每日一题(7.1)答案

选题:程昊一、李衡岳
答案制作:程昊一

2022 年 2 月 19 日

1. 证明:若$a,b>0,a,b\neq 1$,则

(1) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy \quad (x,y>0)$;

(2) $\log_a x^b=b\log_a x \quad (x>0)$;

(3) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x>0)$;

(4) $\log_{a^x} b^y=\dfrac{y}{x}\log_a b \quad (x\neq 0)$.

(程昊一供题)

分析 事实上,对数是指数的逆运算.如果我们对对数不熟悉,可以把对数转换为指数处理.

解 **(1).**设$\log_a x=m,\log_a y=n$,则根据指数的定义,我们有

$$\begin{cases} a^m=x, \\ a^n=y. \end{cases}$$

两式相乘,有

$$a^{m+n}=xy,$$

即

$$m+n=\log_a xy,$$

所以

$$\log_a x+\log_a y=\log_a xy.$$

(2).设$\log_a x=m$,则

$$a^m=x$$

等式两边同时b次方,得

$$a^bm=x'b$$

所以

$$bm=\log_a x^b,$$

即

$$\log_a x^b=b\log_a x.$$

(3).设$\log_a x=m$,则

$$a^m=x$$

等式两边同时以b为底进行底数运算,得到

$$m\log_b a=\log_b x,$$

即

$$m=\frac{\log_b x}{\log_b a},$$

所以

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

这个公式被称为对数的**换底公式**.

(4).任取一个正数c,使得$c\neq 1$,那么

$$\begin{aligned}\log_{a^x} b^y&=\frac{\log_c b^y}{\log_c a^x}(\text{换底公式})\\&=\frac{y\log_c b}{x\log_c a}(\text{公式}\mathbf{(2)})\\&=\frac{y}{x}\cdot\frac{\log_c b}{\log_c a}\\&=\frac{y}{x}\log_a b(\text{换底公式的逆用}).\end{aligned}$$

至此,我们将4个命题证明完毕.

2. 有n个人,每个人的生日是完全随机且互不相关的.当n不小于多少时,存在两个生日相同的人的概率不小于$\dfrac{1}{2}$(假设一年有 365天)?
(李衡岳供题)

解　我们从反面考虑,即考虑任意两个人的生日都不重复的概率.

我们先**只**考虑第一个人.他(她)的生日是任意的,且没有其他的人,所以他(她)与其他人(事实上此时没有其他人)生日不重合的概率为1.

我们再考虑第二个人.他(她)的生日是任意的,如果他(她)的生日为除去第一个人的生日的余下的364天,那么两个人的生日就不会重合,概率为$\dfrac{364}{365}$.

我们再考虑第三个人,他(她)的生日也是任意的,且我们不希望与前两个人重合,概率(这三个人的生日均不重合的概率)为$\dfrac{364}{365}\times\dfrac{363}{365}$.

同理,前4个人的生日互不重合的概率为$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}$.

那么,这n个人生日互不重合的概率为$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{366-n}{365}$,这$n$个人中存在两个生日相同的人的概率为

$$1-\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{366-n}{365}. \tag{1}$$

我们目前没有找到估算(1)式的简单的初等方法.我们利用计算器得知,$n=23$时,这个式子的值约为0.4757;当$n=24$时,这个式子的值约为0.5073.当n增大时,这个式子的值也会越来越大.

综上:当n不小于24时,存在两个生日相同的人的概率不小于$\frac{1}{2}$.