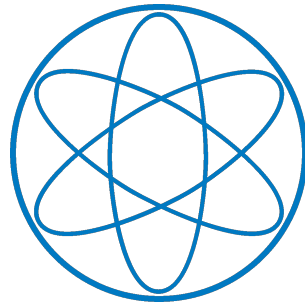


Anfängerpraktikum Teil 3

(Optik und Atomphysik)

Röntgenstrahlung



Block B, Kurs 3, Gruppe 1, Team 2:

Eduard Koller

Michael Labenbacher

Fakultät für Physik

Technische Universität München

1. Einleitung	1
2. Verwendete Methoden	1
2.1. Grundlagen	1
2.2. Absorption von Röntgenstrahlen	1
2.3. Detektortotzeit	2
2.4. Beugung am Gitter	2
3. Experimentelles Vorgehen	2
4. Auswertung der Messergebnisse	4
4.1. Fehlerbetrachtung	4
4.1.1. Winkelungenauigkeit	4
4.2. Emissionsspektrum der Molybdän-Röntgenröhre	5
4.3. Transmission der Zirkonium-Folie	6
4.4. Gitterkonstante und Netzebenenabstand des LiF-Kristalls	8
4.5. Detektortotzeit	9
4.6. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums	10
5. Fragen	11
Anhang	13
A. Messwerte und Fehlerrechnung	13
A.1. Winkelungenauigkeit	13
A.2. Emissionsspektrum der Molybdän-Röntgenröhre	13
A.3. Transmission der Zirkonium-Folie	14
A.4. Gitterkonstante und Netzebenenabstand des LiF-Kristalls	14

A.5. Detektortotzeit	15
A.6. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums	15
B. Literaturverzeichnis	17

1. Einleitung

Mit Hilfe einer Röntgenröhre wird im folgenden Versuch Röntgenstrahlung erzeugt, untersucht und angewendet, um Netzebenenabstände von Kristallen und Absorptionsverhalten von Materialien zu untersuchen. Des Weiteren wird das Plancksche Wirkungsquantum bestimmt und es sei angemerkt, dass sich Messwerte und Fehlerrechnungen im Anhang befinden.

2. Verwendete Methoden

2.1. Grundlagen

Als Röntgenstrahlung bezeichnet man kurzwellige elektromagnetische Wellen, die bei der Abbremsung schneller Elektronen in der Elektronenhülle von Atomen entstehen. Die Energie und Frequenz sind über

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (2.1)$$

direkt proportional zueinander, mit h dem Planckschen Wirkungsquantum. Bei der entstehenden Strahlung unterscheidet man grundsätzlich zwischen zwei Typen, der Brems- und der charakteristischen Strahlung.

- Bremsstrahlung:

Treten die Elektronen in die Anode ein, so werden diese abgebremst. Dabei kann maximal die gesamte kinetische Energie $E_{\text{kin}} = eU$ abgegeben werden, um ein Röntgenquant zu erzeugen. Für die minimale Wellenlänge (Grenzwellenlänge) folgt mit Gleichung (2.1) der Zusammenhang

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eU} \quad (2.2)$$

- Charakteristische Röntgenstrahlung:

Ausreichend schnelle Elektronen können anstatt abgebremst zu werden Elektronen aus dem Atom heraus schlagen. Die dabei entstehenden unbesetzten Zustände (Löcher) werden durch Elektronen aus höheren Schalen gefüllt, die beim Nachrücken die charakteristische Strahlung, gemäß der Energiedifferenz, aussenden.

2.2. Absorption von Röntgenstrahlen

Für die Intensität I bei der Absorption von elektromagnetischen Wellen durch ein Material gilt

$$I(d) = I_0 e^{-\mu d}, \quad (2.3)$$

wobei μ ein materialabhängiger Absorptionskoeffizient, I_0 die Intensität vor Eintritt in das Absorptionsmaterial und d die Eindringtiefe in das Material ist. Man stellt fest, dass die Absorption von Comptonstreuung, elastische Streuung und Photoeffekt verursacht wird und in der

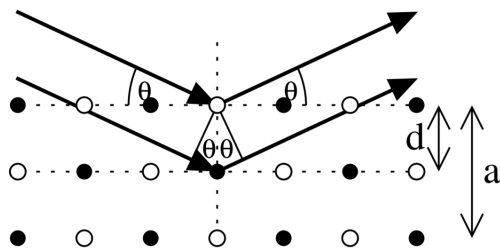
Größenordnung $\mathcal{O}(\lambda^3)$ von der Wellenlänge abhängt. Mit abnehmender Wellenlänge kommt es zu einem starken Anstieg der Absorptionsstärke, da Röntgenquanten nun genug Energie haben um energetisch stärker gebundene Elektronen aus weiter innen liegenden Schalen des Atoms zu lösen. Dieser sprunghafte Anstieg des Absorptionskoeffizienten bezeichnet man als Absorptionskante.

2.3. Detektortotzeit

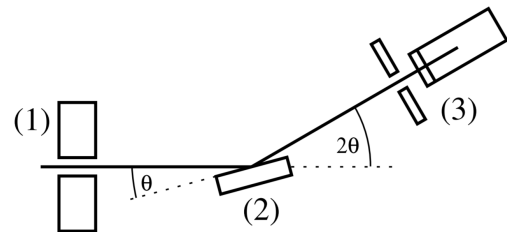
Zum Detektieren von Röntgenstrahlung kann z. B. ein Geiger-Müller-Zählrohr benutzt werden. Konstruktionsbedingt benötigt dieser Detektor eine gewisse Zeit τ nach der Messung eines Photons bis er weitere Photonen registrieren kann. Für die gemessene Zählrate R_z und der tatsächlichen Rate R der eintreffenden Photonen gilt der Zusammenhang

$$R_z = R e^{-R\tau}. \quad (2.4)$$

2.4. Beugung am Gitter



a. Bragg-Beugung am Kristall mit Netzebenenabstand d und Gitterkonstante a für z. B. NaCl- oder LiF-Kristalle.



b. Schematische Darstellung der θ - 2θ -Kopplung von Proben- und Detektorwinkel: (1) Kollimator, (2) Probenstück, (3) Detektor mit Blende.

Abbildung 2.1.: Skizze zur Bragg-Beugung an einem Gitter und Detektion [1].

Für die Bestimmung der Wellenlänge von Röntgenstrahlung kann man Beugungs- oder Interferenzexperimente nutzen. Bei Kristallgittern mit Gitterkonstanten $a = 2d$ (Netzebenenabstand d) erhält man für Einfallswinkel ϑ_n genau dann ein Intensitätsmaximum, wenn die Bragg-Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin(\vartheta_n), \quad (2.5)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, erfüllt ist.

