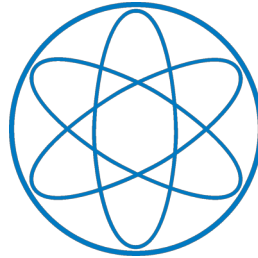


Anfängerpraktikum Teil 1

(Mechanik und Thermodynamik)

Pendel



Kurs 3, Gruppe 5, Team 14:
Michael Labenbacher
Nina Miller

Fakultät für Physik
Technische Universität München

1. Einleitung	1
2. Reversionspendel	1
2.1. Verwendete Methoden	1
2.2. Experimentelles Vorgehen	1
2.3. Ergebnisse	2
2.4. Diskussion	3
3. Gekoppelte Pendel	4
3.1. Verwendeten Methoden	4
3.2. Experimentelles Vorgehen	5
3.3. Ergebnisse	6
3.4. Diskussion	12
4. Zusammenfassung	12
Anhang	13
A. Fehlerrechnung zum Reversionspendel	13
B. Fehlerrechnung zum gekoppelten Pendel	14
C. Literaturverzeichnis	15

Freitag 23. März, 2018

1. Einleitung

Mit Hilfe des ersten Pendelversuches wird die Gravitationsbeschleunigung bestimmt, wobei der Grundgedanke der ist, eine Methode zu verwenden die ohne der Berechnung des Trägheitsmoments bzw. der Masse auskommt. Ebenso werden im zweiten Teil, bei dem gekoppelten Pendel, die Schwingungs- und Schwebungsfrequenzen bestimmt und der Zusammenhang des Kopplungsgrades mit diesen genauer untersucht. Die Grundlagen zum „Pendelversuch“ aus der Anleitung [1] werden als vorausgesetzt angesehen.

2. Reversionspendel

2.1. Verwendete Methoden

Nach der Anleitung [1] lassen sich für ein Pendel, dessen Masse des Seils bzw. Stabs nicht vernachlässigt werden kann und die Näherung an eine Punktmasse nicht möglich ist, zwei Abstände l_1 und l_2 vom Schwerpunkt finden, so dass die sich ergebende Schwingungsdauer τ gleich ist. Der sich dabei ergebende Zusammenhang

$$\tau^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{g} = 4\pi^2 \cdot \frac{l_r}{g} \quad (2.1)$$

beschreibt die Lage der Gewichte, so dass der Abstand zwischen den Aufhängepunkten mit der reduzierten Pendellänge l_r zusammenfällt. Aus Gleichung 2.1 kann die Gravitationsbeschleunigung g unabhängig von der Masse und dem Trägheitsmoment berechnet werden.

2.2. Experimentelles Vorgehen

Der erste Teil besteht darin, die Länge zwischen den beiden Aufhängepunkten l_r mittels eines Gliedmaßstabes zu bestimmen.

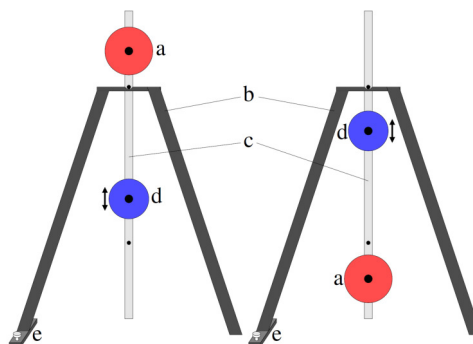


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung des Reversionspendels in beiden Positionen: a) feste Masse, b) Gestell mit Lager, c) Pendelstange, d) bewegliche Masse, e) Justierschraube [1]

Im Anschluss darauf wird das Gerüst am Boden platziert und mit einer oben angebrachten Wasserwaage waagrecht ausgerichtet, indem die an den Beinen befestigten Schrauben eingestellt werden. Der Pendelstab mit einem fixierten, roten Gewicht (Abbildung 2.1 a)) an einem Ende und einem verstellbaren blauen Gewicht (Abbildung 2.1 d)) wird in der Aufhängung so platziert, dass sich das feste Gewicht einmal oberhalb der Drehachse und im nächsten Durchgang ganz unten befindet. In beiden Versuchsreihen muss dabei die Lichtschranke zur Zeitmessung jeweils so ausgerichtet werden, dass der in Ruhe befindende Stab mittig in der U-Öffnung der Schranke liegt. Durch eine kleine Auslenkung < 5 cm, damit die Kleinwinkelnäherung gültig ist, wird die Aufnahme einer Schwingungsperiode gestartet. Nach je fünf Aufnahmen pro Justierung wurde das blaue, verstellbare Gewicht zwei Löcher nach unten verschoben, arretiert und erneut gemessen. Insgesamt wurden dabei 15 Positionen je Versuchsreihe eingestellt.

2.3. Ergebnisse

Die Messung der Länge ergab $\bar{l}_r = 802$ mm, wobei sich an beiden Messenden eine Unsicherheit von $\Delta \bar{l}_{\text{rstat}} = 0.1$ mm ergibt, die durch das Ablesen an einem Skalenstrich entsteht. Des Weiteren wird der systematische Fehler, zusammengesetzt aus der geschätzten Produktionsgenauigkeit und sich im Mittel ergebenden zusätzlichen Verlängerung des Meterstabs durch „nicht vollständiges“ Auseinanderklappen, mit $\Delta \bar{l}_{\text{rsyst}} = 2$ mm kalkuliert. Wie in der Abbildung 2.2 dargestellt, liefert der Schnittpunkt von Annäherungsfunktionen die gesuchte Periodendauer τ . Wie jede Messung, ist auch die der Zeit mit einem Fehler behaftet, dabei entstanden im Mittel statistische Abweichungen der Schwingungsdauer von geschätzt¹ $\Delta \tau_{\text{stat}} = 1$ ms. (Dies ist eher als systematischer Fehler zu betrachten.)

