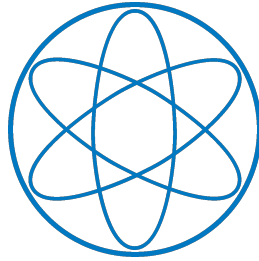


Anfängerpraktikum Teil 1

(Mechanik und Thermodynamik)

Akustik



Kurs 3, Gruppe 5, Team 14:
Michael Labenbacher
Nina Miller

Fakultät für Physik
Technische Universität München

1. Einführung	1
2. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Festkörpern	1
2.1. Einleitung	1
2.2. Beschreibung der verwendeten Methoden	1
2.3. Experimentelles Vorgehen	2
2.4. Ergebnisse	2
2.5. Diskussion	3
3. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Luft durch Laufzeitmessung	4
3.1. Einleitung	4
3.2. Beschreibung der verwendeten Methoden	4
3.3. Experimentelles Vorgehen	4
3.4. Ergebnisse	5
3.5. Diskussion	6
4. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Luft über stehende Wellen	7
4.1. Einleitung	7
4.2. Beschreibung der verwendeten Methoden	7
4.3. Experimentelles Vorgehen	7
4.4. Ergebnisse	8
5. Zusammenfassung	9

Anhang	10
A. Versuch 1	10
A.1. Messwerte	10
A.2. Fehlerrechnung	10
A.2.1. Längen	10
A.2.2. Zeit	11
A.2.3. Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit	12
A.2.4. Fehlerfortpflanzung auf das Elastizitätsmodul	12
B. Versuch 2	13
B.1. Messwerte	13
B.2. Fehlerrechnung	13
B.2.1. Lineare Regression und Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit	13
B.2.2. Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit bei T_0	14
B.2.3. Fehlerfortpflanzung auf den Adiabatenkoeffizient	14
C. Versuch 3	15
C.1. Messwerte	15
C.2. Fehlerrechnung	16
C.2.1. Längen	16
C.2.2. Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit	16
D. Literaturverzeichnis	18

Donnerstag 15. März, 2018

Kapitel 1.

Einführung

In den zu durchführenden Versuchen wird auf die verschiedenen Ausbreitungscharakteristiken von Wellen in diversen Stoffen eingegangen, um daraufhin Materialeigenschaften zu bestimmen. Dabei wurden die Auswirkungen von Dämpfung sowie das Auftreten von Transversalwellen vernachlässigt. Die Grundlagen zur Akustik aus der Anleitung [1] werden als vorausgesetzt angesehen.

Kapitel 2.

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Festkörpern

2.1. Einleitung

Im 1. Versuch ist die Schallgeschwindigkeit $v_{\text{FK,long}}$ in mindestens drei verschiedenen Festkörpern zu messen, wobei man sich auf die Ausbreitung von Longitudinalwellen beschränkt und die Bauform wird einem langen, dünnen Stab, mit der Länge l , genähert. Aus diesem Ergebnis kann daraufhin das Elastizitätsmodul E des Werkstoffs bestimmt werden.

2.2. Beschreibung der verwendeten Methoden

Durch Überführung der Schallgeschwindigkeitsbestimmung in eine Längen- und Zeitmessung, wird durch Erzeugen einer Longitudinalwelle deren Umlaufdauer t im Stab, was dem Weg $s = 2 \cdot l$ entspricht, über einen piezoelektrischen Körper bestimmt und im Anschluss mit

$$v = \frac{ds}{dt} \hat{=} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{=} \frac{s}{t} \quad (2.1)$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet. Der Schallaufnehmer, welcher an einem Oszilloskop verbunden ist, erzeugt eine zum Druck proportionale Spannung, deren zeitlicher Verlauf dargestellt wird. Durch Mittlung von vielen Umläufen kann dabei die statistische Abweichung möglichst gering gehalten werden. Die Längenbestimmung der Stäbe erfolgt dabei mit einem Gliedermaßstab.

Die Gleichung 2.2 zeigt, dass über die Dichte ρ ein Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der Phasengeschwindigkeit besteht, wobei man sich hier auf rein longitudinale Wellen beschränkt.

$$v_{\text{FK,long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.2)$$

Die Dichten und Fertigungsgenauigkeiten der drei verwendeten Materialien wurden dabei der Anleitung (keine Temperaturangaben vorhanden) entnommen und sind in Tabelle ausgeführt.

Tabelle 2.1.: Dichte von Werkstoffen [1]

Material	ρ g/cm ³
Kupfer	8.95 ± 0.05
Eisen	7.8 ± 0.1
Aluminium	2.7 ± 0.1

2.3. Experimentelles Vorgehen

Am Beginn wird durch bündiges Anlegen des zu messenden Objekts an das Metermaß bei null die Länge l mittels Vergleich mit der Skala bestimmt. Der Schallaufnehmer, dessen Typ sowie Fertigungsgenauigkeiten nicht bekannt sind, wird auf dem Boden platziert und am digitalen Speicheroszilloskop (Tektronix TDS 1001B) angeschlossen. Anschließend wird auf den piezoelektrischen Körper der zu untersuchende Stab möglichst gerade platziert und am oberen Ende festgehalten.

Darauf hin wird durch vorsichtiges Anschlagen auf das obere Ende mit einem Hammer ein Schallimpuls erzeugt. An dem zeitlichen Verlauf der Spannung wird die Dauer zwischen möglichst vielen erkennbaren Maxima, welche, da mehrere Wellen erzeugt werden, zur selben gehören, durch Ablesen mit Hilfe der Cursor ermittelt, um im Anschluss durch Mittlung auf die Zeitdauer t des Durchlaufs der Schallwelle im Stab zu schließen.

2.4. Ergebnisse

Unter Berücksichtigung von der Fertigungsgenauigkeit des Gliedermaßstabes (systematische Unsicherheit) von 0.1 % und der statistischen Gesamtabweichung von 0.32 mm, welche aus der Messungenauigkeit am Rand von 0.3 mm und an einem Skalenstrich von 0.1 mm resultiert, ergaben sich bei der Bestimmung der Längen l die Werte in [Tabelle 2.2](#).