3. Experimentelles Vorgehen

Der Versuch ist an einem LD-Didactic 554 81 Schulröntgengerät durchzuführen und mithilfe des Computerprogramms X-Ray aufzuzeichnen. Der Aufbau setzt sich aus

Glühkathode - Abschnitt zur Beschleunigung (durch Spannung U) - Molybdän-Anode -
 Probenstisch mit ϑ -2 ϑ -Koppelung zum Geiger-Müller-Zählrohr

zusammen. Insgesamt gibt es zwei Versuchsteile, den ersten mit dem NaCl- und den zweiten mit dem LiF-Kristall. Zum Vorgang: Die Kathodenspannung U reguliert den Austritt von Elektronen aus der Glühkathode und damit den Emissionsstrom I . Nach Austritt werden diese mit der Spannung U beschleunigt und treffen auf der Anode auf und Röntgenstrahlung entsteht, wobei die Anode schräg geschliffen ist, um eine Vorzugsrichtung zu erhalten. Die Röntgenstrahlung ist auf den Kristall gerichtet und der Detektor (Geiger-Müller-Zählrohr) kann rotiert werden.

Im ersten Schritt ist das Emissionsspektrum der Röntgenröhre mit dem NaCl-Einkristall, $U = 35 \text{ kV}$, $I = 0.8 \text{ mA}$, $\Delta t = 1 \text{ s}$ und Winkelschrittweite von $\Delta\theta = 0.1^\circ$ im Bereich von 2° bis 25° aufzunehmen. Im Bereich von 18° bis 23° ist mit höherer Integrationszeit $\Delta t = 8 \text{ s}$ und Emissionsstrom 1.0 mA die dritte Beugungsordnung aufzunehmen, falls diese sonst nicht klar erkennbar ist, was in diesem Versuch der Fall war. Analog mit der Zirkonium-Folie am Detektor zwischen 4° und 10° und für die Bestimmung der Winkelunsicherheit auf Grund der Positionierung des Kristalls auf der Halterung sind die Positionen der ersten Ordnung von der K_α - und K_β -Linie im Emissionsspektrum der Röntgenröhre vor und nach der Drehung des NaCl-Kristalls um 180° im Winkelbereich von 2° und 10° (ohne Zirkonium-Folie) aufzunehmen.

Im Folgenden ist das Emissionsspektrum der Röntgenröhre mit dem LiF-Kristall, analog zum ersten Schritt, aufzunehmen, um die Gitterkonstante zu bestimmen. Für die Erfassung der Detektortotzeit ist im Winkelbereich von 8° bis 11° bei Stromstärken von 0.1 mA bis 1.0 mA in 0.1 mA -Schritten, einer Messzeit pro Winkelschritt von $\Delta t = 4 \text{ s}$ und $U = 35 \text{ kV}$ das Spektrum aufzuzeichnen. Bestimmung der Zählraten der K_α -Peaks bei den Strömen liefert mit der Annahme der Proportionalität $R \propto I$ die Totzeit des Geiger-Müller-Zählrohrs. Im letzten Schritt soll mit den Parametereinstellungen in Tabelle 3.1 jeweils das Spektrum erfasst werden, was die Minimalwellenlänge in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung liefert.

Tabelle 3.1.: Parametereinstellungen zur Messung der Minimalwellenlänge in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung.

U kV	I mA	Δt s	Winkelbereich	
			min °	max °
35.0	0.8	8	4.0	6.5
32.5	0.8	8	4.5	7.0
30.0	0.8	8	5.0	7.5
28.0	1.0	16	5.5	8.0
26.0	1.0	16	6.0	8.5
24.0	1.0	16	6.5	8.5

4. Auswertung der Messergebnisse

4.1. Fehlerbetrachtung

Dem Aufbau bedingt sind systematische Fehler der Hochspannung von 0.5 kV, des Emissionsstromes von 20 μA und die des Winkels betragen 0.05° . Abweichungen in der Zeitmessung werden vernachlässigt und wenn bei einer (gewichteten) Mittlung die systematischen Fehler überwiegen und näherungsweise gleich sind, so ergibt sich der Gesamtfehler durch Addition des statistischen aus der Standardabweichung und dem Mittelwert der systematischen Abweichungen. Für die Parameter und Intervalle bei den Fits und die Fehlerrechnungen wird auf den Anhang A verwiesen.

4.1.1. Winkelungenauigkeit

Die systematische Unsicherheit der Winkelmessung von 0.05° beinhaltet die Genauigkeit der verwendeten Geräte und den Nullpunktfehler [1].

Nach der Aufnahme des Spektrums und Auswertung in Abbildung 4.1 zeigen die Peaks bei der ersten Ordnung der K_α - und K_β -Linie nach durchgeführtem Gauß-Fit, siehe Kapitel A.1, im Mittel Abweichungen vom Mittelwert zueinander von $(0.020 \pm 0.005)^\circ$. Dadurch wird eine zusätzliche, als systematisch behandelte Unsicherheit von 0.025° für die Positionierung des Kristalls abgeschätzt.

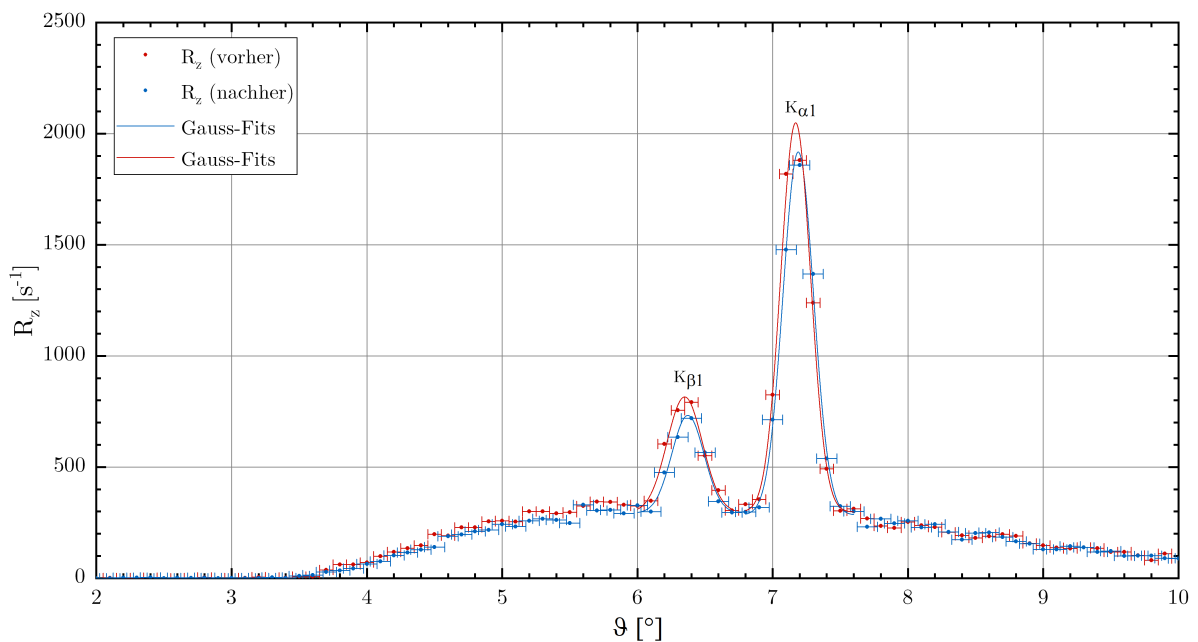


Abbildung 4.1.: Effektive Zählrate R_z der Molybdän-Anode in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϑ im Winkelbereich von 2° bis 10° , vor und nach der Drehung des NaCl-Kristalls um 180° .

