2.4. Pruebas No Paramétricas

2. Estadística y Probabilidad Básica

Christian E. Galarza

Programa New Dimensions

Introducción a las Pruebas No Paramétricas

- Alternativa a las pruebas paramétricas.
- No asumen una distribución específica.
- Útiles cuando no se cumplen supuestos.

Supuestos Comunes en Pruebas de Hipótesis

- Independencia de observaciones.
- Normalidad de los datos.
- Homocedasticidad.

Supuestos en Pruebas de Hipótesis

- **T de Student (Una media):**
  - Muestra aleatoria.
  - Distribución normal o tamaño de muestra grande.
  - Varianza conocida o desconocida pero estimable.

- **T de Student (Pares de medias):**
  - Muestras aleatorias y dependientes.
  - Diferencias distribuidas normalmente.

Supuestos en Pruebas de Hipótesis

- **1 y 2 proporciones:**
  - Muestras aleatorias e independientes.
  - Tamaño de muestra suficientemente grande (para que np y n(1-p) sean ≥ 5).

- **ANOVA:**
  - Muestras aleatorias e independientes.
  - Distribuciones normalmente distribuidas en cada grupo.
  - Homocedasticidad (varianzas iguales entre grupos).

El Tamaño de la Muestra

- Determina poder estadístico.
- Afecta precisión y confiabilidad.
- Implicaciones en validez de pruebas.
- Si la muestra no es lo suficientemente grande para pruebas de proporción o medias:
    - Supuesto de normalidad puede omitirse...
    - ... si se cumple el Teorema del Límite Central.

Generación de Datos y Estadísticas

- **Uso de simulaciones:**
  - Generar muestras aleatorias bajo ciertas hipótesis.
  - Estimar la distribución de una estadística.
  - Comprender escenarios bajo diferentes supuestos.
- **Herramientas estadísticas:**
  - Softwares como R, Python, SAS y SPSS.
  - Funciones y paquetes específicos para pruebas no paramétricas.
- **Técnicas para pruebas no paramétricas:**
  - Uso de rangos en lugar de datos brutos.
  - Pruebas como Wilcoxon, Kruskal-Wallis.
  - Aplicación cuando no se cumplen supuestos de normalidad o varianza homogénea.

Estadística Observada y Valor-p

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- **Interpretación del valor-p:**
  - Probabilidad bajo la hipótesis nula.
  - Un valor-p pequeño sugiere evidencia contra H_0.
- **Decisión basada en nivel de significancia:**
  - Usualmente $\alpha = 0{,}05$.
  - Si valor-p $< \alpha$, rechazamos H_0.
  - Significa que los datos observados son incompatibles con H_0 a ese nivel de significancia.

Matemática de ANOVA No Paramétrico

- Kruskal-Wallis: versión no paramétrica de ANOVA.
- Estadístico H: basado en rangos.
- Distribución aproximadamente χ^2 con $k-1$ grados de libertad.

Cálculo de Rangos - Pasos 1 y 2

1. **Ordenar los Datos**
   - Ordena todos los datos, sin importar el grupo.
   - De menor a mayor.
2. **Asignar Rangos**
   - Asigna un rango al dato más pequeño (rango 1).
   - Continúa consecutivamente: el siguiente dato recibe el rango 2, y así sucesivamente.

Cálculo de Rangos - Paso 3

3. Tratamiento de Empates (Datos Repetidos)

- Si dos o más datos son idénticos, se les da el promedio de los rangos que habrían obtenido si fueran diferentes.
- Ejemplo: Si los rangos 3 y 4 corresponden a datos idénticos, ambos datos reciben el rango $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

Ejemplo:
Datos: 5, 5, 6, 7, 7, 7
Rangos: 1.5, 1.5, 3, 5, 5, 5.

Ejemplo de ANOVA No Paramétrico

Enunciado: Suponga que se quiere comparar la satisfacción de clientes entre tres tiendas distintas. Las valoraciones no siguen una distribución normal. ¿Existen diferencias significativas entre las tiendas?

Prueba de Kruskal-Wallis y cálculo de rangos

Datos (Satisfacción de clientes en 3 tiendas):

$$\begin{aligned} \text{Tienda A:} &\quad 5, 6, 7 \\ \text{Tienda B:} &\quad 8, 9, 6 \\ \text{Tienda C:} &\quad 7, 7, 8 \end{aligned}$$

Rangos:

$$\begin{aligned} 5: &\quad 1 \\ 6: &\quad 2{,}5 \quad \text{(promedio de rangos para 6 y 6)} \\ 7: &\quad 5 \quad \text{(promedio de rangos para 7, 7 y 7)} \\ 8: &\quad 7{,}5 \quad \text{(promedio de rangos para 8 y 8)} \\ 9: &\quad 9 \end{aligned}$$

Estadístico Kruskal-Wallis H: Se calcula usando los rangos asignados y las fórmulas

Prueba t basada en Simulación

- Estadístico t: mismo que en prueba t tradicional.
- En lugar de asumir una distribución t de Student, generamos una distribución empírica simulando bajo la hipótesis nula.
- El p-valor se obtiene comparando el estadístico observado con la distribución simulada.