Tabelle 2.2.: Längen der Stäbe

Material	l mm
Kupfer	$1\,500.0 \pm 0.5$
Eisen	$1\,497.0 \pm 0.5$
Aluminium	$1\,500.0 \pm 0.5$

Mit Hilfe der Statistik ergab sich jeweils eine Abweichung vom Mittelwert der Umlaufdauer t und ein systematischer Anteil durch die Präzision der Zeitbasis des Oszilloskops von 0.01 % bei einem eingestellten Messintervall $M = 500 \mu\text{s}$, sowie der Positionsgenauigkeit der Cursor von insgesamt 0.02 ms. (Dies bezieht sich auf die Gesamtzeit, muss also auch durch die Anzahl der Umläufe geteilt werden.)

Durch die Fehlerrechnung im [Abschnitt A.2](#) und über die [Gleichung 2.1](#) folgen daraus die in der [Tabelle 2.3](#) dargestellten Geschwindigkeiten für die einzelnen Materialien.

Tabelle 2.3.: Ergebnisse der Zeitmessung und Berechnungswerte des Weges, der Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Longitudinalwellen in den untersuchten Festkörpern und des Elastizitätsmoduls

Material	s mm	t ms	v m/s	E GPa
Kupfer	$3\,000 \pm 1$	0.785 ± 0.022	$3\,820 \pm 110$	131 ± 8
Eisen	$2\,994 \pm 1$	0.602 ± 0.022	$5\,000 \pm 180$	193 ± 16
Aluminium	$3\,000 \pm 1$	0.588 ± 0.023	$5\,100 \pm 200$	70 ± 8

Mit dem Zusammenhang [2.2](#) ergaben sich die Elastizitätsmodule in der [Tabelle 2.3](#), deren Unsicherheiten durch Fehlerfortpflanzung in [A.2](#) berechnet wurden.

2.5. Diskussion

In [Tabelle 2.4](#) finden sich die Phasengeschwindigkeiten $v_{\text{FK,long}}$ und durch Vergleich mit [Tabelle 2.3](#) zeigt sich, dass sowohl die Messergebnisse für Kupfer und Aluminium mit den angegebenen Unsicherheiten gut übereinstimmen.

Bei Eisen tritt hingegen doch eine etwas erhöhte Abweichung auf, was einerseits darauf zurückgeführt werden kann, dass die beiden Enden dieses Stabes nicht abgeflacht waren, wie bei den anderen, sondern rund und andererseits der Reinheitsgrad der verwendeten Materialien unbekannt war und die Ausbreitung von transversalen Wellen außer Acht gelassen wurde.

Durch die Gegenüberstellung der Messergebnisse von Eisen und Aluminium zeigt sich, dass man aus den Massen m von Materialien ohne weitere Angaben noch keinen Rückschluss auf die Phasengeschwindigkeiten schließen kann.

Tabelle 2.4.: Literaturwerte der Phasengeschwindigkeiten von longitudinalen Wellen in den untersuchten Festkörpern bei 20 °C [\[2\]](#) und Elastizitätsmodule [\[3\]](#)

Material	$v_{\text{FK,long}}$ m/s	E GPa
Kupfer	3 800	137
Eisen	5 180	186.3
Aluminium	5 110	72.2

Des Weiteren wurde in dieser Messserie sowohl die Temperatur, Dämpfungen und der Luftdruck im Praktikumsraum außer Acht gelassen, da die dadurch entstehenden Abweichungen zu Literaturwerten hier keine große Rolle spielen.

Kapitel 3.

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Luft durch Laufzeitmessung

3.1. Einleitung

Die Schallgeschwindigkeit $v_{\text{Luft,long}}$ der Luft soll in diesem Versuch durch die Laufzeitmessung bestimmt werden, um daraus - unter Annahme, dass es sich hier um ein ideales Gas (Schubmodul $G = 0$) handelt - den Adiabatenkoeffizient κ von Luft berechnen zu können. Die Standardbedingungen der Luft lauten: $\rho_0 = 1.293 \text{ mg/cm}^3$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1\,013 \text{ hPa}$

3.2. Beschreibung der verwendeten Methoden

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird durch indirekte Messung der Zeitdauer t , die die Schallwellen zwischen dem ersten und dem zweiten Mikrofon benötigen, und der Strecke s dazwischen, ermittelt und nach Mittlung über den Zusammenhang 2.1, also der Geradensteigung, berechnet. Die

$$v_{\text{Gas,long}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \quad (3.1)$$

ergibt für ideale Gase bei einer adiabatischen Zustandsänderung über den Druck p , die Dichte ρ und κ bzw. durch die Temperatur T , der allgemeinen Gaskonstante R und molaren Masse M von Luft die Schallgeschwindigkeit $v_{\text{Gas,long}}$.

Nach 3.1 hängt die Phasengeschwindigkeit in idealen Gasen bei T mit der bei T_0 über die Wurzelfunktion zusammen:

$$v_{\text{Gas,long}}(T_0) = v_{\text{Gas,long}}(T) \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T}} \quad (3.2)$$

Mit Gleichung 3.1 lässt sich also bei idealen Gasen der Adiabatenkoeffizient mit Gleichung 3.3 bestimmen:

$$\kappa = v_{\text{Gas,long}}^2(T_0) \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \quad (3.3)$$

Die Temperatur wird in diesem Versuch über ein digitales Thermometer (BEHA 93402 Type-K) erfasst, wobei diese während des gesamten Versuchs im Praktikumsraum als konstant angenommen wird.

3.3. Experimentelles Vorgehen

Zwei Mikrofone sind verschiebbar auf einer Dreikantschiene angebracht. Das Mikrofon 1, welches näher an der Schallquelle ist, wird bei einer Position von 40 mm durch eine Schraube

fixiert. Mikrofon 2, welches vom Aufbau her nicht gleich und weiter von der Schallquelle entfernt ist, kann nun in gleichmäßigen Abständen von je 70 mm in einem Bereich von 300 mm bis 930 mm relativ zu Mikrofon 1 bewegt und die jeweilige Position über die Skala abgelesen werden. Da sich die beiden Mikrofone vom Aufbau her unterscheiden und so eine Längenmessung nicht möglich ist, wird hier jeweils die Differenz zwischen zwei Messwerten zur Auswertung herangezogen.

Die Ausgänge des Mikrofonverstärkers sind am Oszilloskop (Tektronix TDS 1001B) angeschlossen und beide Signale lassen sich so Gegenüberstellen, dass die Zeit, die der Schall benötigt, um die Wegdifferenz von den beiden Mikrofonen zurückzulegen, mit Hilfe der Cursor abgelesen werden kann. Zur Schallerzeugung werden zwei Metallkugeln im Abstand von ca. 1 m auf möglichst gleicher Ebene der Mikrofone aneinander gestoßen.

