MODELOS LINEALES DE FUNCIÓN DISCRIMINANTE

EL ALGORITMO PERCEPTRÓN

Dr. Jorge Hermosillo
Laboratorio de Semántica Computacional

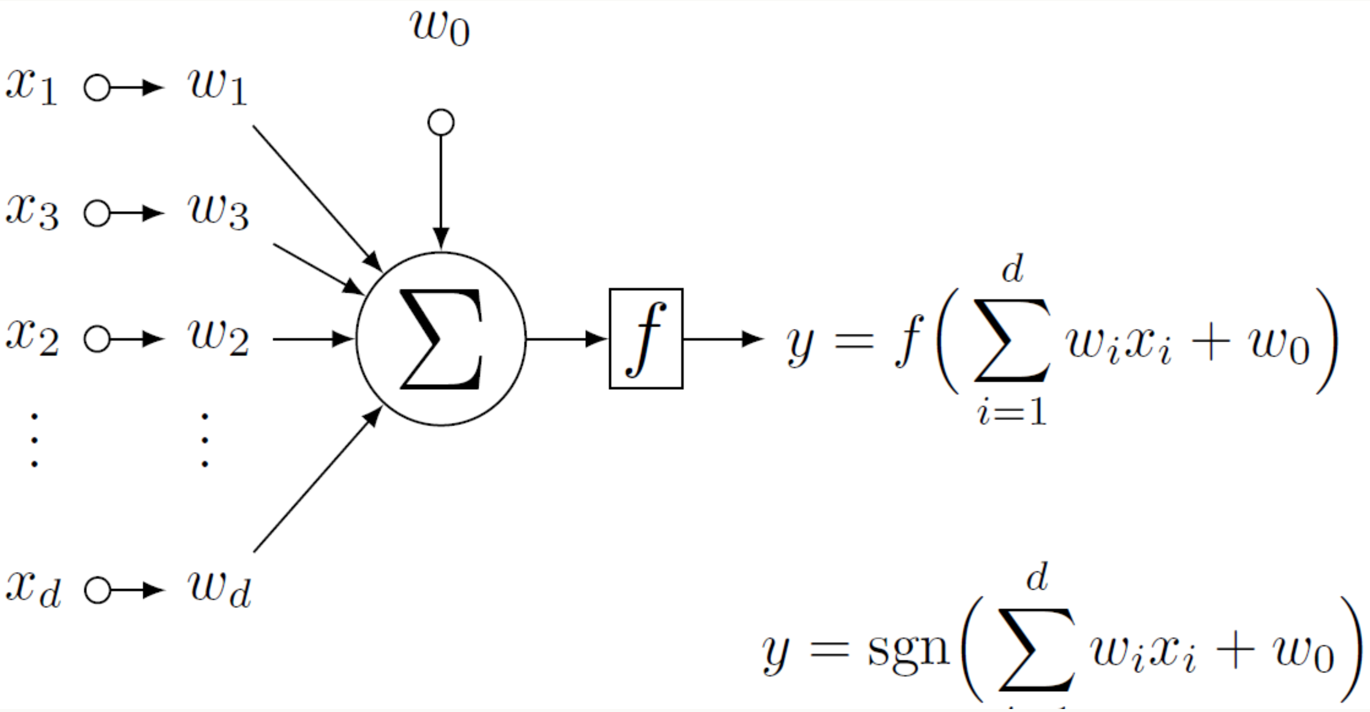
Centro de Investigación en Ciencias

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

LINEAR THRESHOLD UNIT (UNIDAD DE UMBRAL LINEAL)

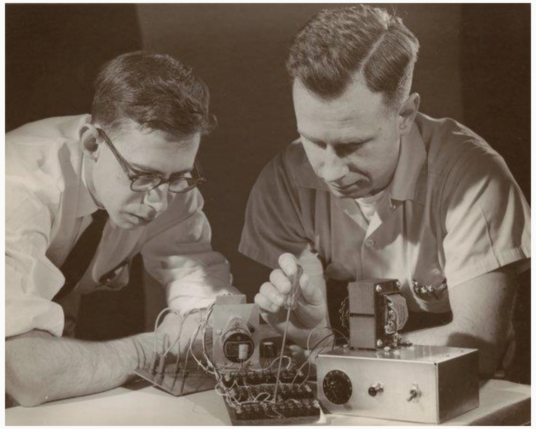
Linear Threshold Unit (LTU)
1943

Warren McCulloch Walter Pitts



Algoritmo perceptrón de aprendizaje

Frank
Rosenblatt
1959



Mark I Perceptrón

Un clasificador de patrones visuales, tenía una capa de entrada (sensorial) de 400 unidades fotosensibles en una cuadrícula de 20x20, modelando una retina pequeña, una capa de asociación de 512 unidades (motores de pasos), cada una de las cuales podría tomar varias entradas excitadoras e inhibitorias, y una capa de salida de 8 unidades. Las conexiones de la entrada a la capa de asociación podían modificarse a través del cableado de la placa de conexión. Las conexiones de la asociación a la capa de salida fueron pesos variables (potenciómetros impulsados por motor) ajustados a través del proceso de entrenamiento de propagación de errores de perceptrón.

UNIDADES DE UMBRAL LINEAL

Ejemplo: Aprobación de Tarjeta de Crédito

Información del solicitante | **Atributos (entrada)**

Edad	23 años	x_1
Género	Hombre	x_2
Salario mensual	\$30,000.00	x_3
⋮	⋮	⋮
Antigüedad de empleo	1 año	
Deuda actual	\$15,000.00	x_d

Decisión (salida) $y = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

Un conjunto de hipótesis simple: el perceptrón

Ejemplo: Aprobación de Tarjeta de Crédito

Para una entrada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ "atributos de un cliente"

Aprobar la TC si $$\sum_{i=1}^{d} w_i x_i > \text{umbral}$$

Denegar la TC si $$\sum_{i=1}^{d} w_i x_i < \text{umbral}$$

Esta fórmula lineal $h \in \mathcal{H}$ puede escribirse como:

$$h(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} w_i x_i\right) - \text{umbral}\right)$$

Un conjunto de hipótesis simple: el perceptrón

Para una entrada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ "atributos de un cliente"

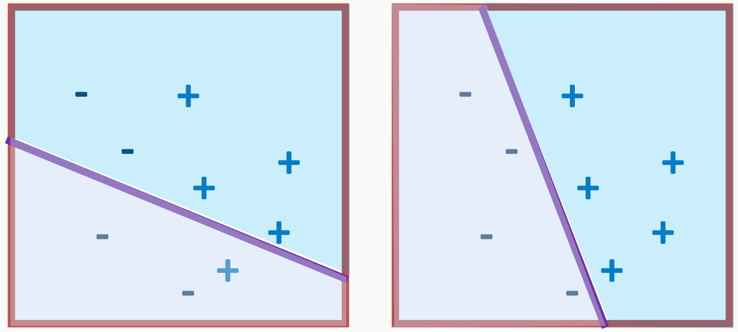
Aprobar la TC si $$\sum_{i=1}^{d} w_i x_i > \text{umbral}$$

Denegar la TC si $$\sum_{i=1}^{d} w_i x_i < \text{umbral}$$

Esta fórmula lineal $h \in \mathcal{H}$ puede escribirse como:

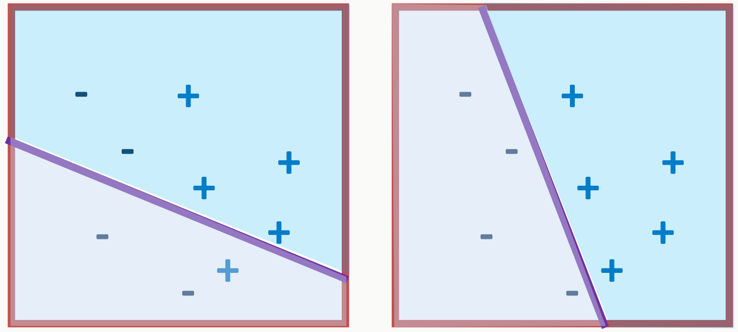
$$h(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} w_i x_i\right) - \text{umbral}\right)$$

$$h(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} w_i x_i\right) - \text{umbral}\right)$$



Datos “linealmente separables”

$$h(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{w}_i x_i\right) - \textbf{umbral}\right)$$



Datos “linealmente separables”

$$h(\mathbf{x}) = \mathrm{sign}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} w_i x_i\right) + w_0\right)$$

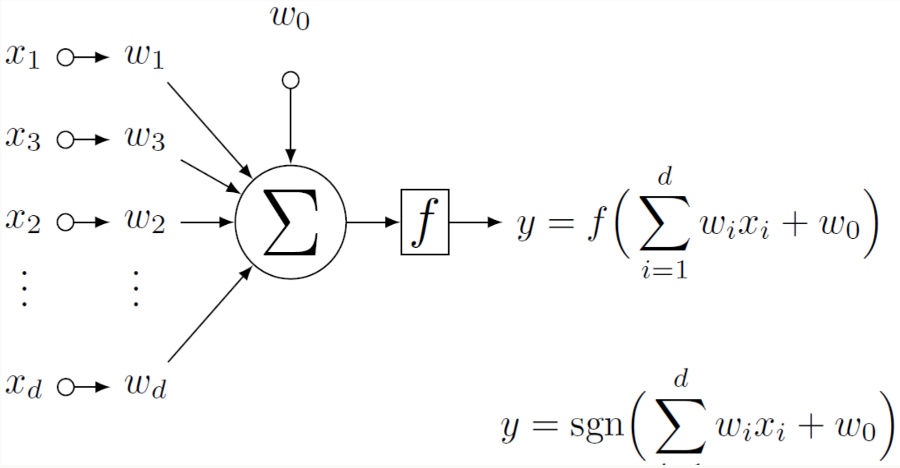
Introducimos una coordenada artificial $x_0 = 1$:

$$h(\mathbf{x}) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=0}^{d} w_i x_i\right)$$

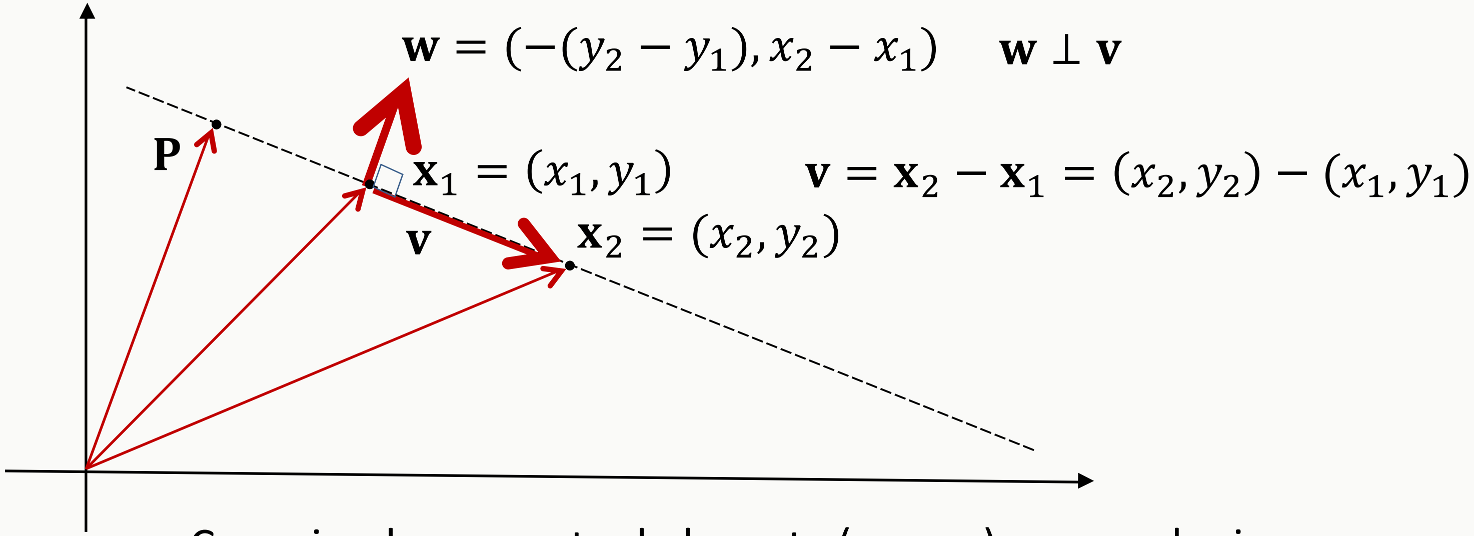
En forma vectorial el perceptrón implementa:

$$h(\mathbf{x}) = \mathrm{sign}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$$

Linear Threshold Unit (LTU)



Interpretación geométrica



Conociendo un punto de la recta (e.g. $\mathbf{x}_1$) y $\mathbf{w}$, cualquier punto $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$ que pertenezca a la recta satisface:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{x}_1) = 0$$

$$(y_1 - y_2, x_2 - x_1) \cdot (x_P - x_1, y_P - y_1) = 0$$

$$(y_1 - y_2)(x_P - x_1) + (x_2 - x_1)(y_P - y_1) = 0$$

$$Ax_P + By_P + C = 0$$

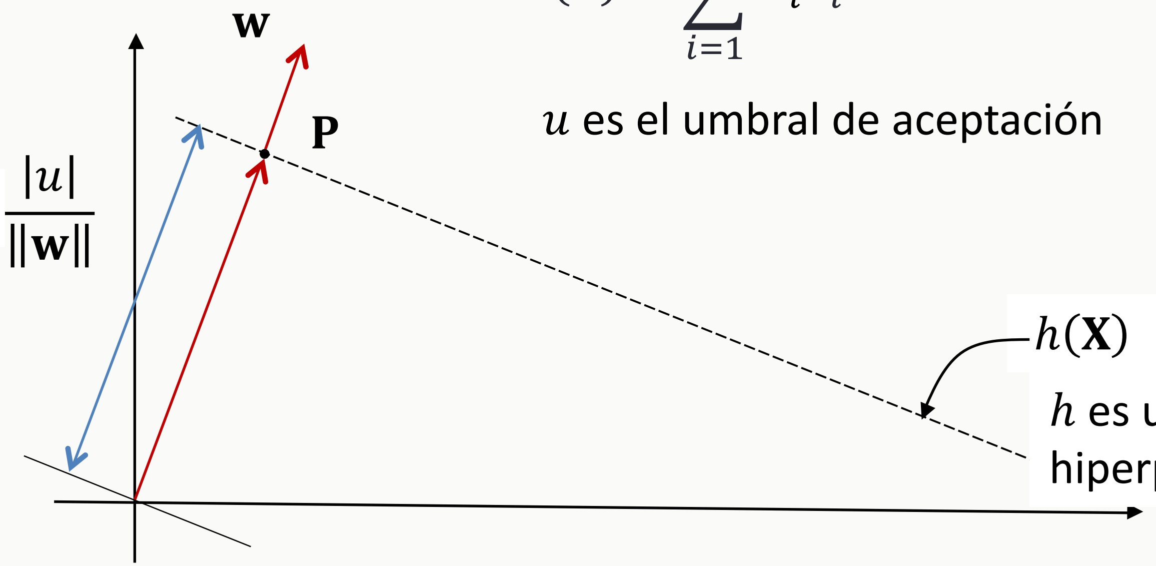
$$A = -\mathbf{w}_1$$
$$B = \mathbf{w}_2$$
$$C = x_1\mathbf{w}_1 - y_1\mathbf{w}_2$$

