Uzgoj životinja uz zakup novog zemljišta

Lazar Dačkovič Nikola Belaković Aleksandra Labović

16. maj 2023.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 Verhulstov logistički model **2**

2.1 Dolaženje do modela 2

2.2 Rešavanje modela 3

2.3 Bezdimenzioni oblik 4

3 Primena modela na konkretnom primeru **5**

4 Literatura **10**

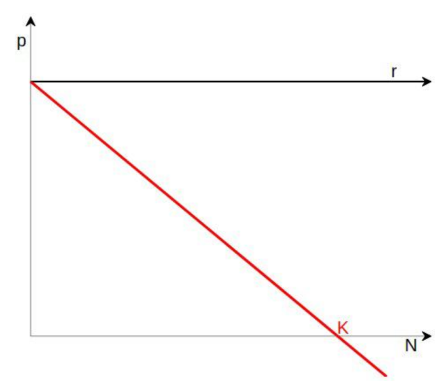
1 Uvod

Istražujemo problem promene broja jedinki životinjske populacije tokom vremena. Kako prirodni resursi nisu neograničeni, maksimalan broj jedinki koje mogu opstati u datom staništu je ograničen. Belgijski matematičar Pjer Fransoa Verhulst (*Pierre François Verhulst*) je 1838. godine predložio logistički model koji uzima u obzir ovo ograničenje. U ovom radu ćemo prikazati kako se dolazi do ovog logističkog modela i kako se on koristi u praksi.

2 Verhulstov logistički model

2.1 Dolaženje do modela

Označimo broj jedinki u vremenskom trenutku t sa $\mathcal{N}(t)$, prirodni priraštaj populacije sa konstantom p, a maksimalni broj jedinki koje istovremeno mogu živeti u posmatranom staništu sa K.
U ovom modelu pretpostavljamo da postoji samo jedna vrsta koja živi, dok životinje umiru prirodnom smrću. Takođe pretpostavljamo da je razmnožavanje homogeno, u smislu da se broj novih jedinki proporcionalno povećava sa brojem postojećih jedinki, a da ne postoje sezonske oscilacije. Dalje, pretpostavljamo da je i izumiranje homogeno po vremenu, što znači da je proporcionalno broju postojećih jedinki. Kada populacija dostigne maksimalni broj jedinki i počne da živi u tom broju duže vreme, to znači da je priraštaj u populaciji jednak nuli. Ovo se može primetiti na grafiku koji prikazuje linearnu zavisnost priraštaja od veličine populacije, što je pretpostavio Verhulst.Ovaj model sugeriše da će priraštaj biti veći ukoliko je populacija manja, dok će se smanjivati kako se populacija bude povećavala.To je zato što kada populacija dostigne određenu veličinu, dostupni resursi postaju ograničeni i ne mogu podržati dalji rast populacije.



Slika 1: Linearna zavisnost priraštaja i broja jedinki

Sa $r = p(0)$ označena je reproduktivna stopa.

Pravu koja prolazi kroz tačke $(0, r)$ i $(k, 0)$, ćemo izračunati primenom formule za dobijanje jednačine prave koja prolazi kroz tačke (x1, y1) i (x2, y2), koja glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{1}$$

Ubacivanjem tačaka $(0, r)$ i $(k, 0)$ u jednačinu (1) dobijamo naredni izraz

$$p - r = \frac{0 - r}{K - 0} \cdot (N - 0) \tag{2}$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo vrednost prirodnog priraštaja p izraženu preko vrednosti r, N i K

$$p = r(1 - \frac{N}{K}) \tag{3}$$

Ubacivanjem jednačine (3) u Malthusov eksponencijalni model (4)

$$\frac{dN(t)}{dt} = pN(t), \qquad N(0) = N_0 \tag{4}$$

Dobijamo Verhulstov logistički model

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \qquad N(0) = N_0 \tag{5}$$

2.2 Rešavanje modela

Jednačinu (5) zapisujemo pogodnije

$$\frac{dN(t)}{N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)} = rdt \tag{6}$$

Zatim integralimo jednačinu (6)