Es werden hier zwei voneinander unabhängige Messreihen aufgenommen, wobei je 10 mal sowohl die Zeit- und Wegdifferenz gemessen wird.

3.4. Ergebnisse

Die [Abbildung 3.1](#) zeigt eine Messung der Zeitdauer zwischen den beiden ersten Ausschlägen, wobei sich erkennen lässt, dass es sich hier um zwei unterschiedliche Mikrofone handelt, da das vordere (näher bei der Schallquelle (blau)) nach unten ausschlägt und das zweite (grün) nach oben.

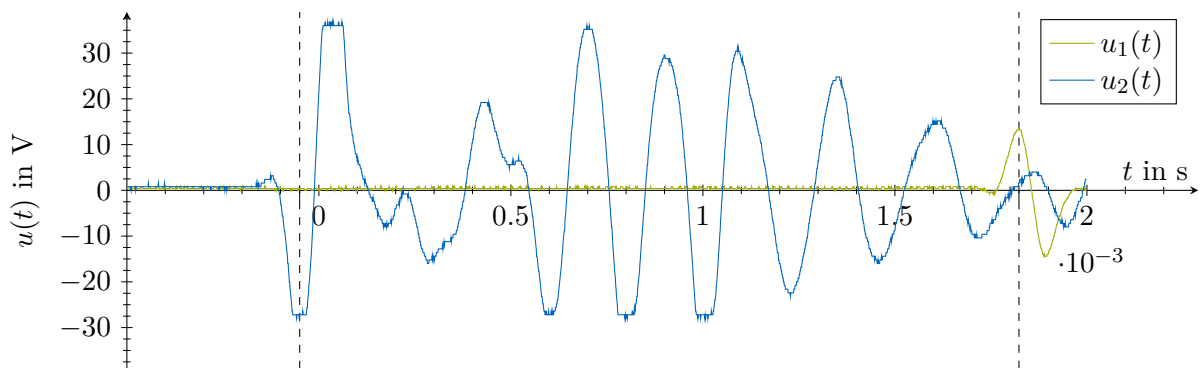
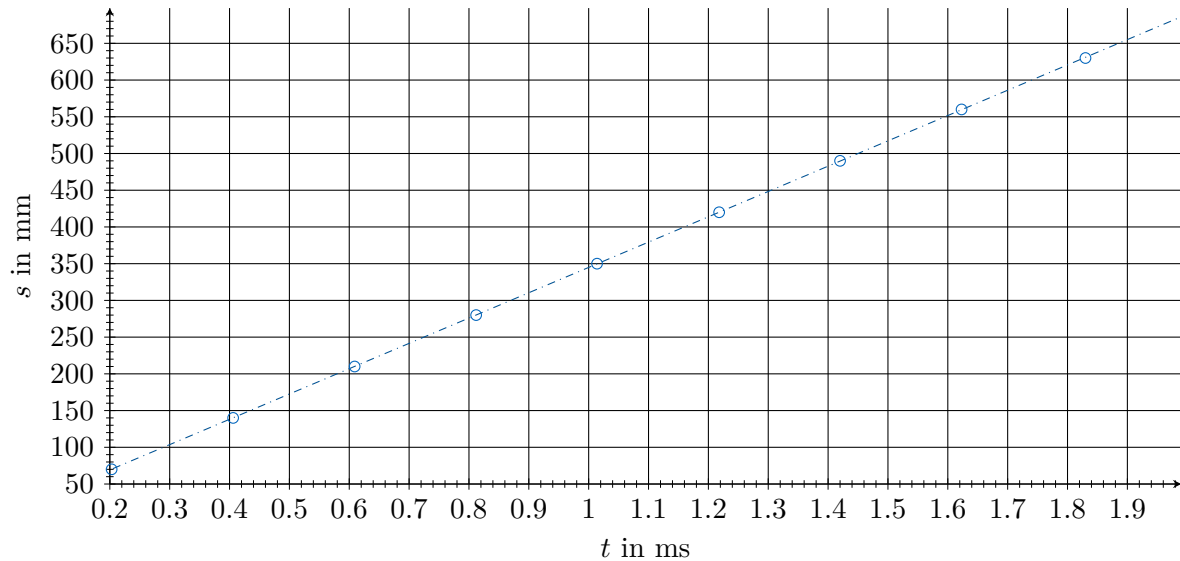


Abbildung 3.1.: Oszilloskop-Aufnahme bei einem Mikrofonabstand von $l = 790$ mm

Aus den je zehn Einzelmessungen lassen sich für neun Abstände 70 mm bis 630 mm von zwei Messungen durch Mittlung die Zeitdifferenzen berechnen und mit Hilfe der linearen Regression folgt eine Geradensteigung von (344.7 ± 0.3) m/s und ein y-Achsenschnitt von (0.2 ± 0.3) m. Dieser Fit ist auch in der [Abbildung 3.2](#) dargestellt. Durch Ablesen der Geradensteigung ergibt sich für die mittlere Schallgeschwindigkeit der Luft $\bar{v}_{\text{Luft,long}} = 344.7$ m/s. Die gesamten statistischen Unsicherheiten sind durch die lineare Regression gegeben zu $\Delta \bar{v}_{\text{Luft,long,stat}} = 0.3$ m/s. Die systematischen Abweichungen entstehen durch die Fertigungsungenauigkeit der Dreikant-schiene, welche auf 2 mm in Bezug auf eine Gesamtlänge von 1 m geschätzt wird, sowie durch die Genauigkeit des Oszilloskops auf der Zeitachse von 0.01 % und der Positionsgenauigkeit der Cursor von insgesamt 0.01 ms bei $M = 250$ μ s. Durch Fehlerfortpflanzung im [Abschnitt B.2](#) ergibt sich nun eine Ausbreitungsgeschwindigkeit in Luft $v_{\text{Luft,long}}(T) = (345.0 \pm 2.3)$ m/s.

