每日一题(2.1)答案

选题:门宇翎、李东宸
答案制作:程昊一

2021 年 12 月 24 日

1. **在实数范围内解方程:**

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$$

分析 这是一个无理方程,我们一般的解决方式是**化"无理"为"有理"**,方法有换元、配方、主动平方、因式分解等.注意:在解完方程后,我们要注意检验方程的解是否为**增根**(即使原方程的根号下部分小于零的解).

对于这道题,我们选择配方.

解 将原式两边同时乘2,得到

$$2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+2\sqrt{z-2}=x+y+z$$

移项,得

$$(x-2\sqrt{x})+(y-2\sqrt{y-1})+(z-2\sqrt{z-2})=0$$

整理,得

$$(x-2\sqrt{x}+1)+(y-1-2\sqrt{y-1}+1)+(z-2-2\sqrt{z-2}+1)=0$$

对于每一项,我们使用公式$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$进行配方,得

$$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$$

由于平方数的非负性,我们得到

$$\begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{y-1}-1=0\\ \sqrt{z-2}-1=0\end{cases}$$

于是立得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

注 在这道题中,我们选择了配方.无理方程化为有理方程的办法比较多,对于什么时候用什么方法,每种方法适用于什么情况,这都需要我们多做题,才能找到其中的道理.

2. **已知a, b, c为一个三角形的三边长,且满足**

$$a^2 + b^2 + c^2 + 338 = 10a + 24b + 26c$$

试判断此三角形的形状.

分析 在这里,我们仍然使用配方,然后再利用几何知识找出三角形的形状(锐角三角形、直角三角形、钝角三角形、等腰(边)三角形等).

解 将等式移项,得

$$(a^2 - 2 \times 5a) + (b^2 - 2 \times 12b) + (c^2 - 2 \times 13c) + 338 = 0$$

注意到$338 = 5^2 + 12^2 + 13^2$,所以将原式化为

$$(a^2 - 2 \times 5a + 5^2) + (b^2 - 2 \times 12b) + (c^2 - 2 \times 13c) = 0$$

即

$$(a - 5)^2 + (b - 12)^2 + (c - 13)^2 = 0$$

由于平方的非负性,我们得到

$$\begin{cases} (a - 5)^2 = 0 \\ (b - 12)^2 = 0 \\ (c - 13)^2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 12 \\ c = 13 \end{cases}$$

又因为$5^2 + 12^2 = 13^2$,所以此三角形为直角三角形.

注 最后一步利用了勾股定理的逆定理,证明很简单,我们在此就不赘述.