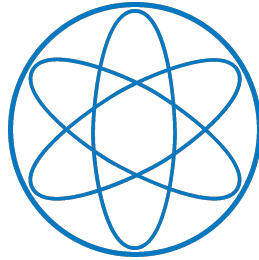


Anfängerpraktikum Teil 1

(Mechanik und Thermodynamik)

Trägheitsmoment



Kurs 3, Gruppe 5, Team 14:

Michael Labenbacher

Nina Miller

Fakultät für Physik
Technische Universität München

1. Einleitung	1
2. Einführungsexperiment mit einer Puppe	1
2.1. Beschreibung der verwendeten Methoden	1
2.2. Experimentelles Vorgehen	1
2.3. Ergebnisse	2
2.3.1. Statische Methode	2
2.3.2. Dynamische Methode	3
2.3.3. Trägheitsmomente der Puppe	5
2.4. Diskussion	6
3. Trägheitsmoment eines Menschen	7
3.1. Beschreibung der verwendeten Methoden	7
3.2. Experimentelles Vorgehen	7
3.3. Ergebnisse	8
3.3.1. Statische Methode	8
3.3.2. Dynamische Methode	9
3.3.3. Experimentell bestimmte Trägheitsmomente des Menschen	9
3.3.4. Theoretisch bestimmte Trägheitsmomente des Menschen	10
3.4. Diskussion	11
4. Zusammenfassung	11

Anhang	12
A. Fragen	12
B. Fehlerrechnung für das Einführungsexperiment mit der Puppe	13
C. Fehlerrechnung für das Trägheitsmoment des Menschen	15
D. Literaturverzeichnis	16

1. Einleitung

In diesen Experimenten sind verschiedene Trägheitsmomente zu bestimmen, wobei dies über den Zusammenhang mit dem Auslenkwinkel einer Spiralfeder geschieht. Des Weiteren soll im zweiten Teil eine Extrapolation auf ein komplexes System, dem Menschen, durchgeführt werden. (Die Grundlagen zum „Trägheitsmoment (TRM)“ aus der Anleitung [1] werden als vorausgesetzt angesehen. , nicht in die Einleitung) (Ausführlichere Diskussionen und Zusamm...)

2. Einführungsexperiment mit einer Puppe

2.1. Beschreibung der verwendeten Methoden

Am Anfang ist die Winkelrichtgröße k^* einer Spiralfeder mit Hilfe des Zusammenhangs

$$\vec{M} = -k^* \cdot \vec{\varphi} \quad (2.1)$$

zu bestimmen. Dies beschreibt das hookesche Gesetz, wobei vorausgesetzt wird, dass die Auslenkung $\vec{\varphi}$ direkt proportional zum auslenkenden Drehmoment \vec{M} ist. Das Drehmoment ergibt sich durch die Rückstellkraft \vec{F} der Feder und dem Abstand zur Drehachse \vec{r} mit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.2)$$

Durch lösen der Bewegungsgleichung mit dem Ansatz einer harmonischen Schwingung erhält man analog zur translatorischen Bewegung, den Zusammenhang

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k^*}} \quad (2.3)$$

der Periodendauer T , Winkelrichtgröße und dem Trägheitsmoment

$$J = \int_V \vec{r}_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV. \quad (2.4)$$

des Gesamtsystems. (Satz von Steiner fehlt)

2.2. Experimentelles Vorgehen

Unter Verwendung eines Drehtellers (Nummer 3), dessen Eigenträgheitsmoment J_0 und Winkelrichtgröße der Spiralfeder unbekannt sind, ist das Trägheitsmoment einer Puppe zu ermitteln. Eine Möglichkeit, die Materialkonstante der Feder k^* messtechnisch zu identifizieren, ist die statische, bei der die Rückstellkraft in Abhängigkeit des Auslenkwinkels festgestellt wird. Für die Winkel 45° , 90° , 135° und 180° ist dabei mittels eines Feder-Kraftmessers die rückstel-

lende Federkraft zu bestimmen. Dabei ist es, aufgrund von [Gleichung 2.2](#) wichtig, dass nur die Tangentialkomponente für das Rückstellmoment sorgt und somit die Winkelabweichung bzgl. der Tangente nicht größer als $\approx 8^\circ$ sein darf, damit der Fehler $< 1\%$ bleibt.

Eine weitere Option für die Bestimmung von der Materialkonstante ist die dynamische, wobei zwei identische Massenelemente an einer, senkrecht zur Drehachse befestigten Querstange angebracht werden. Die Ermittlung der Masse und Ausmaße der beiden Gewichte erfolgt mit einer Präzisions- und Analysewaage bzw. eines Messschiebers.

Bei verschiedenen, symmetrischen Abständen der Massenelemente vom Drehzentrum, wird die Periodendauer durch den Einsatz einer Lichtschranke gemessen, wobei die Auslenkwinkel im vereinfachten theoretischen Modell keinen Einfluss haben. Um Abweichungen von der Linearität der Feder zu verringern wird dieser Messvorgang bei den Winkelauslenkungen 45° , 90° und 135° durchgeführt und im Anschluss darauf folgt eine Mittlung der Ergebnisse.

Im Anschluss darauf ist die Möglichkeit gegeben, das Trägheitsmoment von komplexen Körpern, durch Anbringen auf der Vorrichtung messtechnisch zu erfassen, indem der Messvorgang analog zu dem der beiden Massen erfolgt und die [Gleichung 2.3](#) angewandt wird. Dabei wurde ein aus Holz angefertigte Puppe (Nummer 3) verwendet und aufrecht, möglichst zentral auf dem Drehteller in zwei verschiedenen Positionen angebracht. Am Beginn wurden die Arme angelegt und im zweiten Durchlauf erfolgte der Messvorgang mit ausgestreckten Armen, wobei darauf geachtet wurde, dass der Schwerpunkt in der Drehachse liegt.

