每日一题(5.1)答案

选题:门宇翎、李东宸

答案制作:程昊一

2022 年 1 月 11 日

1. 若n为正整数,且2^n-1为素数,证明:n也为素数.
(门宇翎供题)

分析 我们要证明n为素数,一种最暴力的方法是枚举所有的n,然后逐个验证,但在这道题中显然是行不通的.还有一种办法,我们利用**反证法**,假设n为合数,导数矛盾,证明了n为素数.

解 若n不为素数,则一定存在**不为1**的n_1,n_2,使得$n=n_1\cdot n_2$.则

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{n_1\cdot n_2}-1\\&=(2^{n_1})^{n_2}-1\\&=(2^{n_1}-1)[(2^{n_1})^{n_2-1}+(2^{n_1})^{n_2-2}+\cdots+2^{n_1}+1]\end{aligned}$$

我们在这里把2^n-1分解为两个大于1的数的乘积,所以2^n-1为合数,与题目矛盾!

所以假设不成立,原命题成立.

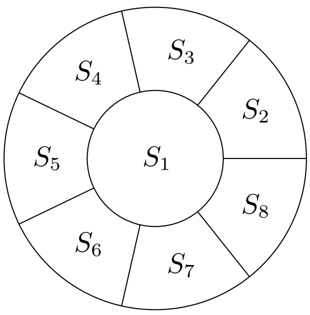
注 我们利用了一个公式:

$$a^n-1=(a-1)(a^{-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$$

更一般地:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

2. 如图,两个同心圆构成的圆环被均匀分割成7份,联通中间的校园共8个区域.若要给这8个区域着色,至少要用几种颜色,才能使相邻区域染不同的颜色?
(李东宸供题)



解 将8个区域分别记为$S_1, S_2, \ldots, S_8$.不妨设S_1为红色.则$S_2, S_3, \ldots, S_8$都不为红色.

如果$S_2, S_3, \ldots, S_8$中只有两种颜色,设为黄色和蓝色.我们不妨设S_2为黄色.则S_3为蓝色.所以,S_4为黄色,$\ldots$, S_7为蓝色.这时我们发现,无论S_8是黄色还是蓝色,都会导致矛盾.所以,$S_2, S_3, \ldots, S_8$中不能只有两种颜色.

所以,$S_2, S_3, \ldots, S_8$中至少有三种颜色,连同S_1,共4种颜色.构造如下: