



# 组合风格代数讲义

作者：刘亦乐 程昊一

# 目录

<b>第 1 章</b>	<b>离散变量不等式</b>	<b>1</b>
1.1	局部不等式 . . . . .	1
1.2	归纳、递推方法 . . . . .	6
1.3	排列不等式 . . . . .	9
1.4	整数离散性以及经典方法 . . . . .	23
<b>第 2 章</b>	<b>取整函数型问题</b>	<b>43</b>
2.1	线性与凸性 . . . . .	43
2.2	分组与配凑 . . . . .	53
2.3	大小分析与组合性质 . . . . .	63
2.4	高等观点与技巧 . . . . .	84
<b>第 3 章</b>	<b><math>\min, \max</math>与绝对值问题</b>	<b>98</b>
3.1	绝对值问题 . . . . .	98

# 序言

本书历经波折,终于问世. 大部分内容由笔者在学业之余录入. 以2024年6月完成的手写版《组合风格代数讲义》为基础加以改善完成此书,并在录入期间不断增添各种最新的问题以达时效.

接续《非传统不等式习题集》,这本书是对非传统不等式一定意义上的整理重组,而并非归纳总结. 非传统不等式,是取之不尽,用之不竭的,是天地造化,而非常人可以偏盖全的. 永远不能否认的是,总是有人能提出大家从未见过的问题,甚至是这世界上从未出现的.

我们不可能在有生之年将其尽数总结,但依然可以以一些明显的外观和内涵去区分一些组合风格不等式,于是就有了本书的7个大章,并根据相似性将近年出现的较有价值的非传统不等式收录入此书. 其中有相当一部分是笔者的原创题.

这7个大章,基本上可以包含大多非传统不等式. 但我们依旧强调,这仅是整理重组,而非归纳总结. 不过笔者依然尽力对于其中一些题组提出一些方法或思考模式,以接近对现有的内容去归纳总结,是大家可以参考的.

不得不提出非传统不等式的定义、价值、创造性以及解决的大方向. 这便是我们在本书的序言部分加上《非传统不等式习题集》前言的原因,对其定义我们便不再赘述. 解决非传统不等式的关键绝非对之前出现过的类似做法的机械模仿,而是最基本的分析和代数基本功. 我们反对因在考试或练习题中出现含已有思想的问题,快速解决后沾沾自喜的行为: 这是没有意义的训练. 但与此同时,我们并不否定了解积累新技巧的价值. 我们应当做的是,加强自身分析能力与基本功,以便能应对前所未有的挑战. 也许大家看到现在的问题很多都有一定的套路,但这只是假象: 谁会在无穷递降法出现之前意识到这样一个神奇的方法? 时代是不断更迭的,非传统不等式也会一代代更迭,涌现出各种各样全新的看待问题的视角,在时间之长河中熠熠生辉.

我们应当在做题中不断自我创新,并积累自己的创新思路,更重要的是创新过程. 考虑到这样的特性,这本书最精华的“分析”部分应运而生,每道题都会带着大家考虑问题的分析,从最基本、最原始的思路讲起,让每一步都有迹可寻,每一个创造性思维都有源可依. 在本书中,笔者尽量使每一道题过程都回归原始,让大家看清每一道难题背后的思维脉络,并争取在无数分析的引领下,开创自我创新之道. “分析”部分也正好翻越了非传统不等式难以归总的高山,从观点思维去战胜技巧的积累,私以为算是本书的一个亮点. 但应注意,“分析”部分会包含一些非正式的论述,这些论述不能作为严格的证明过程,只是帮助大家建立直观感受以启发大家思考.

本书大多数节末会给出一些习题,读者可以选择性考虑. 由于习题中基本并不会出现例题中未提到的手法,所以笔者决定不给出习题的解答,欢迎各位读者积极讨论.

定理与引理也是本书的一个小特色,是建议大家积累的一些小结论,可能会成为有些问题中微不足道或重于泰山的一步.

文中会插入一些带下划线的楷体字,大多是起(可能非正式的)解释说明的作用,有些是对

一些问题思想或观点的总结, 请读者仔细阅读体会这些内容.

由于笔者经验匮乏, 本书中难免有不当之处, 欢迎大家批评指正. 若发现本讲义的任何错误与疏漏, 或是有对于改进此讲义的建议和意见, 欢迎联系我们.

笔者保留对此讲义(PDF文件和.tex源文件)的文化产权. 此讲义仅用作学习交流使用, 请勿以盈利为目的对此讲义进行修改与转载, 笔者保留对上述行为追究法律责任的权利.

刘亦乐 (QQ: 3995382996) 程昊一 (QQ: 487582493)

2026年-月-日



## 《非传统不等式习题集》序言

“一年前,我第一次踏入联赛考场.那是近几年第一次代数放三,天真的我看了一个小时后一无所获.几个月前,考前的我做了许多非传统的不等式问题,再次踏入考场,迎来的却是一道‘陈’的代数四.我明白,我站在了一个‘时代的边缘’……”

联赛之前未了结的心愿便是整理一些这样的问题.这里我们便整理了一些非传统的不等式问题,以便大家学习参考.

上文提及的非传统不等式,是指解答中不完全依赖代数变形与放缩技巧,而使用了其他模块的技巧、方法或思想的不等式.作为对比,我们分别列出两道传统与非传统的不等式题目:

**传统不等式:** 非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$ . 求以下表达式的最大值:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} - n \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}.$$

**非传统不等式:** 设 $m, n$ 是正整数,  $x_{i,j} \in [0, 1]$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ). 求证:

$$\prod_{j=1}^n \left(1 - \prod_{i=1}^m x_{i,j}\right) + \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - x_{i,j})\right) \geq 1.$$

虽然这个不等式可以通过数学归纳法,运用传统方法证明,但这个不等式的“非传统”之处在于它有一个惊人的基于概率的解法:

构造一个 $m$ 行 $n$ 列的表格,将每个格子随机地染成黑、白两种颜色.令第 $i$ 行、第 $j$ 列的格子为黑色的概率为 $x_{i,j}$ . 则

$$\prod_{j=1}^n \left(1 - \prod_{i=1}^m x_{i,j}\right)$$

表示不存在全部为黑格的一列的概率,此事件记为A;

$$\prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - x_{i,j})\right)$$

表示不存在全部为白格的一行的概率,此事件记为B. 由于 $\overline{A}$ (即存在全部为黑格的一列)与 $\overline{B}$ (即存在全部为白格的一行)不可能同时发生,因此A与B之一必然发生,故

$$\prod_{j=1}^n \left(1 - \prod_{i=1}^m x_{i,j}\right) + \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^n (1 - x_{i,j})\right) = P(A) + P(B) \geq 1.$$

这些问题往往跳脱了传统的圈套,不再是满篇的代数变形和一些常见的通法套路,考验我们的创新性思维.大多数这样的问题都有着极好的选拔意义,在很多大型比赛中,都有它们的身影.我们针对这样一类问题,简单梳理了一些赛题.该习题集按照题目来源分为若干节,节内按照时间逆序排列.但由于时间和精力有限,我们未能对题目的难度进行排序,因此可能会出现题目难度变化过大的情况,敬请谅解.因此若遇到实在无法解决的难题,不妨先跳过,等水平提升后再回头补上.所有题目均来自于微信数之谜小程序,题目答案也可以在数之谜相关问题中查询,如果没有答案,后期我们会根据自身的时间与精力在数之谜相关问题上分享解答.

编者保留对此习题集(PDF文件和.tex源文件)的知识产权. 此习题集仅用作学习交流使用, 请勿以盈利为目的对此习题集进行修改与转载, 编者保留对上述行为追究法律责任的权利.

最后, 感谢我们的老师, 如果没有他的建议, 这本习题集不会出现. 感谢在编写习题集时提出宝贵建议的所有老师和同学. 若发现本习题集的任何错误与疏漏, 或是有对于改进此习题集的建议和意见, 欢迎联系我们.

刘亦乐 (QQ: 3995382996) 程昊一 (QQ: 487582493)

2023年11月17日

# 第1章 离散变量不等式

离散变量不等式, 即自变量取离散值的不等式. 近几年, 离散变量不等式在各大考试中频频亮相, 往往相当有难度. 下面我们从以下几个角度入手分析.

## 内容提要

□ 局部不等式

□ 归纳、递推方法

□ 排列不等式

□ 整数的离散性以及传统方法

## 1.1 局部不等式

在离散不等式中, 大多数的局部不等式都是由离散性得到的. 例如, 对于任意的整数 $a, n$ , 都有

$$(n-a)(n-(a+1)) \geq 0.$$

或者说, 对于正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 若 $\sum_{i=1}^n 1/a_i < 1$ , 则<sup>1</sup>

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1 - \frac{1}{\text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)}.$$

这个不等式的证明只需要通分即可. 这样的局部不等式还有很多. 对于局部不等式方法, 有时我们可以使用归纳的方法.

### 例题 1.1.1

给定正整数 $n$ , 对于 $n$ 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 满足 $\sum_{k=1}^n a_k = 3n - 2$ , 求

$$\sum_{k=1}^n \{\sqrt{a_k}\}$$

的最大值.

**分析** 总体上, 我们希望 $\sum_{k=1}^n \{\sqrt{a_k}\}$ 更大. 联想到“将某一正整数拆分为若干正整数之和使其积最大”的问题, 再考虑到 $\sum_{k=1}^n a_k = 3n - 2$ , 可以考虑将 $3n - 2$ 拆分为若干2和3的和. 我们有

$$\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414, \quad \{\sqrt{3}\} = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732.$$

如果我们将 $3n - 2$ 拆分为若干个 $m$ 之和, 则结果大约为 $(3n - 2) \{\sqrt{m}\} / m$ . 故我们要找到使 $\{\sqrt{m}\} / m$ 最大的 $m$ . 我们发现

$$\frac{\{\sqrt{2}\}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0.2, \quad \frac{\{\sqrt{3}\}}{3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3} \approx 0.24 > \frac{\{\sqrt{2}\}}{2}.$$

故将所有的 $a_i$ 尽可能取3是最佳的.

<sup>1</sup>在没有歧义的情况下, 有时会用 $(a, b)$ 表示 $\text{gcd}(a, b)$ , 用 $[a, b]$ 表示 $\text{lcm}(a, b)$

由此考虑, 不难得出下列解答:

**解** 一方面, 取  $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2} = 3$ ,  $a_{n-1} = a_n = 2$ , 得

$$\sum_{k=1}^n \{\sqrt{a_k}\} = (n-2) \cdot (\sqrt{3}-1) + 2(\sqrt{2}-1).$$

下面证明最大值为  $(n-2) \cdot (\sqrt{3}-1) + 2(\sqrt{2}-1)$ .

(这是“分析”中的想法,)我们先证明, 对任意的正整数  $m$ , 都有

$$\frac{\{\sqrt{m}\}}{m} \leq \frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

这是不难证明的: 对  $m \geq 5$ , 有

$$\frac{\{\sqrt{m}\}}{m} \leq \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

对  $m = 1, 2, 3, 4$  分别验证即可.

回到原题. (经过上面的讨论, 我们可以知道, 对于不等于3的  $a_i$ , 我们可以经过放缩, 将其放缩为所有的不等于3的  $a_i$  均为2的情况. 具体来说, 我们可以)设

$$A = \{i : a_i = 3\}, B = \{i : a_i \neq 3\}.$$

故由引理,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i}) &= \sum_{i \in A} \frac{\sqrt{3}-1}{3} a_i + \sum_{i \in B} \{\sqrt{a_i}\} \\ &\leq (\sqrt{3}-1)|A| + \sum_{i \in B} a_i \frac{\sqrt{2}-1}{2} = (\sqrt{3}-1)|A| + \frac{\sqrt{2}-1}{2}(3n-2-3|A|). \end{aligned}$$

这是一个关于  $|A|$  的单调递增的一次函数. (我们当然希望  $|A|$  的所有可能值都要小于取等时候的

值, 即  $n-2$ . 但很不幸,  $|A|$  确实有可能取到  $n-1$ . 为此, 我们可以)单独讨论  $|A| = n-1$  的情况. 此时  $a_i$  仅能由  $n-1$  个3和一个1组成, 当然要小于我们想要证明的最大值. 故我们只需对  $|A| \leq n-2$  的情形证明. 此时有

$$(\sqrt{3}-1)|A| + \frac{\sqrt{2}-1}{2}(3n-2-3|A|) \leq (n-2) \cdot (\sqrt{3}-1) + 2(\sqrt{2}-1).$$

故我们完成了证明. ■

### 例题 1.1.2

给定正整数  $n$ . 对于  $n$  个互不相同的正整数  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ , 令  $x_{n+1} = x_1$ , 求

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k x_{k+1}$$

的最小值.

**分析** 不难给所求式配方:

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k x_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})^2.$$



故我们只需关注相邻的 $x_i$ 与 $x_{i+1}$ 的差的绝对值. 我们希望这些绝对值尽可能小, 于是不难猜想如下取等:

$$1, 3, \dots, n, n-1, n-3, \dots, 2 \quad (n \text{ 为奇数})$$

$$1, 3, \dots, n-1, n, n-2, \dots, 2 \quad (n \text{ 为偶数})$$

可以发现, 此时对于任意的 $i$ , 均有 $|x_i - x_{i+1}| \in \{1, 2\}$ . 那么我们就可以凑出一个重要的局部不等式:

$$(|x_i - x_{i+1}| - 1)(|x_i - x_{i+1}| - 2) \geq 0 \Rightarrow |x_i - x_{i+1}|^2 \geq 3|x_i - x_{i+1}| - 2.$$

此即本节开头所提到的局部不等式. 考虑这样的局部不等式, 一方面是考虑到取等, 另一方面是考虑到一次式更好处理.

化为一次式后, 就相当于求 $\sum_{i=1}^n |x_i - x_{i+1}|$ 的最小值, 而这是不困难的: 取出最大和最小的元素即可. 具体操作如下:

**解** 配方得

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k x_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})^2.$$

由于 $|x_i - x_{i+1}|^2 \geq 3|x_i - x_{i+1}| - 2$ , 故

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})^2 \geq \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i+1}| - n.$$

设

$$x_t = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}, x_s = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}.$$

则

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k+1}| - 2n &= 3 \left( \sum_{i=t}^{s-1} |x_i - x_{i+1}| + \sum_{i=s}^{t-1} |x_i - x_{i+1}| \right) - 2n \quad (\text{这里的求和应理解为循环求和}) \\ &\geq 3 \left( \left| \sum_{i=t}^{s-1} (x_i - x_{i+1}) \right| + \left| \sum_{i=s}^{t-1} (x_i - x_{i+1}) \right| \right) - 2n \\ &= 6|x_t - x_s| - 2n. \end{aligned}$$

由于各 $x_i$ 互不相同, 故

$$6|x_t - x_s| - 2n \geq 6(n-1) - 2n = 4n - 6.$$

故

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k x_{k+1} \geq 2n - 3.$$

取等即为“分析”中所猜测的交错排列的情形. ■

**例题 1.1.3**

对于  $x_1, x_2, \dots, x_{131} \in \mathbb{N}^+$ , 满足

$$\sum_{i=1}^{131} x_i^2 = 1874,$$

求  $\sum_{i=1}^{131} x_i$  的最大值.

**分析** 这是最经典的离散不等式, 如果变量没有整数的限制, 那么在平方和给定的情况下为了使和最大, 所有的变量应当相同. 加上正整数的限制, 应当有

$$x_i \approx \sqrt{\frac{1874}{131}} \approx 3.782.$$

即, 变量应当尽量取3和4. 根据这个取等, 我们可以构造出如下的局部:

$$(x_i - 3)(x_i - 4) \geq 0 \Rightarrow x_i^2 \geq 7x_i + 12.$$

**解** 由上面给出的局部, 有

$$7 \sum_{i=1}^{131} x_i \leq \sum_{i=1}^{131} x_i^2 + 12 \times 131 = 1874 + 1572.$$

再由  $x_1, x_2, \dots, x_{131} \in \mathbb{N}^+$ , 得到

$$\sum_{i=1}^{131} x_i \leq 492.$$

取等是不难解出的:  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = \dots = x_{31} = 3, x_{32} = \dots = x_{131} = 4$ . ■

**例题 1.1.4**

对于  $a_1, a_2, \dots, a_{20} \in \mathbb{N}^+$ , 满足

$$\sum_{i=1}^{20} a_i^2 = 2024,$$

求  $\sum_{i=1}^{20} ia_i$  的最大值.

**分析** 若没有正整数的限制, 我们应有

$$\sum_{i=1}^{20} a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{20} i^2 \sum_{i=1}^{20} a_i^2} = \sqrt{2870 \cdot 2024} \approx 2410.$$

取等时, 应有

$$\frac{a_i}{i} \approx \sqrt{\frac{2024}{2870}} \approx 0.839 \approx \frac{5}{6}.$$

于是我们可以肯定, 取等时,  $a_i$  一定在  $[5i/6]$  附近. 我们可以不妨设

$$a_i = \left\lceil \frac{5i}{6} \right\rceil + x_i, \quad x_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

同时我们要满足题目条件, 即

$$\sum_{i=1}^{20} 2 \left\lceil \frac{5}{6} i \right\rceil x_i + \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 2024 - \sum_{i=1}^{20} \left\lceil \frac{5}{6} i \right\rceil^2.$$

经过尝试, 可以发现取等:

$$1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 14, 14, 15, 16, 17.$$

此时答案为2409. 下面我们证明这确实是最小值. 为此我们需要利用离散性, 如下:

解


$$\sum_{i=1}^{20} (6a_i - 5a_i)^2 \geq \sum_{3|i, 2 \nmid i} 1 + \sum_{3 \nmid i, 2|i} 4 = 35.$$

故

$$30 \sum_{i=1}^{20} ia_i \leq 36 \sum_{i=1}^{20} a_i^2 + 25 \sum_{i=1}^{20} i^2 - 35 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} ia_i \leq 2409.65.$$


结合整数的离散性, 我们便完成了证明. ■

## 练习 1.1

 **练习 1.1.1** 给定正整数 $n$ , 对正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ , 满足


$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 + 1.$$


求 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ 的最小值.

 **练习 1.1.2** 给定三个正整数 $m, n, t$ 满足 $m < t, n < t$ . 对 $2t$ 个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_t; y_1, y_2, \dots, y_t$ , 满足

$$\sum_{i=1}^t x_i = m, \quad \sum_{i=1}^t y_i = n$$

求 $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 的最大值.


 **练习 1.1.3** 对于正整数 $n$ , 设 $\varphi(n)$ 为Euler Phi函数,  $\sigma(n)$ 为 $n$ 的所有正因子之和. 求证: 对 $n > 1$ , 有 $n^2/2 < \varphi(n)\sigma(n) < n^2$ . 进一步, 证明: 对 $n > 1$ , 有 $\varphi(n)\sigma(n) \geq 6n^2/\pi^2$ .

 **练习 1.1.4** 设 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 为非负整数, 同时满足以下条件:

- (1) 存在正整数 $k \leq 100$ , 使得 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ , 而当 $i > k$ 时 $a_i = 0$ ;
- (2)  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 100$ ;
- (3)  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 100a_{100} = 2024$ .


求 $a_1 + 2^2a_2 + 3^2a_3 + \dots + 100^2a_{100}$ 的最小可能值. (提示: 选择合适的 $u, v$ , 对下标 $i$ 利

用  $(i-u)(i-v) \geq 0$ .)

 **练习 1.1.5** 正整数  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ , 满足  $m > n > 2, x_1 < x_2 < \dots < x_m < y_1 < y_2 < \dots < y_n$ . 若  $\sum_{i=1}^m x_i \geq \sum_{i=1}^n y_i$ , 求证:

$$\prod_{i=1}^m x_i \geq \prod_{i=1}^n y_i.$$

(提示: 考虑函数  $f(x) = \ln x/x$ .)

 **练习 1.1.6** 设正整数  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  ( $a_{11} = a_1$ ) 满足  $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 2024$ , 求  $\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$  的最小可能值. (解析见数之谜原创比赛“MAS原创代数”)

## 1.2 归纳、递推方法

归纳方法在离散变量不等式中运用较少, 因为大多数问题不具有良好的递推结构. 我们在此列举一些具有递推结构的问题.

### 例题 1.2.1

正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 满足

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} < 1,$$

求  $\sum_{i=1}^n 1/a_i$  的最大值.

**分析** 可以从  $n$  较小的情况开始尝试:

$n = 2$ : 很容易尝试出来  $1/2 + 1/3 = 5/6$ .

$n = 3$ : 经过尝试也可以得出  $1/2 + 1/3 + 1/7$  是最优结果.

注意到上面两个式子中都含有  $1/2 + 1/3$ , 这提示我们,  $n+1$  时的构造可能就是由  $n$  时的构造加一个分数而得来的. 具体来说, 联想到  $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$ , 将  $1/6$  换为较小一点的  $1/7$ , 便得到了  $n = 3$  的构造. 那么对于  $n = 4$ , 由  $1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1$ , 将  $1/42$  换为  $1/43$ , 便得到了构造.

以上的讨论很明确地提示我们, 可以使用归纳法. 具体如下:

**解** 设数列  $r_1 = 2, r_{n+1}^2 = r_n^2 - r_{n+1}$ , 下面我们用数学归纳法(奠基是显然的)证明

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}.$$

由数学归纳法不难证明

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} = 1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^n r_i}.$$

由本章开头提到的不等式, 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

若  $a_1 a_2 \cdots a_n \leq r_1 r_2 \cdots r_n$ , 则不等式已经成立; 否则, 设  $a_1 a_2 \cdots a_n > r_1 r_2 \cdots r_n$ .

设原命题对小于  $n$  的数  $n$  都成立, 考虑  $n$  时的命题. 不妨设  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ . 我们声明: 存在  $t$ , 满足  $1 \leq t \leq n$ , 使得

$$\sum_{i=t}^j \ln a_i > \sum_{i=t}^j \ln r_i, \quad \forall t \leq j \leq n.$$

否则, 对任意的  $1 \leq t \leq n$ , 存在  $t \leq j \leq n$ , 满足  $\sum_{i=t}^j \ln a_i \leq \sum_{i=t}^j \ln r_i$ . 那么, 存在  $1 \leq j_1 \leq n$ , 使得

$$\sum_{i=1}^{j_1} \ln a_i \leq \sum_{i=1}^{j_1} \ln r_i.$$

对  $j_1 + 1$ , 存在  $j_1 < j_2 \leq n$ , 满足

$$\sum_{i=j_1+1}^{j_2} \ln a_i \leq \sum_{i=j_1+1}^{j_2} \ln r_i.$$

类似地, 对于  $j_2 + 1$  同样存在满足上述条件的  $j_3$ . 由于  $j_i$  关于  $i$  严格递增, 故必定存在  $s$  使得  $j_s = n$ . 记  $j_0 = 1$ . 将

$$\sum_{i=j_{k-1}}^{j_k} \ln a_i \leq \sum_{i=j_{k-1}}^{j_k} \ln r_i, \quad \forall 1 \leq k \leq s$$

共  $s$  个式子相加, 得到

$$\sum_{i=1}^n \ln a_i \leq \sum_{i=1}^n \ln r_i.$$

矛盾!(事实上, 上述过程只不过是反复利用反证假设将  $[1, n]$  划分为了多个区间, 对每一段利用反证假设, 相加得到矛盾.)

故声明成立, 回到原题. 取出满足“声明”中条件的  $t$ . 我们有:  $\{-\ln a_i\}_{i=t}^n, \{-\ln r_i\}_{i=t}^n$  关于  $i$  为不增的数列, 且

$$\sum_{i=t}^j (-\ln a_i) < \sum_{i=t}^j (-\ln r_i), \quad \forall t \leq j \leq n.$$

对  $\{-\ln a_i\}_{i=t}^n, \{-\ln r_i\}_{i=t}^n$  以及函数  $e^x$  使用 Karamata 不等式(见 1.4 节), 有

$$\sum_{i=t}^n \exp(-\ln a_i) < \sum_{i=t}^n \exp(-\ln r_i) \Rightarrow \sum_{i=t}^n \frac{1}{a_i} < \sum_{i=t}^n \frac{1}{r_i}.$$



对  $t-1$  使用归纳假设得到

$$\sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{a_i} \leq \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{r_i}.$$

以上两式相加即得结论. ■

### 例题 1.2.2

设  $n$  为正整数,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  是和为  $n$  的非负实数, 证明:

$$\sum_{k=0}^n 2^k x_k^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

**分析** 一个重要的观察是, 当  $x_k$  递减时求和式更小, 这时, 我们便会观察到这个问题存在的递推结构:

$x_0$  放在最前面, 后面是  $2 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} x_k^2$ , 这明显是一个递推结构, 考察对固定的  $x_0$ , 即固定了

$$\sum_{k=1}^n x_k = n - x_0.$$

我们去考察  $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} x_k^2$  的最小可能值, 这可以使用归纳假设解决.

事实上, 该问题可以不使用归纳法证明, 作为解法2; 同时, 不难发现这个下界是最优的, 请读者自行考虑.

**解** 对正整数  $n$  归纳证明, 对正整数  $m$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_m$  是和为  $n$  的非负实数, 有

$$\sum_{k=0}^n 2^k x_k^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

当  $n=1$  时显然成立, 设对小于  $n$  时成立, 当  $n$  时: ( $n \geq 2$ )

不失一般性, 设  $x_0 \neq 0$ , 否则考虑最小的  $k$  使得  $x_k \neq 0$ , 令  $y_i = x_{i+k-1}$  ( $1 \leq i \leq m$ ), 其中下标  $\text{mod } m$  理解, 那么不难发现  $\sum_{k=0}^n 2^k x_k^2 \geq \sum_{k=0}^n 2^k y_k^2$ .

由归纳假设,

$$\sum_{k=1}^m 2^k x_k^2 \geq (n - x_0)(n - x_0 + 1),$$

于是就有:

$$\sum_{k=0}^m 2^k x_k^2 \geq (n - x_0)(n - x_0 + 1) + x_0^2 \geq \frac{n(n+1)}{2},$$

命题得证. ■

解

$$\sum_{k=0}^n 2^k x_k^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{x_k} (2j-1)2^k \geq \sum_{l=1}^n l = \frac{n(n+1)}{2}.$$

其中, 最后一个不等号是因为  $(2j-1)2^k$  是两两不同的数. 命题得证. ■

### 1.3 排列不等式

排列不等式, 指的是给定了  $n$  个数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  个变量  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 满足  $\{a_i : 1 \leq i \leq n\} = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ , 求  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  的最值或取值范围的问题. 这是一类优雅而较为困难的问题, 往往不易入手.

#### 例题 1.3.1

变量  $a_1, a_2, \dots, a_{20}$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_{20}\} = \{1, 2, \dots, 20\}$ . 求

$$M = \max_{1 \leq k \leq 20} \{k^2 a_k\}$$

的最小值.

**分析** 显然让  $a_i$  倒序更好. 此时有  $a_i = 21 - i$ , 那么

$$k^2(21-k) = \frac{1}{2}k^2(42-2k) \leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2k+42-2k}{3} \right)^3 = \frac{1}{2} \cdot 14^3.$$

取等时  $k = 14$ . 此时  $M = 14^2 \cdot 7$ . 由于  $a_i$  ( $i \geq 14$ ) 的系数都很大, 故可以直接如下证明:

**解** 令  $a_i = \max_{14 \leq k \leq 20} \{a_k\}$ , 则显然有  $i \geq 14$ ,  $a_i \geq 7$ . 则  $M \geq i^2 a_i \geq 14^2 \cdot 7$ . ■

#### 例题 1.3.2

变量  $a_i, b_i, c_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) 满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_6\} = \{a_1, b_2, \dots, b_6\} = \{c_1, c_2, \dots, c_6\} = \{1, 2, \dots, 6\}$ . 求最小值:

$$\sum_{k=1}^6 a_k b_k c_k.$$

**分析** 我们可以通过如下不断调整的方法求出取等条件. 不妨设  $a_i = i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . 暂时先取  $b_i = -, c_i = 7 - i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ). 将这 18 个数排成矩阵, 并在第四行写上  $b_i c_i$  对应乘积:

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
6	10	12	12	10	6

此时我们当然希望 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i c_i\}$ 是逆序关系, 所以我们现在调整第四行 $\{b_i c_i\}$ 的顺序(当然第二行和第三行也要跟着调整), 使得第四行与第一行构成逆序关系, 如下:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 12 & 12 & 10 & 10 & 6 & 6 \end{array}$$

此时我们可以对第一行和第二行采取同样的操作: 将第四行替换为 $\{a_i b_i\}$ , 如下:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 5 & 36 \end{array}$$

现在我们调整一、二、四行, 使得第四行与第三行构成逆序关系, 并且将第四行换为此时的 $\{b_i c_i\}$ :

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 8 & 12 & 5 & 10 & 18 & 6 \end{array}$$

现在调整二、三、四行, 使得第四行与第一行构成逆序关系, 并将第四行换为此时的 $\{a_i b_i\}$ :

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 8 & 5 \\ 15 & 8 & 30 & 8 & 3 & 6 \end{array}$$

调整一、二、四行, 使得第四行与第三行构成逆序关系, 如下:

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

此时发现, 如果再任选两行进行上述操作, 则不需要再调整顺序, 因为逆序关系已经自动满足. 我们有理由猜测此即取等条件.

此时有

$$\sum_{k=1}^6 a_k b_k c_k = 162.$$

而如果我们使用最基础的放缩, 就会有

$$\sum_{k=1}^6 a_k b_k c_k \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\sum_{k=1}^6 a_k b_k c_k} = \sqrt{160 \cdot 162}.$$

这已经非常接近我们构造出的取等条件. 我们可以利用整数的离散性, 通过**改进放缩**来得到我们想要的答案:

**解** 设  $d_i = a_i b_i c_i$ . 由

$$\sqrt[6]{\prod_{k=1}^6 d_k} = 26,$$

结合各  $d_i$  不可能等于 26 (因为 26 有素因子 13) 知存在  $i, j$ , 使得

$$d_i \geq 27, d_j \leq 25.$$

则

$$\sum_{k=1}^6 d_k = \left(\sqrt{d_i} - \sqrt{d_j}\right)^2 + 2\sqrt{d_i d_j} + \sum_{k \neq i, j} d_k \geq \left(\sqrt{27} - \sqrt{25}\right)^2 + \sqrt{160 \cdot 162} > 161.$$

(这里将  $d_i + d_j$  写成  $(\sqrt{d_i} - \sqrt{d_j})^2 + 2\sqrt{d_i d_j}$  的动机, 就是由于  $d_i$  与  $d_j$  之间存在距离, 故明显地将均值不等式放缩的误差  $(\sqrt{d_i} - \sqrt{d_j})^2$  写出; 均值不等式的放缩误差一般都与变量之间的距离有关, 再根据条件  $d_i \geq 27, d_j \leq 25$  就可以达到改进放缩的效果.) 故由整数的离散性得  $\sum_{i=1}^6 d_i \geq 162$ . ■

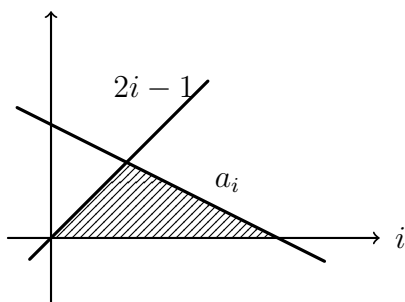
### 例题 1.3.3

变量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . 求

$$\sum_{i=1}^n \min\{a_i, 2i - 1\}$$

的最小值. (有关最大值、最小值函数的问题将在下一章详细介绍)

**分析** 我们当然希望  $\min$  函数可以筛选出尽可能小的数. 很容易想到将  $a_i$  逆序排列, 如下图所示:



阴影部分面积可以近似看做求和的结果. 可以算出此时答案为  $\lfloor (n^2 + n + 1)/3 \rfloor$ . 我们可以证明如下:

解

$$\sum_{i=1}^n \min\{a_i, 2i + 1\} \geq \{a_1, a_2, \dots, a_n, \{2i + 1\}_{i=1}^n\} \text{ 中最小的 } n \text{ 个数之和} = \left\lfloor \frac{n^2 + n + 1}{3} \right\rfloor.$$

### 例题 1.3.4

变量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . 求

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor$$

的最小值.

**分析** 可以从较小的情况入手.

$n = 3$ : 不难发现最小值为

$$\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 2.$$

$n = 4$ : 不难发现最小值为

$$\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor = 3.$$

$n = 5$ : 不难发现最小值为

$$\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor = 3$$

$n = 6$ : 不难发现最小值为

$$\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{6} \right\rfloor = 3.$$



$n = 7$ : 不难发现最小值为

$$\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{7} \right\rfloor = 3.$$

$n = 8$ : 不难发现最小值为

$$\left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{8} \right\rfloor = 4.$$

如果读者亲自试着构造出了以上最小值, 大概会建立这样的直觉: 应当利用取整函数尽可能地“浪费”掉 $a_i$ . 比如说, 应当出现大量的 $a_i = i - 1$ , 因为此时 $\lfloor a_i/i \rfloor = \lfloor (i-1)/i \rfloor = 0$ , 这极大地“浪费”掉了 $a_i$ . 更次一点地, 对于那些不能保证 $a_i = i - 1$ 的 $a_i$ , 应当尽量保证 $a_i = 2i - 1$ 或 $a_i = 2i - 2$ , 此时 $\lfloor a_i/i \rfloor = 1$ , 也“浪费”了很多.

