

每日一题(8.2)答案

选题:门宇翎、李东宸

答案制作:程昊一

2022 年 2 月 27 日

1. 若 x, y 均为实数, 且满足方程

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0,$$

求 $x + 2y$ 的值.

(李东宸供题)

分析 这个方程有两个未知数, 而且未知数不是整数, 所以尝试用配方以及平方式的非负性解决.

解 原方程等价于

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 0,$$

即

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0.$$

由于平方式的非负性, 得知

$$\begin{cases} x + 2 = 0; \\ y - 3 = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = -2; \\ y = 3. \end{cases}$$

2. 某会议共有 30 名议员, 每两个人之间互相的关系为朋友或政敌. 每个人都有且仅有 6 个政敌. 每 3 个人组成一个委员会. 若一个委员会内的三个人的关系均为朋友或政敌, 则称这个委员会为“好委员会”. 求“好委员会”的数量.

(门宇翎供题)

分析 对于这样的问题, 我们一般将整个结构抽象成节点和线段. 例如, 在这道题中, 我们将议员看做点, 若两个议员之间为朋友关系, 就将这两个点之间连上蓝色的线段; 反之则连接红色线段.

我们再来考虑“好委员会”在这个结构中代表什么. 显然, 如果三个点(议员)构成“好委员会”, 那么以这三个点为顶点的三角形的三条边应该是同色的, 我们称之为**同色三角形**, 如图1所示. 如果三个人不构成“好委员会”, 那么对应的三角形三边应该是不同色的, 我们称之为**异色三角形**, 如图2所示.

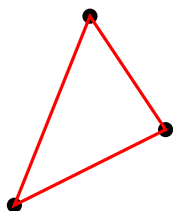


图 1: 同色三角形

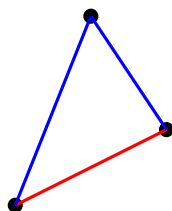


图 2: 异色三角形

我们再去考虑从哪方面下手. 我们可以设同色三角形的个数为 x , 异色三角形的个数为 y , 这样我们得到了第一个方程:

$$x + y = (\text{三角形的总个数}) = C_{30}^3.^1$$

我们要想办法找到第二个方程. 事实上, 处理这种图论问题时, 我们有一个思想: **对**. 即如果我们的基本对象为点, 那么我们可以尝试分析“点对”, 即“边(线段)”; 如果我们研究的是边(线段), 那么我们可以考虑“边对”, 即“角”.

在这里, 我们研究角, **同色角**(如图3所示)与**异色角**(如图4所示).

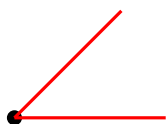


图 3: 同色角

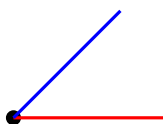


图 4: 异色角

很显然, 每一个同色三角形提供3个同色角, 每一个异色三角形提供1个同色角. 那么, 同色角的总个数应该是 $3x + y$. 另一方面, 对每一个顶点来说, 同色角的个数为 C_{23}^2 (蓝色同色角个数) $+ C_6^2$ (红色同色角个数), 即268个. 所以, 同色角共有 268×30 , 即8040个.

那么, 我们就找到了第二个方程:

$$3x + y = 8040.$$

¹这里的 C_{30}^3 是指从30个物体中随意挑选3个物体的方法总数, 在题目中的意义就是随意挑选3个议员的方法数, 即三角形的个数. 一般地, C_m^n 表示从 m 个物体中随意挑选 n 个物体的方法的总数($m \geq n$).

然后, 解方程就是了.

还有一个问题: 为什么不用考虑异色角? 你可以尝试一下, 最后会发现所列出来的方程可以由我们已经得到的两个方程推出.

我们把过程书写一遍:

解 将议员看做点, 若两个议员之间为朋友关系, 就将这两个点之间连上蓝色的线段; 反之则连接红色线段.

在这个结构中, 设同色三角形有 x 个, 异色三角形有 y 个, 那么从三角形总数的角度, 下列方程成立:

$$x + y = C_{30}^3 = 4060; \quad (1)$$

从同色角的角度, 应有

$$3x + y = 30 \times (C_{23}^2 + C_6^2) = 8040. \quad (2)$$

联立(1)与(2)得

$$\begin{cases} x = 1990; \\ y = 2070. \end{cases}$$

综上: “好委员会”的数量为1990.