四次方程的求根公式

2021年9月25日

己知 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, 令 $\Delta_1 = c^2 - 3bd + 12ae$ $\Delta_2 = 2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace$ $\Delta = \frac{\sqrt[3]{2}\Delta_1}{3a\sqrt[3]{\Delta_2 + \sqrt{-4\Delta_1^3 + \Delta_2^2}}} + \frac{\sqrt[3]{\Delta_2 + \sqrt{-4\Delta_1^3 + \Delta_2^2}}}{3\sqrt[3]{2}a}$ $=\frac{\sqrt[3]{2}(c^2-3bd+12ae)}{3a\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}$ $+\frac{\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}{3\sqrt[3]{2}a}$ 则 $x_1 = \frac{-b}{4a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4c}{3a} - \Delta - \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{4bc}{a^2} - \frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta}}}$ $=\frac{-b}{4a}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+(\frac{3\sqrt{2(c^2-3bd+12ae)}}{3a\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}}{3\sqrt[3]{2a}}+\frac{\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}{3\sqrt[3]{2a}}$ $x_2 = \frac{-b}{4a} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4c}{3a} - \Delta - \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{4bc}{a^2} - \frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a}} + \Delta}}$ $=\frac{-b}{4a}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+(\frac{3\sqrt{2}(c^2-3bd+12ae)}{3a\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}}{3\sqrt[3]{2a}}+\frac{\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}{3\sqrt[3]{2a}}}{\sqrt[3]{2a}}$ $x_3 = \frac{-b}{4a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4c}{3a} - \Delta + \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{4bc}{a^2} - \frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta}}}$ $=\frac{-b}{4a}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+(\frac{3\sqrt{3}(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)}}{3a\sqrt[3]{2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}}+\frac{\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}}{3\sqrt[3]{2a}}$ $\frac{\sqrt[3]{(2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2}}{3\sqrt[3]{2}a}$ $\sqrt[3]{(2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 2$ $x_4 = \frac{-b}{4a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4c}{3a} - \Delta} + \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{4bc}{a^2} - \frac{8d}{a}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{2c}{3a} + \Delta}}$ $(\frac{\sqrt[3]{2}(c^2-3bd+12ae)}{3a\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}$ $\sqrt[3]{(2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 2$ $\sqrt[3]{(2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2} + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 2$ $+\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4c}{3a}-(\frac{\sqrt[3]{2}(c^2-3bd+12ae)}{3a\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}\right]$ $-\frac{b^3}{a^3} + \frac{4bc}{a^2} - \frac{8d}{a}$ $\sqrt[3]{(2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace) + \sqrt{-4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 + (2c^3 - 9bcd + 27ad^2 + 27b^2e - 72ace)^2}}$ $4\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{2c}{3a}+(\frac{\sqrt[3]{2}(c^2-3bd+12ae)}{3a\sqrt[3]{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)}+\sqrt{-4(c^2-3bd+12ae)^3+(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2}}}$