多维正方体电阻网络
体对角线之间的等效电阻

2024届励志AQ班　程昊一

关于作者

程昊一,男,2009年生于洛阳,现(2022年)就读于西安市铁一中学分校,擅长数学与物理,参加数学竞赛,对此有浓厚的兴趣,并且擅长编程算法.

多维正方体电阻网络体对角线之间的等效电阻

2024届励志AQ班　程昊一

[摘要]　在学习了正方形和正方体电阻网络之间的等效电阻之后,一般的n维的情况是什么样子的?正方形或正方体是二维或三维的情况,那我们可以尝试把结果推广到n维的情况.这篇文章,我们利用“等势法”化简电路，然后利用代数与集合的语言描述$\mathbb{R}^n$,利用组合数学计算每一类边的数量,从而解决问题.

[关键词]　多维正方体　等效电阻　电阻网络　$\mathbb{R}^n$

1　电阻的基本知识

由[1]与[2],我们可以得知以下基本知识:

1.1　电阻的串并联

若A,B之间串联了n个电阻,阻值分别为$R_1,R_2,\cdots,R_n$,那么AB之间的等效电阻R满足下列关系式:

$$R=\sum_{i=1}^{n}R_i. \tag{1}$$

若A,B之间并联了n个电阻,阻值分别为$R_1,R_2,\cdots,R_n$,那么AB之间的等效电阻R满足下列关系式:

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}. \tag{2}$$

特别地,若$R_1=R_2=\cdots=R_n=R_0$,那么

$$R=\frac{1}{n}R_0. \tag{3}$$

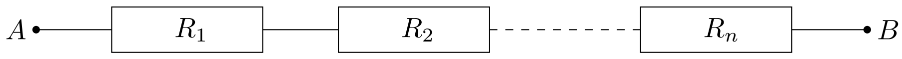

图 1: 电阻的串联

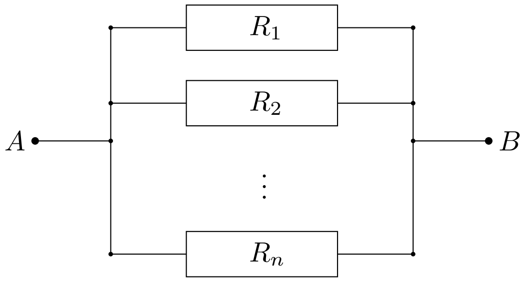

图 2: 电阻的并联

1.2 等势法

我们发现,在电路中,有些点是对称的,它们的地位(电势)是完全相同的,那么我们可以在它们之间任意连接导线或电阻,也可以将它们之间的导线或电阻拆除.例如在图3中,A与B是等势的,所以我们可以将AB之间的电阻拆除,从而化简电路.

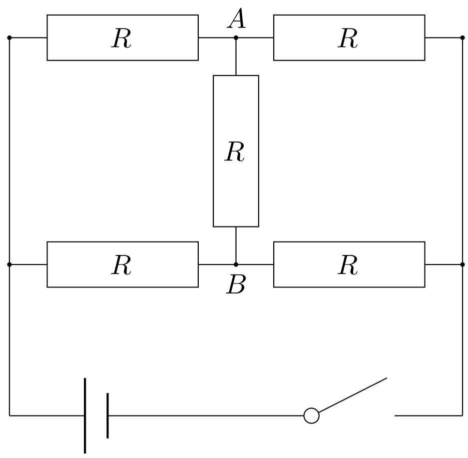

图 3: 等势法

2 一维、二维与三维的情况

一维的情况很简单,就是一根阻值为R的电阻,如图4所示.

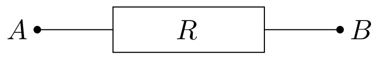

图 4: 一维的情况

二维的情况就是一个正方形,如图5所示.我们也能很容易地算出来AB之间的等效电阻为R.