4.2. Emissionsspektrum der Molybdän-Röntgenröhre

Das aufgezeichnete Emissionsspektrum der Molybdän-Anode durch Beugung an einem NaCl-Kristall in den Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigt die ersten drei Ordnungen der K_α - und K_β -Linie. Mit den Winkeln in Tabelle 4.1 des Maximums nach den Fits, siehe Abbildungen 4.2 und 4.3, folgt mit der Gitterkonstante $a = 564.02$ pm beim NaCl-Kristall die Wellenlänge in Tabelle 4.1 mit der Bragg-Bedingung (2.5). Mit Formel (2.1) lässt sich die Energie der betrachteten Linien berechnen, siehe Tabelle 4.1, und nach anschließender Mittelwertbildung folgen die Ergebnisse in Tabelle 4.2.

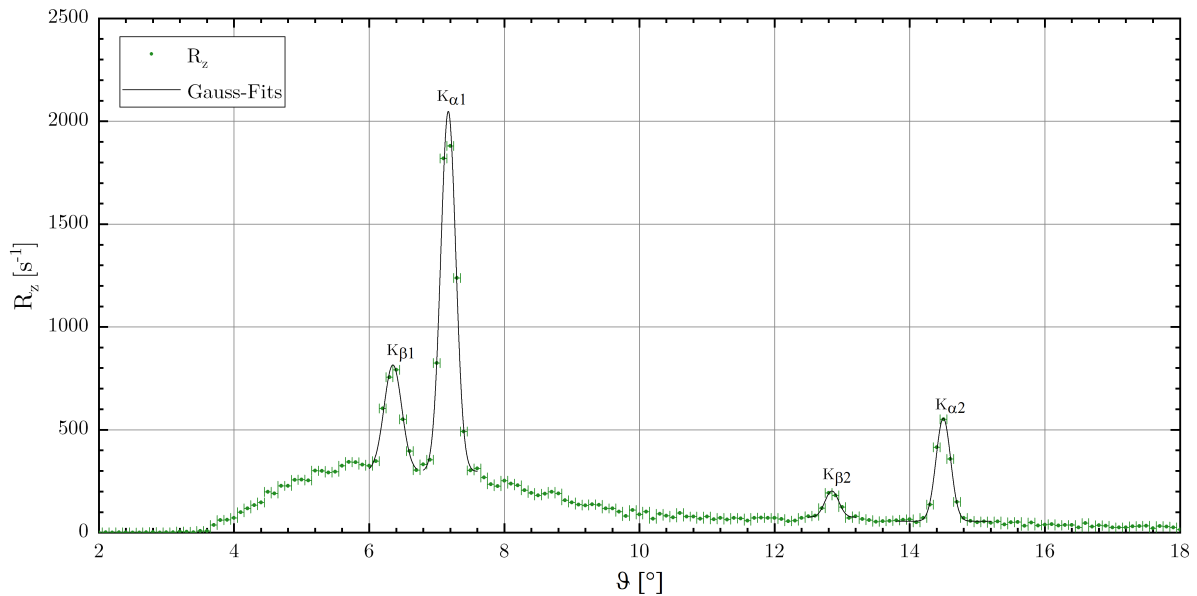


Abbildung 4.2.: Effektive Zählrate R_z der Molybdän-Anode in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϑ im Winkelbereich von 2° bis 18° mit NaCl-Kristall. Die vier Gauß-Fits bei den erkennbaren Peaks des Linienspektrums nach Bragg-Beugung erster und zweiter Ordnung liefern die Winkel in Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1.: Winkeln, Wellenlängen und Energien der K_α - und K_β -Linie des Linienspektrums der Molybdän-Anode.

Übergang	Ordnung	θ °	$\Delta\theta$ °	λ pm	$\Delta\lambda$ pm	E keV	ΔE keV
K_α	1	7.17	0.08	70.4	0.8	17.61	0.19
	2	14.50	0.08	70.6	0.4	17.56	0.09
	3	22.10	0.08	70.73	0.24	17.53	0.06
K_β	1	6.35	0.08	62.4	0.8	19.88	0.26
	2	12.85	0.08	62.7	0.4	19.77	0.13
	3	19.52	0.08	62.82	0.26	19.74	0.08

Es zeigt sich bei der Wellenlänge und Energie der Übergänge innerhalb des Toleranzbereiches Übereinstimmung zu den theoretischen Werten, siehe Tabelle 4.2. Abweichungen sind überwie-

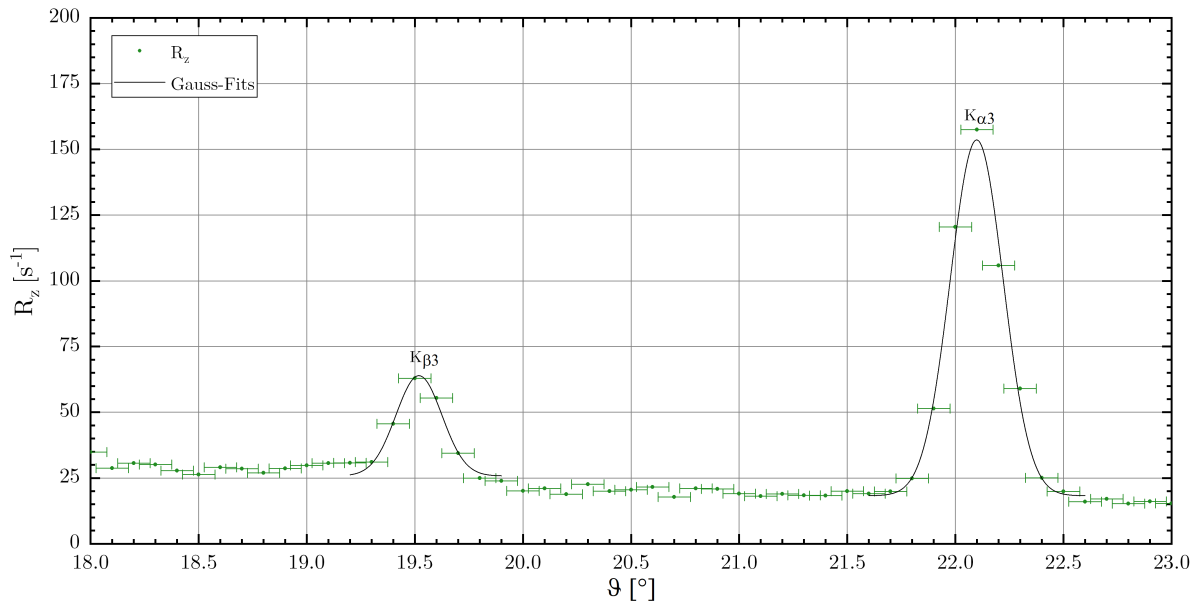


Abbildung 4.3.: Effektive Zählrate R_z der Molybdän-Anode in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϑ im Winkelbereich von 18° bis 23° mit NaCl-Kristall. Die beiden Gauß-Fits bei den erkennbaren Peaks des Linienspektrums nach Bragg-Beugung dritter Ordnung liefern die Winkel in Tabelle 4.1.

