每日一题(10.2)答案

选/命题: 门宇翎、程昊一

答案制作: 程昊一

2022 年 3 月 17 日

1. 已知x, y, z为实数, 且满足

$$x+2y-5z=3, x-2y-z=-5,$$

求$x^2+y^2+z^2$的最小值.

(门宇翎供题)

分析 我们看到了3个未知数, 2个等式, 我们可以用其中一个未知数表示另外两个未知数, 然后将需要求的式子写成关于一个未知数的式子, 相对来说就更好处理.

解 解关于x, y的方程组

$$\begin{cases} x+2y=5z+3 \\ x-2y=z-5 \end{cases},$$

得

$$\begin{cases} x=3z-1 \\ y=z+2 \end{cases}.$$

所以, 原式$=(3z-1)^2+(z+2)^2+z^2=11z^2-2z+5=11\left(z-\dfrac{1}{11}\right)^2+\dfrac{54}{11}$.

所以, 原式的最小值为$\dfrac{54}{11}$.

2. 因式分解:

$$\left(x^2+2y^2\right)^4+64y^8.$$

(程昊一命题)

分析 我们先回顾一下a^4+4b^4的因式分解的方法:

$$\begin{aligned}a^4+4b^4&=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2\\&=\left(a^2+2b^2\right)^2-(2ab)^2\\&=\left(a^2-2ab+2b^2\right)\left(a^2+2ab+2b^2\right).\end{aligned}$$

我们在这里进行了一个添项: $4a^2b^2$. 其目的是与前两项配成完全平方, 同时能与配成的完全平方进行平方差.

对于这道题, 我们做换元:

$$\begin{cases}a=x^2+2y^2\\b=2y^2\end{cases},$$

就可以了.

解 设

$$\begin{cases}a=x^2+2y^2\\b=2y^2\end{cases},$$

则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^4+4b^4\\&=\left(a^2-2ab+2b^2\right)\left(a^2+2ab+2b^2\right)\\&=\left[\left(x^2+2y^2\right)^2-2\left(x^2+2y^2\right)\left(2y^2\right)+2\left(2y^2\right)^2\right]\left[\left(x^2+2y^2\right)^2+2\left(x^2+2y^2\right)\left(2y^2\right)+2\left(2y^2\right)^2\right]\\&=\left(x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2-8y^4+8y^4\right)\left(x^4+4y^4+4x^2y^2+4x^2y^2+8y^4+8y^4\right)\\&=\left(x^4+4y^4\right)\left(x^4+20y^4+8x^2y^2\right)\\&=\left(x^2-2xy+2y^2\right)\left(x^2+2xy+2y^2\right)\left(x^4+20y^4+8x^2y^2\right).\end{aligned}$$

注 事实上, 我在出这道题时, 核心思想就是利用a^4+4b^4的因式分解, 所以构造了上述换元, 使在分解的过程中运用了两次a^4+4b^4的因式分解.