关于 e 的不等式

程昊一

目录

- 实数与极限
- 自然底数 e
- 均值不等式
- e 与均值不等式的应用

第一部分

实数与极限

为了讲清楚什么是 e, 我们需要很多基本知识.

目录

1 基础知识
- 基础数学与逻辑
- 集合论

2 有理数的缺陷
- 整数与有理数的定义
- 上界与上确界
- 有理数的缺陷

3 实数的最小上界性
- 域
- 实数域的定义

4 序列极限
- 序列的定义
- 收敛与序列极限

5 单调有界序列的极限
- 单调序列
- 单调有界序列的极限

§1 基础知识

1.1 基础数学与逻辑

1.

$\forall$ 表示“对于所有的”，或者“对于每一个”；$\exists$ 表示“存在”，s.t. 表示“使得”. 例如:

$\forall$ 整数 a, $\exists$ 整数 b, s.t.$b > a$.

注意, 此命题与以下命题含义完全不同:

$\exists$ 整数 b, s.t.$\forall$ 整数 a, $b > a$.

2.

求和符号 $(\sum_{i=1}^{n})$. 例如:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1).$$

3.

自然数集记为 $\mathbb{N}$, 整数集记为 $\mathbb{Z}$, 有理数集记为 $\mathbb{Q}$, 实数集记为 $\mathbb{R}$.

4.

符号 $\Rightarrow$ 表示“蕴含着”, 符号 $\Leftrightarrow$ 表示“等价于”或“当且仅当”. 例如:

n 为偶数 $\Rightarrow n$ 为整数.

n 为偶数 $\Leftrightarrow n$ 能被 2 整除.

5.

一个命题可以记为 $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$. 那么其逆命题为 $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$, 否命题为 $\neg\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B}$, 逆否命题为 $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$.

一个命题与它的逆否命题等价. 即:

$$(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}).$$

6.

符号 $\wedge$ 表示“与”“并且”, 符号 $\vee$ 表示“或”.

1.2 集合论

1.

集合是一堆**元素**的集体, 分为有限集与无限集. 没有元素的集合称为空集, 用 $\varnothing$ 表示. 用 $a \in A$ 表示元素 a 属于集合 A.

2.

若每一个 $i \in I$ 都对应一个集合 A_i, 那么 $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ 就是**索引集**为 I 的集合 A 的**索引族**. 有时亦可记为 $\{A_\alpha\}$.

3.

若集合 A 中的每一个元素同时是集合 B 的元素, 那么称 A 为 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$. 即:

$$\forall x \in A(x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

对于 $\forall A$, $\varnothing \in A$.

4.

开区间 (a,b) 定义为

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\},$$

闭区间 $[a,b]$ 定义为

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\},$$

半开区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 定义为

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\},$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}.$$

5.

记 A 与 B 的元素共同构成的集合为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$. 即:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

记既包含在 A 中又包含在 B 中的元素构成的集合为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$. 即:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

特别地, 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 不相交.

§2 有理数的缺陷

2.1 整数与有理数的定义

自然数由人们在生产劳动中抽象而来. 那么自然数的严格定义是什么?

自然数的定义由**皮亚诺 (Peano) 公理**给出:

Peano 公理 设 $\mathbb{N}$ 为一个非空集合, 满足下列条件:

1. 每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有唯一的一个 $\mathbb{N}$ 中的元素与之对应, 称为 n 的**后继元素** (或**后继**), 记为 n^+;
2. 存在一个元素 $e \in \mathbb{N}$, 它不是 $\mathbb{N}$ 中任意一个元素的后继;
3. $\mathbb{N}$ 中的元素至多是一个元素的后继, 即 $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$;
4. (归纳公理) 设 S 为 $\mathbb{N}$ 的一个非空子集, 且 $e \in S$. 如果 $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$, 则 $S = \mathbb{N}$.

那么, 这样的集合 $\mathbb{N}$ 称为**自然数集**, 它的元素称为**自然数**.

有了自然数, 我们就可以定义加法.

加法 在 $\mathbb{N}$ 上存在且仅存在一个二元运算 σ, 满足 $\forall m, n \in \mathbb{N}$, 有:

1. $\sigma(n, e) = n^+$;
2. $\sigma(n, m^+) = (\sigma(n, m))^+$.

这样的二元运算称为**加法**.

同样可以定义乘法:

乘法 在 $\mathbb{N}$ 上存在且仅存在一个二元运算 π, 满足 $\forall m, n \in \mathbb{N}$, 有:

1. $\pi(n, e) = n$;
2. $\pi(n, m^+) = \pi(n, m) + n$.

这样的二元运算称为**乘法**.

证明从略.

我们还可以继续定义负整数与整数, 及其加法与乘法, 但限于篇幅不再赘述.

下面我们定义**有理数**:

有理数 定义 $\mathbb{Q} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$, 满足 $\forall k, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, 有:

1. $(p, q) = (kp, kq)$;
2. $(p, k) + (r, k) = (p + r, k)$;
3. $(p, q) \cdot (r, s) = (pr, qs)$.

这其实和我们熟知的有理数是一致的, 并且容易验证由这三个运算的定义可以推出其他熟知的运算性质, 略.

2.2 上界与上确界

我们先来定义**有序集**:

有序集 集合 S 上的顺序是一种关系, 记作 "$<$", 满足:

1. $\forall x, y \in S$, $x < y$, $x = y$, $y < x$ 有且仅有一个成立;
2. $\forall x, y \in S$, $(x < y \land y < z) \Rightarrow x < z$.

$x < y$ 也可以写作 $y > x$, $x \leq y$ 意为 "$x < y$ 或 $x = y$". 由此可得:

$$x \leq y \Leftrightarrow \neg(x > y), x \geq y \Leftrightarrow \neg(x < y).$$

由此可以定义上、下界:

上界与下界 设 E 为有序集 S 的子集, 如果存在 $\alpha \in S$, 使得 $\forall x \in E (x \leq \alpha)$, 那么称 α 为 E 的上界.

类似地, 如果 $\exists \beta \in S$, 使得 $\forall x \in E (x \geq \beta)$, 那么称 β 为 E 的下界.

注意, 一个集合的上界与下界并不一定是这个集合的元素.

我们还可以定义上确界与下确界:

上确界与下确界 设 E 为有序集 S 的子集. 如果 S 中存在 E 的一个上界 α, 使得任意一个 S 中小于 α 的元素都不是 E 的上界, 那么 α 为 E 的最小上界或上确界, 记为 $\sup E$. 即:

$$\begin{aligned}\alpha = \sup E \Leftrightarrow & (\forall x \in E(x \le \alpha)) \\ & \wedge (\forall \gamma \in S \wedge \gamma < \alpha(\exists x \in E, \text{s.t.} \gamma < x)).\end{aligned}$$

类似地, 如果 S 中存在 E 的一个下界 β, 使得任意一个 S 中大于 β 的元素都不是 E 的下界, 那么 β 为 E 的最大下界或下确界, 记为 $\inf E$. 即:

$$\begin{aligned}\beta = \inf E \Leftrightarrow & (\forall x \in E(x \ge \beta)) \\ & \wedge (\forall \gamma \in S \wedge \gamma > \beta(\exists x \in E, \text{s.t.} \gamma > x)).\end{aligned}$$

2.3 有理数的缺陷

有理数的缺陷在哪里呢? 下面, 我们重点考察一个集合: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 < 2\}$. 设全集 $S = \mathbb{Q}$.

1. E 有上界. 显然, 满足 $x > 0 \wedge x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 > 2$ 的数都为 A 的上界.

2. E 没有上确界. 假设 E 有上确界, 设 $\sup E = p \in \mathbb{Q}$.

若 $p^2 < 2$, 则令

$$q = \frac{2p+2}{p+2},$$

容易证明 $p^2 < q^2 < 2$, 且 $q \in E$, 与上确界的定义矛盾.

若 $p^2 > 2$, 则 $p^2 > q^2 > 2$, 且 q 为 E 的上界, 与上确界的定义矛盾.

所以无论 p 的值如何都会引发矛盾, 所以 E 不存在上确界.

也就是说, **有理数集的一个有上界的子集不一定有上确界.** 这就是我们要将有理数扩充为实数的一个重要原因.

§3 实数的最小上界性

3.1 域

我们先给出**域**的定义:

域 F 是一个域, 当且仅当 F 是任意一个具有"加法"与"乘法"两种二元运算的集合, 且满足下列性质:

A1. (加法的封闭性)$\forall x, y \in F(x+y \in F)$.
A2. (加法交换律)$\forall x, y \in F(x+y=y+x)$.
A3. (加法结合律)$\forall x, y, z \in F((x+y)+z=(y+x)+z)$.
A4. (加法单位元)$\exists 0 \in F$, s.t.$\forall x \in F(x+0=x)$.
A5. (加法的逆元)$\forall x \in F(\exists -x \in F,\text{s.t.}x+(-x)=0)$.
M1. (乘法的封闭性)$\forall x, y \in F(xy \in F)$.
M2. (乘法交换律)$\forall x, y \in F(xy=yx)$.
M3. (乘法结合律)$\forall x, y, z \in F((xy)z=x(yz))$.
M4. (乘法单位元)$\exists 1 \in F \wedge 1 \neq 0,\text{s.t}\forall x \in F(1 \cdot x=x)$.
M5. (乘法的逆元)$\forall x \in F(\exists x^{-1} \in F,\text{s.t.}x(x^{-1})=1.)$
D. (乘法对于加法的分配律)$\forall x, y, z \in F(x(y+z)=xy+xz)$.

接着是**有序域**:

有序域 F 是一个有序域, 当且仅当 F 是一个有序集, 并且 F 和两个二元运算构成域, 且满足下列公理:

O1. 如果 $x, y \in F$ 且 $x < y$, 那么 $\forall z \in F(x + z < y + z)$.

O2. 如果 $x, y \in F$ 且 $x > 0$, $y > 0$, 那么 $xy > 0$.

3.2 实数域的定义

我们可以正式地定义**实数**, 即**具有最小上界性且包含** $\mathbb{Q}$ **的有序域**.

应当强调的是, 我们只是定义了 $\mathbb{R}$, 但它不一定存在. 许多教科书假定了 $\mathbb{R}$ 的存在性, 并称为**完备性公理**, 这里的 "完备性" 就是最小上界性与最大下界性的另一种说法. 不过, 在假设了 $\mathbb{Q}$ 的存在性之后, 有一种 (相当麻烦的) 称为 "戴德金 (Dedekind) 分割" 的方法可以证明 $\mathbb{R}$ 的存在性. 限于篇幅, 相关资料请自行查阅.

§4 序列极限

4.1 序列的定义

实数集 $\mathbb{R}$ 中的一个**序列**就是一个函数:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f:n\mapsto p_n,$$

其中 $p_n\in\mathbb{R}$. 我们通常把序列表示为 $\{p_n\}$. 如果

$$\exists q,d\in R\wedge d>0,\text{s.t.}\forall n\in\mathbb{N}_+(|p_n-q|<d),$$

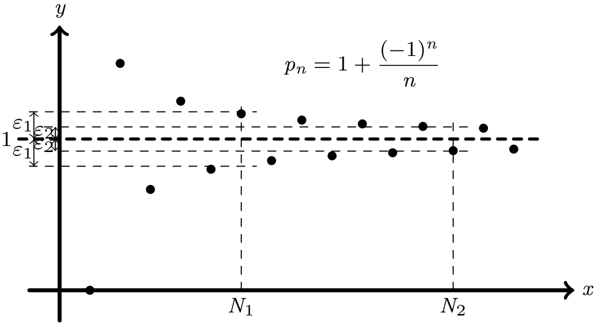
那么称 $\{p_n\}$ 是**有界的**.