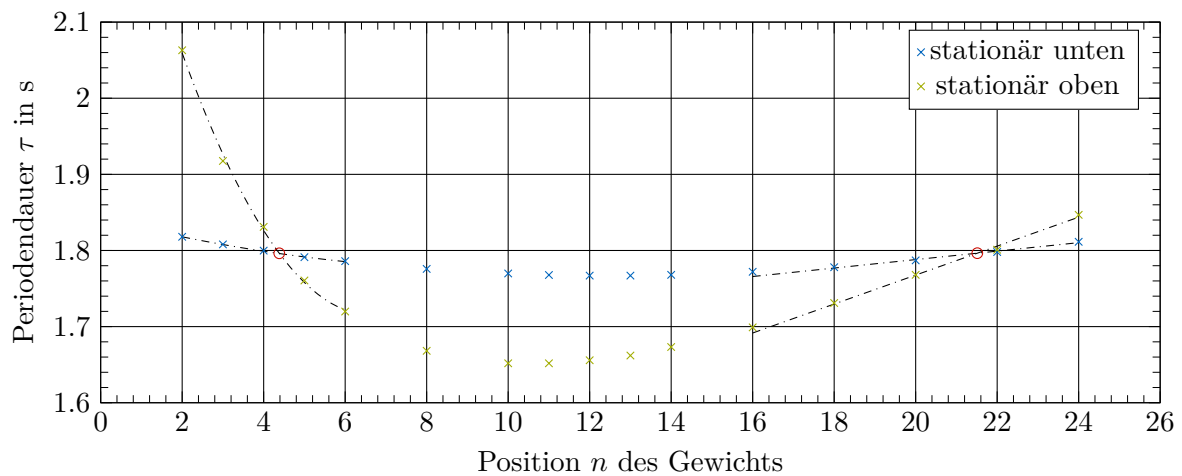


Abbildung 2.2.: Schwingungsdauer τ für beide Orientierungen in Abhängigkeit der Position des verstellbaren Gewichts. Die Kurven im Bereich 16 bis 24 sind Linearisierungen und zwischen 2 und 8 angepasste Polynome 2. Grades. An den Schnittpunkten tritt der Fall ein, dass die Schwingungsdauer nur noch vom Abstand l_r der Aufhängung abhängt. Abweichungen liegen in der Größenordnung der Datenpunkte.

¹Prinzipiell wurde jede Messung fünf mal wiederholt und gemittelt, da es jedoch Messungen gab, bei denen „keine“ statistische Abweichung auftrat, kann so keine Gewichtung gemacht werden. Daher wurden mehrere Messungen bei einer mittleren Position des blauen Gewichts durchgeführt und es konnte eine Schwankung von ± 1 ms festgestellt werden, was auch der Auflösung der Lichtschranke entsprechen müsste.

Verschiebt man die Ausgleichskurven um die Unsicherheit der Einzelmessung nach oben bzw. unten, so erhält man, wie in der [Abbildung 2.3](#) für die Linearisierung dargestellt, einen minimalen und maximalen Wert für die gesuchte Schwingungsdauer τ_i , womit sich jeweils die Unsicherheit der mittleren mit

$$\Delta\bar{\tau}_i = \frac{\bar{\tau}_{i_{\max}} - \bar{\tau}_{i_{\min}}}{2} \quad (2.2)$$

ergibt. Die beiden ermittelten Schwingungsdauern $\bar{\tau}_1$, Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden bei kleinem Abstand vom verstellbaren Gewicht zur Drehachse ($n \approx 4.2$), und $\bar{\tau}_2$, deren Werte in der [Tabelle 2.1](#) gegenübergestellt sind, stimmen im Rahmen der Abweichungen überein und nach einer gewichteten Mittlung beider ergibt sich $\Delta\bar{\tau} = 1$ ms.

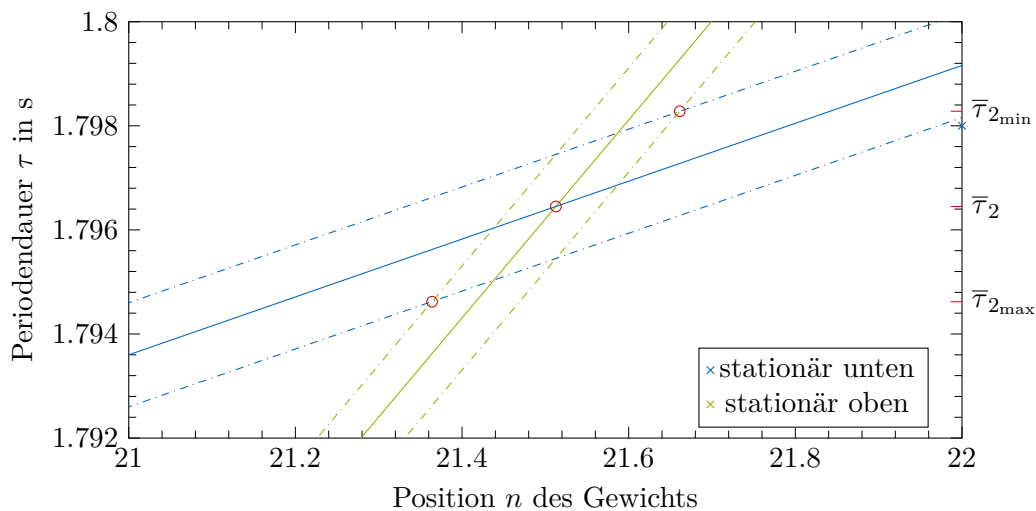


Abbildung 2.3.: [Abbildung 2.2](#) vergrößert im Bereich des Schnittpunkts der Linearisierung. Die Schnittpunkte der verschobenen Ausgleichskurven liefern den maximalen bzw. minimalen Wert für die gesuchte Schwingungsdauer.

τ_1	τ_2	τ
s	s	s
1.7960 ± 0.0018	1.7960 ± 0.0012	1.796 ± 0.001

Tabelle 2.1.: Schwingungsdauern mit Unsicherheiten

Mit der [Gleichung 2.1](#) ergibt sich nach Fehlerfortpflanzung, im [Anhang A](#), die Erdbeschleunigung während des Versuches im Praktikumsraum zu $g = (9.81 \pm 0.04) \text{ m/s}^2$.

2.4. Diskussion

Der berechnete Wert stimmt im Rahmen der Messgenauigkeit mit dem Literaturwert von $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ (Normfallbeschleunigung für 45 Grad Breite bei Meereshöhe) überein. [2] Im gesamten Versuch wurden die Reibung an der Aufhängung und Luft aus Relevanz außer Acht gelassen und die Kleinwinkelnäherung verwendet.

