



HTBLuVA St. Pölten

Höhere Abteilung Elektrotechnik

3100 St. Pölten, Waldstrasse 3 Tel: 02742-75051-300
Homepage: <http://et.htlstp.ac.at> E-Mail: et@htlstp.ac.at



Titel des Projektes
SPRUNGANTWORTEN

Mitglieder:

LABENBACHER MICHAEL

KIENINGER DOMINIK

IBRAHIM IBRAGIMOV

Projektort: HTBLuVA in St. Pölten

Projektdatum: 16. März 2015

Projektnummer: 17

Projektgruppe: 3

Unterrichtsgegenstand: Laboratorium

Jahrgang/Klasse: 2014/15 4AHET

Lehrer: Dipl.-Ing. Dr. Peter Zaniat

Protokollführer	Unterschriften	Note
Labenbacher		

Inhaltsverzeichnis

1 Verwendete Geräte & Betriebsmittel	4
2 Sprungantworten	5
2.1 Allgemeines	5
2.2 passives, nicht invertierendes PT1-Glied	6
2.2.1 Aufgabenstellungen	6
2.2.2 Schaltungsentwicklung	7
2.2.3 Berechnungen & Dimensionierung	8
2.2.4 Messvorgang & Auswertung	12
2.3 aktives, invertierendes PT1-Glied	13
2.3.1 Aufgabenstellungen	13
2.3.2 Schaltungsentwicklung	13
2.3.3 Berechnungen & Dimensionierung	14
2.3.4 Messvorgang & Auswertung	18
2.4 aktives, invertierendes PDT1-Glied	19
2.4.1 Aufgabenstellungen	19
2.4.2 Schaltungsentwicklung	19
2.4.3 Berechnungen & Dimensionierung	20
2.4.4 Messvorgang & Auswertung	23
2.5 aktives, nicht invertierendes PDT1-Glied	24
2.5.1 Aufgabenstellungen	24
2.5.2 Schaltungsentwicklung	24
2.5.3 Berechnungen & Dimensionierung	25
2.5.4 Messvorgang & Auswertung	28
2.6 aktives, invertierendes PI-Glied	29
2.6.1 Aufgabenstellungen	29
2.6.2 Schaltungsentwicklung	29
2.6.3 Berechnungen & Dimensionierung	30
2.6.4 Messvorgang & Auswertung	32
2.7 passives, nicht invertierendes PT2-Glied	33
2.7.1 Aufgabenstellungen	33
2.7.2 Schaltungsentwicklung	33
2.7.3 Berechnungen & Dimensionierung	34
2.7.4 Messvorgang & Auswertung	37
2.8 passives, nicht invertierendes PT4-Glied	41
2.8.1 Aufgabenstellungen	41
2.8.2 Schaltungsentwicklung	41
2.8.3 Berechnungen & Dimensionierung	42
2.8.4 Messvorgang & Auswertung	43
3 Resümee	45

Tabellenverzeichnis

1	Geräte & Betriebsmittel	4
---	-----------------------------------	---

Abbildungsverzeichnis

1	Messschaltung des passiven, nicht invertierenden PT1-Gliedes	7
2	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines passiven, nicht invertierenden PT1-Gliedes	12
3	Messschaltung des aktiven, invertierenden PT1-Gliedes	13
4	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden PT1-Gliedes . .	18
5	Messschaltung des aktiven, invertierenden PDT1-Gliedes	19
6	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden PDT1-Gliedes .	23
7	Messschaltung des aktiven, nicht invertierenden PDT1-Gliedes	24
8	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, nicht invertierenden PDT1-Gliedes	28
9	Messschaltung des aktiven, invertierenden PI-Gliedes	29
10	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden PI-Gliedes . . .	32
11	Messschaltung des passiven, nicht invertierenden PT2-Gliedes	33
12	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 1\Omega$	37
13	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 150\Omega$	37
14	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 390\Omega$	38
15	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 560\Omega$	38
16	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 1\,300\Omega$	39
17	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 2\,800\Omega$	39
18	Simulation der Sprungantworten eines PT2-Gliedes	40
19	Messschaltung des passiven, nicht invertierenden PT4-Gliedes	41
20	Simulation der Sprungantworten eines PT4-Gliedes	42
21	Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines passiven, nicht invertierenden PT4-Gliedes	43
22	Vergleich der Sprungantworten des PT4-Gliedes (Messung & Berechnung)	44

1 Verwendete Geräte & Betriebsmittel

Bezeichnung/Nr.	Gerät/Betriebsmittel	Beschreibung/Typ	Geräte-Nr.
O1	Oszilloskope	Tektronix TDS 2004B	GA-04/04
P1	Digitalmultimeter (Ohmmeter)	—	G-11 1/03
FG1	Funktionsgenerator	Voltcraft 7202	GA-01/03

Tabelle 1: Geräte & Betriebsmittel

Bevor die Übungen durchgeführt werden, ist es wichtig sich mit den Betriebsmittel und vor allem den Messgeräten vertraut zu machen. Die dazugehörigen Datenblätter (außer dem Digitalmultimeter, da leider dessen Typ nicht dokumentiert wurde, was jedoch verträglich ist, da dieses nur zum Messen von Widerständen, sprich als Ohmmeter, verwendet wurde.) können zB. auf folgenden Webseiten (Stand: 16.März.2015) entnommen werden:

Funktionsgenerator FG1

http://eitidaten.fh-pforzheim.de/daten/labore/ellt/2006/bedienungsanleitungen/funktionsgenerator_7202.pdf

Oszilloskope O1

http://www.produktinfo.conrad.com/datenblaetter/100000-124999/122855-da-01-de-OSZILLOSKOP_TDS2004B.pdf

2 Sprungantworten

2.1 Allgemeines

Die Hauptaufgabe ist es, Sprungantworten von verschiedener, regelungstechnisch relevanten Übertragungsglieder, wie (PT1, PT2, DT1, PI, ...) einerseits zu berechnen, um anschließend diese graphisch mittels einem Oszilloskope erfassen zu können.

In diesem Projekt werden nun sowohl passive Filter (Glieder), also Filter die ohne externe Spannungsversorgung arbeiten können, als auch aktive Filter, sprich Filter die neben den passiven Bauelementen auch noch aus aktiven Komponenten, wie Operationsverstärker, Transistoren, ... bestehen, berechnet, dimensioniert & ausgewertet.

Für die Berechnungen wird im Laufe des Projektes die Laplace-Transformation immer mehr an Bedeutung gewinnen, da es dadurch sehr leicht möglich ist lineare zeitinvariante Differentialgleichungen zu lösen. Dabei ergibt die Laplace-Transformierte der Zeitfunktion eine Funktion im Laplace-Bereich, was folgendermaßen geschrieben wird:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (1)$$

Anders gesagt korrespondiert die Zeitfunktion mit der Funktion im Laplace-Bereich.

Die Laplace-Transformierte einer Zeitfunktion ist, wie folgt, definiert:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2)$$

$t \dots \dots \dots \quad$ Zeitvariable [sec]

$s \dots \dots \dots \quad$ Laplacevariable [sec $^{-1}$]

Das Pendant dazu, sprich die Rücktransformation in den Zeitbereich wird allgemein mit

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (3)$$

beschrieben.

Eine wichtige Funktion die noch zum Verständnis der Aufgaben beschrieben werden muss, ist die Sprungfunktion $\sigma(t)$, welche durch folgende „Funktion“ beschrieben ist:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Legt man nun am Eingang eine Funktion $f(t) = \sigma(t)$, so wird das System auf diese sprungförmige Änderung des Einganges reagieren. Die Ausgangsgröße die sich daraus dann ergibt nennt man Sprungantwort. Mit diesen und weiteren Grundlagen kann nun mit der Untersuchung der einzelnen Übertragungsglieder begonnen werden.

2.2 passives, nicht invertierendes PT1-Glied

2.2.1 Aufgabenstellungen

Die Hauptaufgabe in diesem Abschnitt des Projektes ist, eine Sprungantwort von dem Übertragungsglied: passives, nicht invertierendes Verzögerungsglied erster Ordnung aufzunehmen. Dabei ist am Eingang, der dazugehörigen Schaltung, ein rechteckförmiges Eingangssignal U_e von 0 V - 1 V (Sprung) mit einer so niedrigen Frequenz anzulegen, sodass vor dem Rückschalten von 1 V auf 0 V alle Einschwingvorgänge abgeklungen haben.

Es sollen somit verschiedene Berechnungsmöglichkeiten aufgezeigt werden, einerseits kann die sich ergebende Differentialgleichung im zeitlichen Bereich gelöst werden, oder andererseits ist es auch möglich vom Zeitbereich in den Laplace-Bereich zu transferieren, um somit die Sprungantwort in diesem zu ermitteln. Anschließend muss rücktransfertiert werden, was entweder begründet oder per auslesen aus einer Tabelle erfolgen kann.

Durch die Berechnungen ist es dann möglich die Bauteile so zu dimensionieren, dass die ermittelte Zeitkonstante den gewünschten Wert (relativ groß) hat.

Nach den Berechnungen des Übertragungsgliedes ist mit dem Oszilloskope O1 die Sprungantwort des PT1-Gliedes zu erfassen und die Zeitkonstante daraus zu ermitteln. Somit kann die Praxis wieder mit der Theorie verglichen und ausgewertet werden.

2.2.2 Schaltungsentwicklung

Die folgende Messschaltung stellt das passive PT1-Glied (auch unter RC-Tiefpass 1. Ordnung bekannt) dar:

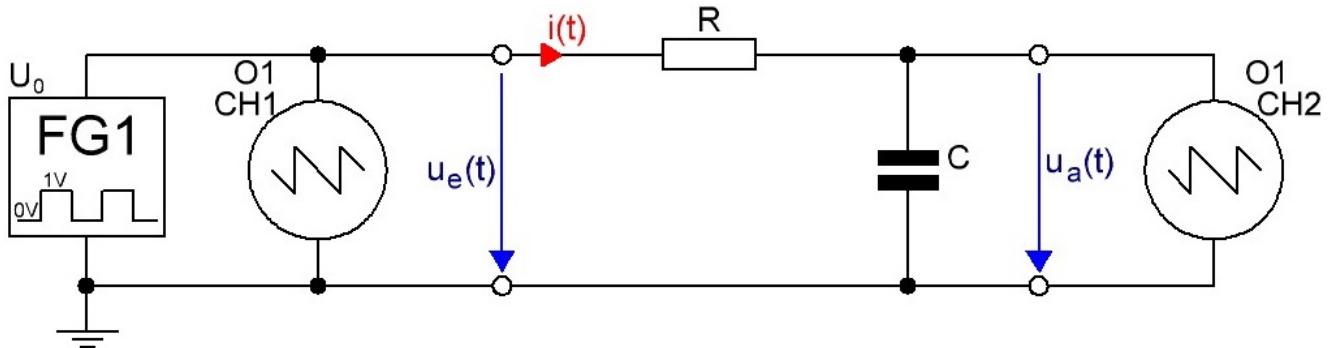


Abbildung 1: Messschaltung des passiven, nicht invertierenden PT1-Gliedes

Nun besteht einerseits die Aufgabe das dynamische System Abb. 1 mathematisch zu beschreiben und im Anschluss auf dessen Dimensionierung wird mittels dem Oszi O1 das Ausgangssignal beim Anlegen eines Eingangssprunges (rechteckförmige Spannung mit kleiner Frequenz) graphisch dargestellt.

2.2.3 Berechnungen & Dimensionierung

In der zeitlichen Betrachtung ergeben sich aus der Schaltung Abb.1 folgende, bekannte, Formeln:

$$u_a(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt \quad (5)$$

$$i(t) = \frac{u_e(t) - u_a(t)}{R} \quad (6)$$

Daraus kann nun eine Differentialgleichung für die Ausgangsspannung, wie folgt, mit den Maschen- & Knotengleichungen hergeleitet werden:

$$\frac{du_a(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot [u_e(t) - u_a(t)] \quad \rightarrow \quad u'_a(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_a(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_e(t)$$

Schließlich folgt →:

$$a_1 \cdot u'_a(t) + a_0 \cdot u_a(t) = b_0 \cdot u_e(t) \quad \text{mit } a_1 = 1, a_0 = \frac{1}{R \cdot C}, b_0 = \frac{1}{R \cdot C} \quad (7)$$

lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (Zeitbereich)

Nun besteht die Aufgabe darin, die Sprungantwort dieses Systemes herauszufinden. Dabei kann einerseits die Differentialgleichung 7 gelöst werden oder andererseits die Laplace-Transformation angewandt werden. Am Beginn werden einmal beide Verfahren aufgezeigt, um Verständnis zu schaffen.

