwerte:

f [Hz]	$G(j\omega)$ [—]	$G(j\omega)$ [dB]	Δt [ms]	φ [°]
110	0,27	-11,37	-7,00	-277,20
120	0,24	-12,40	-6,40	-276,48
130	0,20	-13,98	-6,00	-280,80
140	0,18	-14,89	-5,60	-282,24
150	0,17	-15,39	-5,30	-286,20
160	0,16	-15,92	-5,00	-288,00
170	0,15	-16,48	-4,75	-290,70
180	0,14	-17,08	-4,50	-291,60
190	0,13	-17,72	-4,30	-294,12
200	0,12	-18,42	-4,10	-295,20

Tabelle 6: Messtabelle zur Bodediagrammerstellung vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften

Die Phasenverschiebung änderte sich zusammenfassend im Bereich von 16 Hz bis 200 Hz um $\approx 200^\circ$.

Bodediagramm:

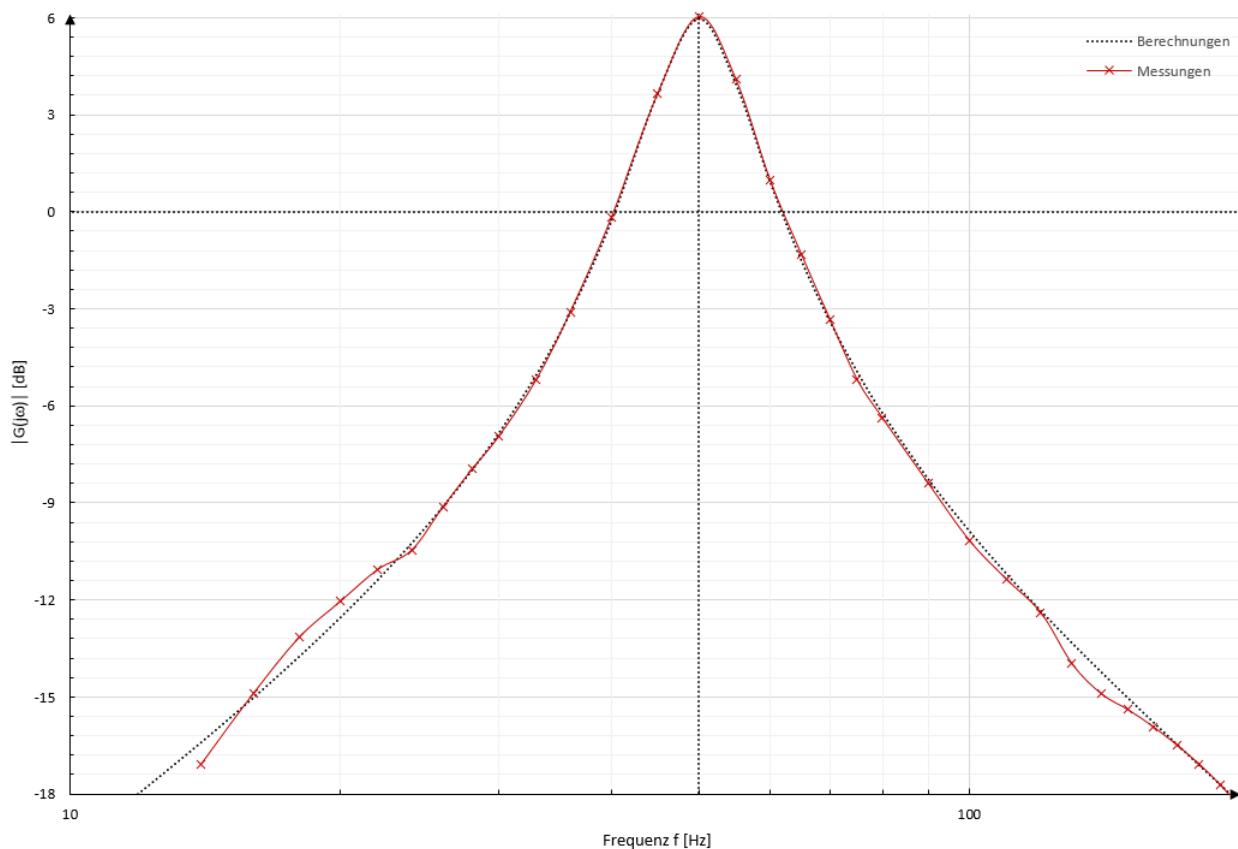


Abbildung 27: Betragsgang vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften (Messung)

