第一届西西群联赛模拟一试答卷

La Campanella

2023 年 8 月 22 日

1 填空题

1. 39

2. $\left(-\frac{5}{4},-1\right]$

3. $\begin{cases} \{0\}, & i=j; \\ \{\pi/3\}, & |i-j|=1; \\ \{0,2\pi/3\}, & 2 \mid |i-j|, |i-j|>1; \\ \{\pi/3,\pi\}, & 2\nmid |i-j|, |i-j|>1. \end{cases}$

4. $\sqrt{14}$

5. 18

6. $\sqrt{2}-1$

2 解答题

9.解: 由射影定理与正弦定理,

$$b=a\cos C+c\cos A,\ a\sin C=c\sin A.$$

代入原式并整理, 得

$$\sqrt{5}\sin A=\cos A+1.$$

等式两侧平方并利用$\sin^2 A=1-\cos^2 A$, 得到

$$(\cos A+1)(3\cos A-2)=0.$$

解得$\cos A = 2/3$. 由余弦定理, 得

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2}{3}.$$

即

$$a^2 = 3b^2+3c^2-4bc.$$

设$b/c = k \in (0,+\infty)$, 得

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{bc}{3b^2+3c^2-4bc} = \frac{k}{3k^2+3-4k} = \left(3k+\frac{3}{k}-4\right)^{-1}.$$

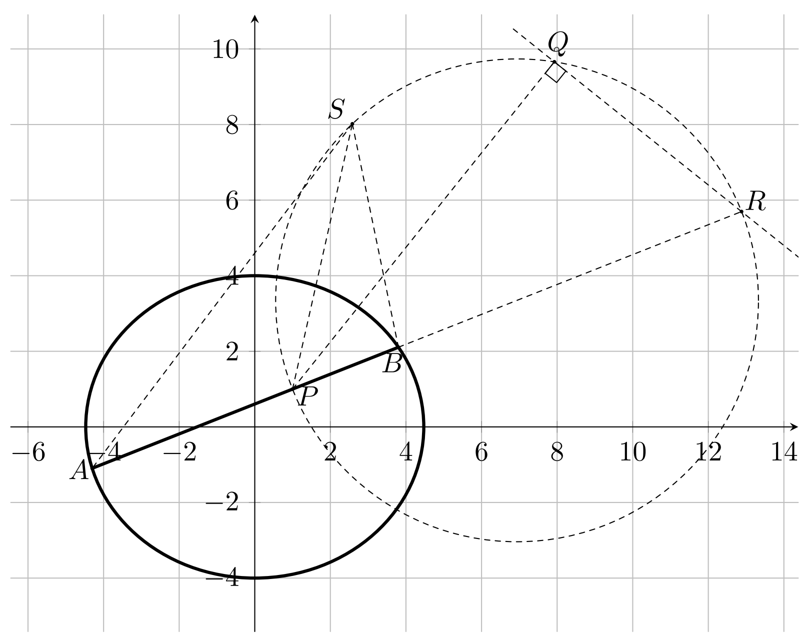
而对于$k \in (0,+\infty)$, 有

$$3k+\frac{3}{k} \in [6,+\infty)\,,$$

故

$$\left(3k+\frac{3}{k}-4\right)^{-1} \in \left(0,\frac{1}{2}\right].$$

11. 解: 存在. 下证明: 满足要求的点仅有$Q:(325/41, 396/41)$.



如图, 在直线AB上作点R, 满足

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RB}.$$

设$\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$, 则有$\overrightarrow{RA}-\lambda\overrightarrow{RB}=\overrightarrow{0}$. 则

$$\left(\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PA}\right)-\lambda\left(\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PB}\right)=\overrightarrow{0}.$$

化简, 得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{2\overrightarrow{AP}}{\lambda-1.} \tag{1}$$

设$l_{AB}:y=k(x-1)+1$. 与椭圆方程联立, 得

$$\left(4+5k^2\right)x^2+10k(1-k)x+5(1k)^2=0,$$

得

$$x_A=\frac{-5k+5k^2-2\sqrt{5}\sqrt{19k^2+2k+15}}{5k^2+4},x_B=\frac{-5k+5k^2+2\sqrt{5}\sqrt{19k^2+2k+15}}{5k^2+4}.$$

则

$$\lambda=-\frac{x_A-1}{x_B-1}=\frac{-2\sqrt{95k^2+10k+75}-5k-4}{2\sqrt{95k^2+10k+75}-5k-4}.$$

结合(1)式, 可得

$$x_R=x_P+\frac{2x_P-2x_A}{\lambda-1}=\frac{75+5k}{4+5k},$$
$$y_R=k(x_R-1)+1=\frac{76k+4}{4+5k}.$$

不难发现

$$4x_R+5y_R=80.$$

即R的轨迹为$4x+5y=80$.

作以PR为直径的圆, 并设在l_{AB}转动时所有这样的圆的集合为K. 则由阿氏圆, 此圆即为所有满足$\angle ASP=\angle BSP$的S的轨迹. 故满足题目的Q应当在K中的每一个圆上.

设R在直线$4x+5y=80$上的投影为Q', 则K中的每个圆均经过Q'. 同时每个圆经过P, 而两个圆不可能有三个交点, 故至多存在两个点, 使K中每个圆均经过此两点. 故这样的Q是唯一的.

不难算出P在$4x+5y=80$的投影为$Q:(325/41,396/41)$.