阅读材料, 回答问题.

向量指有大小和方向的量. 向量可以形象地用一个带箭头的线段表示. 如下图所示, 这是一个起点为A, 终点为B的向量, 写作$\overrightarrow{AB}$. 也可以用单个字母上加一个小箭头$\overrightarrow{a}$表示一个向量. 一般在向量两侧添上竖线(例如$|\overrightarrow{a}|$)来表示向量的大小, 即箭头的长度.

图 1: 向量可以用一个带箭头的线段形象地表示.

事实上, 向量的概念起源于物理. 物理中的很多量, 例如速度、力、电场强度等都是用向量(在物理中, 更多地称为“矢量”)描述的. 位移是其中的典型代表, 我们以此说明向量的基本概念.

例如, 一个人站在平面上的A点, 他从A点走到B点(我们并不关心他的路径, 只关心起点和终点), 那么我们可以说这个人的位移是$\overrightarrow{AB}$. 在某些时候, 像这样用位移等概念思考向量, 可以建立对向量这个概念的某些感性认知. 后面介绍更多概念时, 可以尝试通过这种方法去理解.

有一种向量很特殊, 称为零向量, 记作$\overrightarrow{0}$. 顾名思义, 零向量的大小是0. 为了方便, 我们定义: $\overrightarrow{0}$的方向是任意的.

称两个向量相等, 当且仅当这两个向量大小相等, 且方向相同. 例如, 对于平行四边形$ABCD$, 我们有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 请试着自己画一个图, 体会向量相等的概念.

向量可以做加法运算, 我们仍然用位移的概念解释: 设想一个人站在平面上的A点, 他走向了B点, 又走向了C点.

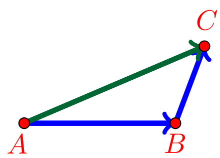


图 2: 向量的加法

一方面, 作为一个完整的过程, 这个人的起点是A, 终点是C, 那么这个人的位移应该是$\overrightarrow{AC}$; 另一方面, 这个完整的过程可以分解为两个过程, 即这个人从A到B和从B到C, 两个过程的位移分别是$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$. 我们自然地认为, 总位移应该是两个位移之和, 即应有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

于是, 我们将向量的加法定义如下: 两个向量相加, 将两个向量首尾相接, 结果为从第一个向量的起点指向最后一个向量的终点的向量. 多个向量相加的定义可以由两个向量相加的定义导出. 这就是向量加法的基本概念.

我们也可以把两个向量相减. 我们定义: $\overrightarrow{a}$减去$\overrightarrow{b}$, 其结果为$\overrightarrow{a}$加上$\overrightarrow{b}$的相反向量. 相反向量, 就是大小相同、方向相反的向量. 例如在平行四边形$ABCD$中, $\overrightarrow{AB}$是$\overrightarrow{CD}$的相反向量, 记为$-\overrightarrow{CD}$. 于是,

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+\left(-\overrightarrow{b}\right).$$

我们还可以把向量和一个实数相乘, 称为向量的数乘. 比如, 对于正整数n和向量$\overrightarrow{a}$, 我们可以定义它们的乘积(写作$n\overrightarrow{a}$)为

$$n\overrightarrow{a}=\underbrace{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}+\cdots+\overrightarrow{a}}_{n\text{个}}.$$

对于正实数x与向量$\overrightarrow{a}$, 我们定义它们的乘积$x\overrightarrow{a}$是这样的一个向量, 它的大小是$x\cdot|\overrightarrow{a}|$, 方向与$\overrightarrow{a}$相同. 对于负实数$-x$, 定义$(-x)\overrightarrow{a}=-(x\overrightarrow{a})$. 图3给出了一些例子.

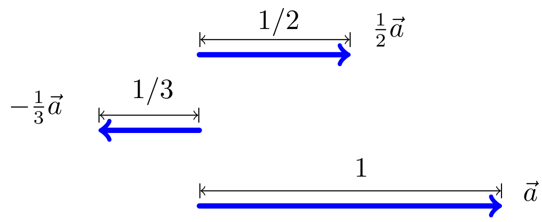
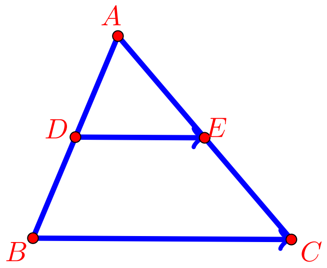


图 3: 向量的数乘

再来看一个例子: 如图, $\triangle ABC$中, D,E为边AB,AC的中点, 则有$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{DE}$.(为什么?)

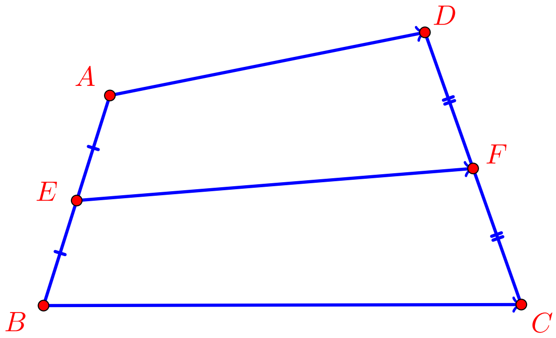


当然, 向量之间也可以做乘法, 但较为复杂, 在这里不做进一步讨论.

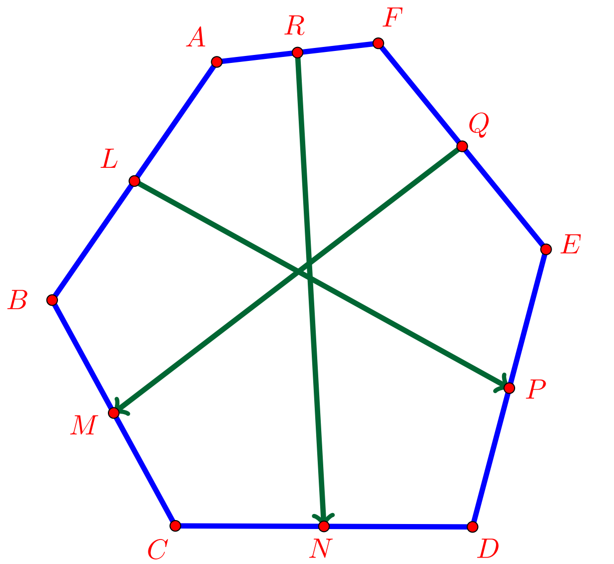
1. 如图, 四边形$ABCD$的边AB, CD的中点为E, F. 求证:

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$$

(提示: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$.)



2. 如图, 六边形$ABCDEF$各边中点为L, M, N, P, Q, R. 求证: $\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{QM}$.
(提示: 利用第1题的结果, 将$\overrightarrow{RN}$“拆开”.)



3. 平面内有一点A与线段BC, 线段BC上有一点D. 求证: 存在正实数x, y, 满足$x+y=1$, 且

$$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}.$$