为了更好地说明这一点, 我们可以取特例 $n = 2^m$ . 对于 $2^k < i \leq 2^{k+1}$  ( $1 \leq k \leq m-1$ ), 可以取

$$a_{2^k+1} = 2^{k+1} - 1, a_{2^k+2} = 2^k + 1, a_{2^k+3} = 2^k + 2, \dots, a_{2^{k+1}-1} = 2^{k+1} - 2, a_{2^{k+1}} = 2^{k+1} - 1.$$

这样做的好处, 就在于

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{k+1}-1}{2^k+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^k+1}{2^k+2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^k+2}{2^k+3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \right\rfloor = 1.$$

整整 $2^k$ 项的求和竟然只有1. 由此, 以及上面构造的 $n = 3, 4, \dots, 8$ 的最小值, 可以猜测最小值为

$$1 + \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

下面我们证明最小值确实是这样的. 提供两种证法, 一种基于偏组合的递归, 另一种基于一个局部不等式.

**解** 设 $n$ 时的最小值为 $x_n$ . 我们利用递归的思想处理 $x_n$ (以下设 $n \geq 3$ ):

将1到 $n$ 分为两部分:  $A = \{1, 2, \dots, k\}$ 与 $B = \{k+1, k+2, \dots, n\}$ , 其中 $k = \lfloor n/2 \rfloor$ . (这样划分的目的, 是为了找出 $x_k$ 与 $x_n$ 的关系; 在上文的构造中, 我们理应有 $x_n \geq x_k + 1$ . 我们只需要找出一处 $x_n$ 比 $x_k$ 多的一处1即可. 于是,) 考虑 $n$ 的位置: 设 $a_i = n$ (显然 $n$ 所在的分式更容易制造出我们想要的那个“1”). 分类讨论:

(1) 若 $i \in B$ . 则

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor + \sum_{i=k+1}^n \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor \geq x_k + \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor = x_k + 1.$$

由此得 $x_n \geq x_k + 1$ .

(2) 若  $i \in A$ . 则  $i \leq k, n - i \geq k$ , 且

$$\left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{n-i}{i} \right\rfloor \geq 1 + \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor.$$

现在我们只考虑前半部分(即  $j \in A$ )中的项  $a_j$ . 将  $a_j$  中大于  $k$  项的分别减去一点, 不大于  $k$  的项不变, 使得

$$\{a'_j : 1 \leq j \leq k\} = \{1, 2, \dots, k\}.$$

(上述操作的意义, 就是调整使得集合  $\{a'_j\}_{j=1}^k$  恰好等于  $\{1, 2, \dots, k\}$ , 从而对  $a_1, \dots, a_k$  运用归纳假设.) 其中  $a'_j$  为上述操作后的  $a_j$ . 则对任意的  $j \in A \setminus \{i\}$ ,  $a'_j \leq a_j$ , 故  $\lfloor a'_j/j \rfloor \leq \lfloor a_j/j \rfloor$ ; 而对于  $i$ ,

$$\left\lfloor \frac{a'_i}{i} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor.$$

(上面的式子的含义是, 我们在  $a_i$  中找到了想要的那个“1”.) 故

$$\sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{a_j}{j} \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{a_j}{j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor + \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \left\lfloor \frac{a_j}{j} \right\rfloor \geq 1 + \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{a'_j}{j} \right\rfloor \geq 1 + x_k.$$

由此得  $x_n \geq x_k + 1$ .

总之, 我们证明了, 对任意的  $n \geq 3$ , 有

$$x_n \geq x_{\lfloor n/2 \rfloor} + 1.$$

由此, 结合  $x_2 = x_3 = 2$ , 不难证明原命题成立.

取等条件不难递归构造出: 取  $a_1, a_2, \dots, a_k$  为  $x_k$  的取等, 再取

$$x_{k+1} = n, x_{k+2} = k + 1, x_{k+3} = k + 2, \dots, x_n = n - 1.$$

**解** 我们证明一个局部不等式:

$$\left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor \geq \log_2 \frac{a_k + 1}{k}.$$

设  $t = \lfloor a_k/k \rfloor \in \mathbb{N}$ . 则不难知道  $t \geq \log_2(t+1)$ . 而  $t+1 \geq (a_k+1)/k$ , 故成立.

由上述不等式,

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor \geq \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{a_k + 1}{k} = \sum_{k=1}^n \log_2(a_k + 1) - \sum_{k=1}^n \log_2 k = \log_2(n+1).$$

结合整数的离散性知

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

### 例题 1.3.5

变量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . 求

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}}$$

的最大值.

**分析** 为方便起见, 设

$$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{f(x_2, x_3)}, \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^{f(x_2, x_3, \dots, x_k)}.$$

从小情况开始试验:

(1)  $n = 3$ , 显然最大值为  $f(3, 2, 1)$ ;

(2)  $n = 4$ , 最大值为  $f(2, 3, 4, 1)$ .

(3)  $n = 5$ , 最大值为  $f(2, 3, 4, 5, 1)$ .

不难猜测一般情况下的最大值为  $f(2, 3, 4, \dots, n, 1)$ .

**解**  $n = 3$  时最大值为  $f(3, 2, 1)$ ; 下设  $n \geq 4$ . 我们先证明一个引理(同时也是原命题的加强): 设  $n \geq 3$ ,  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 其中  $2 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . 则有

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

对  $n$  归纳证明:

(1)  $n = 3$ . 若  $x_1 = y_1$  则显然成立. 若  $y_1 = x_2$ , 则  $f(y_1, y_2, y_3) = f(x_2, x_3, x_1)$  或  $f(x_2, x_1, x_3)$ . 由  $x_3 \geq 4, x_1 < x_3$  知  $x_1^{x_3} \geq x_3^{x_1}$ , 故  $f(x_2, x_3, x_1) \leq f(x_2, x_1, x_3)$ . 而求导不难得出

$$\frac{x_2^{x_3}}{\ln x_2} \geq \frac{x_1^{x_3}}{\ln x_1} \Rightarrow x_2^{x_3} \cdot \ln x_1 \geq x_1^{x_3} \cdot \ln x_2 \Rightarrow f(x_2, x_1, x_3) \leq f(x_1, x_2, x_3).$$

若  $y_1 = x_3$ . 运用完全相同的方法不难证明.

(2) 设命题在小于等于  $n-1$  时均成立, 考虑  $n$  的情况. 在原题中, 显然  $a_n = 1$ , 否则将  $a_n$  与 1 所在的  $a_i$  互换, 表达式增大. 则此时可以忽略 1, 加强命题. 设

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\} = \{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}.$$

设  $y_1 = x_t$ . 则由归纳假设, 有

$$f(y_1, \dots, y_n) = y_1^{f(y_2, \dots, y_n)} \leq x_t^{f(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n)} = f(x_t, x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n).$$

显然对于正整数  $k \geq 2$ , 函数  $x^k / \ln(x)$  在  $\mathbb{N}_+$  上是增函数, 故对正整数  $a > b$ , 有

$$\frac{a^k}{\ln a} \geq \frac{b^k}{\ln b} \Rightarrow (\ln b) \cdot a^k \geq (\ln a) \cdot b^k \Rightarrow b^{a^k} \geq a^{b^k}.$$

反复利用上述结论, 有

$$\begin{aligned} f(x_t, x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n) &\leq f(x_1, x_t, x_2, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n) \\ &\leq f(x_1, x_2, x_t, x_3, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n) \\ &\leq \dots \\ &\leq f(x_1, x_2, \dots, x_{t-2}, x_t, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n) \\ &\leq f(x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

### 例题 1.3.6

给定  $n \in \mathbb{N}$ .  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ , 且  $x_k \neq k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). 求

$$\sum_{k=1}^n x_k k$$

的最大值.

**分析** 显然  $x_k$  尽量在  $k$  的附近最好. 即, 尽量做到  $x_k \in \{k-1, k+1\}$ . 结合  $x_k \neq k$ , 可以试着构造局部:

$$(x_k - (k-1))(x_k - (k+1)) \geq 0 \Rightarrow kx_k \leq \frac{x_k^2 + k^2 - 1}{2}.$$

但  $n$  为奇数的时候不能取等(因为总有  $k$  使得  $x_k \notin \{k-1, k+1\}$ ). 我们应当提升放缩的精度, 取考虑更加细致的结构.

$n$  为偶数的时候可以取等:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2, 1, 4, 3, \dots, n, n-1).$$

$n$  为奇数的时候, 可以猜测如下取等:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2, 3, 1, 5, 4, 6, 5, \dots, n, n-1).$$

问题出现在 $n$ 的奇偶性使得无法两两配对. 由此可以想到如下做法:

**解** (1)  $n$ 为偶数. 则

$$\sum_{k=1}^n kx_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + x_k^2 + 1}{2} = \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n}{2}.$$

(2)  $n$ 为奇数. 考虑有向图 $G(V, E)$ ,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E = \{(k, x_k) : 1 \leq k \leq n\}$ . 则 $G$ 一定为若干个不交圈的并, 且一定存在某个圈的长度为奇数(我们在这里利用了 $n$ 为奇数的条件; 这也是奇数和偶数情

形的根本差别, 奇圈的长度不小于3, 这会带来更多的“损失”). 取一个这样的圈, 其顶点集为 $V_0$ , 边集为 $E_0$ . 设 $|G_0| = l \geq 3$ . 设 $d = \max\{V_0\} - \min\{V_0\}$ , 则 $d \geq l - 1$ . 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx_k &= \sum_{(u,v) \in E_0} uv + \sum_{(u,v) \in E \setminus E_0} uv \\ &\leq \sum_{(u,v) \in E_0} uv + \sum_{(u,v) \in E \setminus E_0} \frac{u^2 + v^2 - 1}{2} \quad (\text{这一步放缩与偶数情况相同}) \\ &= \sum_{(u,v) \in E_0} uv + \left( \sum_{u \in V \setminus V_0} u^2 \right) - \frac{|V| - |V_0|}{2} \\ &= \sum_{(u,v) \in E_0} \frac{u^2 + v^2 - (u-v)^2}{2} + \left( \sum_{u \in V \setminus V_0} u^2 \right) - \frac{n-l}{2} \quad (\text{这一步变形是为了像例1.1.2一样放缩}) \\ &= - \sum_{(u,v) \in E_0} \frac{(u-v)^2}{2} + \sum_{u \in V} u^2 - \frac{n-l}{2} \\ &\leq - \sum_{(u,v) \in E_0} \frac{3|u-v| - 2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n-l}{2} \quad (\text{这一步考虑了例1.1.2中的局部}) \\ &= -\frac{3}{2} \left( \sum_{(u,v) \in E_0} |u-v| \right) + l + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n-l}{2} \\ &\leq -\frac{3}{2} \cdot 2d + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3l-n}{2} \\ &\leq -\frac{3}{2} \cdot 2(l-1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3l-n}{2} \\ &\leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+3}{2}. \quad (\text{因为 } l \geq 3) \end{aligned}$$

故这种情况下有

$$\sum_{k=1}^n kx_k \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+3}{2}.$$



取等条件为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2, 3, 1, 5, 4, 7, 6, \dots, n, n-1).$$

### 例题 1.3.7

给定正整数  $n$ , 变量  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ , 求

$$\sum_{i=1}^n x_i^i$$

的最小值.

**分析** 显然, 若想取到最小值, 应当使  $\{x_i\}$  逆序排列. 即, 最小值应当为  $\sum_{k=1}^n k^{n+1-k}$ . 对于这种问题, 通常采用**局部调整法**:

**解** 考察如下局部调整: 若  $a > b, c > d$ , 则

$$a^c + b^d \geq a^d + b^c.$$

这等价于  $a^c - a^d \geq b^c - b^d$ . 而

$$a^c - a^d = a^d(a^{c-d} - 1) \geq b^d(b^{c-d} - 1) = b^c - b^d.$$

不断运用这个结论, 就能证明原问题.

通过前几个例题, 可以发现, 对于离散不等式有如下几个主要手段:

**1. 局部不等式与整数离散性的应用** 局部不等式一般是根据取等条件和式子结构而配制的.

**2. “调整”思想** “调整”思想有时可以指导我们进行正确的放缩. 即, 某些调整可以不明显地出现, 而隐藏在放缩中. 但必须注意调整的合理性.

**3. 通过归纳和加强命题化为更一般的问题** 例如在例题1.3.5中, 原问题是不好使用归纳的. 将  $\{1, 2,$

$\dots, n\}$  换为更一般的  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 这样虽然加强了命题, 但更有利于归纳, 便于逻辑的顺畅.

**4. 序列的具体性质** 具体地研究离散数列的性质, 例如各种单调性、相邻项之间的差, 甚至各种组合性质(例如例题1.3.6)或是几何意义. 之后的章节会展示这样的思想.

### 例题 1.3.8

给定正整数  $n$ . 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\{\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . 求

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor$$

的最大值与最小值.

**解** 由  $\lfloor a+b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$  知  $\lfloor a-b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor$ . 故

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leq \lfloor x_n \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor \leq n-1.$$

故最大值为  $n-1$ ,  $x_i = i$  时取等.

而由  $\lfloor a \rfloor > a-1$  知  $\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \geq x_{i+1} - x_i - 1$ , 故

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor > -n+1 + x_n - x_1 > -2n+1.$$

结合整数的离散性得

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \geq -2n+2.$$

取等:  $x_k = (n+2)(n+1-k)/(n+1)$ . ■

下面介绍一个与数论和组合相关的问题.

### 例题 1.3.9

$a_1, a_2, \dots, a_{17}$  为  $1, 2, \dots, 17$  的一个排列, 且存在正整数  $n$  满足

$$\prod_{i=1}^{17} (a_{i+1} - a_i) = n^{17}.$$

其中  $a_{18} = a_1$ . 求  $n$  的最大可能值.

**分析** 先对式子进行放缩:

$$n^{17} = \prod_{i=1}^{17} (a_{i+1} - a_i) \leq \left( \frac{1}{17} \sum_{i=1}^{17} |a_i - a_{i+1}| \right) \Rightarrow 17n \leq \sum_{i=1}^{17} |a_i - a_{i+1}|$$

于是问题转向了估计  $\sum_{i=1}^{17} |a_i - a_{i+1}|$  的最大值. 常见的手法是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{17} |a_i - a_{i+1}| &= \sum_{i=1}^{17} (a_i + a_{i+1} - 2 \min\{a_i, a_{i+1}\}) = 17 \cdot 18 - 2 \sum_{i=1}^{17} \min\{a_i, a_{i+1}\} \\ &\leq 17 \cdot 18 - 2(1+1+2+2+\dots+8+8+9) \text{ (此即 } 1, 1, 2, 2, \dots, 17, 17 \text{ 中较小的 } 17 \text{ 个数)} \\ &= 144. \end{aligned}$$

由此便可以得到  $n \leq 8$ .

为了给出具体构造, 我们不得不考虑数论性质. 若  $n = 7$  或  $8$ , 注意到  $7$  和  $8$  各只有一种素因子, 存在对应的构造的可能性不是很大, 动手试验之后发现的确如此. 对于  $n = 6$ , 由于素因子有两种 ( $2$  和  $3$ ), 故构造的灵活性更大 ( $|a_{i+1} - a_i|$  可以等于  $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16$ ), 更容易构造出相应的取等条件.

**解** 由上文知  $n \leq 8$ . 若  $n = 8$ , 则

$$51 = v_2(n^{17}) = \sum_{i=1}^{17} v_2(|a_{i+1} - a_i|).$$

其中  $v_p(m)$  表示  $m$  中  $p$  的幂次 ( $p$  为素数). 注意到最多存在一个  $i$  使得  $v_2(|a_{i+1} - a_i|) = 4$ , 对于其余的  $i$  均有  $v_2(|a_{i+1} - a_i|) \leq 3$ ; 并且至少存在一个  $j$  使得  $v_2(|a_{j+1} - a_j|) = 0$ , 即  $|a_{j+1} - a_j|$  为奇数. 故

$$\sum_{i=1}^{17} v_2(|a_{i+1} - a_i|) \leq 4 + 3 \cdot 15 < 51.$$

故  $n \neq 8$ . 若  $n = 7$ , 则

$$\sum_{i=1}^{17} v_7(|a_{i+1} - a_i|) = 17.$$

这是不可能的, 因为对于任意的  $i$  均有  $v_7(|a_{i+1} - a_i|) \leq 1$  并且至少存在一个  $i$  使得  $v_7(|a_{i+1} - a_i|) = 0$ , 即  $|a_{i+1} - a_i|$  不是  $7$  的倍数.

故  $n \leq 6$ . 下面给出  $n = 6$  的构造:

$$1, 10, 2, 11, 3, 12, 15, 6, 4, 13, 5, 14, 16, 7, 8, 17, 9.$$

### 例题 1.3.10

给定正整数  $n \geq 2$ . 变量  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{1, 2, \dots, 2n\}$ . 对于  $1 \leq i \leq n$ , 记  $c_i = a_i b_i$ ;  $c_{n+1} = c_1$ . 求

$$\sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+1}|$$

的最小值.

**分析** 看到这个问题, 不难注意到以下要点:

首先,  $\sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+1}|$  在某种程度上刻画了数组  $\{c_i\}$  的“分散程度”. 即, 若想求得最小值, 那么必须让数组  $\{c_i\}$  相对而言最集中. 由此, 不难想到取等:  $a_k = k, b_k = 2n+1-k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

其次, 我们已经见了不止一次类似于  $\sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+1}|$  的式子了. 由于在本题中, 我们可以随

意调换各 $c_i$ 的排列方式而不产生任何矛盾,故可以直接做放缩:

$$\sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+1}| \geq 2 \left( \max_{1 \leq i \leq n} c_i - \min_{1 \leq i \leq n} c_i \right).$$

因此,我们只需关注数组 $\{c_i\}$ 的极差. 设

$$c_j = \max_{1 \leq i \leq n} c_i, \quad c_k = \min_{1 \leq i \leq n} c_i.$$

在我们构造出的取等中,  $c_j = n(n+1)$ ,  $c_k = 2n$ . 我们采取下面的方法说明 $c_j - c_k$ 的最小值,即说明 $c_j$ 不小于某个数(在本题中是 $n(n+1)$ ),同时 $c_k$ 不大于某个数(在本题中是 $2n$ ). 具体方法如下.

**解** 一方面,取 $a_k = k, b_k = 2n+1-k$  ( $1 \leq k \leq n$ ),知此时

$$\sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+1}| = 2n(n-1).$$

下面证明最小值为 $2n(n-1)$ . 设

$$c_j = \max_{1 \leq i \leq n} c_i, \quad c_k = \min_{1 \leq i \leq n} c_i.$$

则

$$\sum_{i=1}^n |c_i - c_{i+1}| \geq 2 \left( \max_{1 \leq i \leq n} c_i - \min_{1 \leq i \leq n} c_i \right) = 2(c_j - c_k).$$

下面我们证明 $c_j \geq n(n+1)$ ,  $c_k \leq 2n$ (从而 $c_j - c_k \geq n(n-1)$ ,原不等式得证.)

设下标 $u$ 使得 $a_u = 1$ 或 $b_u = 1$ ,则又 $a_u \leq 2n$ ,  $b_u \leq 2n$ ,知

$$c_k \leq c_u = a_u b_u \leq 2n \cdot 1 = 2n.$$

下证 $c_j \geq n(n-1)$ . (为了更好地刻画 $\{a_i\}$ 与 $\{b_i\}$ 的关联,我们构造图 $G(V, E)$ ,其中 $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ ,  $E = \{\{a_i, b_i\} : 1 \leq i \leq n\}$ . 取 $V_1 = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $V_2 = V \setminus V_1$ .)

显然,图 $G$ 中的边两两不交. 若 $V_2$ 中没有顶点相连,则所有的边都在 $V_1$ 中占据至少一个顶点,即此时有 $|V_1| \geq |E|$ . 而这显然是不成立的.(直观上来说, $V_1$ “太小了”以至于无法“放得下”

所有的边,所以一定有的边被迫“挤出” $V_1$ 而到 $V_2$ 中.)故 $V_2$ 中一定有顶点相连,设此边为 $\{a_v, b_v\}$ . 则 $a_v \geq n, b_v \geq n$ 且 $a_v \neq b_v$ ,故

$$c_j \geq c_v = a_v b_v \geq n(n+1).$$

故  $c_j \geq n(n+1)$ ,  $c_k \leq 2n$ , 从而原命题得证. ■

### 例题 1.3.11

给定正整数  $m, n, k \geq 2, n > k$ , 考虑在一个  $m$  行  $n$  列的方格表中填入  $1, 2, \dots, mn$ , 满足每一行填入的数从左到右单调递增, 求该方格从左往右数表前  $k$  列中填入的数之和的最大可能值.

**分析** 我们先分析从左到右单调递增与前  $k$  列带给我们的感受, 那么这表明每行参与求和的是最小的  $k$  个数, 因为要求最大值, 我们自然地考虑这些参与求和的数中最大的数可能是多少. 事实上, 一定不超过  $mn - n + k$ , 因为整个方格表中一定还有  $n - k$  个更大的数, 如果取到这个值, 那么剩下的数从大到小排分别不超过  $mn - n + k - 1, mn - n + k - 2, \dots$ , 并且, 如果后面依次将这些数全部取到, 那么再往后的数便要从  $mn - 2n + k$  加起. 这样下去, 我们大概有了一个初步的感受, 考虑如下构造:

第  $l$  行 ( $1 \leq l \leq m$ ) 为  $ln - n + 1, ln - n + 2, \dots, ln$

进一步, 在证明中, 按照这个思路, 我们便发现第  $kt - k + 1$  到  $kt$  大的数中, 这些数是比较有特点的, 是取等中第  $t$  列的前  $k$  个数, 我们便想到可以考虑从第  $kt$  大的数处将这些数截断, 去考察第  $kt - k + 1$  到  $kt$  大的数之和的放缩, 其实也只需考虑第  $kt$  大的数的放缩.

**解** 一方面, 按照分析中的构造, 我们算出该和为

$$\frac{knm(m-1) + k(k+1)m}{2}.$$

另一方面, 下考虑证明, 只需证对  $1 \leq t \leq m$ , 这些加数中第  $kt - k + 1$  到  $kt$  大的数之和不超过

$$\sum_{s=1}^k ((t-1)n + s).$$

由于这些数两两不同, 这只需第  $kt$  大的数不超过  $(t-1)n + k$ , 设这个数为  $r$

我们将  $1, 2, \dots, r$  重新按从小到大填入这个表格中, 并且将已经填入的数标红(这样便于我们

去刻画“第  $kt$  大”), 则  $r$  为红数的个数. 在第  $k$  列(含)左边, 红数一共  $kt$  个, 考察第  $k$  列(不含)右边的总红格数, 将第  $k$  列(不含)右边出现红格的行称为“好行”(这是去考察红格总数的必要一步, 剩下的步骤便都较为自然了).

如果一个行为“好行”, 那么在这个行的前  $k$  列中, 一定都是红格, 否则与每行填入的数单调递增矛盾, 同时, 由于  $r$  是最后填入的数, 且在第  $k$  列(含)左边, 故  $r$  所在行不为好行, 因此, 全体好行在第  $k$  列(含)左边一共有不超过  $kt - 1$  个数, 故好行不超过  $t - 1$  个.


考察所有的好行, 其中每行在第  $k$  列(不含)右边出现红格不超过  $n - k$  个, 因此红格个数一共不超过


$$(t-1)(n-k) + tk = (t-1)n + k.$$




因此,  $r \leq (t-1)n + k$ , 这样我们便完成了证明. ■

## 练习 1.3


 **练习 1.3.1** 使用归纳法证明例题1.1.2, 甚至例题1.1.1.

 **练习 1.3.2** 变量  $a_1, \dots, a_{10}$  满足  $\{a_1, \dots, a_{10}\} = \{1, 2, \dots, 10\}$ . 求  $\sum_{i=1}^9 a_i^2 a_{i+1}$  的最小值与最大值.

 **练习 1.3.3**  $a_1, a_2, \dots, a_{17}$  为  $1, 2, \dots, 17$  的一个排列, 且存在正整数  $n$  满足

$$\prod_{i=1}^{17} (a_{i+1} - a_i) = 2^n.$$

其中  $a_{18} = a_1$ . 求  $n$  的最大可能值.

 **练习 1.3.4** 变量  $a_1, \dots, a_{20}$  满足  $\{a_1, \dots, a_{20}\} = \{1, 2, \dots, 20\}$ . 记


$$M = \max_{1 \leq k \leq 20} |a_k - a_{k+1}|, \quad m = \min_{1 \leq k \leq 20} |a_k - a_{k+1}|.$$

求  $m \cdot M$  的最小值与最大值.

 **练习 1.3.5** 变量  $a_1, a_2, \dots, a_{101}$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_{101}\} = \{1, 2, \dots, 101\}$ . 求


$$\sum_{k=1}^{101} (\text{lcm}(a_k, k))^{\frac{3}{2}}$$

的最大值.

 **练习 1.3.6** 变量  $a_1, \dots, a_{100}; b_1, \dots, b_{100}$  满足  $\{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} = \{b_1, b_2, \dots, b_{100}\} = \{1, 2, \dots, 100\}$ . 求

$$M = \max_{1 \leq k \leq 100} \{ka_k b_k\}$$

的最小值.

 **练习 1.3.7** 给定正整数  $n \geq 4$ , 将  $1, 2, \dots, n^2$  填入一个  $n \times n$  的方格表, 考虑所有有公共边的两个格子中的数的和, 考虑这些和中最大的记作  $M$ , 求  $M$  的最小可能值.

## 1.4 整数离散性以及经典方法

为了获得更好的阅读体验, 建议读者掌握以下预备知识:

**1. 整数离散性的各种应用** 这已经在前面的例题中初步学习.

**2. Karamata不等式** 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 上二阶可导且 $f''(x) \geq 0$ 对 $\forall x \in (a, b)$ 成立. 此时称 $f$ 为下凸函数. 若 $f'' \leq 0$ 则称为上凸函数<sup>2</sup>. 对于数列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{b_i\}_{i=1}^n$ , 若 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ , 且

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i; \forall 1 \leq j \leq n-1, \sum_{i=1}^j a_i \geq \sum_{i=1}^j b_i,$$

则称 $\{a_i\}$ 优越于 $\{b_i\}$ , 记作 $\{a_i\} \succ \{b_i\}$ .

Karamata不等式, 即对于 $(a, b)$ 上的下凸函数 $f(x)$ 以及数列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{b_i\}_{i=1}^n$ , 其中 $\{a_i\} \succ \{b_i\}$ , 则

$$\sum_{k=1}^n f(a_k) \geq \sum_{k=1}^n f(b_k).$$

对于上凸函数也有类似结论. 下面证明这个不等式, 使用Abel变换:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k)) &= \sum_{k=1}^n \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} (b_k - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} - \frac{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}{b_{k-1} - a_{k-1}} \right) \left( \sum_{j=1}^k (b_j - a_j) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

其中, 由下凸函数的性质, 有

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \geq \frac{f(b_{k-1}) - f(a_k)}{b_{k-1} - a_k} \geq \frac{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}{b_{k-1} - a_{k-1}}.$$

**3. 各种代数变形** 例如著名的Abel变换:  $\{a_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{b_i\}_{i=1}^n$ 为两组数列, 记 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}).$$

此变换的主要功效是, 对于两个数列的对应项乘积的和 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ , Abel变换可以将此和对应为其中一个数列的部分和(即 $S_i$ )与另一个数列的差分(即 $b_i - b_{i+1}$ )的对应项乘积的和. 在一些时候, 使用部分和会得到很奇妙的结果.

先给出几道例题将展示处理最大公约数, 最小公倍数的方法.

<sup>2</sup>有些参考书籍上将上凸函数称为凹函数, 将下凸函数称为凸函数; 更有甚者将上凸函数称为凸函数而将下凸函数称为凹函数; 还有的书使用“上凹”和“下凹”的术语; 总之, 有关凹凸性的术语较为混乱. 我们呼吁大家使用标准、直观且不易出错的“上凸”和“下凸”的术语.

**例题 1.4.1**

给定正整数  $t > 1$ , 对于整数序列  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 满足对  $i \geq 1$ , 有  $(a_i, a_{i+1}) > (t-1)a_{i-1}$ . 求证:  $a_n \geq t^n$ .

**分析** 自然地分析, 如果  $x > y$ , 我们一般可以得到  $x \geq y+1$ , 但是在这里, 注意到取等  $a_n = t^n$ , 此时, 仅仅使用  $(a_i, a_{i+1}) \geq (t-1)a_{i-1} + 1$  似乎就不够了, 这里我们希望加的是一个类似  $t^{i-1}$  的数.

我们重新审视  $x > y$  推出的结论, 如果我们真的想让  $x \geq y+k$ , 有没有一个较好的  $k$  的形式呢? 事实上, 直接使用整数离散型并不能得到什么结果, 但如果联想该不等式的取等, 例如加上条件  $t|x, y$ , 那么我们显然有  $x \geq x+t$ , 所以自然地, 我们会想到放缩  $x \geq y + \gcd(x, y)$ , 这样, 我们便获得了一个思路, 使用  $(a_i, a_{i+1}) \geq (t-1)a_{i-1} + (a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$ .

接下来, 我们考虑  $(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$  的放缩, 事实上, 形式驱使我们往  $(a_i, a_{i+1})$  这样的结构去放缩, 因此我们可以构建不等式  $x(x, y, z) \geq (x, y)(x, z)$ , 剩余的部分便是自然的了.

我们给出两种解法, 其中第一种是基于分析的解法.

**解** 先证明一个引理:

**引理 1.4.1**

对正整数  $x, y, z$ , 有  $x(x, y, z) \geq (x, y)(x, z)$ .



这是因为, 不妨设  $(x, y, z) = 1$ , 则  $((x, y), (x, z)) = 1$ , 于是  $(x, y)(x, z) | x$ , 即  $x(x, y, z) \geq (x, y)(x, z)$ , 即证.

回原题. 于是有

$$(a_i, a_{i+1}) \geq (t-1)a_{i-1} + (a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \geq (t-1)a_{i-1} + \frac{(a_{i-1}, a_i)(a_i, a_{i+1})}{a_i} \geq t \sqrt{\frac{a_{i-1}(a_{i-1}, a_i)(a_i, a_{i+1})}{a_i}}.$$

整理得

$$a_i(a_i, a_{i+1}) \geq t^2 a_{i-1}(a_{i-1}, a_i) \geq \dots \geq t^{2i} a_0(a_0, a_1).$$

因此  $a_n \geq \sqrt{a_n(a_n, a_{n+1})} \geq t^n$ , 命题得证. ■

**解** 设

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{x_i}{y_i}, (x_i, y_i) = 1.$$

这样, 就有

$$(a_i, a_{i+1}) = (a_i, a_i \cdot \frac{x_i}{y_i}) = \frac{a_i}{y_i}.$$

结合条件, 有  $a_i/y_i > a_{i-1}$ . 由此得  $cx_{i-1}/y_{i-1} = a_i/a_{i-1} > y_i$ , 即

$$\frac{x_{i-1}}{y_{i-1}} > y_i.$$

再结合整数的离散性, 得  $x_{i-1} \geq y_i y_{i-1} + 1$ , 故

$$\frac{x_{i-1}}{y_{i-1}} \geq (t-1)y_i + \frac{1}{y_{i-1}} \geq t\sqrt{\frac{y_i}{y_{i-1}}}.$$

将这个式子对  $i$  累乘, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \cdots \frac{x_n}{y_n} \cdot y_n \geq t\sqrt{\frac{y_n}{y_{n-1}}} \cdot t\sqrt{\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}}} \cdots t\sqrt{\frac{y_1}{y_n}} \cdot y_0 \\ &= t^n \sqrt{y_n y_0} \geq t^n. \end{aligned}$$

### 例题 1.4.2

给定正整数  $m, n$ , 满足  $n \geq 3m$ . 对于

$$\sum_{k=1}^n x_k = m(2n-1) \quad (x_k \in \mathbb{N}^+),$$

求

$$\sum_{k=1}^n \gcd(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$$

的最大值. (下标模  $n$  理解)

**分析** 不难猜到一个取等, 即

$$x_1 = m, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 2m.$$

此时答案为  $m(2n-3)$ .

为了化简问题, 设  $d_i = (x_i, x_{i+1})$ . 这样, 由于  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) \leq (d_i, d_{i+1})$ , 就可以先求出  $\sum_{i=1}^n d_i$  的上界, 进而求出原式的上界.

注意到取等时很多的  $x_i$  都相等, 故可以先考虑使  $x_i \neq x_{i+1}$  的  $x_i$ , 此时  $d_i = (x_i, x_{i+1})$  通常会有一个不错的上界.

**解** 先证明  $\sum_{i=1}^n d_i \leq m(2n-2)$ :

由  $n \nmid m(2n-1)$  知存在  $i$  使得  $x_i \neq x_{i+1}$ . 不妨设  $x_i > x_{i+1}$ . 则

$$\sum_{k=1}^n d_k = \left( \sum_{k \neq i, i+1} x_k \right) + x_i - x_{i+1} + x_{i+1} = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) - x_{i+1} = m(2n-1) - x_{i+1}.$$

故若  $x_{i+1} \geq m$  则得证; 下设  $x_{i+1} \leq m-1$ .

先提出一个有用的引理:

## 引理 1.4.2

对任意的实数  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 均有

$$\sum_{k=1}^{n-1} \min\{y_k, y_{k+1}\} \leq \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$



这是因为:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \min\{y_k, y_{k+1}\} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{n-k}{n} y_k + \frac{k}{n} y_{k+1} \right) = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

回原题, 于是有

$$\sum_{k \neq i, i+1} \min\{x_k, x_k\} \leq \frac{n-2}{n-1} \left( \sum_{k \neq i+1} x_k \right) = \frac{n-2}{n-1} (m(2n-1) - x_{i+1}).$$

故

$$\sum_{k=1}^n d_k = d_i + d_{i+1} + \sum_{k \neq i, i+1} \min\{x_k, x_k\} \leq 2x_{i+1} + \frac{n-2}{n-1} (m(2n-1) - x_{i+1}) \leq m(2n-2).$$

再证明  $\sum_{i=1}^n (d_i, d_{i+1}) \leq m(2n-3)$ .

