每日一题(4.1)答案

选题:李衡岳,程昊一

答案制作:程昊一

2022 年 1 月 5 日

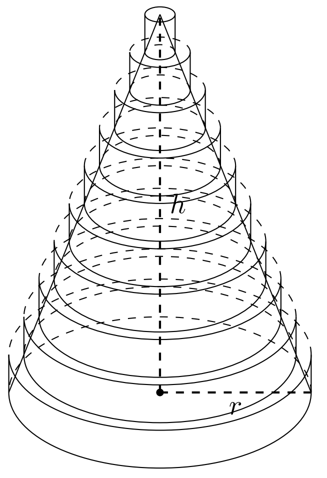
1. 用纯数学的方法证明圆锥的体积公式

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(李衡岳供题)

解 我们在小学六年级时学到了圆锥的体积是等底等高的圆柱体积的$\frac{1}{3}$.可你有没有想过,系数"$\frac{1}{3}$"是如何产生的?

我们通过具有"极限"思想的数学方法来证明圆锥的体积公式.首先,我们把圆锥沿平行于底面的方向将圆锥切成等高的n份.此时,每一份都是一个圆台,只有最上面的那一份是圆锥.我们记从上往下数的第i块为S_i,则对于S_i,它的下底面积为$\pi r^2\cdot(\dfrac{i}{n})^2$.我们把每一个圆台都近似地看成与这个圆台下底面相同、高相等的圆柱.注意:虽然我们进行的近似有误差,但是当n足够大时,这个误差会变得非常小,也就是说,当$n\to+\infty$时("$\to$"表示"趋近于"),这个误差也将趋近于0.



对于每一个圆柱,我们记从上往下数的第i个圆柱(也就是S_i对应的圆台)的体积为V_i.则我们有

$$\frac{h}{n}\cdot\pi r^2\cdot(\frac{i}{n})^2$$

即

$$\frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot i^2$$

所以,圆锥的体积V

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n} V_i\\
&=\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot i^2\\
&=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&=\pi r^2 h\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
\end{aligned}
$$

其中$\sum$的用法参见https://baike.baidu.com/item/Σ/1233796.

现在,我们来看$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$在$n\to+\infty$时的值.我们对这个式子做一个变形:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\\
=&\frac{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}}{\frac{6n^2}{n^2}} \quad (\text{分子分母同时除以}n^2)\\
=&\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \quad (\text{整理式子})
\end{aligned}
$$

我们知道,当$n\to\infty$时,$\frac{1}{n}\to 0$.所以,当$n\to\infty$时,$\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}\to\frac{(1+0)(2+0)}{6}=\frac{1}{3}$.

所以,在$n\to+\infty$时,

$$V=\pi r^2 h\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\to\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

至此,我们证明了圆锥的体积公式.

注 这道题最严格的表述如下(有兴趣的同学可以看一下):

$$
\begin{aligned}
V&=\int_0^h \pi(r\cdot\frac{x}{h})^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h\right)\\
&=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3\\
&=\frac{1}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}
$$

2. 求所有的整数x, y,使得$x^2+xy+y^2=1$.

(程昊一供题)

分析 看到这个式子,我们能很容易地发现x, y都为正整数时不成立,因为$x^2+xy+y^2 \geq 1^2+1\times 1+1^2>1$.注意:我们在这里是利用**不等关系**导出的矛盾,所以说,这提示我们将要利用不等关系解决此题.更一般地,解决不定方程的基本方法就是:因式分解、同余、不等关系等.

解 若$xy>0$即$xy\geq 1$,则$x\neq 0, y\neq 0$,所以$x^2+xy+y^2\geq 1+1+1>1$,矛盾.

若$xy=0$,则通过枚举我们可以得到$(x,y)=(0,\pm 1)^{-}(\pm 1,0)$.

若$xy<0$,即$xy\leq -1$,我们将原方程做变形:

$$x^2+xy+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=1+xy \Leftrightarrow (x+y)^2=1+xy$$

由于平方的非负性,我们得到$1+xy\geq 0$,即$xy\geq -1$,又$xy\leq -1$,所以$xy=-1$.
于是枚举立得$(x,y)=(\pm 1,\mp 1)$.

综上:原方程的解为$(x,y)=(0,\pm 1)$或$(\pm 1,0)$或$(\pm 1,\mp 1)$.