2.3. Ergebnisse

2.3.1. Statische Methode

Die Messung der Rückstellkraft in Abhängigkeit der Auslenkung ergab die Messwerte, die in [Abbildung 2.1](#) dargestellt sind. Dabei wurde ein Skalierungsfehler des Kraftmessers mit $1\% \cdot \text{„Messwert“}$ berücksichtigt und ein Nullpunktfehler war nicht erkennbar. Die Kraft die durch das Messgerät erfasst wird, weicht von der Tangentialkomponente um einen Winkel θ ab. Dieser Winkel sorgt im Mittel für eine systematische Abweichung (es wird immer eine zu große Kraft gemessen) und wurde mit einem Fehler von 1% abgeschätzt. Statistisch entstehen bei der Kraftmessung Abweichungen aufgrund der Auflösung und Dicke des „Zeigers“ des Messgeräts, welche mit $1/2 \cdot \text{„Strichabstand“}$ berücksichtigt wird.

$$\Delta \bar{F}_{\text{stat}} = 0.005 \text{ N} \quad \Delta \bar{F}_{\text{syst}} = |0.01 \cdot \text{„Messwert“}| + |0.01 \cdot \text{„Messwert“}|$$

Des Weiteren wurde die Genauigkeit der Winkelangabe mit 0.1° und der nicht erkennbarer Nullpunktfehler im Mittel, aufgrund der drehbaren Skala, mit 0.25° abgeschätzt. Statistische Abweichungen des Winkels sind auf die Auflösung $1/4 \cdot \text{„Strichabstand“}$ und einem geschätzten Ablesefehler (Einzelmessung \rightarrow quasi-statistisch) von 2° , zurück zu führen.

$$\Delta \bar{\varphi}_{\text{stat}} = 0.035 \text{ rad} \quad \Delta \bar{\varphi}_{\text{syst}} = 0.006 \text{ rad}$$

Unter Berücksichtigung dieser Abweichungen wurde ein linearer Fit mit x-/y-Error durchgeführt, welcher in [Abbildung 2.1](#) dargestellt ist. Dies ergab dafür eine Steigung von $a_1 = (0.115 \pm 0.007) \text{ N/rad}$ und einen y-Achsenschnitt von $a_0 = (-0.020 \pm 0.012) \text{ N}$. Die Gerade geht, auch mit Berücksichtigung des Toleranzbereichs, nicht durch den Ursprung, wie die vereinfachte Theorie besagt, jedoch lässt sich dies durch die geringe Anzahl an Messpunkten

verbunden mit den relativ großen Abweichungen und etwaigen Nichtlinearitäten erklären und wird somit vernachlässigt. Dies führt nun mit [Gleichung 2.1](#) und [2.2](#), unter Voraussetzung, dass die Kraft tangential angreift und einem Abstand $r = (200.5 \pm 1.0)$ mm von der Drehachse auf eine Winkelrichtgröße von

$$k^* = \frac{\overline{M}}{\overline{\varphi}} = \frac{\overline{r} \cdot \overline{F}}{\overline{\varphi}} = \overline{r} \cdot \overline{a_1} = (23.1 \pm 1.4) \text{ mN m} \quad (\text{Rechnung angeben})$$

Die Fehlerfortpflanzung für statistische und systematische Abweichungen ist dem [Anhang B](#) zu entnehmen. Dabei wurde der Abstand r aus den Messdaten des Durchmessers d der vertikalen Stange in der Mitte des Drehtellers, gemessen mit einer Schiebelehre, und der Länge l des Stabes von dieser Stange gemessen nach außen mit Hilfe eines Maßbands berechnet. Beim Messen mit der Schiebelehre entstehen aufgrund der Genauigkeit systematische Abweichungen von 0.1% · „Messwert“ und mit dem Maßband Fehler von 0.1% · „Messwert“ (Nullpunktfehler waren nicht erkennbar). Beim Ablesen zwischen Strichen kommen hier noch quasi-statistische (Einzelmessung) Fehler von $1/4$ · „Strichabstand“ bzw. am Strich $1/2$ · „Strichbreite“ hinzu.

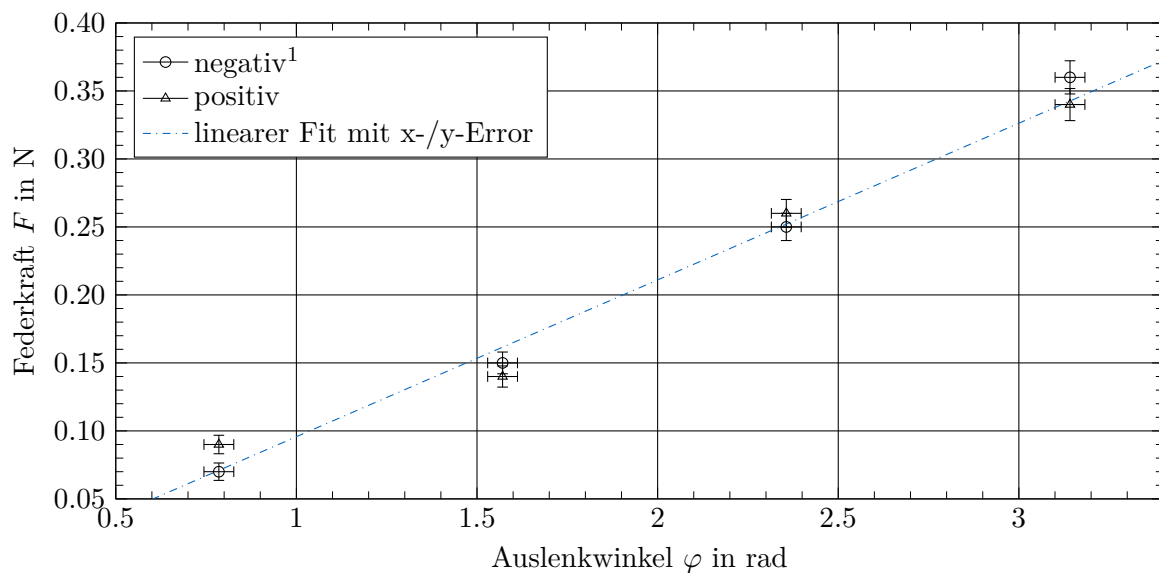


Abbildung 2.1.: Federkraft F in Abhängigkeit des Winkels φ beim kleinen Drehteller mit einer zusätzlichen Stange zur Kraftmessung, wobei bei beiden Größen nur der Betrag dargestellt wird. Der Fit wurde vorzeichenbehaftet, gewichtet für x-/y-Abweichungen durchgeführt.

2.3.2. Dynamische Methode

Die Messung der Massen ergab den Wert in [Tabelle 2.1](#), unter Berücksichtigung der Reproduzierbarkeit $\Delta \overline{m}_{\text{stat1}} = 0.2 \text{ mg}$, Ableseschwankungen (Einzelmessung geschätzt) $\Delta \overline{m}_{\text{stat2}} = 1 \text{ mg}$, des Linearitäts- und Skalierungsfehlers von $\Delta \overline{m}_{\text{syst}} = 0.5 \text{ mg}$ und der Fehlerfortpflanzung im [Anhang B](#). Fehler der Abmessungen der Dicke h und des Durchmessers $D = 2R$ entstehen aus der Messung mit einer Schiebelehre, dessen Fehler im [Unterabschnitt 2.3.1](#) erläutert wurden.