(若想沿用上面的做法, 必须找出  $d_i \neq d_{i+1}$ , 故必须先讨论) 若  $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ . 则

$$\sum_{i=1}^n (d_i, d_{i+1}) = nd.$$

设  $y_k = dx_k$ , 则  $(x_k, x_{k+1}) = 1$ , 且  $d \cdot (\sum_{i=1}^n y_i) = m(2n-2)$ . 显然有  $\sum_{i=1}^k y_k \geq n+1$  (因为  $x_i$  不能全相同, 所以  $y_i$  也不能全都为1).

若  $\sum_{i=1}^k y_k = n+1$ , 则有

$$n+1 | m(2n-1) \Rightarrow n+1 | m(3(n+1) - (2n-1)) \Rightarrow n+1 | 3m \Rightarrow n < 3m.$$

矛盾!

若  $\sum_{i=1}^k y_k \geq n+2$ , 则

$$nd = n \cdot \frac{m(2n-2)}{\sum_{i=1}^k y_k} \leq m \frac{n(2n-2)}{n+2} \leq m(2n-3). \quad (\text{因为 } n \geq 3)$$

此时原命题成立.

反之, 若  $d_i$  不全相等, 取  $d_i \neq d_{i+1}$ , 并不妨设  $d_i > d_{i+1}$ .

若  $d_{i+1} \geq m$ , 与第一部分完全类似地, 有

$$\sum_{k=1}^n (d_k, d_{k+1}) = \left( \sum_{k \neq i, i+1} d_k \right) + d_i - d_{i+1} + d_{i+1} = \left( \sum_{k=1}^n d_k \right) - d_{i+1} = m(2n-2) - d_{i+1} \leq m(2n-3).$$

若  $d_{i+1} \leq m-1$ , 则同样与第一部分完全类似地, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (d_k, d_{k+1}) &\leq \sum_{k=1}^n \min\{d_k, d_{k+1}\} \leq 2d_{i+1} + \sum_{k \neq i} \min\{d_i, d_{i+1}\} \\ &\leq 2d_{i+1} + \frac{n-2}{n-1}(m(2n-2) - d_{i+1}) \leq \frac{(m-1)n}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}m(2n-2) \\ &= \frac{(m-1)n + m(n-2)(2n-2)}{n-1} \\ &= \frac{m(2n^2 - 6n + 4 + n) - n}{n-1} = \frac{m(2n^2 - 5n + 3) + m - n}{n-1} \\ &= \frac{m(n-1)(2n-3)}{n-1} + \frac{m-n}{n-1} = m(2n-1) + \frac{m-n}{n-1} \\ &< m(n-3) \end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^n (x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) \leq \sum_{i=1}^n (d_i, d_{i+1}) \leq m(2n-3).$$

### 例题 1.4.3

求最小的常数  $C$ , 使得对任意严格递增的正整数序列  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ , 均有  $(a_{n+1} = a_1)$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{[a_k, a_{k+1}]} \leq C.$$

**分析** 对于两个整数的最小公倍数的倒数, 有一个不错的估计:

$$\frac{1}{[a, b]} = \frac{(a, b)}{ab} \leq \frac{|a-b|}{ab} = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|.$$

这样的好处是, 若  $a$  和  $b$  的大小关系给定, 那么这个不等式提供了一个裂项. 取等条件当然是  $|a-b| = (a, b)$ .

**解**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{[a_k, a_{k+1}]} = \frac{1}{[a_1, a_n]} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[a_k, a_{k+1}]} \leq \frac{1}{a_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \frac{1}{a_1} \leq 1.$$

另一方面, 取 $a_i = 2^{i-1}$ , 知此时原式为1. 故 $C$ 的最小值为1. ■

在上面展示的最大公约数与最小公倍数的问题中, 我们主要使用了一些数论性质以及整数离散性, 同时, 基于莫比乌斯反演, 我们可以得到一些离散不等式, 尤其涉及到整除的数论性质的问题的奇妙做法, 先看一个定理.

#### 定理 1.4.1

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$



这个定理的证明我们不予给出, 参见《数论: 概念与问题》; 接下来我们通过几个例题来展示它的妙用:

#### 例题 1.4.4

给定正整数 $n > 2$ 与正实数 $\lambda$ , 正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足对任意 $1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , 均存在 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ , 满足 $\gcd(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ 整除 $\gcd(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k})$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n a_k^\lambda \leq \sum_{k=1}^n b_k^\lambda.$$

**分析** 首先去理解条件: 对任意 $1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , 均存在 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ , 满足 $\gcd(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}) \mid \gcd(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k})$ ,

从字面上来讲, 这似乎说明了序列 $\{b_i\}$ 在因子上优于 $\{a_i\}$ , 在这个感受下, 我们看看对任意正整数 $d$ , 两个序列被 $d$ 整除的数有怎样的关系, 首先, 如果 $d \mid \gcd(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ , 那么一定存在 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ 使得 $d \mid \gcd(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k})$ , 我们让这样的 $a_{i_j}$ 最多, 也就是取出所有的被 $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项放在左边, 那么这表明 $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项数不大于 $d$ 整除的 $\{b_i\}$ 中的项数;

另一方面, 这也驱使我们考察这是否是充要条件, 如果 $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项数大于 $d$ 整除的 $\{b_i\}$ 中的项数, 这明显导致了一个矛盾, 我们设 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ 是全体被 $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项的下标, 于是对任意 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ ,  $d$ 不能整除 $\gcd(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k})$ , 这会导致矛盾.

在等价转换后, 命题便变得清晰, 我们的条件是对任意正整数 $d$ ,  $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项数不大于 $d$ 整除的 $\{b_i\}$ 中的项数, 于是我们需要考察证明式中的式子是否能用这些量表示, 使用定理类似的内容, 问题便迎刃而解.

**解** 若存在正整数 $d$ , 使得 $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项数大于 $d$ 整除的 $\{b_i\}$ 中的项数, 那么设 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ 是全体被 $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项的下标, 于是对任意 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ ,  $d$ 不能整除 $\gcd(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k})$ , 与条件矛盾!

于是对任意正整数 $d$ ,  $d$ 整除的 $\{a_i\}$ 中的项数不大于 $d$ 整除的 $\{b_i\}$ 中的项数.

对正整数  $n = \prod_{k=1}^r p_j^{\alpha_j}$ , 定义

$$u(n) = \prod_{k=1}^r p_j^{\lambda \alpha_j - \lambda} (p_j^\lambda - 1).$$

对正整数  $d$  定义  $f(d), g(d)$  分别是  $d$  整除  $\{a_i\}$  与  $\{b_i\}$  中的项数, (类似于上面给出的定理,) 我们有

$$m^\lambda = \sum_{d|m} u(d) = \sum_{d=1}^{\infty} \mathbf{1}_{d|m} u(d).$$

于是就有:

$$\sum_{k=1}^n a_k^\lambda = \sum_{k=1}^n \sum_{d=1}^{\infty} \mathbf{1}_{d|a_k} u(d) = \sum_{d=1}^{\infty} u(d) \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{d|a_k} = \sum_{d=1}^{\infty} u(d) f(d).$$

条件即为对任意正整数  $d, f(d) \leq g(d)$ , 于是

$$\sum_{k=1}^n a_k^\lambda = \sum_{d=1}^{\infty} u(d) f(d) \leq \sum_{d=1}^{\infty} u(d) g(d) = \sum_{k=1}^n b_k^\lambda.$$

命题得证. ■

#### 例题 1.4.5

给定正整数  $n > m$ , 求最小的正实数  $\lambda$ , 使得对任意  $n$  个正整数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有

$$\sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) \leq \lambda ([x_1, x_2, \dots, x_n] - (x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

其中, 下标 mod  $n$  理解.

**分析** 这个问题要介绍定理 1.4.1 在最大公约数中的妙用, 我们使用定理 1.4.1, 于是有

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{d=1}^{\infty} \varphi(d) \mathbf{1}_{d|x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum_{d=1}^{\infty} \varphi(d) \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{d|x_k}.$$

这样, 我们只需对固定的  $d$ , 考察与  $\mathbf{1}_{d|x_k}$  相关的不等式, 我们便可以解决这个问题.

**解** 设  $x_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  (注意到  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  如何使用, 在这里这样定义可以在后将其变为乘积中的一个因数消掉), 于是  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 利用引理, 命题等价于

$$\sum_{d=1}^{\infty} \varphi(d) \mathbf{1}_{d|x_0} \left( \lambda \left( 1 - \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{d|x_k} \right) - \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{d|x_k} + \sum_{j=1}^n \prod_{i=0}^m \mathbf{1}_{d|x_{i+j}} \right) \geq 0.$$



我们只需对全体正整数 $d$ , 考虑

$$\lambda \left( 1 - \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{d|x_k} \right) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{d|x_k} - \sum_{j=1}^n \prod_{i=0}^m \mathbf{1}_{d|x_{i+j}}.$$

记 $y_i = \mathbf{1}_{d|x_i} (1 \leq i \leq n)$ , 命题转化为(这样, 我们便把最大公约数问题转化为一些线性乘积问题)

$$\lambda \left( 1 - \prod_{k=1}^n y_k \right) \geq \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{j=1}^n \prod_{i=0}^m y_{i+j}.$$

事实上, 若 $y_i = 1 (1 \leq i \leq n)$ , 命题平凡地成立; 下设 $y_i$ 中有0, 于是注意到(右边有明显的循环分组结构, 我们进行分组来考察此不等式)

$$\sum_{i=0}^m y_{i+j} - (m+1) \prod_{i=0}^m y_{i+j} \leq m.$$

对全体 $j$ 求和得到

$$\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{j=1}^n \prod_{i=0}^m y_{i+j} \leq \frac{mn}{m+1}.$$

由 $y_i$ 为整数知(自然地利用整数离散性)

$$\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{j=1}^n \prod_{i=0}^m y_{i+j} \leq \left\lfloor \frac{mn}{m+1} \right\rfloor.$$

因此 $\lambda = \left\lfloor \frac{mn}{m+1} \right\rfloor$ 时命题成立(这里最后才写出 $\lambda$ 是为了理顺思路, 建议读者写过程时先给出 $\lambda$ 的值);

另一方面, 取 $x_k = 1 + \mathbf{1}_{m+1|k} (1 \leq k \leq n)$ 即得 $\lambda \geq \left\lfloor \frac{mn}{m+1} \right\rfloor$ . ■

接下来讲解一些Abel变换以及Karamata不等式在组合风格不等式中的应用

#### 例题 1.4.6

设 $n$ 为正整数, 对正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 求证:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k}}{1 + \sum_{j=1}^k a_j} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

**分析** 首先我们观察这个结构, 左边分子上是根式, 对于根式的处理, 我们最自然的想法是使用柯西不等式. 在柯西不等式的想法的驱使下, 我们自然地要考虑取等或者渐进的取等, 但是其实不难发现还是右边距离左边的最优值有一定的差距, 因为如果我们让 $a_i$ 全为1, 那么右边几乎比左边大1, 这表明我们的放缩可能存在一定的空间.

考察放缩

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k}}{1 + \sum_{j=1}^k a_j} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{c_k a_k}{\left( 1 + \sum_{j=1}^k a_j \right)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}.$$

我们并不希望右边的结构过于复杂, 希望这样的放缩可以帮助我们化简问题, 那么对比右边的结构, 取  $c_k = k$  便是一个自然的选择, 那么, 整理我们要证明的式子, 就变成了

$$\sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{\left( 1 + \sum_{j=1}^k a_j \right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

我们去考察左边这个结构, 这是经典的传统不等式形式, 我们考察裂项放缩, 记  $S_k = 1 + \sum_{j=1}^k a_j$ , 其中  $S_0 = 1$ , 于是放缩后利用 Abel 变换, 我们有

$$\sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{\left( 1 + \sum_{j=1}^k a_j \right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{S_{k-1} S_k} = \sum_{k=1}^n k \left( \frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_{k-1}} - \frac{n}{S_n}.$$

那么问题就迎刃而解了.

**解** 注意到由柯西不等式,

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k}}{1 + \sum_{j=1}^k a_j} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{\left( 1 + \sum_{j=1}^k a_j \right)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

于是我们只需证明:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{\left( 1 + \sum_{j=1}^k a_j \right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

记  $S_k = 1 + \sum_{j=1}^k a_j$ , 其中  $S_0 = 1$ , 于是:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{\left( 1 + \sum_{j=1}^k a_j \right)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k a_k}{S_{k-1} S_k} = \sum_{k=1}^n k \left( \frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_{k-1}} - \frac{n}{S_n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

其中最后一个不等号是因为  $a_i$  均为正整数, 则  $S_{k-1} \geq k (1 \leq k \leq n)$ . ■

#### 例题 1.4.7

给定正整数  $n$ , 对正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足对任意一组  $r_i \in \{0, 1, 2\} (1 \leq i \leq n)$ , 均有  $\sum_{k=1}^n r_i a_i$  两两不同, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_i} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.$$

**分析** 首先我们建立对于这个结构的基本感受,  $\sum_{k=1}^n r_i a_i$  以及  $r_i \in \{0, 1, 2\} (1 \leq i \leq n)$  给我们3进制的感觉, 联系我们要证明的内容, 自然地我们可以找到取等  $a_i = 3^{i-1}$ .

接下来我们去考虑放缩, 为了让结构  $\sum_{k=1}^n r_i a_i$  活化, 我们考虑其中最小到最大的数的分布情况, 于是可以给  $a_i$  设序  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

从条件开始推导, 由整数离散性可以得到一个自然的结果是, 因为  $\sum_{k=1}^n r_i a_i$  两两不同, 那么其中最大的数一定不小于这些数的个数减1, 即  $\sum_{k=1}^n 2a_k \geq 3^n - 1$ ; 进一步在设序的条件下, 我们可以得到  $\sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m 3^k (1 \leq m \leq n)$ , 这样, 我们便得到了一些看起来比较强的条件.

在部分和条件下, 去证明一个不等式, 我们就可以考虑Abel变换了.

**解** 不妨设  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , 因为对  $1 \leq m \leq n$ ,  $\sum_{k=1}^m r_i a_i$  两两不同 (事实上只需让  $r_j = 0$  对所有的  $j > m$  成立), 于是就有  $\sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m 3^k (1 \leq m \leq n)$ , 设  $b_k = 3^k$ , 那么我们注意到:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k - a_k}{a_k b_k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{a_k b_k} - \frac{1}{a_{k+1} b_{k+1}} \right) \left( \sum_{j=1}^k (b_j - a_j) \right) \leq 0.$$

其中, 我们约定  $\frac{1}{a_{n+1}} = 0$  (在证明中, 这只是一个符号; 如此定义只是为了减少书写过程) 这也即为

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.$$

命题得证. ■

#### 例题 1.4.8

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  是由非负整数构成的无穷序列, 满足存在实数  $c \in (0, 1)$  使得  $\sum_{k=1}^n x_k \leq cn$  对任意正整数  $n$  成立, 求证: 存在无穷多个正整数  $n$ , 使得

$$\sum_{k=1}^n kx_k \leq \frac{n(n+1)}{2} c.$$

**分析** 自然地我们考虑反证法, 如果不成立, 那么存在正整数  $N$  使得任意正整数  $n \geq N$ , 均有

$$\sum_{k=1}^n kx_k > \frac{n(n+1)}{2} c.$$

既然我们是要从这里推矛盾, 那么自然是要和条件  $\sum_{k=1}^n x_k \leq cn$  产生矛盾, 于是我们设  $S_k = \sum_{j=1}^k jx_j$ , 在理想的情况下, 我们可能通过利用  $S_k$  尝试去表示  $\sum_{k=1}^n x_k$ , 进而得到一些矛盾. 这样, 利

用Abel变换, 我们可以写出:

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n}.$$

但是, 直接利用反正假设, 哪怕再用整数离散性搞一步, 这想要矛盾依然是不够的, 因为我们无法预知 $S_1$ 到 $S_{N-1}$ 的大小, 并且仅仅使用 $S_k > \frac{k(k+1)}{2}c$ 只能做到 $\sum_{k=1}^n x_k > cn + O(1)$ ,  $O(1)$ 的正负性并不能估计, 无法解决此题, 因此我们要考虑加强现有条件 $S_k > \frac{k(k+1)}{2}c$ .

事实上, 我们仔细观察条件, 会发现 $c \in (0, 1)$ 这个条件非常有特殊性, 这暗示了前 $n$ 个 $x_k$ 中至少有 $(1-c)n$ 个为0, 此时, 这驱使我们去考虑 $x_k = 0$ 对于 $S$ 的影响, 那么我们发现, 如果 $x_{k+1} = 0$ , 那么 $S_k = S_{k+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}c + (n+1)c$ , 在求和式中, 这会为我们多争取大约

$$\sum_{k \geq N, x_{k+1}=0}^n \frac{1}{k}.$$

我们感觉这是个调和级数量级的值, 使用Abel变换即可.

**解** 假设命题不成立, 那么存在正整数 $N$ 使得任意正整数 $n \geq N$ , 均有

$$\sum_{k=1}^n kx_k > \frac{n(n+1)}{2}c.$$

设 $S_k = \sum_{j=1}^k jx_j$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $S_0 = 0$ ), 那么就有(利用Abel变换):

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n}.$$

记 $A = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq N, x_{k+1} = 0\}$ ,  $f(m) = |A \cap [1, m]|$  (这一步定义是因为我们发现前 $n$ 个 $x_k$ 中至少有 $(1-c)n$ 个为0), 注意到对 $k \in A$ , 我们有 $S_k = S_{k+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}c + (n+1)c$ , 于是就有:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n} \\ &> \sum_{k=N}^n \frac{c}{2} + \frac{(n+1)c}{2} + \sum_{k \in A, k \leq n-1} \frac{c}{k} = cn - \frac{(N-1)c}{2} + c \sum_{k \in A, k \leq n-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(为了矛盾,)我们只需证明当 $n$ 充分大时,

$$\sum_{k \in A, k \leq n-1} \frac{1}{k}$$

是无界的, 由Abel变换, 我们有:

$$\sum_{k \in A, k \leq n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_{k \in A}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) - f(k-1)}{k} > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{k(k+1)}.$$

(这样考虑是因为我们希望将对集合求和化为对 $f(k)$ 这样一个结构求和, 这样我们便可以通过对于集合落在前 $n$ 个数中的个数这样一个概念去转化对集合求和的式子, 这是一个对集合求和的技巧), 由条件, 存在正常数 $d$ , 使得对任意正整数 $k$ 有 $f(k) > (1-c)k - d$ , 于是:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-c)k - d}{k(k+1)} > (1-c) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - d.$$

右边是调和级数结构, 显然是无界的, 命题得证. ■

#### 例题 1.4.9

在一个 $n \times n$ 的方格表中, 每格染为黑色或白色, 对 $1 \leq k \leq n$ , 记第 $i$ 行有 $a_i$ 个黑格, 第 $i$ 列有 $b_i$ 个黑格, 求 $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2$ 的最大可能值.

**分析** 首先, 我们希望 $|a_i - b_i| = c_i (1 \leq i \leq n)$ 尽量一致的大, 并且由于平方是下凸函数, 我们同时希望在不能做到 $|a_i - b_i|$ 都很大时, 其方差尽可能大, 因此, 首先我们让第一行全黑, 第一列只有第一格是黑的, 其余全是白的, 那么 $|a_1 - b_1| = n - 1$ ; 如果我们希望还有一个 $n - 1$ , 我们可以考虑将最后一列全部染黑, 此时 $|a_n - b_n| = n - 1$ , 至于剩下的 $i$ , 第 $i$ 行与第 $i$ 列均已有一个黑格, 并且除了这个黑格外至多再增加 $n - 2$ 个黑格, 于是 $|a_2 - b_2| \leq n - 3$ , 这样下去, 我们把所有副对角线以上的所有格子染黑, 那么

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (n + 1 - 2k)^2 = \frac{n(n^2 - 1)}{3}.$$

接下来, 我们考虑证明, 在上面的分析中, 我们发现 $|a_i - b_i|$ 之间有很强的约束, 如果存在很大的, 那么剩下的就不会很大. 因此, 我们会考虑其部分和的上界, 事实上, 这也引导我们思考Abel变换与Karamata之类的做法.

将 $|a_i - b_i|$ 从大到小排为 $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ , 设 $|n + 1 - 2k|$ 从大到小排为 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ , 我们只需证明对 $1 \leq m \leq n$ , 有:

$$\sum_{k=1}^m c_k \leq \sum_{k=1}^m d_k,$$

这使用组合意义等做法便不难证明.

**解** 一方面, 将所有副对角线以上的所有格子染黑, 那么

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (n+1-2k)^2 = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

另一方面, 下证. 将 $|a_i - b_i| (1 \leq i \leq n)$ 从大到小排为 $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ , 设 $|n+1-2k| (1 \leq k \leq n)$ 从大到小排为 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ , 我们先证明对 $1 \leq m \leq n$ , 有:

$$\sum_{k=1}^m c_k \leq \sum_{k=1}^m d_k,$$

事实上, 设 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 对应第 $r_1, r_2, \dots, r_m$ 行(列), 若 $a_{r_i} > b_{r_i}$ , 则将第 $r_i$ 行染红, 第 $r_i$ 列染蓝; 若 $a_{r_i} < b_{r_i}$ , 则将第 $r_i$ 行染蓝, 第 $r_i$ 列染红, 设染红了 $l$ 列, 那么染红了 $m-l$ 行, 将既染红又染蓝的格子染为白色, 那么注意到染红的格子(记重复染)不超过 $l(n-l) + (m-l)(n-m+l)$ , 于是就有

$$\sum_{k=1}^m c_k \leq l(n-l) + (m-l)(n-m+l),$$

这是因为在 $\sum_{k=1}^m c_k = \sum_{k=1}^m |a_{r_k} - b_{r_k}|$ 中, 将绝对值展开, 一个格子如果对其产生正贡献, 那么这个格子是红格(若开始是被染为红蓝二色, 则在展开式中有一次正贡献, 一次负贡献, 总贡献为0),

于是就有(第二个不等号只需简单计算, 留作练习)

$$\sum_{k=1}^m c_k \leq l(n-l) + (m-l)(n-m+l) \leq \sum_{k=1}^m d_k,$$

于是对 $1 \leq m \leq n$ , 有:

$$\sum_{k=1}^m c_k \leq \sum_{k=1}^m d_k.$$

这样, 利用Abel变换, 就有(规定 $c_{n+1} = d_{n+1} = 0$ )

$$\sum_{k=1}^n (c_k^2 - d_k^2) = \sum_{k=1}^n (c_k + d_k - c_{k+1} - d_{k+1}) \left( \sum_{j=1}^k (c_j - d_j) \right) \leq 0,$$

故命题得证. ■

#### 例题 1.4.10

设 $n$ 为整数, 对整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 求证:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i-j) \mid \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

**分析** 等价的, 只需证明对任意素数 $p$ , 有:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} V_p(i - j) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_p(a_i - a_j).$$

类似本节前几个例题的想法, 我们只需证明对任意素数的幂 $P$ , 左边被 $P$ 整除的数个数不超过右边被 $P$ 整除的数个数, 这便很明显了, 设 $y_j$ 是 $1, 2, \dots, n$ 中 $\bmod P$ 余 $j$ 的数的个数,  $x_j$ 是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中 $\bmod P$ 余 $j$ 的数的个数, 我们只需

$$\sum_{k=1}^P \binom{y_i}{2} \leq \sum_{k=1}^P \binom{x_i}{2},$$

这只要构建一个优越关系就可以了.

**解** 我们先证明, 对任意素数的幂 $P$ , 左边被 $P$ 整除的数个数不超过右边被 $P$ 整除的数个数.

对 $1 \leq j \leq P$ , 设 $y_j$ 是 $1, 2, \dots, n$ 中 $\bmod P$ 余 $j$ 的数的个数,  $x_j$ 是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中 $\bmod P$ 余 $j$ 的数的个数, 那么 $|y_i - y_j| \leq 1$  ( $1 \leq i < j \leq P$ ), 于是将 $\{x_j\}$ 从大到小排后, 优于将 $\{y_j\}$ 从大到小排, 因此由Karamata不等式, 知:

$$\sum_{k=1}^P \binom{y_i}{2} \leq \sum_{k=1}^P \binom{x_i}{2}.$$

这也即左边被 $P$ 整除的数个数不超过右边被 $P$ 整除的数个数.

因此, 对固定的素数 $p$ , 对任意正整数 $\alpha$ , 左边被 $p^\alpha$ 整除的数个数不超过右边被 $p^\alpha$ 整除的数个数,

对全体 $\alpha$ 求和得(因为 $V_p(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathbf{1}_{p^\alpha | x}$ ):

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} V_p(i - j) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_p(a_i - a_j),$$

命题即证. ■

最后, 我们介绍一些做法朴素的问题来结束此章节.

#### 例题 1.4.11

设 $n$ 为正整数, 对正整数 $a_i, b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 满足 $a_i < b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 且对 $1 \leq i < j \leq n$ , 有 $a_i \neq a_j$  或  $b_i \neq b_j$ , 求证:

$$\sum_{k=1}^n b_k \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

**分析** 我们去考察左边的最小可能值, 其实我们发现对固定的 $x > y$ , 取到 $x$ 的 $b_k$ 数量与取到 $y$ 的数量并没有任何影响, 也就是说 $b_k$ 取值之间其实并没有过多的纠缠, 唯一的约束只是能取到一个值的 $b_k$ 个数是有上界的, 那么利用这个思路, 我们便可以轻松解决这个问题.

**解** 设  $b_1, b_2, \dots, b_n$  中, 取到  $r$  有  $x_r$  次 ( $r \in \mathbb{N}^+$ ), 于是  $n = \sum_{r \geq 1} x_r$ , 此时有

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{r \geq 1} r b_r.$$

注意到, 使得  $b_k = r$  的  $k$  不能超过  $r - 1$  个, 于是  $x_r \leq r - 1$

设  $m$  最大使得  $\frac{m(m-1)}{2} \leq n$ , 于是经过简易调整 (若存在  $p < q$ ,  $x_p < p - 1, x_q > 0$ , 将  $x_p \rightarrow x_p + 1, x_q \rightarrow x_q - 1$ , 式子更小), 我们不难发现

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{r \geq 1} r b_r \geq \sum_{r=1}^m r(r-1) + (m+1) \left( n - \frac{m(m-1)}{2} \right),$$

因此, 只需证:

$$\sum_{r=1}^m r(r-1) + (m+1) \left( n - \frac{m(m-1)}{2} \right) \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

注意到 (这里利用  $\frac{3}{2}$  次方及左边的结构联想到转换为根号求和),

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{2(k+1)} \leq \sum_{r=0}^m \sum_{k=\frac{(r-1)r}{2}+1}^{\min\{\frac{(r+1)r}{2}, n\}} \sqrt{2(k+1)},$$

利用  $\frac{(r-1)r}{2} + 1 \leq k \leq \frac{(r+1)r}{2}$  时,  $\sqrt{2(k+1)} < r + 1$ , 逐项比较得原不等式成立. ■

### 例题 1.4.12

给定正整数  $m, n > 2$ , 对正整数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $P = m \sum_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^n x_k$ , 求  $P$  的最大可能值.

**分析** 对于这种满足一个方程的题, 我们首先考察取等, 并从一些小情况尝试. 一个和量级的等于一个积量级的, 那么我们在直观上感觉积的这边会更大一些, 于是自然地, 右边应当会有很多的 1, 这是第一个感受.

我们进行一些尝试, 比如  $m = 1, n = 3$ , 从最基本的情况考虑取等以及放缩方法, 考虑方程:

$$abc = a + b + c.$$

熟知它的非平凡解只有解 3, 2, 1, 但是这怎么证明? 看看这个式子的特性, 当有数充分大时, 显然不成立, 因此我们可以从最大数来做文章, 我们发现, 如果设  $a$  最大, 那么  $a = \frac{b+c}{bc-1} \leq \frac{2a}{bc-1}$ , 这表明  $bc \leq 3$ , 同时,  $b, c$  又不能同时为 1, 否则式子显然不成立, 那么  $bc \geq 2$ . 这便给了我们一个启示, 可以考虑除去最大数之外的数的乘积的范围, 后面尝试将所求式子用乘积表示, 那么我们便可以按照这个思路找到取等及放缩办法, 进而解决这个问题.



我们找一下取等: 在考虑  $\prod_{k=2}^n x_k$  的范围时, 下界是一个取等的关键处, 因为上界中的放缩默认了全体数都相等. 事实上, 由于  $x_1 \prod_{k=2}^n x_k > mx_1$ , 于是  $\prod_{k=2}^n x_k \geq m+1$ , 那么我们可以猜测  $x_2 = m+1, x_3 = \dots = x_n = 1$ , 解得  $x_1 = m(m+n-1)$ .

**解** 一方面, 取  $x_1 = m(m+n-1), x_2 = m+1, x_3 = \dots = x_n = 1$ , 此时  $P = m(m+1)(m+n-1)$ ; 下证  $P \leq m(m+1)(m+n-1)$ :

(根据分析中的想法,) 不妨设  $x_1 = \max_{1 \leq k \leq n} x_k$ , 于是就有:

$$x_1 = \frac{m \sum_{k=2}^n x_k}{\prod_{k=2}^n x_k - m} \geq 0.$$

于是  $l := \prod_{k=2}^n x_k \geq m+1$ , 同时,

$$x_1 = \frac{m \sum_{k=2}^n x_k}{\prod_{k=2}^n x_k - m} \leq \frac{m(n-1)x_1}{\prod_{k=2}^n x_k - m},$$

解得  $l \leq mn$ , 因此  $m+1 \leq l \leq mn$  (接下来类似分析用  $l$  表示  $P$ ).

由伯努利不等式,

$$P = x_1 l = \frac{ml \sum_{k=2}^n x_k}{l - m} \leq \frac{ml(l+n-2)}{l - m} \leq \max\{m(m+1)(m+n-1), \frac{m^2 n(mn+n-2)}{mn-m}\}.$$

由于(最后一个不等号用到  $m, n \geq 3$ )

$$\frac{m^2 n(mn+n-2)}{mn-m} \leq \frac{mn(mn+n)}{n-1} = m(m+1) \frac{n^2}{n-1} \leq m(m+1)(m+n-1),$$

故  $P \leq m(m+1)(m+n-1)$ , 命题得证. ■

### 例题 1.4.13

求最大的实数  $\lambda$ , 对任意正整数  $n > 1$ , 存在正整数  $x_1, x_2, \dots, x_n > 1$ , 满足:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] \geq (n + \lambda) \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

**分析** 大概先看看量级来建立一个初始感受, 我们希望左边尽量大, 那么希望  $x_i$  两两互素并且尽可能接近, 设接近与  $t$ , 于是此时左边大概时  $nt + n(n-1)t^2$ , 右边大概是  $n(n+\lambda)t^2$ , 因此当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\lambda$  大概取  $-1$ , 因此我们首先可以发现答案是  $-1$ .

然后, 我们去寻找构造, 我们让  $x_i$  两两互素, 那么原命题经变形也就变为:

$$\sum_{k=1}^n x_k \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

我们注意到, 右边是具有平移不变性的, 那么我们先找到一组两两互素的数, 比如前 $n$ 个素数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 再考虑 $x_k = p_k + t$ , 我们只需 $(p_i + t, p_j + t) = 1 (1 \leq i < j \leq n)$ 即可, 这也即 $(p_i - p_j, p_j + t) = 1 (1 \leq i < j \leq n)$ , 如果 $d|p_i - p_j$ 可以推出 $d|t$ , 那么 $d|p_j, p_i$ , 则有 $d = 1$ , 因此我们希望 $t = Mp_n!$ ,  $M$ 充分大, 这样就满足条件了.

接下来我们去分析对最优性的证明, 即对任意 $\lambda > -1$ , 证明存在正整数 $n$ , 对任意正整数 $x_1, x_2, \dots, x_n > 1$ , 有:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] < (n + \lambda) \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

事实上, 比较两边的结构, 我们需要找到一个合适的放缩, 将 $[x, y]$ 与 $x^2 + y^2$ 联系起来. 直接使用 $[x, y] \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ 是不够的, 我们考虑优化一下, 当 $x, y > 1$ 时, 这个显然不能取等, 那么可以加强为 $[x, y] \leq \frac{x^2 + y^2 - 1}{2}$ , 这样, 左边可以放缩为

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] \leq (n-1) \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n(n-1)}{2},$$

我们只要考虑

$$\sum_{k=1}^n x_k - \frac{n(n-1)}{2} \leq (1 + \lambda) \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

我们发现当左边非小于0时,  $x_i$ 的和为二次量级, 那么平方和至少是三次量级, 利用这个思路, 我们便可以完成证明.

