

# Zbierka úloh z kombinatorickej analýzy (1)

(upravené 30. marca 2012 o 16:57)

## Časť 0. Úvod

V zbierke sú použité nasledovné symboly:

$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	množina prirodzených čísel s nulou $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\lg x$	dvojkový logaritmus $x$
$= / \dots / =$	substitúcia, poznámka vysvetľujúca úpravu

## Časť 1. Example

**Príklad 1.1.** Vypočítajte sumu  $\sum_{k=0}^n k$ .

**Riešenie:** (*autor*)

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n (n - k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Príklad 1.2.** ďalší príklad

**Riešenie:** (*iny autor*) ďalšie riešenie

## Časť 2. Celé časti

**Príklad 2.1.** Vypočítajte:  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ .

**Príklad 2.2.** Majme postupnosť  $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, n-1, \underbrace{n, \dots, n}_{n\text{-krát}}, n+1, \dots\} = \{a_n\}_{n \geq 1}$ . Dokážte, že

$$a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

**Príklad 2.3.** Určte všetky  $n \in \mathbb{N}_0$ , pre ktoré neplatí vzťah  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ .

**Príklad 2.4.** Pre  $x \in \mathbb{R}$  riešte rovnicu  $\lfloor x \rfloor^2 = \lceil x \rceil^2$ .

**Príklad 2.5.** Pre  $x \in \mathbb{R}$  riešte rovnicu  $\lceil \frac{1}{2} \lceil x \rceil \rceil = \lfloor x \rfloor$ .

**Príklad 2.6.** Dokážte:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$ .

**Príklad 2.7.** Pre ktoré  $x \geq 3, x \in \mathbb{R}$  platí  $\lceil \log_3(x-1) \rceil \neq \lceil \log_3 \lfloor x \rfloor \rceil$ ?

**Príklad 2.8.** Charakterizujte dvojice  $x, y \in (0, 1) : \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor + \lfloor y + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x+y \rfloor > 3 \lfloor x+y + \frac{1}{3} \rfloor$ .

**Príklad 2.9.** Vypočítajte:  $\sum_{k=1}^n \lfloor \lg k \rfloor$ .

**Príklad 2.10.** Vypočítajte:  $\sum_{k=1}^{3n+2} \left\lfloor \frac{k+1}{3} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ .

**Príklad 2.11.** Vypočítajte:  $\sum_{k=1}^n \left\lfloor \lg \sqrt{4k} \right\rfloor$ .

**Príklad 2.12.** Vypočítajte:  $\sum_{k=1}^{2nm} k^2 (-1)^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor}, n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ .

## Časť 3. Binomické koeficienty

**Príklad 3.1.** Vypočítajte:  $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Riešenie:** (*Stanek*)

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!} &= \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k!}{(n+1+k)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(n-k)! (n+1+k)!} = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(n-k)! (n+1+k)!} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} = \frac{n!}{(2n+1)!} \sum_{k \geq 0} \binom{2n+1}{n-k} = \\ &= \frac{n!}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = \frac{n!}{(2n+1)!} \left( \frac{1}{2} 2^{2n+1} \right) = \frac{n!}{(2n+1)!} 2^{2n} \end{aligned}$$

**Príklad 3.2.** Vypočítajte:  $\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Riešenie:** (*Laco*) Ak  $n < 0$ , potom aj  $k < 0$  a všetky kombinačné čísla sú nulové, takže aj výsledná suma je nulová. Ak  $n = 0$ , tak jedine pre  $k = 0$  obsahuje suma nenulový člen a je rovná 1. Ak  $n > 0$ , môžeme použiť binomickú vetu:

$$\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \frac{1}{2^n} (1+2)^n = \left( \frac{3}{2} \right)^n.$$