¹Mit „negativ“ ist die Richtung im Uhrzeigersinn und umgekehrt gemeint.

Tabelle 2.1.: Eigenschaften der zusätzlichen Massenelemente

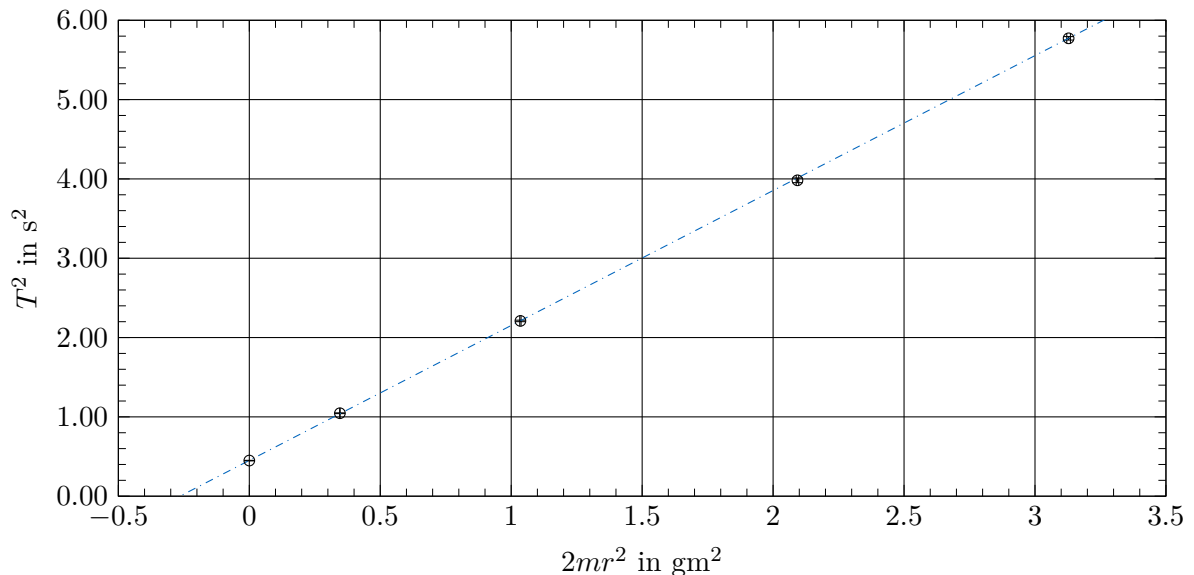
h	R	m
mm	mm	g
9.500 ± 0.022	15.000 ± 0.021	57.5925 ± 0.0008

Die aus den Messwerten gemittelten Periodendauern und Abstände sind in der [Tabelle 2.2](#) zusammengefasst, wobei die statistische Abweichung von T durch die Student-t-Verteilung folgte und ein systematischer Fehler von 1 ms aufgrund der Gerätegenauigkeit berücksichtigt wurde. (Fehlerrechnung und -beschreibung zu r und T fehlt)

Tabelle 2.2.: Abstände r vom Drehmittelpunkt bis zum Mittelpunkt der zusätzlichen Masse und Periodendauern T

r	T
mm	s
0	0.6703 ± 0.0020
54.80 ± 0.07	1.0227 ± 0.0023
94.80 ± 0.11	1.487 ± 0.003
134.80 ± 0.15	1.996 ± 0.007
164.80 ± 0.18	2.403 ± 0.005

Durch Fehlerfortpflanzung auf $2mr^2$ und T^2 kann ein linearer Fit mit y-Error, dargestellt in [Abbildung 2.2](#), erstellt werden.

**Abbildung 2.2.:** Quadrat der Periodendauer T in Abhängigkeit von $2mr^2$ beim kleinen Drehteller. Der lineare Fit wurde gewichtet mit den y-Abweichungen durchgeführt. Abweichungen liegen in der Größenordnung der Datenpunkte.

Mit der Steigung $a_1 = (1.701 \pm 0.006) / \text{mNm}$ und dem y-Schnitt $a_0 = (0.4510 \pm 0.0026) \text{s}^2$ lässt sich der Fit eindeutig charakterisieren. Mit [Gleichung 2.3](#) und der Definition des Trägheitsmoments [2.4](#) folgt:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k^*} (J_0 + J_M)$$

Dabei ist J_M das Trägheitsmoment der beiden Massenelemente um die Drehachse, gegeben durch

$$J_M = 2m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + r^2 \right) \stackrel{(*)}{\approx} 2mr^2$$

aufgrund der Abschätzung

$$(*) \quad \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} = 64 \text{ mm}^2 \ll 3003 \text{ mm}^2 = \min \{r^2\}$$

kann die Ausdehnung der Massenstücke vernachlässigt werden. Dabei wurde $r = 0 \text{ mm}$ außen vor gelassen, da das Eigenträgheitsmoment J_0 in diesem Falle deutlich überwiegt, bzw. die Massenelemente von der Drehachse nicht weit entfernt sind und kaum zum Trägheitsmoment beitragen. Durch diese Vereinfachung folgt aus der Geradensteigung die Winkelrichtgröße und mit dem y-Achsenschnitt danach das Eigenträgheitsmoment des Drehtellers:

$$\begin{aligned} \bar{k}^* &= \frac{4\pi^2}{\bar{a}_1} \\ \bar{J}_0 &= \frac{1}{4\pi^2} \bar{k}^* \bar{a}_0 = \frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_1} \end{aligned}$$

Die statistischen Abweichungen folgen direkt aus der Geradengleichung und quadratischer Fehlerfortpflanzung und die systematischen werden abgeschätzt aus dem Maximum von $2mr^2$, wie in [Anhang B](#) erläutert wird. Dies führt nun zu den Ergebnissen:

$$\begin{aligned} k^* &= (23.20 \pm 0.08) \text{ mNm} \\ J_0 &= (0.265 \pm 0.014) \text{ gm}^2 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die auf verschiedene Arten bestimmten Winkelrichtgrößen im Toleranzbereich übereinstimmen. Da der Fehler bei der statischen Methode aufgrund der Kraftmessung viel größer ist, wird für weitere Berechnungen dieses Ergebnis verwendet.

2.3.3. Trägheitsmomente der Puppe

Die Abmessungen und die Masse der Puppe ergaben nach Fehlerrechnung die Werte in [Tabelle 2.3](#). Die Messungen der Periodendauer mit der Puppe bei ausgestreckten und angelegten Armen ergab gemittelt die Ergebnisse in [Tabelle 2.4](#). Die Fehlerrechnung erfolgte analog zu der im [Unterabschnitt 2.3.2](#). Mit [Gleichung 2.3](#) und der Definition des Trägheitsmoments [2.4](#) folgt:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k^*} (J_0 + J_{Pn})$$

Tabelle 2.3.: Eigenschaften der verwendeten Puppe

Durchmesser d					
Kopf d_{Ko} mm	Hüfte/Brust d_{HB} mm	Fuß (oben) d_{OS} mm	Fuß (unten) d_{US} mm	Oberarm d_{OA} mm	Unterarm d_{UA} mm
32.00 ± 0.04	32.83 ± 0.04	27.00 ± 0.04	17.80 ± 0.03	15.60 ± 0.03	15.20 ± 0.03
Längen l und Breiten b					
Füße			Hände		
l_{Fu} mm	b_{Fu} mm		l_{Ha} mm	b_{Ha} mm	
25.00 ± 0.04	13.70 ± 0.04		41.80 ± 0.05	19.00 ± 0.03	

Dabei ist J_{Pn} das Trägheitsmoment der Puppe mit der Masse (183.46 ± 0.01) g und $n = \{1, 2\}$, wobei die Bezeichnung 1 für angelegte Arme und 2 für ausgestreckte Arme verwendet wird und k^* das Ergebnis aus dem [Unterabschnitt 2.3.2](#) ist. Daraus lässt sich nun das Trägheitsmoment der Puppe berechnen und mit der Fehlerrechnung im [Anhang B](#) ergeben sich die Werte in [Tabelle 2.4](#).

Tabelle 2.4.: Periodendauern und Trägheitsmomente der Puppe für beide Positionen

Position	T s	J gm ²
1	$0.770\,1 \pm 0.002\,2$	0.083 ± 0.016
2	$0.966\,5 \pm 0.001\,9$	0.284 ± 0.016

2.4. Diskussion

Der Vergleich der beiden Messmethoden für die Winkelrichtgröße zeigt, dass bei der statischen die Abweichungen wesentlich größer sind. Mögliche Nichtlinearitäten der Spiralfeder wurden in diesem Experiment nicht berücksichtigt und haben bei der dynamischen Messmethode weniger Einfluss als bei der statischen.

Die Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe bei angelegten Armen 1 führte zwar auf ein sehr vernünftiges Ergebnis, jedoch sind die systematischen Abweichungen relativ zum Ergebnis sehr groß, im Gegensatz zum zweiten Fall, bei ausgestreckten Armen, wo das Trägheitsmoment der Puppe in der Größenordnung des Eigenträgheitsmoments des Drehtellers liegt. Das Verhältnis der beiden Trägheitsmomente

$$\frac{J_{P2}}{J_{P1}} \approx 340\%$$

zeigt dabei den Größenunterschied deutlich auf.

3. Trägheitsmoment eines Menschen

3.1. Beschreibung der verwendeten Methoden

Zur Bestimmung von einer Winkelrichtgröße k^* einer Spiralfeder bzw. von einem Trägheitsmoment eines komplexen Systems wird auf [Abschnitt 3.1](#) verwiesen, da es sich im Prinzip um das selbe Experiment handelt und der „einzige“ Unterschied die Größe ist.

Für eine Extrapolation von Trägheitsmomenten, wo Radien genau im Verhältnis zu Längen stehen folgt, wie in der Anleitung [\[1\]](#) hergeleitet wird,

$$J_M = \frac{m_M}{m_P} \left(\frac{l_M}{l_P} \right)^2 J_P \quad (3.1)$$

3.2. Experimentelles Vorgehen

Am Anfang ist die Winkelrichtgröße und das Eigenträgheitsmoment J_0 von dem großen Drehteller (Nummer 3) zu bestimmen. Analog zum [Abschnitt 3.2](#) soll dabei eine statische und dynamische Messmethode verwendet und die beiden verglichen werden, dabei sind diverse Messvorgänge diesem Kapitel zu entnehmen und werden hier nicht weiter erläutert. Für die vorgegebenen Winkeln von -90° bis 90° ist in 10° -Schritten mit Hilfe eines Feder-Kraftmessers die rückstellende Kraft der Spiralfeder zu bestimmen. Die Abmessung des Abstandes r vom Drehmittelpunkt erfolgt mit einem Meterstab.

Im zweiten Schritt ist mittels der Schwingungszeit T , gemessen unter Verwendung eines Handys (Stoppuhr), auf dynamischer Art und Weise k^* zu ermitteln. Dabei werden zehn Periodendauern bei verschiedenen Anfangswinkeln 60° und 70° in beiden Drehrichtungen gemessen und die Werte im Anschluss gemittelt auf eine Periode.

Das Eigenträgheitsmoment des Drehtellers ist hier aus der Geometrie des Mess-Systems zu berechnen, wobei die Dichte des Materials mit $(2.7 \pm 0.1) \text{ g/cm}^3$ (Aluminium) in der Anleitung [\[1\]](#) gegeben ist, wobei die Abweichung als statistisch angenommen und geschätzt wurde. Hier lässt sich erkennen, dass in den folgenden Aufgaben nur eine Abschätzung der Unsicherheiten erfolgen wird. Alle Abmessungen $< 150 \text{ mm}$ werden mit einer Schieblehre erfasst, andere mit Hilfe eines Meterstabs.

Zuletzt ist bei Auslenkwinkeln von 50° bis 90° in 10° -Schritten über mehrere (fünf) Perioden die Schwingungsdauer des Drehteller-Mensch-Systems bei ausgestreckten bzw. angelegten Armen mit Hilfe einer Stoppuhr (Handy) zu bestimmen. Des Weiteren ist das Trägheitsmoment vom Menschen (Michael Labenbacher) durch Abmessungen der Geometrien und Masse mittels Maßband bzw. Waage und Näherungen durch geometrische Formen (Zylinder, Quader, Kugeln) zu berechnen, um daraufhin Vergleiche mit den Messungen machen zu können.