**解** 所求最大的实数 $\lambda$ 为 $-1$ .

一方面, 设前 $n$ 个素数为 $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 取正整数 $M > np_n$ (这是由下面的不等式待定得来的), 取 $t = Mp_n!$ , 记 $x_k = p_k + t (1 \leq k \leq n)$ , 若存在 $1 \leq i < j \leq n$ 使得 $(p_i - p_j, p_j + t) \neq 1$ , 设 $d > 1$ 使得 $d|p_i + t, p_j + t$ , 则 $d|p_i - p_j$ , 于是 $d \leq p_j \leq p_n$ , 所以 $d|t$ , 则 $d|p_i, p_j$ , 故 $d|1$ , 矛盾. 因此 $x_i$ 两两互素. 此时,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n x_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j,$$

不等式经变形即为

$$\sum_{k=1}^n x_k \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2,$$

代入即为

$$n^2 p_n \times p_n! \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - p_j)^2 - \sum_{k=1}^n p_k,$$

这显然成立; 另一方面, 我们对 $\lambda > -1$ , 证明对正整数 $n > 1 + \frac{2}{1+\lambda}$ , 任意正整数 $x_1, x_2, \dots, x_n > 1$ , 有:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] < (n + \lambda) \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

注意到, 对正整数  $x, y > 1$ , 有

$$[x, y] \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

并且等号不同时取(因为第二个等号表面  $x = y$ , 此时  $[x, y] = x \leq x^2$ ), 则有  $[x, y] \leq \frac{x^2 + y^2 - 1}{2}$ , 于是就有

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] \leq (n-1) \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n(n-1)}{2},$$

因此, 我们只要证


$$\sum_{k=1}^n x_k - \frac{n(n-1)}{2} \leq (1+\lambda) \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

不妨设  $\sum_{k=1}^n x_k > \frac{n(n-1)}{2}$ , 于是


$$(1+\lambda) \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq \frac{(1+\lambda)}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 > \frac{(1+\lambda)(n-1)}{2} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) > \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n(n-1)}{2},$$


命题得证. ■

## 练习 1.4


 **练习 1.4.1** 求最大的实数  $\lambda$ , 对任意正整数  $n$  及两两不同的正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 均有:

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \left( \sum_{k=1}^n a_i \sqrt{a_i(a_i^3 + 1)} \right) - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \geq \lambda n^2 (n^2 - 1).$$


 **练习 1.4.2** 设平面上有 1000 个点, 任意三点不共线, 求平行线个数最小值.

 **练习 1.4.3** 求最大的实数  $c$ , 对任意正整数  $n > 100$ , 正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  以及两两不同的正整数  $x_1, x_2, \dots, x_n > 1$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k^2 \geq 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^c \sum_{a_i=1} x_i.$$


 **练习 1.4.4** 求实数  $C$  的取值范围, 对任意两两不同的整数  $a_1, a_2, \dots, a_{199}$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^{199} a_k^2 \geq C \sum_{k=1}^{199} a_k.$$

 **练习 1.4.5** 设  $n$  为正整数, 对正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足对  $\{1, 2, \dots, n\}$  的任意子集  $I$ ,

均有  $\sum_{i \in I} a_i \geq \left( \sum_{i \in I} b_i \right)^2$ , 求证:

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^3.$$

 **练习 1.4.6** 设  $n$  为正整数, 正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中两两没有整除关系, 求证:

$$\sum_{k=1}^n a_k \geq 1.1n^2 - 2n.$$

## 第2章 取整函数型问题

取整函数型问题,即问题中出现取整,取余,到最近整数距离等类似符号的问题.在近几年的正式考试中出现频率开始增高,下面我们从以下几个角度入手分析.

### 内容提要

□ 线性与凸性

□ 大小分析与组合性质

□ 分组与配凑

□ 高等技巧

### 2.1 线性与凸性

取整,取余函数等类似的函数,一个特点是在局部保持了线性,这保证了在一些情况下,我们可以使用其线性做一些调整或使用相应的观点;同时,其线性保证了在某些特殊结构下,带有取整或者取余函数的特殊结构具有一定的凸性或者单调性,可以帮助我们更加容易地看清问题的本质.凸性与线性是我们做题中比较重要的观察,可以帮助我们破开复杂的结构,在后面的章节中我们不可避免地还会用到.

从几个最经典的问题开始我们这一章节.从一些简单的线性或凸性开始.

#### 例题 2.1.1

给定正整数  $m \geq n$ , 求最大的实数  $c_1$  与最小的实数  $c_2$ , 使得对任意和为  $m$  的非整数的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有

$$c_1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{\{x_k\}}{x_k} \leq c_2.$$

**分析** 比较自然地,我们考察整数部分与小数部分分离,设  $a_k = \{x_k\}, b_k = \lfloor x_k \rfloor$ , 那么要求的

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k + b_k} = n - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k + b_k},$$

的范围. 对于上界,我们考虑固定  $a_k$ , 去合理分配  $b_k$  使得这个值更大或更小,我们注意到,该函数关于  $b_k$  是下凸函数,那么更大时更多  $b_k$  为0,这样就可以解决上界;

对于下界,我们发现明显的特征,需要让  $\{x_k\}$  尽可能多的趋于0,并且为了防止分母随分子一起趋向0,我们要让  $x_k$  尽可能大于1,做一些简单的讨论即可,这样我们便可以解决这个问题.我们看看具体如何操作;

同时,为了防止大家在调整法中迷失自我,建议大家自行尝试放缩方法.

**解** 一方面,取充分小的正实数  $r$ , 取  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{n-2}{n-1} + r, x_n = m - (n-2) - (n-1)r$

(其实只需前  $n-1$  个小于1且和为  $n-2$ ), 令  $r \rightarrow 0$ , 得到  $c_2 \geq n-1 + \frac{1}{m-n+2}$ ;

取充分小的正实数 $r$ , 取 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 1+r, x_n = m - (n-1) - (n-1)r$ , 令 $r \rightarrow 0$ , 得到 $c_1 \leq \frac{1}{m-n+1}$ , 下证明:

$$\frac{1}{m-n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\{x_k\}}{x_k} \leq n-1 + \frac{1}{m-n+2}.$$

先证右边, 设 $a_k = \{x_k\}, b_k = \lfloor x_k \rfloor$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 那么固定 $b_i + b_j$ , 原函数为关于 $b_i$ 的下凸函数, 当 $b_i, b_j$ 之一为0时更大, 故可以不妨最终 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} < 1$ , 于是

$$\sum_{k=1}^n \frac{\{x_k\}}{x_k} = n-1 + \frac{a_n}{a_n + b_n} = n-1 + \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n b_k} \leq n-1 + \frac{1}{m-n+2}.$$

最后一个不等号是因为 $\sum_{k=1}^n a_k \leq n-1$ .

再证左边, 若存在 $1 \leq k \leq n$ 使得 $x_k < 1$ , 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{\{x_k\}}{x_k} \geq 1 \geq \frac{1}{m-n+1},$$

若任意 $1 \leq k \leq n$ , 都有 $x_k > 1$ , 则对任意 $1 \leq k \leq n$ , 有 $x_k \leq m-n+1$ , 于是

$$\sum_{k=1}^n \frac{\{x_k\}}{x_k} \geq \frac{1}{m-n+1} \sum_{k=1}^n \{x_k\} \geq \frac{1}{m-n+1}.$$

命题得证. ■

### 例题 2.1.2

给定正整数 $n \geq 4$ , 求最小的常数 $C$ , 对任意和为 $n$ 的正实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_{n+1} = x_1$ ), 均有:

$$\sum_{k=1}^n x_k \{x_{k+1}\} \leq C.$$

**分析** 设 $a_k = \{x_k\}, b_k = \lfloor x_k \rfloor$ , 那么原式为

$$\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} + \sum_{k=1}^n b_k a_{k+1}.$$

一个平凡观察是考虑变化 $b_k$ , 右边拉到最大时只需对应的 $a_k$ 最大, 我们设 $m = \max_{1 \leq k \leq n} a_k$ , 那么

$$\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} + \sum_{k=1}^n b_k a_{k+1} \leq m \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}.$$

我们在 $\sum_{k=1}^n a_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 的情况下考虑上式的最值, 一个观察是 $a_k$ 中尽可能更多

的数趋近1或为0, 因为固定不相邻两数之和时关于一个数是一次函数. 那么,  $m$  我们可以尝试直接放成1. 于是就有

$$m \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \leq n + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} - \sum_{k=1}^n a_k.$$

比较希望  $a_k$  中较大的数尽可能相邻, 于是我们先考察  $\sum_{k=1}^n a_k = n-1$ , 此时让  $n-2$  个1相邻, 最后让2个  $\frac{1}{2}$  相邻, 那么此时算出  $n - \frac{3}{4}$ , 就是我们猜测的答案;

至于证明, 我们只要考虑证明

$$\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^n a_k - \frac{3}{4},$$

就可以完成问题的证明, 我们在下面给出详细做法.

**解** 一方面, 对充分小的正实数  $r$ , 取  $a_1 = \frac{3}{2} + (n-2)r, a_2 = \dots = a_{n-1} = 1-r, a_n = \frac{1}{2}$ , 令  $r \rightarrow 0$ , 得到  $C \geq n - \frac{3}{4}$  (这里的构造是根据分析得来的, 先让小数部分有  $n-2$  个  $1-r$ , 再分配两个  $\frac{1}{2}$  左右的)

首先, 设  $a_k = \{x_k\}, b_k = \lfloor x_k \rfloor$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 那么 (总结分析中的放缩)

$$\sum_{k=1}^n x_k \{x_{k+1}\} = \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} + \sum_{k=1}^n b_k a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} = n + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} - \sum_{k=1}^n a_k$$

不妨设  $\sum_{k=1}^n a_k \neq 0$  (此时原式为0, 但不讨论上面会放过), 因此, 我们只需对  $\sum_{k=1}^n a_k \in \{1, \dots, n-1\}$  去证明:

$$\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^n a_k - \frac{3}{4}.$$

固定  $s = \sum_{k=1}^n a_k$ , 对不相邻的  $i, j$  (即  $i, j \bmod n$  下不差1) 固定  $a_i + a_j$ , 左边是关于  $a_i$  的一次函数, 于是可以调整  $a_i, a_j$  之一为0或1, 于是最终之多有一对相邻的数  $u, v$  不为0或1, 那么它们的和为1 (因为和为整数), 因此左边不超过  $s - 1 + uv \leq s + \frac{3}{4}$ , 命题得证. ■

### 例题 2.1.3

给定正奇数  $n \geq 4$ , 对和为  $n$  的非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 求

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i \|a_j\|$$

的最大可能值.

**分析** 一个自然的考察是将原式作一个合并同类项, 得到

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i \|a_j\| = n \sum_{i=1}^n \|a_i\| - \sum_{i=1}^n a_i \|a_i\|.$$

对于这个式子, 我们会想到, 首先要让左边尽可能大, 其次要让右边减的尽可能小. 在奇数情况下, 左边有一个平凡的上界:

$$\sum_{k=1}^n \|a_k\| \leq \min \left\{ \sum_{k=1}^n \{a_k\}, \sum_{k=1}^n (1 - \{a_k\}) \right\} \leq \frac{n-1}{2}.$$

同时, 为了让右边减的尽量小, 我们来看看如何分配  $[a_i]$ , 因为整数部分事实上在这里是线性的.

事实上, 我们如果考虑一个最小的  $\|a_i\|$ , 那么我们会让  $[a_i]$  最大, 其余都最小, 这样直观上右边减的更小; 设  $\|a_n\|$  最小, 整理一下就是

$$\sum_{i=1}^n a_i \|a_i\| \geq \sum_{i=1}^{n-1} \{a_i\} \|a_i\| + \left( n - \sum_{k=1}^{n-1} \{a_k\} \right) \|a_n\|.$$

这个时候, 我们希望可以再小一些, 并且将形式统一一下, 自然地, 想将  $\{a_i\}$  都变成  $\|a_i\|$ , 我们意识到如果小数部分不大于 0.5, 那么右边会更小, 那么我们发现  $\{a_i\} \geq \|a_i\|$ , 这样就可以进一步往下放:

$$\sum_{i=1}^n a_i \|a_i\| \geq \sum_{i=1}^{n-1} \|a_i\|^2 + \left( n - \sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\| \right) \|a_n\|.$$

代回去看看形式, 就是

$$n \sum_{i=1}^n \|a_i\| - \sum_{i=1}^{n-1} \|a_i\|^2 - \left( n - \sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\| \right) \|a_n\| = n \sum_{i=1}^{n-1} \|a_i\| - \sum_{i=1}^{n-1} \|a_i\|^2 + \|a_n\| \sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\|.$$

这下, 形式就变得很整齐了, 不断使用上面的界限放缩, 剩下的就是一些基本的代数放缩了. 其实现在只能看出较大的  $\|a_i\|$  都相等, 我们在最后的放缩中, 可以看出取等.

**解** 原式经变形为:

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i \|a_j\| = n \sum_{i=1}^n \|a_i\| - \sum_{i=1}^n a_i \|a_i\|,$$

我们注意到,

$$\sum_{k=1}^n \|a_k\| \leq \min \left\{ \sum_{k=1}^n \{a_k\}, \sum_{k=1}^n (1 - \{a_k\}) \right\} \leq \frac{n-1}{2}.$$



设  $y_k = \|a_k\| (1 \leq k \leq n)$  (简化记号),  $y_n = \min_{1 \leq i \leq n} y_i$ , 由于

$$\sum_{i=1}^n (a_i - \|a_i\|) \|a_i\| \geq \left( \sum_{i=1}^n (a_i - \|a_i\|) \right) \|a_n\|,$$

我们可以得到(上一步和这一步相当于用放缩的方式将分析中调整的想法写出来了):

$$\sum_{i=1}^n a_i \|a_i\| \geq \sum_{k=1}^n y_k^2 + \left( n - \sum_{k=1}^n y_k \right) y_n,$$

因此就有:

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i \|a_j\| \leq n \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n y_k^2 - \left( n - \sum_{k=1}^n y_k \right) y_n = n \sum_{k=1}^{n-1} y_k - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 + y_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k.$$

设  $s = \sum_{k=1}^{n-1} y_k \leq \frac{n-1}{2}$ , 于是就有:

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i \|a_j\| \leq ns - \frac{1}{n-1} s^2 + \left( \frac{n-1}{2} - s \right) s = \frac{3n-1}{2} s - \frac{n}{n-1} s^2,$$

这是关于  $s$  的开口向下的二次函数, 对称轴为  $s = \frac{(3n-1)(n-1)}{2n} \geq \frac{n-1}{2}$ , 于是

$$\frac{3n-1}{2} s - \frac{n}{n-1} s^2 \leq \frac{(3n-1)(n-1)}{4} - \frac{n}{n-1} \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 = \frac{(2n-1)(n-1)}{4}.$$

(这里当  $s = \frac{n-1}{2}$ ,  $y_n = 0$  时取等, 于是我们就可以看出取等)另一方面, 取  $x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{2}$ ,  $x_n = \frac{n+1}{2}$  即可取等, 命题得证. ■

到此为止, 上面的两个问题都是以取整等符合为基础的基本二次结构, 这种问题(以基本代数结构为框架, 在一些一次变量上加上取整等符号)往往没有过多的思维难度, 只是对于计算以及一些细节的考察, 而且无论怎样变化都无法跳脱本质上的代数结构, 并不具备考试价值, 而且会降低优雅度, 故在此只举此两例, 让大家对此类问题有所认识, 剩余一些类似的我们放在习题中.

为了讽刺这种问题在原创题中泛滥, 我们编出了以下此题.

#### 例题 2.1.4

设正整数  $n \geq 4$ , 对正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n x_k \leq n$ , 求

$$\left( \sum_{k=1}^n \lfloor x_k \rfloor \right) \left( \sum_{k=1}^n \lceil x_k \rceil \right) \left( \sum_{k=1}^n \{x_k\} \right) \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\| \right)$$

的最大可能值.

**分析** 这个问题其实思路很简单, 我们注意到这几个式子都可以通过对取余的求和表示或放缩出来, 于是就可以转化为比较容易的单变元函数形式, 我们看看如何放缩.

设从左到右四个式子分别是  $A, B, C, D$ , 那么比较自然的观察是  $S = \sum_{k=1}^n x_k$  还是要尽可能取到  $n$ , 这样原式可能会更大一些. 比较容易发现,  $A + C = S \leq n, B \leq A + n$ , 那么  $A \leq n - C, B \leq 2n - C$ , 事实上, 右边还可以加上取整, 因为  $A, B$  都是整数. 我们不难发现这个放缩对几乎所有情况都是可以取等的, 当和为  $n$  并且不全为整数时可以取等, 而  $D$  比较大时  $x_i$  基本上不是整数.

至于  $D$  的放缩, 比较自然地, 直接放缩有

$$D \leq \min \left\{ \sum_{k=1}^n \{a_k\}, \sum_{k=1}^n (1 - \{a_k\}) \right\} = \min\{C, n - C\},$$

事实上, 这个取等依然是很自由的, 我们只要手动让全体  $\{a_k\}$  全部大于或小于  $\frac{1}{2}$ , 这容易做到.

因此我们得到

$$ABCD \leq \lfloor n - C \rfloor \lfloor 2n - C \rfloor C \min\{C, n - C\}.$$

直观上在  $C$  取到  $\frac{n}{2}$  附近时有最大值, 这样就可以轻松解决这个问题了.

**解** 设从左到右四个式子分别是  $A, B, C, D$ , 设  $S = \sum_{k=1}^n x_k$ , 那么就有  $A + C = S \leq n, B \leq A + n$ , 于是  $A \leq n - C, B \leq 2n - C$ , 同时有

$$D \leq \min \left\{ \sum_{k=1}^n \{a_k\}, \sum_{k=1}^n (1 - \{a_k\}) \right\} = \min\{C, n - C\},$$

因此当  $n$  为偶数时, (n为偶数时不涉及到  $\frac{n}{2}$  不是整数带来的麻烦, 故可以去掉取整)

$$ABCD \leq (n - C)(2n - C)C \min\{C, n - C\}.$$

(对于  $\min$ , 我们自然地想到分类) 若  $C \geq \frac{n}{2}$ , 那么

$$(n - C)(2n - C)C \min\{C, n - C\} = C(n - C) \cdot (n - C)(2n - C) \leq \frac{3n^4}{16},$$

如果  $C \leq \frac{n}{2}$ , 那么

$$(n - C)(2n - C)C \min\{C, n - C\} = C(n - C) \cdot (2n - C)C \leq \frac{3n^4}{16}.$$

对于 $n$ 为奇数(此时 $\frac{n}{2}$ 不是整数, 我们需要更精细的放缩, 故引入取整), 我们有:

$$ABCD \leq [n - C] [2n - C] C \min\{C, n - C\},$$

(我们使用 $\frac{n-1}{2}$ 为界限, 因为这是一个中间的整数.) 若 $C \leq \frac{n-1}{2}$ , 则有:

$$ABCD \leq C(n - C) \cdot (2n - C)C \leq \frac{n^2 - 1}{4} \cdot \frac{(n - 1)(3n + 1)}{4} = \frac{(n^2 - 1)(3n + 1)(n - 1)}{16},$$

若 $C > \frac{n-1}{2}$ , 则 $A \leq \frac{n-1}{2}$ ,  $B \leq \frac{3n-1}{2}$ , 则有:

$$ABCD \leq AB \cdot C(n - C) \leq \frac{(n - 1)(3n - 1)n^2}{16} \leq \frac{(n^2 - 1)(3n + 1)(n - 1)}{16}.$$

接下来考虑取等,  $n$ 为偶数时( $C = \frac{n}{2}$ , 最好的情况是全部小数部分都是 $\frac{1}{2}$ ), 取 $x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{2}$ ,  $x_n = \frac{n+1}{2}$ , 可得原式为 $\frac{3n^4}{16}$ ;

$n$ 为奇数时( $C = \frac{n-1}{2}$ , 最好的情况是全部小数部分都是 $\frac{n-1}{2n}$ ), 取 $x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{n-1}{2n}$ ,  $x_n = \frac{n^2+2n-1}{2n}$ , 可得原式为 $\frac{(n^2-1)(3n+1)(n-1)}{16}$ . ■

接下来我们看一些较为复杂的函数结构中的凸性.

### 例题 2.1.5

给定正整数 $n \geq 4$ , 求最小的实数 $C$ , 对任意积为1的正实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^n \{x_k\} \leq C.$$

**分析** 这个我们可以自然地从小数部分出发, 在左边是 $n$ 个取余的和, 那么我们自然希望有尽可能多的为1, 我们考虑 $x_k \rightarrow y_k - (1 \leq k \leq n - 1)$ , 那么 $x_n \rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} y_k^{-1}$ , 不妨 $y_k$ 之一大于1, 那么 $x_n$ 趋于的实数最大也是 $\frac{1}{2}$ , 那么我们会得到答案 $n - \frac{1}{2}$ .

至于证明, 对于 $1 \leq i < j \leq n$ , 我们发现固定 $x_i x_j$ 时, 关于 $x_i$ 在连续区间内是下凸函数, 故我们可以将其中一个数调整到端点处, 这样, 最终至多1个数不接近整数. 这便是凸性调整的一般思路, 很多类似的问题都可以用这个想法得到思路.

我们尝试将这个想法用放缩来写明白, 先给出一个方法: 据此思路, 其实我们可以在某些情况下总结成为一个局部的不等式:  $\{a\} + \{b\} \leq 1 + \{kab\}$ , 其中 $k$ 是一个整数或整数的倒数; 为了让这个形式更好, 我们希望 $k = 1$ , 比较自然的想法就是让 $a, b$ 调整时尽量不要跨越整数, 那么我们希望 $a, b$ 尽可能都比较小, 为了同时约束两个数, 我们可以考虑让 $ab < 1$ , 这样, 我们就有

$$1 + \{ab\} = 1 + ab \geq 1 + \{a\}\{b\} \geq \{a\} + \{b\},$$

这样就可以归纳解决原问题.

**解** 一方面, 取 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-2} = 1 - r$ ,  $x_{n-1} = \frac{1}{2}$ ,  $x_n = 2(1 - r)^{-n+2}$ , 令正实数 $r \rightarrow 0$ ,

得到  $C \geq n - \frac{1}{2}$ ; 另一方面, 对正整数  $n$  归纳证明, 当  $n = 2$  时, 我们证明

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} \leq \frac{3}{2},$$

不妨设  $x > 1$ , 设  $x \in (t, t+1] (t \in \mathbb{Z})$ , 于是由凸性(对勾函数的凸性)得

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = x + \frac{1}{x} - t \leq \max \left\{1 + \frac{1}{t+1}, \frac{1}{t}\right\} \leq \frac{3}{2},$$

对于正整数  $n \geq 3$ , 若对任意  $1 \leq i < j \leq n$ , 都有  $x_i x_j \geq 1$ , 则由  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i x_j) = 1$  知  $x_i x_j = 1 (1 \leq i < j \leq n)$ , 于是  $x_i = 1 (1 \leq i \leq n)$ , 此时原式为 0;

若存在  $i < j$ , 使得  $x_i x_j < 1$ , 由于对正实数  $a, b$  满足  $ab < 1$ , 有

$$1 + \{ab\} = 1 + ab \geq 1 + \{a\}\{b\} \geq \{a\} + \{b\},$$

那么由  $x_i x_j < 1$  及归纳假设, 就有:

$$\sum_{k=1}^n \{x_k\} \leq \sum_{k \neq i, j} \{x_k\} + \{x_i x_j\} + 1 \leq n - \frac{1}{2},$$

命题得证. ■

接下来, 是一个比较综合性而且思路比较简单的例子; 更多具有系统性的问题在后面给出.

### 例题 2.1.6

给定正整数  $n, m > 1$ , 求证: 存在正实数  $q$ , 对任意和为整数的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^n \{x_k^m\} \leq n - q \left/ \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^{m^n - m} \right.$$

**分析** 想法是相同的, 我们发现固定  $x_i + x_j$ , 在每个连续区间内关于  $x_i$  是下凸函数, 那么最终可以将  $n-1$  个数调为接近  $\sqrt[m]{p_i}$ , 其中  $p_i$  为整数, 设  $S = \sum_{k=1}^n x_k$ , 这样我们最后只需估计

$$\left\{ \left( S - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[m]{p_k} \right)^m \right\} \leq 1 - q \left/ \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^{m^n - m} \right.,$$

设  $S - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[m]{p_k} = \theta$

对于这种问题, 我们最常见的手法是多项式逼近, 记  $K = \{e^{\frac{2ki\pi}{m}} : k \in \mathbb{Z}\}$ , 那么考察多项式

$$f(x) = \prod_{\alpha_j \in K} \left( x - \left( S - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sqrt[m]{p_k} \right) \right),$$

$$F(x) = \prod_{\alpha_j \in K} \left( x - \left( S - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sqrt[n]{p_k} \right)^m \right),$$

首先熟知 $f$ 是整系数多项式; 其次使用牛顿幂和公式我们不难证明 $F$ 也是整系数多项式, 于是 $F$ 一定是 $\theta^m$ 的最低多项式的倍数.

这样, 我们可以使用 $F(\theta^m) - F(t)$ 并使用中值定理估计 $\theta$ 与最近整数的距离, 就可以解决此问题, 我们在下面给出具体的过程.

**解** 设 $S = \sum_{k=1}^n x_k$  (接下来进行调整),

注意到, 对正实数 $a, b$ , 存在 $k \leq a + b$ , 使得 (其实就是凸性调整)

$$\{a^m\} + \{b^m\} \leq 1 + \{(a + b - \sqrt[m]{k})^m\},$$

不断运用上式, 可以找到非负整数 $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ 使得 $S \geq \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{p_k}$ , 且

$$\sum_{k=1}^n \{x_k^m\} \leq \left\{ \left( S - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{p_k} \right)^m \right\} + n - 1,$$

只需要解决:

$$\left\{ \left( S - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{p_k} \right)^m \right\} \leq 1 - \frac{q}{\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^{m^n - m}},$$

设 $S - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{p_k} = \theta$ , 不妨设 $\theta^m$ 不是整数, 否则显然成立. 记 $K = \{e^{\frac{2ki\pi}{m}} : k \in \mathbb{Z}\}$ , 并记

$$f(x) = \prod_{\alpha_j \in K} \left( x - \left( S - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sqrt[n]{p_k} \right) \right),$$

$$F(x) = \prod_{\alpha_j \in K} \left( x - \left( S - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sqrt[n]{p_k} \right)^m \right),$$

并设 $\theta^m$ 的最低多项式为 $g(x) = \prod_{k=1}^L (x - z_k)$  (为了防止 $F$ 有整根产生影响), 则 $z_k$ 均不为整数;

熟知 $f$ 是整系数多项式, 由初等对称多项式基本定理,  $F$ 各项系数均可表示为关于 $f$ 各项系数的整系数多项式, 因此 $F$ 也是整系数多项式, 于是 $g(x) | F(x)$ , 则 $L \leq \deg F = m^{n-1}$

考察 $g$ 的每个零点的模长 (为了后面对导数放缩时有较好的估计):

$$\left| S - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sqrt[n]{p_k} \right|^m \leq (2S)^m,$$

于是  $|z_k| \leq (2S)^m (1 \leq k \leq L)$ , 由于

$$1 - \{\theta^m\} = \lceil \theta^m \rceil - \theta^m,$$

则存在实数  $\xi \in (\theta^m, \lceil \theta^m \rceil)$ , 使得

$$(\lceil \theta^m \rceil - \theta^m) |g'(\xi)| = |g(\lceil \theta^m \rceil) - g(\theta^m)| \geq 1,$$

由于(使用上面根的界限放缩  $|g'(\xi)|$ )

$$|g'(\xi)| = \left| \sum_{k=1}^L \prod_{j \neq k} (\xi - z_j) \right| \leq \sum_{k=1}^L \left| \prod_{j \neq k} (\xi - z_j) \right| \leq L \cdot (S^m + (2S)^m)^{L-1} \leq m^{n-1} \cdot (3S)^{m^n-m},$$

因此就有:

$$1 - \{\theta^m\} \geq S^{-m^n+m} \cdot (m^{n-1} 3^{m^n-m})^{-1},$$

取  $q = (m^{n-1} 3^{m^n-m})^{-1}$  即满足条件.



## 练习 2.1

**练习 2.1.1** 给定正实数  $k > 1$ , 求最小的实数  $C$ , 对任意正实数  $x$ , 均有:

$$\{x^k\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} \leq C.$$

**练习 2.1.2** 给定正整数  $n \geq 4$ , 求最小的实数  $c_1$  与最大的实数  $c_2$ , 满足对任意非整数的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有:

$$c_2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k \{x_k\}}{x_k + 1} \leq c_1.$$

**练习 2.1.3** 给定正整数  $k, n$ , 求最大的实数  $\lambda$ , 对任意和为  $kn$  的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lfloor x_k \rfloor^2}{x_k} \geq \lambda.$$

**练习 2.1.4** 给定正整数  $n \geq 4$ , 求最小的常数  $C$ , 对任意和为  $n$  的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n (x_{n+1} = x_1)$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^n x_k \|x_{k+1}\| \leq C.$$

练习 2.1.5 给定正整数  $n \geq 4$ , 求最小的常数  $C$ , 对任意和为  $n$  的非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 均有:

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i \{a_j\} \leq C.$$

练习 2.1.6 给定正整数  $n$ , 求最小的常数  $C$ , 对任意正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n (x_{n+1} = x_1)$ , 均有:

$$\left( \sum_{k=1}^n \{x_k\} \right) \left( \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{x_k} \right\} \right) \leq C.$$

练习 2.1.7 求最小的实数  $C$ , 对任意和为 30 的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^{10} \{x_k^2\} \leq C.$$

## 2.2 分组与配凑

在这一节, 我们主要考虑取整函数等符合的经典的 inequality 以及通过配凑这些 inequality 来解决问题.

首先我们介绍一些经典的 inequality: 对实数  $x, y$ , 有

(1)

$$\lfloor x + y \rfloor - 1 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor.$$

(2)

$$\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\} \leq \{x + y\} + 1.$$

(3)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 1 - \|x + y\|.$$

(4)

$$\lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil \leq \lceil x + y \rceil + 1.$$

当然最基本的一些放缩有时候也会用到, 比如  $\{x\} \leq x, \|x\| \leq \{x\}, \lfloor x \rfloor \leq x$  之类的, 我们在前面已经涉及到了, 在后面也会用到, 有时候也会结合整数离散性得到一些放缩, 我们在前面也涉及到了. 但其实也有一些单纯用到这些的

关于取整的一些恒等式有时候也有作用, 我们在后面介绍.

先看几个不太需要配对的经典取整函数问题.

**例题 2.2.1**

给定正整数  $n \geq 2$ , 对实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{k=1}^n [x_k^2]$$

的最大可能值.

**分析** 首先一个自然的观察是这个结构可以将下标改为  $1 \leq i < j \leq n$  形式, 这样, 我们得到:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{k=1}^n [x_k^2] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]),$$

这个形式并不具备很好的整体性质, 而且上面的形式因为具有一定的局部复杂度, 所以对于局部考虑具有一定的提示性, 因此我们先从局部性质入手. 比较明显的观察是, 如果去掉取整, 那么

$$2ab - a^2 - b^2 \leq 0,$$

直观上, 我们可以发现, 如果加上取整, 这个值并不会和0相差太多, 我们发现

$$2[ab] - [a^2] - [b^2] < 2ab - a^2 - b^2 + 2 \leq 2,$$

于是由整数离散性知  $2[ab] - [a^2] - [b^2] \leq 1$

我们去考察取等, 这需要  $a, b$  比较接近, 同时, 这暗示了  $a^2, b^2$  奇偶性不同, 因此, 我们可以意识到满足取等的组数不会太多, 这样我们就可以解决问题的证明部分.

最后, 我们去找到一组  $a, b$ , 使得  $2[ab] - [a^2] - [b^2] = 1$ , 设  $a < b$ , 那么我们希望  $[a^2] + 1 = [ab] = [b^2] = t$ , 我们假象已经选定了  $a$ , 如何选  $b$ ? 事实上, 让  $b$  从  $a$  开始增大, 直到  $[ab] > [a^2]$ , 这样, 我们可以设  $ab = t$  是整数, 只需  $a$  稍微比  $\sqrt{t}$  小一点,  $b$  稍微比  $\sqrt{t}$  大一点, 我们稍微找一个显性的例子即可.

**解** 一方面, 我们取  $a_1 = \dots = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2.4, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = \dots = a_n = 2.5$  (这里相当于取了  $t = 6$ , 取法不唯一), 可得

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{k=1}^n [x_k^2] = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

另一方面, 下证

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{k=1}^n [x_k^2] \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor,$$

注意到对实数  $a, b$ , 有

$$2[ab] - [a^2] - [b^2] < 2ab - a^2 - b^2 + 2 \leq 2,$$



于是  $2[ab] - [a^2] - [b^2] \leq 1$ , 且取等时  $[a^2], [b^2]$  奇偶性不同, 不妨设  $[x_1^2], \dots, [x_k^2]$  为奇数,  $[x_{k+1}^2], \dots, [x_n^2]$  为偶数, 于是

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2]) \leq k(n-k) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor,$$

(这是因为若  $2[x_i x_j] - [x_i^2] - [x_j^2] > 0$ , 则  $i, j$  分属于  $[1, k], [k+1, n]$ , 变形得

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} [x_i x_j] - (n-1) \sum_{k=1}^n [x_k^2] \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor,$$

命题即证. ■

### 例题 2.2.2

设  $n$  为正整数, 对实数  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  满足  $\sum_{k=1}^n k a_k = 0$ , 求证: 对任意正实数  $x$ ,

$$\sum_{k=1}^n [kx] a_k \geq 0.$$

**分析** 这个题目几乎是将线性调整写在了题干上, 题目从头到尾都是线性的, 那么我们最终总归可以调整使得  $a_k$  中只有两个取值.

我们设  $a_1 = \dots = a_t, a_{t+1} = \dots = a_n$ , 只需证明:

$$\left( \sum_{k=1}^t k \right) \left( \sum_{k=t+1}^n [kx] \right) \geq \left( \sum_{k=1}^t [kx] \right) \left( \sum_{k=t+1}^n k \right).$$

对于这个, 我们作一个初步的感受, 可以看出, 关于  $t$ , 从  $t=1$  到  $t=n-1$ , 不等式呈现一个越来越紧的态势, 因为当  $t=1$  时, 我们只需若干个  $k[x] \leq [kx]$  即可; 而当  $t=n-1$  时, 问题即为

$$(n-1)[nx] \geq 2 \sum_{k=1}^{n-1} [kx],$$

我们需要使用  $[nx] \geq [kx] + [(n-k)x]$  相加得到, 这样, 我们会想到使用  $t=n-1$  时的情况通过一些变形完成一般情况的证明, 事实上, 原不等式可以变形为

$$\left( \sum_{k=1}^t k \right) \left( \sum_{k=1}^n [kx] \right) \geq \left( \sum_{k=1}^t [kx] \right) \left( \sum_{k=1}^n k \right),$$

这样我们只需建立一个不等式链, 声明

$$\frac{\sum_{k=1}^n [kx]}{\sum_{k=1}^n k}$$

单增即可.