Interpretación geométrica (3)

$$h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{d} w_i x_i - u = \mathbf{w} \cdot \mathbf{X} - u$$

u es el umbral de aceptación

$$\mathrm{d} = \frac{|u|}{\|\mathbf{w}\|}$$



$h(\mathbf{X})$

h es un hiperplano

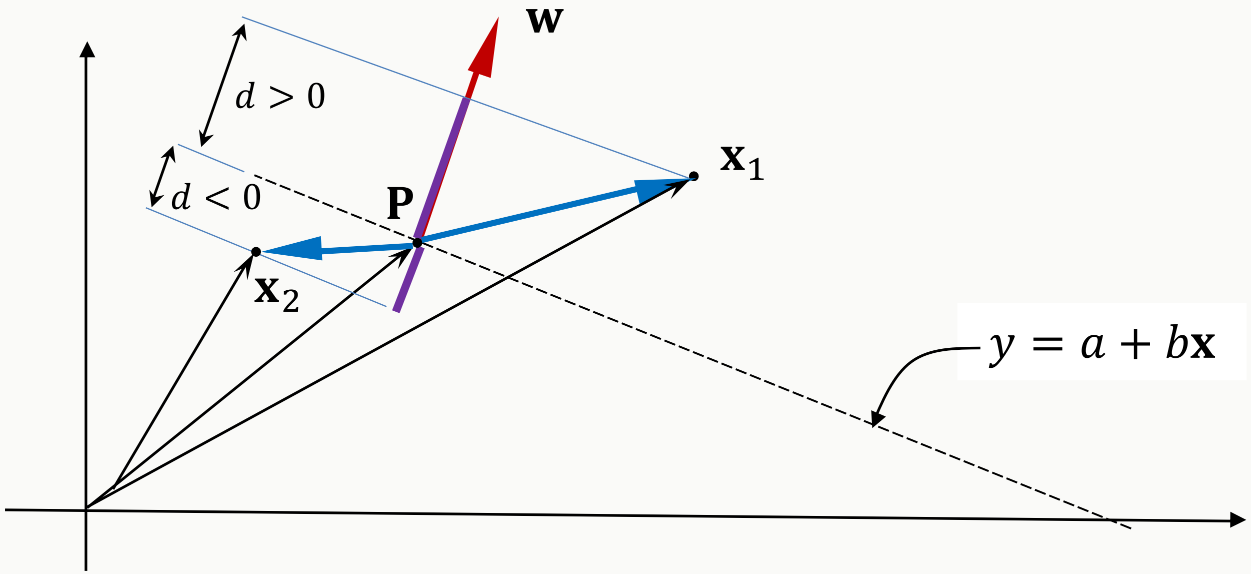
$$h(\mathbf{P}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{P} - u = 0$$

$$\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{P}\| \cos \mathbf{0} = |u|$$

$$\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{P}\| = |u|$$

$$\|\mathbf{P}\| = \frac{|u|}{\|\mathbf{w}\|}$$

Producto punto sobre vector perpendicular a una recta



Para todo punto $\mathbf{x} = (x, y)$ que no está sobre la recta: $y = a + b\mathbf{x}$

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} - \mathbf{P} \rangle = w_x(x - x_p) + w_y(y - y_p) = d \neq 0$$

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{P} \rangle = d > 0$$

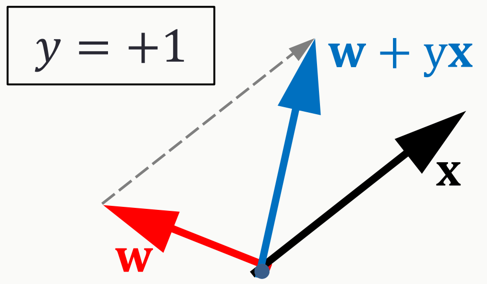
$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{P} \rangle = d < 0$$

donde $\langle \square, \square \rangle$ es el producto punto

Un algoritmo simple de aprendizaje – PLA

El perceptrón implementa:

$$h(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$$

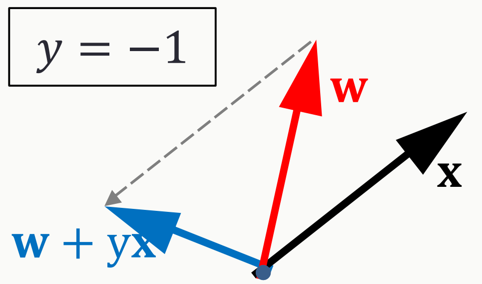


Dado el conjunto de entrenamiento:

$$(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \cdots, (\mathbf{x}_N, y_N)$$

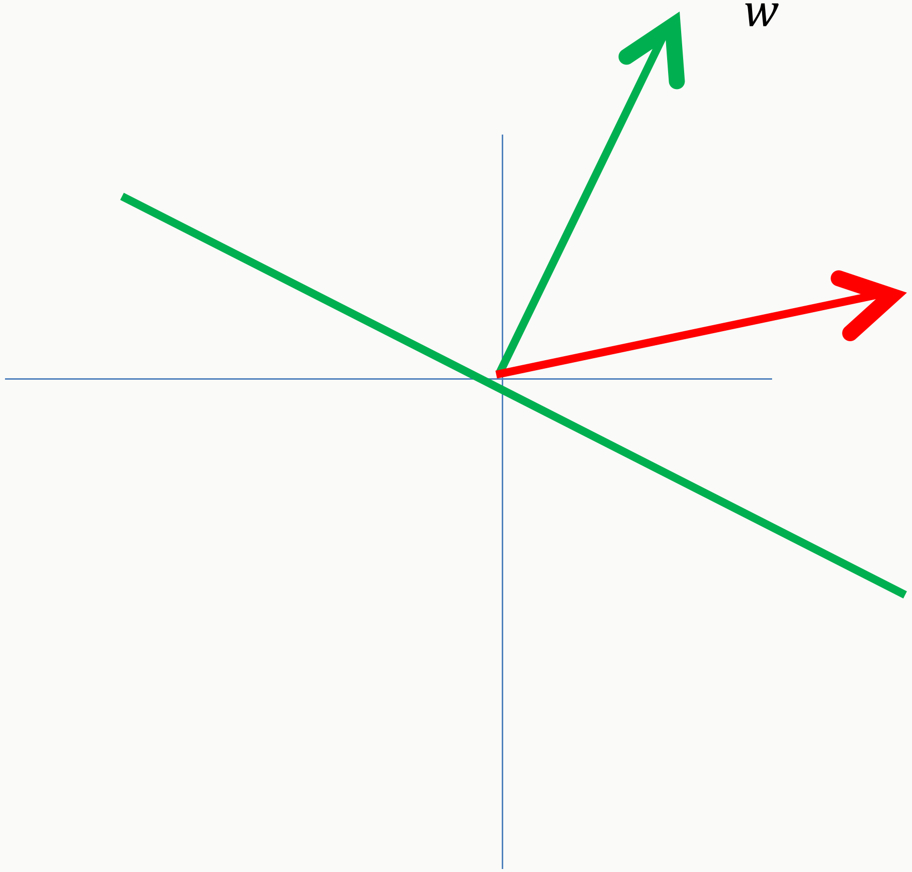
Toma un punto mal clasificado:

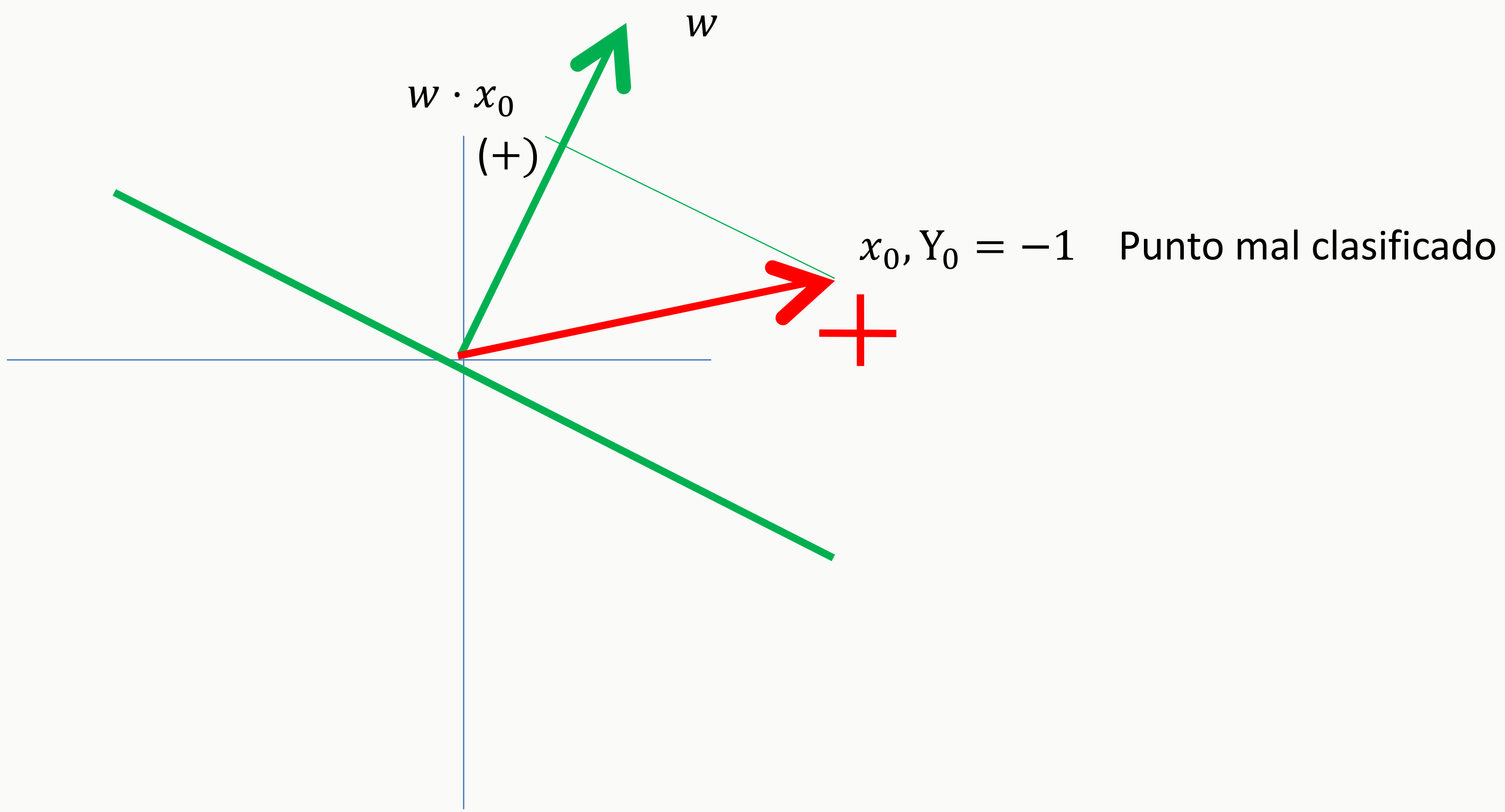
$$\text{sign}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j\right) \neq y_j$$

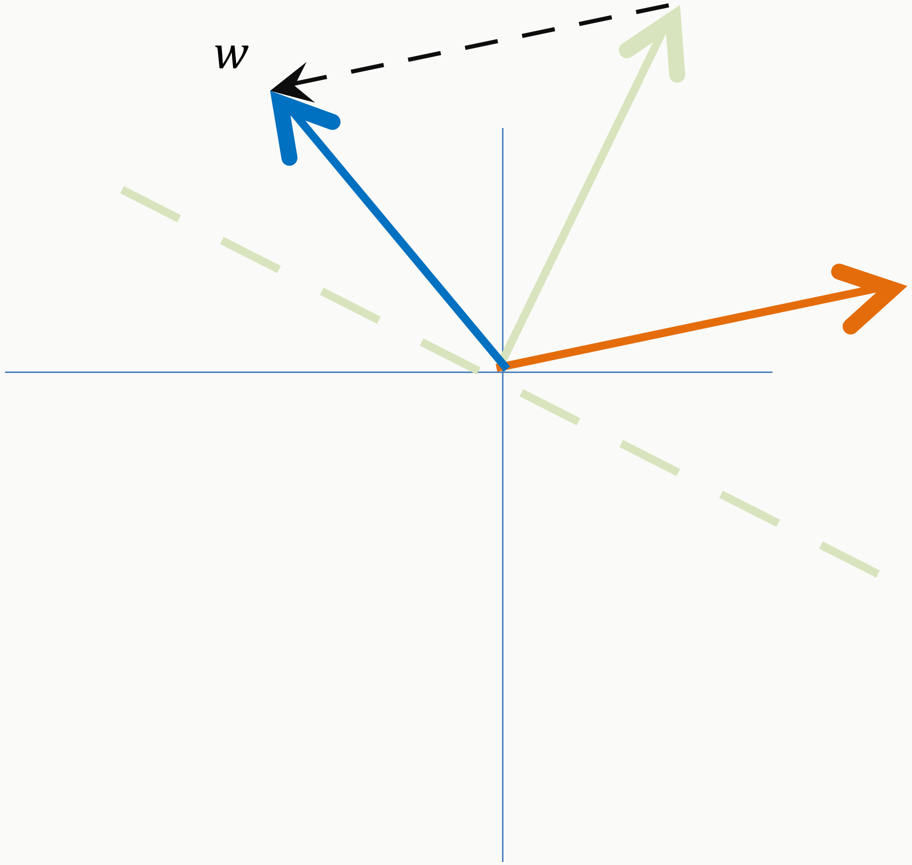


y actualiza el vector de pesos:

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + y_j\mathbf{x}_j$$


w
$x_0, \mathrm{Y}_0 = -1$
Hipótesis de inicio

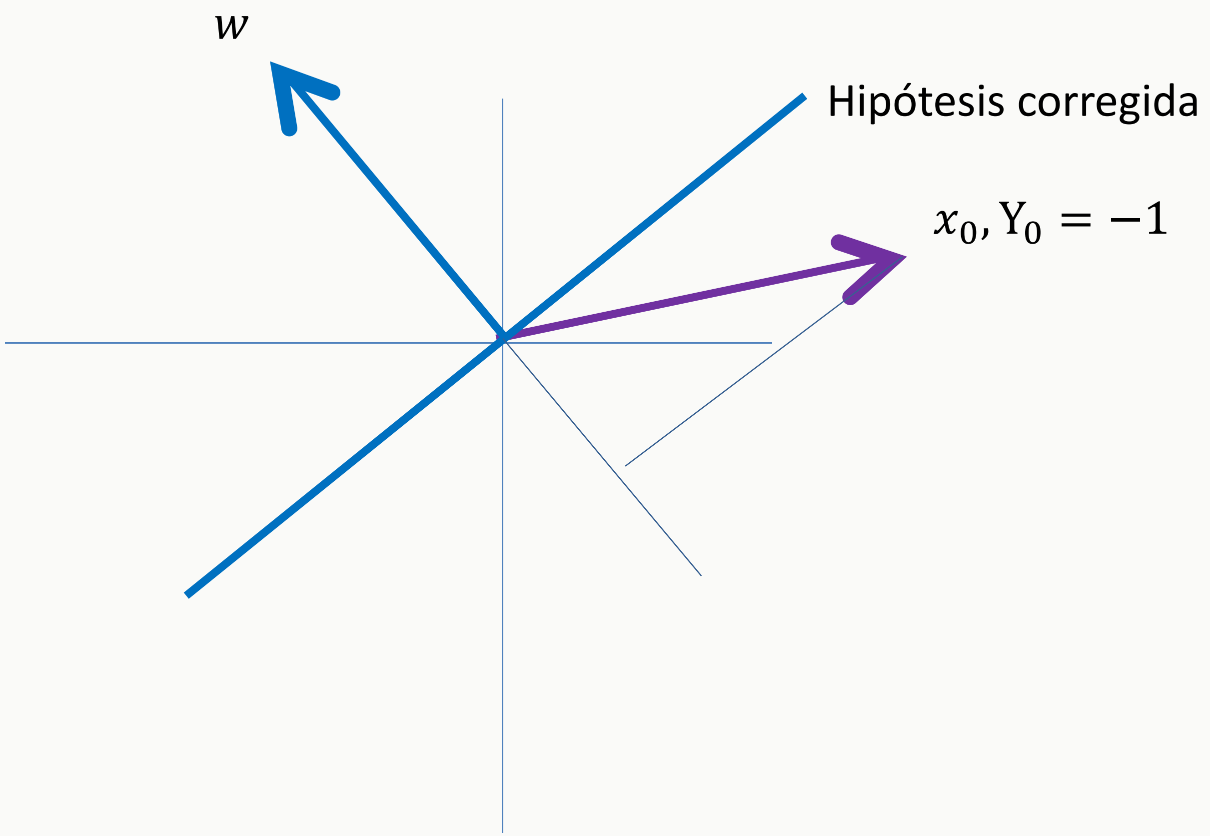

w
$w \cdot x_0$
$(+)$
$x_0, Y_0 = -1$ Punto mal clasificado
$+$

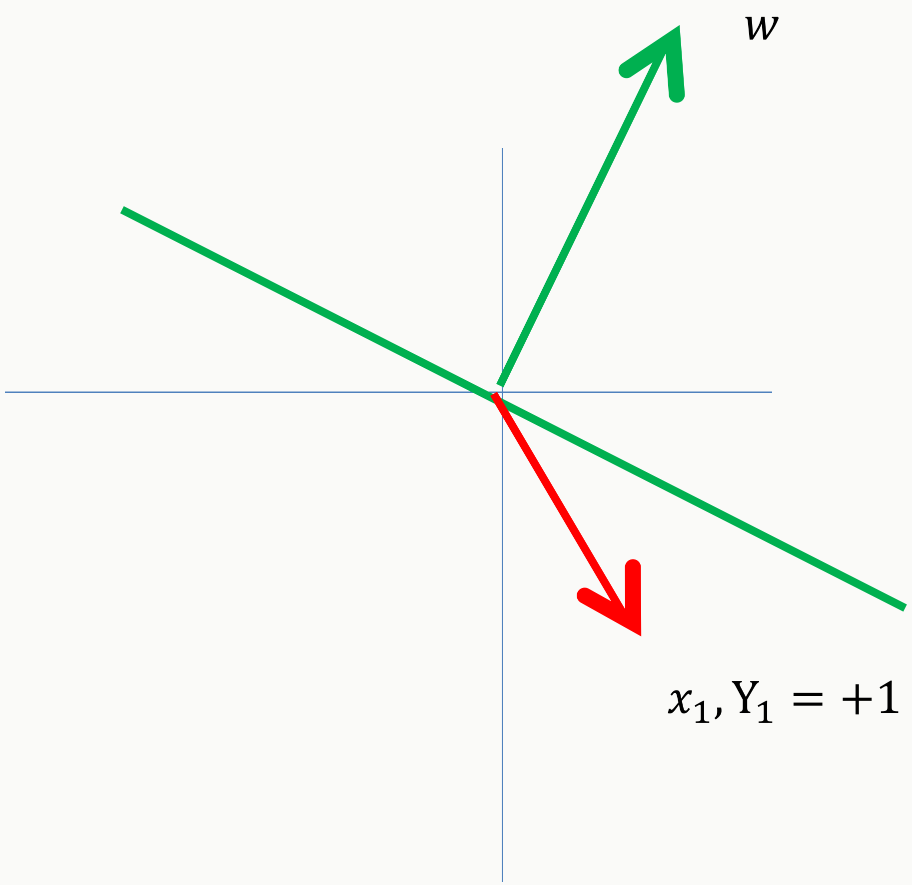


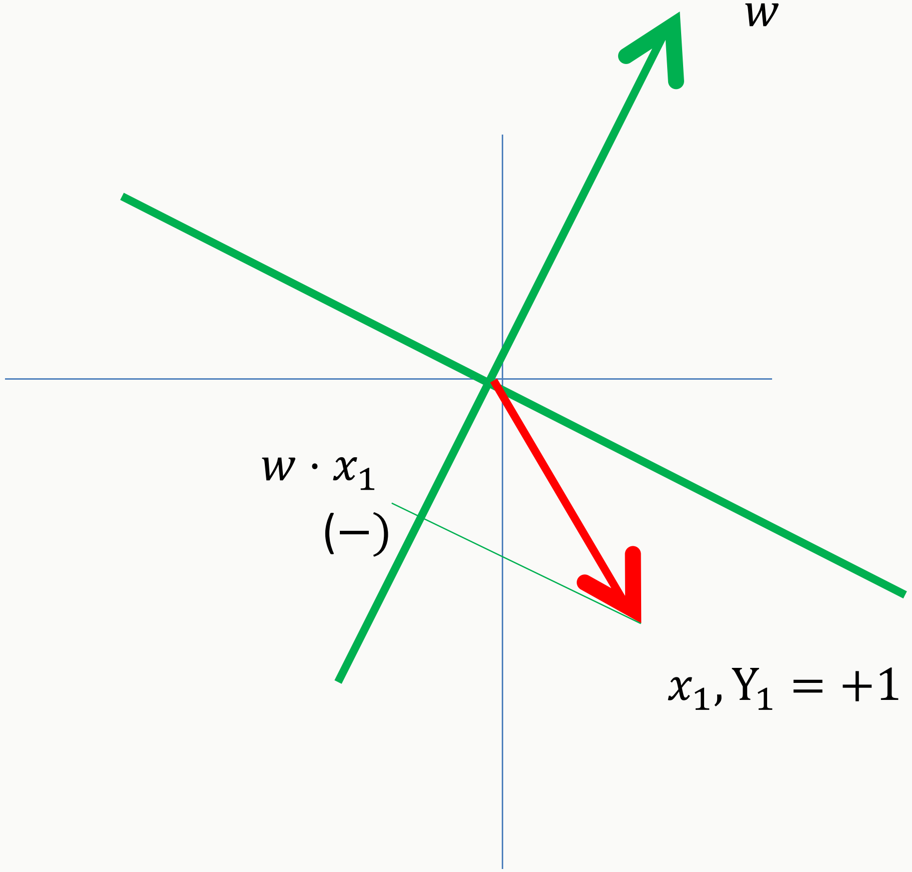
$x_0, \mathrm{Y}_0 = -1$ Punto mal clasificado