3.3. Ergebnisse

3.3.1. Statische Methode

Die Messungen ergaben nach anschließendem linearen Fit mit x-/y-Error den Zusammenhang, visualisiert in [Abbildung 3.1](#). Dabei wurden die selben Fehler, wie im [Unterabschnitt 3.3.1](#) beschrieben, verwendet, außer der statistische Fehler beim Ablesen (Einzelmessung) wurde mit nur 1° abgeschätzt, da es deutlich einfacher war den Winkel φ abzulesen. Unter diesen Umständen ergaben sich

$$\begin{aligned}\Delta \bar{F}_{\text{stat}} &= 0.005 \text{ N} & \Delta \bar{F}_{\text{syst}} &= |0.01 \cdot \text{„Messwert“}| + |0.01 \cdot \text{„Messwert“}| \\ \Delta \bar{\varphi}_{\text{stat}} &= 0.018 \text{ rad} & \Delta \bar{\varphi}_{\text{syst}} &= 0.006 \text{ rad}\end{aligned}$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden beträgt $a_1 = (7.56 \pm 0.11) \text{ N/rad}$ und der y-Achsenschnitt $a_0 = (-0.21 \pm 0.08) \text{ N}$. Wie auch beim kleinen Drehteller geht die Gerade nicht durch den Ursprung, was hier einerseits darauf zurück geführt wird, dass die Spiralfeder einmal zusammengedrückt und das andere mal auseinander gezogen wird und dabei etwas unterschiedlich reagiert und andererseits auf die vereinfachte Modellbeschreibung mit dem hookeschen Gesetz.

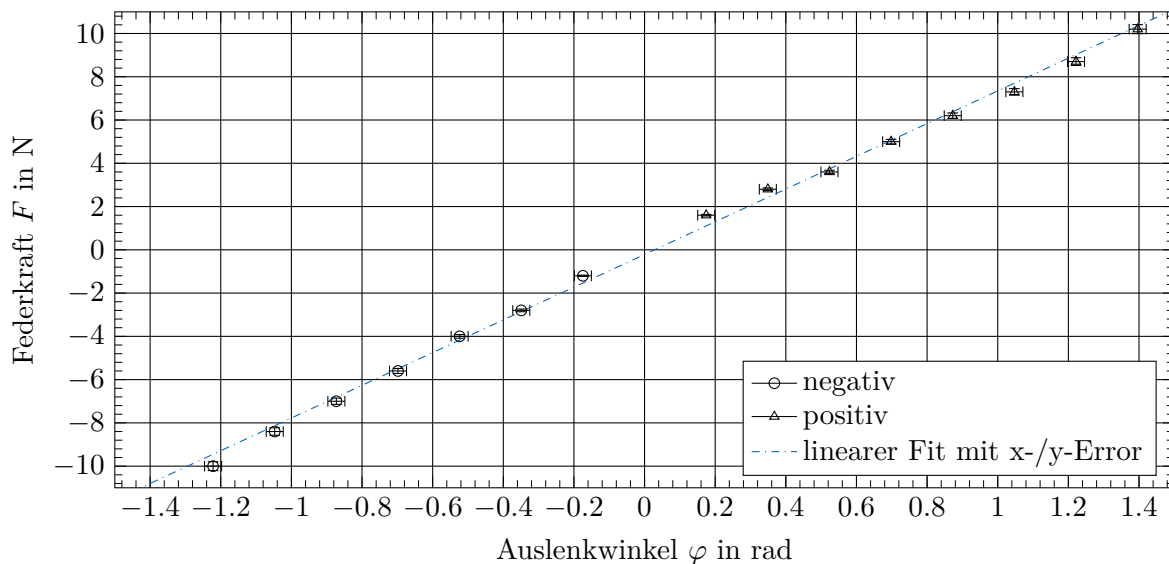


Abbildung 3.1.: Federkraft F in Abhängigkeit des Auslenkwinkels φ beim großen Drehteller. Der lineare Fit wurde gewichtet für x- und y-Abweichungen durchgeführt und es lässt sich erkennen, dass die Spiralfeder in den verschiedenen Drehsinnen unterschiedlich starke Rückstellkräfte bei gleichen Winkeln aufweist.

Mit dem gemessenen Abstand $r = (290 \pm 4) \text{ mm}$ vom Drehmittelpunkt bis zum Angriffspunkt der Kraft, wobei zusätzlich zu den Fehlern im Einführungs experiment noch eine statistische Abweichung von 1 mm berücksichtigt wurde, da der Angriffspunkt der Kraft aus dem Aufbau her nicht so gut abgeschätzt werden konnte, ergibt sich mit [Gleichung 2.1](#) und [2.2](#) im Mittel die Winkelrichtgröße

$$k^* = (2.19 \pm 0.05) \text{ N m}$$

Fehlerfortpflanzungen bzw. -betrachtungen sind analog zum [Kapitel 2](#) durchgeführt worden und sind diesem zu entnehmen.

3.3.2. Dynamische Methode

Im ersten Schritt wurde dabei das Eigenträgheitsmoment J_0 des großen Drehtellers aus den gemessenen Daten in [Tabelle 3.1](#) mit [Gleichung 2.4](#) bestimmt, wobei die Stange in der Mitte zum Festhalten und diverse Löcher und Schrauben aufgrund des geringen Einflusses außer Acht gelassen wurden. Dadurch setzt sich das Drehteller aus einer kleinen Kreisscheibe in

Tabelle 3.1.: Durchmesser d und Höhen h des großen Drehtellers

d_1	h_1	d_2	h_2
mm	mm	mm	mm
600 ± 6	21.00 ± 0.03	200.0 ± 2.1	12.000 ± 0.025

der Mitte und einer größeren oberhalb zusammen und ergibt nach einer dementsprechenden Fehlerrechnung im [Anhang C](#)

$$J_0 = (0.727 \pm 0.006) \text{ kgm}^2$$

Im zweiten Teil wurde aus den vier Messzeiten für je zehn Perioden jeweils die Periodendauer bestimmt und im Anschluss mit der Student-t-Verteilung gewichtet ($n = 4 \rightarrow t_{\text{Student}}$) die Periodendauer mit der Standardabweichung zu

$$T = (3.52 \pm 0.03) \text{ s}$$

berechnet. Mit dem Zusammenhang [2.3](#) folgt für die Winkelrichtgröße

$$k^* = (2.32 \pm 0.19) \text{ N m}$$

Dabei zeigt sich, dass die beiden Messwerte für die statische und dynamische Größe im Toleranzbereich nicht übereinstimmen, was auf die Unsymmetrien der größeren Spiralfeder zurück geführt wird und deshalb der dynamische Wert für weitere Berechnungen verwendet wird, da auch im nächsten Abschnitt dynamisch vor zu gehen ist.