gend systematisch, vom Aufbau bedingt und des Weiteren lässt sich in der Abbildung 4.2 das dem Linienspektrum überlagerte Spektrum der Bremsstrahlung erkennen.

Tabelle 4.2.: Ergebnisse und theoretisch erwartete Werte der Wellenlängen und Energien der K_α - und K_β -Linie des Linienspektrums der Molybdän-Anode [2].

Übergang	Ergebnis				Theorie	
	λ pm	$\Delta\lambda$ pm	E keV	ΔE keV	λ pm	E keV
K_α	70.7	0.6	17.54	0.16	71.08	17.44
K_β	62.8	0.7	19.76	0.21	63.26	19.60

4.3. Transmission der Zirkonium-Folie

Aus den Spektren 4.4 mit und ohne Folie zur Absorption, Gleichung (2.3) und der Proportionalität $I/I_0 = R_z/R_{z,0}$ von Intensität und effektiver Zählrate folgt

$$\mu d = \ln \left(\frac{R_z}{R_{z,0}} \right), \quad (4.1)$$

mit $d = 0.05$ mm der Dicke des Zirkonium-Plättchens. Mit der Bragg-Bedingung (2.5) und der Annahme, dass es sich in dem Winkelbereich um ein Maxima erster Ordnung handelt, folgt die Transmissionskurve in Abbildung 4.5.

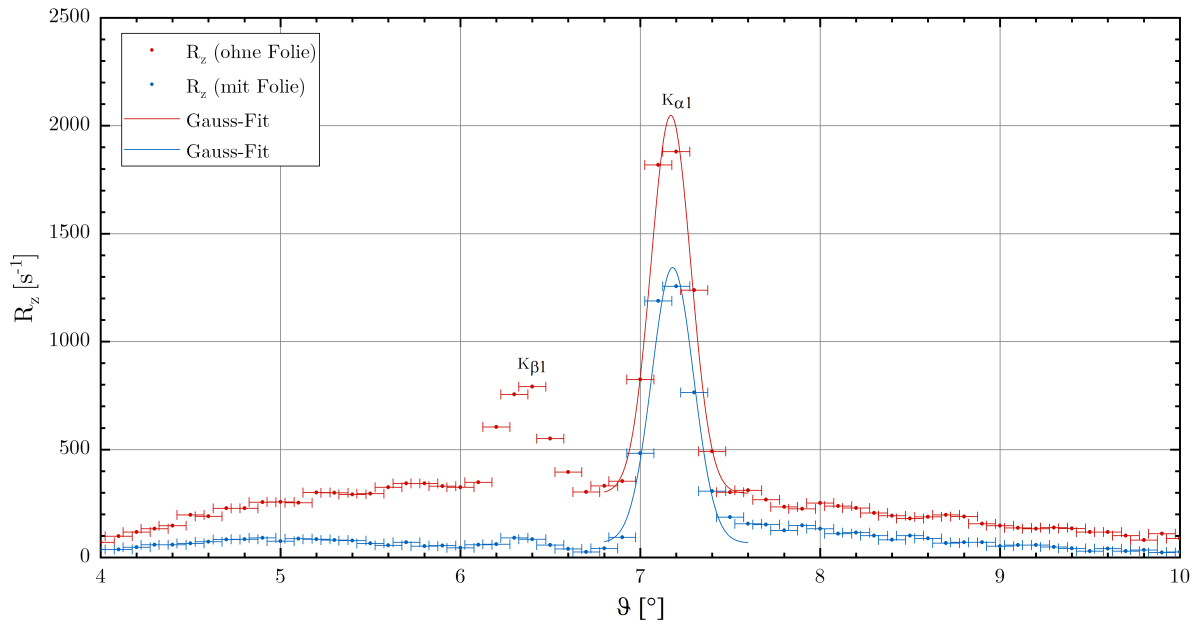


Abbildung 4.4.: Effektive Zählrate R_z der Molybdän-Anode in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϑ im Winkelbereich von 4° bis 10° mit NaCl-Kristall und Zirkonium-Folie. Es lässt sich eine starke Absorption bei der K_β - im Gegensatz zur K_α -Linie von Molybdän erkennen, dies kann durch die Lage der Absorptionskante, siehe Abbildung 4.5, erklärt werden.