$$w = w + Y_0 \cdot x_0$$

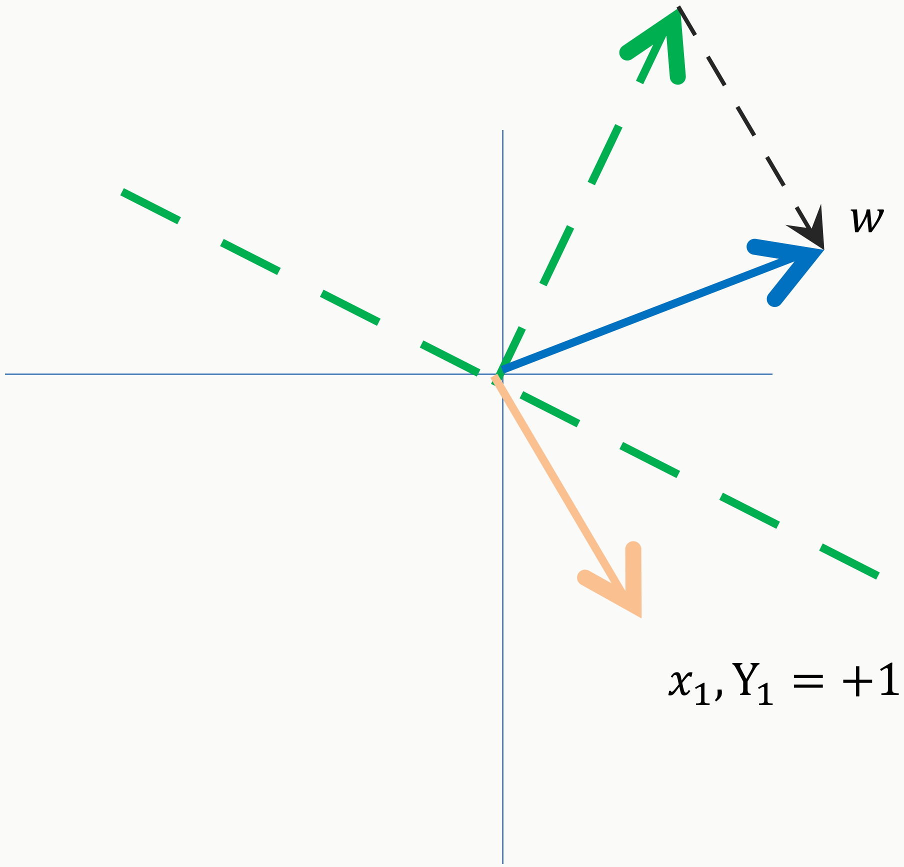
$$w = w - x_0$$


w
Hipótesis corregida
$x_0, Y_0 = -1$


w
$x_1, Y_1 = +1$



Punto mal clasificado

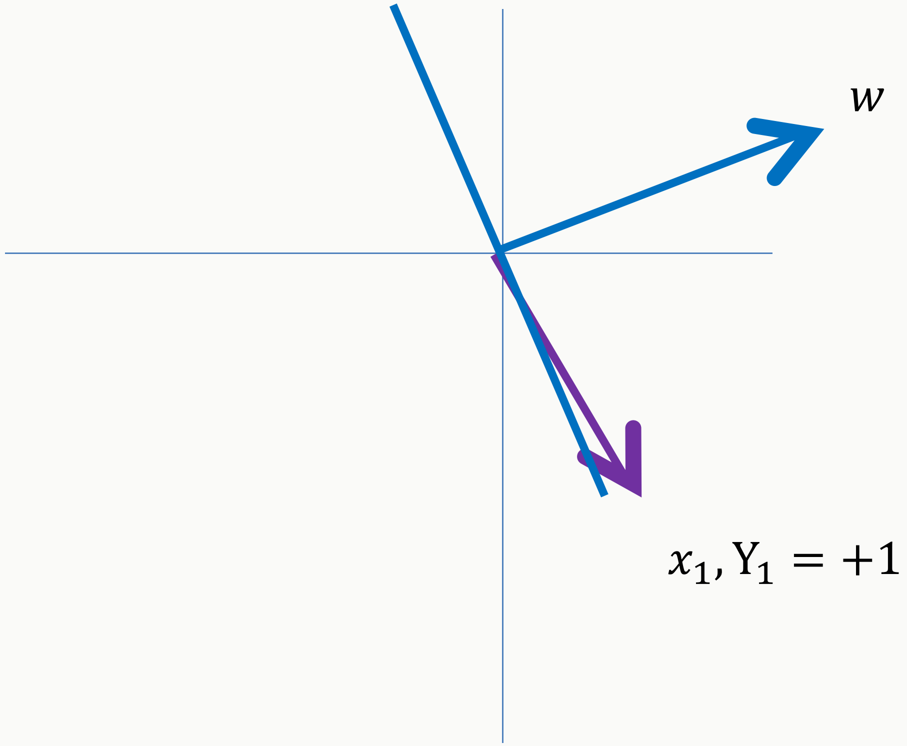


$x_1, Y_1 = +1$

Punto mal clasificado

$$w = w + Y_1 \cdot x_1$$

$$w = w + x_1$$



w
$x_1, Y_1 = +1$

Resumen del algoritmo Perceptron

- Datos de entrada:
  - $\mathbf{X} \coloneqq \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathcal{X}(\text{datos}), \text{con } \mathbf{x}_i \coloneqq (x_1, x_2, \cdots, x_d) \subset \mathbb{R}^d$
  - $\mathbf{y} \coloneqq \{y_1, y_2, \cdots, y_N\} \subset \{\pm 1\}(\text{etiquetas})$
  - *En coordenadas homogéneas:*

    $$\mathbf{X} \coloneqq \{(\mathbf{x}_1, 1), (\mathbf{x}_2, 1), \cdots, (\mathbf{x}_N, 1)\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{d+1}$$
- Parámetros:
  - $\mathbf{w} \coloneqq (w_1, w_2, \cdots, w_d) \subset \mathbb{R}^d$ *(vector de pesos)*
  - $u \in \mathbb{R}$ *(umbral)*
- Función (modelo lineal) en coord. homegéneas:
  - $y_i = \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle)$
  - $\mathbf{x}_i \coloneqq (x_1, x_2, \cdots, x_d, 1) \subset \mathbb{R}^{d+1}$,
  - $\mathbf{w} \coloneqq (w_1, w_2, \cdots, w_d, w_0) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ *donde* $w_0 = u$

Algoritmo de Aprendizaje Perceptron

Entrada: *Datos etiquetados de entrenamiento* $\mathbf{X}$ *en coordenadas homogéneas*

Salida: *Vector de pesos* $\mathbf{w}$ *que define al clasificador*

$\mathbf{w} = \mathbf{0}$ *#Otras inicializaciones son posibles*

$converge = \boldsymbol{Falso}$

mientras $converge == \boldsymbol{Falso}$:

$converge = \boldsymbol{Verdadero}$

para i **en** $|\mathbf{X}|$:

si $\mathrm{y_i}\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle \leq 0$ **entonces**: #xi mal clasificado

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + y_i \eta \mathbf{x}_i$ #$0 < \eta \leq 1$ es la tasa de aprendizaje

