

一线串通的高等数学基础

程昊一

李衡岳

王一丁

2022 年 1 月 23 日

1 函数

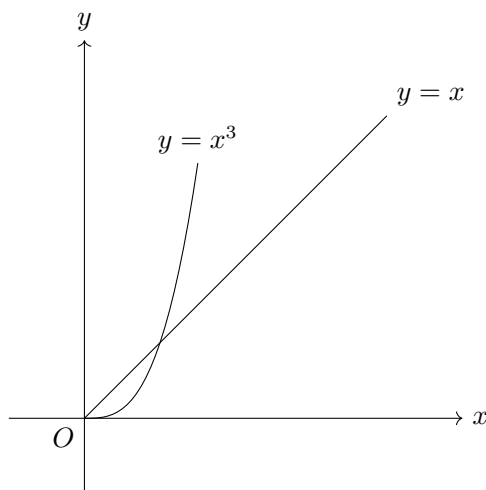
1.1 函数的定义

函数,本质上是一种**一一对应**的关系,将一个对象转化成另一个对象.下面给出函数的严格定义:

定义1. 给定两个实数域 \mathbb{R} 的非空子集 A 和 B .若一个对应关系 $f: A \rightarrow B$,使得 A 中的每一个数,通过这种对应关系,在 B 中都有唯一的一个数与之一一对应,那么这种关系就叫做**函数**,通常记作 $f(x)$.其中, A 被称作 f 的**定义域**, B 被称作 f 的**值域**.

1.2 函数的单调性

在学习中,我们经常会遇到一些函数,如 $y = x$, $y = x^3$.它们似乎都是只增不减的.



下面,我们给出函数单调性的严格定义:

定义2. 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义.若对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,其中 $x_1 < x_2$,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调递增**;若对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,其中 $x_1 < x_2$,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调递减**.

1.3 奇函数与偶函数

有些函数的图像是关于原点对称的,例如 $y = x, y = x^3, y = \sin x$ 等,被称为**奇函数**;有些是关于 y 轴对称的,例如 $y = x^2, y = \cos x$ 等,被称为**偶函数**.下面给出奇函数与偶函数的严格定义:

定义3. 对于一个函数 $f(x)$,它的定义域为 D ,且关于原点对称.若任意的 $x \in D$,有 $f(x) = -f(-x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若任意的 $x \in D$,有 $f(x) = f(-x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

1.4 反函数

我们注意到,一个函数 $y = f(x)$,相当于给出了 x 的值,求 y 的值.但是我们有时候要从 y 求出 x .对于有些函数,一个 y 唯一对应这一个 x ,比如一次函数,反比例函数等.但是有些就是一个 y 可能对应多个 x ,如二次函数等.对于第一类函数(即一个 y 唯一对应一个 x 的函数),我们定义**反函数**:

定义4. 若对于一个函数 $f(x)$,若对于其值域上的任何一个数 y ,都有唯一的 x 使得 $f(x) = y$,那么存在且唯一存在一个函数 $g(x)$ 满足 $g(f(x)) = x$.我们将 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**反函数**.

2 极限

2.1 极限的基本思想

我们有一个函数 f 和一个平面直角坐标系.在 f 的定义域上有一个数 x_0 .当 x 非常非常接近 x_0 但不等于 x_0 时, $f(x)$ 的值是什么样子的?极限,就是对此时的 $f(x)$ 的值的一种描述.当 x 从小往大趋近于 x_0 时 $f(x)$ 趋近的那个数,被称作 $f(x)$ 在 x_0 的左极限;当 x 从大往小趋近于 x_0 时 $f(x)$ 趋近的那个数,被称作 $f(x)$ 在 x_0 的右极限.当 $f(x)$ 在 x_0 的左极限等于右极限时,这个左极限或右极限的数值被称作 $f(x)$ 在 x_0 处的极限.这就是极限的基本思想.

2.2 函数的极限

在2.1中,我们了解到了函数在某个点的左极限,右极限以及极限.我们将给出它们的严格定义:

定义5. 对于一个函数 $f(x)$ 和一个数 x_0 ,若对于一个任意的正实数 ε ,都存在一个正实数 δ ,在 $0 < x - x_0 < \varepsilon$ 时都有 $|f(x) - f(x_0)| < \delta$,则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限;若对于一个任意的正实数 ε ,都存在一个正实数 δ ,在 $0 < x_0 - x < \varepsilon$ 时都有 $|f(x) - f(x_0)| < \delta$,则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限.若 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限与右极限相同时,则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的极限;若左极限不等于右极限时,则称 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不存在.