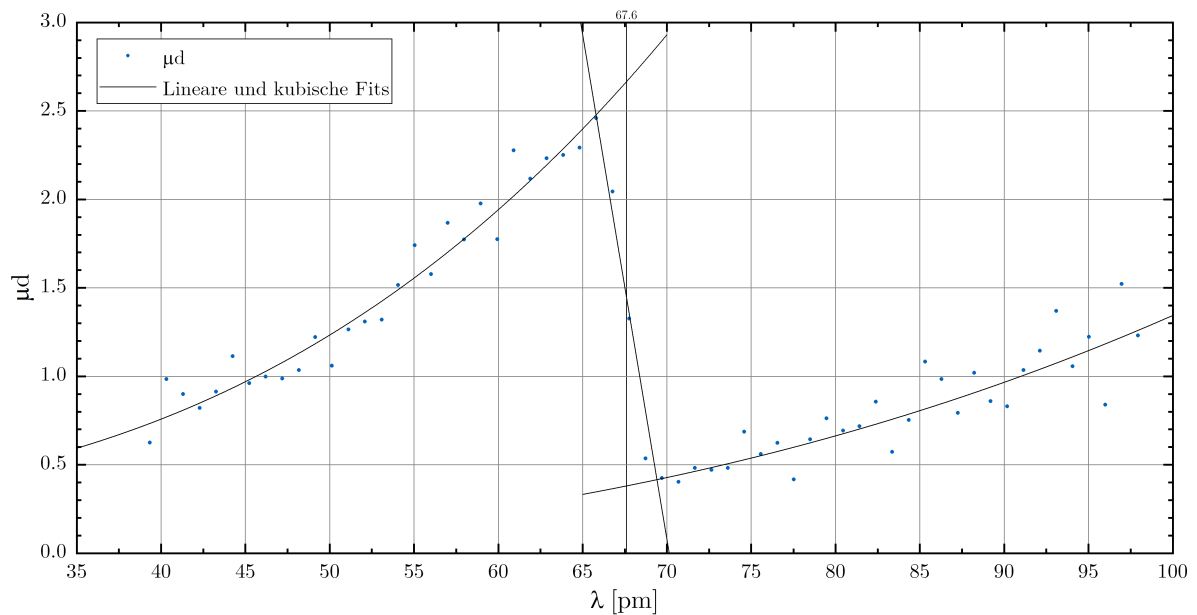


Abbildung 4.5.: Transmissionskurve (Produkt von Absorptionskoeffizient μ und Dicke d in Abhängigkeit der Wellenlänge λ) der Zirkonium-Folie im Winkelbereich von 4° bis 10° mit NaCl-Kristall. Lineare Näherung im Bereich der Kante von 65 pm bis 70 pm und kubische außerhalb liefern bei den Schnittpunkten ein Intervall für die Wellenlänge der Absorptionskante λ_{Kante} , Ergebnisse siehe Tabelle A.3.

Aus den Schnittpunkten der Fits in Abbildung 4.5 folgt durch Bildung des Mittelwertes

$$\lambda_{\text{Kante}} = (67.6 \pm 2.5) \text{ pm},$$

wobei die Intervall-Grenzen der Schnittpunkte systematisch zur mittleren systematischen Unsicherheit des Winkels von 0.75° , siehe Kapitel 4.1.1, als Maximalabschätzung nach Fehlerfortpflanzung hinzu addiert wurde. Die Energie der Absorptionskante folgt nach Formel (2.1) zu

$$E_{\text{Kante}} = (18.3 \pm 0.7) \text{ keV}.$$

Die ermittelte Transmissionskante in Abbildung 4.5 stimmt innerhalb des Toleranzbereiches gut mit dem Literaturwert von $\lambda_{\text{Kante}} = 68.88 \text{ pm}$ überein, analog die Energie mit $E_{\text{Kante}} = 18.00 \text{ keV}$ [2]. Es zeigte sich, dass mit Hilfe der Zirkonium-Folie die charakteristische Röntgenstrahlung gefiltert werden kann, so dass hinter dieser Folie näherungsweise monochromatische Strahlung vorliegt.

4.4. Gitterkonstante und Netzebenenabstand des LiF-Kristalls

Die Ergebnisse der Gauß-Fits in Abbildung 4.6 für die Winkeln der Maxima der $K_{\alpha,i}$ - und $K_{\beta,i}$ -Linien sind der Tabelle 4.3 zu entnehmen. Aus den berechneten Wellenlängen der $K_{\alpha,i}$ - und $K_{\beta,i}$ -Linien von Molybdän in Tabelle 4.1 folgen über die Bragg-Bedingung (2.5) die Gitterkonstanten a und der Netzebenenabstand d des LiF-Kristalls in Tabelle 4.3.

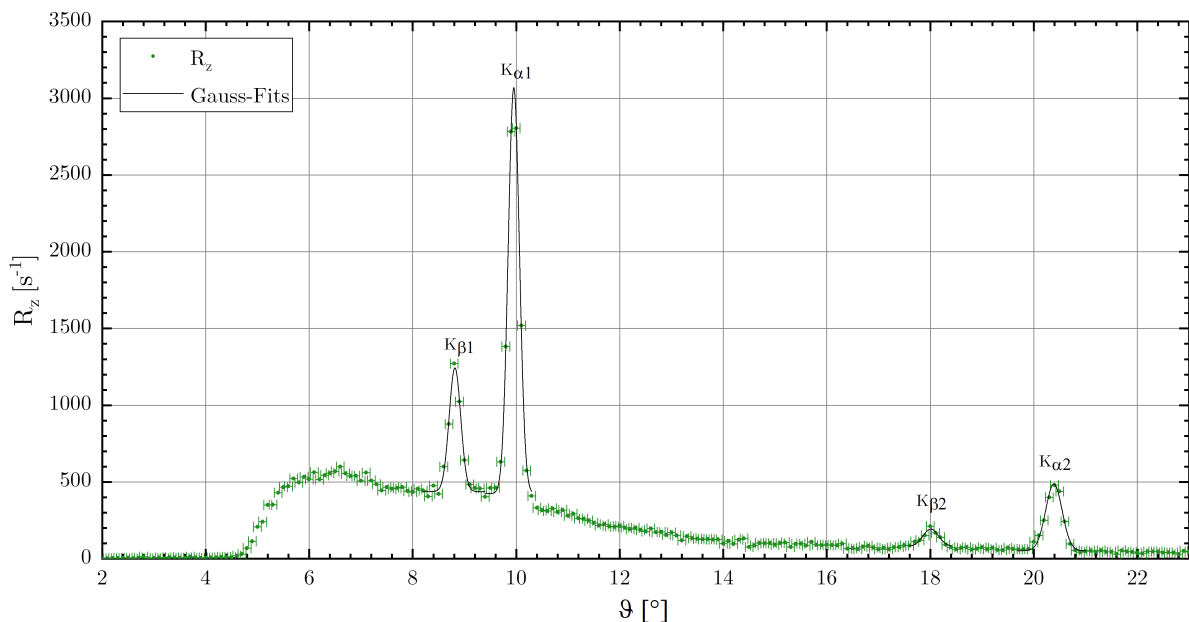


Abbildung 4.6.: Effektive Zählrate R_z der Molybdän-Anode in Abhängigkeit des Einfallswinkels ϑ im Winkelbereich von 2° bis 23° mit LiF-Kristall. Es lässt sich eine Verschiebung der Maxima zu größeren Winkeln im Gegensatz zum NaCl-Kristall erkennen, was nach der Bragg-Bedingung (2.5) eine Verkleinerung des Netzebenenabstandes erfordert.

Tabelle 4.3.: Ergebnisse der Gitterkonstanten und Netzebenenabstände des LiF-Kristalls.

Übergang	Ordnung	θ °	$\Delta\theta$ °	a pm	Δa pm	d pm	Δd pm
K_α	1	9.95	0.08	409	7	204	3
	2	20.39	0.08	406	5	202.9	2.6
K_β	1	8.81	0.08	410	8	205	4
	2	18.01	0.09	406	6	203	3

Durch gewichtete Mittelwertbildung der Ergebnisse in Tabelle 4.3 unter Berücksichtigung systematischer Abweichungen, siehe Kapitel 4.1, folgen

$$a = (407 \pm 10) \text{ pm}$$

$$d = (204 \pm 5) \text{ pm}$$

Ein Vergleich zur Theorie mit $a = 402.7 \text{ pm}$ [3] und $d = 201 \text{ pm}$ [4] zeigt im Toleranzbereich Übereinstimmung.