Abbildung 3.2.: Wegdifferenzen s in Abhängigkeit der Zeit t

Aus Gleichung 3.2 folgt die Phasengeschwindigkeit bei Standardtemperatur T_0 , wobei sich der systematische Temperaturmessgerätfehler auf 0.2°C geschätzt beläuft, jedoch keinen nennenswerten Einfluss zeigt.

$$v_{\text{Luft,long}}(T_0) = (331 \pm 2) \text{ m/s}$$

Mit Gleichung 3.3 und der Fehlerfortpflanzung für statistische und systematische Abweichungen ergibt sich der Adiabatenkoeffizient von Luft zu

$$\kappa = 1.400 \pm 0.018$$

3.5. Diskussion

Aufgrund der nicht konstanten Temperatur während des gesamten Messvorganges, der Annahme eines idealen Gases und da eine statistische Auswertung immer einen gewissen Toleranzbereich liefert, ergibt sich ein kleiner, vernachlässigbarer Fehler des Schnittpunktes von $s(t)$ mit der y-Achse im Nullpunkt.

Der Vergleich mit dem Literaturwert der Ausbreitungsgeschwindigkeit in Luft $v_{\text{Luft,long}}(T_0) = 331 \text{ m/s}$ bestätigt den Messwert, wobei angemerkt sei, dass nur wenige Messungen gemacht wurden und sich dies auf Grund der Statistik ergibt. Des Weiteren stimmt diesbezüglich auch der Adiabatenkoeffizient im Toleranzbereich zur Literatur von $\kappa = 1.4$ überein. [4], [5]

Kapitel 4.

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Luft über stehende Wellen

4.1. Einleitung

Durch eine Luftsäule in einem Rohr und mit Hilfe der Resonanzbedingung 4.1 für ein einseitig geschlossenes Rohr ist die Schallgeschwindigkeit von Luft bei Raumtemperatur zu ermitteln. Kurz gesagt, soll eine stehende Welle erzeugt, also das Rohr so eingestellt werden, dass die Phase der Überlagerung beider Wellen nicht „wandert“. Wie auch im Kapitel 3 beschränkt man sich bei diesem Versuch auf konstante Temperatur T , Druck p und Dichte ρ der Luft während aller Messvorgänge.

4.2. Beschreibung der verwendeten Methoden

Ein Frequenzgenerator erzeugt ein sinusförmiges Spannungssignal mit einer vorgegebenen Frequenz f , welches von einem Lautsprecher in Schallwellen umgewandelt wird. Ein ca. 1 m langes Plastikrohr ist vertikal über der Schallquelle montiert und über einen verschiebbaren Stempel, an dem die hin laufende Welle reflektiert (Phasensprung) wird, in dem Rohr kann die effektive Rohrlänge l variiert werden.

Durch ein kleines Mikrofon, das am unteren Ende des Rohres befestigt ist, können die Druckschwankungen im Rohr durch ein damit verbundenes Oszilloskop ausgewertet werden. Beim einseitigen offenen Rohr gilt die Beziehung

$$l = \frac{(2n - 1) \cdot v_{\text{Gas,long}}}{4f} \quad (4.1)$$

zwischen der effektiven Rohrlänge l , der Phasengeschwindigkeit $v_{\text{Gas,long}}$ und der Frequenz f . Dabei stellt n die Anzahl an Resonanzmaxima dar.

4.3. Experimentelles Vorgehen

Für drei verschiedene, in Bereichen vorgegebenen, Frequenzen f_1 , f_2 und f_3 (siehe 4.1), welche durch den Funktionsgenerator (Voltcraft7202) erzeugt werden können, wird jeweils der Stempel von der Ausgangsposition 1 (unten) langsam nach oben bewegt. Das Mikrofon überträgt nun die Schallwelle auf das Oszilloskop (Tektronix TDS 1001B) und es sind die effektiven Längen l , von der Öffnung bis zum Stempel, zu messen, an denen die Amplitude maximal wird, also Resonanzmaxima vorliegen. Der gesamte Vorgang wurde zwei mal wiederholt, wobei bei größeren Frequenzen das erste Resonanzmaximum nicht gemessen wurde, da es schwer möglich war, im unteren Bereich genau abzulesen.

4.4. Ergebnisse

Die Positionen l nach n aufgetragen liefern für die vorgegebenen Frequenzen nach linearer Regression den jeweiligen Zusammenhang in [Tabelle 4.1](#), wobei sich aus der Geradensteigung der Formel [2.1](#) jeweils die Schallgeschwindigkeit berechnen lässt.

Tabelle 4.1.: Frequenzwerte und Ergebnisse zur linearen Regression für die Längen l und für die Schallgeschwindigkeit in Luft bei $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$

Versuch	f Hz	$l(n)$ mm	$v_{\text{Luft,long}}$ m/s
1	650 ± 20	$(266.5 \pm 0.4) \cdot n + (-160.0 \pm 1.1)$	350 ± 11
2	1000 ± 20	$(172.9 \pm 0.3) \cdot n + (-118.0 \pm 1.1)$	346 ± 7
3	1750 ± 20	$(99.10 \pm 0.22) \cdot n + (-71.0 \pm 1.4)$	347 ± 4

Während der Messvorgänge variierte die angezeigte Frequenz am Generator zwischen ± 10 Hz (statistisch).

