两个圆的关系

程昊一

2022 年 11 月 5 日

第一部分

知 识 讲 解

目录

两圆的位置关系

观看动态演示:

一般结论

由此我们得到:

定义: 两个圆的位置关系

两个圆的位置关系有以下五种 (除去两圆重合的情况):

$$\begin{cases} d > R + r & \Rightarrow \quad \text{两圆外离;} \\ d = R + r & \Rightarrow \quad \text{两圆外切;} \\ R - r < d < R + r & \Rightarrow \quad \text{两圆相交;} \\ d = R - r & \Rightarrow \quad \text{两圆内切;} \\ d < R - r & \Rightarrow \quad \text{两圆内离.} \end{cases}$$

式中, R 为大圆半径, r 为小圆半径, d 为两圆圆心的距离.

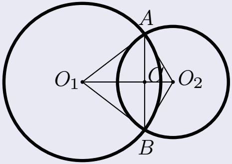
若干命题

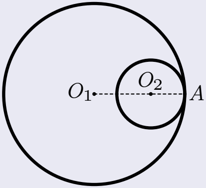
我们有必要了解一些显然的命题并严谨地证明:

命题 1、2

1. 相交两圆的连心线垂直平分其公共弦.
2. 相切两圆的连心线通过其切点.

证明.



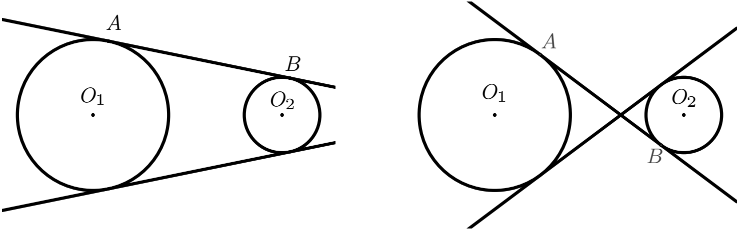


□

公切线

基本概念

同时与两圆相切的直线被称为**公切线**. 公切线有两种: **外公切线** (所切两圆在公切线同侧) 与**内公切线** (所切两圆在公切线异侧), 如下图所示. 同一条公切线上两切点的距离被称作**公切线的长** (即下图中线段 AB 的长度).



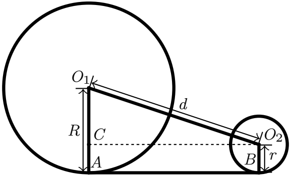
外公切线　　内公切线

公切线的性质

1. 公切线的长度

如图, 在 Rt$\triangle O_1O_2C$
中运用勾股定理, 容易得到外公切线的长度

$$AB=\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$



同理可得 (留作习题) 内公切线的长度为

$$\sqrt{d^2-(R+r)^2}.$$

由此可得:

两圆的两条外公切线与两条内公切线分别相等.

2. 两圆位置关系与公切线的关系

我们根据之前给出的公式能得到如下一系列命题:

(1) 两圆相交 (即 $d < R + r$) 时不存在内公切线;

(2) 两圆内离 (即 $d < R - r$) 时不存在公切线;

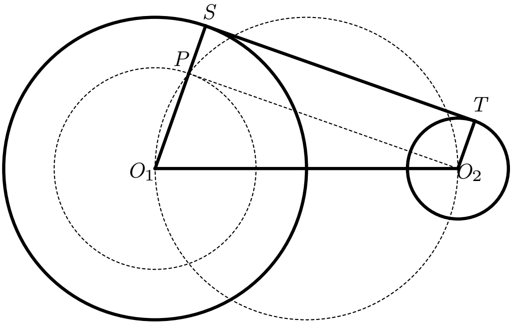
(3) 两圆外切 (即 $d = R + r$) 时两内公切线重合;

(4) 两圆内切 (即 $d = R - r$) 时两外公切线重合.

公切线的尺规作图

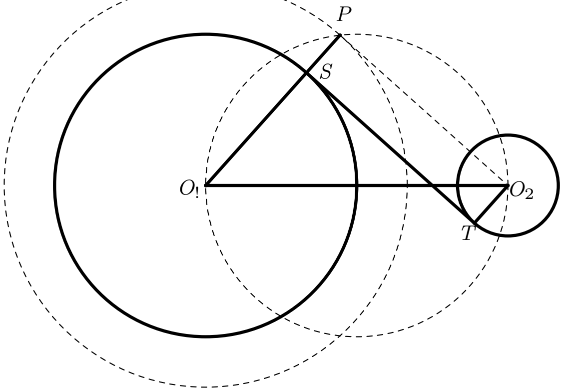
1．外公切线

如图，这相当于把两圆的外公切线平移为一点到一圆的切线.



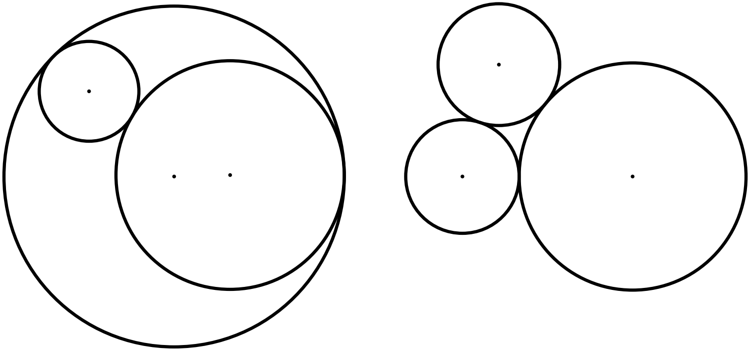
2. 内公切线

如图, 同上.

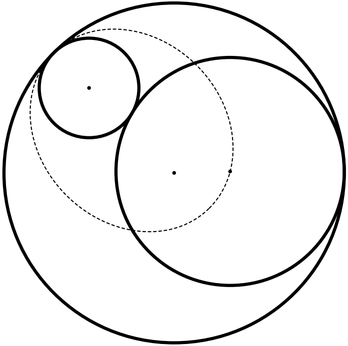


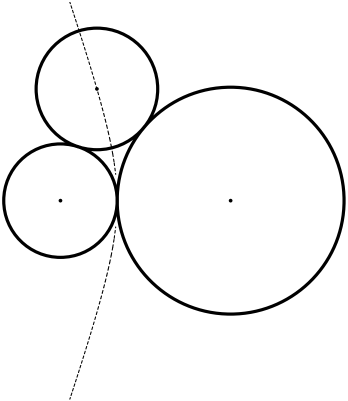
* 拓展：三圆相切与四圆相切

我们知道，三圆相切并不特殊：

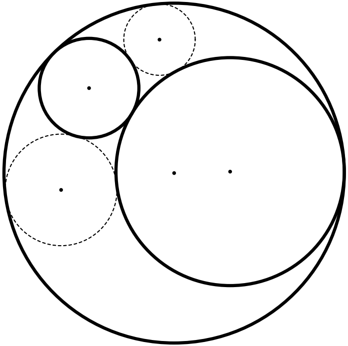


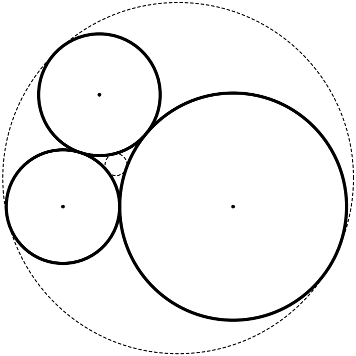
根据椭圆或双曲线的定义，如果给定外切或内切的两圆，第三个与两圆均相切的圆的轨迹为椭圆或双曲线.





那么，给定三个两两相切的圆后，能添加第四个与之均相切的圆吗？
事实上，有且仅有两个圆满足要求. 这就是**阿波罗尼奥斯定理 (Apollonius' Theorem)**





并且，设两两相切的四圆的有向曲率为 k_1，k_2，k_3，k_4，那么

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

其中：

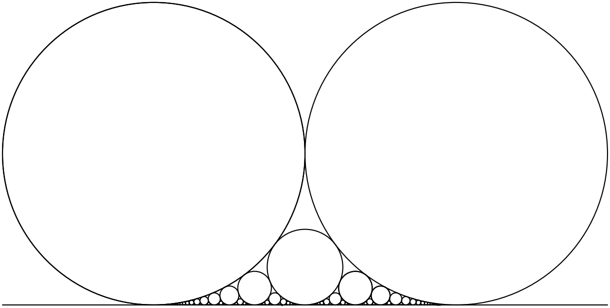
(1) 有向曲率的大小为 $|k_i| = 1/r_i$，其中 r_i 为每个圆的半径，$i = 1, 2, 3, 4$；

(2) 有向曲率带有符号（正或负），如果两圆外切，二者的曲率符号相同，如果两圆内切，二者的曲率符号相异；

(3) 对于任一四圆相切图案来说，只要指定某个圆的曲率符号，剩余圆的曲率符号就能完全确定. 如果每个圆的曲率半径同时取相反数，很显然这对整个结果没有任何影响.