4.5. Detektortotzeit

Nach Bestimmung der Winkelpositionen der Extrema der $K_{\alpha,1}$ -Linie mit dem Emissionsspektrum 4.7 bei unterschiedlichen Strömen und unter Annahme der Linearität zwischen Strom und Zählrate folgt in Abbildung 4.8 der Fit nach Gleichung (2.4). Dies führt auf eine Totzeit

$$\tau = (70 \pm 4) \mu\text{s}.$$

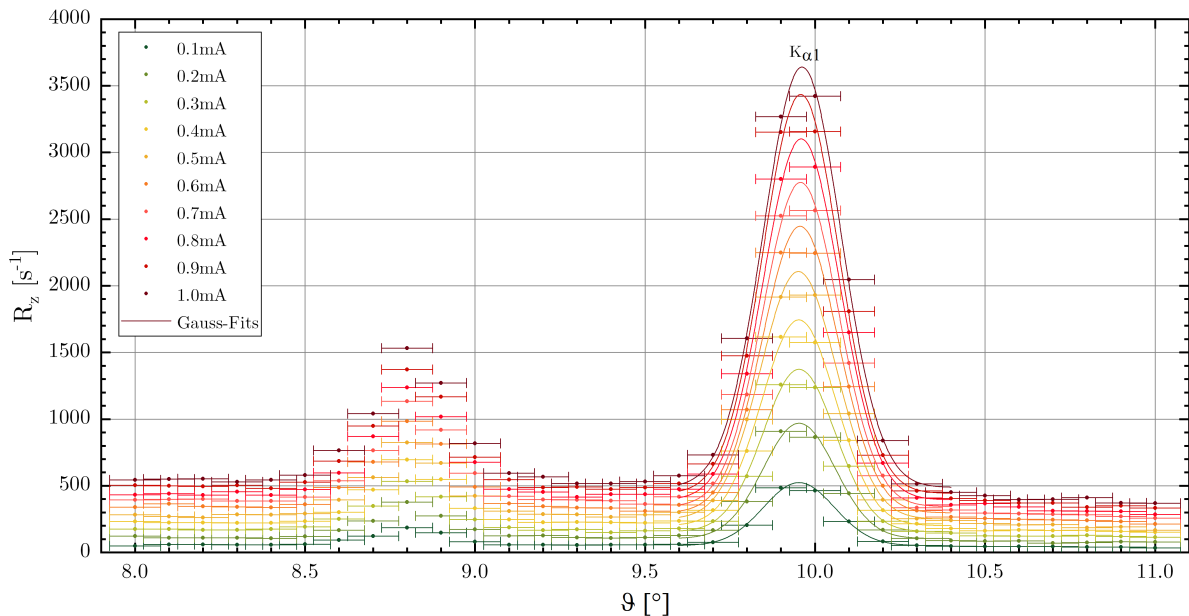


Abbildung 4.7.: Effektive Zählrate R_z der Molybdän-Anode in Abhängigkeit des Einfallswinkels θ im Winkelbereich von 8° bis 11° mit LiF-Kristall bei unterschiedlichen Stromstärken.

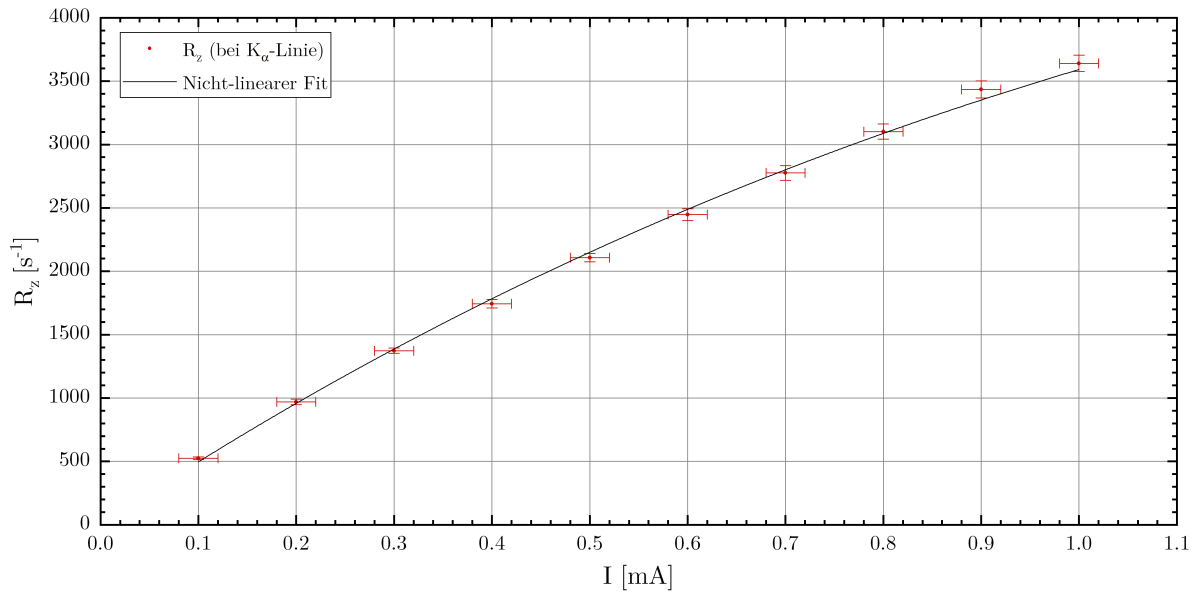


Abbildung 4.8.: Effektive Zählrate R_z der K_α -Linie (Bragg-Maxima erster Ordnung) in Abhängigkeit der Stromstärke in der Röntgenröhre. Nicht-linearer Fit nach Gleichung (2.4) unter Berücksichtigung von y -Fehler und der Annahme $R = k \cdot I$ mit k als Proportionalitätsfaktor führt auf die Detektortotzeit.

Das Datenblatt der VKA-Box [5] liefert eine Totzeit von ca. $60 \mu\text{s}$ und die Abweichung zum Messwert kann einerseits durch die getätigte Annahme der Linearität und dem Verfahren erklärt, sowie andererseits durch eine nicht ausreichend genaue Bestimmung der Winkel der Beugungsmaxima zurückgeführt werden, da die Auflösung des Winkels nur 0.1° beträgt. Dadurch sind nur wenige Fitpunkte im Fit-Intervall und die Genauigkeit des Winkels maximaler Zählrate (Peak) ist nicht optimal.

4.6. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

Mit der Gitterkonstante des LiF-Kristalls, bestimmt in Kapitel 4.4, können die Winkeln vom gemessenen Emissionsspektrum der Molybdän-Anode bei unterschiedlichen Spannungen (und Strömen) mit der Bragg-Bedingung (2.5) für $n = 1$ in Wellenlängen umgerechnet werden, siehe Abbildung 4.9. Lineare Fits, Intervalle und Parameter siehe Kapitel A.6, liefern nach Gleichung (2.2) und (2.1) die Grenzwellenlängen der Bremsstrahlung und das Plancksche Wirkungsquantum, Ergebnisse siehe Tabelle 4.4.