4.2 收敛与序列极限

设 $\{p_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的任意一个序列. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t.$\forall n \geq N(|p_n - p| < \varepsilon)$, 那么称 p 为 $\{p_n\}$ 的**极限**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

或 $p_n \to p$.



§5 单调有序数列的极限

5.1 单调序列

单调序列, 即只增不减或只减不增的序列, 严格表述即:

单调序列 设 $\{p_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的任意一个序列. 若 $\forall n \in \mathbb{N}(p_n \leq p_{n+1})$, 那么 $\{p_n\}$ 是单调递增的; 若 $\forall n \in \mathbb{N}(p_n \geq p_{n+1})$, 那么 $\{p_n\}$ 是单调递减的.

5.2 单调有界序列的极限

我们将给出 $\mathbb{R}$ 非常重要的一个性质: $\mathbb{R}$ **中的单调有界序列必有极限.** 即:

若 $\mathbb{R}$ 中的序列 $\{p_n\}$ 为单调有界序列, 那么极限

$$\lim_{n\to\infty} p_n$$

存在.

我们将给出证明:

不妨设 $\{p_n\}$ 为单调递增的. 设

$$P = \{p_k \mid k \in \mathbb{N}_+\},$$

则 $P \in \mathbb{R}$. 那么由实数的最小上界性可知 $\sup P$ 存在, 记为 α.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 设

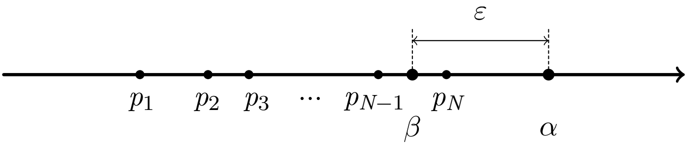
$$\beta = \alpha - \varepsilon,$$

则由上确界的定义可知, $\exists p_N \in P$, 使得 $p_N > \beta$.

又由于 $\{p_n\}$ 是单调递增的, 所以 $\forall k > N$, 有 $p_k > \beta$.

即,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ s.t. } (\forall k > N \wedge k \in \mathbb{N}_+ (p_k < |\alpha - p_N|)).$$



第二部分

自然底数 e

我们终于搞懂了什么是实数! 于是便可以定义自然底数 e 并探究其性质.

目录

6 定义与概述

7 关于 e 的不等式
- 两个不同的序列
- e 与调和级数

§1 定义与概述

自然底数 e 被定义为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

即, e 就是数列 $\{(1+1/n)^n\}$ 的极限.

但是我们还没有说明 e 的存在性. 下面我们将说明 $\{p_n\}=\{(1+1/n)^n\}$ 是一个单调递增的有界数列.

1. $\{p_n\}$ 单调递增

对 p_n 与 p_{n+1} 进行二项式展开:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \cdot \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{n^i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot \left[\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-(i-1)}{n}\right] \\ &= 1+1+\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1+1+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right. \\ &\quad \left.\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right)\right] + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

对比求和符号中的式子, 发现后者总是比前者大, 所以我们可以得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2. $\{p_n\}$ **有界**

我们可以证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+(p_n < 3)$. 事实上,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\\ &< 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}\\ &< 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1)i}\\ &= 3-\frac{1}{n} < 3.\end{aligned}$$

综上, 我们就证明了 $\{p_n\}$ 是一个单调递增的有界数列.

那么, 我们就说明了 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ 的存在性.