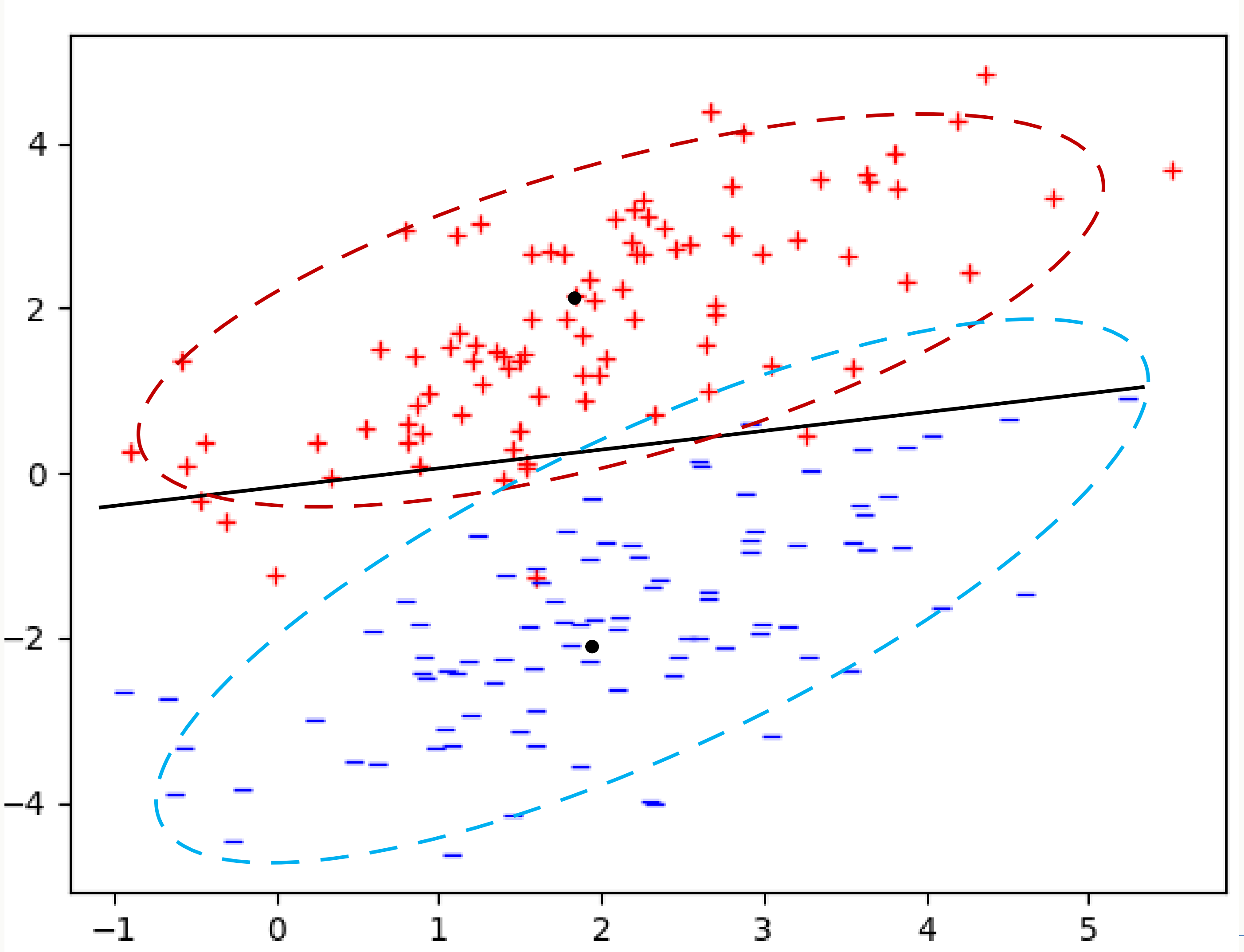
$converge = \boldsymbol{Falso}$

fin

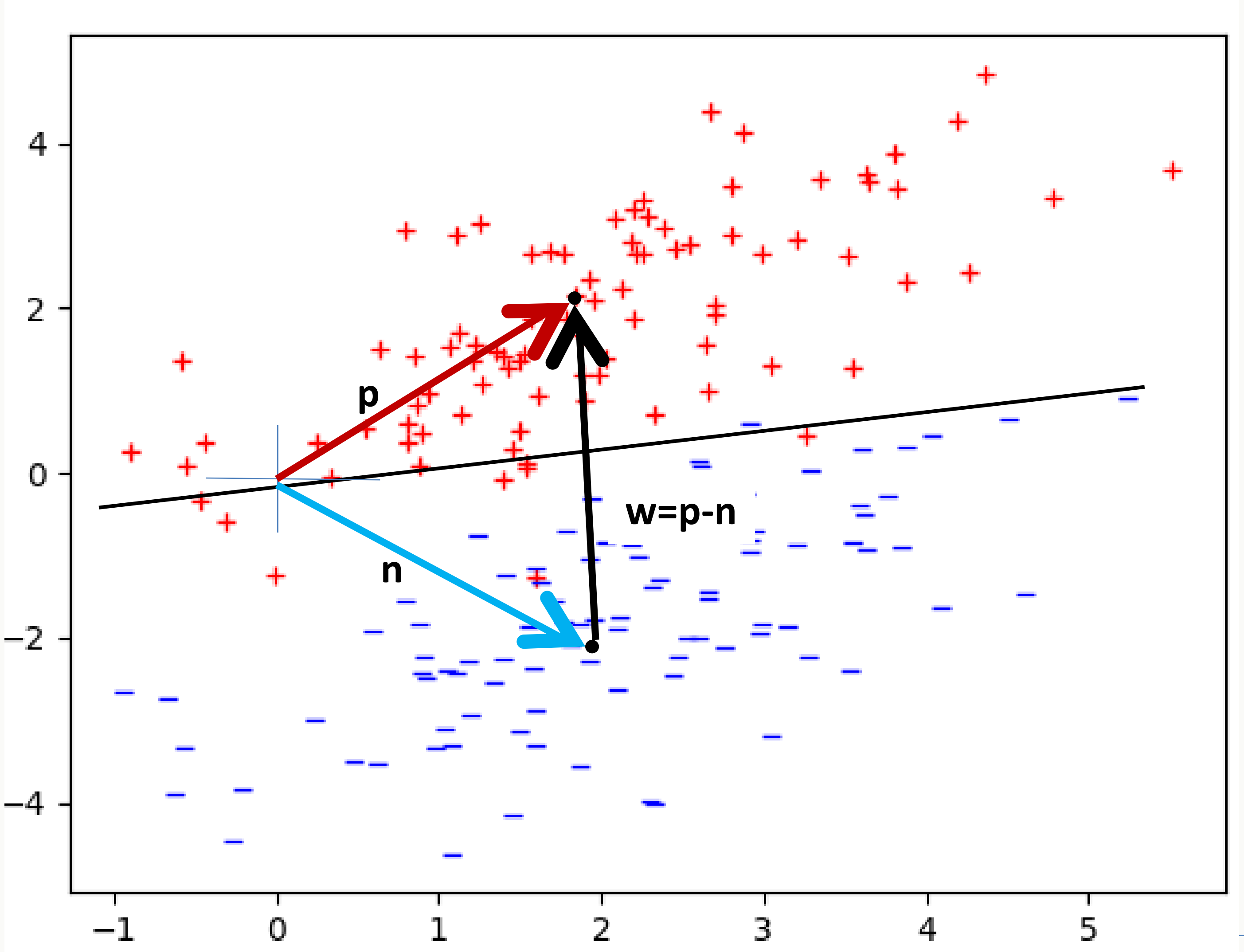
fin

fin

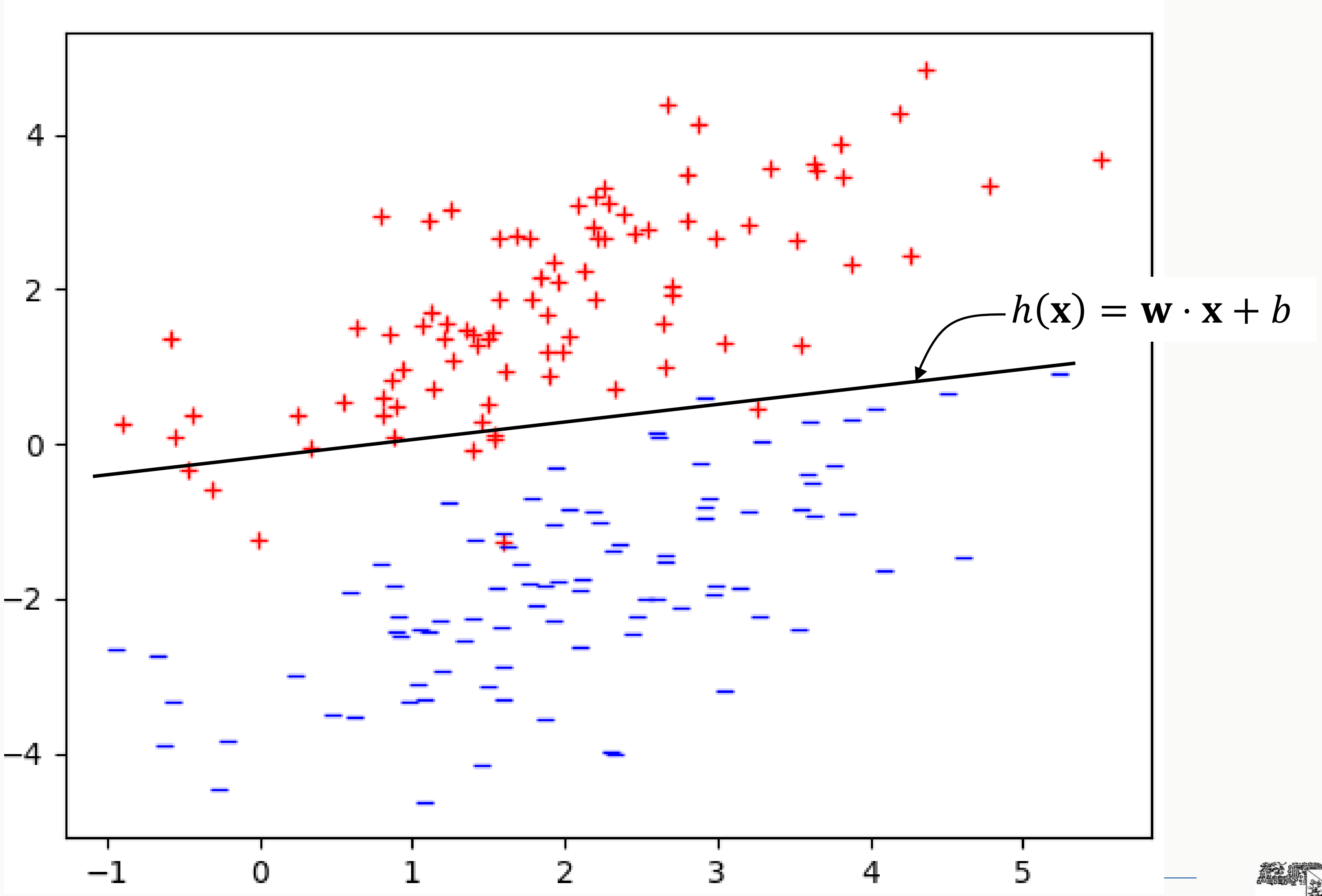
Centroides de nubes de puntos