Wie gewünscht beträgt die Durchlassverstärkung bei der Mittenfrequenz 6 dB und die gewünschte Bandbreite von $\approx 12,5$ wurde ebenfalls erreicht.

Das Verhalten des Systems ist im Prinzip gleich dem des 3 dB-Bandpasses mit $f_m = 20 \text{ Hz}$.

Im Durchlassbereich sind die Abweichungen unbedeutend, hingegen ergeben sich bei sehr kleinen bzw. großen Frequenzen kleinere, tolerierbare Ablese-, Mess-,...-fehler.

Phasengang:

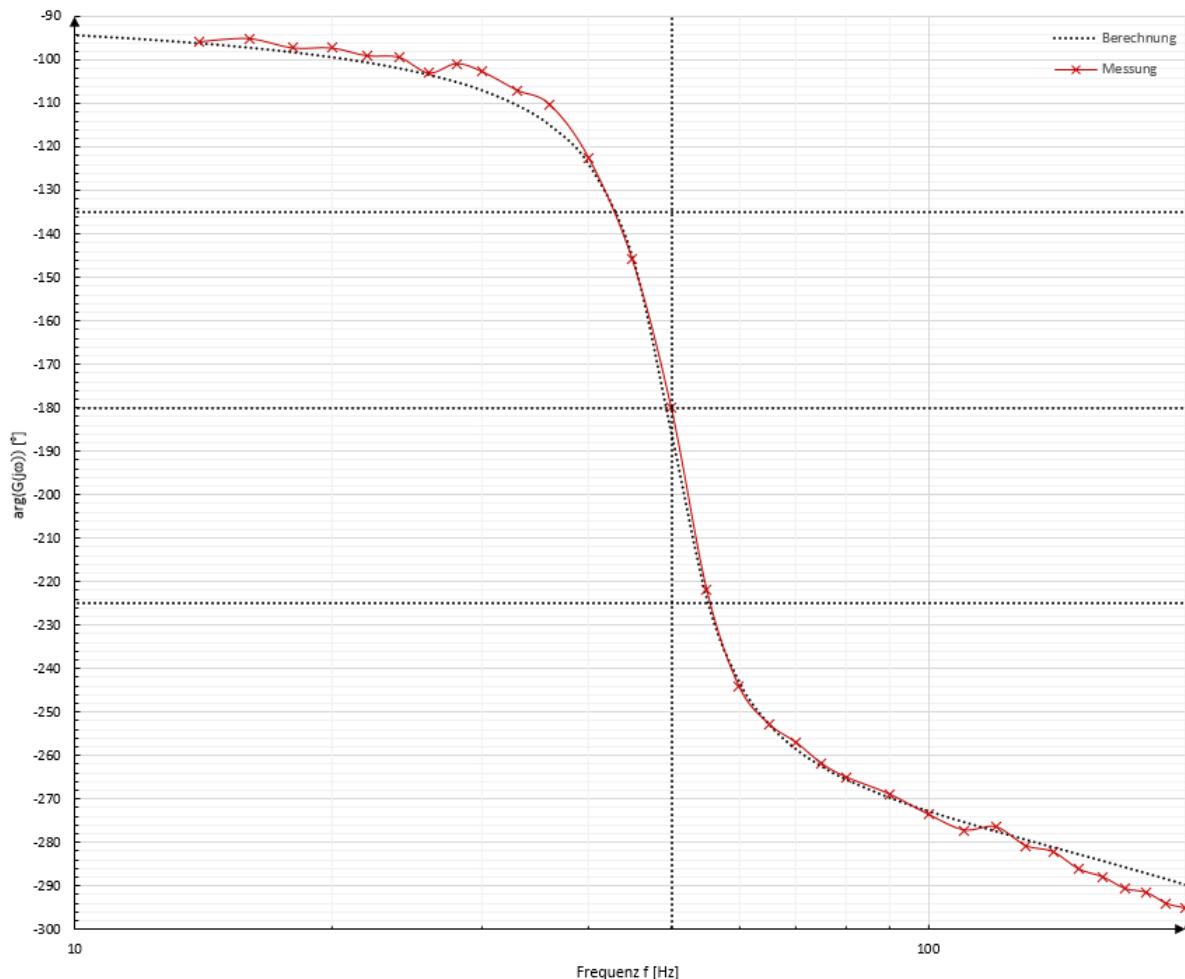


Abbildung 28: Phasengang vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften (Messung)

Das Verhalten des Phasenganges ist ebenfalls identisch mit dem des 3 dB-Bandpasses mit $f_m = 20 \text{ Hz}$ mit der Ausnahme, dass die Mittenfrequenz, wie eingestellt, bei 50 Hz liegt.

Die dazugehörige Ortskurve zeigt nun folgenden Verlauf:

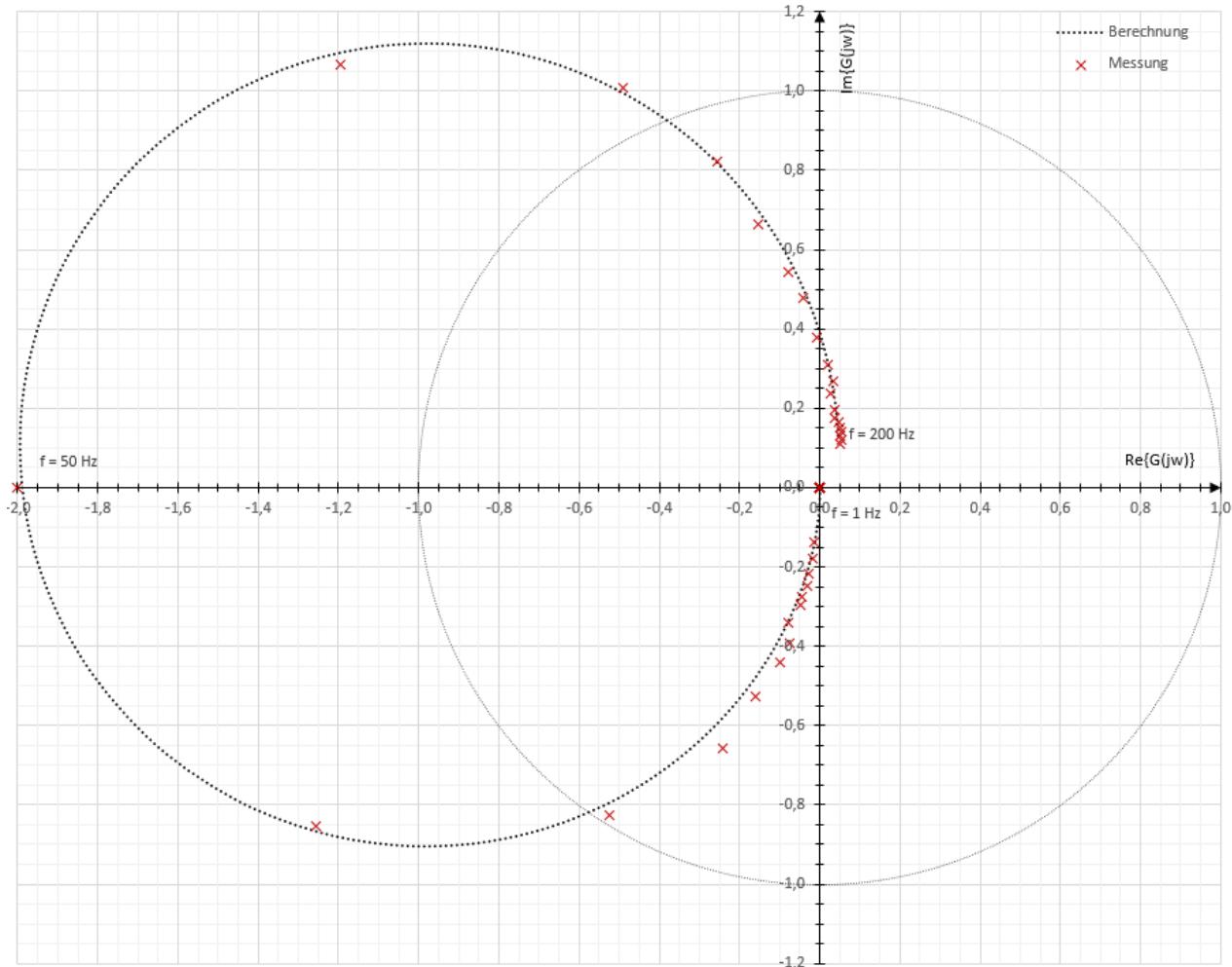


Abbildung 29: Ortskurve vom digitalen Filter bei veränderten Eigenschaften (Messung)

Die Ortskurve zeigt wieder die Darstellung des Real- & Imaginärteiles von der Übertragungsfunktion $G(j\omega)$ in Abhängigkeit des Parameters ω , wobei wieder die Messwerte sehr genau mit den Rechenwerten übereinstimmen, was in der Abb. 29 ersichtlich ist.

Man kann daraus feststellen, dass bei höherer Durchlassverstärkung die Abweichungen zu den Rechenwerten deutlich geringer sind als bei niedriger, was sich dadurch erklären lässt, dass bei höheren Spannungen weniger Rundungs- & Messfehler auftreten bzw. diese unbedeutender werden.

3 Resümee

Durch das Projekt konnte man feststellen, dass sich von einer analogen Schaltung in wenigen Schritten eine digitale Realisierung entwerfen lässt.

Es zeigte sich, dass sich bei der digitalen Lösung die einzelnen Parameter, wie Mittenfrequenz, Dämpfung, Bandbreite, Güte, Verstärkung, ..., im Gegenzug zur analogen leicht ändern lassen. Außerdem ist man nicht von festen Bauteilwerten abhängig, sondern man kann im Prinzip alle Werte, welche sonst nicht zur Verfügung stehen würden, einstellen, um so die Eigenschaften den gewünschten Anforderungen anzupassen.

Eine Änderung beim analogen Filter, wäre nicht nur aufwendig, sondern oft auch nicht realisierbar.

Beim Projekt wurde festgestellt, dass auch dem digitalen Filter Grenzen gesetzt sind, nämlich dann, wenn zB. die Frequenz oder die Spannung des Eingangssignales zu hoch werden. Auch eine negative Eingangsspannung ist schon etwas aufwendiger zu Verarbeiten.

In diesem Projekt wurde auch versucht, aber nicht dokumentiert, eine höhere Frequenz von zB. 1 kHz einzulesen, was sofort zu Fehlverhalten des Systems führte. Dies lässt sich in erster Linie auf die Rechenleistung des Arduino Uno R3 zurückführen, welcher die Signale nicht mehr schnell genug verarbeiten kann und auf die gewählte Abtastfrequenz.

Des Weiteren wäre ein digitaler-aktiver Bandpass höherer Ordnung mit nur wenigen Programmierschritten leicht realisierbar, da es sich im Prinzip nur um eine Multiplikation der Übertragungsfunktion handelt.