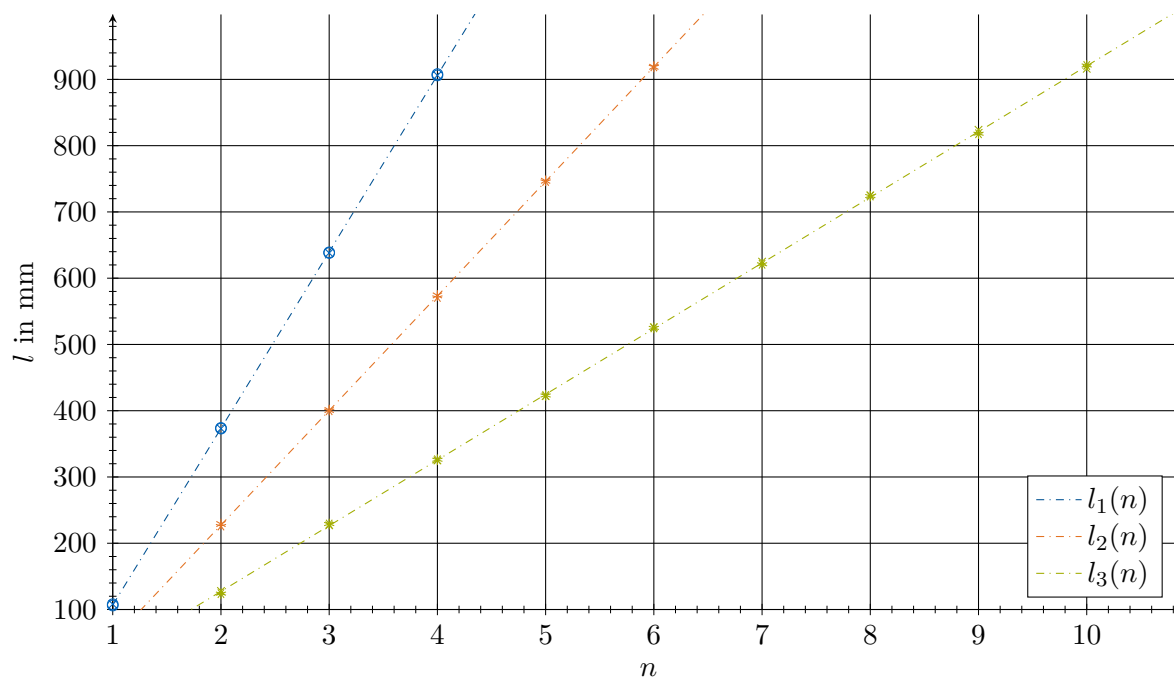


Abbildung 4.1.: Länge zur Erzeugung einer stehenden Welle über die Ordnung der Resonanzmaxima für gewählte Frequenzen bei $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$

Die [Tabelle C.2](#) im [Abschnitt C.2](#) zeigt, dass sich die Konfidenzbereiche der statistisch unabhängigen Messvorgänge überlappen und eine gewichtete Mittlung liefert bei einer Temperatur von $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ eine Schallgeschwindigkeit der Luft von

$$v_{\text{Luft,long}} = (346 \pm 3) \text{ m/s}$$

Dabei wurden die systematischen Abweichungen, die durch den Funktionsgenerator entstehen (± 0.1 Hz mittels „linearer Addition fortpflanzen“) vernachlässigt, da diese wesentlich kleiner sind, als die statistischen Unsicherheiten.

Kapitel 5.

Zusammenfassung

Vergleicht man dieses Ergebnis der Schallgeschwindigkeit mit dem im [Kapitel 3](#), so zeigt sich innerhalb der Konfidenzbereiche eine Übereinstimmung, auch mit dem Literaturwert in [4], was auch zu erwarten war und die einfachere Betrachtungsweise von Luft als ideales Gas, also einer Beschreibung durch Massenpunkte, sich in diesen Versuchsbedingungen als sinnvoll herausstellt.

Die beiden sehr einfachen Varianten zur Messung der Geschwindigkeit, mit der sich Schall in Luft ausbreitet, ergaben zusammengefasst:

$$\begin{aligned}v_{\text{Luft, long}_{\text{Laufzeit}}}(T) &= (345.0 \pm 2.3) \text{ m/s} \\v_{\text{Luft, long}_{\text{Welle}}}(T) &= (346 \pm 3) \text{ m/s}\end{aligned}$$

Im 1. Versuch zeigte sich auch deutlich, dass aus der Dichte (bzw. Masse) nicht direkt auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen geschlossen werden kann, denn auch der innere Aufbau, sprich je nach dem wie elastisch (wie viel Kraft ist für eine Längen- bzw. Volumenänderung notwendig) das Material ist, beeinflusst den Energietransport wesentlich.

A. Versuch 1

A.1. Messwerte

Zunächst werden die gemessenen Zeiten $k \cdot t$ und die Anzahl k der betrachteten Maxima in der [Tabelle A.1](#) aufgezeigt, wobei auch immer die mittlere Zeitdauer t für einen Umlauf, mittels Division durch die Anzahl k mitangegeben ist.

Tabelle A.1.: Messwerte der Zeitmessung des Schallimpulses in Festkörpern

Kupfer			Eisen			Aluminium		
kt	k	t	kt	k	t	kt	k	t
ms		ms	ms		ms	ms		ms
3.92	5	0.784	3.00	5	0.600	1.78	3	0.593
2.36	3	0.787	2.98	5	0.596	1.16	2	0.580
3.94	5	0.788	3.02	5	0.604	1.74	3	0.580
3.96	5	0.792	3.02	5	0.604	1.78	3	0.593
3.94	5	0.788	1.82	3	0.607	1.76	3	0.587
3.92	5	0.784	3.00	5	0.600	1.18	2	0.590
3.90	5	0.780	3.02	5	0.604	1.20	2	0.600
3.94	5	0.788	3.02	5	0.604	1.74	3	0.580
3.92	5	0.784	3.02	5	0.604	1.76	3	0.587
3.90	5	0.780	3.00	5	0.600	2.36	4	0.590

A.2. Fehlerrechnung

A.2.1. Längen

Durch Abschätzung der statistischen Abweichungen bei Einzelmessungen ergeben sich

- beim Anlegen des Meterstabs an der Kante 0.3 mm (ca. $\frac{1}{4}$ der Strichabstände)
- beim Ablesen an einem Skalenstrich eine Unsicherheit von 0.1 mm ($\frac{1}{2}$ der Strichbreite)

Die Fertigungsgenauigkeit von 2 % auf die Gesamtlänge von 2 m ist eine systematische Unsicherheit und die Temperaturschwankungen werden vernachlässigt. Die statistische Gesamtabweichung wird durch quadratische Fortpflanzung berechnet und durch lineare Addition ergibt sich dann die Gesamtabweichung. Im Anschluss darauf kann die Abweichung der Strecke s durch Multiplikation mit 2 berechnet werden, da der relative Fehler von l und s gleich groß ist.

Als Demonstration wird Kupfer gewählt:

$$\Delta \bar{l}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{l}_{\text{stat}1}^2 + \Delta \bar{l}_{\text{stat}2}^2} = 0.32 \text{ mm}$$

$$\Delta \bar{l} = \Delta \bar{l}_{\text{stat}} + \Delta \bar{l}_{\text{syst}} = 0.47 \text{ mm}$$

$$\Delta \bar{s} = 2 \cdot \Delta \bar{l} = 0.93 \text{ mm}$$

Dies ergibt, aufgrund der geringen Unterschiede für alle gewählten Materialien eine Unsicherheit des Weges von $\Delta \bar{s} = 1 \text{ mm}$.