为什么说 e 是自然底数? 这就不得不提及 e 的 “自然” 之处. 事实上, 自然中充满了 “变化速度与自身的量成正比” 的变化过程. 例如, 一杯开水放在常温的房间内, 温度变低的速度就与杯中水的温度与室温的差成正比. 再比如, 一个弹簧一端连接墙, 另一端挂一个重物, 重物受到一个与自身速度成正比且反向的阻力, 那么重物的振幅的衰减也满足上述规律 (即 “变化速度与自身的量成正比”). 自然中有许多类似的变化过程, 都符合这条规律.

如果学过常微分方程, 那么上述的函数都是方程

$$y'=\alpha y$$

的解, 其解即为

$$y=k\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

§2 关于 e 的不等式

2.1 两个不同的序列

我们重点考察两个序列:

$$\{p_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}; \{q_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}.$$

我们已经了解了 $\{p_n\}$: 单调有界的递增序列, 其极限为 e. 我们仍然可以用相同的方式考察 $\{q_n\}$.

首先, $\{q_n\}$ 是递减的. 我们采用另一种方法证明. 首先我们先证明一个不等式: 对于 $b > a > 0$ 与 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$b^{n+1} > \left[(n+1)(b-a)+a\right] a^n.$$

事实上,

$$\begin{aligned} b^{n+1} - a^{n+1} &= (b-a)\left(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + a^n\right) \\ &> (b-a)\cdot(n+1)a^n. \end{aligned}$$

整理, 得

$$\begin{aligned} b^{n+1} &> a^{n+1} + (b-a)(n+1)a^n \\ &= \left[(n+1)(b-a)+a\right] a^n. \end{aligned}$$

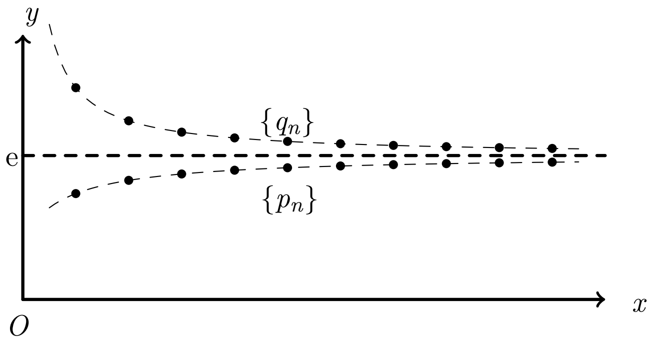
那么，令 $b=1+1/n$, $a=1+1/(n+1)$, 可得

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left[(n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+1+\frac{1}{n+1}\right]\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\\ &=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\\ &=\left[1+\frac{2}{n+1}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\\ &>\left[1+\frac{2}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2}\right]\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\\ &=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.\end{aligned}$$

而且,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

所以我们可以看到, $\{p_n\}$ 从负方向趋近于 e, 而 $\{q_n\}$ 从正方向趋近于 e.



2.2 e 与调和级数

所谓调和级数, 就是指

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

我们在此先给出结论: 对于任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$H(n) > \ln n;$$

并且极限

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} [H(n) - \ln n] = 0.577216 \cdots$$

存在, 被称为欧拉 (Euler) 常数.

事实上, 我们就是要证明数列

$$\{a_n\} = \{H(n) - \ln n\}$$

有一个确定的极限. 那么我们就即证 $\{a_n\}$ 是一个单调递减的有界数列.

首先, 我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

同时取自然对数并整理, 可得

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

这是一个很重要的不等式.

我们仍然分两步证明:

1. $\{a_n\}$ 单调递减

这是容易证明的, 因为 $H(n)$ 与 $H(n+1)$ 相减可以抵消大部分的项:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} \\ &= \ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0. \end{aligned}$$

所以, 我们有

$$a_n > a_{n+1}.$$

2. $\{a_n\}$ 有界.
我们可以证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (a_n > 0)$. 事实上:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n > \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1+i}{i} - \ln n \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{2}{1}\right) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

于是我们便证明了 $\{a_n\}$ 是一个单调递减的有界数列. 那么极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

便存在.

