$Homework \quad 2$

问题 1. 证明 Lucas 定理.

问题 2. 给出(可数)无限多个函数$f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, 使得任两个都不可比较, 即对任意$i \neq j, f_i \notin O(f_j)$.

问题 3. 找出并严格证明下列函数f的量级:

(a) $f(n) = 1^{10} + 2^{10} + \cdots + n^{10}$;

(b) $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$;

(c)令$r(k)$为k的约数的个数. $f(n) = r(1) + r(2) + \cdots + r(n)$;

(d)令$\phi(k)$为$[k]$中和k互质的数的个数, $f(n) = \phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(n)$;

(e) $f(1) = 1$,并且对任意$n > 1$,

$$f(n) = 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + n.$$

问题 4. 证明:对任意自然数 n 和 m

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$

问题 5. 给定正整数 $m, n (2 \leq n \leq m)$. 设$a_1, a_2, \ldots, a_m$是$1, 2, \ldots, m$中任取 n 个互不相同的数构成的一个排列. 如果存在$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$使得$a_k + k$为奇数, 或者存在整数$k, l$ $(1 \leq k < l \leq n)$,使得$a_k > a_l$,则称$a_1, a_2, \ldots, a_n$是一个好排列. 试确定所有好排列的个数.

问题 6. 对任意一个 0 到$2^{2020} - 1$之间的整数x,定义

$$f(x) = \{i : 0 \leq i < 2020, x\text{的二进制表示的第}i\text{位为}1\}$$

其中我们定义整数的二进制表示的最低位为第 0 位.
有多少对整数 (a, b)使得$0 \leq a, b < 2^{2020}$,并且

$$ab = f^{-1}(f(a) \cup f(b)) f^{-1}(f(a) \cap f(b))?$$

问题 7. 集合$A_0 = \{0\}, A_1 = \{1\}, A_{n+1} = (A_1 + A_{n+1}) \Delta A_n$.证明有无穷多个 n使得$|A_n| = 1$.

问题 8. 用多种方该证明下列组合恒等式.

(a)对任意正整数n,a,b,

$$\sum_k \binom{k}{a}\binom{n-k}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}.$$

(b)对任意正整数n,

$$\sum_k \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}2^{n-2k} = \binom{2n}{n}.$$

(c)对任意正整数 a 和b,

$$\sum_i \binom{a}{i}\binom{b+i}{a} = \sum_i \binom{a}{i}\binom{b}{i}2^i.$$

(d)对任何正整数n,m,

$$\sum_r \binom{n}{2r-1}\binom{r-1}{m} = \binom{n-m-1}{m}2^{n-2m-1}.$$

问题 9. 给定正整数n, 定义

$$D_k = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1).$$

求k使得D_k取到最大值.

问题 10. 求证：对任意自然数n,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

问题 11. 将 n 个硬币扔在地上. 每个硬币都可能是正面或反面向上. 在每种情况中, 计算正面的个数和反面的个数的差的绝对值. 所有的 2^n种情况中上述值之和为多少?

问题 12. 有多少个函数$f:[t]\to[n]$满足：对任意$1\le a\le n$,

$$|f^{-1}([a])| < a?$$

注意$f^{-1}(X)$是所有被f射到X中的点的点组成的集合. 所以上面的要求是：对每个a, $[t]$中取值不超过a的点少于 a.

问题 13. 证明：对任意正整数n,p,q,

$$\binom{n}{p}\binom{n}{q} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}\binom{n-p}{q-k}.$$

问题 14. 证明：对任意正整数n,p,q,

$$\binom{n}{p}\binom{n}{q} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}.$$