Tabelle 4.4.: Messergebnisse der Grenzwellenlängen der Bremsstrahlung bei unterschiedlichen Spannungen und Plancksches Wirkungsquantum.

U kV	λ pm	$\Delta\lambda$ pm	h 10^{-15} eV s	Δh 10^{-15} eV s
35.0	33	4	3.9	0.6
32.5	36	4	3.9	0.5
30.0	40	5	4.0	0.5
28.0	43	4	4.0	0.5

U kV	λ pm	$\Delta\lambda$ pm	h 10^{-15} eV s	Δh 10^{-15} eV s
26.0	46	4	4.0	0.4
24.0	50	4	4.0	0.4

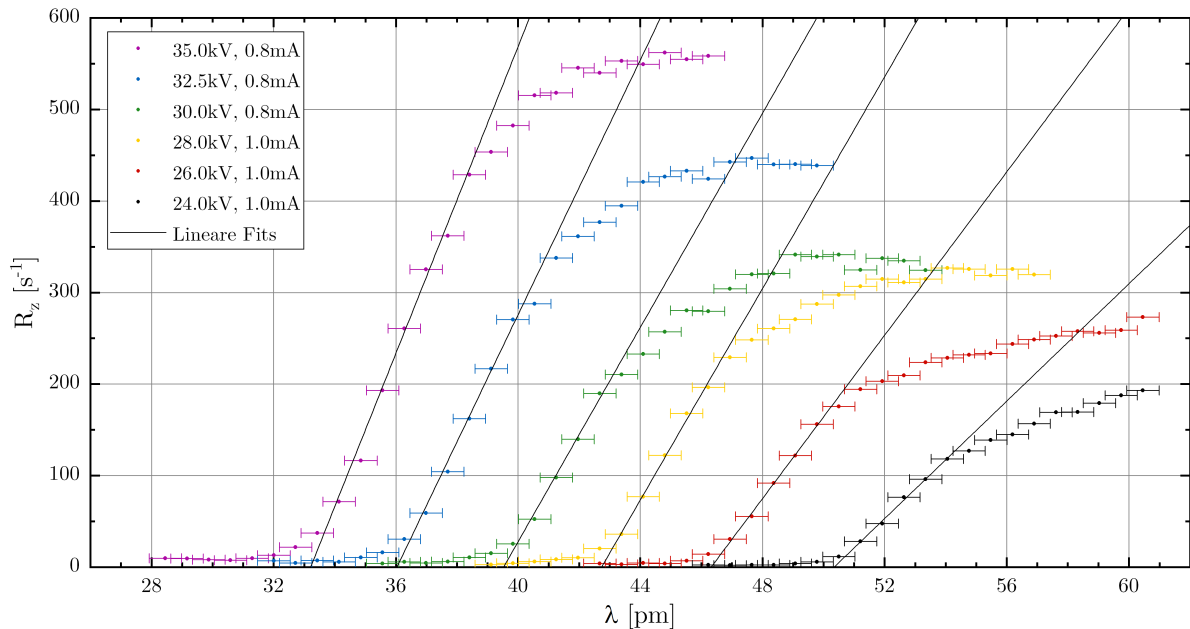


Abbildung 4.9.: Emissionsspektren der Molybdän-Anode im Bereich der Grenzwellenlänge der Bremsstrahlung bei unterschiedlichen Spannungen (und Strömen).

Gewichtete Mittelwertbildung der Werte in Tabelle 4.4, unter Berücksichtigung systematischer Abweichungen, führt auf

$$h = (4.0 \pm 0.4) \cdot 10^{-15} \text{ eV s.}$$

Vergleich zum Literaturwert $4.135\,667\,662(25) \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$ [6] zeigt Übereinstimmung im Toleranzbereich. Der große Toleranzbereich ist ca. zur Hälfte auf die systematischen Abweichungen zurück zu führen, da diese bei Mehrfachmessung und anschließender Mittelwertbildung, beschrieben im Anhang A, nicht kleiner werden.

5. Fragen

1. Bis zu welcher Ordnung könnte man die Glanzwinkel der K_α -Linie des Molybdän beim LiF-Kristall maximal noch nachweisen, bis zu welcher beim NaCl-Kristall? Bei welchem Winkel treten diese Ordnungen jeweils auf?

Mit Gleichung (2.5) kann man das maximale n bestimmen, indem man $\vartheta = 90^\circ$ setzt. Mit den Literaturwerten für den Netzebenenabstand $d_{\text{LiF}} = 201 \text{ pm}$ [4] und $d_{\text{NaCl}} = 282.01 \text{ pm}$ [3]

erhält man als maximales n mit den theoretischen Werten für die K_α -Wellenlänge in Tabelle 4.2 durch Abrunden für LiF $n = 5$ bzw. für NaCl $n = 7$. Die korrespondierenden Winkel für die dazugehörigen Beugungsmaxima sind für LiF $\vartheta_5 = 62.5^\circ$ bzw. für NaCl $\vartheta_7 = 62.8^\circ$.

2. Wie kann man aus den vorliegenden Messungen die Energie der L_α -Linie ermitteln?

Ein kurzer Blick in die Bezeichnungen der Schalen lässt erkennen, dass die Energie des L_α -Quants der Differenz der Energien der K_α - und K_β -Schalen entspricht. In diesem Experiment ergibt sich für Molybdän ein Wert von ca. 2.21 keV.

A. Messwerte und Fehlerrechnung

Für die Peaks im Linienspektrum der charakteristischen Röntgenstrahlung werden Gauß-Fits nach

$$y(x) = y_0 + \frac{A}{\omega\sqrt{\pi/2}} \cdot \exp \left[-2 \left(\frac{x - x_c}{\omega} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

mit statistischer Gewichtung (Poisson- strebt bei hohen Zählraten gegen die Gauß-Verteilung) und y_0 , A , ω und x_c als freie Parameter verwendet.

A.1. Winkelungenauigkeit

Tabelle A.1.: Fit-Intervalle und Winkel der Extrema nach Gauß-Fit für die Abbildung 4.1 vor bzw. nach der Drehung des NaCl-Kristalls.

Übergang	Datenpunkte	Intervall		θ °	$\Delta\theta_{\text{stat}}$ °
		min °	max °		
K_α	vorher	6.8	7.6	7.170	0.004
K_β		6.0	6.7	6.350	0.008
K_α	nachher	6.8	7.6	7.190	0.003
K_β		6.0	6.7	6.374	0.009

A.2. Emissionsspektrum der Molybdän-Röntgenröhre

Tabelle A.2.: Fit-Intervalle der Extrema nach Gauß-Fit für die Abbildungen 4.2 und 4.3.

