USAMO 2025 解答笔记

2025 年 10 月 25 日

摘要

本文是 2025 年美国数学奥林匹克 (USAMO) 解答的汇编。解答思路融合了我个人的工作、竞赛组委会提供的解答以及社区发现的解答。然而，所有文字均由我整理维护。

这些笔记往往比组委会的"官方"解答更进阶和简练。特别是，如果某个定理或技巧对初学者而言未知但仍被视为"标准"，我通常倾向于直接使用该理论，而非试图绕开或隐藏它。例如，在几何问题中我通常不加说明地使用有向角，而不是笨拙地处理构型问题。类似地，像"令 $\mathbb{R}$ 表示实数集"这样的句子通常完全省略。

欢迎指正和评论！

目录

问题

1. 固定正整数 k 和 d。证明对于所有足够大的奇数正整数 n， n^k 的 $2n$ 进制表示中的所有数字都大于 d。

2. 设 $n > k \geq 1$ 为整数。设 $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是一个 n 次多项式，无重根且 $P(0) \neq 0$。假设对于任意实数 $a_0, \ldots, a_k$，只要多项式 $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 整除 $P(x)$，则乘积 $a_0 a_1 \ldots a_k$ 为零。证明 $P(x)$ 有一个非实根。

3. 建筑师 Alice 和建造师 Bob 玩一个游戏。首先，Alice 选择平面上的两个点 P 和 Q 以及平面的一个子集 $\mathcal{S}$，并告知 Bob。接着，Bob 在平面上标记无限多个点，将每个点指定为一个城市。他不能将两个城市放置在彼此距离至多 1 个单位的位置，并且他放置的任意三个城市不能共线。最后，城市之间按如下方式修建道路：当且仅当以下条件成立时，每对城市 A, B 通过线段 AB 连接一条道路：

   > 对于每一个不同于 A 和 B 的城市 C，存在 $R \in \mathcal{S}$ 使得 $\triangle PQR$ 与 $\triangle ABC$ 或 $\triangle BAC$ 直接相似。

   如果 (i) 最终的道路允许通过有限序列的道路在任何一对城市之间旅行，并且 (ii) 没有两条道路相交，则 Alice 获胜。否则，Bob 获胜。确定哪位玩家有必胜策略，并证明之。

4. 设 H 是锐角三角形 ABC 的垂心， F 是从 C 到 AB 的高的垂足， P 是 H 关于 BC 的反射点。假设三角形 AFP 的外接圆与直线 BC 相交于两个不同的点 X 和 Y。证明 $CX = CY$。

5. 求所有满足以下条件的正整数 k：对于每个正整数 n，和式

   $$\binom{n}{0}^k + \binom{n}{1}^k + \cdots + \binom{n}{n}^k$$

   能被 $n+1$ 整除。

6. 设 m 和 n 为正整数且 $m \geq n$。有 m 个不同口味的纸杯蛋糕排成一个圆圈，以及 n 个喜欢纸杯蛋糕的人。每个人给每个纸杯蛋糕分配一个非负实数分数，取决于他们有多喜欢该纸杯蛋糕。假设对于每个人 P，都可以将 m 个纸杯蛋糕的圆圈划分成 n 组连续的纸杯蛋糕，使得每组中纸杯蛋糕的 P 的分数之和至少为 1。证明可以将这 m 个纸杯蛋糕分给这 n 个人，使得每个人 P 收到的纸杯蛋糕相对于 P 的总分数至少为 1。

1 第一天解答

1.1 USAMO 2025/1, 由 John Berman 提出

在线查看

问题陈述

固定正整数 k 和 d。证明对于所有足够大的奇数正整数 n， n^k 的 $2n$ 进制表示中的所有数字都大于 d。

这个问题实际上与数字关系不大：思路是选取任意长度 $\ell \le k$，然后看 n^k 的最右边 ℓ 位数字；也就是除以 $(2n)^\ell$ 后的余数。我们精确地计算它：

