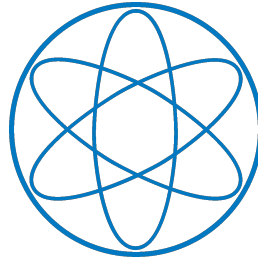


Anfängerpraktikum Teil 2

(Thermodynamik und Elektrodynamik)

Brückenschaltungen



Kurs 3, Gruppe 4, Team 11:

Michael Labenbacher

Marius Straßner

Fakultät für Physik

Technische Universität München

1. Wheatston'sche Brücke	1
1.1. Einleitung	1
1.2. Beschreibung der verwendeten Methoden	1
1.3. Experimentelles Vorgehen	2
1.4. Ergebnisse	3
1.4.1. kleines Potentiometer	3
1.4.2. Spulenwiderstände	4
1.4.3. Glühbirne	5
1.5. Zusammenfassung	6
2. Wechselspannungsbrücke	7
2.1. Einleitung	7
2.2. Beschreibung der verwendeten Methoden	7
2.3. Induktivitätsmessung	8
2.3.1. Experimentelles Vorgehen	8
2.3.2. Ergebnisse	9
2.4. Kapazitätsmessung	10
2.4.1. Experimentelles Vorgehen	10
2.4.2. Ergebnisse	10
2.5. Zusammenfassung	10

Anhang	11
A. Fehlerrechnung	11
A.1. Wheatston'schen Brücke	11
A.2. Wechselspannungsbrücke	12
B. Literaturverzeichnis	14
C. Abbildungsverzeichnis	15
D. Tabellenverzeichnis	16

Dienstag 31. Juli, 2018

1. Wheatston'sche Brücke

1.1. Einleitung

Im ersten Teil ist der „ohmsche“ Widerstand von diversen Bauelementen zu messen, wobei Leitungswiderstände vernachlässigt und das vereinfachte ohmsche Gesetz angewendet werden. Aus diesen Ergebnissen ist die verbrauchte Leistung einer Glühbirne bestimmt und das Strom-Spannungsverhalten derer analysiert. Im weiteren Verlauf des Versuches sind Induktivitäten von Spulen mit Hilfe der gemessenen Widerstandsanteile zu ermitteln. Angemerkt sei hier, dass nicht explizit angeführte Messwerte dem Messprotokoll zu entnehmen sind.

1.2. Beschreibung der verwendeten Methoden

In der Abbildung 1.1 ist der Aufbau der Brückenschaltung dargestellt, wobei der Widerstand R als Zehngangpotentiometer R_{P2} realisiert wurde und sich in zwei Komponenten

$$R_3 = R_{P2AM} = R \cdot x \quad (1.1)$$

$$R_4 = R_{P2ME} = R \cdot (n - x) \quad (1.2)$$

zerlegen lässt. Dabei ist x die Potentiometerstellung in Skalenteile Sktlen, $n = 1000$ Sktlen (10 Umdrehungen mit je 100 Sktlen) die maximale theoretische Stellung vom Potentiometer und die Abkürzungen A, M und E stehen immer für Anfang, Mittel und Ende. Der Widerstand $R_2 = R_V$ ist variabel und R_1 stellt das zu untersuchende Bauteil dar.

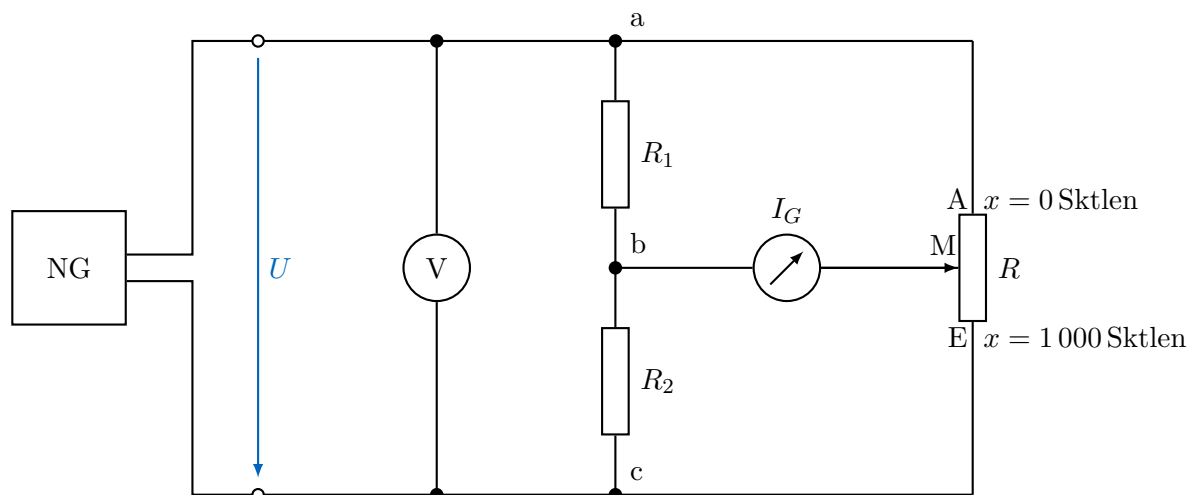


Abbildung 1.1.: Schaltbild der verwendeten Wheatstone'schen Brücke mit Potentiometer

Die vom Netzgerät NG erzeugte, konstante Spannung U dient als Versorgung und das Mikroamperemeter im Brückenweig misst den Strom I_G in der Diagonalen zwischen den Punkten b und M in der Abbildung 1.1.

Mit der Ladungserhaltung (Knotenregel, 1. Kirchhoffsche Regel)

$$\sum_n I_n = 0 \quad (1.3)$$

und der Maschenregel (2. Kirchhoffsche Regel)

$$\sum_n Z_n I_n = \sum_m U_m \quad (1.4)$$

mit Z_n als Impedanzen, kann die Abgleichbedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{x}{n-x} \quad (1.5)$$

für den Fall, dass die Brücke in Abbildung 1.1 abgeglichen ist, hergeleitet werden. Dabei ist abgeglichen genau dann, wenn die Potentialdifferenz zwischen b und M Null ist, was gleichbedeutend mit $I_G = 0$ ist.

