

# 2.1 Introducción a las Pruebas de Hipótesis

2. Inferencia Estadística

Christian E. Galarza

**Programa New Dimensions**

# Pruebas de hipótesis

**Hipótesis:** Una declaración o premisa sobre el parámetro desconocido  $\theta \in \Theta$ .

- 1 Hipótesis nula  $H_0$ : una declaración general o posición predeterminada.
- 2 Hipótesis alterna  $H_1$ : una declaración opuesta o alterna. También llamada *hipótesis de investigación*.

**Contraste:**

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

$H_0$  : lo predeterminado, usualmente pesimista    vs.     $H_1$  : lo que se quiere probar

# Contrastes hipótesis en la vida real

- **Pruebas de drogas:** Las compañías farmacéuticas utilizan contrastes hipótesis para probar la eficacia de nuevos medicamentos. Comparan el efecto del medicamento con un placebo, que es un tratamiento inactivo.
- **Encuestas de opinión:** Los encuestadores utilizan contrastes hipótesis para medir la opinión pública sobre diversos temas. Comparan las respuestas de los encuestados con una hipótesis nula, que es la hipótesis de que no hay diferencia entre las opiniones de los encuestados.

# Contrastes hipótesis en la vida real

- **Experimentos científicos:** Los científicos utilizan contrastes hipótesis para probar sus hipótesis sobre el mundo natural. Comparan los resultados de sus experimentos con las hipótesis nulas.
- **Juegos de azar:** Las casas de apuestas utilizan contrastes hipótesis para determinar las probabilidades de ganar o perder en diferentes juegos. Comparan las probabilidades de ganar con una hipótesis nula, que es la hipótesis de que no hay diferencia entre las probabilidades de ganar y perder.

# Contrastes hipótesis en la vida real

- **Pruebas de drogas:**

- Hipótesis nula ( $H_0$ ): El medicamento no tiene ningún efecto sobre la población de interés.
- Hipótesis alternativa ( $H_1$ ): El medicamento tiene algún efecto sobre la población de interés.

- **Encuestas de opinión:**

- Hipótesis nula ( $H_0$ ): No hay diferencia entre las opiniones de los encuestados.
- Hipótesis alternativa ( $H_1$ ): Hay alguna diferencia entre las opiniones de los encuestados.

# Contrastes hipótesis en la vida real

- **Experimentos científicos:**

- Hipótesis nula ( $H_0$ ): Los resultados del experimento son debidos al azar.
- Hipótesis alternativa ( $H_1$ ): Los resultados del experimento no son debidos al azar.

- **Juegos de azar:**

- Hipótesis nula ( $H_0$ ): Las probabilidades de ganar o perder son iguales.
- Hipótesis alternativa ( $H_1$ ): Las probabilidades de ganar o perder no son iguales.

# Tipos de hipótesis

- Simple vs. Compuesta.
- Una hipótesis es simple si supone un valor único, sino, es compuesta.
- Existen hipótesis compuestas unilaterales y bilaterales.

# Colas en pruebas de hipótesis

Las pruebas de hipótesis pueden ser de una o dos colas, dependiendo de lo que estemos buscando:

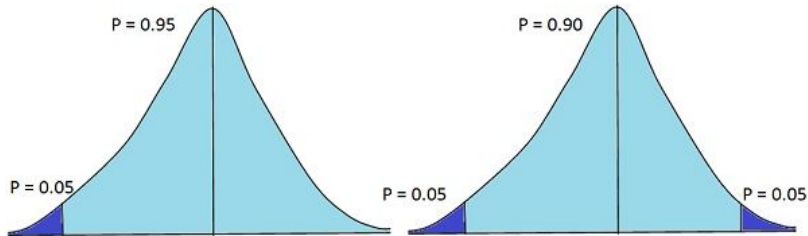
- Prueba de cola izquierda: ¿Es nuestro valor menor que un cierto valor?
- Prueba de cola derecha: ¿Es nuestro valor mayor que un cierto valor?
- Prueba de dos colas: ¿Nuestro valor es diferente de un cierto valor?



