每日一题(3.2)答案

选题人:王一丁,李政毅
答案制作:程昊一

2021 年 12 月 29 日

1. 求所有这样的素数,它加上10或14后,仍为素数.

解 设这个素数为p.现对p除以3的余数进行分类讨论.

(1) 若p除以3的余数为1,则$3|(p+14)$,而$3<p+14$,所以$p+14$不是素数,与题设矛盾.

(2) 若p除以3的余数为2,则$3|(p+10)$,而$3<p+10$,所以$p+10$不是素数,与题设矛盾.

(3) 若p除以3的余数为0,即p是3的倍数,又p为素数,所以$p=3$.此时$p+10=13, p+14=17$,均为素数,成立.

综上:有且仅有一个素数3满足要求.

2. 证明:从1至100(包括1和100)中任选51个数,其中必有两个数互素.
思考:题中的"51"还可以更小吗?

分析 在某些元素中任取一部分元素,这使我们联想到抽屉原理.

解 构造抽屉:

$$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\ldots\{99,100\}$$

(表示1和2为一个抽屉,3和4为一个抽屉,等等.)

共计50个抽屉.因为有51个数,所以必然存在两个数,它们在同一个抽屉中,那么此两数相邻,所以它们互素.

综上:必然存在两个互素的数.

题中的"51"并不能更小.事实上,若取的数小于51个,那么我们可以全部取偶数,这样每个数的最大公因数至少为2,命题不成立.

3. 将平面上所有的点都染成红、蓝两色,证明:存在一条长为1的线段,它的端点同色.
思考:若平面不为全红或全蓝,是否总存在一条长为1的线段,其端点异色?若将平面染成三种颜色,是否仍然存在长为1的端点同色的线段?

解 在已染色的平面内任取一个边长为1的等边三角形.则这个三角形的三个顶点均可能

为红、蓝两色.由抽屉原理可知(在此处苹果为点,抽屉为两种颜色,即“染色类”),必有两个顶点同色.这时,此两顶点的距离为1,存在性得证.

下面为“思考”部分的解答,较难,没有兴趣的同学可以跳过.

事实上,长为1的、端点异色的线段是存在的.我们分以下两部分证明.

(1) 存在一个长度不大于2的、端点异色的线段.

因为平面并不是全红或全蓝,所以必然存在两个异色的点,设为A和B.连接AB.不妨设A为红色,B为蓝色.

若$AB \le 2$,则命题成立.

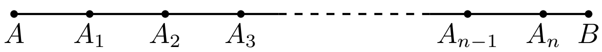
若$AB > 2$,我们使用反证法.假设不存在长度不大于2的、端点异色的线段,那么在AB上截取点A_1使得$AA_1 = 2$.由于我们的假设,A_1与A同色,均为红色.

在A_1B上截取点A_2,使得$A_1A_2 = 2$.由于我们的假设,A_2与A_1同色,均为红色.

在A_2B上截取点A_3,使得$A_2A_3 = 2$.由于我们的假设,A_3与A_2同色,均为红色.

这样一直截取下去到A_n,使得$A_nB \le 2$,这时A_n与A同色,均为红色,此时A_n与B异色,且$A_nB \le 2$,与假设矛盾.

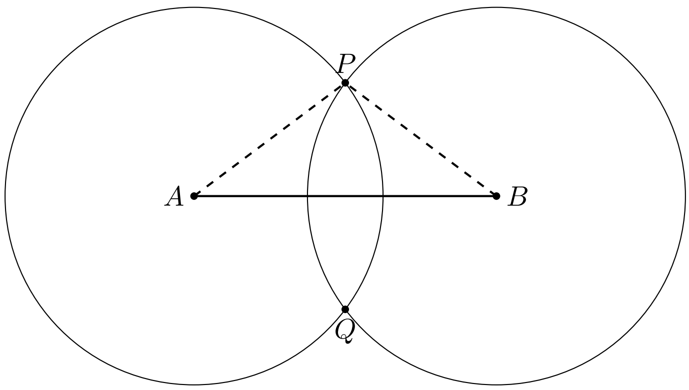
所以,假设不成立,原命题成立.



