每日一题(4.2)答案

选题:李衡岳,程昊一

答案制作:程昊一

2022 年 1 月 6 日

1. 用含n的代数式表示$1^4+2^4+\cdots+n^4$,其中n为正整数.

(程昊一供题)

解 我们知道,$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

其中$\sum$的用法参见https://baike.baidu.com/item/Σ/1233796.

我们现在来思考$\sum_{i=1}^{n} i^3$.

注意到

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

而且对于每一个$i(i=1,2,\ldots,n)$,我们都有

$$i^3=i(i+1)(i+2)-3i^2-2i$$

所以,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} i^3\\
=&\sum_{i=1}^{n}(i(i+1)(i+2)-3i^2-2i)\\
=&\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)-3\sum_{i=1}^{n} i^2-2\sum_{i=1}^{n} i\\
=&\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-n(n+1)\\
=&\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)-2n(n+1)(2n+1)-4n(n+1)}{4}\\
=&\frac{n(n+1)[(n+2)(n+3)-2(2n+1)-4]}{4}\\
=&\frac{n(n+1)(n^2+n)}{4}\\
=&\frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

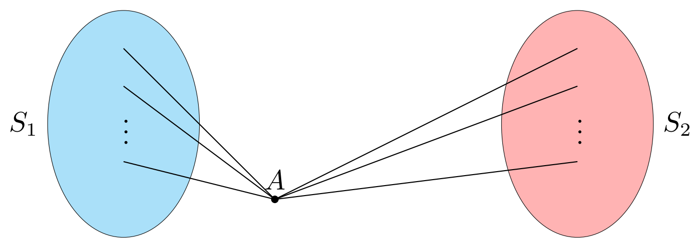
我们再来看$\sum_{i=1}^{n} i^4$.

注意到
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)(i+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$
而且对于每一个$i(i=1,2,\ldots,n)$,我们都有
$$i^4=i(i+1)(i+2)(i+3)-6i^3-11i^2-6i$$
所以,
$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} i^4\\
=&\sum_{i=1}^{n}(i(i+1)(i+2)(i+3)-6i^3-11i^2-6i)\\
=&\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)(i+3)-6\sum_{i=1}^{n} i^3-11\sum_{i=1}^{n} i^2-6\sum_{i=1}^{n} i\\
=&\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}-\frac{3n^2(n+1)^2}{2}-\frac{11n(n+1)(2n+1)}{6}-3n(n+1)\\
=&\frac{6n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-45n^2(n+1)^2-55n(n+1)(2n+1)-90n(n+1)}{30}\\
=&\frac{n(n+1)[6(n+2)(n+3)(n+4)-45n(n+1)-55(2n+1)-90]}{30}\\
=&\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\\
=&\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
\end{aligned}$$
所以,$\sum_{i=1}^{n} i^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)}{30}$.

2. 平面上有25个点,任意三点之中必然存在两个点,它们的距离小于1.证明:必然能找到13个点,它们位于半径为1的圆中.
(程昊一供题)

分析 我们要搞清楚“任意三点中必然存在两点,它们的距离小于1”这个条件意味着什么,还要搞清楚“13个点位于半径为1的圆中”意味着什么.

解 我们任选一个点A,将其余24个点做如下**分类**:将与A的距离小于1的点分为第一类S_1,将与A的距离大于等于1的点分为第二类S_2.我们用$|S_1|$表示S_1中点的个数,S_2同理.



若$|S_1|\geq 12$,则我们以A为圆心,1为半径作圆,因为对于任意一点在S_1中的P,都有$AP\leq 1$,所以A和S_1中的点都在此圆中,命题得证.

若$|S_1| < 12$,因为$|S_1|+|S_2| = 24$,所以$|S_2| \geq 13$.此时任取S_2中的一个点Q.对于S_2中的其余任意一点T,因为任意三点中存在两点的距离小于1,所以AQ, AT, QT中必然有一个小于1.又$AQ \geq 1, AT \geq 1$,所以$QT < 1$.也就是说,对于S_2中其余任何一点,都有Q与这个点的距离小于1.则S_2中的其余任何点都在以Q为圆心,1为半径的圆中,即S_2中的任何点都在此圆中,命题得证.

综上:原命题得证.