凸多边形周长与其内部凸闭折线长度的不等关系

程昊一

(西安市铁一中学分校　2024届励志AQ班)

2022 年 5 月 3 日

[摘要]　　“两点之间线段最短, 这是一个最基本的命题, 由此衍生出“三角形的两边之和大于第三边”. 我们也能在生活中碰到这样的场景: 一个凸多边形包含另一个凸多边形. 此时, 两个凸多边形的周长之间应该是有一些结论的. 这篇文章, 我们列举了几种证明方法(其中一个是作者自己发现的), 并发现其中的特殊价值.

[关键词]　　几何不等式　闭折线的长　对称性　平面几何

1　一些特殊情况

在这一节, 我们列举了一些简单情况, 将“摘要”中描述的两个多边形化为三角形或四边形. 我们将在第二节与第三节分别证明每一个命题.

1. 如图1所示, $\triangle ABC$中有一个三角形$\triangle APC$, 则$\mathrm{C}_{\triangle ABC}$ [1] 与$\mathrm{C}_{\triangle APC}$之间有什么大小关系?

2. 如图2所示, $\triangle ABC$中有一个三角形$\triangle DEF$, 则$\mathrm{C}_{\triangle ABC}$与$\mathrm{C}_{\triangle DEF}$之间有什么大小关系?

3. 如图3所示, $\triangle ABC$中有一个四边形$ADEC$, 则$\mathrm{C}_{\triangle ABC}$与$\mathrm{C}_{\text{四边形}ADEC}$之间有什么大小关系?

4. 如图4所示, $\triangle ABC$中有一个四边形$DEFG$, 则$\mathrm{C}_{\triangle ABC}$与$\mathrm{C}_{\text{四边形}DEFG}$之间有什么大小关系?

2　一些证明的方法

所有的方法都差不多, 均是添加辅助线, 运用“三角形两边之和大于第三边”解决问题.

[1] $\mathrm{C}_{\triangle ABC}$表示$\triangle ABC$的周长, 下同.

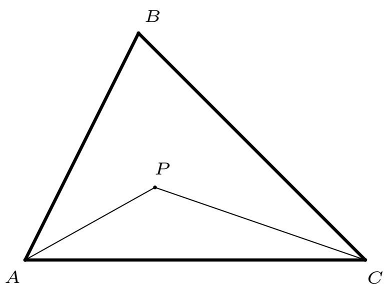

图 1: 情况1

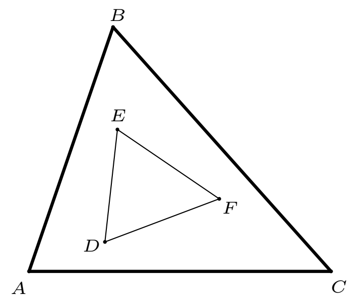

图 2: 情况2

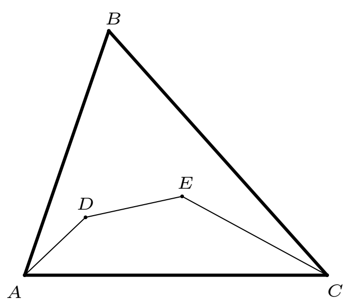

图 3: 情况3

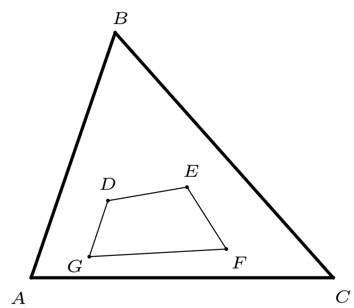

图 4: 情况4

1. 如图5, 延长AP交BC于D. 则:

$$\begin{aligned}AP+PC &< AP+(PD+DC)\\ &= AD+DC\\ &< (AB+BD)+DC\\ &= AB+BC.\end{aligned}$$

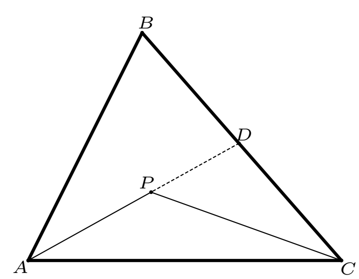

图 5: 情况1的解答

所以, $AP+PC+CA<AB+BC+CA$, 即$\mathrm{C}_{\triangle ABC} > \mathrm{C}_{\triangle APC}$.

