Zbierka úloh z kombinatorickej analýzy (1)

(upravené 3. júna 2012 o 18:05)

Časť 0. Úvod

V zbierke sú použité nasledovné symboly:

$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel $\{1, 2, 3 \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	množina prirodzených čísel s nulou $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$
$\lg x$	dvojkový logaritmus x
$/ \dots /$	substitúcia, poznámka vysvetľujúca úpravu

Časť 1. Example

Príklad 1.1. Vypočítajte sumu $\sum_{k=0}^{n} k$.
Riešenie: *(autor)*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Príklad 1.2. dalsi priklad
Riešenie: *(iny autor)* dalsie riesenie

Časť 2. Celé časti

Príklad 2.1. Vypočítajte: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Príklad 2.2. Majme postupnosť $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, n-1, \underbrace{n, \dots, n}_{n-\text{krát}}, n+1, \dots\} = \{a_n\}_{n \geq 1}$. Dokážte, že

$$a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Príklad 2.3. Určte všetky $n \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré neplatí vzťah $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

Príklad 2.4. Pre $x \in \mathbb{R}$ riešte rovnicu $\lfloor x \rfloor^2 = \lceil x \rceil^2$.

Príklad 2.5. Pre $x \in \mathbb{R}$ riešte rovnicu $\left\lceil \frac{1}{2} \lceil x \rceil \right\rceil = \lfloor x \rfloor$.

Príklad 2.6. Dokážte: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Príklad 2.7. Pre ktoré $x \geq 3, x \in \mathbb{R}$ platí $\lceil \log_3 (x-1) \rceil \neq \lceil \log_3 \lfloor x \rfloor \rceil$?

Príklad 2.8. Charakterizujte dvojice $x, y \in \langle 0, 1) : \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor y + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x + y \rfloor > 3 \left\lfloor x + y + \frac{1}{3} \right\rfloor$.

Príklad 2.9. Vypočítajte: $\sum_{k=1}^{n} \lfloor \lg k \rfloor$.

Príklad 2.10. Vypočítajte: $\sum_{k=1}^{3n+2} \left\lfloor \frac{k+1}{3} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$.

Príklad 2.11. Vypočítajte: $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \lg \sqrt{4k} \right\rfloor$.

Príklad 2.12. Vypočítajte: $\sum_{k=1}^{2nm} k^2 (-1)^{\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor}$, $n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Časť 3. Binomické koeficienty

Príklad 3.1. Vypočítajte: $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\frac{k!}{(n+1+k)!}$, $n\in\mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\frac{k!}{(n+1+k)!} &= \sum_{k\geq 0}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{k!}{(n+1+k)!}=\sum_{k\geq 0}\frac{n!}{(n-k)!\,(n+1+k)!}= \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{n!}{(n-k)!\,(n+1+k)!}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!}=\frac{n!}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{n-k}= \\ &= \frac{n!}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\frac{n!}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}2^{2n+1}\right)=\frac{n!}{(2n+1)!}2^{2n}\end{aligned}$$

Príklad 3.2. Vypočítajte: $\sum_{k\leq n}\binom{n}{k}2^{k-n}$, $n\in\mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Laco)* Ak $n<0$, potom aj $k<0$ a všetky kombinačné čísla sú nulové, takže aj výsledná suma je nulová. Ak $n=0$, tak jedine pre $k=0$ obsahuje suma nenulový člen a je rovná 1. Ak $n>0$, môžeme použiť binomickú vetu:

$$\sum_{k\leq n}\binom{n}{k}2^{k-n}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\frac{1}{2^n}(1+2)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Príklad 3.3. Vypočítajte: $\sum_{k\geq n}\binom{k}{n}2^{n-k}$, $n\in\mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Stanek)* Ak $n<0$, dolný index v každom kombinačnom čísle je záporný a teda hodnota celej sumy je nula. Ďalej budeme predpokladať, že $n\geq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq n}\binom{k}{n}2^{n-k} &= \sum_{n\leq k}\binom{k-n-k-1}{k-n}(-1)^{k-n}\,2^{n-k}=\sum_{n\leq k}\binom{-n-1}{k-n}(-2)^{n-k}= \\ &= \Big/\begin{matrix}l=k-n\\ k=n+l\end{matrix}\Big/=\sum_{n\leq n+l}\binom{-n-1}{l+n-n}(-2)^{n-l-n}=\sum_{0\leq l}\binom{-n-1}{l}(-2)^{-l}= \\ &= \sum_{0\leq l}\binom{-n-1}{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^l=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-n-1}=2^{n+1}\end{aligned}$$

Príklad 3.4. Vypočítajte: $\sum_k\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k k$.
Riešenie: *(Laco)*

$$\begin{aligned}\sum_k\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k k &= \sum_k\frac{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{3}{2}}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k k=-\frac{1}{4}\sum_k\binom{-\frac{3}{2}}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}= \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k-1}\binom{-\frac{3}{2}}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Príklad 3.5. Vypočítajte: $\sum_{l\geq 2}(-1)^l\binom{\lfloor e^m\rfloor}{m-l}$, $m\in\mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Laco)* Aby v sume bol aspoň jeden dolný index v $\binom{\lfloor e^m\rfloor}{m-l}$ nezáporný, tak $m\geq 2$, inak je hodnota sumy 0. Pre dané $m\geq 2$ označme $\lfloor e^m\rfloor=c$, pričom vieme, že $c\geq\lfloor e^2\rfloor\geq\lfloor 2^2\rfloor\geq 4$. Zároveň v sume nám stačí uvažovať iba $m-l\geq 0$, teda $2\leq l\leq m$.

$$\begin{aligned}\sum_{l=2}^{m}(-1)^l\binom{c}{m-l} &= /k=m-l/=\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-k}\binom{c}{k}=(-1)^m\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\left(\binom{c-1}{k-1}+\binom{c-1}{k}\right)= \\ &= (-1)^m\left[\binom{c-1}{-1}+\binom{c-1}{0}-\binom{c-1}{0}-\cdots+(-1)^{m-2}\left(\binom{c-1}{m-3}+\binom{c-1}{m-2}\right)\right]= \\ &= (-1)^{2m-2}\binom{c-1}{m-2}=\binom{\lfloor e^m\rfloor-1}{m-2}\end{aligned}$$

Príklad 3.6. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{2n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+2}$, $n\in\mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+2} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+2}\frac{(k+1)(n+1)(n+2)}{(k+1)(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{2n}\binom{n+2}{k+2}(k+1) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{n+2}{k+2}(k+2)-\sum_{k=0}^{2n}\binom{n+2}{k+2}\right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+2)\sum_{k=0}^{2n}\binom{n+1}{k+1}-\sum_{k=0}^{2n}\binom{n+2}{k+2}\right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+2)\sum_{k=1}^{2n+1}\binom{n+1}{k}-\sum_{k=2}^{2n+2}\binom{n+2}{k}\right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left((n+2)\left(2^{n+1}-\binom{n+1}{0}\right)-\left(2^{n+2}-\binom{n+2}{0}-\binom{n+2}{1}\right)\right) = \\
&= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}-\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Príklad 3.7. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^2$, $n\in\mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^2 &= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}k(-1)^k = n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}(k-1)(-1)^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k\right) = \\
&= \Big/\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k = 0 \text{ pre } n\geq 2\Big/ = n(n-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-2}(-1)^k = 0 \text{ pre } n\geq 3
\end{aligned}$$

Pre $n\geq 3$ je suma rovná 0, pre $n\in\{0,1,2\}$ jej hodnotu spočítame dosadením.