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)} = \int r\,dt$$
$$\ln|N(t)| - \ln|K - N(t)| = rt + C$$
$$\ln\left|\frac{N(t)}{K - N(t)}\right| = rt + C$$

Kako važi da je $N > 0$ i $K > N$ dobijamo

$$\ln\left(\frac{K - N(t)}{N(t)}\right) = -rt - C$$

Sledi

$$\frac{K - N(t)}{N(t)} = e^{-rt-C}$$

Dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine (5)

$$N(t) = \frac{K}{e^{-rt-C} + 1} \tag{7}$$

Konstantu C dobijamo iz početnog uslova $N(0) = N_0$

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{K}{e^{0-c} + 1} \\ e^{-c} &= \frac{K}{N_0} - 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Odavde dobijamo partikularno rešenje (9)

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}} \\ &= \frac{N_0 e^{rt}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{rt} - 1)} \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 Bezdimenzioni oblik

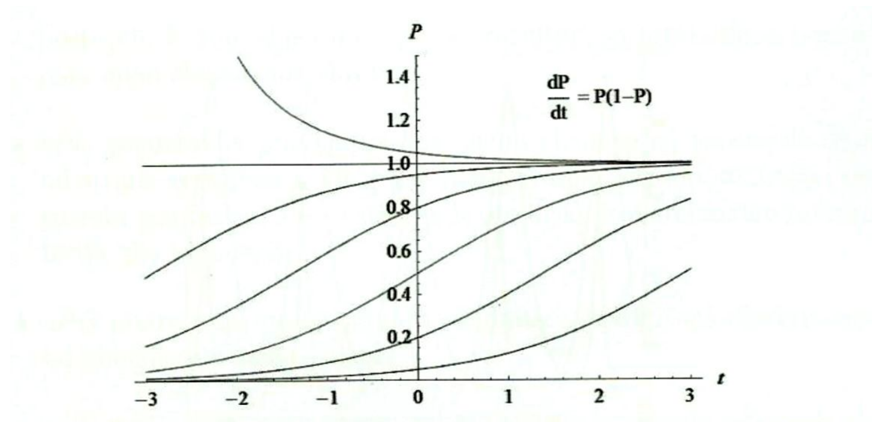
Ukoliko označimo sa $x(t) = \frac{N(t)}{K}$, gde $x(t)$ predstavlja bezdimenzionu veličinu, koja se nalazi u intervalu $[0, 1]$, dobijamo narednu jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x) \tag{10}$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x(0)} - 1\right) e^{-rt}} \\ &= \frac{x(0) e^{rt}}{1 + x(0)(e^{rt} - 1)} \end{aligned} \tag{11}$$

Jednačina (10) poznata je pod nazivom *logistička jednačina*, a funkcija (11) *logistička funkcija*. Zamenom nezavisne promenljive $t_1 = rt$ u cilju pojednostavljenja rešenja, dobijamo istu jednačinu sa fiksiranim parametrom $r = 1$. Rešenja ove jednačine su prikazana na narednoj slici.