1. Möglichkeit zum Lösen der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

Das Lösen der Differentialgleichung erfolgt hier, indem zuerst die homogene Lösung y_h gesucht wird:

$$u'_{ah}(t) + \frac{a_0}{a_1} \cdot u_{ah}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^t \frac{1}{u_{ah}(t)} du_{ah}(t) = -\frac{a_0}{a_1} \cdot \int_0^t 1 dt \quad \rightarrow \quad u_{ah}(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t}$$

Nun kann durch die Methode der Variation der Konstanten die partikuläre Lösung y_p ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } u_{ap}(t) &= e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k(t) \quad \rightarrow \quad u'_{ap}(t) = -\frac{a_0}{a_1} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k(t) + k'(t) \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \quad \rightarrow \\ k(t) &= \int_0^t e^{\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot \frac{b_0}{a_1} \cdot u_e(t) dt \quad \rightarrow \quad u_e(t) \dots \text{const.} = U_0 \quad \rightarrow \quad k(t) = \frac{b_0}{a_1} \cdot U_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot e^{\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \quad \rightarrow \\ u_{ap}(t) &= U_0 \cdot \frac{b_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} \quad \text{mit } b_0 = 1, \ a_0 = 1 \quad \Rightarrow \underline{u_{ap}(t) = U_0} \end{aligned}$$

Durch Linearkombination kann nun die allgemeinste „Schar“ von Lösung dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ermittelt werden:

$$u_a(t) = u_{ah}(t) + u_{ap}(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k + U_0 \tag{8}$$

Um nun eine eindeutige Lösung zu erhalten muss noch eine Anfangsbedingung gesetzt werden, was in unserem Fall bedeutet, dass die Eingangsspannung $u_e(0) = U_0$ beträgt. \rightarrow

$$0 = e^0 \cdot k + U_0 \quad \rightarrow \quad k = -U_0 \quad \rightarrow$$

$$\underline{u_a(t) = U_0 \cdot [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \tag{9}$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

2. Möglichkeit zum Lösen der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

Die zweite Möglichkeit zeigt zum Beispiel die Laplace-Transformation auf. Hier kann vereinfacht gesagt sofort aus der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 7 die Laplace-Transformierte, wie folgt, bestimmt werden:

$$\underline{a_1 \cdot U_a(s) \cdot s + a_0 \cdot U_a = b_0 \cdot U_e(s)} \quad (10)$$

gewöhnliche Gleichung (Laplace-Bereich)

Wird nun am Eingang eine konstante Spannung U_0 zum betrachteten Zeitpunkt $t = 0$ angelegt, (entspricht der rechteckförmigen Eingangsspannung von 0 V - 1 V), so kann die Spannung am Kondensator, wie folgt berechnet werden:

$$\text{bei } u_e(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad \dots \quad U_e(s) = U_0 \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad U_a(s) = \frac{b_0 \cdot U_0}{(s \cdot a_1 + a_0)} \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow$$

$$\underline{U_a(s) = \frac{U_0}{s \cdot (1 + s\tau)}} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C$$

Die Rücktransformation kann z.B. durch die Partialbruchzerlegung gemacht werden, was folgendermaßen funktioniert:

$$U_a(s) = \frac{U_0}{s \cdot (1 + s\tau)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(1 + s\tau)} \quad \text{mit } A, B \dots \text{zu bestimmende Konstanten} \quad \rightarrow$$

$U_0 = A + A \cdot s\tau + B \cdot s \quad \rightarrow \quad \text{der Koeffizientenvergleich liefert:}$

$$\left. \begin{array}{l} s^1 \dots \quad 0 = \tau \cdot A + B \\ s^0 \dots \quad U_0 = 1 \cdot A \end{array} \right\} \Rightarrow A = U_0, \quad B = -U_0 \cdot \tau$$

Im Laplace-Bereich folgt somit die Antwort des Ausganges bei einem Sprung am Eingang durch folgende Beschreibung:

$$\underline{U_a(s) = U_0 \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right]} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C \quad (11)$$

Sprungantwort (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation liefert:

$$\underline{u_a(t) = U_0 \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

Eigentlich müsste man die Sprungantwort (Zeitbereich) noch mit $\sigma(t)$ multiplizieren, was aus Übersichtlichkeit in diesem Projekt nicht gemacht wird.

Um noch kurz anzuführen wie man vom Laplace-Bereich in den Frequenz-Bereich kommt:

$$U_a(s) = \frac{U_0}{(1 + s\tau)} \quad \rightarrow \quad U_a(j\omega) = \frac{U_0}{(1 + j\omega\tau)}$$

Es ist somit einfach gesagt die Laplacevariable s durch $j\omega$ zu ersetzen. (Frequenzbereich für sinusförmige, eingeschwungene Zustände).

Bei der Dimensionierung der Bauteile spielt vor allem die Zeitkonstante τ eine wesentliche Rolle und sollte zur „sauberer“ Erfassung relativ groß, zB. 10 ms gewählt werden.

Somit kann der Widerstand, wenn ein Kondensator, zB. bei uns von 470 nF , gewählt wird, folgendermaßen berechnet werden:

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{470 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = 21,28 \text{ k}\Omega$$

Gewählt wurde somit ein Widerstand R von $22\text{ k}\Omega$, da dieser aber eine sehr wesentliche Abweichung, schnell geprüft durch ein Ohmmeter, von $1,46\text{ k}\Omega$ besaß, ist es wichtig mit dem „genauerer“ Wert von $23,46\text{ k}\Omega$ weiterzurechnen. Für die dadurch resultierende Zeitkonstante folgt somit:

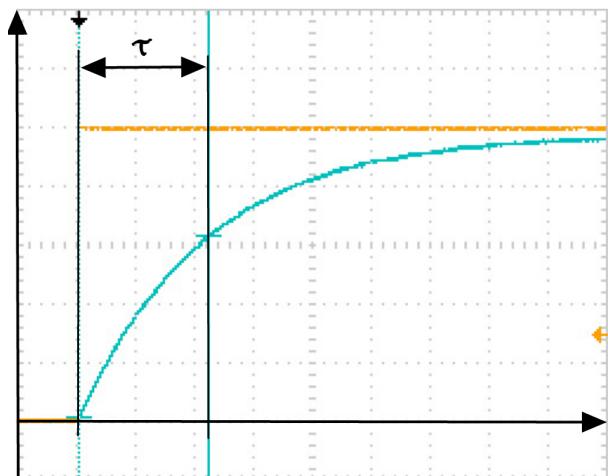
$$\tau = R \cdot C = 23,46 \text{ k}\Omega \cdot 470 \text{ nF} = 11,03 \text{ ms}$$

Es ergibt sich somit mit den gewählten Bauelementen folgende Übersicht, mit denen nun die Schaltung Abb. 1 aufgebaut und in Betrieb genommen werden kann:

R	C	τ
[$\text{k}\Omega$]	[nF]	[ms]
23,46	470	11,03

2.2.4 Messvorgang & Auswertung

Es konnte folgendes Oszilloskopebild nach dem Aufbau der Messschaltung und nachdem am Eingang eine rechteckförmige Eingangsspannung $u_e(t)$ mit dem Funktionsgenerator von 10 Hz (mind. Frequenz: $f = \frac{1}{5\cdot\tau}$) eingestellt wurde, zur Anzeige gebracht werden:



Dabei gilt folgendes:

$y - Achse \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - Achse \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots [200\text{ mV}/\text{Div.}]$	(gelb) CH1
$u_a(t) \dots [200\text{ mV}/\text{Div.}]$	(blau) CH2
$M \dots \dots [5\text{ ms}/\text{Div.}]$	horiz. Skalenteilung

Abbildung 2: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines passiven, nicht invertierenden PT1-Gliedes

Es ist ersichtlich, bzw. wurde mittels den Cursern am Oszi gemessen, dass nach τ , also bei $u_a(\tau) \approx 63\% von u_e = 0,63 V$, folgende Zeit ab dem „Schaltaugenblick“ vergangen ist:

$$\tau = 11\,ms$$

Diese Mesung bestätigt wieder einmal die Richtigkeit, unter Vernachlässigung einiger Messtoleranzen & nicht berücksichtigten Faktoren, der Berechnungsmethoden.

Einerseits zeigt diese Aufnahme eine einfache RC-Aufladung und andererseits, sprich übertragungstechnisch gesehen, ist das bekannte PT-Verhalten deutlich erkennbar. Dieses Verzögerungsglied 1. Ordnung zeigt somit einen exponentiellen Anstieg auf den Werte $U_0 = 1 \text{ V}$ mit der Zeitkonstante τ auf.

2.3 aktives, invertierendes PT1-Glied

2.3.1 Aufgabenstellungen

Die zweite Aufgabe besteht nun aus dem Erfassen und Auswerten der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden Verzögerungsgliedes erster Ordnung.

Einer der wesentlichsten Unterschiede zum vorherigen Teilprojekt besteht darin, dass dieses Glied aktiv, sprich mit einem Operationsverstärker (externe Spannungsversorgung), ausgeführt ist. Durch die nachfolgende Schaltung ergibt sich auch eine Invertierung des Eingangssignales.

2.3.2 Schaltungsentwicklung

Die dazugehörige Messschaltung weist folgende Form auf:

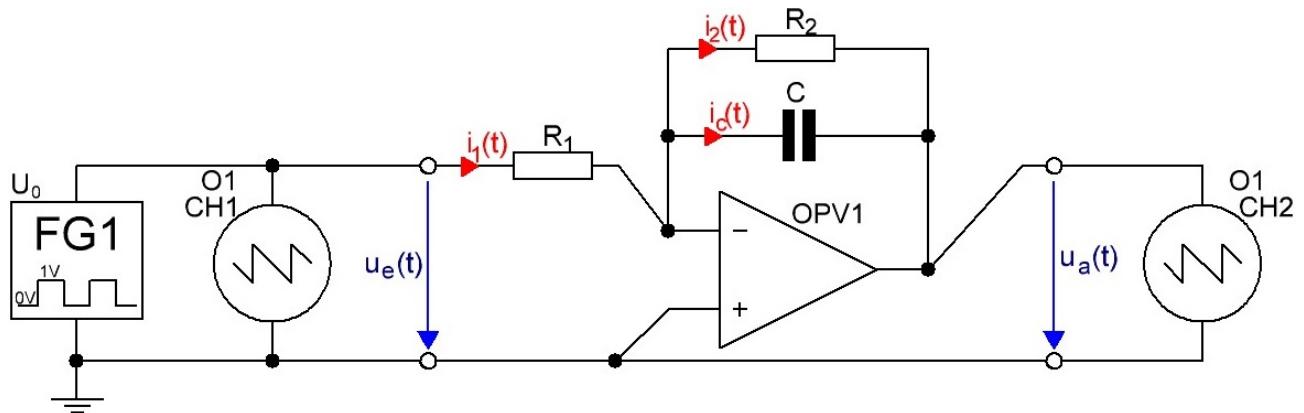


Abbildung 3: Messschaltung des aktiven, invertierenden PT1-Gliedes

Es ist nun die Sprungantwort von diesem System zu berechnen, sowie anschließend mittels dem Oszilloskope graphisch anzuzeigen.

Die Spannungsversorgung ($GND (0 V)$, $\pm 15 V$) für den Operationsverstärker ist in der Messschaltung, wie in allen in diesem Projekt, nicht dargestellt, aber natürlich immer vorhanden gewesen.

2.3.3 Berechnungen & Dimensionierung

Durch das ohmsche Gesetz, Knoten- & Maschenregel ergeben sich folgende Gleichungen, welche im Anschluss auf eine Differentialgleichung führen:

$$i_c(t) = -C \cdot \frac{du_a(t)}{dt} \quad (12)$$

$$i_2(t) = -\frac{u_a(t)}{R_2} \quad (13)$$

$$i_1(t) = \frac{u_e(t)}{R_1} = i_2(t) + i_c(t) \quad (14)$$

Daraus kann nun die Diff.-gleichung für die Ausgangsspannung aufgestellt werden:

$$i_1(t) = \frac{u_e(t)}{R_1} = i_2(t) + i_c(t) = -\frac{u_a(t)}{R_2} - C \cdot \frac{du_a(t)}{dt} \quad \rightarrow$$

Schließlich folgt →:

$$\underline{a_1 \cdot u'_a(t) + a_0 \cdot u_a(t) = b_0 \cdot u_e(t)} \quad \text{mit } a_1 = -R_1 \cdot C, \ a_0 = -\frac{R_1}{R_2}, \ b_0 = 1 \quad (15)$$

lineare Differentialgleichung 1.Ordnung (Zeitbereich)

Es führte, wie erwartet, wieder zur gleichen Differentialgleichung 1.Ordnung 1.Rang, welche nach dem gleichen Schema gelöst werden kann, siehe Kap. 2.2.3.

1. Möglichkeit zum Lösen der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

Das Lösen der Differentialgleichung erfolgt hier, indem zuerst erneut die homogene Lösung y_h gesucht wird:

$$u'_{a_h}(t) + \frac{a_0}{a_1} \cdot u_{a_h}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^t \frac{1}{u_{a_h}(t)} du_{a_h}(t) = -\frac{a_0}{a_1} \cdot \int_0^t 1 dt \quad \rightarrow \quad u_{a_h}(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k$$

Nun kann durch die Methode der Variation der Konstanten die partikuläre Lösung y_p ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } u_{a_p}(t) &= e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k(t) \quad \rightarrow \quad u'_{a_p}(t) = -\frac{a_0}{a_1} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k(t) + k'(t) \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \quad \rightarrow \\ k(t) &= \int_0^t e^{\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot \frac{b_0}{a_1} \cdot u_e(t) dt \quad \rightarrow \quad u_e(t) \dots \text{const.} = U_0 \quad \rightarrow \quad k(t) = \frac{b_0}{a_1} \cdot U_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot e^{\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \quad \rightarrow \\ u_{a_p}(t) &= U_0 \cdot \frac{b_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} \quad \text{mit } b_0 = 1 \quad \Rightarrow u_{a_p}(t) = U_0 \cdot \frac{1}{a_0} \end{aligned}$$

Durch Linearkombination kann nun die allgemeinste „Schar“ von Lösung dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ermittelt werden:

$$u_a(t) = u_{a_h}(t) + u_{a_p}(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot k + U_0 \frac{1}{a_0} \quad (16)$$

Um nun eine eindeutige Lösung zu erhalten muss noch eine Anfangsbedingung gesetzt werden, was in unserem Fall bedeutet, dass die Eingangsspannung $u_e(0) = U_0$ beträgt. \rightarrow

$$0 = e^0 \cdot k + U_0 \frac{1}{a_0} \quad \rightarrow \quad k = -U_0 \frac{1}{a_0} \quad \rightarrow$$

$$u_a(t) = -v \cdot U_0 \cdot [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] \quad \text{mit } \tau = R_2 \cdot C, v = \frac{R_2}{R_1} \quad (17)$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

2. Möglichkeit zum Lösen der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

Durch die Transformation der Gleichung 15 in den Laplace-Bereich folgt:

$$\underline{a_1 \cdot U_a(s) \cdot s + a_0 \cdot U_a = b_0 \cdot U_e(s)} \quad (18)$$

gewöhnliche Gleichung (Laplace-Bereich)

Durch anlegen eines Sprunges am Eingang ergibt sich wieder:

$$\begin{aligned} \text{bei } u_e(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad \dots \quad U_e(s) = U_0 \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad U_a(s) &= \frac{b_0 \cdot U_0}{(s \cdot a_1 + a_0)} \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow \\ U_a(s) &= \frac{-U_0}{s \cdot (\frac{1}{v} + s\tau)} \quad \text{mit } \tau = R_2 \cdot C, v = \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation durch die Partialbruchzerlegung liefert dann die Sprungantwort des Übertragungsgliedes:

$$\begin{aligned} U_a(s) &= \frac{-U_0}{s \cdot (\frac{1}{v} + s\tau)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(\frac{1}{v} + s\tau)} \quad \text{mit } A, B \dots \text{zu bestimmende Konstanten} \quad \rightarrow \\ -U_0 &= A \cdot \frac{1}{v} + A \cdot s\tau + B \cdot s \quad \rightarrow \quad \text{der Koeffizientenvergleich liefert:} \\ &\left. \begin{array}{l} s^1 \dots 0 = \tau \cdot A + B \\ s^0 \dots -U_0 = \frac{1}{v} \cdot A \end{array} \right\} \Rightarrow A = -U_0 \cdot v, B = U_0 \cdot v \cdot \tau \end{aligned}$$

Im Laplace-Bereich folgt somit die Antwort des Ausganges bei einem Sprung am Eingang durch folgende Beschreibung:

$$\begin{aligned} U_a(s) &= -v \cdot U_0 \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] \quad \text{mit } \tau = R_2 \cdot C, v = \frac{R_2}{R_1} \quad (19) \\ \underline{\text{Sprungantwort (Laplace-Bereich)}} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation liefert:

$$\underline{u_a(t) = -v \cdot U_0 \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]} \quad \text{mit } \tau = R_2 \cdot C, v = \frac{R_2}{R_1}$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

Erneut zeigen beide Varianten im Prinzip die gleiche Lösung, was ja auch so sein sollte.

Nun kann wieder mit der Bauteildimensionierung gestartet werden. Es soll zB. die Zeitkonstante erneut ca. 10 ms betragen und die Verstärkung v soll im Bereich von etwa 3 liegen, um die Funktionalitäten und Auswirkungen der Bauteile deutlich ersichtlich zu machen.

Somit wurde wieder ein Kondensator von 470 nF gewählt und der sich daraus ergebende Widerstand R_2 folgt, durch:

$$R_2 = \frac{\tau}{C} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\text{ s}}{470 \cdot 10^{-9}\frac{\text{As}}{\text{V}}} = 21,28\text{ k}\Omega$$

Gewählt wurde dieses mal aber, da dieser laut Ohmmeter keine Abweichungen im Gegensatz zum $22\text{ k}\Omega$ -Widerstand zeigte, ein $27\text{ k}\Omega$ -Widerstand, was somit eine Zeitkonstante von:

$$\tau = R_2 \cdot C = 27\text{ k}\Omega \cdot 470\text{ nF} = 12,69\text{ ms}$$

auf sich zieht.

Um die Verstärkung von etwa 3 zu realisieren, muss R_1 folgendermaßen dimensioniert werden:

$$R_1 = \frac{R_2}{v} = \frac{27\text{ k}\Omega}{3} = 9\text{ k}\Omega$$

Gewählt wurde somit, da dieser schnell zur Verfügung stand, ein $10\text{ k}\Omega$ -Widerstand was dann folgende Verstärkung bewirkt:

$$v = \frac{R_2}{R_1} = \frac{27\text{ k}\Omega}{10\text{ k}\Omega} = 2,7$$

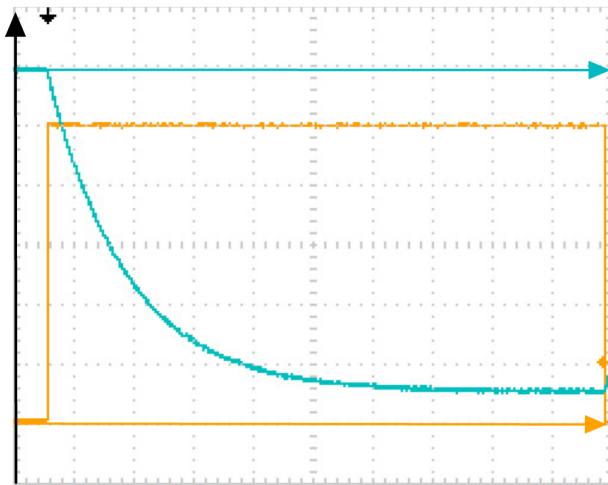
Zusammenfassend:

R_1	R_2	C	τ	v
[$\text{k}\Omega$]	[$\text{k}\Omega$]	[nF]	[ms]	[—]
10	27	470	12,69	2,7

2.3.4 Messvorgang & Auswertung

Nun wurde die Schaltung Abb.3 aufgebaut und am Eingang ein rechteckförmiges Signal mit der Frequenz von $\approx 10 \text{ Hz}$ (genauer $10,8 \text{ Hz}$) angelegt.

Somit lieferte das Oszi O1 folgendes Bild:



Dabei gilt folgendes:

y – Achse	$u(t)$
x – Achse für $u_e(t)$...	t (gelb)
x – Achse für $u_a(t)$...	t (blau)
$u_e(t)$	[200 mV/Div.] (gelb) CH1
$u_a(t)$...	[500 mV/Div.] (blau) CH2
M	[10 ms/Div.] horiz. Skalenteilung

Abbildung 4: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden PT1-Gliedes

Da nach τ ungefähr 63 % von u_e am Ausgang (invertiert) erreicht sind kann bei der Spannung von $u_a(\tau) = -v \cdot u_e \cdot 0,63 = -1,7 \text{ V}$ die Zeit ab dem Schaltaugenblick mittels den Cursoren am Oszilloskop gemessen werden, was folgende Zeitkonstante ergab:

$$\tau = 12,8 \text{ ms}$$

Die kleine Abweichung liegt, durch die Toleranzen von Bauelementen und Messgeräten im Prinzip im Toleranzbereich. Des Weiteren kann (fast) die max. auftretende Ausgangsspannung, entweder durch die Spitzen-Spitzen-Wert-Anzeige am Oszi oder durch Messen mittels den Cursoren am Ende des Rechtecksignales, ermittelt werden, was folgendes ergab:

$$u_a(\infty) = -2,72 \text{ V}$$

Dieser Wert zeigt somit sehr gut die Übereinstimmung mit den Rechenwerten.

In der Abb. 4 ist erneut sehr gut das Verhalten eines Verzögerungsgliedes in der Regelungstechnik ersichtlich. Die nach einer e-Funktion ins negative ansteigende Ausgangsspannung erreicht im Gegensatz zum passiven PT1-Glied im Kap.2.2 nicht den Wert 1 sondern den Stationärwert $1 \cdot -v$.

2.4 aktives, invertierendes PDT1-Glied

2.4.1 Aufgabenstellungen

Das dritte, regelungstechnisch relevante Glied ist das PDT1-Glied. Das von uns verwendete Glied (Schaltung) kann im Prinzip auch als DT1-Glied aufgefasst werden, da eine Phasenabsenkung im Prinzip nicht möglich ist. Es wird sich zeigen dass der Unterschied in der bleibenden Verstärkung v liegt. Da in der Praxis nie ein idealer Differenzierer auftritt, sondern immer eine bestimmte Verzögerung vorhanden ist, stellt somit das DT1-Glied (PDT1) eine praktische Realisierung des Differenzierers dar.

Bei diesem Glied handelt es sich wieder um ein aktives & invertierendes Element und die Aufgabe besteht nun darin einen solchen Differenzierer zu dimensionieren und erneut die Antwort auf einen Eingangssprung mit Hilfe eines Oszilloskopes zu erfassen und auszuwerten.

2.4.2 Schaltungsentwicklung

Die Schaltung eines PDT1-Gliedes kann folgende Form aufweisen:

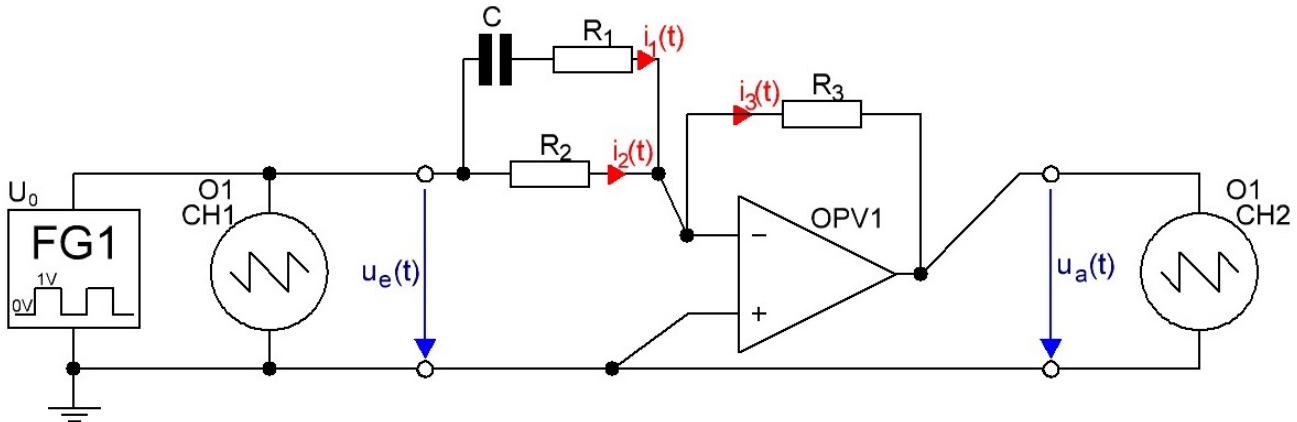


Abbildung 5: Messschaltung des aktiven, invertierenden PDT1-Gliedes

Bei der Inbetriebnahme nicht auf die Spannungsversorgung des Operationsverstärkers vergessen!

2.4.3 Berechnungen & Dimensionierung

Einmal anders angesetzt, wird nun einmal die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich, wie folgt, ermittelt:

$$G(j\omega) = \frac{u_a}{u_e} = -\frac{R_3}{R_2|(R_1 + \frac{1}{j\omega \cdot C})|} = -\frac{R_3}{\frac{R_2 + j\omega \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2}{1 + j\omega \cdot C \cdot (R_1 + R_2)}} \rightarrow$$

$$\underline{G(j\omega) = -v \cdot \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}} \quad \text{mit } v = \frac{R_3}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_1 + R_2), \tau_2 = C \cdot R_1 \quad (20)$$

Übertragungsfunktion (Frequenzbereich)

Man kann hier im Prinzip direkt in den Laplace-Bereich wechseln, indem die komplexe Kreisfrequenz $j\omega$ durch die Laplacevaribale s ersetzt wird, was dann folgendes ergibt:

$$\underline{G(s) = -v \cdot \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2}} \quad \text{mit } v = \frac{R_3}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_1 + R_2), \tau_2 = C \cdot R_1 \quad (21)$$

Übertragungsfunktion (Laplace-Bereich)

Durch anlegen eines Sprunges am Eingang ergibt sich wieder:

$$\text{bei } u_e(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad \dots \quad U_e(s) = U_0 \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow$$

$$\underline{U_a(s) = -v \cdot U_0 \cdot \frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2} \cdot \frac{1}{s}} \quad \text{mit } v = \frac{R_3}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_1 + R_2), \tau_2 = C \cdot R_1$$

Die Rücktransformation durch die Partialbruchzerlegung liefert dann die Sprungantwort des Übertragungsgliedes:

$$U_a(s) = -v \cdot U_0 \cdot \frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s\tau_2} \quad \text{mit } A, B \dots \text{zu bestimmende Konstanten} \quad \rightarrow$$

$-v \cdot U_0 - v \cdot U_0 \cdot \tau_1 \cdot s = A + A \cdot \tau_2 \cdot s + B \cdot s$ der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left. \begin{array}{l} s^1 \dots -v \cdot U_0 \cdot \tau_1 = \tau_2 \cdot A + B \\ s^0 \dots -v \cdot U_0 = A \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -v \cdot U_0 \\ B = v \cdot U_0 \cdot (\tau_2 - \tau_1) \end{array}$$

Im Laplace-Bereich folgt somit die Antwort des Ausganges bei einem Sprung am Eingang durch folgende Beschreibung:

$$\underline{U_a(s) = -v \cdot U_0 \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\tau_2}} \right]} \quad \text{mit } v = \frac{R_3}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_1 + R_2), \tau_2 = C \cdot R_1 \quad (22)$$

Sprungantwort (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation liefert:

$$\underline{u_a(t) = -v \cdot U_0 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]} \quad \text{mit } v = \frac{R_3}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_1 + R_2), \tau_2 = C \cdot R_1 \quad (23)$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

Man kann erkennen, dass die zwei Zeitkonstanten τ_1 & τ_2 dafür verantwortlich sind, ob eher ein verzögerndes oder doch ein differenzierendes Verhalten auftritt.

Da bei unserer Schaltung nur eine Phasenanhebung möglich ist (ein negativer Widerstand wäre nur schwer zu realisieren), muss das Verhältniss $\frac{\tau_1}{\tau_2} > 1$ sein.