断言 1. 设 $n \ge 1$ 为奇数整数，$k \ge \ell \ge 1$ 为整数。则

$$n^k \bmod (2n)^\ell = c(k,\ell) \cdot n^\ell$$

其中 $c(k,\ell)$ 是某个满足 $1 \le c(k,\ell) \le 2^\ell - 1$ 的奇数整数。

证明. 这直接由中国剩余定理得出， $c(k,\ell)$ 是 $n^{k-\ell} \pmod{2^\ell}$ 的同余类（这是合理的，因为 n 是奇数）。 □

我们现在可以确定所需的阈值：

断言 2. 一旦 $n \ge (d+1) \cdot 2^{k-1}$，问题陈述成立。

证明. 假设 n 那么大。那么 n^k 在 $2n$ 进制下有 k 位数字。此外，对于每个 $1 \le \ell \le k$，我们有

$$c(k,\ell) \cdot n^\ell \ge (d+1) \cdot (2n)^{\ell-1}$$

因为 n 足够大；这意味着从右边数第 ℓ 位数字至少是 $d+1$。因此问题得证。 □

备注 1. 注意 $c(k,\ell)$ 是奇数本身并不重要；我们只需要 $c(k,\ell) \ge 1$。

1.2 USAMO 2025/2, 由 Carl Schildkraut 提出

在线查看

问题陈述

设 $n > k \geq 1$ 为整数。设 $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是一个 n 次多项式，无重根且 $P(0) \neq 0$。假设对于任意实数 $a_0, \ldots, a_k$，只要多项式 $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 整除 $P(x)$，则乘积 $a_0 a_1 \ldots a_k$ 为零。证明 $P(x)$ 有一个非实根。

通过考虑 P 的任意 $k+1$ 个根，我们不妨假设 $n = k+1$。假设 $P(x) = (x+r_1)\ldots(x+r_n) \in \mathbb{R}[x]$ 满足 $P(0) \neq 0$。那么问题假设是，以下 n 个多项式（次数为 $n-1$）中的每一个：

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x+r_2)(x+r_3)(x+r_4)\ldots(x+r_n) \\ P_2(x) &= (x+r_1)(x+r_3)(x+r_4)\ldots(x+r_n) \\ P_3(x) &= (x+r_1)(x+r_2)(x+r_4)\ldots(x+r_n) \\ &\vdots \\ P_n(x) &= (x+r_1)(x+r_2)(x+r_3)\ldots(x+r_{n-1}) \end{aligned}$$

至少有一个系数为零。（明确地，$P_i(x) = \frac{P(x)}{x+r_i}$。）我们将证明至少有一个 r_i 不是实数。

显然每个 P_i 的首项系数和常数项非零，并且还有 $n-2$ 个其他系数可供选择。因此根据鸽巢原理，我们可以假设，例如， P_1 和 P_2 共享一个零系数的位置，比方说 x^k 的系数，对于某个 $1 \leq k < n-1$。

断言 3. 如果 P_1 和 P_2 的 x^k 系数都为零，那么多项式

$$Q(x) = (x+r_3)(x+r_4)\ldots(x+r_n)$$

有两个连续的零系数，即 $b_k = b_{k-1} = 0$。

证明. 应用韦达公式，假设

$$Q(x) = x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \cdots + b_0.$$

（并令 $b_{n-2} = 1$。）那么 P_1 和 P_2 的 x^k 系数都为零意味着

$$r_1 b_k + b_{k-1} = r_2 b_k + b_{k-1} = 0$$

因此 $b_k = b_{k-1} = 0$（因为 r_i 非零）。 □

为了解决这个问题，我们使用：

引理 1. 如果 $F(x) \in \mathbb{R}[x]$ 是一个有两个连续零系数的多项式，那么它不可能所有根都是互异实根。

我知道这个引理有两种可能的证明（还有更多）。

使用罗尔定理的证明. 设 F 的 x^t 和 x^{t+1} 系数都为零。

假设 F 的所有根都是实根且互异。那么根据罗尔定理，F 的每一个更高阶导数也应该具有这个性质。然而，F 的 t 阶导数在 0 处有一个二重根，矛盾。 □

使用笛卡尔符号法则的证明. F 的（非零）根的数量上界为 $F(x)$ 的变号次数（对于正根）和 $F(-x)$ 的变号次数（对于负根）之和。现在考虑 F 中每一对连续的非零系数，比方说 $\star x^i$ 和 $\star x^j$，其中 $i > j$。