这里备注一点, 调整思想可以使用Abel变换等代数变形代替, 它们本质上是等价的(因为都是对式子作一个线性的变换).

**解** 假设  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  有取值  $r_1 < r_2 < \dots < r_t$ , 当  $t > 2$  时, 考虑将  $r_{t-1}$  换为  $r_{t-1} + s$ , 其余数换为  $r_i - us$ , 其中  $u$  是一个与  $s$  无关的数, 此时, 原不等式是关于  $s$  的一次函数, 当  $s$  使得  $r_{t-1} = r_{t-2}$  或者  $r_{t-1} = r_t$  时不等式左边更小, 此时总取值数严格减小, 则有限次操作后, 之多有两个取值(我们多次用到的线性调整), 设  $a_1 = \dots = a_t, a_{t+1} = \dots = a_n$ , 由其次性, 只需证明:

$$\left(\sum_{k=1}^t k\right) \left(\sum_{k=t+1}^n \lfloor kx \rfloor\right) \geq \left(\sum_{k=1}^t \lfloor kx \rfloor\right) \left(\sum_{k=t+1}^n k\right),$$

变形即为:

$$\left(\sum_{k=1}^t k\right) \left(\sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor\right) \geq \left(\sum_{k=1}^t \lfloor kx \rfloor\right) \left(\sum_{k=1}^n k\right).$$

注意到对正整数  $m$ ,

$$(m-1) \lfloor mx \rfloor \geq \sum_{k=1}^{m-1} (\lfloor kx \rfloor + \lfloor (m-k)x \rfloor) = 2 \sum_{k=1}^{m-1} \lfloor kx \rfloor,$$

变形可得(两边加上  $(m-1) \sum_{k=1}^{m-1} \lfloor kx \rfloor$ )

$$\frac{\sum_{k=1}^m \lfloor kx \rfloor}{\sum_{k=1}^m k} \geq \frac{\sum_{k=1}^{m-1} \lfloor kx \rfloor}{\sum_{k=1}^{m-1} k}.$$

这样, 原不等式自然成立, 命题得证. ■

### 例题 2.2.3

设实数  $x > 1$ , 对正整数  $n$ , 求证:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\{kx\}}{\lfloor kx \rfloor} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

**分析** 看到这个问题首先作一个初步的感受, 右边是一些分式的求和, 这普遍是左边对应项分母的两倍左右, 我们暂时不知道它意味着什么; 但是联系左边的形式, 我们发现, 分子上的结构  $\{kx\}$  就能给出一些解释, 它的平均值大概就能给出  $\frac{1}{2}$  的系数, 这样, 两边的结构就联系到了一起, 我们便能够尝试从此方向入手来解决问题.

既然我们大概从  $\{kx\}$  的均值找到了入手方向, 那么我们希望通过一些变形构造出  $\{kx\}$  的部分和; 同时, 两边的结构在一定程度上的联系诱导我们做差估计, 于是我们可以考虑做差后

找到 $\{kx\}$ 的结构并将其使用Abel变换即可, 我们计算:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\{kx\}}{[kx]} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)\{kx\} - [kx]}{(2k-1)[kx]} = \sum_{k=1}^n \frac{2k\{kx\} - kx}{(2k-1)[kx]} = \sum_{k=1}^n \frac{2\{kx\} - x}{(2 - \frac{1}{k})[kx]}.$$

这样, 右边的结构就可以进行Abel变换了, 记 $a_k = \frac{1}{(2-1/k)[kx]} (1 \leq k \leq n), a_{n+1} = 0$ , 那么 $a_k$ 单调递减, 则有:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2\{kx\} - x}{(2 - \frac{1}{k})[kx]} = \sum_{k=1}^n a_k(2\{kx\} - x) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \left( 2 \sum_{j=1}^k \{jx\} - kx \right),$$

于是, 我们只需证明对正整数 $k$ , 有:

$$\sum_{j=1}^k \{jx\} \leq \frac{kx}{2}.$$

我们观察一下左边的结构, 我们可以让 $x \in (0, 1)$ , 右边的 $x$ 变为 $x+1$ , 我们要证明:

$$\sum_{j=1}^k \{jx\} \leq \frac{k(x+1)}{2},$$

这样再看左边, 是一个慢慢增长, 从 $x$ 开始每次增长 $x$ , 每次超过1后减去1的数列加起来; 而观察右边, 左边如果加了 $k$ 次, 那么右边正好加 $k$ 个 $\frac{1+x}{2}$ , 正好起到一个一一对应的效果, 我们先从简单情况看起, 让 $kx < 1$ , 那么原问题变为

$$\frac{k(k+1)}{2}x \leq \frac{k(x+1)}{2}$$

这等价于 $kx \leq 1$ 成立; 再看如果有某些 $kx > 1$ 的情况, 这时, 我们看看刚刚大于1的时候, 即取最小的 $l$ 使得 $lx > 1$ , 那么容易发现 $\{lx\} \leq x$ , 进一步, 一切使得 $1 < lx < 2$ (比如是第 $t$ 小的这样的 $l$ )的 $\{lx\}$ 都会比相应的原来的 $\{tx\} = tx$ 小一点, 可能对这些 $\{lx\}$ 求和依然会小于这样的 $l$ 的个数乘上 $\frac{x+1}{2}$ , 因此我们会想到这时有可能可以化归为 $kx < 1$ 的情形, 似乎可以以 $[lx]$ 分段处理, 我们整理一下这个思路, 只需对 $0 \leq q \leq x < q+x < \dots < q+px < 1$ , 证明:

$$\sum_{k=0}^p (q+kx) \leq \frac{(1+x)(1+p)}{2}$$

这只需稍微计算即可.

**解** 首先, 不难注意到(分析中的第一步):

$$\sum_{k=1}^n \frac{\{kx\}}{[kx]} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)\{kx\} - [kx]}{(2k-1)[kx]} = \sum_{k=1}^n \frac{2k\{kx\} - kx}{(2k-1)[kx]} = \sum_{k=1}^n \frac{2\{kx\} - x}{(2 - \frac{1}{k})[kx]}.$$

设  $a_k = \frac{1}{(2-1/k)[kx]}$  ( $1 \leq k \leq n$ ),  $a_{n+1} = 0$ , 那么  $a_k$  单调递减, 则有:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2\{kx\} - x}{(2 - 1/k)[kx]} = \sum_{k=1}^n a_k(2\{kx\} - x) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \left( 2 \sum_{j=1}^k \{jx\} - kx \right),$$

于是, 我们只需证明对正整数  $k$ , 有:

$$\sum_{j=1}^k \{jx\} \leq \frac{kx}{2}.$$

设  $y = \{x\}$ , 我们只需证明:

$$\sum_{j=1}^k \{jy\} \leq \frac{k(y+1)}{2}.$$

即证(即分析中的根据  $[ly]$  分段的想法):

$$\sum_{a=0}^{\infty} \left( \sum_{[ly]=a, l \leq k} \{ly\} - \sum_{[ly]=a, l \leq k} \frac{y+1}{2} \right) \leq 0$$

注意到, 对最小的  $l$  使得  $[ly] = a$ , 有  $\{ly\} \leq y$ , 于是对于每一段的  $l$ , 我们可以设为  $0 \leq q \leq x < q+x < \dots < q+px < 1$ , 只需证明:

$$\sum_{k=0}^p (q+kx) \leq \frac{(1+x)(1+p)}{2}$$

整理即

$$(p+1)q + \frac{p(p+1)}{2}x \leq \frac{(1+x)(1+p)}{2}$$

等价于  $(p-1)x + 2q \leq 1$ , 由  $q \leq x$  及  $px + q \leq 1$  知成立. ■

看完这些例子, 我们再看一些真正需要我们去进行一些配凑的问题.

### 例题 2.2.4

对实数  $a_1, a_2, a_3$ , 求

$$\sum_{\emptyset \neq A \subseteq \{1,2,3\}} \left\| \sum_{k \in A} a_k \right\|$$

的最大可能值.

**分析** 从小情况看看吧, 最简单的  $n = 2$ , 我们有

$$||a|| + ||b|| + ||a + b|| \leq 1$$

这是在本节最开始就给出的不等式, 根据  $a, b$  取余与  $\frac{1}{2}$  的关系分类即可;

注意取等, 此时  $\{a\}, \{b\}$  同不小于或不大于  $\frac{1}{2}$ .

接下来, 我们看看3的情形, 我们首先看看取等, 从简单情况看看, 比如  $a = b = c = x$ , 理想情况下, 我们希望加数中有0或者  $\frac{1}{2}$ , 我们可以试试  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{4}$ , 发现前者是2, 后者是  $\frac{5}{2}$ , 因此我们希望证明最大值为  $\frac{5}{2}$

对于证明的思路, 我们按照取等, 首先发现可以直接将  $||a_1 + a_2||$  之类的放成  $\frac{1}{2}$ , 对于剩下的, 我们可以考虑使用  $n = 2$  的情形配对做. 配对是基本功, 在下面, 我们给出具体的证法.

**解** 一方面, 取  $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{4}$ , 得原式为  $\frac{5}{2}$ ; 下证原式不超过  $\frac{5}{2}$ .

用  $a, b, c$  代替  $a_1, a_2, a_3$ , 设(从相应的和性质看更好刻画, 不需要单独配凑)

$$X = ||a|| + ||b|| + ||c||, Y = ||a + b|| + ||b + c|| + ||c + a||, Z = ||a + b + c||$$

注意到,  $||a|| + ||b|| + ||a + b|| \leq 1$ , 对  $a, b, c$  有类似三式, 相加得  $2X + Y \leq 3$ ;

对  $||a|| + ||b + c|| + ||a + b + c|| \leq 1$ , 类似地有  $X + Y + 3Z \leq 3$ , 于是相加得:

$$3X + 2Y + 3Z \leq 6$$

又  $Y \leq \frac{3}{2}$ , 即得  $X + Y + Z \leq \frac{5}{2}$ . ■

### 例题 2.2.5

求所有的正整数  $n$ , 使得

$$\sum_{i,j=1}^n \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}.$$

**分析** 我们以这个为例讲一些用等式去推条件的问题怎么思考.

最自然的想法是对等式进行化简, 以看出一些比较好的性质或者得到一个初步的感受. 比如, 我们对于这个问题, 自然地可以将取整变成取余, 原式会从数论性质上看起来更好刻画. 变形得:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{ij}{n+1} \right\} \right) = \frac{n^2}{2},$$

看看左边的形式, 可以发现, 当  $j$  与  $n+1$  互素时,

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{ij}{n+1} \right\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{i}{n+1} \right\} = \frac{n}{2},$$

而当  $(n+1, i) = d > 1$  时, 有:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{ij}{n+1} \right\} = \frac{n+1-d}{2} < \frac{n}{2},$$

自然地有:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{ij}{n+1} \right\} \right) \leq \frac{n^2}{2}.$$

因此正好取等, 即此时总有  $(n+1, i) = 1 (1 \leq i \leq n)$ , 于是  $n+1$  为素数. 这样我们就解决了这个问题, 我们整理一下.

**解** 首先, 对  $1 \leq i \leq n$ , 设  $(n+1, i) = d$ , 于是

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{ij}{n+1} \right\} = \frac{n+1-d}{2} \leq \frac{n}{2},$$

因此

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{ij}{n+1} \right\} \right) \leq \frac{n^2}{2},$$

于是变形得

$$\sum_{i,j=1}^n \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor \geq \frac{n^2(n-1)}{4},$$

因此等号全部成立, 即  $(n+1, i) = 1 (1 \leq i \leq n)$ , 于是  $n+1$  为素数. ■

### 例题 2.2.6

给定正整数  $n > 2$ , 对和为整数的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i + x_j\}$$

的最大可能值.

**分析** 看看和为整数的  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ,

$$\sum_{k=1}^m \{y_k\}$$

的最大值, 事实上, 这个式子是整数, 并且小于  $t$ , 因此不超过  $t-1$ .

因此, 我们希望将其分为若干个和为整数的二元对, 再利用上面的结论. 首先看看怎样可以分组使得能更好的利用条件.

最好的分组一般需要基于取等来考察, 理想情况下, 我们希望这些  $x_i$  全为  $x$ , 那么  $x = \frac{k}{n} (k \in$

$\mathbb{Z}$ ), 这样, 我们要最大化  $\{\frac{2k}{n}\}$ , 比较自然地, 当  $n$  为奇数时, 为  $\frac{n-1}{n}$ , 当  $n$  为偶数时, 为  $\frac{n-2}{n}$ , 这样, 我们大概能看出要分一些怎样的组, 当  $n$  为奇数时, 取等时  $x_i = \frac{n-1}{2n}$ , 正好  $n$  个和为整数, 并且  $x_i + x_j = \frac{n-1}{n}$ , 此时, 容易发现最少只能考察  $n$  个的和为整数, 因此我们可以自然地构建关于  $n$  个和的不等式

$$\sum_{k=1}^n \{x_k + x_{k+1}\} \leq n - 1,$$

这样, 我们得到了一个循环的不等式. 为了得到对称和的不等式, 我们只需考虑对其所有排列得到这样的不等式相加即可.

至于偶数的情况, 偶数的特殊性就在于配对时可以让组数少一些, 我们不难发现

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \{x_{2k-1} + x_{2k}\} \leq \frac{n-2}{2},$$

这样类似奇数处理即可.

**解** 一方面, 当  $n$  为偶数时, 取  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n-1}{n}$ , 得到

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i + x_j\} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

当  $n$  为奇数时, 取  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n-1}{n}$ , 得到

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i + x_j\} = \frac{(n-1)^2}{2}.$$

另一方面, 下证上面计算出的两个结果是最大值.

先考虑  $n$  为奇数.

首先, 由于  $\sum_{k=1}^n x_k$  为整数, 于是对  $\{1, 2, \dots, n\}$  的任何一个排列  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ , 都有:

$$\sum_{k=1}^n \{x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(k+1)}\} \leq n - 1,$$

对  $\{1, 2, \dots, n\}$  的全体排列  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  求期望得(因为在期望中每个  $\{x_i + x_j\}$  出现概率相同):

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i + x_j\} = \frac{n-1}{2} \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^n \{x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(k+1)}\} \right) \leq \frac{(n-1)^2}{2}.$$

当 $n$ 为偶数时, 对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任何一个排列 $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ , 都有:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \{x_{\sigma(2k-1)} + x_{\sigma(2k)}\} \leq \frac{n}{2} - 1,$$

对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全体排列 $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ 求期望得:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i + x_j\} = (n-1)\mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \{x_{\sigma(2k-1)} + x_{\sigma(2k)}\} \right) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

命题即证. ■

### 例题 2.2.7

给定正整数 $n > k \geq 2$ , 对和为整数的实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left( \left\{ \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j \right\} \right)$$

的最大可能值.(下标mod  $n$ 理解)

**分析** 比较自然地, 我们可以发现将其一圈加起来是个整数, 那么我们就可以得到一些放缩, 自然地有:

$$n \min_{1 \leq i \leq n} \left( \left\{ \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j \right\} \right) \leq \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j \right\} \leq n-1.$$

这个不等式能取等时, 我们让 $x_i$ 都相等, 设整数 $c$ 使得每个取余式内都为 $\frac{cn-1}{n}$ , 那么 $x_i = \frac{cn-1}{kn}$ , 于是总和为 $\frac{cn-1}{k}$ , 存在整数 $c$ 使之成为整数的充要条件为 $(k, n) = 1$ . 于是我们会想到要对于 $(k, n)$ 来进行讨论配对.

那么对于 $(k, n) = d > 1$ 的情况呢? 既然依然是希望能放缩到更小的数值, 那么 we 和前面几个问题的想法一样, 想让加的组数尽可能地少, 我们就是要找到尽可能少的组, 使得总共遍历 $1, 2, \dots, n$ 的次数相同, 我们设有 $s$ 组, 那么 $n|ks$ , 因此 $s \geq \frac{n}{(n, k)}$ , 我们至少要取出 $\frac{n}{(n, k)}$ 组; 同时, 我们看看这个是否总是能够做到, 其实是显然可以的, 因为我们可以每隔 $d$ 个数取一组, 这样就正好可以将 $\frac{n}{d}$ 个数加在一起使之成为整数, 即

$$\frac{n}{d} \min_{1 \leq i \leq n} \left( \left\{ \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j \right\} \right) \leq \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} \left\{ \sum_{j=di+1}^{i+k-1} x_j \right\} \leq \frac{n}{d} - 1.$$

至于取等, 只需要让 $x_i = \frac{cn-d}{nk}$ , 只需 $\frac{k}{d}|c\frac{n}{d} - 1$ , 利用 $d$ 的定义, 这样的整数 $c$ 显然存在.

**解** 由于 $(\frac{n}{(n, k)}, \frac{k}{(n, k)}) = 1$ , 知存在整数 $c$ 使得 $\frac{k}{(n, k)}|c\frac{n}{(n, k)} - 1$ , 取 $x_i = \frac{cn-(n, k)}{nk} (1 \leq i \leq n)$ , 那



么  $\sum_{k=1}^n x_i$  为整数, 且

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left( \left\{ \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j \right\} \right) = \frac{n - (n, k)}{n}.$$

另一方面, 我们证明  $\frac{n - (n, k)}{n}$  最优. 由

$$\frac{n}{d} \min_{1 \leq i \leq n} \left( \left\{ \sum_{j=i}^{i+k-1} x_j \right\} \right) \leq \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} \left\{ \sum_{j=di+1}^{i+k-1} x_j \right\} \leq \frac{n}{d} - 1.$$

即得原式成立. ■

## 练习 2.2

 **练习 2.2.1** 给定正整数  $n \geq 4$ , 求最小的实数  $\lambda$ , 对任意和为  $n - \frac{1}{2}$  的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \sum_{l=i}^j x_l \right\} \leq \lambda.$$

 **练习 2.2.2** 给定正整数  $n \geq 4$ , 求最小的实数  $\lambda$ , 对任意和为整数的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有:

$$\sum_{1 \leq 2i \leq j \leq n} \{x_i + x_j\} \leq \lambda.$$

 **练习 2.2.3** 给定正整数  $n \geq 4$ , 对实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n \|x_k\| = 1$ , 求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i + x_j\|$$

的最小可能值.

## 2.3 大小分析与组合性质

本节主要介绍通过对于自变量的大小分析解决取整函数问题, 或者通过一些组合性质解决的这样的问题. 我们接下来给出一些这样的问题.

### 例题 2.3.1

给定正偶数  $r$ , 求最大的实数  $C$ , 使得存在公比为  $r$  的正等比数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 满足对任意正整数  $n$ , 有  $\|a_n\| \geq C$ .

**分析** 既然要最大化  $\min\{\|a_n\|\}$ , 我们希望让  $\|a_n\|$  尽可能都相同. 从小情况找找感觉,  $r = 2$  时显然是  $\frac{1}{3}$ ;  $r = 4$  时, 看  $\|4^n a\|$ , 我们尽量希望  $\|a\| = \|4a\|$ , 也就是  $3a = k$  或  $5a = k$ , 其中  $k$  是整数, 那么我们就知道了  $a = \frac{2}{5}$  是最优的, 于是我们猜测  $\frac{r}{2r+2}$  是答案, 只需构造  $a_n = \frac{r^n}{2r+2}$  即可;

至于最优性证明, 基本的想法是, 如果有一个  $\|a_i\| \geq \frac{r}{2r+2}$ , 那么是否有一个  $j$  使得  $\|a_j\| \leq \frac{r}{2r+2}$ . 那么就是  $\|a\| \geq \frac{r}{2r+2}$ , 找正整数  $n$  使得  $\|r^n a\| \leq \frac{r}{2r+2}$ . 我们可以意识到, 如果  $n$  很大, 那么这个式子内部的取余很不好刻画. 我们希望能从一些简单的角度去刻画, 即考虑  $\|ra\| \leq \frac{r}{2r+2}$ , 这样剩下就不困难了.

**解** 一方面, 取  $a_n = \frac{r^n}{2r+2}$ , 那么由于  $r^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{r+1}$ , 知存在奇数  $k$  使得  $r^{n-1} - (-1)^{n-1} = k(r+1)$  (因为  $r+1$  是奇数), 于是  $\|a_n\| = \|\frac{(-1)^{n-1} + k(r+1)}{2(r+1)}\| = \|\frac{k}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2(r+1)}\| = \|\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2(r+1)}\| = \frac{r}{2r+2}$ , 因此  $C = \frac{r}{2r+2}$  满足条件.

另一方面, 我们去证明  $C = \frac{r}{2r+2}$  最优, 若存在  $C > \frac{r}{2r+2}$  使得  $\|a_n\| \geq C > \frac{r}{2r+2}$  对任意正整数  $n$  成立, 那么  $\|a_1\| > \frac{r}{2r+2}$ ,  $\|a_2\| = \|ra_1\|$ , 对  $\{a_1\} \in (\frac{r}{2r+2}, \frac{r+2}{2r+2})$ , 我们有:  $r\{a_1\} \in (\frac{r^2}{2r+2}, \frac{r(r+2)}{2r+2}) = (\frac{r}{2} - \frac{r}{2r+2}, \frac{r}{2} + \frac{r}{2r+2})$ , 因此  $\{a_2\} \in [0, \frac{r}{2r+2}) \cup (\frac{r+2}{2r+2}, 1]$  (因为  $r$  是整数), 于是  $\|a_2\| < \frac{r}{2r+2}$ , 矛盾! 命题得证. ■

### 例题 2.3.2

设正整数  $p > q > 1$  满足  $q \nmid p$ , 证明: 存在无穷多个  $n$ , 使得  $\|(\frac{p}{q})^n\| > \frac{1}{p+q}$ .

**分析** 首先我们可以不妨  $(p, q) = 1$ .

和上面相同的想法, 看看如果  $\|x\| \leq \frac{1}{p+q}$ , 那么是否有  $\|\frac{p}{q}x\| \geq \frac{1}{p+q}$ , 我们将  $x$  拆开, 就有:

$$\|\frac{p}{q}x\| = \|\frac{p}{q}[x] + \frac{p}{q}\{x\}\| \geq \|\frac{p}{q}[x]\| - \|\frac{p}{q}\{x\}\| \geq \frac{1}{q} - \frac{p}{q}\{x\} \geq \frac{1}{q} - \frac{p}{q(p+q)} = \frac{1}{p+q}.$$

最后, 我们只需不取等即可, 事实上, 利用  $(q^n, p+q) = 1$  即可.

**解** 不妨设  $(p, q) = 1$ , 若整数  $n$  使得  $\|(\frac{p}{q})^n\| \leq \frac{1}{p+q}$ , 记  $x = (\frac{p}{q})^n$ , 那么:

$$\|\frac{p}{q}x\| = \|\frac{p}{q}[x] + \frac{p}{q}\{x\}\| \geq \|\frac{p}{q}[x]\| - \|\frac{p}{q}\{x\}\| \geq \frac{1}{q} - \frac{p}{q}\{x\} \geq \frac{1}{q} - \frac{p}{q(p+q)} = \frac{1}{p+q},$$

因此我们有  $\|(\frac{p}{q})^{n+1}\| \geq \frac{1}{p+q}$ , 由  $(q^n, p+q) = 1$  知  $\|(\frac{p}{q})^{n+1}\| > \frac{1}{p+q}$  (因为最简分母一定不同). 因此在  $2t-1, 2t (t \in \mathbb{N})$  中一定有一个满足条件, 故命题得证. ■

### 例题 2.3.3

对正整数  $n > 2$  与正实数  $x$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n \left( x \left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor - (x+1) \left\lfloor \frac{k}{x+1} \right\rfloor \right) \leq n.$$

**分析** 我们看看这个问题的形式,发现比较类似于带余除法,因此,我们可以具体的做带余除法来考虑这个式子.

设  $k = xq_k + r_k, k = (x+1)Q_k + R_k (1 \leq k \leq n, 0 \leq r_k < x, 0 \leq R_k < x+1)$ , 那么就有

$$\sum_{k=1}^n \left( x \left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor - (x+1) \left\lfloor \frac{k}{x+1} \right\rfloor \right) = \sum_{k=1}^n (xq_k - (x+1)Q_k) = \sum_{k=1}^n (R_k - r_k),$$

所以我们会尝试找一找  $R_k, r_k$  之间可能的关系和放缩. 回到它们产生的地方, 考察  $k = xq_k + r_k, k = (x+1)Q_k + R_k$ , 我们可以发现, 这两个式子从形式上只是多了或少了一个  $Q_k$ , 可能的话, 如果我们将这个  $Q_k$  放到一个合理的位置, 那么就有可能可以将  $R_k$  与某个  $r_j$  建立联系.

具体地说,  $R_k + xQ_k = k - Q_k$ , 因此我们会考察  $k - Q_k$  的带余除法, 可能为  $R_k (R_k < x)$  或者  $R_k - x (x \leq R_k < x+1)$ , 但是我们发现这样的话, 对于那些比较大的  $R_k$  没有一个太好的刻画, 在式子中可能产生较大的影响(事实上, 对于小的  $R_k$  直接放缩我们还是可以控制的).

联系关于  $x$  的带余除法的余数范围, 于是我们进一步希望能让它的余数恰好范围落在小于  $x$  的范围内, 故自然的将其  $-1$ , 也就是得到  $k - Q_k - 1 = R_k - 1 + xQ_k$ , 这样, 我们就只需解决  $R_k < 1$  的部分, 这时可以正好在原式中将对应的  $R_k$  放为  $1$ , 我们发现这样正好到  $n$ .

整理一下这个思路, 我们相当于在  $R_k \geq 1$  时将  $k$  与  $k - Q_k - 1$  作了一个对应, 此时有  $R_k - r_{k-Q_k-1} = 1$ , 对于剩下一部分  $R_k < 1$ , 我们直接放成  $1$ . 最后, 我们只需验证这个对应是一一对应即可. 我们在下面给出具体的验证.

**解** 记  $k = xq_k + r_k, k = (x+1)Q_k + R_k (1 \leq k \leq n, 0 \leq r_k < x, 0 \leq R_k < x+1)$ , 记  $A = \{k | 1 \leq k \leq n, R_k \geq 1\}$ , 考虑映射  $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, k \mapsto k - Q_k - 1$ . (将分析中的想法具体表达出来)

首先验证量定义以及单射: 对  $R_k \geq 1, k = (x+1)Q_k + R_k > Q_k + 1$ , 于是  $k - Q_k - 1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;

若存在  $k, l \in A, f(k) = f(l)$ , 则  $k - Q_k - 1 = l - Q_l - 1$ , 于是  $xQ_k + R_k - 1 = k - Q_k - 1 = xQ_l + R_l - 1$ , 由于  $R_k - 1, R_l - 1 \in [0, x)$ , 故  $xQ_k + R_k - 1, xQ_l + R_l - 1$  都是关于  $x$  的带余除法, 由带余除法的唯一性,  $Q_k = Q_l, R_k = R_l$ , 则  $k = l$ , 因此  $f$  为单射.

对于  $k \in A$ , 我们有:  $f(k) = k - Q_k - 1 = xQ_k + R_k - 1$ , 于是  $r_{f(k)} = R_k - 1$ , 因此  $R_k - r_{f(k)} = 1$ ; 对  $k \notin A, R_k < 1$  (这样, 我们接下来对  $k \in A$  的配对一下, 其余直接放就行了),

由于(按照分析中的想法变形到想要的形式)

$$\sum_{k=1}^n \left( x \left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor - (x+1) \left\lfloor \frac{k}{x+1} \right\rfloor \right) = \sum_{k=1}^n (xq_k - (x+1)Q_k) = \sum_{k=1}^n (R_k - r_k),$$

因此:

$$\sum_{k=1}^n (R_k - r_k) \leq \sum_{k=1}^n R_k - \sum_{k \in A} r_{f(k)} = \sum_{k \in A} (R_k - r_{f(k)}) + \sum_{k \notin A} R_k \leq |A| + (n - |A|) = n.$$

命题得证. ■

**例题 2.3.4**

给定正整数  $n > 2$ , 对和为  $n$  的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求证:

$$\sum_{i,j=1}^n \|x_i x_j\| \leq \frac{n^2}{2} - 0.06.$$

**分析** 对于卡在比较小的范围内的不等式, 我们可以考虑使用反证法以对每个变量的范围得到估计.

假设不成立, 那么原问题变形得

$$\sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) < 0.06,$$

此时, 对任意  $1 \leq i, j \leq n$ , 都有  $\|x_i x_j\| \geq 0.44$ , 特别地, 有  $\|x_i^2\| \geq 0.44$ , 那么我们可以知道  $x_i$  距离某个  $\sqrt{\frac{2m+1}{2}}$  非常接近, 另一个直观的感受是,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的数量一定不会少, 因为任何比1大的数都至少是  $\sqrt{1.44}$ , 因此, 我们会意识到  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  附近的数很多.

接下来, 我们看看具体至少能有多少, 既然  $\|x_i x_j\|$  距离  $\frac{1}{2}$  都很近, 那么直观地,  $\{x_i x_j\}$  距离  $\frac{1}{2}$  都很近, 在直觉上, 其和也应该接近  $\frac{n^2}{2}$ , 这表明  $[x_i x_j]$  的和也接近  $\frac{n^2}{2}$ , 于是会有大约一半的  $x_i x_j$  不超过1, 我们把这个思路具象化, 具体地

$$0.06 > \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) = \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{1}{2} - \{x_i x_j\} \right| \geq \left| \frac{n^2}{2} - \sum_{i,j=1}^n \{x_i x_j\} \right| = \left| \frac{n^2}{2} - \sum_{i,j=1}^n [x_i x_j] \right|,$$

于是得到  $n$  为偶数, 并且

$$\sum_{i,j=1}^n [x_i x_j] = \frac{n^2}{2},$$

设  $A = \{i : 1 \leq i \leq n, x_i < 1\}$ ,  $Q = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n, x_i x_j < 1\}$ , 因此  $|Q| \geq \frac{n^2}{2}$ , 我们希望看看是那些  $x_i, x_j$  会使得  $(i, j) \in Q$ , 条件  $\|x_i x_j\| \geq 0.44$  给了我们一定的暗示, 似乎如果有一个在  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的数, 就不能有太大的数了, 具体的, 我们进行计算.

首先, 若  $(i, j) \in Q$ , 则有  $x_i x_j < 1$ , 于是  $x_i, x_j$  之一小于1, 设  $x_i < 1$ , 则  $x_i \in [\sqrt{0.44}, \sqrt{0.56}]$ , 若  $x_j \geq \sqrt{2.44}$ , 则  $x_i x_j > 1$ , 不成立; 若  $x_j \in [\sqrt{1.44}, \sqrt{1.56}]$ , 那么  $0.56 < x_i x_j < 1$ , 这也不成立, 因此一定有  $x_i, x_j < 1$ , 于是我们得到  $Q = A \times A$ , 因此  $A \geq \frac{\sqrt{2}}{2}n$ .

