一线串通的高等数学基础

程昊一　　李衡岳　　王一丁

2022 年 3 月 6 日

1 函数

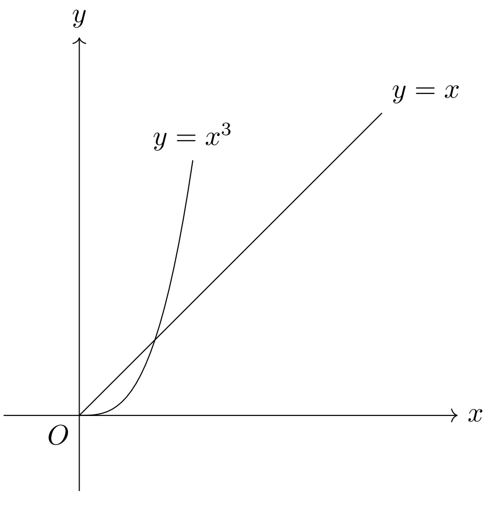
1.1 函数的定义

函数,本质上是一种**一一对应**的关系,将一个对象转化成另一个对象.下面给出函数的严格定义:

定义1. 给定两个实数域$\mathbb{R}$的非空子集A和B.若一个对应关系$f : A \to B$,使得A中的每一个数,通过这种对应关系,在B中都有唯一一个数与之一一对应,那么这种关系就叫做**函数**,通常记作$f(x)$.其中,A被称作f的**定义域**,B被称作f的**值域**.

1.2 函数的单调性

在学习中,我们经常会遇到一些函数,如$y = x, y = x^3$.它们似乎都是只增不减的.



下面,我们给出函数单调性的严格定义:

定义2. 设函数$f(x)$在区间D上有定义.若对于任意的$x_1, x_2 \in D$,其中$x_1 < x_2$,都有$f(x_1) < f(x_2)$,则称$f(x)$在D上**单调递增**;若若对于任意的$x_1, x_2 \in D$,其中$x_1 < x_2$,都有$f(x_1) < f(x_2)$,则称$f(x)$在D上**单调递减**.

1.3 奇函数与偶函数

有些函数的图像是关于原点对称的,例如$y = x, y = x^3, y = \sin x$等,被称为**奇函数**;有些是关于$y$轴对称的,例如$y = x^2, y = \cos x$等,被称为**偶函数**.下面给出奇函数与偶函数的严格定义:

定义3. 对于一个函数$f(x)$,它的定义域为D,且关于原点对称.若任意的$x \in D$,有$f(x) = -f(-x)$,则称$f(x)$为**奇函数**;若任意的$x \in D$,有$f(x) = f(-x)$,则称$f(x)$为**偶函数**.

1.4 反函数

我们注意到,一个函数$y = f(x)$,相当于给出了x的值,求y的值.但是我们有时候要从y求出x.对于有些函数,一个y唯一对应这一个x,比如一次函数,反比例函数等.但是有些就是一个y可能对应多个x,如二次函数等.对于第一类函数(即一个y唯一对应一个x的函数),我们定义**反函数**:

定义4. 若对于一个函数$f(x)$,若对于其值域上的任何一个数y,都有唯一的x使得$f(x) = y$,那么存在且唯一存在一个函数$g(x)$满足$g(f(x)) = x$.我们将$g(x)$称为$f(x)$的**反函数**.

2 极限

2.1 极限的基本思想

我们有一个函数f和一个平面直角坐标系.在f的定义域上有一个数x_0.当x非常非常接近x_0但不等于x_0时,$f(x)$的值是什么样子的?极限,就是对此时的$f(x)$的值的一种描述.当x从小往大趋近于x_0时$f(x)$趋近的那个数,被称作$f(x)$在x_0的**左极限**;当x从大往小趋近于x_0时$f(x)$趋近的那个数,被称作$f(x)$在x_0的**右极限**.当$f(x)$在x_0的左极限等于右极限时,这个左极限或右极限的数值被称作$f(x)$在x_0处的**极限**.这就是极限的基本思想.