# Ejemplo de colas

Si queremos probar si un medicamento reduce la presión arterial, usaríamos una prueba de una cola (izquierda). Si queremos probar si afecta (aumenta o disminuye) la presión arterial, usaríamos una prueba de dos colas.

# Ejemplo de colas



One-tailed Test Vs Two-tailed Test

# Ejemplo 1: Lanzamiento de una moneda

Generalmente se cree que cuando lanzamos una moneda, la probabilidad de que una moneda caiga cara arriba es 0,5. Una persona es escéptica y cree que una moneda en realidad tiende a resultar cara más de lo normal, cree él, con probabilidad 0,7.

# Ejemplo 1: Traducción Matemática

- Hipótesis nula (teoría comúnmente aceptada):  $H_0 : p = 0,5$  (hipótesis simple).
- Hipótesis alterna (hipótesis de investigación):  $H_1 : p = 0,7$  (hipótesis simple).

## Ejemplo 2: Diámetro de sorbetes

Una compañía había declarado que su máquina fabrica sorbetes con un diámetro promedio de 4 mm. Un trabajador cree que la máquina ya no produce sorbetes de este tamaño, en promedio.

# Ejemplo 2: Traducción Matemática

- Hipótesis nula (actualmente aceptada):  $H_0 : \mu = 4$  (hipótesis simple).
- Hipótesis alterna (hipótesis de investigación):  $H_1 : \mu \neq 4$  (hipótesis compuesta de dos colas).

# Ejemplo 3: Duración del sueño en adolescentes

Los médicos creen que el adolescente promedio duerme en media, no más de 10 horas por día. Una investigación cree que los adolescentes, en media, duermen más tiempo.

# Ejemplo 3: Traducción Matemática

- Hipótesis nula (comúnmente aceptada):  $H_0 : \mu \leq 10$  (compuesta unilateral).
- Hipótesis alterna (hipótesis de investigación):  $H_1 : \mu > 10$  (compuesta unilateral).



# Decisiones y errores

- ¿Cuál de las hipótesis es más favorable según los datos?
- **Estadístico de prueba:** es una cantidad que depende de la muestra y permite tomar una decisión.
- **Región de rechazo:** nos indica cuando rechazar o no la hipótesis nula.

# Tipos de errores

	$H_0$ es verdadera	$H_1$ es verdadera
Se rechaza $H_0$	Error tipo I	Decisión correcta
No se rechaza $H_0$	Decisión correcta	Error tipo II

Cuadro: Resultados de la decisión

# Tipos de errores al tomar una decisión

- Error tipo I: Rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.
- Error tipo II: No rechazar la hipótesis nula cuando es falsa.

## Ejemplo:

- Error tipo I (falso positivo): *encerrar al inocente*.
- Error tipo II (falso negativo): *dejar libre al culpable*.

# Significancia estadística

La significancia estadística nos dice si un resultado es probable que sea real o si podría haber ocurrido por casualidad. Es una forma de cuantificar la confianza en nuestros resultados.

**Ejemplo:** Se desea probar si la última estrategia del mercado ha ayudado a incrementar las ventas de un nuevo producto. Se ha calculado el número de productos vendidos antes y después de la estrategia y se ha encontrado de que efectivamente ha aumentado la venta en cuatro unidades. **¿Ha servido o no la campaña?**

# Valor $p$ ( $p$ -value)

El valor  $p$  es una herramienta esencial en pruebas de hipótesis. Nos dice la probabilidad de obtener un resultado tan extremo como el observado, asumiendo que la hipótesis nula es verdadera.

