每日一题(9.1)答案

选题: 李政毅

答案制作:程昊一

2022 年 3 月 9 日

1. 已知:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=(ax+by+cz)^2 \quad (a,b,c\neq 0),$$

求证: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

解 将原式展开, 得到

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz,$$

很容易发现其中$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$可以被抵消, 其余的部分可以分别分成三组并配方. 于是, 化简得

$$\left(a^2x^2+b^2y^2-2abxy\right)+\left(a^2x^2+c^2z^2-2acxz\right)+\left(b^2y^2+c^2z^2-2bcyz\right)=0,$$

即

$$(ax-by)^2+(ax-cz)^2+(by-cz)^2=0$$

所以

$$ax=by=cz$$

所以原命题成立.

注 这道题的背景其实是**柯西不等式**, 完整形式如下:

柯西不等式. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbb{R}$, 则以下不等式成立:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geq(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2,$$

等号当且仅当存在实数k使得$a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \cdots, a_n = kb_n$时取等.

事实上, 此题就是$n = 3$时取等的情况.

2. 已知$a - b = 4$, $ab + c^2 + 4 = 0$, 求$a + b$的值.

解(方法一) 将(1)式代入(2)式, 得

$$a(a-4) + 4 + c^2 = 0,$$

即

$$(a-2)^2 + c^2 = 0.$$

所以$a = 2$. 代入(1)式, 得$c = -2$. 所以, $a + b = 0$.

方法二 将原式变形, 得

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = -4 - c^2 \end{cases},$$

则

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a-b)^2 + 4ab \\ &= 16 + 4(-4 - c^2) \\ &= -4c^2 \end{aligned}$$

即

$$(a+b)^2 + 4c^2 = 0.$$

所以$a + b = 0$.

方法三 (1)式平方, (2)式乘4, 得

$$\begin{cases} (a-b)^2 = 16 \\ 4ab + 4c^2 + 16 = 0 \end{cases},$$

上式代入下式, 得

$$(a-b)^2 + 4ab + 4c^2 = 0,$$

即

$$(a+b)^2 + 4c^2 = 0,$$

所以$a + b = 0$.