第四题整理

问题:

如图1, A, B分别为直线PQ两侧的两点, C, D在直线PQ上, $\angle ACD = \alpha$, $\angle PCB = \beta$, α, β均为锐角. 求证:

$$\frac{AC}{\cos\alpha} + \frac{BC}{\cos\beta} < \frac{AD}{\cos\alpha} + \frac{BD}{\cos\beta}.$$

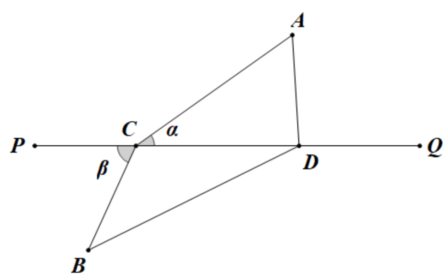

图 1

解法1(标准答案):

如图2, 作$AE \perp AC$交PQ于E, 过B作$BG \perp BC$交PQ于G. 过D作$DF, DH \perp AE, BG$于F, H. 则$AD > FD$, $BD > HD$.

则有

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\cos\alpha} + \frac{BC}{\cos\beta} = CE + GC = DE + DG = \frac{DF}{\cos\alpha} + \frac{DH}{\cos\beta} \\ < \frac{AD}{\cos\alpha} + \frac{BD}{\cos\beta}.\end{aligned}$$

解法2(程昊一):

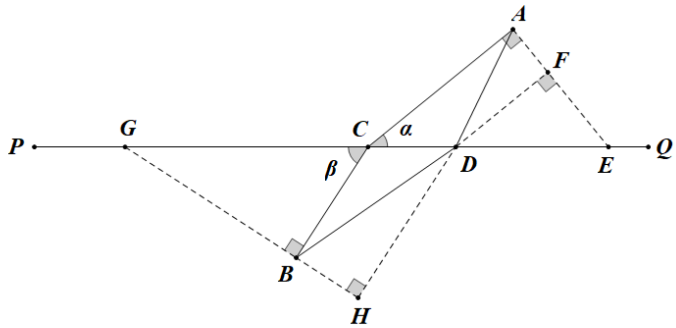

图 2

如图3, 过D作$DS, DT \perp AC, BC$于S, T. 则有$AD > AS$, $BD > BT$. 又因为α, β均为锐角, 所以$\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$. 则

$$\begin{aligned}\frac{AC-AD}{\cos\alpha} &< \frac{AC-AS}{\cos\alpha} = \frac{CS}{\cos\alpha} = CD = \frac{CT}{\cos\angle TCD} = \frac{BT-BC}{\cos\beta} \\ &< \frac{BD-BC}{\cos\beta}.\end{aligned}$$

即

$$\frac{AC}{\cos\alpha} - \frac{AD}{\cos\beta} < \frac{BD}{\cos\beta} - \frac{BC}{\cos\beta}.$$

移项, 即得结论.

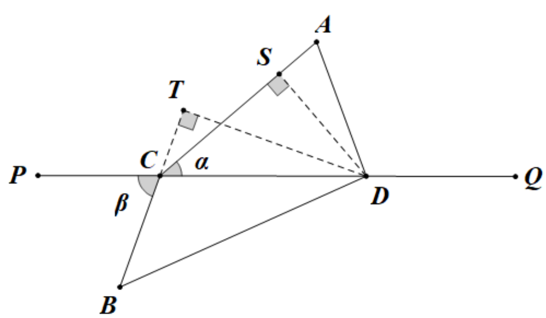

图 3

解法3(韦懿轩):

如图4, 在射线AC, BC上截取E, F, 使得$AE = AD$, $BF = BD$. 过E, F作$EG, FH \perp AC, BC$于G, H. 连接DE, DF. 不妨设D在C左侧(另一种情况可以类似讨论).

因为

$$\angle CED = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} > 90^\circ = \angle CEG,$$

所以G在D的左侧. 同理, $\angle BFD < \angle BFH$, 所以H在D的右侧. 那么有

$$CG < CH.$$

类似于解法2, 有

$$\frac{AC - AD}{\cos\alpha} = CG < CH < \frac{BD - BC}{\cos\beta}.$$

移项即得结论.