这样, 我们得到了接近  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的数至少  $\frac{\sqrt{2}}{2}n$  个, 但我们并不满足于接近  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的数非常多, 这并不能改变什么, 但是如果可以充分接近, 比如误差小于  $O(n^{-2})$ , 那么一个数和它相乘可以几乎理解为乘了  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 这样我们后面就可以使用有理逼近等方法解决; 我们估计这样的数, 因为大概有  $O(n^2)$  个误差之和不超过一个常数, 因此我们大概会意识到有  $O(n)$  的数误差不超过  $O(n^{-2})$ , 具体的, 我们进行计算来检验, 直接估计不是很现实, 我们分别将  $A$  中全体大与  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  与不大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的数设为集合  $B, C$ , 以  $C$  为例, 直接估计  $C$  中误差很小的数并不现实, 根据上面的想法, 应当在整体中去考虑, 我们意识到可以设  $R_C = \{(i, j) : i, j \in C, x_i x_j \geq \frac{1}{2} - r\} = \{(i, j) : i, j \in$

$C, \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \leq r\}$ , 其中,  $r$  是待定的正实数, 那么我们显然有

$$r(|C|^2 - |R_C|) \leq \sum_{i,j \in R_C} \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) \leq \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) \leq 0.06,$$

再考虑  $B$ , 设  $R_B = \{(i, j) : i, j \in B, x_i x_j \leq \frac{1}{2} + r\} = \{(i, j) : i, j \in B, \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \leq r\}$ , 我们类似有

$$r(|B|^2 - |R_B|) \leq 0.06,$$

事实上, 我们有更强的

$$r(|C|^2 - |R_C|) + r(|B|^2 - |R_B|) \leq 0.06,$$

这样, 我们就有对  $|R|$  的估计了, 进而也就有很接近的数数量的估计, 我们简单计算, 对于  $i, j \in B$ , 如果  $x_i x_j \leq \frac{1}{2} + r$ , 那么就有  $x_i, x_j \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}r$ , 记  $\hat{B} = \{i \in B : x_i \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}r\}$ , 那么由上面的计算, 就有  $\hat{B} \times \hat{B} \supset R_B$ , 因此  $|R_B| \leq |\hat{B}|^2$ , 类似有  $|R_C| \leq |\hat{C}|^2$

因此就有

$$r(|C|^2 - |\hat{C}|^2 + |B|^2 - |\hat{B}|^2) \leq 0.06,$$

为了估计所有误差很小的数的个数, 我们经过简单放缩就有:

$$(|\hat{B}| + |\hat{C}|)^2 \geq |\hat{C}|^2 + |\hat{B}|^2 \geq |C|^2 + |B|^2 - \frac{0.06}{r} \geq \frac{n^2}{4} - \frac{0.06}{r},$$

因此记  $\hat{A} = \{i \in A : |x_i - \frac{\sqrt{2}}{2}| \leq \sqrt{2}r\}$ , 这就是所有误差很小的数的集合, 则有

$$|\hat{A}| \geq \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{0.06}{r}},$$

这样, 我们的想法就可以收网了, 对  $a \in \hat{A}$ , 有:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_a x_k\| \right) &= \sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{2} - x_a x_k \right\| \geq \left\| \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - x_a x_k \right) \right\| = \|n x_a\| \\ &\geq \left\| \frac{\sqrt{2}n}{2} \right\| - \sqrt{2}nr \geq \frac{1}{n} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}n^2 r \right), \end{aligned}$$

因此, 如果设  $n^2 r = t$ , 我们就有:

$$\sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) \geq \frac{1}{n} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}n^2 r \right) \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{0.06}{r}} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}t \right) \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{0.06}{t}},$$

取  $t = 0.3$ , 上式右侧为  $\frac{1}{5\sqrt{10}} > 0.06$ .

**解** 假设不成立, 那么原问题经变形得

$$\sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) < 0.06,$$

于是对任意  $1 \leq i, j \leq n$ , 都有  $\|x_i x_j\| \geq 0.44$  (若有一个小于 0.44, 其余的放为 0.5 即矛盾), 由于

$$0.06 > \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) = \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{1}{2} - \{x_i x_j\} \right| \geq \left| \frac{n^2}{2} - \sum_{i,j=1}^n \{x_i x_j\} \right| = \left| \frac{n^2}{2} - \sum_{i,j=1}^n [x_i x_j] \right|,$$

于是得到  $n$  为偶数, 并且

$$\sum_{i,j=1}^n [x_i x_j] = \frac{n^2}{2},$$

设  $A = \{i : 1 \leq i \leq n, x_i < 1\}$ ,  $Q = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n, x_i x_j < 1\}$ , 因此  $|Q| \geq \frac{n^2}{2}$ , 若  $(i, j) \in Q$ , 则有  $x_i x_j < 1$ , 于是  $x_i, x_j$  之一小于 1, 设  $x_i < 1$ , 则  $x_i \in [\sqrt{0.44}, \sqrt{0.56}]$ , 若  $x_j \geq \sqrt{2.44}$ , 则  $x_i x_j > 1$ , 不成立; 若  $x_j \in [\sqrt{1.44}, \sqrt{1.56}]$ , 那么  $0.56 < x_i x_j < 1$ , 这也不成立, 因此一定有  $x_i, x_j < 1$ , 则  $Q = A \times A$ , 因此  $A \geq \frac{\sqrt{2}}{2}n$ .

设  $A$  中全体大与  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  与不大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的数设为集合  $B, C$ , 记  $r = \frac{0.3}{n^2}$  (最好在证明过程中不出现待定的字眼, 直接给出更好), 设  $R_C = \{(i, j) : i, j \in C, x_i x_j \geq \frac{1}{2} - r\} = \{(i, j) : i, j \in C, \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \leq r\}$ ,  $R_B = \{(i, j) : i, j \in B, x_i x_j \leq \frac{1}{2} + r\} = \{(i, j) : i, j \in B, \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \leq r\}$ , 于是就有

$$\begin{aligned} r(|C|^2 - |R_C|) + r(|B|^2 - |R_B|) &\leq \sum_{i,j \in R_C} \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) + \sum_{i,j \in R_B} \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) \leq 0.06, \end{aligned}$$

对于  $i, j \in B$ , 如果  $x_i x_j \leq \frac{1}{2} + r$ , 那么就有  $x_i, x_j \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}r$ , 记  $\hat{B} = \{i \in B : x_i \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}r\}$ ,  $\hat{C} = \{i \in C : x_i \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}r\}$ , 那么由上面的计算, 就有  $\hat{B} \times \hat{B} \supset R_B$ , 因此  $|R_B| \leq |\hat{B}|^2$ , 类似有  $|R_C| \leq |\hat{C}|^2$ , 因此得到

$$(|\hat{B}| + |\hat{C}|)^2 \geq |\hat{C}|^2 + |\hat{B}|^2 \geq |R_B| + |R_C| \geq |C|^2 + |B|^2 - \frac{0.06}{r} \geq \frac{n^2}{4} - \frac{0.06}{r},$$

于是记  $\hat{A} = \{i \in A : |x_i - \frac{\sqrt{2}}{2}| \leq \sqrt{2}r\}$ , 则有

$$|\hat{A}| \geq \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{0.06}{r}},$$

注意到对  $a \in \hat{A}$ , 有(最后一步用到  $n$  是偶数):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_a x_k\| \right) &= \sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{2} - x_a x_k \right\| \geq \left\| \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - x_a x_k \right) \right\| = \|n x_a\| \\ &\geq \left\| \frac{\sqrt{2}n}{2} \right\| - \sqrt{2}nr \geq \frac{1}{n} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}n^2 r \right), \end{aligned}$$

因此, 我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2} - \|x_i x_j\| \right) &\geq \frac{1}{n} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}n^2 r \right) \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{0.06}{r}} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \times 0.3 \right) \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{0.06}{0.3}} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{10}} > 0.06, \end{aligned}$$

矛盾! 命题得证. ■

### 例题 2.3.5

给定正整数  $n \geq 15$ , 求最小的实数  $C$ , 对任意和为  $n$  的正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 均有:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{a_i a_j\} \leq C.$$

**分析** 我们首先从取等找找感受. 我们希望左边尽可能更多的接近1, 那么可以考虑  $n-1$  个  $1-\varepsilon$  和 1 个  $1+(n-1)\varepsilon$ , 这时, 是  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  个. 稍微再观察一下能不能更大, 比如利用上  $1+(n-1)\varepsilon$ , 我们希望再拿出一些  $1-\varepsilon$  和  $1+(n-1)\varepsilon$  去做一些操作, 比如两个数,  $x+y=2+(n-2)\varepsilon$ , 想让  $xy < 1$ , 这是显然可以做到的, 解一个二次方程即可; 更多数, 比如  $2x+y=3+(n-3)\varepsilon$ , 能否  $xy < 1, x < 1 < y$ ? 对  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2, 2x+y < 2x+\frac{1}{x} \leq 3 < 3+(n-3)\varepsilon$ , 不成立, 因此最多只能带上一个数, 于是可以得到答案  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ .

接下来, 我们来看看如何证明. 在这个问题中, 我们发现取余内的形式较为一般, 并没有特别利于取余求和计算的结构. 因此最好我们可以将其转化为取整结构, 也就是:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{a_i a_j\} \leq C_n^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j],$$



因此只需证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j] \geq n - 2.$$

直接去刻画取证的求和并不容易, 除非可以直接将一些取整合并来放缩. 我们希望做一些化简, 比如可以观察到当  $a_i a_j < 2$  时, 这些求和可以理解为  $a_i a_j$  中不小于 1 的数的个数, 这样就比较清晰了; 同时, 这驱使我们先将  $a_i$  较大的情况先解决掉.

我们大概想想要按照什么来分界, 利用  $a_i a_j < 2$ , 以及取等时所有数都很接近 1, 那么 2 附近应该是一个比较好的界. 同时, 从放缩也可以发现, 在最大数比较大时, 我们可以忽略剩下的数, 比如设  $a_1$  最大, 那就只保留含  $a_1$  的项, 那么:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j] \geq \sum_{k=2}^n [a_1 a_k] \geq [a_1(n - a_1)] - n + 2,$$

要让这个  $\geq n - 2$ , 那么最好的界就是 2. 因为在  $2 \leq a_1 \leq n - 2$  时上式右端显然不小于  $n$ . 这就印证了的确需要依据 2 来分界; 同时, 对于  $a_1 > n - 2$ , 会发现剩下的数都很小, 回到取余式中随便放缩即可.

那么我们就将  $a_i$  较大的情况先解决掉了, 只需看  $a_i \leq 2$  的情况.

设  $2 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , 我们证明: 使得  $a_i a_j \geq 1$  的无序数组  $(i, j)$  组数不小于  $n - 2$  组.

从小情况看看这样的组该如何找, 以及如何放缩: 比如  $2 \geq a \geq b \geq c \geq 0, a + b + c = 3$ , 我们看看是否有  $ab \geq 1$  以及如何证明. 自然地, 固定  $a$ , 让  $b$  放到最小, 也就有  $ab \geq \frac{a(b+c)}{2} = \frac{a(3-a)}{2} = \frac{(2-a)(a-1)}{2} + 1 \geq 1$ , 对于更多的数, 我们试试证明  $a_1 a_i \geq 1$ , 类似地, 可以考虑

$$a_1 a_i \geq a_1 \frac{\sum_{k=i}^n a_k}{n - i + 1} \geq a_1 \frac{n - (i - 1)a_1}{n - i + 1},$$

但是一定程度上, 对于一些本来就很大的  $a_i$ , 这个式子显得有些浪费, 同时, 如果  $\geq 1$  的数已经很多了, 那么这个估计就显得不是很必要了. 为了更好的建立一个估计, 我们考虑以 1 作一个分界, 考虑  $2 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_t > 1 \geq a_{t+1} \geq \dots \geq a_n$ , 那么上面的放缩可以优化为(当然是对于  $i > t$ ):

$$a_1 a_i \geq a_1 \frac{\sum_{k=i}^n a_k}{n - i + 1} \geq a_1 \frac{n - ta_1 - (i - t - 1)}{n - i + 1} \geq 1 \Leftrightarrow i \leq n + 1 - ta_1,$$

其实可以发现, 这已经是一个很大的量了. 同时, 由于我们至少有  $(i, j) (1 \leq i < j \leq t)$  这些组, 于是可以发现使得  $a_i a_j \geq 1$  的组数不小于

$$[n - ta_1] + \frac{t(t-1)}{2} - (t-1) \geq n - 2t + \frac{t^2 - 3t + 2}{2} = n + 1 + \frac{t^2 - 7t}{2} \geq n + 1 - 6 = n - 5,$$

这正好只差 3! 于是我们只需要再借用  $a_2$  搞一些组就可以了. 我们使用类似上面的方法做  $a_2$ , 会发现会受到  $a_1$  的干扰. 那么我们反过来, 如果我们已经知道了哪些  $a_i > \frac{1}{a_2}$ , 这可以



帮助我们放缩 $a_1 a_i$ , 具体的, 如果设 $k$ 最大使得 $a_2 a_k \geq 1$ , 那么( $i > k$ ):

$$a_1 a_i \geq a_1 \frac{n - a_1 - (t-1)a_2 - (k-t) - \frac{i-k-1}{a_2}}{n-i+1},$$

经因式分解, 上式 $\geq 1$ 只需:

$$\frac{(n-i+1-a_1)(a_1-1)}{a_1} + \frac{(a_2-1)(i-k-1-(t-1)a_2)}{a_2} \geq 0,$$

这只需 $i \leq n+1-a_1, a_2 \geq 1, k \leq i-1-(t-1)a_2$ , 整理一下, 也就是说 $a_1 a_i \geq 1 \Leftrightarrow i \leq n+1-a_1, a_2 \geq 1, k \leq i-1-(t-1)a_2$ , 为了同时放宽 $a_1$ 参与的 $a_i a_j \geq 1$ 的组数与 $a_2$ 参与的, 我们希望 $i$ 尽可能大, 发现正好 $i \leq n-1$ , 那么我们有 $a_1 a_{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow a_2 \geq 1, k \leq n-2-(t-1)a_2$ . 我们只考虑 $a_2 \geq 1$ , 当 $k$ 较小时, 就会有 $a_1 a_{n-1} \geq 1$ , 自然成立;  $k$ 较大时, 与 $a_1$ 参与的 $a_i a_j \geq 1$ 的组数加起来, 自然就成立了, 剩下的只是计算细节, 我们在解答中给出.

**解** 一方面, 取 $a_1 = \dots = a_{n-2} = 1 - \varepsilon, a_{n-1} < 1 < a_n$ 满足 $a_{n-1} a_n = 1 - \varepsilon, a_{n-1} + a_n = 1 - (n-2)\varepsilon$ , 可以解出 $a_{n-1}, a_n$ (就是分析中的想法), 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得 $C \geq \frac{n^2-3n+4}{2}$ ;

另一方面, 我们证明 $C = \frac{n^2-3n+4}{2}$ 满足条件: 设 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ (接下来根据分析分类), 若 $a_1 \geq n-2$ , 则有: (利用 $\{x\}_- \leq x$ , 最后一步利用 $n \geq 4$ )

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{a_i a_j\} &\leq \sum_{k=2}^n \{a_1 a_k\} + \sum_{2 \leq i < j \leq n} \{a_i a_j\} \leq n-1 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq n-2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=2}^n a_k \right)^2 \\ &\leq n \leq \frac{n^2-3n+4}{2}, \end{aligned}$$

若 $a_1 \in [2, n-2]$ , 由于:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{a_i a_j\} \leq C_n^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j],$$

所以只需证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j] \geq n-2.$$

这由

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j] \geq \sum_{k=2}^n [a_1 a_k] \geq [a_1(n-a_1)] - n + 2 \geq 2(n-2) - n + 2 = n-2$$

知成立; 对于 $a_1 \leq 2$ , 我们设 $2 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_t > 1 \geq a_{t+1} \geq \dots \geq a_n$ , 记 $A = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_i a_j \geq 1\}$ , 不妨设 $t < n$ (否则 $a_i$ 均为1, 命题显然), 接下来有两个断言:

**Claim 1.** 对  $i \leq n + 1 - ta_1$ , 有  $a_1 a_i \geq 1$ .

对  $i \leq t$ , 命题显然成立; 下设  $i > t$ , 这由

$$a_1 a_i \geq a_1 \frac{\sum_{k=i}^n a_k}{n - i + 1} \geq a_1 \frac{n - ta_1 - (i - t - 1)}{n - i + 1} = 1 + \frac{(a_1 - 1)(n - i + 1 - ta_1)}{n - i + 1} \geq 1$$

知成立;

**Claim 2.**  $t \geq 2$  时, 设  $k$  最大使得  $a_2 a_k \geq 1$ , 若  $a_1 a_{n-1} < 1$ , 则有  $k > n - 1 - (t - 1)a_2$ .

由条件知  $k \leq n - 2$ , 那么:

$$1 > a_1 a_i \geq a_1 \frac{n - a_1 - (t - 1)a_2 - (k - t) - \frac{n-2-k}{a_2}}{2},$$

整理得:

$$0 > \frac{(2 - a_1)(a_1 - 1)}{a_1} + \frac{(a_2 - 1)(n - 2 - k - (t - 1)a_2)}{a_2} \geq \frac{(a_2 - 1)(n - 2 - k - (t - 1)a_2)}{a_2},$$

利用  $a_2 > 1$  (因为  $t \geq 2$ ) 即得  $k > n - 2 - (t - 1)a_2$ .

回原题: 若  $t = 1$ , 或者已有  $a_1 a_{n-1} \geq 1$ , 那么对  $i \leq n - 1$ , 有  $a_1 a_i \geq 1$ , 则  $(1, i) \in A$  ( $2 \leq i \leq n - 1$ ), 故  $|A| \geq n - 2$ ;

若  $t \geq 2$ , 且  $a_1 a_{n-1} < 1$ , 那么  $k > n - 1 - (t - 1)a_2$ , 于是  $(1, i), (2, j) \in A$  ( $i \leq n + 1 - 2t, j \leq n - 2t$ ), 并且  $(i, j) \in A$  ( $1 \leq i < j \leq t$ ), 因此: (最后一步由  $n \geq 15$  成立)

$$|A| \geq 2n + 1 - 4t + \frac{(t - 2)(t - 3)}{2} = 2n + 4 + \frac{t^2 - 13t}{2} \geq 2n - 17 \geq n - 2$$

那么

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i a_j] \geq |A| \geq n - 2.$$

命题得证. ■

下一个例题是  $\|\cdot\|$  的应用示例.

### 例题 2.3.6

证明: 存在常数  $\lambda$ , 对任意整数  $n \geq 4$ , 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n x_k^r = rn$  ( $r = 1, 2, 3$ ), 则有  $\max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \geq \sqrt{5} + \frac{\lambda}{n^{1.5}}$ .

**分析** 我们先看看近似的取等, 设有两个取值  $x, y$ , 取到的概率分别为  $p, q$ , 那么  $px^r + qy^r = r$  ( $r = 1, 2, 3$ ), 解得  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 因此, 我们大概意识到这些数在  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  聚集了一些, 在  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  聚集了一些. 我们想去估计  $x_i$  偏离这两个数的距离, 估计偏离距离的工具我们会想到  $\|\cdot\|$ . 因此, 自然地我们将  $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$  压缩映射到  $[0, 1]$ , 以便使用  $\|\cdot\|$  进行估计.

设  $y_i = \frac{x_i - (1-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 那么我们带回得到  $\sum_{k=1}^n y_k^r = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n$  ( $r = 1, 2, 3$ ), 因此这样, 我们只需估计  $y_i$  到  $0, 1$  的误差, 直观上, 可以通过估计  $\|y_i\|$  来实现.

接下来,我们发现并没有很好的局部性质,因此我们会想到估计 $\|y_i\|$ 的整体性质,比如和或者平方和.

在这个想法的驱使下,我们找找可能的估计手法,看看我们应该将 $\|y_i\|$ 的和之类的性质怎么放缩,自然的,有 $\sum_{k=1}^n \|y_k\| \geq \|\sum_{k=1}^n y_k\| = \|\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}n\|$ ,进一步,我们也会想到对 $\|y_i^r\|$ 求和,也会有这样一个式子.

因为条件只有这三个式子,我们基本上没有别的信息,因此会自然地想到作一些线性组合,也就是多项式.那么对关于 $y_i$ 的多项式取余求和,就会有更好的结果.

因此,结合上面的两个想法,我们可以找一些性质较好的多项式,让多项式逼近 $\|x\|$ 或者 $\|x\|^2$ 之类的,再考虑对多项式取余进行求和放缩.总结一下大概的想法核心就是“用多项式代替 $\|\cdot\|$ 以达到估计效果”我们具体地看看其中的一些细节:

首先,我们要解决的是最初的想法中, $y_i$ 到0,1的误差与 $\|y_i\|$ 的整体性质到底有什么关系.我们设 $y_i \in [-\delta, 1+\delta]$  ( $1 \leq i \leq n$ ),不妨 $\delta < \frac{1}{2}$ ,此时,从简单的角度考虑, $\sum_{k=1}^n \|y_k\|$ 与 $\delta$ 有无较好的关系.借鉴上面的一些想法,我们依然可以想想怎么用多项式逼近 $\|x\|$ ,然后从多项式的求和联系条件式直接给出一个较好的估计.自然地,我们可以先考虑让一个抛物线去逼近 $\|x\|$ ,注意 $\|x\|$ 在 $[0, 1]$ 的图像是一个倒三角,我们让抛物线过 $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,解得 $y = 2x(1-x)$ ,因此我们可以用 $y = 2x(1-x)$ 去拟合 $\|x\|$ ;同时,我们的 $y_i$ 界限比 $[0, 1]$ 稍微超出了一点,因此我们可以把 $y = 2x(1-x)$ 往上平移一点,使得两个曲线在最边上的点 $(-\delta, \delta), (1+\delta, \delta)$ 正好重合,设向上平移 $h$ ,即为 $-2\delta(\delta+1) + h = \delta$ ,解得 $h = 3\delta + 2\delta^2 \leq 4\delta$ ,因此我们可以构建局部不等式:

$$\|x\| \leq 2x(1-x) + 4\delta,$$

这样,求和就有:

$$4n\delta \geq \sum_{k=1}^n \|y_k\| \geq \|\sum_{k=1}^n y_k\| = \|\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}n\| \left( = O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

这样,其实我们已经做到了 $O(\frac{1}{n^2})$ ,接下来,我们便意识到的确需要更多的估计,就像一开始提到的平方和.我们接下来,使用上面的想法,考虑用一个不超过3次的多项式逼近 $\|x\|^2$ .

我们将 $\|x\|^2$ 画在坐标系中,希望找一个多项式和它比较接近.我们会发现它有一个“尖端点” $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ,这并非一个正常的多项式会具有的部分.但是毕竟我们可以在取 $\|\cdot\|$ 下考虑多项式,因此可以找一个多项式,正好过 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ,更好的,希望它以这个点为中心,那么这显然应当是一个三次函数,于是我们希望找 $f$ 使得 $f''(\frac{1}{2}) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ 进一步,在0,1一定要完全拟合,于是我们要让 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}$ . 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,那么 $d = 0$ ,按照取等,在0,1处是极值点,那么 $f'(0) = 0$ ,则 $c = 0$ ,因此主要需要解决的就是 $f''(\frac{1}{2}) = 0$ ,这只需 $3a + 2b = 0$ ,为了使 $f$ 是整系数多项式,尽可能取 $a = -2, b = 3$ ,这样 $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ ,计算知 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ ,那么此时, $f$ 大概正好拟合了 $2\|x\|^2$ .我们已经得到 $\delta$ 大于 $\sum \|y_k\|$ 的一个形式,那么在这里需要的是 $\|x\|^2$ 的下界,由于 $2\|x\|^2$ 几乎被 $3x^2 - 2x^3$ 拟合,得到 $\|x\|^2$ 的下界只需牺牲一点系数,我们要建立不等式 $C\|x\|^2 \geq \|f(x)\|$ ,在 $[0, 1]$ 范围内由于拟合的比较紧,这个直观上是已经成立的;只要看看超

出去的部分, 比如  $x = -\frac{1}{2}$ , 那么此时计算得  $C = 4$ , 于是我们可以建立不等式  $4\|x\|^2 \geq \|f(x)\|$ , 这样,

$$\sum_{k=1}^n \|y_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \|f(y_k)\| \geq \left\| \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n \right\| \left( = O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

此时再看看, 我们有了

$$\delta \geq \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^n \|y_k\| \quad \sum_{k=1}^n \|y_k\|^2 \geq \left\| \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n \right\|.$$

结合这两个, 我们可以直接建立这两个次数的联系, 那么就有:

$$\delta \geq \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^n \|y_k\| \geq \frac{1}{4n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \|y_k\|^2} \geq \frac{1}{4n} \sqrt{\left\| \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n \right\|} = O\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right).$$

这样就完成了证明. 我们在下面整理一下.

**解** 设  $y_i = \frac{x_i - (1-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}} (1 \leq i \leq n)$ , 带回得到  $\sum_{k=1}^n y_k^r = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n (r = 1, 2, 3)$

设  $y_i \in [-\delta, 1+\delta] (1 \leq i \leq n)$ , 不妨  $\delta < \frac{1}{2}$ , 有以下两个断言:

**Claim 1.** 对  $x \in [-\delta, 1+\delta]$ , 有  $\|x\| \leq 2x(1-x) + 4\delta$ .

对  $x \in [-\delta, 0]$ ,  $\|x\| \leq \delta \leq 2\delta - 2\delta^2 \leq 2x(1-x) + 4\delta$ ; 对  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\|x\| = x \leq 2x - 2x^2 \leq 2x(1-x) + 4\delta$ , 其余情况由对称性即得.

**Claim 2.** 对  $x \in [-\delta, 1+\delta]$ ,  $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ , 有  $4\|x\|^2 \geq \|f(x)\|$ .

对  $x \in [-\delta, \frac{1}{2}]$ , 即证  $4x^2 \geq 3x^2 - 2x^3$ , 由  $\delta \leq \frac{1}{2}$  知成立; 对称的情况由  $f$  关于  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (同分析验证) 对称知成立.

于是由 Claim 1, 有:

$$\sum_{k=1}^n \|y_k\| \leq \sum_{k=1}^n (2y_k(1-y_k) + 4\delta) = 4n\delta,$$

由 Claim 2, 有:

$$4 \sum_{k=1}^n \|y_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \|f(y_k)\| \geq \left\| \sum_{k=1}^n f(y_k) \right\| = \left\| \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n \right\| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是就有:

$$\delta \geq \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^n \|y_k\| \geq \frac{1}{4n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \|y_k\|^2} \geq \frac{1}{8n} \sqrt{\left\| \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} n \right\|} = O\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right).$$

因此  $\delta = O(\frac{1}{n^{1.5}})$ , 即存在  $\lambda$ , 使得  $\delta \geq \frac{\lambda}{n^{1.5}}$ . 利用

$$\sum_{k=1}^n \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$$

知存在  $1 \leq i \leq n$  使得  $x_i \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 也存在  $1 \leq j \leq n$  使得  $x_j \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , 这样, 则有  $\max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \geq \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}\lambda}{n^{1.5}} \geq \sqrt{5} + \frac{\lambda}{n^{1.5}}$  (因为一定有一个端点处有数偏离大于  $\frac{\sqrt{5}\lambda}{n^{1.5}}$ ).

故命题得证. ■

### 例题 2.3.7

给定正整数  $n \geq 4$ , 对正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k = n$ , 求

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{a_i b_j\}$$

的最大可能值.

**分析** 和例题2.3.5类似地分析, 我们发现取余内部的结构并不是很直接, 故想到将  $\{\cdot\}$  转化为  $[\cdot]$ , 正好

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{a_i b_j\} = n^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} [a_i b_j],$$

于是问题完全转化为求

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [a_i b_j]$$

的最小可能值. 这个时候, 我们再看看, 最优的, 我们希望尽可能多的  $a_i b_j$  刚好小于1, 我们可以取  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 1-r$ , 注意  $\frac{1}{1-r}$  趋近于  $1+r$  ( $r \rightarrow 0$ ), 因此取  $b_1 = \dots = b_{n-1} = 1+r$ , 这样, 已经有了  $(n-1)^2$  个0, 此时,  $a_n = 1+(n-1)r, b_n = 1-(n-1)r$ , 这样, 只有  $(1+(n-1)r)(1-r) \geq 1$ , 于是此时恰好  $n-1$  个数大于1, 因此我们得到原题的答案  $n^2 - n + 1$ .

我们接下来想想如何证明, 自然地, 我们证明取整的和不小于  $n-1$ , 我们不难发现, 在  $a_i, b_i$  中有比较大的数时, 这个式子可以直接放缩, 由于:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [a_i b_j] \geq \sum_{k=1}^n [a_1 b_k] \geq [na_1] - n + 1,$$

那么当  $a_1 \geq 2$  时, 待证式自然成立, 因此, 只需考虑  $2 \geq a_i, b_j$  的情况. 我们发现,  $a_i, b_j$  都比较接近1时, 这个式子可以近似理解为使得  $a_i b_j \geq 1$  的  $(i, j)$  个数, 因此, 我们设  $A = \{(i, j) | 1 \leq i, j \leq n, a_i b_j \geq 1\}$ , 去证  $|A| \geq n-1$ . 自然地, 我们可以设一个序, 设  $2 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , 同时, 我们发现临界点1比较重要, 因此可以设  $2 \geq a_1 \geq \dots \geq a_t \geq 1 > a_{t+1} \geq \dots \geq a_n, 2 \geq b_1 \geq \dots \geq b_s \geq 1 > b_{s+1} \geq \dots \geq b_n$ , 因此, 我们在这两个序列中考察  $a_i b_j \geq 1$  的情况.

自然地, 由于 $a_1$ 最大, 我们去刻画使得 $a_1 b_i \geq 1$ 的 $i$ , 也就是满足 $b_i \geq \frac{1}{a_1}$ 的 $i$ . 设 $i$ 使得 $b_1 \geq \dots \geq b_s \geq 1 > b_{s+1} \geq \dots \geq b_i \geq \frac{1}{a_1} \geq b_{i+1} \geq \dots \geq b_n$ , 那么有自然的放缩:

$$n < s b_1 + (i - s) + (n - i) \frac{1}{a_1},$$

类似的, 设 $j$ 是使得 $b_1 a_j \geq 1$ 最大的 $j$ , 那么

$$n < t a_1 + (j - t) + (n - j) \frac{1}{b_1},$$

整理即得:

$$j > n - t \frac{b_1(a_1 - 1)}{b_1 - 1}, i > n - s \frac{a_1(b_1 - 1)}{a_1 - 1},$$

为了防止分母为0, 我们不妨 $a_1, b_1 > 1$ , 因此就有:

$$\max\{i, j\} > n - \sqrt{a_1 b_1 s t} \geq n - 2\sqrt{s t},$$

于是, 加上 $a_i b_j \geq 1 (1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s)$ , 不妨设 $i \geq n - 2\sqrt{s t}$ , 我们至少有:

$$|A| > (t - 1)s + n - 2\sqrt{s t} \geq (t - 1)(s - 1) + n + 1 - 2\sqrt{s t},$$

我们发现, 如果 $s, t$ 之一为1, 那么这个似乎并不成立, 因此, 我们先看看 $s, t \geq 2$ 的情况, 我们希望往下放, 将 $s + t$ 也放为 $s t$ , 此时,

$$s + t \leq \frac{s t}{2} + 2, (s - 1)(t - 1) \geq s t + 1 - \frac{s t}{2} - 2 = \frac{s t}{2} - 1,$$

因此, 就有:

$$|A| > n + 1 - 2\sqrt{s t} + \frac{s t}{2} - 1 = n - 2 + \frac{(\sqrt{s t} - 2)^2}{2} \geq n - 2,$$

则有 $|A| \geq n - 1$ , 此时已成立. 因此, 我们接下来只需看看 $s = 1$ 或 $t = 1$ 的情形, 不妨 $s = 1$ .

上面的刻画我们失败了, 因此我们要尝试更加精细的刻画. 我们想一个办法几乎可以将 $A$ 的结构刻画出来, 我们设所有使得 $\frac{1}{b_{j-1}} \leq a_i < \frac{1}{b_j}$ 的 $i$ 的个数为 $r_j (1 \leq j \leq n)$ , 其中, 记 $\frac{1}{b_0} = 0$ , 于是我们有:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (i - 1) r_i, \sum_{k=1}^n r_k = n,$$

其中, 第一个等式是因为, 对满足 $\frac{1}{b_{j-1}} \leq a_i < \frac{1}{b_j}$ 的 $a_i$ , 满足 $a_i b_k \geq 1$ 的 $k$ 恰为 $1, \dots, j - 1$ .

使用反证法, 如果  $|A| \leq n-2$ , 那么  $\sum_{i=1}^n (i-1)r_i \leq n-2$ , 则  $r_n = 0$ , 此时, 利用  $r_i$  的定义, 有:

$$n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k}{b_k},$$

为证矛盾, 我们去证:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k}{b_k} \leq n.$$

注意  $r_1$  在其中的特殊性, 不仅由于在  $\sum_{i=1}^n (i-1)r_i \leq n-2$  这个式子中其系数为 0, 尤其因为  $b_1$  是最大的而且是唯一大于 1 的数, 因此, 我们利用  $r_1 = n - \sum_{k=2}^{n-1} r_k$  将  $r_1$  换掉, 只需证明:

$$\sum_{k=2}^{n-1} r_k \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right) \leq n \left( 1 - \frac{1}{b_1} \right),$$

事实上, 我们将这个形式往  $\sum_{i=2}^n (i-1)r_i$  靠拢, 再利用  $\sum_{i=2}^n (i-1)r_i \leq n-2$  放缩即可, 即:

$$\sum_{k=2}^{n-1} r_k \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right) = \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)r_k \frac{\left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1} \leq \left( \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)r_k \right) \max_{2 \leq k \leq n-1} \frac{\left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1},$$

因此, 我们最后只需证: 对  $2 \leq k \leq n-1$ , 均有:

$$\frac{\left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1} \leq \frac{n}{n-2} \left( 1 - \frac{1}{b_1} \right).$$

利用  $b_1 \geq 1 > b_2 \geq \dots \geq b_n$ , 我们看看  $b_k$  的放缩, 自然地, 我们有:

$$b_k \geq \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^n b_j \geq \frac{n-b_1-(k-2)}{n-k+1},$$

因此, 只需证:

$$\frac{\left( \frac{n-k+1}{n-b_1-(k-2)} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1} \leq \frac{n}{n-2} \left( 1 - \frac{1}{b_1} \right),$$

经变形, 这等价于  $(k-1)n(2-b_1) + (k-2)(n(n-k)-2) \geq 0$  显然成立.

上面的做法是本质且比较自然的. 这个问题也可以使用归纳法解决, 留做习题.