2.2 函数的极限

在**2.1**中,我们了解到了函数在某个点的**左极限,右极限**以及**极限**.我们将给出它们的严格定义:

定义5. 对于一个函数$f(x)$和一个数x_0,若对于一个任意的正实数ε,都存在一个正实数δ,在$0 < x-x_0 < \varepsilon$时都有$|f(x)-f(x_0)| < \delta$,则称$f(x_0)$为$f(x)$在点x_0的**右极限**;若对于一个任意的正实数ε,都存在一个正实数δ,在$0 < x_0-x < \varepsilon$时都有$|f(x)-f(x_0)| < \delta$,则称$f(x_0)$为$f(x)$在点x_0的**左极限**.若$f(x)$在点x_0的左极限与右极限相同时,则称$f(x_0)$为$f(x)$在点x_0的**极限**;若左极限不等于右极限时,则称$f(x)$在点x_0的极限**不存在**.

左极限、右极限以及极限的记法如下:

我们将$f(x)$在x_0处的左极限记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x),$$

右极限记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

极限记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x).$$

2.3 极限的常见求法

2.3.1 极限的四则运算

根据极限的定义,我们能得到下列关系式:

若$\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$存在,$c$为常数,则

$$c\cdot \lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} \left(c\cdot f_1(x)\right),$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x\to x_0} f_2(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x),$$

若$\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0$,则

$$\frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right),$$

2.3.2 夹逼定理

若函数$f(x), f_1(x), f_2(x)$在定义域上始终有$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$,且$\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$与$\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$存在且都等于$y_0$,那么我们就有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

这就相当于$f(x)$一直夹在$f_1(x)$与$f_2(x)$之间,当$f_1(x)$与$f_2(x)$在某一点有相同的极限,那么$f(x)$在这一点就自然而然地有相同的极限.

3 导数与微分

3.1 导数的基本思想

人们在开始研究微积分的时候,是通过速度与时间的关系来认识的.现在我们回到这里,考虑导数是如何存在的.我们知道,速度 $=\dfrac{\text{路程}}{\text{时间}}$,而这个速度只是一个平均速度.而如果我们需要知道在这一时间的瞬时速度,需要让这一段时间尽可能地短,这样这个平均速度尽可能地接近瞬时速度.这个速度可以表示为$\dfrac{\text{大路程}-\text{小路程}}{\text{大时间}-\text{小时间}}$,将这个式子转化为另一种形式:$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$.当$x\to x_1$时,这就是$f(x)$在$x_1$处的导数.也可以理解为,$f(x)$的图像在 x_1处切线的斜率.这就是导数的基本思想.

3.2 导数的定义

在**3.1**中,我们了解到了,导数是在研究物体的瞬时速度和曲线斜率的时候产生的.下面,我们给出导数的严格定义:

定义6. 对于连续的函数$f(x)$,在点x_0处以及其邻域有定义.我们定义:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

为$f(x)$在x_0处的**右导数**;定义

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

为$f(x)$在x_0处的**左导数**;当$f(x)$在x_0处的左导数与右导数都存在且等于k,则称k为$f(x)$在x_0处的**导数**,记作$f'(x_0)$或$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.若左导数与右导数不相等,则称$f(x)$在$x_0$处的导数**不存在**.

导数本质上描述的是一个函数在某个点对于自变量变化的敏感程度.理解这一句话是十分重要的,因为在学习更抽象的导数时,“切线斜率”这样的几何直观就不适用了.

将$f(x)$每一点的导数写成关于x的函数,我们就得到了$f(x)$的**导函数**.

定义7. 设$f(x)$连续且可导.定义以下关于x的函数

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

为$f(x)$的**导函数**,记作$f'(x)$.

3.3 使用定义求导

这一节,我们利用几道例题,来说明如何用定义求导.