A.2.2. Zeit

Die systematischen Unsicherheiten setzen sich bei einem eingestellten Maßstab von $M = 500 \mu\text{s}$ zusammen aus:

- $\Delta \bar{t}_{\text{syst}1}$: Präzision der Zeitbasis des Oszilloskops von 0.01 %
- $\Delta \bar{t}_{\text{syst}2}$: Positionsgenauigkeit der Cursor von 0.02 ms

Da nur sehr wenige Messwerte ($n = 10$) vorliegen, muss die Student-t-Verteilung mit $t_{\text{Student}} = 1.06$ verwendet werden. Durch Addition der Messabweichungen kann daraus die Gesamtabweichung der Zeitmessung bestimmt werden.

Als Demonstration wird Kupfer gewählt:

$$\Delta \bar{t}_{\text{syst}} = \Delta \bar{t}_{\text{syst}1} + \Delta \bar{t}_{\text{syst}2} = 0.021 \text{ ms}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = 0.785 \text{ ms}$$

$$\Delta t_{\text{stat}} = \sigma_t = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0.004 \text{ ms}$$

$$\Delta \bar{t}_{\text{stat}} = \frac{t_{\text{Student}}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_t = t \cdot \sigma_{\bar{t}} = 0.001 \text{ ms}$$

$$\Delta \bar{t} = \Delta \bar{t}_{\text{stat}} + \Delta \bar{t}_{\text{syst}} = 0.022 \text{ ms}$$

Zusammengefasst in der [Tabelle A.2](#) ergeben sich dadurch die Abweichungen für die unterschiedlichen Materialien.

Tabelle A.2.: Unsicherheiten der Zeitmessung

Material	Δt_{stat} ms	$\Delta \bar{t}_{\text{stat}}$ ms	$\Delta \bar{t}_{\text{syst}1}$ ms	$\Delta \bar{t}_{\text{syst}2}$ ms	$\Delta \bar{t}_{\text{syst}}$ ms	$\Delta \bar{t}$ ms
Kupfer	0.004	0.001	0.02	0.0005	0.021	0.022
Eisen	0.003	0.001	0.02	0.0005	0.021	0.022
Aluminium	0.007	0.002	0.02	0.0005	0.021	0.023

A.2.3. Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit

Für die Fehlerfortpflanzung in Bezug auf die Phasengeschwindigkeit müssen statistische und systematische Abweichungen getrennt voneinander betrachtet werden. Durch die Annahme einer Normalverteilung der statistischen Unsicherheiten von der Zeit- und Längenmessung kann mittels partieller Ableitung über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung die statistische Gesamtabweichung ermittelt werden. Die systematische ergibt sich durch „lineare Addition“, da diese Abweichungen von einander unabhängig sind.

Wieder wird als Beispiel Kupfer gewählt:

$$\Delta \bar{v}_{\text{syst}} = \left| \Delta \bar{s}_{\text{syst}} \left[\frac{\partial v}{\partial s} \right] \right|_{\bar{s}, \bar{t}} + \left| \Delta \bar{t}_{\text{syst}} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] \right|_{\bar{s}, \bar{t}} = \left| \frac{\Delta \bar{s}_{\text{syst}}}{\bar{t}} \right| + \left| \frac{\Delta \bar{t}_{\text{syst}} \bar{s}}{\bar{t}^2} \right| = 100 \text{ m/s}$$

$$\Delta \bar{v}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{s}_{\text{stat}}^2 \left[\frac{\partial v}{\partial s} \right]^2 \Big|_{\bar{s}, \bar{t}} + \Delta \bar{t}_{\text{stat}}^2 \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right]^2 \Big|_{\bar{s}, \bar{t}}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{s}_{\text{stat}}}{\bar{t}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{t}_{\text{stat}} \bar{s}}{\bar{t}^2} \right)^2} = 6 \text{ m/s}$$

$$\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_{\text{stat}} + \Delta \bar{v}_{\text{syst}} = 106 \text{ m/s}$$

Dadurch ergeben sich, unter Berücksichtigung der Genauigkeit, die Unsicherheiten in [Tabelle A.3](#).

A.2.4. Fehlerfortpflanzung auf das Elastizitätsmodul

Durch [Gleichung 2.2](#) können nun über die Dichte und die Ausbreitungsgeschwindigkeit die Unsicherheiten des Elastizitätsmoduls ermittelt werden, wobei für statistische „quadratisch“- und für systematische Abweichungen „linear Fortgepflanzt“ wird. Die angegebenen Unsicherheiten in [Tabelle 2.1](#) sind systematischer Natur, da die Dichte stark von der jeweiligen Zusammensetzung abhängt.

Wieder wird als Beispiel Kupfer gewählt:

$$\Delta \bar{E}_{\text{syst}} = \left| \Delta \bar{v}_{\text{syst}} \left[\frac{\partial E}{\partial v} \right] \right|_{\bar{v}, \bar{\rho}} + \left| \Delta \bar{\rho}_{\text{syst}} \left[\frac{\partial E}{\partial \rho} \right] \right|_{\bar{v}, \bar{\rho}} = |\Delta \bar{v}_{\text{syst}} 2\bar{v} \bar{\rho}| + |\Delta \bar{\rho}_{\text{syst}} \bar{v}^2| = 7.57 \text{ GPa}$$

$$\Delta \bar{E}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{v}_{\text{stat}}^2 \left[\frac{\partial E}{\partial v} \right]^2 \Big|_{\bar{v}, \bar{\rho}}} = 2\bar{v} \bar{\rho} \Delta \bar{v}_{\text{stat}} = 0.43 \text{ GPa}$$

$$\Delta \bar{E} = \Delta \bar{E}_{\text{stat}} + \Delta \bar{E}_{\text{syst}} = 8 \text{ GPa}$$

Tabelle A.3.: Unsicherheiten der Schallgeschwindigkeits- und Elastizitätsmessung in Festkörpern

Material	$\Delta \bar{v}_{\text{FK, long}}$ m/s	$\Delta \bar{E}$ GPa
Kupfer	110	8
Eisen	180	16
Aluminium	200	8

B. Versuch 2

B.1. Messwerte

Während des Versuchs wurde eine Temperatur $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ gemessen, deren systematische Unsicherheit (Gerätegenauigkeit) geschätzt und als konstant betrachtet wurde.

Pro Messreihe wurde aus den zehn Einzelmessungen jeweils der zeitliche Mittelwert t_1 für die Wegdifferenzen s_1 ermittelt. Zur Mittlung konnten z. B. somit für $s_1 = 70\text{ mm}$ neun, für $s_1 = 140\text{ mm}$ acht Messwerte ..., herangezogen werden.

