

Zbierka úloh z kombinatorickej analýzy (1)

(upravené 30. marca 2012 o 15:39)

Časť 0. Úvod

V zbierke sú použité nasledovné symboly:

| | |
|-----------------|--|
| \mathbb{N} | množina prirodzených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$ |
| \mathbb{N}_0 | množina prirodzených čísel s nulou $\{0, 1, 2, \dots\}$ |
| \mathbb{Z} | množina celých čísel $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ |
| $= / \dots / =$ | substitúcia, poznámka vysvetľujúca úpravu |

Časť 1. Example

Príklad 1.1. Vypočítajte sumu $\sum_{k=0}^n k$.

Riešenie: (*autor*)

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n (n-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Príklad 1.2. ďalší príklad

Riešenie: (*iny autor*) ďalšie riešenie

Časť 2. Binomické koeficienty

Príklad 2.1. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Riešenie: (*Stanek*)

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!} &= \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k!}{(n+1+k)!} = \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(n-k)! (n+1+k)!} = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{n!}{(n-k)! (n+1+k)!} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} = \frac{n!}{(2n+1)!} \sum_{k \geq 0} \binom{2n+1}{n-k} = \\ &= \frac{n!}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = \frac{n!}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2} 2^{2n+1} \right) = \frac{n!}{(2n+1)!} 2^{2n} \end{aligned}$$

Príklad 2.2. Vypočítajte: $\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Riešenie: (*Laco*) Ak $n < 0$, potom aj $k < 0$ a všetky kombinačné čísla sú nulové, takže aj výsledná suma je nulová. Ak $n = 0$, tak jedine pre $k = 0$ obsahuje suma nenulový člen a je rovná 1. Ak $n > 0$, môžeme použiť binomickú vetu:

$$\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \frac{1}{2^n} (1+2)^n = \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

Príklad 2.3. Vypočítajte: $\sum_{k \geq n} \binom{k}{n} 2^{n-k}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Riešenie: (*Stanek*) Ak $n < 0$, dolný index v každom kombinačnom čísle je záporný a teda hodnota celej sumy je nula. Ďalej budeme predpokladať, že $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq n} \binom{k}{n} 2^{n-k} &= \sum_{n \leq k} \binom{k-n-k-1}{k-n} (-1)^{k-n} 2^{n-k} = \sum_{n \leq k} \binom{-n-1}{k-n} (-2)^{n-k} = \\ &= \left/ \begin{matrix} l = k-n \\ k = n+l \end{matrix} \right/ = \sum_{n \leq n+l} \binom{-n-1}{l+n-n} (-2)^{n-l-n} = \sum_{0 \leq l} \binom{-n-1}{l} (-2)^{-l} = \\ &= \sum_{0 \leq l} \binom{-n-1}{l} \left(-\frac{1}{2} \right)^l = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{-n-1} = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Príklad 2.4. Vypočítajte: $\sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k k$.

Riešenie: (*Laco*)

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k k &= \sum_k \frac{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k k = -\frac{1}{4} \sum_k \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k-1} \binom{-\frac{3}{2}}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Príklad 2.5. Vypočítajte: $\sum_{l \geq 2} (-1)^l \binom{\lfloor e^m \rfloor}{m-l}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Príklad 2.6. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Riešenie: (*Stanek*)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2} \frac{(k+1)(n+1)(n+2)}{(k+1)(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} (k+1) = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} (k+2) - \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+2) \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+1}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+2}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+2) \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+2} \binom{n+2}{k} \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+2) \left(2^{n+1} - \binom{n+1}{0} \right) - \left(2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1} \right) \right) = \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Príklad 2.7. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Riešenie: (*Stanek*)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^2 &= n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} k (-1)^k = n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (k-1) (-1)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k \right) = \\ &= \left/ \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} (-1)^k = 0 \text{ pre } n \geq 2 \right/ = n(n-1) \sum_{k=0}^n \binom{n-2}{k-2} (-1)^k = 0 \text{ pre } n \geq 3 \end{aligned}$$

Pre $n \geq 3$ je suma rovná 0, pre $n \in \{0, 1, 2\}$ jej hodnotu spočítame dosadením.

Príklad 2.8. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Riešenie: (*Laco*) Najprv upravím podmienku, m nemôže byť 0, inak by zlomok v sume nebol definovaný, takže ďalej už uvažujem len $m > 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k} &= \left/ x = \frac{n+1}{m} \right/ = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k = \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k - \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} (-1)^{n+1} \right) = \\ &= (-1)^n (1-x)^{n+1} - (-1)^{2n+1} x^{n+1} = (-1)^n (1-x)^{n+1} + x^{n+1} = \\ &= (-1)^n \left(\frac{m-n-1}{m} \right)^{n+1} + \left(\frac{n+1}{m} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Príklad 2.9. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 1} \frac{n+1}{k} \binom{n+1}{2k-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 2.10. Vypočítajte: $\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \geq n \geq 0$.

Riešenie: (Stanek)

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k &= \left/ \binom{n}{p} \binom{p}{2n-k} = \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k-2n+p} \right/ = \\ &= \binom{n}{p} \sum_k \binom{p}{2n-k} \binom{2m+k-k+3p-1}{2m+k} = \text{/konvolúcia/} \\ &= \binom{n}{p} \binom{2m+4p-1}{2n+2m} \end{aligned}$$

Časť 3. Binomické koeficienty 2

Príklad 3.1. Vypočítajte: $\sum_{k=n}^{n^2} H_{k-1} \binom{k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 3.2. Vypočítajte: $\sum_{1 \leq k, j \leq n} \binom{k+j+2007}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 3.3. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{n-k} (k+1)$.