Die Gleichung

$$P = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (1.6)$$

beschreibt den Zusammenhang von der Leistung P und dem Strom durch bzw. der Spannung am Bauelement, wenn man sich auf Gleichströme bzw. -spannungen beschränkt.

1.3. Experimentelles Vorgehen

Die zu untersuchenden Komponenten sind in der Tabelle 1.1 aufgelistet. Am Beginn wird jeweils die an der Schaltung angelegte Spannung U vom Netzgerät mit Hilfe eines digitalen Messgeräts (Votcraft VC120) gemessen. Daraufhin kann, durch Verändern der Potentiometerstellung x die Brücke abgeglichen werden. Dies geschieht, indem der Strom durch die Diagonalen mittels eines μ -Amperemeter (Klasse 2.5, senkrechte Gebrauchslage, feinabgleich möglich) erfasst und auf Null „geregelt“ wird. Anschließend die Stellung des Zehngangpotentiometers ablesen und mit Gleichung (1.5) kann man über R_2 den unbekannte Widerstand berechnen.

Tabelle 1.1.: Gesuchte Widerstandswerte

R_1	Beschreibung
R_{P1}	Gesamtwiderstand des kleinen Potentiometers
R_{L1}	Spulenwiderstand der kleinen Spule
$R_{L2} / R_{L2_{AM}} / R_{L2_{ME}}$	Spulenwiderstände der Cu-Spule mit 250 Windungen (Gesamtwiderstand, Widerstand zwischen A-M und M-E)
R_{GL}	Glühbirne (LD 57906)

Messungen:

1. Für drei Vergleichswiderstände ($10\ \Omega$, $20\ \Omega$ und $100\ \Omega$) wurde bei einer Spannung von $U = 1\ \text{V}$ der maximale Widerstand des kleinen Potentiometers erfasst.
2. Bei $U = 1\ \text{V}$ und $R_V = 10\ \Omega$ wurde der Widerstand der kleinen Spule ermittelt und mit jeweils drei Abgleichungen die der Cu-Spule.
3. Für vier Vergleichswiderstände ($10\ \Omega$, $20\ \Omega$, $100\ \Omega$ und $200\ \Omega$) wurde bei einer Spannung von $U = 1\ \text{V}$ der Widerstand der Glühlampe nach abgleichen der Brücke berechnet.
4. Mit $R_V = 10\ \Omega$ konnte bei den Spannungen $2\ \text{V}$, $3\ \text{V}$, $4\ \text{V}$, $5\ \text{V}$ und $6\ \text{V}$ jeweils abgeglichen werden, wobei eine Messreihe bei steigender Spannung und eine bei fallender aufgezeichnet wurden. Analog für Vergleichswiderstände von $30\ \Omega$ bzw. $200\ \Omega$.

1.4. Ergebnisse**1.4.1. kleines Potentiometer**

Bei den Messungen wurde berücksichtigt, dass die Herstellergenauigkeit für die drei Vergleichswiderstände $\Delta R_{V,\text{syst}} = 1\ \% \cdot R_V$ beträgt. Die systematischen Abweichungen der Potentiometerstellung des Zehngangpotentiometers betragen

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{syst}} &= (\text{Nullpunkt-} + \text{Linearisierungs-} + \text{Skalierungsfehler} \cdot \text{Messwert}) \text{ Sktlen} \\ &= (0.5 + 1 + 0.2\ \% \cdot \text{Messwert}) \text{ Sktlen},\end{aligned}$$

wobei sich der Skalierungsfehler aus der Abweichung vom Sollwert bei Vollausschlag ergibt und der Linearisierungsfehler abgeschätzt wurde. Mit den statistische Schwankungen, die sich aus einer Ableseungenauigkeit und kleinen statistischen Abweichungen der systematischen Fehler (Skalierungsfehler wurde durch Messen bei Vollausschlag ermittelt) ergeben, von $\Delta x_{\text{stat}} = 0.5 \text{ Sktlen}$ und anschließender linearen Addition lässt sich der Gesamtwiderstand des kleinen Potentiometers mit Unsicherheit durch Fortpflanzung bestimmen. Die Fehlerrechnung ist dem Abschnitt A.1 zu entnehmen und in der Tabelle 1.2 sind die, mit dem Zusammenhang (1.5), berechneten Werte bei einer Versorgungsspannung von $U = (1.002 \pm 0.007)\ \text{V}$ aufgelistet. Da die Unsicherheit des μ -Amperemeters mit $\pm(1\ \mu\text{A} + 1 \text{ digit})$ sehr gering ist, wird bei den folgenden Messungen angenommen, dass der Strom I_G verschwindet.

Tabelle 1.2.: Mess- und Rechenergebnisse der Einzelmessungen für das kleine Potentiometer

\bar{R}_V Ω	ΔR_V Ω	\bar{x} Sktlen	Δx Sktlen	\bar{R}_{P1} Ω	ΔR_{P1} Ω
10.00	0.10	913	3	105	6
30.0	0.3	773	3	102	3
100.0	1.0	508.5	2.5	103.3	2.3

Da alle Messergebnisse sich im Bereich der Unsicherheiten überlappen kann ein gewichteter Mittelwert bestimmt werden:

$$R_{P1} = (103.0 \pm 1.8)\ \Omega$$

Diskussion

Der gemittelte Wert für den ohmschen Widerstand des Potentiometers 1 liegt in der Nähe des angegebenen Wertes von $100\ \Omega$. [1] Diverse Abweichungen davon können ohne Toleranzangabe des Sollwertes nur bedingt durchgeführt werden. Abweichungen durch Erwärmung sind in diesen Strombereichen, sowie Leitungswiderstände nicht nennenswert, jedoch immer vorhanden.

