2024高联复写

程昊一

2024 年 12 月 9 日

(解答题未按照卷面格式进行排版)

1 一试

1. 4049
2. $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, 2)$
3. 7
4. $\frac{3}{4}$
5. $\frac{4}{21}$
6. 11
7. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
8.

9.(卷面较整洁)
解: 注意到

$$\frac{\sin A + \cos A}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(A + \pi/4)}{\sqrt{2}}.$$

故有

$$\sqrt{2}\cos C = \sin(A + \pi/4) = \sin(B + \pi/4).$$

分两种情况讨论:

(1) $A + \pi/4 = B + \pi/4$, 即$A = B$. 此时$C = \pi - 2A$, 即$\cos C = -\cos(2A)$. 代入上式, 得到

$$\sqrt{2}\cos(2A) + \sin(A + \pi/4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos(2A) + \sin A + \cos A = 0$$

即

$$(\sin A + \cos A)(2(\cos A - \sin A) + 1) = 0.$$

而$A \in (0, \pi/2)$, 故$\sin A + \cos A > 0$, 故有$\sin A - \cos A = \frac{1}{2}$. 故$\sin A - \sqrt{1 - \sin^2 A} = 1/2$, 解得$\sin A = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$, $\cos A = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$, 由此, 得

$$\cos C = \sin^2 A - \cos^2 A = \left(\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

(2) $(A+\pi/4)+(B+\pi/4)=\pi$, 得到$C=\pi/2$, 故$\cos C=0$, 得到$\sin A+\cos A=0$, 这不可能.

综上, $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

10.(卷面较整洁)

解: 先考虑一个圆是好圆的充分必要条件.

设一个圆心在y轴的圆为$x^2+(y-t)^2=r^2$. 与双曲线$x^2-y^2=1$联立, 得到

$$y^2+1+(y-t)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad 2y^2-2ty+(t^2+1-r^2)=0.$$

由题目, 此关于y的方程只有两个重根, 故判别式等于零, 即

$$\Delta=4t^2-4\cdot 2\cdot(t^2+1-r^2)=0 \quad \Rightarrow \quad t^2=2r^2-2.$$

反之, 若$t^2=2r^2-1$, 则上面关于y的二次方程只有两个重根, 满足好圆的条件.

即, 圆$x^2+(y-t)^2=r^2$为好圆的充分必要条件是$t^2=2r^2-2$.

考虑两个圆$x_{1,2}^2+(y_{1,2}-t)^2=r_{1,2}^2$, 其中$t_{1,2}^2=2r_{1,2}^2-2$. $(*)$ 不妨设$t_1>t_2$. 由于两个圆外切, 故

$$d=r_1+r_2=t_1-t_2.$$

将$(*)$两式相减, 得到$(t_1-t_2)(t_1+t_2)=2(r_1-r_2)(r_1+r_2)$. 而$r_1+r_2=t_1-t_2\neq 0$, 故

$$2(r_1-r_2)=t_1+t_2.$$

结合$r_1+r_2=t_1-t_2$, 解得$r_1=3r_2+2t_2$. 结合$|AP|^2=(r^2+t^2)^2+1$, 有

$$\begin{aligned} d^2&=(r_1+r_2)^2=(4r_2+2t_2)^2=4(2r_2+t_2)^2=4(2r_2^2+2r_2^2+4r_2t_2+t_2^2)\\ &=4(t_2^2+2+2r_2^2+4r_2t_2+t_2^2)=8((r_2+t_2)^2+1)=8|AP|^2. \end{aligned}$$

由此得

$$\frac{d}{|AP|}=\sqrt{\frac{d^2}{|AP|^2}}=2\sqrt{2}.$$

11. (卷面尚可)

设$z=1+a+b\mathrm{i}$, $w=1-a-b\mathrm{i}$, 其中$a,b\in\mathbb{R}$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 代入, 得

$$z^2-2w=(a+b\mathrm{i})^2-2(1-a-b\mathrm{i})=(a^2-b^2+2a-2)+(2ab+2b)\mathrm{i},$$

故

$$|z^2-2w|=\sqrt{b^4+(2a^2+4a+8)b^2+(a^4+4a^3-8a+4)}.$$

故

$$|z^2-2w|+|w^2-2z|=\sqrt{b^4+(2a^2+4a+8)b^2+(a^4+4a^3-8a+4)}+\sqrt{b^4+(2a^2-4a+8)b^2+(a^4-4a^3+8a+4)}.$$

可以证明, 此关于b^2的函数单调递增, 故

$$|z^2-2w|+|w^2-2z|\geq\sqrt{a^4+4a^3-8a+4}+\sqrt{a^4-4a^3+8a+4}.$$

2 二试

1.(卷面差, 第一次做错, 于是有大面积涂改; 并且因此解答书写空间较小, 于是过程较简略, 如下)

解:(1) r为奇数. 取$a_1=1/2$, 则由r为奇数, 知a_n均为奇数的二分之一, 故$\|a_n\|=1/2$, 故$C\le 1/2$. 另一方面, $C>1/2$显然不符要求(对任意的实数x, 均有$\|x\|\le 1/2$.)

