对于小球在转动圆盘上滚动的物理模型的思考

程昊一

2023 年 9 月 26 日

1 问题

如图1, 有一个水平圆盘以角速度$\mathbf{\Omega}$转动, 其上有一个实心小球, 质量为m, 半径为r, 以角速度$\boldsymbol{\omega}$作纯滚动运动, 使其相对于实验室参考系(静止不动的参考系)静止. 现对小球施加一个力, 使得小球的速度$v_\mathrm{C} \ll \omega r$. 小球相对于实验室参考系的运动路径是什么?

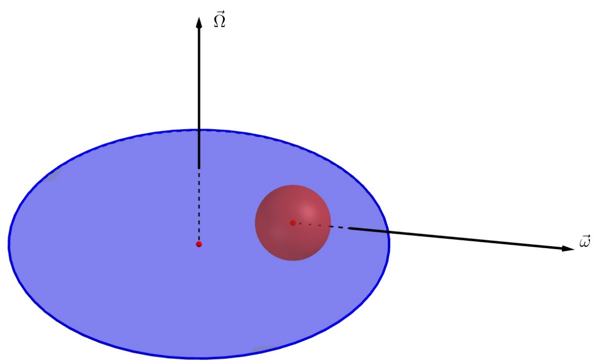

图 1

2 分析与解答

为方便起见, 我们画出主视图, 设圆盘中心为O, 小球与圆盘的切点为T, 小球球心为C. 并设$\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_\mathrm{C}$, $\overrightarrow{CT} = \mathbf{r}$, 如图2. 设点$A$相对于点$B$的速度为$\mathbf{v}_\mathrm{AB}$, 点$A$在实验室参考系下的速度为$\mathbf{v}_\mathrm{A}$.

则有

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\mathrm{TC}}{r^2} = \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_\mathrm{T} - \mathbf{v}_\mathrm{C})}{r^2}.$$

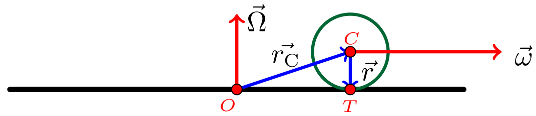

图 2

而

$$\mathbf{v}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{C}},$$

求微分, 有

$$\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t.$$

故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}})}{r^2}.$$

设球心C的加速度为$\mathbf{a}_{\mathrm{C}}$, 则转盘对小球的力为$m\mathbf{a}_{\mathrm{C}}$, 小球受到的扭矩

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\mathrm{C}}.$$

设小球的转动惯量为$J = 2mr^2/5$, 则由角动量定理, 有

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{L} = J\mathrm{d}\boldsymbol{\omega},$$

即

$$m\mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}})}{r^2}.$$

即

$$\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}} = \frac{2}{5}\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}).$$

而$\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$和$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$均与$\mathbf{r}$垂直, 故

$$\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}} = \frac{2}{5}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}).$$

整理, 得

$$\mathbf{a}_{\mathrm{C}} = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}.$$

由此可见, 小球作以$(7v_{\mathrm{C}})/(2\Omega)$为半径, 角速度为$2\boldsymbol{\Omega}/7$的圆周运动.

3 相关问题

3.1 空心小球

注意到空心小球的转动惯量为

$$J' = \frac{2}{3}mr^2,$$

故此时小球作以$(5v_{\mathrm{C}})/(2\Omega)$为半径, 角速度为$2\mathbf{\Omega}/5$的圆周运动.

3.2 阻力

若小球受到某种阻力

$$\mathbf{f} = -k\mathbf{v}_{\mathrm{C}},$$

且此力作用于小球的球心C(因此$\mathbf{f}$对$\mathbf{M}_{\mathrm{C}}$的贡献为$\mathbf{0}$). 我们猜想, 由于阻力使速率减小, 而速率与法向加速度正相关, 故猜测小球也许会做螺旋运动, 最终趋于某一点.

事实上, 设转盘给小球的力为$\mathbf{F}$, 则

$$m\mathbf{a}_{\mathrm{C}} = \mathbf{F} + \mathbf{f},$$

得

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\mathrm{C}} + k\mathbf{v}_{\mathrm{C}}.$$

与§2中类似地, 利用角动量定理, 得

$$\mathbf{r} \times (m\mathbf{a}_{\mathrm{C}} + k\mathbf{v}_{\mathrm{C}})\mathrm{d}t = \frac{2}{5}m\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}).$$

化简得

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_{\mathrm{C}} + \frac{k}{m}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}) = \frac{2}{5}\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}} - \mathbf{a}_{\mathrm{C}}).$$

出于同样的原因, 我们可以把$\mathbf{r}$消去, 得

$$7\mathbf{a}_{\mathrm{C}} + \frac{5k}{m}\mathbf{v}_{\mathrm{C}} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\mathrm{C}}.$$

将$\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$正交分解为

$$\mathbf{v}_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中u与v是关于时间t的函数. 则上面的方程可以写为

$$7\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5k}{m}\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix},$$

写为分量形式即为

$$\begin{cases} 7u' + \dfrac{5k}{m}u = -2\Omega v, & (1) \\ 7v' + \dfrac{5k}{m}v = 2\Omega u. & (2) \end{cases}$$

下面求解这个微分方程组. 由(2)得

$$u = \frac{7}{2\Omega}v' + \frac{5k}{2m\Omega}v.$$

代入(1), 得

$$7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{7}{2\Omega}v' + \frac{5k}{2m\Omega}v\right) + \frac{5k}{m}\left(\frac{7}{2\Omega}v' + \frac{5k}{2m\Omega}v\right) = -2\Omega v,$$

即

$$\frac{49}{2\Omega}v'' + \frac{35k}{m\Omega}v' + \left(\frac{25k^2}{2m^2\Omega} + 2\Omega\right)v = 0.$$

这是一个二阶线性齐次微分方程, 得到它的解是不困难的:

$$\begin{aligned} v(t) &= c_1 \exp\left(-\frac{t(5k + 2\mathrm{i}m\Omega)}{7m}\right) + c_2 \exp\left(\frac{t(-5k + 2\mathrm{i}m\Omega)}{7m}\right) \\ &= C_1 \exp\left(-\frac{5kt}{7m}\right)\sin\left(\frac{2t\Omega}{7}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{5kt}{7m}\right)\cos\left(\frac{2t\Omega}{7}\right), \end{aligned}$$

其中$c_1', c_2' \in \mathbb{C}$.