# Decisiones basadas en el valor $p$

Valor $p$	Evidencia contra $H_0$	Conclusión
$< 0,01$	evidencia muy fuerte	Se rechaza $H_0$
0.01-0.05	evidencia fuerte	Se rechaza $H_0$
0.05-0.10	evidencia débil	...
$> 0,1$	poca o ninguna evidencia	No se rechaza $H_0$

# Cálculo de intervalos de confianza

El intervalo de confianza nos da un rango en el que es probable que se encuentre un parámetro poblacional. Nos da una idea de la incertidumbre asociada con nuestras estimaciones.

Es mucho más útil para la toma de decisiones ya que en lugar de dar un solo punto (estimación puntual), nos provee un intervalo dado un grado de error (nivel de significancia)  $\alpha$ .

# Fórmula del intervalo de confianza para la media

Un intervalo de confianza del  $(1 - \alpha)\%$  de confianza está dado por:

$$IC(\mu) = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde  $\bar{x}$  es la media muestral,  $z$  es el valor crítico de una normal (el cual dependerá del nivel de confianza),  $\sigma$  es la desviación estándar poblacional y  $n$  es el tamaño de la muestra.

Como en la vida real difícilmente conocemos la varianza de la población  $\sigma^2$ , se usa su estimador muestral  $s^2$ . La fórmula ahora será:

$$IC(\mu) = \bar{x} \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

donde  $t_{n-1, \alpha/2}$  es el valor crítico tomado de una distribución  $t$  de Student.



# Z-scores\*

El z-score es una medida que describe la posición de un valor individual en relación con la media de un conjunto de datos.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

donde  $x$  es el valor observado,  $\mu$  es la media y  $\sigma$  es la desviación estándar.

El z-score nos ayuda a entender cuán inusual o típico es un valor en relación con el conjunto de datos. Es esencial para muchas pruebas estadísticas.

# Usos de las pruebas A/B\*

Las pruebas A/B son experimentos controlados que comparan dos (o más) versiones de una variable para determinar cuál es más efectiva. Es una forma práctica de probar hipótesis en situaciones del mundo real.

**Ejemplo:** una empresa podría usar pruebas A/B para determinar qué diseño de sitio web genera más clicks. Al mostrar aleatoriamente a los visitantes uno de los dos diseños y luego analizar cuál tuvo un mejor rendimiento, la empresa puede tomar decisiones informadas sobre qué diseño implementar.

# Ejemplo: Prueba de Hipótesis para la Media

Supongamos que queremos probar si la media de una población es igual a 50. Tenemos una muestra de tamaño 100 con una media de 52 y una desviación estándar de 10.

Hipótesis:

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_a : \mu \neq 50$$

Realizaremos una prueba de dos colas con un nivel de significancia de 0.05.

# Cálculo de la Prueba de Hipótesis en R

Podemos realizar la prueba de hipótesis en R usando las funciones `z.test()` y `pnorm()`.

```
# Parámetros
mu <- 50 # Media bajo H0
x_bar <- 52 # Media muestral
sigma <- 10 # Desviación estándar
n <- 100 # Tamaño de la muestra
alpha <- 0.05 # Nivel de significancia

# Calcular el z-score
z_score <- (x_bar - mu) / (sigma / sqrt(n))

# Calcular el p-valor
p_valor <- 2 * (1 - pnorm(abs(z_score)))
```

# Cálculo Directo de la Prueba de Hipótesis en R

Podemos realizar la prueba de hipótesis directamente en R usando la función `z.test()` del paquete 'BSDA'.

```
library(BSDA)
mu <- 50 # Media bajo H0
x_bar <- 52 # Media muestral
sigma <- 10 # Desviación estándar
n <- 100 # Tamaño de la muestra
alpha <- 0.05 # Nivel de significancia

# Realizar el z-test
test <- z.test(x = x_bar, alternative = "two.sided",
               mu = mu, sigma.x = sigma, conf.level = 1-alpha)
```

El resultado mostrará el valor de  $z$  y el  $p$ -valor, entre otros detalles.