3.3.3. Experimentell bestimmte Trägheitsmomente des Menschen

Die zehn Messungen der je fünf Periodendauer für angelegte bzw. ausgestreckte Arme wurden mit der Student-t-Verteilung ($n = 10 \rightarrow t_{\text{Student}} = 1.06$) gemittelt und ergaben die Werte in [Tabelle 3.2](#), wobei systematische Abweichungen von der Genauigkeit der Stoppuhr vernachlässigt wurden. Mit der [Gleichung 2.3](#) und [2.4](#) ergibt sich wieder der Zusammenhang

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k^*} (J_0 + J_M)$$

mit J_M dem Trägheitsmoment des Menschen, welches analog zum Trägheitsmoment der Puppe im [Unterabschnitt 2.3.3](#) und der zugehörigen Fehlerrechnung im [Anhang B](#) berechnet werden kann. Die Ergebnisse dazu, sind in der [Tabelle 3.2](#) aufgelistet.

Tabelle 3.2.: Periodendauern und experimentell bestimmte Trägheitsmomente des Menschen für beide Positionen

Position	T s	J kgm^2
1	5.213 ± 0.013	0.87 ± 0.17
2	7.188 ± 0.012	2.31 ± 0.28

3.3.4. Theoretisch bestimmte Trägheitsmomente des Menschen

Berechnung mit geometrischen Formen

Alle angegebenen Abweichungen in diesem Kapitel sind statistischer Natur und werden größtenteils geschätzt. Systematische Unsicherheiten der Längen- bzw. Massenmessung werden hier aufgrund der geringen Relevanz nicht berücksichtigt. Die Abmessungen wurden mit Hilfe eines Maßbandes durchgeführt, die Unsicherheiten diesbezüglich wurden auf 5 % geschätzt und sind in der [Tabelle 3.3](#) aufgelistet.

Tabelle 3.3.: Abstände a zur Drehachse, Anzahl n , Radien r und Längen l der Geometrien der Körperteile

Körperteil	n	Geometrie	a_1 m	a_2 m	r m	l m
Kopf	1	Kugel	0	0	0.091 ± 0.005	
Rumpf	1	Zylinder	0	0	0.123 ± 0.006	
Fuß (oben)	2	Zylinder	0.120 ± 0.006	0.120 ± 0.006	0.074 ± 0.004	
Fuß (unten)	2	Zylinder	0.120 ± 0.006	0.120 ± 0.006	0.055 ± 0.003	
Oberarm	2	Zylinder	0.255 ± 0.013	0.410 ± 0.021	0.039 ± 0.019	0.260 ± 0.013
Unterarm	2	Zylinder	0.255 ± 0.013	0.62 ± 0.03	0.039 ± 0.020	0.62 ± 0.03

Die prozentualen Anteile der Körperteile zur Gesamtmasse des Menschen sind der Anleitung [1] zu entnehmen, da nur die Gesamtmasse $m = 60.25 \text{ kg}$ gemessen und die Unsicherheit der Waage mit 1 % abgeschätzt wurde.

Tabelle 3.4.: Massen m und Trägheitsmomente J bzgl. der Drehachse bei angelegten bzw. ausgestreckten Händen je Körperelement

Körperteil	m kg	J_1 kgm^2	J_2 kgm^2
Kopf	4.40 ± 0.04	0.0144 ± 0.0014	0.0144 ± 0.0014
Rumpf	29.46 ± 0.29	0.224 ± 0.023	0.224 ± 0.023
Fuß (oben)	5.84 ± 0.06	0.10 ± 0.07	0.10 ± 0.07
Fuß (unten)	4.22 ± 0.04	0.07 ± 0.05	0.07 ± 0.05
Oberarm	1.627 ± 0.016	0.11 ± 0.04	0.28 ± 0.07
Unterarm	1.506 ± 0.015	0.10 ± 0.04	0.58 ± 0.09

Durch Addition der aus den Messdaten gewonnenen Einzelträgheitsmomente, in [Tabelle 3.4](#), ergibt sich jeweils ein Gesamtträgheitsmoment von

$$J_1 = (0.99 \pm 0.21) \text{ kgm}^2$$

$$J_2 = (2.31 \pm 0.29) \text{ kgm}^2$$

Die Fehlerrechnung erfolgt dabei jeweils durch einfache quadratische Addition (Gaussche Fehlerfortpflanzung) und wird deshalb nicht angeführt.

Extrapolation des Trägheitsmoment der Puppe auf den Menschen

Mit dem Zusammenhang [3.1](#) kann aus dem Trägheitsmoment der Puppe, das des Menschen abgeschätzt werden auf

$$J_1 = 0.92 \text{ kgm}^2$$

$$J_2 = 3.14 \text{ kgm}^2,$$

wobei geometrisch der gesamte Körper als Zylinder mit dem Umfang der Hüfte/Rumpf/Brust und der Höhe $h_M = 1.80 \text{ m}$ bzw. $h_P = 0.31 \text{ m}$ genähert wurde. Eine Fehlerrechnung wurde bei dieser groben Näherung außen vor gelassen.

3.4. Diskussion

Die Gegenüberstellung in [Tabelle 3.5](#) zeigt auf, dass bei der Extrapolation, vor allem durch die Näherung an einen Zylinder größere Abweichungen auftreten, was auch auf die Annahme der homogenen Massenverteilung beim Menschen zurück geführt werden kann.

Tabelle 3.5.: Gegenüberstellung der ermittelten Trägheitsmomente des Menschen

Position	experimentell kgm ²	theoretisch kgm ²	Extrapolation kgm ²
1	0.87 ± 0.17	0.99 ± 0.21	0.92
2	2.31 ± 0.28	2.31 ± 0.29	3.14

4. Zusammenfassung

Der Vergleich der kleinen und großen Feder zeigte deutlich auf, dass die hookesche Näherung nicht für jede gleich gut geeignet ist und auch durch längeren, groben Gebrauch durch die einzelnen Studenten mehr Nichtlinearitäten auftreten. Betrachtet man die Größenordnungen, so stimmen die, auf verschiedenen Arten und Weisen ermittelten Werte für das Trägheitsmoment der Puppe bzw. des Menschen gut überein. Für uns sehr verwunderlich ist, dass die experimentell und theoretisch berechneten sich so nahe kommen, obwohl im [Kapitel 3](#) die Fehlerbetrachtung nur Schätzungsweise durchgeführt wurde und die Abschätzung der Massenverteilung nicht auf jeden Menschen gleich angewandt werden kann.