第三部分

均值不等式

在了解完 e 之后，我们再来看一下另一个重要的不等式——均值不等式.

目录

8 概述

9 证明选讲
- 调整法
- 反向归纳法

§1 概述

首先我们了解一下平均值的本质.

设有一组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与一种运算“$*$”. 若存在一个数 m 使得

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n = m * m * \cdots * m,$$

那么我们就可以称 m 为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的平均值.

以下讨论均默认 $a_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$.
例如, 我们取“$*$”为“$+$”, 于是就有了算术平均数:

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i;$$

取“$*$”为“$\times$”, 就有了几何平均数:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

另外, 还有

$$Q_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2}; H_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}},$$

分别称为“平方平均数”“调和平均数”, 其中“$*$”分别取“平方后相加”和“取到数后相加”.

那么, 所谓均值不等式, 就是 “算术平均值” $>$ “几何平均值” . 即:

均值不等式 设 $a_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

等号等且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取到.

§2 证明选讲

2.1 调整法

我们将介绍一种证明不等式的强有力的方式——调整法.
调整法的基本思路是: 设有一个代数式

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

如果我们想证明在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = A_n$ 的时候取到最大值, 那么可以采用如下办法:

如果我们可以证明 $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq f(A_n, a_1 + a_2 - A_n, \cdots, a_n)$$

(即, 调整 n 个元中的某两项, 使得其中一个达到取等条件 A_n, 两数和不变), 那么 (不等号上方的数字为调整的元的位置):

$$
\begin{aligned}
f(a_1,a_2,\cdots,a_n) &\overset{1}{\leq} f(A_n, a_1+a_2-A_n,\cdots,a_n)\\
&\overset{2}{\leq} f(A_n, A_n, a_1+a_2+a_3-2A_n,\cdots,a_n)\\
&\overset{3}{\leq} f\left(A_n, A_n, A_n, \left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right)-3A_n,\cdots,a_n\right)\\
&\overset{4}{\leq} \cdots\\
&\cdots\\
&\overset{n}{\leq} f\left(A_n,\cdots,A_n, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)-(n-1)A_n\right)\\
&= f(A_n, A_n, \cdots, A_n).
\end{aligned}
$$

这样，就可以证明 $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leq f(A_n,A_n,\cdots,A_n).$$

下面我们就用调整法证明均值不等式.
设对于 $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

我们知道在

$$a_1 = a_2 = \cdots a_n = A_n$$

时, f 有最大值 A_n^n. 那么我们可以通过证明: $\forall a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, a_1 为 a_i 中的最大值, a_2 为 a_i 中的最小值, 那么

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq f(A_n, a_1 + a_2 - A_n, \cdots, a_n).$$

我们在后面将会解释为什么要让 a_1 与 a_2 为最大值和最小值.

事实上,

$$
\begin{aligned}
& f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \le f(A_n, a_1 + a_2 - A_n, \cdots, a_n) \\
\Leftrightarrow\quad & a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \le A_n(a_1 + a_2 - A_n) a_3 \cdots a_n \\
\overset{a_i \ge 0}{\Leftrightarrow}\quad & a_1 a_2 \le A_n(a_1 + a_2 - A_n) \\
\Leftrightarrow\quad & A_n^2 - A_n a_1 - A_n a_2 + a_1 a_2 \le 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (A_n - a_1)(A_n - a_2) \le 0.
\end{aligned}
$$

因为 a_1 为 a_i 中的最大值, 且 a_2 为 a_i 中的最小值, 所以

$$a_2 \le A_n \le a_1.$$

故上个不等式的最后一步成立. 于是我们就证明了调整一步后, f 总是增大的.

于是, 对于一组不全相等的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 我们可以进行调整以证明结论.