Als Kondensator wurde ein $1 \mu F$ gewählt was somit bedeutet, wenn man zB. eine Zeitkonstante von $1 ms$ anstrebt, dass der Widerstand R_1 folgendermaßen dimensioniert werden muss:

$$R_1 = \frac{\tau_2}{C} = \frac{1 \cdot 10^{-3} s}{1 \cdot 10^{-6} F} = 1 k\Omega$$

Nun soll zB. die stationäre Verstärkung 1 betragen, was somit bedeutet, dass das Verhältnis von $\frac{R_3}{R_2} = 1$ sein soll. Mit dieser Festlegung wurde nun, damit die Sprungantwort deutlich erkennbar ist, τ_1 rund 6-mal so groß wie τ_2 festgelegt. Dadurch ergeben sich folgende Widerstandswerte:

$$\tau_1 \approx 6 \cdot \tau_2 \quad \rightarrow \quad R_1 + R_2 = 6 \cdot R_1 \quad \rightarrow \quad R_2 \approx 5 \cdot R_1$$

Nun wurde als Widerstand für R_2 ($= R_3$) ein $4,7 k\Omega$ -Widerstand verwendet. Mit dem Ohmmeter schnell kontrolliert ergab sich: $R_2 = 4,74 k\Omega$ & $R_3 = 4,8 k\Omega$, was somit eine Verstärkung von:

$$v = \frac{R_3}{R_2} = \frac{4,8 k\Omega}{4,74 k\Omega} = 1,01 \approx 1$$

auf sich zieht.

Für die Zeitkonstanten bedeuten diese Widerstände und Kondensatoren folgendes:

$$\tau_1 = C \cdot (R_1 + R_2) = 1 \cdot 10^{-6} F \cdot (1 \cdot 10^3 \Omega + 4,74 \cdot 10^3 \Omega) = 5,74 ms$$

$$\tau_2 = C \cdot R_1 = 1 \cdot 10^{-6} F \cdot 1 \cdot 10^3 \Omega = 1 ms$$

Zusammenfassend:

R_1 [$k\Omega$]	R_2 [$k\Omega$]	R_3 [$k\Omega$]	C [μF]	τ_1 [ms]	τ_2 [ms]	v [—]
1	4,74	4,8	1	5,74	1	1,01

2.4.4 Messvorgang & Auswertung

Nach der Dimensionierung, wurde die Schaltung Abb.5 aufgebaut und ein „Sprung“ am Eingang angelegt. Die Realisierung des Sprunges stellt erneut einen Frequenzgenerator dar, welcher ein rechteckförmiges Eingangssignal mit einer relativ niedrigen Frequenz von $f \approx 100 \text{ Hz}$ ($T = \frac{1}{f} \approx \frac{1}{100 \text{ Hz}} = 10 \text{ ms}$) erzeugt.

Damit ergibt sich folgende Oszilloskopeaufnahme des Ein- & Ausgangssignal eines solchen Elements:

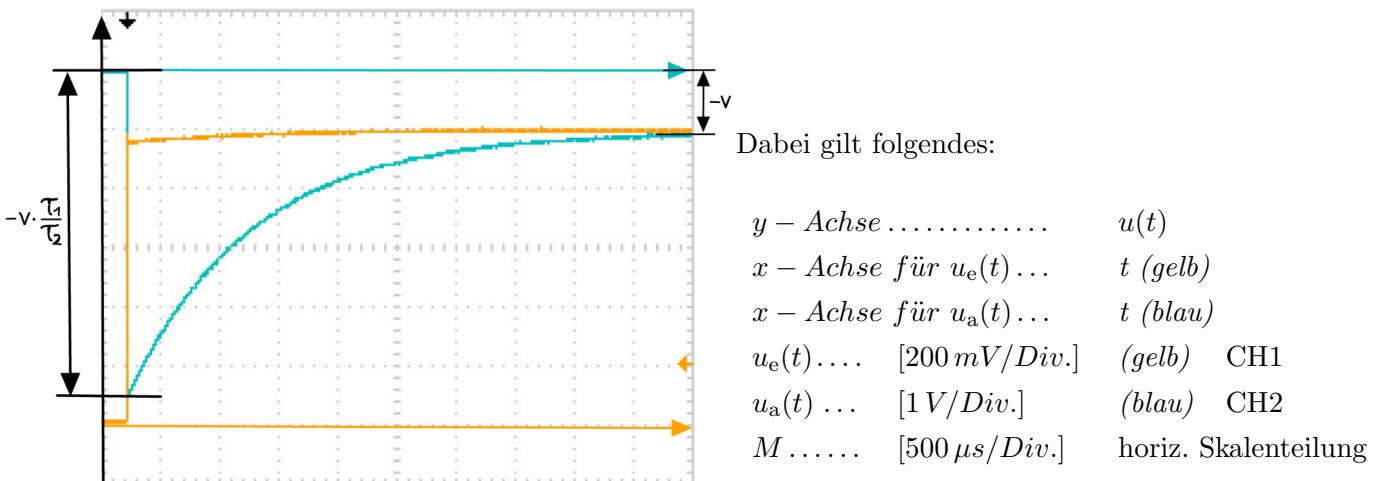


Abbildung 6: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden PDT1-Gliedes

Die maximale Ausgangsspannung ergibt sich per Formel durch:

$$u_{a, \max} = -v \cdot \frac{\tau_1}{\tau_2} = -5,81 \text{ V} \quad \rightarrow \quad \text{gemessen: } u_{a, \max} = -5,56 \text{ V}$$

Der kl. Unterschied lässt sich dadurch erklären, dass in der Praxis keine theoretischen „Sprünge“ stattfinden, sondern sich in der Realität die Spannung nur stetig und nicht sprunghaft ändern kann. Will man die Zeitkonstante messen, so muss zuerst die Spannung nach $t = \tau_2$ berechnet werden, was folgendes nach der Formel 23 ergibt (Es würde auch $(-5,81 + 1) * 0,63$ näherungsweise funktionieren):

$$u_a(\tau_2) = -v \cdot U_0 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \cdot e^{-\frac{\tau_2}{\tau_2}} \right] = -1,01 \cdot 1 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{5,74 \text{ ms}}{1 \text{ ms}} \right) \cdot e^{-1} \right] = -2,77 \text{ V}$$

Seit dem Sprung bis zu der Zeit, bei der die Ausgangsspannung diesen Wert annahm, verging folgende Zeit, welche mittels den Cursern am Oszilloskop erfasst wurde. Des Weiteren wurde auch gleich die bleibende Verstärkung v erfasst:

$$\tau_2 = 0,96 \text{ ms} \quad v = 1,02 \text{ (am Ende des Rechtecksignales)}$$

Diese Abweichungen zum Rechnungswert $\tau_2 = 1 \text{ ms}$ & $v = 1,01$ lassen sich wieder durch den vorher genannten Grund und einige Messtoleranzen erklären. Wirstellten somit fest, dass die Sprungantwort eines solchen Gliedes eigentlich einen realen Differenzierer mit einer Zeitverzögerung darstellt. Es wird sogenanzt das Verhalten des Differenzierers abgeschwächt und nach dem Abklingen der e-Funktion stellt sich eine konstante Verstärkung von v ein.

2.5 aktives, nicht invertierendes PDT1-Glied

2.5.1 Aufgabenstellungen

Wie schon im Kapitel 2.4 erwähnt gibt es ein DT1-Glied in der Regelungstechnik, welches einen Differenzierer in der Praxis abbildet.

Dieses Element findet man im Prinzip des Variometers in der Regelungstechnik wieder und es besteht im Prinzip aus einem Differenzierer mit Zeitverzögerung. Bei uns handelt es sich eigentlich wieder um ein PDT1-Glied (mit DT1-Verhalten). Der Unterschied zum vorherigen Teilprojekt ist einerseits die Invertierung und andererseits somit die zu entwerfende Schaltung

Die Aufgabe ist erneut die Erfassung der Sprungantwort, nachdem die nachfolgende Schaltung dimensioniert wurde. Im Anschluss kommt die Auswertung und die gewonnenen Erkenntnisse über ein solches Element.

2.5.2 Schaltungsentwicklung

Die (wiederum ideale) Schaltung eines aktiven, nicht invertierenden (P)DT1-Gliedes kann folgende Form aufweisen:

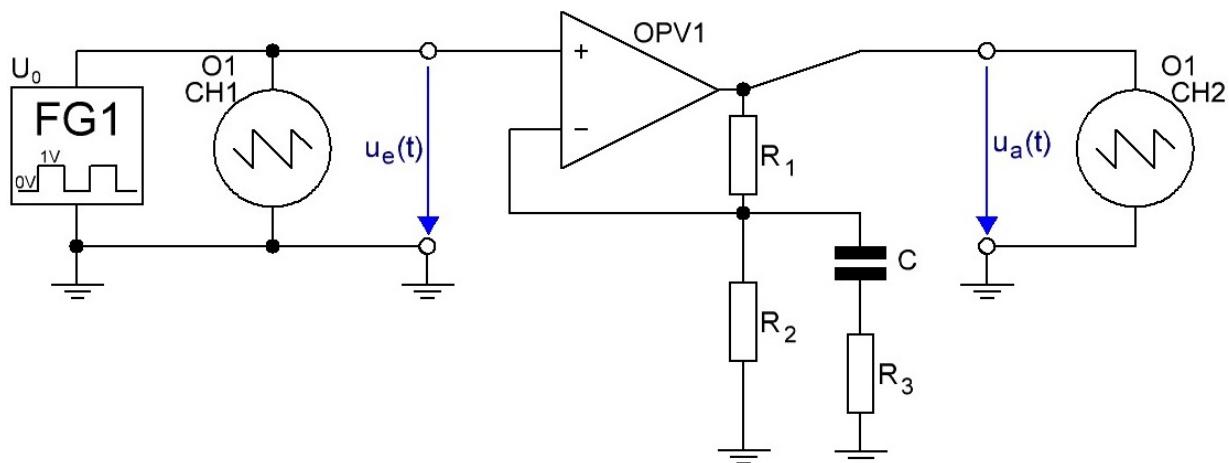


Abbildung 7: Messschaltung des aktiven, nicht invertierenden PDT1-Gliedes

Nach dem Entwurf der Schaltung kann mit der Dimensionierung der einzelnen Elemente begonnen werden.

2.5.3 Berechnungen & Dimensionierung

Die Übertragungsfunktion dieser Schaltung kann auf folgende Art und Weise ermittelt werden:

$$G(j\omega) = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{R_1 + \frac{R_2 \cdot (\frac{1}{j\omega \cdot C} + R_3)}{R_2 + \frac{1}{j\omega \cdot C} + R_3}}{R_2 \cdot (\frac{1}{j\omega \cdot C} + R_3)}}{R_2 + \frac{1}{j\omega \cdot C} + R_3} = \frac{R_1 + \frac{Z}{N}}{\frac{Z}{N}} = 1 + R_1 \cdot \frac{N}{Z} \quad \rightarrow$$

$$\underline{G(j\omega)} = 1 + v \cdot \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} \quad \text{mit } v = \frac{R_1}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_2 + R_3), \tau_2 = C \cdot R_3 \quad (24)$$

Übertragungsfunktion (Frequenzbereich)

Man kann hier im Prinzip direkt in den Laplace-Bereich wechseln, indem die komplexe Kreisfrequenz $j\omega$ durch die Laplacevariabale s ersetzt wird, was dann folgendes ergibt:

$$\underline{G(s)} = 1 + v \cdot \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad \text{mit } v = \frac{R_1}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_2 + R_3), \tau_2 = C \cdot R_3 \quad (25)$$

Übertragungsfunktion (Laplace-Bereich)

Durch anlegen eines Sprunges am Eingang ergibt sich wieder:

$$\text{bei } u_e(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad \dots \quad U_e(s) = U_0 \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow$$

$$\underline{U_a(s) = \frac{U_0}{s} + U_0 \cdot v \cdot \frac{1+s\tau_1}{s \cdot (1+s\tau_2)}} \quad \text{mit } v = \frac{R_1}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_2 + R_3), \tau_2 = C \cdot R_3$$

Die Rücktransformation durch die Partialbruchzerlegung liefert dann die Sprungantwort des Übertragungsgliedes:

$$X(s) = U_0 \cdot v \cdot \frac{1+s\tau_1}{s \cdot (1+s\tau_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s\tau_2} \quad \text{mit } A, B \dots \text{zu bestimmende Konstanten} \quad \rightarrow$$

$v \cdot U_0 + v \cdot U_0 \cdot \tau_1 \cdot s = A + A \cdot \tau_2 \cdot s + B \cdot s$ der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left. \begin{array}{l} s^1 \dots \quad v \cdot U_0 \cdot \tau_1 = \tau_2 \cdot A + B \\ s^0 \dots \quad v \cdot U_0 = A \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = v \cdot U_0 \\ B = v \cdot U_0 \cdot (\tau_1 - \tau_2) \end{array}$$

Im Laplace-Bereich folgt somit die Antwort des Ausganges bei einem Sprung am Eingang durch folgende Beschreibung:

$$\underline{U_a(s) = U_0 \cdot \left[\frac{1}{s} + v \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\tau_2}} \right] \right]} \quad \text{mit } v = \frac{R_1}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_2 + R_3), \tau_2 = C \cdot R_3 \quad (26)$$

Sprungantwort (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation liefert:

$$\underline{u_a(t) = U_0 + v \cdot U_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]} \quad \text{mit } v = \frac{R_1}{R_2}, \tau_1 = C \cdot (R_2 + R_3), \tau_2 = C \cdot R_3 \quad (27)$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

Es liefert somit im Prinzip ein sehr ähnliches, aber unterschiedliches, Ergebnis im Vergleich zum aktiven, invertierenden PDT1-Glied im Abschnitt 2.4.

Für die Dimensionierung wurde sich zB. als Ziel gesetzt eine Zeitkonstante von ca. 2 ms zu erzielen, was bei einem Kondensator $C = 1\text{ }\mu\text{F}$ folgenden Widerstand R_3 ergibt:

$$R_3 = \frac{\tau_2}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\text{ s}}{1 \cdot 10^{-6}\text{ F}} = 2\text{ k}\Omega$$

Aus diesen Grund wurde ein $2,2\text{ k}\Omega$ -Widerstand (Ohmmeter: $2,214\text{ k}\Omega$) gewählt, womit eine Zeitkonstante von

$$\tau_2 = C \cdot R_3 = 1 \cdot 10^{-6}\text{ F} \cdot 2,214 \cdot 10^3\text{ }\Omega = 2,21\text{ ms}$$

die Folge ist.