注意, 在这里, 我们实际上运用了放缩法, 在[1]中被称为“切饼”. 即, 我们把$\triangle ABC$视作一张饼, 先切掉一块(在这里是$\triangle ABD$), 将$\mathrm{C}_{\triangle ABC}$放缩成$\mathrm{C}_{\triangle ADC}$; 然后, 我们再将$\triangle PDC$切掉, 只剩下所求的$\triangle APC$, 至此证明结束.

此证明的放缩思路是这样的:

$$\mathrm{C}_{\triangle APC} < \mathrm{C}_{\triangle ADC} < \mathrm{C}_{\triangle ABC}.$$

2. 我们还是运用“切饼法”.

如图6, 因为$PB + BQ > PQ$, 所以有

$$\mathrm{C}_{\triangle ABC} > \mathrm{C}_{\text{四边形}APQC}.$$

这相当于我们“切掉”了$\triangle BPQ$. 我们再切掉四边形$PERA$, 就有

$$\mathrm{C}_{\text{四边形}APQC} > \mathrm{C}_{\text{四边形}EQCR}.$$

再切掉五边形$FQCRD$, 就有

$$\mathrm{C}_{\text{五边形}FQCRD} > \mathrm{C}_{\triangle DEF}.$$

所以, $\mathrm{C}_{\triangle ABC} > \mathrm{C}_{\triangle DEF}$.

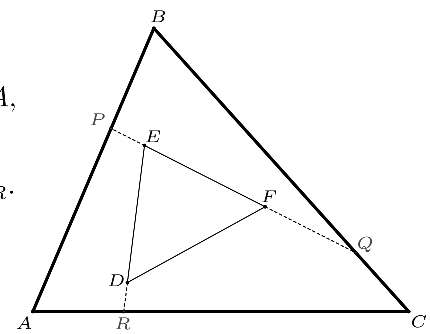

图 6: 情况2的解答

3. 我们有两种思路.

(1) 如图7, 设$AD \cap CE = P$, 则$\mathrm{C}_{\text{四边形}ADEC} < \mathrm{C}_{\triangle APC}$. 于是, 我们把命题化归为“情况1”了.

(2) 如图8, 设$DE \cap AB = P$, $DE \cap CB = Q$.我们先将$\triangle BPQ$切掉, 然后分别切掉$\triangle PDA$和$\triangle QEC$.

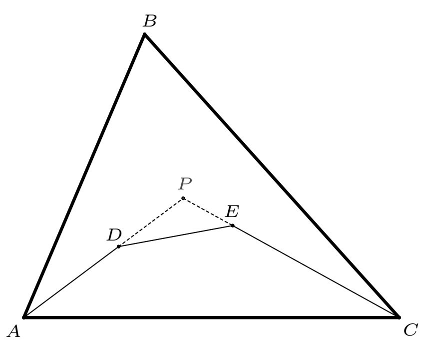

图 7: 情况3的第1种思路

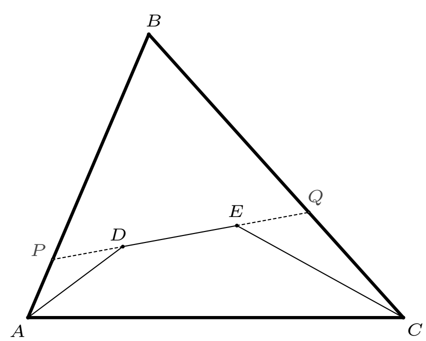

图 8: 情况3的第2种思路

4. 如图9所示“切饼”(“切”的顺序已经由序号给出).

