半角公式与一元二次方程

程昊一

2022 年 7 月 16 日

第一部分

知 识 讲 解

目录

一元二次方程

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

后文为了方便讨论，我们将等式两端同时除以a，记$p = b/a$，$q = c/a$，于是得到

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

分步探索

假设我们的方程(1)有两个根s与t, 我们有

$$\begin{cases} s^2+ps+q=0 \\ t^2+pt+q=0 \end{cases}$$

两式相减并稍作整理, 得到

$$(s-t)(s+t+p)=0.$$

考察$-(p+s)$. 代入方程(1), 发现方程也成立. 那么, 无论如何, $-(p+s)$也是方程的根.
而且, 容易证明(反证法), 方程(1)至多有两个根(重根不算做多个). 那么我们有理由相信:

$$t=-(p+s).$$

于是我们得到了一个结论:

命题1

对于方程(1), 若s为其根, 则

$$t=-(p+s)$$

也为其根, 并且至多有两个根.

证明.

$\square$

什么时候两根相等呢？我们列方程$s = t$，即

$$s = -(p + s),$$

得到

$$s = t = -\frac{p}{2}.$$

代入原方程，得到

$$p^2 = 4q.$$

我们又得到以下结论：

命题2

方程(1)的两根相等的充分必要条件为

$$p^2 = 4q.$$

由命题1, 我们可以得到

$$s + t = -p. \tag{2}$$

即两根之和为$-p$. 我们想解出来s与t, 就要再找到一个s与t的关系.
回到开始的方程组

$$\begin{cases} s^2 + ps + q = 0 \\ t^2 + pt + q = 0 \end{cases}$$

两式相加, 得到

$$s^2 + t^2 - p^2 + 2q = 0.$$

即

$$s^2 + t^2 = p^2 - 2q. \tag{3}$$

于是我们得到了s与t的两个关系: (2)与(3).知二求二即可, 具体过程留给大家作为习题.
(提示: 可先表示出$s-t$(不妨设$s \geq t$), 结合$s+t=-p$分别解出s与t.)

求根公式

我们有如下定理:

定理: 一元二次方程的求根公式

对于方程$x^2+px+q=0$, 其两根$x_{1,2}$为

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2};$$

一般地, 对于方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$, 其两根$x_{1,2}$为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(续)

其中, p^2-4q或b^2-4ac被称作二次方程的**判别式**, 记作Δ(大写希腊字母Delta). 二次方程的根的情况与判别式有如下关系:

$$\begin{cases}\Delta<0\Rightarrow \text{原方程无实根;}\\ \Delta=0\Rightarrow \text{原方程有两个重根;}\\ \Delta>0\Rightarrow \text{原方程有两个不相等的实根.}\end{cases}$$

证明.

$\square$

Vieta定理

如果大家仔细推导过上面的“知二求二”，或直接从求根公式中观察，就会发现如下定理:

定理: Vieta定理(韦达定理)

设方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两根$x_{1,2}$，则

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}(=-p); \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}(=q). \end{cases}$$

不难，请大家自证.

*拓展: 一元n次方程的Vieta定理

事实上, 对于一般的一元n次方程, 我们也有Vieta定理. 如下:

定理: 一元n次方程的Vieta定理

设方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$有$n$个根(无论是实根还是虚根)$x_{1,2,\cdots,n}$.那么有:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n};\\ \displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2\le n}x_{k_1}x_{k_2}=\frac{a_{n-2}}{a_n};\\ \displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}=-\frac{a_{n-3}}{a_n};\\ \cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=\dfrac{(-1)^na_0}{a_n}.\end{cases}$$

*一元n次方程的Vieta定理的证明

我把证明放在这里，有兴趣的同学不妨一览.
将原方程的左端因式分解为

$$a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

展开，得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k x^k =& a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) \\
=& a_n x^n - a_n \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) x^{n-1} \\
& + a_n \left(\sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} x_{k_1} x_{k_2} \right) x^{n-2} \\
& - a_n \left(\sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 \le n} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \right) x^{n-3} \\
& + \cdots \\
& + a_n (-1)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)
\end{aligned}
$$

对比等式两边各项的系数，得到

$$\begin{cases} a_n = a_n \\ a_{n-1} = -a_n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\ a_{n-2} = a_n\left(\sum_{1\le k_1<k_2\le n} x_{k_1}x_{k_2}\right) \\ a_{n-3} = -a_n\left(\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\right) \\ \dots \\ a_0 = a_n(-1)^n(x_1x_2\cdots x_n) \end{cases}$$

整理即证. □

正弦的半角公式

我们熟知倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

而

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

这又是一个“知二求二”问题，请大家自己完成．下面给出一个利用二次方程推出半角公式的方法($\alpha < 90°$).

分步探索

假设我们已知$\sin 2\alpha = k$, 设$\sin\alpha = x$, 则$\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$. 那么上面的倍角公式就可以写为

$$k = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

两边平方, 得到

$$k^2 = 4x^2(1-x^2).$$

做换元$t = x^2$, 则有

$$k^2 = 4t(1-t).$$

整理, 得

$$4t^2 - 4t + k^2 = 0.$$

根据之前给出的求根公式, 就有

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4k^2}}{2 \times 4}.$$

在这里, 应该舍弃正号. 稍加整理, 得

$$t = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{2},$$

即

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}}{2} \left(= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right).$$

一般性结论

我们有如下结论:

定理: 正弦的半角公式

若α为小于$180°$的角，那么有

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}\left(=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right).$$

*余弦的半角公式

因为我们有

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

所以

$$\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}&=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\\&=\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

所以我们有:

定理: 余弦的半角公式

若α为小于$180°$的角，那么有

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

第二部分

习 题 讲 解

目录

习题10.1

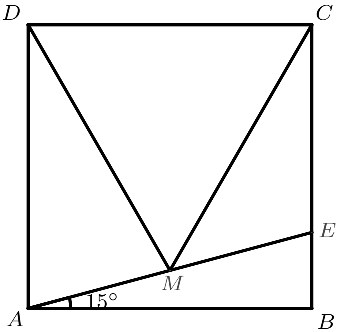
求$\sin 22.5^\circ$与$\sin 52.5^\circ$.

解:

习题10.2

如图，E在正方形$ABCD$的边BC上，$\angle EAB = 15^\circ$，M为AE中点．请观察思考$\triangle MCD$有何特点，并论证你的判断．

解:



习题10.3

如图，D为$\triangle ABC$的AB边上的点，$\angle B = 2\angle A = 72^\circ$，$\angle ADC = 108^\circ$.

(1) 求AB/BC;

(2) 利用前一结论求$\sin 18^\circ$.