例1 求$(x^3)'$.

解

$$
\begin{aligned}
\left(x^3\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3\Delta x\cdot x^2+3(\Delta x)^2x+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x\cdot x^2+3(\Delta x)^2x+(\Delta x)^3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2\right)\\
&= 3x^2.
\end{aligned}
$$

例2　求$\left(\dfrac{1}{x}\right)'$.

解

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}\\
&= -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

例3　求$(\sqrt{x})'$.

解

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

3.4 导数的运算

3.4.1 导数的加减运算

通过极限的定义,我们能得到下列关系式:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

3.4.2 导数的乘除

我们来推导一下导函数的乘除法则.

假设我们有两个函数$f(x), g(x)$,则

$$\begin{aligned}
(f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\
&= g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)] - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) \\
&- \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

3.4.3 复合函数的导数

对于复合函数$f(g(x))$,我们有如下定理:

定理1. 若$f(x), g(x)$为连续且可导的函数,则有

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

对这个定理的严格证明我们不在这里给出,有兴趣的读者可以自行尝试.

3.4.4 反函数的导数

定理2. 若$f(x)$为(a,b)上的连续可导的函数,且有反函数$g(x)$,则对于(a,b)上的任意一点x_0,有

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

也就是说,**一个函数在一点的导数恰好等于其反函数在对应点的导数的倒数.**

3.5 常见初等函数的导数

这一章,我们研究一下几种常见的基本初等函数的导数.

3.5.1 幂函数

我们分两个部分讨论:

(1) 指数为正整数

设函数$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}_+$,那么

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot (\text{一群没用的废物}) - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \big(nx^{n-1} + \Delta x(\text{一群没用的废物})\big) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

所以$(x^n)' = nx^{n-1}$.

(2) 指数为实数

这一部分需要指数函数和对数函数的导数的知识,建议在阅读完**3.5.2**和 **3.5.3**后再阅读此部分.

设函数$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$,则

$$\begin{aligned}
(x^a)' &= \left(\mathrm{e}^{a\ln x}\right)' \\
&= \mathrm{e}^{a\ln x} \cdot \left(a \cdot \frac{1}{x}\right) \quad \text{复合函数的求导法则} \\
&= \frac{a}{x} \cdot x^a \\
&= ax^{a-1}.
\end{aligned}$$

所以$(x^a)' = ax^{a-1}$.

3.5.2 指数函数

我们来求$f(x) = a^x (a \in \mathbb{R}_+)$的导数.我们先看$\mathrm{e}^x$的导数.

注意到

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= \mathrm{e}^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\end{aligned}$$

下面我们来观察极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

我们令$n = \mathrm{e}^{\Delta x} - 1$,则$\Delta x = \ln(n+1)$.显然,当$\Delta x \to 0$时,$n \to 0$.那么,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n}{\ln(n+1)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{n} \ln(n+1)\right)^{-1} \\ &= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \left(\ln(n+1)^{\frac{1}{n}}\right)\right)^{-1} \\ &= (\ln \mathrm{e})^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

带回原式,我们得到

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

那么对于任意的a^x,因为$a^x = e^{x \ln a}$,所以由复合函数的求导法则,我们有

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

3.5.3 对数函数

我们先看$\ln x$的导数.

因为$\ln x$是e^x的反函数,所以我们令 $f(x) = \ln x, g(x) = \mathrm{e}^x$.

由反函数的求导法则

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))},$$

我们有
$$(\ln x)' = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

3.6 无穷小量与微分

我们分两个部分来讨论无穷小量与微分.

(1) 无穷小量

所谓无穷小量,就是**以0为极限的变量**.例如,当$n \to +\infty$时,$\frac{1}{n}, q^n(|q| < 1)$以及$\frac{1}{n!}$都是无穷小量;当$x \to 0$时,$x, \cos x - 1$以及$\ln(1+x)$都是无穷小量.