Übergang	Ordnung	Intervall	
		min °	max °
K_α	1	6.8	7.6
	2	13.8	15.2
	3	21.6	22.6
K_β	1	6.0	6.7
	2	12.5	13.2
	3	19.2	19.9

Die Fehlerrechnung für die Wellenlänge und Energie erfolgt nach getrennter systematischer und statistischer Fortpflanzung aus den Gleichungen (2.1) und (2.5) zu:

$$\Delta\lambda = \left| \frac{a}{n} \cos(\vartheta_n) \right| \cdot (\Delta\vartheta_{n,\text{stat}} + \Delta\vartheta_{n,\text{syst}})$$

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda^2} (\Delta\lambda_{\text{stat}} + \Delta\lambda_{\text{syst}})$$

Mittelwertbildung unter Berücksichtigung hoher, näherungsweise gleicher systematischer Abweichungen liefert die Ergebnisse in Tabelle 4.2.

A.3. Transmission der Zirkonium-Folie

Für den linearen bzw. die kubischen Fits bei der Transmissionskurve in Abbildung 4.5 wurde

$$y(x) = kx + y_0 \quad \text{bzw.} \quad y(x) = kx^3 + y_0 \quad (\text{A.2})$$

verwendet. Die Fit-Intervalle und Ergebnisse der Parameter finden sich in Tabelle A.3.

Tabelle A.3.: Fit-Intervalle und Parameter für die Abbildung 4.5.

Intervall		k	Δk	y_0	Δy_0
min	max				
0	65	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	0.26	0.05
65	70	-0.57	0.07	40	4
70	100	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$0.15 \cdot 10^{-6}$	-0.05	0.09

Für die Fehlerfortpflanzung siehe Kapitel A.2.

A.4. Gitterkonstante und Netzebenenabstand des LiF-Kristalls

Tabelle A.4.: Fit-Intervalle der Extrema nach Gauß-Fit für die Abbildung 4.6.

Übergang	Ordnung	Intervall	
		min ◦	max ◦
K_α	1	9.4	10.3
	2	29.7	21.0
K_β	1	8.2	9.4
	2	17.6	18.4

Fehlerfortpflanzung auf den Gitter- bzw. Netzebenenabstand erfolgt über die Bragg-Bedingung (2.5) zu:

$$\Delta a = \left| \frac{n}{\sin(\vartheta_n)} \Delta\lambda_{\text{syst}} \right| + \left| \frac{n\lambda}{\sin^2(\vartheta_n)} \cos(\vartheta_n) \right| \cdot (\Delta\vartheta_{n,\text{stat}} + \Delta\vartheta_{n,\text{syst}})$$

$$\Delta d = \frac{\Delta a}{2}$$

A.5. Detektortotzeit

Bei den Gauß-Fits in Abbildung 4.7 wurde als Intervall der Bereich von 8.4° bis 9.2° gewählt und die Ergebnisse sind in der Tabelle A.5 gelistet.

Tabelle A.5.: Effektive Zählraten der K_α -Peaks in Abbildung 4.7 nach Gauß-Fit.

I mA	R_z 1/s	$\Delta(R_z)_{\text{stat}}$ 1/s
0.1	524	11
0.2	969	22
0.3	1 374	22
0.4	1 740	30
0.5	2 110	30
0.6	2 450	50
0.7	2 780	60
0.8	3 100	60
0.9	3 440	70
1.0	3 640	60

Der nicht-lineare Fit nach Gleichung (2.4) und der Annahme von Linearität $R = k \cdot I$ mit freiem Fit-Parameter k führt auf $k = 5\,148 \cdot 10^3 / (\text{s A})$ und $\tau = (70 \pm 4) \mu\text{s}$.

A.6. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

Lineare Fits, analog zu (A.2), in den gewählten Intervallen, siehe Tabelle A.6, führt auf die Fit-Parameter und mit

$$\lambda_0 = -\frac{y_0}{k}$$

auf die Grenzwellenlänge der Bremsstrahlung. Fehlerfortpflanzung erfolgt mit den statistischen Fit-Parametern quadratisch, wobei der systematische Anteil von λ_0 über Mittelwertbildung der systematischen Abweichungen im betrachteten Intervall zu ermitteln ist und für das Plancksche Wirkungsquantum folgt nach Gleichung (2.2):

$$\Delta h = \frac{e}{c} \cdot [(\Delta\lambda_{0,\text{syst}} + \Delta\lambda_{0,\text{stat}}) \cdot U + \Delta U_{\text{syst}} \cdot \lambda_0]$$

Tabelle A.6.: Fit-Intervalle und -Parameter für die linearen Fits in Abbildung 4.9.

Intervall		U kV	k 1/(s pm)	Δk 1/(s pm)	y_0 1/s	Δy_0 1/s	λ pm	$\Delta\lambda$ pm	h eV s	Δh eV s
min °	max °									
4.7	5.2	35.0	83.8	5.2	-2 781	183	33	4	3.9	0.6
5.1	5.6	32.5	69.5	3.5	-2 504	132	36	4	3.9	0.5

Intervall		U kV	k 1/(s pm)	Δk 1/(s pm)	y_0 1/s	Δy_0 1/s	λ pm	$\Delta \lambda$ pm	h eV s	Δh eV s
min °	max °									
5.6	6.0	30.0	58.5	3.2	-2 312	132	40	5	4.0	0.5
6.1	6.5	28.0	57.81	2.44	-2 471	109	43	4	4.0	0.5
6.6	7.0	26.0	44.62	1.40	-2 067	68	46	4	4.0	0.4
7.2	7.6	24.0	32.06	1.15	-1 614	60	50	4	4.0	0.4

B. Literaturverzeichnis

- [1] *Röntgenstrahlung (XST)*. 2016. URL: <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap3/ROEN.pdf> (besucht am 11. März 2019) (siehe S. 2, 4).
- [2] V.S. Shirley, C.M. Lederer und E. Browne. *Table of Isotopes*. A Wiley-interscience publication. Wiley, 1978. ISBN: 9780471041795 (siehe S. 6, 8).
- [3] W.M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 96th Edition*. 100 Key Points. CRC Press, 2015. ISBN: 9781482260977 (siehe S. 9, 11).
- [4] K. Charles. *INTRODUCTION TO SOLID STATE PHYSICS, 7TH ED*. Wiley India Pvt. Limited, 2007. ISBN: 9788126510450 (siehe S. 9, 11).
- [5] *Gebrauchsanweisung VKA-Box (524 058)*. 2019. URL: <https://www.ld-didactic.de/documents/de-DE/GA/GA/5/524/524058d.pdf> (besucht am 13. März 2019) (siehe S. 10).
- [6] CODATA. *Fundamentale Naturkonstanten*. 1994. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (besucht am 3. März 2019) (siehe S. 11).