每日一题(8.1)答案

选题:门宇翎、李东宸

答案制作:程昊一

2022 年 2 月 27 日

1.阅读材料:

对于形如$\sqrt{m\pm\sqrt{n}}$的复合二次根式, 我们可以采取以下的方式化简:

(1) 找到合适的a和b, 使得$a+b=m$, $4ab=n$.

(2) 将原式做变形:

$$\begin{aligned}\sqrt{m\pm\sqrt{n}}&=\sqrt{a+b\pm\sqrt{4ab}}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\pm2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}\\&=\sqrt{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2}\\&=\left|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right|.\end{aligned}$$

(3) 即得答案:$\sqrt{m\pm\sqrt{n}}=\left|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right|$.

化简:

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;

(2) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$.

(李东宸供题)

分析 找到合适的a和b, 使得满足材料(见“每日一题(8.1)”)中的形式.

解 (1)

$$\begin{aligned}\sqrt{5+2\sqrt{6}}&=\sqrt{2+3+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\\&=\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|\\&=\sqrt{2}+\sqrt{3};\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2\sqrt{12}} &= \sqrt{3+4-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}\\ &= \left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right|\\ &= 2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

注 一般来说, 通过试算少量的整数a和b, 就能找到合适的数. 如果原题($\sqrt{m+\sqrt{n}}$)中的m和n过大, 可以采取以下的方式算出a和b:

我们要通过关于a和b的方程组

$$\begin{cases} a+b=m & (1)\\ ab=\dfrac{n}{4} & (2)\end{cases}$$

来计算a和b.

由韦达定理,易知a和b为下列一元二次方程的实根:

$$x^2-mx+\frac{n}{4}=0.$$

这是因为原方程等价于

$$x^2-(a+b)x+ab=0,$$

即

$$(x-a)(x-b)=0.$$

a和b显然是它的两个实根.

2.证明: 若a, b是大于1的正整数, 则 a^4+4b^4是合数.
(门宇翎供题)

分析 若想要证明一个代数式的值是合数, 可以尝试因式分解, 然后分别证明每一个部分都大于1.

解

$$\begin{aligned}a^4+4b^4 &= a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2\\ &= (a^2+2b^2)^2-(2ab)^2\\ &= (a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab).\end{aligned}$$

其中a^2+2b^2+2ab显然大于1. 下面证明a^2+2b^2-2ab也大于1.

因为

$$
\begin{aligned}
& a^2+2b^2-2ab \\
=& a^2-2ab+b^2+b^2 \\
=& (a-b)^2+b^2 \\
\geq& 0^2+2^2 \\
=& 4,
\end{aligned}
$$

所以$a^2+2b^2-2ab>1$.

所以原命题成立.