Tabelle B.1.: Zeit-, Längenmesswerte bei $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ und Zeitmittelwerte für die Längendifferenzen

Messreihe 1			Messreihe 2			Diff. 1		Diff. 2		Mittlung	
l_2	t	l	l_2	t	l	s_1	t_1	s_1	t_1	s	t
mm	ms	mm	mm	ms	mm	mm	ms	mm	ms	mm	ms
340	0.87	300	340	0.85	300						
410	1.06	370	410	1.07	370	70	0.20	70	0.2	70	0.20
480	1.26	440	480	1.26	440	140	0.41	140	0.41	140	0.41
550	1.46	510	550	1.46	510	210	0.61	210	0.61	210	0.61
620	1.67	580	620	1.67	580	280	0.81	280	0.81	280	0.81
690	1.87	650	690	1.87	650	350	1.01	350	1.01	350	1.01
760	2.07	720	760	2.07	720	420	1.22	420	1.22	420	1.22
830	2.27	790	830	2.28	790	490	1.42	490	1.42	490	1.42
900	2.48	860	900	2.48	860	560	1.63	560	1.62	560	1.62
970	2.70	930	970	2.68	930	630	1.83	630	1.83	630	1.83

B.2. Fehlerrechnung

B.2.1. Lineare Regression und Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit

Weitere systematische Fehler sind:

- $\Delta \bar{l}_{\text{syst}} = 5\text{ mm}$ (geschätzte Unsicherheit der Dreikantschiene)
- $\Delta \bar{t}_{\text{syst}_1} = 0.01\text{ ms}$: Positionsgenauigkeit der Cursor bei $M = 250\text{ }\mu\text{s}$
- $\Delta \bar{t}_{\text{syst}_2} = 0.25\text{ }\mu\text{s}$: Präzision der Zeitbasis des Oszilloskops beträgt 0.01 %

Lässt man die systematischen Abweichungen bei der linearen Regression außen vor, so kann diese ungewichtet durchgeführt werden und liefert für die Wegdifferenz $s(t) = (\bar{a}_1 \pm \Delta \bar{a}_1) \cdot t + (\bar{a}_0 \pm \Delta \bar{a}_0) = (344.7 \pm 0.3)\text{ m/s} \cdot t + (0.2 \pm 0.3)\text{ m}$, womit sich für die statistische Unsicherheit der Geschwindigkeit $\Delta \bar{v}_{\text{Luft, long}_{\text{stat}}} = 0.3\text{ m/s}$ und $\bar{v}_{\text{Luft, long}} = 344.7\text{ m/s}$ ergibt.

Nun wird der systematische Fehler durch „lineare Addition“ berechnet, wobei $n = 20$ Messwerte vorliegen und der systematische Längenfehler der Dreikantschiene als konstant (maximal) angenommen wird.

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} = 615 \text{ mm} \quad \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = 1.77 \text{ ms}$$

$$\Delta \bar{t}_{\text{syst}} = \Delta \bar{t}_{\text{syst}_1} + \Delta \bar{t}_{\text{syst}_2} = 0.01025 \text{ ms}$$

$$\Delta \bar{v}_{\text{syst}} = \left| \frac{\Delta \bar{l}_{\text{syst}}}{\bar{t}} \right| + \left| \Delta \bar{t}_{\text{syst}} \frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} \right| = 2.256 \text{ m/s}$$

Durch Addition von systematischer und statistischer Abweichung ergibt sich nun eine Geschwindigkeit von $v_{\text{Luft,long}}(T) = (345.0 \pm 2.3) \text{ m/s}$.

B.2.2. Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit bei T_0

Mit [Gleichung 3.2](#) und durch „lineare bzw. quadratische Addition“ der systematischen bzw. statistischen Abweichungen kann nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei T_0 bestimmt werden.

$$v_{\text{Luft,long}}(T_0) = v_{\text{Luft,long}}(T) \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T}} = 331 \text{ m/s}$$

$$\Delta \bar{v}_{\text{stat}}(T_0) = \sqrt{\Delta \bar{v}_{\text{stat}}^2 \left[\frac{\partial v_{\text{Luft,long}}(T_0)}{\partial v_{\text{Luft,long}}(T)} \right]^2 \bigg|_{\bar{v}, \bar{T}}} = \sqrt{\Delta \bar{v}_{\text{stat}}^2 \left[\sqrt{\frac{T_0}{T}} \right]^2} = \Delta \bar{v}_{\text{stat}} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T}} = 0.233 \text{ m/s}$$

$$\Delta \bar{v}_{\text{syst}}(T_0) = \left| \Delta \bar{T}_{\text{syst}} \left[\frac{\partial v_{\text{Luft,long}}(T_0)}{\partial T} \right] \bigg|_{\bar{v}, \bar{T}} \right| = 1.931 \text{ m/s}$$

$$\Delta \bar{v}(T_0) = \Delta \bar{v}_{\text{stat}}(T_0) + \Delta \bar{v}_{\text{syst}}(T_0) = 2.164 \text{ m/s}$$

Somit ergibt sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v_{\text{Luft,long}}(T_0) = (331 \pm 2) \text{ m/s}$.

B.2.3. Fehlerfortpflanzung auf den Adiabatenkoeffizient

[Gleichung 3.3](#) erlaubt nun die analoge Fehlerfortpflanzung für den Adiabatenkoeffizient.

$$\bar{\kappa} = \bar{v}_{\text{Luft,long}}^2(T_0) \cdot \frac{\rho_0}{p_0} = 1.395$$

$$\Delta \bar{\kappa}_{\text{stat}} = \sqrt{\Delta \bar{v}_{\text{stat}}^2(T_0) \left[\frac{\partial \kappa}{\partial v_{\text{Luft,long}}(T_0)} \right]^2 \bigg|_{\bar{v}}} = 2 \cdot \Delta \bar{v}_{\text{stat}}(T_0) \cdot \bar{v}(T_0) \frac{\rho_0}{p_0} = 0.002$$

$$\Delta \bar{\kappa}_{\text{syst}} = \left| \Delta \bar{v}_{\text{syst}}(T_0) \left[\frac{\partial \kappa}{\partial v_{\text{Luft,long}}(T_0)} \right] \bigg|_{\bar{v}} \right| = 2 \cdot \Delta \bar{v}_{\text{syst}}(T_0) \cdot \bar{v}(T_0) \frac{\rho_0}{p_0} = 0.0163$$

$$\Delta \bar{\kappa} = \Delta \bar{\kappa}_{\text{stat}} + \Delta \bar{\kappa}_{\text{syst}} = 0.0183$$

Daraus folgt nun ein Adiabatenkoeffizient von $\kappa = 1.400 \pm 0.018$.