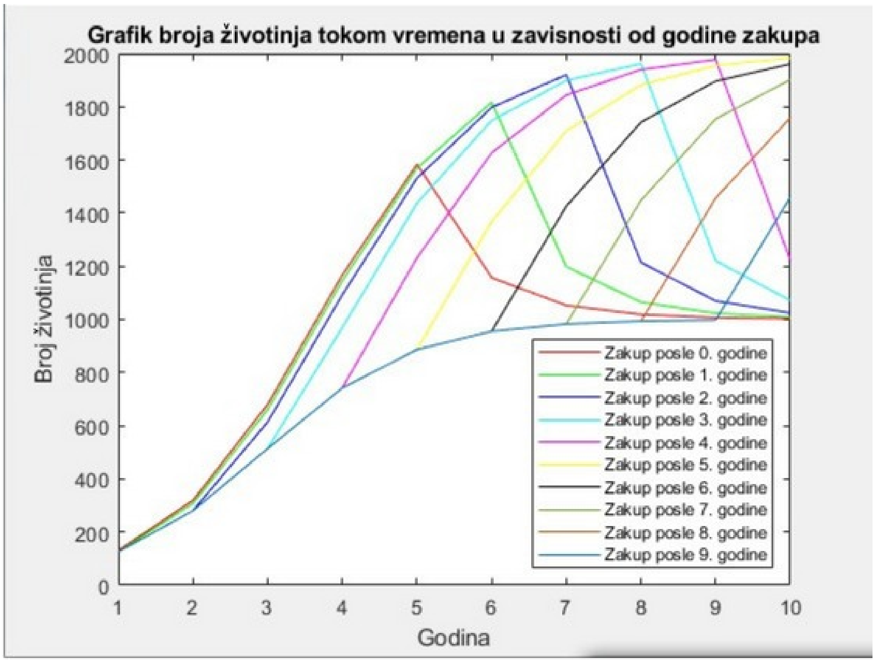
Slika 2: Logistička funckcija

3 Primena modela na konkretnom primeru

Problem koji treba da rešimo je kako poljoprivrednik može da iskoristi ponuđeni podsticaj države u vidu besplatnog zakupa dodatnog zemljišta iste površine u periodu od 5 godina, a da istovremeno poveća broj životinja na svojoj farmi i maksimalno iskoristi dostupne resurse. Poljoprivrednik trenutno poseduje farmu sa 50 životinja i ima ograničenje da može maksimalno da hrani 1000 životinja. Osim toga, priraštaj populacije za male farme iznosi 1 na godišnjem nivou. U nastavku ćemo opisati postupak za rešavanje ovog problema.

Posmatramo period od 10 godina tokom kojeg se vrši uzgoj životinja. Parametar t predstavlja godinu u periodu i kreće se u intervalu od 1 do 10. Broj jedinki u vremenskom trenutku t označava se sa $N(t)$, pri čemu je početna vrednost $N(0)$ jednaka 50, što nam je važno za dobijanje konačnog rešenja modela. Maksimalni broj jedinki koje mogu da žive na datom staništu predstavlja se parametrom K. Kada nije iskorišćena pomoć države, vrednost K iznosi 1000, dok je u suprotnom slučaju vrednost K jednaka 2000. Reproduktivna stopa je jednaka prirodnom priraštaju u nultom trenutku, odnosno prvoj godini, što se označava vrednošću 1.

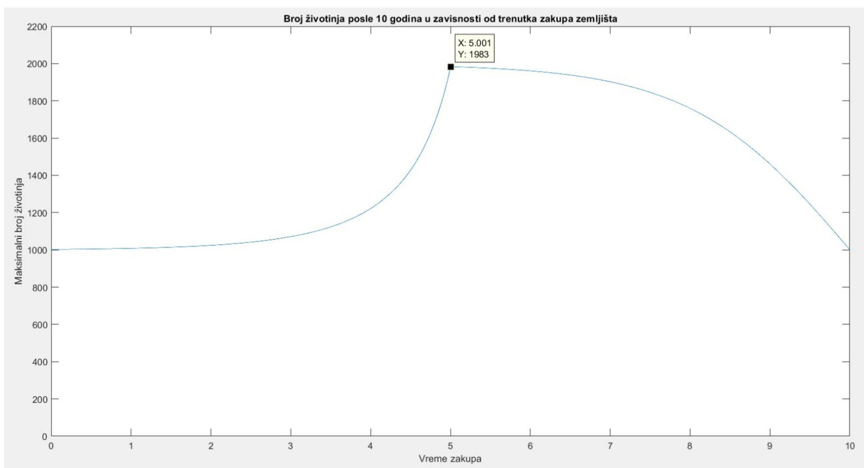
Primenom Verhulstovog modela dobijeni su interesantni rezultati, koji su prikazani na narednim graficima. Ovi grafici pružaju uvid u dinamiku i karakteristike sistema koji se proučava.