Um nun zB. eine stationäre Verstärkung von etwa $1,5\text{ V}$, bei einem 1 V -Sprung, zu erzielen, was gleichbedeutend ist mit $v = \frac{R_1}{R_2} = 0,5$, und um die Sprungantwort deutlich erkennbar zu machen, wird τ_1 ungefähr 11-mal größer als τ_2 gewählt. (\rightarrow Phasenanhebung)

$$\tau_1 \approx 11 \cdot \tau_2 \quad \rightarrow \quad R_2 + R_3 = 11 \cdot R_3 \quad \rightarrow \quad R_2 \approx 10 \cdot R_3$$

Nun wurde als Widerstand für R_2 ein $22\text{ k}\Omega$ -Widerstand verwendet. (Ohmmeter: $23,46\text{ k}\Omega$). Dies ergibt somit einen Widerstand R_1 von:

$$R_1 = R_2 \cdot v = 23,46\text{ k}\Omega \cdot 0,5 = 11,73\text{ k}\Omega$$

Der genormte Bauteil ergibt somit zB. eine $10\text{ k}\Omega$ -Widerstand und die Rückrechnungen liefern folgende Ergebnisse:

$$\tau_1 = C \cdot (R_2 + R_3) = 1 \cdot 10^{-6}\text{ F} \cdot (23,46 \cdot 10^3\text{ }\Omega + 2,214 \cdot 10^3\text{ }\Omega) = 25\text{ ms} \quad \checkmark$$

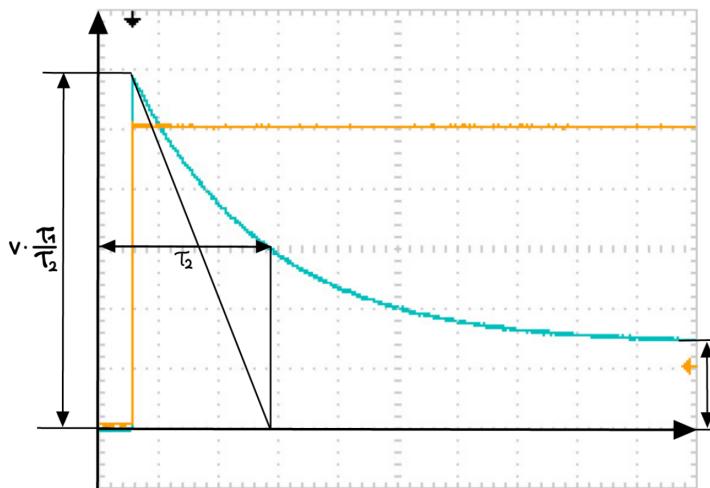
$$v = \frac{R_1}{R_2} = \frac{10 \cdot 10^3\text{ }\Omega}{23,46 \cdot 10^3\text{ }\Omega} = 0,43 \quad \sim$$

Zusammenfassend:

R_1 [$\text{k}\Omega$]	R_2 [$\text{k}\Omega$]	R_3 [$\text{k}\Omega$]	C [μF]	τ_1 [ms]	τ_2 [ms]	v [—]
10	23,46	2,214	1	25	2,21	0,43

2.5.4 Messvorgang & Auswertung

Nun wurde die Messschaltung Abb. 7 aufgebaut und Inbetrieb genommen. Der Frequenzgenerator erzeugte eine rechteckförmige Eingangsspannung von $0 V - 1 V$ mit einer Frequenz (die Frequenz sollte, wie schon bekannt, niedrig sein (mind. $< \frac{1}{5 \cdot \tau_2}$)) von $f = 50 Hz$. Die Oszilloskopeaufnahme zeigt nun die Aus- & Eingangsspannung des PDT1-Gliedes:



Dabei gilt folgendes:

$y - Achse$	$u(t)$		
$x - Achse$	t		
$u_e(t)$	[200 mV/Div.]	(gelb)	CH1
$u_a(t)$...	[1 V/Div.]	(blau)	CH2
M	[1 ms/Div.]	horiz. Skalenteilung	

Abbildung 8: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, nicht invertierenden PDT1-Gliedes

Erneut kann die Zeitkonstante τ_2 bei folgender Ausgangsspannung gemessen werden:

$$u_a(\tau_2) = U_0 + v \cdot U_0 [1 - (1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}) \cdot e^{-\frac{\tau_2}{\tau_2}}] = 1 + 0,43 \cdot 1 \cdot [1 - (1 - \frac{25 \cdot 10^{-3} s}{2,21 \cdot 10^{-3} s}) \cdot e^{-1}] = 3,06 V$$

Des Weiteren wird die Verstärkung die sich nach dem Abklingen der e-Funktion einstellt und die max. auftretende Ausgangsspannung, wie folgt berechnet: ¹

$$\begin{aligned} u_a(\infty) &= U_0 \cdot (1 + v) = 1 \cdot (1 + 0,43) = 1,43 V \\ u_{a, \max} &= U_0 + v \cdot U_0 [1 - (1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}) \cdot e^{-\frac{\tau_2}{\tau_2}}] = 1 + 0,43 \cdot 1 \cdot [1 - (1 - \frac{25 \cdot 10^{-3} s}{2,21 \cdot 10^{-3} s}) \cdot e^0] = 5,86 V \end{aligned}$$

Die dazugehörigen Messwerte, welche mit dem O1 erfasst wurden lauten:

$u_{a, \max}$	$u_a(\infty)$	τ_2	v
[V]	[V]	[ms]	[—]
5,94	1,46	2,14	0,46

¹ Anmerkung: Die max. Ausgangsspannung tritt dann auf, wenn die 1. Ableitung von $u_a(t) = 0$ und die 2. Ableitung davon negativ ist.

2.6 aktives, invertierendes PI-Glied

2.6.1 Aufgabenstellungen

Nun wird das nächste regelungstechnische Glied, das sogenannte Proportional-Integral-Glied, kurz PI-Glied vorgestellt. Dieses Element stellt somit im Prinzip das Pendant zum DT1-Glied dar und ist dieses Verhalten ist in vielen Standardreglern vorhanden.

Die Sprungantwort, sowie die richtige Dimensionierung der einzelnen Bauelemente soll hier einmal aufgezeigt werden. Im Prinzip würde ein Integrator alleine, da die Eingangsspannung sicherlich nicht exakt symmetrisch ist, „davondriften“, entweder nach $+15 V$ oder $-15 V$. Somit wird noch ein zweiter Integrator mit einer höheren Zeitkonstante nachgeschalten, welcher im Prinzip „nur dazu dient diesen Gleichanteil unwirksam zu machen“.

2.6.2 Schaltungsentwicklung

Die Messschaltung weist folgende Form auf:

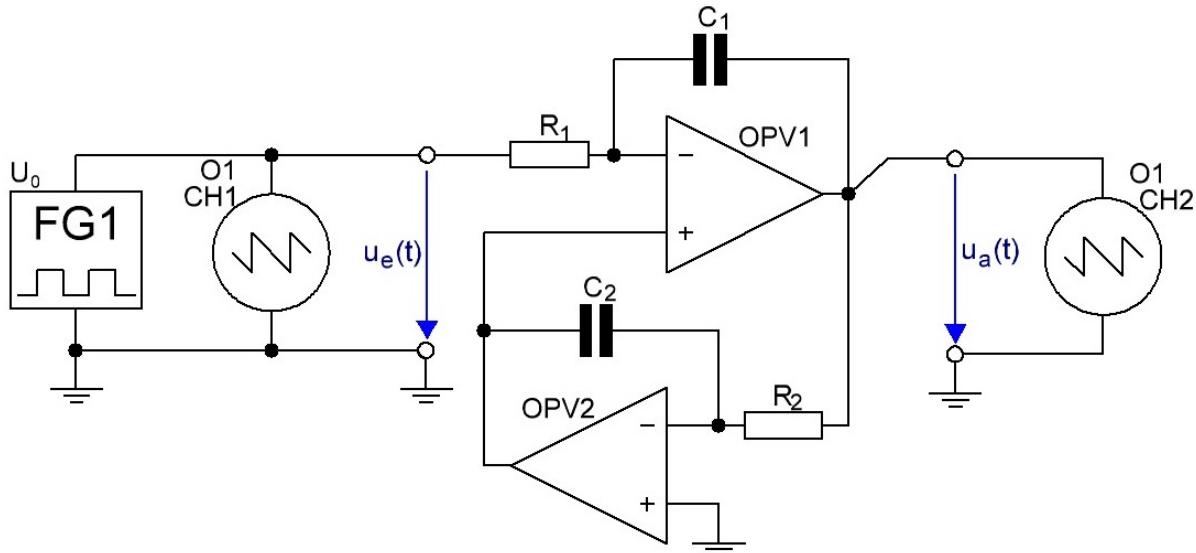


Abbildung 9: Messschaltung des aktiven, invertierenden PI-Gliedes

Nun folgt die Dimensionierung der einzelnen Bauelemente der Schaltung, dabei wird nur das 1.PI-Glied (OPV1) betrachtet, da das 2.Glied näherungsweise nur zur Stabilisierung des 1. dient.

2.6.3 Berechnungen & Dimensionierung

Bei dieser beschriebenen Betrachtungsweise ergibt sich auf einen Blick folgender Zusammenhang von der Ein- & Ausgangsgröße:

$$\underline{u_a(t) = -\frac{1}{C_1 \cdot R_1} \cdot \int_0^t u_e(t) dt} \quad (28)$$

Integralgleichung (Zeitbereich)

Nun kann $\mathcal{L}\{u_a(t)\} = U_a(s)$, wie nun einmal aufgezeigt wird, ermittelt werden:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u_a(t) dt\right\} = \int_0^\infty \int_0^t u_a(t) dt \cdot e^{-st} dt = \underbrace{\int_0^t u_a(t) dt \cdot -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty u_a(t) \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{u_a(t)\}$$

$$\underline{U_a(s) = -\frac{1}{C_1 \cdot R_1} \cdot \frac{1}{s} \cdot U_e(s)} \quad (29)$$

Indirekt Proportionale Gleichung (Hyperbel) (Laplace-Bereich)

Die Sprungantwort lässt sich nun aus dieser Gleichung 29, indem sie mit $\frac{1}{s}$ multipliziert wird, ermitteln:

$$U_a(s) = -\frac{1}{C_1 \cdot R_1} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot U_e(s) \quad (30)$$

Sprungantwort (Laplace-Bereich)

Die Rücktransformation in den zeitlichen Bereich liefert nun, wie erwartet, folgendes Ergebnis:

$$u_a(t) = -\frac{1}{C_1 \cdot R_1} \cdot t \cdot u_e(t) \quad (31)$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

Für die Bauteildimensionierung wurde eine Zeitkonstante von $100 \mu s$ gewählt, was sich mit folgenden Bauteilwerten realisieren lässt:

R_1	C_1
$[k\Omega]$	$[nF]$
10	10

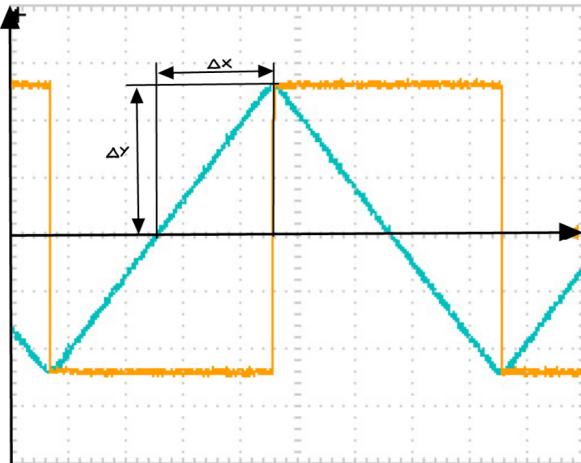
Der zweite Integrator sollte so im Bereich von ≈ 100 mal langsamer integrieren, und deswegen wurden für diesen zB. folgende Bauteilwerte gewählt:

R_2	C_2
$[k\Omega]$	$[nF]$
33	1

Mit diesen Vorüberlegungen konnte die Messschaltung aufgebaut und getestet werden.

2.6.4 Messvorgang & Auswertung

Am Eingang wurde nicht ein $0 \text{ V} - 1 \text{ V}$ Sprung angelegt, sondern ein rechteckförmiges Eingangssignal mit $\pm 0,5 \text{ V}$. Das Oszilloskop lieferte somit folgende Aufnahme bei einer Frequenz von $f \approx 2,5 \text{ kHz}$:



Dabei gilt folgendes:

$y - \text{Achse} \dots \dots \dots$	$u(t)$	
$x - \text{Achse} \dots \dots \dots$	t	
$u_e(t) \dots \dots \dots$	[200 mV/Div.]	(gelb) CH1
$u_a(t) \dots \dots \dots$	[200 mV/Div.]	(blau) CH2
$M \dots \dots \dots$	[50 $\mu\text{s}/\text{Div.}$]	horiz. Skalenteilung

Abbildung 10: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines aktiven, invertierenden PI-Gliedes

Aus dieser Abb. 10 konnte folgendes entnommen werden, um die Steigung dieses Integrators aus Messergebnissen zu dokumentieren:

Δx	Δy
[μs]	[V]
1,01	0,6

Dies hat folgende Steigung zur Folge:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,6 \text{ V}}{1,01 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 594 \text{ mV}/\mu\text{s} \quad \text{soll : } k = \frac{U_0}{R_1 \cdot C_1} = \frac{0,5 \text{ V}}{10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}} = 500 \text{ mV}/\mu\text{s}$$

Bei der Berechnung geht der 2. Integrator nicht mit ein, welcher aber natürlich Auswirkungen auf die Steigung von $u_a(t)$ hat, deswegen und auch wegen den Toleranzen von Bauelementen gibt es hier eine etwas erhöhte Abweichung.