- 如果 $i - j = 1$，那么这个变号只会计入 $F(x)$ 或 $F(-x)$ 中的一个。
- 如果 $i - j \geq 2$，那么变号可能同时计入 $F(x)$ 和 $F(-x)$ （即计两次），但同时它们之间至少有一个零系数。

因此，如果 b 是 F 的非零系数的个数，而 z 是 F 的零系数的连续段的个数，那么实根的数量上界为

$$1 \cdot (b - 1 - z) + 2 \cdot z = b - 1 + z \leq \deg F.$$

然而，如果 F 有两个连续的零系数，那么这个不等式是严格的。 □

备注 2. 最终的这个断言显然以前在越南数学协会大学生奥林匹克竞赛的华中科技大学队选拔测试中出现过；参见 `https://aops.com/community/p33893374` 引文。

1.3 USAMO 2025/3, 由 Carl Schildkraut 提出

在线查看

问题陈述

建筑师 Alice 和建造师 Bob 玩一个游戏。首先，Alice 选择平面上的两个点 P 和 Q 以及平面的一个子集 $\mathcal{S}$，并告知 Bob。接着，Bob 在平面上标记无限多个点，将每个点指定为一个城市。他不能将两个城市放置在彼此距离至多 1 个单位的位置，并且他放置的任意三个城市不能共线。最后，城市之间按如下方式修建道路：当且仅当以下条件成立时，每对城市 A, B 通过线段 AB 连接一条道路：

> 对于每一个不同于 A 和 B 的城市 C，存在 $R \in \mathcal{S}$ 使得 $\triangle PQR$ 与 $\triangle ABC$ 或 $\triangle BAC$ 直接相似。

如果 (i) 最终的道路允许通过有限序列的道路在任何一对城市之间旅行，并且 (ii) 没有两条道路相交，则 Alice 获胜。否则，Bob 获胜。确定哪位玩家有必胜策略，并证明之。

答案是 Alice 获胜。让我们定义一个 *Bob-集* V 为平面上一个点集，其中任意三点不共线，且所有点之间的距离至少为 1。这个问题的关键在于证明以下事实。

断言 4. 给定一个 Bob-集 $V \subseteq \mathbb{R}^2$，考虑具有顶点集 V 的 *Bob*-图，定义如下：连接边 ab 当且仅当以 $\overline{ab}$ 为直径的圆盘内部或边界上不包含 V 的任何其他点。则 Bob-图是 (i) 连通的，并且 (ii) 可平面的。

证明这个断言就表明 Alice 获胜，因为 Alice 可以指定 $\mathcal{S}$ 为以 PQ 为直径的圆盘之外的点集。

证明每个 Bob-图都是连通的. 假设图不连通，用反证法。设 p 和 q 是位于不同连通分支的两个点。由于 pq 不是边，存在第三个点 r 位于以 $\overline{pq}$ 为直径的圆盘内部。

因此，r 与 p 或 q 中至少一个位于不同的连通分支—— 假设是点 p。然后我们在以 $\overline{pr}$ 为直径的圆盘上重复相同的论证，找到一个新的点 s，与 p 或 r 都不相邻。

通过这种方式，我们生成一个距离的无限序列 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ 对应于非边的距离。根据"勾股定理"（或者更确切地说是其相关不等式），我们有

$$\delta_i^2 \le \delta_{i-1}^2 - 1$$

这对于大的 i 最终会产生矛盾，因为我们得到 $0 \le \delta_i^2 \le \delta_1^2 - (i-1)$。 □

证明每个 Bob-图都是可平面的. 假设边 ac 和 bd 相交，用反证法，这意味着 $abcd$ 是一个凸四边形。不妨设 $\angle bad \ge 90^\circ$（每个四边形都有一个角至少 90°）。那么以 $\overline{bd}$ 为直径的圆盘包含 a，矛盾。 □