A. Fragen

Eine Hängeschaukel ist ein Holzbrett das mittels 2 Seilen an einer Stange befestigt ist und frei schwingen kann. Auf der Schaukel sitze ein Mensch.

1. **Frage:** Welche Energieformen treten während einer Schwingung auf?

Antwort: Es kommt zu Änderungen der potentiellen Energie aufgrund der Höhenänderungen und wegen der rotatorischen Bewegung um einen Drehpunkt, da man sich im Schwerfeld der Erde befindet, zu Rotationsenergie, also einer Form von kinetischen Energie, welche durch Oberkörperdrehbewegungen verändert werden kann. („und chemische Energie steckt im Körper des Menschen“)

2. **Fragen:** Wie wird das Trägheitsmoment beeinflusst wenn der Schaukelnde den Oberkörper absenkt (nach hinten kippt)?

Antwort: Nach der Vereinfachung $I = mr^2$ bzw. der Definition für das Trägheitsmoment folgt, dass je mehr Masse vom Schwerpunkt entfernt ist, desto höher ist es, was durch „Zurücklehnen“ der Fall ist.

3. **Fragen:** Wie verändert sich die Energie des Systems Schaukel/Mensch wenn der Schaukelnde dauerhaft den Oberkörper absenkt?

Antwort: Da in einem abgeschlossenen System (Schaukel/Mensch) die Energie konstant bleibt, kann nur Energie durch die Bewegung umgewandelt, aber nicht hinzugefügt werden bzw. „verloren“ gehen.

4. **Frage:** Durch welches periodische Verhalten kann der Schaukelnde die Veränderung des Trägheitsmoments nutzen, um dem System Energie zuzuführen? (Stichwort: parametrische Resonanz) Hinweis: Energie die der Schaukelnde in Form von Muskelarbeit aufbringt gilt als dem System zugeführt. Energie die er zurückgewinnt gilt als dem System entzogen. Die chemische Energie bleibt unberücksichtigt.

Antwort: Die Schaukel ist im Prinzip ein komplexes Pendel. Der Mensch vergrößert die Auslenkung, da er die Pendellänge (zum Schwerpunkt) ändert, indem er von Sitzen ins Liegen wechselt bzw. umgekehrt. Im tiefsten Punkt herrscht maximale kinetische Energie wobei die Bewegungsenergie an den Maxima (oben) gleich null ist und umgekehrt bei der potentiellen Energie.

Bei der Bewegung erfolgt kontinuierlich eine Umwandlung von kinetischer (Rotation) und potentieller Energie. Liegt das Kind bei der Abwärtsbewegung, so erreicht es am tiefsten Punkt die maximale Geschwindigkeit (potentielle Energie = 0). Richtet es sich nun „schnell“ auf, so verrichtet es gegen die Gravitationskraft und der Zentrifugalkraft (im rotierenden System) Arbeit und fügt diesem System Energie zu, indem es chemische Energie verbraucht. Dabei muss durch das Aufrichten am tiefsten Punkt mehr Energie gewonnen werden, als durch das Hochheben verloren geht. Da die Geschwindigkeit am höchsten Punkt 0 ist, ist dort die ideale Position, um den Oberkörper wieder aufzurichten.

5. **Frage:** Was bedeutet dieses Verhalten für den maximalen Drehimpuls während der Schaukelbewegung, bzw. für den maximalen Drehwinkel?

Antwort: Nach Frage 4 ist das ideale Verhalten also, das Aufrichten am tiefsten Punkt und Absenken des Oberkörpers an den höchsten Punkten. Das bedeutet, dass der maximale Drehimpuls und Drehwinkel wachsen, solange die Schaukel während der Prozedur nicht so viel Dämpfung erfährt, dass dies die Energiezufuhr nicht überwiegt.

B. Fehlerrechnung für das Einführungsexperiment mit der Puppe

statische Methode

Die systematischen und statistischen Abweichungen der Kraftmessung bzw. beim Ablesen des Winkels wurden linear addiert und für den x-/y-Error-Fit in Origin verwendet. Damit verbleiben nur mehr die Abweichungen der Abstandsmessung, die für die Berechnung der Winkelrichtgröße zu berücksichtigen sind. Da die Länge des Stabes zur Kraftmessung l gemessen von der mittleren Stange mit dem Durchmesser d bekannt ist, folgt der effektive Abstand r vom Drehmittelpunkt, wobei statistische und systematische Abweichungen immer linear addiert werden:

$$\begin{aligned}\bar{l} &= 190.4 \text{ mm} & \Delta \bar{l}_{\text{syst}} &= 1.9 \text{ mm} & \Delta \bar{l}_{\text{stat}} &= 0.1 \text{ mm} \\ \bar{d} &= 20.10 \text{ mm} & \Delta \bar{d}_{\text{syst}} &= 0.02 \text{ mm} & \Delta \bar{d}_{\text{stat}} &= 0.01 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\bar{r} = \bar{l} + \frac{\bar{d}}{2}$$

$$\Delta \bar{r}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{l}_{\text{stat}}^2 + \left(\frac{\Delta \bar{d}_{\text{stat}}}{2}\right)^2}$$

$$\Delta \bar{r}_{\text{syst}} = \Delta \bar{l}_{\text{syst}} + \frac{\Delta \bar{d}_{\text{syst}}}{2}$$

dynamische Methode

Für die Periodendauern wurde bei je $n = 18$ Messungen die Student-t-Verteilung mit $t_{\text{Student}} = 1.04$ verwendet und für den Gesamtfehler wurden die sich daraus ergebenden statistischen Abweichungen mit der systematischen einfach linear addiert.

Die beiden Gewichte wurden gemeinsam gemessen und die Messergebnisse und Abweichungen die im [Unterabschnitt 2.3.2](#) beschrieben wurden, werden folgendermaßen verknüpft:

$$\Delta \bar{m}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{m}_{\text{stat}1}^2 + \Delta \bar{m}_{\text{stat}2}^2}$$

$$\Delta \bar{m} = \Delta \bar{m}_{\text{stat}} + \Delta \bar{m}_{\text{syst}}$$

Dies ist das Ergebnis für beide Massen, was noch durch zwei dividiert werden muss.