2.7 passives, nicht invertierendes PT2-Glied

2.7.1 Aufgabenstellungen

In diesem Abschnitt soll nun das Verzögerungsglied 2. Ordnung unter die Lupe genommen werden. Es wird sich herausstellen, dass dieses regelungstechnisch relevante Element ein proportionales Übertragungsverhalten aufweist. Sicherlich bekannt sind Feder-Masse gedämpfte Systeme und RLC-Schwingkreise, welche dieses Verhalten zeigen.

Die Aufgabe besteht nun in der Erfassung einer aussagekräftigen Sprungantwort eines solchen PT2-Gliedes. Dieser RLC-Schwingkreis ist dabei zuerst zu dimensionieren und durch Veränderung eines Parameters, soll dessen Auswirkung sichtbar gemacht werden.

2.7.2 Schaltungsentwicklung

Eine mögliche Schaltung eines PT2-Gliedes ist folgender RLC-Schwingkreis:

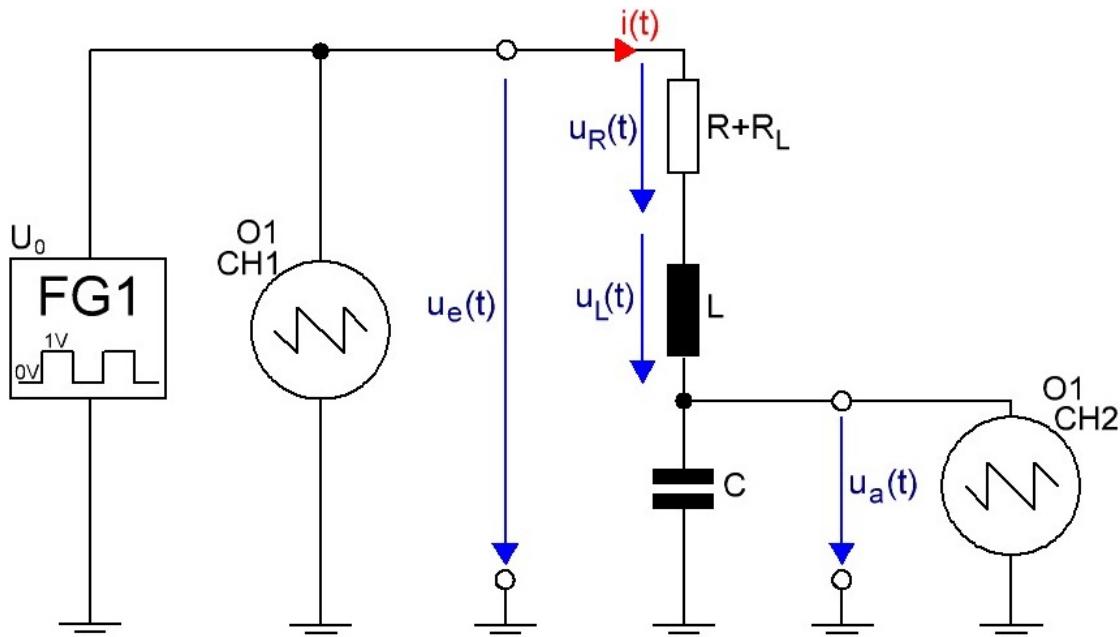


Abbildung 11: Messschaltung des passiven, nicht invertierenden PT2-Gliedes

Dabei zeigte sich durch Messungen (schnell, mittels Ohmmeter), dass der ohmsche Wicklungswiderstand der Spule $R_L = 149 \Omega$ betrug.

Mit diesen Erkenntnissen kann mit der Bauteildimensionierung begonnen werden.

2.7.3 Berechnungen & Dimensionierung

Nun wird mal wieder mit der Maschengleichung angesetzt, um so die für uns bekannte Differentialgleichung für die Ausgangsspannung aufzustellen:

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R + R_L} \quad (32)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t) dt \quad (33)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_a(t)}{dt} \quad (34)$$

$$u_e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (35)$$

Nun folgt durch Umformung die Gleichung für die Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Eingangsspannung:

$$u_R(t) = (R + R_L) \cdot i(t) = (R + R_L)C \cdot \frac{du_a(t)}{dt} \quad \& \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = LC \cdot \frac{d^2u_a(t)}{dt^2} \rightarrow$$

$$\underline{a_2 \cdot u_a''(t) + a_1 \cdot u_a'(t) + a_0 \cdot u_a(t) = b_0 \cdot u_e(t)} \quad \text{mit } a_2 = 1, a_1 = \frac{(R + R_L)}{L}, a_0 = \frac{1}{LC}, b_0 = \frac{1}{LC} \quad (36)$$

lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (Zeitbereich)

Um diese, noch einfache, Gleichung im zeitlichen Bereich zu lösen, muss man wieder zuerst die homogene und partikuläre Lösung ermitteln und daraus wieder die Linearkombination bilden. Um dies jedoch schneller zu machen kann man in den Laplace-Bereich wechseln, um so die Sprungantwort des PT2-Gliedes relativ leicht ermitteln zu können:

$$\underline{a_2 \cdot U_a(s) \cdot s^2 + a_1 \cdot U_a(s) \cdot s + a_0 \cdot U_a(s) = b_0 \cdot U_e(s)} \quad \text{mit } a_2 = 1, a_1 = \frac{(R + R_L)}{L}, a_0 = \frac{1}{LC}, b_0 = \frac{1}{LC} \quad (37)$$

gewöhnliche Gleichung (Laplace-Bereich)

Die Lösung dieser Gleichung sollte im Prinzip kein Problem darstellen, aus zeitlichen Gründen wurde aber das Computeralgebrasystem Maxima herangezogen, welches folgende Lösung für die Sprungantwort liefert:

$$\underline{u_a(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cdot [\sinh(\frac{t}{\tau_2}) \cdot k + \cosh(\frac{t}{\tau_2})]} \quad (38)$$

$$, \text{ mit } \tau_1 = \frac{2 \cdot L}{R_L + R}, \tau_2 = \left(\sqrt{\left(\frac{R + R_L}{2 \cdot L} \right)^2 - \frac{1}{LC}} \right)^{-1}, k = \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

Bei der Dimensionierung der einzelnen Bauelemente stand uns eine Spule mit $L = 1 H$ zur Verfügung. Somit wurde ein kleiner Kondensator von $C = 10 nF$ gewählt, und der Widerstand R als variabel festgelegt.

Es wurde der Widerstand schrittweise erhöht, um die Auswirkung dessen deutlich sichtbar zu machen. Folgende Werte wurden nun verwendet:

L [H]	R_L [Ω]	C [nF]	R [Ω]
1	149	10	variabel

Für R wurden dabei folgende Werte verwendet:

Widerstand [Ω]	τ_1 [ms]	τ_2 [μs]
1	13,3	$-686 \cdot j$
150	6,69	$-689 \cdot j$
390	3,71	$-696 \cdot j$
560	2,82	$-707 \cdot j$
1300	1,38	$-790 \cdot j$
2800	0,64	1690

Für die nachfolgenden Messungen, müssen noch einige kommende Bezeichnungen erklärt werden:

$u_{a, \text{st}} \dots \dots \dots$ Stationärwert, welcher sich nach dem Ausgleichsvorgang einstellt.

$u_{a, \text{max}} \dots \dots \dots$ Maximalwert der Sprungantwort von der Ausgangsspannung

$\ddot{u} \dots \dots \dots$ Überschwingweite; dies ist die Differenz zwischen Maximalwert der Sprungantwort und dem Stationärwert in Prozent (bezogen auf den Stationärwert)

$$\ddot{u} = \frac{u_{a, \text{max}} - u_{a, \text{st}}}{u_{a, \text{st}}} \cdot 100\%$$

$T_{\ddot{u}} \dots \dots \dots$ Überschwingzeit; dies ist die Zeit, bei der das erste Maximum der Sprungantwort erreicht wird.

$T_e \dots \dots \dots$ Periodendauer der Eigenfrequenz des Systems

$f_e \dots \dots \dots$ Eigenfrequenz $f_e = \frac{1}{T_e}$

$x_1 \dots \dots \dots$ Differenz zwischen Stationärwert und des ersten Minimums der Sprungantwort

$x_2 \dots \dots \dots$ Differenz zwischen Stationärwert und Maximalwert oder $x_2 = \ddot{u} \cdot u_{a, \text{st}}$

$D \dots \dots \dots$ Dämpfung des Systems $D = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right)} \right)^2}}$

2.7.4 Messvorgang & Auswertung

Nun wurde bei den verschiedenen Widerstandswerten jeweils ein Oszilloskopbild angefertigt, um die einzelnen Auswirkungen auf den Verlauf der Sprungantwort herauszufinden:

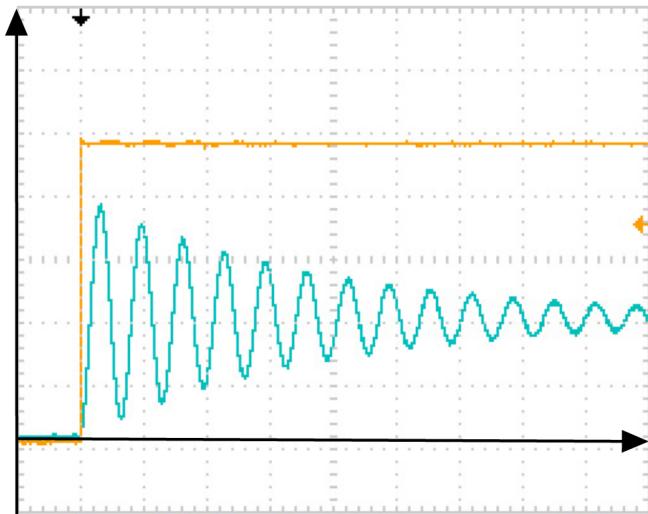


Abbildung 12: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 1 \Omega$

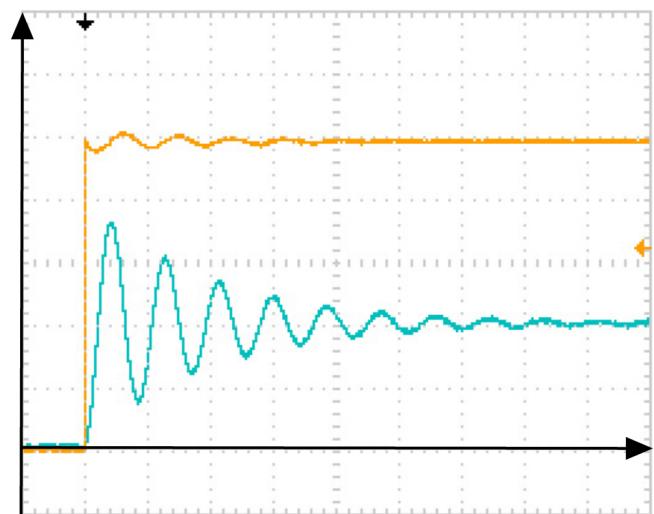


Abbildung 13: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 150 \Omega$

Oszilloskopeinstellungen:

$y - Achse$	$u(t)$
$x - Achse$	t
$u_e(t)$	[200 mV/Div.]
$u_a(t)$...	[500 mV/Div.]
M	[1 ms/Div.]

$y - Achse \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - Achse \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots [200 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(gelb) CH1
$u_a(t) \dots [500 \text{ mV}/\text{Div.}]$	(blau) CH2
M $[5 \text{ ms}/\text{Div.}]$	horiz. Skalenteilung

Folgendes konnte mit dem Oszilloskope erfasst und berechnet werden:

u_a , st ...	$1\text{ }V$
u_a , max...	$1,950\text{ }V$
\ddot{u}	95 %
$T_{\ddot{u}}$	$250\text{ }\mu s$
T_e	$650\text{ }\mu s$
f_e	$1538\text{ }Hz$
x_1	$750\text{ }mV$
x_2	$950\text{ }mV$
D	0,075

u_a , st ...	$1\text{ }V$
u_a , max...	$1,825\text{ }V$
\ddot{u}	$82,5\%$
$T_{\ddot{u}}$	$2\text{ }ms$
T_e	$4\text{ }ms$
f_e	$250\text{ }Hz$
x_1	$610\text{ }mV$
x_2	$825\text{ }mV$
D	$0,096$

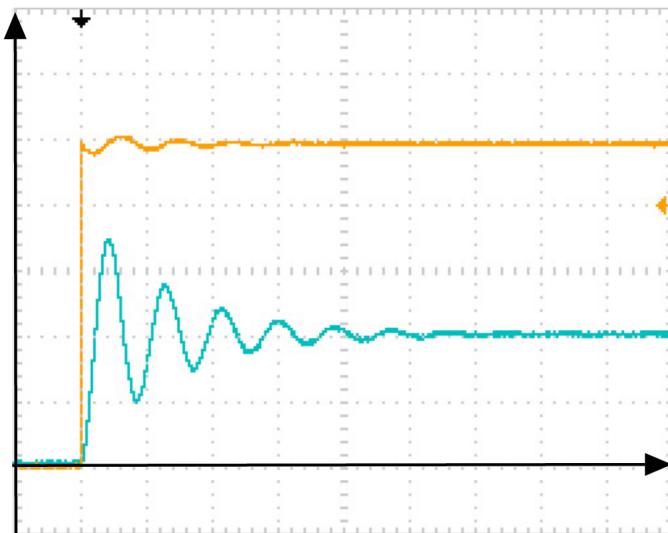


Abbildung 14: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 390 \Omega$

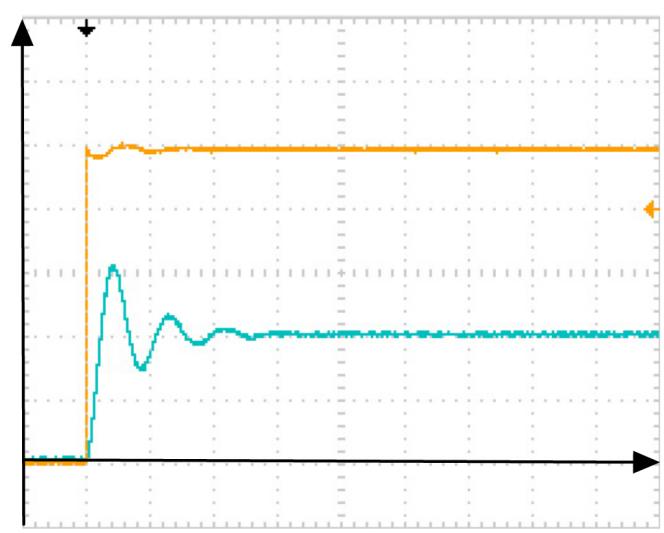


Abbildung 15: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 560 \Omega$

Oszilloskopeinstellungen:

$y - Achse \dots\dots\dots\dots\dots$	$u(t)$	$y - Achse \dots\dots\dots\dots\dots$	$u(t)$
$x - Achse \dots\dots\dots\dots\dots$	t	$x - Achse \dots\dots\dots\dots\dots$	t
$u_e(t) \dots [200\text{ mV}/Div.]$	(gelb) CH1	$u_e(t) \dots [200\text{ mV}/Div.]$	(gelb) CH1
$u_a(t) \dots [500\text{ mV}/Div.]$	(blau) CH2	$u_a(t) \dots [500\text{ mV}/Div.]$	(blau) CH2
M [5 ms/Div.]	horiz. Skalenteilung	M [5 ms/Div.]	horiz. Skalenteilung

Folgendes konnte mit dem Oszilloskope erfasst und berechnet werden:

u_a , st ...	$1\text{ }V$	u_a , st ...	$1\text{ }V$
u_a , max...	$1,725\text{ }V$	u_a , max...	$1,550\text{ }V$
\ddot{u}	$72,5\%$	\ddot{u}	55%
$T_{\ddot{u}}$	$2,1\text{ }ms$	$T_{\ddot{u}}$	$2,3\text{ }ms$
T_e	$4,05\text{ }ms$	T_e	$4,15\text{ }ms$
f_e	$247\text{ }Hz$	f_e	$241\text{ }Hz$
x_1	$500\text{ }mV$	x_1	$250\text{ }mV$
x_2	$725\text{ }mV$	x_2	$550\text{ }mV$
D	0,117	D	0,243

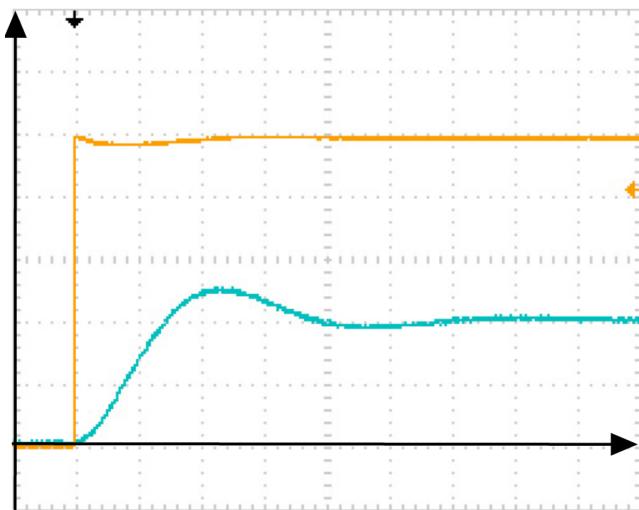


Abbildung 16: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 1\,300\,\Omega$

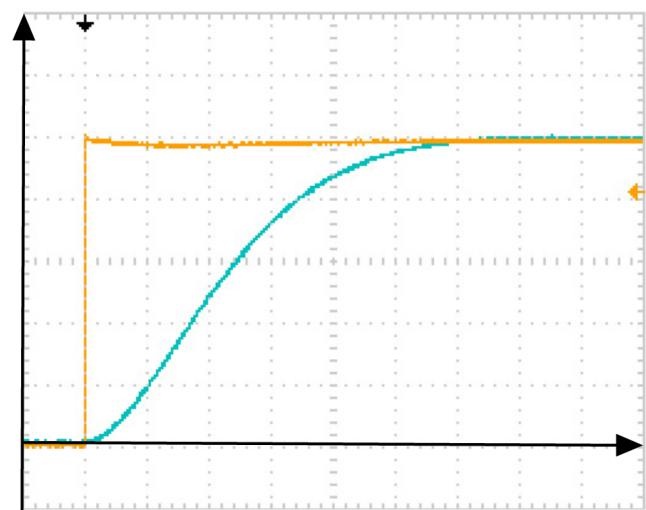


Abbildung 17: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort des PT2-Gliedes bei $R = 2\,800\,\Omega$

Oszilloskopeinstellungen:

y – Achse $u(t)$ y – Achse $u(t)$
 x – Achse t x – Achse t
 $u_e(t)$ [200 mV/Div.] (gelb) CH1 $u_e(t)$ [200 mV/Div.] (gelb) CH1
 $u_a(t)$... [500 mV/Div.] (blau) CH2 $u_a(t)$... [200 mV/Div.] (blau) CH2
M [1 ms/Div.] horiz. Skalenteilung M [500 μ s/Div.] horiz. Skalenteilung

Folgendes konnte mit dem Oszilloskope erfasst und berechnet werden:

u_a , st ...	$1\text{ }V$	u_a , st ...	$1\text{ }V$
u_a , max...	$1,300\text{ }V$	u_a , max...	$1\text{ }V$
\ddot{u}	$30\text{ }\%$	\ddot{u}	0
$T_{\ddot{u}}$	$2,15\text{ }ms$	$T_{\ddot{u}}$	—
T_e	$4,2\text{ }ms$	T_e	—
f_e	$238\text{ }Hz$	f_e	—
x_1	$50\text{ }mV$	x_1	—
x_2	$300\text{ }mV$	x_2	—
D	$0,495$	D	—

Um diese Messungen gut vergleichen zu können, wurde das PT2-Glied in Maxima berechnet und dies ergab folgende Kurvenverläufe von $u_a(t)$:

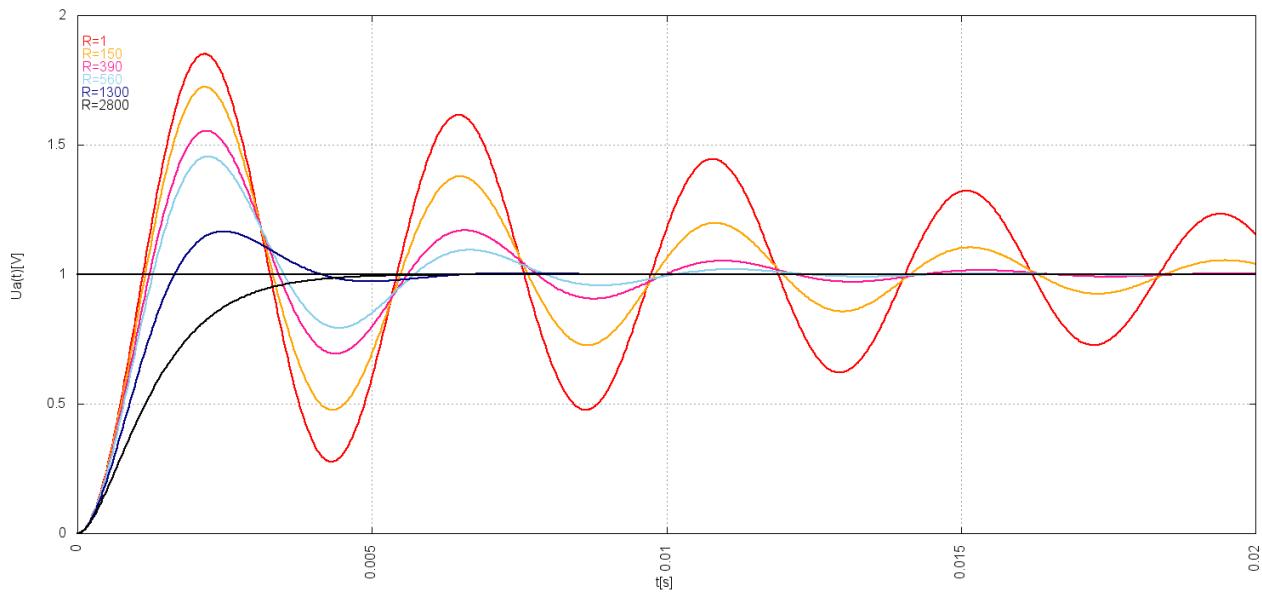


Abbildung 18: Simulation der Sprungantworten eines PT2-Gliedes

Es lässt sich feststellen dass die Simulation im Prinzip annähernd das selbe Ergebnis, im Vergleich zu unseren Messungen, lieferte.

Zusammenfassend stellten wir also fest, dass durch die Erhöhung des Widerstandswertes die Dämpfung D zunimmt und gleichzeitig wird das Überschwingen immer geringer.

Bei unseren Messungen lag die maximale Überschwingung bei 95 %, welches im Prinzip in der Praxis dem Maximalwert entspricht, da der ohmsche Wicklungswiderstand der Spule ja vorhanden ist.

Des Weiteren nimmt die Eigenfrequenz dieses Systemes mit steigendem R -Wert deutlich ab. Bei den Messungen stellten wir fest, dass das System ab ca. $\approx 3 \text{ k}\Omega$ ($R + R_L$) nicht mehr schwingungsfähig ist, hingegen zeigt die Berechnung einen Gesamtwiderstand von $R = 2769 \Omega$, was darauf hindeutet lässt dass die Messungen, unter Berücksichtigung einiger Toleranzen korrekt sind.

2.8 passives, nicht invertierendes PT4-Glied

2.8.1 Aufgabenstellungen

Das letzte Glied, das in diesem Projekt untersucht wird ist das Verzögerungsglied 4. Ordnung. Die Aufgabe ist erneut, zuerst die gegebene Schaltung richtig zu dimensionieren, berechnen, um im Anschluss darauf mittels dem Oszilloskope die Sprungantwort des Systems erfassen und analysieren zu können.

Es handelt sich wieder um ein passives Glied, sprich ohne externer Spannungsversorgung.

2.8.2 Schaltungsentwicklung

Die Schaltung kann folgende Form aufweisen:

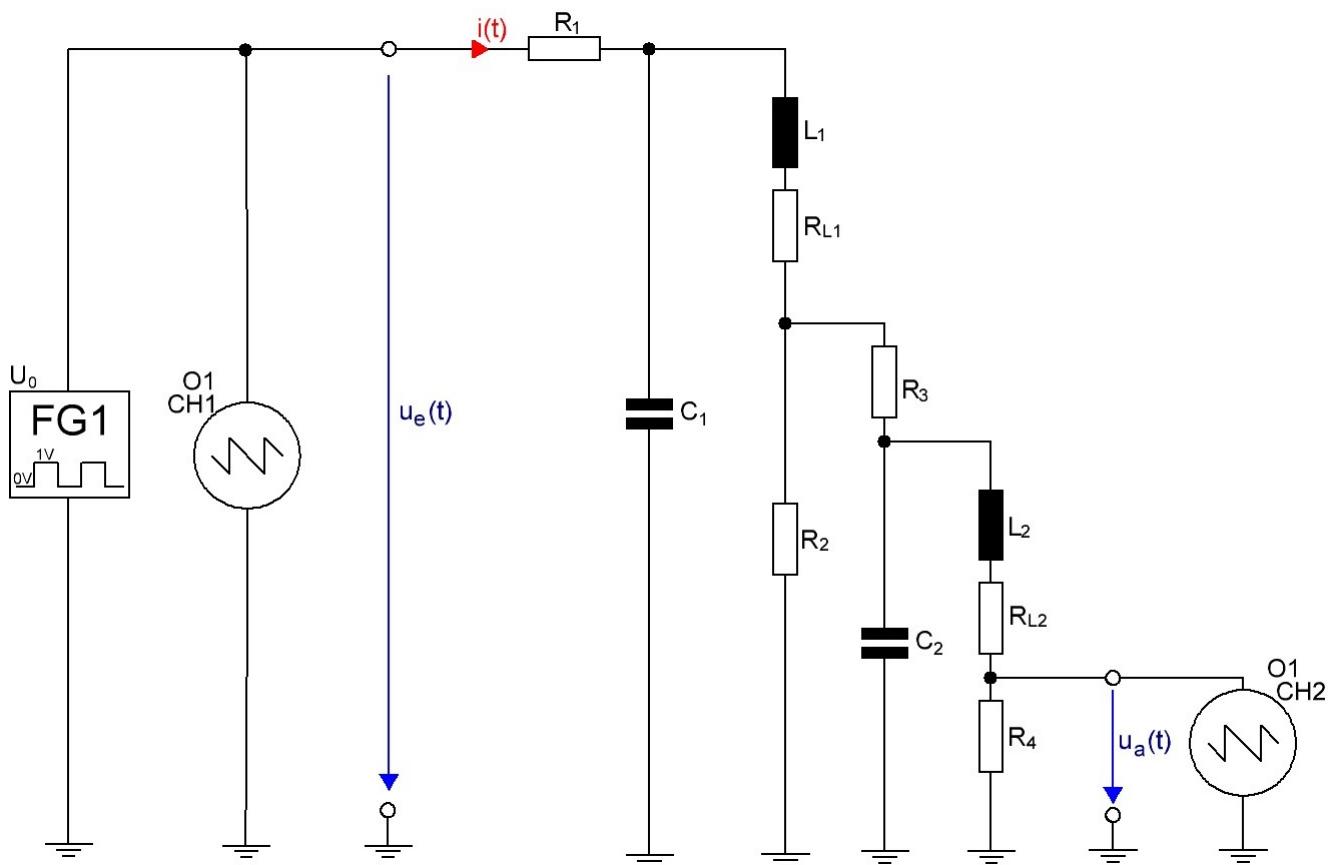


Abbildung 19: Messschaltung des passiven, nicht invertierenden PT4-Gliedes

Dabei zeigte sich durch Messungen (schnell, mittels Ohmmeter), dass die beiden ohmschen Wicklungswiderstände der Spulen jeweils $R_{L1} = R_{L2} = 149 \Omega$ betragen.
Die Induktivitäten liegen laut Angabe bei jeweils $L_1 = L_2 = 1 H$.