首先, 因为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全相等, 所以必存在最大值与最小值. 由于每个元的地位都是等价的, 所以不妨设最大值为 a_1, 最小值为 a_2. 那么由上面的讨论, 我们有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \le f(A_n, a_1 + a_2 - A_n, a_3, \cdots, a_n) .$$

接下来我们考察括号中后 $n-1$ 个数, 即 $a_1 + a_2 - A_n$, a_2, $\cdots$, a_n. 容易知道, 这 $n-1$ 个数的平均值仍然为 A_n. 我们仍然可以找到最大值与最小值. 不妨设最大值为 $a_1 + a_2 - A_n$, 最小值为 a_3. 注意: $a_1 + a_2 - A_n$ 与其他元只是形式不一样, 但地位仍然是等价的, 所以我们仍然可以不妨设. 那么,

$$f(A_n, a_1 + a_2 - A_n, \cdots, a_n) \le f(A_n, A_n, a_1 + a_2 + a_3 - 2A_n, \cdots, a_n) .$$

于是，仿照上面的流程，直到剩下的数均相等，即均为 A_n 为止，此时 f 的值为

$$f(A_n, A_n, \cdots, A_n) = A_n^n.$$

那么根据前面所说的，我们就证明了 $\forall a_i \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n,$

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq f(A_n, A_n, \cdots, A_n),$$

即

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq A_n^n.$$

又

$$A_n^n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n,$$

所以

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

2.2 反向归纳法

我们用另一种方法证明均值不等式, 即所谓的反向归纳法.

我们用 $P(n)$ 表示 n 元均值不等式的命题. 那么我们可以通过证明下面三个命题以证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $P(n)$ 均成立:

1. $P(2)$ 成立;
2. $(P(n) \wedge P(2)) \Rightarrow P(2n)$;
3. $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

下面我们将分别给出证明.

1. $P(2)$ 成立

事实上, $P(2)$ 即为

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0.$$

这是显然成立的.

2. $(P(n) \wedge P(2)) \Rightarrow P(2n)$

事实上,

$$\prod_{i=1}^{2n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right) \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n$$

$$\overset{P(2)}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{2n}\right)^{2n}.$$

所以,

$$\sqrt[2n]{a_1 a_2 \cdots a_{2n}} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{2n}.$$

3. $P(n) \Rightarrow P(n-1)$

令 A 为 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的平均值，即 $\sum_{i=1}^{n-1} a_i/(n-1)$. 那么,

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) A \overset{P(n)}{\leq} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + A}{n}\right]^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n.$$

所以,

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq A^{n-1},$$

即

$$\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1}.$$

综上，我们证明了以上三个命题，于是均值不等式得证.

第四部分

e 与均值不等式的应用

接下来, 我们将应用 e 与均值不等式, 来解决实际问题.

目录

10 用均值不等式证明有关 e 的不等式

11 正数的拆分

12 课后练习

§1 用均值不等式证明有关 e 的不等式

我们证明的是以下两个数列:

$$\{p_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}; \{q_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

分别单调递增与递减.

1. $\{p_n\}$ 递增

为了方便起见，设

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, a_{n+1} = 1.$$

那么由均值不等式，有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i > \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

而不等式左边为

$$\frac{1}{n+1}\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right] = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

不等式右边为

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

所以,

$$1+\frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}.$$

整理即得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

我们便证明了 $p_n < p_{n+1}$.

2. $\{q_n\}$ 递减

取

$$b_1 = \cdots = b_n = 1 - \frac{1}{n}, b_{n+1} = 1.$$

由均值不等式, 有

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} b_i > \sqrt[n+1]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

而不等式左边为

$$\frac{1}{n+1}\left[n\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1\right] = \frac{n}{n+1},$$

不等式右边为

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}.$$

所以,

$$\frac{n}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}.$$

化简即得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

我们便证明了 $q_n > q_{n+1}$.

§2 正数的拆分

这一节我们主要讨论课本上的问题:

将正数 s 拆分若干个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使它们的乘积最大.