左极限、右极限以及极限的记法如下:

我们将 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

右极限记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

极限记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

2.3 极限的常见求法

2.3.1 极限的四则运算

根据极限的定义,我们能得到下列关系式:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ 存在, c 为常数,则

$$c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f_1(x)),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x),$$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0$, 则

$$\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right),$$

2.3.2 夹逼定理

若函数 $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ 在定义域上始终有 $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ 存在且都等于 y_0 , 那么我们就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

这就相当于 $f(x)$ 一直夹在 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 之间, 当 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在某一点有相同的极限, 那么 $f(x)$ 在这一点就自然而然地有相同的极限.

3 导数与微分

3.1 导数的基本思想

人们在开始研究微积分的时候,是通过速度与时间的关系来认识的.现在我们回到这里,考虑导数是如何存在的.我们知道,速度 = $\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$,而这个速度只是一个平均速度.而如果我们知道在这一时间的瞬时速度,需要让这一段时间尽可能地短,这样这个平均速度尽可能地接近瞬时速度.这个速度可以表示为 $\frac{\text{大路程} - \text{小路程}}{\text{大时间} - \text{小时间}}$,将这个式子转化为另一种形式: $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$.当 $x \rightarrow x_1$ 时,这就是 $f(x)$ 在 x_1 处的导数.也可以理解为, $f(x)$ 的图像在 x_1 处切线的斜率.这就是导数的基本思想.

3.2 导数的定义

在3.1中,我们了解到了,导数是在研究物体的瞬时速度和曲线斜率的时候产生的.下面,我们给出导数的严格定义:

定义6. 对于连续的函数 $f(x)$,在点 x_0 处以及其邻域有定义.我们定义:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数;定义

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数;当 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数与右导数都存在且等于 k ,则称 k 为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$.若左导数与右导数不相等,则称 $f(x)$ 在 x_0 处的导数不存在.

导数本质上描述的是一个函数在某个点对于自变量变化的敏感程度.理解这一句话是十分重要的,因为在学习更抽象的导数时,“切线斜率”这样的几何直观就不适用了.

将 $f(x)$ 每一点的导数写成关于 x 的函数,我们就得到了 $f(x)$ 的导函数.

定义7. 设 $f(x)$ 连续且可导.定义以下关于 x 的函数

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

为 $f(x)$ 的导函数,记作 $f'(x)$.

3.3 使用定义求导

这一节,我们利用几道例题,来说明如何用定义求导.

例1 求 $(x^3)'$.

解

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3\Delta x \cdot x^2 + 3(\Delta x)^2 x + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x \cdot x^2 + 3(\Delta x)^2 x + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2) \\&= 3x^2.\end{aligned}$$

例2 求 $\left(\frac{1}{x}\right)'$.

解

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} \\&= -\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

例3 求 $(\sqrt{x})'$.

解

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

3.4 导数的运算

3.4.1 导数的加减运算

通过极限的定义,我们能得到下列关系式:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

3.4.2 导数的乘除

我们来推导一下导函数的乘除法法则.

假设我们有两个函数 $f(x), g(x)$,则

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\&= g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)] - f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x + \Delta x)g(x)\Delta x} \\&= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) \\&\quad - \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) \\&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

3.4.3 复合函数的导数

对于复合函数 $f(g(x))$,我们有如下定理:

定理1. 若 $f(x), g(x)$ 为连续且可导的函数,则有

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

对这个定理的严格证明我们不在这里给出,有兴趣的读者可以自行尝试.

3.4.4 反函数的导数

定理2. 若 $f(x)$ 为 (a, b) 上的连续可导的函数,且有反函数 $g(x)$,则对于 (a, b) 上的任意一点 x_0 ,有

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

也就是说,一个函数在一点的导数恰好等于其反函数在对应点的导数的倒数.

3.5 常见初等函数的导数

这一章,我们研究一下几种常见的基本初等函数的导数.

3.5.1 幂函数

我们分两个部分讨论:

(1) 指数为正整数

设函数 $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}_+$,那么

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot (\text{一群没用的废物}) - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \Delta x(\text{一群没用的废物})) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

所以 $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(2) 指数为实数

这一部分需要指数函数和对数函数的导数的知识,建议在阅读完3.5.2和 3.5.3后再阅读此部分.

设函数 $f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$,则

$$\begin{aligned} (x^a)' &= (e^{a \ln x})' \\ &= e^{a \ln x} \cdot \left(a \cdot \frac{1}{x}\right) \quad \text{复合函数的求导法则} \\ &= \frac{a}{x} \cdot x^a \\ &= ax^{a-1}. \end{aligned}$$

所以 $(x^a)' = ax^{a-1}$.

