每日一题(3.1)答案

选题人:王一丁,李政毅

答案制作:程昊一

2021 年 12 月 26 日

1. **已知a,b,c为实数,且$a-b=4,ab+c^2+4=0$,求$a+b$的值.**

分析 我们会发现,我们关于c的了解非常少(因为c在整个题目中只出现了一次),似乎只有c^2为非负数这一条件,那我们就要思考如何去利用它.

解 由完全平方公式,我们有

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \tag{1}$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \tag{2}$$

$(1)-(2)$,得

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$$

即

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$$

所以,

$$\begin{aligned}ab+c^2+4&=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}+c^2+4\\&=\frac{(a+b)^2-4^2}{4}+c^2+4\\&=\frac{(a+b)^2}{4}-4+c^2+4\\&=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2\\&=0\end{aligned}$$

由于平方数的非负性(注意:我们在这里利用了关于c的唯一一个条件),我们有

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=0$$

即

$$a+b=0$$

所以,$a+b=0$.

2. **已知**$a+\frac{1}{a}=5$**,求**$\frac{a^4+a^2+1}{a^2}$**的值.**

分析　我们今后要知道一个结论:

$$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=(a+\frac{1}{a})^2-2$$

这可以直接由完全平方公式得来.这个结论的重要之处在于:已知$a+\frac{1}{a}$,则可以确定$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$.一般来说,我们已知$a+b$,并不能确定$a^2+b^2$,因为$(a+b)^2$的展开式中有“混合积”$2ab$.而在$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$中,“混合积”为$2\times a\times\frac{1}{a}=2$,是一个常数!因此已知$a+\frac{1}{a}$,则可以确定$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$.

解

$$\begin{aligned}\frac{a^4+a^2+1}{a^2}&=\frac{a^4}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}\\&=a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2+1\\&=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+1\\&=5^2-2+1\\&=24\end{aligned}$$

所以$\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=24$.

注　也可直接解方程$a+\frac{1}{a}=5$,但这样不但要解二次方程,还要进行大量的根式运算,不仅麻烦,而且非常容易出错,千万不要这样做.