3. Gekoppelte Pendel

3.1. Verwendeten Methoden

Im diesem Kapitel werden zwei, gleich aufgebaute Pendel betrachtet, die mit einer Feder gekoppelt werden können. Zur eindeutigen Bestimmung der Position werden die Winkeln ψ_1 und ψ_2 betrachtet und die Kleinwinkelnäherung zur einfacheren Beschreibung angewandt. Auf jedes Pendel wirken einerseits auf Grund der Schwerkraft ein rücktreibendes Moment und andererseits das entstehende Drehmoment der Feder. Außerdem wirkt noch ein Drehmoment auf Grund der Vorspannung, welches sich aber durch ein geeignetes Koordinatensystem aus der Gleichung extrahieren lässt. Wie in der Anleitung [1] hergeleitet ergeben sich die Eigenvektoren der Lösung

$$X = \psi_1 + \psi_2 \quad (3.1)$$

$$Y = \psi_1 - \psi_2 \quad (3.2)$$

durch Linearkombination der Winkeln. Diese Entkopplung der Differentialgleichung (DGL) in

$$X(t) = A_1 \sin(\omega_{gl}t) + A_2 \cos(\omega_{gl}t) \quad (3.3)$$

$$Y(t) = A_3 \sin(\omega_{geg}t) + A_4 \cos(\omega_{geg}t) \quad (3.4)$$

ermöglicht es, die beiden Kreisfrequenzen, nur durch geeignete Anfangsbedingungen, zu bestimmen. Dabei kann die Kreisfrequenz der gleichphasigen Schwingung ω_{gl} beobachtet werden, wenn die Pendeln zu jedem Zeitpunkt die gleiche Auslenkung haben, was gleichbedeutend mit $Y(t) = \psi_1 - \psi_2 = 0$ ist. Die zweite Fundamentalschwingung des Pendelsystems kann durch entgegengesetzte Auslenkung $X(t) = \psi_1 + \psi_2 = 0$ erzeugt werden, um die Kreisfrequenz der gegenphasigen Schwingung ω_{geg} zu ermitteln. Im allgemeinen Fall erhält man die Winkeln, also die Pendelpositionen mit

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} (A_1 \sin(\omega_{gl}t) + A_2 \cos(\omega_{gl}t) + A_3 \sin(\omega_{geg}t) + A_4 \cos(\omega_{geg}t)) \quad (3.5)$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2} (A_1 \sin(\omega_{gl}t) + A_2 \cos(\omega_{gl}t) - A_3 \sin(\omega_{geg}t) - A_4 \cos(\omega_{geg}t)) \quad (3.6)$$

Durch geschickte Anfangsbedingungen (z. B. wenn man ein Pendel anstößt $\dot{\psi}_1 \neq 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ und $\psi_1 = \psi_2 = 0$) ergibt sich die Lösung

$$\psi_1(t) = 2A \cdot \sin(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_s t) \quad (3.7)$$

$$\psi_2(t) = 2A \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \sin(\omega_s t) \quad (3.8)$$

$$\omega_m = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} \quad (3.9)$$

$$\omega_s = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} \quad (3.10)$$

$$A = A_1 = A_3$$

der Schwingungsgleichung. Dabei ist ω_m die mittlere Kreisfrequenz und ω_s die Schwebekreisfrequenz, die für die Amplitudenmodulation sorgt.

Zur Beurteilung der Kopplungsstärke wird der Kopplungsgrad, eine vom System selbst unabhängige Größe,

$$K = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2} = \frac{2\omega_m\omega_s}{\omega_m^2 + \omega_s^2} = \frac{\kappa \cdot r^2}{D + \kappa \cdot r^2} \quad (3.11)$$

definiert. Dabei ist κ die Federkonstante, die die Stärke der Kopplung maßgeblich beeinflusst, $D = mgl$ die Proportionalitätskonstante des rücktreibenden Moments mit der Pendelmasse m und dem Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt l und r der Kopplungsabstand.

3.2. Experimentelles Vorgehen

In den bereits vorbereitet vorgefundenen Aufbau werden beide Pendelstäbe in die dafür vorgegebenen Lager eingehängt. Die Messung des Winkels erfolgt dabei über eine Magnetfeldänderung, wobei letztendlich einfach die Auslenkung in Form einer dafür proportionalen Spannung an den Computer weitergegeben wird und mit dem Programm Cassy Lab 2 erfolgt die Auswertung über eine graphische Visualisierung. Dabei können die Daten über den gewünschten Zeitraum aufgezeichnet werden, um diese im Anschluss mit Origin bzw. Matlab zu bearbeiten.

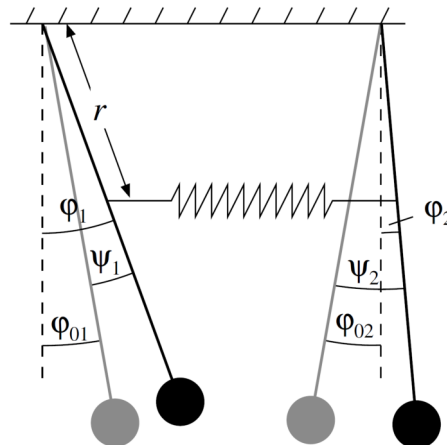


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung des gekoppelten Pendels [1]

Der erste Schritt besteht in der Überprüfung der Gleichheit beider Pendeln, indem durch ein einmaliges, gleichstarkes Auslenken die Phasenverschiebung über ca. 3 min beobachtet wird. Im Anschluss darauf kann eine Kopplungsfeder zwischen den Pendeln in einer der vier Befestigungslöcher angebracht werden. Die Kopplungsabstände r sind dabei mit einem Gliedermaßstab zu messen. Für den nächsten Abschnitt sind die Eigenmoden des Systems bei unterschiedlicher Kopplung (Kopplungsabstand verändern) zu bestimmen. Dabei werden, wie in [Abschnitt 3.1](#) beschrieben, jeweils einerseits die Pendeln gleichsinnig und -stark und andererseits gegensinnig und mit gleicher Amplitude ausgelenkt, die Winkeln über ca. 1 min aufgezeichnet und die Daten abgespeichert. Dabei muss darauf geachtet werden, die Kleinwinkelnäherung, Auslenkung < 5 cm, nicht zu „verletzen“. Zuletzt kann eine möglichst reine Schwebung erzeugt werden, indem ein Pendel (beide befinden sich zunächst in der Ruhelage) angestoßen wird. Die

Eigenmoden und die Schwebung wurden dabei für eine Feder bei allen vier Löchern bestimmt und bei der zweiten, stärkeren nur für das zweite, von oben gemessene Loch.

3.3. Ergebnisse

Die Messung der Kopplungsabstände r mit dem Gliedemaßstab ist, auf Grund des Aufbaus der Pendel, nicht ganz so trivial und wurde getrennt durchgeführt, indem einerseits der Abstand vom Loch bis zu dem Metallplättchen und andererseits von dem Plättchen bis hin zur Spitze (Lagerung), gemessen wurde. Dadurch entstanden statistisch dreimal Fehler im Bereich von 0.1 mm (Strichstärke) und da man den Zollstock nicht an die Spitze direkt anlegen kann wird der Fehler beim Ablesen dort mit 0.5 mm abgeschätzt. Systematisch ergibt sich im Mittel, wie im [Kapitel 2](#), eine Abweichung von 2 mm. Die gemessenen Werte sind in der [Tabelle 3.1](#) mit der Gesamtunsicherheit nach der Fehlerfortpflanzung angegeben, wobei Positionen immer von oben nach unten gezählt werden.