备注 3. 在现实中，Bob-图实际上被称为 Gabriel 图。注意我们从不要求 Bob-集是无限的；这个解答对于有限的 Bob-集同样适用。

然而，有些方法适用于有限的 Bob-集但不适用于无限集，例如 相对邻域图，其中连接 a 和 b 当且仅当不存在 c 使得 $d(a,b) \le \max\{d(a,c), d(b,c)\}$。换句话说，当 ab 是一个三角形的最长边时，边被阻塞（而不是像 Gabriel 图中那样，当 ab 是一个直角或钝角三角形的最长边时边被阻塞）。

相对邻域图比 Gabriel 图有更少的边，所以它也是可平面的。当 Bob-集是有限的时候，相对距离图仍然是连通的。上面相同的论证仍然有效，只是距离现在满足

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots$$

由于距离只有有限多个，最终会得出矛盾。

然而对于无限的 Bob-集，递减条件是不够的，连通性实际上完全失效。一个反例（由 Carl Schildkraut 告知我）是首先取 $A_n \approx (2n, 0)$ 和 $B_n \approx (2n+1, \sqrt{3})$ 对于所有 $n \ge 1$，然后轻微扰动所有点，使得

$$\begin{aligned} B_1A_1 &> A_1A_2 > A_2B_1 > B_1B_2 > B_2A_2 \\ &> A_2A_3 > A_3B_2 > B_2B_3 > B_3A_3 \\ &> \cdots. \end{aligned}$$

在这种情况下，$\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 将彼此不连通：边 A_nB_n 或 B_nA_{n+1} 都不会形成。在这种情况下，相对邻域图由边 $A_1A_2A_3A_4\cdots$ 和 $B_1B_2B_3B_4\cdots$ 组成。这就是为什么在当前问题中，不等式

$$\delta_i^2 \le \delta_{i-1}^2 - 1$$

起着如此重要的作用，因为它使得（平方）距离足够显著地减小，从而得出最终的矛盾。

2 第二天解答

2.1 USAMO 2025/4, 由 Carl Schildkraut 提出

在线查看

问题陈述

设 H 是锐角三角形 ABC 的垂心， F 是从 C 到 AB 的高的垂足， P 是 H 关于 BC 的反射点。假设三角形 AFP 的外接圆与直线 BC 相交于两个不同的点 X 和 Y。证明 $CX = CY$。

设 Q 为 B 的对径点。

断言 5. $AHQC$ 是一个平行四边形，且 $APCQ$ 是一个等腰梯形。

证明. 因为 $\overline{AH} \perp \overline{BC} \perp \overline{CQ}$ 且 $\overline{CF} \perp \overline{AB} \perp \overline{AQ}$。 □

设 M 为 $\overline{QC}$ 的中点。

断言 6. 点 M 是 $\triangle AFP$ 的外心。

证明. 从等腰梯形显然有 $MA = MP$。至于 $MA = MF$，令 N 表示 $\overline{AF}$ 的中点；那么 $\overline{MN}$ 是平行四边形的中位线，所以 $\overline{MN} \perp \overline{AF}$。 □

由于 $\overline{CM} \perp \overline{BC}$ 且 M 是 (AFP) 的圆心，可得 $CX = CY$。

2.2 USAMO 2025/5, 由 John Berman 提出

在线查看

问题陈述

求所有满足以下条件的正整数 k：对于每个正整数 n，和式

$$\binom{n}{0}^k + \binom{n}{1}^k + \cdots + \binom{n}{n}^k$$

能被 $n+1$ 整除。

答案是所有偶数 k。

我们将问题中的和式简写为 $S(n) := \binom{n}{0}^k + \cdots + \binom{n}{n}^k$。

证明偶数 k 是必要的。 选择 $n=2$。我们需要 $3 \mid S(2) = 2 + 2^k$，这要求 k 是偶数。

备注 4. 实际上，使用 $n = p-1$ 其中 p 为素数也并不困难，因为 $\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i \pmod p$。因此 $S(p-1) \equiv 1 + (-1)^k + 1 + (-1)^k + \cdots + 1 \pmod p$，这也要求 k 是偶数。这个特例对于理解接下来的证明是有启发性的。

证明 k 是充分的。 从现在起，我们视 k 为固定，并令 p^e 为完全整除 $n+1$ 的素数幂。基本思路是通过归纳法从 $n+1$ 约化到 $(n+1)/p$。