1.4.2. Spulenwiderstände

Analog zu der Berücksichtigung von den Abweichungen im Unterabschnitt 1.4.1 erhält man mit Gleichung (1.5) die Werte in Tabelle 1.3 bei einer Spannung von $U = (1.001 \pm 0.007)\text{ V}$.

Tabelle 1.3.: Mess- und Rechenergebnisse der Einzelmessungen für die Spulen

\bar{R}_V Ω	ΔR_V Ω	\bar{x} Sktlen	Δx Sktlen	\bar{R}_{L1} Ω	ΔR_{L1} Ω	\bar{R}_{L2} Ω	ΔR_{L2} Ω
10.00	0.10	402.0	2.3	6.72	0.15		
10.00	0.10	67.0	2.1			0.72	0.03
30.0	0.3	66.0	2.1			0.71	0.03
100.0	1.0	63.0	2.1			0.67	0.03
\bar{R}_V Ω	ΔR_V Ω	\bar{x} Sktlen	Δx Sktlen	\bar{R}_{L2AM} Ω	ΔR_{L2AM} Ω	\bar{R}_{L2ME} Ω	ΔR_{L2ME} Ω
10.00	0.10	37.0	2.1	0.384	0.026		
10.00	0.10	34.0	2.1	0.352	0.026		
10.00	0.10	34.0	2.1	0.352	0.026		
10.00	0.10	40.0	2.1			0.417	0.027
10.00	0.10	38.0	2.1			0.395	0.026
10.00	0.10	38.0	2.1			0.395	0.026

Eine gewichtete Mittlung liefert

$$R_{L2} = (0.699 \pm 0.018)\ \Omega$$

$$R_{L2AM} = (0.362 \pm 0.015)\ \Omega$$

$$R_{L2ME} = (0.402 \pm 0.015)\ \Omega$$

Diskussion

Es lässt sich bei solch kleinen Widerständen deutlich erkennen, dass die berechneten Mittelwerte nicht übereinstimmen, jedoch wenn man den Messwert bei gleichem Vorwiderstand betrachtet, so ergibt im Toleranzbereich die Summe aus den beiden Teilwiderständen den Gesamtwiderstand der Cu-Spule. Erwärmungen sind hier kaum nennenswert, jedoch beeinflussen Leitungswiderstände die Messwerte und wir konnten erkennen, dass bei kleinen Störeinflüssen (Wackeln an den Strippenenden) der Feinausschlag des μ -Amperemeters leicht variierte.

1.4.3. Glühbirne

Bei der Verwendung der Glühbirne als unbekannten Widerstand in der Brückenschaltung, liefert eine Berechnung analog zum Unterabschnitt 1.4.1 den Widerstand in der Tabelle 1.4 bei gegebenen Vorwiderstand. Mit dem ohmschen Gesetz folgt der Strom I bei abgeglichenen Brücke durch die Glühbirne und mit dem Zusammenhang (1.6) ergibt sich die verbrauchte Leistung P . Fehlerrechnung ist dem Abschnitt A.1 zu entnehmen, wobei quadratisch für statistische und linear für systematische fortgepflanzt wurden und am Ende jeweils eine lineare Addition beider folgte.

Analoge Betrachtung für die aufgenommenen Messreihen bei unterschiedlichen Versorgungsspannungen und Vorwiderstände liefert die Graphen in Abbildung 1.2 und 1.3.

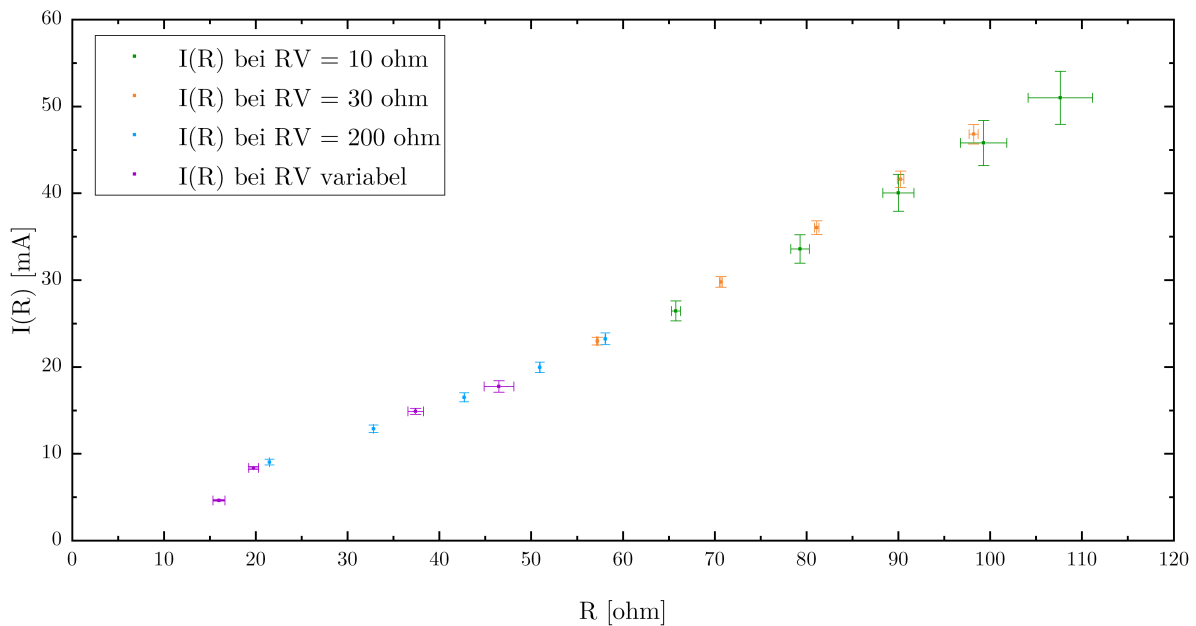


Abbildung 1.2.: $I(R)$ -Kennlinie der Glühbirne bei unterschiedlichen Vorwiderständen in der Brückenschaltung linear aufgetragen. Erkennbar ist ein nichtlinearer Verlauf, was auf die Temperaturabhängigkeit rückzuführen ist. Die Unsicherheiten ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung im Abschnitt A.1. (In der Abbildung ist $R = R_{GL}$)