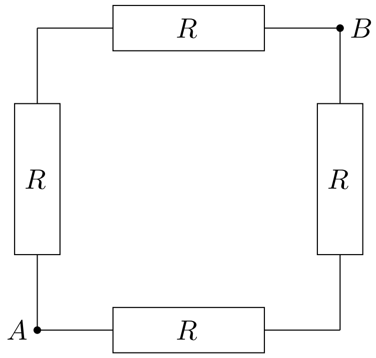

图 5: 二维的情况

下面我们来研究三维的情况.

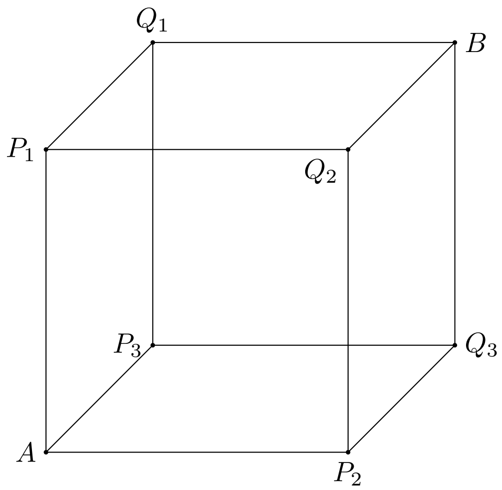

图 6: 三维的情况(图中未画出电阻)

我们知道,图中的P_1, P_2, P_3是一组等势点,Q_1, Q_2, Q_3也是一组等势点.所以我们把电路化简为如图7所示结构.

经过轻易的计算,得到AB之间的等效电阻为$\frac{R}{3}+\frac{R}{6}+\frac{R}{3}$,即$\frac{5}{6}R$.

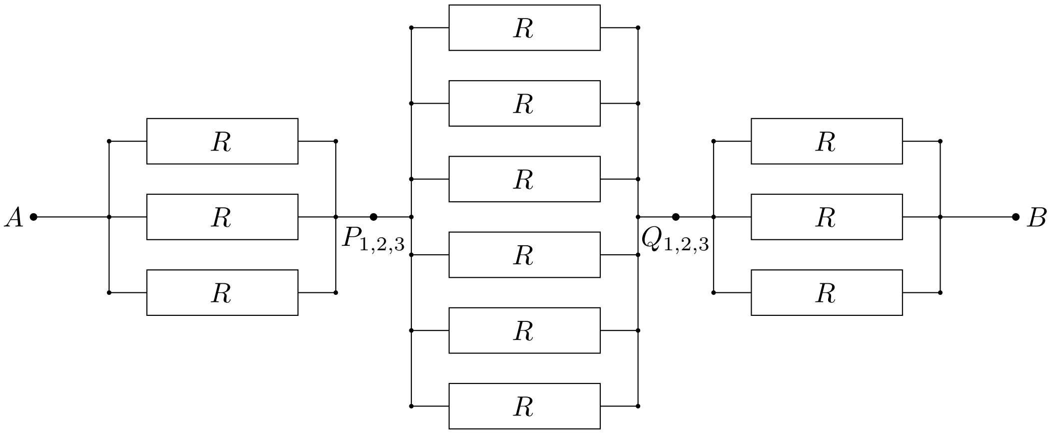

图 7: 三维情况的化简

3 高维空间的代数表示

显然,直观的几何无法描述高维空间,那么我们采用代数的方法解决.我们在$\mathbb{R}^n$中建立空间直角坐标系,坐标轴分别为$x_1, x_2, \cdots, x_n$.那么,我们可以列出在这个空间中的某一个正方体的所有顶点:$A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$,其中$x_i = 0$或$1, i = 1, 2, \cdots, n$.那么与$A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$相邻的点有n个,分别为

$$A_{(1-x_1,x_2,\cdots,x_n)};$$

$$A_{(x_1,1-x_2,\cdots,x_n)};$$

$$\cdots$$

$$A_{(x_1,x_2,\cdots,1-x_n)}.$$

对于一个点$A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$,与之相邻(即在一条棱上)的顶点可以通过将$x_1, x_2, \cdots, x_n$中的某一个1变为0,或将某一个0变为1得到.因此,将与点$A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$相连的所有棱所组成的集合记作 $E_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$,即

$$E_{(x_1,\cdots,x_n)} = \{\,\overline{A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}A_t}\,\big|\, t = (x_1, \cdots, 1-x_i, \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