备注 5. 这里有一个具体的例子可以清楚地说明情况。令 $p=5$。当 $n = p-1 = 4$ 时，我们有

$$S(4) = 1^k + 4^k + 6^k + 4^k + 1^k \equiv 1+1+1+1+1 \equiv 0 \pmod 5.$$

当 $n = p^2 - 1 = 24$ 时，$S(24)$ 的 25 项按顺序是，模 25 下，

$$\begin{aligned} S(24) &\equiv 1^k + 1^k + 1^k + 1^k + 1^k \\ &+ 4^k + 4^k + 4^k + 4^k + 4^k \\ &+ 6^k + 6^k + 6^k + 6^k + 6^k \\ &+ 4^k + 4^k + 4^k + 4^k + 4^k \\ &+ 1^k + 1^k + 1^k + 1^k + 1^k \\ &= 5(1^k + 4^k + 6^k + 4^k + 1^k). \end{aligned}$$

关键在于 $S(24)$ 模 25 下是 $S(4)$ 的五份拷贝。

为了使备注中的模式明确，我们证明以下关于每个二项式系数的引理。

引理 2. 假设 p^e 是一个素数幂且完全整除 $n+1$。那么

$$\binom{n}{i} \equiv \pm \binom{\frac{n+1}{p} - 1}{\lfloor i/p \rfloor} \pmod{p^e}.$$

引理证明. 通过先看 $\lfloor i/p \rfloor \in \{0,1,2\}$ 的情况最容易理解证明。

- 对于 $0 \le i < p$，由于 $n \equiv -1 \mod p^e$，我们有
$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot i} \equiv \frac{(-1)(-2)\dots(-i)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot i} \equiv \pm 1 \pmod{p^e}.$$

- 对于 $p \le i < 2p$，我们有
$$\begin{aligned}\binom{n}{i} &\equiv \pm 1 \cdot \frac{n-p+1}{p} \cdot \frac{(n-p)(n-p-1)\dots(n-i+1)}{(p+1)(p+2)\dots i} \\ &\equiv \pm 1 \cdot \frac{\frac{n-p+1}{p}}{1} \cdot \pm 1 \\ &\equiv \pm \binom{\frac{n+1}{p}-1}{1} \pmod{p^e}.\end{aligned}$$

- 对于 $2p \le i < 3p$，类似的推理给出
$$\begin{aligned}\binom{n}{i} &\equiv \pm 1 \cdot \frac{n-p+1}{p} \cdot \pm 1 \cdot \frac{n-2p+1}{2p} \cdot \pm 1 \\ &\equiv \pm \frac{\left(\frac{n+1}{p}-1\right)\left(\frac{n+1}{p}-2\right)}{1\cdot 2} \\ &\equiv \pm \binom{\frac{n+1}{p}-1}{2} \pmod{p^e}.\end{aligned}$$

依此类推。关键在于，一般来说，如果我们写成
$$\binom{n}{i} = \prod_{1\le j\le i} \frac{n-(j-1)}{j}$$
那么对于 $p \nmid j$ 的分数都是 $\pm 1 \pmod{p^e}$。所以只考虑那些 $p \mid j$ 的 j；在那种情况下恰好得到所声称的 $\binom{\frac{n+1}{p}-1}{\lfloor i/p \rfloor}$（甚至不需要取模 p^e）。 □

由引理可知，如果 p^e 是一个完全整除 $n+1$ 的素数幂，那么
$$S(n) \equiv p \cdot S\left(\frac{n+1}{p}-1\right) \pmod{p^e}$$
这是通过将 $n+1$ 项（对于 $0 \le i \le n$）按照 $\lfloor i/p \rfloor$ 的值分成连续的长度为 p 的组得到的。

备注 6. 实际上，通过相同的证明（加上更好的 $\pm$ 符号管理）可以证明
$$n+1 \mid \sum_{i=0}^{n} \left((-1)^i \binom{n}{i}\right)^k$$
对于所有非负整数 k 都成立，而不仅仅是偶数 k。所以在某种意义上，这个结果比问题陈述中的结果更自然。