带回原方程, 得到方程组的解

$$\begin{cases} u(t) = C_1 \exp\left(-\dfrac{5kt}{7m}\right)\cos\left(\dfrac{2t\Omega}{7}\right) - C_2 \exp\left(-\dfrac{5kt}{7m}\right)\sin\left(\dfrac{2t\Omega}{7}\right), \\ v(t) = C_1 \exp\left(-\dfrac{5kt}{7m}\right)\sin\left(\dfrac{2t\Omega}{7}\right) + C_2 \exp\left(-\dfrac{5kt}{7m}\right)\cos\left(\dfrac{2t\Omega}{7}\right). \end{cases}$$

可以看到, 方程组的解中有象征着圆周运动的三角函数, 且角速度为$2\Omega/7$; 还有衰减因子$A\mathrm{e}^{-\beta t}$, 这表明小球的速率趋于0, 在这里说明了小球会趋向于某一点. 这一点的具体位置, 也可以通过对$u(t)$和$v(t)$积分得到.

代入初值条件, 以$(u,v)=(0,v_0)$为例, 得到

$$\begin{cases} u(t)=-v_0\exp\left(-\dfrac{5kt}{7m}\right)\sin\left(\dfrac{2t\Omega}{7}\right), \\ v(t)=v_0\exp\left(-\dfrac{5kt}{7m}\right)\cos\left(\dfrac{2t\Omega}{7}\right). \end{cases}$$

小球的位移不难利用分部积分法得到:

$$\begin{aligned} x(T)=&\int_0^T u(t)\mathrm{d}t \\ =&\frac{1}{25k^2+4m^2\Omega^2}\left[14m^2v_0\Omega\exp\left(-\frac{5kT}{7m}\right)\cos\left(\frac{2T\Omega}{7}\right)\right. \\ &\left.+35kmv_0\exp\left(-\frac{5kT}{7m}\right)\sin\left(\frac{2T\Omega}{7}\right)-14m^2v_0\Omega\right], \\ y(T)=&\int_0^T v(t)\mathrm{d}t \\ =&\frac{1}{25k^2+4m^2\Omega^2}\left[14m^2v_0\Omega\exp\left(-\frac{5kT}{7m}\right)\sin\left(\frac{2T\Omega}{7}\right)\right. \\ &\left.-35kmv_0\exp\left(-\frac{5kT}{7m}\right)\cos\left(\frac{2T\Omega}{7}\right)+35m^2v_0\Omega\right]. \end{aligned}$$

图3展示了

$$\Omega=10\ \mathrm{rad/s},\ m=1\ \mathrm{kg},\ k=0.1\ \mathrm{kg/s},\ v_0=2\ \mathrm{m/s},$$

并且取小球的初始位置为$(2,0)$时小球的运动路径, 其中路径上的点为对小球位置的间隔为0.25s的采样. 不难发现实际情况与我们的猜测是吻合的.

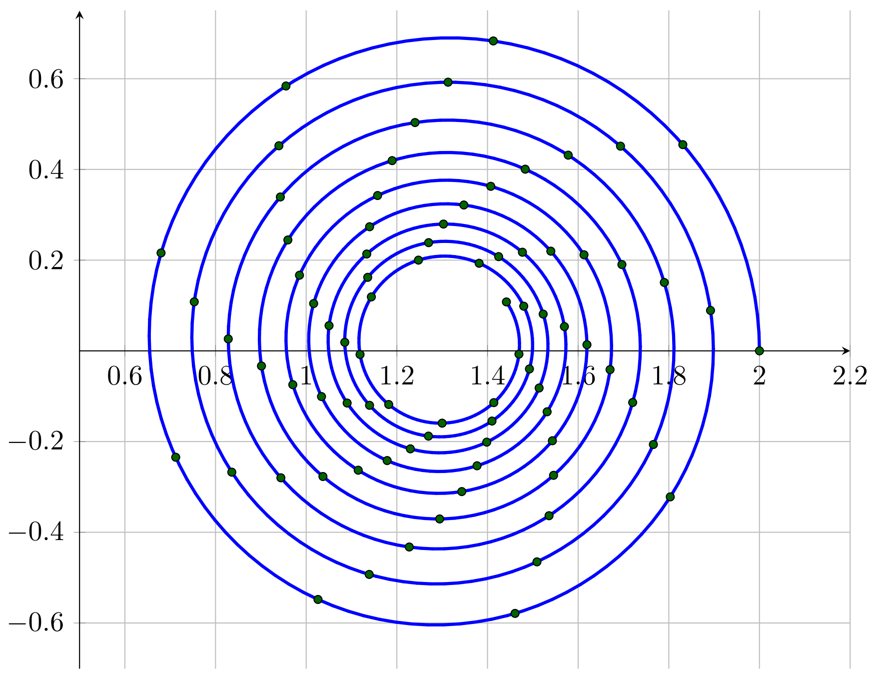

图 3