Prueba t basada en Simulación (*)

1. Calcular el estadístico t para las muestras observadas.
2. Combinar ambas muestras y redistribuirlas aleatoriamente en dos nuevos grupos (simulación bajo H0).
3. Calcular el estadístico t para esta redistribución.
4. Repetir paso 2 y 3 muchas veces (ejemplo, 10,000 veces) para construir una distribución de t bajo la hipótesis nula.
5. El p-valor es la proporción de veces que el t simulado es tan extremo o más extremo que el observado.

Prueba de Suma de Rangos

- Es una prueba no paramétrica.
- Utilizada para comparar las **medianas entre dos grupos**.
- Aplicada cuando se tienen datos ordinales o rangos.
- No asume normalidad de los datos.
- Prueba más utilizada: Test de Wilcoxon.

Prueba de Suma de Rangos

- Se asignan rangos a cada dato combinando ambos grupos.
- R_1: suma de rangos del grupo 1.
- R_2: suma de rangos del grupo 2.
- Estadístico de test W se basa en R_1 o R_2 (e.g., $W = R_1$ para Wilcoxon).
- Se compara W con una distribución esperada bajo H0.

Prueba de Suma de Rangos

- Observaciones:
  - Útil cuando los datos tienen outliers.
  - Menos poderosa que pruebas paramétricas con datos normales.
- Ejemplo:
  - Queremos saber si dos técnicas de enseñanza tienen diferencias significativas en el rendimiento de estudiantes.
  - Los datos se presentan como rankings de rendimiento y no cumplen con normalidad.
  - Usamos la prueba de suma de rangos para comparar las medianas de rendimiento de ambos grupos.

Ejercicio Práctico: Prueba de Wilcoxon para Comparación de Medias

Contexto: Una empresa de ventas al por menor quiere comparar las ventas antes y después de una campaña publicitaria. Selecciona aleatoriamente a 10 tiendas y registra sus ventas semanales antes y después de la campaña. ¿Tuvo un impacto significativo la campaña publicitaria?

Ejercicio Práctico: Prueba de Wilcoxon para Comparación de Medias

Datos:

Tienda	Ventas Antes (miles)	Ventas Después (miles)
1	50	55
2	45	47
3	60	62
4	53	54
5	49	52
6	52	58
7	48	49
8	55	57
9	54	56
10	50	51

¿Las ventas mejoraron significativamente después de la campaña?

Desarrollo Matemático: Prueba de Wilcoxon

Se desea probar:

$$H_0 : \text{Las medianas de las ventas antes y después son iguales}$$

$$H_1 : \text{Las medianas de las ventas después son mayores que antes}$$

Pasos:

1. Calcular las diferencias (Después - Antes).
2. Ordenar las diferencias en valor absoluto.
3. Asignar rangos a las diferencias. En caso de empates, tomar el promedio de los rangos.
4. Sumar los rangos de las diferencias positivas (R+).
5. Utilizar la estadística de Wilcoxon: $W = min(R+, R-)$.
6. Comparar W con la distribución de Wilcoxon para determinar significancia.

```
# Datos
ventas_antes <- c(50, 45, 60, 53, 49, 52, 48, 55, 54, 50)
ventas_despues <- c(55, 47, 62, 54, 52, 58, 49, 57, 56, 51)

# Realizar la prueba de Wilcoxon
resultado <- wilcox.test(ventas_antes, ventas_despues, paired = TRUE, alterna

# Imprimir p-valor
print(resultado$p.value)
```

Si el $p - valor$ es menor que 0.05, rechazamos H_0 y concluimos que las ventas mejoraron significativamente después de la campaña.

Conclusión y Recomendaciones

- **Versatilidad**: Las técnicas no paramétricas son esenciales cuando los datos no cumplen con supuestos específicos.
- **Investigación Robusta**: Permite la correcta interpretación de resultados, especialmente con datos no normales o con outliers.
- **Relevancia en el Mundo Real**: Muchos conjuntos de datos en la vida real no cumplen con los supuestos de normalidad.

¡Atención!

- **Próxima clase:**
  - Quiz de preguntas básicas sobre la Unidad 2.
- **Práctica:**
  - Ejercicios prácticos en R.
- **Tareas:**
  - Se enviará un deber relacionado con la Unidad 1 y 2.