Slika 3: diskretan slučaj Verhulstovog modela

Primećuje se da ukoliko poljoprivrednik iskoristi državnu pomoć u vidu dodatnog zemljišta u ranim godinama, neće biti u mogućnosti da iskoristi to zemljište u potpunosti, jer broj životinja koje poseduje još uvek nije dovoljan. Takođe ukoliko uzme pomoć u ranijim godinama, nakon isteka iste dolazi do smanjenja kapaciteta zemljišta, pa će broj jedinki naglo početi da opada. Zato bi za poljoprivrednika bilo mnogo korisnije da državnu pomoć primi u kasnijim godinama, međutim pitanje je u kojoj konkretno godini. Poljoprivrednik ne sme previše da čeka, jer onda neće iskoristi pun potencijal dodatnog zemljišta. Na osnovu posmatranja grafika sa slike 4, najbolje vreme za uzimanje pomoći je u 1826. danu, odnosno tačno nakon pet godina. Tada bi poljoprivrednik mogao da iskoristi pun potencijal pomoći u narednih pet godina, čime bi postigao najveći mogući broj životinja.

Na Slici 4 prikazana je kriva, koja predstavlja koliko će životinja imati poljoprivrednik nakon 10 godina, u zavisnosti od godine u kojoj uzme državnu pomoć. Kriva je dobijena korišćenjem dvostruke petlje po vremenu zakupa i trenutnom vremenu, vrednosti za oba ova parametra se kreću u intervalu od 0 do 10, sa korakom 1/364.9. Ovaj korak omogućava da dobijene vrednosti budu u kontinualnom vremenu, tačnije da možemo videti tačno u dan, kada bi poljoprivrednik trebalo da uzme pomoć države. Za čuvanje vrednosti broja životinja nakon deset godina, korišćen je pomoćni niz. Maksimalan broj životinja, dobijen je korišćenjem funkcije *fminbnd*, koja računa minimum funkcije sa jednom promenljivom na fiksiranom intervalu. U našem slučaju, funkciji *fminbnd* prosledili smo funkciju *verhulst*, kao i interval od nula do deset. Funkcija *verhulst* je funkcija po vremenu zakupa, u kojoj se pomoću Verhulstovog modela računa broj životinja nakon deset godina. Pošto se traži maksimalna vrednost broja životinja, funkciju *verhulst*, prosleđujemo sa negativnim predznakom funkciji *fminbnd*. Ova funkcija vraća dve povratne vrednosti, vrednost promenljive *vreme zakupa*, za koju funkcija *verhulst* vraća najveću vrednost i najveći broj životinja nakon deset godina. Na narednom grafiku možemo uočiti da najveći broj životinja nakon deset godina iznosi 1983 i da se on ostvaruje, ukoliko poljoprivrednik uzme pomoć tačno nakon pet godina. Ukupan broj životinja je najmanji ako se subvencija uzme pre pete godine. Veći broj životinja se dobija ako se subvencija uzme u kasnijim godinama.

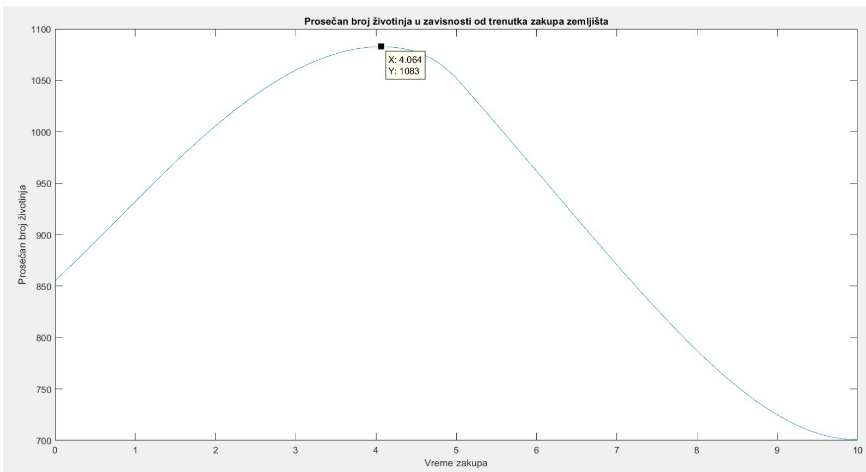


Slika 4: kontinualan slučaj Verhulstovog modela

Takođe, u ovom radu želimo da utvrdimo u kojoj godini bi poljoprivrednik trebalo da počne sa korišćenjem dodatnog zemljišta kako bi u periodu od 10 godina ostvario najveći prosečan broj životinja.