3.5.2 指数函数

我们来求 $f(x) = a^x (a \in \mathbb{R}_+)$ 的导数. 我们先看 e^x 的导数. 注意到

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \end{aligned}$$

下面我们来观察极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

我们令 $n = e^{\Delta x} - 1$, 则 $\Delta x = \ln(n + 1)$. 显然, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $n \rightarrow 0$. 那么,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n}{\ln(n + 1)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n} \ln(n + 1) \right)^{-1} \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\ln(n + 1)^{\frac{1}{n}} \right) \right)^{-1} \\ &= (\ln e)^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

带回原式, 我们得到

$$(e^x)' = e^x.$$

那么对于任意的 a^x , 因为 $a^x = e^{x \ln a}$, 所以由复合函数的求导法则, 我们有

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

3.5.3 对数函数

我们先看 $\ln x$ 的导数.

因为 $\ln x$ 是 e^x 的反函数, 所以我们令 $f(x) = \ln x, g(x) = e^x$.

由反函数的求导法则

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))},$$

我们有

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

3.6 无穷小量与微分

我们分两个部分来讨论无穷小量与微分.

(1) 无穷小量

所谓无穷小量,就是以0为极限的变量.例如,当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{n}$, q^n ($|q| < 1$)以及 $\frac{1}{n!}$ 都是无穷小量;当 $x \rightarrow 0$ 时, x , $\cos x - 1$ 以及 $\ln(1+x)$ 都是无穷小量.

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 时是两个无穷小量,则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ 都是无穷小量.但是, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 却有多种情况.若 $g(x) \neq 0$,且

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow a),$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量,记为 $f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a)$.

若存在一个无穷小量 $\eta(x)$,使得

$$f(x) = \eta(x)g(x)$$

则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更高阶的无穷小量,记为 $f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$.

若存在一个常数 l ,使得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量.

当 $x \rightarrow a$ 时,若 $f(x)$ 与 $(x-a)^n$ 是同阶无穷小量,则称 $f(x)$ 为 $x-a$ 的 n 阶无穷小量.事实上,无穷小量的阶数表示的是无穷小量趋近于0的效率.

(2) 微分

设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义.我们令 x 有一个增量 Δx ,此时 y 也有一个变化量 Δy .我们用无穷小量的眼光去观察 Δx 与 Δy 的关系.

设 $f(x)$ 在 x_0 附近可导,那么 $f(x)$ 在 x_0 附近至少是连续的,所以

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

所以,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δy 是一个无穷小量.并且,由导数的存在性,我们有

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

我们再来考察

$$\eta(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0).$$

显然,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\eta(x)$ 也是一个无穷小量.我们将上式变形,得到

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \eta(x)\Delta x.$$

这告诉了我们一个重要事实: Δy 可以被拆分成两个部分,一部分是 Δx 与一个常数的乘积,另一部分比 Δx 更高阶的无穷小量,也即

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

当 Δx 很小的时候, Δy 可以由 $f'(x_0)\Delta x$ 很好地近似.

以上是在 $f(x)$ 可导的条件下进行的讨论.那一般情况呢?

何时 Δy 可以写成 $A\Delta x + o(\Delta x)$ (其中 A 为常数)的形式呢?

对此,我们给出微分以及可微的定义:

定义7. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 点附近有定义.若存在一个常数 A ,使得

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

则称 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微,并把 $A\Delta x$ 称作 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分,记作 df 或 dy .

3.7 高阶导数

设 $f(x)$ 为 (a, b) 上的可导函数,则 $f'(x)$ 也是 (a, b) 上的连续函数.那么我们自然会问: $f'(x)$ 也是可导函数吗?如果 $f'(x)$ 在 x_0 处存在导数,则称此为 $f(x)$ 在 x_0 的二阶导数,记作 $f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$,有时也记作 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}$.

同理,我们能定义 $f(x)$ 在 x_0 的 n 阶导数,记作 $f^{(n)}(x)$ 或 $\left. \frac{d^n x}{dx^n} \right|_{x=x_0}$.

一般来说,我们求一个函数的 n 阶导数的通项公式,需要用到数学归纳法.但即便如此,求通项一般还是比较困难的事情.下面的莱布兹尼公式有时会有所帮助:

定理3. 设 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 在 (a, b) 上有 n 阶导数,则它们的乘积的 n 阶导数成立下列公式:

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

其中 $f^{(0)} = f, g^{(0)} = g$.

这个公式很像牛顿的二项展开式,只不过把原来的方幂数换成求导的阶数而已.

参考文献

-
- | | |
|-----|---|
| [1] | 李忠,周建莹.高等数学(上册)[M].北京:北京大学出版社,2009.8. |
| [2] | [美]Adrian Banner. <i>The Calculus Life: All the Tools You Need to Excel at Calculus</i> [M].
杨爽,赵晓平,高璞.北京:人民邮电出版社,2016.10. |
| [3] | [日]远山启.数学与生活[M].吕砚山,李诵雪,马 杰, 莫德举.北京:人民邮电出版社,2014.10. |
-