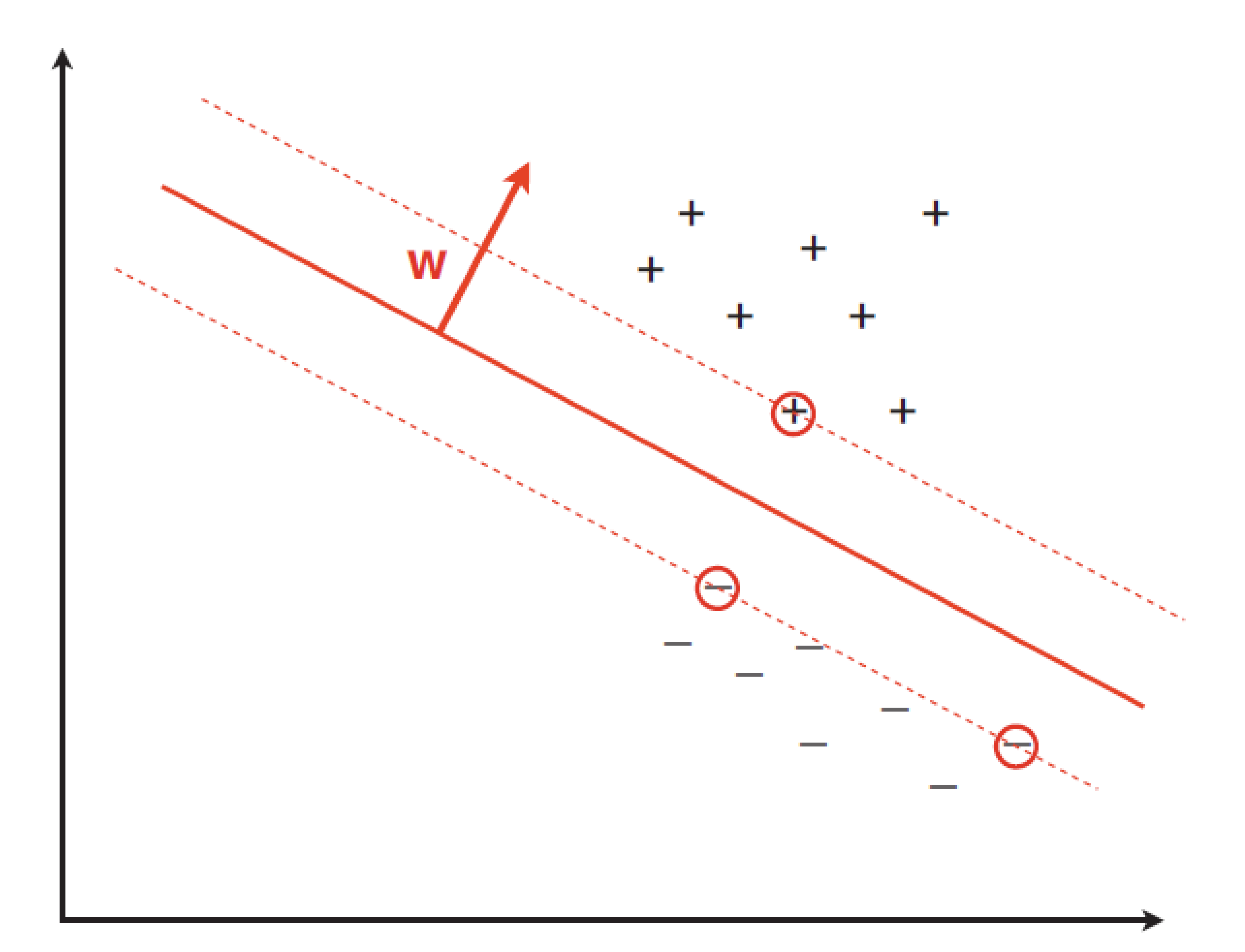


Una hipótesis alternativa a partir de los centroides



Datos linealmente separables





Centro de Investigación en Ciencias

Universidad Autónoma del Estado de Morelos