Tabelle 1.4.: Mess- und Rechenergebnisse der Einzelmessungen für die Glühbirne bei unterschiedlichen Vorwiderständen

\bar{R}_V Ω	ΔR_V Ω	\bar{R}_{GL} Ω	ΔR_{GL} Ω	\bar{I} mA	ΔI mA	\bar{P} mW	ΔP mW
10.00	0.10	46.5	1.6	17.7	0.6	14.6	0.6
30.0	0.3	37.4	0.8	14.9	0.3	8.28	0.21
100.0	1.0	19.8	0.5	8.38	0.16	1.39	0.05
200.0	2.0	16.0	0.7	4.64	0.09	0.345	0.017

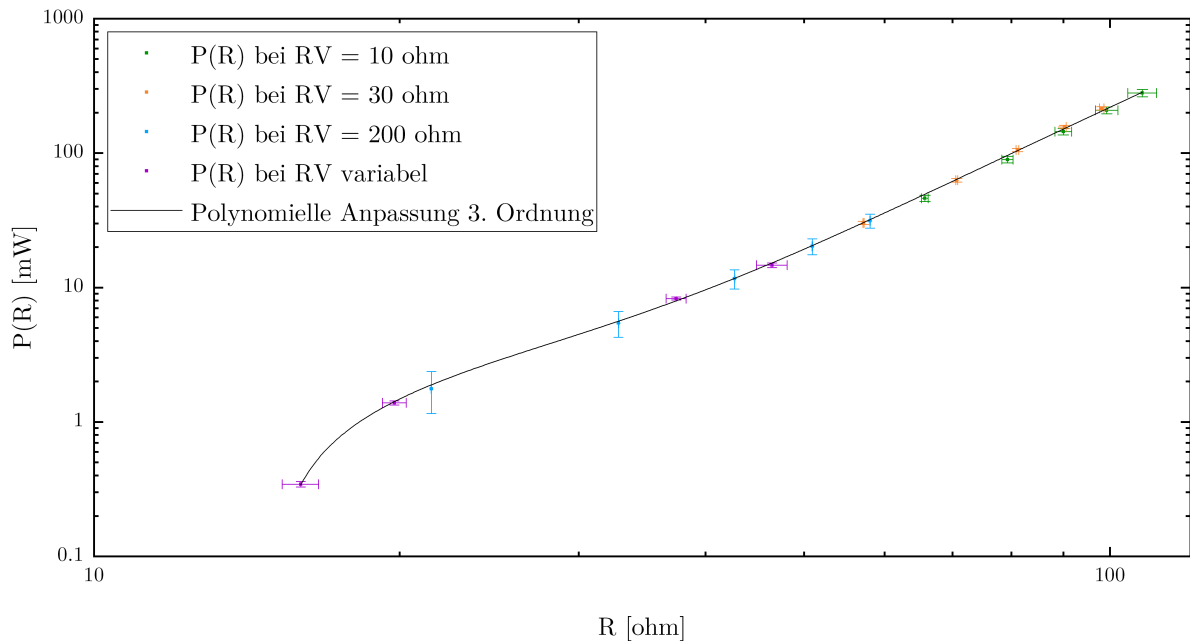


Abbildung 1.3.: $P(R)$ -Kennlinie der Glühlampe bei unterschiedlichen Vorwiderständen in der Brückenschaltung doppelt-logarithmisch aufgetragen. Erkennbar ist ein linearer Verlauf im logarithmischen Maß bei größeren Stromstärken, was auf einen polynimalen Verlauf von $P(R)$ schließen lässt. Im unteren Bereich sind Abweichungen der Geraden, was durch den Zusammenhang (1.6) erklärt werden kann, wie in der Diskussion besprochen wird. Die Unsicherheiten ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung im Abschnitt A.1. Die Anpassung wurde unter Berücksichtigung der y-Abweichungen durchgeführt. (In der Abbildung ist $R = R_{GL}$)

Diskussion

Es lässt sich aus den Werten in Tabelle 1.4 erkennen, dass bei steigender Stromstärke, bzw. verbrauchter Leistung der Widerstand der Lampe durch den Temperaturanstieg zunimmt, was dadurch begründet ist, dass die Leitfähigkeit von Metallen bei Temperaturerhöhung sinkt. Mit

$$P = I^2 \cdot R_{GL} = U^2 \cdot \frac{R_{GL}}{(R_{GL} + R_V)^2}$$

beim Abgleich erkennt man, dass ein polynomialer Verlauf bei konstantem U und R_V vorliegt.

1.5. Zusammenfassung

Mit den Werten des Gesamtwiderstandes des kleinen Potentiometers in Tabelle 1.2 lässt sich erkennen, dass es sich hier wie erwartet um einen rein ohmschen Verbraucher handelt, die verbrauchte Leistung bzw. die Stromstärke, unter Vernachlässigung von Temperaturerhöhungen, keinen Einfluss hat. Die Abweichungen bei dem Gesamtwiderstand der Cu-Spule und den Teilwiderständen lässt sich dadurch begründen, dass Leitungswiderstände und die „Qualität“ von Kontakten bei kleinen zu messenden Widerständen einen höheren Einfluss haben. Der erfasste Wertebereich scheint realistisch in anbeacht der beobachteten Drahtlänge und -querschnitt.

2. Wechselspannungsbrücke

2.1. Einleitung

Im zweiten Teil sind die Induktivitäten von den beiden Spulen bzw. Spulenteile im Kapitel 1, sowie die Kapazität eines unbekannten Kondensators zu messen, wobei Leitungswiderstände vernachlässigt werden. Aus diesen Ergebnissen ist das Wicklungsschema der großen Cu-Spule zu analysieren.