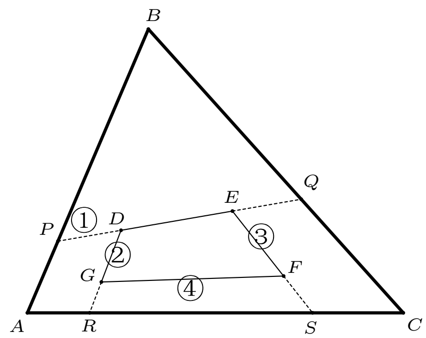

图 9: 情况4的解答

3 一种具有对称性的证明方法

可以发现, 上面的证明方法都是分步完成的, 即通过一步一步地“切”掉大多边形的部分得到小多边形. 此方法易于理解, 但是有以下两点本人认为还不够完美:

(1) **较为繁琐**. 此方法未能做到“一气呵成”, 稍显繁琐.
(2) **失去了对称性**. 个人认为对称性在数学乃至学术界都是很重要的, 但此方法未能做到这一点.

基于这些缺点, 本人发现了一种新的证明方法. 我们直接看最一般的命题:

5. 如图10, 平面内凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$(A_1, A_2, $\cdots A_n$顺时针排列)中有一个凸m边形$B_1B_2\cdots B_m$(同样, 所有点按顺时针排列). 证明:

$$\mathrm{C}_{n\text{边形}A_1A_2\cdots A_n} < \mathrm{C}_{m\text{边形}B_1B_2\cdots B_m}.$$

证明 如图10, 设$B_0 = B_m$, $C_0 = C_m$, 延长$B_{i-1}B_i$交n边形$A_1A_2\cdots A_n$的周界(指A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$或$A_{n-1}A_n$)于C_1, C_2, $\cdots$, C_m($i = 1$, 2, $\cdots$, m). 记

$$\langle C_{i-1}, C_i\rangle$$

为n边形$A_1A_2\cdots A_n$的周界上从C_{i-1}到C_i(顺时针)的折线的长. 则由“两点之间线段最短”有

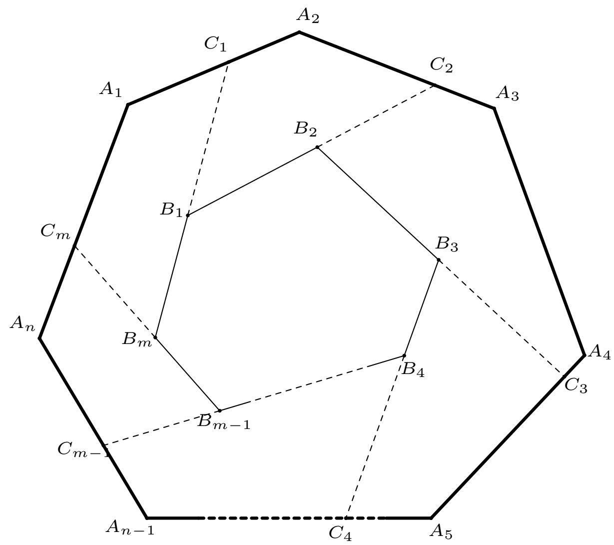

图 10: 命题5的证明

如下一系列不等式:

$$\begin{cases} B_0C_1 < B_0C_0 + \langle C_0, C_1\rangle; \\ B_1C_2 < B_1C_1 + \langle C_1, C_2\rangle; \\ \vdots \\ B_{m-1}C_m < B_{m-1}C_{m-1} + \langle C_{m-1}, C_m\rangle; \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} B_0B_1 < B_0C_0 + \langle C_0, C_1\rangle - B_1C_1; \\ B_1B_2 < B_1C_1 + \langle C_1, C_2\rangle - B_2C_2; \\ \vdots \\ B_{m-1}B_m < B_{m-1}C_{m-1} + \langle C_{m-1}, C_m\rangle - B_mC_m; \end{cases}$$

将这些式子相加, 得到

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i-1}B_i < \sum_{i=1}^{n}\langle C_{i-1}, C_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} B_{i-1}C_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} B_iC_i.$$

又显然有

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i-1}C_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} B_iC_i,$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i-1}B_i < \sum_{i=1}^{n} \langle C_{i-1}, C_i \rangle,$$

即

$$\mathrm{C}_{n\text{边形}A_1A_2\cdots A_n} < \mathrm{C}_{m\text{边形}B_1B_2\cdots B_m}.$$

□

参考文献

[1] 单墫. 平面几何中的小花, chapter 2.10. 华东师范大学出版社, 上海, second edition, 2012.