Matematyka - Metody numeryczne w technice (Ćwiczenia)

Opis zadania do wykonania

- Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z trzema iteracyjnymi metodami rozwiązywania układu równań
  zapisywanego w postaci macierzowej, która prezentuje się w sposób następujący:
- $$Ax = b$$
- ,gdzie
  A – macierz współczynników równań;
  x – wektor niewiadomych;
  b – wektor wartości funkcji

Plan zajęć

- implementacja iteracyjnej metody Jacobiego;
- implementacja iteracyjnej metody Gaussa-Seidl'a;
- implementacja iteracyjnej metody SOR;
- porównania powyższych metod pod kątem złożoności czasowej i obliczeniowej.

Sprawozdanie powinno zawierać

- **Opis metody Jacobiego + kod**
- **Opis metody Gaussa-Seidl’a   + kod**
- **Opis metody SOR + kod**

- **Badanie złożoności obliczeniowej powyższych metod**
    - **złożoność czasowa** rozumiana jako czas trwania wykonania się algorytmu;
    - **złożoność obliczeniowa** rozumiana jako ilość operacji potrzebnych do wykonania w celu uzyskania rozwiązania problemu.
    - Wykres obrazujący szybkość zbieżności metod dla zadanego błędu
    - Wykres obrazujący wpływ współczynnika relaksacji na zbieżność metody SOR

- **Teoretyczny opis warunków jakie mają być spełnione dla każdej z metod aby uzyskać zbieżność.**
- **Proszę znaleźć przykłady macierzy dla których nie wszystkie metody są zbieżne**

Ogólnys chemat rozwiązania liniowego Ax=b metodą iteracyjną

Wprowadzenie macierzy B $$Bx + (A - B)x = b$$

Na podstawie powyższego wzoru otrzymuje się metody iteracyjne (wyróżnia się ich kilka) w postaci:

$$Bx_{i+1} + (A - B)x_i = b$$

Metoda Jacobiego

- wyznaczanie kolejnego przybliżenia rozwiązania realizowane jest zgodnie ze wzorem:

$$x_{i+1}^{k} = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}\, x_i^{j}\right), \quad i = 1,2, \dots ., n$$

Metoda Gaussa-Seidl’a

$$x_{i+1}^{k} = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, x_{i+1}^{j} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\, x_i^{j}\right), \quad a_{kk} \neq 0 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Metoda SOR

- W przypadku metody SOR wyznaczanie kolejnego przybliżenia rozwiązania realizowane jest zgodnie ze wzorem

$$x_{k+1}^{i} = \frac{1}{a_{kk}}\left(a_{kk}x_i^k + \omega b_k - \omega\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, x_{i+1}^{j} - \omega a_{kk}x_i^k - \omega\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\, x_i^j\right),\ \ i = 1,2,\dots,n$$

Przykładowa Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$