Aus den Messdaten der Dicke h der Massenelemente, sowie dem Abstand r' von der Stange

mit dem Durchmesser d in der Mitte bis hin zum Gewicht ergibt sich der effektive Abstand r vom Drehmittelpunkt bis zum Mittelpunkt der Massen mit:

$$\bar{r} = \bar{r}' + \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\bar{d}}{2}$$

$$\Delta \bar{r}_{\text{syst}} = \Delta \bar{r}'_{\text{syst}} + \frac{\Delta \bar{h}_{\text{syst}}}{2} + \frac{\Delta \bar{d}_{\text{syst}}}{2}$$

$$\Delta \bar{r}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{r}'_{\text{stat}}^2 + \left(\frac{\Delta \bar{h}_{\text{stat}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{d}_{\text{stat}}}{2}\right)^2}$$

$$\Delta \bar{r} = \Delta \bar{r}_{\text{syst}} + \Delta \bar{r}_{\text{stat}}$$

Mit der Fehlerfortpflanzung auf $2mr^2$ und T^2 , wobei einfach quadratisch bzw. linear bei stat. bzw. system. Fehlern vorzugehen ist und im Anschluss eine lineare Addition folgt, kann der Fit mit y-Error durchgeführt werden. Damit fehlen nur noch die systematischen Abweichungen von $2mr^2$, um die Gesamtabweichung für die Winkelrichtgröße und dem Eigenträgheitsmoment zu berechnen. Dabei ist es wichtig, dass für den systematischen Anteil von k^* nur m , r und T verantwortlich sind, denn die Steigung der Regressionsgeraden ist vom Eigenträgheitsmoment unabhängig und der system. Anteil von T wurde hier direkt in die Regressionsanalyse gepackt, womit nur mehr m und r übrig bleiben. Mit dem vereinfachten Zusammenhang

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k^*} (J_0 + 2mr^2) \quad \text{folgt nun:}$$

$$\Delta \bar{k}_{\text{stat}}^* = \Delta \bar{a}_1 \frac{4\pi^2}{\bar{a}_1^2}$$

$$\Delta \bar{J}_{0\text{stat}} = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\Delta \bar{k}_{\text{stat}}^{*2} \bar{a}_0^2 + \Delta \bar{a}_0^2 \bar{k}_{\text{stat}}^{*2}}$$

$$\Delta \bar{k}_{\text{syst}}^* = \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} \cdot \Delta (2mr^2)_{\text{syst}} \quad \text{hier wird zur Abschätzung der Maximalwert verwendet}$$

$$\Delta \bar{J}_{0\text{syst}} = \Delta (2mr^2)_{\text{syst}} + \Delta \bar{k}_{\text{syst}}^* \frac{\bar{a}_0}{4\pi^2} \quad \dots$$

Trägheitsmomente der Puppe

Anlog wie vorher, werden die gemessenen Periodendauern mit der Student-t-Verteilung gemittelt, wobei bei angelegten $n = 18$ ($t_{\text{Student}} = 1.04$) und bei ausgestreckten Armen $n = 30$ Messungen ($t_{\text{Student}} = 1.02$) gemacht wurden. Das Trägheitsmoment der Puppe folgt mit:

$$\bar{J}_{\text{P}} = \frac{\bar{T}^2 k^*}{4\pi^2} - \bar{J}_0$$

$$\Delta \bar{J}_{\text{Pstat}} = \sqrt{\Delta \bar{T}_{\text{stat}}^2 \left(\frac{\bar{T} \bar{k}^*}{2\pi^2}\right)^2 + \Delta \bar{k}_{\text{stat}}^{*2} \left(\frac{\bar{T}^2}{4\pi^2}\right)^2 + \Delta \bar{J}_{0\text{stat}}^2}$$

$$\Delta \bar{J}_{\text{Psyst}} = \Delta \bar{T}_{\text{syst}} \left(\frac{\bar{T} \bar{k}^*}{2\pi^2}\right) + \Delta \bar{k}_{\text{syst}}^* \left(\frac{\bar{T}^2}{4\pi^2}\right) + \Delta \bar{J}_{0\text{syst}}$$

$$\Delta \bar{J}_{\text{P}} = \Delta \bar{J}_{\text{Psyst}} + \Delta \bar{J}_{\text{Pstat}}$$

C. Fehlerrechnung für das Trägheitsmoment des Menschen

dynamische Methode

Aus den Unsicherheiten der Dichte (statistisch), und den Abmessungen in [Tabelle 3.1](#) lässt sich die Unsicherheit eines Trägheitsmomentes der Kreisscheibe 1 bzw. 2 berechnen mit der quadratischen Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned}\bar{J}_i &= \frac{\bar{m} \bar{r}_i^2}{2} = \frac{\bar{\rho} \pi \bar{r}_i^4 \bar{h}_i}{2} = \frac{\bar{\rho} \pi \bar{h}_i \bar{d}_i^4}{2^5} \\ \Delta \bar{J}_{\text{stat}_i} &= \frac{\pi}{2^5} \sqrt{\Delta \bar{\rho}^2 \left(\bar{h}_i \bar{d}_i^4 \right)^2 + \Delta \bar{d}_{\text{stat}_i}^2 \left(4 \bar{\rho} \bar{h}_i \bar{d}_i^3 \right)^2 + \Delta \bar{h}_{\text{stat}_i}^2 \left(\bar{\rho} \bar{d}_i^4 \right)^2} \\ \Delta \bar{J}_{\text{syst}_i} &= \frac{\pi}{2^5} \left| \Delta \bar{d}_{\text{syst}_i} \left(4 \bar{\rho} \bar{h}_i \bar{d}_i^3 \right) \right| + \left| \Delta \bar{h}_{\text{syst}_i} \left(\bar{\rho} \bar{d}_i^4 \right) \right|\end{aligned}$$

Darauf hin können die beiden Trägheitsmomente der Kreisscheiben einfach addiert werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \bar{J}_1 + \bar{J}_2 \\ \Delta \bar{J}_{\text{syst}} &= \Delta \bar{J}_{\text{syst}_1} + \Delta \bar{J}_{\text{syst}_2} \\ \Delta \bar{J}_{\text{stat}} &= \sqrt{\Delta \bar{J}_{\text{stat}_1}^2 + \Delta \bar{J}_{\text{stat}_2}^2} \\ \Delta \bar{J} &= \Delta \bar{J}_{\text{stat}} + \Delta \bar{J}_{\text{syst}}\end{aligned}$$

D. Literaturverzeichnis

- [1] *Trägheitsmoment (TRM)*. 2016. URL: <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/TRM.pdf> (besucht am 30. März 2018) (siehe S. 1, 7, 10).