高中联赛一试模拟试题

(时间:80分钟　满分:120分)

一、填空题(共8小题,每题8分)

1.不能表示为两个素数之和的大于2的最小偶数为________.

2.不能表示为$n^2+1(n\in\mathbb{N}_+)$形式的最大素数为________.

3.在平面上任给$n(n\geq 2)$个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$,其中任意两点之间的距离不大于1.则

$$\max\left(\min_{1\leq i<j\leq n}A_iA_j\right)$$

$=$ ________.

4.若关于x,y,z的方程$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$无正整数解,则正整数$n$的最小值为________.

5.记$\sigma(n)=\displaystyle\sum_{d|n,d\in\mathbb{N}_+}d$,则满足$\sigma(n)=2n$的最小奇数为________.

6.已知$f(x)\in\mathbf{Z}[x]$,且$f(\mathrm{e}+\pi)=0$,则$\deg\ f(x)$=________.

7.记p_n表示从小到大的第n个素数,则所有满足$p_{n+1}-p_n=2$的正整数n之和为________.

8.给定正整数m,若平面上任意n个点中必有m个点构成一个凸m边形的m个顶点,则n的最小值为________.

二、解答题

9.(本题16分)证明:

$$\int_0^1\left(\sum_{x=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x^k\alpha}\right)^2\left(\sum_{x=1}^{N}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x^k\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha=0.$$

10.(本题20分)对任意正整数n,定义:

$$f(n)=\begin{cases}3n+1 & ,2\nmid n\\ \frac{n}{2} & ,2\mid n\end{cases}.$$

对于任意给定的正整数m,试求最小的正整数k,使得$f^{(k)}(n)=1$.

11.(本题20分)记$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\ \ (s\in\mathbb{C})$,证明:$\zeta(s)$的零点除负整实数外,全都具有实部$\dfrac{1}{2}$.