C. Versuch 3

C.1. Messwerte

Die Messung der Frequenz ist durch einen statistisch, geschätzten Anteil von 20 Hz (erkennbare Schwankungen während der Messungen) und einem systematischen Anteil von ± 1 Digit, der über die gesamte Messreihe gleich ist, fehlerbehaftet.

Die Längenmessung mit dem Maßband setzt sich aus einer statistischen und einer systematischen Abweichung zusammen, wobei ersteres durch lineare Regression nicht von Relevanz ist. Der systematische Teil ergibt sich geschätzt zu ± 10 mm, was durch die Wölbungen und der Fertigungsgenauigkeit begründet wird.

Die Temperatur $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ hat einen systematischen Fehler und statistische Schwankungen werden nicht berücksichtigt.

Tabelle C.1.: Messung der Längen l bei Resonanzmaxima für gewählte Frequenzen bei $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$

f_1				f_2				f_3			
Messreihe 1		Messreihe 2		Messreihe 1		Messreihe 2		Messreihe 1		Messreihe 2	
n	l	n	l	n	l	n	l	n	l	n	l
	mm		mm		mm		mm		mm		mm
1	106	1	108								
2	374	2	373	2	226	2	229	2	128	2	124
3	639	3	638	3	400	3	401	3	227	3	229
4	908	4	906	4	571	4	574	4	325	4	326
				5	746	5	747	5	422	5	423
				6	919	6	919	6	526	6	525
								7	625	7	621
								8	725	8	724
								9	824	9	818
								10	916	10	921

C.2. Fehlerrechnung

C.2.1. Längen

Durch graphische Auswertung (lineare Regression mit Origin und [Gleichung 4.1](#)) sind alle statistischen Unsicherheiten bereits in der Geradengleichung enthalten, womit nur noch die systematischen getrennt davon betrachtet werden müssen.

$$l_1(n) = (\bar{a}_{1,1} \pm \Delta\bar{a}_{1,1}) \cdot n + (\bar{a}_{1,0} \pm \Delta\bar{a}_{1,0}) = (266.5 \pm 0.4) \cdot n + (-160.0 \pm 1.1)$$

$$l_2(n) = (\bar{a}_{2,1} \pm \Delta\bar{a}_{2,1}) \cdot n + (\bar{a}_{2,0} \pm \Delta\bar{a}_{2,0}) = (172.9 \pm 0.3) \cdot n + (-118.0 \pm 1.1)$$

$$l_3(n) = (\bar{a}_{3,1} \pm \Delta\bar{a}_{3,1}) \cdot n + (\bar{a}_{3,0} \pm \Delta\bar{a}_{3,0}) = (99.10 \pm 0.22) \cdot n + (-71.0 \pm 1.4)$$

C.2.2. Fehlerfortpflanzung auf die Schallgeschwindigkeit

Durch Ableitung, erhält man die Geschwindigkeit $v_{\text{Luft,long}_i} = \bar{v}_i \pm \Delta\bar{v}_i = 2f \cdot a_{i,1}$ und somit die Unsicherheiten, durch „lineare bzw. quadratische Addition“.

$$\begin{aligned}\Delta\bar{v}_{\text{stat}_i} &= \sqrt{\Delta\bar{v}_{\text{stat}_i}^2 \left[\frac{\partial v_i}{\partial f} \right]^2 \bigg|_{\bar{f}, \bar{a}_{i,1}} + \Delta\bar{a}_{i,1}^2 \left[\frac{\partial v_i}{\partial a_{i,1}} \right]^2 \bigg|_{\bar{f}, \bar{a}_{i,1}}} \\ \Delta\bar{v}_{\text{syst}_i} &= \Delta f_{\text{syst}} \cdot 2\bar{a}_{i,1} \\ \Delta\bar{v}_i &= \Delta\bar{v}_{\text{syst}_i} + \Delta\bar{v}_{\text{stat}_i} \\ \bar{v}_i &= \bar{f} \cdot 2\bar{a}_i\end{aligned}$$

Des Weiteren resultiert aus der Genauigkeit des Maßbandes eine systematische Unsicherheit, welche aber auf die Steigung (Ableitung), und somit auf die Geschwindigkeit, keinen Einfluss hat.

Tabelle C.2.: Statistische und systematische Unsicherheiten der Schallgeschwindigkeitsmessung in Luft bei $T = (23.8 \pm 0.2)^\circ\text{C}$

Versuch	Rechenwerte		
	\bar{v} m/s	$\Delta\bar{v}_{\text{syst}}$ m/s	$\Delta\bar{v}_{\text{stat}}$ m/s
1	346.60	0.053	10.672
2	346.32	0.035	6.937
3	346.94	0.020	4.039

Es zeigt sich, dass der systematische Fehler vernachlässigt werden kann und sich die Konfidenzbereiche aller Messreihen überschneiden, womit eine gewichtete Mittlung mit $n = 3$ durchgeführt werden kann.

$$w_i = \frac{1}{\Delta \bar{v}_i^2}$$
$$\bar{v}_{\text{Luft,long}} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{v}_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$
$$\Delta \bar{v}_{\text{Luft,long}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}}$$

Dadurch ergibt sich $v_{\text{Luft,long}} = (346 \pm 3) \text{ m/s}$.

D. Literaturverzeichnis

- [1] M. Saß. *Akustik (AKU)*. 2016. URL: <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/AKU.pdf> (besucht am 15. März 2018) (siehe S. 1–2).
- [2] Friedrich Kohlrausch. *Praktische Physik 3. Tafeln*. B. G. Teubner Stuttgart, 1986 (siehe S. 3).
- [3] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2015 (siehe S. 3).
- [4] D.C. Giancoli. *Physik: Lehr- und Übungsbuch*. Pearson Studium - Physik. Pearson Studium, 2010 (siehe S. 6, 9).
- [5] F.G. Kollmann, T.F. Schösser und R. Angert. *Praktische Maschinenakustik*. VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg, 2006 (siehe S. 6).