Tabelle 3.1.: Messergebnisse der Kopplungsabstände r mit Unsicherheiten (Position 1 ... oben, 4 ... unten)

Position	r mm
1	28.2 ± 2.5
2	53.2 ± 2.5
3	78.2 ± 2.5
4	102.2 ± 2.5

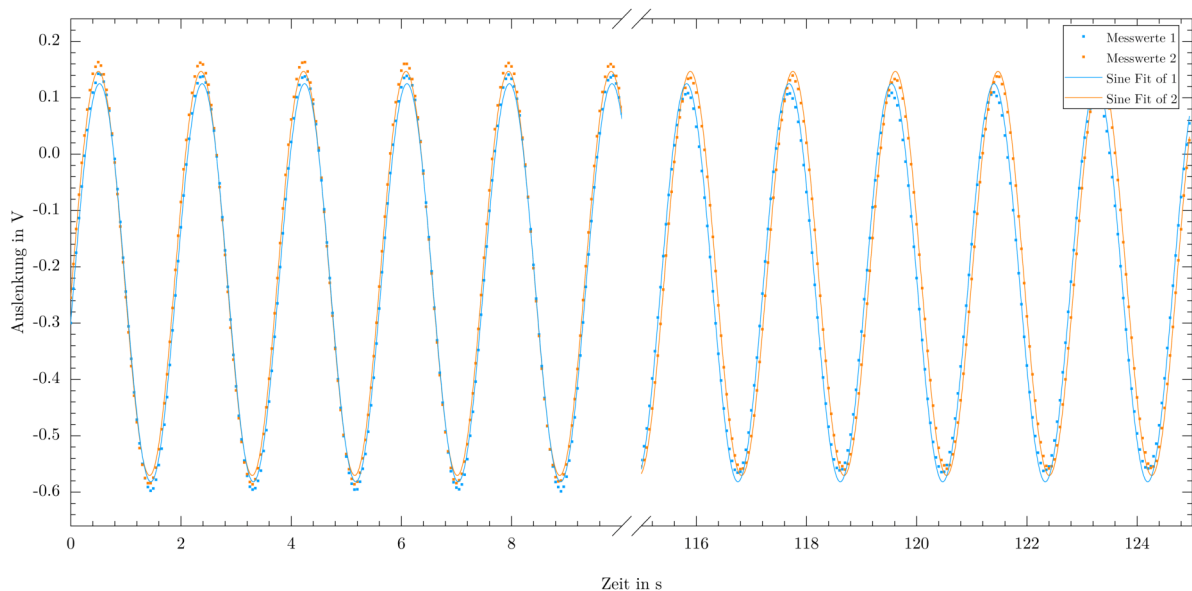


Abbildung 3.2.: Phasendifferenz von den verwendeten Pendeln

Daraufhin wurde die Gleichheit der Pendel überprüft, wobei sich ein kleiner Phasenunterschied, wie in der [Abbildung 3.2](#) ersichtlich, zeigt. Dieser wird aber auf Grund der sich ansonst ergebenden Zeitnot nicht weiter behandelt, jedoch zieht er eine gewisse Unsicherheit der nachfolgenden Messungen auf sich, da dann die mathematische Beschreibung nicht exakt mit der Praxis hier übereinstimmt.

Die „Messung“ bzw. Bestimmung der gleich- und gegenphasigen Kreisfrequenzen über einen Fit mit

$$y = y_0 + A \cdot \sin\left(\pi \left(\frac{x - x_c}{\omega}\right)\right)$$

durch Origin ergaben umgerechnet, mit [Gleichung 3.9](#) bzw. [3.10](#) und zusammengefasst die Werte in [Tabelle 3.2](#), wobei daraus, über „Fehlerfortpflanzung“ und gewichteter Mittlung ω_{gl} und ω_{geg} durch Origin berechnet wurden. Dabei berücksichtigt y_0 den Offset und x_c eine Phasenverschiebung, was aufgrund der verwendeten Messmethode unvermeidlich ist. Der Fehler des Fits war dabei zu gering (im Bereich von 10^{-6} bis 10^{-5} s^{-1}) und ist somit ohne Relevanz, womit der Fehler abgeschätzt wurde mit 1 ms, der sich aus den Messungenauigkeiten der Zeit und Auslenkung zusammensetzt. Damit ist in dieser Abweichung sowohl ein statistischer und systematischer Anteil vorhanden, weshalb für weitere Berechnungen eine lineare Addition durchgeführt wird, da man nicht davon ausgehen kann, dass der Fehler bei mehrmaliger Wiederholung vollständig verschwindet.

Tabelle 3.2.: Messergebnisse der Kreisfrequenzen ω_{gl} und ω_{geg} und theoretische Werte von ω_m und ω_s

Position	Feder	ω_{geg} s^{-1}	ω_{gl} s^{-1}	ω_m s^{-1}	ω_s s^{-1}
1	1	3.532 ± 0.001	3.380 ± 0.001	3.456 ± 0.001	0.076 ± 0.001
2	1	3.880 ± 0.001	3.382 ± 0.001	3.631 ± 0.001	0.249 ± 0.001
3	1	4.374 ± 0.001	3.381 ± 0.001	3.878 ± 0.001	0.496 ± 0.001
4	1	4.923 ± 0.001	3.378 ± 0.001	4.151 ± 0.001	0.773 ± 0.001
2	2	3.748 ± 0.001	3.381 ± 0.001	3.565 ± 0.001	0.183 ± 0.001

Aus den Daten, visualisiert in [Abbildung 3.3](#) kann $\omega_{gl} = \omega_1 = \omega_2$ ermittelt werden, da sich diese Pendelbewegung, wie die eines einzelnen verhält und verantwortlich für einen der zwei Komponenten der Lösung der Schwingungsgleichung ist. Analoges für ω_{geg} durch [Abbildung 3.4](#).