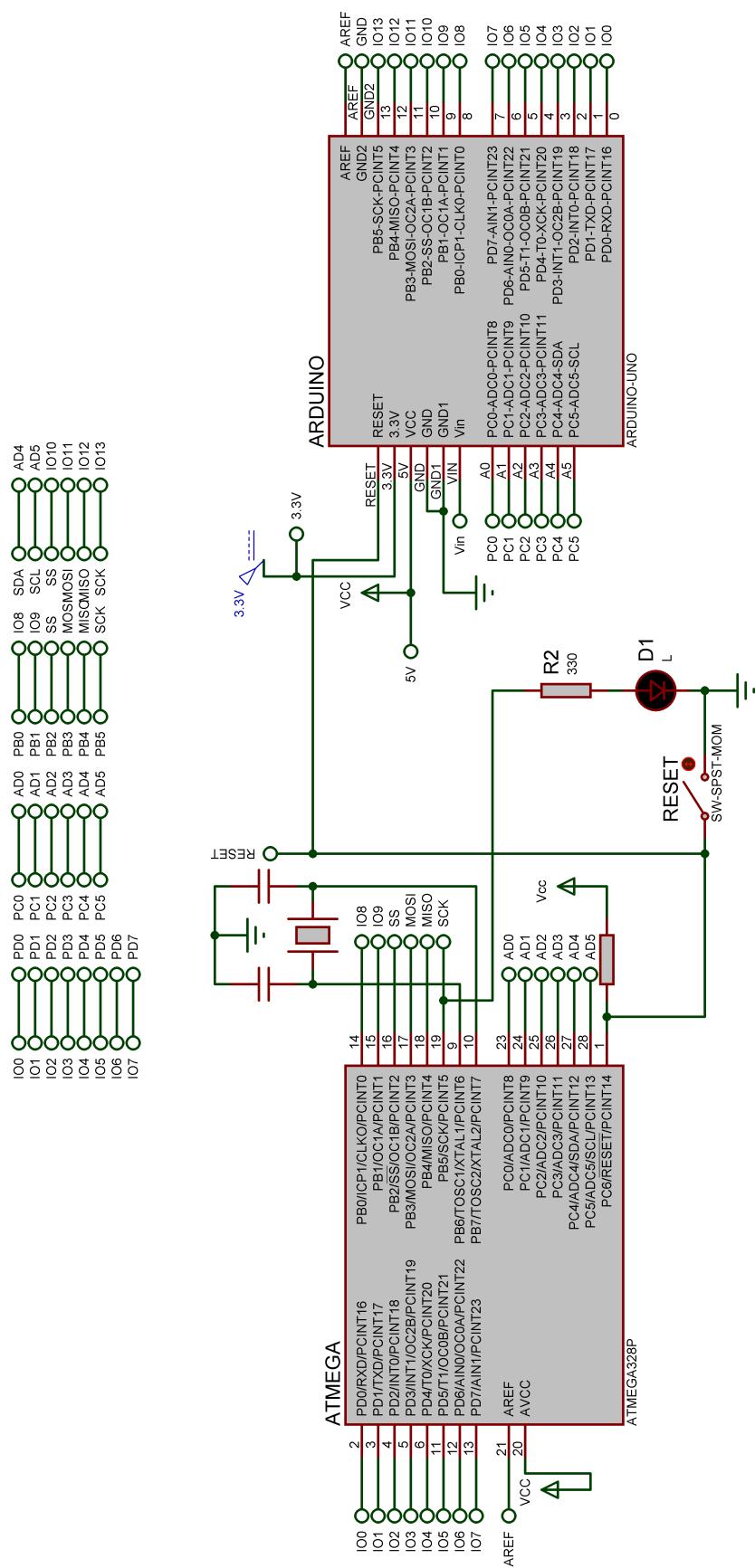
Auch andere Filtertypen sind leicht und sehr rasch, durch Ändern der einzelnen Filterkoeffizienten, realisierbar.

4 Anhang

Die zugehörigen Datenblätter zum verwendeten Arduino Uno R3 sind aus den Unterrichtsunterlagen zu entnehmen und werden hier auf Grund des Datenumfangs nicht aufgelistet, können aber zB. auf folgender Webseite heruntergeladen werden (Stand 2015):

<http://www.atmel.com/images/doc8161.pdf>

Im Anschluss noch die Simulationsschaltung für den Arduino in Proteus, um den digitalen Filter auf Funktionalität hin überprüfen zu können.



Literatur- und Quellenverzeichnis

- [1] Wilhelm Haager: Regelungstechnik, © Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Wien 2007,
2. Auflage, Nachdruck 2014 (2,12)