

每日一题合集

李衡岳、程昊一、门宇翎、李东宸、王一丁、李政毅

目录

1	关于选题人的说明	2
2	七年级第一学期	3
	每日一题(1.1)	3
	每日一题(1.2)	3
	每日一题(2.1)	4
	每日一题(2.2)	5
	每日一题(3.1)	5
	每日一题(3.2)	5
	每日一题(4.1)	6
	每日一题(4.2)	6
	每日一题(5.1)	6
	每日一题(5.2)	7
	每日一题(6.1)	7
	每日一题(6.2)	7
3	七年级第二学期	8
	每日一题(7.1)	8
	每日一题(7.2)	8
	每日一题(8.1)	9
	每日一题(8.2)	9
	每日一题(9.1)	10
	每日一题(9.2)	10
	每日一题(10.1)	10
	每日一题(10.2)	10
	每日一题(11.1)	11
	每日一题(11.2)	11

1 关于选题人的说明

1.每日一题 $((3n-2).1)$ 与 $((3n-2).2)$ 由李衡岳、程昊一选题($n \in \mathbb{N}_+, n \leq 3$), 每日一题 $((3n-2).1)$ 与 $((3n-2).2)$ 至少由门宇翎选题($n \in \mathbb{N}_+, n > 3$);

每日一题 $((3n-1).1)$ 与 $((3n-1).2)$ 由门宇翎、李东宸选题($n \in \mathbb{N}_+, n \leq 3$), 每日一题 $((3n-1).1)$ 与 $((3n-1).2)$ 至少由李东宸选题($n \in \mathbb{N}_+, n > 3$);

每日一题 $((3n).1)$ 与 $((3n).2)$ 由王一丁、李政毅选题($n \in \mathbb{N}_+, n \leq 2$), 每日一题 $((3n).1)$ 与 $((3n).2)$ 至少由李政毅选题($n \in \mathbb{N}_+, n > 2$).

所有的每日一题文档(包括此文档)及答案均为程昊一制作.

2.从每日一题(4.1)开始,记录每道题的供题者.

2 七年级第一学期

每日一题(1.1)

1.有一副27张的多米诺骨牌,现将其放入 4×14 的方格中,每张骨牌有两个方格的大小,并将此方格的右上角与左下角去掉.证明:在不损伤骨牌的情况下,无法将54个方格完全铺满.

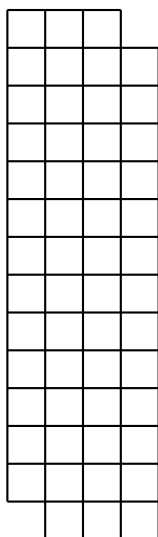


图 1: 每日一题(1.1):第一题图

2.(1)证明: $\sqrt{2}$ 不是有理数.

(2)证明:当 n 不为完全平方数时, \sqrt{n} 是否为无理数?

每日一题(1.2)

1.如图,求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ 的值.

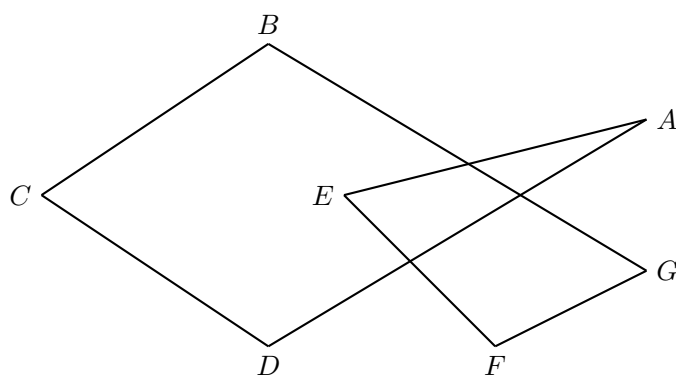


图 2: 每日一题(1.2):第一题图

2.用4个大小相等的方格可以组成7种图案(不计旋转),如图所示.证明:不能用他们密铺一个4行7列的网格.

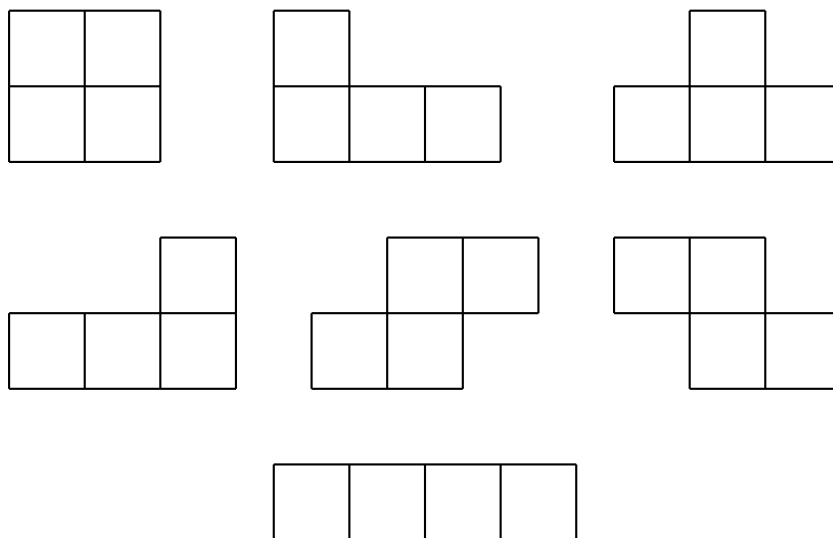


图 3: 每日一题(1.2):第二题图

每日一题(2.1)

