每日一题(6.2)答案

选题:王一丁、李政毅

答案制作:程昊一

2022 年 1 月 16 日

1.证明$3^{2012}+4^{2013}$是5的倍数.

(王一丁供题)

分析 这道题是一个和同余有关的题目.我们记$a\equiv b(\mathrm{mod} m)$表示$a$和$b$除以$m$的余数相同.我们有以下几个常用结论:

(1) 若$a\equiv b(\mathrm{mod} m), c\equiv d(\mathrm{mod} m)$,则$a\pm c\equiv b\pm d(\mathrm{mod} m)$.

(2) 若$a\equiv b(\mathrm{mod} m), c\equiv d(\mathrm{mod} m)$,则$ac\equiv bd(\mathrm{mod} m)$

(3) 若$a\equiv b(\mathrm{mod} m)$,$n$为正整数,则$a^n\equiv b^n(\mathrm{mod} m)$.这一点可以从(2)推出.

解

$$\begin{aligned}3^{2012}+4^{2013}&=\left(3^2\right)^{1006}+\left(4^3\right)^{671}\\&=9^{1006}+64^{671}\\&\equiv(-1)^{1006}+(-1)^{671}\\&=0(\mathrm{mod} m)\end{aligned}$$

所以,$5\mid 3^{2012}+4^{2013}$.

2.不存在整数x,y,使得$x^2+y^2=2015$.

(李政毅供题)

解 我们先证明以下结论:对于任意整数n,有$n^2\equiv 0$或$1(\mathrm{mod}4)$.对此,我们分以下两种情况讨论:

(1) n为奇数,不妨设$n=2k+1$,k为整数.则 $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1\equiv 1(\mathrm{mod}4)$.

(2) n为偶数,此时显然有$n^2\equiv 0(\mathrm{mod}4)$.

那么,$x^2,y^2\equiv 0$或$1(\mathrm{mod}4)$,所以$x^2+y^2\equiv 0$或1或$2(\mathrm{mod}4)$.而$2015\equiv 3(\mathrm{mod}4)$,所以无论$x,y$为何值,都有$x^2+y^2\neq 2015$.命题得证.