2.8.3 Berechnungen & Dimensionierung

Für die Dimensionierung der einzelnen Bauelemente wurde hier, eigentlich nur um Zeit zu sparen, das Programm Maxima herangezogen und es wurde versucht mit konstanten Kondensatoren die Widerstände so zu verändern bis wir ein nicht schwingungsfähiges System erhielten.

Die verwendeten Bauelemente wießen folgende Größen auf:

R_1 [kΩ]	C_1 [nF]	L_1 [H]	R_{L1} [Ω]	R_2 [kΩ]	R_3 [kΩ]	C_2 [nF]	L_2 [H]	R_{L2} [Ω]	R_4 [kΩ]
1	100	1	149	1	0,1	150	1	149	1

Das Programm Maxima liefert in diesem Falle folgende Sprungantwort des Verzögerungsgliedes 4. Ordnung:

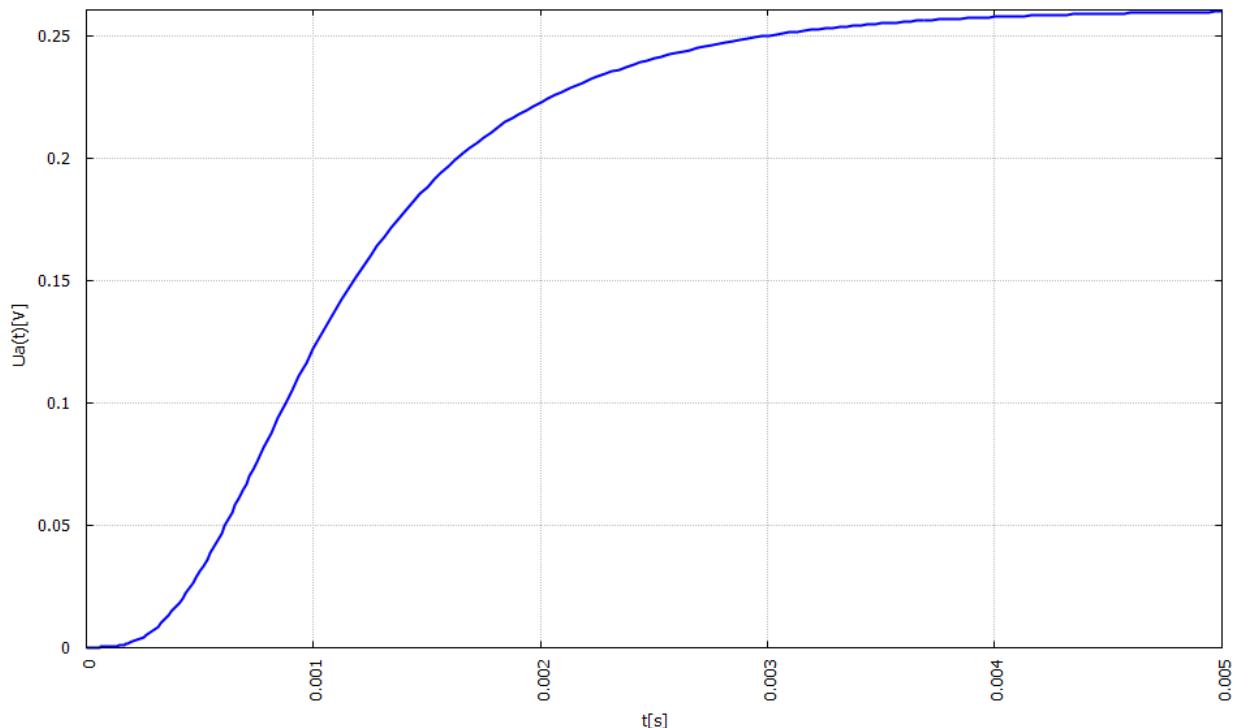


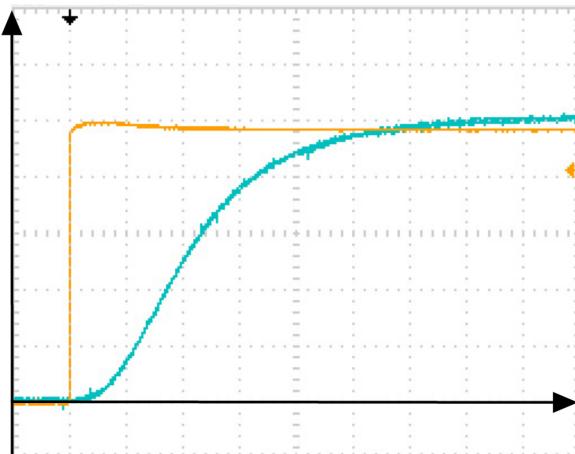
Abbildung 20: Simulation der Sprungantworten eines PT4-Gliedes

Der Stationärwert dieses Systemes beträgt $u_{a, st} = 261 \text{ mV}$.

2.8.4 Messvorgang & Auswertung

Nach dem Aufbau der Schaltung Abb.19 wurde am Eingang ein Rechtecksignal mit $0V - 1V$ und einer kleinen Frequenz von $f = 100\text{ kHz}$ angelegt.

Die Aufzeichnung der Sprungantwort ergab folgendes:



Dabei gilt folgendes:

$y - Achse \dots \dots \dots$	$u(t)$
$x - Achse \dots \dots \dots$	t
$u_e(t) \dots [200\text{ mV}/Div.]$	(gelb) CH1
$u_a(t) \dots [50\text{ mV}/Div.]$	(blau) CH2
$M \dots \dots [500\mu\text{s}/Div.]$	horiz. Skalenteilung

Abbildung 21: Oszilloskopaufnahme der Sprungantwort eines passiven, nicht invertierenden PT4-Gliedes

Nun wird die Zeitprozentkennwertmethode von PTn-Gliedern angewandt, indem die Zeit bis zum Erreichen von 10%, 50% & 90% des Stationärwertes seit $t = 0$ gemessen wird.

Folgende Messungen wurden durchgeführt:

- | | | |
|------------------|---------|---|
| u_a , st | 260 mV | ✓ |
| T_{10} | 0,46 ms | (10 % des Stationärwertes (= 26 mV) sind erreicht) |
| T_{50} | 1,06 ms | (50 % des Stationärwertes (= 130 mV) sind erreicht) |
| T_{90} | 2,56 ms | (90 % des Stationärwertes (= 234 mV) sind erreicht) |

Aus einer Tabelle von unserem Professor können nun folgende Werte, durch lineare Interpolation, entnommen werden:

$$\frac{T_{90}}{T_{10}} = 5,567 \quad \frac{T_{50}}{T_{10}} = 2,304 \quad \rightarrow n = 3 \ a = 5,32, \ b = 2,67, \ c = 1,1, \ K = (u_{\text{a, st}}) = 0,26 \ (\text{siehe Tabelle})$$

Somit ergibt sich folgender Wert (Mittelwert) für die Zeitkonstante τ :

$$\tau = \frac{\frac{T_{90}}{a} + \frac{T_{50}}{b} + \frac{T_{10}}{c}}{3} = 1,27\,ms$$

Die näherungsweise Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich lautet nun:

$$\underline{G(s) = \frac{K}{(1+s\tau)^n} = \frac{0,26}{(1+s \cdot 0,00127)^3}} \quad (39)$$

Übertragungsfunktion (Laplace-Bereich)

Gibt man diese Formel in das Computeralgebrasystem ein und vergleicht diese Sprungantwort, mit der berechneten, so stellten wir fest, dass sich diese beiden Kurven exakt überlagern:

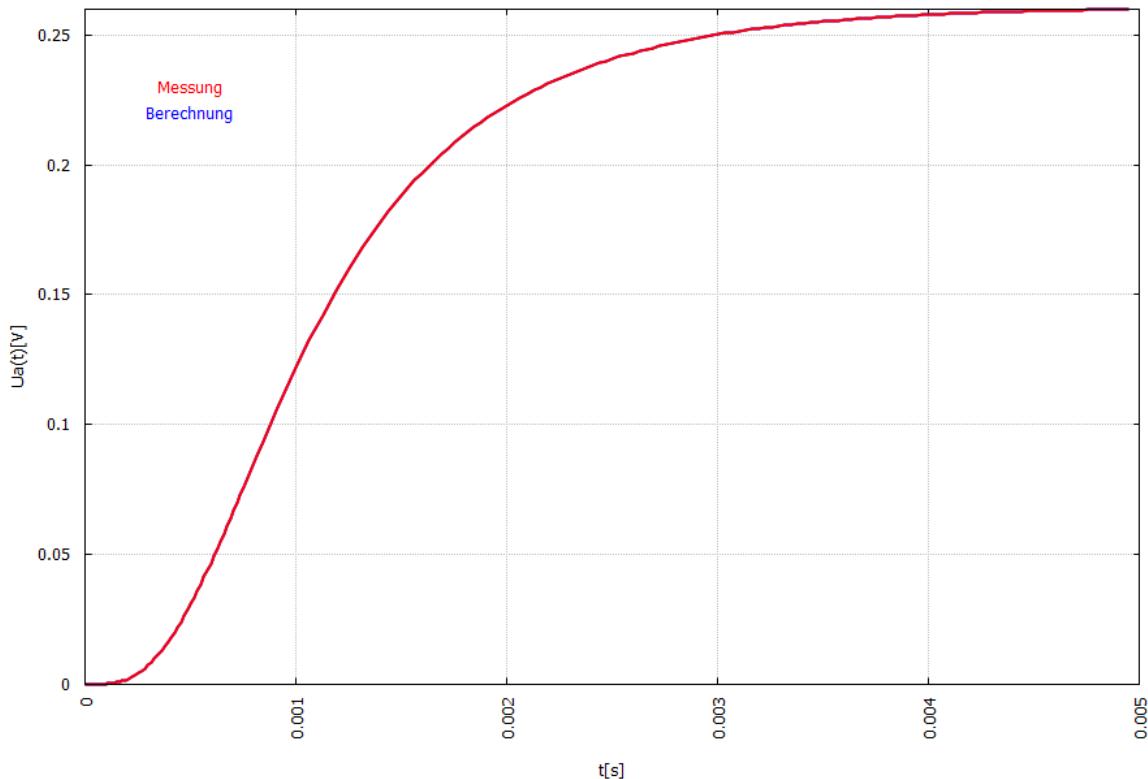


Abbildung 22: Vergleich der Sprungantworten des PT4-Gliedes (Messung & Berechnung)

Eigentlich wollten wir die beiden Kurven gegenüberstellen, da aber die Abweichung so klein ist, ist dies nicht wirklich möglich. Somit kann man sagen, dass diese Übertragungsfunktion relativ genau übereinstimmt.

Die Übertragungsfunktion im Zeitbereich lautet somit: (Es kann die Formel 39 in Maxima eingegeben und die Sprungantwort im Zeitbereich berechnet oder es wäre auch leicht händisch möglich, was aber auf Grund der Länge nicht mehr gemacht wird.)

$$\underline{u_a(t) = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[\frac{t^2}{2\tau^2} + \frac{t}{\tau} + 1 \right] \right]} \quad (40)$$

Sprungantwort (Zeitbereich)

3 Resümee

Abschließend lässt sich sagen, dass man relativ einfach durch Messungen, näherungsweise Rückschlüsse auf die Sprungantwort des Systemes ziehen kann.

Aus den einzelnen Sprungantworten der einzelnen Übertragungsglieder lassen sich eine Vielzahl an Informationen, wie zB. Zeitkonstanten, Stationärwert, Maximalwerte, Steigungen, Überschwingweite, Eigenperiodendauer,... ablesen. Somit kann alleine durch die Sprungantwort auf das jeweilige System rückgeschlossen werden.

Durch die Veränderung einzelner Parameter, zB. Widerstandswert, Induktivitätswert,..., lässt sich das Verhalten des Systemes relativ leicht beeinflussen und somit den gewünschten Anforderungen anpassen. Es wurde versucht das gesamte Projekt übersichtlich und verständlich zu gestalten, um somit den Mitschülern & weiteren Personen einen kurzen Einglick in den Teil „Sprungantworten“-Regelungstechnik, zu gewähren.

Literatur- und Quellenverzeichnis

- [1] Wilhelm Haager: Regelungstechnik, © Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Wien 2007,
2. Auflage, Nachdruck 2014 (2,12)

Nun noch die Tabelle für die Bestimmung von PTn-Gliedern:

T₉₀/T₁₀ ≤ 7,3:										
T ₉₀ /T ₁₀	23	7,3	4,84	3,84	3,29	2,94	2,71	2,53	2,39	2,28
T ₅₀ /T ₁₀	6,8	3,16	2,43	2,11	1,92	1,8	1,71	1,65	1,6	1,55
T ₉₀ /T	2,3	3,89	5,32	6,68	7,99	9,72	10,5	11,8	13	14,2
T ₅₀ /T	0,69	1,68	2,67	3,67	4,67	5,67	6,67	7,67	8,67	9,67
T ₁₀ /T	0,11	0,53	1,1	1,74	2,43	3,15	3,89	4,66	5,43	6,22
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10