首先, 在变量的个数 n 确定的情况下,

$$a_1 a_2 \cdots a_n \le \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^n = \left(\frac{s}{n} \right)^n .$$

那么我们就重点研究

$$\{p_n\} = \left\{ \left(\frac{s}{n} \right)^n \right\}$$

的最大值.

类似于“差分”的思想, 我们可以将此数列相邻两项做商, 通过比较这个商与 1 的大小从而判断哪一项更大.

记

$$k_n = \frac{p_n}{p_{n+1}}.$$

那么

$$\begin{aligned} k_n &= \left(\frac{s}{n}\right)^n \bigg/ \left(\frac{s}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{s^n (n+1)^{n+1}}{s^{n+1} n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n s} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \bigg/ \frac{s}{n+1} \\ &< \frac{\mathrm{e}(n+1)}{s}. \end{aligned}$$

可见, 当 $\mathrm{e}(n+1) \le s$, 即

$$n \le \frac{s}{\mathrm{e}} - 1$$

时, $k_n < 1$, 即 $p_n < p_{n+1}$, 此时 $\{p_n\}$ 递增.

又

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{s^n (n+1)^{n+1}}{s^{n+1} n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n s} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Bigg/ \frac{s}{n} \\ &> \frac{\mathrm{e} n}{s}. \end{aligned}$$

所以, 当 $\mathrm{e}n \geq s$, 即

$$n \geq \frac{s}{\mathrm{e}}$$

时, $k_n > 1$, 即 $p_n > p_{n+1}$, 此时 $\{p_n\}$ 递增.

所以

$$\frac{s}{\mathrm{e}} - 1 \leq x \leq \frac{s}{\mathrm{e}}$$

时 $\{p_n\}$ 取得最大值. 若 s 不为 e 的整数倍, 那么由上式确定的 n 就是唯一确定的; 否则, 容易证明 $n = s/\mathrm{e}$ 时取到最大值.

可以注意到, 由

$$\frac{s}{\mathrm{e}} - 1 \le x \le \frac{s}{\mathrm{e}}$$

可知 n 很接近 s/e, 此时每一份都很接近 $s/n = \mathrm{e}$. 可见, 当每一份最接近 e 的时候, 乘积最大.

§3 课后练习

这个练习本质上就是求周长一定的正多边形的面积的关系.

不妨设周长为定长 C, 边数为大于等于 3 的正整数 n. 我们先来求这个多边形的面积 S_n.

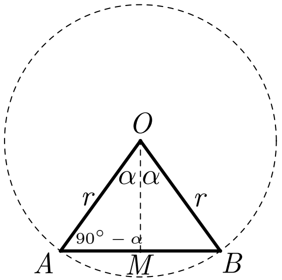
如图, 展示了此多边形的一条边 AB.
如图作辅助线. 其中, $\alpha = 180^\circ/n$,
$AB = C/n$.
所以, $AM = AB/2 = C/2n$,

$$r = \frac{AM}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{C}{2n\sin\alpha}.$$

所以,

$$S_n = nS_{\triangle ABC} = \frac{nr^2 \sin 2\alpha}{2}$$

$$= n\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{C^2}{4n^2\sin^2\alpha} = \frac{C^2}{4n\tan\alpha}.$$



至此, 我们已经给出了 S_n 的一般公式. 不过, 研究这个公式的增减性已经超出了我们目前的能力范围.

我们回到书中的数据, 即 $C=20$, 分别求出 S_4, S_6, S_8, S_{12}, S_∞(可以简单地理解为圆). 轻易计算可以得出

$$S_4=25, S_6=\frac{50\sqrt{3}}{3}=28.8675\cdots, S_8=\frac{25(1+\sqrt{2})}{2}=30.1777\cdots,$$

$$S_{12}=\frac{50+25\sqrt{3}}{3}=31.1004\cdots, S_\infty=\frac{100}{\pi}=31.8310\cdots.$$

可见, 当 n 增加时, S_n 也在不断地增加, 直到趋于 $100/\pi$.