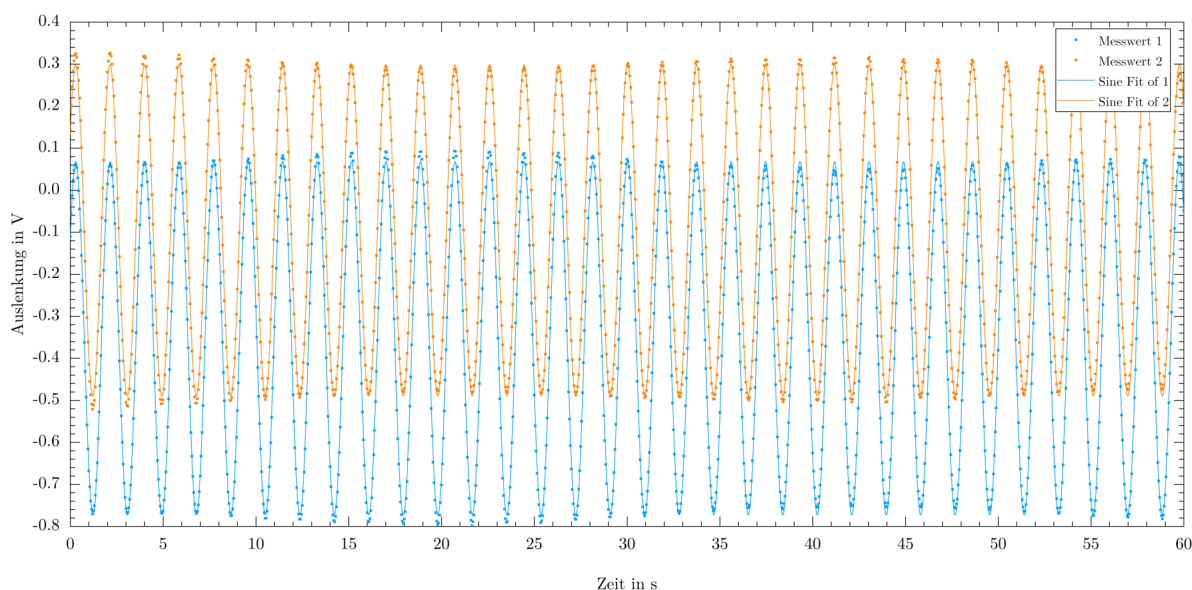


Abbildung 3.3.: Gleichphasige Schwingung der 1. Feder im 1. Loch mit Sinus-Fittfunktion. Eine leichte Schwebung auf Grund der händischen Erzeugung der Schwingung war unvermeidlich. Beide Auslenkungen, also theoretisch $\psi_1 = \psi_2$, zeigen in die selbe Richtung und haben annähernd die gleiche Amplitude.

Die in den Abbildungen angegebenen Messwerte 1 und 2 sind entweder vom rechten bzw. linken Pendel im Aufbau (unbekannt), aber in der gesamten Ausarbeitung konstant.

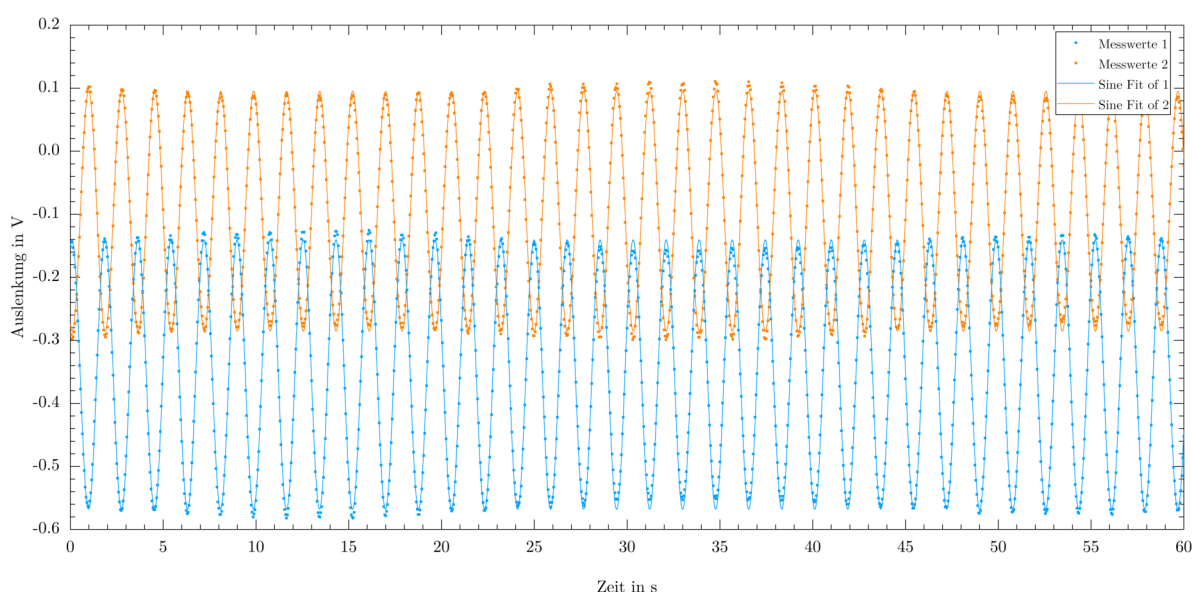


Abbildung 3.4.: Gegenphasige Schwingung der 1. Feder im 1. Loch mit Sinus-Fittfunktion. Eine leichte Schwebung auf Grund der händischen Erzeugung der Schwingung war unvermeidlich. Die Auslenkungen, also theoretisch $\psi_1 = -\psi_2$, zeigen in die entgegengesetzte Richtung und haben annähernd die gleiche Amplitude.

Der jeweils letzte Versuch zur Erzeugung einer Schwebung pro Position einer Feder ergab über einen Fit mit

$$y = y_0 + A \cdot \cos(\omega_m x + x_{c2}) \cdot \sin(\omega_s x + x_{c1})$$

in Origin direkt die Schwebungs- bzw. mittlere Kreisfrequenz der „reinen“ Schwingung, welche beispielsweise in [Abbildung 3.5](#) zu sehen ist. Dabei wurden die in [Abschnitt 3.1](#) beschriebenen Anfangsbedingungen vorausgesetzt und ein Offset und Phasenverschiebungen auf Grund der Messmethode bzw. Messstartpunkt berücksichtigt.