这就是**笛卡尔定理 (Descartes' Theorem)**.

还有一个关于多圆相切的有趣的例子. 画一个数轴, 取出 0 与 1 中间那一段 (包括端点), 找出所有的有理点 p/q, 在数轴上方画一个半径为 $1/(2q^2)$ 的圆, 使之与数轴相切于 p/q 所对应的点. 于是我们得到了如下精致的图形:



注意：每两个相切的圆之下都会有一个小圆，所以这个图是无限的，可以称作**分形**. 还有一个有趣的事实：如果我们依次取三个圆 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$, 使得 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切, $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 相切. 设 $\odot O_i$ 对应的分数为 p_i/q_i, $i = 1, 2, 3$, 则有如下等式:

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 + p_3}{q_1 + q_3} = \frac{p_1}{p_3} \oplus \frac{p_3}{q_3}.$$

其中“$\oplus$”被称为“法雷和 (Farey Sum)”：

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

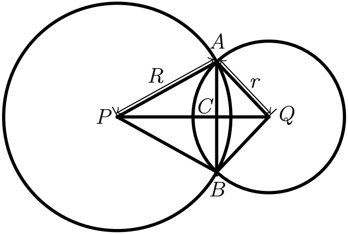
第二部分

例题与习题讲解

目录

例 27.1

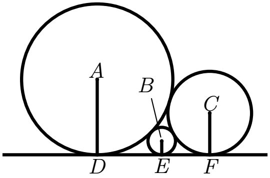
如图, 已知 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 交于两点 P, Q, 两圆的半径分别为 R 与 r, $PQ = d$. 求 AB 与 $\cos\angle PAQ$.



例 27.2

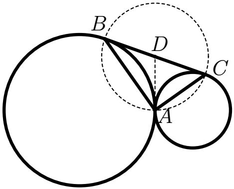
如图, $\odot A$, $\odot B$, $\odot C$ 两两外切, 并且均顺次与同一条直线相切, 切点分别为 D, E, F. 设三圆的半径分别为 a, b, c. 求证:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{b}}.$$



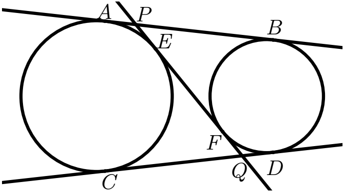
例 27.3

如图, 两圆相切于 A, 并且分别与同一条外公切线切于 B, C. 已知 AB 与 AC 的长度, 求 BC.



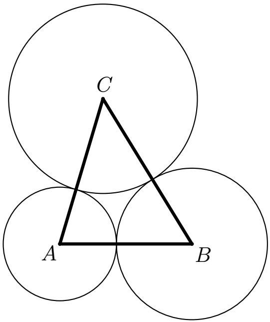
例 27.4

如图, 两圆的两条外公切线切两圆于 A, B, C, D, 一条内公切线切两圆与 E, F, 交两条外公切线于 P, Q. 已知 $AB = 10$, 求 PQ.



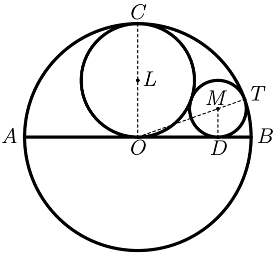
习题 27.1

已知 $\triangle ABC$ 的三边 $AB=7$, $BC=9$, $CA=8$. 又 $\odot A$, $\odot B$, $\odot C$ 两两外切, 求此三圆的半径.



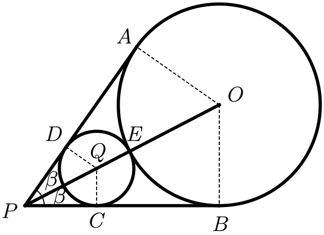
习题 27.2

如图, $\odot L$ 内切 $\odot O$ 于 C, 且切 $\odot L$ 的直径 AB 于 O. $\odot M$ 内切于 $\odot O$, 外切于 $\odot L$, 且切 AB 于 D. 已知 $AB = 16$, 求 $\odot L$ 与 $\odot M$ 的半径.



习题 27.3

如图, $\odot O$ 的直径为 20, 自 P 向 $\odot O$ 作两条切线切 $\odot O$ 于 A, B, $\angle OPA = \angle OPB = \beta$. 较小的 $\odot Q$ 与 PA, PB 均相切. 求 $\odot Q$ 的半径.



习题 27.4

半径为 1 的三个圆两两外切, $\odot O$ 与此三圆均相切, 求其半径.