(2) 存在一条长为1的、端点异色的线段

假设我们有一条长度不大于2的、端点异色的线段,设为线段AB.在(1)中,我们已经证明了线段AB的存在性.现在,分别以A和B为圆心,1为半径画圆,两圆交于P, Q两点.

现在我们研究点P的颜色.事实上,由于A, B是异色的,所以无论P是什么颜色,A, B中都有与之异色的点,这时便存在一条长为1且端点异色的线段.



“思考”第一问图

至此,命题得证.

对于"思考"的第二问,答案是:存在.下面给出证明:

若平面内只有一种颜色,命题显然成立.若平面内只有两种颜色,本题的第一部分已经证明.下面我们考虑三种颜色都用上的情况

设三种颜色为红、黄、蓝.分以下两种情况讨论:

(1) 若平面内存在长度为$\sqrt{3}$且端点异色的线段,记为A, B.不妨设A为红色,B为蓝色.连接AB.分别以A, B为圆心,1为半径作圆,设两圆相交与P, Q.

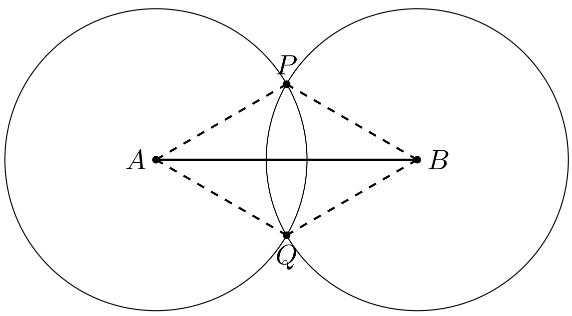
若P, Q中有一个为红色或黄色,则存在一条满足要求的线段,命题成立;若P, Q均不为红色或黄色,即P, Q均为蓝色.易证$PQ = 1$(我们默认能读到这里的人都可以证明).此时PQ即为长为1且端点同色的线段,命题得证.

综上,在这种情况下,无论怎样命题均成立.

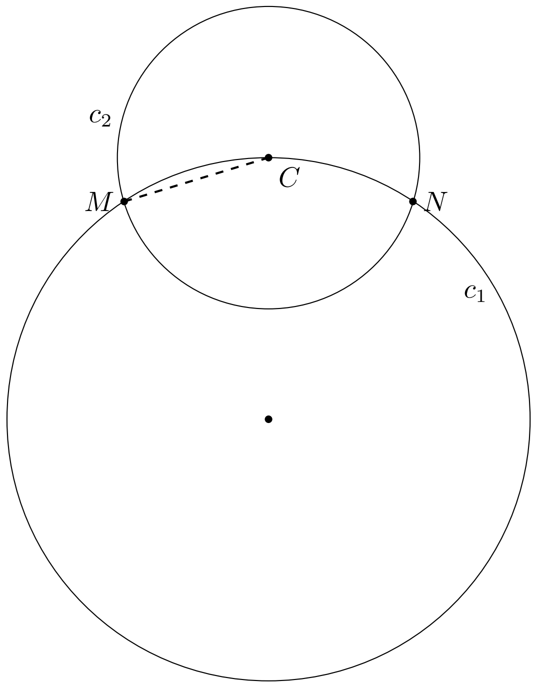
(2) 若平面内不存在长为$\sqrt{3}$且端点同色的线段,即每一条长度为$\sqrt{3}$的线段,它的端点均同色.那么,任取一点,以此为圆心,$\sqrt{3}$为半径作圆c_1.

那么,圆c_1上的所有点均同色.在圆上任取一点C,以C为圆心,1为半径作圆c_2,交圆c_1于M,N两点.因为C, M都在圆c_1上,所以C, M同色,又$CM = 1$,所以CM为符合要求的线段,命题成立.

综上:命题得证.



"思考"第二问(1)图



"思考"第二问(2)图