2.3 USAMO 2025/6, 由 Cheng-Yin Chang 和 Hung-Hsun Yu 提出

在线查看

问题陈述

设 m 和 n 为正整数且 $m \geq n$。有 m 个不同口味的纸杯蛋糕排成一个圆圈，以及 n 个喜欢纸杯蛋糕的人。每个人给每个纸杯蛋糕分配一个非负实数分数，取决于他们有多喜欢该纸杯蛋糕。假设对于每个人 P，都可以将 m 个纸杯蛋糕的圆圈划分成 n 组连续的纸杯蛋糕，使得每组中纸杯蛋糕的 P 的分数之和至少为 1。证明可以将这 m 个纸杯蛋糕分给这 n 个人，使得每个人 P 收到的纸杯蛋糕相对于 P 的总分数至少为 1。

任意挑选一个人——称她为 Pip——以及她的 n 段弧。最初的想法是尝试应用霍尔婚姻引理，将 n 个人与 Pip 的弧进行匹配（使得每个这样匹配的人都对他们匹配到的弧感到满意）。为此，构造一个明显的二分图 $\mathfrak{G}$，连接人和 Pip 的弧。

我们现在考虑以下算法，该算法需要几个步骤。

- 如果 $\mathfrak{G}$ 存在完美匹配，我们就完成了！
- 我们可能没那么幸运。根据霍尔条件，这意味着存在一个坏集合 $\mathcal{B}_1$，即一些人，他们只与少于 $|\mathcal{B}_1|$ 条弧兼容。然后删除 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_1$ 的邻居，然后尝试在剩余的图中寻找匹配。
- 如果现在存在匹配，则终止算法。否则，这意味着对于剩余的图存在另一个坏集合 $\mathcal{B}_2$。我们再次删除 $\mathcal{B}_2$ 和少于 $|\mathcal{B}_2|$ 个的邻居。
- 重复直到在剩余的图中可能找到完美匹配 $\mathcal{M}$，即不再有坏集合（然后一旦发生就终止）。

  由于 Pip 是一个通用顶点，不可能删除 Pip，所以算法确实以非空的 $\mathcal{M}$ 终止。

我们承诺将 $\mathcal{M}$ 中的每个人分配给他们匹配的弧（特别是如果根本没有坏集合，问题已经解决）。现在我们通过对 n 进行归纳（对于剩余的人）来完成问题，只需删除 $\mathcal{M}$ 使用的弧。

为了理解为什么这个删除归纳法有效，考虑任何特定的不在 $\mathcal{M}$ 中的人 Quinn。根据定义，Quinn 对 $\mathcal{M}$ 中的任何弧都不满意。所以当 $\mathcal{M}$ 的一条弧 $\mathcal{A}$ 被删除时，它对 Quinn 的价值小于 1，所以特别地，它不可能完全包含 Quinn 的任何弧。因此，在删除的弧 $\mathcal{A}$ 中，Quinn 的弧最多有一个端点。当这种情况发生时，这会导致 Quinn 的两条弧合并，合并后的值是

$$(\geq 1) + (\geq 1) - (\leq 1) \qquad \geq \qquad 1$$

这意味着归纳是可行的。

备注 7. 这个删除论证甚至可以在意识到霍尔定理之前，在 $\mathcal{M}$ 只有一个人（Pip）的特殊情况下考虑。这相当于说，如果 Pip 的一条弧不被任何人喜欢，那么那条弧可以被删除，归纳继续进行。

备注 8. 相反，即使在找到删除论证之前，也应该合理地期望霍尔定理会有所帮助。在解决这个问题时，我最初说的几句话之一是：

> “我们应该让霍尔定理为我们承担繁重的工作：找到一种方法来创建满足霍尔条件的 n 个组，而不是将 n 个组分配给 n 个人的方案。”

作为一个通用的启发式方法，对于任何类型的”兼容匹配”问题，霍尔条件通常是首选的工具。（验证霍尔条件比自己实际找到匹配要容易得多。）实际上在大多数竞赛问题中，如果一个人意识到自己处于霍尔设置中，通常就接近完成问题了。这是一个相对罕见的例子，其中需要额外的想法与霍尔定理一起使用。