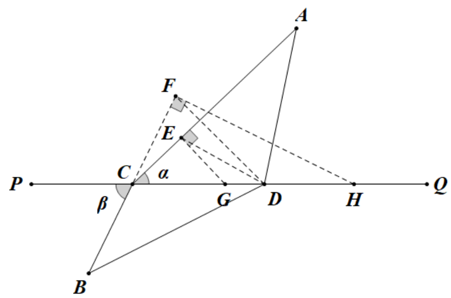

图 4

解法4(马逸凡):

如图5, 作点F, H使得$\angle ADF = \alpha$, $\angle BDH = \beta$, $\angle HBD = \angle FAD = 90^\circ$. 过$F$, H作$FE, HG \perp PQ$于E, G.

则由$\angle DAF = \angle DEF$知A, D, E, F共圆. 则

$$\begin{aligned}\angle DAE = \angle DFR = 90^\circ - \angle DFE &= 90^\circ - (\angle ADE - \angle ADF)\\ &= 90^\circ - (\angle ADE - \angle ACD) = 90^\circ - \angle CAD.\end{aligned}$$

于是

$$\angle CAE = \angle CAD + \angle DAE = 90^\circ.$$

同理, 有$\angle CBG = 90^\circ$. 于是

$$\frac{AC}{\cos\alpha} = CE,\ \frac{AD}{\cos\alpha} = DF,\ \frac{BC}{\cos\beta} = CG,\ \frac{BD}{\cos\beta} = DH.$$

则

$$\frac{AD}{\cos\alpha} + \frac{BD}{\cos\beta} = DF + DH > DG + DE = \frac{AC}{\cos\alpha} + \frac{BC}{\cos\beta}.$$

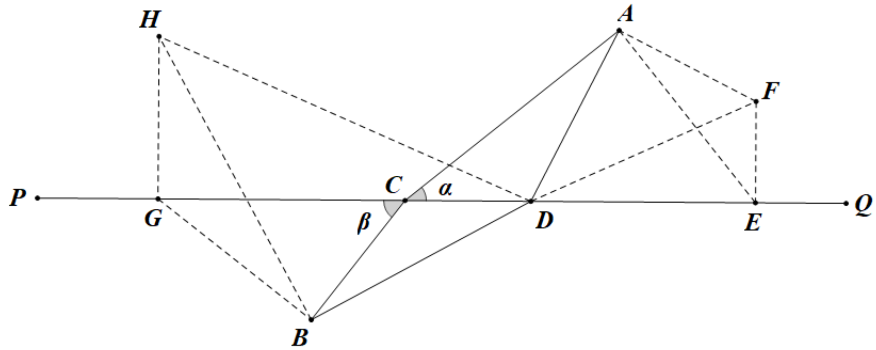

图 5

解法5(李衡岳):

如图6, 过A, B作$AS, BT \perp PQ$于S, T.

以下只讨论D在线段ST内的情况. 这是因为, 若D'在线段ST外, 不妨设在射线SQ上.

若$D'S \geq ST$, 则有$AC < AD'$, $BC < BD'$, 结合$\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$可知结论成立. 若$SD' < ST$, 则可在线段ST内取点D, 使得$DS = D'S$. 则此时$AD = AD'$, $BD' > BD$, 可化归为D在线段ST内. 因此, 只讨论D在线段ST内的情况.

设$SD = x$, $0 \leq x \leq ST$. 则可知

$$\frac{AD}{\cos\alpha} + \frac{BD}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{x^2 + AS^2}}{\cos\alpha} + \frac{\sqrt{(ST - x)^2 + BT^2}}{\cos\beta}.$$

记上式为$f(x)$. 通过并不困难的计算, 可以得到

$$f'(x) = \frac{-x}{\cos\alpha\sqrt{x^2 + AS^2}} + \frac{ST - x}{\cos\beta\sqrt{(ST - x)^2 + BT^2}}.$$