1.在实数范围内解方程:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

2.已知 a, b, c 为一个三角形的三边长,且满足

$$a^2 + b^2 + c^2 + 338 = 10a + 24b + 26c$$

试判断此三角形的形状.

每日一题(2.2)

1.若方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

的解为 $(x, y) = (3, 4)$,求方程组

$$\begin{cases} 3a_1x + 2b_1y = 5c_1 \\ 3a_2x + 2b_2y = 5c_2 \end{cases}$$

的解.

2.已知关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} 2x - ay = 6 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

的解为整数, a 为正整数,求 a 的值.

每日一题(3.1)

1.已知 a, b, c 为实数,且 $a - b = 4, ab + c^2 + 4 = 0$,求 $a + b$ 的值.

2.已知 $a + \frac{1}{a} = 5$,求 $\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2}$ 的值.

每日一题(3.2)

1.求所有这样的素数,它加上10或14后,仍为素数.

2.证明:从1至100(包括1和100)中任选51个数,其中必有两个数互素.

思考:题中的“51”还可以更小吗?

3.将平面上所有的点都染成红、蓝两色,证明:存在一条长为1的线段,它的端点同色.

思考:若平面不为全红或全蓝,是否总存在一条长为1的线段,其端点异色?若将平面染成三种颜色,是否仍然存在长为1的端点同色的线段?

每日一题(4.1)

- 1.用纯数学的方法证明圆锥的体积公式

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(李衡岳供题)

- 2.求所有的整数 x, y ,使得 $x^2 + xy + y^2 = 1$.

(程昊一供题)

每日一题(4.2)

- 1.用含 n 的代数式表示 $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$,其中 n 为正整数.

(程昊一供题)

- 2.平面上有25个点,任意三点之中必然存在两个点,它们的距离小于1.证明:必然能找到13个点,它们位于半径为1的圆中.

(程昊一供题)

每日一题(5.1)

- 1.若 n 为正整数,且 $2^n - 1$ 为素数,证明: n 也为素数.

(门宇翎供题)

- 2.如图,两个同心圆构成的圆环被均匀分割成7份,联通中间的校园共8个区域.若要给这8个区域着色,至少要用几种颜色,才能使相邻区域染不同的颜色?

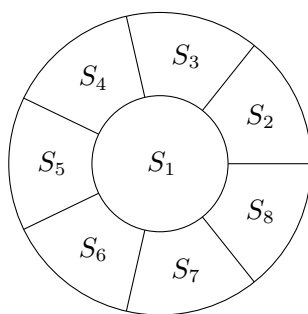


图 4: 每日一题(5.1):第二题图

(李东宸供题)

每日一题(5.2)

1. 若 n 为正整数, $2^n + 1$ 为素数,求证: n 为2的幂,即存在自然数 k ,使得 $n = 2^k$.
(门宇翎供题)

2. 将正七边形的七个顶点染红、蓝两色,证明必存在一个顶点均同色的等腰三角形.
(李东宸供题)

每日一题(6.1)

1. 求满足 $5x - 2[x] = -8$ 的所有 x ,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.
(王一丁供题)

2. 在 2003×2003 的小方格中,随意写上1或-1,然后将每一列中的乘积写在其下方,将每一行中的乘积写在其右边,这样得到4006个数,证明:这4006个数的和不等0.
(李政毅供题)

每日一题(6.2)

1. 证明 $3^{2012} + 4^{2013}$ 是5的倍数.
(王一丁供题)

2. 证明:不存在整数 x, y ,使得 $x^2 + y^2 = 2015$.
(李政毅供题)

3 七年级第二学期

每日一题(7.1)

1.我们定义:如果 $a(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的 b 次幂等于 N ,那么 b 称为以 a 为底 N 的对数,记作

$$\log_a N = b.$$

证明:若 $a, b > 0, a, b \neq 1$,则

$$(1) \log_a x + \log_a y = \log_a xy \quad (x, y > 0);$$

$$(2) \log_a x^b = b \log_a x \quad (x > 0);$$

$$(3) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x > 0);$$

$$(4) \log_{a^x} b^y = \frac{y}{x} \log_a b \quad (x \neq 0).$$

(程昊一供题)

2.有 n 个人,每个人的生日是完全随机且互不相关的.当 n 不小于多少时,存在两个生日相同的人的概率不小于 $\frac{1}{2}$ (假设一年有365天)?