Príklad 3.8. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{n+1}{m}\right)^k(-1)^{n+k}$, $n,m\in\mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Laco)* Najprv upravím podmienku, m nemôže byť 0, inak by zlomok v sume nebol definovaný, takže ďalej už uvažujem len $m>0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{n+1}{m}\right)^k(-1)^{n+k} &= \Big/x=\frac{n+1}{m}\Big/ = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k(-1)^k = \\
&= (-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k(-1)^k-\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}(-1)^{n+1}\right) = \\
&= (-1)^n(1-x)^{n+1}-(-1)^{2n+1}x^{n+1} = (-1)^n(1-x)^{n+1}+x^{n+1} = \\
&= (-1)^n\left(\frac{m-n-1}{m}\right)^{n+1}+\left(\frac{n+1}{m}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Príklad 3.9. Vypočítajte: $\sum_{k\geq 1}\frac{n+1}{k}\binom{n+1}{2k-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Príklad 3.10. Vypočítajte: $\sum_k\binom{n}{2n-k}\binom{-n+k}{k+2n+p}\binom{k-3p}{2m+k}(-1)^k$, $m,n,p\in\mathbb{Z}$, $m\geq n\geq 0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}
\sum_k\binom{n}{2n-k}\binom{-n+k}{k+2n+p}\binom{k-3p}{2m+k}(-1)^k &= \Big/\binom{n}{p}\binom{p}{2n-k}=\binom{n}{2n-k}\binom{-n+k}{k-2n+p}\Big/ = \\
&= \binom{n}{p}\sum_k\binom{p}{2n-k}\binom{2m+k-k+3p-1}{2m+k} = /\text{konvolúcia}/ \\
&= \binom{n}{p}\binom{2m+4p-1}{2n+2m}
\end{aligned}$$

Časť 4. Binomické koeficienty 2

Príklad 4.1. Vypočítajte: $\sum_{k=n}^{n^2} H_{k-1}\binom{k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 4.2. Vypočítajte: $\sum_{1\le k,j\le n}\binom{k+j+2007}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 4.3. Vypočítajte: $\sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{n-k}(k+1)$.

Časť 5. Midterm 12.4.2012

Príklad 5.1. Vypočítajte: $\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le j\le k}\binom{j-k}{j}$.
Riešenie: *(Stanek)* Ak je $n \le 0$, výsledok je 0. Ak $n >$, potom

$$\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le j\le k}\binom{j-k}{j} = \sum_{1\le k\le n}\left(\binom{k-k+1}{k} - \binom{0-k+1}{0}\right) = \sum_{1\le k\le n}\binom{1}{k} - \sum_{1\le k\le n}\binom{1-k}{0} = 1-n$$

Príklad 5.2. Vypočítajte: $\sum_{0\le k\le n^2}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor\cdot\left\lceil\sqrt{k}\right\rceil, n \in \mathbb{N}$.

Príklad 5.3. Vypočítajte: $\sum_{1\le k\le n} H_k^{(2)}k, n \in \mathbb{N}$.

Príklad 5.4. Vyriešte rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} g_0 &= 1 \\ 2g_n &= \alpha g_{n-1} + \frac{n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha \ne 2 \end{aligned}$$

Príklad 5.5. Vypočítajte: $\sum_{k\ge -1}(-1)^{k+1}\binom{n}{2012-k}, n \in \mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned} \sum_{k\ge -1}(-1)^{k+1}\binom{n}{2012-k} &= \Bigg/ \begin{matrix} 2012-k=l \\ k=2012-l \end{matrix} \Bigg/ = \sum_{2012-l\ge -1}(-1)^{2012-l+1}\binom{n}{l} = -\sum_{l\le 2013}(-1)^l\binom{n}{l} = \\ &= -\sum_{l\le 2013}\binom{l-n-1}{l} = -\binom{2013-n-1+1}{2013} = -\binom{2013-n}{2013} \end{aligned}$$

Iné riešenie: *(Stanek)*

$$\sum_{k\ge -1}(-1)^{k+1}\binom{n}{2012-k} = \sum_{k\ge -1}\binom{-1}{k+1}\binom{n}{2012-k} = /\text{konvolúcia}/ = \binom{n-1}{2013}$$