下面求$f(x)$的极值点. 令$f'(x) = 0$, 移项并平方, 有

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha(x^2 + AS^2)} = \frac{(ST - x)^2}{\cos^2\beta\left[(ST - x)^2 + BT^2\right]}.$$

而

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\cos^2\alpha(x^2 + AS^2)} &= \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\cos^2\alpha x^2 + \cos^2\alpha AS^2\right) - AS^2}{\cos^2\alpha(x^2 + AS^2)} \\ &= \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{AS^2}{\cos^2\alpha(x^2 + AS^2)}.\end{aligned}$$

由于$0 \le x \le ST$, 所以等式左边单调递增. 利用完全相同的方法可以说明, 等式右边单调递减. 则此方程有唯一的实根. 而将$x = SC$代入, 可以计算出等式左右两端相等, 即$x = SC$为方程的实根.

即, 方程有唯一的实根$x = SC$. 所以, $f(x)$有唯一的极值点$x = SC$. 而将$x = 0$代入, 有

$$f(0) > f(SC),$$

即$x = SC$为$f(x)$的极小值点. 则, 对于任意的$x \neq CS$, $0 \le x \le ST$, 有

$$f(CS) < f(x).$$

结合前面的讨论, 可知结论成立.

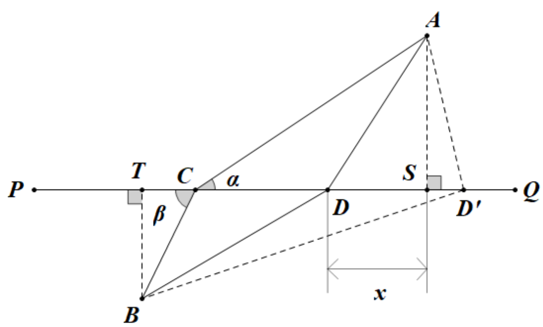

图 6

解法6(非严格):

设想PQ两侧为不同的介质, 其光速分别为c_1与c_2. 光线从A出发, 经过C后折射到B, 如图7. 设入射角为i, 折射角为γ, 由光的折射定律, 有

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

设

$$k = \frac{c_1}{\cos \alpha} = \frac{c_2}{\cos \beta}.$$

则

$$\frac{AC}{c_1} + \frac{CB}{c_2} = \frac{1}{k}\left(\frac{AC}{\cos \alpha} + \frac{CB}{\cos \beta}\right)$$

为光经过折线ACB所需时间. 同理,

$$\frac{1}{k}\left(\frac{AD}{\cos \alpha} + \frac{DB}{\cos \beta}\right)$$

为光从A到D, 再从D到B所需时间. 注意, 折线ADB并不是一条光路, 因为这违背了光的折射定律.

而根据费马原理, 光所经过的路线所花费的时间为稳定点[1], 在这里是极小值. 所以, 光从A到D, 再从D到B所需时间一定大于光经过折线ACB所需时间. 因此

$$\frac{1}{k}\left(\frac{AC}{\cos\alpha}+\frac{CB}{\cos\beta}\right)<\frac{1}{k}\left(\frac{AD}{\cos\alpha}+\frac{DB}{\cos\beta}\right).$$

而$1/k>0$, 消去$1/k$即得结论.

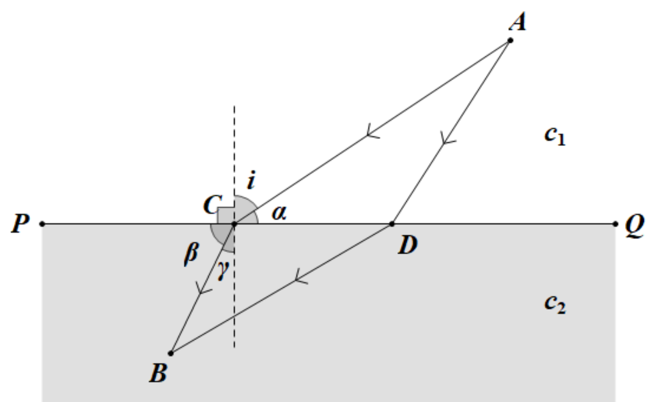

图 7

[1]指一阶导数为0的点.