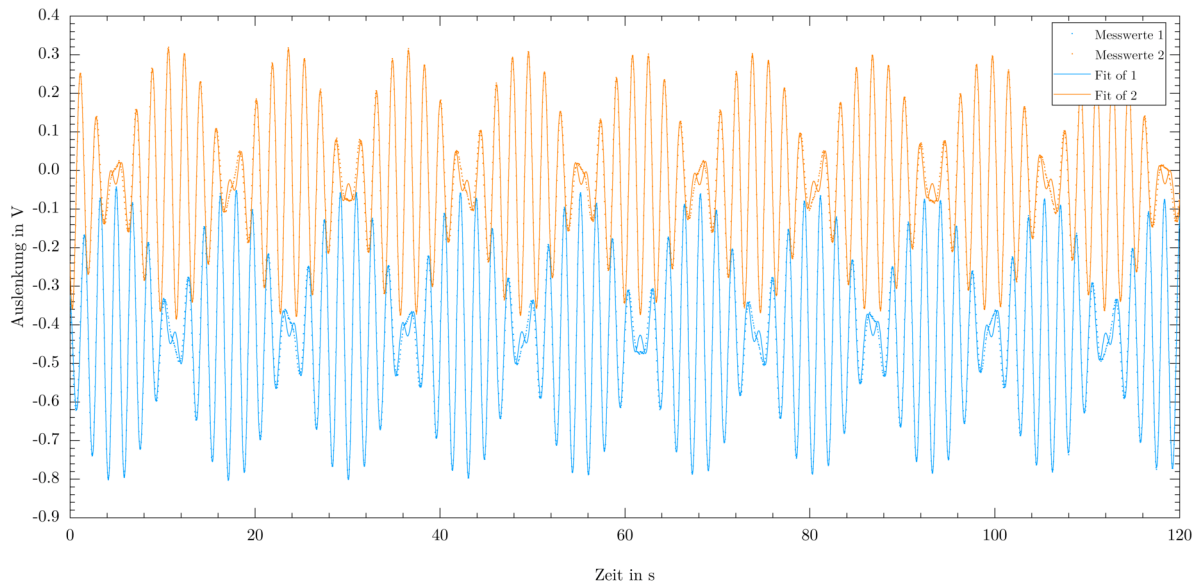


Abbildung 3.5.: Schwebungsverhalten der 1. Feder im 2. Loch mit einfacher Fitfunktion nach [Gleichung 3.7](#) und [3.8](#). Beim Fit vorausgesetzt sind die idealen Anfangsbedingungen, beschrieben im [Abschnitt 3.1](#). Deutlich erkennen lässt sich der Energieaustausch beider Systeme, also wenn ein Pendel mit der maximalen Amplitude schwingt, steht das jeweils andere „still“.

Mit Hilfe der Fitfunktion ergeben sich die experimentell bestimmten Werte für ω_m und ω_s , welche in der [Tabelle 3.3](#) zusammengefasst und gegenübergestellt wurden.

Tabelle 3.3.: Messergebnisse und theoretisch erwartete Werte der Kreisfrequenzen ω_m und ω_s

Position	Feder	experimentell		theoretisch	
		ω_m s^{-1}	ω_s s^{-1}	ω_m s^{-1}	ω_s s^{-1}
1	1	3.457 ± 0.001	0.076 ± 0.001	3.456 ± 0.001	0.076 ± 0.001
2	1	3.631 ± 0.001	0.249 ± 0.001	3.631 ± 0.001	0.249 ± 0.001
3	1	3.879 ± 0.001	0.498 ± 0.001	3.878 ± 0.001	0.496 ± 0.001
4	1	4.151 ± 0.001	0.773 ± 0.001	4.151 ± 0.001	0.773 ± 0.001
2	1	3.565 ± 0.001	0.183 ± 0.001	3.565 ± 0.001	0.183 ± 0.001

Zwar ist folgender Vorgang nicht gefordert, zeigt jedoch deutlich auf, dass die Anfangsbedingungen von rein theoretischer Natur sind: Passt man die Fitfunktion auf

$$y = y_0 + (A \sin(\omega_{\text{gl}}x) + B \cos(\omega_{\text{gl}}x) + C \sin(\omega_{\text{geg}}x) + D \cos(\omega_{\text{geg}}x)) \cdot e^{\left(-\frac{x}{t_0}\right)}$$

an, was die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung symmetrischer Pendel für die Kleinwinkelnäherung mit Berücksichtigung einer Dämpfung darstellt, so könnte man direkt wieder auf ω_{geg} und ω_{gl} schließen und durch [Gleichung 3.9](#) und [3.10](#) die Schweb- bzw. mittlere Kreisfrequenz berechnen. Die [Abbildung 3.6](#) zeigt eine Gegenüberstellung beider Fits.

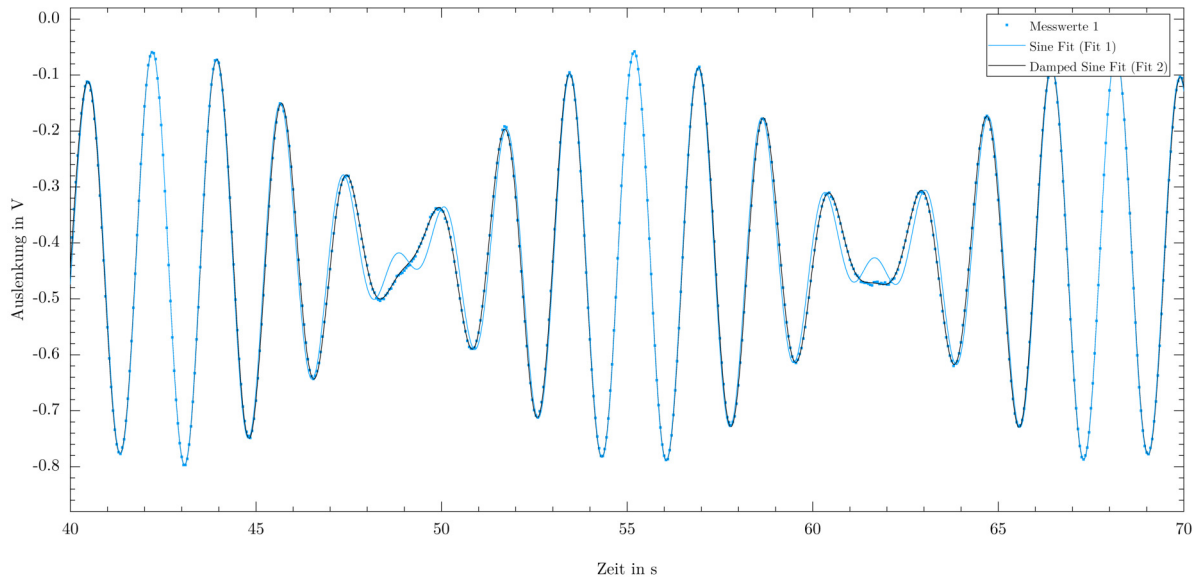


Abbildung 3.6.: [Abbildung 3.5](#) vergrößert mit einfacher (blau) und verbesserter Fitfunktion (schwarz). Deutliche Abweichungen des Fits (blau) lassen sich an den Nulldurchgängen des Anteils der Schwebekreisfrequenz erkennen, was größtenteils aufgrund des nicht idealen Anstoßvorgangs erklärbar ist und somit eine „unreine“ Schwebung entsteht.

Aus den gewonnenen Daten für die Schweb- und mittlere Kreisfrequenz (experimentell) lässt sich mit [Gleichung 3.11](#) und Fehlerfortpflanzung (Größtfehlerabschätzung, da der Anteil, bei den gemessenen Kreisfrequenzen, an systematischer und statistischer Abweichung nicht bekannt ist.) im [Anhang B](#) für jede Feder und gemessene Position der Kopplungsgrad ermitteln, dessen Ergebnisse in [Tabelle 3.4](#) aufgeführt sind.

