每日一题(6.1)答案

王一丁,李政毅

2022 年 1 月 17 日

1.求满足$5x-2[x]=-8$的所有x,其中$[x]$表示不超过x的最大整数.
(王一丁供题)

分析　题中的$[x]$被称作“高斯函数”,例如$[\pi]=3,[-\pi]=-4$(别忘了是不超过x的最大整数!).含高斯函数的方程一般被称为高斯方程.解高斯方程有两个要点:

(1) $[x]$是整数.虽然这个条件是显然的,但是我们有时能得到许多有用的信息.

(2) $[x]\le x<[x]+1$.这点也很重要.

解　由$[x]\le x<[x]+1$,我们有

$$5[x]-2[x]\le 5x-2[x]=-8<5([x]+1)-2[x]$$

解得

$$-13<3[x]\le -8$$

又因为$[x]$是整数,所以

$$[x]=-4\text{或}-3$$

带回原方程,得到

$$x=-\frac{14}{5}\text{或}-\frac{16}{5}$$

经检验, $x=-\dfrac{14}{5}$或$-\dfrac{16}{5}$为原方程的解.

综上:原方程的解为$x=-\dfrac{14}{5}$或$x=-\dfrac{16}{5}$

2.在2003×2003的小方格中,随意写上1或-1，然后将每一列中的乘积写在其下方，将每一行中的乘积写在其右边，这样得到4006个数，证明：这4006个数的和不等于0.
(李政毅供题)

分析　对于这种问题,如果一时没有头绪,可以从比较小的情况开始尝试构造,比如这道题可以尝试对于2×2和3×3等去构造.

解 我们按下列表格中的方式记表格中的所有数字为$a_{(i,j)}$, $a_{(i,j)} = \pm 1, i, j = 1, 2, \cdots, 2003$.我们记$\prod\limits_{i=1}^{2003} a_{(k,i)} = x_k, \prod\limits_{i=1}^{2003} a_{(i,k)} = y_k, S = \sum\limits_{i=1}^{2003} (x_i + y_i)$.其中$\prod$表示累乘,与$\sum$的用法类似.

$a_{(1,1)}$	$a_{(1,2)}$	$a_{(1,3)}$	$\cdots$	$a_{(1,2003)}$	x_1
$a_{(2,1)}$	$a_{(2,2)}$	$a_{(2,3)}$	$\cdots$	$a_{(2,2003)}$	x_2
$a_{(3,1)}$	$a_{(3,2)}$	$a_{(3,3)}$	$\cdots$	$a_{(3,2003)}$	x_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{(2003,1)}$	$a_{(2003,2)}$	$a_{(2003,3)}$	$\cdots$	$a_{(2003,2003)}$	x_{2003}
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_{2003}	S

我们来观察任意一项$a_{(i,j)}$改变符号后会发生什么.若$a_{(i,j)}$被改变,那么x_i, y_j均被改变,且变化量为±2.那么,对于S来说,S的变化量为±4或0.所以,当表格中的任何一项被改动时,S**除以4的余数都不会被改变.**

我们现在来看S除以4的余数.因为改变表格中的任何一项,S除以4的余数都不会改变,所以我们不妨设所有的$a_{(i,j)}$都为1,$i, j = 1, 2, \cdots, 2003$.此时$x_i = y_i = 1, S = 4006$,除以4余2.所以,对于这个表格,$S$除以4的余数均为2.而0除以4的余数为0,所以$S \neq 0$.证毕.