Zbierka úloh z kombinatorickej analýzy

Časť 1. Example

Príklad 1.1. Vypočítajte sumu $\sum_{k=0}^{n} k$.
Riešenie: *(autor)*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} n-k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Príklad 1.2. dalsi priklad
Riešenie: *(iny autor)* dalsie riesenie

Časť 2. Binomické koeficienty

Príklad 2.1. Vypočítajte: $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\frac{k!}{(n+1+k)!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\frac{k!}{(n+1+k)!} &= \sum_{k\geq 0}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{k!}{(n+1+k)!} = \sum_{k\geq 0}\frac{n!}{(n-k)!\,(n+1+k)!} = \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{n!}{(n-k)!\,(n+1+k)!}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} = \frac{n!}{(2n+1)!}\sum_{k\geq 0}\binom{2n+1}{n-k} = \\ &= \frac{n!}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = \frac{n!}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}2^{2n+1}\right) = \frac{n!}{(2n+1)!}2^{2n}\end{aligned}$$

Príklad 2.2. Vypočítajte: $\sum_{k\leq n}\binom{n}{k}2^{k-n}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Laco)* Ak $n < 0$, potom aj $k < 0$ a všetky kombinačné čísla sú nulové, takže aj výsledná suma je nulová. Ak $n =$, tak jedine pre $k = 0$ obsahuje suma nenulový člen a je rovná 1. Ak $n > 0$, môžeme použiť binomickú vetu:

$$\sum_{k\leq n}\binom{n}{k}2^{k-n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \frac{1}{2^n}(1+2)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Príklad 2.3. Vypočítajte: $\sum_{k\geq n}\binom{k}{n}2^{n-k}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Riešenie: *(Stanek)* Ak $n < 0$, dolný index v každom kombinačnom čísle je záporný a teda hodnota celej sumy je nula. Ďalej budeme predpokladať, že $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq n}\binom{k}{n}2^{n-k} &= \sum_{n\leq k}\binom{k-n-k-1}{k-n}(-1)^{k-n}2^{n-k} = \sum_{n\leq k}\binom{-n-1}{k-n}(-2)^{n-k} = \\ &= \left|\begin{array}{c} l = k-n \\ k = n+l \end{array}\right| = \sum_{n\leq n+l}\binom{-n-1}{l+n-n}(-2)^{n-l-n} = \sum_{0\leq l}\binom{-n-1}{l}(-2)^{-l} = \\ &= \sum_{0\leq l}\binom{-n-1}{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^l = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-n-1} = 2^{n+1}\end{aligned}$$

Príklad 2.4. Vypočítajte: $\sum_k \binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k k$.

Príklad 2.5. Vypočítajte: $\sum_{l\geq 2}(-1)^l\binom{\lfloor l^m \rfloor}{m-l}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Príklad 2.6. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Príklad 2.7. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Príklad 2.8. Vypočítajte: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.
Riešenie: *(Laco)*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k} &= \left| x = \frac{n+1}{m} \right| = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k = \\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k (-1)^k - \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} (-1)^{n+1} \right) = \\
&= (-1)^n (1-x)^{n+1} - (-1)^{2n+1} x^{n+1} = (-1)^n (1-x)^{n+1} + x^{n+1} = \\
&= (-1)^n \left(\frac{m-n-1}{m} \right)^{n+1} + \left(\frac{n+1}{m} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Príklad 2.9. Vypočítajte: $\sum_{k \geq 1} \frac{n+1}{k} \binom{n+1}{2k-1}$, $n\mathbb{N}$.

Príklad 2.10. Vypočítajte: $\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $m \geq n \geq 0$.
Riešenie: *(Stanek)*

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k+2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k &= \left| \binom{n}{p} \binom{p}{2n-k} = \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k-2n+p} \right| = \\
&= \binom{n}{p} \sum_k \binom{p}{2n-k} \binom{2m+k-k+3p-1}{2m+k} = |\text{konvolúcia}| \\
&= \binom{n}{p} \binom{2m+4p-1}{2n+2m}
\end{aligned}$$