Tabelle 3.4.: Kopplungsgrad K je nach Position und Feder

Position	Feder	K
1	1	0.0439 ± 0.0006
2	1	0.1366 ± 0.0005
3	1	0.2527 ± 0.0004
4	1	0.3600 ± 0.0003
2	1	0.1025 ± 0.0006

Trägt man nun den Kopplungsgrad der 1. Feder für alle Kopplungsabstände, die in [Tabelle 3.1](#) aufgeführt sind, auf, so kann mit [Gleichung 3.11](#) eine gewichtete Fitkurve erstellt werden. Ebenso können ω_s und ω_m über r dargestellt werden, was auf die [Abbildung 3.8](#) führt.

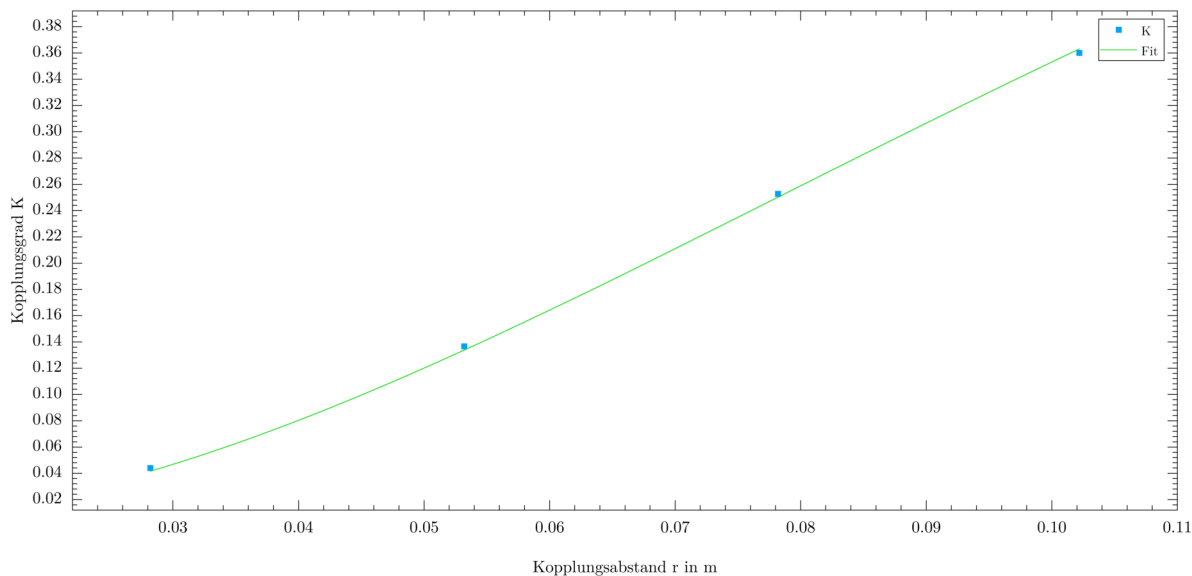


Abbildung 3.7.: Kopplungsgrad der 1. Feder über den Kopplungsabstand mit angepasstem Fit. Die Abweichungen liegen in der Größenordnung der Datenpunkte. Für große r lässt sich eine annähernd lineare Zunahme des Kopplungsgrads K erkennen.

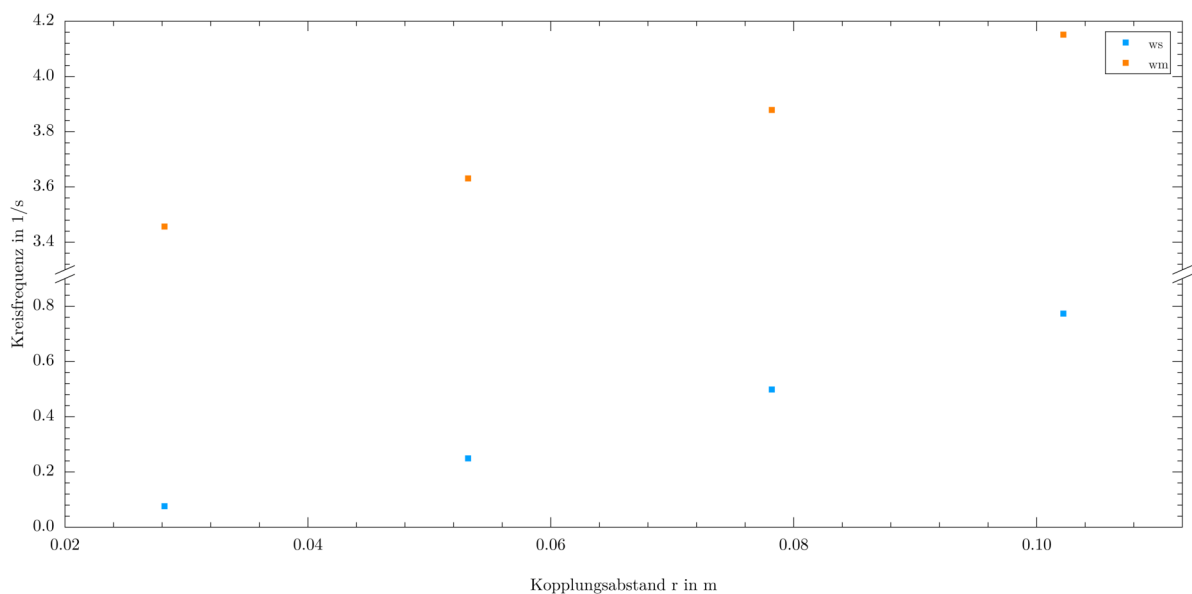


Abbildung 3.8.: Schwebungs- und mittlere Kreisfrequenzen der 1. Feder über den Kopplungsabstand. Die Abweichungen liegen in der Größenordnung der Datenpunkte. Dabei nehmen ω_s und ω_m absolut gesehen ca. um den gleichen Wert zu, was gleichbedeutend ist, dass die Steigung der Frequenz der Modulation der Amplitude zur Schwebefrequenz annähernd gleich ist.

3.4. Diskussion

Es zeigt sich, vor allem bei den Knoten der Schwebefrequenz, wo ein Pendel bei den idealen Anfangsbedingungen still stehen sollte, dass dies in unserem Versuch nie der Fall war. Abweichungen wie diese lassen sich dabei hauptsächlich rückführen auf den Anstoßvorgang. Auch die kleinen Abnahmen der Amplituden sind auf nicht berücksichtigte systematische Fehler wie die Reibung an den Drehachsen der Pendeln und Luftreibung zurückzuführen. Beim Kopplungsradius lässt sich deutlich das „Bauchgefühl“ wieder erkennen, dass eine Vergrößerung des Kopplungsabstandes eine Erhöhung von K bewirkt, was vereinfacht gesagt durch den Zusammenhang $M = r \times F$ erklärbar ist. Vor allem für große Abstände r wird der Einfluss des Gewichts mit $D = mgl$ immer geringer und es lässt sich die Funktion $K(r)$ in diesem Bereich linearisieren. Die Abweichungen der Phasendifferenz der beiden Pendeln, welche in [Abbildung 3.2](#) zu erkennen ist, wurden bei der Auswertung außer Acht gelassen, da diese anscheinend wenig Einfluss zeigen.