**Príklad 3.3.** Vypočítajte:  $\sum_{k \geq n} \binom{k}{n} 2^{n-k}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Riešenie:** (*Stanek*) Ak  $n < 0$ , dolný index v každom kombinačnom čísle je záporný a teda hodnota celej sumy je nula. Ďalej budeme predpokladať, že  $n \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq n} \binom{k}{n} 2^{n-k} &= \sum_{n \leq k} \binom{k-n-k-1}{k-n} (-1)^{k-n} 2^{n-k} = \sum_{n \leq k} \binom{-n-1}{k-n} (-2)^{n-k} = \\ &= \left/ \begin{matrix} l = k-n \\ k = n+l \end{matrix} \right/ = \sum_{n \leq n+l} \binom{-n-1}{l+n-n} (-2)^{n-l-n} = \sum_{0 \leq l} \binom{-n-1}{l} (-2)^{-l} = \\ &= \sum_{0 \leq l} \binom{-n-1}{l} \left( -\frac{1}{2} \right)^l = \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-n-1} = 2^{n+1} \end{aligned}$$

**Príklad 3.4.** Vypočítajte:  $\sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left( \frac{1}{2} \right)^k k$ .

**Riešenie:** (*Laco*)

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left( \frac{1}{2} \right)^k k &= \sum_k \frac{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left( \frac{1}{2} \right)^k k = -\frac{1}{4} \sum_k \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1} \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} = -\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

**Príklad 3.5.** Vypočítajte:  $\sum_{l \geq 2} (-1)^l \binom{\lfloor e^m \rfloor}{m-l}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Príklad 3.6.** Vypočítajte:  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Riešenie:** (*Stanek*)

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2} \frac{(k+1)(n+1)(n+2)}{(k+1)(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} (k+1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} (k+2) - \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} \right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( (n+2) \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} \right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( (n+2) \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+2} \binom{n+2}{k} \right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( (n+2) \left( 2^{n+1} - \binom{n+1}{0} \right) - \left( 2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1} \right) \right) = \\
&= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

**Príklad 3.7.** Vypočítajte:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^2$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Riešenie:** (Stanek)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^2 &= n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} k (-1)^k = n \left( \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (k-1) (-1)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k \right) = \\
&= \left/ \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k = 0 \text{ pre } n \geq 2 \right/ = n(n-1) \sum_{k=0}^n \binom{n-2}{k-2} (-1)^k = 0 \text{ pre } n \geq 3
\end{aligned}$$

Pre  $n \geq 3$  je suma rovná 0, pre  $n \in \{0, 1, 2\}$  jej hodnotu spočítame dosadením.

**Príklad 3.8.** Vypočítajte:  $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}_0$ .

**Riešenie:** (Laco) Najprv upravím podmienku,  $m$  nemôže byť 0, inak by zlomok v sume nebol definovaný, takže ďalej už uvažujem len  $m > 0$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k} &= \left/ x = \frac{n+1}{m} \right/ = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k = \\
&= (-1)^n \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k - \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} (-1)^{n+1} \right) = \\
&= (-1)^n (1-x)^{n+1} - (-1)^{2n+1} x^{n+1} = (-1)^n (1-x)^{n+1} + x^{n+1} = \\
&= (-1)^n \left( \frac{m-n-1}{m} \right)^{n+1} + \left( \frac{n+1}{m} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

**Príklad 3.9.** Vypočítajte:  $\sum_{k \geq 1} \frac{n+1}{k} \binom{n+1}{2k-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Príklad 3.10.** Vypočítajte:  $\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k$ ,  $m, n, p \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq n \geq 0$ .

**Riešenie:** (Stanek)

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k &= \left/ \binom{n}{p} \binom{p}{2n-k} = \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k-2n+p} \right/ = \\
&= \binom{n}{p} \sum_k \binom{p}{2n-k} \binom{2m+k-k+3p-1}{2m+k} = \text{/konvolúcia/} \\
&= \binom{n}{p} \binom{2m+4p-1}{2n+2m}
\end{aligned}$$

## Časť 4. Binomické koeficienty 2

**Príklad 4.1.** Vypočítajte:  $\sum_{k=n}^{n^2} H_{k-1} \binom{k}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Příklad 4.2.** Vypočítajte:  $\sum_{1 \leq k, j \leq n} \binom{k+j+2007}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Příklad 4.3.** Vypočítajte:  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{n-k} (k+1)$ .