**解** 一方面, 取  $a_1 = \frac{2n-1}{n}, a_2 = \dots = a_n = \frac{n-1}{n}, b_1 = \frac{1}{n}, b_2 = \dots = b_n = \frac{n+1}{n}$ , 此时得到原式为  $n^2 - n + 1$ . (相当于选取了一个较小的  $r$  使得  $1 - (n-1)r > 0$ )

另一方面, 下证原式不超过  $n^2 - n + 1$ , 只需证(利用取整的和与取余的和为  $n^2$ ):

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [a_i b_j] \geq n - 1.$$

若存在  $a_i \geq 2$  或  $b_i \geq 2$ , 不妨设  $a_1 \geq 2$ , 则有:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} [a_i b_j] \geq \sum_{k=1}^n [a_1 b_k] \geq [na_1] - n + 1 > n - 1,$$

此时成立; 下设  $2 \geq a_1 \geq \dots \geq a_t \geq 1 > a_{t+1} \geq \dots \geq a_n, 2 \geq b_1 \geq \dots \geq b_s \geq 1 > b_{s+1} \geq \dots \geq b_n$ , 不妨  $a_1, b_1 > 1$ , 否则命题显然成立.  $A = \{(i, j) | 1 \leq i, j \leq n, a_i b_j \geq 1\}$ , 只需去证  $|A| \geq n - 1$ .

设  $i$  使得  $b_1 \geq \dots \geq b_s \geq 1 > b_{s+1} \geq \dots \geq b_i \geq \frac{1}{a_1} \geq b_{i+1} \geq \dots \geq b_n$ , 则有:

$$n < sb_1 + (i - s) + (n - i) \frac{1}{a_1},$$

类似定义  $j$ , 则有:

$$n < ta_1 + (j - t) + (n - j) \frac{1}{b_1},$$

整理即得:

$$j > n - t \frac{b_1(a_1 - 1)}{b_1 - 1}, i > n - s \frac{a_1(b_1 - 1)}{a_1 - 1},$$

因此就有:

$$\max\{i, j\} > n - \sqrt{a_1 b_1 st} \geq n - 2\sqrt{st}.$$

不妨设  $i \geq n - 2\sqrt{st}$ , 我们有:  $(a_i b_j \geq 1 (1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s) \text{ 这些, 加上 } a_1 b_l \geq 0 (s + 1 \leq l \leq i) \text{ 这些})$

$$|A| > (t - 1)s + n - 2\sqrt{st} \geq (t - 1)(s - 1) + n + 1 - 2\sqrt{st},$$

当  $s, t \geq 2$  时(利用  $(s - 1)(t - 1) \geq \frac{st}{2} - 1$ ),

$$|A| > n + 1 - 2\sqrt{st} + \frac{st}{2} - 1 = n - 2 + \frac{(\sqrt{st} - 2)^2}{2} \geq n - 2.$$

当  $s = 1$  或  $t = 1$  时, 不妨  $s = 1$ , (利用分析中的想法) 设所有使得  $\frac{1}{b_{j-1}} \leq a_i < \frac{1}{b_j}$  的  $i$  的个数为  $r_j (1 \leq j \leq n)$ , 其中, 记  $\frac{1}{b_0} = 0$ , 于是我们有:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (i - 1)r_i, \sum_{k=1}^n r_k = n,$$



如果  $|A| \leq n-2$ , 那么  $\sum_{i=1}^n (i-1)r_i \leq n-2$ , 则  $r_n = 0$ , 此时, 利用  $r_i$  的定义, 有:

$$n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k}{b_k},$$

接下来, 我们去证:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k}{b_k} \leq n.$$

这只需:

$$\sum_{k=2}^{n-1} r_k \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right) \leq n \left( 1 - \frac{1}{b_1} \right),$$

由于:

$$\sum_{k=2}^{n-1} r_k \left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right) = \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)r_k \frac{\left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1} \leq \left( \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)r_k \right) \max_{2 \leq k \leq n-1} \frac{\left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1},$$

我们只需证: 对  $2 \leq k \leq n-1$ , 均有:

$$\frac{\left( \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1} \leq \frac{n}{n-2} \left( 1 - \frac{1}{b_1} \right).$$

利用  $b_1 \geq 1 > b_2 \geq \dots \geq b_n$ , 我们有:

$$b_k \geq \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^n b_j \geq \frac{n-b_1-(k-2)}{n-k+1},$$

因此, 只需证:

$$\frac{\left( \frac{n-k+1}{n-b_1-(k-2)} - \frac{1}{b_1} \right)}{k-1} \leq \frac{n}{n-2} \left( 1 - \frac{1}{b_1} \right),$$

经变形, 这等价于  $(k-1)n(2-b_1) + (k-2)(n(n-k)-2) \geq 0$  显然成立. 与假设矛盾, 命题得证. ■

例题2.3.5与2.3.7都是将取整转化为集合问题考虑, 我们在后面的章节会系统讲解集合类型的问题.

### 例题 2.3.8

给定正整数  $n > 2$ , 求最小的实数  $\lambda$ , 对任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i < 2^i (1 \leq i \leq n)$ , ,

均有:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{a_i a_j\} \leq \lambda \sum_{k=1}^n \{a_k\}.$$

**分析** 首先, 自然地我们将 $a_i$ 小数部分取出来, 设 $a_i = b_i + r_i (1 \leq i \leq n, b_i \in \mathbb{N}, r_i \in [0, 1))$ , 那么原不等式化为

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} \leq \lambda \sum_{k=1}^n r_k.$$

形式比较复杂, 因此我们可以从取等入手考虑. 比较自然的, 我们一方面希望右边尽可能的很小, 另一方面希望在右边很小时左边又很大. 为了左边很大, 我们会让左边很多式子都比较接近1; 同时, 在接近1的时候, 我们让右边尽可能小, 因此我们尽可能让左边每个式子都小于1, 这样, 既保证了右边尽可能小, 又保证了左边尽可能大.

左边的系数 $b_i$ 也在影响系数, 为了进一步使右边更小, 直观上左边的系数更大的话会更好, 因此我们想到可以使得 $b_i = 2^i - 1$ , 这样就做到了我们想到的两个部分. 此时, 我们只需要:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j) \leq \lambda \sum_{k=1}^n r_k,$$

化简后也就是:

$$2 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n r_k \leq \lambda.$$

这样, 我们只需要在 $(2^i - 1)r_j + (2^j - 1)r_i + r_i r_j < 1$ 时, 尽可能最大化 $\sum r_i$ , 我们具体的看看, 对于每个 $i, r_i$ 的约束是什么, 经过变形, 这是:

$$r_i < \frac{1 - (2^i - 1)r_j}{2^j - 1 + r_j},$$

在这个式子右边, 我们希望最小化右边这个式子,  $i$ 是固定的, 我们看看 $j$ 变化时怎样最好. 明显的, 分母 $2^j$ 量级占了非常大的部分,  $j$ 每多1分母几乎大了一倍, 但分子有很大的数1坐镇,  $(2^i - 1)r_j$ 比起来就非常小了, 因此我们会想到取 $j = n$ , 这样, 就有:

$$r_i < \frac{1 - (2^i - 1)r_n}{2^n - 1 + r_n},$$

稍微做一些认识, 此时有 $r_i \leq \frac{1}{2^n - 1}$ , 是极其小的, 因此我们选择 $j = n$ 的确是正确的选择, 这样, 基本上 $r_i$ 的上界被 $r_n$ 限制死了, 那么具体地, 我们只需看看 $r_n$ 的范围, 就可以确定 $\sum r_i$ 的范围了. 至于 $r_n$ , 利用 $i = j = n$ 的式子, 只需解一个二次方程:

$$2(2^n - 1)r_n + r_n^2 < 1, (r_n + 2^n - 1)^2 \leq 1 + (2^n - 1)^2,$$

解得:

$$r_n < \sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1,$$

这样, 我们有:

$$r_i < \frac{1 - (2^i - 1)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}},$$

求和即得:

$$\sum_{k=1}^n r_k < \frac{n - (2^{n+1} - n - 2)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}},$$

这样我们就可以得到 $\lambda$ 的最小值, 取充分小的正实数 $r$ , 取:

$$a_i = 2^i - 1 + \frac{1 - (2^i - 1)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}} - r (1 \leq i \leq n),$$

令 $r \rightarrow 0$ , 即得:

$$\lambda \geq 2(2^{n+1} - n - 2) + \frac{n - (2^{n+1} - n - 2)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}} := \lambda_0.$$

至于证明, 我们尽可能将证明往分析的极限情况去靠拢, 自然地我们会想到反证法. 假设:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} > \lambda_0 \sum_{k=1}^n r_k.$$

我们不断地对左边放缩来逼近取等, 自然地, 先将 $\{\cdot\}$ 放掉, 得到:

$$2 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n r_k > \lambda_0,$$

我们会想到, 这会帮助我们卡出 $\sum b_k$ 的范围, 因为右边 $\lambda_0$ 是一个大于并且很接近 $2(2^{n+1} - n - 2)$ 的数, 而这和左边的最大值差距只在 $\sum r_k$ 上, 并且在我们心目中有 $\sum r_k < 1$ . 这样, 我们为了卡出 $\sum b_k$ 的范围, 只需卡一下 $\sum r_k$ 的范围, 简单自然地将 $\{\cdot\}$ 放成1, 两边的量级差距会直接导致 $\sum r_k < 1$ , 我们便可以卡出 $\sum b_k$ , 事实上:

$$\sum_{k=1}^n r_k < \frac{n^2}{\lambda_0} < \frac{n^2}{2(2^{n+1} - n - 2)} < 1 (n > 2),$$

最后一个不等号不难验证, 这样, 就得到了:

$$\sum_{k=1}^n (2^k - 1) + 1 > 2 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n r_k > \lambda_0 > \sum_{k=1}^n (2^k - 1),$$

因此就有:

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2^k - 1),$$

由于  $b_k \leq 2^k - 1$ , 则有  $b_k = 2^k - 1 (1 \leq k \leq n)$ , 这样, 我们就卡出来了  $b_k = 2^k - 1$ , 离取等更近了一步. 接下来, 联系构造的想法, 我们大概需要看看  $b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j < 1$  是否成立. 如果有大于等于1的, 那么我们看看直接放缩:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} \leq 2 \left( \sum_{k=1}^n r_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) + \left( \sum_{k=1}^n r_k \right)^2 - 1 \leq 2 \left( \sum_{k=1}^n r_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \lambda_0 \left( \sum_{k=1}^n r_k \right).$$

因此最终, 可以不妨  $b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j < 1$ . 这样, 类似上面的计算, 就有:

$$r_i < \frac{1 - (2^i - 1)r_n}{2^n - 1 + r_n},$$

求和得(这里保留  $r_n$  是为了更精细的放缩):

$$\sum_{k=1}^n r_k \leq \frac{n - 1 - (2^n - n - 1)r_n}{2^n - 1 + r_n} + r_n,$$

为证明原不等式, 同构造的分析只需证:

$$2 \sum_{k=1}^n (2^k - 1) + \sum_{k=1}^n r_k \leq \lambda_0,$$

代入知这只需:

$$\frac{n - 1 - (2^n - n - 1)r_n}{2^n - 1 + r_n} + r_n \leq \frac{n - (2^{n+1} - n - 2)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}}$$

我们在前面得到了  $r_n$  的范围, 后面只需要对勾函数单调性稍微计算即可.

**解** 一方面, 取充分小的正实数  $r$ , 取:

$$a_i = 2^i - 1 + \frac{1 - (2^i - 1)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}} - r (1 \leq i \leq n),$$

令  $r \rightarrow 0$ , 即得:

$$\lambda \geq 2(2^{n+1} - n - 2) + \frac{n - (2^{n+1} - n - 2)(\sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1)}{\sqrt{1 + (2^n - 1)^2}} := \lambda_0.$$

另一方面, 设  $a_i = b_i + r_i (1 \leq i \leq n, b_i \in \mathbb{N}, r_i \in [0, 1))$ , 那么原不等式化为

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} \leq \lambda \sum_{k=1}^n r_k.$$

用反证法, 假设:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} > \lambda_0 \sum_{k=1}^n r_k.$$

不妨  $r_k$  不全为 0, 首先有: (左边去掉  $\{\cdot\}$  后两边除以  $\sum r_k$ )

$$2 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n r_k > \lambda_0,$$

又有: (最后一步不难证明, 留作习题)

$$\sum_{k=1}^n r_k < \frac{n^2}{\lambda_0} < \frac{n^2}{2(2^{n+1} - n - 2)} < 1 (n > 2),$$

于是就有:

$$\sum_{k=1}^n (2^k - 1) + 1 > 2 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n r_k > \lambda_0 > \sum_{k=1}^n (2^k - 1),$$

那么就有:

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2^k - 1),$$

因此  $b_k = 2^k - 1 (1 \leq k \leq n)$ . 若存在  $1 \leq i, j \leq n$  使得  $b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j \geq 1$ , 则有:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} \leq 2 \left( \sum_{k=1}^n r_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) + \left( \sum_{k=1}^n r_k \right)^2 - 1 \leq 2 \left( \sum_{k=1}^n r_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \lambda_0 \left( \sum_{k=1}^n r_k \right).$$

矛盾! 因此不妨  $b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j < 1 (1 \leq i, j \leq n)$ . 于是:

$$r_i < \frac{1 - (2^i - 1)r_n}{2^n - 1 + r_n},$$

求和得:

$$\sum_{k=1}^n r_k \leq \frac{n - 1 - (2^n - n - 1)r_n}{2^n - 1 + r_n} + r_n,$$

又  $2(2^n - 1)r_n + r_n^2 < 1$ , 解得:

$$r_n < \sqrt{1 + (2^n - 1)^2} - 2^n + 1,$$

这样, 由对勾函数单调性: (最后一个不等号留作习题)

$$\sum_{k=1}^n r_k \leq \frac{n-1-(2^n-n-1)r_n}{2^n-1+r_n} + r_n \leq \max\{\lambda_0 - 2(2^{n+1}-n-2), \frac{n-1}{2^n-1}\} \leq \lambda_0 - 2(2^{n+1}-n-2),$$

即得:

$$2 \sum_{k=1}^n (2^k - 1) + \sum_{k=1}^n r_k \leq \lambda_0,$$

于是:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \{b_i r_j + b_j r_i + r_i r_j\} \leq \lambda_0 \sum_{k=1}^n r_k.$$


与假设矛盾, 命题得证. ■

## 练习 2.3

 **练习 2.3.1** 给定正整数  $n$ , 求

$$\left| \sum_{k=1}^n (\{2kx\} - \{(2k-1)x\}) \right|$$

的最大可能值.

 **练习 2.3.2** 用归纳法解决例题2.3.7.

 **练习 2.3.3** 给定正整数  $n \geq 3$ , 求最小的正实数  $\lambda$ , 对任意和为  $n$  的正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_{n+1} = a_1$ ), 均有:

$$\sum_{k=1}^n \{a_k a_{k+1}\} \leq \lambda.$$

## 2.4 高等观点与技巧

首先我们简单介绍一下Fourier级数:

### 定理 2.4.1

对  $c_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), 级数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

对于任意  $x \in R$  均收敛, 则对  $n \in \mathbb{Z}$ , 有:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nix} f(x) dx.$$



这是Parseval定理的直接推论. 其证明较为复杂, 且不为此书重点, 故不予详细证明.

Fourier级数可以将一切周期函数变成三角级数, 这会帮助我们解决很多取整函数中不好解决的问题.

给出几个例子: 利用上面的定理, 我们不难计算得到:

#### 引理 2.4.1

对实数 $x$ , 有:

$$\|x\| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((4n-2)\pi x)}{(2n-1)^2}$$



接下来我们看几个例题. 注意以下几例的分析依赖于对Fourier级数的了解.

#### 例题 2.4.1

求最小的实数 $c$ , 对任意正整数 $n \geq 3$ , 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 存在整数 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得:

$$\sum_{i=1}^n \|kx_i\| \leq c(n+1).$$

**分析** 首先我们看看取等, 我们希望左边这些尽量相等, 比较自然的, 我们让 $x_i$ 都是有理数, 并且为了方便计算, 我们可以让它们的分母都相同. 同时, 我们肯定希望左边尽可能不出现0, 因此最好的我们让分母大于 $n$ , 而且最好是个质数 $p$ . 因此, 我们会自然想到 $\text{mod } p$ 剩余类的结构, 让左边分子上能取到的数 $\text{mod } p$ 下是相同的, 这样, 我们自然发现可以取 $n = p - 1, x_i = \frac{i}{p} (1 \leq i \leq n)$ , 这样, 对 $1 \leq k \leq n$ , 有:

$$\sum_{i=1}^n \|kx_i\| = \sum_{i=1}^{p-1} \left\| \frac{ki}{p} \right\| = \sum_{i=1}^{p-1} \left\| \frac{i}{p} \right\| = 2 \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{i}{p} = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1},$$

这样, 令素数 $p \rightarrow \infty$ , 我们自然得到 $c \geq \frac{1}{4}$ .

接下来考虑证明, 左边是一个和结构, 具体分析大小性质较为复杂, 并且我们有Fourier级数的工具, 将其展开后几乎无法分析大小性质, 因此我们可以考虑整体求和来解决. 同时, 由于关于 $k$ 我们并没有发现明显的对称性, 因此我们需要待定和为1的 $\lambda_k$ , 再看:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{i=1}^n \|kx_i\| = \frac{n}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos((4m-2)\pi ka_j),$$

其中, 这个等号由代入 $\|\cdot\|$ 的表达式后求和换号得到, 可交换性由 $\|\cdot\|$ 的Fourier级数绝对收敛得到.

观察一下这个式子, 我们提取出只有 $k$ 在变的部分, 只需要考虑最大化

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx) \right\},$$

这一部分内容与本书相关性并不大,我们在此直接给出结论. 取 $\lambda_k = \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)} (1 \leq k \leq n)$ , 我们注意到(对分母为0的部分单独讨论):

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n},$$

于是,就有:

$$\frac{n}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos((4m-2)\pi k a_j) \leq \frac{n}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{n+1}{4},$$

这样,我们便完成了证明.

**解** 一方面,我们考虑素数 $p > 3$ , 取 $n = p - 1, x_i = \frac{i}{p} (1 \leq i \leq n)$ , 则对 $1 \leq k \leq n$ , 有:

$$\sum_{i=1}^n \|kx_i\| = \sum_{i=1}^{p-1} \left\| \frac{ki}{p} \right\| = \sum_{i=1}^{p-1} \left\| \frac{i}{p} \right\| = 2 \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{i}{p} = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1},$$

令 $n \rightarrow \infty$ (这里用到素数有无穷多个), 得 $c \geq \frac{1}{4}$ .

另一方面, 下证 $c = \frac{1}{4}$ 可以: 我们写出 $\|\cdot\|$ 的Fourier级数, 记 $\lambda_k = \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)} (1 \leq k \leq n)$ , 经变形得:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{i=1}^n \|kx_i\| = \frac{n}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos((4m-2)\pi k a_j),$$

并且对任意实数 $x$ , 有:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n},$$

于是就有:

$$\frac{n}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos((4m-2)\pi k a_j) \leq \frac{n}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{n+1}{4},$$

这样,就存在整数 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得:

$$\sum_{i=1}^n \|kx_i\| \leq \frac{n+1}{4}.$$

命题即证. ■



**例题 2.4.2**

对正整数  $m, n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ , 证明:

$$m^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|a_i - a_j\| + n^2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \|b_i - b_j\| \leq 2mn \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \|a_i - b_j\|$$

**分析** 使用Fourier级数, 经过变形我们只需证

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} Z_k \geq 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} Z_k = & m^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos((4k-2)\pi(a_i - a_j)) + n^2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \cos((4k-2)\pi(b_i - b_j)) \\ & - 2mn \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \cos((4k-2)\pi(a_i - b_j)), \end{aligned}$$

我们只需证明对实数  $x_i, y_j (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ , 有:

$$m^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos(x_i - x_j) + n^2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \cos(y_i - y_j) \geq 2mn \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \cos(x_i - y_j),$$

写成复数实部形式, 注意到:

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \cos(x_i - y_j) = \operatorname{Re} \left( \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m} e^{ix_k - iy_j} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{ix_k} \sum_{j=1}^m e^{-iy_j} \right),$$

对另外两式, 即有:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos(x_i - x_j) &= \left| \sum_{k=1}^n e^{ix_k} \right|^2, \\ \sum_{1 \leq i, j \leq m} \cos(y_i - y_j) &= \left| \sum_{j=1}^m e^{iy_j} \right|^2, \end{aligned}$$

因此我们发现可以配方:

$$\begin{aligned} & m^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos(x_i - x_j) + n^2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \cos(y_i - y_j) - 2mn \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \cos(x_i - y_j) \\ &= m^2 \left| \sum_{k=1}^n e^{ix_k} \right|^2 + n^2 \left| \sum_{j=1}^m e^{iy_j} \right|^2 - 2mn \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{ix_k} \sum_{j=1}^m e^{-iy_j} \right) \end{aligned}$$

$$= \left| m \sum_{k=1}^n e^{ix_k} - n \sum_{j=1}^m e^{iy_j} \right|^2 \geq 0,$$

这样命题即成立.

**解** 注意到:

$$\begin{aligned} & 2mn \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \|a_i - b_j\| - m^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|a_i - a_j\| - n^2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \|b_i - b_j\| \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} \left| m \sum_{k=1}^n e^{(4l-2)\pi i a_k} - n \sum_{j=1}^m e^{(4l-2)\pi i b_j} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

命题得证. ■

### 例题 2.4.3

对正整数  $n \geq 3$ , 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 证明:

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\| \sum_{k \in A} x_k \right\| \leq 2^{n-2} \left( 1 + \cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1} \right).$$

其中, 空集的元素和定义为0.

**分析** 使用Fourier级数, 我们发现:

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\| \sum_{k \in A} x_k \right\| = 2^{n-2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} \sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} (4l-2)\pi x_k \right),$$

因此我们只需考虑对实数  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , 考虑

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} \theta_k \right)$$

的最小可能值. 这里, 我们可以设  $\theta_k \in [-\pi, \pi)$ .

我们希望化简对cos的求和, 依然将其转化为复数实部的形式, 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} \theta_k \right) &= \operatorname{Re} \left( \sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} e^{i \sum_{k \in A} \theta_k} \right) = \operatorname{Re} \left( \prod_{k=1}^n (1 + e^{i\theta_k}) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \prod_{k=1}^n \left( 2 \cos \frac{\theta_k}{2} e^{i \frac{\theta_k}{2}} \right) \right) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} \right), \end{aligned}$$

注意  $\frac{\theta_k}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 于是  $\cos \frac{\theta_k}{2} \geq 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 不妨  $\cos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} \right) \leq 0$ , 于是由Jensen不等式,

设  $\frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} = n\theta$ , 则有:

$$2^n \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} \right) \geq 2^n \cos^n \theta \cos(n\theta) := f(\theta),$$

注意  $f'(\theta) = -n \cos^{n-1} \theta \sin((n+1)\theta)$ , 其极值点为  $\frac{k\pi}{n+1}$ , 对  $k=0$ , 原式为1; 对  $k \neq 0$ ,  $f(\theta) \geq \min_{1 \leq |k| \leq n} \{-\cos^{n+1} \frac{k\pi}{n+1}\} \geq -\cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$ , 这样, 总有

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} \theta_k \right) \geq -2^n \cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1},$$

代回命题即证.

**解** 使用  $\|\cdot\|$  的 Fourier 级数, 有:

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\| \sum_{k \in A} x_k \right\| = 2^{n-2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} \sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} (4l-2)\pi x_k \right),$$

我们证明: 对实数  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , 有:

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} \theta_k \right) \geq -2^n \cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1}.$$

不妨设  $\theta_k \in [-\pi, \pi)$ , 注意到:

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} \theta_k \right) &= \operatorname{Re} \left( \sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} e^{i \sum_{k \in A} \theta_k} \right) = \operatorname{Re} \left( \prod_{k=1}^n (1 + e^{i\theta_k}) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \prod_{k=1}^n \left( 2 \cos \frac{\theta_k}{2} e^{i \frac{\theta_k}{2}} \right) \right) = 2^n \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} \right), \end{aligned}$$

注意  $\frac{\theta_k}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 于是  $\cos \frac{\theta_k}{2} \geq 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 不妨  $\cos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} \right) \leq 0$ , 于是由 Jensen 不等式, 设  $\frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} = n\theta$ , 则有:

$$2^n \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta_k}{2} \cos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{2} \right) \geq 2^n \cos^n \theta \cos(n\theta) := f(\theta),$$

又  $f'(\theta) = -n \cos^{n-1} \theta \sin((n+1)\theta)$ , 其极值点为  $\frac{k\pi}{n+1}$ , 对  $k=0$ , 原式为1; 对  $k \neq 0$ ,  $f(\theta) \geq$

$\min_{1 \leq |k| \leq n} \{-\cos^{n+1} \frac{k\pi}{n+1}\} \geq -\cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$ , 这样, 总有

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \cos \left( \sum_{k \in A} \theta_k \right) \geq -2^n \cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1},$$

因此

$$\sum_{A \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\| \sum_{k \in A} x_k \right\| \leq 2^{n-2} + 2^n \frac{2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} \cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1} = 2^{n-2} \left( 1 + \cos^{n+1} \frac{\pi}{n+1} \right).$$

命题得证. ■

然后我们介绍一下离散Fourier变换, 本质上, 相当于我们对于一个列向量或者线性空间作一个线性变换, 使之有较好的性质. 我们选取Fourier矩阵  $(w^{ij})_{n \times n}$  诱导的线性映射, 在对于一些有数列性质尤其是循环性质的问题时有很好的效果.

我们看一个例题.

#### 例题 2.4.4

对奇素数  $p$ , 与  $p$  互素的正整数  $a, b, c, d$  满足

$$\left\{ \frac{ar}{p} \right\} + \left\{ \frac{br}{p} \right\} + \left\{ \frac{cr}{p} \right\} + \left\{ \frac{dr}{p} \right\} = 2 \quad (1 \leq r \leq p-1),$$

证明:  $a+b, b+c, c+d, d+a, a+c, b+d$  有两个数为  $p$  的倍数.

**分析** 我们对于  $\left\{ \frac{ar}{p} \right\} \quad (1 \leq r \leq p-1)$  这组数感到有些陌生, 同时看到其循环性质, 因此我们可以考虑离散Fourier变换, 将这一组等式变成我们更熟悉, 更容易掌控的等式. 我们考察

$$\sum_{r=1}^{p-1} e^{\frac{2ilr\pi}{p}} \left( \left\{ \frac{ar}{p} \right\} + \left\{ \frac{br}{p} \right\} + \left\{ \frac{cr}{p} \right\} + \left\{ \frac{dr}{p} \right\} \right),$$

一方面, 对  $1 \leq l \leq p-1$ , 这个式子为  $-2$ , 另一方面, 我们具体计算一些每一项,

$$\sum_{r=1}^{p-1} e^{\frac{2ilr\pi}{p}} \left\{ \frac{ar}{p} \right\} = \sum_{r=1}^{p-1} e^{\frac{2ilra^{-1}\pi}{p}} \frac{r}{p} = \frac{1}{e^{\frac{2ila^{-1}\pi}{p}} - 1},$$

其中,  $a^{-1}$  为  $a$  在  $\mathbb{F}_p$  中的逆元, 因此, 我们得到对  $1 \leq l \leq p-1$ , 都有:

$$\frac{1}{1 - e^{\frac{2ila^{-1}\pi}{p}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2ilb^{-1}\pi}{p}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2ilc^{-1}\pi}{p}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2ild^{-1}\pi}{p}}} = 2.$$

特别的, 我们看一些简单可控的情形, 设  $A = e^{\frac{2ia^{-1}\pi}{p}}$ ,  $B, C, D$  类似定义, 那么就有:

$$\frac{1}{1-A} + \frac{1}{1-B} + \frac{1}{1-C} + \frac{1}{1-D} = 2, \quad \frac{1}{1-A^2} + \frac{1}{1-B^2} + \frac{1}{1-C^2} + \frac{1}{1-D^2} = 2,$$

只看实部我们发现是恒等式, 因此我们看看虚部. 两边取虚部, 不难得到: ( $cyc_k$  表示轮换因子数量为  $k$ )

$$\sum_{cyc_4} \cot \frac{a^{-1}\pi}{p} = \sum_{cyc_4} \cot \frac{2a^{-1}\pi}{p} = 0,$$

自然地, 右边乘2减去左边就有:

$$\sum_{cyc_4} \frac{1}{\cot \frac{a^{-1}\pi}{p}} = 0,$$

我们尝试解方程, 用  $\cot \frac{d^{-1}\pi}{p} = -\sum_{cyc_3} \cot \frac{2a^{-1}\pi}{p}$  代入上式得:

$$0 = \sum_{cyc_3} \frac{1}{\cot \frac{a^{-1}\pi}{p}} - \frac{1}{\sum_{cyc_3} \cot \frac{a^{-1}\pi}{p}} = \frac{\prod_{cyc_3} (\cot \frac{a^{-1}\pi}{p} + \cot \frac{b^{-1}\pi}{p})}{\sum_{cyc_3} \cot \frac{a^{-1}\pi}{p} \prod_{cyc_3} \cot \frac{a^{-1}\pi}{p}},$$

不妨  $\cot \frac{a^{-1}\pi}{p} + \cot \frac{b^{-1}\pi}{p} = 0$ , 那么  $p|a+b$ , 则  $p|c+d$ , 这样命题即证.

**解** 对  $1 \leq l \leq p-1$ ,

$$\sum_{r=1}^{p-1} e^{\frac{2ilr\pi}{p}} \left( \left\{ \frac{ar}{p} \right\} + \left\{ \frac{br}{p} \right\} + \left\{ \frac{cr}{p} \right\} + \left\{ \frac{dr}{p} \right\} \right) = -2,$$

同时, 因为:

$$\sum_{r=1}^{p-1} e^{\frac{2ilr\pi}{p}} \left\{ \frac{ar}{p} \right\} = \sum_{r=1}^{p-1} e^{\frac{2ilra^{-1}\pi}{p}} \frac{r}{p} = \frac{1}{e^{\frac{2ila^{-1}\pi}{p}} - 1},$$

其中,  $a^{-1}$  为  $a$  在  $\mathbb{F}_p$  中的逆元, 因此, 对  $1 \leq l \leq p-1$ , 都有:

$$\frac{1}{1 - e^{\frac{2ila^{-1}\pi}{p}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2ilb^{-1}\pi}{p}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2ilc^{-1}\pi}{p}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2ild^{-1}\pi}{p}}} = 2.$$

设  $A = e^{\frac{2ia^{-1}\pi}{p}}$ ,  $B, C, D$  类似定义, 就有:

$$\frac{1}{1-A} + \frac{1}{1-B} + \frac{1}{1-C} + \frac{1}{1-D} = 2, \quad \frac{1}{1-A^2} + \frac{1}{1-B^2} + \frac{1}{1-C^2} + \frac{1}{1-D^2} = 2,$$

取虚部得到: ( $cyc_k$  表示轮换因子数量为  $k$ )

$$\sum_{cyc_4} \cot \frac{a^{-1}\pi}{p} = \sum_{cyc_4} \frac{1}{\cot \frac{a^{-1}\pi}{p}} = 0,$$

用  $\cot \frac{d-1}{p}\pi = -\sum_{cyc_3} \cot \frac{2a-1}{p}\pi$  代入右式得:

$$0 = \sum_{cyc_3} \frac{1}{\cot \frac{a-1}{p}\pi} - \frac{1}{\sum_{cyc_3} \cot \frac{a-1}{p}\pi} = \frac{\prod_{cyc_3} (\cot \frac{a-1}{p}\pi + \cot \frac{b-1}{p}\pi)}{\sum_{cyc_3} \cot \frac{a-1}{p}\pi \prod_{cyc_3} \cot \frac{a-1}{p}\pi},$$

不妨  $\cot \frac{a-1}{p}\pi + \cot \frac{b-1}{p}\pi = 0$ , 那么  $p|a+b$ , 则  $p|c+d$ , 命题得证. ■

最后一例, 我们展示一下二次型观点.

### 例题 2.4.5

求最小的实数  $c$ , 对任意正整数  $n$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \frac{x_i}{x_j} \right\} \leq cn^2.$$

**分析** 比较自然的观点是, 我们可以将其看作一个二次型. 相当于在考虑

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)f(y) \left\{ \frac{x}{y} \right\} dx dy$$

在固定  $\int f(x)dx$  时的上界. 在这个观点下, 这个问题自然有所眉目.

对无穷甚至不可数的变量去考虑, 是较为麻烦的; 同时我们观察到, 关于每个变量  $x_i$  是具有凸性的, 因此我们可以通过凸性调整先将变量取值个数进行一个约束, 再转化为二次型. 比较自然地, 我们可以发现, 我们应当尽量让更多的  $\frac{x_i}{x_j}$  取到 2-, 但是在每一步调整中, 我们将其卡在边界上时, 最多只能让它们之比为整数, 因此为了实现整数到 2 的倍数的跨越, 我们将原来的式子再进行一次放缩, 要保证依然不改变在比值为 1, 2 时的值, 并且间断点只有 2. 这样, 我们一段一段的看, 在  $1 \leq x < 2$  时,  $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = x + \frac{1}{x} - 1$ ; 对于  $x \geq 2$ , 这是取等高发的地方, 注意  $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = \{x\} + \frac{1}{x}$ , 取等的时候,  $\{x\}$  逼近 1, 不过后面的  $\frac{1}{x}$  一直是连续变化的. 为了能尽可能拟合所有取等, 同时在 2 之外尽可能连续, 我们考虑对  $x \geq 2$  的部分全部放为  $1 + \frac{1}{x}$ ; 同时, 因为问题基本上都是在看比值为 2 的幂, 因此我们可以记  $f(x) = 2^x + 2^{-x} - 1 (0 \leq x < 1)$ ,  $f(x) = 1 + 2^{-x} (x > 1)$ , 那么设  $x_i = 2^{a_i}$  只需考虑:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} f(|a_i - a_j|) \leq cn^2$$

即可. 此时, 我们注意关于单个变量, 在连续区间内依然是下凸函数, 因此我们就可以把尽可能多的数都调到差为整数; 进一步, 当差全部为整数时, 我们就达到了目的, 可以将问题化为更好处理的二次型.

