每日一题(5.2)答案

选题:门宇翎、李东宸

答案制作:程昊一

2022 年 1 月 12 日

1.若n为正整数,2^n+1为素数,求证:n为2的幂,即存在自然数k,使得$n=2^k$.
(门宇翎供题)

分析 这道题与每日一题(5.1)中的第一题很类似,我们仍然采用反证法,但我们要考虑清楚"n为2的幂"的反面是什么.

解 假设n不为2的幂,即存在一个大于1的奇数n_1,使得$n_1 \mid n$.记$\dfrac{n}{n_1}=n_2$. 那么,

$$\begin{aligned}2^n+1&=2^{n_1\times n_2}+1\\&=(2^{n_2})^{n_1}+1\\&=(2^{n_2}+1)[(2^{n_2})^{n_1-1}-(2^{n_2})^{n_1-2}+(2^{n_2})^{n_1-3}-\cdots+1]\end{aligned}$$

在这里,我们把2^n+1分解成了大于1的两个数的乘积,所以2^n+1不是素数,与题目矛盾!

所以,假设不成立,即n为2的幂.

注 我们利用了一个公式:

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\cdots+1)$$

其中n是奇数.

更一般地:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3)+\cdots+b^{n-1}$$

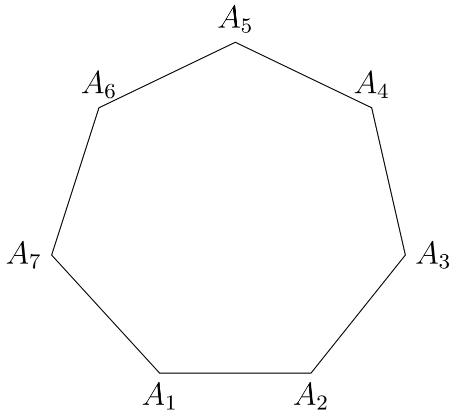
其中n是奇数.

2.将正七边形的七个顶点染红、蓝两色,证明必存在一个顶点均同色的等腰三角形.
(李东宸供题)

解 我们设这个正七边形的七个顶点设为$A_1,A_2,\ldots,A_7$.

由于抽屉原理,对于某种颜色,至少有4个点被染成了这种颜色.不妨设有至少4个红色的点,且A_1被染成了红色.

如果四个红点中有3个连续的,那么命题成立.如果没有3个连续的,那么必定会有2个红点



在同一条边上,我们不妨设A_1和A_2均为红色.我们按A_5的颜色进行分类讨论.

(1) 若A_5为红色,则$\triangle A_1A_2A_5$为等腰三角形,而且A_1, A_2, A_5都为红色,命题成立.

(2) 若A_5为蓝色,因为红点中没有三个连续的,所以A_7, A_3均不是红色,即A_7, A_3都是蓝色,此时$\triangle A_3A_5A_7$为符合要求的等腰三角形,命题成立.

综上:命题得证.