每日一题(7.2)答案

选题:李衡岳、程昊一
答案制作:程昊一

2022 年 2 月 19 日

1.求所有的整数x, y,满足方程

$$(x^2-y^2)^2=16y+1.$$

(程昊一供题)

分析 我们发现,等号的左边是四次式,等式的左边是四次式,右边是一次式.因为x和y是整数,所以关于x和y的四次式与一次式相等的情况是不多的,因为从大小关系来说,四次式的绝对值一般都大于一次式的绝对值.那么,我们运用**不等估计**的方法,求出x或y的范围,这样就可以枚举了.

解 由于整数的离散性,以下两个式子必定会有一个成立:

$$\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^2\geq\left((y+1)^2-y^2\right)^2=(2y+1)^2\\ \left(x^2-y^2\right)^2\geq\left((y-1)^2-y^2\right)^2=(2y-1)^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4y^2+4y+1\leq 16y+1\\ 4y^2-4y+1\leq 16y+1\end{cases}$$

至少有一个成立. 即

$$\begin{cases}0\leq y\leq 3\\ 0\leq y\leq 5\end{cases}$$

至少有一个成立.又y是整数,所以y=0或1或2或3或4或5.

(1) $y=0$.此时原方程即为$x^4=1$,又x为整数,所以$x=\pm1$.

(2) $y=1$.此时原方程即为$(x^2-1)^2=17$,无整数解.

(3) $y=2$.此时原方程即为$(x^2-4)^2=33$,无整数解.

(4) $y=3$.此时原方程即为$(x^2-9)^2=49$,得$x=\pm4$.

(5) $y=4$.此时原方程即为$(x^2-16)^2=65$,无整数解.

(6) $y=5$.此时原方程即为$(x^2-25)^2=81$,得$x=\pm4$.

综上:原方程的解为$(x,y)=(0,\pm1)$或$(3,\pm4)$或$(5,\pm4)$.

2.我们假设有一个村庄,村庄里有很多户人家.每一户人都有一条狗,可能是正常的狗,也可能是疯狗.如果一个人发现自己的狗是疯狗,那么他会在当天晚上把自己的狗击毙.每一个人只可以判断其他人的狗是否为疯狗,每两个人之间也不能互相交流.一天,一位游客向全部的人宣布:"村庄里有疯狗!"当天晚上,没有人击毙自己的狗;第二天亦是如此;第三天有人击毙了自己的狗.问:村庄里有几条疯狗?
(李衡岳供题)

解 我们先考虑一种比较简单的情况,即村庄里只有一条疯狗.不妨设疯狗的主人是甲.甲得知了村庄里有一条狗,而且没有看到其他任何一条狗是疯狗,那么毫无疑问,甲一定知道自己的狗是疯狗,那么他会在当天晚上击毙自己的狗,与题设矛盾.

我们再来看有两条疯狗的情况.不妨设两条疯狗的主人为甲和乙.当天,甲和乙都看到了对方的狗是疯狗,所以不能判断自己的狗是否为疯狗,那么第一天晚上没有人把狗击毙,符合题设.第二天,甲看到乙没有击毙自己的疯狗,那么甲就知道,**除了乙的疯狗,必然存在另外一条疯狗,使得乙无法判断自己的狗.**但是甲只看到了一个乙的疯狗,所以他可以确认自己的狗是疯狗,那么他会在第二天晚上把自己的狗击毙.同理,乙也会把自己的狗在第二天击毙,与题设矛盾.

我们可以按同样的方法分析有三条疯狗的情况.不妨设甲,乙,丙的狗都是疯狗.从甲的角度考虑,若甲自己的狗不是疯狗,那么根据前面的讨论,乙和丙会在第二天晚上击毙自己的狗.可是事实却是前两天晚上并没有人击毙自己的狗.那么这意味着**除了乙和丙的疯狗,还有其他疯狗.**那么甲这时就可以断定自己的狗是疯狗.于是,甲会在第三天晚上击毙自己的狗.同理,乙和丙也会在第三天晚上击毙自己的狗,与题设吻合.

按照上面的逻辑,我们可以得出:若在第n天有人击毙了狗,那么整个村庄就有n条疯狗.

综上:村庄里有三条疯狗.