2.2. Beschreibung der verwendeten Methoden

In der Abbildung 2.1 ist der prinzipielle Aufbau der verwendeten Wechselspannungsbrücke skizziert, wobei der Widerstand R als Zehngangpotentiometer R_{P2} realisiert wurde und sich in zwei Brücken-komponenten, wie im Abschnitt 1.2 erläutert, zerlegen lässt. Im Verlauf des Kapitels ist entweder die Impedanz Z_1 oder Z_2 jeweils unbekannt.

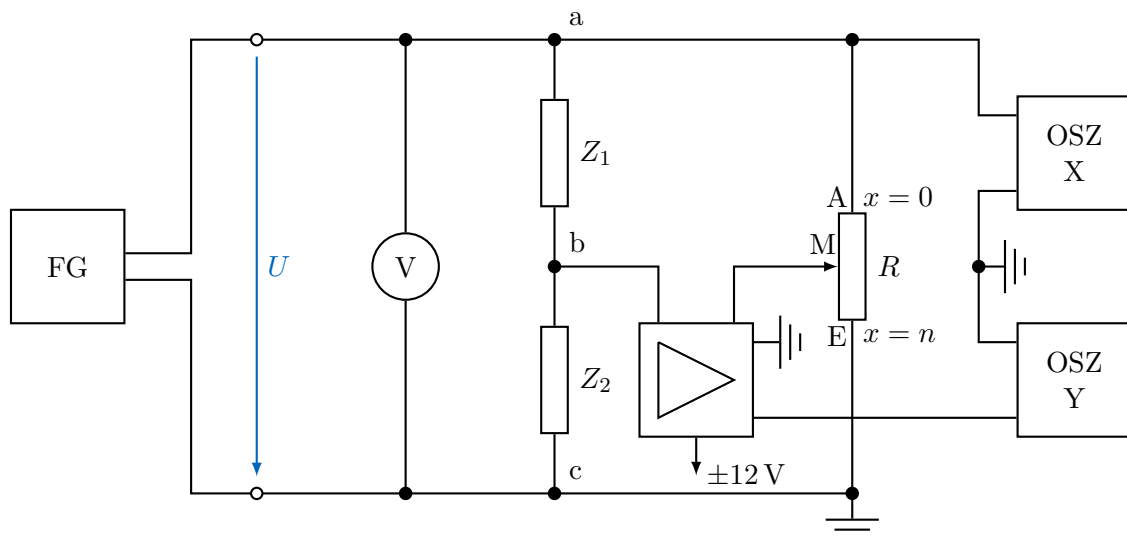


Abbildung 2.1.: Schaltbild der verwendeten Wechselspannungsbrücke mit Potentiometer und Reaktanzbrücke

Die vom Funktionsgenerator FG erzeugte, ideal betrachtete, sinusförmige Wechselspannung U dient als Versorgung und der Verstärker zwischen b und M in Abbildung 2.1 bezieht die Differenzspannung auf Masse (GND).

Mit der, im Prinzip selben Herleitung wie in Kapitel 1 gelangt man auf die Abgleichbedingung

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{x}{n-x} \quad (2.1)$$

für den Fall, dass sozusagen für „alle“ Zeiten die Potentialdifferenz der Brückendiagonalen Null (Y-t-Betrieb) ist, was gleichbedeutend mit einer geraden Linie im X-Y-Betrieb am Oszilloskope ist.

Die Induktivität L einer Zylinderspule beliebiger Flächen A (Querschnitt) ist mit der magnetischen relativen Permeabilität $\mu_r \approx 1$ (Luft) und der mag. Feldkonstante μ_0 gegeben durch

$$L = \mu_0 \frac{A \cdot N^2}{l}, \quad (2.2)$$

wobei eine Halbierung der Windungszahl N und Länge l zur halben Induktivität führt.

2.3. Induktivitätsmessung

2.3.1. Experimentelles Vorgehen

1. Teil

Die Impedanzen im ersten Teil

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_{L1} + i\omega L_1 \\ Z_2 &= R_{L2} + R_V + i\omega L_2 \end{aligned}$$

werden durch die beiden Spule (Index L1 für die kleine Spule und L2 für die Cu-Spule, wie in Kapitel 1) und einen variablen Widerstand gebildet. Dabei wird R_V durch das kleine Potentiometer, in Kapitel 1 berechnet, $R_V = R_{P1AM} = R_{P1} \cdot y$ realisiert und y stellt die Potentiometerstellung dessen dar. Der Imaginärteil der Abgleichbedingung liefert den Zusammenhang

$$L_1 = L_2 \frac{x}{n - x} \quad (2.3)$$

Die Vergleichsspule 2 hat laut Angabe den Wert

$$L_2 = (2.30 \pm 0.10) \text{ mH}$$

mit systematischer Unsicherheit und einer Windungszahl von $N = 250$ Windungen.

Am Beginn wird jeweils die an der Schaltung durch den Frequenzgenerator (Votcraft 632 FG) angelegte Spannung U mit Hilfe des Oszilloskopes (Votcraft 632 FG) visualisiert und auf $f \approx 1 \text{ kHz}$ mit Spitzenwert von $\hat{u} \approx 0.2 \text{ V} - 0.5 \text{ V}$ eingestellt. Daraufhin kann im X-Y-Betrieb der Abgleich erfolgen, indem die beiden Potentiometer so eingestellt werden, dass eine waagrechte Gerade sichtbar ist, wobei man die Skalierungen so fein wie nur möglich einstellen muss. Anschließend die Stellung des Zehngangpotentiometers R_{P1} ablesen und mit Gleichung (2.1) kann, durch aufspalten in Imaginär- und Realteil die unbekannte Induktivität L_1 berechnet werden. Die Brücke wurde mehrmals bei unterschiedlichen Spitzenwerten der Spannung abgeglichen.