Kako bismo rešili ovaj problem, možemo analizirati grafik koji se nalazi na slici 3 i posmatrati površinu ispod krivih. Osim što nam pruža informaciju o tome koliko će životinja poljoprivrednik imati nakon 10 godina, ovaj grafik nam takođe prikazuje kako se broj životinja menja svake godine. Iako rezultate tumačimo u kontinualnom slučaju Verhulstovog modela, pozvaćemo se na sliku 3, koja predstavlja diskretan slučaj Verhulstovog modela, da bi čitaocu vizuelno bilo jednostavnije da isprati tumačenje grafika. Naime ukoliko bismo tumačili neprekidan slučaj onda bi ovaj grafik imao 3650 krivih, pretpostavljajući da nema prestupnih godina, ovako grafik sadrži samo 10 krivih, pa je dosta lakše za ispratiti. Da bismo utvrdili kada bi poljoprivrednik trebalo da uzme državnu

pomoć kako bi imao najveći prosečni broj životinja u tih 10 godina, možemo uporediti površine ispod svake od ovih deset kriva.
Ako primenimo ovu strategiju, možemo videti da bi poljoprivrednik drastično smanjio broj životinja nakon isteka pomoći ukoliko bi iskoristio državnu pomoć u ranijim godinama. Takođe, vidljivo je da ako uzme pomoć u nekoj od kasnijih godina, ne bi iskoristio celu pomoć. Stoga, najbolja strategija za poljoprivrednika da bi imao najveći prosečni broj životinja tokom deset godina bila bi uzimanje pomoći u četvrtoj ili petoj godini. Na grafiku koji se nalazi na slici 5 možemo videti kako se ovaj prosečan broj životinja menja iz dana u dan i zaključiti da ukoliko poljoprivrednik ima taj cilj, najbolje bi bilo da uzme državnu pomoć nakon 25. dana četvrte godine.



Slika 5: kontinualan slučaj Verhulstovog modela

Kada se analiziraju konkretne vrednosti prosečnog broja životinja u zavisnosti od vremena zakupa na slici 5, možemo zaključiti da je isplativije za poljoprivrednika da uzme pomoć države u ranijim godinama nego u kasnijim. Na primer, bilo bi mu isplativije da pomoć uzme u prvoj godini, a ne u devetoj ili desetoj godini. Odatle možemo zaključiti da prosečni broj životinja više zavisi od toga, da se pomoć iskoristi u celosti, tokom punih pet godina, nego od broja životinja koje poljoprivrednik poseduje u trenutku kada uzima potporu.
Najveći prosečan broj životinja je takođe izračunat korišćenjem funkcije *fminbnd*, sa sličnim argumentima kao i u prethodnom delu. Jedina razlika, jeste funkcija koja se prosleđuje sa negativnim predznakom - *verhulst2*. Funkcija *verhulst2* radi na istom principu kao i funkcija *verhulst*, osim što se dodatno računa zbir broja životinja tokom ovog perioda od deset godna i vraća se kao povratna vrednost. Funkcija *fminbnd* će kao rezultat vratiti vrednost promenljive *vreme zakupa* za koju funkcija *verhulst2* vraća najveću vrednost i najveći broj životinja tokom deset godina. Na kraju najveći prosečan broj životinja dobijen je deljenjem broja životinja sa 3650, koji predstavlja broj dana u deset godina i broj koraka

petlje u funkciji *verhulst2*.

4 Literatura

1. Milan Dražić, *Matetmatičko modeliranje.* Matematički fakultet, Beograd, 2017.

2. Zorana Vukojević, *Modeli dinamike populacije, Master rad.* Prirodno-Matematički faklutet, Novi Sad 2019.