4. Zusammenfassung

Im [Kapitel 2](#) ergab sich eine Erdbeschleunigung, die mit dem theoretisch erwarteten Wert, unter Berücksichtigung der Fehlertoleranzen, übereinstimmt. Verbesserungen können durch mehr Messungen an den Schnittpunkten der beiden Graphen in [Abbildung 2.2](#) und einer besseren Längenmessmethode erzielt werden.

Beim gekoppelten Pendel stellte sich heraus, dass die experimentell (Fit) bestimmten Werte für die Schwebefrequenz und der mittleren Kreisfrequenz mit den theoretisch zu erwartenden im Bereich der Messtoleranzen übereinstimmen, wobei beim Fit diese Parameter erst jeweils am Ende „frei“ gegeben wurden. Verbesserungen bei der Bestimmung könnte man durch eine Anpassung der Fitfunktion, wie auch in [Abbildung 2.3](#) beispielhaft aufgezeigt wurde, erhalten, da auch bei der gleich- und gegenphasigen Auslenkung die idealen Bedingungen nicht vollständig gegeben sind, oder dass der reine Schwebungseffekt nicht durch einen Anstoß, sondern einer Auslenkung eines einzelnen Pendels am Beginn hervorgerufen wird. Es zeigte sich in diesem Versuch aber deutlich, das theoretisch Erwartete, dass die Energie in einem Pendel periodisch zum jeweils anderen übertragen wird. Angemerkt sei, dass die Bestimmung der Abweichungen sich im gesamten Versuch als schwierig gestaltete, da die konkreten Werte nicht vorhanden waren, z. B. bei der Zeit- und Positionsmessung, und dadurch konnten Abschätzungen solcher Fehler nur bedingt durchgeführt werden.

A. Fehlerrechnung zum Reversionspendel

Die beiden Schwingungsdauern $\bar{\tau}_1$ und $\bar{\tau}_2$, sowie die maximal und minimalen Werte können mit Matlab direkt aus dem Schnittpunkt beider Regressionsgeraden ermittelt werden. Mit [Gleichung 2.2](#) folgen die mittleren Unsicherheiten davon und durch anschließende gewichtete Regression $n = 2$

$$w_i = \frac{1}{\Delta \bar{\tau}_i^2}$$

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{\tau}_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w_1 \bar{\tau}_1 + w_2 \bar{\tau}_2}{w_1 + w_2}$$

$$\Delta \bar{\tau} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}} = \sqrt{\frac{1}{w_1 + w_2}}$$

ergibt sich $\tau = 1.796 \pm 0.001$. Mit [Gleichung 2.1](#) folgt die getrennte Fehlerfortpflanzung der systematischen und statistischen Abweichungen. Anschließend ergibt eine lineare Addition beider Fehler die Gesamtunsicherheit von g .

$$\Delta \bar{g}_{\text{syst}} = \left| \Delta \bar{l}_{\text{r,syst}} \left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \right) \Big|_{\bar{l}_r, \bar{\tau}} \right| = \left| \Delta \bar{l}_{\text{r,syst}} \frac{4\pi^2}{\bar{\tau}^2} \right| = 22.4 \text{ ms}$$

$$\Delta \bar{g}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{l}_{\text{r,stat}}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \right)^2 \Big|_{\bar{l}_r, \bar{\tau}} + \Delta \bar{\tau}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \tau} \right)^2 \Big|_{\bar{l}_r, \bar{\tau}}} = \sqrt{\Delta \bar{l}_{\text{r,stat}}^2 \left(\frac{4\pi^2}{\bar{\tau}^2} \right)^2 + \Delta \bar{\tau}^2 \left(\frac{4\pi^2 2l_r}{\bar{\tau}^3} \right)^2}$$

$$= 11.3 \text{ ms}$$

$$\Delta \bar{g} = \Delta \bar{g}_{\text{stat}} + \Delta \bar{g}_{\text{syst}} = 35.8 \text{ ms}$$

B. Fehlerrechnung zum gekoppelten Pendel

Die Unsicherheit bei der Längenmessung folgt aus quadratischer Addition der insgesamt drei statistischen Abweichungen von je $\Delta \bar{l}_{\text{stat}_i} = 0.1 \text{ mm}$, wobei im Anschluss linear der systematische Fehler zur Gesamtunsicherheit dazu addiert werden muss.

$$\Delta \bar{l}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{l}_{\text{stat}_1}^2 + \Delta \bar{l}_{\text{stat}_2}^2 + \Delta \bar{l}_{\text{stat}_3}^2} = \sqrt{3} \cdot \Delta \bar{l}_{\text{stat}_i}$$
$$\Delta \bar{l} = \Delta \bar{l}_{\text{syst}} + \Delta \bar{l}_{\text{stat}}$$

Da alle Abweichungen für die Kreisfrequenzen, die sowohl Anteile statistischer und systematischer Natur sind, geschätzt werden mussten und auf Grund der Fits keine weiteren statistischen relevanten Anteile hinzukommen, wird eine lineare Addition angewandt, um die Unsicherheit des Kopplungsgrades zu ermitteln.

$$\Delta \bar{K} = \left| \Delta \bar{\omega}_m \left(\frac{\partial K}{\partial \omega_m} \right) \Big|_{\bar{\omega}_m, \bar{\omega}_s} \right| + \left| \Delta \bar{\omega}_s \left(\frac{\partial K}{\partial \omega_s} \right) \Big|_{\bar{\omega}_m, \bar{\omega}_s} \right| =$$
$$= \left| \Delta \bar{\omega}_m \left(\frac{2\bar{\omega}_s (\bar{\omega}_s^2 - \bar{\omega}_m^2)}{(\bar{\omega}_m^2 + \bar{\omega}_s^2)^2} \right) \right| + \left| \Delta \bar{\omega}_s \left(\frac{2\bar{\omega}_m (\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}_s^2)}{(\bar{\omega}_m^2 + \bar{\omega}_s^2)^2} \right) \right|$$

C. Literaturverzeichnis

- [1] M. Saß. *Pendel (PEN)*. 2018. URL: <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/PEN.pdf> (besucht am 23. März 2018) (siehe S. 1, 4–5).
- [2] B. Klose. *Meteorologie: Eine interdisziplinäre Einführung in die Physik der Atmosphäre*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2016 (siehe S. 3).