2. Teil

Analog wiederholt man den Vorgang in Teil 1, wobei die Schaltung, bis auf die Cu-Spule unverändert bleibt. Statt der gesamten Cu-Spule verwendet man nur den Teil von A - M bzw.

M - E und kann nun da man die Induktivität der Spule 1 kennt, die Teilinduktivitäten $L_{2\text{AM}}$ bzw. $L_{2\text{ME}}$ mit der Abgleichbedingung bestimmen. Die Impedanzen und der Imaginärteil der Abgleichung im 2. Teil lauten nach Gleichung (2.1):

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_{L1} + i\omega L_1 \\ Z_2 &= R_{L2p} + R_V + i\omega L_{2p} \\ L_{2p} &= L_1 \frac{n-x}{x} \quad \text{mit Index p von AM bzw. ME} \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3.2. Ergebnisse

1. Teil

Der Abgleich der Brückenschaltung wurde dreimal wiederholt und die Potentiometerstellung x vom Zehngangpotentiometer gemittelt. Die statistische Abweichung ergibt sich aus der Standardabweichung, wobei drei Messungen einen Student-t-Faktor von $t_{\text{Student}} = 1.32$ liefern. Die systematische setzt sich wie in Unterabschnitt 1.4.1 erläutert zusammen, wobei als Messwert der Mittelwert für den Skalierungsfehler verwendet wurde.

Durch einfache Fehlerfortpflanzung im Abschnitt A.2 ergibt sich mit der Formel (2.3) die unbekannte Induktivität

$$L_1 = (3.31 \pm 0.19) \text{ mH}$$

2. Teil

Der Abgleich hier wurde zweimal für jeden Teil der Cu-Spule durchgeführt, weshalb $t_{\text{Student}} = 1.84$ ist und analoges rechnen zum Teil 1, mit der vereinfachten Abgleichbedingung (2.4) liefert

$$\begin{aligned} L_{2\text{AM}} &= (0.54 \pm 0.05) \text{ mH} \\ L_{2\text{ME}} &= (0.71 \pm 0.06) \text{ mH} \end{aligned}$$

Diskussion

Betrachtet man das Widerstandsverhältnis der beiden Teile der Cu-Spule

$$\frac{R_{2\text{AM}}}{R_{2\text{ME}}} \approx 0.9$$

so lässt sich erkennen, dass die Drahtlängen grob abgeschätzt betrachtet gleich sind. Die Summe beider Teilinduktivitäten liegt, bei

$$L_{2\text{AM}} + L_{2\text{ME}} = (1.25 \pm 0.10) \text{ mH}$$

, also, wie die Theorie erwartet, im Toleranzbereich von der Gesamtinduktivität und analog grob gesagt sind beide Teilinduktivitäten „gleich“ groß. Dies kann mit der Formel (2.2) erreicht werden, wenn jeder Teil ca. $N/2$ Windungen besitzt und die Spulenkörperlänge jeweils die Hälfte beträgt.

2.4. Kapazitätsmessung

2.4.1. Experimentelles Vorgehen

Die Impedanzen in Abbildung 2.1 setzen sich in diesem Teil aus dem unbekannten Elektrolytkondensator 1 mit nennenswerten parallelen Widerstand R_{C1}

$$Z_1 = \frac{R_{C1}}{1 + i\omega C_1 R_{C1}}$$

und dem bekannten, ideal betrachteten Kondensator 2 mit $C_2 = 1 \mu\text{F}$ mit 5 % systematischer Unsicherheit und dem veränderlichen in Serie dazu geschalteten Widerstand

$$Z_2 = R_V + \frac{1}{i\omega C_2}$$

zusammen. Dabei wird R_V durch das kleine Potentiometer, dessen Gesamtwiderstand in Unterabschnitt 1.4.1 berechnet wurde, realisiert.

$$R_V = R_{P1} \frac{y}{n_y - y}$$

Die Potentiometerstellung wird mit y gekennzeichnet und $n_y = 1000$ Sktlen ist die max. Stellung. Dies führt, hergeleitet in Abschnitt A.2 mit Taylor 1. Ordnung auf die Formel

$$C_1 = C_2 \frac{n - x}{x} \quad (2.5)$$

für die Berechnung der unbekannten Kapazität C_1 . Analog zum experimentellen Vorgehen im Abschnitt 2.3 wird mit Hilfe des Frequenzgenerators / Oszilloskopes eine Spannung mit $f \approx 1 \text{ kHz}$ und $\hat{u} = 0.2 \text{ V}$ eingestellt. Daraufhin erfolgte einmal im X-Y- und einmal im Y-t-Betrieb der Abgleich der Brücke.

2.4.2. Ergebnisse

Zweimaliges Abgleichen, messen und mitteln der Potentiometerstellung x vom Zehngangpotentiometer liefert mit der Formel

$$C_1 = (4.3 \pm 0.3) \mu\text{F}$$

Dabei wurde die statistische Abweichung für x über die Student-t-Verteilung mit $t_{\text{Student}} = 1.84$ berechnet und die systematische setzt sich, wie im Unterabschnitt 1.4.1 erläutert, zusammen. Anschließend folgte die Fortpflanzung aus den Abweichungen von x und C_2 .

2.5. Zusammenfassung

Bei den Induktivitäten konnte man die Beziehung $L = \sum_i L_i$ für eine Serienschaltung von Wicklungen beobachten, wobei im Toleranzbereich die Summe der Teilinduktivitäten der Cu-Spule übereinstimmten. Bei der Kapazitätsmessung ergab sich ein realistischer Wert und wir konnten beobachten, dass wenn R_V „nicht abgeglichen“ eingestellt war, sich durch verändern vom Zehngangpotentiometer die Phase zwischen der Eingangs- und Differenzspannung änderte.