设$f(x), g(x)$在$x \to a$时是两个无穷小量,则$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$都是无穷小量.但是,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$却有多种情况.若$g(x) \neq 0$,且
$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \to a),$$
则称$f(x)$与$g(x)$是**等价无穷小量**,记为$f(x)\ g(x) \quad (x \to a)$.

若存在一个无穷小量$\eta(x)$,使得
$$f(x) = \eta(x) g(x)$$
则称$f(x)$是比$g(x)$**更高阶的无穷小量**,记为$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$.

若存在一个常数l,使得
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$
则称$f(x)$与$g(x)$是**同阶无穷小量**.

当$x \to a$时,若$f(x)$与$(x-a)^n$是同阶无穷小量,则称$f(x)$为$x-a$的**n阶无穷小量**.事实上,无穷小量的阶数表示的是无穷小量趋近于0的效率.

(2) 微分

设$f(x)$在x_0附近有定义.我们令x有一个增量Δx,此时y也有一个变化量Δy.我们用无穷小量的眼光去观察Δx与Δy的关系.

设$f(x)$在x_0附近可导,那么$f(x)$在x_0附近至少是连续的,所以
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (\Delta x \to 0).$$
所以,当$\Delta x \to 0$时,Δy是一个无穷小量.并且,由导数的存在性,我们有
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
我们再来考察
$$\eta(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0).$$

显然,当$\Delta x \to 0$时,$\eta(x)$也是一个无穷小量.我们将上式变形,得到

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \eta(x)\Delta x.$$

这告诉了我们了一个重要事实:Δy可以被拆分成两个部分,一部分是Δx与一个常数的乘积,另一部分比Δx更高阶的无穷小量,也即

$$\Delta y = f'(x_0) + o(\Delta x).$$

当Δx很小的时候,Δy可以由$f'(x_0)\Delta x$很好地近似.

以上是在$f(x)$可导的条件下进行的讨论.那一般情况呢?

何时Δy可以写成$A\Delta x + o(\Delta x)$(其中A为常数)的形式呢?

对此,我们给出微分以及可微的定义:

定义7. 设$y = f(x)$在x_0点附近有定义.若存在一个常数A,使得

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

则称$y = f(x)$在x_0处**可微**,并把$A\Delta x$称作$y = f(x)$在x_0处的**微分**,记作$\mathrm{d}f$或$\mathrm{d}y$.

3.7 高阶导数

设$f(x)$为(a, b)上的可导函数,则$f'(x)$也是(a, b)上的连续函数.那么我们自然会问:$f'(x)$也是可导函数吗?如果$f'(x)$在x_0处存在导数,则称此为$f(x)$在x_0的**二阶导数**,记作$f''(x)$或$f^{(2)}(x)$,有时也记作$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$.

同理,我们能定义$f(x)$在x_0的n阶导数,记作$f^{(n)}(x)$或$\left.\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$.

一般来说,我们求一个函数的n阶导数的通项公式,需要用到数学归纳法. 但即便如此,求通项一般还是比较困难的事情.下面的莱布兹尼公式有时会有所帮助:

定理3. 设$y = f(x)$及$y = g(x)$在(a, b)上有n阶导数,则它们的乘积的n阶导数成立下列公式:

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

其中$f^{(0)} = f, g^{(0)} = g$.

这个公式很像牛顿的二项展开式,只不过把原来的方幂数换成求导的阶数而已.

参考文献

[1]	李忠,周建莹.高等数学(上册)[M].北京:北京大学出版社,2009.8.
[2]	[美]Adrian Banner.*The Calculus Life: All the Tools You Need to Excel at Calculus*[M]. 杨爽,赵晓平,高璞.北京:人民邮电出版社,2016.10.
[3]	[日]远山启.数学与生活[M].吕砚山,李诵雪,马　杰, 莫德举.北京:人民邮电出版社,2014.10.