我们看看如何调整: 我们把所有差为整数的数连边, 那么化为若干个连通分支. 此时, 如果有不少于 2 个连通分支, 取出一个连通分支, 每个数都加  $t$ , 那么我们自然发现原式关于  $t$  在连续区间内部是凸函数  $G(t)$ , 考虑一个连续区间  $[r, s]$ , 当  $t$  取在端点时就是与某个其他连通分支中的某个数差为 1 时. 因此, 如果可以使得  $t$  取到某个端点, 那么自然这两个连通分支会合成一个

连通分支；但是如果一边是 $\infty$ 呢？依据 $G'(0)$ 的正负性，我们可以知道 $G$ 要么在 $[r, 0]$ 单调递减，要么在 $[0, s]$ 单调递增，不妨在 $[0, s]$ 单调递增，如果 $s < +\infty$ ，那么自然将 $t$ 调到 $s$ 即可；如果 $s$ 就是 $\infty$ ，也就是说右边是 $[0, +\infty)$ ，这样，一定存在一个 $t \in (0, 1)$ ，与另一个连通分支中的数差为整数，取出这个 $t$ 就可以了。

因此，每一次调整后，连通分支个数严格减去1，最终变为连通图，于是我们可以设 $a_i$ 均为整数。因此，我们可以设 $a_i$ 全为正整数，设 $a_j$ 取到 $s_i$ 个 $i$ ，并设 $s_i$ 中最大非0数下标为 $k$ ，那么问题变为：

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (s_i^2 - s_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} s_i s_j (1 + 2^{i-j}) \leq cn^2.$$

我们不难注意到，直到此时，我们的放缩都是基本最优的。接下来，我们就真正的转化为了一个二次型问题。设 $y_i = \frac{s_i}{n} (1 \leq i \leq n)$ ，那么只需在 $\sum_{i=1}^k y_i = 1$ 的情况下求

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq k} y_i y_j (1 + 2^{i-j}) = \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2^{i-j} y_i y_j$$

的最大可能值。

有了这个之后，我们就可以根据这个二次型的取等给出原问题的取等。

因为后面还会用到类似的结论，我们将其作为引理，并将其推广，在下面给出。

#### 引理 2.4.2

$t \geq 2$ ，则对  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ，有：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} t^{i-j} x_i x_j \leq \frac{1}{4t-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$



**解**  $n = 1, 2$  时命题显然。  $n = 3$  时：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} x_1 x_2 + \frac{1}{t} x_2 x_3 + \frac{1}{t^2} x_1 x_3 \leq \frac{1}{t} x_2 (x_1 + x_3) + \frac{1}{t^2} (x_1 + x_3)^2 \\ &= \frac{1}{4t^2} (x_1 + x_3) (4tx_2 + x_1 + x_3) = \frac{1}{4t^2} \cdot \frac{1}{4t-1} \cdot ((4t-1)(x_1 + x_3)) (4tx_2 + x_1 + x_3) \\ &\leq \frac{1}{4t^2} \cdot \frac{1}{4t-1} \cdot \left( \frac{1}{2} ((4t-1)(x_1 + x_3) + 4tx_2 + x_1 + x_3) \right)^2 = \frac{1}{4t-1} (x_1 + x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

下设  $n \geq 4$ ，记  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t^{i-j} x_i x_j / (\sum_{i=1}^n x_i)^2$ 。先证： $g$  存在最大值点。事实上，由齐次性，不妨  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ，则  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是在有界闭集上的连续函数，于是有最大值，设有最大值点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，有最大值  $c$ 。

**Claim 1.** 存在  $k \in \mathbb{N}_+$ ，使得  $x_1, x_2, \dots, x_k > 0$ ,  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ 。

假设不成立，设  $k$  是最小的使  $x_k = 0$  的下标，则  $k < n$  且存在最小的  $l > k$  使  $x_l > 0$ 。定

义:

$$y_i = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq k-1 \\ x_{i+k-l}, & k \leq i \leq n+k-l \\ 0, & n+k-l+1 \leq i \leq n \end{cases},$$

那么  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} t^{i-j} x_i x_j < \sum_{1 \leq i < j \leq n} t^{i-j} y_i y_j$ .

这与  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  最大性矛盾! **Claim 1** 成立.

当  $k \leq 3$  时, 已成立. 对于接下来的讨论, 我们设  $n = k$ , 否则将转化为小于  $n$  的情况. 于是  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

**Claim 2.** 对  $1 \leq i \leq n$ ,  $2c \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j \neq i} t^{-|i-j|} x_j$ .

假设不成立, 设  $2c \sum_{k=1}^n x_k \neq \sum_{j \neq i} t^{-|i-j|} x_j$ . 记  $g(x_i) = (f(x_1, \dots, x_n) - c)(\sum_{j=1}^n x_j)^2$ , 于是对  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $g(x) \leq 0$ . 且  $g(x_i) = 0$ . 此时,  $g'(x) = \sum_{j \neq i} t^{-|i-j|} x_j - 2c \sum_{j \neq i} x_j - 2cx$ , 那么  $g'(x_i) \neq 0$ , 若不妨设  $g'(x_i) > 0$ , 则存在  $\xi \in \mathbb{R}^+$ , 使  $g(x_i + \xi) > 0$ , 矛盾! 若  $g'(x_i) < 0$ , 由  $x_i > 0$  和存在  $\xi \in \mathbb{R}^+$ ,  $x_i - \xi > 0$ , 且  $g(x_i - \xi) > 0$ , 矛盾! **Claim 2** 得证.

当  $n \geq 7$  时,  $2cn \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} t^{-|i-j|} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i \neq j} t^{-|i-j|} < \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2 \sum_{r=1}^{+\infty} t^{-r} = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \frac{2}{t-1}$ , 于是  $c < \frac{1}{n(t-1)} \leq \frac{1}{7t-7}$ . 由  $t \geq 2$  知  $7t-7 \geq 4t-1$ . 于是  $c < \frac{1}{4t-1}$ .

当  $n = 6$  时,  $12c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \sum_{i \neq j} t^{-|i-j|} < \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3})$ , 于是  $c \leq \frac{2t^2+2t+1}{12t^3}$ ,  $c \leq \frac{1}{4t-1} \Leftrightarrow (2t^2+2t+1)(4t-1) \leq 12t^3 \Leftrightarrow 8t^3+8t^2+4t-2t^2-2t-1 \leq 12t^3 \Leftrightarrow 6t^2+2t-1 \leq 4t^3$ ,  $\text{LHS} \leq 8t^2 \leq 4t^3$  成立.

当  $n = 5$  时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}x_2 + \frac{1}{t^2}x_3 + \frac{1}{t^3}x_4 + \frac{1}{t^4}x_5 &= \frac{1}{t}x_4 + \frac{1}{t^2}x_3 + \frac{1}{t^3}x_2 + \frac{1}{t^4}x_1 \\ &= \frac{1}{t}x_1 + \frac{1}{t}x_3 + \frac{1}{t^2}x_4 + \frac{1}{t^3}x_5 = \frac{1}{t}x_5 + \frac{1}{t}x_3 + \frac{1}{t^2}x_2 + \frac{1}{t^3}x_1 = \frac{1}{t^2}x_5 + \frac{1}{t^2}x_1 + \frac{1}{t}x_3 + \frac{1}{t}x_2, \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{t}(x_2 - x_4) + \frac{1}{t^3}(x_2 - x_4) + \frac{1}{t^4}(x_5 - x_1) = 0 \\ (\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3})(x_1 - x_5) + \frac{1}{t^2}(x_2 - x_4) = 0 \end{cases}, \\ &\Rightarrow \begin{cases} (t^3 + t)(x_2 - x_4) = (x_1 - x_5) \\ t(x_2 - x_4) = (t^3 + 1)(x_1 - x_5) \end{cases}, \end{aligned}$$

那么  $x_2 = x_4$ ,  $x_1 = x_5$ ,  $x_1 = x_5 = a$ ,  $x_2 = x_4 = b$ ,  $x_3 = c$ .

不妨  $c = 1$ , 于是  $\frac{1}{t^4}a + (\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3})b + \frac{1}{t^2} = (\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3})a + \frac{1}{t^2}b + \frac{1}{t^4} = \frac{2}{t^2}a + \frac{2}{t^3}b$ ,

那么  $a + (t^3 + t)b + t^2 = (t^3 + t)a + t^2b + t^3 = 2t^2a + 2t^3b$

$$\Rightarrow (t^3 - t^2 + t)b = (t^3 + t - 1)a + t^3 - t^2 \Rightarrow b = \frac{t^3 + t - 1}{t^3 - t^2 + t}a + \frac{t^2 - t}{t^2 - t + 1},$$



代回得:

$$(t^3 + t)a + t^2 \cdot \left( \frac{t^3 + t - 1}{t^3 - t^2 + t}a + \frac{t^2 - t}{t^2 - t + 1} \right) + t^3 = 2t^2a + 2t^3 \left( \frac{t^3 + t - 1}{t^3 - t^2 + t}a + \frac{t^2 - t}{t^2 - t + 1} \right),$$

$$\Rightarrow a(2t^2 + 2t^3 \cdot \frac{t^3 + t - 1}{t^3 - t^2 + t} - t^2 \cdot \frac{t^3 + t - 1}{t^2 - t^2 + t} - t^3 - t) + (\frac{t^2 - t}{t^2 - t + 1}(2t^3 - t^2) - t^3) = 0. \quad ①$$

此时, 有:

$$a > 0, \frac{t^2 - t}{t^2 - t + 1}(2t^3 - t^2) - t^3 = \frac{t^3((t-1)(2t-1) - (t^2 - t + 1))}{t^2 - t + 1} = \frac{t^3(t-2)}{t^2 - t + 1} \geq 0.$$

但是由于

$$2t^2 + 2t^3 \cdot \frac{t^3 + t - 1}{t^2 - t^2 + t} - t^2 \cdot \frac{t^3 + t - 1}{t^3 - t^2 + t} - t^3 - t$$

$$= \frac{t}{t^2 - t + 1}((2t^2 - t)(t^2 + 1 - \frac{1}{t}) - (t^2 + t + 1)(t^2 - 2t + 1)) > 0,$$

于是①式左边大于0, 矛盾!

当 $n = 4$ 时:

$$\frac{1}{t}x_2 + \frac{1}{t^2}x_3 + \frac{1}{t^3}x_4 = \frac{1}{t}x_3 + \frac{1}{t^2}x_2 + \frac{1}{t^3}x_1 = \frac{1}{t}x_1 + \frac{1}{t^3}x_3 + \frac{1}{t^2}x_4 = \frac{1}{t}x_4 + \frac{1}{t^2}x_2 + \frac{1}{t^3}x_1,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})(x_2 - x_3) = \frac{1}{t^3}(x_1 - x_4) \\ (\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3})(x_1 - x_4) = \frac{1}{t}(x_2 - x_3) \end{cases},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (t^2 - t)(x_2 - x_3) = (x_1 - x_4) \\ t(x_2 - x_3) = (t - 1)(x_1 - x_4) \end{cases},$$

若 $\frac{t^2-t}{t} = \frac{t}{t-1} \Rightarrow$  (这一步是因为 $t \geq 2$ ) $t = 2$ , 则当 $t > 2$ 时,  $x_2 = x_3, x_1 = x_4$ .

**Case1:**  $t > 2$ .

$$\frac{1}{t}x_1x_2 + \frac{1}{t}x_2x_3 + \frac{1}{t}x_3x_4 + \frac{1}{t^2}x_1x_3 + \frac{1}{t^2}x_2x_4 + \frac{1}{t^3}x_1x_4$$

$$= \frac{2}{t}x_1x_2 + \frac{1}{t}x_2^2 + \frac{2}{t^2}x_1x_2 + \frac{1}{t^3}x_1^2 = \frac{1}{t}x_2^2 + \frac{1}{t^3}x_1^2 + 2(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2})x_1x_2,$$

不妨 $x_1 + x_2 = 1$ , 那么上式等于

$$= \frac{1}{t}(1 - x_1)^2 + \frac{1}{t^3}x_1^2 + 2(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2})x_1(1 - x_1) = \frac{1}{t}(1 - 2x_1 + x_1^2) + \frac{1}{t^3}x_1^2$$

$$= x_1^2(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} - 2(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2})) + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}x_1 + 2(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2})(x_1 - x_1^2)$$

$$= \frac{2}{t^2}x_1 - x_1^2\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) + \frac{1}{t} \leq \frac{1}{4\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t^3 + 2t^2 - t} + \frac{1}{t},$$

由于

$$\frac{1}{t^3 + 2t^2 - t} + \frac{1}{t} \leq \frac{4}{4t - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{t^3 + 2t^2 - t} \leq \frac{1}{t(4t - 1)} \Leftrightarrow 4t - 1 \leq t^2 + 2t - 1 \Leftrightarrow t(t - 2) \geq 0,$$

那么此时成立.

**Case 2:**  $t = 2$ . 要证明

$$\frac{1}{7}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geq \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3x_4 + \frac{1}{4}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_2x_4 + \frac{1}{8}x_1x_4,$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3x_4 + \frac{1}{4}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_2x_4 + \frac{9}{8}x_1x_4 \geq 0,$$

记  $\theta = \arccos(-\frac{3}{4})$ , 注意到等价于  $|x_1 + e^{i\theta}x_2 + e^{2i\theta}x_3 + e^{3i\theta}x_4|^2 \geq 0$  成立.

引理得证! ■

接下来我们解决原题.

**解** 一方面, 我们取  $n = 7k$ ,  $x_i = 1 + i\varepsilon (1 \leq i \leq 2k)$ ,  $x_i = 2 + i\varepsilon' (2k + 1 \leq i \leq 5k)$ ,  $x_i = 4 + i\varepsilon'' (5k + 1 \leq i \leq 7k)$ , 其中  $\varepsilon > n\varepsilon' > n^2\varepsilon''$  (保证不出现两数比为整数), 令  $n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ , 得到  $c \geq \frac{9}{14}$  (这个构造来源于引理的取等)

另一方面, 下证  $c = \frac{9}{14}$  可以. 设  $x_i = 2^{a_i} (1 \leq i \leq n)$ ,  $f(x) = 2^x + 2^{-x} - 1 (0 \leq x < 1)$ ,  $f(x) = 1 + 2^{-x} (x > 1)$ , 那么只需证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} f(|a_i - a_j|) \leq \frac{9}{14}n^2.$$

我们把所有差为整数的数连边, 得到图  $G$ , 化为若干个连通分支. 此时, 如果有不少于 2 个连通分支, 取出一个连通分支, 每个数都加  $t$ , 那么原式关于  $t$  在连续区间内部是凸函数  $G(t)$ , 考虑 0 所在的连续区间  $[r, s]$ , 若为有限区间, 当  $t$  取到某个端点时更大, 此时该连通分支与某个连通分支合并. (因为此时该连通分支与某个连通分支中的一个数差为 0 或 1)

若为无限区间, 由凸性,  $G$  要么在 0 左边单调递减, 要么在 0 右边单调递增, 不妨在 0 右边单调递增 (因为  $G'(x)$  单调), 如果  $s < +\infty$ , 类似将  $t$  调到  $s$  即可; 如果 0 右边是  $[0, +\infty)$ , 一定存在一个  $t \in (0, 1)$ , 与另一个连通分支中的数差为整数, 取这个  $t$  即可.

这样, 每一次调整后, 连通分支个数严格减去 1, 最终变为连通图. 于是我们可以设  $a_i$  均为整数. 再设  $a_i$  全为正整数, 设  $a_j$  取到  $s_i$  个  $i$ , 并设  $s_i$  中最大非 0 数下标为  $k$ , 那么问题变为:


$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (s_i^2 - s_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} s_i s_j (1 + 2^{i-j}) \leq \frac{9}{14}n^2.$$

设  $y_i = \frac{s_i}{n} (1 \leq i \leq n)$ , 则  $\sum_{i=1}^k y_i = 1$ , 只需证


$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq k} y_i y_j (1 + 2^{i-j}) = \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2^{i-j} y_i y_j \leq \frac{9}{14},$$

由引理即证, 命题得证. ■


## 练习 2.4

 **练习 2.4.1** 求最小的实数  $c$ , 对任意正整数  $n \geq 3$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 存在整数  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得:

$$\sum_{i=1}^n \{ka_i\}(1 - \{ka_i\}) \leq c(n+1).$$

 **练习 2.4.2** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为实数, 求证:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{\|x_i - x_j\|} \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{\|x_i - x_j + \frac{1}{2}\|}.$$

 **练习 2.4.3** 求最大的实数  $c$ , 对任意整数  $s \geq 2$  以及与  $s$  互素的整数  $m, n$ , 均有:

$$\sum_{j=1}^{s-1} \left\{ \frac{jm}{s} \right\} \left( 1 - \left\{ \frac{jm}{s} \right\} \right) \left\{ \frac{jn}{s} \right\} \left( 1 - \left\{ \frac{jn}{s} \right\} \right) \geq cs.$$

## 第3章 min, max与绝对值问题

这是组合风格不等式中较为有趣的一类问题. min, max刻画最小数, 最大数; 绝对值刻画数之间的距离, 很多时候会涉及到一些组合性质. 我们从如下几方面介绍:

### 内容提要

绝对值问题

刻画极值

整体性质

中位数

### 3.1 绝对值问题

本节我们主要讲解绝对值问题, 涉及到的方法较多; 不过主要停留在绝对值独有的属性, 一些与后面章节相关的会放在后面.

绝对值问题最经典的做法是使用绝对值不等式:

$$|x| + |y| \geq |x + y|, \quad |x| + |y| \geq |x - y|.$$

这个对复数模长也成立.

我们先看一些使用绝对值不等式配凑的题目. 前几个问题我们会将配凑的思维过程详细给出.

#### 例题 3.1.1

对正整数  $n \geq 2$ , 对  $n$  个实数(复数)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 证明:

$$(n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2 \leq \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right)^2.$$

**分析** 我们最初在学习分组时如果没有太好的想法, 就先从小情况试试吧. 考虑三个变量  $a, b, c$ , 要证

$$\sum |a - b|^2 \leq 2 \sum |a - b| |b - c|,$$

换元  $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ , 那么  $x + y + z = 0$ , 命题变为证明

$$\sum |x|^2 \leq 2 \sum |xy|.$$

现在, 左边是平方, 距离右边还比较远, 那么我们希望把平方换成交叉积的形式, 注意  $|x^2| = |xy + xz|$ , 这样, 就有:

$$\sum |x|^2 = \sum (|xy| + |xz|) = 2 \sum |xy|.$$

这样, 我们完成了3的证明, 我们看看有没有 $n$ 时证明可以借鉴的, 把元换回去, 可以看到这件事本质是在做:

$$2 \sum |a-b||b-c| = \sum |a-b|(|a-c| + |b-c|) \geq \sum |a-b|^2,$$

是固定了一个 $|a-b|$ , 然后在右边找到 $|a-b|$ 乘的项后作了一个绝对值不等式. 那么, 使用这个配凑的想法, 我们看看 $n$ 元是否有类似的操作, 固定 $|x_k - x_l|$ , 我们希望

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \geq (n-1)|x_k - x_l|,$$

使用配凑的想法, 我们至少要将左边包含 $k, l$ 的项留下, 那么自然发现左边可以拿出这些项:

$$|x_k - x_l| + \sum_{i \neq k, l} (|x_k - x_i| + |x_i - x_l|),$$

使用绝对值不等式, 这自然大于右边, 这样就解决了这个题.

**解** 对 $1 \leq k < l \leq n$ , 有:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \geq |x_k - x_l| + \sum_{i \neq k, l} (|x_k - x_i| + |x_i - x_l|) \geq (n-1)|x_k - x_l|,$$

于是两边同乘 $|x_k - x_l|$ 并对 $1 \leq k < l \leq n$ 求和得:

$$\left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right)^2 = \sum_{1 \leq k < l \leq n} |x_k - x_l| \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \geq (n-1) \sum_{1 \leq k < l \leq n} |x_k - x_l|^2.$$

命题得证. ■

从这个问题我们看出, 使用配凑法的这些问题对实数与复数都成立, 由于做法完全相同, 我们后面对这些问题统一看复数的情况.

### 例题 3.1.2

给定正整数 $n \geq 2$ 与复数 $t$ , 求最大的实数 $c$ , 对任意 $n$ 个复数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 满足 $\sum_{k=1}^n z_k = 1$ , 均有:

$$\sum_{k=1}^n |z_k + t| \geq c \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

**分析** 首先, 我们从小情况看看取等. 比如 $a+b=1$ , 求最大的实数 $c$ , 使得 $|(t+1)a+b| + |(t+1)b+a| \geq c(|a|+|b|)$ . 设 $t+1=\lambda$ , 原问题变成 $|\lambda a+b| + |\lambda b+a| \geq c(|a|+|b|)$ . 我们来看看这个式子, 对这样的不等式, 我们通常采用模长不等式. 但是具体如何配凑, 我们直接对左边配凑并不容易看出来, 所以为了简化问题, 我们暂时先对左边换元. 设 $x=\lambda a+b, y=\lambda b+a$ , 解

出之后带回得到  $c(|\lambda x - y| + |\lambda y - x|) \leq |\lambda^2 - 1|(|x| + |y|)$ , 这样我们再看看, 右边到左边的配凑已经一目了然了, 只需  $|x| + |\lambda||y| \geq |\lambda y - x|$ ,  $|y| + |\lambda||x| \geq |\lambda x - y|$  相加就可以得到.

我们对于配凑总会有这样的疑问, 这样放缩是否是可以取等的? 我们看看, 在这里, 取等意味着  $x, \lambda y$  同向, 以及  $y, \lambda x$  同向, 如果极端一点,  $\lambda$  是一个很奇怪的复数, 那么一般这似乎难以做到, 但是不难想到如果让  $y = 0$ , 那么同向这件事是自然成立的. 于是, 我们的担心便解决了, 当左边之多只有一个非零数时, 取等是自然的.

这意味着我们发现了使用配凑方法, 如何在  $n$  时取等. 具体的, 我们让左边有  $n - 1$  个 0, 也就是可以设  $z_1 = \dots = z_{n-1} = -t$ , 那么解出  $z_n = (n - 1)t + 1$ , 这样, 得到

$$c \leq \frac{|nt + 1|}{(n - 1)|t| + |(n - 1)t + 1|}.$$

至于证明, 我们要始终心怀取等, 左边有且仅有 1 个非零数, 那么只需找一个比较合理的配凑方式, 让左边正好放到右边, 就一定可以取等. 剩下我们只需要配一配就行了.

我们希望凑出右边的形式  $|z_k|$ , 看看左边相关的项, 首先自然有  $|z_k + t|$ , 其次对其余  $|z_j + t| (j \neq k)$ , 我们为了保持对称性, 将这些剩余的全部加起来, 得到  $\sum_{j \neq k} |z_j + t| \geq |\sum_{j \neq k} z_j + (n - 1)t| = |(n - 1)t + 1 - z_k|$ , 这样, 就可以和  $|z_k + t|$  凑起来凑出  $|z_k|$  了. 我们消掉一次项, 得到:

$$|t| \sum_{j \neq k} |z_j + t| + |1 + (n - 1)t| |z_k + t| \geq |(n - 1)t^2 + t - tz_k| + |(n - 1)t^2 + t + (1 + (n - 1)t)z_k| \geq |1 + nt| |z_k|,$$

这样, 对  $1 \leq k \leq n$  求和即可得到:

$$((n - 1)|t| + |(n - 1)t + 1|) \sum_{k=1}^n |z_k + t| \geq |1 + nt| \sum_{k=1}^n |z_k|,$$

这样整理之和就正好可以得到命题.

**解** 一方面, 取  $z_1 = \dots = z_{n-1} = -t, z_n = (n - 1)t + 1$ , 得到:

$$c \leq \frac{|nt + 1|}{(n - 1)|t| + |(n - 1)t + 1|}.$$

另一方面, 下证

$$((n - 1)|t| + |(n - 1)t + 1|) \sum_{k=1}^n |z_k + t| \geq |1 + nt| \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

对  $1 \leq k \leq n$ , 由模长不等式有:

$$|t| \sum_{j \neq k} |z_j + t| + |1 + (n - 1)t| |z_k + t| \geq |(n - 1)t^2 + t - tz_k| + |(n - 1)t^2 + t + (1 + (n - 1)t)z_k| \geq |1 + nt| |z_k|,$$

再对  $1 \leq k \leq n$  求和即得.

### 例题 3.1.3

给定正整数  $n$ , 对复数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  满足  $\sum_{k=1}^n z_k = 0, \sum_{k=1}^n |z_k| = 1$ , 求

$$\sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=k}^n \frac{z_j}{j} \right|$$

的最大可能值.

在我们不使用绝对值不等式的时候, 设序是一个良法.

### 例题 3.1.4

实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ . 求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

**解** 不妨设  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ . 则有

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \sum_{i=1}^n (n+1-2i)x_i \leq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (n+1-2i) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

### 例题 3.1.5

正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ . 求证:

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{b_i}{a_i} \right\}.$$

**分析** 我们可以考虑不等式右边被固定的时候, 左边的最大值. 当各个  $a_i/b_i$  被固定的时候,  $|a_i - b_i|$  就与  $a_i$  (或者  $b_i$ ) 成正比, 那么左边就可以看为各个  $a_i$  (或  $b_i$ ) 的带系数的和, 可以直接放缩. 具体如下:

**解** 不妨设

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq \dots \geq \frac{a_t}{b_t} \geq 1 > \frac{a_{t+1}}{b_{t+1}} \geq \dots \geq \frac{a_n}{b_n}.$$

则对于  $1 \leq i \leq t$ , 有

$$|a_i - b_i| = a_i - b_i = \left(1 - \frac{b_i}{a_i}\right) a_i \leq \left(1 - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{b_i}{a_i} \right\}\right) a_i.$$

对于  $t+1 \leq i \leq n$ , 有

$$|a_i - b_i| = b_i - a_i = \left(1 - \frac{a_i}{b_i}\right) b_i \leq \left(1 - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}\right) b_i.$$

相加, 就会有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| &\leq \left(1 - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}\right) \sum_{i=1}^t a_i + \left(1 - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}\right) \sum_{i=t+1}^n b_i \\ &\leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\} - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}. \end{aligned}$$

我们再给出一种证明方法.

解 由

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i - 2 \sum_{i=1}^n \min\{a_i, b_i\}$$

知只需要证明

$$2 \sum_{i=1}^n \min\{a_i, b_i\} \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\} + \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}.$$

而

$$\sum_{i=1}^n \min\{a_i, b_i\} = \sum_{i=1}^n a_i \min\left\{1, \frac{b_i}{a_i}\right\} \geq \sum_{i=1}^n a_i \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{b_i}{a_i}\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}.$$

同理有

$$\sum_{i=1}^n \min\{a_i, b_i\} \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{a_i}{b_i}\right\}.$$

综上所述, 命题得证.

### 例题 3.1.6

$n^2$  个实数  $x_{ij} \in [0, 1]$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ). 求以下表达式的最大值:

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{ji}) \right|.$$

**分析** 为了直观, 将这  $n^2$  个实数填入一个  $n \times n$  的方格表中, 其中  $x_{ij}$  填入  $i$  行  $j$  列的格子中. 如果记  $R_i$ ,  $C_i$  分别为行和与列和, 即

$$R_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad C_j = \sum_{i=1}^n x_{ij},$$



则题目要求的表达式即为  $\sum_{i=1}^n |R_i - C_i|$ .

由算两次知  $\sum_{i=1}^n R_i = \sum_{j=1}^n C_j$ . 并且我们可以任意交换某两行或某两列, 而不改变题目要求的表达式的值. 因此, 我们可以假设  $R_1 \leq R_2 \leq \cdots \leq R_n$ , 同时  $C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_n$  (这是在仅改变各个  $R_i$  与  $C_i$  的情况下能取到的最大值).

因此可以设  $t$  是满足

$$C_1 - R_1 \geq C_2 - R_2 \geq \cdots \geq C_t - R_t \geq 0 > C_{t+1} - R_{t+1} \cdots \geq C_n - R_n$$

的唯一整数. 那么原式就可以变形为 (注意  $\sum_{i=1}^n R_i = \sum_{j=1}^n C_j$ )

$$\sum_{i=1}^n |R_i - C_i| = \sum_{i=1}^t (C_i - R_i) + \sum_{i=t+1}^n (R_i - C_i) = 2 \sum_{i=1}^t (C_i - R_i).$$

从直观来看, 我们为了让  $\sum_{i=1}^t C_i$  取到最大值, 那么应该让每行的数都尽可能“集中”在前面 (在这里“前”指的是下标小的那一端). 对于每一行, 只有前  $t$  个格子中的数对于  $\sum_{i=1}^t C_i$  有贡献, 因此, 对于  $R_i \leq t$ , 这一行最多贡献  $R_i$ ; 而对于  $R_i > t$ , 这一行最多贡献  $t$ . 因此我们从直观上获得了一个估计:

$$\sum_{i=1}^t C_i \leq \sum_{i=1}^n \min \{R_i, t\}.$$

剩下的事情就是代数放缩, 并不困难.

**解** 设  $R_i, C_i, t$  如上. 我们先证明:

$$\sum_{i=1}^t C_i \leq \sum_{i=1}^n \min \{R_i, t\}.$$

这是因为, 对于  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$ , 由于  $x_{ij} \in [0, 1]$ , 所以以下两式显然成立:

$$\sum_{j=1}^t x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} = R_i, \quad \sum_{j=1}^t x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t 1 = t.$$

因此, 有

$$\sum_{i=1}^t C_i = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t x_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \min \{R_i, t\}.$$

接下来, 由  $\sum_{i=1}^n R_i = \sum_{j=1}^n C_j$  知道

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |R_i - C_i| &= \sum_{i=1}^t (C_i - R_i) + \sum_{i=t+1}^n (R_i - C_i) = 2 \sum_{i=1}^t (C_i - R_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^t C_i - 2 \sum_{i=1}^t R_i \leq 2 \sum_{i=1}^n \min\{R_i, t\} - 2 \sum_{i=1}^t R_i \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^t R_i + 2 \sum_{i=t+1}^n \min\{R_i, t\} - 2 \sum_{i=1}^t R_i \\ &= 2 \sum_{i=t+1}^n \min\{R_i, t\} \leq 2(n-t)t \leq 2 \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.\end{aligned}$$

根据放缩, 不难得出一个取等条件为

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & t+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t; \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases}$$

注 还有一个与这道题类似的题目, 但是更困难:

给定正整数  $n$  与  $m \in [n, n^2]$ . 对实数  $x_{ij} \in [0, 1]$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) 满足  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} = m$ , 求

$$\sum_{i=1}^n \min \left\{ \sum_{j=1}^n x_{ij}, \sum_{j=1}^n x_{ji} \right\}$$

的取值范围.

下面这个题目是原问题的背景:

在一个  $n \times n$  的方格表中, 每个格子被染为黑色或白色. 记第  $i$  行有  $a_i$  个黑格, 第  $j$  列有  $b_j$  个黑格. 求  $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$  的最大值, 并求取等条件的个数.

### 例题 3.1.7

设正整数  $a_1, a_2, \dots, a_{31}, b_1, b_2, \dots, b_{31}$  满足  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{31} \leq 2015, 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{31} \leq 2015$ , 且  $\sum_{i=1}^{31} a_i = \sum_{i=1}^{31} b_i$ . 求

$$\sum_{i=1}^{31} |a_i - b_i|$$

的最大值.

**分析** 先来看一下取等. 直观上, 我们希望  $\{a_i\}$  和  $\{b_i\}$  一个较为分散, 而另一个较为紧密. 可以取

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{15} = 15, a_{16} = 2000, a_{17} = 2001, \dots, a_{31} = 2015,$$

而 $\{b_i\}$ 取为等差数列. 此时不难计算出原式不大于30720.

为了证明此为最大值, 可以考虑“分离正负”, 即分别考虑 $a_i \geq b_i$ 与 $a_i < b_i$ 的情况.

**解** 记 $A = \{1 \leq i \leq 31 : a_i \geq b_i\}$ ,  $B = \{1 \leq i \leq 31 : a_i < b_i\}$ ,  $S_1 = \sum_{i \in A} |a_i - b_i|$ .  
 $S_2 = \sum_{i \in B} |a_i - b_i|$ . 则原式为 $S_1 + S_2$ .

由 $\sum_{i=1}^{31} a_i = \sum_{i=1}^{31} b_i$ 知 $\sum_{i \in A} (a_i - b_i) = \sum_{i \in B} (b_i - a_i)$ , 即 $S_1 = S_2$ .

由平均值原理, 知存在 $i \in A, j \in B$  (不妨设 $i > j$ ), 使得

$$a_i - b_i \leq \frac{S_1}{|A|}, \quad b_j - a_j \leq \frac{S_2}{|B|}.$$

因此,

$$\frac{S_1}{|A|} + \frac{S_2}{|B|} \leq (a_i - a_j) - (b_i - b_j) \leq (2015 - 31 + i - j) - (i - j) = 1984.$$

由 $S_1 = S_2$ 知

$$S_1 = S_2 \leq \frac{1984|A||B|}{|A| + |B|} \leq \frac{1984 \cdot 15 \cdot 16}{31} = 15360.$$

因此, 原式 $S_1 + S_2 \leq 30720$ . ■