每日一题(9.2)答案

选题: 李政毅

答案制作:程昊一

2022 年 3 月 9 日

1. 若$m^2=n+2, n^2=m+2\ (m\neq n)$, 求$m^3-2mn+n^3$的值.

解(方法一) 我们使用**降次**的思想.

将前式代入所求的式子,得到

$$m(n+2)-2mn+n(m+2),$$

即

$$2m+2n.$$

现在的任务就是求出$m+n$.

将条件中的两个式子相减,得到

$$m^2-n^2=n-m,$$

即

$$(m-n)(m+n)=-(m-n).$$

$\because m\neq n, \therefore m-n\neq 0, \therefore m+n=-1.$

所以, 原式$=-2$.

方法2 由原式, 得

$$\begin{cases} m^2-n=2 \\ n^2-m=2 \end{cases},$$

所以,

$$\begin{aligned} m^3-2mn+n^3 &= \left(m^3-mn\right)+\left(n^3-mn\right) \\ &= m\left(m^2-n\right)+n\left(m^2-n\right) \\ &= 2m+2n \\ &= -2. \end{aligned}$$

2. 已知$a+b-c=9, a^2+b^2+c^2=27$, 求$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}$的值.

分析 打眼一看这道题的每一个式子都是关于a, b, c的轮换式[1]. 可是第一个式子中c的符号为负, 所以这道题一定另有解法.

解 (2)式减去6×(1), 得

$$a^2+b^2+c^2-6a-6b+6c=-27.$$

进行配方, 得

$$\left(a^2-6a+9\right)+\left(b^2-6b+9\right)+\left(c^2+6c+9\right)=0,$$

即

$$(a-3)^2+(b-3)^2+(c+3)^2=0,$$

得$a=b=3$, $c=-3$.

代入原式, 得原式=$3^2$009.

[1]所谓轮换式,就是依次交换a, b, c(即$a\to b$, $b\to c$, $c\to a$), 所得到的式子仍然保持不变. 例如, 对于式$ab+bc+ca$, 依次交换a, b, c后, 为$bc+ca+ab$, 与原式相同, 所以$ab+bc+ca$是关于a, b, c的轮换式.