Zbierka úloh z kombinatorickej analýzy (1)

(upravené 30. marca 2012 o 11:49)

Časť 0. Úvod

V zbierke sú použité nasledujúce symboly:

$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel $\{1, 2, 3 \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	množina prirodzených čísel s nulou $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}$
$= / \ldots / =$	použitá substitúcia, poznámka vysvetľujúca úpravu

Časť 1. Example

Príklad 1.1. Vypočítajte sumu $\sum_{k=0}^{n} k$.
Riešenie: *(autor)*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Príklad 1.2. dalsi priklad
Riešenie: *(iny autor)* dalsie riesenie

Časť 2. Binomické koeficienty

Príklad 2.1. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!} &= \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{k!}{(n+1+k)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(n-k)!\,(n+1+k)!} = \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(n-k)!\,(n+1+k)!} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} = \frac{n!}{(2n+1)!} \sum_{k \geq 0} \binom{2n+1}{n-k} = \\
&= \frac{n!}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \frac{n!}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2} 2^{2n+1} \right) = \frac{n!}{(2n+1)!} 2^{2n}
\end{aligned}$$

Príklad 2.2. Vypočítajte: $\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Laco)* Ak $n < 0$, potom aj $k < 0$ a všetky kombinačné čísla sú nulové, takže aj výsledná suma je nulová. Ak $n = 0$, tak jedine pre $k = 0$ obsahuje suma nenulový člen a je rovná 1. Ak $n > 0$, môžeme použiť binomickú vetu:

$$\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \frac{1}{2^n} (1+2)^n = \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

Príklad 2.3. Vypočítajte: $\sum_{k \geq n} \binom{k}{n} 2^{n-k}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Stanek)* Ak $n < 0$, dolný index v každom kombinačnom čísle je záporný a teda hodnota celej sumy je nula. Ďalej budeme predpokladať, že $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq n} \binom{k}{n} 2^{n-k} &= \sum_{n \leq k} \binom{k-n-k-1}{k-n} (-1)^{k-n} 2^{n-k} = \sum_{n \leq k} \binom{-n-1}{k-n} (-2)^{n-k} = \\
&= \Big/ \begin{matrix} l = k-n \\ k = n+l \end{matrix} \Big/ = \sum_{n \leq n+l} \binom{-n-1}{l+n-n} (-2)^{n-l-n} = \sum_{0 \leq l} \binom{-n-1}{l} (-2)^{-l} = \\
&= \sum_{0 \leq l} \binom{-n-1}{l} \left(-\frac{1}{2} \right)^l = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{-n-1} = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Príklad 2.4. Vypočítajte: $\sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k k$.
Riešenie: *(Laco)*

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k k &= \sum_k \frac{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k k = -\frac{1}{4} \sum_k \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k-1} \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Príklad 2.5. Vypočítajte: $\sum_{l \geq 2} (-1)^l \binom{\lfloor l^m \rfloor}{m-l}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Príklad 2.6. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Príklad 2.7. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^2 &= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} k (-1)^k = n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} (k-1)(-1)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k \right) = \\ &= \Big/ \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k = 0 \text{ pre } n \geq 2 \Big/ = n(n-1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k-2} (-1)^k = 0 \text{ pre } n \geq 3 \end{aligned}$$

Pre $n \geq 3$ je suma rovná 0, pre $n \in \{0, 1, 2\}$ jej hodnotu spočítame dosadením.

Príklad 2.8. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Laco)* Najprv upravím podmienku, m nemôže byť 0, inak by zlomok v sume nebol definovaný, takže ďalej už uvažujem len $m > 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k} &= \Big/ x = \frac{n+1}{m} \Big/ = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k = \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k - \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} (-1)^{n+1} \right) = \\ &= (-1)^n (1-x)^{n+1} - (-1)^{2n+1} x^{n+1} = (-1)^n (1-x)^{n+1} + x^{n+1} = \\ &= (-1)^n \left(\frac{m-n-1}{m}\right)^{n+1} + \left(\frac{n+1}{m}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Príklad 2.9. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 1} \frac{n+1}{k} \binom{n+1}{2k-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 2.10. Vypočítajte: $\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \geq n \geq 0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k &= \Big/ \binom{n}{p} \binom{p}{2n-k} = \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k-2n+p} \Big/ = \\ &= \binom{n}{p} \sum_k \binom{p}{2n-k} \binom{2m+k-k+3p-1}{2m+k} = /\text{konvolúcia}/ \\ &= \binom{n}{p} \binom{2m+4p-1}{2n+2m} \end{aligned}$$

Časť 3. Binomické koeficienty 2

Príklad 3.1. Vypočítajte: $\sum_{k=n}^{n^2} H_{k-1} \binom{k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 3.2. Vypočítajte: $\sum_{1 \leq k, j \leq n} \binom{k+j+2007}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 3.3. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{n-k} (k+1)$.