(李衡岳供题)

每日一题(7.2)

1.求所有的整数 x, y ,满足方程

$$(x^2 - y^2)^2 = 16y + 1.$$

(程昊一供题)

2.我们假设有一个村庄,村庄里有很多户人家.每一户人都有一条狗,可能是正常的狗,也可能是疯狗.如果一个人发现自己的狗是疯狗,那么他会在当天晚上把自己的狗击毙.每一个人只可以判断其他人的狗是否为疯狗,每两个人之间也不能互相交流.一天,一位游客向全部的人宣布:“村庄里有疯狗!”当天晚上,没有人击毙自己的狗;第二天亦是如此;第三天有人击毙了自己的狗.问:村庄里有几条疯狗?

(李衡岳供题)

每日一题(8.1)

1. 阅读材料:

对于形如 $\sqrt{m \pm \sqrt{n}}$ 的复合二次根式, 我们可以采取以下的方式化简:

(1) 找到合适的 a 和 b , 使得 $a + b = m$, $4ab = n$.

(2) 将原式做变形:

$$\begin{aligned}\sqrt{m \pm \sqrt{n}} &= \sqrt{a + b \pm \sqrt{4ab}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \pm 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} \\ &= |\sqrt{a} \pm \sqrt{b}|.\end{aligned}$$

(3) 即得答案: $\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = |\sqrt{a} \pm \sqrt{b}|$.

化简:

(1) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$;

(2) $\sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$.

(李东宸供题)

2. 证明: 若 a, b 是大于1的正整数, 则 $a^4 + 4b^4$ 是合数.

(门宇翎供题)

每日一题(8.2)

1. 若 x, y 均为实数, 且满足方程

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0,$$

求 $x + 2y$ 的值.

(李东宸供题)

2. 某会议共有30名议员, 每两个人之间互相的关系为朋友或政敌. 每个人都有且仅有6个政敌. 每3个人组成一个委员会. 若一个委员会内的三个人的关系均为朋友或政敌, 则称这个委员会为“好委员会”. 求“好委员会”的数量.

(门宇翎供题)

每日一题(9.1)

1. 已知:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 \quad (a, b, c \neq 0),$$

求证: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

2. 已知 $a - b = 4$, $ab + c^2 + 4 = 0$, 求 $a + b$ 的值.

每日一题(9.2)

1. 若 $m^2 = n + 2$, $n^2 = m + 2$ ($m \neq n$), 求 $m^3 - 2mn + n^3$ 的值.

2. 已知 $a + b - c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 27$, 求 $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}$ 的值.

每日一题(10.1)

1. 若实数 x, y, z 满足

$$x + y = 4, |z + 1| = xy + 2y - 9,$$

求 $x + 2y + 3z$ 的值.

2. 若 n 为整数, 证明: $n^2 + n + 1$ 不是完全平方数.

每日一题(10.2)

1. 已知 x, y, z 为实数, 且满足

$$x + 2y - 5z = 3, x - 2y - z = -5,$$

求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.

(门宇翎供题)

2. 因式分解:

$$(x^2 + 2y^2)^4 + 64y^8.$$

(程昊一命题)

每日一题(11.1)

1. 已知 a, b, c 互不相等, 且满足

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{b+c}{2(b-c)} = \frac{c+a}{3(c-a)},$$

求证:

$$8a + 9b + 5c = 0.$$

(李东宸供题)

2. 高斯函数 $[x]$, 也称取整函数, 即 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 则下面的命题中:

- (1) $[x] + [-x] = 0$;
- (2) 当 $-1 \leq x < 1$ 时, $[x+1] + [-x+1]$ 的值为0, 1, 2;
- (3) $[x] + [y] = [x+y]$;
- (4) 若 $x \neq 1$, 则 $[x] \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 0$;

哪些是正确的? 哪些是不正确的?

(李东宸供题, 程昊一改编)

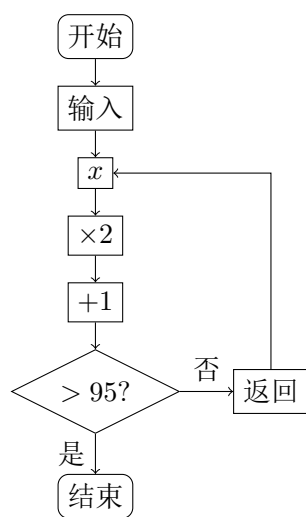
每日一题(11.2)

1. 若 a, b 满足

$$3a^2 + 5|b| = 7, s = 2a^2 - 3|b|,$$

求 s 的取值范围.

2. 运行程序如图所示, 规定: 从“输入一个值 x ”到“结果是否 > 95 ”为一次程序操作. 如果程序运行了3次后停止, 求 x 的取值范围.



第二题图