# Cálculo de autovetores considerando os autovalores conhecidas

Natália Ramos Vilas Boas

June 28, 2019

## 1 Introdução

Supondo conhecida uma matriz 3x3 simétrica, um autovalor e sua multiplicidade. Denotamos o problema de cálculo de autovetor como

$$[S]\,[v] = \lambda\,[v]$$

O tensor $[S]$ é dado e o autovalor $\lambda$ foi calculado utilizando a equação característica. Devolvemos uma sistemática para calcular os autovetores.

## 2 Autovalor com multiplicidade 1

Caso a multiplicidade é unitária, podemos extrair da matriz $[S] - \lambda[I]$ uma matriz 2x2 não singular. Consideramos as três possibilidades:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & y_2 \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & y_1 & x_{12} \\ a & b & c \\ x_{21} & y_2 & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ y_1 & x_{11} & x_{12} \\ y_2 & x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e escolhemos a configuração para qual o valor absoluto de $|det[X]|$ é máximo onde

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

Os valores de $v_1$ e $v_2$ são obtidos como

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -[X]^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

## 3 Autovalor com multiplicidade 2

Quando a multiplicidade é 2 o *rank* da nossa matriz $[S]-\lambda[I]$ sera unitária. Deve existir pelo menos uma diagonal differente de zero. Novamente consideramos 3 casos:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & y_2 & y_2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ y_1 & x_{11} & y_2 \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ y_1 & y_2 & x_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x_{11} & y_2 & y_2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ y_1 & x_{11} & y_2 \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ y_1 & y_2 & x_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente escolhemos a configuração para qual $|x_{11}|$ é máxima

Daí determinamos (por exemplo) $[v_1] = \begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[v_2] = \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e normalizamos os vetores

$$[\tilde{v}_1] = \frac{[v_1]}{||[v_1]||}$$
$$[\tilde{v}_2] = \frac{[v_2]}{||[v_2]||}$$

e

$$[v_1^\star] = [\tilde{v}_1]$$
$$[v_2^\star] = [\tilde{v}_2] - ([\tilde{v}_1].[\tilde{v}_2])[\tilde{v}_1]$$

# 4 Autovalor com multiplicidade 3

Neste caso a matriz é diagonal é os autovetores são formados pela matriz identidade