将所有的顶点所组成的集合记作V,即

$$V = \{\,A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\,\big|\, x_i = 0\text{或}1, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

将所有的棱所组成的集合记作E,即

$$E = \bigcup_{A\in V} E_A.$$

4 问题解决

设在$\mathbb{R}^n$中有一个立方体,其一组对顶点为$A_{(0,0,\cdots,0)}$与$A_{(1,1,\cdots,1)}$,每一条棱上都有一个电阻,其阻值为R.下面,求$A_{(0,\cdots,0)}$与$A_{(1,1,\cdots,1)}$之间的等效电阻.

首先我们将点分为如下$(n+1)$类:

$$S_k=\left\{A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i=k\right.\right\},k=0,1,\cdots,n.$$

不难证明,$|S_k|=\mathrm{C}_n^k$.容易发现,对于每一个$S_i(i=0,1,\cdots,n)$,其中的每一个点都是等势点.那么我们可以将每一个S_i中的点都用导线连接在一起.这样,整个电路就变成了如图8所示的简单结构:

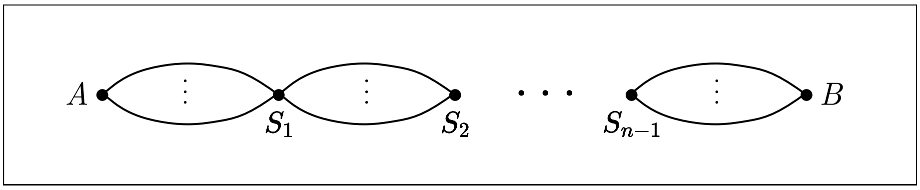

图 8: 化简后的电路

现在,问题的关键就是求出每一个S_k与$S_{k+1}(k=0,1,\cdots,n-1)$之间各有多少条棱.我们将$S_k$与$S_{k+1}(k=0,1,\cdots,n-1)$之间的所有棱记作$E_k$,即

$$E_k=\left\{\overline{A_1A_2}\right|A_1\in S_k,A_2\in S_{k+1}\right\}\cap E,k=0,1,\cdots,n-1.$$

现在我们来求$|E_k|$.

注意到E_k中的每一条棱的顶点都分别是S_k与S_{k+1}中的点.而对于每一个 $A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\in S_k$,在$E_k$中与此点相连的棱为

$$E_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cap E_k,$$

即

$$\left\{A_{(x_1,\cdots,x_i+1,\cdots,x_n)}\right|x_i=0\right\}.$$

这个集合的元素个数为$x_1,x_2,\cdots,x_n$中0的个数,而$A_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\in S_k$,所以$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=k$,所以0的个数为$n-k$.

所以,我们有以下结论:

$$|E_k|=|S_k|\cdot(n-k)=\mathrm{C}_n^k\cdot(n-k).$$

那么我们就可以计算S_k与S_{k+1}之间的电阻.由1.1:电阻的串并联中的(3)式,我们得到 S_k与S_{k+1}之间的电阻为

$$\frac{R}{\mathrm{C}_n^k\cdot(n-k)},$$

即

$$\frac{R\cdot k!(n-k)!}{n!(n-k)}.$$

再由(1)式,我们得到$A_{(0,\cdots,0)}$与$A_{(1,1,\cdots,1)}$之间的等效电阻为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R}{\mathrm{C}_n^k\cdot(n-k)},$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R\cdot k!(n-k)!}{n!(n-k)}.$$

参考文献

[1] 刘炳昇,李容.物理(九年级上册)[M].南京:江苏凤凰科学技术出版社,2013.10.

[2] 黄东坡.精英物理大视野(九年级)[M].武汉:湖北人民出版社,2014.