A. Fehlerrechnung

A.1. Wheatston'schen Brücke

Rechnungen von gewichteten Mittelwerten werden aus Trivialitäten nicht angeführt und die Formeln halten sich allgemein an einen beliebigen, unbekannte Widerstand R_1 , welcher jeweils durch das Bauteil ersetzt wird.

Spannung U

- Pseudostatistischer Anteil durch die Reproduzierbarkeit von $\Delta U_{\text{stat}1} = 2 \text{ digit}$
- statistischer Anteil durch die Auflösung von $\Delta U_{\text{stat}2} = 10 \text{ mV}$
- systematischer Abweichung durch die Genauigkeit von $\Delta U_{\text{syst}} = 0.5 \% \cdot \text{Messwert}$

$$\Delta U_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta U_{\text{stat}1}^2 + \Delta U_{\text{stat}2}^2}$$

$$\Delta U = \Delta U_{\text{stat}} + \Delta U_{\text{syst}}$$

variabler Widerstand $R_2 = R_V$

- systematischer Abweichung durch die Herstellerangabe von $\Delta R_{V_{\text{syst}}} = 1 \% \cdot R_V$

Position x des Potentiometers R_{P2}

- systematischer Abweichung durch den Nullpunktfehler von $\Delta x_{\text{syst}1} = 0.5 \text{ Sktlen}$, geschätzte Nichtlinearitäten $\Delta x_{\text{syst}2} = 1 \text{ Sktlen}$ und einem Skalierungsfehler von $\Delta x_{\text{syst}3} = \frac{2}{1002} \cdot 100 \% = 0.2 \% \cdot \text{Messwert}$, berechnet durch Messung von $x_{\text{max}} = 1002 \text{ Sktlen}$
- statistische Abweichungen durch Ableseungenauigkeiten und ev. statistischen Schwankungen beim berechneten Skalierungsfehler $\Delta x_{\text{stat}} = 0.5 \text{ Sktlen}$

$$\Delta x_{\text{syst}} = \Delta x_{\text{syst}1} + \Delta x_{\text{syst}2} + \Delta x_{\text{syst}3}$$

$$\Delta x = \Delta x_{\text{stat}} + \Delta x_{\text{syst}}$$

unbekannter Widerstand R_1

Die Unsicherheiten ergeben sich aus der quadratischen bzw. linearen Fehlerfortpflanzung mit Gleichung (1.5), unter Berücksichtigung von $\Delta R_2 = \Delta R_{V_{\text{stat}}} = 0$ zu:

$$\Delta R_{1_{\text{syst}}} = \left| \Delta R_{2_{\text{syst}}} \cdot \left(\frac{\bar{x}}{n - \bar{x}} \right) \right| + \left| \Delta x_{\text{syst}} \cdot \left(\frac{n}{(n - \bar{x})^2} \right) \right|$$

$$\Delta R_{1_{\text{stat}}} = \sqrt{\left(\Delta x_{\text{stat}} \cdot \left(\frac{n}{(n - \bar{x})^2} \right) \right)^2}$$

$$\Delta R_1 = \Delta R_{1_{\text{stat}}} + \Delta R_{1_{\text{syst}}}$$

Strom I durch den unbekannten Widerstand beim Abgleich

Unter den gegebenen Voraussetzungen, beim Abgleich und einer kleinen Nebenrechnung

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{U}{R_2} \cdot \frac{n - x}{x}$$

folgt die Fehlerfortpflanzung auf den Strom I :

$$\Delta I_{\text{syst}} = \left| \Delta U_{\text{syst}} \left(\frac{1}{\bar{R}_2} \cdot \frac{n - \bar{x}}{n} \right) \right| + \left| \Delta R_{2\text{syst}} \left(\frac{\bar{U}}{\bar{R}_2^2} \cdot \frac{n - \bar{x}}{n} \right) \right| + \left| \Delta x_{\text{syst}} \left(\frac{\bar{U}}{n \bar{R}_2} \right) \right|$$

$$\Delta I_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\Delta U_{\text{stat}} \left(\frac{1}{\bar{R}_2} \cdot \frac{n - \bar{x}}{n} \right) \right)^2 + \left(\Delta x_{\text{stat}} \left(\frac{\bar{U}}{n \bar{R}_2} \right) \right)^2}$$

$$\Delta I = \Delta I_{\text{stat}} + \Delta I_{\text{syst}}$$

Leistung P am unbekannten Widerstand beim Abgleich

Unter den gegebenen Voraussetzungen, beim Abgleich und einer kleinen Nebenrechnung

$$P \stackrel{(1.6)}{=} I^2 \cdot R_1 \stackrel{(1.5)}{=} I^2 R_2 \cdot \frac{x}{n - x} = \frac{U^2}{R_2} \cdot \frac{(n - x)x}{n^2}$$

folgt die Fehlerfortpflanzung auf die verbrauchte Leistung P :

$$\Delta P_{\text{syst}} = \left| \Delta U_{\text{syst}} \left(\frac{2\bar{U}}{\bar{R}_2} \cdot \frac{(n - \bar{x})\bar{x}}{n^2} \right) \right| + \left| \Delta R_{2\text{syst}} \left(\frac{\bar{U}^2}{\bar{R}_2^2} \cdot \frac{(n - \bar{x})\bar{x}}{n^2} \right) \right| + \left| \Delta x_{\text{syst}} \left(\frac{\bar{U}^2}{\bar{R}_2} \cdot \frac{(n - 2\bar{x})}{n^2} \right) \right|$$

$$\Delta P_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\Delta U_{\text{stat}} \left(\frac{2\bar{U}}{\bar{R}_2} \cdot \frac{(n - \bar{x})\bar{x}}{n^2} \right) \right)^2 + \left(\Delta x_{\text{stat}} \left(\frac{\bar{U}^2}{\bar{R}_2} \cdot \frac{(n - 2\bar{x})}{n^2} \right) \right)^2}$$

$$\Delta P = \Delta P_{\text{stat}} + \Delta P_{\text{syst}}$$

A.2. Wechselspannungsbrücke

Für die Position x des Zehngangpotentiometers ist die Rechnung jeweils die selbe. Für weiteres ist dieses Kapitel in drei Teile gegliedert:

1. Induktivität der kleinen Spule
2. Teilinduktivitäten der Cu-Spule
3. Kapazität eines Kondensators

Position x des Potentiometers R_{P2}

- systematischer Abweichung analog zum Abschnitt A.1.
- statistische Abweichungen werden hier durch die Student-t-Verteilung berechnet $\Delta x_{\text{stat}} = \frac{t_{\text{Student}}}{\sqrt{m}} \cdot \sigma_x$, mit m der Anzahl an Messungen, $t_{\text{Student}} = 1.84$ für $m = 2$ und $t_{\text{Student}} = 1.32$ für $m = 3$ und σ_x der Standardabweichung.

$$\Delta x_{\text{syst}} = \Delta x_{\text{syst}1} + \Delta x_{\text{syst}2} + \Delta x_{\text{syst}3}$$

$$\Delta x = \Delta x_{\text{stat}} + \Delta x_{\text{syst}}$$

1. Induktivität der kleinen Spule

Mit dem Zusammenhang (2.3) lässt sich der Fehler für die Spule L_1 berechnen, wobei berücksichtigt wird, dass ΔL_2 rein systematisch ist:

$$\begin{aligned}\Delta L_{1\text{sys}} &= \left| \Delta L_{2\text{sys}} \left(\frac{\bar{x}}{n - \bar{x}} \right) \right| + \left| \Delta x_{\text{sys}} \left(\bar{L}_2 \frac{n}{(n - \bar{x})^2} \right) \right| \\ \Delta L_{1\text{stat}} &= \sqrt{\left(\Delta x_{\text{sys}} \left(\bar{L}_2 \frac{n}{(n - \bar{x})^2} \right) \right)^2} \\ \Delta L_1 &= \Delta L_{1\text{stat}} + \Delta L_{1\text{sys}}\end{aligned}$$

2. Teilinduktivitäten der Cu-Spule

Analoges vorgehen wie im vorherigen Teil mit der Formel (2.4) liefert die Messabweichungen für die Teilinduktivitäten.

3. Kapazität eines Kondensators

Herleitung der Formel für die gesuchte Kapazität C_1 aus der Abgleichbedingung (2.1) und mit den Impedanzen im Unterabschnitt 2.4.1 liefert

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{R_{C1}}{1 + i\omega C_1 R_{C1}} \stackrel{(2.1)}{=} Z_2 \cdot \frac{x}{n - x} = \left(R_V + \frac{1}{i\omega C_2} \right) \frac{x}{n - x} \quad \rightarrow \\ i\omega C_2 R_{C1} &= (1 + i\omega C_2 R_V) (1 + i\omega C_1 R_{C1}) \frac{x}{n - x}\end{aligned}$$

Aufspalten in Imaginär- und Realteil führt mit $R_V = R_{P1} \frac{y}{n_y - y}$ auf die zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned}\text{Re (2):} \quad 1 &= \omega^2 C_2 C_1 R_{C1} R_{P1} \frac{y}{n_y - y} \\ \text{Im (1):} \quad C_1 &= C_2 \frac{R_{C1} - R_{P1} \frac{y}{n_y - y} \frac{x}{n - x}}{R_{C1} \frac{x}{n - x}} \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} C_2 \frac{n - x}{x}\end{aligned}$$

Die Entwicklung wurde um den Entwicklungspunkt $s_0 = 0$ durchgeführt mit $s = \frac{y}{n_y - y} \frac{x}{n - x}$. Der Grund dafür liegt darin, dass mit den gemittelten Messwerten gilt: $\bar{s} \approx 0.072$.

Führt man die Fehlerfortpflanzung analog zum 1. Teil für die kleine Spule durch, so erhält man die Messabweichungen für die Kapazität C_1 .

B. Literaturverzeichnis

- [1] *Brückenschaltungen (BRUE)*. 2014. URL: <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap2/BRUE.pdf> (besucht am 1. August 2018) (siehe S. 4).

C. Abbildungsverzeichnis

1.1	Schaltbild der verwendeten Wheatstone'schen Brücke mit Potentiometer	1
1.2	$I(R)$ -Kennlinie der Glühbirne bei unterschiedlichen Vorwiderständen in der Brückenschaltung linear aufgetragen. Erkennbar ist ein nichtlinearer Verlauf, was auf die Temperaturabhängigkeit rückzuführen ist. Die Unsicherheiten ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung im Abschnitt A.1. (In der Abbildung ist $R = R_{GL}$)	5
1.3	$P(R)$ -Kennlinie der Glühbirne bei unterschiedlichen Vorwiderständen in der Brückenschaltung doppelt-logarithmisch aufgetragen. Erkennbar ist ein linearer Verlauf im logarithmischen Maß bei größeren Stromstärken, was auf einen polynimalen Verlauf von $P(R)$ schließen lässt. Im unteren Bereich sind Abweichungen der Geraden, was durch den Zusammenhang (1.6) erklärt werden kann, wie in der Diskussion besprochen wird. Die Unsicherheiten ergeben sich aus der Fehlerfortpflanzung im Abschnitt A.1. Die Anpassung wurde unter Berücksichtigung der y-Abweichungen durchgeführt. (In der Abbildung ist $R = R_{GL}$) . . .	6
2.1	Schaltbild der verwendeten Wechselspannungsbrücke mit Potentiometer und Reaktanzbrücke	7

D. Tabellenverzeichnis

1.1	Gesuchte Widerstandswerte	2
1.2	Mess- und Rechenergebnisse der Einzelmessungen für das kleine Potentiometer	3
1.3	Mess- und Rechenergebnisse der Einzelmessungen für die Spulen	4
1.4	Mess- und Rechenergebnisse der Einzelmessungen für die Glühbirne bei unterschiedlichen Vorwiderständen	5