(2) r为偶数, 设$r=2r'$. 取$a_1=\frac{r'-1}{r}=\frac{r}{2r+2}$, 由于$(r'-1)r^n\equiv(r'-1)(-1)^n \pmod{(r+1)}$, 故对于任意正整数$n$均有$\|r^n(r'-1)\|=\frac{r}{2r+2}$.

另一方面, 下面证明$C=\frac{r}{2r+2}$符合要求. 将$\frac{r+2}{2r+2}$按照r进制展开. 不妨设$a_1\in(0,1)$. 设a_1和$\frac{r+2}{2r+2}$的r进制小数点后第n位第一次出现不同. 分类讨论:

1. n为大于一的奇数. 若$\frac{r+2}{2r+2}$的小数点后第n位大于a_1的小数点后第n位, 由n的极小性, 知

$$\{r^{n-2}\frac{r+2}{2r+2}\}>\{r^{n-2}a_1\},$$

且存在整数k使得$r^{n-2}\frac{r+2}{2r+2}$与$\{r^{n-2}a_1\}$均在$(k,k+1)$中. 而$\{r^{n-2}\frac{r+2}{2r+2}\}<1/2$, 故

$$\frac{r}{2r+2}=\|r^{n-2}\frac{r+2}{2r+2}\|>\|r^{n-2}a_1\|.$$

若$\frac{r+2}{2r+2}$的小数点后第n位小于a_1的小数点后第n位, 由n的极小性, 知

$$\{r^{n-1}\frac{r+2}{2r+2}\}<\{r^{n-1}a_1\},$$

且存在整数k使得$r^{n-1}\frac{r+2}{2r+2}$与$\{r^{n-1}a_1\}$均在$(k,k+1)$中. 而$\{r^{n-1}\frac{r+2}{2r+2}\}>1/2$, 故

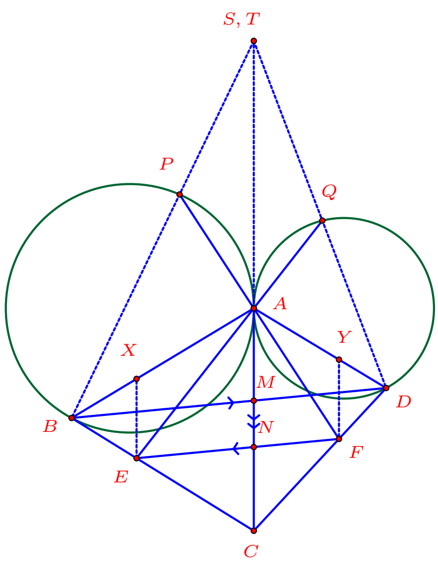
$$\frac{r}{2r+2}=\|r^{n-1}\frac{r+2}{2r+2}\|<\|r^{n-1}a_1\|.$$

2. n为偶数, 同理可以证明.

3. $n=1$. 与1类似.

综上, C的最大值为$1/2$, 当n为奇数; C的最大值为$\frac{r}{2r+2}$, 当n为偶数.

2.(卷面尚可)



证明: 延长CA, BP交于S, 延长DQ, CA交于T. 由于AC与ω_1, ω_2相切, 故

$$\angle BPA = \angle BAC = \angle DAC = \angle AQD \quad \Rightarrow \quad \angle SPA = \angle TQA.$$

由$\angle SBA = \angle PAS = \angle CAF$知

$$\angle BSA = \angle BAC - \angle SBA = \angle CAD - \angle CAF = \angle DAF.$$

过E, F作$EX, FY \parallel AC$, 分别交AB, AD于X, Y. 则由$\angle DYF = \angle CAD = \angle BPA$知

$$\angle AYF = \angle SPA, \quad \angle YAF = \angle PAS \quad \Rightarrow \quad \triangle SPA \, \triangle AYF.$$

同理$\triangle TQA \, \triangle AXE$.

由$XE \parallel AC \parallel YF, BD \parallel EF$知

$$\frac{XE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{DF}{DC} = \frac{YF}{AC} \quad \Rightarrow \quad XE = YF.$$

由$\triangle SPA \, \triangle AYF$知$SA/PA = AF/YF$, 对于另一侧也有类似结论, 即

$$SA = \frac{PA \cdot AF}{YF}, TA = \frac{QA \cdot AE}{XE}. \quad (*)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{PA}{QA} &= \frac{PA \sin \angle BPA}{QA \sin \angle DQA}(\text{正弦定理}) = \frac{BA \sin \angle PBA}{DA \sin \angle QDA} = \frac{BM \sin \angle FAN}{DM \sin \angle EAN} \\ &= \frac{EN / \sin \angle EAN}{FN / \sin \angle FAN}(\text{正弦定理}) = \frac{AE / \sin \angle ANE}{AF / \sin \angle ANF} = \frac{AE}{AF}. \end{aligned}$$

故$PA \cdot AF = QA \cdot AE$. 结合$(*)$与$XE = YF$, 得到$AS = AT$. 故$S, T$重合, 即$PB, QD, CA$共点. 故

$$SP \cdot SB = SA^2 = SQ \cdot SD.$$

由此知原命题成立.

第三题与第四题仅写了一点, 根据评分细则, 无法得分.